В. Л. Файншмидт

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОГО АРГУМЕНТА

- **Дифференциальное исчисление**
- **Интегральное исчисление**
- **Ряды**

УЧЕБНИК

bhv®

В. Л. Файншмидт

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ и ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОГО АРГУМЕНТА

Рекомендовано Научно-методическим советом по математике вузов
Северо-Запада РФ в качестве учебника для студентов инженерных специальностей
технических вузов

Санкт-Петербург

«БХВ-Петербург»

2006

УДК 519.6(075.8)
ББК 22.143я73
Ф12

Файншмидт В. Л.

Ф12 Дифференциальное и интегральное исчисление функций одного аргумента. — СПб.: БХВ-Петербург, 2006. — 224 с.: ил.

ISBN 5-94157-932-2

Учебник содержит основные сведения по дифференциальному и интегральному исчислению: функции, пределы, производные, интеграл, дифференциал, ряды. Основан на опыте многолетнего преподавания курса студентам технического вуза. Содержит большое число примеров приложения изучаемого математического аппарата к задачам физики и техники.

Для студентов инженерных специальностей технических вузов

УДК 519.6(075.8)
ББК 22.143я73

Группа подготовки издания:

Главный редактор	*Екатерина Кондукова*
Зам. главного редактора	*Татьяна Лапина*
Зав. редакцией	*Григорий Добин*
Компьютерная верстка	*Виктора Файншмидта*
Корректор	*Зинаида Дмитриева*
Дизайн серии	*Игоря Цырульникова*
Оформление обложки	*Елены Беляевой*
Зав. производством	*Николай Тверских*

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 26.05.06.
Формат $70\times100^{1}/_{16}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 18,06.
Тираж 1000 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 194354, Санкт-Петербург, ул. Есенина, 5Б.

Санитарно-эпидемиологическое заключение на продукцию
№ 77.99.02.953.Д.006421.11.04 от 11.11.2004 г. выдано Федеральной службой
по надзору в сфере защиты прав потребителей и благополучия человека.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12

ISBN 5-94157-932-2

Часть 1. Дифференциальное исчисление

1.1. Множества

Первичным понятием в курсе математики является множество. Как и всякому первичному понятию, дать определение множеству невозможно. Мы будем считать, что всем ясно, что такое множество.

Объекты, из которых состоит множество, называют элементами множества. Если A - некоторое множество и a - какой-нибудь элемент этого множества, то пишут $a \in A$. Если элемент b не содержится в множестве A, то пишут $b \notin A$.

Мы будем нередко пользоваться символом $\forall$, который следует читать как всякий, любой, каждый. Например, запись $\forall a \in A$ читается так: всякое a из A. Так же часто будет использоваться обозначение $\exists$, которое читается как существует, имеется, найдется. Поэтому можно писать $\exists a \in A$ вместо слов "в множестве A существует элемент a". Заметим, что символы $\forall$ и $\exists$ называют, соответственно, кванторами общности и существования.

Наиболее часто вначале мы будем встречаться с множествами, состоящими из вещественных чисел. При этом будем пользоваться такими обозначениями:

$R = (-\infty, +\infty)$ - множество всех вещественных чисел;

Z - множество всех целых чисел;

N - множество всех целых положительных чисел;

$[a, b]$ - множество всех чисел, которые не меньше a и не больше, чем b (такое множество называют замкнутым промежутком, или сегментом);

(a, b) - множество всех чисел, которые больше a и меньше b (такое множество называют открытым промежутком, или интервалом);

$[a, b)$ - множество всех чисел, которые не меньше a, но меньше b (промежуток, полуоткрытый справа);

$(a, b]$ - множество всех чисел, которые больше a, но не больше b (промежуток, полуоткрытый слева);

$[a, +\infty)$ - множество всех чисел, которые не меньше a;

$(-\infty, b]$ - множество всех чисел, которые не больше b;

$\varnothing$ - пустое множество, то есть множество, не содержащее ни одного элемента.

Для множеств можно ввести операции сложения и умножения.

Суммой или объединением множеств A и B называют множество, содержащее все элементы A и все элементы B. Сумму принято обозначать символом $A \bigcup B$.

Если множества A и B не имеют общих элементов, то сумму обозначают знаком $+$, то есть пишут $A + B$.

Произведением или пересечением множеств A и B называют множество, содержащее все те элементы, которые принадлежат и A, и B. Произведение обозначается $A \bigcap B$ или просто AB.

Примеры.

1. $[1, 4] \bigcup [2, 5) = [1, 5)$;
2. $[2, 6) + [6, 8] = [2, 8]$;
3. $[2, 6) \bigcap [6, 8] = \varnothing$;
4. $[1, 7) \bigcap (4, 9) = (4, 7)$.

Если все элементы множества A принадлежат множеству B, то говорят, что A содержится в B, и пишут $A \subset B$ или $B \supset A$. Например, $N \subset Z$, $[2, 4] \subset (1, 10)$.

Нам понадобятся еще понятия, связанные с множествами. Именно, всякий интервал $(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_2)$, содержащий точку x, называют окрестностью этой точки. Если из этого интервала исключить точку x, то получится множество $(x - \varepsilon_1, x) + (x, x + \varepsilon_2)$, которое называется проколотой окрестностью точки. Окрестность вида $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ называют ε-окрестностью точки x.

1.2. Границы числовых множеств

Число M называется верхней границей числового множества X, если для $\forall x \in X$ выполняется неравенство $x \leqslant M$.

Число m называется нижней границей числового множества X, если для $\forall x \in X$ выполняется неравенство $x \geqslant M$.

Рассмотрим, например, интервал $(4, 7)$. В качестве его верхней границы можно взять число 10, поскольку все числа из $(4, 7)$ не превосходят 10. Ясно, что верхней границей может быть и 7,5. Очевидно, что допустимо принять за верхнюю границу число 7. Заметим, кстати, что никакое число, меньшее семи, быть верхней границей не может. Ясно, что в качестве нижней границы интервала можно взять 4 и любое число, меньшее, чем 4.

Нетрудно понять, что если множество имеет одну верхнюю границу, то оно имеет бесконечно много таких границ. То же самое можно сказать и о нижних границах. Наименьшая из всех верхних границ множества X называется точной верхней границей множества, или супремумом, и обозначается $\sup X$. Наибольшая из всех нижних границ - точной нижней границей, или инфимумом, и обозначается $\inf X$.

Пусть $M^* = \sup X$. Возьмем какое-нибудь число $\varepsilon > 0$. Тогда число $M^* - \varepsilon$ окажется меньше M^*, а потому оно не может быть верхней границей множества X. Это значит, что в множестве X найдется такой элемент x, для которого будет справедливым неравенство $x > M^* - \varepsilon$.

Итак, если $M^* = \sup X$, то для любого $\varepsilon > 0$ в множестве X найдется элемент x такой, что $x > M^* - \varepsilon$.

Аналогичное утверждение справедливо и для $\inf X$.

Заметим, что точные границы множества могут принадлежать ему, а могут и не принадлежать. Например, множество $[3, 6)$ содержит свою точную нижнюю границу 3, но не содержит точную верхнюю границу 6.

В дальнейшем множества, ограниченные сверху и снизу, мы будем называть ограниченными.

Если $X \subset [m, M]$, то очевидно, что m - нижняя и M - верхняя границы X, то есть множество, лежащее в некотором промежутке, ограничено.

Ясно также, что если неравенство $|x| \leqslant A$, где A - некоторое число, выполняется для $\forall x \in X$, то множество X ограничено.

1.3. Понятие функции

Пусть имеется два множества X и Y. Если каждому элементу x множества X ставится в соответствие по некоторому правилу один определенный элемент y множества Y, то говорят, что задана функция, отображающая X в Y. При этом X называют областью задания, а Y - областью значений функции.

Если правило соответствия обозначить через f, то запись $y = f(x)$ означает, что по этому правилу элементу x отвечает элемент y.

Таким образом, функция считается заданной, если указаны:

а) область задания X;

б) правило f, по которому каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие значение $y = f(x) \in Y$.

Из сказанного ясно, что равенства $y = x^2,\ x \in Z$ и $y = x^2,\ x \in R_1$ задают две различные функции, отличающиеся своими областями задания.

Мы вначале будем рассматривать функции, у которых аргумент x и функция $y = f(x)$ принимают только вещественные значения. Для таких функций мы введем понятие естественной области задания. Именно, естественной областью задания функции $y = f(x)$ будем называть множество всех тех вещественных x, при которых оказываются вещественными значения $y = f(x)$.

Примеры.

1. Для функции $y = \sqrt{x}$ естественной областью задания является множество $[0, +\infty)$.

2. Функция $y = \dfrac{1}{x+1}$ существует при всех $x \neq -1$. Поэтому ее естественную область задания можно записать так: $(-\infty, -1) + (-1, +\infty)$.

1.4. Элементарные функции

Мы называем основными элементарными функции, которые задаются такими формулами:

$$y = x^\mu,\ \ y = a^x,\ \ y = \log_a x,\ \ y = \sin x,\ \ y = \cos x,\ \ y = \operatorname{tg} x,\ \ y = \operatorname{ctg} x,$$

$$y = \arcsin x,\ \ \ y = \arccos x,\ \ \ y = \operatorname{arctg} x,\ \ \ y = \operatorname{arcctg} x.$$

Остановимся поподробнее на каждой из этих функций, чтобы разобраться с их естественными областями задания.

1. Степенная функция $y = x^\mu$.

Естественная область задания этой функции зависит от того, какое значение имеет μ.

Если, например, μ - целое положительное, то y принимает вещественные значения при любых вещественных значениях x. Значит, естественной областью задания в этом случае оказывается R.

Если μ - целое отрицательное, то y не существует при $x = 0$ и принимает вещественные значения при всех остальных вещественных x. Следовательно, естественная область задания в этом случае имеет вид $(-\infty, 0) + (0, +\infty)$.

При $\mu = \dfrac{1}{2}$ естественной областью задания оказывается $[0, +\infty)$, а при $\mu = \dfrac{1}{3}$ естественной областью задания оказывается R.

Мы не будем подробно рассматривать все возможные случаи.

2. Показательная функция $a^x \quad (a > 0)$.

Так как $a > 0$, то функция вещественна при любом $x \in R$. Поэтому ее естественной областью задания является R.

3. Логарифмическая функция $y = \log_a x \quad (a > 0,\ a \neq 1)$.

Поскольку у любого положительного числа имеется вещественный логарифм по любому положительному основанию, а отрицательные числа вещественных логарифмов не имеют, постольку естественной областью задания логарифмической функции является полубесконечный промежуток $(0, +\infty)$.

4. Тригонометрические функции $y = \sin x$ **и** $y = \cos x$.

Обе эти тригонометрические функции, как известно, существуют и принимают вещественные значения при всех $x \in R$. Следовательно, R - естественная область задания этих функций. При этом областью значений обеих функций является промежуток $[-1, 1]$.

5. Тригонометрические функции $y = \operatorname{tg} x$ **и** $y = \operatorname{ctg} x$.

Функция $y = \operatorname{tg} x$ существует и имеет вещественные значения при любых вещественных x, кроме $x = k\pi \pm \dfrac{\pi}{2}, \quad k \in Z$. Поэтому сумма всех интервалов $(k\pi - \dfrac{\pi}{2}, k\pi + \dfrac{\pi}{2}), \quad k \in Z$ является естественной областью задания функции $y = \operatorname{tg} x$.

Аналогичным образом, естественной областью задания функции $y = \operatorname{ctg} x$ оказывается сумма всех интервалов $(k\pi, (k+1)\pi), \quad k \in Z$. Заметим, что областью значений этих двух функций является множество всех вещественных чисел, то есть $(-\infty, +\infty)$.

6. Обратная тригонометрическая функция $y = \arcsin x$.

Напомним вначале, что арксинусом аргумента x называют такое число y из сегмента $[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$, у которого синус равен x.

Иначе говоря, равенство $y = \arcsin x$ означает, что $x = \sin y$, причем $y \in [-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$. Из этого становится ясно, что значения x могут изменяться от -1 до $+1$. Следовательно, естественной областью задания функции $y = \arcsin x$ является промежуток $[-1, 1]$. Заметим, что областью значений оказывается сегмент $[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}]$.

7. Обратная тригонометрическая функция $y = \arccos x$.

Арккосинусом аргумента x называют такое число y из сегмента $[0, \pi]$, у которого косинус равен x.

Другими словами, если $y = \arccos x$, то $x = \cos y$, а $y \in [0, \pi]$. Поэтому естественной областью задания функции $y = \arccos x$ является сегмент $[-1, 1]$, а областью значений – сегмент $[0, \pi]$.

8. Обратная тригонометрическая функция $y = \operatorname{arctg} x$.

Арктангенсом аргумента x называют такое число y из интервала $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, у которого тангенс равен x.

Это значит, что если $y = \operatorname{arctg} x$, то $x = \operatorname{tg} y$, причем $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Поскольку тангенс может быть любым вещественным числом, постольку естественной областью задания арктангенса является R. При этом областью значений оказывается интервал $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

9. Обратная тригонометрическая функция $y = \operatorname{arcctg} x$.

Арккотангенсом аргумента x называют такое число y из промежутка $(0, \pi)$, у которого котангенс равен x.

Так что если $y = \operatorname{arcctg} x$, то $x = \operatorname{ctg} y$, причем $y \in (0, \pi)$. Как известно, котангенс может принимать любые вещественные значения. Поэтому естественной областью задания арккотангенса является R. Областью значений $y = \operatorname{arcctg} x$ является интервал $(0, \pi)$.

Мы рассмотрели 11 основных элементарных функций.

Введем теперь понятие сложной функции. Пусть на промежутке (a, b) задана функция $y = f(x)$, такая, что $y \in (c, d)$, а на промежутке (c, d) задана функция $z = g(y)$, у которой $z \in (l, m)$. Тогда можно построить функцию $z = g(f(x))$, отображающую промежуток (a, b) в промежуток (l, m). Такая функция называется сложной функцией (или суперпозицией) функций f и g. Например, исходя из функций $y = x^2, \quad x \in R$ и $z = \sin y, \quad y \in R$, можно построить сложную функцию $z = \sin(x^2)$.

В дальнейшем всякую функцию, которая образована из основных элементарных функций с помощью четырех арифметических действий или суперпозиций, мы будем называть элементарной функцией.

Приведем некоторые примеры элементарных функций.

1. Функция

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0, \quad x \in R.$$

называется многочленом (или полиномом) степени n.

2. Функция

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + ... + b_1 x + b_0}{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0},$$

являющаяся частным двух многочленов, называется рациональной дробью или функцией, рационально зависящей от x. Очевидно, что естественной областью задания рациональной дроби является вся вещественная ось, за исключением тех точек x, в которых знаменатель $P_n(x)$ равен нулю.

1.5. Понятие предела

Начнем с некоторых наводящих рассуждений. На рис. 1 приведен график функции $y = f(x)$, заданной на полубесконечном промежутке $[a, +\infty)$.

Видно, что с ростом значений аргумента x значения функции приближаются к величине l, так что $|f(x) - l|$ имеет тенденцию к уменьшению. Мы хотим описать этот процесс приближения. Для этого заметим следующее: если мы зададим какое-нибудь положительное число ε, то, начиная с некоторого x_0, значения $f(x)$ будут отличаться от l меньше, чем на взятое нами ε. Другими словами, при всех $x > x_0$ будет выполняться неравенство $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$.

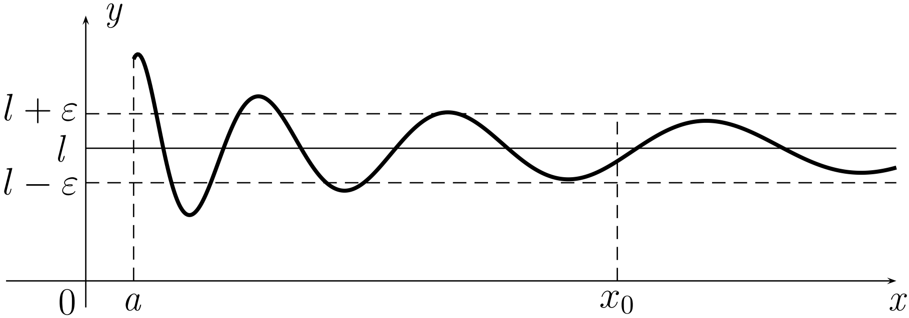

Рис. 1. Иллюстрация к понятию предела

Сделанное замечание приводит к такому определению предела:

Определение. Пусть функция f задана на промежутке $[a, +\infty)$. Число l называется пределом $f(x)$ при x, стремящемся к $+\infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое x_0, что для всех x, удовлетворяющих условию $x > x_0$, выполняется неравенство $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$ или, что то же, $|f(x) - l| < \varepsilon$.

В этом случае мы будем писать:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \quad \text{или} \quad f(x) \to l \quad (x \to +\infty).$$

Используя введенные нами кванторы, определение предела можно записать несколько короче.

Определение. Число l называется пределом $f(x)$ при x, стремящемся к $+\infty$, если для $\forall\varepsilon > 0$ $\exists x_0$ такое, что при $\forall x > x_0$ выполняется неравенство $|f(x) - l| < \varepsilon$ или, что то же, $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$.

Такого рода сокращенную запись мы будем использовать и дальше.

Пример. Пусть функция $f(x) = \dfrac{x^2 + \sin x}{x^2 - 1}$ задана на промежутке $[2, +\infty)$. Покажем, что ее предел при $x \to +\infty$ равен 1. Для этого возьмем какое-нибудь число $\varepsilon > 0$ и напишем неравенство

$$1 - \varepsilon < \frac{x^2 + \sin x}{x^2 - 1} < 1 + \varepsilon.$$

Нетрудно видеть, что это неравенство равносильно такому

$$-\varepsilon < \frac{\sin x + 1}{x^2 - 1} < \varepsilon.$$

Так как $\sin x + 1 \geqslant 0$ и $x^2 - 1 > 0$, то в этом двойном неравенстве средняя часть не меньше нуля. Поэтому неравенство

$$-\varepsilon < \frac{\sin x + 1}{x^2 - 1}$$

выполняется при любых значениях x.

Обратимся к неравенству

$$\frac{\sin x + 1}{x^2 - 1} < \varepsilon.$$

Поскольку $\sin x + 1 \leqslant 2$, постольку наше неравенство будет заведомо выполнено, если

$$\frac{2}{x^2 - 1} < \varepsilon,$$

то есть

$$\frac{2}{\varepsilon} < x^2 - 1$$

или

$$x > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon} + 1}.$$

Таким образом, для $\forall \varepsilon > 0$ существует такое число $x_0 = \sqrt{\dfrac{2}{\varepsilon} + 1}$, что при всех $x > x_0$ выполняется неравенство

$$1 - \varepsilon < \frac{x^2 + \sin x}{x^2 - 1} < 1 + \varepsilon.$$

В соответствии с данным нами определением, это означает, что

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + \sin x}{x^2 - 1} = 1.$$

Если функция $f(x)$ задана на промежутке $(-\infty, b]$, то для нее можно ввести понятие предела при $x \to -\infty$.

Определение. Число l называют пределом $f(x)$ при $x \to -\infty$, если для $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists x_0$ такое, что для $\forall x < x_0$ выполняется неравенство $|f(x) - l| < \varepsilon$ или, что то же, $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$.

В этом случае пишут

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \;\text{ или }\; f(x) \to l \;\; (x \to -\infty).$$

Заметим, что в литературе пределы $f(x)$ при $x \to \pm\infty$ часто обозначают символами $f(+\infty)$ и $f(-\infty)$.

Если функция $f(x)$ задана на конечном промежутке, например, (a, b), то для нее можно определить предел при x, стремящемся к a или b. Например,

Определение. Число l называют пределом $f(x)$ при x, стремящемся к a справа, если для $\forall \varepsilon > 0$ найдется в промежутке (a, b) такое число x_0, что при $\forall x \in (a, x_0)$, будет выполняться неравенство $|f(x) - l| < \varepsilon$ или, что то же, $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$.

В этом случае мы пишем

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = l \;\text{ или }\; f(x) \to l \;\; (x \to a + 0).$$

Так как $x_0 > a$, то его можно записать в виде $x_0 = a + \delta$, где $\delta > 0$. Используя такую запись, мы можем сформулировать определение предела следующим образом:

Определение. Число l называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a+0$, если для $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0$ такое, что при $\forall x \in (a, a+\delta)$ будет выполняться неравенство $|f(x) - l| < \varepsilon$ или $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$.

Таким же образом вводится понятие предела $f(x)$ при x, стремящемся к b слева. Мы не будем такое определение формулировать, советуя читателю сделать это самостоятельно. Пишут так:

$$\lim_{x \to b-0} f(x) = l \;\; \text{или} \;\; f(x) \to l \;\; (x \to b-0).$$

Нередко правосторонние и левосторонние пределы обозначают соответственно $f(a+0)$ и $f(b-0)$.

Пусть функция $f(x)$ задана в области $(a, c) + (c, b)$. Если существуют два равных предела

$$\lim_{x \to c-0} f(x) = \lim_{x \to c+0} f(x) = l,$$

то говорят, что l является пределом $f(x)$ при $x \to c$, и пишут так:

$$\lim_{x \to c} f(x) = l \;\; \text{или} \;\; f(x) \to l \;\; (x \to c).$$

Заметим, что используя язык (ε, δ), определение для этого варианта можно сформулировать так:

Определение. Число l называют пределом $f(x)$ при $x \to c$, если для $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0$ такое, что при $\forall x \in (c-\delta, c) + (c, c+\delta)$ выполняется неравенство $|f(x) - l| < \varepsilon$ или, что то же, $l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$.

Итак, мы выяснили, в чем заключается понятие конечного предела. Мы дополним сказанное понятием бесконечного предела.

Пусть $f(x)$ задана на промежутке $[a, +\infty)$.

Определение. Мы будем говорить, что при $x \to +\infty$ функция $f(x)$ стремится к $+\infty$, если для $\forall A \;\; \exists x_0$ такое, что при $\forall x > x_0$ выполняется неравенство $f(x) > A$.

В этом случае мы будем писать

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \;\; \text{или} \;\; f(x) \to +\infty \;\; (x \to +\infty).$$

Существо этого определения не сложное: функция $f(x)$ с ростом x может стать и оставаться больше любого заданного нами числа.

Далее, мы будем считать, что при $x \to +\infty$ функция $f(x)$ стремится к $-\infty$, если для $\forall A \;\; \exists x_0$ такое, что при $\forall x > x_0$ выполняется неравенство $f(x) < A$.

Естественно, что соответствующая запись имеет вид:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \quad \text{или} \quad f(x) \to -\infty \quad (x \to +\infty).$$

Если $|f(x)| \to +\infty$ при $x \to +\infty$, то говорят, что функция $f(x)$ стремится к ∞.

Аналогично определяются бесконечные пределы при $x \to c \pm 0$ и при $x \to c$.

Если функция стремится к $\pm\infty$ или к ∞, то ее называют бесконечно большой при соответствующем стремлении x.

Пример. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{1}{x}$ в ее естественной области задания, то есть при $x \in (-\infty, 0) + (0, +\infty)$. Нетрудно показать, что имеют место такие равенства:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x\to-0} \frac{1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x\to+0} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x\to0} \frac{1}{x} = \infty.$$

Рекомендуем проверить это самостоятельно, исходя из данных выше определений.

Теперь нам нужно понять, как фактически пределы находятся и какими свойствами обладают функции, имеющие пределы. Для этого мы рассмотрим один частный случай пределов.

1.6. Бесконечно малые функции

Определение. Если $f(x) \to 0$ при $x \to c$, то $f(x)$ называют бесконечно малой при $x \to c$.

Полагая в данном выше определении предела $l = 0$, можно сказать так: если для $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0$ такое, что при $\forall x \in (c - \delta, c) + (c, c + \delta)$ выполняется неравенство $|f(x)| < \varepsilon$ или, что то же, $-\varepsilon < f(x) < \varepsilon$, то функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x \to c$.

Аналогичным образом можно определить бесконечно малую при x, стремящемся к c справа или слева, или к $\pm\infty$.

Если сравнить общее определение предела с определением бесконечно малой, то нетрудно заметить, что $f(x) \to l$ тогда и только тогда, когда разность $f(x) - l \to 0$, то есть является бесконечно малой. Положим $\alpha(x) = f(x) - l$. Тогда $f(x) = l + \alpha(x)$. Таким образом, справедлива:

Теорема 1. Функция $f(x)$ имеет своим пределом l тогда и только тогда, когда $f(x) = l + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая.

Приведем еще три теоремы, описывающие свойства бесконечно малых функций.

Теорема 2. Сумма, разность и произведение двух бесконечно малых есть бесконечно малая.

Доказательство. Будем для определенности считать, что $x \to +\infty$ (остальные случаи рассматриваются так же). Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются бесконечно малыми при $x \to +\infty$. Тогда, в соответствии с определением бесконечно малой, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое x_0, что при $\forall x > x_0$ будут выполняться неравенства $|\alpha(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ и $|\beta(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Отсюда получаем

$$|\alpha(x) \pm \beta(x)| \leqslant |\alpha(x)| + |\beta(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это означает, что $\alpha(x) \pm \beta(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

Подобным образом доказывается, что $\alpha(x)\beta(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

Следствие. Сумма и произведение конечного числа бесконечно малых есть бесконечно малая.

Мы не будем доказывать следствие, рекомендуя читателю сделать это самостоятельно.

Теорема 3. Произведение бесконечно малой на ограниченную функцию есть бесконечно малая.

Доказательство. Как и выше, будем для определенности считать, что функции $\alpha(x)$ и $f(x)$ заданы на $[a, +\infty)$, причем во всей области задания функция $f(x)$ ограничена, то есть $|f(x)| < M$, где M - некоторое положительное число, а $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. В силу определения бесконечно малой, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое x_0, что при $\forall x > x_0$ будет выполняться неравенство $|\alpha(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M}$. В таком случае, при тех же значениях x окажется $|\alpha(x)f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{M}M = \varepsilon$. Это означает, что произведение $\alpha(x)f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$.

Теорема 4. Функция является бесконечно малой тогда и только тогда, когда обратная ей величина оказывается бесконечно большой.

Справедливость этой теоремы почти очевидна, так как неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$ выполняется тогда и только тогда, когда оказывается $|\dfrac{1}{\alpha(x)}| > A = \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Если $x \to 0$, то $|x|^{\mu} \to 0$, если $\mu > 0$. Действительно, возьмем какое-нибудь $\varepsilon > 0$ и положим $\delta = \varepsilon^{\frac{1}{\mu}}$. Тогда, очевидно, при $|x| < \varepsilon^{\frac{1}{\mu}}$

будет $|x|^\mu < \varepsilon$. Это означает, что $|x|^\mu \to 0$ при $x \to 0$.

Аналогичным образом нетрудно показать, что если $\mu > 0$, то функция $\dfrac{1}{x^\mu} \to 0$ при $x \to +\infty$.

Пусть $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, где $x \in (0, +\infty)$. Так как $|\sin x| \leqslant 1$, а $\dfrac{1}{x} \to 0$ при $x \to +\infty$, то $f(x) = \dfrac{\sin x}{x} \to 0$ при $x \to +\infty$.

1.7. Основные теоремы о пределах

Теорема 1 (арифметические операции с пределами). Если

$$\lim_{x\to c} f_1(x) = l_1 \quad \text{и} \quad \lim_{x\to c} f_2(x) = l_2,$$

то

$$\lim_{x\to c}(f_1(x) + f_2(x)) = l_1 + l_2, \quad \lim_{x\to c}(f_1(x) - f_2(x)) = l_1 - l_2,$$

$$\lim_{x\to c} f_1(x) f_2(x) = l_1 l_2, \quad \lim_{x\to c} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{l_1}{l_2} \quad (l_2 \neq 0).$$

Доказательство. Все четыре утверждения доказываются одним и тем же способом. Поэтому мы рассмотрим лишь одно из них. В силу теоремы 1 предыдущего раздела, если $f_1(x) \to l_1$ и $f_2(x) \to l_2$, то $f_1(x) = l_1 + \alpha_1(x)$ и $f_2(x) = l_2 + \alpha_2(x)$, где $\alpha_1(x) \to 0$ и $\alpha_2(x) \to 0$ при $x \to c$. Отсюда $f_1(x)f_2(x) = l_1 l_2 + l_1\alpha_2(x) + l_2\alpha_1(x) + \alpha_1(x)\alpha_2(x)$. Из предыдущих теорем следует, что $l_1\alpha_2(x) + l_2\alpha_1(x) + \alpha_1(x)\alpha_2(x) \to 0$ при $x \to c$. Таким образом, $f_1(x)f_2(x)$ отличается от $l_1 l_2$ на бесконечно малую при $x \to c$. Значит, $f_1(x)f_2(x) \to l_1 l_2$ при $x \to c$. Утверждение доказано.

Пример 1. Найти

$$\lim_{x\to 2}(x^2 + x)(x^3 - 4).$$

В соответствии с утверждением теоремы о пределе произведения имеем $x^2 \to 4$ и $x^3 \to 8$ при $x \to 2$. Далее, из утверждений о пределе суммы и разности получаем $x^2 + x \to 6$ и $x^3 - 4 \to 4$ при $x \to 2$. Поэтому оказывается, что

$$\lim_{x\to 2}(x^2 + x)(x^3 - 4) = 6 * 4 = 24.$$

Обычно такие подробные рассуждения никто не записывает, а просто в написанное выражение подставляют предельные значения аргумента и проводят соответствующие арифметические операции, если они допустимы.

Пример 2.

$$\lim_{x\to 4}\frac{2x^3-x^2-5x-2}{3x^2+2x+4}=\frac{128-16-20-2}{48+8+4}=\frac{3}{2}.$$

Пример 3.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+2x-15}{2x^2+x-21}.$$

При $x=3$ числитель и знаменатель написанной дроби равны нулю. Поэтому применить утверждение о пределе частного нельзя. Однако, поскольку $x=3$ является корнем числителя и корнем знаменателя, постольку числитель и знаменатель должны содержать множитель $x-3$. Действительно, $x^2+2x-15=(x-3)(x+5)$ и $2x^2+x-21=(x-3)(2x+7)$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+2x-15}{2x^2+x-21}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+5)}{(x-3(2x+7)}=\lim_{x\to 3}\frac{x+5}{2x+7}=\frac{8}{13}.$$

Пример 4.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+4x^2+6}{2x^3+2x-1}.$$

Здесь невозможно в дробь подставить предельное значение x, так как оно не существует. Поэтому преобразуем дробь, разделив все ее члены на x^3. Получим

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+4x^2+6}{2x^3+2x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{4}{x}+\frac{6}{x^3}}{2+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}}=\frac{1}{2},$$

поскольку дроби $\dfrac{4}{x}$, $\dfrac{6}{x^3}$, $\dfrac{2}{x^2}$, $\dfrac{1}{x^3}$ являются бесконечно малыми при $x\to+\infty$.

Теорема 2 (об ограниченности функции, имеющей конечный предел). Если функция $f(x)$ имеет конечный предел при $x\to c$, то она ограничена в некоторой окрестности точки c.

Доказательство. Пусть $f(x)\to l$ при $x\to c$. Возьмем $\varepsilon=1$. В соответствии с определением предела, для этого $\varepsilon=1$ найдется такое $\delta>0$, что при $\forall x\in(c-\delta,c)+(c,c+\delta)$ будет выполняться неравенство $l-1<f(x)<l+1$. Значит, $f(x)$ ограничена в δ-окрестности точки c. Теорема доказана.

Теорема 3 (сохранение знака функции, имеющей предел). Если функция $f(x)$ имеет положительный предел l при $x\to c$, то она будет положительна в некоторой окрестности точки c.

Доказательство. Зная, что $l > 0$, возьмем $\varepsilon = \frac{l}{2}$. Тогда найдется такое $\delta > 0$, что при $\forall x \in (c-\delta, c) + (c, c+\delta)$ будет выполняться неравенство $\frac{l}{2} < f(x) < \frac{3l}{2}$. Так как $\frac{l}{2} > 0$, то и $f(x) > 0$ во всех точках δ-окрестности точки c. Теорема доказана.

Теорема 4 (предельный переход в неравенстве). Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют общую область задания и $f_1(x) \leqslant f_2(x)$. Тогда, если $f_1(x) \to l_1$ и $f_2(x) \to l_2$ при $x \to c$, то $l_1 \leqslant l_2$.

Доказательство. Допустим обратное, что $l_2 < l_1$, и возьмем положительное ε таким, чтобы выполнялось неравенство $l_2 + \varepsilon < l_1 - \varepsilon$. Для этого ε найдется такое $\delta > 0$, что при $\forall x \in (c-\delta, c) + (c, c+\delta)$ будут выполняться неравенства $l_1 - \varepsilon < f_1(x) < l_1 + \varepsilon$ и $l_2 - \varepsilon < f_2(x) < l_2 + \varepsilon$. Сравнивая последние два неравенства и учитывая, что $l_2 + \varepsilon < l_1 - \varepsilon$, видим, что $f_2(x) < f_1(x)$. Это неравенство противоречит условию теоремы. Значит, наше предположение о том, что $l_2 < l_1$, неверно. Следовательно, верно противоположное неравенство $l_1 \leqslant l_2$. Теорема доказана.

1.8. Сравнение функций

Определение. Если $\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$ при $x \to c$, то говорят, что функции $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны при $x \to c$.

Эквивалентность функций обозначают так: $f(x) \sim g(x) \quad (x \to c)$.

Нетрудно понять, что вблизи точки c значения эквивалентных функций $f(x)$ и $g(x)$ почти одинаковы.

Пример.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0}{a_n x^n} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} (1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + ... + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}) = 1.$$

Таким образом, многочлен при $x \to \infty$ эквивалентен своему старшему члену, то есть при очень больших значениях x величины всех слагаемых многочлена пренебрежимо малы по сравнению со старшим слагаемым.

Если две функции эквивалентны, то каждую из них можно называть главной частью другой функции.

Заметим, что если $\frac{f(x)}{g(x)} \to A$ при $x \to c$, то $f(x) \sim Ag(x) \quad (x \to c)$.

Определение. Если $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to 0$ при $x \to c$, то говорят, что $f(x)$ есть "о маленькое" от $g(x)$ при $x \to c$. В этом случае пишут так: $f(x) = o(g(x))\ \ (x \to c)$.

Запись $f(x) = o(g(x))$ $(x \to c)$ означает, что в окрестности точки c значения функции $f(x)$ пренебрежимо малы по сравнению со значениями функции $g(x)$.

Пример. Очевидно, $\dfrac{x^2}{x} \to 0$ при $x \to 0$. Значит, $x^2 = o(x)\ \ (x \to 0)$. Вместе с тем $\dfrac{x}{x^2} \to 0$ при $x \to \infty$. Следовательно, $x = o(x^2)\ \ (x \to \infty)$.

Докажем две теоремы, связанные со сравнением функций.

Теорема 1 (необходимое и достаточное условие эквивалентности). Условие $f(x) - g(x) = o(g(x))\ \ (x \to c)$ необходимо и достаточно для того, чтобы было $f(x) \sim g(x)\ \ (x \to c)$.

Доказательство. Пусть $f(x) \sim g(x)\ \ (x \to c)$, то есть $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to 1$ при $x \to c$. Тогда

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - 1 \right) = 1 - 1 = 0,$$

а это означает, что $f(x) - g(x) = o(g(x))\ \ (x \to c)$.

Теперь предположим, что $f(x) - g(x) = o(g(x))\ \ (x \to c)$. Тогда $f(x) = g(x) + o(g(x))\ \ (x \to c)$. Отсюда

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{g(x) + o(g(x))}{g(x)} = \lim_{x \to c} \left(1 + \frac{o(g(x))}{g(x)} \right) = 1 + 0 = 1,$$

то есть $f(x) \sim g(x)\ \ (x \to c)$. Теорема доказана.

Теорема 2 (замена числителя и знаменателя дроби эквивалентными). Предел дроби не изменится, если ее числитель и знаменатель заменить эквивалентными им функциями (главными частями).

Доказательство. Пусть $f_1 x) \sim f_2(x)$ и $g_1 x) \sim g_2(x)$ при $x \to c$. Тогда

$$\lim_{x \to c} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \frac{g_2(x)}{g_1(x)} = 1 \cdot \lim_{x \to c} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} \cdot 1 = \lim_{x \to c} \frac{f_2(x)}{g_2(x)}.$$

Теорема доказана.

Доказанная теорема позволяет во многих случаях заметно упростить нахождение пределов.

Пример. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^4 + 2x^3 - x^2 + 7}{7x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 9x + 2}.$$

Как было показано выше, при $x \to \infty$ многочлен эквивалентен своему старшему члену. Поэтому

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^4 + 2x^3 - x^2 + 7}{7x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 9x + 2} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x^4}{7x^4} = \frac{4}{7}.$$

1.9. Два признака существования предела

Теорема 1 (о сжатой функции). Пусть функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ имеют общую область задания и $f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant f_3(x)$. Тогда, если при $x \to c$ функции $f_1(x)$ и $f_3(x)$ имеют пределом число l, то и $f_2(x)$ имеет при $x \to c$ предел l.

Доказательство. Если $f_1(x) \to l$ и $f_3(x) \to l$ при $x \to c$, то, в соответствии с определением предела, для $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что при $\forall x \in (c - \delta, c) + (c, c + \delta)$ выполняются неравенства

$$l - \varepsilon < f_1(x) < l + \varepsilon \ \text{ и } \ l - \varepsilon < f_3(x) < l + \varepsilon.$$

Поскольку $f_2(x)$ заключено между $f_1(x)$ и $f_3(x)$, постольку и для $f_2(x)$ должно выполняться неравенство $l - \varepsilon < f_2(x) < l + \varepsilon$. Это означает, что $f_2(x) \to l$ при $x \to c$. Теорема доказана.

Прежде чем формулировать еще один признак существования предела, дадим некоторые определения.

Определение. Функция $f(x)$ называется возрастающей на промежутке $[a, b]$, если на этом промежутке из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

Определение. Функция $f(x)$ называется строго возрастающей на промежутке $[a, b]$, если на этом промежутке из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $f(x_1) < f(x_2)$.

Определение. Функция $f(x)$ называется убывающей на промежутке $[a, b]$, если на этом промежутке из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

Определение. Функция $f(x)$ называется строго убывающей на промежутке $[a, b]$, если на этом промежутке из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Как возрастающие, так и убывающие функции называют монотонными (соответственно, строго монотонными).

Теорема 2 (о монотонной ограниченной функции). Пусть функция $f(x)$ задана на промежутке $[a,c)$. Если она возрастает и ограничена сверху на этом промежутке, то она имеет предел при $x \to c-0$.

Доказательство. Так как $f(x)$ ограничена сверху, то ее значения на промежутке $[a,c)$ имеют точную верхнюю границуM_*. По свойству точной верхней границы, для $\forall \varepsilon > 0$ найдется такое значение $f(x)$, которое окажется больше, чем $M_* - \varepsilon$ (но будет не больше M_*). Обозначим это значение функции через $f(c-\delta)$, где $c-\delta$ - некоторая точка из $[a,c)$. Тогда мы можем написать: $M_* - \varepsilon < f(c-\delta) < M_*$. Так как $f(x)$ возрастает, то последнее неравенство будет выполнено и при $\forall x \in (c-\delta, c)$. Итак, для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что при всех $x \in (c-\delta, c)$ значения $f(x)$ отличаются от M_* меньше, чем на ε. Значит, M_* является пределом $f(x)$ при $x \to c-0$. Теорема доказана.

Заметим, что функция $f(x)$ не превосходит своего предела.

Естественно, что аналогичное утверждение остается в силе, если функция убывает и ограничена снизу, причем она оказывается не меньше своего предела.

В дальнейшем мы будем неоднократно использовать эти признаки.

1.10. Один важный предел

Докажем вначале, что при $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ справедливо неравенство

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Действительно, из рис. 2 хорошо видно, что площади нарисованных фигур удовлетворяют неравенству

$$S_{OAB} < S_{\text{сект}} < S_{OAC}.$$

Пусть $OA = OB = R$. Тогда, как легко увидеть, $S_{OAB} = \frac{1}{2}R^2 \sin x$, $S_{\text{сект}} = \frac{1}{2}R^2 x$, $S_{OAC} = \frac{1}{2}R^2 \operatorname{tg} x$. Поэтому неравенство принимает вид

$$\frac{1}{2}R^2 \sin x < \frac{1}{2}R^2 x < \frac{1}{2}R^2 \operatorname{tg} x.$$

Сокращая все части на $\frac{1}{2}R^2$, получаем

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

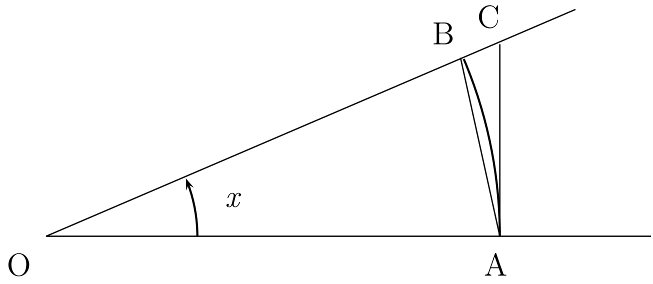

Рис. 2.

Неравенство доказано.

Разделим все части неравенства на $\sin x$. Получим

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

или

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

При $x \to +0$ будет $\cos x \to 1$. Таким образом, в нашем неравенстве левая часть равна 1, а правая стремится к 1 при $x \to +0$. В таком случае, в соответствии с теоремой о сжатой функции, $\dfrac{\sin x}{x} \to 1$ при $x \to +0$.

Если мы заменим x на $-x$, то дробь $\dfrac{\sin x}{x}$ не изменится. Поэтому $\dfrac{\sin x}{x} \to 1$ при $x \to -0$. Это дает нам право написать, что

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Мы нашли очень полезный для дальнейшего предел.

Получённое можно записать так: $\sin x \sim x \quad (x \to 0)$.

Пример 1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x} = 1.$$

Таким образом, $\operatorname{tg} x \sim x \quad (x \to 0)$.

Пример 2. Найдем

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Мы знаем, что $1-\cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2}$. Далее, $\sin\dfrac{x}{2}\sim\dfrac{x}{2}$ при $x\to 0$. Поэтому $\sin^2\dfrac{x}{2}\sim\dfrac{x^2}{4}$, а $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$ при $x\to 0$. Теперь, заменяя числитель дроби эквивалентной величиной, получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}.$$

Заметим, что при решении задачи мы попутно получили одно весьма полезное отношение эквивалентности: $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}\ \ (x\to 0)$.

1.11. Понятие касательной

Пусть на промежутке $[a,b]$ задана функция $y=f(x)$ и построен ее график (рис. 3).

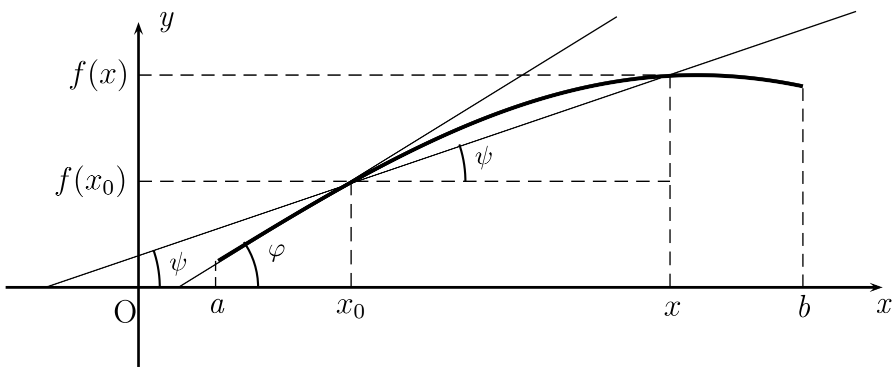

Рис. 3. Касательная

Возьмем на этом графике две точки: $(x_0,f(x_0))$ и $(x,f(x))$. Через эти две точки проведем секущую к графику. Затем устремим x к x_0. Тогда точка $(x,f(x))$ будет вдоль графика двигаться к точке $(x_0,f(x_0))$, а секущая в пределе превратится в прямую, которую называют касательной.

Обозначим через φ угол наклона касательной к оси $0x$, а через ψ угол наклона секущей и найдем угловой коэффициент касательной

$k = \operatorname{tg}\varphi$.Очевидно, что $\psi \to \varphi$ при $x \to x_0$, а потому $\operatorname{tg}\psi \to \operatorname{tg}\varphi$ при $x \to x_0$. Но $\operatorname{tg}\psi = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Следовательно,

$$k = \operatorname{tg}\varphi = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

В дальнейшем мы угол наклона касательной будем называть углом наклона графика в точке $(x_0, f(x_0))$.

Вообще, углом между двумя кривыми при их пересечении мы будем называть угол между их касательными в точке пересечения.

Пример. Найдем угол между синусоидой $y = \sin x$ и осью Ox в начале координат.

Взяв на графике две точки $(0, 0)$ и $(x, \sin x)$, получим

$$\operatorname{tg}\varphi = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

откуда $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

1.12. Число e

Мы знаем, что график любой показательной функции $y = a^x$ проходит через точку $(0, 1)$. Если в этой точке провести касательную к графику, то угол наклона касательной к оси Ox будет зависеть от основания a.

Основание такой показательной функции, у которой касательная к графику в точке $(0, 1)$ образует с осью Ox угол $\dfrac{\pi}{4}$, принято обозначать через e (рис. 4).

Так как $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} = 1$, то угловой коэффициент касательной должен быть равен 1.

Теперь возьмем на графике функции $y = e^x$ точки $(0, 1)$ и (x, e^x) и проведем через них секущую. Очевидно, что угловой коэффициент секущей равен

$$\frac{e^x - 1}{x}.$$

При $x \to 0$, как говорилось в предыдущем разделе, секущая превратится в касательную, а предел ее углового коэффициента будет равняться угловому коэффициенту касатательной. Значит, должно быть

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \quad (*)$$

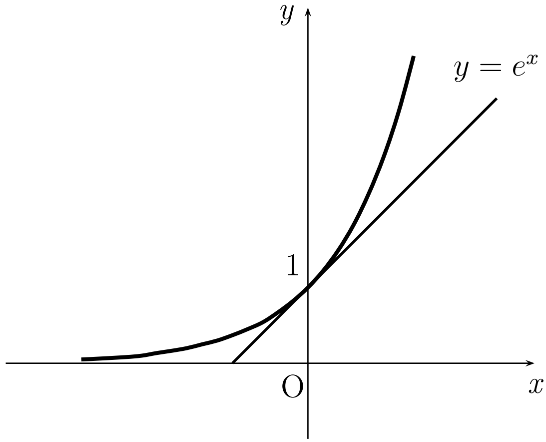

Рис. 4. График функции e^x

Теперь мы можем сказать так: e это такое число, для которого справедливо равенство $(*)$.

Позже мы увидим, как можно вычислить e с любой степенью точности, а пока приведем приближенное значение $e \approx 2,71828$.

Показательную функцию с основанием e, то есть $y = e^x$, часто называют экспонентой и пишут так: $y = \exp x$.

Логарифмы по основанию e называют натуральными. Для натуральных логарифмов обычно используют обозначение $y = \ln x$.

Нетрудно убедиться в том, что всякая показательная функция записывается с помощью экспоненты так:

$$a^x = e^{x \ln a},$$

а логарифмы, взятые по основанию a, можно выразить через натуральные следующим образом:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Например,

$$\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10} \approx 0,434 \ln x.$$

Заметим, что из равенства $(*)$ следует такое соотношение эквивалентности: $e^x - 1 \sim x$ при $x \to 0$.

Это соотношение часто используется при нахождении пределов.

1.13. Несколько важных пределов

Используя предел $(*)$, можно найти еще несколько весьма полезных для дальнейшего пределов.

Во-первых, так как $a^x = e^{x \ln a}$, то

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x}.$$

Если $x \to 0$, то $x \ln a \to 0$, а тогда $e^{x \ln a} - 1 \sim x \ln a$. Поэтому

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x \ln a} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x \ln a}{x} = \ln a.$$

Итак,

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a,$$

а потому $a^x - 1 \sim x \ln a \quad (x \to 0)$.

Теперь найдем предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Для этого сделаем замену: $z = \ln(1+x)$, из которой нетрудно увидеть, что $x = e^z - 1$. Видно также, что при $x \to 0$ будет $z \to 0$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{z\to 0} \frac{z}{e^z - 1} = 1.$$

Итак,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

то есть $\ln(1+x) \sim x \quad (x \to 0)$.

Далее,

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \left(e^{\ln(1+x)}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^1 = e.$$

Мы нашли еще один полезный предел:

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Если в последнем равенстве положить $x = \frac{1}{z}$, то оно примет вид:

$$\lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^z = e.$$

Получим еще один предел:

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{\mu\ln(1+x)} - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\mu\ln(1+x)}{x} = \mu.$$

Итак,

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \mu,$$

откуда $(1+x)^\mu - 1 \sim \mu x \quad (x\to 0)$.

Найденные нами пределы часто используются как в теории, так и при решении конкретных задач.

Пример 1. Найдем предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{2^{3x} - 1}.$$

В соответствии с полученными выше эквивалентностями, можем написать, что $\sqrt[3]{1+x} - 1 \sim \frac{1}{3}x$ и $2^{3x} - 1 \sim 3x\ln 2$ при $x\to 0$. Поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{2^{3x} - 1} = \lim_{x\to 0}\frac{x}{9x\ln 2} = \frac{1}{9\ln 2}.$$

Пример 2.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m - 1}{x^n - 1} = ?$$

Так как $x\to 1$, то $x = 1+z$, где $z\to 0$. Поэтому

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \lim_{z\to 0}\frac{(1+z)^m - 1}{(1+z)^n - 1} = \lim_{z\to 0}\frac{mz}{nz} = \frac{m}{n}.$$

Пример 3. Найдем

$$\lim_{x\to\pi}\frac{e^{\sin x} - 1}{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - 1}.$$

Для решения положим $x = \pi + z$. Тогда $z\to 0$ и

$$\lim_{x\to\pi}\frac{e^{\sin x} - 1}{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - 1} = \lim_{z\to 0}\frac{e^{\sin(\pi+z)} - 1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}(\pi+z)} - 1} =$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{e^{-\sin z} - 1}{\sqrt{1+\operatorname{tg} z} - 1}.$$

Так как $\sin z \to 0$ и $\operatorname{tg} z \to 0$ при $z \to 0$, то $e^{-\sin z} - 1 \sim -\sin z$ и $\sqrt{1+\operatorname{tg} z} - 1 \sim \frac{1}{2}\operatorname{tg} z$. Отсюда

$$\lim_{x\to\pi} \frac{e^{\sin x} - 1}{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - 1} = \lim_{z\to 0} \frac{-2\sin z}{\operatorname{tg} z} = -2.$$

1.14. Понятие непрерывности функции

Пусть x_0 - точка, лежащая внутри области задания функции $f(x)$. Мы будем называть $f(x)$ непрерывной в точке x_0, если выполняется равенство

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0).$$

Иначе говоря, $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Если вспомнить определение предела, то можно понятие непрерывности сформулировать на языке "ε, δ" :

функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если для $\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists\delta > 0$ такое, что при $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполняется неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Введем разности $\Delta x_0 = x - x_0$ и $\Delta f(x_0) = f(x_0) - f(x)$, которые будем называть соответственно приращениями аргумента и функции в точке x_0. Ясно, что $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда разность $\Delta f(x_0) \to 0$ при $\Delta x_0 \to 0$. Это дает нам возможность дать такое определение непрерывности:

функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если в этой точке бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Таким образом, мы получили четыре равносильных определения непрерывности функции в точке.

Замечание. Можно ввести понятие односторонней непрерывности. Например, если $f(x) \to f(x_0)$ при $x \to x_0-0$, то функция $f(x)$ называется непрерывной слева в точке x_0. Аналогично вводится непрерывность справа. Очевидно, что если функция непрерывна слева и справа в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

Теорема 1. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то в этой точке непрерывны $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$ и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, если $g(x) \neq 0$.

Доказательство. Эта теорема является частным случаем теоремы о пределах суммы, разности, произведения и частного. Действительно, непрерывность $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0 означает, что $f(x) \to f(x_0)$ и $g(x) \to g(x_0)$ при $x \to x_0$. Тогда $f(x) \pm g(x) \to f(x_0) \pm g(x_0)$, $f(x)g(x) \to f(x_0)g(x_0)$ и $\dfrac{f(x)}{g(x)} \to \dfrac{f(x_0)}{g(x_0)}$, если $g(x_0) \neq 0$. Тем самым теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $y = f(x)$, $y_0 = f(x_0)$, $z = g(y)$, $z_0 = g(y_0)$. Тогда если $f(x)$ непрерывна в точке x_0, а $g(y)$ непрерывна в точке y_0, то сложная функция $g(f(x))$ непрерывна в точке x_0, то есть суперпозиция непрерывных функций непрерывна.

Доказательство. Возьмем x_0 и найдем y_0, по которому получим z_0. Дадим x_0 некоторое приращение Δx_0. Оно вызовет приращение Δy_0, которое, в свою очередь, породит приращение Δz_0. Если $\Delta x_0 \to 0$, то $\Delta y_0 \to 0$ из-за непрерывности функции f. Но при $\Delta y_0 \to 0$ будет $\Delta z_0 \to 0$, так как непрерывна функция g. Таким образом, оказывается $\Delta z_0 \to 0$ при $\Delta x_0 \to 0$. Значит, суперпозиция непрерывна. Теорема доказана.

Приведем некоторые примеры непрерывных функций.

Функция $y = C$, где C - константа, непрерывна при всяком $x \in R$, так как $\Delta y = 0$ при всех x.

Если $y = x$, то $\Delta y = \Delta x$, а потому $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$ для любого $x \in R$. Значит, функция $y = x$ непрерывна во всех точках естественной области задания.

Далее, функция $y = x^n$, где n - целое положительное число, тоже непрерывна при $\forall x \in R$, поскольку она является произведением непрерывных функций.

Из сказанного ясно, что любой многочлен $P_n(x)$ непрерывен при $\forall x \in R$, так как он получен из непрерывных функций с помощью арифметических операций.

Отсюда следует, что всякая рациональная дробь $\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ непрерывна при всех x, кроме тех, что являются корнями знаменателя.

Можно формально доказать, что функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$

непрерывны при всех $x \in R$. Действительно, при $\forall x$ и $\forall \Delta x$ имеем

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Так как $|\cos(x + \frac{\Delta x}{2})| \leq 1$, то $|\Delta y| \leq 2|\sin\frac{\Delta x}{2}|$. В силу неравенства, доказанного в разделе 1.10, $|\sin\frac{\Delta x}{2}| \leq |\frac{\Delta x}{2}|$. Следовательно, $|\Delta y| \leq |\Delta x|$, а потому $|\Delta y| \to 0$ при $|\Delta x| \to 0$. Это означает, что функция $y = \sin x$ непрерывна при $\forall x \in R$. Аналогично доказывается непрерывность косинуса. Из непрерывности синуса и косинуса следует непрерывность $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ и $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ при всех x, кроме тех, где знаменатель равен нулю.

Можно доказать, что все основные элементарные функции непрерывны при всех x из области естественного определения. Из этого следует, что все элементарные функции непрерывны в своих естественных областях задания, поскольку они строятся из основных элементарных функций с помощью арифметических операций и суперпозиций.

Если функция непрерывна во всех точках некоторого промежутка, то она называется непрерывной на этом промежутке. Мы приведем без доказательства некоторые свойства функций, непрерывных на промежутке.

Теорема Коши (A. L. Cauchi, 1789-1857) о промежуточном значении непрерывной функции. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, b]$ и $f(a) < f(b)$. Тогда для любого числа Q, удовлетворяющего неравенству $f(a) < Q < f(b)$, найдется такая точка $c \in (a, b)$, что $f(c) = Q$.

Иначе говоря, непрерывная функция, переходя от одного своего значения к другому, принимает и все промежуточные значения.

Теорема Вейерштрасса (K. T. W. Weierstrass, 1815-1897). Если функция непрерывна на замкнутом промежутке, то она ограничена на этом промежутке и принимает на нем свои наибольшее и наименьшее значения.

В этой теореме существенно, что функция непрерывна на замкнутом промежутке. Для незамкнутого промежутка утверждение может оказаться неверным. Например, функция $y = \dfrac{1}{x}$ непрерывна на промежутке $(0, 1)$, но не ограничена на нем, так как $y \to \infty$ при $x \to 0$.

1.15. Точки разрыва

Точкой разрыва функции $f(x)$ называют такую точку x_0, в которой нарушается равенство

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0).$$

Проанализируем причины, по которым равенство может нарушиться.

Во-первых, может оказаться, что оба предела существуют и равны, но не равны $f(x_0)$, то есть $f(x_0-0) = f(x_0+0) \neq f(x_0)$. В этом случае точку x_0 называют устранимой точкой разрыва. Действительно, если мы доопределим f, положив $f(x_0) = f(x_0+0) = f(x_0-0)$, то она станет непрерывной.

Пример. Пусть $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, где $x \in (-\infty, 0) + (0, +\infty)$. Мы знаем, что $\dfrac{\sin x}{x} \to 1$ при $x \to \pm 0$. Вместе с тем, $f(0)$ не существует. Значит, $x_0 = 0$ является устранимой точкой разрыва функции. Однако, положив $f(0) = 1$, мы превратим нашу функцию в непрерывную.

Во-вторых, оба предела могут существовать, но быть не равными, то есть $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$. В этом случае точку x_0 называют точкой разрыва первого рода. Заметим, что в этом случае значение $f(x_0)$ нас не интересует.

Разность $f(x_0+0) - f(x_0-0)$ называется скачком функции f в точке разрыва.

Пример. Введем простейшую разрывную функцию, определив ее таким образом:

$$1(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ 1 & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$$

График $1(x)$ приведен на рис. 5.

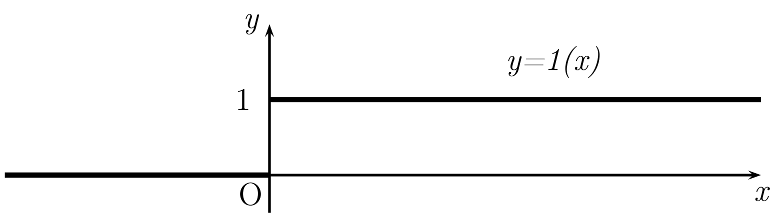

Рис. 5. Функция Хевисайда

Очевидно, что $1(+0) = 1, \quad 1(-0) = 0$, то есть $x_0 = 0$ является точкой разрыва первого рода, причем скачок функции в этой точке равен 1. Эту функцию называют единичной функцией, или функцией единичного скачка, или единицей Хевисайда (O. Heaviside, 1850-1925).

Функция Хевисайда оказывается очень удобной при описании физических или технических процессов, начинающихся в некоторый момент. Например,

$$f(x) = \sin x \; 1(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x < 0, \\ \sin x \quad \text{при} \quad x > 0 \end{cases}$$

описывает синусоидальные колебания, которые начинаются в момент $x = 0$.

Все остальные точки разрыва называют точками разрыва второго рода. Ясно, что в точке разрыва второго рода хотя бы один из пределов $f(x_0 - 0)$ и $f(x_0 + 0)$ не существует.

Примеры. 1) Пусть $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}, \quad x \in (-\infty, 0) + (0, +\infty)$. Мы знаем, что $\dfrac{1}{x} \to \pm\infty$ при $x \to \pm 0$. Поэтому $\sin\dfrac{1}{x}$ не имеет пределов при $x \to \pm 0$. Значит, $x_0 = 0$ оказывается для нашей функции точкой разрыва второго рода.

2) Рассмотрим функцию $f(x) = e^{\frac{1}{x}}, \quad x \in (-\infty, 0) + (0, +\infty)$. Нетрудно видеть, что $f(-0) = 0, \quad f(+0) = +\infty$. Поэтому $x_0 = 0$ является точкой разрыва второго рода.

1.16. Производная

Пусть x и $x + \Delta x$ - точки, лежащие внутри области задания функции $y = f(x)$. Найдем значения функции $f(x)$ и $f(x + \Delta x)$ в этих точках и составим разность $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$. Затем сравним приращение функции с приращением аргумента, то есть найдем предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Этот предел называют производной или производной первого порядка от функции f по аргументу x и обозначают $f'(x)$, или более кратко y'. Иногда используют и такую запись: y'_x.

Итак, производная есть предел отношения приращения функции к приращению аргумента при приращении аргумента, стремящемся к нулю:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Естественно, что не всякая функция имеет производную. Поэтому мы сразу же укажем необходимое условие существования производной.

Теорема. Если в точке x существует производная $f'(x)$, то в этой точке функция $f(x)$ непрерывна.

Доказательство. По условию, существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

В таком случае, как было доказано в разделе 1.6, должно быть

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \alpha,$$

где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Отсюда

$$\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x.$$

Теперь хорошо видно, что $\Delta f(x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Значит, $f(x)$ непрерывна. Теорема доказана.

Заметим, что непрерывность функции необходима для существования производной, но не является достаточной. Иначе говоря, функция может быть непрерывной в некоторой точке и при этом не иметь в ней производную. Например, функция $f(x) = |x|$ непрерывна в точке $x = 0$, но не имеет в этой точке производной. Предлагаем читателю доказать это самостоятельно.

Процесс нахождения производной обычно называют дифференцированием. Этот термин происходит от латинского слова differentia - разность. Дело в том, что производная есть предел отношения двух разностей - приращения функции и приращения аргумента.

1.17. Правила нахождения производных

Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют $u'(x)$ и $v'(x)$. Тогда

$$(u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x), \quad (u(x) - v(x))' = u'(x) - v'(x),$$

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

Заметим сразу же, что эти формулы обычно записывают в более краткой форме:

$$(u+v)' = u'+v', \ \ (u-v)' = u'-v', \ \ (uv)' = u'v+uv', \ \ \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

Все эти формулы выводятся одним и тем же способом, поэтому мы докажем справедливость лишь одной из них. Зададим некоторое значение x и найдем соответствующие значения $u(x)$ и $v(x)$, которые для краткости обозначим u и v. Зная u и v, найдем частное $\dfrac{u}{v}$. Затем возьмем новое значение аргумента $x + \Delta x$ и найдем новые значения функций, которые обозначим $u+\Delta u$ и $v+\Delta v$. Тогда новым значением дроби будет $\dfrac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$. Теперь найдем приращение дроби

$$\Delta\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v\Delta u - u\Delta v + \Delta u\Delta v}{(v + \Delta v)v}.$$

Найдем отношение

$$\frac{\Delta\left(\dfrac{u}{v}\right)}{\Delta x} = \frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x} + \dfrac{\Delta u}{\Delta x}\Delta v}{(v + \Delta v)v}.$$

Так как $v(x)$ имеет производную, то $\Delta v \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Поэтому, переходя в последнем равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$, получаем

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv' + u'0}{(v + 0)v},$$

или

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

Тем самым мы получили формулу для производной от дроби. Рекомендуем читателю вывести остальные формулы самостоятельно.

Рассмотрим теперь сложную функцию $z = g(y)$, где $y = f(x)$. Если существуют производные $g'(y)$ и $f'(x)$, то существует производная z'_x, причем $z'_x = z'_y y'_x$.

Для доказательства возьмем x и найдем соответствующее ему y, по которому найдем z. Затем дадим x приращение Δx, которое вызовет приращение Δy, что вызовет приращение Δz. Так как функции g и f имеют производные, то $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$, а $\Delta z \to 0$ при $\Delta y \to 0$. Отсюда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta y}\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = z'_y\ y'_x.$$

Получили правило нахождения производной сложной функции.

Если, в свою очередь, окажется, что $x = h(t)$, то мы получим $z'_t = z'_y\ y'_x\ x'_t$, и так далее.

1.18. Производные простейших функций

Мы начнем с производной от постоянной. Если $y = c$, то $\Delta c = 0$ при любом Δx, а тогда очевидно, что $c' = 0$ при любом x. Итак,

$$c' = 0.$$

Заметим, что из полученного следует, что $(cu)' = c'u + cu' = cu'$, то есть постоянный множитель можно выносить из-под знака производной.

Далее. Нетрудно увидеть, что если $y = x$, то $\Delta y = \Delta x$, а потому

$$x' = 1.$$

Выведем формулу производной от логарифмической функции. Положим $y = \ln v(x)$, где $v(x)$ - функция, имеющая производную $v'(x)$. Возьмем x и найдем соответствующие v и $y = \ln v$. Потом возьмем $x + \Delta x$, по которому найдем $v + \Delta v$ и $y + \Delta y = \ln(v + \Delta v)$. Теперь найдем

$$\Delta y = \Delta(\ln v) = \ln(v + \Delta v) - \ln v = \ln \frac{v + \Delta v}{v} = \ln\left(1 + \frac{\Delta v}{v}\right).$$

Так как $\Delta v \to 0$ при $\Delta x \to 0$, то $\ln\left(1 + \frac{\Delta v}{v}\right) \sim \frac{\Delta v}{v}$ при $\Delta x \to 0$. Отсюда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(\ln v)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1 + \frac{\Delta v}{v}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{v \Delta x} = \frac{v'}{v}.$$

Мы получили формулу для нахождения производной от натурального логарифма:

$$(\ln v)' = \frac{1}{v}\ v'.$$

Если $y = \log_a v$, то, переписав равенство в виде $y = \dfrac{\ln v}{\ln a}$, получим

$$(\log_a v)' = \left(\frac{\ln v}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}(\ln v)' = \frac{1}{v \ln a}\ v'.$$

Таким образом,

$$(\log_a v)' = \frac{1}{v \ln a}\ v'.$$

Теперь выясним, как находится производная от степенной функции. Пусть $y = v^\mu$ и существует v'. Прологарифмируем обе части и запишем равенство в виде $\ln y = \mu \ln v$. Теперь возьмем от обеих частей производные. Получим:

$$\frac{1}{y}\ y' = \mu\ \frac{1}{v}\ v',$$

откуда

$$y' = y\ \mu\ \frac{1}{v}\ v'.$$

Подставляя сюда вместо y его значение v^μ, получаем формулу для производной степенной функции:

$$(v^\mu)' = \mu\ v^{\mu-1}\ v'.$$

Отметим два частных случая последней формулы. Если $\mu = -1$, то формула принимает вид:

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{1}{v^2}\ v'.$$

При $\mu = \dfrac{1}{2}$ оказывается

$$\left(\sqrt{v}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{v}}\ v'.$$

Эти два случая встречаются в приложениях гораздо чаще, чем другие.

Найдем производную от показательной функции $y = a^v$. Ясно, что $\ln y = v \ln a$. Отсюда $\dfrac{1}{y} y' = v' \ln a$. Значит, $y' = y\ v'\ \ln a$, или

$$(a^v)' = a^v \ln a\ v'.$$

Если $a = e$, то окажется

$$(e^v)' = e^v\ v'.$$

Пусть $y = \sin v(x)$, причем существует $v'(x)$. В этом случае, действуя, как и раньше, получим

$$\Delta(\sin v) = \sin(v + \Delta v) - \sin v = 2 \sin \frac{\Delta v}{2} \cos\left(v + \frac{\Delta v}{2}\right).$$

Так как $\exists v'$, то $\Delta v \to 0$ при $\Delta x \to 0$. В таком случае $\sin \dfrac{\Delta v}{2} \sim \dfrac{\Delta v}{2}$. Поэтому

$$\lim_{x\to 0} \frac{\Delta(\sin v)}{\Delta x} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta v}{2} \cos\left(v + \frac{\Delta v}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\Delta v \cos\left(v + \frac{\Delta v}{2}\right)}{\Delta x} = \cos v\ v'.$$

Итак,

$$(\sin v)' = \cos v\ v'.$$

Производную косинуса можно получить так:

$$(\cos v)' = \left(\sin\left(v + \frac{\pi}{2}\right)\right)' = \cos\left(v + \frac{\pi}{2}\right)\left(v + \frac{\pi}{2}\right)' = -\sin v\ v',$$

то есть

$$(\cos v)' = -\sin v\ v'.$$

Зная производные синуса и косинуса, нетрудно найти производные тангенса и котангенса. Действительно, используя правило нахождения производной дроби, имеем

$$(\operatorname{tg} v)' = \left(\frac{\sin v}{\cos v}\right)' = \frac{(\sin v)' \cos v - (\cos v)' \sin v}{\cos^2 v} =$$

$$= \frac{\cos v\ v'\ \cos v + \sin v\ v'\ \sin v}{\cos^2 v} = \frac{1}{\cos^2 v}\ v'.$$

Таким образом,
$$(\operatorname{tg} v)' = \frac{1}{\cos^2 v}\ v'.$$
Аналогично находится
$$(\operatorname{ctg} v)' = -\frac{1}{\sin^2 v}\ v'.$$

Найдем производную арксинуса. Для этого вспомним, что если $y = \arcsin v$, то $v = \sin y$, причем $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Отсюда
$$v' = \cos y\ y' = \sqrt{1 - \sin^2 y}\ y' = \sqrt{1 - v^2}\ y',$$
а потому $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2}} v'$, то есть
$$(\arcsin v)' = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}\ v'.$$
Так как $\arccos v = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin v$, то оказывается
$$(\arccos v)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}\ v'.$$
Пусть $y = \operatorname{arctg} v$. Тогда $v = \operatorname{tg} y$, причем $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Отсюда
$$v' = \frac{1}{\cos^2 y}\ y' = (1 + \operatorname{tg}^2 y)\ y' = (1 + v^2)\ y',$$
а потому $y' = \dfrac{1}{1 + v^2} v'$, то есть
$$(\operatorname{arctg} v)' = \frac{1}{1 + v^2}\ v'.$$
Так как $\operatorname{arcctg} v = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} v$, то
$$(\operatorname{arcctg} v)' = -\frac{1}{1 + v^2}\ v'.$$

Итак, мы нашли производные от всех основных элементарных функций. Это дает возможность, используя соответствующие правила, находить производные от любых элементарных функций. Для удобства сведем все полученные формулы в таблицу:

$$c' = 0 \qquad (v^{\mu})' = \mu v^{\mu-1}\ v'$$

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{1}{v^2}\ v' \qquad (\sqrt{v})' = \frac{1}{2\sqrt{v}}\ v'$$

$$(\ln v)' = \frac{1}{v}\ v' \qquad (\log_a v)' = \frac{1}{v\ln a}\ v'$$

$$(e^v)' = e^v\ v' \qquad (a^v)' = a^v \ln a\ v'$$

$$(\sin v)' = \cos v\ v' \qquad (\cos v)' = -\sin v\ v'$$

$$(\operatorname{tg} v)' = \frac{1}{\cos^2 v}\ v' \qquad (\operatorname{ctg} v)' = -\frac{1}{\sin^2 v}\ v'$$

$$(\arcsin v)' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\ v' \qquad (\arccos v)' = -\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\ v'$$

$$(\operatorname{arctg} v)' = \frac{1}{1+v^2}\ v' \qquad (\operatorname{arcctg} v)' = -\frac{1}{1+v^2}\ v'$$

В заключение этого раздела приведем несколько примеров нахождения производных.

1) $((ax+b)^m)' = m(ax+b)^{m-1}(ax+b)' = m(ax+b)^{m-1}a =$
$= am(ax+b)^{m-1}$,

2) $\left(\sin^2 x\right)' = 2\sin x(\sin x)' = 2\sin x\cos x = \sin 2x.$

3) $\left(\ln\dfrac{x-a}{x+a}\right)' = (\ln(x-a) - \ln(x+a))' =$

$$= \frac{1}{x-a}(x-a)' - \frac{1}{x+a}(x+a)' = \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} = \frac{2a}{x^2-a^2}.$$

4) $(\ln(x+\sqrt{x^2+\alpha}))' = \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+\alpha}}\left(x+\sqrt{x^2+\alpha}\right)' =$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+\alpha}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+\alpha}}\left(x^2+\alpha\right)'\right) =$$

$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+\alpha}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+\alpha}}2x\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2+\alpha}}.$$

5) $(xe^{-x})' = x'e^{-x} + xe^{-x}(-x)' = e^{-x} + xe^{-x}(-1) = (1-x)e^{-x}.$

6) Найдем производную от $y = x^x$.

Вначале прологарифмируем равенство. Получим $\ln y = x \ln x$, откуда

$$\frac{1}{y}\, y' = \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1.$$

Значит,

$$y' = y(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1).$$

Прием, использованный при решении последнего примера, называют логарифмическим дифференцированием.

1.19. Гиперболические функции

В этом разделе мы познакомимся с несколькими новыми функциями, которые нередко используются для решения технических задач.

Гиперболическим синусом называют функцию

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad x \in R.$$

Отметим такие очевидные свойства введенной функции:

1) $\operatorname{sh} 0 = 0$;
2) $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh} x$;
3) $\operatorname{sh} x > 0$ при $x > 0$ и $\operatorname{sh} x < 0$ при $x < 0$;
4) $\operatorname{sh} x \sim \dfrac{e^x}{2}$ при $x \to +\infty$ и $\operatorname{sh} x \sim -\dfrac{e^{-x}}{2}$ при $x \to -\infty$.

Гиперболическим косинусом называют функцию

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad x \in R.$$

Хорошо видны следующие свойства гиперболического косинуса:

1) $\operatorname{ch} 0 = 1$;
2) $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$;
3) $\operatorname{ch} x \geqslant 1$;
4) $\operatorname{ch} x \sim \dfrac{e^x}{2}$ при $x \to +\infty$ и $\operatorname{ch} x \sim \dfrac{e^{-x}}{2}$ при $x \to -\infty$.

Гиперболическим тангенсом называется функция

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad x \in R.$$

Нетрудно видеть, что

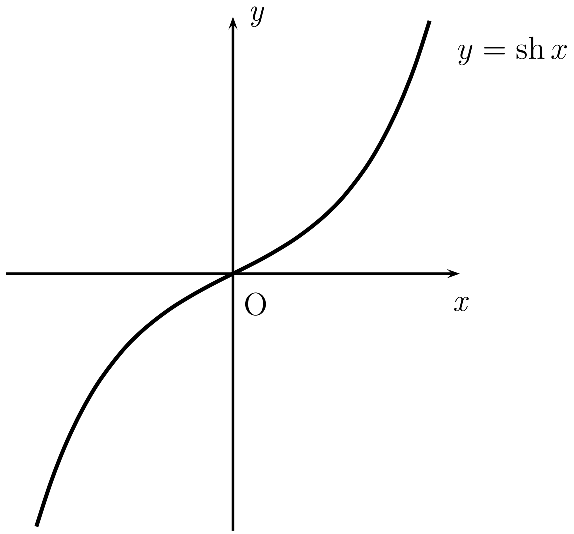

Рис. 6. График гиперболического синуса

1) $\operatorname{th} 0 = 0$;
2) $\operatorname{th}(-x) = -\operatorname{th} x$;
3) $0 < \operatorname{th} x < 1$ при $x > 0$ и $-1 < \operatorname{th} x < 0$ при $x < 0$;
4) $\operatorname{th} x \to 1$ при $x \to +\infty$ и $\operatorname{th} x \to -1$ при $x \to -\infty$.

Гиперболическим котангенсом называется функция

$$\operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad x \in (-\infty, 0) + (0, +\infty).$$

Отметим такие свойства гиперболического котангенса:
1) $\operatorname{cth} x \to +\infty$ при $x \to +0$ и $\operatorname{cth} x \to -\infty$ при $x \to -0$;
2) $\operatorname{cth}(-x) = -\operatorname{cth} x$;
3) $\operatorname{cth} x > 1$ при $x > 0$ и $\operatorname{cth} x < -1$ при $x < 0$;
4) $\operatorname{cth} x \to 1$ при $x \to +\infty$ и $\operatorname{cth} x \to -1$ при $x \to -\infty$.

Для введенных функций справедливы некоторые формулы, аналогичные формулам тригонометрии. Например,

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x},$$

$$\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x, \quad \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x,$$

$$\operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}, \quad \operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2}.$$

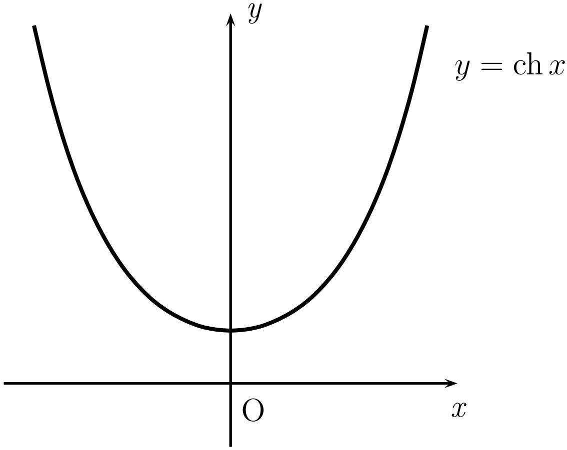

Рис. 7. График гиперболического косинуса

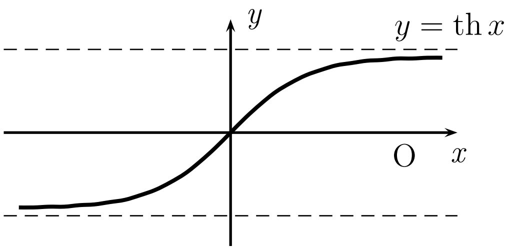

Рис. 8. График гиперболического тангенса

Предлагаем читателю доказать эти формулы самостоятельно.

Найдем производную от гиперболического синуса:

$$(\operatorname{sh} v)' = \left(\frac{e^v - e^{-v}}{2}\right)' = \frac{e^v v' - e^{-v}(-v')}{2} = \operatorname{ch} v \ v'.$$

Аналогично находится

$$(\operatorname{ch} v)' = \operatorname{sh} v \ v'.$$

Далее,

$$(\operatorname{th} v)' = \left(\frac{\operatorname{sh} v}{\operatorname{ch} v}\right)' = \frac{\operatorname{ch} v \ v' \operatorname{ch} v - \operatorname{sh} v \operatorname{sh} v \ v'}{\operatorname{ch}^2 v} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 v} \ v'.$$

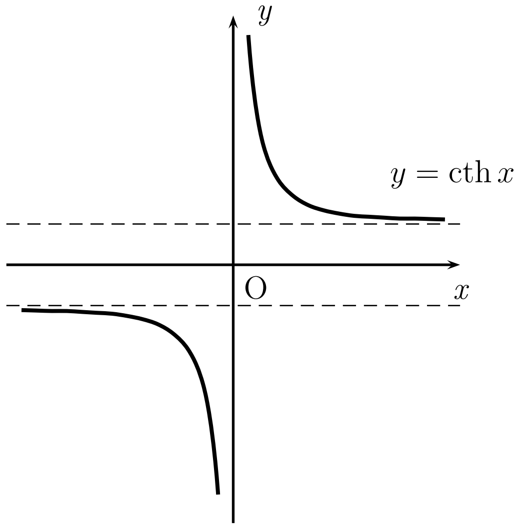

Рис. 9. График гиперболического котангенса

Так же доказывается, что

$$(\operatorname{cth} v)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 v}\ v'.$$

Следовательно, в составленную выше таблицу производных можно добавить еще четыре формулы:

$$(\operatorname{sh} v)' = \operatorname{ch} v\ v', \quad (\operatorname{ch} v)' = \operatorname{sh} v\ v',$$

$$(\operatorname{th} v)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 v}\ v', \quad (\operatorname{cth} v)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 v}\ v'.$$

1.20. Геометрический смысл производной

В разделе 1.11 мы ввели понятие касательной и там же выяснили, как находится угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x, f(x))$:

$$k = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Это означает, что $k = f'(x)$, то есть производная есть угловой коэффициент касательной.

Видно, что если функция в некоторой точке имеет производную, то в этой точке существует касательная к ее графику.

Используя уравнение пучка прямых, нетрудно написать уравнение касательной. Именно, если (X, Y) - текущие координаты касательной, проведенной в точке $(x, f(x))$, то

$$Y - f(x) = f'(x)(X - x).$$

Прямая, проходящая через точку касания перпендикулярно к касательной, называется нормальной прямой (нормалью) к графику. Из перпендикулярности следует, что угловой коэффициент нормали $k_1 = -\frac{1}{k} = -\frac{1}{f'(x)}$. Поэтому, если (X, Y) - текущие координаты нормали, то ее уравнение имеет вид

$$Y - f(x) = -\frac{1}{f'(x)}(X - x).$$

Пример 1. Написать уравнения касательной и нормали, проведенных к графику $y = x^2$ в точке (2, 4).

Так как $y' = 2x$, то в данной точке $y' = 4$. Поэтому $k = 4$ и $k_1 = -\frac{1}{4}$.

Следовательно, уравнение касательной $Y - 4 = 4(X - 2)$, а уравнение нормали имеет вид $Y - 4 = -\frac{1}{4}(X - 2)$. Эти уравнения легко преобразуются в такие:

$$4X - Y - 4 = 0 \text{ и } X + 4Y - 18 = 0.$$

Пример 2. Под каким углом пересекаются линии $y = x^4$ и $y = \frac{1}{x}$?

Найдем вначале точку пересечения линий. Очевидно, что в этой точке должно быть $x^4 = \frac{1}{x}$, откуда $x^5 = 1$, и потому точка пересечения имеет координаты $(1, 1)$.

Как мы знаем, угол между линиями есть угол между касательными к ним. Поэтому, обозначив через α угол между линиями, можем написать, что $\alpha = \varphi_1 - \varphi_2$, где φ_1 и φ_2 - углы наклона к оси Ox касательных, проведенных к линиям в точке $(1, 1)$.

Нетрудно видеть, что в этой точке

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = 4x^3 = 4 \text{ и } \operatorname{tg}\varphi_2 = -\frac{1}{x^2} = -1.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_1 - \operatorname{tg}\varphi_2}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2} = -\frac{5}{3}.$$

Заметим, что при пересечении линий, кроме угла α, образуется еще один угол $\alpha_1 = \pi - \alpha$. Очевидно, что $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{5}{3}$.

Итак, мы нашли углы, образованные пересечением линий:

$$\alpha_1 = \operatorname{arctg}\frac{5}{3} \approx\ 1,03 \text{ рад} \ \text{ и } \ \alpha = \pi - \operatorname{arctg}\frac{5}{3} \approx\ 2,11 \text{ рад}.$$

1.21. Физические приложения производной

1. Пусть имеется прямолинейный стержень. Будем считать, что он занимает промежуток $[0, l]$ на оси Ox. Предположим, что нам известна масса любой его части, и обозначим через $m(x)$ массу, соответствующую промежутку $[0, x]$. Тогда частичка стержня, соответствующая промежутку $[x, x + \Delta x]$, имеет массу $\Delta m(x) = m(x + \Delta x) - m(x)$. Величина

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{\Delta m(x)}{\Delta x} = \frac{m(x + \Delta x) - m(x)}{\Delta x}$$

называется средней плотностью стержня на промежутке $[x, x + \Delta x]$, а

$$\rho(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \rho_{\text{ср}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{m(x + \Delta x) - m(x)}{\Delta x}$$

называют плотностью стержня в точке x.

Таким образом, мы видим, что плотность есть производная от массы по длине: $\rho(x) = m'(x)$.

2. Предположим теперь, что материальная точка движется по прямой и что известна зависимость пройденного ею пути от времени $s(t)$. Тогда величина пути, пройденного точкой за промежуток времени $[t, t + \Delta t]$, будет равна $\Delta s(t) = s(t + \Delta t) - s(t)$. Отношение

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s(t)}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

есть средняя скорость точки за промежуток времени $[t, t + \Delta t]$, а

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

называется скоростью точки в момент времени t.

Итак, скорость есть производная от пути по времени: $v(t) = s'(t)$.

3. Пусть известно $Q(t)$ - количество электричества, протекшее через поперечное сечение проводника к моменту времени t. В таком

случае изменение количества электричества за промежуток времени $[t, t+\Delta t]$ равно $\Delta Q(t) = Q(t+\Delta t) - Q(t)$. Величина

$$I_{\text{ср}} = \frac{\Delta Q(t)}{\Delta t} = \frac{Q(t+\Delta t) - Q(t)}{\Delta t},$$

называется средней силой тока за промежуток времени $[t, t+\Delta t]$, а

$$I(t) = \lim_{\Delta t \to 0} I_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Q(t+\Delta t) - Q(t)}{\Delta t}$$

называют силой тока в проводнике в момент времени t.

Значит, сила тока есть производная от количества электричества по времени: $I(t) = Q'(t)$.

Существует множество других примеров применения производной в физике и технике. Мы не будем здесь останавливаться на них.

1.22. Дифференциал

Возьмем две точки: x и $x + \Delta x$ из промежутка задания функции $f(x)$ и найдем приращение функции $\Delta f(x) = f(x + \Delta x - f(x)$. Если это приращение можно представить в виде

$$\Delta f(x) = A(x)\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0),$$

то говорят, что функция дифференцируема в точке x, а величину $A(x)\Delta x$ называют дифференциалом функции и обозначают $df(x)$.

Ясно, что $A(x)\Delta x$ является главной частью приращения функции при $\Delta x \to 0$. Эта главная часть приращения пропорциональна приращению аргумента Δx, то есть линейно зависит от Δx. Поэтому мы можем дать такое определение дифференциала:

дифференциалом функции называется главная линейная часть ее приращения.

Покажем,что дифференцируемая функция имеет производную.

Пусть

$$\Delta f(x) = A(x)\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0).$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(A(x) + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} \right) = A(x).$$

Таким образом, существует $f'(x) = A(x)$.

С другой стороны, если у функции есть производная $f'(x)$, то есть существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x)} = f'(x),$$

то, как мы уже говорили, должно быть

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$$

или

$$\Delta f(x) = f'(x)\Delta x + \alpha \Delta x,$$

где $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Видно, что $f'(x)\Delta x$ является главной линейной частью приращения, то есть функция имеет дифференциал.

Из сказанного ясно, что $f(x)$ имеет дифференциал тогда и только тогда, когда она имеет производную. При этом оказывается, что $df(x) = f'(x)\Delta x$.

В частности, если $f(x) = x$, то $df(x) = \Delta x$. Поэтому для независимого аргумента x дифференциалом называют его приращение, то есть $dx = \Delta x$.

Следовательно, мы можем написать

$$df(x) = f'(x)dx.$$

Примеры.

$$1.\ d(x^\mu) = \mu x^{\mu-1}\, dx; \quad 2.\ d(e^x) = e^x\, dx; \quad 3.\ d(\sin x) = \cos x\, dx.$$

Из равенства $df(x) = f'(x)dx$ следует, что производная есть частное от деления дифференциала функции на дифференциал аргумента:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}.$$

Отметим еще следующее обстоятельство. Дифференциал функции зависит от двух, не связанных друг с другом, аргументов: x и dx.

Отношение эквивалентности $\Delta f(x) \sim df(x) = f'(x)dx \quad (dx \to 0)$ означает, что при малых приращениях аргумента справедливо приближенное равенство $\Delta f(x) \approx df(x)$ или, что то же,

$$f(x + dx) - f(x) \approx f'(x)dx.$$

Отсюда

$$f(x + dx) \approx f(x) + f'(x)dx.$$

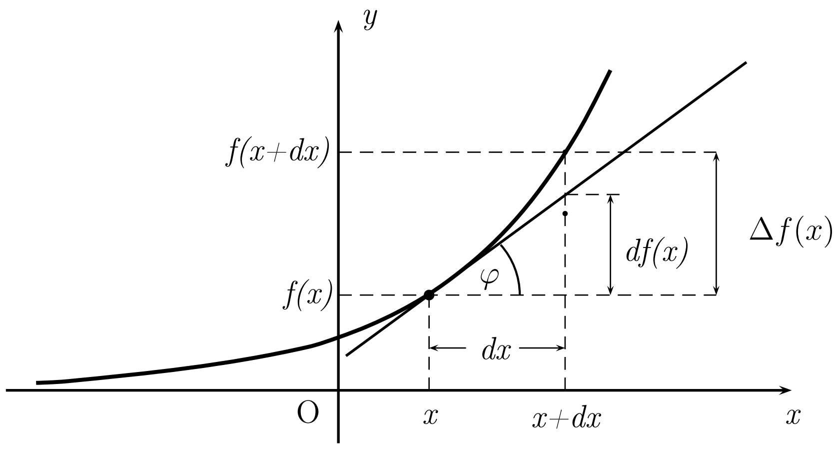

Рис. 10. Геометрический смысл дифференциала

Это дает возможность находить приближенно значение $f(x + dx)$, исходя из значения $f(x)$.

Пример. Найти приближенно $\sqrt{3,88}$.

Для решения введем функцию $f(x) = \sqrt{x}$. Тогда $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, и потому

$$\sqrt{x + dx} \approx \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}dx.$$

Теперь, положив в этом равенстве $x = 4$ и $dx = -0,12$, находим $\sqrt{3,88} \approx 1,97$.

Выясним, какой геометрический смысл имеет дифференциал функции. Для этого обратимся к рис. 10. Поскольку $f'(x) = \operatorname{tg}\varphi$, постольку $df(x) = \operatorname{tg}\varphi\; dx$. Это означает, что дифференциал функции равен приращению, которое получает ордината касательной при переходе от точки x к точке $x + dx$.

Таким образом, замена приращения функции дифференциалом означает замену с достаточно высокой степенью точности малого отрезка кривой малым отрезком прямой линии. Такая замена приводит к очень простой связи приращения функции с приращением аргумента: приращение функции оказывается прямо пропорциональным приращению аргумента. Это позволяет решить огромное число задач, кажущихся неразрешимыми без такого упрощения.

В заключение этого раздела остановимся на следующем важном обстоятельстве. Мы предполагали, что x является независимым аргументом, и при этом предположении нашли, что $df(x) = f'(x)dx$. Покажем, что равенство имеет такой же вид и в том случае, когда x является функцией от некоторого аргумента. Действительно, допустим, что $x = g(t)$, где t - независимый аргумент. Тогда f оказывается сложной функцией от t. Поэтому $f'_t(x) = f'(x)g'(t)$. Отсюда $df(x) = f'_t(x)dt = f'(x)g'(t)dt$. Но $g'(t)dt = dx$. Следовательно, $df(x) = f'(x)dx$.

Итак, всегда

$$df(x) = f'(x)dx \quad \text{и} \quad f'(x) = \frac{df(x)}{dx}.$$

Это свойство называют свойством инвариантности первого дифференциала.

1.23. Производные высших порядков

Зная, что называется производной первого порядка от функции $f(x)$, можно ввести производные более высоких порядков. В частности, производной второго порядка от функции $f(x)$ называется производная от ее первой производной. Мы будем обозначать производную второго порядка $f''(x)$ или $f^{(2)}(x)$. В соответствии с определением, можем написать:

$$f''(x) = f^{(2)}(x) = (f'(x))'.$$

В общем случае производной порядка k от функции $f(x)$ называется производная от ее производной порядка $k-1$:

$$f^{(k)}(x) = (f^{(k-1)}(x))'.$$

Заметим, что производная второго порядка имеет весьма простой физический смысл. Именно, если точка движется по прямой так, что известна зависимость ее пути от времени $s(t)$, то, как мы видели, $s'(t) = v(t)$, то есть первая производная от пути по времени есть скорость. В таком случае, $s''(t) = v'(t) = w(t)$ является ускорением точки. Итак, вторая производная от пути по времени есть ускорение.

Производные более высоких порядков такого отчетливого физического смысла не имеют, хотя нередко используются для решения физических и технических задач.

Рассмотрим несколько полезных для дальнейшего примеров нахождения высших производных.

1. $(e^x)^{(k)} = e^x$.

Это очевидно, потому что $(e^x)' = e^x$.

2. $(\sin x)^{(k)} = \sin(x + k\dfrac{\pi}{2})$.

В самом деле, очевидно, что $(\sin x)' = \cos x = \sin(x + \dfrac{\pi}{2})$. Следовательно, должно быть $(\sin x)'' = \sin(x + 2\dfrac{\pi}{2})$ и т. д.

3.$(\cos x)^{(k)} = \cos(x + k\dfrac{\pi}{2})$.

Это доказывается так же, как и предыдущее.

4. $((1+x)^\mu)^{(k)} = \mu(\mu-1)...(\mu-(k-1))(1+x)^{\mu-k}$.

Последовательно находим

$((1+x)^\mu)' = \mu(1+x)^{\mu-1}$,

$((1+x)^\mu)'' = \mu(\mu-1)(1+x)^{\mu-2}$ и т. д.

Полезно заметить следующее: если $\mu = n$, где n - целое положительное число, то при $k = n$ окажется $((1+x)^n)^{(n)} = n!$, а отсюда следует, что при $k > n$ будет $((1+x)^n)^{(k)} = 0$.

5. $(\ln(1+x))^{(k)} = \dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$.

Последовательно получаем

$(\ln(1+x))' = \dfrac{1}{1+x}$,

$(\ln(1+x))'' = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$,

$(\ln(1+x))^{(3)} = \dfrac{1\cdot 2}{(1+x)^3}$,

$(\ln(1+x))^{(4)} = \dfrac{-1\cdot 2\cdot 3}{(1+x)^4}$ и т. д.

1.24. Дифференциалы высших порядков

Так же, как и производные, дифференциалы высших порядков будем вводить последовательно: дифференциалом порядка k от функции $f(x)$ назовем дифференциал от ее дифференциала порядка $k-1$.

Дифференциал порядка k обозначают символом $d^k f(x)$. В соответствии с определением, имеем:

$$d^k f(x) = d(d^{k-1} f(x)).$$

Выясним, как находятся эти дифференциалы. Пусть x - независимый аргумент. Так как $df(x) = f'(x)dx$, то

$$d^2(f(x)) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'_x dx.$$

Но dx не зависит от x, а потому его можно вынести из-под знака производной. Следовательно, $d^2f(x) = f''(x)dx^2$.

Продолжая рассуждение, мы придем к такому результату: если x является независимым аргументом, то

$$d^kf(x) = f^{(k)}(x)dx^k.$$

При этом существование производной порядка k обеспечивает существование дифференциала порядка k.

Из полученного видно, что $d^kf(x) = o(d^{k-1}f(x))$ при $dx \to 0$, если, конечно, $f^{(k-1)}(x) \neq 0$.

Кроме того, если x - независимый аргумент, то $f^{(k)}(x) = \dfrac{d^kf(x)}{dx^k}$.

В выводе формулы для высших дифференциалов мы предполагали, что x является независимым аргументом. Это предположение весьма существенно потому, что для зависимого аргумента формула для высших дифференциалов оказывается другой.

Пусть имеется функция $f(x)$, где $x = g(t)$, а t - независимый аргумент. Тогда $f'_t(x) = f'(x)g'(t)$. Следовательно, $df(x) = f'(x)g'(t)dt$. Отсюда, в соответствии с определением, получаем:

$$d^2f(x) = d(df(x)) = d(f'(x)g'(t)dt) = (f'(x)g'(t)dt)'_t dt =$$

$$= (f'(x)g'(t))'_t dt^2 = (f''(x)g'(t)g'(t) + f'(x)g''(t))dt^2.$$

Но $g'(t)dt = dx$, а $g''(t)dt^2 = d^2x$. Значит,

$$d^2f(x) = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x.$$

Это выражение для второго дифференциала явно не совпадает с равенством $d^2f(x) = f''(x)dx^2$, которое было получено для независимого аргумента.

Та же ситуация имеет место и для дифференциалов более высокого порядка.

Итак, в отличие от первого дифференциала, дифференциалы высших порядков не обладают свойством инвариантности.

Заметим, что исключением из этого правила является случай, когда x представляет собой линейную функцию от t, то есть когда $x = at + b$. Действительно, в этом случае, как нетрудно видеть, $\ddot{x} = \dddot{x} = ... = 0$. Поэтому $d^2x = d^3x = ... = 0$, что приводит к инвариантности высших дифференциалов.

1.25. Параметрическое задание линий

Пусть на промежутке $[\alpha, \beta]$ заданы две непрерывные функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$. Множество точек плоскости с координатами

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} t \in [\alpha, \beta]$$

мы будем называть линией на плоскости.

Аргумент t, от которого зависят координаты, называют параметром линии, а сам способ задания линии называют параметрическим.

Заметим сразу же, что одна и та же линия может иметь различные параметрические задания.

Рассмотрим несколько примеров параметрического задания линий.

1.

$$\begin{cases} x = lt + x_0, \\ y = mt + y_0, \end{cases} t \in R.$$

Это параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку (x_0, y_0), с направляющим вектором (l, m).

2.

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \end{cases} t \in [0, 2\pi].$$

Очевидно, что $x^2 + y^2 = a^2$, а это означает, что написано параметрическое уравнение окружности с радиусом a и с центром в точке $(0, 0)$

Уравнение этой же окружности можно записать и в таком виде

$$\begin{cases} x = a\cos \omega t, \\ y = a\sin \omega t, \end{cases} , t \in \left[0, \frac{2\pi}{\omega}\right].$$

3.

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} t \in [0, 2\pi].$$

Видно, что здесь $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Значит, написано параметрическое уравнение эллипса.

4.

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{\cos t}, \\ y = b\,\mathrm{tg}\, t, \end{cases} t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Нетрудно показать, что здесь $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Ясно также, что при изменении t от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ координата y изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, а координата $x \geqslant a$. Следовательно, написано параметрическое уравнение правой ветви гиперболы.

Эти же уравнения при $t \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ описывают левую ветвь гиперболы.

Заметим, что параметрическое уравнение гиперболы можно написать с помощью гиперболических функций. Действительно, положив

$$\begin{cases} x = a \ \operatorname{ch} t, \\ y = b \ \operatorname{sh} t, \end{cases} \quad t \in R,$$

нетрудно увидеть, что при изменении t от $-\infty$ до $+\infty$ величина x изменяется от a до $+\infty$, а y от $-\infty$ до $+\infty$. Кроме того, так как $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$, то оказывается $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Значит, наши уравнения описывают правую ветвь гиперболы.

Нетрудно понять, что левая ветвь гиперболы описывается так:

$$\begin{cases} x = -a \ \operatorname{ch} t, \\ y = b \ \operatorname{sh} t, \end{cases} \quad t \in R.$$

5. Пусть окружность без скольжения катится по прямой. Тогда точка такой окружности описывает кривую, которая называется циклоидой.

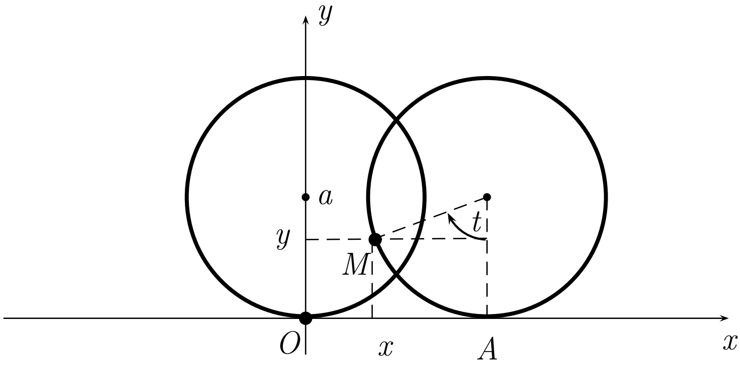

Рис. 11. Построение циклоиды

Выясним, как выглядит уравнение циклоиды. Для этого предположим, что окружность радиуса a катится по оси Ox и что мы следим за траекторией точки, имевшей вначале координаты $(0,0)$. После того, как окружность повернулась на угол t, эта точка заняла положение точки $M(x,y)$, как показано на рис. 11. Так как нет скольжения, то длина отрезка OA должна равняться длине дуги $AM = at$. Поэтому $x = OA - a\sin t = at - a\sin t = a(t - \sin t)$. Далее, из элементарных геометрических соображений видно, что должно быть $y = a - a\cos t = a(1-\cos t)$. Итак, мы получили параметрическое уравнение циклоиды

$$\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t), \end{cases} \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

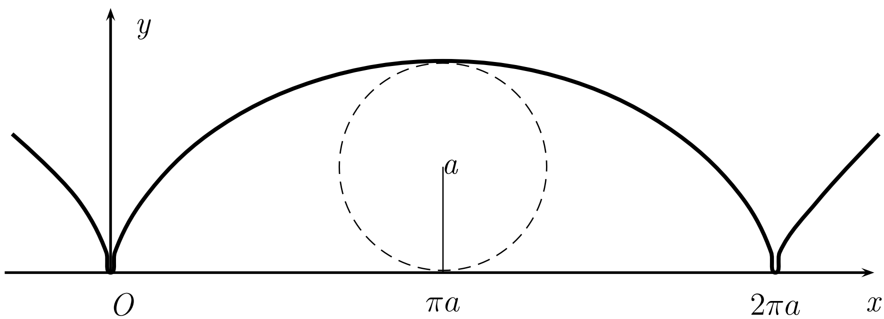

Рис. 12. Циклоида

Заметим, что при $t \in [0, 2\pi]$ уравнение описывает первую арку циклоиды.

1.26. Параметрическое дифференцирование

Если на линии

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta],$$

каждому значению x отвечает одно-единственное значение y, то мы будем говорить, что y является параметрически заданной функцией от x.

Например, хорошо видно, что на циклоиде каждому значению x отвечает одно значение y, так что y оказывается параметрически заданной функцией от x.

Выясним, как находятся производные при параметрическом задании функции.

Однако прежде договоримся об обозначениях: в дальнейшем производные по аргументу t мы будем обозначать не штрихами, а точками. Так, например, первую и вторую производные от $\varphi(t)$ будем записывать в виде $\dot{\varphi}(t)$ и $\ddot{\varphi}(t)$.

Теперь вспомним, что $y' = \dfrac{dy}{dx}$, а $dx = \dot{\varphi}(t)dt$ и $dy = \dot{\psi}(t)dt$. Значит,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{\psi}(t)dt}{\dot{\varphi}(t)dt} = \frac{\dot{\psi}(t)}{\dot{\varphi}(t)}.$$

Таким образом, мы нашли производную параметрически заданной функции. Естественно, что эта производная выражается через параметр.

Найдя y', мы можем теперь найти y'' тем же способом, которым находили y'. Действительно,

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d\left(\dfrac{\dot{\psi}(t)}{\dot{\varphi}(t)}\right)}{\dot{\varphi}(t)dt} = \frac{\dfrac{\ddot{\psi}(t)\dot{\varphi}(t) - \dot{\psi}(t)\ddot{\varphi}(t)}{\dot{\varphi}^2(t)}dt}{\dot{\varphi}(t)dt} = \frac{\ddot{\psi}(t)\dot{\varphi}(t) - \dot{\psi}(t)\ddot{\varphi}(t)}{\dot{\varphi}^3(t)}.$$

Нашли вторую производную.

Заметим, что полученные нами выражения для первой и второй производных часто записывают в таком виде:

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}, \quad y'' = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}.$$

Аналогичным образом, используя равенство $y^{(k)} = \dfrac{dy^{(k-1)}}{dx}$, можно находить производные более высоких порядков.

Пример 1. Пусть

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad t \in (-\infty, +\infty).$$

Тогда

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{a \sin t dt}{a(1 - \cos t)dt} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2},$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d\left(\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\right)}{a(1 - \cos t)dt} = \frac{-\dfrac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}dt}{2a\sin^2\frac{t}{2}dt} = -\frac{1}{4a\sin^4\frac{t}{2}}.$$

Пример 2. Если

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi],$$

то

$$\begin{cases} \dot{x} = -a\sin t, & \ddot{x} = -a\cos t, \\ \dot{y} = b\cos t, & \ddot{y} = -b\sin t. \end{cases}$$

Теперь, используя полученные выше формулы, получаем

$$y' = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t,$$

$$y'' = \frac{-b\sin t(-a\sin t) - b\cos t(-a\cos t)}{(-a\sin t)^3} = -\frac{b}{a^2\sin^3 t}.$$

1.27. Основные теоремы дифференциального исчисления

Теорема Ферма (P. Fermat, 1601-1665). Пусть функция $f(x)$ имеет производную $f'(x)$ на интервале (a, b). Если в некоторой точке x_0 этого интервала $f(x)$ принимает наибольшее или наименьшее значение, то $f'(x_0) = 0$.

Доказательство. В обоих случаях доказательство проводится одинаково. Поэтому мы рассмотрим лишь один из них. Предположим, что x_0 - точка наименьшего значения функции. Возьмем в (a, b) другую точку $x_0 + \Delta x_0$. По условию, $f(x_0) \leqslant f(x_0 + \Delta x_0)$, а потому $f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0) \geqslant 0$.

Предположим, что $\Delta x_0 \geqslant 0$. Тогда $\dfrac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0} \geqslant 0$. Переходя в этом неравенстве к пределу, получим: $f'(x_0) \geqslant 0$.

Предположив, что $\Delta x_0 \leqslant 0$, мы точно таким же образом получим неравенство $f'(x_0) \leqslant 0$.

Итак, $f'(x_0)$ не меньше нуля и не больше нуля. Следовательно, $f'(x_0) = 0$. Теорема доказана.

Геометрический смысл этой теоремы весьма прост: в тех точках, где гладкая, то есть имеющая производную, функция достигает наибольшего или наименьшего значений, касательная к ее графику параллельна оси Ox, если эти точки лежат внутри области задания.

Отметим два важных обстоятельства, связанные с доказанной теоремой.

Во-первых, при доказательстве теоремы мы существенно использовали тот факт, что точка x_0 лежит внутри промежутка задания функции. Если бы точка попала на границу промежутка, то брать приращение Δx_0 можно было бы только одного знака.

Во-вторых, равенство $f'(x_0) = 0$ необходимо для наличия наибольшего или наименьшего значения, но не достаточно для этого. Точки, в которых $f'(x_0) = 0$, называют стационарными точками функции $f(x)$.

Теорема Ролля (M. Rolle, 1652-1719). Пусть функция $f(x)$ имеет производную на промежутке $[a, b]$ и на концах промежутка принимает одинаковые значения, то есть $f(a) = f(b)$. Тогда внутри промежутка найдется такая точка c, в которой $f'(c) = 0$.

Доказательство. Так как во всех точках $[a, b]$ существует $f'(x)$, то функция $f(x)$ непрерывна на всем $[a, b]$. В силу теоремы Вейерштрасса, непрерывная на замкнутом промежутке $[a, b]$ функция достигает на этом промежутке наибольшего и наименьшего значений. Обозначим эти значения соответственно M и m.

Если $M = m$, то, очевидно, функция $f(x)$ постоянна на $[a, b]$. Поэтому во всех точках c, лежащих внутри промежутка, $f'(c) = 0$.

Если $M > m$, то либо точка наибольшего, либо точка наименьшего значения окажется внутри промежутка, поскольку на концах его значения функции одинаковы. Обозначим эту точку через c. По теореме Ферма, в этой точке окажется $f'(c) = 0$. Теорема доказана.

Геометрический смысл теоремы Ролля такой: если гладкая функция принимает на концах промежутка одинаковые значения, то на ее графике найдется хотя бы одна точка, в которой касательная будет параллельна оси Ox.

Теорема (формула) Лагранжа (J. L. Lagrange, 1736-1813). Если функция $f(x)$ имеет производную $f'(x)$ на промежутке $[a, b]$, то внутри промежутка найдется такая точка c, в которой будет выполняться равенство

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Доказательство. Построим вспомогательную функцию

$$\psi(x) = f(x) + \lambda x,$$

в которой подберем λ так, чтобы было $\psi(a) = \psi(b)$. Это условие приводит к равенству $f(a) + \lambda a = f(b) + \lambda b$, из которого находится

$\lambda = -\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Следовательно,

$$\psi(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x.$$

Функция $\psi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Значит, внутри промежутка $[a,b]$ найдется точка c, в которой будет $\psi'(c)=0$, то есть $f'(c) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$. Отсюда $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Теорема доказана.

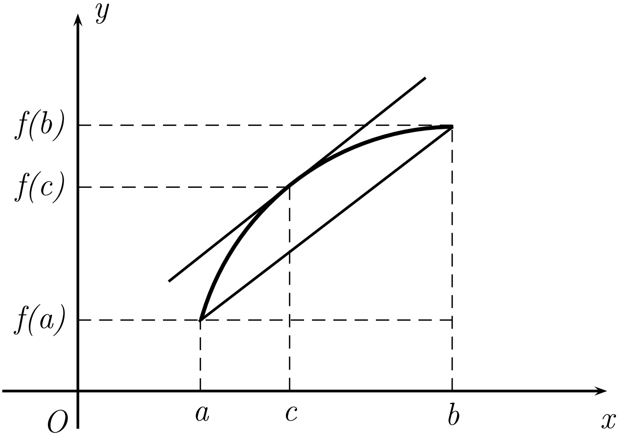

Рис. 13. Геометрический смысл теоремы Лагранжа

Формула Лагранжа имеет простой геометрический смысл: видно из рис. 13 , что величина $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ является угловым коэффициентом секущей, проведенной через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ графика функции, а производная $f'(c)$ - угловой коэффициент касательной, проведенной к графику в точке $(c, f(c))$. Равенство угловых коэффициентов означает параллельность прямых. Следовательно, если две точки графика функции соединить секущей, то между этими точками найдется такая, в которой касательная к графику будет параллельна этой секущей.

Формулу Лагранжа часто записывают в виде

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

и называют формулой конечных приращений.

Следствие. Если $f'(x) = 0$ на некотором промежутке (a, b), то на этом промежутке функция постоянна.

Действительно, возьмем на промежутке две точки x_1 и x_2. В силу формулы Лагранжа,

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \quad c \in (x_1, x_2).$$

Очевидно, что $c \in (a, b)$, а потому $f'(c) = 0$. Значит, $f(x_1) = f(x_2)$. Таким образом, для любых двух точек значения функции одинаковы, а это означает, что она постоянна.

Теорема (формула) Коши (A. L. Cauchy, 1789-1857). Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют производные на промежутке $[a, b]$, причем $g'(x) \neq 0$. Тогда внутри промежутка найдется такая точка c, в которой выполняется равенство

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что $g(b) - g(a) \neq 0$. В самом деле, если бы было $g(b) - g(a) = 0$, то, в силу теоремы Лагранжа, нашлась бы точка c, в которой $g'(c) = 0$, а это противоречит условию $g'(x) \neq 0$. Теперь, как и в предыдущем доказательстве, введем вспомогательную функцию

$$\psi(x) = f(x) + \lambda g(x)$$

и подберем λ так, чтобы выполнялось равенство $\psi(a) = \psi(b)$. Нетрудно показать, что $\lambda = -\dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$, а потому

$$\psi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(x).$$

Функция $\psi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Значит, внутри промежутка найдется точка c, в которой будет $\psi'(c) = 0$, то есть $f'(c) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0$. Отсюда очевидным образом следует доказываемое равенство.

Полезно обратить внимание на то, что формула Лагранжа является частным случаем формулы Коши. Действительно, положив $g(x) = x$, находим $g(a) = a, \quad g(b) = b$ и $g'(c) = 1$ при любом c. Подставив эти значения в формулу Коши, получим формулу Лагранжа.

1.28. Правило Лопиталя

Укажем один очень удобный способ нахождения пределов. Пусть на промежутке $[a, b]$ заданы функции $f(x)$ и $g(x)$, имеющие производные, причем $f(a) = g(a) = 0$. Так как эти функции имеют производные, то они непрерывны, а потому $f(x) \to 0$ и $g(x) \to 0$ при $x \to a$. Покажем, что в этом случае имеет место равенство

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

если предел отношения производных существует.

Очевидно, что

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)}.$$

К последней дроби применим формулу Коши. Получим

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)},$$

где $a < c < x$.

Ясно, что $c \to a$ при $x \to a$. Поэтому

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to a} \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Но

$$\lim_{c\to a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Значит,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Это равенство называется правилом Лопиталя (G. F. de l'Hospitale, 1661-1704).

Пример 1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{1 - \frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to 0} \frac{(1 - \cos x)\cos^2 x}{\cos^2 x - 1} =$$

$$= -\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x}{1 + \cos x} = -\frac{1}{2}.$$

Пример 2. Найдем
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch} x-1}{x^2}.$$
Видно, что дробь является отношением двух бесконечно малых. Применяя к ней правило Лопиталя, находим, что
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch} x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh} x}{2x}.$$
Новая дробь опять оказалась отношением двух бесконечно малых. Поэтому применим снова правило Лопиталя. Получим:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch} x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{ch} x}{2}=\frac{1}{2}.$$

Можно доказать, что правило Лопиталя остается справедливым в случае, когда $f(x)\to\infty$ и $g(x)\to\infty$ при $x\to a$. Кроме того, оно остается верным и тогда, когда $x\to\infty$. Мы не будем доказывать справедливость этих утверждений.

Применим правило Лопиталя для сравнения скорости возрастания функций $\ln x$ и x^μ $(\mu>0)$ при $x\to+\infty$ (обе эти функции стремятся к бесконечности при $x\to+\infty$).

Имеем
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\mu}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\mu x^{\mu-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\mu x^\mu}=0.$$
Таким образом, если $\mu>0$, то $\ln x=o(x^\mu)$ при $x\to+\infty$, то есть x^μ растет гораздо быстрее, чем $\ln x$.

Теперь сравним x^μ $(\mu>0)$ и e^x при $x\to+\infty$. Для этого возьмем какое-нибудь целое n, которое больше μ, и сравним x^n с e^x. Используя повторно правило Лопиталя, получаем
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x}=\ldots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{e^x}=0.$$
Итак, $x^n=o(e^x)$ при $x\to+\infty$. Так как $\mu<n$, то тем более будет $x^\mu=o(e^x)$ при $x\to+\infty$, то есть x^μ растет гораздо медленнее, чем e^x.

Из проведенных нами сравнений следует, что при всех достаточно больших значениях x должно выполняться такое неравенство:
$$\ln x<x^\mu<e^x.$$

1.29. Асимптоты плоских линий

Если функция $f(x) \to \infty$ при $x \to a+0$, то это означает, что ее график приближается к вертикальной прямой $x = a$. Эта прямая называется вертикальной асимптотой функции $f(x)$.

Аналогично определяется вертикальная асимптота при $x \to a-0$.

Если $f(x) \to b$ при $x \to +\infty$, то это означает, что с возрастанием x график приближается к горизонтальной прямой $y = b$. Такая прямая называется горизонтальной асимптотой функции $f(x)$.

Так же определяется горизонтальная асимптота при $x \to -\infty$.

Пример. Рассмотрим функцию $y = e^{\frac{1}{x}}, \quad x \in (-\infty, 0) + (0, +\infty)$.

Видно,что

$$\lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1; \quad \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1; \quad \lim_{x\to-0} e^{\frac{1}{x}} = 0; \quad \lim_{x\to+0} e^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

Значит, функция имеет при $x \to \pm\infty$ горизонтальную асимптоту $y = 1$ и при $x \to +0$ вертикальную асимптоту $x = 0$. График этой функции приведен на рис. 14.

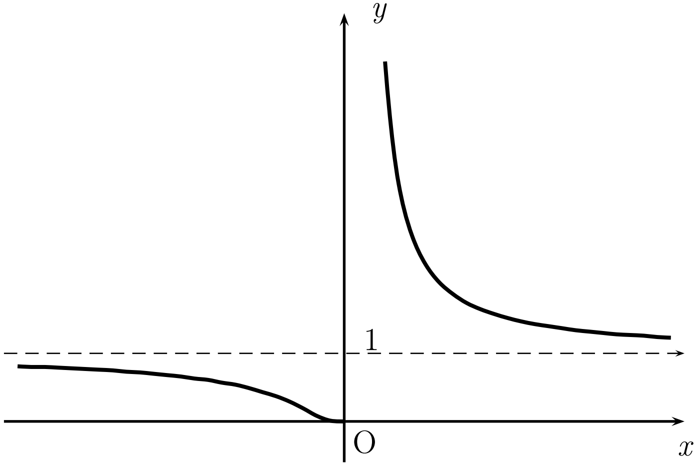

Рис. 14. График функции $e^{\frac{1}{x}}$

Если

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx - b) = 0,$$

то это означает, что с возрастанием x график функции $y = f(x)$ приближается к прямой $y = kx + b$. Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой функции $f(x)$.

Аналогично вводится наклонная асимптота при $x \to -\infty$.

Из данного определения очевидно, что если функцию можно представить в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, то $y = kx + b$ будет наклонной асимптотой.

Пример.

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x + 1}, \quad x \in (-\infty, -1) + (-1, +\infty).$$

Проведя деление, представим функцию в виде $f(x) = x + 1 - \dfrac{1}{x+1}$. Так как $\dfrac{1}{x+1} \to 0$ при $x \to \pm\infty$, то прямая $y = x + 1$ является наклонной асимптотой функции при $x \to \pm\infty$.

Нетрудно видеть, что прямая $x = -1$ оказывается вертикальной асимптотой нашей функции при $x \to -1 \pm 0$. Действительно,

$$\lim_{x \to -1-0} (x + 1 - \frac{1}{x+1}) = +\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x \to -1+0} (x + 1 - \frac{1}{x+1}) = -\infty.$$

График рассмотренной функции приведен на рис. 15.

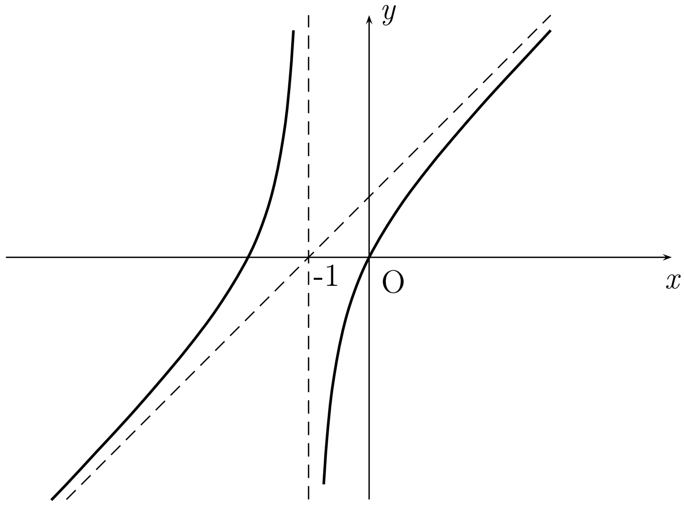

Рис. 15. График функции $y = \dfrac{x^2 + 2x}{x + 1}$

Приведем еще один способ нахождения наклонных асимптот. Для этого вначале заметим, что если мы знаем k, то из соотношения

$(f(x)-kx-b) \to 0$ получим $(f(x)-kx) \to b$ при $x \to \infty$. Далее, если $(f(x)-kx-b) \to 0$ при $x \to \infty$, то, тем более, $\dfrac{f(x)-kx-b}{x} \to 0$. Это можно переписать в виде $\left(\dfrac{f(x)}{x} - k - \dfrac{b}{x}\right) \to 0$ при $x \to \infty$. Так как $\dfrac{b}{x} \to 0$ при $x \to \infty$, то $\left(\dfrac{f(x)}{x} - k\right) \to 0$ или $\dfrac{f(x)}{x} \to k$ при $x \to \infty$.

Итак, функция $f(x)$ имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$, если существуют два предела:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx).$$

Пример. Пусть $f(x) = x \operatorname{arctg} x, \quad x \in R$. Найдем наклонные асимптоты.

Имеем

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Теперь находим b:

$$b = \lim_{x\to+\infty} (x \operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}x) = \lim_{x\to+\infty} x(\operatorname{arctg} x - \frac{\pi}{2}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x - \dfrac{\pi}{2}}{\dfrac{1}{x}}.$$

К последней дроби применим правило Лопиталя. Получим

$$b = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{1+x^2} = -1.$$

Следовательно, при $x \to +\infty$ функция $f(x) = x \operatorname{arctg} x$ имеет наклонную асимптоту $y = \dfrac{\pi}{2}x - 1$.

Очевидно, что $f(-x) = f(x)$, так что график функции симметричен относительно оси Oy. Поэтому она имеет при $x \to -\infty$ наклонную асимптоту, симметричную относительно оси Oy с уже построенной. Уравнение этой асимптоты $y = -\dfrac{\pi}{2}x - 1$.

Заметим, что $f(x) = x \operatorname{arctg} geqslant 0$ при всех $x \in R$ и что $f(0) = 0$.

График и асимптоты функции $f(x) = x \operatorname{arctg} x$ приведены нами на рис. 16.

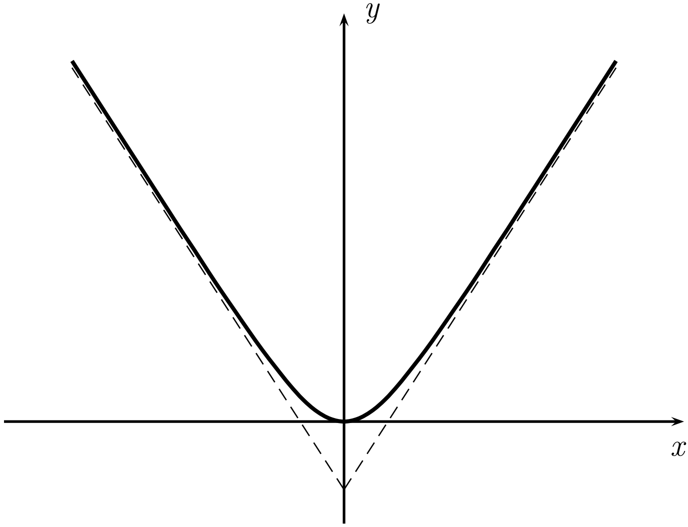

Рис. 16. График функции $y = x \operatorname{arctg} x$

1.30. Исследование монотонности функции

Выше, в разделе 1.9, мы дали определения возрастания и убывания функции. В этом разделе мы выясним, как можно исследовать монотонность с помощью производной. Для этого докажем следующее утверждение.

Теорема. Функция $f(x)$ возрастает на промежутке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда при $\forall x \in [a, b]$ выполняется условие $f'(x) \geqslant 0$, и функция $f(x)$ убывает на промежутке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда при $\forall x \in [a, b]$ выполняется условие $f'(x) \leqslant 0$.

Доказательство. Предположим, что $f(x)$ возрастает. Возьмем на промежутке $[a, b]$ две точки x и $x + \Delta x$ и найдем приращение функции $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$. Так как функция возрастает, то $\Delta f(x)$ и Δx имеют одинаковые знаки. Поэтому $\dfrac{\Delta f(x}{\Delta x} \geqslant 0$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $\Delta x \to 0$, получим $f'(x) \geqslant 0$. Таким образом, если $f(x)$ возрастает, то $f'(x) \geqslant 0$.

Теперь допустим, что $f'(x) \geqslant 0$ при всех $x \in [a, b]$. Возьмем на промежутке две точки x_1 и x_2 такие, что $x_1 < x_2$, и найдем $f(x_1)$ и $f(x_2)$. Затем к разности $f(x_2) - f(x_1)$ применим формулу Лагранжа.

Получим

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1), \quad c \in (x_1, x_2).$$

Очевидно, что в последнем равенстве правая часть $f'(c)(x_2 - x_1) \geqslant 0$. Поэтому $f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0$, а это означает, что $f(x)$ возрастает. Таким образом, если $f'(x) \geqslant 0$, то $f(x)$ возрастает.

Вторая половина теоремы доказывается так же.

Пример. Дана функция $f(x) = (x^2 - 3x - 3)e^x, \quad x \in R$. Найти промежутки ее монотонности.

Для решения вначале найдем производную:

$$f'(x) = (2x - 3)e^x + (x^2 - 3x - 3)e^x = (x^2 - x - 6)e^x.$$

Так как $e^x > 0$, то знак производной совпадает со знаком квадратного трехчлена $x^2 - x - 6$. Как известно, трехчлен может менять знак лишь в точках, являющихся его корнями. Нетрудно видеть, что рассматриваемый трехчлен имеет корни $x_1 = -2$ и $x_2 = 3$, а потому на промежутках $(-\infty, -2)$, $(-2, 3)$, $(3, +\infty)$ сохраняет свой знак. При этом $x^2 - x - 6 > 0$ на промежутках $(-\infty, -2)$ и $(3, +\infty)$, а на промежутке $(-2, 3)$ оказывается $x^2 - x - 6 < 0$. Следовательно, $f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty, -2) + (3, +\infty)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in (-2, 3)$. В силу доказанной теоремы, это означает, что $f(x)$ возрастает на промежутках $(-\infty, -2)$ и $(3, +\infty)$ и убывает на промежутке $(-2, 3)$.

1.31. Экстремумы функций

Определение. Функция $f(x)$ имеет максимум в точке x_0, если существует такая окрестность этой точки $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, что для $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполняется условие $f(x_0) \geqslant f(x)$.

Определение. Функция $f(x)$ имеет минимум в точке x_0, если существует такая окрестность этой точки $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, что для $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ выполняется условие $f(x_0) \leqslant f(x)$.

Точки максимума и минимума называют точками экстремума.

Подчеркнем одно важное обстоятельство: точки экстремума всегда являются внутренними точками области задания функции.

Если к промежутку $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, содержащему точку экстремума, применить теорему Ферма, то окажется, что $f'(x_0) = 0$. Следовательно, справедливо утверждение:

Теорема 1 (необходимое условие экстремума). Если дифференцируемая функция f в точке x_0 имеет экстремум, то $f'(x_0) = 0$.

Эту теорему можно сформулировать и так: если в точке x_0 дифференцируемая функция имеет экстремум, то $df(x_0) = 0$.

Заметим, что равенство $f'(x_0) = 0$ необходимо, но не достаточно для существования экстремума в точке x_0.

Точки, в которых $f'(x) = 0$, как и раньше, будем называть стационарными точками функции. Ясно, что точки экстремума следует искать среди множества стационарных точек, а также среди точек, в которых $f'(x)$ не существует.

Приведем некоторые достаточные условия экстремума.

Теорема 2 (первое достаточное условие экстремума). Если производная $f'(x)$ меняет знак с $+$ на $-$ при переходе через точку x_0, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум. Если производная $f'(x)$ меняет знак с $-$ на $+$ при переходе через точку x_0, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет минимум.

Доказательство. Оба утверждения доказываются одинаково, поэтому мы докажем лишь первое. Пусть производная $f'(x)$ меняет знак с $+$ на $-$ при переходе через x_0. Это означает, что на некотором промежутке $(x_0 - \delta, x_0)$ будет $f'(x) > 0$ и на некотором промежутке $(x_0, x_0 + \delta)$ окажется $f'(x) < 0$. Отсюда следует, что $f(x)$ возрастает на промежутке $(x_0 - \delta, x_0)$ и убывает на промежутке $(x_0, x_0 + \delta)$. Но в таком случае ясно, что $f(x_0) \geqslant f(x)$ при всех $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Значит, x_0 - точка максимума. Теорема доказана.

Пример 1. Исследуем на экстремум функцию $f(x) = x \ln x$, заданную при $x \in (0, +\infty)$.

Находим производную $f'(x) = \ln x + 1$. Приравняем производную к нулю: $\ln x + 1 = 0$. Из этого уравнения найдем стационарную точку $x_0 = e^{-1}$.

При $x < e^{-1}$ имеем $\ln x < -1$, а потому $f'(x) = \ln x + 1 < 0$. Если же $x > e^{-1}$, то $\ln x > -1$ и $f'(x) = \ln x + 1 > 0$. Таким образом, при переходе через точку $x_0 = e^{-1}$ производная меняет знак с $-$ на $+$. Следовательно, в этой точке функция имеет минимум. Найдем значение этого минимума: $f(e^{-1}) = e^{-1} \ln e^{-1} = -e^{-1}$.

Пример 2. Пусть $f(x) = x^3, \quad x \in R$. Так как $f'(x) = 3x^2$, то стационарной точкой будет $x_0 = 0$. Видно, что $f'(x) = x^2 \geqslant 0$ при всех x, то есть не меняет знака. Следовательно, в точке $x_0 = 0$ экстремума нет.

Теорема 3 (второе достаточное условие экстремума). Если в точке x_0 выполняются условия: $f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) < 0$, то в этой точке $f(x)$ имеет максимум. Если в точке x_0 выполняются условия: $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) > 0$, то в этой точке $f(x)$ имеет минимум.

Доказательство. Пусть $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) < 0$. Будем считать, что $f''(x)$ непрерывна. Тогда, в силу непрерывности, $f''(x)$ сохранит свой знак в некоторой окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0, то есть в этой окрестности $f''(x) < 0$. Значит, в этой окрестности $f'(x)$ убывает. Так как $f'(x_0) = 0$, то ясно, что слева от точки x_0 будет $f'(x) > 0$, а справа $f'(x) < 0$. Таким образом, при переходе через точку x_0 производная меняет знак с $+$ на $-$. Значит, в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум. Вторая часть утверждения доказывается так же.

Пример 3. Найти экстремумы функции $f(x) = e^{-x} \sin x$, $x \in R$.

Найдем вначале производные функции

$$f'(x) = (\cos x - \sin x)e^{-x}, \quad f''(x) = -2e^{-x} \cos x.$$

Затем для нахождения стационарных точек приравниваем $f'(x)$ к нулю: $(\cos x - \sin x)e^{-x} = 0$. Отсюда $\cos x - \sin x = 0$, или $\operatorname{tg} x = 1$. Это уравнение имеет бесконечно много решений: $x_k = k\pi + \dfrac{\pi}{4}$, $k \in Z$. Найденные x_k подставляем в $f''(x)$. Получаем

$$f''(x_k) = -2e^{-(k\pi + \frac{\pi}{4})} \cos(k\pi + \frac{\pi}{4}) = -\sqrt{2}e^{-(k\pi + \frac{\pi}{4})} \cos k\pi =$$

$$= (-1)^{k+1}\sqrt{2}e^{-(k\pi + \frac{\pi}{4})}.$$

Теперь видно, что при $k = 2m$, $m \in Z$ оказывается $f''(x_{2m}) < 0$. Значит, в этих точках функция имеет максимумы.

Если же $k = 2m + 1$, $m \in Z$, то $f''(x_{2m+1}) > 0$, а потому в этих точках функция имеет минимумы.

Таким образом, функция имеет бесконечно много экстремальных точек. Нетрудно видеть, что в точках экстремума

$$f(x_k) = (-1)^k \frac{\sqrt{2}}{2} \, e^{-(k\pi + \frac{\pi}{4})}.$$

1.32. Исследование направления выпуклости функции

Определение. Функцию $f(x)$ называют выпуклой вверх на промежутке $[a, b]$, если на этом промежутке любая хорда ее графика лежит не выше графика. Если же любая хорда графика лежит не ниже графика, то функцию называют выпуклой вниз.

На рис. 17 приведен график функции, которая выпукла вверх на промежутке $[a, c]$ и выпукла вниз на промежутке $[c, b]$.

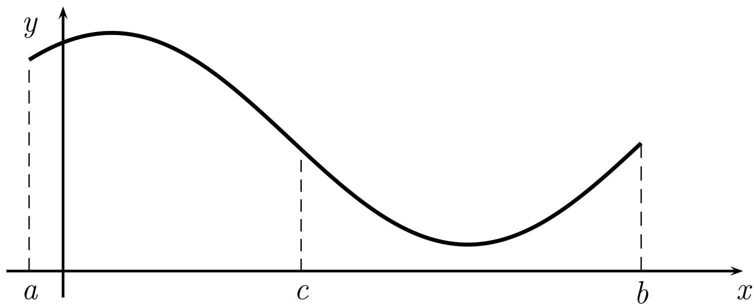

Рис. 17. Пример графика функции

Если функция гладкая, то есть к графику функции можно провести касательную в любой точке, то оказывается справедливым такое утверждение: всякая хорда лежит не выше (не ниже) графика на промежутке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда всякая касательная лежит не ниже (не выше) графика.

Мы не будем доказывать это утверждение, однако воспользуемся им для того, чтобы дать другое определение направления выпуклости.

Определение. Функция $f(x)$ выпукла вверх (вниз) на промежутке $[a, b]$, если на этом промежутке любая касательная к ее графику лежит не ниже (не выше) графика.

Используя это определение, выясним, как можно исследовать направление выпуклости с помощью производных.

Теорема 1. Для того чтобы на промежутке $[a, b]$ функция $f(x)$ была выпукла вверх, необходимо и достаточно, чтобы на этом промежутке ее производная $f'(x)$ убывала. Для того чтобы на промежутке $[a, b]$ функция $f(x)$ была выпукла вниз, необходимо и достаточно, чтобы на этом промежутке ее производная $f'(x)$ возрастала.

Доказательство. Предположим, что функция выпукла вверх, то есть всякая касательная лежит выше графика. Возьмем на $[a, b]$ точки x_1 и x_2 такие, что $x_1 < x_2$. Напишем уравнения касательных, проведенных к графику в этих точках:

$$y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) \;\text{ и }\; y = f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2).$$

В силу выпуклости вверх, для $\forall x \in [a, b]$ должны выполняться неравенства

$$f(x) \leqslant f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) \text{ и } f(x) \leqslant f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2).$$

В первом из неравенств заменим x на x_2, во втором - на x_1. Получим

$$f(x_2) \leqslant f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1),$$

$$f(x_1) \leqslant f(x_2) + f'(x_2)(x_1 - x_2).$$

Сложив последние неравенства, имеем

$$0 \leqslant f'(x_1)(x_2 - x_1) + f'(x_2)(x_1 - x_2),$$

или

$$-f'(x_2)(x_1 - x_2) \leqslant f'(x_1)(x_2 - x_1).$$

Так как $x_2 - x_1 > 0$, то, разделив обе части неравенства на эту разность, получаем $f'(x_2) \leqslant f'(x_1)$. Это означает, что $f'(x)$ убывает. Итак, из предположения о выпуклости вверх функции $f(x)$ следует убывание $f'(x)$.

Теперь предположим, что $f'(x)$ убывает, и покажем, что в этом случае функция выпукла вверх. Для этого возьмем какую-нибудь точку $x_1 \in [a, b]$ и напишем уравнение касательной, проведенной к графику в этой точке:

$$y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1).$$

Обозначим через Δ разность ординат графика $f(x)$ и касательной, то есть

$$\Delta = f(x) - f(x_1) - f'(x_1)(x - x_1).$$

В силу формулы Лагранжа, это можно переписать так

$$\Delta = f'(c)(x - x_1) - f'(x_1)(x - x_1) = (f'(c) - f'(x_1))(x - x_1),$$

причем точка c лежит между x_1 и x.

Так как $f'(x)$ убывает, то разности $x - x_1$ и $f'(c) - f'(x_1)$ имеют противоположные знаки. Поэтому их произведение Δ отрицательно. Значит, ордината функции меньше ординаты касательной, то есть функция выпукла вверх.

Теорема доказана.

Как мы знаем, производная $f'(x)$ убывает на промежутке $[a,b]$ тогда и только тогда, когда $f''(x) \leqslant 0$ на этом промежутке. Значит, функция $f(x)$ будет выпуклой вверх на $[a,b]$ тогда и только тогда, когда на этом промежутке $f''(x) \leqslant 0$. Так же показывается, что $f(x)$ выпукла вниз на промежутке $[a,b]$ тогда и только тогда, когда на этом промежутке $f''(x) \geqslant 0$. Следовательно, справедлива

Теорема 2. Для того чтобы на промежутке $[a,b]$ функция $f(x)$ была выпукла вверх, необходимо и достаточно, чтобы на этом промежутке выполнялось условие $f''(x) \leqslant 0$. Для того чтобы на промежутке $[a,b]$ функция $f(x)$ была выпукла вниз, необходимо и достаточно, чтобы на этом промежутке выполнялось условие $f''(x) \geqslant 0$.

Точки, разделяющие промежутки с различными направлениями выпуклости, называют точками перегиба функции.

Очевидно, что в точках перегиба $f'(x)$ меняет характер монотонности, а $f''(x)$ меняет знак.

Пример. Пусть $f(x) = x^3 + 9x^2 + 24x - 12, \quad x \in R$. Исследуем ее направления выпуклости.

Для решения находим последовательно

$$f'(x) = 3x^2 + 18x + 24, \quad f''(x) = 6x + 18 = 6(x+3).$$

Очевидно, что $f''(x) < 0$ меняет свой знак в точке $x = -3$. При этом $f''(x) < 0$ на промежутке $(-\infty, -3)$ и $f''(x) > 0$ при $x \in (-3, +\infty)$. Следовательно, $f(x)$ выпукла вверх на промежутке $(-\infty, -3)$ и вниз на промежутке $(-3, +\infty)$.

Заметим, что $x = -3$ является точкой перегиба функции.

1.33. Примерный порядок исследования функции

Рассмотренные в предыдущих разделах теоремы позволяют проводить достаточно полное исследование характера функций. Мы укажем здесь примерный порядок проведения таких исследований.

1. Вначале полезно установить характерные особенности рассматриваемой функции. Например, периодичность, четность, нечетность, сохранение знака на некоторых промежутках и т.п. Это может упростить исследование. Например, если функция имеет период, то достаточно провести ее исследование только на одном периоде.

2. Далее следует рассмотреть поведение функции на концах области задания. В частности, проверить наличие или отсутствие асимптот.

3. Затем найти промежутки монотонности функции и параллельно с этим найти точки экстремума.

4. Наконец, исследовать направления выпуклости и найти точки перегиба.

После этого можно строить график функции. При этом характерные точки графика (экстремумы, точки перегиба) и асимптоты обычно намечаются в процессе исследования.

Мы говорили здесь об исследовании функций. На практике же обычно приходится исследовать формулы вида $y = f(x)$, в которых не указаны пределы изменения аргумента x. В этом случае вначале нужно найти область естественного задания рассматриваемой формулы.

Пример 1. Пусть $y = \dfrac{\ln x}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$.

Прежде всего заметим, что $y < 0$ при $0 < x < 1$, $y > 0$ при $x > 1$ и $y(1) = 0$

Исследуем поведение функции на левом конце области задания. Имеем:

$$\lim_{x \to +0} y = \lim_{x \to +0} \frac{\ln x}{x} = -\infty.$$

Значит, ось Oy является вертикальной асимптотой функции.

На правом конце области задания:

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Следовательно, функция имеет горизонтальной асимптотой ось Ox.

Теперь находим производную:

$$y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

Ясно, что $y' > 0$ при $1 - \ln x > 0$, то есть при $x < e$, и $y' < 0$ при $x > e$. Таким образом, на промежутке $(0, e)$ функция возрастает и на промежутке $(e, +\infty)$ убывает, а точка $x_1 = e$ является точкой максимума. Заметим, что $y(e) = e^{-1} \approx 0,368$.

Перейдем ко второй производной:

$$y'' = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}.$$

Легко видеть, что $y'' < 0$ при $x < e^{1,5}$ и $y'' > 0$ при $x > e^{1,5}$. Поэтому функция выпукла вверх на промежутке $(0, e^{1,5})$ и выпукла вниз на промежутке $(e^{1,5}, +\infty)$. Точка $x_2 = e^{1,5} \approx 4,482$ оказывается точкой перегиба и $y(e^{1,5}) = 1,5e^{-1,5} \approx 0,338$.

После проведенного исследования нетрудно построить график. Вид графика приведен на рис. 18.

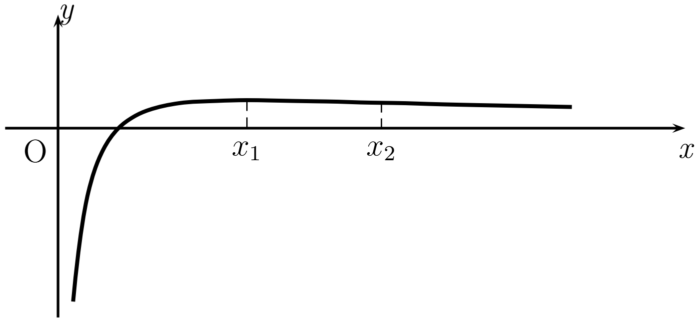

Рис. 18. График функции $y = \dfrac{\ln x}{x}$

Пример 2. Проведем исследование и построим график функции Гаусса (C. F. Gauss, 1777-1855)

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Заметим сразу же, что $y > 0$ при всех x, так что график функции лежит выше оси Ox. Кроме того, очевидно, что $y(-x) = y(x)$, то есть функция четная. Поэтому проведем исследование лишь на промежутке $[0, +\infty)$.

Во-первых, $y(0) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0,399$. Далее

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} = 0,$$

то есть ось Ox является горизонтальной асимптотой функции.

Найдем производную:

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Очевидно, что $y' < 0$ при $x > 0$. Следовательно, функция убывает на промежутке $[0, +\infty)$.

Вторая производная имеет вид:

$$y'' = \frac{x^2 - 1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Ясно, что $y'' < 0$ при $x \in (0,1)$ и $y'' > 0$ при $x \in (1, +\infty)$. Поэтому функция выпукла вверх на промежутке $(0,1)$ и вниз - на промежутке $(1, +\infty)$. Точка $x_1 = 1$ является точкой перегиба. Очевидно, что $y(1) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi e}} \approx 0,242.$

Заметим, что из симметрии графика видно, что $y(0) \approx 0,399$ является максимумом функции.

В соответствии с проведенным исследованием построим график функции(рис. 19).

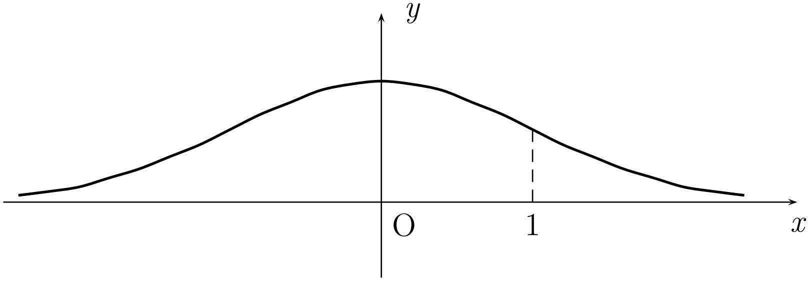

Рис. 19. График функции Гаусса

Пример 3. Исследуем формулу $y = (x-3)\sqrt[3]{x^2}$.

Очевидно, что естественной областью задания здесь является вся вещественная ось, то есть $x \in (-\infty, +\infty)$.

При этом $y < 0$ на промежутке $(-\infty, 3)$ и $y > 0$ на промежутке $(3, +\infty)$.

Выясним, как ведет себя функция на концах области задания:

$$\lim_{x\to-\infty}(x-3)\sqrt[3]{x^2} = -\infty \quad \text{и} \quad \lim_{x\to+\infty}(x-3)\sqrt[3]{x^2} = +\infty.$$

Так как

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x-3)\sqrt[3]{x^2}}{x} = +\infty,$$

то на обоих концах области задания асимптот нет.

Найдем производную нашей функции:

$$y' = \frac{5x-6}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Видно, что $y'(0) = \infty$, то есть производная в точке $x_1 = 0$ не существует, и что производная равна нулю в точке $x_2 = 1,2$. Значит, она может менять свой знак только в этих точках. Поэтому мы рассмотрим три промежутка: $(-\infty, 0)$, $(0; 1,2)$, $(1,2; +\infty)$.

Ясно, что $y' > 0$ при $x \in (-\infty, 0) + (1,2; +\infty)$, а при $x \in (0; 1,2)$ оказывается $y' < 0$. Поэтому функция возрастает на промежутках $(-\infty, 0)$ и $(1,2; +\infty)$ и убывает на промежутке $(0; 1,2)$.

Следовательно, функция имеет максимум в точке $x_1 = 0$ и минимум в точке $x_2 = 1,2$. При этом $y(1,2) = -1,8\sqrt[3]{1,44} \approx -2,03$ и $y(0) = 0$.

Находим вторую производную:

$$y'' = \frac{2(5x+3)}{9x\sqrt[3]{x}}.$$

При $x_1 = 0$ оказывается $y'' = \infty$, так что y'' не существует в этой точке, и $y'' = 0$ при $x = -0,6$. Поэтому область задания делим на три части: $(-\infty; -0,6)$, $(-0,6; 0)$, $(0, +\infty)$.

Видно, что $y'' < 0$ при $x \in (-\infty; -0,6)$. Значит, на этом промежутке функция выпукла вверх. Если $x \in (-0,6; 0)$ и $x \in (0; +\infty)$, то $y'' > 0$. Поэтому функция выпукла вниз на обоих промежутках. Точка $x_3 = -0,6$ является, очевидно, точкой перегиба. Заметим, что $y(-0,6) = -3,6\sqrt[3]{0,36} \approx -2,56$.

График, построенный по результатам исследования, приведен на рис. 20.

Пример 4. Рассмотрим функцию $y = \cos 2x + \cos x$, $x \in R$.

Вначале отметим периодичность этой функции. Действительно,

$$y(x + 2\pi) = \cos 2(x + 2\pi) + \cos(x + 2\pi) = \cos 2x + \cos x = y(x),$$

то есть функция имеет период 2π. Значит, достаточно изучить поведение этой функции на каком-нибудь промежутке, имеющем длину 2π. Например, можно провести исследование лишь на промежутке $[-\pi, \pi]$.

Очевидно также, что наша функция четная, то есть $y(-x) = y(x)$. Поэтому достаточно ограничиться ее изучением лишь на промежутке $[0, \pi]$. Это мы и сделаем.

Прежде всего найдем значения функции на концах этого промежутка: $y(0) = 2$, $y(\pi) = 0$.

Затем найдем производную: $y' = -2\sin 2x - \sin x$.

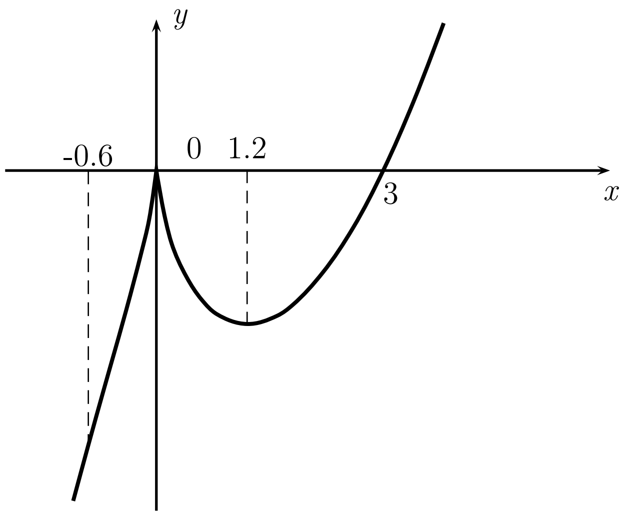

Рис. 20. График функции $y = (x-3)\sqrt[3]{x^2}$

Чтобы исследовать знаки производной, преобразуем ее следующим образом:

$$y' = -4\sin x\cos x - \sin x = -4\sin x\left(\cos x + \frac{1}{4}\right).$$

Из $y' = 0$ следует, что должно быть $\sin x = 0$ или $\cos x + \dfrac{1}{4} = 0$. Уравнение $\sin x = 0$ внутри промежутка $[0, \pi]$ корней не имеет. Из второго уравнения находим $x_1 = \arccos\left(-\dfrac{1}{4}\right) = \pi - \arccos\dfrac{1}{4} \approx 1,823$.

Нетрудно видеть, что $y' < 0$ на промежутке$(0, x_1)$ и что $y' > 0$ на промежутке (x_1, π). Поэтому функция убывает на промежутке $(0, x_1)$ и возрастает на промежутке (x_1, π), а точка x_1 является точкой минимума. В этой точке

$$y(x_1) = \cos 2\left(\pi - \arccos\frac{1}{4}\right) + \cos\left(\pi - \arccos\frac{1}{4}\right) =$$

$$= \cos\left(2\arccos\frac{1}{4}\right) - \cos\arccos\frac{1}{4} =$$

$$= 2\cos^2\arccos\frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{4} = \frac{2}{16} - 1 - \frac{1}{4} = -1,125.$$

Перейдем к исследованию направлений выпуклости. Для этого рассмотрим вторую производную: $y'' = -4\cos 2x - \cos x$.

Приравнивая y'' к нулю, получаем такое уравнение:

$$4\cos 2x + \cos x = 0,$$

или

$$4(2\cos^2 x - 1) + \cos x = 0,$$

или, наконец,

$$8\cos^2 x + \cos x - 4 = 0.$$

Решая это уравнение, находим

$$\cos x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{129}}{16},$$

откуда

$$x_2 = \arccos\frac{-1+\sqrt{129}}{16} \approx 0,867, \;\; x_3 = \arccos\frac{-1-\sqrt{129}}{16} \approx 2,453.$$

Теперь нетрудно увидеть, что $y'' < 0$ на промежутках $(0, x_2)$ и (x_3, π) и $y'' > 0$ на промежутке (x_2, x_3). Значит, функция выпукла вверх на $(0, x_2)$ и (x_3, π) и выпукла вниз на (x_2, x_3), а точки x_2 и x_3 являются точками перегиба. При этом

$$y(x_2) \approx \cos 1,734 + \cos 0,867 \approx 0,485,$$

$$y(x_3) \approx \cos 4,906 + \cos 2,453 \approx -0,580.$$

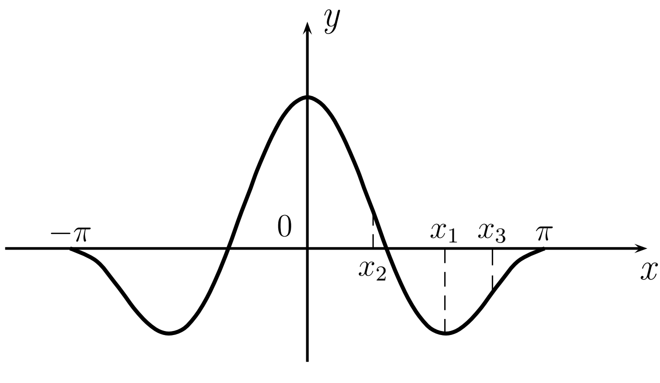

Рис. 21. График функции $y = \cos 2x + \cos x$

На рис. 21 приведен график нашей функции на промежутке $[-\pi, \pi]$, построенный только для одного периода. Заметим, что из четности следует, что функция имеет максимум при $x = 0$.

Не представляет особого труда продолжить этот график на другие точки области задания.

1.34. Формула Тейлора

Большинство функций, с которыми мы имеем дело, обладает одним весьма неприятным свойством: значения этих функций невозможно вычислить по значению аргумента с помощью арифметических операций. Например, никакие арифметические операции не дают нам возможности найти точные значения $\ln 2$ или $\sin 3$. Этого недостатка лишен лишь один тип функций - многочлены. Действительно, если имеется многочлен

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0,$$

то, задав x, мы можем вычислить $P_n(x)$ с помощью сложений, вычитаний и умножений. Поэтому возник такой вопрос: нельзя ли произвольную функцию заменить с достаточной степенью точности многочленом? Оказывается, что для очень многих функций такая замена возможна. Покажем, как это делается.

Пусть задана функция $f(x)$ и в некоторой точке a нам известны значения ее и ее первых n производных: $f(a),\ f'(a),\ f''(a),\ ...,\ f^{(n)}(a)$. Мы хотим построить такой многочлен $T_n(x)$ степени n, который в некоторой окрестности точки a как можно меньше отличался бы от нашей функции. Для этого мы потребуем, чтобы в точке a значения многочлена и его производных совпадали, соответственно, со значениями функции и ее производных.

Итак, построим многочлен $T_n(x)$, удовлетворяющий условиям

$$T_n(a) = f(a),\ T_n'(a) = f'(a),\ T_n''(a) = f''(a),\ ...,\ {T_n}^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).$$

Будем искать $T_n(x)$ в виде

$$T_n(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + ... + c_n(x-a)^n.$$

Ясно, что

$$T_n'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + ... + nc_n(x-a)^{n-1},$$

$$T_n''(x) = 2c_2 + 3\cdot 2c_3(x-a) + ... + n(n-1)c_n(x-a)^{n-2},$$

$$. \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$$

$$T_n^{(n)}(x) = n!c_n.$$

Подставив в многочлен и его производные $x = a$, получим

$$c_0 = f(a),\ c_1 = f'(a),\ 2c_2 = f''(a),\ 3!c_3 = f'''(a),\ ...,\ n!c_n = f^{(n)}(a).$$

Отсюда

$$c_0 = f(a),\ c_1 = f'(a),\ c_2 = \frac{f''(a)}{2!},\ c_3 = \frac{f'''(a)}{3!},\ ...,\ c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Таким образом,

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

или, в более короткой записи,

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Здесь, как это принято, считается, что $f^{(0)}(a) = f(a)$ и $0! = 1$.

Многочлен $T_n(x)$ называют многочленом Тейлора (B. Taylor, 1685-1731) функции $f(x)$.

Ясно, что

$$f(x) = T_n(x) + R_n(a,x),$$

или

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(a,x).$$

Написанное равенство называют формулой Тейлора, а входящую в нее пока еще не известную величину $R_n(a,x)$ - остаточным членом формулы Тейлора.

В соответствии с условиями, наложенными на многочлен Тейлора, в окрестности точки a должно выполняться приближенное равенство:

$$f(x) \approx T_n(x).$$

Так как $T_n(x)$ является многочленом, то это равенство дает возможность вычислять, хотя и с некоторой погрешностью, с помощью арифметических операций значения $f(x)$ по значениям x. Для того чтобы оценить погрешность вычислений, следует выяснить, что собой представляет остаточный член формулы Тейлора. Мы начнем с представления остаточного члена в форме, предложенной Пеано (G. Peano, 1858-1932). Для этого заметим, что в многочлене Тейлора все слагаемые, содержащие $x-a$, стремятся к нулю при $x \to a$. При этом наиболее быстро стремится к нулю последнее слагаемое, содержащее $(x-a)^n$. С этой величиной мы и сравним остаточный член. Имеем:

$$\lim_{x\to a} \frac{R_n(a,x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-T_n(x)}{(x-a)^n}.$$

К этой дроби n раз последовательно применим правило Лопиталя. Получим

$$\lim_{x\to a} \frac{R_n(a,x)}{(x-a)^n} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)-T_n'(x)}{n(x-a)^{n-1}} =$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{f''(x)-T_n''(x)}{n(n-1)(x-a)^{n-2}} = ... = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n)}(x)-{T_n}^{(n)}(x)}{n!} = 0.$$

Таким образом, $R_n(a,x) = o((x-a)^n)$ при $x \to a$.

Следовательно,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Мы получили формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

При такой записи формулы Тейлора видно, что вблизи точки a приближенное равенство $f(x) \approx T_n(x)$ имеет погрешность, которая меньше, чем наименьшее слагаемое многочлена. Однако численно оценить погрешность при такой записи остаточного члена невозможно. Для этого используют другие способы записи остаточного члена. Например, можно записать остаточный член в форме Лагранжа:

$$R_n(f,x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}, \quad c \in (a,x).$$

В этом случае формула Тейлора принимает вид:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}, \quad c \in (a,x).$$

В заключение этого раздела приведем способ записи формулы Тейлора, который применяется при решении некоторых задач. Для этого возьмем формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и заменим в ней a на x и x на $x+dx$. Тогда разность $x-a$ заменится на dx, и формула примет вид:

$$f(x+dx)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}dx^k+o(dx^n)$$

или

$$f(x+dx)=f(x)+\sum_{k=1}^{n}\frac{d^kf(x)}{k!}+o(dx^n).$$

Отсюда

$$\Delta f(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{d^kf(x)}{k!}+o(dx^n).$$

Мы получили дифференциальный способ записи формулы Тейлора.

Ясно, что эта запись является обобщением полученного нами при введении понятия дифференциала равенства

$$\Delta f(x)=df(x)+o(dx).$$

1.35. Формулы Тейлора для простейших функций

В этом разделе мы будем считать, что $a=0$, то есть будем записывать формулу Тейлора в виде

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^n)$$

или

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1},\quad c\in(0,x).$$

Заметим, что при такой записи формулу Тейлора иногда называют формулой Маклорена (C. Maclaurin, 1698-1746).

1. Формула Тейлора для показательной функции. Пусть $f(x)=e^x$. Тогда, как мы знаем, $f^{(k)}(x)=e^x$, а потому $f^{(k)}(0)=1$, а $f^{(k)}(c)=e^c$. Подставив все это в приведенные выше выражения, получим формулу Тейлора для показательной функции:

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}$$

или, в более подробной записи,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Отсюда следует приближенное равенство:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!},$$

позволяющее находить значения экспоненты. Как оценить погрешность этого равенства, мы покажем ниже.

2. Формула Тейлора для синуса. Теперь возьмем $f(x) = \sin x$. Как было показано в разделе 1.24, оказывается $f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому $f^{(k)}(0) = \sin k\frac{\pi}{2}$.

Отсюда при $k = 2m$ получаем $f^{(2m)}(0) = \sin m\pi = 0$.

Если $k = 2m+1$, то $f^{(2m+1)}(0) = \sin\left(m\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos m\pi = (-1)^m$.

Значит, многочлен Тейлора для $\sin x$ содержит только нечетные степени x. Поэтому формула Тейлора для $\sin x$ имеет вид:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \frac{\sin(c + (2n+1)\frac{\pi}{2})}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

или

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \frac{\sin c_1}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

Значит, можно написать такое приближенное равенство:

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

3. Формула Тейлора для косинуса. Если $f(x) = \cos x$, то, рассуждая так же, как и в случае синуса, получим

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{\cos c_1}{(2n+2)!}x^{2n+2}$$

или

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + \frac{\cos c_1}{(2n+2)!}x^{2n+2}.$$

Мы получили возможность написать еще одно приближенное равенство:

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

4. Формула Тейлора для логарифма. Пусть $f(x) = \ln(1+x)$. Очевидно, что $f(0) = 0$. Мы видели, что $f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$ (см. раздел 1.24). Поэтому $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$ Следовательно, формула Тейлора для нашей функции имеет вид:

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{(k-1)! x^k}{k!} + o(x^n)$$

или, после сокращения дроби на $(k-1)!$,

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n).$$

Отсюда получаем приближенное равенство:

$$\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

Пользоваться этим приближенным равенством при $|x| \geqslant 1$ не следует из-за большой погрешности.

5. Формула Тейлора для степенной функции. Рассмотрим функцию $f(x) = (1+x)^\mu$. Мы видели, что $f^{(k)}(x) = \mu...(\mu-(k-1))(1+x)^{\mu-k}$. Значит, $f^{(k)}(0) = \mu...(\mu-(k-1))$. Кроме того, $f(0) = 1$. Следовательно,

$$(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!} x^2 + ... + \frac{\mu...(\mu-(n-1))}{n!} x^n + o(x^n).$$

В окрестности точки 0 мы можем использовать такое приближенное равенство:

$$(1+x)^\mu \approx 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!} x^2 + ... + \frac{\mu...(\mu-(n-1))}{n!} x^n.$$

Отметим один весьма важный для приложений случай последней формулы. Если $\mu = n$, то при $k > n$ окажется $((1+x)^n)^{(k)} = 0$. Это значит, что в формуле Тейлора для функции $(1+x)^n$ остаточный член равен нулю, так что равенство примет вид:

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + ... + x^n.$$

Это равенство называют формулой бинома Ньютона (Newton, 1643-1727). Мы перепишем формулу бинома в несколько ином виде. Для этого положим $x = \frac{q}{p}$. Тогда получим

$$(1+\frac{q}{p})^n = 1 + n\frac{q}{p} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{q^2}{p^2} + ... + \frac{q^n}{p^n},$$

или

$$\frac{(p+q)^n}{p^n} = 1 + n\frac{q}{p} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{q^2}{p^2} + ... + \frac{q^n}{p^n},$$

или, наконец,

$$(p+q)^n = p^n + np^{n-1}q + \frac{n(n-1)}{2!}p^{n-2}q^2 + ... + q^n.$$

Для коэффициентов в последнем равенстве приняты такие обозначения:

$$C_n^0 = 1,\ C_n^1 = n,\ C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2!}, ..., C_n^k = \frac{n...(n-(k-1))}{k!}, ..., C_n^n = 1.$$

Используя эти обозначения, можем записать формулу бинома Ньютона в такой форме:

$$(p+q)^n = C_n^0 p^n + C_n^1 p^{n-1} q + C_n^2 p^{n-2} q^2 + ... + C_n^n q^n$$

или, что то же,

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^{n-k} q^k.$$

Из этой общей формулы, в частности, при n, равном 2, 3 и 4, получаем

$$(p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2,$$

$$(p+q)^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3,$$

$$(p+q)^4 = p^4 + 4p^3q + 6p^2q^2 + 4pq^3 + q^4.$$

В следующем разделе мы покажем, как можно использовать построенные формулы для решения задач.

1.36. Некоторые применения формулы Тейлора

Мы уже говорили, что одним из важнейших достоинств формулы Тейлора является возможность вычислять с нужной степенью точности значения различных функций посредством лишь арифметических действий. Приведем некоторые примеры.

Пример 1. Найдем значение синуса одного радиана с точностью до 0,001.

Мы видели в предыдущем разделе, что

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

причем погрешность этого равенства равна отброшенному остаточному члену, то есть $R_n = \dfrac{\sin c_1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$.

Отсюда

$$\sin 1 \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!},$$

и погрешность $R_n = \dfrac{\sin c_1}{(2n+1)!}$.

Подберем n так, чтобы было $|R_n| < 0,001$. Так как $|\sin c_1| \leqslant 1$, то достаточно выбрать n из условия $\dfrac{1}{(2n+1)!} < 0,001$. Видно, что последнее условие будет выполнено уже при $n = 3$. Следовательно, с ошибкой, не превышающей 0,001,

$$\sin 1 \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!},$$

то есть $\sin 1 \approx 0,842$.

Пример 2. Найдем число e с точностью до 0,000001.

Обратимся к формуле Тейлора для экспоненты:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad c \in (0,x).$$

Полагая в ней $x = 1$, получаем:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}, \quad 0 < c < 1.$$

Из написанного очевидно прежде всего, что $e > 2$. Далее, если применить последнее равенство при $n = 2$, то окажется

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{e^c}{6}, \quad 0 < c < 1.$$

Так как $e > 2$ и $c < 1$, то $e^c < e$. Поэтому можем написать:

$$e < \frac{5}{2} + \frac{e}{6},$$

откуда нетрудно получить неравенство $e < 3$. Теперь напишем приближенное равенство:

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}.$$

Погрешность этого равенства равна $\dfrac{e^c}{(n+1)!}$, где $0 < c < 1$. Так как $e < 3$, то ясно, что $\dfrac{e^c}{(n+1)!} < \dfrac{3}{(n+1)!}$. Подберем такое n, чтобы было $\dfrac{3}{(n+1)!} < 0,000001$. Преобразовав последнее равенство к виду $(n + 1! > 3000000$, нетрудно понять, что должно быть $n = 9$. Следовательно,

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{9!}$$

с ошибкой, не превышающей 0,000001. Просуммировав написанные величины, получаем

$$e \approx 2,718282.$$

В некоторых случаях формулу Тейлора бывает удобно использовать для нахождения пределов.

Пример 3. Найти предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - x}{x^3}.$$

Для решения используем полученную выше формулу Тейлора для $(1 + x)^\mu$, в которой положим $\mu = \dfrac{1}{2}$. Получим

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3!}x^3 + o(x^3)$$

или, после несложных упрощений,

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3).$$

Заменяя в последнем равенстве x на $-x$, имеем

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + o(x^3).$$

Отсюда находим

$$\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = x + \frac{1}{8}x^3 + o(x^3).$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x + \frac{1}{8}x^3 + o(x^3) - x}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{8}x^3 + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{8}.$$

Часть 2. Интегральное исчисление

2.1. Первообразная, неопределенный интеграл

Интегрированием называют процесс нахождения функции по ее производной или, что то же, по ее дифференциалу. Функцию, найденную в результате интегрирования, называют первообразной по отношению к заданной производной. Если $f(x)$ - заданная производная, то есть $f(x)dx$ - заданный дифференциал, а $F(x)$ - первообразная, то, в соответствии с определением, должно быть $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$.

Очевидно, что из равенства $F'(x) = f(x)$ следует, что при любой постоянной C будет $(F(x) + C)' = f(x)$. Значит, если функция $f(x)$ имеет одну первообразную, то она имеет целое семейство первообразных, отличающихся друг от друга лишь на постоянную.

Покажем, что первообразных другого вида функция $f(x)$ иметь не может. Пусть $F(x)$ и $F_1(x)$ - две первообразные по отношению к $f(x)$ на некотором промежутке (a, b). Тогда на этом промежутке $(F_1(x) - F(x))' = f(x) - f(x) = 0$. В силу следствия из формулы Лагранжа (см. раздел 1.27), если на промежутке производная равна нулю, то на этом промежутке функция равна постоянной. Значит, должно быть $F_1(x) - F(x) = C$, откуда $F_1(x) = F(x) + C$.

Итак, функции, первообразные по отношению к $f(x)$, образуют семейство, в котором одна функция от другой отличается лишь на постоянную.

Определение. Семейство всех первообразных функции $f(x)$ называют неопределенным интегралом от $f(x)$.

Неопределенный интеграл от $f(x)$ обозначают так:

$$\int f(x)dx.$$

Ясно, что если $F(x)$ - какая-нибудь первообразная по отношению к $f(x)$, то

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где C - произвольная константа.

Естественно, что не всякая функция имеет первообразную. Позже мы увидим, что для любой непрерывной функции неопределенный интеграл существует.

Отметим сразу же одно свойство неопределенного интеграла:

$$\int (\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x))dx = \lambda_1 \int f_1(x)dx + \lambda_2 \int f_2(x))dx,$$

если λ_1 и λ_2 - постоянные, а стоящие справа интегралы существуют.

Это свойство легко проверяется дифференцированием: производная левой части равна, очевидно, производной правой части.

Так как интегрирование является обратным действием по отношению к дифференцированию, то можно составить таблицу простейших интегралов, исходя из таблицы производных основных элементарных функций. Для этого достаточно в левой части таблицы производных убрать штрихи, а в правой написать знаки интегралов. Мы так и сделаем и при этом добавим несколько несложных формул, справедливость которых легко проверяется дифференцированием.

В результате получим такую таблицу:

$$\int v^\mu \ dv = \frac{v^{\mu+1}}{\mu+1} + C \quad (\mu \neq -1)$$

$$\int \frac{1}{v^2} \ dv = -\frac{1}{v} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{v}} \ dv = 2\sqrt{v} + C$$

$$\int \frac{1}{v} \ dv = \ln|v| + C$$

$$\int a^v \ dv = \frac{a^v}{\ln a} + C$$

$$\int e^v \ dv = e^v + C$$

$$\int \sin v \ dv = -\cos v + C$$

$$\int \cos v \ dv = \sin v + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 v} \ dv = \operatorname{tg} v + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 v} \ dv = -\operatorname{ctg} v + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - v^2}}\ dv = \arcsin \frac{v}{a} + C = -\arccos \frac{v}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{v^2 + \alpha}}\ dv = \ln(v + \sqrt{v^2 + \alpha}) + C$$

$$\int \frac{1}{v^2 + a^2}\ dv = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{v}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{v}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{v^2 - a^2}\ dv = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{v - a}{v + a} \right| + C$$

Мы построили таблицу, содержащую наиболее часто встречающиеся интегралы. Естественно, что существуют справочники, содержащие гораздо более обширные таблицы с сотнями и даже тысячами интегралов. Кроме того, большое число интегралов имеется во многих компьютерных пакетах.

Приведем несколько примеров нахождения интегралов. Во всех примерах мы будем использовать один и тот же прием: будем превращать интегралы в табличные, подводя под знак дифференциала вместо x некоторые функции. Этот прием, называемый подведением под знак дифференциала, является самым распространенным при нахождении интегралов.

1. $\int (ax + b)^\mu dx = ?$

Мы знаем, что $d(ax + b) = adx$. Поэтому преобразуем интеграл так:

$$\int (ax + b)^\mu dx = \frac{1}{a} \int (ax + b)^\mu d(ax + b).$$

Получили табличный интеграл вида $\displaystyle\int v^\mu dv$, в котором роль v играет величина $ax + b$. Если $\mu \neq -1$, то, в соответствии с таблицей,

$$\frac{1}{a} \int (ax + b)^\mu d(ax + b) = \frac{(ax + b)^{\mu+1}}{a(\mu + 1)} + C.$$

Итак,

$$\int (ax + b)^\mu dx = \frac{(ax + b)^{\mu+1}}{a(\mu + 1)} + C.$$

При $\mu = -1$ получаем аналогичным образом

$$\int \frac{dx}{ax + b} = \frac{1}{a} \ln |ax + b| + C.$$

2. $\int \sin^2 x \cos x dx = ?$

Так как $\cos x dx = d(\sin x)$, то

$$\int \sin^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x d(\sin x) = \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

3. Тем же способом находится

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln|\sin x| + C.$$

4. $\int e^{-x^2} x dx = ?$

Так как $d(-x^2) = -2xdx$, то $xdx = -\frac{1}{2} d(-x^2)$. Значит,

$$\int e^{-x^2} x dx = -\frac{1}{2} \int e^{-x^2} d(-x^2) = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C.$$

В следующих разделах мы приведем несколько полезных способов нахождения интегралов.

2.2. Интегрирование разложением на слагаемые

В соответствии с линейным свойством, интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от этих функций. Поэтому, разложив подынтегральное выражение на слагаемые, мы можем проинтегрировать каждое слагаемое в отдельности, а затем сложить результаты.

Приведем несколько примеров такого рода.

$$1. \int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

$$2. \int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx =$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \int \cos 2x d(2x) = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

$$3. \int \frac{3x + 7}{\sqrt{x^2 + 6x - 1}} dx = \int \frac{3x + 7}{\sqrt{(x+3)^2 - 10}} dx = \int \frac{3(x+3) - 2}{\sqrt{(x+3)^2 - 10}} dx =$$

$$= \int \frac{3(x+3)}{\sqrt{(x+3)^2-10}}\,dx - \int \frac{2}{\sqrt{(x+3)^2-10}}\,dx =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2(x+3)}{\sqrt{(x+3)^2-10}}\,dx - 2\int \frac{1}{\sqrt{(x+3)^2-10}}\,d(x+3) =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{1}{\sqrt{(x+3)^2-10}}\,d((x+3)^2-10) - 2\ln(x+3+\sqrt{(x+3)^2-10}) =$$

$$= 3\sqrt{(x+3)^2-10} - 2\ln(x+3+\sqrt{(x+3)^2-10}) + C.$$

Заметим, что таким же образом находятся все интегралы вида

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx.$$

2.3. Интегрирование по частям

Мы знаем, что если $u(x)$ и $v(x)$ - дифференцируемые функции от x, то

$$d(uv) = udv + vdu.$$

Поэтому

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu$$

или

$$uv = \int udv + \int vdu.$$

Отсюда

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Полученное равенство называют формулой интегрирования по частям. В этой формуле дифференциал перебрасывают с одной функции на другую. Оказывается, что такая операция очень часто позволяет упростить нахождение первообразных. Мы на примерах покажем, как это делается.

Пример 1. Найдем

$$\int xe^x dx.$$

Для решения положим $u = x$ и $dv = e^x dx$. Тогда окажется $du = dx$ и $v = e^x$. Поэтому

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx.$$

В правой части получился табличный интеграл. Это дает возможность получить ответ:

$$\int xe^x dx = xe^x - e^x + C$$

или

$$\int xe^x dx = (x-1)e^x + C.$$

Заметим, что решение задачи можно записать в таком виде:

$$\int xe^x dx = \int xd(e^x) = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = (x-1)e^x + C.$$

Такого стиля запись мы используем при решении следующего примера.

Пример 2.

$$\int x^2 \ln x dx = \int \ln x d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \ln x \, \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} d(\ln x) = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} + C.$$

При решении некоторых примеров бывает удобно применять интегрирование по частям несколько раз.

Пример 3.

$$\int x^2 \cos x dx = \int x^2 d(\sin x) =$$

$$= x^2 \sin x - \int \sin x d(x^2) = x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx =$$

$$= x^2 \sin x + \int 2x d(\cos x) = x^2 \sin x + 2x \cos x - \int \cos x 2dx =$$

$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C = (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x + C.$$

В следующем примере мы покажем еще один способ применения интегрирования по частям.

Пример 4.

$$\int \sqrt{x^2+\alpha}\, dx = \sqrt{x^2+\alpha}\, x - \int xd(\sqrt{x^2+\alpha}) =$$

$$= x\sqrt{x^2+\alpha} - \int x \frac{xdx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = x\sqrt{x^2+\alpha} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} =$$

$$= x\sqrt{x^2+\alpha} - \int \frac{(x^2+\alpha-\alpha)dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} =$$

$$= x\sqrt{x^2+\alpha} - \int \sqrt{x^2+\alpha}\, dx + \int \frac{\alpha dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}.$$

Таким образом,

$$\int \sqrt{x^2+\alpha}\, dx = x\sqrt{x^2+\alpha} - \int \sqrt{x^2+\alpha}\, dx + \int \frac{\alpha dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}.$$

Отсюда

$$2\int \sqrt{x^2+\alpha}\, dx = x\sqrt{x^2+\alpha} + \int \frac{\alpha dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}$$

или

$$\int \sqrt{x^2+\alpha}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+\alpha} + \int \frac{\alpha dx}{\sqrt{x^2+\alpha}}\right).$$

Интеграл, стоящий в правой части, очевидно, табличный. Следовательно,

$$\int \sqrt{x^2+\alpha}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+\alpha} + \alpha \ln(x+\sqrt{x^2+\alpha}\ )\right) + C.$$

Прием, использованный при нахождении последнего интеграла, называют приведением интеграла к самому себе.

2.4. Замена аргумента в неопределенном интеграле

.

Пусть

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Положим в этом равенстве $x = \varphi(t)$. Тогда равенство примет вид:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C.$$

Из сказанного ясно следующее: если мы хотим найти исходный интеграл, то вначале можем найти второй интеграл, а затем в найденной первообразной $F(\varphi(t))$ заменить $\varphi(t)$ на x.

Понятно, что можно действовать и в обратном порядке, то есть нахождение второго интеграла свести к нахождению первого. В сущности, этим приемом мы уже пользовались в самом начале при подведении под знак дифференциала.

Естественно, мы предполагаем, что используется такая замена, при которой оба интеграла существуют.

Пример. Найдем
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2+2x+1}}.$$
Положим $x = \dfrac{1}{t}$. Тогда $dx = -\dfrac{dt}{t^2}$, и
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2+2x+1}} = -\int \frac{dt}{t\sqrt{\frac{2}{t^2}+\frac{2}{t}+1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+2t+1}} =$$
$$= -\int \frac{d(t+1)}{\sqrt{(t+1)^2+1}} = -\ln\left|t+1+\sqrt{(t+1)^2+1}\right| + C.$$
Вспоминая, что $t = \dfrac{1}{x}$, нетрудно полученный результат преобразовать к такому виду:
$$\int \frac{dx}{x\sqrt{2x^2+2x+1}} = -\ln\left|\frac{x+1+\sqrt{2x^2+2x+1}}{x}\right| + C.$$

В заключение этого раздела нужно сказать следующее. Мы видели в курсе дифференциального исчисления, что производная любой элементарной функции является элементарной функцией. Однако не всякая элементарная функция имеет элементарную первообразную. Иначе говоря, не любой неопределенный интеграл можно выразить через элементарные функции. Например, невозможно выразить через элементарные функции такие интегралы:
$$\int e^{\pm x^2}dx,\quad \int \frac{e^x}{x}\,dx,\quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx,\quad \int \sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 x}\,dx\ (0<\varepsilon<1).$$

В следующих разделах мы рассмотрим некоторые типы функций, интегралы от которых можно выразить через элементарные функции.

2.5. Интегрирование рациональных дробей

Мы будем рассматривать в этом разделе интегралы от рациональных дробей, то есть интегралы вида
$$\int \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}\,dx,$$

где $Q_m(x)$ и $P_n(x)$ - многочлены, имеющие степени m и n.

Если дробь неправильная ($m \geqslant n$), то ее можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби. Интеграл от многочлена, очевидно, представляет собой многочлен, то есть является элементарной функцией. Покажем, что интеграл от правильной рациональной дроби тоже можно выразить через элементарные функции. Для этого вспомним, что всякую правильную рациональную дробь можно разбить на простейшие дроби двух видов:

$$\frac{A}{(x-\alpha)^k} \quad \text{и} \quad \frac{B(x-\alpha)+D}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^k}.$$

Начнем с простейшего случая:

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)}\,dx = A\int \frac{d(x-\alpha)}{(x-\alpha)} = A\ln|x-\alpha| + C.$$

Далее, при $k = 2, 3, 4, ...$ имеем

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^k}\,dx = A\int (x-\alpha)^{-k} d(x-\alpha) = A\frac{(x-\alpha)^{-k+1}}{-k+1} + C.$$

Итак, интегралы от простейших дробей первого типа выражаются через элементарные функции. Обратимся к дробям второго типа.

Опять рассмотрим сначала простейший случай:

$$\int \frac{B(x-\alpha)+D}{(x-\alpha)^2+\beta^2}\,dx = B\int \frac{(x-\alpha)dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + D\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} =$$

$$= \frac{B}{2}\int \frac{d((x-\alpha)^2+\beta^2)}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + D\int \frac{d(x-\alpha)}{(x-\alpha)^2+\beta^2} =$$

$$= \frac{B}{2}\ln((x-\alpha)^2+\beta^2) + \frac{D}{\beta}\operatorname{arctg}\frac{x-\alpha}{\beta} + C.$$

При $k = 2, 3, 4, ...$ интеграл от дроби второго типа разобьем на два и рассмотрим каждое слагаемое в отдельности.

Имеем,

$$\int \frac{B(x-\alpha)}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^k}\,dx = \frac{B}{2}\int \frac{d((x-\alpha)^2+\beta^2)}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^k} =$$

$$= \frac{B}{2}\,\frac{((x-\alpha)^2+\beta^2)^{-k+1}}{-k+1} + C.$$

Наконец, в интеграле

$$\int \frac{D}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^k}\,dx$$

положим $x-\alpha=\beta \operatorname{tg} t$. Тогда $dx=\dfrac{\beta dt}{\cos^2 t}$ и

$$\int \frac{D}{((x-\alpha)^2+\beta^2)^k}\,dx=\int \frac{D\beta dt}{\cos^2 t(\beta^2 \operatorname{tg}^2 t+\beta^2)^k}dx=$$

$$=\frac{D}{\beta^{2k-1}}\int \cos^{2k-2} t dt.$$

Последний интеграл, как будет показано в следующем разделе, выражается через элементарные функции. Значит, и исходный интеграл можно выразить через элементарные функции.

Итак, интеграл от любой рациональной дроби выражается через элементарные функции.

Пример 1. Найдем

$$\int \frac{6x^2-4x+9}{(x-2)(x^2-2x+5)}\,dx.$$

Под интегралом стоит правильная рациональная дробь. Разложим эту дробь на простейшие. Как известно из курса алгебры, разложение должно иметь вид

$$\frac{6x^2-4x+9}{(x-2)(x^2-2x+5)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B(x-1)+D}{(x-1)^2+4}.$$

Приведем правую часть равенства к общему знаменателю, а затем приравняем числители правой и левой частей. Получим

$$6x^2-4x+9=A((x-1)^2+4)+(B(x-1)+D)(x-2).$$

Полагая $x=2$, имеем $25=5A$, откуда $A=5$.

Сравнивая коэффициенты при x^2 и x в правой и левой частях, получим два таких уравнения:

$$\begin{aligned}&A+B=6,\\&-2A-3B+D=-4.\end{aligned}$$

Зная, что $A=5$, находим $B=1, \quad D=9$.

Значит,

$$\int \frac{6x^2-4x+9}{(x-2)(x^2-2x+5)}\ dx = \int \left(\frac{5}{x-2} + \frac{(x-1)+9}{(x-1)^2+4}\right) dx =$$

$$= 5\int \frac{1}{x-2}\ dx + \int \frac{(x-1)}{(x-1)^2+4}\ dx + 9\int \frac{1}{(x-1)^2+4}\ dx =$$

$$= 5\ln|x-2| + \frac{1}{2}\ln((x-1)^2+4) + \frac{9}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2} + C.$$

Пример 2. Пусть дан

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

Сделав замену $x = \operatorname{tg} t$, получим, как нетрудно увидеть,

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \int \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t) + C.$$

Так как $x = \operatorname{tg} t$, то $t = \operatorname{arctg} x$, и

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} = 2\frac{x}{1+x^2}.$$

Отсюда

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}\right) + C.$$

2.6. Интегрирование некоторых классов функций

1. Интегрирование произведений синусов и косинусов. Рассмотрим интегралы такого вида:

$$\int \sin^m x \cos^n x\ dx,$$

где m и n - целые неотрицательные числа.

Предположим вначале, что один из показателей степени нечетный. Например, $n = 2k+1$, то есть интеграл имеет вид

$$\int \sin^m x \cos^{2k+1} x\ dx.$$

В этом случае, полагая $t = \sin x$, находим $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2$ и $dt = \cos x dx$. Поэтому интеграл примет вид

$$\int t^m (1-t^2)^k\ dt.$$

Получился интеграл от многочлена, который, очевидно, выражается через элементарные функции. Значит, и исходный интеграл имеет элементарную первообразную.

Если оба показателя четные, например, $m = 2k$ и $n = 2l$, то степень подынтегрального выражения можно уменьшить вдвое. Действительно, вспоминая, что

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2},$$

можно привести интеграл к виду

$$\int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^k \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^l dx.$$

Теперь, раскрыв скобки, получим интегралы от степеней косинуса. Те слагаемые, у которых степень нечетная, интегрируются указанным выше способом. В слагаемых с четными степенями можно опять вдвое уменьшить степени, и т. д. В конечном счете интеграл выразится через элементарные функции.

Итак, интегралы от произведений синусов и косинусов выражаются через элементарные функции.

Пример. Найдем

$$\int \sin^3 x \cos^4 x dx.$$

Положим $\cos x = t$. Тогда $dt = -\sin x dx$, и

$$\int \sin^3 x \cos^4 x dx = -\int (1-t^2)t^4 dt = -\frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7} + C = -\frac{\cos x^5}{5} + \frac{\cos^7}{7} + C.$$

2. Интегрирование рациональных функций от $\mathbf{e^x}$. Рассмотрим интеграл

$$\int R(e^x) dx,$$

где $R(x)$ - рациональная дробь от аргумента e^x.

Сделаем замену $t = e^x$. Тогда $x = \ln t$ и $dx = \dfrac{dt}{t}$. Поэтому интеграл примет вид:

$$\int \frac{R(t)}{t} dt.$$

Такой интеграл от рациональной дроби, как мы видели, выражается через элементарные функции. Значит, исходный интеграл тоже выражается через элементарные функции.

Пример. Найдем
$$\int \frac{e^x+1}{5\operatorname{ch} x+3\operatorname{sh} x}\, dx.$$
Вспомнив выражения для гиперболических функций, приведем интеграл к виду
$$\int \frac{e^x(e^x+1)}{4e^{2x}+1}\, dx.$$
Сделаем замену $t=e^x$. Получим
$$\int \frac{t+1}{4t^2+1}\, dt = \int \frac{t}{4t^2+1}\, dt + \int \frac{1}{4t^2+1}\, dt =$$
$$= \frac{1}{8}\int \frac{d(4t^2+1)}{4t^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{d(2t)}{(2t)^2+1} =$$
$$= \frac{1}{8}\ln(4t^2+1) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2t) + C =$$
$$= \frac{1}{8}\ln(4e^{2x}+1) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2e^x) + C.$$
Таким образом,
$$\int \frac{e^x+1}{5\operatorname{ch} x+3\operatorname{sh} x}\, dx = \frac{1}{8}\ln(4e^{2x}+1) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2e^x) + C.$$

3. Интегрирование рациональных функций от синусов и косинусов. Теперь обратимся к интегралам вида
$$\int R(\sin x,\ \cos x)dx,$$
где $R(\sin x,\ \cos x)$ - рациональная дробь от аргументов $\sin x$ и $\cos x$.

В этом интеграле сделаем замену $t=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$. Тогда $x=2\operatorname{arctg} t$ и $dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$. Далее, используя известные тригонометрические формулы, получаем
$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$
Подставляя найденные величины в интеграл, приведем его к виду:
$$\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Ясно, что получился интеграл от рациональной дроби. Поскольку такой интеграл выражается через элементарные функции, постольку через них выражается и исходный интеграл.

Пример. Найдем

$$\int \frac{1}{2\cos x + 3\sin x + 1}\ dx.$$

Положим, как рекомендует теория, $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Тогда, в соответствии с написанными выше формулами, получим

$$\int \frac{1}{2\cos x + 3\sin x + 1}\ dx = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(2\frac{1-t^2}{1+t^2} + 3\frac{2t}{1+t^2} + 1\right)} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{-t^2+6t+3} = -2\int \frac{d(t-3)}{12-(t-3)^2} = -\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{t-3-2\sqrt{3}}{t-3+2\sqrt{3}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 3 + 2\sqrt{3}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 3 - 2\sqrt{3}}\right| + C.$$

4. Интегрирование рациональных функций от $\sqrt{\mathbf{ax+b}}$. Рассмотрим интеграл

$$\int R(\sqrt[m]{ax+b})dx,$$

в котором $R(\sqrt[m]{ax+b})$ - рациональная дробь от аргумента $\sqrt[m]{ax+b}$.

Сделаем замену $t = \sqrt[m]{ax+b}$, откуда $x = \dfrac{t^m - b}{a}$ и $dx = \dfrac{mt^{m-1}dt}{a}$. Поэтому интеграл превращается в интеграл от рациональной дроби

$$\int R(t)\frac{mt^{m-1}}{a}\ dt,$$

выражающийся через элементарные функции.

Пример.

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}(\sqrt[4]{2x+1}+1)}\ dx.$$

Положим $t = \sqrt[4]{2x+1}$. Тогда $t^4 = 2x+1$ и $dx = 2t^3dt$. Поэтому

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}(\sqrt[4]{2x+1}+1)}\ dx = \int \frac{2t^3dt}{t^2(t+1)}\ dt =$$

$$= 2\int \frac{t}{t+1}\ dt = 2\int \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)dt =$$

$$= 2(t - \ln|t+1|) + C = 2(\sqrt[4]{2x+1} - \ln|\sqrt[4]{2x+1} + 1|) + C.$$

5. Интегрирование функций, рационально зависящих от $\sqrt{\mathbf{ax^2+bx+c}}$.

Обратимся к интегралам вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx,$$

где подынтегральная функция есть рациональная дробь от своих аргументов. Чтобы показать возможность выразить такие интегралы через элементарные функции, заметим прежде всего, что, выделяя в подкоренном выражении полный квадрат и вынося $|a|$, можно корень привести к одной из четырех форм:

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+\beta^2},\ \sqrt{(x-\alpha)^2-\beta^2},\ \sqrt{-(x-\alpha)^2+\beta^2},\ \sqrt{-(x-\alpha)^2-\beta^2}.$$

В последнем случае корень, а вместе с ним и интеграл, не существуют. В первых трех случаях соответствующие замены аргумента позволяют освободиться от корней под знаком интеграла.

Если имеется корень $\sqrt{(x-\alpha)^2+\beta^2}$, то замена $x-\alpha = \beta\operatorname{tg} t$ преобразует корень так:

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \sqrt{\beta^2\operatorname{tg}^2 t + \beta^2} = \frac{\beta}{\cos t}.$$

Когда корень имеет вид $\sqrt{(x-\alpha)^2-\beta^2}$, замена $x-\alpha = \dfrac{\beta}{\sin t}$ позволяет преобразовать корень так:

$$\sqrt{(x-\alpha)^2-\beta^2} = \sqrt{\frac{\beta^2}{\sin^2 t} - \beta^2} = \beta\operatorname{ctg} t.$$

В случае корня $\sqrt{-(x-\alpha)^2+\beta^2}$, положив $x-\alpha = \beta\sin t$, имеем:

$$\sqrt{-(x-\alpha)^2+\beta^2} = \sqrt{-\beta^2\sin^2 t + \beta^2} = \beta\cos t.$$

В результате во всех трех случаях получаются интегралы от функций, рационально зависящих от синуса и косинуса. Следовательно, интегралы рассматриваемого типа выражаются через элементарные функции.

Пример 1.

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+5}} = \int \frac{dx}{((x+1)^2+2)\sqrt{(x+1)^2+4}}.$$

Положим $x = 2\operatorname{tg} t$. Тогда $dx = \dfrac{2dt}{\cos^2 t}$. Поэтому интеграл принимает вид:

$$\int \frac{2dt}{\cos^2 t(4\operatorname{tg}^2 t+2)\sqrt{4\operatorname{tg}^2 t+4}} = \frac{1}{2}\int \frac{\cos t\ dt}{2\sin^2 t+\cos^2 t} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\cos t\ dt}{\sin^2 t+1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(\sin t)}{\sin^2 t+1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\sin t)+C.$$

Теперь выразим $\sin t$ через x:

$$\sin t = \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} = \frac{x+1}{2\sqrt{1+\frac{(x+1)^2}{4}}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}.$$

Таким образом,

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+5}} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}+C.$$

Пример 2.

$$\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{7-6x-x^2}}\ dx = \int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{16-(x+3)^2}}\ dx.$$

Пусть $x+3 = 4\sin t$. Тогда $dx = 4\cos t dt$, и наш интеграл преобразуется так:

$$\int \frac{(4\sin t-4)^2\ 4\cos t dt}{\sqrt{16-16\sin^2 t}} = 16\int(\sin^2 t-2\sin t+1)dt =$$

$$= 16\int(\frac{1}{2}(1-\cos 2t)-2\sin t+1)dt = 16(\frac{3}{2}t-\frac{1}{4}\sin 2t+2\cos t)+C.$$

Так как $\sin t = \dfrac{x+3}{4}$, то $t = \arcsin\dfrac{x+3}{4}$ и

$$\cos t = \sqrt{1-\left(\frac{x+3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7-6x-x^2}}{4},$$

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = \frac{(x+3)\sqrt{7-6x-x^2}}{8}.$$

Поэтому

$$\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{7-6x-x^2}}dx =$$

$$= 16\left(\frac{3}{2}\arcsin\frac{x+3}{4} - \frac{(x+3)\sqrt{7-6x-x^2}}{32} + \frac{\sqrt{7-6x-x^2}}{2}\right) + C$$

или, наконец,

$$\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{7-6x-x^2}}dx = 24\arcsin\frac{x+3}{4} + \frac{(13-x)\sqrt{7-6x-x^2}}{2} + C.$$

Заметим, что для рассмотренных интегралов можно использовать и другие замены, а не только предлагаемые нами.

Итак, мы разобрались с наиболее часто встречающимися типами неопределенных интегралов, которые выражаются через элементарные функции. Естественно, что существуют и другие подобные типы. Мы не будем на них останавливаться.

В заключение этого раздела отметим одно важное обстоятельство: неопределенный интеграл на самом деле является вспомогательным инструментом, предназначенным главным образом для вычисления определенных интегралов, имеющих множество применений в самых различных областях знаний. С понятием определенного интеграла мы начнем знакомиться в следующем разделе.

2.7. Определенный интеграл

Пусть функция $f(x)$ задана на промежутке $[a,b]$. Разобьем этот промежуток на n промежутков точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_{n-1} < x_n = b.$$

Найдем длины этих промежутков:

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0,\ \Delta x_2 = x_2 - x_1, ..., \Delta x_n = x_n - x_{n-1}.$$

В каждом из частичных промежутков возьмем по одной точке. Взятые точки обозначим соответственно $\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ ...,\ \xi_n$. В этих точках вычислим значения функции: $f(\xi_1),\ \ f(\xi_2),\ \ f(\xi_3),\ \ ...,\ \ f(\xi_n)$. Затем составим произведения $f(\xi_1)\Delta x_1,\ f(\xi_2)\Delta x_2,\ f(\xi_3)\Delta x_3,\ \ldots,\ f(\xi_n)\Delta x_n$. Эти произведения сложим. Получим сумму

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k,$$

называемую суммой Римана (B. Riemann, 1826-1866) или интегральной суммой.

Найдем наибольшую из длин $\Delta x_1,\ \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ и назовем ее рангом дробления исходного промежутка. Обозначим ранг дробления через λ.

Ясно, что при $\lambda \to 0$ число частичных промежутков неограниченно возрастает, а длины промежутков уменьшаются.

Определение. Предел интегральной суммы при ранге дробления, стремящемся к нулю, называют определенным интегралом от функции $f(x)$ по промежутку $[a, b]$.

Числа a и b называют, соответственно, нижним и верхним пределами интегрирования или границами интегрирования.

Мы будем использовать для определенного интеграла такие обозначения:

$$\int\limits_a^b f \quad \text{или} \quad \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Итак,

$$\int\limits_a^b f = \int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Данное только что определение требует некоторого разъяснения и дополнений.

Прежде всего, интегральная сумма зависит от очень большого числа различных аргументов: от способа разбиения, от длин частичных промежутков, от выбора точек, в которых вычисляются значения функции. Поэтому то определение предела, которое мы использовали ранее, к ней не применимо. Объясним, что мы понимаем здесь под словом предел.

Число I называется пределом суммы Римана

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

при $\lambda \to 0$, если для $\forall \varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех сумм, у которых $\lambda < \delta$, выполняется неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k - I \right| < \varepsilon.$$

Далее, в дополнение к сказанному, мы будем считать, что

$$\int_a^b f = -\int_b^a f \quad \text{и} \quad \int_a^a f = 0.$$

Иначе говоря, мы считаем, во-первых, что при перемене местами пределов интегрирования интеграл меняет знак и, во-вторых, интеграл по промежутку нулевой длины равен нулю.

Отметим одно существенное обстоятельство: значение определенного интеграла зависит от промежутка, по которому он вычисляется, и от характера функции на этом промежутке и не зависит от того, какое имя мы присвоим переменной интегрирования, так что

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz \text{ и т. д.}$$

Понятно, что не всегда интегральная сумма имеет предел, то есть не для всякой функции существует определенный интеграл. Поэтому мы прежде всего приведем условия существования определенного интеграла.

Для этого вначале дадим такое

Определение. Функция называется кусочно-непрерывной на промежутке, если его можно разбить на конечное число промежутков, на каждом из которых функция непрерывна; при этом функция может иметь разрывы только первого рода.

Теорема 1. Если функция кусочно-непрерывна на промежутке $[a, b]$, то она интегрируема по этому промежутку.

Теорема 2. Если функция монотонна на промежутке $[a, b]$, то она интегрируема по этому промежутку.

Мы не будем доказывать эти теоремы.

Поскольку определенный интеграл является пределом суммы, постольку и многие его свойства повторяют свойства сумм. Кстати сказать, сам символ интеграла, введенный Лейбницем, представляет собой вытянутое вверх и вниз латинское s, являющееся первой буквой слова summa.

Остановимся на свойствах интеграла.

1. Интеграл обладает свойством линейности, то есть

$$\int\limits_a^b (C_1 f_1 + C_2 f_2) = C_1 \int\limits_a^b f_1 + C_2 \int\limits_a^b f_2,$$

если C_1 и C_2 - постоянные, а стоящие справа интегралы существуют.

Действительно, для функции $C_1 f_1 + C_2 f_2$ интегральная сумма имеет вид:

$$\sum_{k=1}^{n} (C_1 f(\xi_k) + C_2 f_2(\xi_k)) \Delta x_k.$$

Очевидно, что сумму можно преобразовать так:

$$\sum_{k=1}^{n} (C_1 f_1(\xi_k) + C_2 f_2(\xi_k)) \Delta x_k = C_1 \sum_{k=1}^{n} f_1(\xi_k) \Delta x_k + C_2 \sum_{k=1}^{n} f_2(\xi_k)) \Delta x_k.$$

Перейдя в этом равенстве к пределу при $\lambda \to 0$, увидим, что свойство справедливо.

2. Интеграл обладает свойством аддитивности, то есть

$$\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c f + \int\limits_c^b f, \quad (a \leqslant c \leqslant b).$$

Мы предполагаем здесь, что интеграл существует. В таком случае предел суммы Римана, то есть интеграл, не зависит от способа дробления. Поэтому мы будем рассматривать лишь такие способы дробления, при которых точка c является одной из точек деления. В этом случае всякую интегральную сумму можно разбить на две:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k) \Delta x_k + \sum_{k=m+1}^{n} f(\xi_k) \Delta x_k,$$

из которых первая соответствует промежуткам, лежащим левее c, а вторая - правее.

Переходя в написанном равенстве к пределу при $\lambda \to 0$, получим, очевидно, нужное свойство.

Предлагаем читателю доказать, что это свойство остается справедливым и тогда, когда точка c лежит вне промежутка $[a, b]$, если интегралы существуют.

3. Если $f(x) \geqslant 0$ при $a \leqslant x \leqslant b$, то

$$\int\limits_a^b f \geqslant 0.$$

Действительно, при этом условии все суммы Римана оказываются, как легко видеть, неотрицательными. Поэтому их предел, то есть интеграл, тоже неотрицателен.

4. Если $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ при $a \leqslant x \leqslant b$, то

$$\int\limits_a^b f_1 \leqslant \int\limits_a^b f_2.$$

Из условия ясно, что $f_1(x) - f_2(x) \leqslant 0$ при $a \leqslant x \leqslant b$. Значит, в силу предыдущего свойства,

$$\int\limits_a^b (f_1 - f_2) \leqslant 0.$$

Отсюда очевидным образом следует справедливость свойства 4.

5. Если $m \leqslant f(x) \leqslant M$ при $a \leqslant x \leqslant b$, то

$$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f \leqslant M(b-a).$$

Из условий видно, что

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} M\Delta x_k = M\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = M(b-a).$$

Аналогично доказывается, что

$$m(b-a) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Следовательно,

$$m(b-a) \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \leqslant M(b-a).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $\lambda \to 0$, получим доказываемое свойство.

6. Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, b]$, то на этом промежутке найдется такая точка c, что

$$\int\limits_a^b f = f(c)(b-a).$$

Для доказательства отметим прежде всего, что, в силу теоремы Вейерштрасса (см. раздел 1.14), непрерывная на замкнутом промежутке $[a, b]$ функция $f(x)$ принимает на этом промежутке наименьшее и наибольшее значения. Назовем эти значения соответственно m_* и M_*. Тогда $m_* \leqslant f(x) \leqslant M_*$, и потому

$$m_*(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f \leqslant M_*(b-a).$$

Отсюда

$$m_* \leqslant \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f \leqslant M_*.$$

По теореме Коши о промежуточном значении (см. раздел 1.14), непрерывная функция $f(x)$, переходя от наименьшего значения m_* к наибольшему M_*, принимает все промежуточные значения. В частности, найдется такая точка c, в которой будет

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int\limits_a^b f,$$

откуда

$$\int\limits_a^b f = f(c)(b-a).$$

Свойство доказано.

Это свойство называют теоремой о среднем для определенного интеграла.

2.8. Формула Ньютона - Лейбница

В этом разделе мы выведем формулу, с помощью которой вычисляют определенные интегралы.

Будем считать, что функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a, b]$. Тогда при всех $x \in [a, b]$ существует интеграл

$$\int_a^x f.$$

Очевидно, что этот интеграл является функцией от верхнего предела x. Обозначим эту функцию через $\Phi(x)$:

$$\Phi(x) = \int_a^x f.$$

Теорема Барроу (I. Barrow, 1630-1677). Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то при всех $x \in [a, b]$ существует $\Phi'(x) = f(x)$.

Доказательство. В соответствии с определением,

$$\Phi(x) = \int_a^x f \quad \text{и} \quad \Phi(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f.$$

Отсюда, используя аддитивность интеграла, находим

$$\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f - \int_a^x f = \int_a^x f + \int_x^{x+\Delta x} f - \int_a^x f = \int_x^{x+\Delta x} f.$$

К последнему интегралу применим теорему о среднем. Получим:

$$\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = f(c)\Delta x, \quad c \in (x, x + \Delta x).$$

Следовательно,

$$\frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = f(c), \quad c \in (x, x + \Delta x). \qquad (*)$$

Если $\Delta x \to 0$, то $c \to x$, а $f(c) \to f(x)$, так как f непрерывна. Значит, правая часть равенства $(*)$ имеет предел $f(x)$ при $\Delta x \to 0$. В таком случае существует такой же предел левой части, который, очевидно, является производной $\Phi'(x)$, то есть $\Phi'(x) = f(x)$. Теорема доказана.

Итак, мы доказали, что при непрерывности $f(x)$ справедливо равенство:

$$\left(\int_a^x f\right)' = f(x)$$

при всех x из $[a, b]$.

Это означает, что на промежутке $[a, b]$ интеграл является первообразной по отношению к $f(x)$.

Как нам известно, функция, имеющая одну первообразную, имеет целое семейство первообразных, отличающихся друг от друга лишь на постоянную. Поэтому, если $F(x)$ - какая-нибудь первообразная для $f(x)$,то должно выполняться равенство:

$$\int_a^x f = F(x) + C.$$

Полагая в этом равенстве $x = a$, получаем $0 = F(a) + C$, откуда $C = -F(a)$.

Таким образом,

$$\int_a^x f = F(x) - F(a).$$

В частности,

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Мы получили формулу Ньютона - Лейбница (G. W. Leibniz, 1646-1716) для вычисления определенного интеграла.

Эту формулу часто записывают в таком виде:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Таким образом, для вычисления определенного интеграла нужно вначале найти первообразную для подынтегральной функции, а затем вычислить приращение этой первообразной на промежутке интегрирования. Тем самым вычисление определенного интеграла сводится к нахождению неопределенного интеграла.

Пример.

$$\int\limits_1^2 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Полезно обратить внимание на то, что формулу Ньютона - Лейбница можно применять только тогда, когда подынтегральная функция непрерывна на промежутке. Если функция кусочно-непрерывна в области интегрирования, то область следует разбить на промежутки непрерывности и к каждому промежутку в отдельности применить формулу Ньютона - Лейбница.

2.9. Интегрирование по частям и замена аргумента в определенном интеграле

1. Пусть $u(x)$ и $v(x)$ - функции, имеющие непрерывные производные на промежутке $[a, b]$. Тогда, как мы знаем, $d(uv) = udv + vdu$. Поэтому левая и правая части равенства имеют одинаковые приращения первообразных на $[a, b]$, то есть

$$\int\limits_a^b d(uv) = \int\limits_a^b udv + \int\limits_a^b vdu$$

или

$$uv|_a^b = \int\limits_a^b udv + \int\limits_a^b vdu.$$

Отсюда

$$\int\limits_a^b udv = uv|_a^b - \int\limits_a^b vdu.$$

Мы получили формулу интегрирования по частям для определенного интеграла.

Пример.

$$\int\limits_0^1 \operatorname{arctg} x \ dx = x \operatorname{arctg} x|_0^1 - \int\limits_0^1 xd(\operatorname{arctg} x) = \frac{\pi}{4} - \int\limits_0^1 \frac{x}{1+x^2} \ dx =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.$$

2. Пусть имеющая непрерывную производную функция $\varphi(t)$ отображает промежуток $[\alpha,\beta]$ в промежуток $[a,b]$, причем $\varphi(\alpha)=a$ и $\varphi(\beta)=b$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Докажем это утверждение. Пусть $F(x)$ - первообразная для $f(x)$. Тогда, в силу формулы Ньютона - Лейбница,

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$$

и

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t))\Big|_\alpha^\beta = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b)-F(a).$$

Видно, что утверждение справедливо.

Пример. Найдем $\int\limits_0^a \sqrt{a^2-x^2}\, dx$.

Для решения сделаем такую замену: $x = a\sin t$. Тогда при изменении t от 0 до $\frac{\pi}{2}$ величина x изменяется от 0 до a. Значит, в нашем случае $\alpha=0$ и $\beta=\frac{\pi}{2}$. Кроме того, $dx = a\cos t dt$. Поэтому

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\; a\cos t dt = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Предположим теперь, что функция $f(x)$ задана на промежутке $[-a,a]$ и является четной, то есть $f(-x)=f(x)$. Тогда

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx.$$

В первом из стоящих справа интегралов сделаем замену $x = -t$. Получим:

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = -\int\limits_{a}^{0} f(-t)dt + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx.$$

Отсюда, учитывая четность функции и меняя порядок пределов, получаем:

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = \int\limits_{0}^{a} f(t)dt + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx$$

или

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx.$$

Итак, интеграл от четной функции по симметричному промежутку равен удвоенному интегралу от нее по половине промежутка.

Аналогичным образом доказывается, что если функция $f(x)$ является нечетной, так что $f(-x) = -f(x)$ на промежутке $[-a, a]$, то

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)dx = 0,$$

то есть интеграл от нечетной функции по симметричному промежутку равен нулю.

Рекомендуем читателю доказать это самостоятельно.

Итак, мы ввели понятие определенного интеграла, выяснили свойства интеграла, получили формулу для его вычисления. Теперь естественно поставить такой вопрос: зачем нужен определенный интеграл? Ответ на этот вопрос мы дадим в следующих разделах.

2.10. Нахождение площадей в декартовых координатах

Начнем с одной из важнейших задач, решаемых с помощью определенного интеграла.

Пусть на промежутке задана неотрицательная непрерывная функция $y = f(x)$ и построен ее график (рис. 22). Найдем площадь фигуры, ограниченной графиком $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$. Такую фигуру мы будем называть криволинейной трапецией.

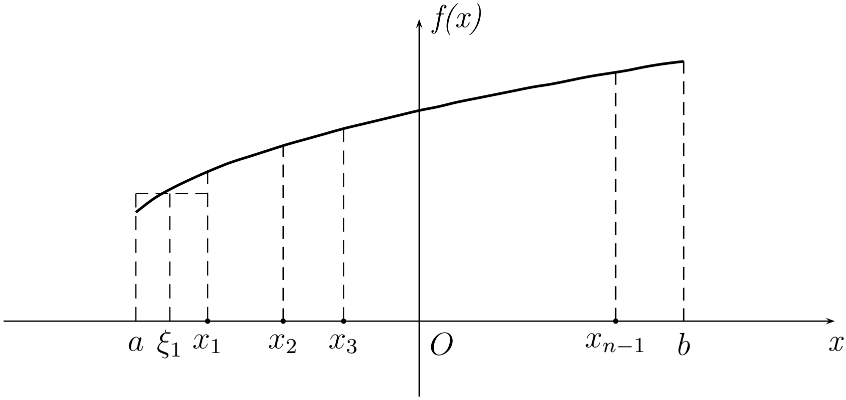

Рис. 22.

Для этого точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_{n-1} < x_n = b$ разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей и найдем длины этих частей:

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0,\ \Delta x_2 = x_2 - x_1, ..., \Delta x_n = x_n - x_{n-1}.$$

Затем через точки деления проведем отрезки прямых параллельно оси Oy до пересечения с графиком. Тогда наша трапеция разобьется на n полосок.

Далее, первую полоску заменим прямоугольником с тем же основанием и высотой, равной $f(\xi_1)$, где ξ_1 - какая-нибудь точка из $[x_0, x_1]$. Площадь такого прямоугольника равна $f(\xi_1)\Delta x_1$.

То же самое проделаем для второй и остальных полосок. Получим прямоугольники с площадями $f(\xi_2)\Delta x_2,\ f(\xi_3)\Delta x_3,\ ...,\ f(\xi_n)\Delta x_n$. Затем сложим все площади и примем полученную сумму за приближенное значение площади трапеции:

$$S \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Введем, как и раньше, ранг дробления λ.

Площадью криволинейной трапеции называется предел построенной суммы при $\lambda \to 0$, то есть

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Очевидно, что этот предел является интегралом, так что

$$S = \int\limits_a^b f = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Формулу для площади часто записывают в виде:

$$S = \int\limits_a^b f = \int\limits_a^b ydx.$$

Если на промежутке $[a, b]$ заданы функции $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, причем $f_1(x) \leqslant f_2(x)$, то площадь фигуры, ограниченной этими линиями и прямыми $x = a$, $x = b$, очевидно, будет находиться так:

$$S = \int\limits_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$$

Пример 1. Найдем площадь параболического сегмента с основанием a и высотой h (рис. 23).

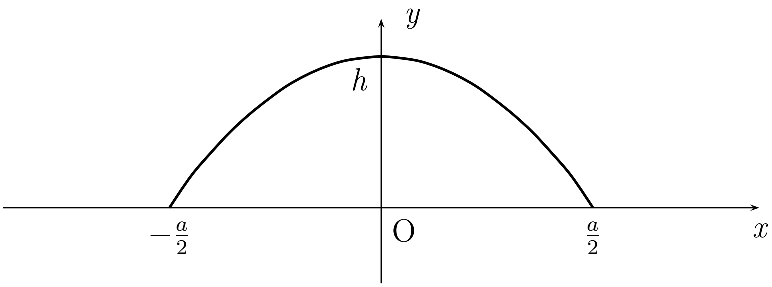

Рис. 23. Параболический сегмент

Уравнение параболы, ограничивающей этот сегмент, имеет вид: $y = h\left(1 - \dfrac{4x^2}{a^2}\right)$. Поэтому

$$S_{\text{пар}} = h\int\limits_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (1 - \frac{4x^2}{a^2})dx = 2h\int\limits_0^{\frac{a}{2}} \left(1 - \frac{4x^2}{a^2}\right)dx =$$

$$= 2h\left(x - \frac{4x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_0^{\frac{a}{2}} = \frac{2}{3}ah.$$

Итак,

$$S_{\text{пар}} = \frac{2}{3}ah.$$

Пример 2. Найдем площадь, ограниченную эллипсом с полуосями a и b.

Каноническое уравнение эллипса, как известно, имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Поскольку эллипс симметричен относительно обеих осей, постольку его площадь равна учетверенной площади той части, которая лежит в первой четверти. Из уравнения эллипса находим, что в первой четверти

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant a.$$

Поэтому площадь эллипса будет такой:

$$S_{\text{эл}} = 4\frac{b}{a}\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}dx.$$

Написанный интеграл мы вычисляли в предыдущем разделе. Он оказался равен $\dfrac{\pi a^2}{4}$. Поэтому

$$S_{\text{эл}} = \pi ab.$$

Заметим, что при $a = b$ эллипс превращается в окружность с радиусом a. При этом мы получаем формулу для площади круга:

$$S_{\text{кр}} = \pi a^2.$$

Пример 3. Найдем площадь фигуры, ограниченной первой аркой циклоиды и осью Ox (см. рис. 12).

Как уже говорилось, первая арка циклоиды задается параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi],$$

из которых хорошо видно, что при изменении t от 0 до 2π величина x меняется от 0 до $2\pi a$. Поэтому выражение для площади имеет такой вид:

$$S = \int\limits_0^{2\pi a} y dx.$$

Выразим написанное через параметр t. Так как $y = a(1 - \cos t)$ и $dx = a(1 - \cos t)dt$, то оказывается

$$S = \int\limits_0^{2\pi} a(1 - \cos t)a(1 - \cos t)dt = a^2 \int\limits_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt =$$

$$= a^2 \int\limits_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \frac{1}{2}(1 + \cos 2t))dt = a^2 \int\limits_0^{2\pi} (\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos 2t)dt =$$

$$= a^2(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t)\,\Big|_0^{2\pi} = 3\pi a^2.$$

2.11. Общая схема применения определенного интеграла

Мы начнем с анализа решенной в предыдущем разделе задачи о нахождении площади криволинейной трапеции. Прежде всего заметим, что площадь криволинейной трапеции существенно зависит от промежутка, над которым трапеция расположена. Далее, площадь обладает свойством аддитивности относительно промежутка, то есть площадь над всем промежутком равна сумме площадей над его частями. Такими же свойствами обладает, как мы видели, интеграл. Кроме того, если мы рассмотрим маленькую полоску, ограниченную графиком $y = f(x)$, осью Ox и лежащую над промежутком $[x, x+\Delta x]$, то ее площадь можно представить в виде $\Delta S = f(x)\Delta x + o(\Delta x)$. Покажем, что все объекты подобного рода можно описать определенным интегралом.

Если каждому промежутку $[\alpha, \beta]$, содержащемуся в $[a, b]$, ставится в соответствие определенное число, то говорят, что задана функция от промежутка или функционал. Мы будем использовать такое обозначение функционала: $\Psi([\alpha, \beta])$.

Функционал Ψ называют аддитивным, если для любых $\alpha \leqslant \gamma \leqslant \beta$ выполняется условие

$$\Psi([\alpha, \beta]) = \Psi([\alpha, \gamma]) + \Psi([\gamma, \beta]).$$

Мы будем говорить, что функционал Ψ имеет плотность ψ, если

$$\Psi([x, x + \Delta x]) = \psi(x)\Delta x + o(\Delta x) \quad \text{при} \quad \Delta x \to 0.$$

Заметим, что если в последнем равенстве перейти к пределу при $\Delta x \to 0$, то окажется $\Psi([x, x]) = 0$, так что значение функционала от промежутка нулевой длины равно нулю.

Теорема. Если функционал Ψ аддитивен на промежутке $[a, b]$ и имеет на этом промежутке непрерывную плотность ψ, то

$$\Psi([a, b]) = \int\limits_a^b \psi(x)dx.$$

Доказательство. Возьмем какое-нибудь $x \in [a, b]$ и рассмотрим величину $\Psi([a, x])$. Так как точка a фиксирована, то $\Psi([a, x])$ является функцией от аргумента x. Покажем, что эта функция имеет производную. Используя аддитивность функционала и наличие у него плотности, имеем:

$$\Psi([a, x + \Delta x]) - \Psi([a, x]) = \Psi([a, x]) + \Psi([x, x + \Delta x]) - \Psi([a, x]) =$$

$$= \Psi([x, x + \Delta x]) = \psi(x)\Delta x + o(\Delta x).$$

Отсюда

$$\frac{\Psi([a, x + \Delta x]) - \Psi([a, x])}{\Delta x} = \psi(x) + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}.$$

При $\Delta x \to 0$ правая часть равенства имеет, очевидно, предел $\psi(x)$. Значит, такой же предел имеет левая часть, то есть существует производная $\Psi'([a, x]) = \psi(x)$.

Доказанное означает, что $\Psi([a, x])$ является первообразной по отношению к $\psi(x)$. С другой стороны, в силу теоремы Барроу, первообразной к $\psi(x)$ является

$$\int\limits_a^x \psi.$$

Две первообразные могут отличаться только на постоянную, то есть должно быть

$$\Psi([a, x]) = \int\limits_a^x \psi + C.$$

Полагая в этом равенстве $x = a$ и учитывая, что $\Psi([a,a]) = 0$, получим $C = 0$, откуда

$$\Psi([a,x]) = \int\limits_a^x \psi$$

и, в частности, при $x = b$ оказывается

$$\Psi([a,b]) = \int\limits_a^b \psi(x)dx.$$

Теорема доказана.

Эта теорема позволяет нам заметно упростить методику применения интеграла при решении конкретных задач. Действительно, мы можем избежать построения интегральных сумм и перехода в них к пределу. Вместо этого, установив, что нужная нам величина Ψ аддитивна и имеет плотность ψ, мы строим $d\Psi = \psi(x)dx$, а затем интегрируем построенное выражение.

Ниже мы приведем примеры применения такой методики.

2.12. Нахождение длин линий

Пусть на плоскости xOy задана линия $y = f(x)$, $\quad a \leqslant x \leqslant b$. Найдем длину этой линии. Прежде всего заметим, что длина всей линии, лежащей над $[a,b]$, может быть представлена как сумма длин ее частей, лежащих над частями $[a,b]$. Значит, длина обладает свойством аддитивности.

Далее предположим, что существует непрерывная производная $f'(x)$, и рассмотрим малую часть линии, лежащую над промежутком $[x, x+dx]$. Эту часть приближенно заменим малым отрезком касательной, проведенной к линии в точке $(x, f(x))$. Очевидно, что, по теореме Пифагора, длина отрезка касательной равна

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 + f'^2(x)dx^2} = \sqrt{1 + f'^2(x)}dx.$$

Поэтому длина малой части линии будет такой:

$$\Delta l = \sqrt{1 + f'^2(x)}dx + o(dx).$$

Следовательно, длина имеет плотность $\sqrt{1 + f'^2(x)}$, и потому длина всей линии

$$l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx.$$

Полученную формулу часто записывают в такой форме:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}dx.$$

Написанный интеграл существует, поскольку производная $y' = f'(x)$ непрерывна.

Если линия на плоскости задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \quad t \in [\alpha, \beta], \end{cases}$$

то

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\dot{\varphi}^2(t)dt^2 + \dot{\psi}^2(t)dt^2} = \sqrt{\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\psi}^2(t)}dt.$$

Поэтому

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\psi}^2(t)}dt,$$

или

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt.$$

В случае пространственной кривой, заданной параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \omega(t), \quad t \in [\alpha, \beta], \end{cases}$$

аналогичным образом получается такая формула для длины линии:

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\psi}^2(t) + \dot{\omega}^2(t)}dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}dt.$$

Пример 1. Найдем длину первой арки циклоиды.

Мы знаем (см. раздел 1.25), что первая арка циклоиды задается равенствами

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Поэтому $\dot{x} = a(1-\cos t)$, $\quad \dot{y} = a\sin t$ и

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt = a\int\limits_{0}^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}dt = a\int\limits_{0}^{2\pi} \sqrt{2-2\cos t}dt =$$

$$= a\int\limits_{0}^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}dt = 2a\int\limits_{0}^{2\pi} \sin\frac{t}{2}dt = -\,4a\cos\frac{t}{2}\Big|_{0}^{2\pi} = 8a.$$

Итак, $l = 8a$.

Пример 2. Найдем длину эллипса.

Мы знаем (см. раздел 1.25), что параметрические уравнения эллипса имеют вид:

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t, \end{cases} t \in [0, 2\pi],$$

откуда $\dot{x} = -a\sin t$, $\quad \dot{y} = b\cos t$.

В силу симметрии, полная длина эллипса равна четырем длинам его части, лежащей в первом квадранте. Значит,

$$l = 4\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dt = 4\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}dt =$$

$$= 4\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2(1-\cos^2 t) + b^2\cos^2 t}dt = 4\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2-(a^2-b^2)\cos^2 t}dt =$$

$$= 4a\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2}\cos^2 t}dt.$$

Считая, что $a \geqslant b$, положим $\dfrac{a^2-b^2}{a^2} = \varepsilon^2$. Получим

$$l = 4a\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}dt.$$

Если $0 < \varepsilon < 1$, то полученный интеграл через элементарные функции не выражается, а потому точное его значение найти невозможно.

Если $a = b$, то эллипс превращается в окружность с радиусом a. В этом случае, очевидно, $\varepsilon = 0$, и потому

$$l = 4a \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dt = 2\pi a.$$

Мы получили формулу длины окружности:

$$l_{\text{окр}} = 2\pi a,$$

где a - радиус окружности.

Итак, мы выяснили, что с помощью определенного интеграла можно находить длины линий и площади фигур. В следующем разделе мы покажем, как можно использовать интеграл для нахождения объемов тел.

2.13. Нахождение объемов тел

Пусть в пространстве имеется некоторое тело. Предположим, что при всяком x из промежутка $[a, b]$ плоскость, перпендикулярная оси Ox, пересекает это тело.

Обозначим через $S(x)$ площадь полученного при этом поперечного сечения тела. Тогда объем тела равен

$$V = \int\limits_a^b S(x)dx.$$

Действительно, если мы рассмотрим два близких поперечных сечения, проходящих через точки x и $x + dx$, то главная часть объема, заключенного между ними, будет, очевидно, такой: $dV = S(x)dx$.

Пример. Найдем объем тела, ограниченного эллипсоидом с полуосями a, b, c.

Каноническое уравнение эллипсоида имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Если мы в этом уравнении зафиксируем $x \in [-a, a]$, то сможем записать уравнение в таком виде:

$$\frac{y^2}{b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = 1.$$

Значит, поперечное сечение при всяком x представляет собой эллипс с полуосями

$$b(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \ \text{ и } \ c(x) = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}.$$

Площадь такого эллипса

$$S(x) = \pi b(x)c(x) = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Отсюда

$$V = \pi bc\int\limits_{-a}^{a}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = 2\pi bc\int\limits_{0}^{a}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx =$$

$$= 2\pi bc\left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\Bigg|_0^a = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Итак,

$$V_{\text{эл}} = \frac{4}{3}\pi abc.$$

Если $a = b = c$, то эллипсоид превращается в сферу с радиусом a. В соответствии с этим получаем формулу для объема шара:

$$V_{\text{ш}} = \frac{4}{3}\pi a^3.$$

Предположим теперь, что линия $y = f(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b)$ вращается вокруг оси Ox. В результате образуется поверхность вращения. Найдем объем тела, ограниченного этой поверхностью и плоскостями $x = a, \quad x = b$.

Очевидно, что при всяком x поперечное сечение тела является кругом с радиусом $|f(x)|$. Поэтому площадь поперечного сечения $S(x) = \pi f^2(x)$, а

$$V = \pi\int\limits_a^b f^2(x)dx.$$

Пример. Дуга параболы $y = \sqrt{ax}, \quad 0 \leqslant x \leqslant h$, вращается вокруг оси Ox. Найдем объем параболоида вращения.

Используя полученную формулу, имеем:

$$V_{\text{пар}} = \pi \int\limits_0^h ax dx = \pi a \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^h = \frac{1}{2}\pi a h^2.$$

Заметим, что радиус r основания параболоида равен $\sqrt{ah}$. Поэтому площадь основания $S = \pi r^2 = \pi a h$. Значит, формулу для объема параболоида можно записать в виде

$$V_{\text{пар}} = \frac{1}{2}\pi r^2 h = \frac{1}{2} S h.$$

2.14. Некоторые применения определенного интеграла в полярных координатах

Вначале напомним, что в полярных координатах каждая точка M плоскости характеризуется парой чисел (ρ, φ), где ρ - расстояние от начала координат O до точки M, а φ - угол между полярной осью и вектором $\overline{OM}$.

Если на плоскости имеются и полярные, и декартовы координаты, причем полярная ось совпадает с осью Ox, то, очевидно,

$$x = \rho \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\varphi.$$

Для того чтобы полярные координаты соответствовали всем точкам плоскости, должно быть $0 \leqslant \rho < \infty$ и $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.

Линии в полярных координатах описываются уравнениями вида $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$.

Найдем длину линии, заданной в полярных координатах. Для этого выразим x и y через полярные координаты:

$$\begin{cases} x = \rho(\varphi)\cos\varphi, \\ y = \rho(\varphi)\sin\varphi, \end{cases} \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta.$$

Мы получили параметрическое задание линии. Ясно, что

$$\begin{cases} x' = \rho'(\varphi)\cos\varphi - \rho(\varphi)\sin\varphi, \\ y' = \rho'(\varphi)\sin\varphi + \rho(\varphi)\cos\varphi. \end{cases}$$

Отсюда после несложных преобразований получается

$$dl = \sqrt{x'^2 + y'^2} d\varphi = \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\, d\varphi.$$

Следовательно,

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\, d\varphi.$$

Пример. Найдем длину линии $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

Так как $\rho \geqslant 0$, то должно быть $1 + \cos\varphi \geqslant 0$. Значит, φ может изменяться в пределах от $-\pi$ до π. Далее, $\rho' = -a\sin\varphi$. Поэтому

$$dl = a\sqrt{(1+\cos\varphi)^2 + \sin^2\varphi}\, d\varphi = a\sqrt{2(1+\cos\varphi)}\, d\varphi = 2a\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi$$

и

$$l = \int\limits_{-\pi}^{\pi} 2a\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = 4a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 8a.$$

Теперь выясним, как находится площадь в полярных координатах.

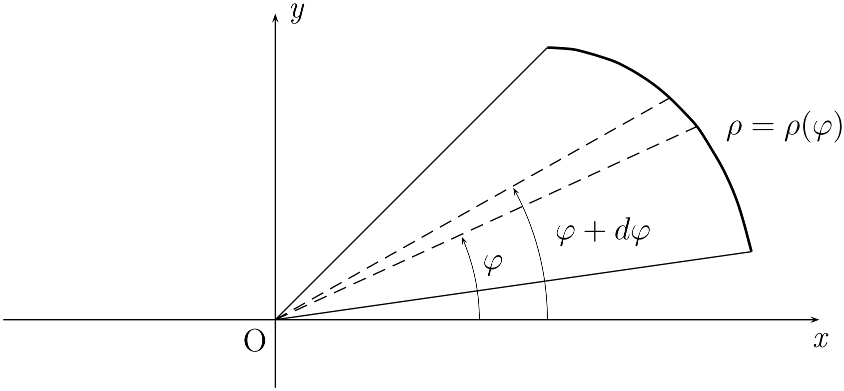

Рис. 24.

Для этого рассмотрим сектор, ограниченный линией $\rho = \rho(\varphi)$, где $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ (рис. 24). Если разбить этот сектор на частичные секторы лучами, исходящими из начала, то ясно, что его площадь будет равна сумме площадей частичных секторов, то есть площадь обладает свойством аддитивности. Теперь рассмотрим маленький сектор, соответствующий изменению угла от φ до $\varphi + d\varphi$. Очевидно, что главная часть его площади равна площади кругового сектора с радиусом $\rho(\varphi)$ и раствором угла $d\varphi$: $dS = \dfrac{1}{2}\rho^2(\varphi)d\varphi$.

Значит, площадь всего сектора

$$S = \frac{1}{2} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi.$$

Пример. Найдем площадь фигуры, ограниченной линией

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

Уравнение содержит только четные степени координат. Поэтому линия симметрична относительно обеих координатных осей. В таком случае достаточно выяснить, какой вид имеет линия в первой четверти, а затем, используя симметрию, построить ее всю.

Для исследования перейдем к полярным координатам, используя приведенные выше формулы. Получим

$$\rho^4 = a^2\rho^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi),$$

откуда

$$\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$$

или, наконец,

$$\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}.$$

В первой четверти φ изменяется от 0 до $\dfrac{\pi}{2}$. Однако при $\varphi > \dfrac{\pi}{4}$ оказывается $2\varphi > \dfrac{\pi}{2}$, а $\cos 2\varphi < 0$. Поэтому в первой четверти линия существует лишь при $\varphi \leqslant \dfrac{\pi}{4}$. При возрастании φ от 0 до $\dfrac{\pi}{4}$ точка линии перемещается из точки $(a, 0)$ в точку $(0, 0)$. При этом вначале она поднимается над осью, а затем опускается. На рис. 25 приведен вид линии (с учетом ее симметрии), называемой лемнискатой Бернулли.

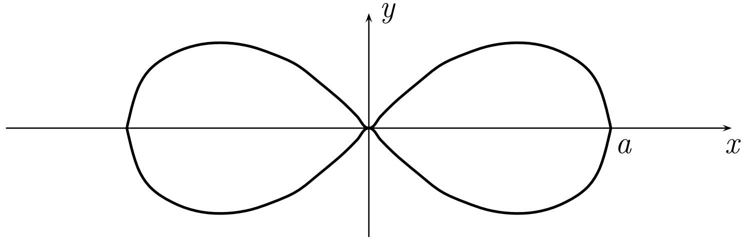

Рис. 25. Лемниската Бернулли

Очевидно, что площадь всей фигуры равна учетверенной площади ее части, лежащей в первой четверти, то есть

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} a^2 \cos 2\varphi d\varphi == a^2 \sin 2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = a^2.$$

2.15. Некоторые физические задачи

1. Нахождение массы по плотности. Предположим, что имеется прямолинейный стержень, у которого в каждой точке известна плотность (в расчете на единицу длины). Найдем массу стержня.

Для определенности будем считать, что стержень занимает промежуток $[0, l]$ на оси Ox. Обозначим через $\rho(x)$ плотность стержня в точке x. Тогда масса малой части стержня, занимающей отрезок $[x, x + dx]$, приближенно равна $dm = \rho(x)dx$.

Кроме того, масса всего стержня равна сумме масс его частей, то есть обладает свойством аддитивности.

Следовательно,

$$m = \int\limits_0^l \rho(x)dx.$$

Если стержень имеет форму некоторой кривой, заданной уравнением $y = f(x), \quad a \leqslant x \leqslant b$, и его плотность в точке $(x, f(x))$ равна $\rho(x)$, то масса его малой части находится приближенно так: $dm = \rho(x)dl = \rho(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}dx$. Поэтому масса всего стержня

$$m = \int\limits_a^b \rho(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}dx.$$

2. Нахождение пути по скорости. Пусть точка движется по прямой и при этом в каждый момент времени известна ее скорость $v(t)$. Найдем путь, пройденный точкой за промежуток времени $[t_1, t_2]$.

Очевидно, что путь аддитивен относительно промежутков времени. Кроме того, за малый промежуток времени $[t, t + dt]$ путь точки равен приближенно $ds = v(t)dt$. Поэтому весь путь находится интегрированием:

$$s = \int\limits_{t_1}^{t_2} v(t)dt.$$

3. Нахождение работы силы. Предположим, что точка движется вдоль оси из $x = a$ в $x = b$. При этом на нее действует сила величиной $F(x)$, образующая угол $\alpha(x)$ с направлением движения в точке x. Выясним, какую работу произведет эта сила.

Ясно, что работа силы на всем промежутке равна сумме работ на составляющих его частях, то есть работа обладает свойством аддитивности. Далее, на малом перемещении из точки x в точку $x + dx$ главная часть работы $dA = F(x)\cos\alpha(x)dx$. Поэтому полная работа представляется таким интегралом:

$$A = \int_a^b F(x)\cos\alpha(x)dx.$$

Пример. Найдем работу, которую надо совершить для вертикального подъема тела массы m с поверхности Земли на высоту H.

Как известно, при подъеме тела нужно преодолевать силу тяготения Земли, а сила тяготения обратно пропорциональна расстоянию от тела до центра Земли. Обозначим через R радиус земного шара. Тогда, если тело находится на высоте x над поверхностью Земли, то расстояние от тела до центра Земли равно $R + x$. Пусть $P(x)$ - сила тяготения на этой высоте. Тогда $P(x) = \dfrac{k}{(R+x)^2}$, где k - коэффициент пропорциональности. Чтобы найти k, вспомним, что при $x = 0$, то есть на поверхности Земли, сила тяготения равна весу тела mg, где g - ускорение силы тяжести. Поэтому $\dfrac{k}{R^2} = mg$, откуда $k = mgR^2$, и $P(x) = \dfrac{mgR^2}{(R+x)^2}$. Значит, элементарная работа по подъему с высоты x до $x + dx$ будет равна $dA = P(x)dx = \dfrac{mgR^2}{(R+x)^2}\,dx$, откуда находим полную работу:

$$\int_0^H \frac{mgR^2}{(R+x)^2}\,dx = -\left.\frac{mgR^2}{R+x}\right|_0^H = \frac{mgRH}{R+H}.$$

Полезно отметить следующее: если высота H намного меньше R, то ею можно пренебречь в знаменателе последней дроби. А тогда выражение для работы примет вид $A = mgH$, которым обычно пользуются при малых высотах подъема.

4. Нахождение работы по мощности. Пусть имеется некоторая система, работающая в течение некоторого промежутка времени $[t_1, t_2]$.

Очевидно, что работа обладает свойством аддитивности относительно промежутков времени. Кроме того, если $N(t)$ - мощность системы, то главная часть работы системы за краткий промежуток времени $[t, t+dt]$ равна $dA(t) = N(t)dt$. Поэтому работа системы за весь промежуток времени имеет вид:

$$A = \int\limits_{t_1}^{t_2} N(t)dt.$$

Пример. Мощность периодического тока силы $I(t) = I_0 \sin\omega t$, проходящего через сопротивление R, равна $N(t) = RI^2(t) = RI_0^2 \sin^2 \omega t$. Найдем работу этого тока за один период.

Так как период $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, то, в соответствии со сказанным выше,

$$A = \int\limits_0^T RI^2(t)dt = RI_0^2 \int\limits_0^T \sin^2 \omega t\ dt = \frac{1}{2} RI_0^2 \int\limits_0^T (1 - \cos 2\omega t)dt =$$

$$= \frac{1}{2} RI_0^2\ (t - \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t)\Big|_0^T = \frac{1}{2} RI_0^2 (T - \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega T) =$$

$$= \frac{1}{2} RI_0^2 (T - \frac{1}{2\omega} \sin 4\pi) = \frac{1}{2} RI_0^2 T.$$

5. Нахождение статических моментов. Начнем с определений, которые обычно даются в курсах механики и сопротивления материалов.

Пусть материальная точка с массой m имеет координаты (x, y, z). Величину $S_{yOz} = xm$ называют статическим моментом этой точки относительно плоскости yOz, $S_{zOx} = ym$ - статическим моментом относительно плоскости zOx и, наконец, $S_{xOy} = zm$ - статическим моментом относительно плоскости xOy.

Если имеется система материальных точек, то статический момент системы считается равным сумме статических моментов всех точек.

Исходя из этих определений, получим выражение для статических моментов стержня. Возьмем маленькую часть стержня, расположенную между точками (x, y, z) и $(x + dx, y + dy, z + dz))$. Масса этой части приближенно равна $dm = \rho(x, y, z)dl$, а приближенное значение ее статического момента относительно плоскости yOz такое:

$$dS_{yOz} = xdm = x\rho(x, y, z)dl.$$

Так как $dl = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\ dt$, то

$$dS_{yOz} = xdm = x\rho(x, y, z)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\ dt.$$

Учитывая аддитивность статического момента, получаем величину статического момента всего стержня:

$$S_{yOz} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} x\rho(x, y, z)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\ dt.$$

Аналогичным образом находятся

$$S_{zOx} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} y\rho(x, y, z)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\ dt,$$

$$S_{xOy} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} z\rho(x, y, z)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\ dt.$$

Точка с координатами

$$x_c = \frac{S_{yOz}}{M}, \quad y_c = \frac{S_{zOx}}{M}, \quad z_c = \frac{S_{xOy}}{M},$$

где M - масса стержня, называется центром масс стержня.

Очень часто в приложениях считают, что во всех точках $\rho(x) = 1$. В этом случае выражения для статических моментов принимают вид

$$S_{yOz} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} x\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\ dt, \quad S_{zOx} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} y\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\ dt,$$

$$S_{xOy} = \int\limits_{\alpha}^{\beta} z\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\ dt.$$

Такие моменты называют геометрическими или статическими моментами линий.

Заметим, что в этом случае $M = l$, где l - длина линии. Поэтому координаты центра масс находятся так:

$$x_c = \frac{S_{yOz}}{l}, \quad y_c = \frac{S_{zOx}}{l}, \quad z_c = \frac{S_{xOy}}{l}.$$

Для материальных точек, лежащих на плоскости, обычно вводят статические моменты относительно осей координат. Например, если точка с массой m, расположенная на плоскости xOy, имеет координаты (x, y), то ее статическим моментом относительно оси Ox называют величину $S_x = ym$, а статическим моментом относительно оси Oy - величину $S_y = xm$. Естественно, что статическим моментом системы точек называют сумму моментов всех точек системы.

Нетрудно понять, что в этом случае статические моменты стержня, имеющего вид кривой

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta],$$

выражаются формулами

$$S_x = \int\limits_{\alpha}^{\beta} y\rho(x, y)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\; dt, \quad S_y = \int\limits_{\alpha}^{\beta} x\rho(x, y)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\; dt.$$

Координаты центра масс имеют вид:

$$x_c = \frac{S_y}{M}, \quad y_c = \frac{S_x}{M}.$$

Если форма стержня на плоскости задана уравнением $y = f(x)$, где $a \leqslant x \leqslant b$, и его плотность в точке $(x, y) = (x, f(x))$ равна $\rho(x, y)$, то статические моменты выражаются интегралами

$$S_x = \int\limits_{a}^{b} y\rho(x, y)\sqrt{1 + y'^2}\; dx, \quad S_y = \int\limits_{a}^{b} x\rho(x, y)\sqrt{1 + y'^2}\; dx.$$

При $\rho(x) = 1$ выражения для моментов принимают вид:

$$S_x = \int\limits_{\alpha}^{\beta} y\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\; dt, \quad S_y = \int\limits_{\alpha}^{\beta} x\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\; dt$$

или

$$S_x = \int\limits_{a}^{b} y\sqrt{1 + y'^2}\; dx, \quad S_y = \int\limits_{a}^{b} x\sqrt{1 + y'^2}\; dx.$$

Такие моменты тоже называют геометрическими или статическими моментами линий.

Центр масс в этом случае имеет координаты

$$x_c = \frac{S_y}{l}, \quad y_c = \frac{S_x}{l}.$$

Пример. Найдем статический момент S_x первой арки циклоиды

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

Так как $\dot{x} = a(1 - \cos t)$, $\dot{y} = \sin t$, то, в соответствии с полученными выше формулами,

$$S_x = \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t)\sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t}\, dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)\sqrt{2(1 - \cos t)}\, dt.$$

Вспоминая, что $1 - \cos t = 2\sin^2 \dfrac{t}{2}$, получаем

$$S_x = 8a^2 \int_0^{\pi} \sin^3 \frac{t}{2} dt = -16a^2 \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 \frac{t}{2}) d(\cos \frac{t}{2}) =$$

$$= -16a^2 \left(\cos \frac{t}{2} - \frac{1}{3}\cos^3 \frac{t}{2}\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{32}{3}a^2.$$

6. Нахождение моментов инерции. Опять начнем с определений.

Если материальная точка массы m имеет координаты (x, y, z), то ее моментами инерции относительно осей Ox, Oy и Oz называют соответственно величины

$$J_x = (y^2 + z^2)m, \quad J_y = (z^2 + x^2)m, \quad J_z = (x^2 + y^2)m.$$

Иначе говоря, момент инерции точки относительно оси равен произведению ее массы на квадрат расстояния до оси.

Моментом инерции системы материальных точек именуют сумму моментов инерции всех точек системы.

Исходя из этих определений, нетрудно получить выражения для моментов инерции стержня, имеющего форму линии

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in [\alpha, \beta]$$

и плотность $\rho(x, y, z)$:

$$J_x = \int_\alpha^\beta (y^2 + z^2)\rho(x, y, z)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\; dt,$$

$$J_y = \int_\alpha^\beta (z^2 + x^2)\rho(x, y, z)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\; dt,$$

$$J_z = \int_\alpha^\beta (x^2 + y^2)\rho(x, y, z)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\; dt.$$

Если во всех точках стержня $\rho(x) = 1$, то моменты инерции имеют вид:

$$J_x = \int_\alpha^\beta (y^2 + z^2)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt,$$

$$J_y = \int_\alpha^\beta (z^2 + x^2)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt,$$

$$J_z = \int_\alpha^\beta (x^2 + y^2)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt.$$

Такие моменты называют геометрическими, или моментами инерции линий.

Если стержень расположен на плоскости xOy и его форма описывается линией $x = x(t), \quad y = y(t), \quad t \in [\alpha, \beta]$, то

$$J_x = \int_\alpha^\beta y^2\rho(x, y)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt, \quad J_y = \int_\alpha^\beta x^2\rho(x, y)\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt.$$

При явном задании линии уравнением $y = f(x), \quad x \in [a, b]$ получаем

$$J_x = \int_a^b y^2\rho(x, y)\sqrt{1 + y'^2}\; dx, \quad J_y = \int_a^b x^2\rho(x, y)\sqrt{1 + y'^2}\; dx.$$

Геометрические моменты инерции, то есть моменты инерции линий, имеют в этом случае вид:

$$J_x = \int_{\alpha}^{\beta} y^2 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt, \quad J_y = \int_{\alpha}^{\beta} x^2 \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

или

$$J_x = \int_{a}^{b} y^2 \sqrt{1 + y'^2}\ dx, \quad J_y = \int_{a}^{b} x^2 \sqrt{1 + y'^2}\ dx.$$

Пример 1. Прямолинейный однородный стержень массы M занимает отрезок $[0, l]$ оси Ox. Найдем момент инерции этого стержня относительно оси Oy.

Очевидно, что плотность стержня $\rho = \dfrac{M}{l}$ и что $dl = dx$. Поэтому

$$J_y = \int_{0}^{l} x^2 \frac{M}{l} dx = \frac{M}{l}\ \frac{x^3}{3}\bigg|_0^l = \frac{Ml^2}{3}.$$

Пример 2. Найдем момент инерции J_x окружности с центром в начале координат и радиусом r.

Очевидно, что моменты инерции верхней и нижней половин окружности относительно оси Ox одинаковы. Поэтому

$$J_x = 2\int_{-r}^{r} y^2 \sqrt{1 + y'^2}\ dx.$$

Так как на верхней половине окружности $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, то

$$J_x = 2\int_{-r}^{r} (r^2 - x^2)\sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\ dx = 2r\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} dx = 4r\int_{0}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} dx.$$

Такой интеграл мы уже вычисляли в разделе 2.9. Он равен $\dfrac{\pi r^2}{4}$. Следовательно, $J_x = \pi r^3$.

2.16. Несобственные интегралы по бесконечным промежуткам

Изучая определенные интегралы, мы все время считали, что интегрируемые функции заданы на конечных замкнутых промежутках.

В этом разделе мы распространим понятие интеграла на бесконечно длинные, а в следующем — на незамкнутые промежутки.

Если функция задана на бесконечно длинном промежутке, то разбить такой промежуток на конечное число промежутков, имеющих ограниченные длины, невозможно. А это значит, что невозможно построить интегральную сумму ни для какой функции. Поэтому мы введем интеграл по таким промежуткам с помощью предельного перехода от конечных промежутков.

Пусть функция f задана на промежутке $[a, +\infty)$ и интегрируема на любом конечном промежутке. Тогда при любом $b \geqslant a$ существует

$$\int\limits_a^b f(x)dx.$$

Интегралом от функции f по промежутку $[a, +\infty)$ будем называть

$$\lim_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Введенный интеграл называют несобственным и обозначают так:

$$\int\limits_a^{+\infty} f = \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Если функция f задана на промежутке $(-\infty, b]$ и интегрируема на любом конечном промежутке, то аналогичным образом можно ввести несобственный интеграл от нее по промежутку $(-\infty, b)$:

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f = \int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Для функции, заданной на всей оси, несобственный интеграл определяется так:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Естественно, что не для всякой функции введенные выше пределы существуют. Если предел существует, то говорят, что несобственный интеграл сходится, а функция интегрируема по соответствующему промежутку. Если же предел не существует, то интеграл называют расходящимся, а функцию – неинтегрируемой на этом промежутке.

Пример. Выясним, сходится или нет интеграл

$$\int_a^{+\infty} e^{\gamma x}\,dx.$$

Для этого вначале рассмотрим интеграл

$$\int_a^b e^{\gamma x}\,dx = \frac{1}{\gamma}e^{\gamma x}\Big|_a^b = \frac{1}{\gamma}(e^{\gamma b} - e^{\gamma a}).$$

Если $\gamma > 0$, то $e^{\gamma b} \to +\infty$ при $b \to +\infty$. Значит, при $\gamma > 0$ интеграл расходится. Если же $\gamma < 0$, то $e^{\gamma b} \to 0$ при $b \to +\infty$, а потому интеграл сходится. Нетрудно видеть, что интеграл расходится и при $\gamma = 0$.

Итак, справедлива

Теорема 1. Интеграл

$$\int_a^{+\infty} e^{\gamma x}\,dx$$

сходится тогда и только тогда, когда $\gamma < 0$.

Аналогичным образом доказывается

Теорема 2. Интеграл

$$\int_{-\infty}^{b} e^{\gamma x}\,dx$$

сходится тогда и только тогда, когда $\gamma > 0$.

Рекомендуем читателю провести доказательство этой теоремы самостоятельно.

Следствие. Интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\gamma x}\,dx$$

расходится при всех γ.

Пример. Исследуем сходимость интеграла

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}\,, \quad a > 0.$$

Будем считать, что $p \neq 1$, и рассмотрим

$$\int_a^b \frac{dx}{x^p} = \left. \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right|_a^b = \frac{1}{1-p}(b^{1-p} - a^{1-p}).$$

Если $1-p > 0$, то есть $p < 1$, то $b^{1-p} \to +\infty$ при $b \to +\infty$, и интеграл расходится. Если $1-p < 0$, то есть $p > 1$, то $b^{1-p} \to 0$ при $b \to +\infty$, и интеграл сходится.

При $p = 1$ интеграл принимает вид:

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} \ .$$

Поэтому

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln x|_a^b = \ln b - \ln a \to +\infty \quad \text{при} \quad b \to +\infty,$$

то есть интеграл расходится.

Тем самым доказана

Теорема 3. Интеграл

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$$

сходится тогда и только тогда, когда $p > 1$.

Предположим теперь, что функция $f(x)$, заданная на $[a, +\infty)$, имеет первообразную $F(x)$. Тогда при любом b будет

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $b \to +\infty$, получаем

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a)$$

или

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)|_a^{+\infty},$$

где
$$F(+\infty) = \lim_{b\to+\infty} F(b).$$
Тем самым мы распространили формулу Ньютона - Лейбница на несобственный интеграл по промежутку $[a, +\infty)$.

Отметим одно важное обстоятельство: из нашего вывода следует, что и несобственный интеграл существует тогда и только тогда, когда существует предельное значение $F(+\infty)$.

Нетрудно получить и такие равенства:
$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(x)|_{-\infty}^{b},$$
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = F(x)|_{-\infty}^{+\infty},$$
в которых правые и левые части одновременно либо существуют, либо не существуют.

Пример 1.
$$\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Big|_{2}^{+\infty} = \frac{1}{2}(\ln 1 - \ln\frac{1}{3}) = \frac{1}{2}\ln 3.$$

Пример 2.
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi.$$

Пример 3.
$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)|_{1}^{+\infty} = +\infty,$$
то есть интеграл расходится.

В заключение этого раздела сформулируем одну полезную для дальнейшего теорему.

Теорема 4 (об абсолютной сходимости интеграла). Если сходится $\int\limits_{a}^{+\infty} |f|$, то сходится $\int\limits_{a}^{+\infty} f$.

Мы не будем доказывать эту теорему.

Несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f$ называют абсолютно сходящимся, если сходится интеграл $\int\limits_a^{+\infty} |f|$. В этом случае говорят, что функция абсолютно интегрируема на $[a, +\infty)$.

Если $\int\limits_a^{+\infty} |f|$ расходится, а $\int\limits_a^{+\infty} f$ сходится, то говорят, что $\int\limits_a^{+\infty} f$ неабсолютно сходится, а функцию называют неабсолютно интегрируемой на $[a, +\infty)$.

Естественно, что теорема 4 и связанные с ней понятия переносятся на все рассмотренные несобственные интегралы.

2.17. Несобственные интегралы по незамкнутым промежуткам

Предположим, что функция f задана на полуоткрытом промежутке $[a, b)$ и интегрируема по любому замкнутому промежутку, лежащему в $[a, b)$. Тогда при всяком $c \in [a, b)$ существует

$$\int\limits_a^c f(x)dx.$$

Предел этого интеграла при $c \to b-0$ будем называть несобственным интегралом от f по $[a, b)$, то есть

$$\int\limits_a^b f = \int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{c \to b-0} \int\limits_a^c f(x)dx.$$

Аналогичным образом определяется несобственный интеграл по промежутку $(a, b]$:

$$\int\limits_a^b f = \int\limits_c^b f(x)dx = \lim_{c \to a+0} \int\limits_a^c f(x)dx.$$

Если функция задана на промежутке (a, b), то для нее интеграл вводится так:

$$\int\limits_a^b f = \int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{c \to a+0 \\ d \to b-0}} \int\limits_c^d f(x)dx.$$

Естественно, что для функции с областью задания $[a, h) + (h, b]$ интеграл вводится как сумма двух интегралов, взятых по $[a, h)$ и $(h, b]$.

Так же, как и в случае бесконечных промежутков, введенные пределы могут существовать, а могут и не существовать. Соответственно этому мы будем говорить, как и выше, что интегралы сходятся или расходятся и что функции интегрируемы или неинтегрируемы.

Пример. Выясним при каких значениях p сходится интеграл

$$\int\limits_0^a \frac{1}{x^p}\,dx \quad (a > 0).$$

Для этого, предположив, что $p \neq 1$, рассмотрим

$$\int\limits_c^a \frac{1}{x^p}\,dx = \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_c^a = \frac{a^{-p+1}}{-p+1} - \frac{c^{-p+1}}{-p+1}.$$

Когда $-p+1 > 0$, то есть $p < 1$, оказывается $c^{-p+1} \to 0$ при $c \to +0$, а потому интеграл сходится. Если же $p > 1$, то $c^{-p+1} \to \infty$ при $c \to +0$, и интеграл расходится.

При $p = 1$ имеем

$$\int\limits_0^a \frac{1}{x}\,dx = \lim_{c\to+0}\int\limits_c^a \frac{1}{x}dx = \lim_{c\to+0}(\ln x|_c^a) = \lim_{c\to+0}(\ln a - \ln c) = \infty,$$

так что интеграл расходится.

Следовательно, доказана

Теорема. Интеграл

$$\int\limits_0^a \frac{1}{x^p}dx \quad (a > 0)$$

сходится тогда и только тогда, когда $p < 1$.

Так же, как и в случае бесконечного промежутка, для рассматриваемых интегралов остается справедливой формула Ньютона - Лейбница. Например, если функция $f(x)$ задана на (a, b) и имеет первообразную $F(x)$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)|_{a+0}^{b-0} = F(b-0) - F(a+0).$$

При этом, как и раньше, правая и левая части равенства одновременно существуют или не существуют.

Для несобственных интегралов по незамкнутому промежутку остается справедливой теорема об абсолютной сходимости, а также сохраняются связанные с ней понятия.

2.18. Теорема сравнения для несобственных интегралов

При использовании несобственных интегралов обычно прежде всего возникает вопрос об их сходимости. Для ответа на этот вопрос часто бывает полезна теорема, называемая теоремой сравнения. Мы подробно разберем эту теорему лишь для случая несобственного интеграла по бесконечному промежутку $[a, +\infty)$. На другие случаи теорема переносится очень просто и потому мы не будем их приводить, хотя пользоваться теоремой в этих случаях будем.

Теорема сравнения (непредельная форма). Пусть на промежутке $[a, +\infty)$ заданы две неотрицательные функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, интегрируемые на всяком конечном промежутке. Тогда если на всей области задания выполнено условие $f_1(x) \leqslant f_2(x)$, то из сходимости интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f_2$ следует сходимость интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f_1$.

Доказательство. Рассмотрим интегралы

$$I_1(b) = \int\limits_a^b f_1 \quad \text{и} \quad I_2(b) = \int\limits_a^b f_2.$$

По условию, оба интеграла существуют при любом значении $b \in [a, +\infty)$. Так как обе функции неотрицательны, то оба интеграла возрастают с возрастанием b.

Далее, если существует $\int\limits_a^{+\infty} f_2$, то это означает, что существует $\lim I_2(b)$ при $b \to +\infty$. Возрастающая величина не превосходит своего предела. Следовательно, $I_2(b)$ ограничено сверху. Из того, что $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ следует, что $I_1(b) \leqslant I_2(b)$. Поэтому $I_1(b)$ тоже ограничено сверху.

Итак, $I_1(b)$ возрастает и ограничено сверху. Значит, существует $\lim I_1(b)$, при $b \to +\infty$, то есть существует $\int\limits_a^{+\infty} f_1$.

Теорема доказана.

Следствие. Если выполнены условия теоремы и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f_1$ расходится, то расходится $\int\limits_a^{+\infty} f_2$.

Действительно, если бы сходился интеграл от функции f_2, то, в силу теоремы, сходился бы интеграл от f_1, а этого нет.

Пример 1. Исследуем сходимость интеграла

$$\int\limits_3^{+\infty} \frac{dx}{\ln x} \ .$$

Так как $\ln x < x$, то $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{\ln x}$. Выше мы видели, что $\int\limits_3^{+\infty} \dfrac{1}{x}\ dx$ расходится. В силу следствия, наш интеграл тоже расходится.

Пример 2. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\ dx.$$

Подынтегральное выражение не сохраняет знака на промежутке интегрирования. Из-за этого применять признак сравнения нельзя. Поэтому мы вместо нашего рассмотрим интеграл $\int\limits_\pi^{+\infty} \dfrac{|\sin x|}{x^2}\ dx$. Так как $|\sin x| \leqslant 1$, то $\dfrac{|\sin x|}{x^2} \leqslant \dfrac{1}{x^2}$. Интеграл $\int\limits_\pi^{+\infty} \dfrac{1}{x^2}\ dx$ сходится. Следовательно, сходится $\int\limits_\pi^{+\infty} \dfrac{|\sin x|}{x^2}\ dx$. В таком случае, по теореме об абсолютной сходимости, сходится и исследуемый интеграл.

Отметим один весьма полезный для будущих рассуждений факт: для всякой функции f при любом $c \in [a, +\infty)$ интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f$ и $\int\limits_c^{+\infty} f$ ведут себя в отношении сходимости одинаково, то есть либо оба сходятся, либо оба расходятся.

В самом деле, при любых b и c из $[a, +\infty)$ справедливо равенство

$$\int\limits_a^b f = \int\limits_a^c + \int\limits_c^b f.$$

Первое слагаемое в правой части не зависит от b. Поэтому ясно, что пределы при $b \to +\infty$ интегралов $\int\limits_a^b f$ и $\int\limits_c^b f$ либо оба существуют, либо оба не существуют.

Из сказанного ясно, что для справедливости теоремы сравнения достаточно, чтобы условие $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ выполнялось не на всей области $[a, +\infty)$, а лишь на некоторой ее части вида $[c, +\infty)$.

После этих замечаний мы можем сформулировать теорему сравнения в другой форме.

Теорема сравнения (предельная форма). Пусть на промежутке $[a, +\infty)$ заданы две неотрицательные функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, интегрируемые на всяком конечном промежутке. Тогда, если существует

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = l,$$

причем $l > 0$, то в отношении сходимости интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f_1$ и $\int\limits_a^{+\infty} f_2$ ведут себя одинаково, то есть либо оба сходятся, либо оба расходятся.

Доказательство. Пусть существует $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = l$, где $l > 0$.

Возьмем $\varepsilon = \dfrac{l}{2}$. Тогда, в соответствии с определением предела, для взятого нами $\dfrac{l}{2}$ найдется такое c, что при $\forall x > c$ будет выполняться неравенство $\dfrac{l}{2} < \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} < \dfrac{3l}{2}$. Отсюда $\dfrac{l}{2} f_2(x) < f_1(x) < \dfrac{3l}{2} f_2(x)$.

Предположим теперь, что $\int\limits_a^{+\infty} f_1$ сходится. Тогда сходится $\int\limits_c^{+\infty} f_1$. Так как $\dfrac{l}{2} f_2(x) < f_1(x)$, то, по доказанному, сходится $\int\limits_c^{+\infty} \dfrac{l}{2} f_2$, а с ним и интеграл $\int\limits_c^{+\infty} f_2$. В таком случае сходится $\int\limits_a^{+\infty} f_2$. Итак, из сходимости $\int\limits_a^{+\infty} f_1$ следует сходимость $\int\limits_a^{+\infty} f_2$.

Аналогичным образом из сходимости $\int\limits_a^{+\infty} f_2$ вытекает сходимость $\int\limits_a^{+\infty} f_1$. Теорема доказана.

Следствие 1. Если $f(x) \sim \dfrac{k}{x^p}$ $(p > 1)$ при $x \to +\infty$, то $\int\limits_a^{+\infty} f$ сходится.

Следствие 2. Если $f(x) \sim \dfrac{k}{x^p}$ $(p < 1)$ при $x \to +0$, то $\int\limits_0^{a} f$ сходится.

Оба следствия очевидным образом вытекают из доказанной теоремы и теорем о сходимости соответствующих интегралов от $\dfrac{1}{x^p}$.

Напомним, что в обоих следствиях считается, что $a > 0$.

Отметим еще раз, что все сказанное выше без труда переносится на несобственные интегралы других видов.

Пример 3. Выясним, сходится или нет интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{\operatorname{tg} x}{x\sqrt{x}}\, dx.$$

Это несобственный интеграл, поскольку подынтегральная функция не существует при $x = 0$.

Если $x \to 0$, то $\operatorname{tg} x \sim x$, а потому $\dfrac{\operatorname{tg} x}{x\sqrt{x}} \sim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Видно, что $p = \dfrac{1}{2}$. Значит, в силу следствия 2, интеграл сходится.

2.19. Г-функция Эйлера

Г-функцией Эйлера от аргумента α (L. Euler, 1707-1783) называют такой несобственный интеграл:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx.$$

Этот зависящий от α интеграл является несобственным по двум причинам: во-первых, он берется по бесконечному интервалу; во-вторых, при $\alpha - 1 < 0$ подынтегральная функция не существует при $x = 0$ (обращается в бесконечность).

Прежде всего выясним, является ли этот интеграл сходящимся. Для этого разобьем его на два. Например, так:

$$\int_0^1 x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx \quad \text{и} \quad \int_1^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx,$$

и исследуем сходимость каждого интеграла в отдельности.

В первом из этих интегралов $e^{-x} \to 1$ при $x \to 0$. Поэтому оказывается $x^{\alpha-1}e^{-x} \sim x^{\alpha-1}$ при $x \to 0$. Интеграл

$$\int_0^1 x^{\alpha-1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{1-\alpha}}\, dx,$$

как было показано в разделе 2.17, сходится при $1-\alpha < 1$, то есть при $\alpha > 0$. В таком случае, в силу теоремы сравнения, первый интеграл тоже сходится при $\alpha > 0$.

Обратимся ко второму интегралу. В разделе 1.28 было показано, что при $x \to +\infty$ степенная функция возрастает медленнее, чем показательная. Это означает, что найдется такое число c, что при $x > c$ будет выполняться неравенство $x^{\alpha-1} < e^{\frac{x}{2}}$. Поэтому при $x > c$ окажется

$$x^{\alpha-1}e^{-x} < e^{\frac{x}{2}} e^{-x} = e^{-\frac{x}{2}}.$$

Как мы знаем, интеграл

$$\int_c^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}}\, dx$$

сходится (см. раздел 2.16). Значит, в соответствии с теоремой сравнения, сходится

$$\int_c^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx,$$

а потому должен сходиться второй из наших интегралов.

Таким образом, разбив интеграл на две части, мы выяснили, что одно слагаемое существует при $\alpha > 0$, а второе – при любых значениях α. Следовательно, исходный интеграл сходится при $\alpha > 0$. Другими словами, функция $\Gamma(\alpha)$ существует при $\alpha > 0$.

Приведем одно полезное свойство Г-функции. Пусть $\alpha > 0$. Тогда, используя интегрирование по частям, имеем

$$\Gamma(\alpha+1) = \int\limits_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} dx = -\int\limits_0^{+\infty} x^\alpha \, d(e^{-x}) = -\, x^\alpha e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} \, d(x^\alpha).$$

Так как $x^\alpha e^{-x} \to 0$ при $x \to +\infty$, то

$$\Gamma(\alpha+1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} \, d(x^\alpha) = \alpha \int\limits_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} \, dx = \alpha\Gamma(\alpha).$$

Мы получили рекуррентное равенство

$$\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha),$$

из которого хорошо видно, что, имея значения $\Gamma(\alpha)$ для $\alpha \in (0,1]$, можно получить значения этой функции для любого $\alpha > 0$.

Пример. $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Так как $\Gamma(\alpha)$ при почти всех значениях $\alpha > 0$ не выражается через элементарные функции, то существуют таблицы этой функции, составленные, естественно, для промежутка $(0,1]$.

Если $\alpha = n$, где n - целое положительное число, то, используя рекуррентное равенство, получаем последовательно

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = ... = n(n-1)...1\Gamma(1) =$$

$$= n! \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} \, dx = n! \, (-e^{-x})\Big|_0^{+\infty} = n!.$$

Итак,

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

Полагая в этом равенстве формально $n = 0$, получим $\Gamma(1) = 0!$ Но, как мы только что видели, $\Gamma(1) = 1$. Это дает повод дать определение: $0! = 1$.

Можно доказать, что $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Мы не будем этого делать.

На рис. 26 приведен вид графика $\Gamma(\alpha)$

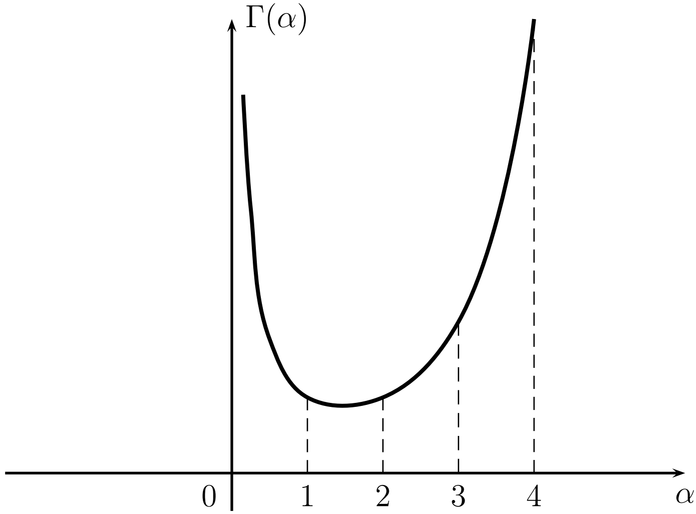

Рис. 26. График функции $\Gamma(\alpha)$.

Г-функция используется в ряде разделов математики и ее приложений. В частности, она необходима в теории массового обслуживания.

2.20. Функция Лапласа

Функцией Лапласа (P. S. Laplace, 1749-1827) называют несобственный интеграл

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt,$$

являющийся функцией от верхнего предела.

Покажем, что этот интеграл сходится. Для этого разобъем его на два:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{-2} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-2}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$$

Второй интеграл в правой части является обычным определенным интегралом от непрерывной функции и потому существует при любом x.

Покажем, что первый интеграл тоже существует. Пусть $x < -2$. Тогда $x^2 > -2x$, откуда $-\dfrac{x^2}{2} < x$. Поэтому $e^{-\frac{x^2}{2}} < e^x$. Интеграл $\int\limits_{-\infty}^{-2} e^x\,dx$ сходится, а потому, в силу теоремы сравнения, сходится наш интеграл.

Итак, оба интеграла в правой части сходятся. Значит, функция Лапласа существует при любом $x \in (-\infty, +\infty)$.

Остановимся на некоторых свойствах функции Лапласа.

1. $\Phi(x) > 0$, так как подынтегральная функция положительна.

2. Очевидно,что

$$\Phi(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} \Phi(x) = 0.$$

.

Это означает, что ось Ox является горизонтальной асимптотой функции при $x \to -\infty$.

3. Далее,

$$\Phi(+\infty) = 1.$$

Это можно показать, используя приведенное в предыдущем разделе равенство $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Действительно,

$$\Phi(+\infty) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\ dt.$$

Так как под интегралом стоит четная функция, то можем написать

$$\Phi(+\infty) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\ dt.$$

В последнем интеграле сделаем замену $t = \sqrt{2\tau}$. Тогда при изменении t от 0 до $+\infty$ величина τ будет меняться в тех же пределах. Кроме того, $dt = \dfrac{d\tau}{\sqrt{2\tau}}$. Поэтому равенство наше примет вид:

$$\Phi(+\infty) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{2\tau}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{+\infty} \tau^{-\frac{1}{2}}e^{-\tau}d\tau = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma(\frac{1}{2}) = 1.$$

Следовательно, при $x \to +\infty$ прямая $y = 1$ служит горизонтальной асимптотой функции.

4. $\Phi(x)$ - возрастающая функция.

Действительно, $\Phi'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \geqslant 0$.

5. Точка $x = 0$ является точкой перегиба функции $\Phi(x)$.

В самом деле, нетрудно видеть, что

$$\Phi''(x) = -\frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Поэтому $\Phi''(x) > 0$ при $x < 0$ и $\Phi''(x) < 0$ при $x > 0$. Значит, при $x < 0$ функция выпукла вниз, а при $x > 0$ - вверх.

6. $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

Для доказательства этого свойства в интеграле

$$\Phi(-x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-x} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

сделаем замену, положив $t = -\tau$. Получим

$$\Phi(-x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{+\infty}^{x} e^{-\frac{\tau^2}{2}}\, d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x}^{+\infty} e^{-\frac{\tau^2}{2}}\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\tau^2}{2}}\, d\tau - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{\tau^2}{2}}\, d\tau =$$

$$= \Phi(+\infty) - \Phi(x) = 1 - \Phi(x).$$

Свойство доказано.

На рис. 27 приведен вид графика $\Phi(x)$.

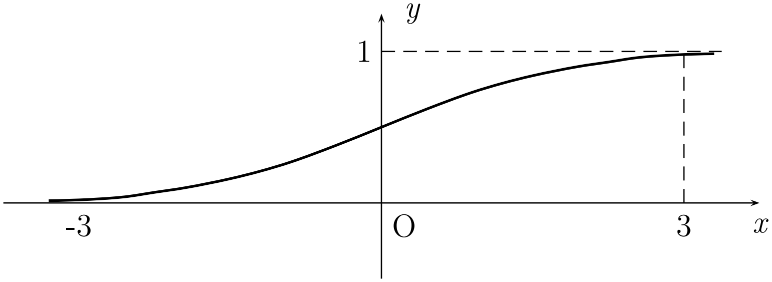

Рис. 27. График функции Лапласа

Функция Лапласа очень часто встречается при решении инженерных задач, использующих теорию вероятностей и статистику. Поэтому для нее составлены таблицы, которые приводятся в большом числе справочников. При этом таблицы составлены обычно лишь для промежутка $[0, 4]$. Это объясняется двумя обстоятельствами. Во-первых, для нахождения $\Phi(x)$ при отрицательных значениях x пользуются свойством 6. Во-вторых, $\Phi(x)$ с ростом x очень быстро приближается к единице. Например, $\Phi(3) \approx 0,99865$, а $\Phi(4) \approx 0,99997$.

Часть 3. Ряды

3.1. Понятие последовательности

Последовательностью называют такую функцию, у которой аргумент принимает целые неотрицательные значения. Для последовательности, как правило, значение аргумента пишут не в скобках, а в виде индекса. Например, если у функции a значение аргумента равно k, то вместо $a(k)$ пишут a_k. В дальнейшем мы будем придерживаться таких же обозначений. При этом чаще всего считают, что аргумент последовательности принимает целые значения, начинающиеся с 0 или с 1.

Приведем примеры последовательностей:

1. $a_k = q^k \;\; (k = 0, 1, 2, \dots)$. Такая последовательность называется геометрической прогрессией.

2. $a_k = c + kd \;\; (k = 0, 1, 2, \dots)$. Эту последовательность называют арифметической прогрессией.

3. $a_k = \frac{1}{k} \;\; (k = 1, 2, 3, \dots)$.

Многие понятия и факты, которые в части 1 были изложены для функций с непрерывным аргументом, сохраняются для последовательностей. Мы приведем здесь наиболее важные для дальнейшего.

Начнем с определения предела последовательности. Естественно, что следует рассматривать лишь случай, когда $k \to +\infty$. Поэтому определение предела последовательности мы сформулируем следующим образом.

Если для $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists k_0$ такое, что при $\forall k > k_0$ выполняется неравенство $|a_k - l| < \varepsilon$ или, что то же, $l - \varepsilon < a_k < l + \varepsilon$, то число l называют пределом последовательности a_k.

Как и раньше, будем писать

$$\lim_{k\to\infty} a_k = l \;\; \text{или} \;\; a_k \to l \;\; (k \to \infty).$$

Очевидно, данное определение повторяет то, что было в разделе 1.5.

Так же, как и раньше, вводятся понятия бесконечно малых и бесконечно больших. Например, последовательность q^k является бесконечно малой при $|q| < 1$, так как в этом случае $q^k \to 0$, и оказывается бесконечно большой при $|q| > 1$, поскольку $q^k \to \infty$ при $|q| > 1$.

Сохраняются понятия эквивалентности и $o(a_k)$, а также связанные с ними теоремы.

Естественно, что остаются верны все рассмотренные в разделах 1.6 − 1.9 теоремы о бесконечно малых, бесконечно больших и о пределах. Мы не будем их заново доказывать, хотя пользоваться ими будем весьма широко.

3.2. Понятие ряда

Определение. Рядом называется выражение вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots ,$$

то есть выражение, содержащее бесконечно много слагаемых.

Входящие в написанное выражение слагаемые a_k называют членами ряда.

Найти значение суммы ряда последовательным сложением, как мы это обычно делаем, нам не удастся из-за бесконечного множества слагаемых. Поэтому, как всегда, когда мы сталкиваемся с бесконечными множествами, мы введем сумму ряда с помощью понятия предела. Для этого мы вначале составим сумму первых n членов ряда:

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_n.$$

Такую сумму будем называть частной суммой ряда или, более точно, n-й частной суммой ряда.

Очевидно, что частные суммы A_n образуют последовательность.

Определение. Предел последовательности частных сумм называют суммой ряда.

Обозначив сумму ряда через A, можем написать

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Как известно, не всякая последовательность имеет предел, а потому не у всякого ряда имеется сумма. Если ряд имеет сумму, то он называется сходящимся. В противном случае ряд называют расходящимся.

Заметим сразу же, что если ряд сходится, то при больших значениях n будет $A \approx A_n$, что позволяет находить приближенно сумму ряда.

В соответствии со сказанным при рассмотрении рядов возникают, как правило, два основных вопроса:

1. Имеет ли ряд сумму, то есть сходится ли ряд?

2. Если ряд сходится, то как найти его сумму?

Иногда на оба вопроса удается найти ответ одновременно, но гораздо чаще приходится отвечать на эти вопросы порознь. Приведем несколько примеров.

Пример 1. Рассмотрим ряд

$$1 + 1 + 1 + \cdots \quad .$$

Очевидно, что для этого ряда $A_n = n$. Значит, $A_n \to \infty$ при $n \to \infty$. Ряд расходится.

Пример 2. Ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots$$

имеет такую последовательность частных сумм: $1,\ 0,\ 1,\ 0,\ 1,\ \cdots$ Эта последовательность предела, очевидно, не имеет. Значит, ряд расходится.

Пример 3. Обратимся к ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{k}).$$

Напишем его частную сумму и преобразуем ее:

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + \frac{1}{k}) = \sum_{k=1}^{n} \ln \frac{k+1}{k} =$$

$$= \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \cdots + \ln \frac{n+1}{n} = \ln \frac{2}{1}\ \frac{3}{2}\ \cdots \frac{n+1}{n} = \ln(n+1).$$

Так как $A_n = \ln(n+1) \to \infty$ при $n \to \infty$, то ряд расходится.

Пример 4. Теперь рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Используя равенство

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1},$$

нетрудно упростить частную сумму этого ряда:

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Ясно, что $A_n = 1 - \dfrac{1}{n+1} \to 1$ при $n \to \infty$. Следовательно, ряд сходится, и его сумма равна 1, то есть мы можем написать

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1.$$

Заметим, что в последнем случае нам удалось решить сразу две задачи: во-первых, мы установили, что ряд сходится, и, во-вторых, мы нашли его сумму.

Пример 5. Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k$$

составлен из членов геометрической прогрессии. Мы будем называть его в связи с этим геометрическим рядом. Выясним, при каких значениях q этот ряд сходится.

Заметим прежде всего, что при $q = 1$ получается ряд, рассмотренный в примере 1, а при $q = -1$ - ряд из примера 2. Оба эти ряда расходятся.

Пусть $q \neq \pm 1$. Очевидно, что частная сумма ряда имеет вид

$$A_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n.$$

Умножая обе части последнего равенства на q, имеем

$$qA_n = q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n+1}.$$

Отсюда

$$A_n - qA_n = 1 - q^{n+1},$$

а потому

$$A_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Как известно, если $|q| < 1$, то $q^{n+1} \to 0$ при $n \to \infty$. В таком случае $A_n \to \dfrac{1}{1-q}$ при $n \to \infty$. Значит, при $|q| < 1$ геометрический ряд сходится.

Если $|q| > 1$, то $q^{n+1} \to \infty$ при $n \to \infty$. Поэтому $A_n \to \infty$ при $n \to \infty$, то есть ряд расходится.

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема. Геометрический ряд сходится тогда и только тогда, когда $|q| < 1$. При этом

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Замечание. Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k$$

в дальнейшем мы будем тоже называть геометрическим. Очевидно, что при $a \neq 0$ условием его сходимости является $|q| < 1$. Если $a = 0$, то ряд, естественно, сходится при любом q. Ясно, что при сходимости ряда должно быть

$$\sum_{k=0}^{\infty} aq^k = \frac{a}{1-q}.$$

3.3. Простейшие теоремы о рядах

Теорема 1 (линейное свойство сходящихся рядов). Пусть имеются два сходящихся ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k = B.$$

Тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_1 a_k + \lambda_2 b_k)$$

тоже сходится, и его сумма равна $\lambda_1 A + \lambda_2 B$.

Доказательство. Пусть $A_n,\ B_n$ и C_n - частные суммы соответственно первого, второго и третьего рядов. Ясно, что $C_n = \lambda_1 A_n + \lambda_2 B_n$. По условию, $A_n \to A$ и $B_n \to B$ при $n \to \infty$. В таком случае очевидно, что $C_n \to \lambda_1 A + \lambda_2 B$ при $n \to \infty$. Значит, третий ряд сходится, и его сумма равна $\lambda_1 A + \lambda_2 B$. Теорема доказана.

Теорема 2 (необходимое условие сходимости ряда). Если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

сходится, то $a_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Доказательство. Пусть A - сумма ряда и A_n - его частная сумма. Так как ряд сходится, то должно быть $A_n \to A$ и $A_{n-1} \to A$ при $n \to \infty$. Отсюда $A_n - A_{n-1} \to A - A = 0$. Но $A_n - A_{n-1} = a_n$. Значит, $a_n \to 0$ при $n \to \infty$. Теорема доказана.

Следствие. Если a_k не стремится к нулю с ростом k, то ряд расходится.

Отметим следующее существенное обстоятельство: условие $a_k \to 0$ не достаточно для сходимости ряда. Например, $\ln(1 + \frac{1}{k}) \to 0$ при $k \to \infty$. Однако мы видели в примере 3, что ряд с такими членами расходится.

Введем понятие, которое в дальнейшем нам понадобится.

Пусть имеется ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Исключим из него первые m членов. Оставшаяся часть тоже будет рядом. Эту часть называют остатком исходного ряда. Иначе говоря, остатком после m-го члена называют ряд

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k.$$

Обозначим через A_n частную сумму исходного ряда и через $R_n^{(m)}$ частную сумму его остатка. Тогда $A_{m+n} = A_m + R_n^{(m)}$. Значит, частные суммы A_{m+n} и $R_n^{(m)}$ отличаются на сумму A_m отброшенных членов. Поэтому либо обе частные суммы имеют пределы, либо обе не имеют пределов при $n \to \infty$. Следовательно, справедлива такая теорема:

Теорема 3. Ряд и его остаток ведут себя в отношении сходимости одинаково, то есть либо ряд и любой его остаток сходятся, либо ряд и любой его остаток расходятся.

Эта теорема дает возможность исследовать вместо сходимости ряда сходимость какого-нибудь его остатка. Как мы увидим позже, к такому приему приходится прибегать довольно часто.

Предположим теперь, что ряд и его остаток сходятся. Обозначим через A сумму ряда и через $R^{(m)}$ сумму его остатка. Тогда, как

нетрудно увидеть,
$$A = A_m + R^{(m)},$$
то есть сумма ряда складывается из суммы его остатка и суммы отброшенных членов.

Полезно заметить, что нередко возникает необходимость оценивать сумму остатка, поскольку погрешность приближенного равенства $A \approx A_m$ не превосходит $|R^{(m)}|$.

Не существует никакой общей методики, позволяющей для всех рядов устанавливать их сходимость. Поэтому мы рассмотрим далее признаки, с помощью которых можно доказывать сходимость (или расходимость) отдельных типов рядов.

3.4. Положительные ряды

Ряд
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$
называется положительным, если в нем $a_k \geqslant 0$ при всех k.

Так как $a_k \geqslant 0$, то ясно, что последовательность частных сумм A_n положительного ряда возрастает с возрастанием n. Из курса теории пределов мы знаем, что возрастающая последовательность имеет предел тогда и только тогда, когда она ограничена сверху. Это означает, что справедлива

Теорема 1 (необходимое и достаточное условие сходимости положительного ряда). Положительный ряд сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частных сумм ограничена сверху.

Иначе говоря, положительный ряд сходится тогда и только тогда, когда существует такое число M, что $A_n < M$ при всех n.

Ясно, что члены возрастающей последовательности не больше, чем ее предел. Поэтому при всех n должно быть $A_n \leqslant A$, где A - сумма ряда.

Отметим также одно очевидное обстоятельство: если положительный ряд расходится, то это означает, что $A_n \to +\infty$.

Эта теорема используется при конкретных исследованиях не очень часто, однако она позволяет доказать несколько весьма эффективных и потому часто используемых признаков сходимости положительных рядов. К этим признакам мы и обратимся.

Мы начнем с теорем, аналогичных тем, что доказывали для несобственных интегралов.

Теорема 2 (признак сравнения). Пусть имеются два таких положительных ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k,$$

что $a_k \leqslant b_k$. Тогда из сходимости второго ряда следует сходимость первого.

Доказательство. Пусть A_n - частная сумма первого ряда, а B_n - второго. Так как $a_k \leqslant b_k$, то ясно, что $A_n \leqslant B_n$. Если второй ряд сходится, то, в силу теоремы 1, последовательность B_n его частных сумм ограничена сверху. В таком случае ограничена и последовательность A_n, поскольку $A_n \leqslant B_n$. Значит, по теореме 1, первый ряд сходится. Теорема доказана.

Следствие. Если выполнены условия теоремы и при этом первый ряд расходится, то и второй ряд расходится.

Действительно, если бы сходился второй ряд, то, по доказанному выше, сходился бы первый ряд.

Заметим, что утверждение теоремы 2 остается справедливым, если условие $a_k \leqslant b_k$ выполняется не при всех k, а лишь начиная с некоторого k_0. В этом случае теорема верна для остатков, а из сходимости остатков следует сходимость рядов.

Пример. Исследуем сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k2^k}.$$

Очевидно, что при всех $k \geqslant 1$ выполняется неравенство $\dfrac{1}{k2^k} \leqslant \dfrac{1}{2^k}$. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

сходится, так как это геометрический ряд с $q = \dfrac{1}{2}$. В силу доказанной теоремы, наш ряд тоже сходится.

Приведем еще одну форму теоремы сравнения.

Теорема 2* (предельная форма признака сравнения). Пусть имеются два таких положительных ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k,$$

что существует предел
$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_k}{b_k}=l,$$
причем $l>0$. Тогда в отношении сходимости оба ряда ведут себя одинаково, то есть либо оба ряда сходятся, либо оба расходятся.

Доказательство. Мы должны доказать, что при выполнении условия теоремы из сходимости первого ряда следует сходимость второго, а из сходимости второго - сходимость первого. Для этого возьмем положительное $\varepsilon=\dfrac{l}{2}$. В соответствии с определением предела, для него найдется такое k_0, что при всех $k>k_0$ будет выполняться неравенство
$$l-\frac{l}{2}<\frac{a_k}{b_k}<l+\frac{l}{2}$$
или, что то же,
$$\frac{l}{2}b_k<a_k<\frac{3l}{2}b_k.$$
Предположим теперь, что первый ряд сходится. В таком случае сходится его остаток
$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty}a_k.$$
Так как $\frac{l}{2}b_k<a_k$ при $k>k_0$, то, в силу доказанной теоремы, сходится ряд
$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty}\frac{l}{2}b_k.$$
Тогда сходится ряд
$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty}b_k,$$
являющийся остатком второго ряда. А из сходимости остатка вытекает сходимость всего второго ряда.

Аналогичным рассуждением доказывается вторая часть утверждения теоремы.

Эту теорему можно сформулировать и так: если имеются два положительных ряда
$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty}b_k,$$
в которых $a_k\sim lb_k$ при $k\to\infty$, то в отношении сходимости эти ряды ведут себя одинаково.

Заметим, что существенным условием в теореме является строгая положительность l.

Приведем примеры применения этой теоремы.

Пример 1. Исследуем сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \ ,$$

называемого гармоническим.

Как известно, $\ln(1+\frac{1}{k}) \sim \frac{1}{k}$ при $k \to \infty$. Но ряд с членами $\ln(1+\frac{1}{k})$ расходится (мы видели это в разделе 3.2). Следовательно, гармонический ряд расходится.

Пример 2. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Если $k \to \infty$, то $\dfrac{1}{k^2} \sim \dfrac{1}{k(k+1)}$. Выше мы видели, что ряд с членами $\dfrac{1}{k(k+1)}$ сходится. Значит, наш ряд тоже сходится.

Сравнение результатов в первом и во втором примерах наводит на следующий вопрос: при каких значениях показателя степени p сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}?$$

Мы ответим на этот вопрос в разделе 3.6.

Разумеется, что применять признак сравнения удобно тогда, когда имеются некоторые эталонные ряды, о которых известно, что они сходятся или расходятся. В следующем разделе мы приведем два признака сходимости положительных рядов, основанных на сравнении рядов с рассмотренным нами геометрическим рядом.

3.5. Признаки Коши и Даламбера

Теорема 1 (признак Коши). Если для положительного ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ при всех k выполняется условие

$$\sqrt[k]{a_k} \leqslant q < 1,$$

то ряд сходится.

Доказательство. Из условия теоремы очевидно, что $a_k \leqslant q^k$. Так как $q < 1$, то геометрический ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q^k$ сходится. Значит, в силу теоремы сравнения, сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Теорема доказана.

Обратим внимание на то, что условие $\sqrt[k]{a_k} \leqslant q < 1$ нельзя заменить условием $\sqrt[k]{a_k} < 1$, так как в этом случае невозможно построить используемый для сравнения сходящийся геометрический ряд.

Далее, нетрудно заметить, что для справедливости теоремы достаточно, чтобы ее условие $\sqrt[k]{a_k} \leqslant q < 1$ выполнялось не при всех значениях k, а лишь начиная с некоторого k_0. Действительно, в этом случае будет сходиться остаток ряда, а с ним и весь ряд.

Это замечание позволяет сформулировать признак Коши в несколько иной форме.

Теорема 1* (предельная форма признака Коши). Пусть дан такой положительный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k,$$

что существует

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a}_k = C.$$

Тогда при $C < 1$ ряд сходится.

Доказательство. Возьмем какое-нибудь число q, удовлетворяющее условию $C < q < 1$. Так как $\sqrt[k]{a}_k \to C$ при $k \to \infty$, то, в соответствии с определением предела, найдется такое k_0, что при всех $k > k_0$ окажется $\sqrt[k]{a}_k < q$. А в таком случае, как мы выше заметили, ряд сходится. Теорема доказана.

Замечание 1. Если $C > 1$, то ряд расходится. Действительно, в этом случае найдется такое k_0, что при всех $k > k_0$ будет $\sqrt[k]{a}_k > 1$, а потому $a_k > 1$. Это означает, что a_k не стремится к 0 при $k \to \infty$, и потому ряд не может сходиться.

Замечание 2. Если $C = 1$, то о сходимости ряда с помощью признака Коши ничего сказать нельзя, то есть признак Коши в этом случае не применим.

Пример. Исследуем сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2k-1}{3k+2}\right)^k.$$

Используя предельную форму признака Коши, находим

$$\lim_{k\to\infty}\left(\left(\frac{2k-1}{3k+2}\right)^k\right)^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty}\frac{2k-1}{3k+2} = \frac{2}{3} < 1.$$

Значит, ряд сходится.

Рассмотрим еще один полезный признак сходимости положительного ряда.

Теорема 2 (признак Даламбера (J. R. d'Alembert, 1717-1783)). Если для положительного ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ при всех k выполняется условие

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant q < 1,$$

то ряд сходится.

Доказательство. Из условия теоремы последовательно получаем

$$\begin{aligned} a_2 &\leqslant a_1 q, \\ a_3 &\leqslant a_2 q \leqslant a_1 q^2, \\ a_4 &\leqslant a_3 q \leqslant a_1 q^3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Видно, что при всех k будет $a_k \leqslant a_1 q^{k-1}$. Так как $q < 1$, то геометрический ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_1 q^{k-1}$ сходится. Следовательно, в силу теоремы сравнения, сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$. Теорема доказана.

К этой теореме можно сделать такие же добавления, как и к теореме Коши.

Во-первых, условие $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant q < 1$ условием $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} < 1$ заменить нельзя, так как в этом случае невозможно построить используемый для сравнения сходящийся геометрический ряд.

Во-вторых, нетрудно заметить, что для справедливости теоремы достаточно, чтобы ее условие $\dfrac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant q < 1$ выполнялось не при всех значениях k, а лишь начиная с некоторого k_0. Действительно, в этом случае будет сходиться остаток ряда, а с ним и весь ряд.

Так же, как и признак Коши, признак Даламбера можно сформулировать в предельной форме.

Теорема 2* (предельная форма признака Даламбера). Пусть дан положительный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

такой, что существует

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = D.$$

Тогда при $D < 1$ ряд сходится.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству предельной формы признака Коши. Поэтому мы его не приводим, а рекомендуем читателю сделать это самостоятельно.

Пример 1. Исследуем сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k}.$$

Используя предельную форма признака Даламбера, находим

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)3^k}{k3^{k+1}} = \frac{1}{3}\lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k} = \frac{1}{3} < 1.$$

Значит, ряд сходится.

Пример 2. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{k^2+1}}{k^3+4}.$$

Применив к этому ряду признак Даламбера, получаем

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt{(k+1)^2+1}(k^3+4)}{\sqrt{k^2+1}((k+1)^3+4)} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^4}{k^4} = 1.$$

Следовательно, признак Даламбера к этому ряду неприменим.

В следующем разделе мы приведем признак, с помощью которого нам удастся исследовать сходимость этого ряда.

3.6. Интегральный признак сходимости

Предположим, что на промежутке $[1, +\infty)$ задана неотрицательная убывающая функция $f(x)$. Пусть $f(k) = a_k$ при $k = 1, 2, 3, \ldots$ (рис. 28).

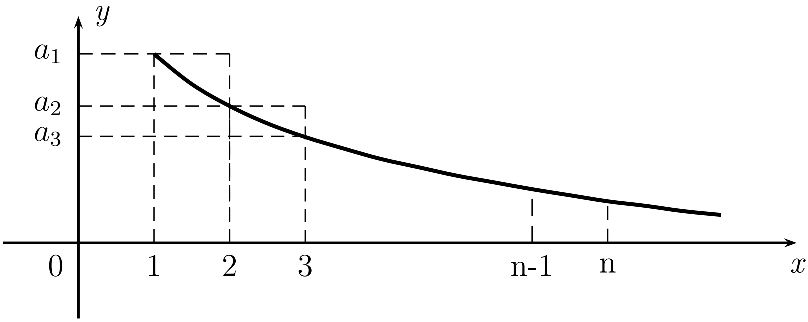

Рис. 28. К интегральному признаку сходимости

Построим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и выясним, что можно сказать о его сходимости. Для этого сравним площади прямоугольников и криволинейной трапеции, лежащих над промежутком $[1, 2]$. Получим, как нетрудно увидеть, неравенство

$$a_2 \leqslant \int\limits_1^2 f(x)dx \leqslant a_1.$$

Таким же образом мы найдем

$$a_3 \leqslant \int\limits_2^3 f(x)dx \leqslant a_2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_n \leqslant \int\limits_{n-1}^n f(x)dx \leqslant a_{n-1}.$$

Складывая все эти неравенства, имеем

$$a_2 + a_3 + \dots + a_n \leqslant \int\limits_1^n f(x)dx \leqslant a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}.$$

Если мы обозначим через A_n частную сумму ряда, то последнее неравенство примет вид

$$A_n - a_1 \leqslant \int\limits_1^n f(x)dx \leqslant A_n - a_n. \qquad (*)$$

Заметим, что интеграл и частная сумма возрастают с ростом n, так как функция и члены ряда неотрицательны.

Теперь допустим, что сходится несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$.

Это означает, что существует предел $\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_1^{n} f(x)dx$. В таком случае при всех n интеграл ограничен сверху. А тогда из левой части неравенства (*) следует, что частные суммы A_n ограничены сверху. Кроме того, частные суммы возрастают. Значит, они имеют предел, то есть ряд сходится.

Итак, если сходится несобственный интеграл, то сходится ряд.

Аналогичным образом с помощью правой части неравенства (*) можно показать, что из сходимости ряда следует сходимость несобственного интеграла.

Это означает, что справедлива

Теорема (интегральный признак сходимости). Пусть на промежутке $[a, +\infty)$ задана неотрицательная убывающая функция $f(x)$ такая, что $f(k) = a_k$ при $k = 1, 2, \ldots$. Тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

и несобственный интеграл

$$\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$$

в отношении сходимости ведут себя одинаково, то есть либо оба сходятся, либо оба расходятся.

Эта теорема позволяет свести исследование сходимости ряда к исследованию сходимости несобственного интеграла.

Выясним, при каких значениях p сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}.$$

Этот ряд называют обобщенным гармоническим рядом.

При p, равном 0, 1 и 2, мы этот ряд уже рассматривали и узнали, что при $p = 0$ и $p = 1$ он расходится, а при $p = 2$ сходится.

Если $p < 0$, то $\dfrac{1}{k^p} \to \infty$ при $k \to \infty$. Поэтому ряд расходится.

Пусть $p > 0$. Введем функцию $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$, $\quad x \in [1, \infty)$. Так как $p > 0$, то эта функция убывает с ростом p. Кроме того, $f(k) = \dfrac{1}{k^p}$. Значит, вместо ряда мы можем рассмотреть несобственный интеграл

$$\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^p}.$$

Из курса интегрального исчисления известно, что этот интеграл сходится тогда и только тогда, когда $p > 1$. В силу интегрального признака, это означает, что ряд сходится лишь при $p > 1$.

Итак, мы можем сформулировать следующую теорему:

Теорема. Обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$$

сходится тогда и только тогда, когда $p > 1$.

Следствие. Если члены положительного ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ удовлетворяют условию $a_k \sim \dfrac{c}{k^p}$, $\quad (p > 1)$, то ряд сходится.

Это утверждение очевидным образом вытекает из предельной формы признака сравнения.

Пример. Исследуем сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k^2+1}}{k^3+1}.$$

Очевидно, что ряд положительный, и при этом

$$\frac{\sqrt{k^2+1}}{k^3+1} \sim \frac{1}{k^2}.$$

Так как $2 > 1$, то ряд сходится.

Напомним, что при доказательстве теоремы мы получили неравенство (*). Это неравенство нетрудно преобразовать к виду

$$\int\limits_1^n f(x)dx + a_n \leqslant A_n \leqslant \int\limits_1^n f(x)dx + a_1.$$

Это неравенство бывает удобно использовать для оценки частных сумм рядов.

Пример. Оценим сумму первого миллиарда членов расходящегося гармонического ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

Ясно, что в этом случае $f(x) = \dfrac{1}{x}$, а потому

$$\int_{1}^{10^9} \frac{dx}{x} + 10^{-9} \leqslant A_{10^9} \leqslant \int_{1}^{10^9} \frac{dx}{x} + 1$$

или

$$\ln 10^9 + 10^{-9} \leqslant A_{10^9} \leqslant \ln 10^9 + 1$$

или, наконец,

$$20,7 \leqslant A_{10^9} \leqslant 21,7.$$

Итак, мы получили несколько признаков, по которым можно судить о сходимости положительных рядов. Очевидно, что такого же типа признаки справедливы и для рядов, у которых все члены отрицательны, поскольку всякий отрицательный ряд получается из положительного умножением всех членов на -1.

В последующих разделах попытаемся выяснить, что можно сказать о сходимости рядов, у которых члены могут иметь разные знаки.

3.7. Признак Лейбница

Пусть числа a_k положительны при $k = 1, 2, 3, \ldots$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$$

Такой ряд называют знакочередующимся.

Теорема (признак Лейбница). Если $a_k \geqslant a_{k+1}$ и $a_k \to 0$ при $k \to \infty$, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$$

сходится.

Иначе говоря, если с возрастанием k числа a_k убывают и стремятся к нулю, то знакочередующийся ряд сходится.

Доказательство. Рассмотрим вначале частную сумму с четным номером

$$A_{2n} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n}.$$

Переписав эту сумму так:

$$A_{2n} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}),$$

увидим, что все скобки неотрицательны. Поэтому, отбросив последнюю скобку, получим $A_{2n} \geqslant A_{2n-2}$. Это означает, что последовательность сумм с четными номерами возрастает.

Если перепишем ту же сумму в виде

$$A_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - a_{2n},$$

то станет ясно, что $A_{2n} \leqslant a_1$. Следовательно, все частные суммы ограничены сверху.

Итак, последовательность четных частных сумм возрастает и ограничена сверху. Значит, она имеет предел.

Теперь рассмотрим частные суммы с нечетным номером. Очевидно, что $A_{2n+1} = A_{2n} + a_{2n+1}$. По условию, $a_{2n+1} \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому A_{2n+1} имеет тот же предел, что A_{2n}, при $n \to \infty$.

Таким образом, вся последовательность частных сумм имеет один общий предел, то есть ряд сходится. Теорема доказана.

Пример 1. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

Так как $\dfrac{1}{k}$ убывает и стремится к нулю при $k \to \infty$, то ряд сходится.

Заметим следующее: при доказательстве теоремы Лейбница мы видели, что $0 \leqslant A_{2n} \leqslant a_1$. Обозначив через A сумму ряда и переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, мы получим $0 \leqslant A \leqslant a_1$. Если бы первый член нашего ряда был отрицателен, то есть имел вид $-a_1$, то мы получили бы такое неравенство $0 \geqslant A \geqslant -a_1$. Отсюда ясно, что в знакочередующемся ряде, удовлетворяющем условиям теоремы Лейбница, оказывается $|A| \leqslant a_1$. Далее, очевидно, что если ряд удовлетворяет условиям теоремы Лейбница, то и любой его остаток удовлетворяет этим условиям. Поэтому, если мы обозначим через $R^{(n)}$ сумму остатка ряда после n-го члена, то получим

$$|R^{(n)}| \leqslant a_{n+1}.$$

Это неравенство бывает удобно использовать для оценки погрешности приближенного равенства $A \approx A_n$.

Пример 2. Найти с точностью до 0,01 сумму ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^3}.$$

Очевидно, что этот ряд удовлетворяет условиям теоремы Лейбница. Поэтому, отбросив все члены, у которых $\frac{1}{k^3} < 0,01$, получим нужное приближенное значение суммы. Легко видеть, что последнее неравенство выполняется при $k \geqslant 5$. Значит, с точностью до 0,01

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^3} \approx 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3},$$

то есть

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^3} \approx 0,90.$$

При других закономерностях изменения знаков членов ряда сказать что-нибудь о сходимости бывает довольно сложно. В следующем разделе мы рассмотрим ряды, исследование которых можно свести к исследованию положительных рядов.

3.8. Абсолютная сходимость рядов

Теорема. Пусть имеется ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k. \qquad (*)$$

Составим, исходя из него, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|. \qquad (**)$$

Тогда, если сходится ряд (**), то сходится ряд(*).

Доказательство. Пусть $\overline{A}_n$ - частная сумма ряда (**). Так как положительный ряд (**) сходится, то все $\overline{A}_n$ ограничены сверху некоторым числом M.

Теперь обозначим через A_n^+ сумму тех членов $\overline{A}_n$, которые были в ряде (*) положительными, а через A_n^- тех слагаемых, что были отрицательными в ряде (*). Очевидно, что обе величины A_n^+ и A_n^- возрастают с ростом n. Кроме того, ясно, что $A_n^+ \leqslant \overline{A}_n$ и $A_n^- \leqslant \overline{A}_n$. Поэтому обе эти величины не превосходят M, то есть ограничены сверху. Значит, при $n \to \infty$ последовательности A_n^+ и A_n^- имеют пределы.

Теперь обратимся к ряду (*). Обозначим его частную сумму через A_n. Очевидно, что A_n можно представить в виде $A_n = A_n^+ - A_n^-$. Оба слагаемых правой части последнего равенства имеют пределы при $n \to \infty$. Поэтому A_n имеет предел при $n \to \infty$, а это означает, что ряд (*) сходится. Теорема доказана.

Итак, из сходимости ряда (**) вытекает сходимость ряда (*). Однако из сходимости ряда (*) не следует сходимость ряда (**), составленного из модулей его членов. Например, мы видели выше, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k}$ сходится, а ряд из модулей $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}$ расходится.

Используют такую терминологию: если ряд (**) сходится, то ряд (*) называют абсолютно сходящимся. Если же ряд (*) сходится, а ряд (**) расходится, то ряд (*) называют неабсолютно сходящимся.

Пример 1. Исследуем сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k^2}{2^k}.$$

Составим ряд из модулей

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}.$$

Так как это положительный ряд, то применим к нему признак Даламбера. Получим

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1|}}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2 2^k}{2^{k+1}k^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2}{2k^2} = \frac{1}{2}.$$

Так как $\dfrac{1}{2} < 1$, то ряд из модулей сходится. Значит, сходится и данный нам ряд.

Пример 2. Выясним, сходится ли ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^k}{k!}.$$

Для этого опять составим ряд из модулей

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|h|^k}{k!}$$

и применим признак Даламбера:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{|h|^{k+1}k!}{|h|^k(k+1)!} = \lim_{k\to\infty} \frac{|h|}{k+1} = 0 < 1.$$

Значит, ряд из модулей сходится при любом h. Следовательно, данный нам ряд сходится, причем абсолютно, при любом h.

Так как в сходящемся ряде члены стремятся к нулю с ростом номера, то из решенного нами примера вытекает, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{h^k}{k!} = 0 \quad \text{при} \quad \forall h \in R.$$

Это утверждение пригодится нам позже.

Замечание. При доказательстве теоремы мы получили такое равенство: $A_n = A_n^+ - A_n^-$. Переходя в этом равенстве к пределу при $n \to \infty$, получим

$$A = A^+ - A^-,$$

где A - сумма исходного ряда, A^+ - сумма всех положительных членов этого ряда, A^- - сумма модулей всех отрицательных членов.

Таким образом, абсолютно сходящийся ряд можно разбить на два сходящихся ряда, один из которых положительный, а другой отрицательный. Просуммировав каждый из этих рядов в отдельности, можно найти сумму всего ряда.

3.9. Понятие функционального ряда

Пусть последовательность функций $u_0(x),\ u_1(x),\ u_2(x), ...$ имеет общую область задания. Рассмотрим ряд, который будем называть функциональным,

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x).$$

При всяком фиксированном значении x этот ряд превращается в числовой. Будучи числовым, он может сходиться или расходиться. Те значения x, при которых ряд сходится, называют точками сходимости ряда, а те значения, при которых расходится, - точками расходимости. Множество всех точек сходимости образует область сходимости функционального ряда.

При рассмотрении функциональных рядов возникают обычно два основных вопроса:

а) как построить область сходимости?

б) как найти сумму ряда, являющуюся, естественно, функцией от x?

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1.

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{kx}.$$

Положим $e^x = q$. Тогда, очевидно, ряд примет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k.$$

Это означает, что ряд является геометрическим. Как мы видели раньше, геометрический ряд сходится тогда и только тогда, когда $|q| < 1$. Следовательно, для сходимости нашего ряда должно быть $e^x < 1$, или $x < 0$. Итак, областью сходимости ряда является полубесконечный промежуток $(-\infty,\ 0)$.

Вспоминая формулу для суммы геометрического ряда, можем написать

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{kx} = \frac{1}{1-e^x} \quad \text{при} \quad x \in (-\infty, 0).$$

Пример 2. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^2}.$$

Для исследования сходимости построим ряд из модулей

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin kx|}{k^2}.$$

Так как $|\sin kx| \leqslant 1$, то $\dfrac{|\sin kx|}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k^2}$ при $\forall x \in R$. Мы знаем, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

сходится. Поэтому, в соответствии с теоремой сравнения, сходится ряд из модулей при $x \in R$, а тогда и начальный ряд сходится при $x \in R$.

Таким образом, областью сходимости рассматриваемого ряда является вся числовая ось.

Пример 3. Найдем область сходимости ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{x^{2k}+1}.$$

Прежде всего заметим, что при $x = 1$ ряд принимает вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2},$$

а при $x = -1$ такой

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2}.$$

В обоих случаях ряд расходится, то есть точки $x = \pm 1$ являются точками расходимости.

Для дальнейшего исследования составим ряд из модулей

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{|x|^k}{x^{2k}+1}.$$

Предположим теперь, что $|x| < 1$. Тогда

$$\frac{|x|^k}{x^{2k}+1} \sim |x|^k \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} |x|^k$$

сходится, поскольку $|x| < 1$. Значит, в силу теоремы сравнения, при этих значениях x сходится ряд из модулей. Если $|x| > 1$, то

$$\frac{|x|^k}{x^{2k}+1} \sim \frac{1}{|x|^k} \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Так как $|x| > 1$, то $\dfrac{1}{|x|} < 1$. Поэтому ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{|x|^k}$$

сходится. Значит, сходится ряд из модулей.

Итак, ряд из модулей сходится при $|x| < 1$ и при $|x| > 1$. По теореме об абсолютной сходимости, при тех же x сходится исследуемый ряд.

Тем самым мы нашли область сходимости ряда. Он сходится при всех $x \in (-\infty, -1) + (-1, 1) + (1, +\infty)$.

В последующих разделах мы рассмотрим некоторые наиболее часто встречающиеся типы функциональнных рядов.

3.10. Степенной ряд

Степенным рядом называют ряд такого вида:

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k.$$

Элементарной заменой этот ряд приводится к более простому виду

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k.$$

Очевидно, что последний ряд сходится при $x = 0$. Для того чтобы выяснить, есть ли еще точки сходимости, нам понадобится такое утверждение:

Теорема Абеля (N. H. Abel, 1802-1829). Если степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

сходится в некоторой точке x_0, то он абсолютно сходится при любом x, удовлетворяющем условию $|x| < |x_0|$.

Доказательство. По условию, ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x_0^k$$

сходится. Поэтому, в силу необходимого условия сходимости ряда, должно быть $c_k x_0^k \to 0$ при $k \to \infty$. Как мы знаем, последовательность, имеющая предел, ограничена. Следовательно, найдется такое положительное число M, что при $\forall k$ будет $|c_k x_0^k| < M$. Теперь возьмем какое-нибудь x, удовлетворяющее условию $|x| < |x_0|$, и составим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k x^k|.$$

Для членов этого ряда справедливо неравенство

$$|c_k x^k| = |c_k\ x_0^k\ \frac{x^k}{x_0^k}| = |c_k\ x_0^k| \left|\frac{x}{x_0}\right|^k < M \left|\frac{x}{x_0}\right|^k.$$

Так как $|x| < |x_0|$, то $\left|\dfrac{x}{x_0}\right| < 1$. Поэтому ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} M \left|\frac{x}{x_0}\right|^k$$

сходится, так как он представляет собой геометрический ряд, у которого $q = \left|\dfrac{x}{x_0}\right| < 1$.

Следовательно, в силу теоремы сравнения, сходится ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k x^k|.$$

Значит, ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

абсолютно сходится. Теорема доказана.

Следствие 1. Если степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

расходится в некоторой точке x_0, то он расходится при $\forall x$, удовлетворяющих условию $|x| > |x_0|$.

Действительно, если бы ряд сходился в точке x, то он, по доказанному выше, сходился бы и в точке x_0, так как $|x| > |x_0|$, а этого нет.

Следствие 2. Область сходимости степенного ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

является промежутком, симметричным или почти симметричным относительно точки 0.

Действительно, в силу теоремы Абеля, из сходимости ряда в точке x_0 вытекает его сходимость в интервале $(-|x_0|, |x_0|)$. Различным может быть поведение ряда лишь в концах интервала.

Мы обозначим длину промежутка сходимости через $2R$. Число R будем называть радиусом сходимости степенного ряда. Очевидно, что во всех точках x, у которых $|x| < R$, ряд сходится, а при всех x, у которых $|x| > R$, расходится.

Сказанное позволяет дать другое определение радиуса сходимости.

Число R называется радиусом сходимости степенного ряда, если оно удовлетворяет двум условиям:

1) ряд сходится при всех x, у которых $|x|<\mathrm{R}$;

2) ряд расходится при всех x, у которых $|x| > R$.

В точках $\pm R$ ряд может сходиться, а может и расходиться.

Интервал $(-R, R)$ называют интервалом сходимости степенного ряда.

Ясно, что область сходимости степенного ряда может совпадать с интервалом сходимости, а может и отличаться от него на одну или две точки.

Заметим, что для степенного ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$$

интервал сходимости имеет вид $(a-R, a+R)$.

Следствие 3. Степенной ряд абсолютно сходится в любой точке интервала сходимости.

Действительно, возьмем какое-нибудь x из интервала $(-R, R)$. Так как в интервале нет ни самой правой, ни самой левой точки, то в нем найдется точка x_0 такая, что $|x| < |x_0|$. Поскольку $x_0 \in (-R, R)$, постольку в этой точке ряд сходится, а тогда он абсолютно сходится в точке x.

Из этого следствия ясно, что для нахождения интервала сходимости степенного ряда достаточно исследовать сходимость положительного ряда, составленного из модулей его членов. Найдя интервал сходимости, нужно провести исследование сходимости степенного ряда в точках $\pm R$.

Пример 1. Найдем область сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\sqrt{k}} \ .$$

Вначале составим, как было рекомендовано, ряд из модулей

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x|^k}{\sqrt{k}}$$

и применим к нему признак Даламбера. Получим

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x|^{k+1}\sqrt{k}}{|x|^k\sqrt{k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{|x|\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}} = |x|.$$

Очевидно, что ряд из модулей сходится, если $|x| < 1$, и расходится, если $|x| > 1$. Значит, интервалом сходимости является $(-1, 1)$.

При $x = 1$ исходный ряд принимает вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Это обобщенный гармонический ряд с $p = \dfrac{1}{2}$. Так как $\dfrac{1}{2} < 1$, то ряд расходится.

При $x = -1$ ряд имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)k}{\sqrt{k}}.$$

Это знакочередующийся ряд, удовлетворяющий условиям теоремы Лейбница. Поэтому он сходится.

Таким образом, точка $x = -1$ принадлежит области сходимости, а точка $x = 1$ не принадлежит. Следовательно, областью сходимости нашего ряда является полуоткрытый промежуток $[-1, 1)$.

Пример 2. Найдем область сходимости ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} k!x^k.$$

Составляя, как и выше, ряд из модулей и применяя признак Даламбера, находим

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x|^{k+1}(k+1)!}{|x|^k k!} = \lim_{k\to\infty} |x|(k+1) = \infty \quad \text{при} \quad x \neq 0.$$

Следовательно, область сходимости ряда состоит из одной точки $x = 0$.

3.11. Некоторые свойства степенных рядов

Мы приведем в этом разделе без доказательства два весьма полезных свойства степенных рядов.

Свойство 1. Степенной ряд можно почленно дифференцировать в любой точке интервала сходимости.

Иначе говоря, если

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad x \in (-R, R),$$

то

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}, \quad x \in (-R, R).$$

Прежде чем формулировать второе свойство, заметим, что после дифференцирования опять получился степенной ряд с тем же радиусом сходимости. Этот ряд, в свою очередь, можно почленно дифференцировать. При этом окажется

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}, \quad x \in (-R, R).$$

Продолжая эти рассуждения, мы увидим, что $f(x)$ имеет на интервале $(-R, R)$ производные любого порядка, причем все производные являются суммами степенных рядов.

Итак, если функция на некотором интервале раскладывается в степенной ряд, то она имеет на этом интервале производные любого порядка.

Свойство 2. Степенной ряд можно почленно интегрировать по любому промежутку, лежащему в интервале сходимости, то есть если

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad x \in (-R, R)$$

и $[\alpha,\beta]\subset(-R,R)$, то

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\int\limits_{\alpha}^{\beta}x^k dx.$$

Эти свойства часто оказываются полезными для нахождения сумм степенных рядов. Приведем несколько примеров такого рода.

Пример 1. Найдем сумму ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty}kx^k.$$

Нам известна сумма геометрического ряда:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots \quad \text{при} \quad x\in(-1,1).$$

Дифференцируя, получим, в силу свойства 1,

$$\frac{1}{(1-x)^2}=1+2x+3x^2+4x^3+\ldots$$

Умножив обе части на x, получаем

$$\frac{x}{(1-x)^2}=\sum_{k=1}^{\infty}kx^k.$$

Пример 2. Теперь просуммируем ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^2x^k.$$

Для этого продифференцируем найденное в предыдущем примере равенство. Получим

$$\frac{1+x}{(1-x)^3}=\sum_{k=1}^{\infty}k^2x^{k-1}.$$

Умножая обе части последнего равенства на x, находим

$$\frac{(1+x)x}{(1-x)^3}=\sum_{k=1}^{\infty}k^2x^k.$$

Пример 3. Обратимся снова к геометрическому ряду:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \text{ при } x \in (-1, 1)$$

и заменим в нем x на $-x$. Получим

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \text{ при } x \in (-1, 1)$$

(естественно, интервал сходимости при сделанной замене не изменился).

Теперь возьмем какое-нибудь $x \in (-1, 1)$ и проинтегрируем обе части последнего равенства по промежутку $[0, x]$, лежащему в интервале сходимости. В силу свойства 2, ряд можно интегрировать почленно. Поэтому после интегрирования окажется

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

или, что то же,

$$\ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \text{ при } x \in (-1, 1).$$

Мы получили разложение в степенной ряд логарифма.

Заметим, что полученный ряд сходится при $x = 1$, так как он удовлетворяет условиям признака Лейбница. Можно доказать, что при этом оказывается

$$\ln 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

Итак,

$$\ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \text{ при } x \in (-1, 1].$$

Пример 4. Вернемся к ряду

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots \text{ при } x \in (-1, 1)$$

и заменим в нем x на x^2. У нас окажется

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots \text{ при } x \in (-1, 1)$$

(интервал сходимости остался, очевидно, прежним).

Этот ряд, как и прежний, проинтегрируем почленно, в соответствии со свойством 2, по какому-нибудь промежутку $[0, x]$, содержащемуся в $(-1, 1)$. Получим, как нетрудно видеть,

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ... = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} \text{ при } \ x \in (-1, 1).$$

Можно доказать, что последнее равенство сохраняется и в точках $x = \pm 1$, то есть

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{2k-1} \text{ при } \ x \in [-1, 1].$$

В частности, при $x = 1$ оказывается

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{2k-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ...$$

Ме не будем больше приводить примеров разложения в ряд функций с использованием свойств степенных рядов, а в следующем разделе покажем общий прием, позволяющий строить такие ряды для многих функций, имеющих производные.

3.12. Ряды Тейлора

Предположим, что функция $f(x)$ раскладывается в степенной ряд в некоторой окрестности точки a, то есть

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + ... \text{ при } \ x \in (a-r, a+r).$$

Положив здесь $x = a$, получим $c_0 = f(a)$.

Продифференцируем исходное равенство. Получим

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + ... \text{ при } \ x \in (a-r, a+r).$$

Отсюда при $x = a$ получаем $c_1 = f'(a)$. Дифференцируя еще раз и полагая опять $x = a$, находим $c_2 = \dfrac{f''(a)}{2!}$.

Продолжая эти действия, нетрудно увидеть, что $c_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$ при любом k.

Таким образом, если в окрестности точки a функция $f(x)$ раскладывается в степенной ряд, то этот ряд имеет вид

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots$$

или, что то же,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Ряд такого вида называют рядом Тейлора, а его коэффициенты - коэффициентами Тейлора функции $f(x)$.

Проведенное построение означает, что двух различных разложений функции по степеням $(x-a)$ быть не может.

Мы предполагали, что функция $f(x)$ в окрестности точки a разложена в степенной ряд. Предположим теперь, что функция задана в некоторой окрестности точки a и имеет производные любого порядка. Пользуясь этим, найдем все коэффициенты Тейлора и построим ряд Тейлора. Тогда сразу возникает вопрос: будет ли этот ряд сходиться к функции $f(x)$?

Чтобы ответить на этот вопрос, нужно обратить внимание на то, что частная сумма ряда Тейлора

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

является многочленом Тейлора функции $f(x)$. Поэтому мы можем написать, что

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x),$$

где $R_n(x)$ - остаточный член формулы Тейлора.

Из последнего равенства очевидно, что $T_n(x) \to f(x)$ при $n \to \infty$ тогда и только тогда, когда $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$.

Следовательно, справедлива следующая теорема:

Теорема 1 (необходимое и достаточное условие разложения функции в ряд Тейлора). Для разложения функции $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки a необходимо и достаточно, чтобы во всех точках этой окрестности выполнялось условие $R_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$.

Итак, при выполнении условий теоремы мы можем в формуле Тейлора перейти к пределу при $n \to \infty$, то есть можем написать, что

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Следует сказать, что проверка того, что $R_n(x) \to 0 \quad (n \to \infty)$, нередко оказывается весьма сложной. Поэтому мы укажем более простое достаточное (но не необходимое!) условие сходимости ряда Тейлора к $f(x)$, которое оказывается полезным для многих функций. Для этого вспомним, что остаточный член $R_n(x)$ можно записать в форме Лагранжа:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},$$

где точка c лежит между точками a и x.

Теперь предположим, что в некоторой окрестности $(a-r, a+r)$ точки a все производные функции $f(x)$ ограничены одним и тем же числом M, то есть $|f^{(n)}(x)| \leqslant M$ при всех n и всех $x \in (a-r, a+r)$. Тогда при этих n и x будет выполняться неравенство

$$|R_n(x)| \leqslant M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

В разделе 3.7 мы показали, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{h^k}{k!} = 0$$

при любом h. Значит,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Поэтому, в силу последнего неравенства,

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

при всех $x \in (a-r, a+r)$. Следовательно, при всех этих x ряд Тейлора будет сходиться к функции $f(x)$.

Тем самым доказана

Теорема (достаточное условие разложения функции в ряд Тейлора). Если в интервале $(a-r, a+r)$ функция $f(x)$ имеет производные $f^{(n)}(x)$ любого порядка и при всех n и всех $x \in (a-r, a+r)$

выполняется условие $|f^{(n)}(x)| \leqslant M$, то в этом интервале функция раскладывается в ряд Тейлора, то есть справедливо равенство

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Другими словами: если в некотором интервале функция бесконечно дифференцируема и все ее производные в этом интервале ограничены одним и тем же числом, то она раскладывается в ряд Тейлора.

3.13. Ряды Тейлора простейших функций

1. Ряд Тейлора для экспоненты. Мы знаем, что формула Тейлора для экспоненты имеет вид

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x).$$

Далее, $(e^x)^{(k)} = e^x$. Так как e^x - возрастающая функция, то на любом промежутке $(-r, r)$ при всех x будет $|e^x| = e^x \leqslant e^r$. Это означает, что все производные от e^x ограничены на этом интервале одним и тем же числом, а потому ряд Тейлора для e^x будет сходиться на любом интервале вида $(-r, r)$, то есть при любом $x \in R$. В соответствии с этим, переходя к пределу, получим

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ..., \quad x \in R.$$

2. Ряды Тейлора для синуса и косинуса. Вспомним формулу Тейлора дла синуса:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R_n(x).$$

Так как $\sin^{(k)} x = \sin(x + k\frac{\pi}{2})$, то $|\sin^{(k)} x| \leqslant 1$ при всех $x \in R$. Следовательно, в написанной формуле можно перейти к пределу при $n \to \infty$ и получить тем самым ряд Тейлора для синуса:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ..., \quad x \in R.$$

Аналогичным образом, из формулы Тейлора

$$\cos x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_n(x),$$

учитывая, что $|\cos^{(k)} x| = |\cos(x + k\frac{\pi}{2})| \leqslant 1$ при всех $x \in R$, получим предельным переходом ряд Тейлора для косинуса:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ..., \quad x \in R.$$

Заметим, что ряд для косинуса можно было получить почленным дифференцированием ряда для синуса.

3. Биномиальный ряд. Можно показать, что при всех $x \in (-1, 1)$ в формуле Тейлора

$$(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\mu(\mu-1)...(\mu-(n-1))}{n!}x^n + R_n(x)$$

можно перейти к пределу при $n \to \infty$. В результате образуется биномиальный ряд

$$(1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{3!}x^3 + ..., \quad x \in (-1, 1).$$

Ранее, в предыдущем разделе, мы получили ряды Тейлора для $\ln(1+x)$ и $\operatorname{arctg} x$.

Заметим, что все построенные нами ряды Тейлора соответствовали точке $a = 0$. Однако, исходя из найденных нами рядов, можно с помощью несложных преобразований строить ряды Тейлора и для $a \neq 0$. Кроме того, используя ряды Тейлора для простейших функций, можно строить степенные ряды для функций более сложных. Приведем примеры того, как это делается.

Пример 1. Разложить функцию $\ln x$ в степенной ряд в окрестности точки $a = 2$.

Для решения сделаем такие преобразования:

$$\ln x = \ln(2 + x - 2) = \ln 2\left(1 + \frac{x-2}{2}\right) = \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{x-2}{2}\right).$$

Теперь возьмем построенный нами раньше ряд для $\ln(1+x)$ и заменим в нем x на $\dfrac{x-2}{2}$. Получим

$$\ln\left(1 + \frac{x-2}{2}\right) = \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{2^2\ 2} + \frac{(x-2)^3}{2^3\ 3} - ...$$

Так как ряд для $\ln(1+x)$ сходится при $-1 < x \leqslant 1$, то наш ряд оказывается сходящимся при $-1 < \dfrac{x-2}{2} \leqslant 1$, то есть при $0 < x \leqslant 4$. Таким образом,

$$\ln x = \ln 2 + \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{2^2\ 2} + \frac{(x-2)^3}{2^3\ 3} - ..., \quad 0 < x \leqslant 4.$$

Мы получили разложение $\ln x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $a = 2$.

Пример 2. Функцию $\dfrac{1}{x+7}$ разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $a = 3$.

Вначале преобразуем дробь

$$\frac{1}{x+7} = \frac{1}{10+(x-3)} = \frac{1}{10}\ \frac{1}{1+\dfrac{x-3}{10}}.$$

Затем в геометрическом ряде

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ..., \quad -1 < x < 1$$

заменим x на $-\dfrac{x-3}{10}$. Получим

$$\frac{1}{1+\dfrac{x-3}{10}} = 1 - \frac{x-3}{10} + \left(\frac{x-3}{10}\right)^2 - \left(\frac{x-3}{10}\right)^3 + ...,$$

откуда

$$\frac{1}{x+7} = \frac{1}{10} - \frac{x-3}{10^2} + \frac{(x-3)^2}{10^3} + \frac{(x-3)^3}{10^4} - ... \quad .$$

Геометрический ряд сходится при $-1 < x < 1$. Поэтому построенный нами ряд сходится при $-1 < \dfrac{x-3}{10} < 1$, или $-7 < x < 13$.

Пример 3. Мы видели, что

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... \ \text{при} \ \ x \in (-1, 1).$$

Заменив здесь x на $-x$, придем к равенству

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - ... \ \text{при} \ \ x \in (-1, 1).$$

Вычитая эти равенства, получим такое разложение:

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ...\right) \quad \text{при} \quad x \in (-1, 1).$$

Этот ряд нередко используют для вычисления логарифмов. Например, положив в нем $x = \dfrac{1}{3}$, имеем

$$\ln 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^3\ 3} + \frac{1}{3^5\ 5} + ...\right).$$

Очевидно, что этот ряд сходится к $\ln 2$ гораздо быстрее, чем полученный раньше. В частности, оставив лишь три члена ряда, находим с погрешностью, не превышающей 0,001:

$$\ln 2 \approx 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{81} + \frac{1}{1215}\right),$$

или $\ln 2 \approx 0,693$.

Если бы мы использовали ранее полученный ряд, то для достижения той же точности нам понадобился бы 1001 член ряда.

Пример 4. Возьмем ряд для экспоненты

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ..., \quad x \in R$$

и заменим в нем x на $-x$. Получим

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + ..., \quad x \in R.$$

Складывая два равенства и деля полученное на 2, имеем

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ..., \quad x \in R.$$

Тем самым мы построили ряд Тейлора для гиперболического косинуса:

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in R.$$

Взяв полуразность тех же рядов, получим ряд Тейлора для гиперболического синуса:

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad x \in R.$$

Пример 5. Разложить в степенной ряд функцию Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Как известно, функцию Лапласа можно записать в виде

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Теперь в ряде для экспоненты заменим x на $-\dfrac{t^2}{2}$ и подставим то, что получится, в интеграл. Тогда у нас окажется

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{x} \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2!\ 2^2} - \frac{t^6}{3!\ 2^3} + ...\right) dt.$$

Интегрируя почленно, найдем ряд для функции Лапласа:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(x - \frac{x^3}{2\ 3} + \frac{x^5}{2!\ 2^2\ 5} - \frac{x^7}{3!\ 2^3\ 7} + ...\right) =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{k! 2^k (2k+1)}, \quad x \in R.$$

Ряды Тейлора являются весьма мощным средством, позволяющим находить значения функций. Действительно, как мы уже видели в примере 1, заменив функцию соответствующей частной суммой ряда Тейлора, мы можем найти ее приближенное значение с любой степенью точности, используя лишь арифметические операции. Это не единственное применение степенных рядов. Например, с их помощью можно строить решения некоторых дифференциальных уравнений. В следующем разделе мы приведем пример того, как это делается.

3.14. Уравнение Бесселя

Дифференциальным уравнением Бесселя (F. W. Bessel, 1784-1846) называют следующее уравнение:

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - s^2) y = 0.$$

Здесь y - функция от x, которую мы хотим найти, а $s \geqslant 0$ - некоторая константа. Решить это уравнение с помощью интегрирования невозможно. Поэтому попробуем построить решение с помощью степенного ряда. Для того чтобы выкладки были попроще, положим $s = 0$. Тогда уравнение примет вид

$$xy'' + y' + xy = 0.$$

Ищем решение последнего уравнения в виде:

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + ...$$

Тогда

$$y' = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + ...$$

и

$$y'' = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3 x + 4 \cdot 3c_4 x^2 + 5 \cdot 4c_5 x^3 + ...$$

Подставляя эти ряды в уравнение, получаем:

$$x(2c_2 + 3 \cdot 2\ c_3 x + 4 \cdot 3c_4 x^2 + 5 \cdot 4c_5 x^3 + ...) +$$

$$+ c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + ... +$$

$$+ x(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + ...) = 0$$

или

$$c_1 + (2c_2 + 2c_2 + c_0)x + (3 \cdot 2\ c_3 + 3c_3 + c_1)x^2 + (4 \cdot 3c_4 + 4c_4 + c_2)x^3 +$$

$$+ (5 \cdot 4c_5 + 5c_5 + c_3)x^4 + (6 \cdot 5c_6 + 6c_6 + c_4)x^5 + ... = 0$$

или, наконец,

$$c_1 + (2^2 c_2 + c_0)x + (3^2 c_3 + c_1)x^2 + (4^2 c_4 + c_2)x^3 +$$

$$+ (5^2 c_5 + c_3)x^4 + (6^2 c_6 + c_4)x^5 + ... = 0.$$

Получили степенной ряд, сумма которого равна нулю. Ясно, что это может быть лишь тогда, когда все его коэффициенты равны нулю. Следовательно,

$$\begin{cases} c_1 = 0, \\ 2^2 c_2 + c_0 = 0, \\ 3^2 c_3 + c_1 = 0, \\ 4^2 c_4 + c_2 = 0, \\ 5^2 c_5 + c_3 = 0, \\ 6^2 c_6 + c_4 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

У нас образовалась система, содержащая бесконечно много уравнений с бесконечным множеством неизвестных

Видно, что систему можно разбить на две: в одну систему включить все уравнения, содержащие коэффициенты с нечетными номерами, в другую - с четными.

Первая система имеет вид:

$$\begin{cases} c_1 = 0, \\ 3^2 c_3 + c_1 = 0, \\ 5^2 c_5 + c_3 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Из равенства $c_1 = 0$ следует $c_3 = 0$, откуда $c_5 = 0$ и т. д., то есть все коэффициенты с нечетными номерами равны нулю.

Обратимся ко второй системе:

$$\begin{cases} \\ 2^2 c_2 + c_0 = 0, \\ 4^2 c_4 + c_2 = 0, \\ 6^2 c_6 + c_4 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Решая эту систему, находим последовательно

$$c_2 = -\frac{c_0}{2^2}, \quad c_4 = -\frac{c_2}{4^2} = \frac{c_0}{2^2 4^2}, \quad c_6 = -\frac{c_4}{6^2} = -\frac{c_0}{2^2 4^2 6^2}, \dots$$

Ясно, что

$$c_{2m} = (-1)^m \frac{c_0}{2^2 4^2 6^2 \dots (2m)^2} = (-1)^m \frac{c_0}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2m))^2} =$$

$$= (-1)^m \frac{c_0}{(2^m \ m!)^2} = (-1)^m \frac{c_0}{2^{2m} (m!)^2}.$$

Таким образом,

$$y = c_0 \left(1 - \frac{1}{2^2} x^2 + \frac{1}{2^4 \ (2!)^2} x^4 - \frac{1}{2^6 \ (3!)^2} x^6 + \dots \right).$$

Как известно, решение однородного линейного дифференциального уравнения остается решением при умножении или делении на постоянную. Поэтому в построенном нами решении можно положить

$c_0 = 1$. Таким образом, мы формально построили решение дифференциального уравнения Бесселя:

$$y = 1 - \frac{1}{2^2}x^2 + \frac{1}{2^4\ (2!)^2}x^4 - \frac{1}{2^6\ (3!)^2}x^6 + \ldots.$$

или

$$y = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m}.$$

Для того чтобы построенный ряд был действительно решением, нужно показать, что он имеет непустую область сходимости. Чтобы найти область сходимости ряда, используем признак Даламбера:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{x^{2(m+1)}(m!)^2 2^{2m}}{((m+1)!)^2 2^{2(m+1)} x^{2m}} = \lim_{m\to\infty} \frac{x^2}{4(m+1)^2} = 0 < 1.$$

Значит, ряд сходится при всех $x \in (-\infty, \infty)$. Построенное нами решение принято обозначать $J_0(x)$ и называть функцией Бесселя первого рода нулевого порядка.

Заметим, что $J_0(x)$ называют функцией нулевого порядка потому, что она соответствует $s = 0$.

Далее, как известно из теории дифференциальных уравнений, общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка есть линейная комбинация двух его линейно независимых решений. Второе решение нашего уравнения, линейно независимое с $J_0(x)$, называют функцией Бесселя второго рода.

Рекомендуем читателю показать, что при всяком целом значении s в дифференциальном уравнении Бесселя можно построить такое его решение:

$$y = J_s(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!(m+s)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+s}.$$

Это решение называют функцией Бесселя первого рода s-го порядка.

Итак, мы познакомились со степенными рядами и некоторыми их применениями. При этом оказалось, что раскладывать в степенной ряд мы можем лишь очень гладкие функции, у которых существуют производные любого порядка. Поэтому возникает вопрос о том, как быть с функциями не гладкими (например, имеющими разрывы). Оказывается, что для многих такого рода функций можно строить ряды других типов. В последующих разделах мы вначале подробно рассмотрим один из применяемых нередко видов рядов, не требующих дифференцируемости функций (это ряды, составленные из тригонометрических функций), затем укажем целый класс рядов, в которые можно раскладывать негладкие функции.

3.15. Тригонометрические ряды

Мы будем рассматривать функции $f(t)$, заданные на всей вещественной оси, за исключением, может быть, счетного числа точек, и удовлетворяющие условию $f(t+T) = f(t)$. Такие функции называют T-периодическими.

Среди периодических функций простейшими являются функции вида

$$A_k \sin(k\omega t + \varphi_k),$$

где k - целое положительное число.

Эти функции называют гармониками. Каждая из них описывает элементарные гармонические колебания с амплитудой A_k, периодом $T = \dfrac{2\pi}{k\omega}$ и начальной фазой φ_k.

Сложив первые n гармоник и прибавив к ним постоянную A_0, мы получим функцию

$$f_n(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \sin(k\omega t + \varphi_k).$$

Эту функцию называют тригонометрическим многочленом порядка n.

Все гармоники $A_k \sin(k\omega t+\varphi_k)$, входящие в $f_n(t)$, имеют, очевидно, общий период $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Поэтому $f_n(t)$ представляет собой периодическую функцию с периодом T. Следовательно, $f_n(t)$ описывает T-периодические колебания, которые, вообще говоря, уже не являются элементарными.

Более того, если мы построим ряд

$$A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega t + \varphi_k),$$

называемый тригонометрическим, то его сумма тоже будет иметь период T (если, конечно, ряд сходится).

Ясно, что этот ряд, как и тригонометрический многочлен, описывает T-периодические колебания.

Поскольку

$$A_k \sin(k\omega t + \varphi_k) = A_k \sin\varphi_k \cos k\omega t + A_k \cos\varphi_k \sin k\omega t,$$

постольку, введя обозначения $a_k = A_k \sin\varphi_k$ и $b_k = A_k \cos\varphi_k$, мы можем представить всякую гармонику в виде

$$a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t.$$

Поэтому, положив $A_0 = \frac{a_0}{2}$, мы приведем тригонометрический ряд к такой форме:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t.$$

Такая запись тригонометрического ряда оказывается нередко более удобной, чем исходная. Поэтому в дальнейшем мы, как правило, будем записывать тригонометрический ряд именно в этой форме.

Понятно, что исследование сходимости тригонометрического ряда достаточно проводить лишь на одном каком-нибудь промежутке длиной T. Однако больше, чем сходимость, нас будет интересовать, какие функции можно представить в виде суммы тригонометрического ряда. Другими словами, мы поставим два вопроса:

1) всякое ли периодическое колебание можно представить в виде суммы элементарных гармоник?

2) если можно, то как это сделать?

Математически эти вопросы ставятся так: всякая ли периодическая функция допускает представление в виде тригонометрического ряда, и если допускает, то как найти коэффициенты этого ряда?

Для ответа на эти вопросы нам понадобятся некоторые новые сведения о тригонометрических функциях.

3.16. Ортогональность тригонометрической системы функций

Определение 1. Функции $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ называются ортогональными на промежутке $[a, b]$, если

$$\int_a^b \varphi_1(t)\varphi_2(t)dt = 0.$$

Определение 2. Тригонометрической системой с периодом T называют множество функций

$$\{1,\ \cos\omega t,\ \sin\omega t,\ \cos 2\omega t,\ \sin 2\omega t,\ \cos 3\omega t,\ \sin 3\omega t, ...\},$$

в котором $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

Теорема. Любые две функции тригонометрической системы ортогональны на всяком промежутке вида $[\alpha, \alpha+T]$, то есть

$$\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} \cos k\omega t dt = 0, \quad \int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} \sin k\omega t dt = 0,$$

$$\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} \cos k\omega t \cos m\omega t dt = 0 \ (k \neq m),$$

$$\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} \sin k\omega t \sin m\omega t dt = 0 \ (k \neq m),$$

$$\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} \cos k\omega t \sin m\omega t dt = 0.$$

Доказательство.

$$\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} \cos k\omega t dt = \frac{1}{k\omega} \sin k\omega t|_{\alpha}^{\alpha+T} = \frac{1}{k\omega}(\sin(k\omega\alpha + k\omega T) - \sin k\omega\alpha) =$$

$$= \frac{1}{k\omega}(\sin(k\omega\alpha + k2\pi) - \sin k\omega\alpha) = 0.$$

Таким образом, мы доказали первое равенство. Второе равенство доказывается аналогично. В следующих трех интегралах произведения синусов и косинусов нетрудно преобразовать в суммы и разности. Например,

$$\cos k\omega t \cos m\omega t = \frac{1}{2}(\cos(k+m)\omega t + \cos(k-m)\omega t).$$

Поэтому ясно, что все эти три интеграла равны нулю, то есть теорема верна.

Заметим, что при $k = m$ третий и четвертый интегралы не равны нулю. В этом случае оказывается

$$\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} (\cos k\omega t)^2 dt = \int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} (\sin k\omega t)^2 dt = \frac{T}{2}.$$

Рекомендуем читателю доказать последние равенства самостоятельно.

3.17. Ряды Фурье

Предположим, что T-периодическая функция разложена в тригонометрический ряд, то есть

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t,\ \ t \in R.$$

Считая, что ряд можно почленно интегрировать по любому промежутку, проинтегрируем обе части по промежутку $[\alpha, \alpha+T]$. Получим

$$\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)dt = \frac{a_0}{2} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} dt + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} \cos k\omega t dt + b_k \int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} \sin k\omega t dt.$$

В силу теоремы предыдущего раздела, все интегралы, стоящие под знаком суммы, равны нулю. Поэтому

$$\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)dt = \frac{a_0}{2} T.$$

Отсюда

$$a_0 = \frac{2}{T} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)dt.$$

Теперь умножим обе части исходного равенства на $\cos m\omega t$, где m - некоторое целое число, и проинтегрируем по промежутку $[\alpha, \alpha + T]$ обе части полученного:

$$\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \cos m\omega t dt = \frac{a_0}{2} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} \cos m\omega t dt +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty} a_k \int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} \cos k\omega t \cos m\omega t dt + b_k \int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} \sin k\omega t \cos m\omega t dt.$$

В силу ортогональности тригонометрической системы, в правой части все интегралы, кроме одного, равны нулю. Именно, отличным от нуля будет тот интеграл от произведения косинусов, в котором окажется $k = m$. Так что равенство превратится в такое:

$$\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \cos m\omega t dt = a_m \int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} \cos^2 m\omega t dt.$$

Последний интеграл равен $\dfrac{T}{2}$ (мы говорили об этом в предыдущем разделе). Следовательно,

$$\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \cos m\omega t dt = a_m \frac{T}{2},$$

откуда

$$a_m = \frac{2}{T} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \cos m\omega t dt, \ m = 1, 2, 3, \ldots.$$

Заметим, что при $m = 0$ последняя формула превращается в полученную ранее формулу для a_0.

Аналогичным образом, нетрудно получить такие равенства:

$$b_m = \frac{2}{T} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \sin m\omega t dt, \ m = 1, 2, 3, \ldots.$$

Итак, если T-периодическая функция раскладывается в тригонометрический ряд, допускающий почленное интегрирование, то коэффициенты этого ряда однозначно определяются формулами:

$$a_k = \frac{2}{T} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \cos k\omega t dt, \ k = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \sin k\omega t dt, \ k = 1, 2, 3, \ldots.$$

Находимые по последним формулам коэффициенты называют коэффициентами Фурье функции $f(t)$, а тригонометрический ряд с такими коэффициентами называют рядом Фурье (J. Fourier, 1768-1830) этой функции.

Теперь предположим, что у нас имеется T-периодическая функция, мы вычислили ее коэффициенты Фурье и построили тригонометрический ряд с этими коэффициентами. Спрашивается, будет ли этот ряд сходиться к $f(t)$? Ответ на этот вопрос дает теорема Дирихле (P. G. L. Dirichlet, 1805-1859).

Прежде чем формулировать эту теорему, напомним, что функция $\varphi(t)$ называется кусочно-непрерывной на промежутке $[\alpha, \beta]$, если этот промежуток можно разделить на несколько промежутков, в каждом из которых функция непрерывна. При этом $\varphi(t)$ может иметь точки разрыва только первого рода.

Напомним также, что точка t_0 называется точкой разрыва первого рода функции $\varphi(t)$, если в этой точке существуют конечные пределы

$$\varphi(t_0 - 0) = \lim_{t \to t_0 - 0} \varphi(t) \text{ и } \varphi(t_0 + 0) = \lim_{t \to t_0 + 0} \varphi(t).$$

Дадим еще одно определение: функция $\varphi(t)$ называется кусочно-монотонной на промежутке $[\alpha, \beta]$, если этот промежуток можно разделить на несколько промежутков, в каждом из которых функция $\varphi(t)$ монотонна.

Теперь мы можем сформулировать такую теорему:

Теорема Дирихле. Если T-периодическая функция $f(t)$, кусочно-монотонна и кусочно-непрерывна на промежутке $[\alpha, \alpha + T]$, то ее ряд Фурье сходится при всех $t \in R$. При этом его сумма равна $f(t)$ в точках непрерывности функции и равна $\dfrac{f(t+0) + f(t-0)}{2}$ в тех точках, где функция имеет разрывы.

Итак, если функция удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, то

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t, \qquad (*)$$

где

$$a_k = \frac{2}{T} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \cos k\omega t dt, \ \ k = 0, 1, 2, 3, ...,$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(t) \sin k\omega t dt, \ \ k = 1, 2, 3, ... \ .$$

С точки зрения физики теорема Дирихле означает, что практически любой реально встречающийся периодический процесс можно представить как наложение элементарных гармонических колебаний с кратными частотами. Множество этих частот называют спектром периодического процесса.

Очевидно, что из-за периодичности функции значения коэффициентов a_k и b_k не зависят от α. Обычно при решении конкретных задач берут $\alpha = 0$ или $\alpha = -\dfrac{T}{2}$, так что формулы для коэффициентов имеют вид

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos k\omega t dt, \quad b_k = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin k\omega t dt$$

или

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos k\omega t dt, \quad b_k = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin k\omega t dt.$$

Пример. Разложить в ряд Фурье функцию $f(t)$, график которой приведен на рис. 29.

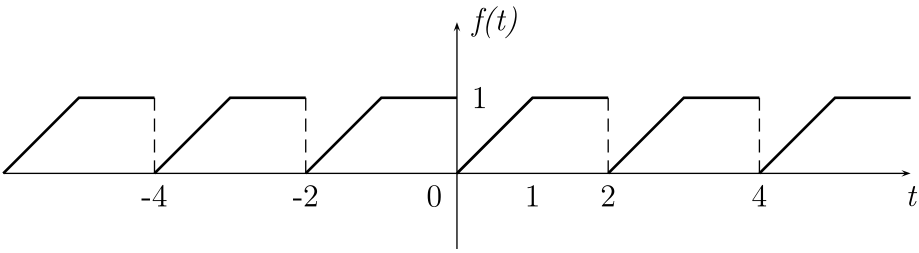

Рис. 29.

Из рисунка видно, что $f(t)$ имеет период $T = 2$ и что

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{при } \ t \in (0, 1], \\ 1 & \text{при } \ t \in [1, 2). \end{cases}$$

Ясно, что $\omega = \pi$. Зная это, возьмем $\alpha = 0$ и найдем коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \int_0^T f(t)dt = \int_0^1 tdt + \int_1^2 dt = \frac{3}{2};$$

$$a_k = \int\limits_0^T f(t)\cos k\omega t dt = \int\limits_0^1 t\cos k\pi t dt + \int\limits_1^2 \cos k\pi t dt =$$

$$= t\,\frac{1}{k\pi}\sin k\pi t\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{1}{k\pi}\sin k\pi t dt + \frac{1}{k\pi}\sin k\pi t\Big|_1^2 =$$

$$= \frac{1}{(k\pi)^2}\cos k\pi t\Big|_0^1 = \frac{1}{(k\pi)^2}(\cos k\pi - 1) = \frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi^2};$$

$$b_k = \int\limits_0^T f(t)\sin k\omega t dt = \int\limits_0^1 t\sin k\pi t dt + \int\limits_1^2 \sin k\pi t dt =$$

$$= -t\,\frac{1}{k\pi}\cos k\pi t\Big|_0^1 + \frac{1}{k\pi}\int\limits_0^1 \cos k\pi t dt - \frac{1}{k\pi}\cos k\pi t\Big|_1^2 =$$

$$= -\frac{\cos k\pi}{k\pi} + \frac{1}{(k\pi)^2}\sin k\pi t\Big|_0^1 - \frac{\cos 2k\pi}{k\pi} + \frac{\cos k\pi}{k\pi} = -\frac{1}{k\pi}.$$

Найдя коэффициенты, можем представить нашу функцию в виде суммы ряда Фурье:

$$f(t) = \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi^2}\cos k\pi t - \frac{1}{k\pi}\sin k\pi t.$$

Заметим, что, в частности, оказывается

$$t = \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi^2}\cos k\pi t - \frac{1}{k\pi}\sin k\pi t \quad \text{при} \quad 0 < t \leqslant 1;$$

$$1 = \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi^2}\cos k\pi t - \frac{1}{k\pi}\sin k\pi t \quad \text{при} \quad 1 \leqslant t < 2.$$

Так как $f(2-0) = 1$ и $f(2+0) = 0$, то при $t = 2$ равенство принимает вид

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi^2}.$$

Построенное решение вызывает такой вопрос: зачем нужно нашу довольно простую функцию представлять в виде громоздкой комбинации бесконечного числа гармоник? В частности, для вычисления значений функции построенный ряд совершенно не нужен. Действительно, значение функции при любом значении аргумента вычисляются с учетом периодичности весьма просто. Например, помня, что период равен 2, имеем $f(73,124) = f(1,124) = 1$.

Для ответа на возникший вопрос остановимся лишь на одном из возможных применений ряда Фурье. В технике нередко используются устройства, называемые частотными фильтрами. Эти устройства при прохождении через них сигналов пропускают только те колебания, у которых частота ограничена некоторыми пределами. Поэтому сказать, какой сигнал будет на выходе фильтра, можно лишь тогда, когда знаешь гармонические составляющие входного сигнала, то есть когда знаешь разложение входного сигнала в ряд Фурье. Пусть, например, фильтр пропускает лишь низкочастотные колебания, циклическая частота которых лежит в полосе от 0 до 2 Гц, а на его вход поступает периодический сигнал, рассмотренный нами в последнем примере (t - время в секундах). Мы знаем, что ряд Фурье этого сигнала содержит гармоники с круговыми частотами $k\pi$ ($k = 0, 1, 2, ...$). Этим круговым частотам соответствуют циклические частоты $\dfrac{k\pi}{2\pi} = \dfrac{k}{2}$ ($k = 0, 1, 2, ...$). На выходе фильтра останутся лишь те гармоники, у которых $0 \leqslant \dfrac{k}{2} \leqslant 2$ или $0 \leqslant k \leqslant 4$. Иначе говоря, выходной сигнал будет описываться функцией

$$f_{\text{вых}}(t) = \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{4} \frac{(-1)^k - 1}{k^2\pi^2} \cos k\pi t - \frac{1}{k\pi} \sin k\pi t.$$

График этой функции приведен на рис. 30.

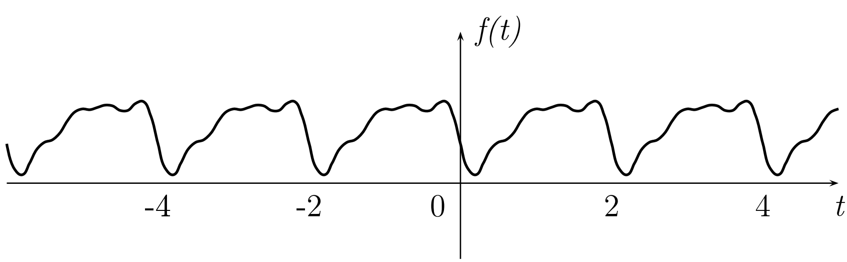

Рис. 30.

Позже мы приведем некоторые другие применения рядов Фурье.

3.18. Ряды Фурье четных и нечетных функций

Пусть $f(t)$ является четной T-периодической функцией. Положим $\alpha = -\frac{T}{2}$ и напишем выражение для ее коэффициентов Фурье a_k:

$$a_k = \frac{2}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega t dt.$$

Под интегралом стоит, очевидно, четная функция, а промежуток интегрирования симметричен относительно точки 0. Поэтому интеграл по всему промежутку $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ равен удвоенному интегралу по его половине $[0, \frac{T}{2}]$:

$$a_k = \frac{4}{T} \int\limits_{0}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega t dt.$$

Если мы рассмотрим выражение

$$b_k = \frac{2}{T} \int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega t dt,$$

то увидим, что под интегралом стоит нечетная функция. Интеграл от такой функции по симметричному промежутку равен нулю. Следовательно, все $b_k = 0$, то есть ряд Фурье четной функции не содержит синусов.

Таким образом, если $f(t)$ - четная функция, то

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t,$$

где

$$a_k = \frac{4}{T} \int\limits_{0}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos k\omega t dt.$$

Аналогичным образом нетрудно показать, что ряд Фурье нечетной функции содержит только синусы, так что оказывается

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega t,$$

где

$$b_k = \frac{4}{T}\int\limits_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin k\omega t dt.$$

Пример 1. Разложим в ряд функцию, график которой приведен на рис. 31.

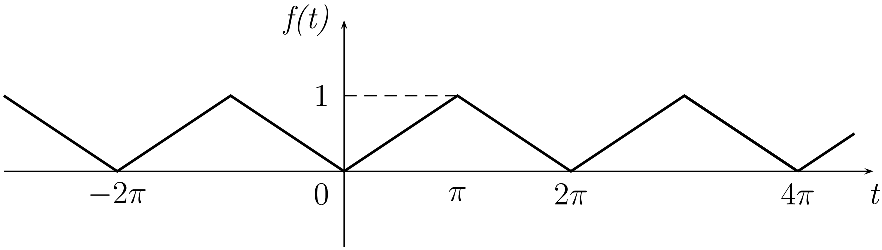

Рис. 31.

Видно, что функция имеет период $T = 2\pi$, а потому $\omega = 1$. Кроме того, ясно, что $f(t) = \dfrac{t}{\pi}$ при $t \in [0, 1]$.

Так как функция четная, то ее ряд Фурье не содержит синусов, а его коэффициенты находятся так:

$$a_0 = \frac{4}{T}\int\limits_0^{\frac{T}{2}} f(t)dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{t}{\pi}dt = 1;$$

$$a_k = \frac{4}{T}\int\limits_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos k\omega t dt = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{t}{\pi}\cos kt dt =$$

$$= \frac{2}{\pi^2 k} t\sin kt\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi^2 k}\int\limits_0^{\pi}\sin kt dt = \frac{2}{\pi^2 k^2}\cos kt\Big|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi^2 k^2}(\cos k\pi - 1).$$

Так как $\cos k\pi = (-1)^k$, то все a_k с четными номерами равны нулю. Если же k - нечетное число, то есть $k = 2m + 1$ $(m = 0, 1, 2, ...)$, то $\cos(2m + 1)\pi = -1$, а поэтому оказывается $a_{2m+1} = -\dfrac{4}{\pi^2(2m + 1)^2}$.

Следовательно, разложение в ряд Фурье нашей функции имеет вид:

$$f(t) = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(2m+1)t}{(2m+1)^2}.$$

Пример 2. Разложить в ряд Фурье функцию $f(t)$, график которой приведен на рис. 32. (В радиотехнике сигнал такой формы называют меандром.)

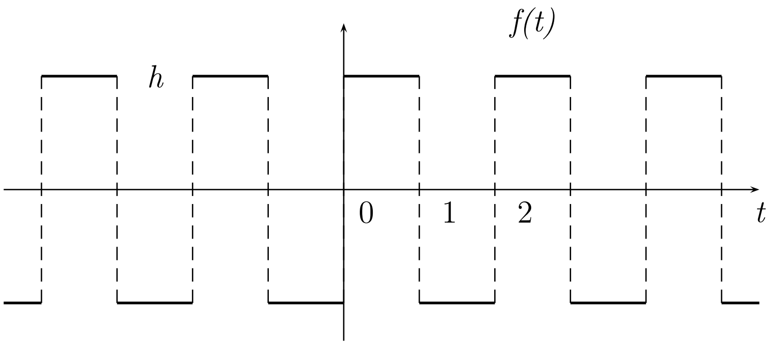

Рис. 32.

Ясно, что $f(t)$ - нечетная функция с периодом $T = 2$ и $\omega = \pi$. Кроме того, $f(t) = h$ при $t \in (0, 1)$.

В соответствии со сказанным, в ряде Фурье будут только синусы, коэффициенты при которых такие:

$$b_k = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin k\omega t dt = 2 \int_0^1 h \sin k\pi t dt = -\frac{2h}{k\pi} \cos k\pi t \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{2h}{k\pi}(1 - \cos k\pi) = \frac{2h}{k\pi}(1 - (-1)^k).$$

Как и в предыдущем примере, видно, что все коэффициенты с четными номерами равны нулю, а коэффициенты с нечетными номерами принимают вид: $b_{2m+1} = \dfrac{4h}{(2m+1)\pi}$ $(m = 0, 1, 2, ...)$.

$$f(t) = \frac{4h}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(2m+1)\pi t}{(2m+1)}.$$

3.19. Комплексная форма ряда Фурье

В технических дисциплинах (например, в электротехнике и радиотехнике) часто описывают колебательные процессы с помощью комплексных чисел. Для этого, в частности, используют комплексную форму записи ряда Фурье. Мы покажем здесь, как выглядит эта запись.

Пусть T-периодическая функция $f(t)$ разложена в ряд Фурье, то есть

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t.$$

В силу формул Эйлера,

$$\cos k\omega t = \frac{e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t}}{2}, \quad \sin k\omega t = \frac{e^{ik\omega t} - e^{-ik\omega t}}{2i}.$$

Это дает возможность записать ряд Фурье в виде:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \; \frac{e^{ik\omega t} + e^{-ik\omega t}}{2} + b_k \; \frac{e^{ik\omega t} - e^{-ik\omega t}}{2i} \; ,$$

или, что то же,

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - ib_k}{2} \; e^{ik\omega t} + \frac{a_k + ib_k}{2} \; e^{-ik\omega t} \; .$$

Положим

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \; c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \; c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}.$$

Тогда ряд примет вид

$$f(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} + c_{-k} e^{-ik\omega t} \; .$$

Полученное равенство обычно записывают так:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}.$$

Такая форма записи ряда Фурье называется комплексной.

Заметим, что в последнем ряде k изменяется от $-\infty$ до ∞. Поскольку раньше мы с такими рядами не встречались, постольку следует сказать, что называется суммой построенного ряда.

Мы будем называть суммой этого ряда такой предел:

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{k=-m}^{m} c_k e^{ik\omega t}.$$

Обратимся к коэффициентам построенного ряда. Во-первых,

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)dt.$$

Далее,

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{T}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\cos k\omega t dt - i\frac{2}{T}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\sin k\omega t dt\right) =$$

$$= \frac{1}{T}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)(\cos k\omega t - i\sin k\omega t)dt.$$

Так как $\cos k\omega t - i\sin k\omega t = e^{-ik\omega t}$, то

$$c_k = \frac{1}{T}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)e^{-ik\omega t}dt.$$

Аналогично получается, что

$$c_{-k} = \frac{1}{T}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)e^{ik\omega t}dt.$$

Видно, что все коэффициенты комплексного ряда Фурье находятся по одной формуле:

$$c_k = \frac{1}{T}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)e^{-ik\omega t}dt \quad (k = 0, \pm1, \pm2, ...).$$

Итак, если T-периодическая функция $f(t)$ удовлетворяет условиям теоремы Дирихле, то при всех $t \in R$

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t},$$

где

$$c_k = \frac{1}{T}\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)e^{-ik\omega t}dt.$$

Напомним, что в точках разрыва функции в левой части равенства следует писать не $f(t)$, а $\dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$.

Пример. Пусть $f(t) = t$ при $t \in (-1, 1)$ и $f(t+2) = f(t)$ (рис. 33). Разложим эту функцию в комплексный ряд Фурье.

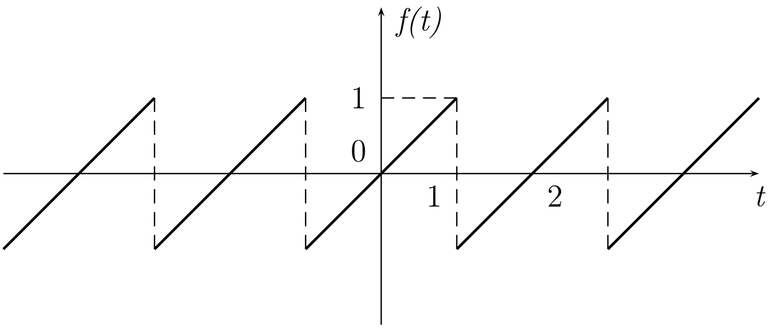

Рис. 33.

Вначале найдем c_0:

$$c_0 = \frac{1}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)dt = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} tdt = 0.$$

Так как $T = 2$, то $\omega = \pi$. Поэтому при $k \neq 0$ имеем

$$c_k = \frac{1}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-ik\omega t}dt = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} te^{-ik\pi t}dt =$$

$$= \frac{1}{-2ik\pi}te^{-ik\pi t}\Big|_{-1}^{1} + \frac{1}{2ik\pi}\int\limits_{-1}^{1} e^{-ik\pi t}dt =$$

$$= \frac{1}{-2ik\pi}(e^{-ik\pi} + e^{ik\pi}) - \frac{1}{2(ik\pi)^2}e^{-ik\pi t}\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \frac{1}{-ik\pi}\cos k\pi - \frac{1}{2(ik\pi)^2}(e^{-ik\pi} - e^{ik\pi}) =$$

$$= \frac{1}{-ik\pi}\cos k\pi - \frac{i}{(ik\pi)^2}\sin k\pi.$$

Так как $\cos k\pi = (-1)^k$ и $\sin k\pi = 0$, то

$$c_k = \frac{1}{-ik\pi}(-1)^k = \frac{(-1)^k i}{k\pi}.$$

Таким образом,

$$f(t) = \frac{i}{\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}{}' \frac{(-1)^k}{k} e^{ik\pi t}.$$

Штрих возле знака суммы означает, что в ней отсутствует слагаемое, у которого $k = 0$.

3.20. Равенство Парсеваля

.

Пусть T-периодическая функция $f(t)$ разложена в ряд Фурье:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t.$$

Умножим обе части написанного равенства на $f(t)$ и проинтегрируем полученное по промежутку $[\alpha, \alpha+T]$, считая допустимым почленное интегрирование ряда. У нас окажется

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(t)dt = \frac{a_0}{2}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)dt +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\cos k\omega t dt + b_k \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\sin k\omega t dt.$$

В соответствии с определением коэффициентов Фурье, последнее равенство можно записать так:

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(t)dt = \frac{a_0^2 T}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^2 T}{2} + \frac{b_k^2 T}{2}$$

или
$$\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(t)dt = T\left(\frac{a_0^2}{4}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k^2+b_k^2}{2}\right).$$
Мы получили равенство Парсеваля (M. A. Parseval, 1755-1836).

Вспоминая, что $\dfrac{a_0}{2} = A_0,\ a_k = A_k\sin\varphi_k,\ b_k = A_k\cos\varphi_k$, нетрудно преобразовать равенство Парсеваля к такому виду:
$$\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(t)dt = T\left(A_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k^2}{2}\right).$$
Далее, из равенств
$$c_0 = \frac{a_0}{2},\ c_k = \frac{a_k - ib_k}{2},\ c_{-k} = \frac{a_k+ib_k}{2}$$
видно, что
$$|c_0|^2 = \frac{a_0^2}{4},\ |c_k|^2 = |c_{-k}|^2 = \frac{a_k^2+b_k^2}{4},\ |c_k|^2+|c_{-k}|^2 = \frac{a_k^2+b_k^2}{2}.$$

Это позволяет записать равенство Парсеваля в форме
$$\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(t)dt = T\left(|c_0|^2+\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2+|c_{-k}|^2\right)$$
или
$$\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(t)dt = T\sum_{k=-\infty}^{\infty}|c_k|^2.$$

Выясним физический смысл равенства Парсеваля. Для этого напомним, что мгновенная мощность тока силы $I(t)$, проходящего через сопротивление R, равна $RI^2(t)$. Поэтому работа тока за промежуток времени длиною T имеет вид:
$$W = R\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} I^2(t)dt.$$
В частности, работа постоянного тока $I_0 = A_0$ за этот период будет равна RA_0^2T.

Работа гармонического тока $I_k(t) = A_k \sin(k\omega t + \varphi_k)$, у которого $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, оказывается такой:

$$W_k = R \int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} A_k^2 \sin^2(k\omega t + \varphi_k)dt = \frac{RA_k^2}{2} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} (1 - \cos(2k\omega t + 2\varphi_k))dt =$$

$$= \frac{RA_k^2}{2} \left(t - \frac{1}{2k\omega} \sin(2k\omega t + 2\varphi_k) \right) \Bigg|_{\alpha}^{\alpha+T} = \frac{RA_k^2}{2} T.$$

Теперь предположим, что T-периодический ток силы $I(t)$ представлен в виде ряда Фурье, то есть является наложением элементарных гармонических токов:

$$I(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega t + \varphi_k).$$

Тогда, в силу равенства Парсеваля,

$$\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} I^2(t)dt == T \left(A_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^2}{2} \right).$$

Умножив обе части равенства на R, получим

$$W = W_0 + \sum_{k=1}^{\infty} W_k = \sum_{k=0}^{\infty} W_k.$$

Итак, работа периодического тока за период равна сумме работ его гармонических составляющих.

Заметим, что последнее равенство позволяет проанализировать распределение работы по спектру тока: на гармонику частоты $k\omega$ приходится доля работы W_k.

Пример. Предположим, что имеется периодический ток, график которого приведен на рис. 32.

Тогда, как мы видели, этот ток можно представить в виде

$$I(t) = \frac{4h}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(2m+1)\pi t}{2m+1}.$$

Так как период этого тока равен 2, то его работа за период

$$W = R \int\limits_0^2 h^2 dt = 2Rh^2.$$

В соответствии со сказанным выше, работы составляющих гармоник равны $W_{2m+1} = \dfrac{16Rh^2}{\pi^2(2m+1)^2}$ $(m = 0, 1, 2, ...)$. В частности,

$$W_1 = \frac{16Rh^2}{\pi^2}, \quad W_3 = \frac{16Rh^2}{9\pi^2}, \quad W_5 = \frac{16Rh^2}{25\pi^2},$$

откуда

$$\frac{W_1}{W} = \frac{8}{\pi^2} \approx 0,81, \quad \frac{W_3}{W} = \frac{8}{9\pi^2} \approx 0,09, \quad \frac{W_5}{W} = e\frac{8}{25\pi^2} \approx 0,06.$$

Таким образом, первая гармоника дает 81% всей работы тока, а на долю первых трех гармоник, являющихся низкочастотными составляющими тока, приходится около 96% работы.

3.21. Разложение в ряд Фурье функции, заданной на конечном промежутке

Если функция задана на некотором конечном промежутке, то ее можно периодически продолжить на всю вещественную ось. После этого построенную периодическую функцию можно разложить в ряд Фурье. Этот ряд на исходном промежутке будет сходиться к заданной функции. Разумеется, мы предполагаем, что продолженная функция обладает сходящимся к ней рядом Фурье. Следует, однако, иметь в виду, что существует бесконечно много способов периодического продолжения функции, так что для заданной на конечном промежутке функции можно построить бесконечно много различных рядов Фурье. На практике, как правило, используют лишь три способа продолжения, которые мы сейчас опишем.

Будем для определенности считать, что функция $f(t)$ задана на промежутке $(0, l)$. Тогда можно поступить так:

а) Продолжить функцию на всю ось с периодом $T = l$. В этом случае, очевидно, окажется

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{2\pi kt}{l} + b_k \sin\frac{2\pi kt}{l} \quad \text{при} \quad t \in (0, l),$$

причем

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(t)\cos\frac{2\pi kt}{l}\,dt, \qquad b_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(t)\sin\frac{2\pi kt}{l}\,dt.$$

б) Продолжить функцию четным образом на промежуток $(-l, l)$, а затем построенную конструкцию продолжить на всю ось с периодом $T = 2l$. При таком продолжении получим

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{\pi k t}{l} \quad \text{при} \quad t \in (0, l),$$

причем

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(t)\cos\frac{\pi k t}{l}\, dt.$$

в) Продолжить функцию нечетным образом на промежуток $(-l, l)$, а затем построенную конструкцию продолжить на всю ось с периодом $T = 2l$. В этом случае окажется

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{\pi k t}{l} \quad \text{при} \quad t \in (0, l),$$

причем

$$b_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(t)\sin\frac{\pi k t}{l}\, dt.$$

Заметим, что способ периодического продолжения обычно определяется характером решаемой задачи.

Пример. Пусть $f(t) = t(2-t)$ при $t \in [0, 2]$.

Вначале продолжим нашу функцию с периодом $T = l = 2$. В этом случае, как нетрудно увидеть (рис. 34), продолженная функция окажется четной. Поэтому ее ряд Фурье не будет содержать синусов. Следовательно, мы должны вычислить лишь коэффициенты a_k.

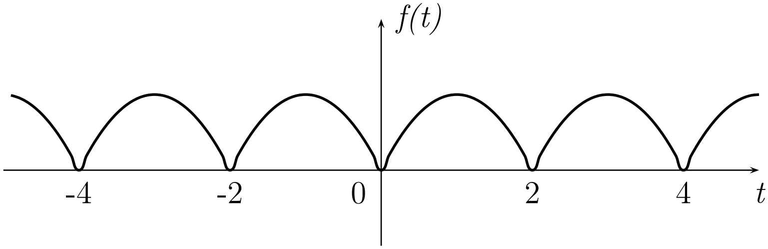

Рис. 34.

Учитывая четность, получаем

$$a_0 = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)dt = 2\int_0^1 t(2-t)dt = \frac{4}{3};$$

$$a_k = \frac{4}{T}\int\limits_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos k\omega t dt = 2\int\limits_0^1 t(2-t)\cos k\pi t dt =$$

$$= 2t(2-t)\frac{1}{k\pi}\sin k\pi t\Big|_0^1 - \frac{4}{k\pi}\int\limits_0^1 (1-t)\sin k\pi t dt =$$

$$= \frac{4}{k^2\pi^2}(1-t)\cos k\pi t\Big|_0^1 + \frac{4}{k^2\pi^2}\int\limits_0^1 \cos k\pi t dt =$$

$$= -\frac{4}{k^2\pi^2} + \frac{4}{k^3\pi^3}\sin k\pi t\Big|_0^1 = -\frac{4}{k^2\pi^2}.$$

Итак, можем написать:

$$t(2-t) = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k\pi t}{k^2} \quad \text{при} \quad t\in[0,2]. \qquad (*)$$

Полезно обратить внимание на следующее обстоятельство: если бы мы продолжили исходную функцию на всю ось с периодом $T = l = 2$, то получили бы для нее точно такой же ряд Фурье (см. рис. 34).

Теперь продолжим заданную нам функцию на промежуток $[-2, 0]$ нечетным образом, а затем с периодом $T = 2l = 4$ на всю ось (см. рис. 35).

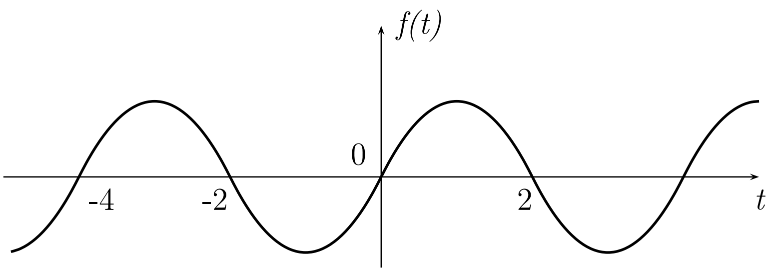

Рис. 35.

В этом случае ряд Фурье будет содержать лишь синусы, коэффициенты при которых находятся так:

$$b_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(t)\sin\frac{\pi k t}{l}\, dt = \int\limits_0^2 t(2-t)\sin\frac{k\pi t}{2}dt =$$

$$= -t(2-t)\frac{2}{k\pi}\cos\frac{k\pi t}{2}\Big|_0^2 + \frac{4}{k\pi}\int\limits_0^2 (1-t)\cos\frac{k\pi t}{2}dt =$$

$$= \frac{8}{k^2\pi^2}(1-t)\sin\frac{k\pi t}{2}\Big|_0^2 + \frac{8}{k^2\pi^2}\int\limits_0^2 \sin\frac{k\pi t}{2}dt =$$

$$= -\frac{16}{k^3\pi^3}\cos\frac{k\pi t}{2}\Big|_0^2 = -\frac{16}{k^3\pi^3}((-1)^k - 1).$$

Ясно, что при четных значениях k оказывается $b_k = 0$. При нечетных $k = 2m+1$ $(m = 0, 1, 2, ...)$ получаем

$$b_{2m+1} = \frac{32}{(2m+1)^3\pi^3}.$$

Значит,

$$t(2-t) = \frac{32}{\pi^3}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^3}\sin\frac{(2m+1)\pi t}{2} \quad \text{при} \quad t \in [0, 2].$$

Таким образом, мы построили еще одно разложение в ряд Фурье нашей функции.

Интересно, что, используя ряды Фурье, можно получать суммы некоторых числовых рядов. Например, если в полученном нами выше равенстве (*) положить $t = 0$, то оно примет вид:

$$0 = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}.$$

Отсюда несложными преобразованиями получаем:

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}.$$

Далее. Если, исходя из (*), написать равенство Парсеваля, то получится

$$\int\limits_0^2 t^2(2-t)^2\ dt = 2\left(\frac{4}{9} + \frac{16}{\pi^4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k^4}\right).$$

Нетрудно посчитать, что

$$\int\limits_0^2 t^2(2-t)^2\ dt = \frac{16}{15}.$$

Поэтому равенство принимает вид:

$$\frac{16}{15} = 2\left(\frac{4}{9} + \frac{16}{\pi^4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k^4}\right),$$

откуда

$$\frac{\pi^4}{90} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}.$$

Найденные нами две суммы рядов получить другими способами оказывается намного сложнее.

В заключение заметим, что многие понятия, связанные с тригонометрическими рядами Фурье, можно обобщить. Мы сделаем это в следующих разделах.

3.22. Ортогональные системы функций

Функцию $\rho(t)$ будем называть весовой функцией, или весом, на промежутке $[\alpha, \beta]$, если она всюду на этом промежутке положительна, за исключением, может быть, конечного числа точек, в которых она равна нулю.

Примерами весовых функций могут служить $\rho(t) = \sqrt{1-t^2}$ при $t \in [-1, 1]$ или $\rho(t) = 1$ при $t \in [\alpha, \alpha + T]$.

Скалярным произведением с весом $\rho(t)$ на промежутке $[\alpha, \beta]$ функций $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ называют

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho(t)\varphi_1(t)\varphi_2(t)dt.$$

Мы будем в дальнейшем для краткости обозначать скалярное произведение символом (φ_1, φ_2).

Функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ называются ортогональными с весом $\rho(t)$ на промежутке $[\alpha, \beta]$, если на этом промежутке их скалярное произведение (φ_1, φ_2) равно нулю, то есть если выполняется равенство

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho(t)\varphi_1(t)\varphi_2(t)dt = 0.$$

Величину

$$\sqrt{(\varphi, \varphi)} = \sqrt{\int_a^b \rho(t)\varphi^2(t)dt}$$

называют нормой функции $\varphi(t)$ на промежутке $[\alpha, \beta]$ и обозначают $||\varphi(t)||$ или более коротко $||\varphi||$.

Предположим теперь, что на промежутке $[\alpha, \beta]$ задана некоторая последовательность функций $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, ...$, таких, что $||\varphi_k|| \neq 0$. Эту последовательность называют ортогональной на $[\alpha, \beta]$, если любые две ее различные функции ортогональны на этом промежутке, то есть $(\varphi_k, \varphi_m) = 0$ при $k \neq m$.

Если $||\varphi(t)|| = 1$, то функцию $\varphi(t)$ называют нормированной.

Ортогональная система, состоящая из нормированных функций, называется ортонормированной.

Заметим, что всякую ортогональную последовательность можно преобразовать в ортонормированную, если каждую из функций разделить на ее норму.

Простейшим примером ортогональной системы является рассмотренная нами тригонометрическая система

$$\{1,\ \cos\omega t,\ \sin\omega t,\ \cos 2\omega t,\ \sin 2\omega t,\ \cos 3\omega t,\ \sin 3\omega t, ...\}.$$

Она, как мы видели, ортогональна с весом $\rho(t) = 1$ на всяком промежутке вида $[\alpha, \alpha + T]$.

Ранее мы установили, что

$$\int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} 1^2 dt = T \quad \text{и} \quad \int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} (\cos k\omega t)^2 dt = \int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} (\sin k\omega t)^2 dt = \frac{T}{2}.$$

Это значит, что $||1|| = \sqrt{T}$ и $||\cos k\omega t|| = ||\sin k\omega t|| = \sqrt{\frac{T}{2}}$. Поэтому ортонормированная тригонометрическая система состоит из функций

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{T}},\ \sqrt{\frac{2}{T}}\cos\omega t,\ \sqrt{\frac{2}{T}}\sin\omega t,\ \sqrt{\frac{2}{T}}\cos 2\omega t,\ \sqrt{\frac{2}{T}}\sin 2\omega t, ... \right\}.$$

В следующем разделе мы приведем еще один пример ортогональной системы функций.

3.23. Многочлены Чебышева

В этом разделе мы обратимся к многочленам, которые нередко используются при решении вычислительных и технических задач.

Пусть

$$T_k(t) = \cos(k \arccos t).$$

Тогда, в частности,

$$T_0(t) = 1, \quad T_1(t) = t, \quad T_2(t) = \cos(2\arccos t) = 2t^2 - 1.$$

Построенные функции оказались многочленами. Покажем, что вообще $T_k(t)$ является многочленом степени k. Для этого вспомним известную тригонометрическую формулу

$$\cos(k+1)\alpha + \cos(k-1)\alpha = 2\cos\alpha\cos k\alpha.$$

Полагая в этой формуле $\alpha = \arccos t$, получим

$$T_{k+1}(t) + T_{k-1}(t) = 2tT_k(t)$$

или

$$T_{k+1}(t) = 2tT_k(t) - T_{k-1}(t).$$

Это рекуррентное соотношение позволяет последовательно находить функции $T_k(t)$. При этом хорошо видно следующее: если $T_{k-1}(t)$ и $T_k(t)$ являются многочленами степени $k-1$ и k, то $T_{k+1}(t)$ окажется многочленом степени $k+1$. Выше мы видели, что $T_1(t)$ и $T_2(t)$ - многочлены степеней 1 и 2. Значит, $T_3(t)$ - многочлен степени 3. Поэтому $T_4(t)$ будет многочленом степени 4 и т. д. Таким образом, функции $T_k(t)$ являются многочленами степени k.

Многочлены $T_k(t)$ были введены П. Л. Чебышевым (П. Л. Чебышев, 1821-1894) и потому называются многочленами Чебышева первого рода.

Покажем, что эти многочлены ортогональны на отрезке $[-1, 1]$ с весом $\rho(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Действительно,

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_k(t)T_m(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt = \int_{-1}^{1} \frac{\cos(k\arccos t)\cos(m\arccos t)}{\sqrt{1-t^2}}dt.$$

Положим $\arccos t = x$. Тогда при изменении t от -1 до 1 величина x будет изменяться от π до 0. Кроме того, $dx = -\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$. Поэтому интеграл превратится в такой:

$$-\int_{\pi}^{0} \cos kx \cos mx dx,$$

который, как легко видеть, равен нулю при $k \neq m$.

Таким образом, многочлены $T_k(t)$ образуют систему, ортогональную на промежутке $[-1, 1]$ с весом $\rho(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

Найдем норму многочленов Чебышева. Прежде всего,

$$||T_0||^2 = \int\limits_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \arcsin t|_{-1}^{1} = \pi.$$

Далее,

$$||T_k||^2 = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\cos^2(k \arccos t)}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Сделав замену $\arccos t = x$, получим

$$||T_k||^2 = -\int\limits_{\pi}^{0} \cos^2 kx dx = \int\limits_{0}^{\pi} \frac{1+\cos 2kx}{2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Итак,

$$||T_0|| = \sqrt{\pi}, \quad ||T_k|| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Следовательно, ортонормированная система многочленов Чебышева состоит из таких функций:

$$\hat{T}_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \ \text{ и } \ \hat{T}_k(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(k \arccos t) \quad (k = 1, 2, 3, ...)$$

Замечание. Многочлены $U_k(t)$, которые ортогональны на промежутке $[-1, 1]$ с весом $\rho(t) = \sqrt{1-t^2}$, называют многочленами Чебышева второго рода. Можно показать, что эти многочлены задаются такой формулой:

$$U_k(t) = \frac{\sin((k+1)\arccos t)}{\sqrt{1-t^2}}.$$

3.24. Обобщенные ряды Фурье

Пусть имеется система функций $\varphi_k(t)(k = 0, 1, 2, ..)$, ортогональных на промежутке $[\alpha, \beta]$ с весом $\rho(t)$. Предположим, что заданная на этом же промежутке функция $f(t)$ раскладывается в ряд вида

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(t). \qquad (*)$$

Умножим обе части написанного равенства на $\rho(t)\varphi_m(t)$, а затем проинтегрируем полученное по промежутку $[\alpha, \beta]$, предполагая, что ряд можно интегрировать почленно. Получим

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho(t)f(t)\varphi_m(t)dt = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho(t)\varphi_m(t)\varphi_k(t)dt$$

или, учитывая данные выше определения,

$$(f, \varphi_m) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\varphi_m, \varphi_k).$$

Система функций $\varphi_k(x)$ ортогональна. Следовательно, все стоящие справа скалярные произведения равны нулю, за исключением того, в котором $k = m$. Поэтому равенство принимает вид

$$(f, \varphi_m) = c_m(\varphi_m, \varphi_m) = c_m||\varphi_m||^2,$$

откуда

$$c_m = \frac{(f, \varphi_m)}{||\varphi_m||^2}.$$

Так как m может быть любым целым неотрицательным числом, то полученное равенство означает, что коэффициенты в ряде (*) определяются единственным образом (если ряд допускает проведенное нами почленное интегрирование).

Предположим теперь, что у нас имеется некоторая функция $f(t)$, заданная на промежутке $[\alpha, \beta]$. Вычислим для нее коэффициенты c_k по формуле

$$c_k = \frac{(f, \varphi_k)}{||\varphi_k||^2} \quad (k = 0, 1, 2, ...)$$

и построим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k\varphi_k(t).$$

Этот ряд называют обобщенным рядом Фурье функции $f(t)$, а коэффициенты c_k - ее обобщенными коэффициентами Фурье.

Возникает естественный вопрос: будет ли построенный ряд иметь своей суммой функцию $f(t)$? Ответ на этот вопрос невозможно сформулировать в общем виде. Он зависит как от свойств ортогональной системы функций, так и от характера функции $f(t)$.

Наиболее часто встречающимся рядом Фурье является тригонометрический ряд Фурье, который мы рассматривали выше.

Другим примером разложения по ортогональным функциям может служить ряд, составленный из многочленов Чебышева. Такой ряд называют рядом Фурье - Чебышева.

Если функция $f(t)$ кусочно-монотонна и кусочно-непрерывна на промежутке $[-1, 1]$, то построенный по ней ряд Фурье - Чебышева будет на этом промежутке к ней сходиться. Иначе говоря, при выполнении этих условий

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k T_k(t),$$

где

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt, \quad c_k = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(t)T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}}dt.$$

Заметим, что в точках разрыва в левой части равенства следует писать $\dfrac{f(t+0)+f(t-0)}{2}$.

Пример. Пусть $f(t) = \arcsin t$. Находим сначала c_0:

$$c_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\arcsin t}{\sqrt{1-t^2}}dt = 0.$$

Далее,

$$c_k = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\arcsin t\ T_k(t)}{\sqrt{1-t^2}}\ dt = \quad \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\arcsin t\ \ \cos(k \arccos t)}{\sqrt{1-t^2}}\ dt.$$

Сделаем замену $x = \arccos t$. Тогда $\arcsin t = \dfrac{\pi}{2} - \arccos t = \dfrac{\pi}{2} - x$. Поэтому интеграл примет вид

$$c_k = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\frac{\pi}{2} - x)\cos kx dx.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$c_k = \frac{2}{\pi k^2}(1 - (-1)^k).$$

Хорошо видно, что при четных значениях k оказывается $c_k = 0$. Если k нечетное, то есть $k = 2m + 1$, то $c_{2m+1} = \dfrac{4}{\pi(2m+1)^2}$.

Следовательно,

$$\arcsin t = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{T_{2m+1}(t)}{(2m+1)^2}.$$

Приложение

Греческий алфавит

$A\ \alpha$	альфа	$B\ \beta$	бета	$\Gamma\ \gamma$	гамма	$\Delta\ \delta$	дельта
$E\ \epsilon,\ \varepsilon$	эпсилон	$Z\ \zeta$	дзета	$H\ \eta$	эта	$\Theta\ \theta,\ \vartheta$	тэта
$I\ \iota$	йота	$K\ \kappa$	каппа	$\Lambda\ \lambda$	ламбда	$M\ \mu$	мю
$N\ \nu$	ню	$\Xi\ \xi$	кси	$O\ o$	омикрон	$\Pi\ \pi$	пи
$P\ \rho, \varrho$	ро	$\Sigma\ \sigma$	сигма	$T\ \tau$	тау	$\Upsilon\ \upsilon$	ипсилон
$\Phi\ \phi,\ \varphi$	фи	$X\ \chi$	хи	$\Psi\ \psi$	пси	$\Omega\ \omega$	омега

Оглавление

Часть 1. Дифференциальное исчисление

Часть 2. Интегральное исчисление

Часть 3. Ряды