ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

МОДЕЛИРОВАНИЕ И ВЫЧИСЛЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ MATHEMATICA, MAPLE И MATLAB

3-е издание

Differ_title.indd 1 17.10.2007 16:12:32

DIFFERENTIAL EQUATIONS AND BOUNDARY VALUE PROBLEMS

COMPUTING AND MODELING

Third Edition

C. HENRY EDWARDS
DAVID E. PENNY
The University of Georgia



Pearson Education, Inc.
Upper Saddle River, NJ 07458

Differ_title.indd 2 17.10.2007 16:12:32

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

МОДЕЛИРО ВАНИЕ И ВЫЧИСЛЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ MATHEMATICA, MAPLE И MATLAB

3-е издание

ЧАРЛЬЗ ГЕНРИ ЭДВАРДС
И ДЭВИД Э. ПЕННИ



Москва • Санкт-Петербург • Киев
2008

Differ_title.indd 3 17.10.2007 16:12:32

ББК (В)22,1
Э18
УДК 519.62

Издательский дом "Вильямс"

Зав. редакцией *С.Н. Тригуб*

Перевод с английского и редакция *Я.К. Шмидского*

По общим вопросам обращайтесь в Издательский дом "Вильямс" по адресу:
info@williamspublishing.com, http://www.williamspublishing.com
115419, Москва, а/я 783; 03150, Киев, а/я 152

Эдвардс, Чарльз Генри, **Пенни**, Дэвид Э.

Э18 Дифференциальные уравнения и краевые задачи: моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple и MATLAB. 3-е издание. : Пер. с англ. — М. : ООО "И.Д. Вильямс", 2008. — 1104 с. : ил. — Парал. тит. англ.

ISBN 978–5–8459–1166–7 (рус.)

Данный учебник представляет собой весьма полный современный вводный курс обыкновенных дифференциальных уравнений. Довольно подробно освещены все темы, затрагиваемые в классических вводных курсах, включая применение матричных методов, операционного исчисления, степенных рядов и рядов Фурье. Не обойдены вниманием и современные исследования в области дифференциальных уравнений, такие как, например, хаос в динамических системах и нелинейные явления и системы. Особое внимание авторы уделяют численным методам и обучению построения математических моделей самых разнообразных (например, экологических, физических, инженерных) систем. Для изучения таких моделей авторы используют самые современные математические пакеты: MATLAB, Maple и Mathematica. Кроме того, для каждого раздела имеются задачи различной сложности, а также проекты для самостоятельной разработки студентами. Несомненно, книга будет полезна всем, кто изучает дифференциальные уравнения — как математикам, так и студентам других специальностей — инженерам, физикам, химикам, биологам, географам и геологам.

ББК (В)22,1

Все названия программных продуктов являются зарегистрированными торговыми марками соответствующих фирм.

Никакая часть настоящего издания ни в каких целях не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, если на это нет письменного разрешения издательства Prentice Hall, Inc.

Authorized translation from the English language edition published by Prentice Hall, Inc., Copyright © 2004, 2000, 1996 by Pearson Education, Inc.

All rights reserved. No part of this book may be reproduced, in any form or by any means, without permission in writing from the publisher.

Russian language edition is published by Williams Publishing House according to the Agreement with R&I Enterprises International, Copyright © 2008.

MATLAB is a registered trademark of The MathWorks, Inc.

Maple is a registered trademark of Waterloo Maple, Inc.

Mathematica is a registered trademark of Wolfram Research, Inc.

ISBN 978–5–8459–1166–7 (рус.)
ISBN 0–13–065245–8 (англ.)

© Издательский дом "Вильямс", 2008
© 2004, 2000, 1996 by Pearson Education, Inc.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 11

1 Дифференциальные уравнения первого порядка 21
2 Математические модели и численные методы 127
3 Линейные уравнения высших порядков 219
4 Введение в системы дифференциальных уравнений 349
5 Линейные системы дифференциальных уравнений 401
6 Нелинейные системы и явления 509
7 Методы преобразования Лапласа 609
8 Методы степенных рядов 693
9 Методы рядов Фурье 785
10 Собственные значения и краевые (граничные) задачи 881

Литература для дальнейшего изучения 970
Приложение. Существование и единственность решений 979
Ответы к избранным задачам 997
Предметный указатель 1087

СОДЕРЖАНИЕ

Прикладные модули 9
Предисловие 11

ГЛАВА 1 **Дифференциальные уравнения первого порядка 21**

1.1 Дифференциальные уравнения и математические модели 21
1.2 Интегралы в качестве общих и частных решений 34
1.3 Поля направлений и интегральные кривые 45
1.4 Уравнения с разделяющимися переменными и приложения 63
1.5 Линейные уравнения первого порядка 85
1.6 Замена переменных и уравнения в полных дифференциалах 101

ГЛАВА 2 **Математические модели и численные методы 127**

2.1 Модели роста населения 127
2.2 Равновесные решения и устойчивость 144
2.3 Модели типа ускорение-скорость 156
2.4 Числовая аппроксимация. Метод Эйлера 172
2.5 Более подробный анализ метода Эйлера 187
2.6 Метод Рунге–Кутта 203

ГЛАВА 3 **Линейные уравнения высших порядков 219**

3.1 Введение: линейные уравнения второго порядка 219
3.2 Общие решения линейных уравнений 237
3.3 Однородные уравнения с постоянными коэффициентами 254
3.4 Механические колебания 268
3.5 Неоднородные уравнения и метод неопределенных коэффициентов 286

3.6 Вынужденные колебания и резонанс 303
3.7 Электрические цепи 321
3.8 Краевые задачи и собственные значения 331

ГЛАВА 4 **Введение в системы дифференциальных уравнений 349**
4.1 Системы первого порядка и их приложения 349
4.2 Метод исключения 368
4.3 Численные методы решения систем 381

ГЛАВА 5 **Линейные системы дифференциальных уравнений 401**
5.1 Матрицы и линейные системы 401
5.2 Метод собственных значений для однородных систем 423
5.3 Системы второго порядка и механические приложения 444
5.4 Решения в случае кратных собственных значений 462
5.5 Экспоненциальная функция от матрицы и линейные системы 482
5.6 Неоднородные линейные системы 498

ГЛАВА 6 **Нелинейные системы и явления 509**
6.1 Устойчивость и фазовая плоскость 509
6.2 Линейные и почти линейные системы 527
6.3 Экологические модели: хищники и конкуренты 549
6.4 Нелинейные механические системы 570
6.5 Хаос в динамических системах 592

ГЛАВА 7 **Методы преобразования Лапласа 609**
7.1 Преобразования Лапласа и оригиналы функций (обратные преобразования) 609
7.2 Применение преобразования Лапласа к задачам Коши (задачам с начальными условиями) 624
7.3 Сдвиг и элементарные дроби 639
7.4 Производные, интегралы и произведения преобразований 652

7.5 Периодические и кусочно-непрерывные входные функции 661
7.6 Импульсы и дельта-функции 679

ГЛАВА 8 **Методы степенных рядов 693**

8.1 Введение и обзор теории степенных рядов 693
8.2 Решения в виде ряда в окрестностях обыкновенных точек 709
8.3 Регулярные особые точки 724
8.4 Метод Фробениуса. Исключительные случаи 744
8.5 Уравнение Бесселя 761
8.6 Приложения функций Бесселя 773

ГЛАВА 9 **Методы рядов Фурье 785**

9.1 Периодические функции и тригонометрические ряды 785
9.2 Ряд Фурье общего вида и сходимость 795
9.3 Ряды Фурье по синусам и косинусам 806
9.4 Приложения рядов Фурье 822
9.5 Теплопроводность и разделение переменных 829
9.6 Колебания струны и одномерное волновое уравнение 849
9.7 Установившаяся температура и уравнение Лапласа 866

ГЛАВА 10 **Собственные значения и краевые (граничные) задачи 881**

10.1 Задачи Штурма–Лиувилля и разложения по собственным функциям 881
10.2 Приложения рядов по собственным функциям 898
10.3 Установившиеся периодические решения и собственные частоты 913
10.4 Задачи в цилиндрических координатах 927
10.5 Явления высших размерностей 947

Литература для дальнейшего изучения 970
Приложение. Существование и единственность решений 979
Ответы к избранным задачам 997
Предметный указатель 1087

Прикладные модули

Модули, перечисленные здесь, следуют за указанными разделами учебника. Наиболее широко представлены вычислительные проекты, которые иллюстрируют содержание соответствующих разделов учебника.

1.3 Машинно-генерируемые поля направлений и интегральные кривые
1.4 Логистическое уравнение
1.5 Колебания температуры внутри и вне помещения
1.6 Решения с помощью компьютерной алгебры

2.1 Моделирование численности популяции, подчиняющейся логистическому закону
2.3 Движение ракеты
2.4 Реализация метода Эйлера
2.5 Реализация усовершенствованного метода Эйлера
2.6 Реализация метода Рунге–Кутта

3.1 Построение графиков семейства решений уравнений второго порядка
3.2 Построение графиков семейства решений уравнений третьего порядка
3.3 Приближенное решение линейных уравнений
3.5 Автоматизация вариации параметров
3.6 Вынужденные колебания

4.1 Гравитация и законы Кеплера движения планет
4.2 Решение систем с помощью компьютерной алгебры
4.3 Кометы и космический корабль

5.1 Автоматическое решение линейных систем
5.2 Автоматическое вычисление собственных значений и собственных векторов
5.3 Колебания многоэтажных зданий, вызванные землетрясением
5.4 Дефектные собственные значения и обобщенные собственные векторы
5.5 Автоматизация решения с помощью экспоненциальной функции от матрицы
5.6 Автоматизация вариации параметров

6.1 Фазовые портреты и уравнения первого порядка
6.2 Фазовые портреты почти линейных систем
6.3 Ваш собственный заповедник живой природы
6.4 Уравнения Рэлея и Ван-дер-Поля

7.1 Выполнение преобразований с помощью компьютерной алгебры и оригиналы функций (обратные преобразования)
7.2 Преобразования задач Коши (задач с начальными условиями)
7.3 Демпфирование и исследования резонанса
7.5 Конструирование функций

10 Прикладные модули

8.2 Автоматическое вычисление коэффициентов ряда
8.3 Автоматизация метода ряда Фробениуса
8.4 Исключительный случай: понижение порядка
8.6 Уравнения Риккати и модифицированные функции Бесселя

9.2 Вычисление коэффициентов Фурье с помощью компьютерной алгебры
9.3 Ряд Фурье кусочно-гладких функций
9.5 Исследование нагретого стержня
9.6 Исследование колебаний струны

10.1 Числовые разложения по собственным функциям
10.2 Численное исследование распространения тепла
10.3 Колебания балок и трамплины для прыжков
10.4 Функции Бесселя и распространение тепла в цилиндре

ПРЕДИСЛОВИЕ

Многие вводные курсы дифференциальных уравнений еще в недалеком прошлом были ориентированы на формальное решение стандартных типов дифференциальных уравнений. Поэтому в них значительную долю составляли систематические методы (кажущиеся такими простыми в усвоении) поиска решения. Многие студенты концентрировались на изучении и запоминании методов решения уравнений знакомых типов. Однако данный учебник базируется на опыте преподавания курса, в котором большой акцент делается на концептуальных идеях и использовании программ-приложений и овладении студентами вычислительных средств для приобретения более широкого опыта решения задач.

Доступность технических вычислительных сред, подобных *Maple*, *Mathematica* и MATLAB, изменяет роль дифференциальных уравнений и возможности их применения в науке и инженерном деле, и именно это обстоятельство нашло отражение в данном учебнике. Новая технология мотивирует сдвиг акцента с традиционных ручных (с карандашом и бумагой) методов на качественные и машинные, которые

- позволяют расширить диапазон реальных приложений;
- позволяют использовать как вычисления, так и средства графической визуализации для углубленного понимания концепций;
- поощряют эмпирические исследования, которые позволяют глубже обдумать и провести более глубокий анализ, чем стандартные задачи учебника.

Главные особенности

Следующие особенности этого учебника предназначены для поддержки современного курса дифференциальных уравнений, в котором, помимо традиционных основных навыков, студенты знакомятся с концептуальными перспективами, которые понадобятся студентам для эффективного использования дифференциальных уравнений в их последующей работе и учебе.

- Редко используемые темы были сильно сокращены, а новые темы добавлены, чтобы сконцентрировать внимание как на основных методах, так и на качественных аспектах темы, связанных с полями направлений, интегральными кривыми, фазовыми портретами и динамическими системами. Мы объединяем символические, графические и численные методы решения везде, где это кажется выгодным. Свежий вычислительный подход очевиден в рисунках, примерах, задачах и приложениях всюду по тексту. Приблизительно 15% примеров в тексте новы или недавно исправлены для этого издания.

- В книге большое внимание уделяется линейным системам дифференциальных уравнений, которые рассмотрены в главах 4 и 5 (вместе с необходимыми сведениями из линейной алгебры), после которых в главе 6 рассматриваются нелинейные системы и явления (включая хаос в динамических системах).
- Эта книга начинается и заканчивается обсуждением и примерами математического моделирования явлений реального мира. Студенты учатся с помощью математического моделирования и эмпирических исследований выводить уравнения, решать их и извлекать полезную информацию из решения.
- Первый курс дифференциальных уравнений должен быть также окном в мир математики. Хотя в элементарном курсе нельзя изложить доказательства фундаментальных теорем существования и единственности, студенты должны знать точные и четкие формулировки этих теорем и понимать их роль в теории. Мы включаем соответствующее доказательство существования и единственности в приложение и иногда отсылаем к нему читателя по ходу изложения.
- Хотя наш подход основан на широком использовании новых распространенных компьютерных методов решения дифференциальных уравнений, студентов важно научить и некоторым элементарным аналитическим методам решения (рассмотренным в главах 1 и 3). Эффективное и надежное использование численных методов часто требует предварительного анализа с помощью стандартных элементарных методов; построение реалистической числовой модели часто базируется на изучении более простой аналитической модели. Мы поэтому продолжаем подчеркивать важность овладения мастерством традиционных методов решения (особенно акцентируя внимание на них в обширных наборах задач).

Особенности вычислительного подхода

Следующие особенности подчеркивают особенности вычислительной технологии, которая отличает большую часть нашего описания.

- Для этого издания создано почти 700 *машинно-генерируемых рисунков*, причем более половины из них совершенно новые. В большинстве своем они сгенерированы с помощью пакетов *Mathematica* и MATLAB. На них показаны высококачественные изображения полей направлений, интегральных кривых и фазовых портретов, которые “оживляют” символические решения дифференциальных уравнений. Например, графики на обложке изображают собственную функцию трехмерного волнового уравнения, которое описывает поверхностные волны на сферической планете. Эти графики были созданы с помощью соответствующих функций Лежандра (см. раздел 10.5).
- Приблизительно 45 *прикладных учебных модулей* следуют сразу за ключевыми разделами учебника. В большинстве этих приложений иллюстрируется использование технических средств вычислительных систем; в тексте этих разделов мы стремимся привлечь студентов к активному применению новой технологии.
- Новинкой является акцент на *численных методах*, которые представлены довольно ранним введением числовых методов решения в главе 2 (посвященной математическим моделям и численным методам). Здесь и в главе 4 рассматриваются численные методы решения систем уравнений, причем конкретная реализация численных алго-

ритмов представлена для систем уравнений параллельно для различных компьютерных средств — от графических калькуляторов до MATLAB.

- *Основные понятия* демонстрируются с помощью вычислительных средств, что позволяет более кратко и более просто, чем при традиционном подходе, охватить в главах 1, 3 и 5 некоторые традиционные физические темы (подобные точным уравнениям и вариации параметров).

Математическое моделирование

Математическое моделирование — цель изучения дифференциальных уравнений, мы постоянно побуждаем студентов заниматься им. Чтобы было легче представить широту тематики приложении, взгляните на следующий перечень вопросов, рассмотренных в этом учебнике.

- Как объяснить обычно наблюдаемую задержку времени между ежедневными колебаниями температуры внутри помещения и снаружи? (Раздел 1.5.)
- В чем отличие между Судным Днем и исчезновением популяций аллигаторов? (Раздел 2.1.)
- Почему одноколесный велосипед и двуосный автомобиль по-разному реагируют на неровности дороги? (Разделы 3.7 и 5.3.)
- Как предсказать момент следующего прохода недавно открытой кометы через перигелий? (Раздел 4.3.)
- Почему землетрясение может уничтожить одно здание и совсем не повредить ближайшее к нему? (Раздел 5.3.)
- Что определяет, будут ли два вида жить вместе в гармонии или конкуренция (соревнование) кончится исчезновением одного из них и выживанием другого? (Раздел 6.3.)
- Почему и когда нелинейность приводит к хаосу в биологических и механических системах? (Раздел 6.5.)
- Если по массивному телу на пружине периодически ударять молотком, то как поведение этого массивного тела зависит от частоты ударов молотка? (Раздел 7.6.)
- Почему флагштоки обычно внутри пусты, а не представляют собой сплошное тело? (Раздел 8.6.)
- Как объяснить различия в звучании гитары, ксилофона и барабана? (Разделы 9.6, 10.2 и 10.4.)

Организация и содержание

Мы изменили обычный подход и последовательность тем, чтобы воспользоваться преимуществами новой технологии и открыть новые перспективы. В качестве примеров отметим следующие особенности нашего подхода.

- После конспективного знакомства с уравнениями первого порядка в главе 1 (хотя и с небольшим охватом некоторых традиционных символических методов) в главе 2

вниманию студентов предлагается весьма раннее введение в математическое моделирование, устойчивость и качественные свойства дифференциальных уравнений, а также знакомство с численными методами. При более традиционном подходе во вводном курсе эти темы часто рассеиваются по разным главам.

- В главах 4 и 5 рассматриваются линейные системы. Мотивируемая текущими тенденциями в науке и техническом образовании и практическими соображениями, глава 4 предлагает раннее интуитивное введение в системы первого порядка, модели и численные методы приближенных вычислений. Глава 5 начинается с отдельного независимого раздела, посвященного линейной алгебре, который необходим для того, чтобы затем применить метод собственных значений к линейным системам. Область приложения метода собственных значений весьма обширна (от железнодорожных вагонов до землетрясений). В разделе 5.5 довольно полно представлена теория экспонент от матрицы, которые применяются в разделе 5.6 к неоднородным линейным системам.
- В главе 6, посвященной нелинейным системам и явлениям, понятие фазовой плоскости применяется для изучения самых разнообразных систем — от традиционных экологических и механических системам до хаоса и бифуркации в динамических системах (эти понятия рассмотрены в заключительном разделе). Раздел 6.5 представляет элементарное введение в такие современные темы, как удвоение периода в биологических и механических системах, диаграмма удвоения цикла и странный аттрактор Лоренца (все это иллюстрируется яркой компьютерной графикой).
- Методы преобразования Лапласа (изображения по Лапласу) (глава 7) и методы степенных рядов (глава 8) следуют за материалом по линейным и нелинейным системам, но могут быть рассмотрены сразу после главы 3 по желанию преподавателя.
- Главы 9 и 10 посвящены приложениям рядов Фурье, разделению переменных и приложениям теории Штурма–Лиувилля к дифференциальным уравнениям в частных производных и задачам, в которых заданы граничные (краевые) значения. После введения ряда Фурье в последних трех разделах главы 9 обсуждаются три классических уравнения — волновое, теплопроводности и уравнение Лапласа. В главе 10 методы Штурма–Лиувилля изучаются настолько подробно, что студенты могут применить их в некоторых довольно важных и вполне реальных приложениях.

Эта книга содержит материал различных по длительности курсов — от одной четверти до двух семестров. Более краткая версия, *Дифференциальные уравнения: вычислительные аспекты и моделирование*, заканчивается главой 7, посвященной методам преобразования Лапласа (изображения по Лапласу). (Таким образом, в этом кратком варианте курса придется опустить материал по методам степенных рядов, рядам Фурье, разделению переменных и дифференциальным уравнениям в частных производных.)

Задачи, приложения и руководства по решению

Почти 20% текста и более чем 1900 задач в тексте были составлены заново для этого издания или совсем недавно заменены с целью добавления графиков или качественной теории. Соответственно раздел ответов теперь включает почти 300 новых машинно-генерируемых рисунков, иллюстрирующих то, что, как ожидается, создадут студенты.

Раздел ответов для этого пересмотренного издания был значительно расширен, чтобы увеличить его значение в качестве помощи при изучении. Теперь он включает ответы на большинство задач с нечетными номерами, плюс очень много ответов на задачи с четными номерами. Руководство для преподавателя *Instructor's Solutions Manual* (0–13–047578–5) (Справочник по решениям для преподавателя), содержащее 625 страниц, содержит решения большей части задач из данной книги, а руководство для студента *Student Solutions Manual* (0–13–047579–3) (Студенческий справочник по решениям), насчитывающее 375 страниц, содержит решения большей части задач с нечетными номерами.

Приблизительно 45 прикладных модулей в тексте содержат дополнительный прикладной материал и проекты, предназначенные в значительной степени для привлечения студентов к исследованию и приложению вычислительных технологий. Эти исследования значительно расширены в 325-страничном справочнике по приложениям *Applications Manual* (0–13–047577–7), который содержит новые исследовательские задачи. Каждый раздел в этом справочнике имеет параллельные подразделы "Using *Maple*" (Использование *Maple*), "Using *Mathematica*" (Использование *Mathematica*) и "Using MATLAB" (Использование MATLAB), которые детализируют применяемые методы для каждой системы и предоставят студентам-пользователям возможность сравнить достоинства и стили различных вычислительных систем.

Справочники по технологии и сайт

Авторами написаны решения и справочники по приложениям, описанные ранее. Кроме того, имеются следующие дополнительные справочники[1] по технологии. Их можно заказать с учебником, указав их номера ISBN.

- Учебник вместе с книгой *Student Solutions Manual* (0–13–114492–8) (Студенческий справочник по решениям)
- Учебник с книгой *Applications Manual* (0–13–114491–X) (Справочник по приложениям)
- Учебник с книгой *Mathematica for Differential Equations: Projects, Insights, Syntax, and Animations* (0–13–114489–8) (Дэвид Калвис, *Mathematica* для решения дифференциальных уравнений: проекты, практика, синтаксис и мультипликации)
- Учебник с книгой Selwyn Hollis, *A Mathematica Companion for Differential Equations* (0–13–178327–0) (Применение системы *Mathematica* для решения дифференциальных уравнений)
- Учебник с книгой Robert Gilbert & George Hsiao, *Maple Projects for Differential Equations* (0–13–178326–2) (Роберт Джилберт и Джордж Хсаяо, Проекты для *Maple* по решению дифференциальных уравнений)
- Учебник с книгой John Polking & David Arnold, *Ordinary Differential Equations Using* MATLAB, 2nd edition (0–13–075668–7) (Джон Полкинг и Дэвид Арнольд, Решение обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью MATLAB, 2-е издание)

Тетради и рабочие листы, поддерживающие эти справочники, а также дополнительное программное обеспечение, включая пакет рабочих листов для *Maple*, содержащий ответы к этому учебнику, составлены Джоном Малоней (John Maloney); их можно загрузить

[1] На английском языке, разумеется. — *Примеч. ред.*

с сайта `www.prenhall.com/edwards`. Многие рисунки, помещенные в этом учебнике, были сгенерированы компьютером с использованием программ `dfield` и `pplane`, написанных на входном языке системы MATLAB Джоном Полкингом (John Polking), причем на сайте имеются ссылки на эти программы. Есть еще один пакет по решению ОДУ на основе MATLAB с весьма внушительными графическими способностями. Это пакет `Iode` (см. `www.math.uiuc.edu/iode`). Он также упоминается в данном учебнике.

Благодарности

В подготовке этого пересмотренного издания мы получали огромную помощь и советы следующих очень проницательных рецензентов.

Дэвид Калвис из Колледжа Болдуина-Уоллиса (David Calvis, *Baldwin-Wallace College*)
Мила Сенкл из Северо-Восточного Университета (Mila Cenkl, *Northeastern University*)
Кристофер Френч из Университета штата Иллинойс в Урбана-Шампейн (Christopher French, *University of Illinois at Urbana-Champaign*)
Моисей Гласнер из Пеннского государственного университета (Moses Glasner, *Penn State University*)
Ричард Лоджезен из Университета штата Иллинойс в Урбана-Шампейн (Richard Laugesen, *University of Illinois at Urbana-Champaign*)
Хуан Лопес из Аризонского государственного университета (Juan Lopez, *Arizona State University*)
Джеймс Мозелей из Университета штата Западная Вирджиния в США (James Moseley, *West Virginia University*)
Питер Мача из Технологического института Джорджии (Peter Mucha, *Georgia Institute of Technology*)
Артур Уоссерман из Мичиганского университета (Arthur Wasserman, *University of Michigan*)

Мы благодарим Баяни ДеЛеона (Bayani DeLeon) за его всегда эффективное руководство процессом книжного производства. Мы особенно благодарны нашему редактору, Джорджу Лобеллу (George Lobell) за его обнадеживающую поддержку и советы, которые в значительной степени повлияли на многие аспекты этой книги при ее последовательных переизданиях. И это действительно настоящее удовольствие поблагодарить Денниса Клетзинга (Dennis Kletzing) за его экстраординарное использование системы верстки TEX для придания привлекательного представления тексту и рисункам в этой книге.

C. H. E.
`hedwards@math.uga.edu`
Athens, Georgia, U.S.A.
(г. Атенс, штат Джорджия, США)

D. E. P.
`dpenney@math.uga.edu`
Athens, Georgia, U.S.A.
(г. Атенс, штат Джорджия, США)

Предисловие к русскому изданию

После того как Ньютон решил задачу Кеплера, теория обыкновенных дифференциальных уравнений стала одним из основных инструментов математического естествознания. Поэтому математическое образование специалиста любой естественнонаучной специальности не обойдется без курса дифференциальных уравнений. Для многих же естественнонаучных специальностей теория обыкновенных дифференциальных уравнений — вообще центральная в математической составляющей образования. По этой причине существуют многочисленные курсы дифференциальных уравнений, ориентированные на самые разные аудитории — от школьников до аспирантов.

Каким же должен быть первый нормативный курс дифференциальных уравнений? Каждая эпоха давала свой и даже несколько ответов на этот вопрос. Конечно, в XX столетии был создан ряд очень хороших курсов, заслуженно ставших классическими. Тем не менее, ни один из этих курсов (и даже их теоретико-множественное объединение!) не могло удовлетворить запросы будущих специалистов самых разных профилей. Курсы, созданные в начале прошлого века, отражали методы решения дифференциальных уравнений, которые были разработанные математиками в основном для решения физических задач. Для этого были выделены классы (типы) уравнений, решаемые в квадратурах. Однако уже к началу XX столетия была осознана важность уравнений, не решаемых в квадратурах, и возникли вопросы (устойчивость, асимптотическая устойчивость и др.), ответить на которые нужно было независимо от существования решения в квадратурах или специальных функциях. Возникла даже новая ветвь — качественная теория дифференциальных уравнений. А в 1930-х годах стало абсолютно понятно, что дифференциальные уравнения играют важную роль и в автоматике. Притом эта роль оказалась настолько важной, что ее пришлось отразить уже во вводном (первом) курсе дифференциальных уравнений. В 40–50-х годах приходилось решать такое разнообразное множество дифференциальных уравнений, что уже нельзя было полагаться на заранее заготовленные аналитические методы решения дифференциальных уравнений хорошо изученных типов и на ручное применение немногочисленных разработанных к тому времени численных методов. Численное решение дифференциальных уравнений — пожалуй, одна из самых важных (если не самая важная) задач, ради которых и было начато создание первых автоматических цифровых вычислительных машин. И поэтому естественно, что в лучших курсах дифференциальных уравнений 1940–50-х годов численные методы нашли более полное отражение, чем в предыдущие десятилетия. В 60–70-е годы дифференциальные уравнения становятся важным инструментом не только в теории автоматического регулирования, но и в исследовании динамических систем и хаотических явлений. И в эти же годы выявляются недостатки численных методов, подчас приводящие к техногенным катастрофам. Выясняется, что роль аналитических методов была незаслуженно преуменьшена. В 1980-е годы дифференциальные уравнения активно используются для построения самых разных моделей — физических, экономических, биологических, географических, экологических, геологических и многих других.

К концу второго тысячелетия стало понятно, что вводный курс дифференциальных уравнений нельзя построить, механически опустив одну из упомянутых выше тем. Но как вместить их все в ограниченный по объему (одно- или двухсеместровый, только 100 академических часов) первый вводный курс дифференциальных уравнений?

Предлагаемая вашему вниманию книга как раз и есть ответ на этот вопрос, притом, по нашему мнению, один из лучших. Вкратце отметим те особенности книги, благодаря которым авторам как раз и удалось вместить весьма обширный материал в первом вводном годовом (или даже семестровом) курсе дифференциальных уравнений.

Во-первых, авторы книги не ставят задачу перечислить (фактически неисчислимое) множество моделей. Вместо этого они учат студентов строить такие модели самостоятельно, притом в самых разных областях знания — как естественнонаучных (механика, физика, химия, биология), так и гуманитарных (социология, статистика).

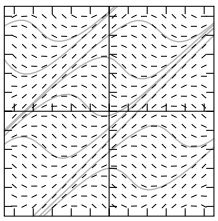
Во-вторых, авторы не занимаются (бесполезным) натаскиванием в решении многочисленных типов дифференциальных уравнений, а учат студентов использовать математические пакеты (в первую очередь это *Mathematica*), в которых интегрированы многочисленные методы (численные и аналитические) решения дифференциальных уравнений. Именно благодаря этому авторам удалось вместить в этот курс все то, что должны узнать инженеры из вводного курса дифференциальных уравнений, а не сконцентрироваться на одной (хотя бы и весьма важной!) теме курса дифференциальных уравнений. По этой же причине данный курс будет интересен и студентам математических факультетов университетов: благодаря такому курсу первое знакомство с естественнонаучными приложениями дифференциальных уравнений (да и самими численными методами) не будет омрачено трудоемкими расчетами по численным методам. И именно благодаря такому курсу студенты-математики могут познакомиться со всем разнообразием дифференциальных уравнений, а не ограничиться несколькими (хотя и весьма современными) темами из курса дифференциальных уравнений.

Вероятно, на использовании математических пакетов в первом вводном курсе дифференциальных уравнений стоит остановиться подробнее, потому что это — неотъемлемая часть данного курса. Использование этих пакетов нельзя отложить “на потом” или вынести в отдельный практикум точно так же, как нельзя требовать, чтобы студенты решали дифференциальные уравнения в уме, а уж потом переходили к применению “чернил и бумаги”. Нет, при изучении данного курса дифференциальных уравнений студенты постоянно должны пользоваться математическими пакетами — это так же естественно в начале третьего тысячелетия, как и использование “чернил и бумаги” в начале XX века. Дело в том, что такие системы компьютерной алгебры, как *Mathematica* и *Maple*, — это не просто некие вспомогательные средства, нечто вроде универсальных языков программирования. Каждый такой пакет представляет собой не просто язык программирования, а еще и справочную систему, настоящую (как правило, весьма полную) энциклопедию по дифференциальным уравнениям. В этих пакетах содержатся сведения и методы, которые по необходимости из-за ограниченного объема первого курса дифференциальных уравнений опускаются в учебнике (и на лекциях), но которые совершенно необходимы для изучения моделей — как рассматриваемых в учебнике и на лекциях, так и построенных студентами самостоятельно. Поэтому на лекциях студенты не должны отвлекаться на написание конспектов (выдать их в начале семестра — это обязанность лектора, точнее факультета), а с помощью своих ноутбуков активно изучать модели, предлагаемые лектором. Именно активное использование таких систем компьютерной алгебры, как *Mathematica* и *Maple*, позволяет тренировать студентов не столько в умении производить нудные вычисления, сколько в умении изучать реальные математические модели и сосредоточиться на изучении существенных (с точки зрения современной теории дифференциальных уравнений) особенностей построенных студентами моделей. Даже если лектор из-за ограниченности объема курса и пропустит какой-нибудь метод, нужный для изучения конкретной моде-

ли, система компьютерной алгебры *Mathematica* (или *Maple*) о нем (как правило) знает и поможет студенту воспользоваться таким методом. Зато лектор может поставить перед студентом действительно важный вопрос о качественном поведении изучаемой системы. Более того, преподаватель (при наличии времени, например, в годовом курсе) может привлекать студентов к разработке не только индивидуальных проектов, но и групповых. В них он сможет ставить задачу изучения системы с разных точек зрения, иногда такие задания полезно давать так, чтобы они упредили изучение теории, излагаемой в лекционном курсе. Тогда студенты будут лучше подготовлены к изучению самых современных разделов теории дифференциальных уравнений, таких как, например, хаос в динамических системах. Более того, при таком подходе студенты будут готовы к самостоятельному дальнейшему применению математических моделей. И позвольте нам выразить надежду, что тем самым они будут готовы попытаться объять необъятное! И именно на этой ноте мы желаем вам интересного, активного и несомненно увлекательного чтения.

В. Штонда,
viktor@shtonda.com

Я. Шмидский,
smith@dialektika.com



ГЛАВА 1

Дифференциальные уравнения первого порядка

1.1. Дифференциальные уравнения и математические модели

Законы Вселенной написаны на языке математики. Алгебра решает много задач с постоянными величинами, но самые интересные природные явления включают изменение и описываются уравнениями, которые связывают изменяющиеся величины.

Поскольку производная $dx/dt = f'(t)$ функции f является скоростью изменения величины $x = f(t)$, которая зависит от независимой переменной t, естественно, что уравнения, содержащие производные, часто используются для описания изменений, происходящих во Вселенной. Уравнение, связывающее неизвестную функцию и одну или несколько ее производных, называют **дифференциальным уравнением**.

Пример 1 Дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + t^2$$

содержит и неизвестную функцию $x(t)$, и ее первую производную $x'(t) = dx/dt$. Дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 7y = 0$$

содержит неизвестную функцию y независимой переменной x и первые две производные y' и y'' функции y. ■

Изучение дифференциальных уравнений имеет три основных цели.

1. Научиться составлять дифференциальное уравнение, которое описывает изучаемое физическое явление.
2. Найти — точно или приблизительно — соответствующее решение полученного уравнения.
3. Интерпретировать найденное решение.

В алгебре мы обычно ищем неизвестные числа, которые удовлетворяют какому-нибудь уравнению, например $x^3 + 7x^2 - 11x + 41 = 0$. Однако при решении дифференциального уравнения нам необходимо найти неизвестные *функции* $y = y(x)$, для которых выполняется тождество типа $y'(x) = 2xy(x)$ на некотором интервале вещественных чисел. Обычно нужно найти все решения дифференциального уравнения, если это возможно.

Пример 2 Если C — константа и

$$y(x) = Ce^{x^2}, \tag{1}$$

то

$$\frac{dy}{dx} = C\left(2xe^{x^2}\right) = (2x)\left(Ce^{x^2}\right) = 2xy.$$

Таким образом, каждая функция $y(x)$ вида (1) *удовлетворяет* дифференциальному уравнению

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \tag{2}$$

для всех x. В частности, равенство (1) определяет *бесконечное* семейство различных решений этого дифференциального уравнения, — по одному решению для каждого значения произвольной постоянной C. Методом разделения переменных (подробности в разделе 1.4) можно показать, что каждое решение дифференциального уравнения (2) имеет форму, указанную в равенстве (1). ■

Дифференциальные уравнения и математические модели

Следующие три примера иллюстрируют процесс перевода научных законов и принципов на язык дифференциальных уравнений. В каждом из этих примеров независимой переменной является время t, но мы увидим многочисленные примеры, в которых другая величина, а не время, служит независимой переменной.

Пример 3 Закон охлаждения, установленный Ньютоном, может быть сформулирован так: *скорость изменения* (в данном случае, конечно, имеется в виду скорость изменения относительно времени t) температуры $T(t)$ тела пропорциональна разности между T и температурой окружающей среды A (рис. 1.1.1). Иными словами,

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - A), \tag{3}$$

где k — положительная константа. Заметьте, что если $T > A$, то $dT/dt < 0$, так как температура — убывающая функция времени t, и тело охлаждается. Но если $T < A$, то $dT/dt > 0$, так что T увеличивается.

Таким образом, физический закон представлен в виде дифференциального уравнения. Если нам известны значения k и A, мы должны найти явную формулу для $T(t)$, а затем с помощью этой формулы мы сможем предсказать температуру тела в будущем. ■

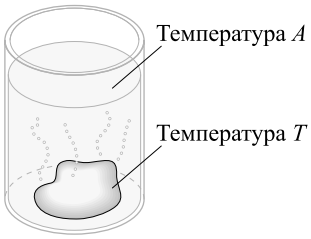


Рис. 1.1.1. Закон охлаждения, установленный Ньютоном, т. е. равенство (3), описывает охлаждение горячего камня в воде



Рис. 1.1.2. Закон вытекания Торричелли, т. е. уравнение (4), описывает вытекание воды из резервуара

Пример 4 Закон Торричелли подразумевает, что *скорость изменения* объема V воды в резервуаре, из которого вытекает вода (рис. 1.1.2), пропорциональна квадратному корню из глубины y воды в резервуаре:

$$\frac{dV}{dt} = -k\sqrt{y}, \tag{4}$$

где k — константа. Если резервуар — вертикальный цилиндр с площадью поперечного сечения A, то $V = Ay$, так что $dV/dt = A \cdot (dy/dt)$. В этом случае уравнение (4) имеет вид

$$\frac{dy}{dt} = -h\sqrt{y}, \tag{5}$$

где $h = k/A$ — константа. ■

Пример 5 *Скорость изменения* численности населения $P(t)$ с постоянными показателями рождения и смертности во многих простых случаях пропорциональна к численности населения. Иными словами,

$$\frac{dP}{dt} = kP, \tag{6}$$

где k — коэффициент пропорциональности. ■

Давайте обсудим пример 5 далее. Сначала обратите внимание, что каждая функция вида

$$P(t) = Ce^{kt} \tag{7}$$

является решением дифференциального уравнения (6)

$$\frac{dP}{dt} = kP.$$

Мы проверяем это утверждение следующим образом:

$$P'(t) = Cke^{kt} = k\left(Ce^{kt}\right) = kP(t)$$

для всех вещественных чисел t. Поскольку подстановка каждой функции вида (7) в уравнение (6) порождает тождество, все такие функции — решения уравнения (6).

Таким образом, даже если значение константы k известно, дифференциальное уравнение $dP/dt = kP$ имеет *бесконечно много* различных решений вида $P(t) = Ce^{kt}$ — по одному для каждого значения "произвольной" константы C. Это типично для дифференциальных уравнений. Это также полезно, потому что благодаря этому можно использовать дополнительную информацию для выбора из множества всех этих решений того частного решения, которое удовлетворяет условиям изучаемой задачи.

Пример 6 Предположим, что $P(t) = Ce^{kt}$ — численность колонии бактерий в момент времени t, что численность колонии в момент времени $t = 0$ (часы) была равна 1000 и что количество бактерий удваивается через каждый час. Эта дополнительная информация о $P(t)$ приводит к следующим уравнениям:

$$1000 = P(0) = Ce^0 = C,$$
$$2000 = P(1) = Ce^k.$$

Из этого следует, что $C = 1000$ и что $e^k = 2$, так что $k = \ln 2 \approx 0{,}693147$. При этом значении k дифференциальное уравнение (6) принимает вид

$$\frac{dP}{dt} = (\ln 2)P \approx (0{,}693147)P.$$

Замена $k = \ln 2$ и $C = 1000$ в уравнении (7) дает частное решение

$$P(t) = 1000e^{(\ln 2)t} = 1000(e^{\ln 2})^t = 1000 \cdot 2^t \quad \text{(потому что } e^{\ln 2} = 2\text{)},$$

которое удовлетворяет указанным условиям. Мы можем использовать это частное решение, чтобы предсказать численность колонии бактерий в будущем. Например, предсказанная численность бактерий после полутора часов (когда $t = 1{,}5$) равна

$$P(1{,}5) = 1000 \cdot 2^{3/2} \approx 2828. \quad \blacksquare$$

Условие $P(0) = 1000$ в примере 6 называют **начальным условием**, потому что мы часто пишем дифференциальные уравнения, для которых $t = 0$ является "временем пуска". На рис. 1.1.3 показано несколько различных графиков функции вида $P(t) = Ce^{kt}$ при $k = \ln 2$. Графики всего бесконечного множества решений $dP/dt = kP$ фактически заполняют всю двумерную плоскость, и никакие два из них не пересекаются. Кроме того, выбор любой точки P_0 на оси P определяет $P(0)$. Поскольку через каждую такую точку проходит точно одно решение, в этом случае мы видим, что начальное условие $P(0) = P_0$ определяет единственное решение, согласующееся с имеющимися данными.

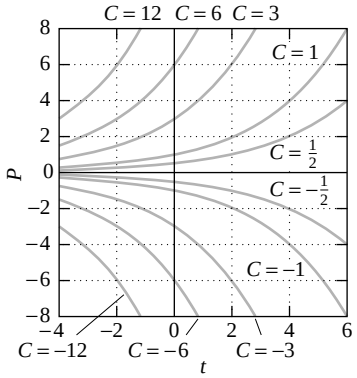


Рис. 1.1.3. Графики $P(t) = Ce^{kt}$ при $k = \ln 2$

Математические модели

Наше краткое обсуждение прироста населения в примерах 5 и 6 иллюстрирует критический процесс *математического моделирования* (рис. 1.1.4), который включает следующие этапы.

1. Формулировка задачи реального мира в математических терминах; это и есть построение математической модели.
2. Анализ или решение полученной математической задачи.
3. Интерпретация математических результатов в контексте первоначальной задачи реального мира; например, получение ответа на ранее поставленный вопрос.

В примере с населением задача, возникающая в реальном мире, — это определение численности населения в некоторый будущий момент времени. **Математическая модель** состоит из списка переменных (P и t), которые описывают данную ситуацию, а также одного или нескольких уравнений, связывающих эти переменные ($dP/dt = kP$, $P(0) = P_0$), причем эти уравнения должны быть известны или принимаются как выполняющиеся в рамках данной модели. Математический анализ состоит из решения этих уравнений (в данном случае определяется P как функция t). Наконец, мы применяем полученные ма-

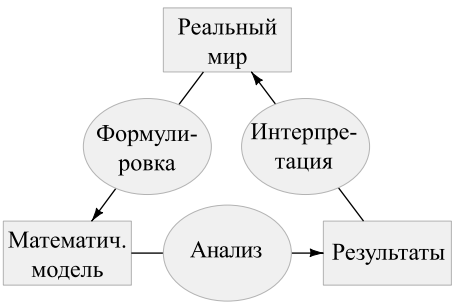


Рис. 1.1.4. Процесс математического моделирования

тематические результаты, чтобы попытаться ответить на первоначально заданный вопрос о реальном мире.

Однако весьма возможно, что ни одно решение дифференциального уравнения не соответствует *всей* известной информации. В таком случае мы должны заподозрить, что дифференциальное уравнение неточно описывает реальный мир. Например, решения уравнения (6) имеют вид $P(t) = Ce^{kt}$, где C — положительная константа, но *ни* для какого значения констант k и C функция $P(t)$ не описывает точно фактический рост населения во всем мире в течение нескольких прошлых столетий. Возможно, мы должны поэтому написать более сложное дифференциальное уравнение, в котором принимается во внимание влияние перенаселения на коэффициент рождаемости, нехватка продовольствия и другие факторы. Это должно быть расценено не как отказ от модели, разобранной в примере 5, а как понимание того, что нужно учесть влияние дополнительных факторов при изучении роста численности населения. Действительно, уравнение (6) является весьма точным при некоторых обстоятельствах. Например, оно выполняется для роста численности колонии бактерий при условиях неограниченного продовольствия и пространства.

Но в нашем примере населения мы игнорировали эффекты таких факторов, как изменение показателей рождения и смертности. Это сделало математический анализ весьма простым, возможно, даже нереалистичным. Хорошая математическая модель удовлетворяет двум противоречащим требованиям: она должна в достаточной степени учитывать все существенные детали, чтобы представить ситуацию в реальном мире с относительно небольшой погрешностью, и в то же время должна быть достаточно простой, чтобы можно было осуществить математический анализ на практике. Если модель столь детализирована, что она полностью представляет физическую ситуацию, то выполнить математический анализ может быть слишком трудно. Если модель слишком проста, результаты могут быть столь неточными, что будут бесполезны. Таким образом, есть неизбежный компромисс между тем, что наблюдается в физической реальности и что является математически возможным. Поэтому построение модели, которая правильно преодолевает этот разрыв между реальностью и выполнимостью анализа — самый критический и тонкий шаг в процессе построения модели. Необходимо найти способы упрощения математической модели, которые позволят не жертвовать основными особенностями процесса, происходящего в реальном мире. Математические модели рассматриваются в этой книге повсюду. Остальная часть этого вводного раздела посвящена простым примерам и стандартной терминологии, используемой при обсуждении дифференциальных уравнений и их решений.

Примеры и терминология

Пример 7 Если C — константа и $y(x) = 1/(C - x)$, то

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(C-x)^2} = y^2,$$

если $x \neq C$. Таким образом, функция

$$y(x) = \frac{1}{C - x} \tag{8}$$

является решением дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \tag{9}$$

на любом интервале вещественных чисел, не содержащем точку $x = C$. Фактически, равенство (8) определяет *однопараметрическое семейство* решений $dy/dx = y^2$, — по одному решению для каждого значения произвольной постоянной или "параметра" C. При $C = 1$ мы получаем частное решение

$$y(x) = \frac{1}{1-x},$$

которое удовлетворяет начальному условию $y(0) = 1$. Как видно из рис. 1.1.5, это решение непрерывно на интервале $(-\infty, 1)$, но имеет вертикальную асимптоту при $x = 1$. ■

Пример 8 Проверим, что функция $y(x) = 2x^{1/2} - x^{1/2}\ln x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$4x^2y'' + y = 0 \tag{10}$$

для всех $x > 0$.

Решение Сначала мы вычисляем производные

$$y'(x) = -\tfrac{1}{2}x^{-1/2}\ln x \quad \text{и} \quad y''(x) = \tfrac{1}{4}x^{-3/2}\ln x - \tfrac{1}{2}x^{-3/2}.$$

Затем подстановка вычисленных производных в уравнение (10) дает

$$4x^2y'' + y = 4x^2\left(\tfrac{1}{4}x^{-3/2}\ln x - \tfrac{1}{2}x^{-3/2}\right) + 2x^{1/2} - x^{1/2}\ln x = 0$$

при условии, что x положительно, так что дифференциальное уравнение удовлетворяется для всех $x > 0$. ■

То, что мы можем написать дифференциальное уравнение, еще не означает, что оно имеет решение. Например, ясно, что дифференциальное уравнение

$$(y')^2 + y^2 = -1 \tag{11}$$

не имеет ни одного (действительного) решения, потому что сумма неотрицательных чисел не может быть отрицательна. Точно так же очевидно, что уравнение

$$(y')^2 + y^2 = 0 \tag{12}$$

имеет только одно (действительное) решение $y(x) \equiv 0$. В наших же предыдущих примерах любое дифференциальное уравнение, имевшее по крайней мере одно решение, в действительности имело бесконечно много решений.

Порядок дифференциального уравнения — это порядок самой старшей производной, которая входит в это уравнение. Дифференциальное уравнение примера 8 имеет второй порядок, а уравнения в примерах 2–7 являются уравнениями первого порядка, ну а

$$y^{(4)} + x^2 y^{(3)} + x^5 y = \sin x$$

— уравнение четвертого порядка. Самое общее дифференциальное уравнение порядка ***n*** с независимой переменной x и неизвестной функцией или зависимой переменной $y = y(x)$ имеет вид

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{13}$$

где F — известная вещественная функция от $n + 2$ переменных.

До сих пор мы использовали слово *решение* несколько неофициально. Чтобы быть точным, мы скажем, что непрерывная функция $u = u(x)$ является **решением** дифференциального уравнения (13) **на интервале** I, если производные u', u'', $\ldots$, $u^{(n)}$ существуют на I и

$$F\left(x, u, u', u'', \ldots, u^{(n)}\right) = 0$$

для всех x из I. Ради краткости, мы будем говорить, что $u = u(x)$ **удовлетворяет** дифференциальному уравнению (13) на I.

Замечание. Из элементарного курса анализа известно, что дифференцируемая на открытом интервале функция обязательно непрерывна на нем. Именно поэтому только непрерывная функция может рассматриваться как (дифференцируемое) решение дифференциального уравнения на интервале. ■

Пример 7

Продолжение

На рис. 1.1.5 показаны две "связанные" ветви графика $y = 1/(1 - x)$. Левая ветвь — график (непрерывного) решения дифференциального уравнения $y' = y^2$, которое определено на интервале $(-\infty, 1)$. Правая ветвь — график *другого* решения дифференциального уравнения, которое определено (и непрерывно) на другом интервале $(1, \infty)$. Таким образом, в данном случае одна и та же формула $y(x) = 1/(1-x)$

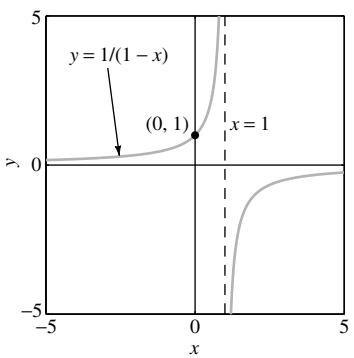


Рис. 1.1.5. Решением уравнения $y' = y^2$ является функция $y(x) = 1/(1 - x)$

фактически определяет два различных решения (с различными областями определения) одного и того же дифференциального уравнения $y' = y^2$. ■

Пример 9 Если A и B — константы и

$$y(x) = A\cos 3x + B\sin 3x, \tag{14}$$

то два последовательных дифференцирования приводят к равенствам

$$y'(x) = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x,$$
$$y''(x) = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x = -9y(x),$$

справедливым для всех x. Следовательно, равенство (14) определяет то, что естественно назвать *двупараметрическим (т. е. с двумя параметрами) семейством* решений дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' + 9y = 0 \tag{15}$$

на всей оси вещественных чисел. На рис. 1.1.6 показаны графики нескольких таких решений. ■

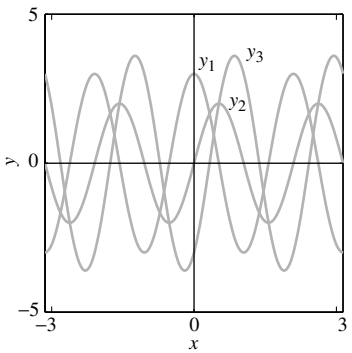


Рис. 1.1.6. Это три решения $y_1(x) = 3\cos 3x$, $y_2(x) = 2\sin 3x$ и $y_3(x) = -3\cos 3x + 2\sin 3x$ дифференциального уравнения $y'' + 9y = 0$

Хотя дифференциальные уравнения (11) и (12) — исключения из общего правила, мы увидим, что дифференциальное уравнение n-го порядка обычно имеет n-параметрическое семейство решений, т. е. решение, которое содержит n различных произвольных постоянных, или параметров.

В обоих уравнениях (11) и (12) y' определяется как неявно определенная функция, что причиняет некоторые осложнения. По этой причине обычно мы будем предполагать, что любое изучаемое дифференциальное уравнение может быть разрешено явно относительно самой старшей входящей в него производной; это означает, что уравнение может быть написано в так называемой *нормальной форме*

$$y^{(n)} = G\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right), \tag{16}$$

где G — действительная функция от $n+1$ переменной. Кроме того, мы всегда будем искать только действительные решения, если не оговорено иное.

Все рассмотренные выше дифференциальные уравнения являются **обыкновенными** дифференциальными уравнениями, т. е. уравнениями, в которых неизвестная функция (зависимая переменная) зависит только от *одной* независимой переменной. Если зависимая переменная будет функцией двух или большего числа независимых переменных, то, вероятно, в уравнение будут входить и частные производные; если они входят, уравнение называют дифференциальным уравнением в **частных** производных. Например, температура $u = u(x,t)$ длинного тонкого однородного стержня в точке x в момент времени t удовлетворяет (при соответствующих упрощающих предположениях) дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где k — константа (называемая *коэффициентом теплопроводности* стержня). В главах 1–8 мы будем изучать только *обыкновенные* дифференциальные уравнения и будем называть их просто дифференциальными уравнениями.

В этой главе мы сконцентрируемся на дифференциальных уравнениях *первого* порядка вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y). \tag{17}$$

Мы также приведем обширный набор приложений таких уравнений. Типичная прикладная математическая модель будет **задачей Коши (задачей с начальными условиями)**, она будет состоять из дифференциального уравнения (17) вместе с **начальным условием** $y(x_0) = y_0$. Обратите внимание, что мы называем $y(x_0) = y_0$ начальным условием, независимо от того, действительно ли $x_0 = 0$. **Решить** задачу Коши (задачу с начальными условиями)

➤
$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{18}$$

значит найти дифференцируемую функцию $y = y(x)$, которая удовлетворяет обоим условиям (18) на некотором интервале, содержащем x_0.

Пример 10 Зная решение $y(x) = 1/(C-x)$ дифференциального уравнения $dy/dx = y^2$, рассмотренного в примере 7, решим задачу Коши (задачу с начальными условиями)

$$\frac{dy}{dx} = y^2, \quad y(1) = 2.$$

Решение Мы должны только найти значение C такое, чтобы решение $y(x) = 1/(C-x)$ удовлетворяло начальному условию $y(1) = 2$. Подстановка значений $x = 1$ и $y = 2$ в данное решение влечет

$$2 = y(1) = \frac{1}{C-1},$$

так что $2C - 2 = 1$ и, следовательно, $C = \frac{3}{2}$. При этом значении C мы получаем искомое решение

$$y(x) = \frac{1}{\frac{3}{2} - x} = \frac{2}{3 - 2x}.$$

На рис. 1.1.7 показаны две ветви графика $y = 2/(3-2x)$. Левая ветвь — график решения данной задачи Коши (задачи с начальными условиями) $y' = y^2$, $y(1) = 2$ на $(-\infty, \frac{3}{2})$. Правая ветвь проходит через точку $(2, -2)$ и поэтому является графиком решения другой задачи Коши (задачи с начальными условиями) $y' = y^2$, $y(2) = -2$ на $(\frac{3}{2}, \infty)$. ■

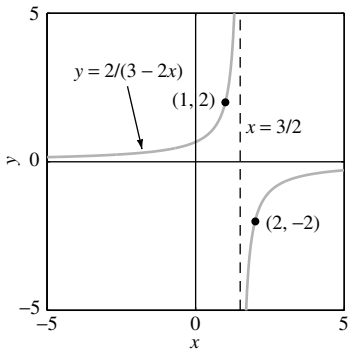


Рис. 1.1.7. Решения уравнения $y' = y^2$, определяемые формулой $y(x) = 2/(3 - 2x)$

Главный вопрос, который интересует нас сейчас, следующий: если дано дифференциальное уравнение, которое имеет решение, удовлетворяющее данному начальному условию, то как мы фактически можем *найти* или *вычислить* это решение? И, найдя его, что мы можем сделать с ним? Мы увидим, что относительно небольшого количества простых методов, таких как разделение переменных (раздел 1.4), методы решения линейных уравнений (раздел 1.5) и элементарные замены переменных (раздел 1.6), вполне достаточно для нахождения решений разнообразных уравнений первого порядка, имеющих весьма важные приложения.

1.1. Задачи

В задачах 1–12 с помощью замены проверьте, что каждая данная функция является решением данного дифференциального уравнения. Всюду в этих задачах штрихи обозначают производные по x.

1. $y' = 3x^2$; $y = x^3 + 7$

2. $y' + 2y = 0$; $y = 3e^{-2x}$

3. $y'' + 4y = 0$; $y_1 = \cos 2x$, $y_2 = \sin 2x$

4. $y'' = 9y$; $y_1 = e^{3x}$, $y_2 = e^{-3x}$

5. $y' = y + 2e^{-x}$; $y = e^x - e^{-x}$

6. $y'' + 4y' + 4y = 0$; $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = xe^{-2x}$

7. $y'' - 2y' + 2y = 0$; $y_1 = e^x \cos x$, $y_2 = e^x \sin x$

8. $y'' + y = 3\cos 2x$, $y_1 = \cos x - \cos 2x$, $y_2 = \sin x - \cos 2x$

9. $y' + 2xy^2 = 0$; $y = \dfrac{1}{1+x^2}$

10. $x^2y'' + xy' - y = \ln x$; $y_1 = x - \ln x$, $y_2 = \dfrac{1}{x} - \ln x$

11. $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$; $y_1 = \dfrac{1}{x^2}$, $y_2 = \dfrac{\ln x}{x^2}$

12. $x^2y'' - xy' + 2y = 0$; $y_1 = x\cos(\ln x)$, $y_2 = x\sin(\ln x)$

В задачах 13–16 подставьте $y = e^{rx}$ в данное дифференциальное уравнение, чтобы определить все значения константы r, для которых $y = e^{rx}$ является решением уравнения.

13. $3y' = 2y$

14. $4y'' = y$

15. $y'' + y' - 2y = 0$

16. $3y'' + 3y' - 4y = 0$

В задачах 17–26 сначала проверьте, что $y(x)$ удовлетворяет данному дифференциальному уравнению. Затем определите значение константы C так, чтобы функция $y(x)$ удовлетворяла данному начальному условию. Если хотите, используйте компьютер или графический калькулятор для построения эскизов нескольких типичных решений данного дифференциального уравнения, и выделите то решение, которое удовлетворяет данному начальному условию.

17. $y' + y = 0$; $y(x) = Ce^{-x}$, $y(0) = 2$

18. $y' = 2y$; $y(x) = Ce^{2x}$, $y(0) = 3$

19. $y' = y + 1$; $y(x) = Ce^{x} - 1$, $y(0) = 5$

20. $y' = x - y$; $y(x) = Ce^{-x} + x - 1$, $y(0) = 10$

21. $y' + 3x^2y = 0$; $y(x) = Ce^{-x^3}$, $y(0) = 7$

22. $e^y y' = 1$; $y(x) = \ln(x + C)$, $y(0) = 0$

23. $x\dfrac{dy}{dx} + 3y = 2x^5$; $y(x) = \frac{1}{4}x^5 + Cx^{-3}$, $y(2) = 1$

24. $xy' - 3y = x^3$; $y(x) = x^3(C + \ln x)$, $y(1) = 17$

25. $y' = 3x^2(y^2 + 1)$; $y(x) = \operatorname{tg}(x^3 + C)$, $y(0) = 1$

26. $y' + y\operatorname{tg} x = \cos x$; $y(x) = (x + C)\cos x$, $y(\pi) = 0$

В задачах 27–31 функция $y = g(x)$ описана некоторым геометрическим свойством ее графика. Напишите дифференциальное уравнение в виде $dy/dx = f(x, y)$, имеющее функцию g в качестве своего решения (или одного из своих решений).

27. Наклон графика функции g в точке (x, y) равен сумме x и y.

28. Касательная к графику функции g в точке (x, y) пересекает ось x в точке $(x/2, 0)$.

29. Каждая нормаль к графику функции g проходит через точку $(0, 1)$.

30. График функции g нормален к каждой кривой вида $y = x^2 + k$ (k — константа) в точке пересечения.

31. Касательная к графику функции g в (x, y) проходит через точку $(-y, x)$.

В задачах 32–36 напишите — в манере уравнений (3)–(6) из этого раздела — дифференциальное уравнение, которое является математической моделью описанного процесса.

32. Скорость изменения численности населения P пропорциональна квадратному корню из P.

33. Скорость изменения скорости v моторной лодки пропорциональна квадрату v.

34. Ускорение dv/dt автомобиля пропорционально разности между 250 км/час и скоростью автомобиля.

35. В городе с постоянной численностью населения P жителей скорость изменения числа N тех людей, которые узнали некоторую новость, пропорциональна числу тех, кто еще не узнали эту новость.

36. В городе с постоянной численностью населения P жителей скорость изменения числа N жителей, инфицированных некоторой инфекционной болезнью, пропорциональна произведению количества заболевших на количество тех, кто не заболел.

В задачах 37–42 проверкой найдите по крайней мере одно решение данного дифференциального уравнения. Иными словами, используйте свое знание производных, чтобы угадать по крайней мере одно решение данного дифференциального уравнения. Затем проверьте вашу догадку.

37. $y'' = 0$

38. $y' = y$

39. $xy' + y = 3x^2$

40. $(y')^2 + y^2 = 1$

41. $y' + y = e^x$

42. $y'' + y = 0$

43. **(a)** Пусть k — константа. Показать, что общее решение дифференциального уравнения (с одним параметром)

$$\frac{dx}{dt} = kx^2$$

дает функция $x(t) = 1/(C - kt)$, где C — произвольная постоянная.

(b) Найдите проверкой решение задачи Коши (задачи с начальными условиями) $x' = kx^2$, $x(0) = 0$.

44. **(a)** Продолжение задачи 43. Предположите, что k положительно, а затем постройте графики решений $x' = kx^2$ для нескольких типичных положительных значений $x(0)$.

(b) Чем бы отличались эти решения, если бы константа k была отрицательна?

45. Предположим, что численность популяции грызунов P удовлетворяет дифференциальному уравнению $dP/dt = kP^2$. Первоначально есть $P(0) = 2$ грызуна, и их число увеличивается со скоростью $dP/dt = 1$ грызун в месяц, когда популяция насчитывает $P = 10$ грызунов. Когда численность популяции будет равна ста грызунам? А тысяче? Что происходит в такой популяции?

46. Предположим, что скорость v моторной лодки в воде удовлетворяет дифференциальному уравнению $dv/dt = kv^2$. Начальная скорость моторной лодки $v(0) = 10$ метров в секунду (м/с), v уменьшается со скоростью 1 м/с^2, когда $v = 5$ м/с. Когда скорость лодки уменьшится до 1 м/с? До $\frac{1}{10}$ м/с? Когда лодка остановится?

47. В примере 7 мы видели, что $y(x) = 1/(C - x)$ определяет однопараметрическое семейство решений дифференциального уравнения $dy/dx = y^2$. **(a)** Определите значение C так, чтобы $y(10) = 10$. **(b)** Существует ли значение C такое, что $y(0) = 0$? Но можете ли вы найти (угадать) решение $dy/dx = y^2$, такое что $y(0) = 0$? **(c)** На рис. 1.1.8 показаны типичные графики решений вида $y(x) = 1/(C - x)$. Заполняют ли эти интегральные кривые всю плоскость xy? Можно ли отсюда заключить, что для любой заданной точки (a, b) в плоскости дифференциальное уравнение $dy/dx = y^2$ имеет точно одно решение $y(x)$, удовлетворяющее условию $y(a) = b$?

48. **(a)** Покажите, что формула $y(x) = Cx^4$ определяет однопараметрическое семейство дифференцируемых решений дифференциального уравнения $xy' = 4y$ (рис. 1.1.9). **(b)** Покажите, что формула

$$y(x) = \begin{cases} -x^4, & \text{если } x < 0, \\ x^4, & \text{если } x \geqq 0 \end{cases}$$

определяет дифференцируемое решение уравнения $xy' = 4y$ для всех x, но не имеет вида $y(x) = Cx^4$. **(c)** Выбрав любые два вещественных числа a и b, объясните, почему в отличие от части (c) задачи 47 существует бесконечно много дифференцируемых решений уравнения $xy' = 4y$, причем все они удовлетворяют условию $y(a) = b$.

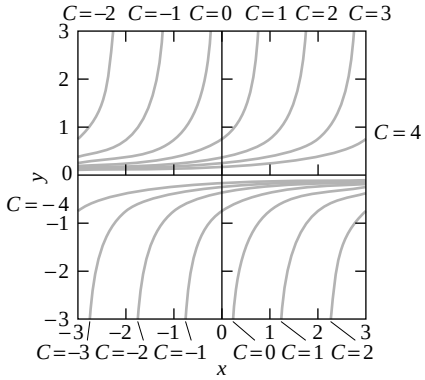


Рис. 1.1.8. Графики решений уравнения $dy/dx = y^2$

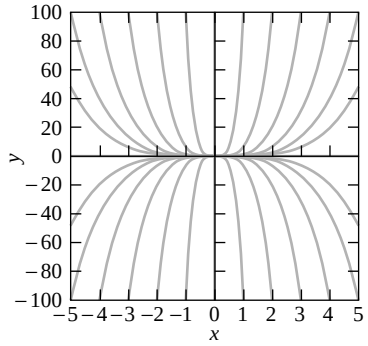


Рис. 1.1.9. Графики $y = Cx^4$ для различных значений C

1.2. Интегралы в качестве общих и частных решений

Уравнение первого порядка $dy/dx = f(x, y)$ принимает особенно простую форму, если функция f не зависит от зависимой переменной y:

➤
$$\frac{dy}{dx} = f(x). \tag{1}$$

В этом частном случае достаточно только проинтегрировать обе части уравнения (1), чтобы получить

➤
$$y(x) = \int f(x)\,dx + C. \tag{2}$$

Это — **общее решение** уравнения (1), что означает, что в него входит произвольная постоянная C и для каждого значения C данная функция является решением дифференциального уравнения (1). Если $G(x)$ действительно является примитивной (первообразной, неопределенным интегралом) функции f, т. е. если $G'(x) \equiv f(x)$, то

$$y(x) = G(x) + C. \tag{3}$$

Графики любых двух таких решений $y_1(x) = G(x) + C_1$ и $y_2(x) = G(x) + C_2$ на том же самом интервале I "параллельны"; суть этого хорошо видна из рис. 1.2.1 и 1.2.2. Там мы видим, что константа C геометрически интерпретируется как расстояние по вертикали между двумя кривыми $y(x) = G(x)$ и $y(x) = G(x) + C$.

Чтобы удовлетворить начальному условию $y(x_0) = y_0$, нужно только подставить $x = x_0$ и $y = y_0$ в уравнение (3), чтобы получить $y_0 = G(x_0) + C$, так что $C = y_0 - G(x_0)$. При этом значении C мы получаем **частное решение** уравнения (1), удовлетворяющее задаче Коши (задаче с начальными условиями)

➤
$$\frac{dy}{dx} = f(x), \quad y(x_0) = y_0.$$

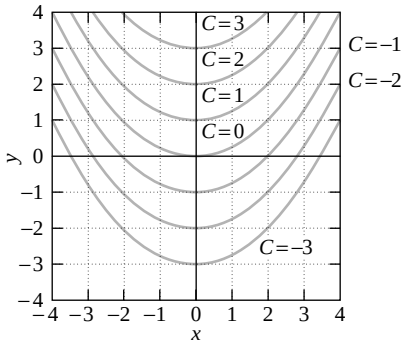


Рис. 1.2.1. Графики $y = \frac{1}{4}x^2 + C$ для различных значений C

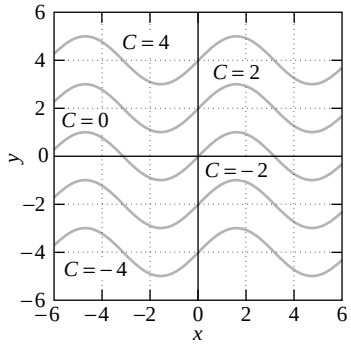


Рис. 1.2.2. Графики $y = \sin x + C$ для различных значений C

Мы увидим, что это — типичный способ решения дифференциальных уравнений первого порядка. Обычно мы сначала находим *общее решение*, содержащее произвольную постоянную C. Затем мы пытаемся соответствующим выбором значения C получить *частное решение*, удовлетворяющее данному начальному условию $y(x_0) = y_0$.

Замечание. В предыдущем абзаце термин *общее решение* дифференциального уравнения первого порядка означает просто однопараметрическое семейство решений. Естественный вопрос: можно ли из данного общего решения получить *каждое* частное решение дифференциального уравнения, выбрав подходящее значение параметра? Когда это действительно так, мы называем его **общим** решением дифференциального уравнения. Например, поскольку любые две примитивные (первоообразные) той же самой функции $f(x)$ могут отличаться только на константу, каждое решение уравнения (1) имеет вид (2). Таким образом, равенство (2) определяет **общее** решение уравнения (1). ■

Пример 1 Решим задачу Коши (задачу с начальными условиями)

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 3, \quad y(1) = 2.$$

Решение Интегрирование обеих частей дифференциального уравнения (2) немедленно дает общее решение

$$y(x) = \int (2x + 3)\,dx = x^2 + 3x + C.$$

На рис. 1.2.3 показаны графики функций $y = x^2 + 3x + C$ для различных значений C. Искомое частное решение изображается кривой, которая проходит через точку $(1, 2)$, потому что оно удовлетворяет начальному условию

$$y(1) = (1)^2 + 3 \cdot (1) + C = 2.$$

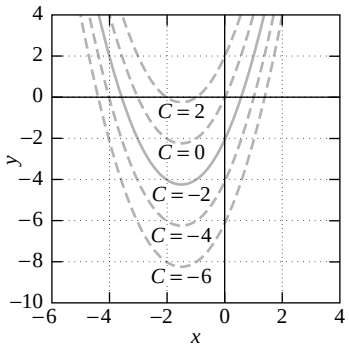


Рис. 1.2.3. Интегральные кривые дифференциального уравнения из примера 1

Из этого следует, что $C = -2$, так что искомое частное решение представляет собой функцию

$$y(x) = x^2 + 3x - 2. \qquad \blacksquare$$

Уравнения второго порядка. Если можно найти примитивную функции f, то легко найти решение уравнения первого порядка вида $dy/dx = f(x)$. Аналогичное утверждение справедливо и для дифференциальных уравнений второго порядка специального вида

$$\frac{d^2y}{dx^2} = g(x), \tag{4}$$

в которых функция g в правой части не содержит ни зависимой переменной y, ни ее производной dy/dx. Мы просто интегрируем один раз, чтобы получить

$$\frac{dy}{dx} = \int y''(x)\,dx = \int g(x)\,dx = G(x) + C_1,$$

где G — примитивная функции g, а C_1 — произвольная постоянная. Затем второе интегрирование дает

$$y(x) = \int y'(x)\,dx = \int \left[G(x) + C_1\right]\,dx = \int G(x)\,dx + C_1x + C_2,$$

где C_2 — вторая произвольная постоянная. Так что дифференциальное уравнение второго порядка (4) можно решить последовательным решением уравнений *первого* порядка

$$\frac{dv}{dx} = g(x) \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dx} = v(x).$$

Скорость и ускорение

С помощью непосредственного интегрирования можно решить множество важных задач о движении частицы (или точки, имеющей определенную массу), если известны силы,

действующие на частицу. Движение частицы по прямой линии (ось x) описывается ее **положением**

$$x = f(t), \tag{5}$$

т. е. функцией, дающей ее координату x в момент времени t. **Скорость** частицы определяется равенством

➤ $$v(t) = f'(t); \quad \text{т. е.} \quad v = \frac{dx}{dt}. \tag{6}$$

Ускорение тела $a(t)$ равно $a(t) = v'(t) = x''(t)$ или, в обозначениях Лейбница,

➤ $$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}. \tag{7}$$

Второй закон Ньютона (закон движения тела под воздействием силы) гласит, что если сила $F(t)$, действующая на частицу, направлена вдоль ее линии движения, то

$$ma(t) = F(t); \quad \text{т. е.} \quad F = ma, \tag{8}$$

где m — масса частицы. Если сила F известна, то уравнение $x''(t) = F(t)/m$ можно проинтегрировать дважды, этим будет найдена функция, дающая положение $x(t)$. Эта функция будет содержать две константы, появляющиеся после интегрирования. Эти две произвольные постоянные часто определяются по **начальному положению** $x_0 = x(0)$ и **начальной скорости** $v_0 = v(0)$ частицы.

Постоянное ускорение. Предположим теперь, что сила F, а потому и ускорение $a = F/m$, являются *постоянными*. Тогда мы начинаем с уравнения

$$\frac{dv}{dt} = a \quad (a - \text{константа}) \tag{9}$$

и интегрируем обе части, чтобы получить

$$v(t) = \int a\,dt = at + C_1.$$

Мы знаем, что $v = v_0$, когда $t = 0$, и подстановка этой информации в предыдущее уравнение дает $C_1 = v_0$. Так что

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = at + v_0. \tag{10}$$

Второе интегрирование дает

$$x(t) = \int v(t)\,dt = \int (at + v_0)\,dt = \tfrac{1}{2}at^2 + v_0t + C_2,$$

и подстановка $t = 0$, $x = x_0$ дают $C_2 = x_0$. Поэтому

$$x(t) = \tfrac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0. \tag{11}$$

Таким образом, используя уравнение (10), мы можем найти скорость, а с помощью уравнения (11) положение частицы в любой момент времени t, если известно ее *постоянное* ускорение a, ее начальная скорость v_0 и ее начальное положение x_0.

Пример 2 Лунный посадочный модуль падает свободно на поверхность Луны со скоростью 450 метров в секунду (м/с). Его тормозные реактивные двигатели обеспечивают постоянное замедление (торможение) 2,5 метров в секунду за секунду (м/с^2) (гравитационное ускорение, обусловленное Луной, учтено в данном замедлении). На какой высоте над поверхностью Луны должны быть включены тормозные реактивные двигатели, чтобы гарантировать "мягкое приземление" ($v = 0$ при посадке)?

Решение Через $x(t)$ мы обозначаем высоту лунного посадочного модуля над поверхностью Луны (см. обозначения на рис. 1.2.4). Пусть тормозные реактивные двигатели должны быть запущены над поверхностью Луны в момент времени $t = 0$. Тогда $v_0 = -450$ (м/с, скорость отрицательна, потому что высота $x(t)$ уменьшается), и $a = +2{,}5$, потому что тяга вверх увеличивает скорость v (хотя она уменьшает *модуль скорости* $|v|$). Тогда уравнения (10) и (11) принимают вид

$$v(t) = 2{,}5t - 450 \tag{12}$$

и

$$x(t) = 1{,}25t^2 - 450t + x_0, \tag{13}$$

где x_0 — высота посадочного модуля над поверхностью Луны в момент времени $t = 0$, когда должны быть включены тормозные реактивные двигатели.

Из уравнения (12) мы видим, что $v = 0$ (мягкое приземление) происходит, когда $t = 450/2{,}5 = 180$ с (т. е. 3 минуты); тогда подстановка $t = 180$, $x = 0$ в уравнение (13) дает

$$x_0 = 0 - (1{,}25)(180)^2 + 450(180) = 40{,}500 \text{ метров},$$

т. е. $x_0 = 40{,}5$ км $\approx 25\frac{1}{6}$ миль. Таким образом, тормозные реактивные двигатели должны быть включены, когда лунный посадочный модуль находится на 40,5 км выше поверхности Луны, в этом случае он приземлится мягко на лунной поверхности после 3 минут замедления спуска. ■

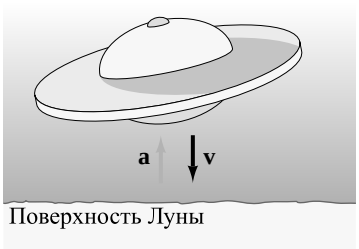


Рис. 1.2.4. Лунный посадочный модуль из примера 2

Физические единицы

Чтобы проводить вычисления, необходимо физические величины, такие как расстояние и время, измерить в определенных единицах. Иногда мы используем специальные единицы, измеряя, например, расстояние в милях или километрах, а время в часах — в специальных ситуациях (например, в задачах о движении автомобиля). Однако система единиц fps, включающая футы, фунты и секунды, а также система единиц МКС[1], включающая секунды, килограммы и метры, используется чаще в научных и технических задачах. Фактически система единиц fps обычно используются только в Соединенных Штатах Америки (и нескольких других странах), а система единиц МКС представляет собой стандартную международную систему научных единиц.

	Единицы fps	**Единицы МКС**
Сила	фунт (фунт)	ньютон (Н)
Масса	единица массы в системе фунт–сила	килограмм (кг)
Расстояние	фут	метр (м)
Время	секунда (с)	секунда (с)
g	32 фт/с^2	9,8 м/с^2

Последняя строка этой таблицы дает значения для гравитационного ускорения g на поверхности Земли. Хотя точность этих приближенных значений достаточна для большинства примеров и задач, иногда нужны более точные значения — $9{,}7805$ м/с^2 и $32{,}088$ фт/с^2 (на уровне моря на экваторе).

Обе системы согласованы со вторым законом Ньютона $F = ma$. Таким образом, по определению 1 Н — это сила, требуемая для того, чтобы придать ускорение 1 м/с^2 массе 1 кг. Точно так же по определению 1 единица массы в системе фунт-сила — это масса, которая испытывает ускорение 1 фт/с^2 под воздействием силы 1 фунт. (Мы будем использовать единицы МКС во всех задачах, где требуются единицы массы, и, таким образом, будем редко нуждаться в единице массы в системе фунт–сила для измерения массы.)

Дюймы и сантиметры (так же как мили и километры) также обычно используются для измерения расстояний. Для преобразований между единицами fps и МКС нужно помнить, что

$$1 \text{ дюйм} = 2{,}54 \text{ см (точно)} \quad \text{и} \quad 1 \text{ фунт} \approx 4{,}448 \text{ Н}.$$

Например,

$$1 \text{ фут} = 12 \text{ дюймов} \times 2{,}54 \frac{\text{см}}{\text{дюйм}} = 30{,}48 \text{ см},$$

из этого следует, что

$$1 \text{ миля} = 5280 \text{ футов} \times 30{,}48 \frac{\text{см}}{\text{фт}} = 160934{,}4 \text{ см} \approx 1{,}609 \text{ км}.$$

Таким образом, американское ограничение скорости 50 миль/час означает, что в международных единицах ограничение скорости приблизительно равно $50 \times 1{,}609 \approx 80{,}45$ км/час.

[1] Интернациональное обозначение для этой системы MKS, авторы ее обозначают просто mks. — *Примеч. ред.*

Вертикальное движение с гравитационным ускорением

Вес тела W — сила, обусловленная тяготением. Замена $a = g$ и $F = W$ во втором законе Ньютона $F = ma$ дает уравнение

$$W = mg \tag{14}$$

для веса W тела массой m на поверхности земли (где $g \approx 32$ фт/с$^2 \approx 9{,}8$ м/с^2). Например, масса $m = 20$ кг имеет вес $W = (20 \text{ кг})(9{,}8 \text{ м/с}^2) = 196$ Н. Точно так же тело массой m, весящее 100 фунтов, в системе МКС имеет вес

$$W = (100 \text{ фунтов})(4{,}448 \text{ Н/фунт}) = 444{,}8 \text{ Н},$$

так что его масса

$$m = \frac{W}{g} = \frac{444{,}8 \text{ Н}}{9{,}8 \text{ м/с}^2} \approx 45{,}4 \text{ кг}.$$

Чтобы изучать вертикальное движение, естественно выбрать ось y в качестве системы координат для положения тела, причем часто $y = 0$ соответствует уровню на поверхности Земли. Если положительное направление совпадает с направлением *вверх*, то тяжесть уменьшает высоту вертикально двигающегося тела, а также уменьшает его скорость $v = dy/dt$. Следовательно, если мы пренебрегаем сопротивлением воздуха, то ускорение $a = dv/dt$ тела дает формула

➤
$$\frac{dv}{dt} = -g. \tag{15}$$

Это уравнение ускорения является отправной точкой во многих задачах, в которых рассматривается вертикальное движение. Последовательные интегрирования (как в уравнениях (10) и (11)) дают формулы для скорости и высоты

$$v(t) = -gt + v_0 \tag{16}$$

и
$$y(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0. \tag{17}$$

Здесь y_0 обозначает начальную высоту тела (в момент времени $t = 0$), а v_0 — его начальную скорость.

Пример 3 **(а)** Предположим, что шар брошен прямо вверх с поверхности земли ($y_0 = 0$) с начальной скоростью $v_0 = 96$ (фт/с, так что мы используем единицы fps, в которых $g = 32$ фт/с^2). Он тогда достигнет своей максимальной высоты, когда его скорость (уравнение (16)) будет нулевой,

$$v(t) = -32t + 96 = 0,$$

т. е. когда $t = 3$ с. Следовательно, максимальная высота, которой достигает шар, равна

$$y(3) = -\tfrac{1}{2} \cdot 32 \cdot 3^2 + 96 \cdot 3 + 0 = 144 \text{ (фута)}$$

(получена с помощью уравнения (17)).

(b) Если стрела выпущена прямо вверх с поверхности земли с начальной скоростью $v_0 = 49$ (м/с, теперь мы используем $g = 9{,}8$ м/с^2 в системе МКС), то она упадет на землю, когда

$$y(t) = -\tfrac{1}{2} \cdot (9{,}8)t^2 + 49t = (4{,}9)t(-t + 10) = 0,$$

т. е. после 10 с полета в воздухе. ■

Задача пловца

На рис. 1.2.5 показана плавно текущая на север река шириной $w = 2a$. Линии $x = \pm a$ представляют собой берега реки, а ось y проходит через середину реки. Предположим, что скорость воды v_R увеличивается по мере приближения к центру реки, и зависимость от расстояния x до центра определяется формулой

$$v_R = v_0\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right). \tag{18}$$

Уравнение (18) позволяет проверить, что вода действительно течет быстрее всего в центре, где $v_R = v_0$, и что $v_R = 0$ на каждом берегу реки.

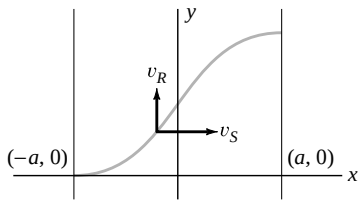


Рис. 1.2.5. Задача пловца (пример 4)

Предположим, что пловец начинает плыть из точки $(-a, 0)$ на западном берегу и плывет на восток с постоянной скоростью v_S относительно воды. Как показано на рис. 1.2.5, вектор его скорости (относительно земли) имеет горизонтальную компоненту v_S и вертикальную составляющую v_R. Следовательно, угол α направления движения пловца дается уравнением

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v_R}{v_S}.$$

Поскольку $\operatorname{tg}\alpha = dy/dx$, замена (18) дает дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_0}{v_S}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \tag{19}$$

для траектории пловца $y = y(x)$ при пересечении реки.

Пример 4 Предположим, что река имеет ширину 1 милю и что скорость воды в середине реки равна $v_0 = 9$ миль/час. Если скорость пловца равна $v_S = 3$ миль/час, то уравнение (19) принимает вид

$$\frac{dy}{dx} = 3(1 - 4x^2).$$

Интегрирование дает

$$y(x) = \int (3 - 12x^2)\,dx = 3x - 4x^3 + C$$

для траектории пловца. Начальное условие $y\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ дает $C = 1$, так что

$$y(x) = 3x - 4x^3 + 1.$$

Тогда

$$y\left(\tfrac{1}{2}\right) = 3\left(\tfrac{1}{2}\right) - 4\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + 1 = 2,$$

так что пловец дрейфует 2 мили вниз по течению, в то время как он проплывает 1 милю поперек реки.

■

1.2. Задачи

В задачах 1–10 найдите функцию $y = f(x)$, удовлетворяющую данному дифференциальному уравнению и заданному начальному условию.

1. $\dfrac{dy}{dx} = 2x + 1;\ y(0) = 3$

2. $\dfrac{dy}{dx} = (x - 2)^2;\ y(2) = 1$

3. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{x};\ y(4) = 0$

4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x^2};\ y(1) = 5$

5. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}};\ y(2) = -1$

6. $\dfrac{dy}{dx} = x\sqrt{x^2+9};\ y(-4) = 0$

7. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{10}{x^2+1};\ y(0) = 0$

8. $\dfrac{dy}{dx} = \cos 2x;\ y(0) = 1$

9. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};\ y(0) = 0$

10. $\dfrac{dy}{dx} = xe^{-x};\ y(0) = 1$

В задачах 11–18 найдите функцию, дающую положение $x(t)$ частицы, двигающейся с данным ускорением $a(t)$ из начального положения $x_0 = x(0)$ с начальной скоростью $v_0 = v(0)$.

11. $a(t) = 50,\ v_0 = 10,\ x_0 = 20$

12. $a(t) = -20,\ v_0 = -15,\ x_0 = 5$

13. $a(t) = 3t,\ v_0 = 5,\ x_0 = 0$

14. $a(t) = 2t + 1,\ v_0 = -7,\ x_0 = 4$

15. $a(t) = 4(t+3)^2,\ v_0 = -1,\ x_0 = 1$

16. $a(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t+4}},\ v_0 = -1,\ x_0 = 1$

17. $a(t) = \dfrac{1}{(t+1)^3},\ v_0 = 0,\ x_0 = 0$

18. $a(t) = 50\sin 5t,\ v_0 = -10,\ x_0 = 8$

В задачах 19–22 частица начинает двигаться из начала координат и перемещается по оси x со скоростью, заданной функцией $v(t)$, чей график приведен на рис. 1.2.6–1.2.9. Начертите график функции, выражающей положение $x(t)$ для $0 \leqq t \leqq 10$.

19.

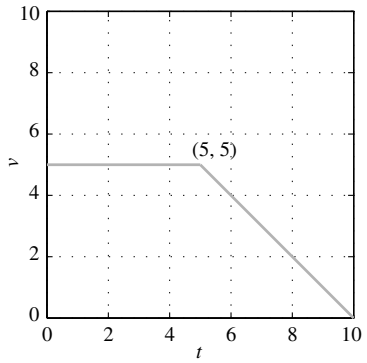


Рис. 1.2.6. График функции, выражающей скорость $v(t)$, для задачи 19

20.

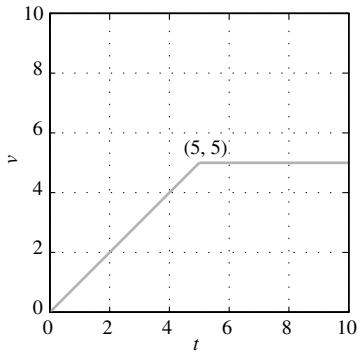


Рис. 1.2.7. График функции, выражающей скорость $v(t)$, для задачи 20

21.

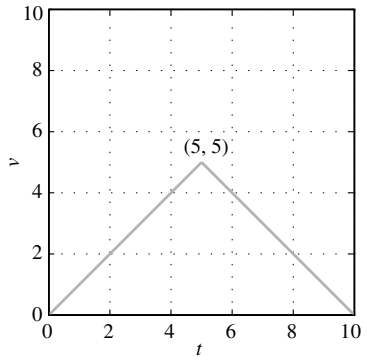


Рис. 1.2.8. График функции, выражающей скорость $v(t)$, для задачи 21

22.

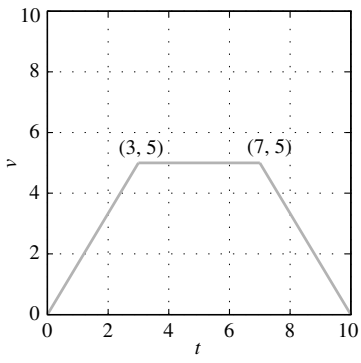


Рис. 1.2.9. График функции, выражающей скорость $v(t)$, для задачи 22

23. Найдите максимальную высоту, достигаемую стрелой из части (b) примера 3.

24. Шар падает с крыши здания высотой 400 футов. Через какое время он достигнет земли? С какой скоростью шар упадет на землю?

25. Автомобиль начинает тормозить, когда он двигается со скоростью 100 км/час. Тормоз обеспечивает постоянное замедление 10 метров в секунду за секунду (м/с^2). Какое расстояние проедет автомобиль до остановки?

26. Снаряд запущен прямо вверх с начальной скоростью 100 м/с с крыши здания высотой 20 м и падает на землю в основании здания. Найдите (a) его максимальную высоту относительно земли; (b) момент времени, когда он пролетает мимо крыши здания; (c) его полное время полета в воздухе.

27. Шар брошен прямо вниз с вершины высокого здания. Начальная скорость шара равна 10 м/с. При падении на землю его скорость равна 60 м/с. Какова высота здания?

28. Бейсбольный мяч брошен прямо вниз с начальной скоростью 40 фт/с с вершины памятника Вашингтону (высота 555 футов). Через какое время он достигнет земли и какая скорость будет у бейсбольного мяча, когда он ударится о землю?

29. Дизельный автомобиль постепенно ускоряется так, что в течение первых 10 с его ускорение дается формулой

$$\frac{dv}{dt} = (0{,}12)t^2 + (0{,}6)t \quad (\text{фт/с}^2).$$

Предположим, автомобиль начинает движение из состояния покоя ($x_0 = 0$, $v_0 = 0$). Найдите расстояние, на которое он переместится через 10 с, и его скорость в этот момент.

30. Автомобиль, перемещающийся со скоростью 60 миль/час (88 фт/с) проехал 176 футов после того, как были внезапно включены его тормоза. Предполагая, что система торможения обеспечивает постоянное замедление, найдите его ускорение при замедлении? Сколько времени автомобиль двигался после включения тормозов?

31. Тормозные полосы указали, что автомобиль тормозил на дистанции длиной 75 м до полного останова. Данный автомобиль замедлялся с постоянным ускорением 20 м/с^2. Как быстро ехал автомобиль перед торможением? Выразите его скорость в единицах скорости км/час.

32. Предположим, что автомобиль проезжает 15 м, если он двигается со скоростью 50 км/час во время начала торможения. Предполагая, что автомобиль имеет то же самое постоянное замедление, как далеко он будет буксовать, если двигается в со скоростью 100 км/час во время начала торможения?

33. На некоторой планете шар, брошенный с высоты 20 футов, упадет на поверхность планеты через 2 с. Сколько времени на этой планете будет падать шар с вершины здания высотой 200 футов? Какова будет скорость при ударе о грунт?

34. Человек может забросить шар прямо вверх с поверхности земли на максимальную высоту 144 фута. Как высоко этот человек мог бы забросить шар на планете из задачи 33?

35. Камень падает из состояния покоя с начальной высоты h над поверхностью земли. Покажите, что в момент соударения с землей скорость шара будет равна $v = \sqrt{2gh}$.

36. Предположим, женщина может подскочить вертикально вверх на высоту 2,25 фута над землей. Как высоко она может подскочить на Луне, на поверхности которой гравитационное ускорение приблизительно равно 5,3 фт/с^2?

37. В полдень автомобиль стартует из состояния покоя в пункте A и движется с постоянным ускорением по прямой дороге к пункту B. Автомобиль достигает B в 12:50 после обеда, имея при этом скорость 60 миль в час. Чему равно расстояние от A до B?

38. В полдень автомобиль стартует из состояния покоя в пункте A и движется с постоянным ускорением по прямой дороге к пункту C, находящейся на расстоянии 35 миль от A. Когда автомобиль достигает C, его скорость равна 60 миль в час. Когда автомобиль прибыл в C?

39. Предположим, что в условиях примера 4 $a = 0{,}5$ мили и $v_0 = 9$ миль в час. Какой должна быть скорость пловца, чтобы он дрейфовал только 1 милю вниз по течению, когда он переплывает реку?

40. Предположим, что в условиях примера 4 $a = 0{,}5$ мили и $v_0 = 9$ миль в час, но скорость воды в реке дает не квадратичная функция в уравнении (18), а функция, содержащая четвертую степень

$$v_R = v_0\left(1 - \frac{x^4}{a^4}\right).$$

Найдите, на какое расстояние вниз по течению река отнесет пловца, когда он переплывет ее.

41. Бомба сбрасывается из вертолета, зависшего на высоте на 800 футов над поверхностью земли. С поверхности земли, непосредственно под вертолетом, выстреливается снаряд прямо вверх по бомбе, точно через 2 секунды после того, как была сброшена бомба. С какой начальной скоростью нужно выстрелить снаряд, чтобы он уничтожил бомбу на высоте 400 футов?

42. Космический корабль свободно падает на поверхность Луны со скоростью 1000 миль в час. Его тормозные реактивные двигатели обеспечивают постоянное замедление 20 000 миль/час^2. На какой высоте над лунной поверхностью астронавты должны запустить тормозные реактивные

двигатели, чтобы обеспечить мягкое приземление? (Как и в примере 2, гравитационным полем Луны можно пренебречь.)

43. Артур Кларк в рассказе *Солнечный ветер* (Wind from the Sun, 1963) описывает космический корабль "Диана", движимый солнечным ветром. Его алюминиевый парус обеспечивает ему постоянное ускорение $0{,}001g = 0{,}0098$ м/с^2. Предположим, что этот космический корабль стартует из состояния покоя в момент времени $t = 0$ и одновременно запускает снаряд прямо вперед в том же самом направлении, который движется со скоростью одной десятой скорости света $c = 3\times10^8$ м/с. Через какое время космический корабль догонит снаряд и какое расстояние он преодолеет за это время?

44. Шофер, попавший в несчастный случай, утверждает, что он ехал со скоростью только 25 миль в час. Когда полиция проверила его автомобиль, оказалось, что при скорости 25 миль в час тормозной путь автомобиля равен 45 футам. Но длина следов при торможении была равна 210 футам. Считая замедление тем же самым (и постоянным) в обоих случаях, определите скорость, с которой на самом деле двигался автомобиль до несчастного случая.

1.3. Поля направлений и интегральные кривые

Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

➤
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

где справа функция $f(x, y)$ содержит и независимую переменную x, и зависимую переменную y. Мы могли бы попытаться проинтегрировать обе части уравнения (1) по x, и, следовательно, написать $y(x) = \int f(x, y(x))\,dx + C$. Однако этот подход не приводит к решению дифференциального уравнения, потому что подынтегральное выражение содержит *неизвестную* функцию $y(x)$ и поэтому интеграл *не* может быть выражен в явной форме. На самом деле не существует никакой прямолинейной процедуры явного решения общего дифференциального уравнения. Действительно, решения такого просто выглядящего дифференциального уравнения как $y' = x^2 + y^2$ нельзя выразить в элементарных функциях, изучаемых в учебниках анализа. Однако графические и численные методы этого и последующих разделов позволяют найти *приближенные* решения дифференциальных уравнений, которые удовлетворяют многим практическим целям.

Поля направлений и графическое решение

Есть простой геометрический способ находить решения данного дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$. В каждой точке (x, y) плоскости xy значение $f(x, y)$ определяет наклон $m = f(x, y)$. Решение дифференциального уравнения — это просто дифференцируемая функция, график которой $y = y(x)$ имеет этот "правильный наклон" в каждой точке $(x, y(x))$, через которую он проходит, т. е. $y'(x) = f(x, y(x))$. Таким образом, **интегральная кривая** дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ — график решения уравнения — будет просто кривой в плоскости xy, причем касательная к этой кривой в каждой точке (x, y) имеет наклон $m = f(x, y)$. Например, на рис. 1.3.1 показана интегральная кривая дифференциального уравнения $y' = x - y$ вместе с ее касательными в трех характерных точках.

Эта геометрическая точка зрения предлагает *графический метод* построения *приближенных* решений дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$. Через каждую точку

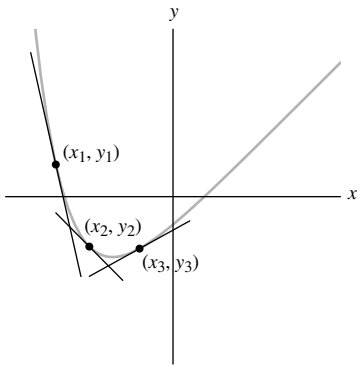


Рис. 1.3.1. Интегральная кривая дифференциального уравнения $y' = x - y$ вместе с касательными, имеющими наклон

- $m_1 = x_1 - y_1$ в точке (x_1, y_1);
- $m_2 = x_2 - y_2$ в точке (x_2, y_2);
- $m_3 = x_3 - y_3$ в точке (x_3, y_3)

некоторого представительного множества точек (x, y) в плоскости мы проводим короткий отрезок, имеющий надлежащий наклон $m = f(x, y)$. Все эти отрезки представляют **поле направлений** (или **поле наклонов**) уравнения $y' = f(x, y)$.

Пример 1 На рисунках 1.3.2, a–d показаны поля направлений и интегральные кривые дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = ky \tag{2}$$

для значений параметра $k = 2$, 0,5, -1 и -3 в уравнении (2). Обратите внимание, что каждое поле направлений наглядно представляет важную информацию о качественном поведении всех решений дифференциального уравнения. Например, на рис. 1.3.2,a и 1.3.2,b видно, что каждое решение $y(x)$ стремится к $\pm\infty$ при $x \to +\infty$ если $k > 0$, а из рис. 1.3.2,c и 1.3.2,d видно, что $y(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, если $k < 0$. Кроме того, хотя знак k определяет *направление* увеличения или уменьшения $y(x)$, его абсолютное значение $|k|$ определяет скорость изменения $y(x)$. Все это наглядно демонстрируется графиками полей направлений, подобным тем, что приведены на рис. 1.3.2. Все это легко увидеть, даже не зная, что общее решение уравнения (2) имеет явный вид $y(x) = Ce^{kx}$. ■

Поле направлений позволяет наглядно представить общие формы интегральных кривых дифференциального уравнения. Через каждую точку интегральная кривая должна пройти в таком направлении, что его касательная будет почти параллельной близлежащим отрезкам поля направлений. Начав с любой начальной точки (a, b), мы можем попытаться от руки приблизительно начертить эскиз интегральной кривой, которая как бы проклады-

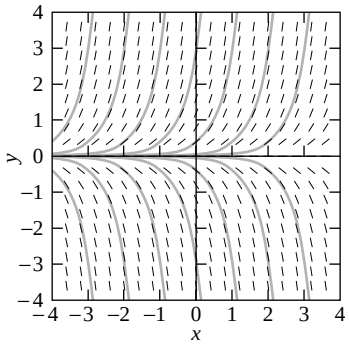


Рис. 1.3.2, a. Поле направлений и интегральные кривые уравнения $y' = 2y$

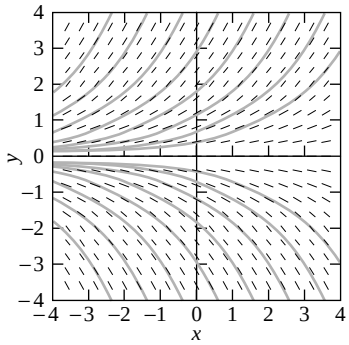


Рис. 1.3.2, b. Поле направлений и интегральные кривые уравнения $y' = (0{,}5)y$

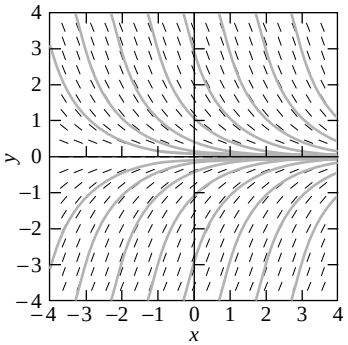


Рис. 1.3.2, c. Поле направлений и интегральные кривые уравнения $y' = -y$

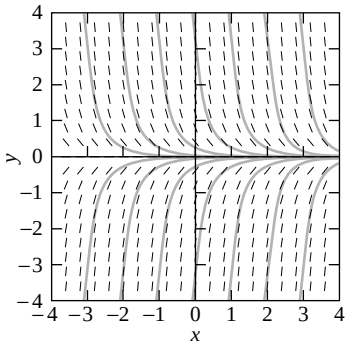


Рис. 1.3.2, d. Поле направлений и интегральные кривые уравнения $y' = -3y$

вает свой путь вдоль поля направлений, следуя направлениям, указанным отрезками поля направлений.

Пример 2 Нарисуем поле направлений для дифференциального уравнения $y' = x - y$ и используем его для того, чтобы сделать приблизительный набросок интегральной кривой, которая проходит через точку $(-4, 4)$.

Решение На рис. 1.3.3 приведена таблица наклонов для данного уравнения. Числовое значение наклона $m = x - y$ указано на пересечении горизонтальной строки x и вертикального столбца y таблицы. Просмотрев таблицу от левого верхнего угла по диагонали к нижнему правому углу, легко убедиться, что эту таблицу можно было создать легко и быстро. (Конечно, более сложная функция $f(x, y)$ в правой части дифференциального уравнения требовала бы более сложных вычислений.) На рис. 1.3.4 показано соответствующее поле направлений, а на рис. 1.3.5 вычерчена (приблизительно) интегральная кривая, проходя-

щая через точку $(-4, 4)$ так, чтобы следовать линиям поля направлений. В каждой точке она идет в направлении, указанном отрезками поля направлений. ■

Хотя программа (для электронной таблицы, например) с готовностью вычисляет таблицу наклонов, приведенную на рис. 1.3.3, вручную весьма утомительно начертить достаточное количество отрезков, например, такое, как на рис. 1.3.4. Однако большинство систем компьютерной алгебры имеет команды для быстрого и аккуратного построения полей направлений с нужным количеством отрезков; такие команды проиллюстрированы в прикладном материале этого раздела. Чем больше сегментов линии вычерчено, тем более точно можно начертить набросок интегральных кривых. На рис. 1.3.6 показано "более точное" поле направлений для дифференциального уравнения $y' = x - y$ из примера 2, вместе с типичными интегральными кривыми, "шагающими" через это поле направлений.

Если внимательно рассмотреть рис. 1.3.6, можно заметить, что одна интегральная кривая похожа на прямую линию! Действительно, легко проверить, что линейная функция $y = x - 1$ является решением уравнения $y' = x - y$; кажется вероятным, что другие

$x \setminus y$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
-4	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8
-3	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
-2	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6
-1	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5
0	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
1	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3
2	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2
3	7	6	5	4	3	2	1	0	-1
4	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Рис. 1.3.3. Значения наклона $y' = x - y$ для $-4 \leqq x,\ y \leqq 4$

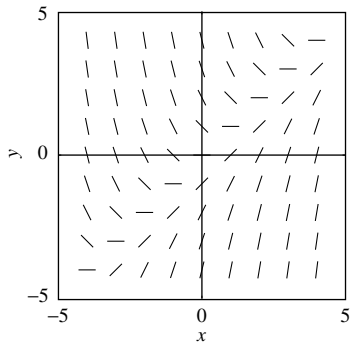


Рис. 1.3.4. Поле направлений уравнения $y' = x - y$, соответствующее таблице наклонов на рис. 1.3.3

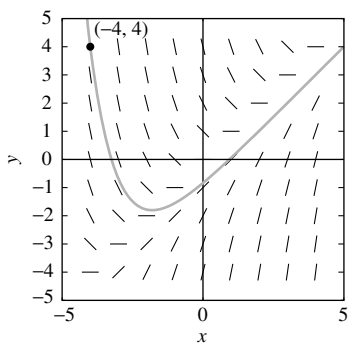


Рис. 1.3.5. Интегральная кривая, проходящая через точку $(-4, 4)$

интегральные кривые приближаются к этой прямой линии как к асимптоте при $x \to +\infty$. Этот вывод иллюстрирует то факт, что, глядя на поле направлений, можно узнать важную информацию о решениях, которая нисколько не очевидна непосредственно из дифференциального уравнения. Можете ли вы, глядя на соответствующую интегральную кривую на этом рисунке, вывести, что $y(3) \approx 2$ для решения $y(x)$ задачи Коши (задачи с начальными условиями) $y' = x - y$, $y(-4) = 4$?

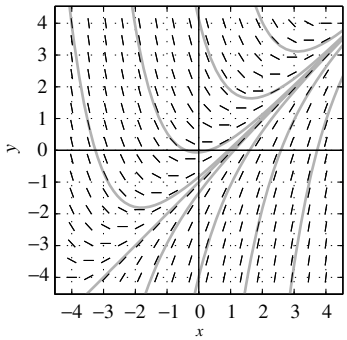


Рис. 1.3.6. Поле направлений и типичные интегральные кривые уравнения $y' = x - y$

Приложения полей направлений

Следующие два примера иллюстрируют использование полей направлений для того, чтобы собрать полезную информацию о физических явлениях, моделями которых служат дифференциальные уравнения. Пример 3 базируется на том факте, что бейсбольный мяч, летящий в воздухе с умеренной скоростью v (менее чем приблизительно 300 фт/с) испытывает сопротивление воздуха, которое приблизительно пропорционально v. Если бейсбольный мяч брошен прямо вниз с вершины высокого здания или с зависшего вертолета, то он испытывает и гравитационное ускорение (направленное вниз), и ускорение, обусловленное сопротивлением воздуха (направленное вверх). Если ось y направлена *вниз*, то скорость шара $v = dy/dt$ и его гравитационное ускорение $g = 32$ фт/с^2 положительны, в то время как ускорение из-за сопротивления воздуха отрицательно. Следовательно, полное ускорение равно

$$\frac{dv}{dt} = g - kv. \tag{3}$$

Типичное значение константы пропорциональности сопротивления воздуха обычно близко к $k = 0{,}16$.

Пример 3 Предположим, что вы бросаете бейсбольный мяч прямо вниз с вертолета, зависшего на высоте 3000 футов. Может ли кто-нибудь, стоя на земле, поймать его? Чтобы вычислить скорость, с которой шар приземлится, можно использовать систему компьютерной алгебры, имеющуюся в вашем ноутбуке для вычерчивания поля направлений дифферен-

циального уравнения

$$\frac{dv}{dt} = 32 - 0{,}16v. \tag{4}$$

Результат показан на рис. 1.3.7 вместе с множеством интегральных кривых, соответствующих различным значениям начальной скорости $v(0)$, с которыми вы могли бросить бейсбольный мяч вниз.

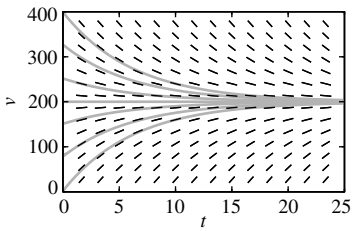


Рис. 1.3.7. Поле направлений и типичные интегральные кривые уравнения $v' = 32 - 0{,}16v$

Обратите внимание, что все эти интегральные кривые, кажется, асимптотически приближаются к горизонтальной прямой $v = 200$. Это значит, однако, что скорость брошенного бейсбольного мяча должна приблизиться к *граничному значению скорости* $v = 200$ фт/с, а не возрастать неограниченно (как это было бы в отсутствие сопротивления воздуха). Поскольку 60 миль в час $= 88$ фт/с, то

$$v = 200\frac{\text{футов}}{\text{с}} \times \frac{60 \text{ миль/час}}{88 \text{ фт/с}} \approx 136{,}36 \ \frac{\text{миль}}{\text{час}}.$$

Возможно, ловец, привыкший к скорости 100 миль в час, имел бы некоторый шанс поймать такой быстрый шарик. ■

Комментарий. Если начальная скорость шара равна $v(0) = 200$, то уравнение (4) дает $v'(0) = 32 - (0{,}16)(200) = 0$, так что шар *не* испытывает никакого начального ускорения. Поэтому его скорость остается неизменной и, следовательно, $v(t) \equiv 200$ — постоянное "устойчивое решение" дифференциального уравнения. Если начальная скорость больше, чем 200, то начальное ускорение, данное уравнением (4), отрицательно, так что шар замедляется, когда он падает. Но если начальная скорость меньше, чем 200, то начальное ускорение, данное уравнением (4), положительно, так что шар ускоряется во время падения. Поэтому кажется весьма разумным, что из-за сопротивления воздуха скорость бейсбольного мяча приблизится к граничной скорости 200 фт/с независимо от начальной скорости, с которой был брошен шар. Вы можете проверить, что в отсутствие сопротивления воздуха этот шар ударится о землю со скоростью большей 300 миль в час. ■

В разделе 2.1 мы подробно обсудим логистическое дифференциальное уравнение

$$\frac{dP}{dt} = kP(M - P), \tag{5}$$

которое часто используется для моделирования численности $P(t)$ популяции, населяющей среду обитания с потенциальной емкостью M особей. Это означает, что M — максимальная численность популяции, которую эта среда может поддерживать в течение длительного времени (потенциальная емкость экологической системы может быть ограничена, например, количеством максимального доступного продовольствия).

Пример 4 Если мы возьмем $k = 0{,}0004$ и $M = 150$, то логистическое уравнение (5) примет вид

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}0004P(150 - P) = 0{,}06P - 0{,}0004P^2. \tag{6}$$

Положительный член $0{,}06P$ справа в (6) соответствует естественному приросту 6% в год (время t измеряется в годах). Отрицательный член $-0{,}0004P^2$ представляет подавление роста из-за ограниченных ресурсов среды обитания.

На рис. 1.3.8 показано поле направлений уравнения (6) вместе с интегральными кривыми, соответствующими возможным различным начальным значениям численности населения $P(0)$. Обратите внимание, что все эти интегральные кривые, кажется, асимптотически приближаются к горизонтальной линии $P = 150$. Это значит, что численность населения $P(t)$ приближается к ограничению численности населения $P(t)$ при $t \to \infty$ независимо от начальной численности населения. ■

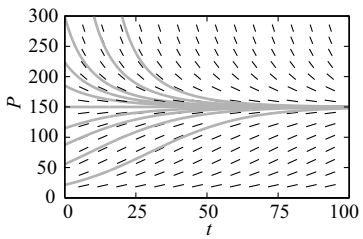


Рис. 1.3.8. Поле направлений и типичные интегральные кривые уравнения $P' = 0{,}06P - 0{,}0004P^2$

Комментарий. Если начальная численность населения равна $P(0) = 150$, то уравнение (6) дает

$$P'(0) = 0{,}0004(150)(150 - 150) = 0,$$

так что численность населения *не* изменяется. Поэтому она остается неизменной и, следовательно, $P(t) \equiv 150$ — постоянное "равновесное решение" дифференциального уравнения. Если начальная численность населения больше, чем 150, то начальный прирост, как видно из (6), отрицателен, так что численность населения начинает уменьшаться немедленно. Но если начальная численность населения меньше, чем 150, то начальный прирост, как видно из (6), положителен, так что численность населения немедленно начинает увеличиваться. Поэтому весьма разумно заключить, что численность населения приблизится к значению ограничения 150 независимо от (положительной) начальной численности населения. ■

Существование и единственность решения

Прежде чем пытаться решить данное дифференциальное уравнение, полезно знать, *существуют* ли решения на самом деле. Часто важно также знать, есть ли только одно решение уравнения, удовлетворяющее данному начальному условию, т. е. *единственно* ли решение.

Пример 5 **(a)** [Решение не существует.] Задача Коши (задача с начальными условиями)

$$y' = \frac{1}{x}, \quad y(0) = 0 \tag{7}$$

не имеет решения, потому что ни одно решение $y(x) = \int (1/x)\,dx = \ln|x| + C$ дифференциального уравнения не определено в точке $x = 0$.

(b) [Несколько решений.] С другой стороны, легко проверить, что задача Коши (задача с начальными условиями)

$$y' = 2\sqrt{y}, \quad y(0) = 0 \tag{8}$$

имеет *два* различных решения $y_1(x) = x^2$ и $y_2(x) \equiv 0$ (см. задачу 27). ■

Пример 5 иллюстрирует тот факт, что, прежде чем говорить о решении задачи Коши (задачи с начальными условиями), мы должны знать, что данное уравнение имеет *одно и только одно* решение. Вопросы существования и единственности решений также опираются на процесс математического моделирования. Предположим, что мы изучаем физическую систему, поведение которой полностью определено некоторыми начальными условиями, но предложенная нами математическая модель содержит дифференциальное уравнение, *не* имеющее единственного решения, удовлетворяющего поставленным условиям. Тогда возникает вопрос, правильно ли математическая модель моделирует физическую систему.

Приведенная ниже теорема утверждает, что задача Коши (задача с начальными условиями) $y' = f(x, y)$, $y(a) = b$ имеет одно и только одно решение, определенное в окрестности точки $x = a$ на оси x при условии, что и функция f, и ее частная производная $\partial f/\partial y$ непрерывны в окрестности точки (a, b) в плоскости xy. Методы доказательства теоремы существования и единственности обсуждаются в приложении к книге.

Теорема 1 Существование и единственность решения

Предположим, что функция $f(x, y)$ и ее частная производная $D_y f(x, y)$ непрерывны на некотором прямоугольникеR плоскости xy, внутри которого расположена точка (a, b). Тогда для некоторого открытого интервала I, содержащего точку a, задача Коши (задача с начальными условиями)

➤
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(a) = b \tag{9}$$

имеет одно и только одно решение, которое определено на интервале I. ▲

Замечание 1. В случае дифференциального уравнения $dy/dx = -y$ примера 1 и рис. 1.3.2,c функция $f(x, y) = -y$ и частная производная $\partial f/\partial y = -1$ непрерывны всюду, так что теорема 1 гарантирует существование единственного решения для любых начальных данных (a, b). Хотя теорема гарантирует существование только на некотором открытом интервале, содержащем точку $x = a$, каждое решение $y(x) = Ce^{-x}$ фактически определено для всех x.

Замечание 2. В случае дифференциального уравнения $dy/dx = -2\sqrt{y}$ примера 5 (b) и уравнение (8), и функция $f(x, y) = -2\sqrt{y}$ непрерывны везде, где $y > 0$, но частная производная $\partial f/\partial y = 1/\sqrt{y}$ имеет разрыв при $y = 0$ и, следовательно, в точке $(0, 0)$. Именно поэтому там могут существовать два различных решения $y_1(x) = x^2$ и $y_2(x) \equiv 0$, каждое из которых удовлетворяет начальному условию $y(0) = 0$.

Замечание 3. В примере 7 из раздела 1.1 мы исследовали особенно простое дифференциальное уравнение $dy/dx = y^2$. Здесь мы имеем $f(x, y) = y^2$ и $\partial f/\partial y = 2y$. Обе эти функции непрерывны всюду в плоскости xy и, в частности, в прямоугольнике $-2 < x < 2$, $0 < y < 2$. Поскольку точка $(0, 1)$ находится внутри этого прямоугольника, теорема 1 гарантирует единственность решения (решением считается только непрерывная функция!) задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$\frac{dy}{dx} = y^2, \quad y(0) = 1 \tag{10}$$

на некотором открытом интервале изменения x, содержащем $a = 0$. Действительно, это решение

$$y(x) = \frac{1}{1 - x}$$

мы обсуждали в примере 7. Но $y(x) = 1/(1 - x)$ терпит разрыв при $x = 1$, так что наше единственное непрерывное решение не существует на всем интервале $-2 < x < 2$. Таким образом, в данном случае интервал I теоремы 1, на котором существует решение, может не быть столь же широким, как прямоугольник R, в котором f и $\partial f/\partial y$ непрерывны. Геометрическая интерпретация причины заключается в том, что интегральная кривая, существование которой гарантируется теоремой, может выйти за пределы прямоугольника, в котором гарантируется существование решения дифференциального уравнения, причем выйти она может до того, как достигнет одного или обоих концов интервала (см. рис. 1.3.9). ■

Следующий пример показывает, что если функция $f(x, y)$ или ее частная производная $\partial f/\partial y$ не удовлетворяет условию непрерывности теоремы 1, то задача Коши (задача с начальными условиями) (9) может *либо* не иметь ни одного решения, *либо* иметь много решений — даже бесконечно много!

Пример 6 Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$x\frac{dy}{dx} = 2y. \tag{11}$$

Применяя теорему 1 для $f(x, y) = 2y/x$ и $\partial f/\partial y = 2/x$, мы заключаем, что уравнение (11) должно иметь единственное решение в окрестности

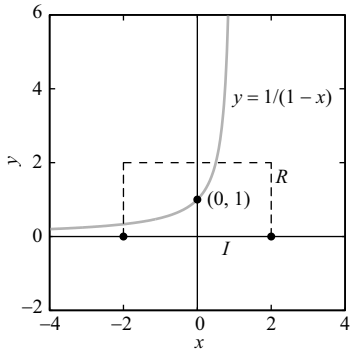


Рис. 1.3.9. Интегральная кривая проходит через начальную точку $(0, 1)$, но покидает прямоугольник R прежде, чем достигает правого конца интервала I

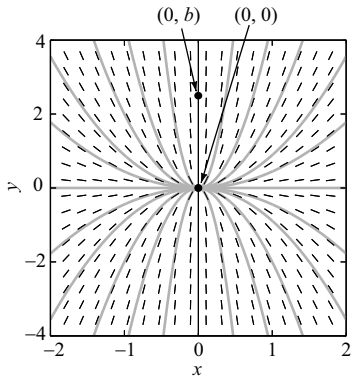


Рис. 1.3.10. Через точку $(0, 0)$ проходит бесконечно много интегральных кривых, но ни одна интегральная кривая не проходит через точку $(0, b)$ при $b \neq 0$

любой точки в плоскости xy, где $x \neq 0$. Действительно, подстановкой в (11) легко убедиться, что

$$y(x) = Cx^2 \tag{12}$$

удовлетворяет уравнению (11) для любого значения константы C и для всех значений переменной x. В частности, задача Коши (задача с начальными условиями)

$$x\frac{dy}{dx} = 2y, \quad y(0) = 0 \tag{13}$$

имеет бесконечно много различных решений, причем интегральными кривыми являются параболы $y = Cx^2$, показанные на рис. 1.3.10. (В случае $C = 0$ "парабола" — это фактически ось x с уравнением $y = 0$.)

Заметьте, что все эти параболы проходят через начало координат $(0, 0)$, но ни одна из них не проходит ни через какую-либо другую точку оси y. Из этого следует, что задача Коши (задача с начальными условиями) (13) имеет бесконечно много решений, но задача Коши (задача с начальными условиями)

$$x\frac{dy}{dx} = 2y, \quad y(0) = b \tag{14}$$

не имеет ни одного решения при $b \neq 0$.

Наконец, обратите внимание, что через любую точку, не лежащую на оси y, проходит только одна из парабол $y = Cx^2$. Следовательно, если $a \neq 0$, то задача Коши (задача с начальными условиями)

$$x\frac{dy}{dx} = 2y, \quad y(a) = b \tag{15}$$

имеет единственное решение на любом интервале, который содержит точку $x = a$, но не содержит начало координат $x = 0$. Иными словами, задача Коши (задача с начальными условиями) (15)

- имеет единственное решение в окрестности (a, b), если $a \neq 0$;
- не имеет ни одного решения, если $a = 0$,но $b \neq 0$;
- имеет бесконечно много решений, если $a = b = 0$. ■

Все же о задаче Коши (задаче с начальными условиями) (15) нужно сказать больше. Рассмотрим произвольную начальную точку, не лежащую на оси y, например точку $(-1, 1)$, показанную на рис. 1.3.11.

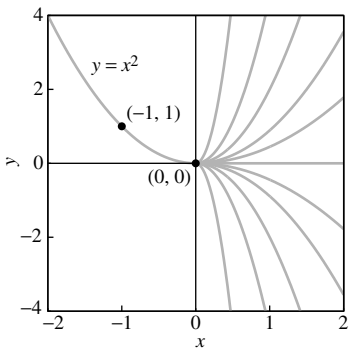


Рис. 1.3.11. Через точку $(1, -1)$ проходит бесконечно много интегральных кривых

Тогда для любого значения константы C функция, определенная формулой

$$y(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leq 0, \\ Cx^2, & \text{если } x > 0 \end{cases} \tag{16}$$

непрерывна и является решением задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$x\frac{dy}{dx} = 2y, \quad y(-1) = 1. \tag{17}$$

Для конкретного значения C интегральная кривая, определенная равенством (16), состоит из левой половины параболы $y = x^2$ и правой половины параболы $y = Cx^2$. Таким образом, единственная интегральная кривая в окрестности точки $(-1, 1)$ в начале координат переходит в бесконечно многие интегральные кривые, показанные на рис. 1.3.11.

Отсюда мы видим, что теорема 1 (если ее условия удовлетворены) гарантирует единственность решения только в окрестности начальной точки (a, b), но интегральная кривая, проходящая через (a, b) может где-нибудь в другом месте разветвиться, и потому единственность интегральной кривой в целом гарантировать нельзя. Таким образом, решение может существовать на большем интервале, чем тот, на котором решение единственно. Например, решение $y(x) = x^2$ задачи Коши (задачи с начальными условиями) (17) существует на всей оси абсцисс, но это решение единственно только на отрицательной полуоси x (т. е. при $-\infty < x < 0$).

1.3. Задачи

В задачах 1–10 мы нарисовали поле направлений указанного дифференциального уравнения, а также одну или несколько интегральных кривых. Схематически нарисуйте интегральные кривые, проходящие через дополнительные точки, отмеченные в каждом поле направлений.

1. $\dfrac{dy}{dx} = -y - \sin x$

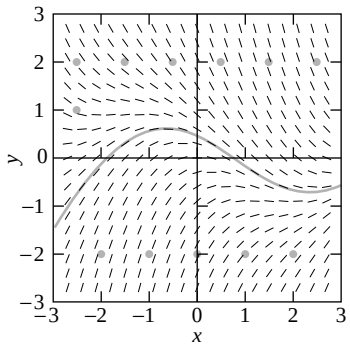


Рис. 1.3.12

2. $\dfrac{dy}{dx} = x + y$

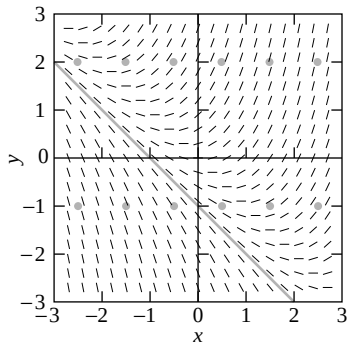


Рис. 1.3.13

3. $\dfrac{dy}{dx} = y - \sin x$

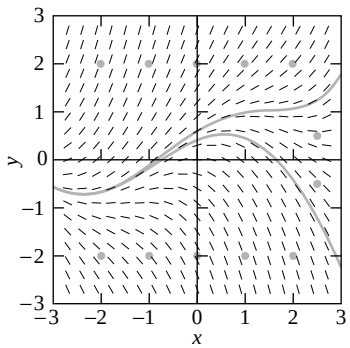


Рис. 1.3.14

4. $\dfrac{dy}{dx} = x - y$

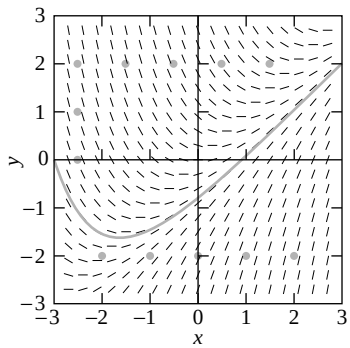


Рис. 1.3.15

5. $\dfrac{dy}{dx} = y - x + 1$

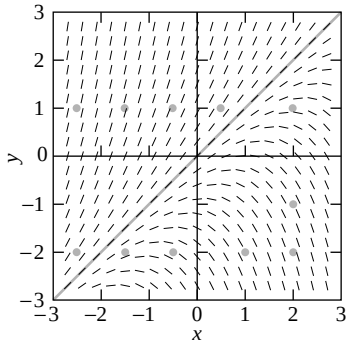


Рис. 1.3.16

6. $\dfrac{dy}{dx} = x - y + 1$

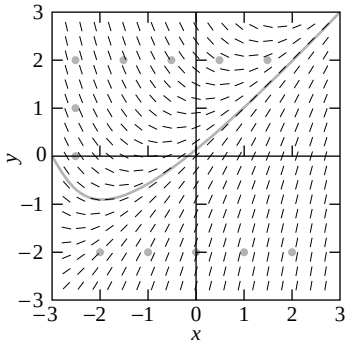


Рис. 1.3.17

7. $\dfrac{dy}{dx} = \sin x + \sin y$

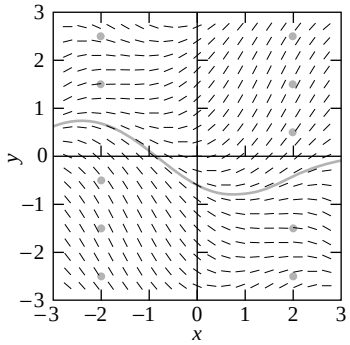


Рис. 1.3.18

8. $\dfrac{dy}{dx} = x^2 - y$

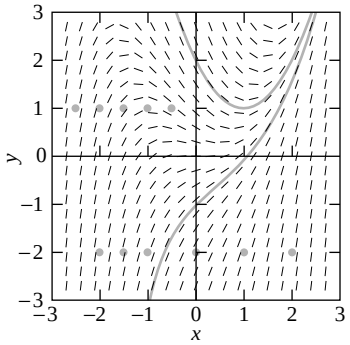


Рис. 1.3.19

9. $\dfrac{dy}{dx} = x^2 - y - 2$

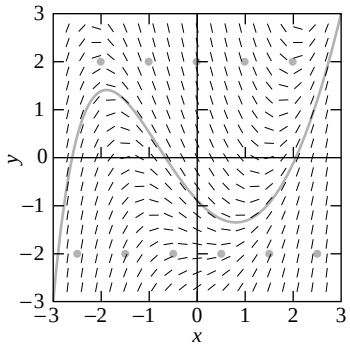


Рис. 1.3.20

10. $\dfrac{dy}{dx} = -x^2 + \sin y$

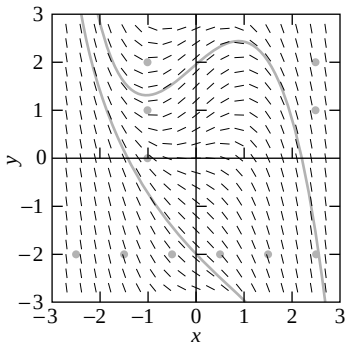


Рис. 1.3.21

В задачах 11–20 определите, гарантирует ли теорема 1 существование решения данной задачи Коши (задачи с начальными условиями). Если существование гарантируется, определите, гарантирует ли теорема 1 единственность этого решения.

11. $\dfrac{dy}{dx} = 2x^2y^2; \quad y(1) = -1$

12. $\dfrac{dy}{dx} = x \ln y; \quad y(1) = 1$

13. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt[3]{y}; \quad y(0) = 1$

14. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt[3]{y}; \quad y(0) = 0$

15. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{x - y}; \quad y(2) = 2$

16. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{x - y}; \quad y(2) = 1$

17. $y\dfrac{dy}{dx} = x - 1; \quad y(0) = 1$

18. $y\dfrac{dy}{dx} = x - 1; \quad y(1) = 0$

19. $\dfrac{dy}{dx} = \ln(1 + y^2); \quad y(0) = 0$

20. $\dfrac{dy}{dx} = x^2 - y^2; \quad y(0) = 1$

В задачах 21 и 22 сначала используйте метод примера 2, чтобы создать поле направлений для данного дифференциального уравнения. Затем сделайте набросок интегральной кривой, соответствующей данному начальному условию. Наконец, используйте эту интегральную кривую, чтобы оценить требуемое значение решения $y(x)$.

21. $y' = x + y, \quad y(0) = 0; \quad y(-4) = ?$

22. $y' = y - x, \quad y(4) = 0; \quad y(-4) = ?$

Задачи 23 и 24 подобны задачам 21 и 22, но на этот раз для вычерчивания и распечатки поля направлений данного дифференциального уравнения используйте систему компьютерной алгебры. Если вы желаете (и знаете, как), можете проверить сделанные вами вручную наброски интегральных кривых, построив их с помощью компьютера.

23. $y' = x^2 + y^2 - 1, \quad y(0) = 0; \quad y(2) = ?$

24. $y' = x + \dfrac{1}{2}y^2, \quad y(-2) = 0; \quad y(2) = ?$

25. Вы прыгаете из вертолета (пример 3) и тянете вытяжной трос вашего парашюта. Теперь $k = 1{,}6$ в уравнении (3), так что ваша скорость убывает и является решением задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$\frac{dv}{dt} = 32 - 1{,}6v, \quad v(0) = 0.$$

Чтобы оценить шансы на выживание, нарисуйте поле направлений для этого дифференциального уравнения и сделайте набросок соответствующей интегральной кривой. Чему равна предельная скорость? Стратегически расположенный стог сена даст какой-либо прок? Сколько времени потребуется, чтобы достичь 95% предельной скорости?

26. Предположим, что численность популяции оленей $P(t)$ в маленьком лесу удовлетворяет логистическому уравнению

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}0225P - 0{,}0003P^2.$$

Нарисуйте поле направлений и подходящую интегральную кривую, чтобы ответить на следующие вопросы. Если в момент времени $t = 0$ есть 25 оленей и t измеряется в месяцах, то через какое время число оленей удвоится? Чему равно предельное число оленей?

Следующие семь задач иллюстрируют тот факт, что, если условия теоремы 1 не выполнены, то задача Коши (задача с начальными условиями) $y' = f(x, y)$, $y(a) = b$ может не иметь ни одного решения, может иметь конечное множество решений и может иметь бесконечно много решений.

27. **(a)** Проверьте, что если c константа, то кусочно определенная функция

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \leqq c, \\ (x-c)^2 & \text{для } x > c \end{cases}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = 2\sqrt{y}$ для всех x (включая точку $x = c$). Создайте рисунок, иллюстрирующий тот факт, что задача Коши (задача с начальными условиями) $y' = 2\sqrt{y}$, $y(0) = 0$ имеет бесконечно много различных решений. **(b)** Для каких значений b задача Коши (задача с начальными условиями) $y' = 2\sqrt{y}$, $y(0) = b$ (i) не имеет ни одного решения, (ii) имеет единственное решение, которое определено для всех x?

28. Проверьте, что если k константа, то функция $y(x) \equiv kx$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $xy' = y$ для всех x. Нарисуйте поле направлений и несколько прямых, являющихся интегральными кривыми. Затем определите количество различных решений задачи Коши (задачи с начальными условиями) $xy' = y$, $y(a) = b$ в зависимости от значений a и b. Иными словами, при каких a и b рассматриваемая задача Коши имеет одно, ни одного или бесконечно много решений?

29. Проверьте, что если c константа, то кусочно определенная функция

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \leqq c, \\ (x-c)^3 & \text{для } x > c \end{cases}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = 3y^{2/3}$ для всех x. Можно ли также использовать "левую половину" кубической параболы $y = (x-c)^3$ для склеивания интегральной кривой дифференциального уравнения? (Рис. 1.3.22.) Сделайте набросок разнообразных таких интегральных кривых. Существует ли точка (a, b) на плоскости xy такая, что задача Коши (задача с начальными условиями) $y' = 3y^{2/3}$, $y(a) = b$ либо не имеет ни одного решения, либо имеет единственное решение, которое определено для всех x? Сопоставьте ваш ответ с теоремой 1.

30. Проверьте, что если c константа, то кусочно определенная функция

$$y(x) = \begin{cases} +1, & \text{если } x \leqq c, \\ \cos(x-c), & \text{если } c < x < c + \pi, \\ -1, & \text{если } x \geqq c, \end{cases}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = -\sqrt{1-y^2}$ для всех x. (Возможно, будет полезен предварительный эскиз для $c = 0$.) Сделайте набросок разнообразных интегральных кривых. Затем определите, сколько различных решений имеет задача Коши (задача с начальными условиями) $y' = -\sqrt{1-y^2}$, $y(a) = b$ в зависимости от значений a и b.

31. Для дифференциального уравнения $y' = +\sqrt{1-y^2}$ выполните исследование, подобное проведенному в задаче 30. Достаточно ли просто заменить $\cos(x-c)$ на $\sin(x-c)$ в склееном решении, которое определено для всех x?

32. Проверьте, что если $c > 0$, то кусочно определенная функция

$$y(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x^2 \leqq c, \\ (x^2-c)^2, & \text{если } x^2 > c, \end{cases}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению $y' = 4x\sqrt{y}$ для всех x. Сделайте набросок разнообразных интегральных кривых для различных значений c. Затем определите, сколько различных решений имеет задача Коши (задача с начальными условиями) $y' = 4x\sqrt{y}$, $y(a) = b$ в зависимости от значений a и b.

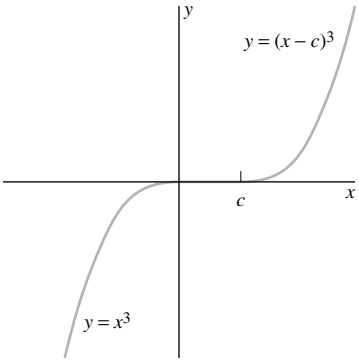


Рис. 1.3.22. Предложение для задачи 29

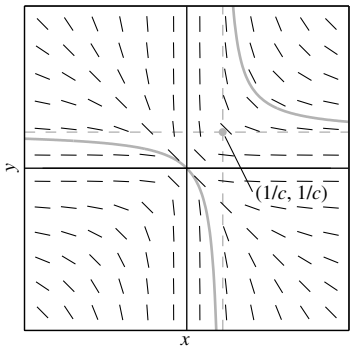


Рис. 1.3.23. Поле направлений уравнения $x^2y' + y^2 = 0$ и график решения $y(x) = x/(cx - 1)$

33. Пусть $c \neq 0$. Проверьте, что функция, определенная равенством $y(x) = x/(cx - 1)$ (ее график приведен на рис. 1.3.23), удовлетворяет дифференциальному уравнению $x^2y' + y^2 = 0$, если $x \neq 1/c$. Сделайте набросок разнообразных интегральных кривых для различных значений c. Кроме того, обратите внимание на константу-функцию $y(x) \equiv 0$, которая не получается ни при каком выборе константы c. Наконец, определите, сколько различных решений задача Коши (задача с начальными условиями) $x^2y' + y^2 = 0$, $y(a) = b$ имеет в зависимости от значений a и b.

1.3. Приложение. Автоматизация вычерчивания полей направлений и интегральных кривых

Широко доступные системы компьютерной алгебры и технические вычислительные среды имеют средства автоматизации построения полей направлений и интегральных кривых. Кроме того, такие средства встроены и в некоторые графические калькуляторы (рис. 1.3.24).

Средства для исследования дифференциальных уравнений предусмотрены почти во всех универсальных математических пакетах, таких как *Maple*Ⓣ, *Mathematica*Ⓣ и MATLABⓉ. Например, команда пакета *Maple*

```
with(DEtools):
DEplot(diff(y(x),x)=sin(x-y(x)), y(x), x=-5..5, y=-5..5);
```

и команда системы *Mathematica*

```
<< Graphics\PlotField.m
PlotVectorField[{1, Sin[x-y]}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}]
```

строят поля направлений, подобные показанным на рис. 1.3.25. Этот рисунок непосредственно был построен программой `dfield`, написанной на входном языке системы MATLAB (John Polking and David Arnold, *Ordinary Differential Equations Using* MATLAB (2nd ed.), издательство Prentice Hall, 1999 (Джон Полкинг и Дэвид Арнольд, Обыкно-

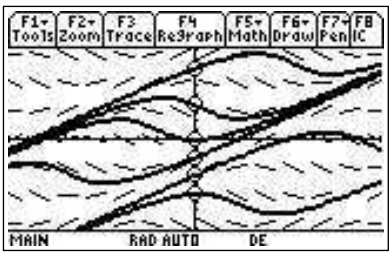


Рис. 1.3.24. Машинно-генерируемое поле направлений и интегральные кривые дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \sin(x - y),$$

проходящие через точки $(0, b)$ при $b = -3, -1, -2, 0, 2, 4$ в прямоугольнике $-5 \le x, y \le 5$ на дисплее графического калькулятора TI-89

венные дифференциальные уравнения. Применение MATLAB (2-е изд.)). Эта программа бесплатна для использования в целях образования (**math.rice.edu/∼dfield**). Когда дифференциальное уравнение введено в меню установки программы `dfield` (рис. 1.3.26), вы можете (щелчками кнопки мыши) начертить и поле направлений, и интегральную кривую (или кривые), проходящую через любую указанную точку (или точки). Еще один бесплатный и дружественный пользователю пакет для решения ОДУ на основе MATLAB с внушительными графическими способностями — `Iode` (**www.math.uiuc.edu/iode**).

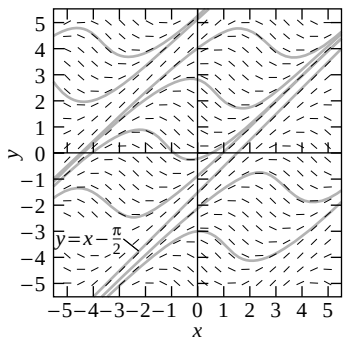


Рис. 1.3.25. Машинно-генерируемое поле направлений и интегральные кривые дифференциального уравнения $y' = \sin(x - y)$

Используйте графический калькулятор или компьютерную систему в следующих исследованиях. Вам пришлось бы хорошенько попотеть, если бы пришлось рисовать поля направлений и некоторые интегральные кривые из задач 1–10 в этом разделе.

Исследование A. Начертите поле направлений и типичные интегральные кривые дифференциального уравнения $dy/dx = \sin(x - y)$, но в большем прямоугольнике, чем на

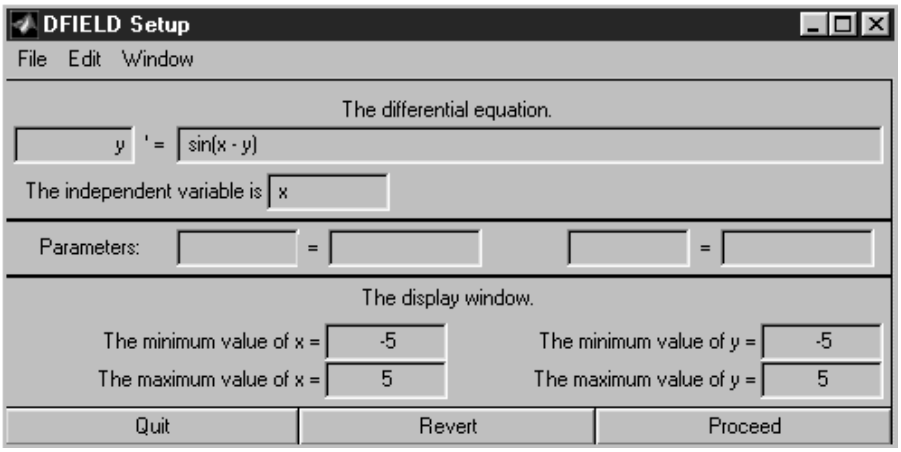


Рис. 1.3.26. Окно пакета MATLAB для задания параметров `dfield` с целью вычерчивания поля направлений и интегральных кривых уравнения $y' = \sin(x-y)$

рис. 1.3.25. Например, в квадрате $-10 \leqq x \leqq 10$, $-10 \leqq y \leqq 10$ должно быть видимо множество интегральных кривых линий, являющихся прямыми.

(a) Подставьте $y = ax + b$ в дифференциальное уравнение, чтобы определить, какими должны быть коэффициенты a и b, чтобы получить решение.

(b) Система компьютерной алгебры дает общее решение

$$y(x) = x - 2\operatorname{arctg}\left(\frac{x-2-C}{x-C}\right).$$

Можете ли вы определить значение произвольной постоянной C, при котором получается линейное решение $y = x - (\pi/2)$, удовлетворяющее начальному условию $y(\pi/2) = 0$?

Исследование B. Пусть n — *наименьшая* цифра в номере вашего студенческого билета, которая больше 1. Рассмотрите дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n}\cos(x - ny).$$

(a) Сначала исследуйте (как в части (a) исследования A) наличие интегральных кривых, являющихся прямыми.

(b) Затем нарисуйте поле направлений этого дифференциального уравнения, причем прямоугольник, в котором будете рисовать поле направлений, выберите таким, чтобы вы могли изобразить некоторые из этих прямых линий. Не поленитесь нарисовать столько нелинейных интегральных кривых, чтобы вы смогли сформулировать догадку о том, что случается с $y(x)$, когда $x \to +\infty$. Сформулируйте ваш вывод настолько явно, насколько сможете. Задав начальное значение $y(0) = y_0$, попробуйте предсказать (возможно, в зависимости от значения y_0), как $y(x)$ ведет себя при $x \to +\infty$.

(c) Система компьютерной алгебры дает общее решение

$$y(x) = \frac{1}{n}\left[x + 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{x - C}\right)\right].$$

Можете ли вы увидеть связь между этим символическим решением и вашими графиками, на которых изображены интегральные кривые (прямые линии или другие кривые)?

1.4. Уравнения с разделяющимися переменными и приложения

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = H(x, y) \tag{1}$$

называется **дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными**[2], если $H(x, y)$ можно записать как произведение функции от x на функцию от y:

➤
$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) = \frac{g(x)}{f(y)},$$

где $h(y) = 1/f(y)$. В этом случае переменные x и y могут быть *отделены* — изолированы в противоположных частях уравнения. Для этого уравнение нужно записать в виде уравнения

$$f(y)\,dy = g(x)\,dx,$$

которое мы формально считаем кратким обозначением дифференциального уравнения

$$f(y)\frac{dy}{dx} = g(x). \tag{2}$$

Очень просто решить дифференциальное уравнение этого специального типа. Достаточно просто проинтегрировать обе части по x:

$$\int f(y(x))\frac{dy}{dx}\,dx = \int g(x)\,dx + C;$$

эквивалентно

$$\int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx + C. \tag{3}$$

Требуется лишь найти примитивные

$$F(y) = \int f(y)\,dy \quad \text{и} \quad G(x) = \int g(x)\,dx.$$

[2] Иногда встречается и название **дифференциальное уравнение с отделяющимися переменными**. — *Примеч. ред.*

Чтобы убедиться, что уравнения (2) и (3) эквивалентны, обратите внимание на следующую цепочку равенств:

$$D_x[F(y(x))] = F'(y(x))y'(x) = f(y)\frac{dy}{dx} = g(x) = D_x[G(x)],$$

которая в свою очередь эквивалентна равенству

$$F(y(x)) = G(x) + C, \tag{4}$$

потому что две функции имеют ту же самую производную на интервале тогда и только тогда, когда они отличаются на константу на всем интервале.

Пример 1 Решим задачу Коши (задачу с начальными условиями)

$$\frac{dy}{dx} = -6xy, \quad y(0) = 7.$$

Решение Выражаясь несколько неофициально, наши действия можно описать так: сначала мы делим обе части дифференциального уравнения на y и умножаем каждую часть на dx. В результате получится уравнение

$$\frac{dy}{y} = -6x\,dx.$$

Следовательно,

$$\int \frac{dy}{y} = \int(-6x)\,dx;$$
$$\ln|y| = -3x^2 + C.$$

Из начального условия $y(0) = 7$ мы находим, что $y(x)$ положительно в окрестности $x = 0$, так что мы можем опустить символы абсолютной величины:

$$\ln y = -3x^2 + C,$$

и, следовательно,

$$y(x) = e^{-3x^2+C} = e^{-3x^2}e^C = Ae^{-3x^2},$$

где $A = e^C$. Условие $y(0) = 7$ дает $A = 7$, так что искомое решение будет

$$y(x) = 7e^{-3x^2}.$$

Это верхняя жирная интегральная кривая, показанная на рис. 1.4.1. ■

Замечание. А теперь предположим, что начальное условие в примере 1 было следующее: $y(0) = -4$. Тогда из этого следовало бы, что $y(x)$ *отрицательно* в окрестности

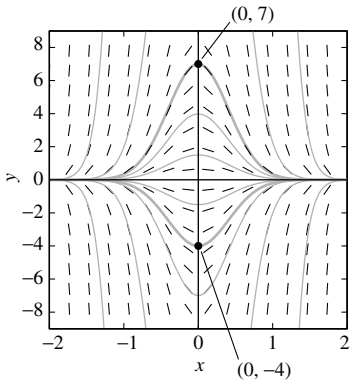


Рис. 1.4.1. Поле направлений и интегральные кривые уравнения $y' = -6xy$ из примера 1

$x = 0$. Мы должны поэтому заменить $|y|$ на $-y$ в проинтегрированном уравнении $\ln|y| = -3x^2 + C$, чтобы получить

$$\ln(-y) = -3x^2 + C.$$

Начальное условие тогда даст $C = \ln 4$, так что $\ln(-y) = -3x^2 + \ln 4$, и потому

$$y(x) = -4e^{-3x^2}.$$

Это нижняя жирная интегральная кривая на рис. 1.4.1. ■

Пример 2 Решим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4 - 2x}{3y^2 - 5}. \tag{5}$$

Решение Отделив переменные и проинтегрировав обе части, получим

$$\int (3y^2 - 5)\,dy = \int (4 - 2x)\,dx;$$

$$y^3 - 5y = 4x - x^2 + C. \tag{6}$$

Это уравнение не разрешено относительно y, т. е. y не выражено в виде явной функции x. ■

Пример 2 иллюстрирует, что на практике решение уравнения (4) (функция y) не обязательно должно быть задано как явная функция переменного x. В этом случае мы считаем (4) *неявным решением* дифференциального уравнения (2). Таким образом, уравнение (6) дает неявное решение дифференциального уравнения (5). Хотя решить уравнение (6), т. е. найти y как явную функцию x, неудобно, мы видим, что каждая интегральная кривая $y = y(x)$ лежит на линии уровня (на контурной линии) функции

$$H(x, y) = x^2 - 4x + y^3 - 5y,$$

т. е. на кривой, на которой функция $H(x, y) = x^2 - 4x + y^3 - 5y$ постоянна. На рис. 1.4.2 показаны несколько линий уровня.

Пример 3 Чтобы решить задачу Коши (задачу с начальными условиями)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4 - 2x}{3y^2 - 5}, \quad y(1) = 3, \tag{7}$$

мы делаем замену $x = 1$ и $y = 3$ в уравнении (6) и получаем $C = 9$. Таким образом, искомое частное решение $y(x)$ определено неявно уравнением

$$y^3 - 5y = 4x - x^2 + 9. \tag{8}$$

Соответствующая интегральная кривая $y = y(x)$ лежит на верхней линии уровня на рис. 1.4.2 — на той, которая проходит через точку $(1, 3)$. Поскольку график дифференцируемого решения нигде не может иметь вертикальной касательной, из рисунка видно, что это частное решение определено на интервале $(-1, 5)$, а не на интервале $(-3, 7)$.■

Замечание 1. Если конкретное значение x подставить в уравнение (8), можно найти числовое значение y. Например, подставив $x = 4$, получим уравнение

$$f(y) = y^3 - 5y - 9 = 0.$$

На рис. 1.4.3 показан график функции f. С помощью графического калькулятора мы можем решить это уравнение и найти единственный действительный корень $y \approx 2{,}8552$. Это даст значение $y(4) \approx 2{,}8552$ из частного решения в примере 3.

Замечание 2. Если начальное условие в (7) заменено условием $y(1) = 0$, то полученное частное решение дифференциального уравнения в (5) лежит на нижней "половине" овальной контурной кривой, изображенной на рис. 1.4.2. Это частное решение, проходящее через точку $(1, 0)$, определено на интервале $(0, 4)$, а не на интервале $(-1, 5)$. С другой

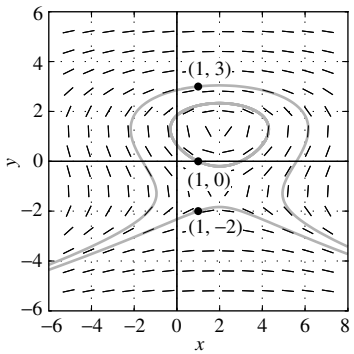


Рис. 1.4.2. Поле направлений и интегральные кривые уравнения $y' = (4 - 2x)/(3y^2 - 5)$ из примера 2

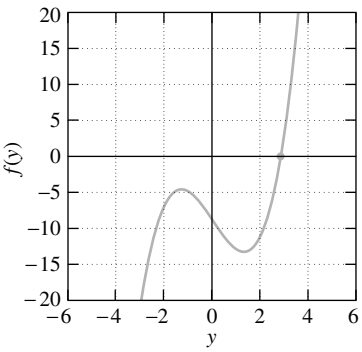


Рис. 1.4.3. График функции $f(y) = y^3 - 5y - 9$

стороны, для начального условия $y(1) = -2$ мы получаем нижнюю линию уровня на рис. 1.4.2. Это частное решение определено для всех x. Таким образом, от начального условия может зависеть, определено ли частное решение на всей линии или только на некотором ограниченном интервале. Воспользовавшись системой компьютерной алгебры, можно легко вычислить таблицу значений y, являющихся решениями уравнения (8), для значений x от $x = -1$ до $x = 5$ (например) с желаемым шагом (приращением) аргумента x. Такая таблица значений фактически служит "числовым решением" задачи Коши (задачи с начальными условиями) (7). ■

Неявные и особые решения

Вообще говоря, уравнение $K(x, y) = 0$ называют **неявным решением** дифференциального уравнения, если оно удовлетворяется (на некотором интервале) некоторым решением $y = y(x)$ дифференциального уравнения. Но заметьте, что частное решение $y = y(x)$, полученное из уравнения $K(x, y) = 0$, не обязано удовлетворять заданное начальное условие. Например, дифференцирование $x^2 + y^2 = 4$ дает

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0,$$

так что $x^2 + y^2 = 4$ — неявное решение дифференциального уравнения $x + yy' = 0$. Но только первое из двух явных решений

$$y(x) = +\sqrt{4 - x^2} \quad \text{и} \quad y(x) = -\sqrt{4 - x^2}$$

удовлетворяет начальному условию $y(0) = 2$ (рис. 1.4.4).

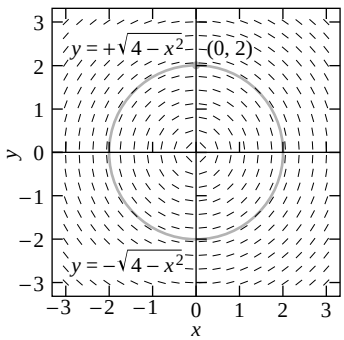


Рис. 1.4.4. Поле направлений и интегральные кривые уравнения $y' = -x/y$

Рассуждение, приведенное перед примером 1, показывает, что каждое частное решение уравнения (2) удовлетворяет уравнению (4) для некоторого значения C; *именно поэтому* удобно (4) назвать **общим решением** уравнения (2).

Предупреждение. Предположим, однако, что мы начинаем с дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \tag{9}$$

и делим обе его части на $h(y)$, чтобы получить уравнение с разделенными переменными

$$\frac{1}{h(y)}\frac{dy}{dx} = g(x). \tag{10}$$

Если y_0 — корень уравнения $h(y) = 0$, т. е. если $h(y_0) = 0$, то постоянная функция $y(x) \equiv \equiv y_0$, несомненно, представляет собой решение уравнения (9), но оно может *не* содержаться в общем решении уравнения (10). Таким образом, решения дифференциального уравнения можно потерять в результате деления на обращающийся в нуль множитель. (Действительно, посторонние решения могут быть получены после умножения на обращающийся в нуль множитель. Это явление подобно появлению посторонних корней при решении алгебраических уравнений.)

В разделе 1.5 мы увидим, что каждое частное решение *линейного* дифференциального уравнения первого порядка содержится в его общем решении. Однако обычно нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка имеет и общее решение, содержащее произвольную постоянную C, и одно или несколько частных решений, которые не могут быть получены ни при каком значении C. Эти исключительные решения часто называют **особыми решениями**. В задаче 30 мы просим показать, что общее решение дифференциального уравнения $(y')^2 = 4y$ представляет собой семейство парабол $y = (x - C)^2$, показанных на рис. 1.4.5, и заметить, что константа-функция $y(x) \equiv 0$ — особое решение, которое не может быть получено из общего решения никаким выбором произвольной постоянной C.

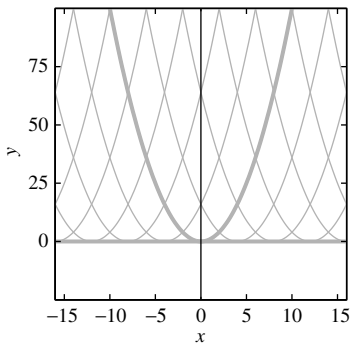


Рис. 1.4.5. Общие интегральные кривые $y = (x - C)^2$ и особая интегральная кривая $y = 0$ дифференциального уравнения $(y')^2 = 4y$

Пример 4 Найдем все решения дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = 6x(y - 1)^{2/3}.$$

Решение Разделение переменных дает

$$\int \frac{1}{3(y-1)^{2/3}}\,dy = \int 2x\,dx;$$

$$(y-1)^{1/3} = x^2 + C;$$

$$y(x) = 1 + (x^2 + C)^3.$$

Положительные значения произвольной постоянной C дают те из интегральных кривых, показанных на рис. 1.4.6, которые лежат выше линии $y = 1$, тогда как отрицательные значения дают интегральные кривые, лежащие ниже ее. Значение $C = 0$ дает решение $y(x) = 1 + x^6$, но *ни* одно значение C не дает особое решение $y(x) \equiv 1$, которое было потеряно в результате разделения переменных. Обратите внимание, что два различных решения $y(x) \equiv 1$ и $y(x) = 1 + (x^2 - 1)^3$ удовлетворяют начальному условию $y(1) = 1$. Действительно, вся особая интегральная кривая $y = 1$ состоит из точек, в которых решение не единственно, а функция $f(x, y) = 6x(y-1)^{2/3}$ не дифференцируема. ■

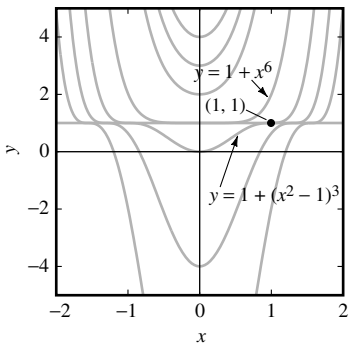


Рис. 1.4.6. Общие и особые интегральные кривые уравнения $y' = 6x(y-1)^{2/3}$

Естественный рост и распад

Дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = kx \quad (k \text{ константа}) \tag{11}$$

служит математической моделью для невероятно широкого диапазона естественных явлений — всех тех, в которых скорость изменения некоторой величины пропорциональна ее текущему значению. Вот некоторые примеры.

Прирост популяции. Предположим, что $P(t)$ — численность популяции (людей, насекомых или бактерий), у которой *постоянны* показатели рождаемости и смертности β и δ

(количество рождений и случаев смерти на определенное количество особей в единицу времени). Тогда в течение короткого временного интервала Δt происходит приблизительно $\beta P(t)\Delta t$ рождений и $\delta P(t)\Delta t$ случаев смерти, так что $P(t)$ изменяется приблизительно на

$$\Delta P \approx (\beta - \delta)P(t)\Delta t,$$

и поэтому

$$\frac{dP}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = kP, \tag{12}$$

где $k = \beta - \delta$.

Сложные проценты. Пусть $A(t)$ — сумма (в долларах) на сберегательном счету в момент времени t (в годах). Кроме того, пусть *сложные проценты начисляются непрерывно* с ежегодной процентной ставкой r. (Обратите внимание, что 10%-ной ежегодной ставке соответствует значение $r = 0{,}10$.) Непрерывное начисление сложных процентов означает, что в течение короткого временного интервала Δt на счет добавляется приблизительно $\Delta A = rA(t)\Delta t$, так что

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = rA. \tag{13}$$

Радиоактивный распад. Пусть образец некоторого вещества содержит $N(t)$ атомов некоторого радиоактивного изотопа в момент времени t. Известно, что некоторая часть радиоактивных атомов спонтанно распадется (превращаясь в атомы другого элемента или в другой изотоп того же самого элемента) в течение каждой единицы времени. Следовательно, образец ведет себя точно так, как население с постоянным показателем смертности и нулевым приростом (атомы не рождаются). Чтобы написать уравнение модели для $N(t)$, мы используем уравнение (12), в котором N займет место P, а $k > 0$ подставим вместо δ и положим $\beta = 0$. Таким образом мы получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dN}{dt} = -kN. \tag{14}$$

Значение k зависит от вида радиоактивного изотопа.

Ключ к *радиоуглеродному методу*, позволяющему датировать образец, состоит в том, что в любом живом существе отношение количество атомов углерода к количеству атомов радиоактивного изотопа углерода ^{14}C постоянно. Это отношение остается постоянным, потому что процент ^{14}C в атмосфере остается почти постоянным, живые организмы непрерывно потребляют углерод из воздуха или из других живых организмов, в которых содержатся атомы ^{14}C в том же самое постоянном соотношении к обыкновенным атомам ^{12}C. Это же самое соотношение характерно для всех живых организмов, потому что процессы, протекающие в живых организмах, с химической точки зрения, кажется, не зависят от различий между этими двумя изотопами.

Отношение ^{14}C к обычному углероду в атмосфере остается постоянным, потому что, хотя ^{14}C радиоактивен и медленно распадается, его количество непрерывно пополняется из-за превращения ^{14}N (обыкновенного азота) в ^{14}C под воздействием космических лучей в верхних слоях атмосферы. За весьма длительную историю планеты, этот процесс распада и пополнения вошел в почти установившееся состояние.

Конечно, когда организм умирает, метаболизм углерода в нем прекращается, и в нем в процессе радиоактивного распада начинает уменьшаться содержание ^{14}C. Так как после смерти ^{14}C не пополняется, отношение ^{14}C к обычному углероду начинает уменьшаться. Измеряя это отношение, можно узнать, сколько времени прошло после смерти организма. Для таких целей необходимо измерить значение **постоянной распада** k. Для ^{14}C оно известно: $k \approx 0{,}0001216$, если t измеряется в годах.

(Метод не столь прост, как мы изложили его здесь. При применении методики радиоуглеродного датирования приходится принимать меры чрезвычайной предосторожности, чтобы избежать загрязнения образца органическими веществами или даже обыкновенным свежим воздухом. Кроме того, очевидно, что поток космических лучей не был постоянным, так что отношение ^{14}C в атмосфере изменилось за прошедшие столетия. Используя независимые методы датирования образцов, исследователи в этой области составили таблицы поправочных коэффициентов, которые позволяют увеличить точность данного метода.)

Выведение препарата из организма. Во многих случаях, когда количество $A(t)$ некоторого препарата превышает естественный уровень этого препарата в крови, скорость уменьшения пропорциональна текущему избыточному количеству. Иными словами,

$$\frac{dA}{dt} = -\lambda A, \tag{15}$$

где $\lambda > 0$. Параметр λ называется **константой выведения** препарата.

Уравнение естественного роста

Дифференциальное уравнение вида $dx/dt = kx$ при $x(t) > 0$ и постоянном (отрицательном или положительном) k легко решается путем разделения переменных и последующим интегрированием:

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \int k\, dt;$$

$$\ln x = kt + C.$$

Затем мы решаем его относительно x:

$$e^{\ln x} = e^{kt+C}; \quad x = x(t) = e^C e^{kt} = Ae^{kt}.$$

Поскольку C — константа, $A = e^C$. Также ясно, что $A = x(0) = x_0$, так что частное решение уравнения (11) с начальным условием $x(0) = x_0$ — это просто

➤
$$x(t) = x_0 e^{kt}. \tag{16}$$

Решение этого уравнения содержит показательную функцию (с основанием, равным основанию натуральных логарифмов), а само дифференциальное уравнение

➤
$$\frac{dx}{dt} = kx \tag{17}$$

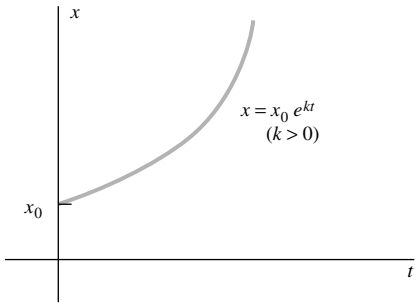


Рис. 1.4.7. Естественный рост

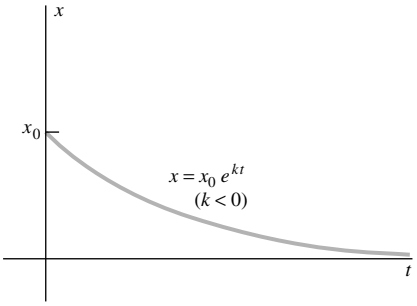


Рис. 1.4.8. Естественный распад

часто называется **уравнением экспоненциального роста**, или **уравнением естественного роста**. На рис. 1.4.7 показан типичный график $x(t)$ в случае $k > 0$; случай $k < 0$ показан на рис. 1.4.8.

Пример 5 Согласно данным, приведенным в **www.census.gov**, полная численность населения всего мира достигла 6 миллиардов человек в середине 1999 года и в то время увеличивалась со скоростью приблизительно 212 тысяч человек в день. Принимая, что естественный прирост населения продолжается с этой же скоростью, мы хотим ответить на следующие вопросы.

(a) Каков ежегодный прирост k?

(b) Какой будет численность мирового населения в середине XXI столетия?

(c) Сколько потребуется времени, чтобы население в мире увеличилось десятикратно, т. е. достигло 60 миллиардов? (Некоторые демографы считают, что это максимальная численность населения, которое планета может обеспечить адекватными запасами продовольствия.)

Решение **(a)** Мы измеряем численность мирового населения $P(t)$ в миллиардах, а время — в годах. Мы полагаем $t = 0$ для середины 1999 года, так что $P_0 = 6$. Поскольку P увеличивается на 212 000, или на 0,000212 миллиарда людей в день в момент времени $t = 0$, это значит, что

$$P'(0) = (0{,}000212)(365{,}25) \approx 0{,}07743$$

миллиардов в год. Из уравнения естественного роста $P' = kP$ при $t = 0$ получаем

$$k = \frac{P'(0)}{P(0)} \approx \frac{0{,}07743}{6} \approx 0{,}0129.$$

Таким образом, численность мирового населения ежегодно возрастает приблизительно на 1,29% (по крайней мере, таким был прирост в 1999 году). Это значение k дает функцию роста мирового населения

$$P(t) = 6e^{0{,}0129t}.$$

(b) При $t = 51$ мы получаем предсказание численности мирового населения

$$P(51) = 6e^{(0,0129)(51)} \approx 11{,}58 \text{ (миллиарда)}$$

в середине 2050 года (так что население после 1999 года почти удвоится за срок, чуть больший полстолетия).

(c) Численность мирового населения должна достигнуть 60 миллиардов, когда

$$60 = 6e^{0,0129t}; \quad \text{т. е. когда } t = \frac{\ln 10}{0{,}0129} \approx 178;$$

т. е. в 2177 году. ■

Обратите внимание. На самом деле ожидается, что скорость роста мирового населения несколько замедлится в течение следующего полустолетия и лучшее текущее предсказание для численности населения в 2050 году — "только" 9,1 миллиарда. Нельзя ожидать, что простая математическая модель может точно отражать сложный реальный мир.

Постоянная распада радиоактивного изотопа часто определяется через другую эмпирическую константу, *период полураспада* изотопа, потому что обычно более удобен именно этот параметр. **Период полураспада** τ радиоактивного изотопа — время, требуемое для распада *половины* этого вещества. Чтобы найти соотношение между k и τ, мы полагаем $t = \tau$ и $N = \frac{1}{2}N_0$ в уравнении $N(t) = N_0e^{kt}$, так что $\frac{1}{2}N_0 = N_0e^{k\tau}$. Решив это уравнение относительно τ, найдем, что

$$\tau = \frac{\ln 2}{k}. \tag{18}$$

Например, период полураспада ^{14}C $\tau \approx (\ln 2)/(0{,}0001216)$, т. е. приблизительно 5700 лет.

Пример 6 Образец древесного угля, найденный в Стоунхедже, содержит 63% ^{14}C от его содержания в образце современного древесного угля равной массы. Каков возраст найденного образца?

Решение Мы полагаем $t = 0$ в момент смерти дерева, из которого был взят древесный уголь в Стоунхедже, и обозначаем через N_0 количество атомов ^{14}C, которые образец из Стоунхеджа содержал в момент смерти дерева. Поэтому теперь $N = (0{,}63)N_0$, так что мы решаем уравнение $(0{,}63)N_0 = N_0e^{-kt}$ со значением $k = 0{,}0001216$. Таким образом, мы находим

$$t = -\frac{\ln(0{,}63)}{0{,}0001216} \approx 3800 \text{ (лет)}.$$

Таким образом, образцу приблизительно 3800 лет. Если этот образец имеет что-нибудь общее со строительством Стоунхеджа, наши вычисления позволяют предположить, что эта обсерватория, памятник или храм — чем бы это сооружение ни было — построено не позже 1800 года до н.э. ■

Охлаждение и нагревание

Согласно закону охлаждения Ньютона (уравнение (3) из раздела 1.1), скорость изменения температуры $T(t)$ тела, погруженного в среду с постоянной температурой A, пропорциональна разности $A - T$. Иными словами,

$$\frac{dT}{dt} = k(A - T), \tag{19}$$

где k — положительная константа. Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами:

➤
$$\frac{dx}{dt} = ax + b. \tag{20}$$

Оно включает показательное уравнение как частный случай ($b = 0$) и также просто решается разделением переменных.

Пример 7 4 фунта мяса, предварительно нагретые до $50°\text{F}$, начинают жариться в духовке при $375°\text{F}$ в 17:00. После 75 минут оказывается, что температура $T(t)$ равна $125°\text{F}$. Когда температура жаркого будет равна $150°\text{F}$ (средний тип, не пережарено и не недожарено)?

Решение Мы измеряем время t в минутах, причем $t = 0$ соответствует 17:00. Мы также предполагаем (несколько нереалистично), что в любой момент температура $T(t)$ жаркого одинакова по всему жаркому. Мы имеем $T(t) < A = 375$, $T(0) = 50$ и $T(75) = 125$. Следовательно,

$$\frac{dT}{dt} = k(375 - T);$$

$$\int \frac{1}{375 - T}\, dT = \int k\, dt;$$

$$-\ln(375 - T) = kt + C;$$

$$375 - T = Be^{-kt}.$$

Теперь из $T(0) = 50$ получаем $B = 325$, так что $T(t) = 375 - 325e^{-kt}$. Мы также знаем, что $T = 125$ при $t = 75$. Подстановка этих значений в предыдущее уравнение влечет

$$k = -\tfrac{1}{75} \ln\left(\tfrac{250}{325}\right) \approx 0{,}0035.$$

Следовательно, мы наконец решаем уравнение

$$150 = 375 - 325e^{(-0{,}0035)t}$$

для $t = -[\ln(225/325)]/(0{,}0035) \approx 105$ (минут), общее время, требуемое для приготовления жаркого. Поскольку жаркое было помещено в духовку в 17:00, его нужно вынуть из нее примерно в 18:45. ■

Закон Торричелли

Предположим, что водный резервуар имеет отверстие в основании, через которое вытекает вода. Пусть площадь отверстия равна a. Обозначим через $y(t)$ глубину воды в резервуаре в момент времени t, а через $V(t)$ — объем воды в резервуаре. При некоторых идеальных условиях скорость воды, вытекающей через отверстие, равна

$$v = \sqrt{2gy}, \tag{21}$$

т. е. равна скорости, которую вытекающая вода приобрела бы при свободном падении с поверхности воды до отверстия (см. задачу 35 из раздела 1.2). Эту формулу можно получить, если сделать предположение, что сумма кинетической и потенциальной энергии системы остается постоянной. При реальных условиях, принимая во внимание сжатие воды в струе, вытекающей из отверстия, $v = c\sqrt{2gy}$, где c — эмпирическая константа между 0 и 1 (обычно она равна приблизительно 0,6 для маленького непрерывного потока воды). Для простоты мы принимаем $c = 1$ в следующем обсуждении.

Вследствие уравнения (21) мы имеем

$$\frac{dV}{dt} = -av = -a\sqrt{2gy} \tag{22a}$$

или, эквивалентно,

$$\frac{dV}{dt} = -k\sqrt{y}, \quad \text{где} \quad k = a\sqrt{2g}. \tag{22b}$$

Это — закон Торричелли для жидкости, вытекающей из резервуара. Если $A(y)$ обозначает горизонтальную площадь поперечного сечения резервуара на высоте y выше отверстия, метод вычисления объема через площади сечений дает

$$V = \int_0^y A(y)\,dy,$$

так что фундаментальная теорема анализа приводит к выводу, что $dV/dy = A(y)$, и поэтому

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = A(y)\frac{dy}{dt}. \tag{23}$$

Из уравнений (22) и (23) мы наконец получаем

$$A(y)\frac{dy}{dt} = -a\sqrt{2gy} = -k\sqrt{y}. \tag{24}$$

Это альтернативная форма закона Торричелли. ■

Пример 8 Полусферическая чаша высотой (радиусом) 4 фута и в момент времени $t = 0$ наполнена водой. В этот момент в основании резервуара открывается круговое отверстие диаметром 1 дюйм. Через какое время из резервуара вытечет вся вода?

Решение Из прямоугольного треугольника на рис. 1.4.9 находим, что

$$A(y) = \pi r^2 = \pi\left[16 - (4-y)^2\right] = \pi(8y - y^2).$$

При $g = 32$ фт/с^2 уравнение (24) принимает вид

$$\pi(8y - y^2)\frac{dy}{dt} = -\pi\left(\tfrac{1}{24}\right)^2\sqrt{2\cdot 32y}\,;$$

$$\int (8y^{1/2} - y^{3/2})\,dy = -\int \tfrac{1}{72}\,dt;$$

$$\tfrac{16}{3}y^{3/2} - \tfrac{2}{5}y^{5/2} = -\tfrac{1}{72}t + C.$$

Теперь $y(0) = 4$, так что

$$C = \tfrac{16}{3}\cdot 4^{3/2} - \tfrac{2}{5}\cdot 4^{5/2} = \tfrac{448}{15}.$$

Резервуар будет пуст, когда $y = 0$, т. е. когда

$$t = 72\cdot\tfrac{448}{15} \approx 2150 \text{ (с)};$$

Иными словами, приблизительно через 35 минут 50 секунд. Так что потребуется немного меньше 36 минут, чтобы из резервуара вытекла вся вода. ■

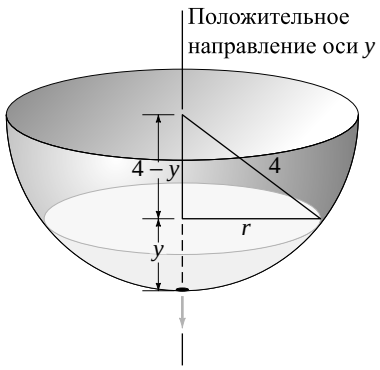


Рис. 1.4.9. Вытекание жидкости из полусферического резервуара

1.4. Задачи

Найдите общие решения (неявные, если необходимо, и явные, если это удобно) дифференциальных уравнений в задачах 1–18. Штрихи обозначают производные по x.

1. $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 0$

2. $\dfrac{dy}{dx} + 2xy^2 = 0$

3. $\dfrac{dy}{dx} = y \sin x$

4. $(1+x)\dfrac{dy}{dx} = 4y$

5. $2\sqrt{x}\,\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2}$

6. $\dfrac{dy}{dx} = 3\sqrt{xy}$

7. $\dfrac{dy}{dx} = (64xy)^{1/3}$

8. $\dfrac{dy}{dx} = 2x \sec y$

9. $(1-x^2)\dfrac{dy}{dx} = 2y$

10. $(1+x)^2\dfrac{dy}{dx} = (1+y)^2$

11. $y' = xy^3$

12. $yy' = x(y^2+1)$

13. $y^3\dfrac{dy}{dx} = (y^4+1)\cos x$

14. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{y}}$

15. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(x-1)y^5}{x^2(2y^3-y)}$

16. $(x^2+1)(\operatorname{tg} y)y' = x$

17. $y' = 1 + x + y + xy$ (*Указание*: разложите правую часть на множители.)

18. $x^2y' = 1 - x^2 + y^2 - x^2y^2$

Найдите явные частные решения задач Коши (задач с начальными условиями) в задачах 19–28.

19. $\dfrac{dy}{dx} = ye^x, \quad y(0) = 2e$

20. $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2(y^2+1), \quad y(0) = 1$

21. $2y\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-16}}, \quad y(5) = 2$

22. $\dfrac{dy}{dx} = 4x^3y - y, \quad y(1) = -3$

23. $\dfrac{dy}{dx} + 1 = 2y, \quad y(1) = 1$

24. $(\operatorname{tg} x)\dfrac{dy}{dx} = y, \quad y\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \frac{1}{2}\pi$

25. $x\dfrac{dy}{dx} - y = 2x^2y, \quad y(1) = 1$

26. $\dfrac{dy}{dx} = 2xy^2 + 3x^2y^2, \quad y(1) = -1$

27. $\dfrac{dy}{dx} = 6e^{2x-y}, \quad y(0) = 0$

28. $2\sqrt{x}\,\dfrac{dy}{dx} = \cos^2 y, \quad y(4) = \pi/4$

29. **(a)** Найдите общее решение дифференциального уравнения $dy/dx = y^2$. **(b)** Найдите особое решение, которое не входит в общее решение. **(c)** Взгляните на эскиз типичных интегральных кривых, чтобы определить точки (a, b), в которых задача Коши (задача с начальными условиями) $y' = y^2$, $y(a) = b$ имеет единственное решение.

30. Решите дифференциальное уравнение $(dy/dx)^2 = 4y$, чтобы убедиться, что на рис. 1.4.5 изображены общие интегральные кривые и особая интегральная кривая. Затем укажите все точки (a, b) плоскости, в которых задача Коши (задача с начальными условиями) $(y')^2 = 4y$, $y(a) = b$ **(a)** не имеет ни одного решения, **(b)** имеет бесконечно много решений, которые определены для всех x, **(c)** имеет конечное множество решений в некоторых окрестностях точки $x = a$.

31. Обсудите отличие между дифференциальными уравнениями $(dy/dx)^2 = 4y$ и $dy/dx = 2\sqrt{y}$. Имеют ли они те же самые интегральные кривые? Почему да или почему нет? Определите точки (a, b) на плоскости, в которых задача Коши (задача с начальными условиями) $y' = 2\sqrt{y}$, $y(a) = b$ **(a)** не имеет ни одного решения, **(c)** имеет единственное решение, **(b)** имеет бесконечно много решений.

32. Найдите общее решение и какое-нибудь особое решение дифференциального уравнения $dy/dx = y\sqrt{y^2-1}$. Определите точки (a, b) плоскости, в которых задача Коши (задача с начальными условиями) $y' = y\sqrt{y^2-1}$, $y(a) = b$ **(a)** не имеет ни одного решения, **(c)** имеет единственное решение, **(b)** имеет бесконечно много решений.

33. (Прирост населения.) Некоторый город имел население 25 000 человек в 1960 году, а в 1970 году численность его населения достигла 30 000 человек. Предположите, что его численность населения продолжит расти по экспоненте с постоянной скоростью. Какую численность населения его городские власти могут ожидать в 2000 году?

34. (Прирост популяции.) В некоторой культуре бактерий, число бактерий увеличилось шестикратно за 10 часов. Сколько времени потребуется для того, чтобы численность популяции удвоилась?

35. (Радиоуглеродный метод определения возраста.) Углерод, извлеченный из древнего черепа, содержал только одну шестую того количества углерода ^{14}C, которое содержит углерод, извлеченный из современной кости. Какого возраста череп?

36. (Радиоуглеродный метод определения возраста.) Углерод, взятый из образца, который как подразумевается, относится ко временам Христа, содержит $4{,}6\times10^{10}$ атомов ^{14}C в грамме. Углерод, извлеченный из современного аналогичного экземпляра, содержит $5{,}0\times10^{10}$ атомов ^{14}C в грамме. Вычислите приблизительный возраст экземпляра. Каково ваше мнение относительно его подлинности?

37. (Непрерывно начисляемые сложные проценты.) После рождения первого ребенка супружеская пара депонировала 5000 долл. на счет, по которому банк платит 8% дохода, начисляемый непрерывно. Выплачиваемый доход приплюсовывается к вкладу. Сколько долларов будет начислено на счет на восемнадцатый день рождения ребенка?

38. (Непрерывно начисляемые проценты.) Предположим, что вы обнаруживаете на вашем чердаке просроченную в библиотеке книгу, за которую ваш дедушка был должен был заплатить штраф 30 центов 100 лет назад. Если бы просроченный штраф рос по экспоненте по 5%-ной ежегодной норме, начисляемой непрерывно, сколько вы должны были бы заплатить, если бы вы возвратили книгу сегодня?

39. (Выведение препарата.) Предположим, что этанинал натрия (pentobarbitol) используется для обезболивания собаки. Состояние обезболивания у собак достигается, когда ее кровь содержит по крайней мере 45 мг этанинала натрия на килограмм веса собаки. Предположим также, что из крови собаки этанинал натрия выводится по экспоненте, с периодом полувыведения 5 часов. Какую разовую дозу нужно ввести, чтобы обезболить 50-килограммовую собаку на 1 час?

40. Период полураспада радиоактивного кобальта — 5,27 лет. Предположим, что в результате ядерной аварии уровень радиации кобальта в некотором регионе в 100 раз превысил уровень, приемлемый для проживания человека. В течение какого времени регион будет не пригодным для жилья? (Игнорируйте вероятное присутствие других радиоактивных изотопов.)

41. Предположим, что минерал, сформировавшийся в результате древнего катаклизма, — возможно, при формировании Земли, первоначально содержал изотоп урана ^{238}U (который имеет период полураспада $4{,}51\times10^{9}$ лет), но не содержал никакого конечного продукта радиоактивного распада ^{238}U. Если сегодня отношение атомов ^{238}U к атомам свинца в минерале равно 0,9, то когда произошел катаклизм?

42. Некоторая лунная порода содержит равные количества атомов аргона и калия. Предположите, что весь аргон — результат радиоактивного распада калия (его период полураспада равен около $1{,}28\times10^{9}$ лет) и что один из каждых девяти распадов атома калия дает атом аргона. Каков возраст лунной породы, если его исчислять со времени, когда она содержала только калий?

43. Кувшин пахты установлен у парадного крыльца, причем температура кувшина первоначально равна 25°C. Температура на крыльце равна 0°C. Предположим, что через 20 минут температура пахты понизилась до 15°C. Когда она будет равна 5°C?

44. Когда сахар растворяется в воде, количество A, которое осталось нерастворенным после t минут, удовлетворяет дифференциальному уравнению $dA/dt = -kA$ ($k > 0$). Если 25% саха-

ра растворилось за 1 минуту, то сколько потребуется времени, чтобы растворилась половина сахара?

45. Интенсивность света I на глубине x метров ниже поверхности озера удовлетворяет дифференциальному уравнению $dI/dx = (-1{,}4)I$. **(a)** На какой глубине интенсивность равна половине интенсивности I_0 на поверхности (где $x = 0$)? **(b)** Какова интенсивность на глубине 10 м (какую часть от I_0 составляет интенсивность на глубине 10 м)? **(c)** На какой глубине интенсивность будет равна 1% от интенсивности на поверхности?

46. Атмосферное давление p (в дюймах ртутного столба) на высоте x миль выше уровня моря удовлетворяет задаче Коши (задаче с начальными условиями) $dp/dx = (-0{,}2)p$, $p(0) = 29{,}92$. **(a)** Вычислите атмосферное давление на высоте 10000 футов и на высоте 30 000 футов. **(b)** Без специальной тренировки лишь немного людей могут выжить, когда давление упадет ниже 15 дюймов ртутного столба. На какой высоте это произойдет?

47. Однажды в городе с населением 100 000 человек начала распространяться сомнительная информация о наличии фенилэтиламина в питьевой воде. В течение недели 10 000 человек услышали этот слух. Предположите, что скорость увеличения числа тех, кто слышал этот слух, пропорциональна количеству тех, кто еще не услышал его. Когда половина населения города узнает этот слух?

48. Согласно одной космологической теории, при создании Вселенной в результате Большого взрыва были равные количества двух изотопов урана ^{235}U и ^{238}U. В настоящее время на каждый атом ^{235}U приходится 137,7 атома ^{238}U. Зная время полураспада изотопов урана ^{238}U ($4{,}51 \times$ $\times 10^9$ года) и ^{235}U ($7{,}10 \times 10^8$ года), вычислите возраст вселенной.

49. Пирог вынимается из духовки при 210°F и ставится охлаждаться при комнатной температуре 70°F. Через 30 минут температура пирога равна 140°F. Когда она будет равна 100°F?

50. Количество атмосферных загрязнителей $A(t)$ в некоторой горной долине возрастает по экспоненте и утраивается через каждые 7,5 года.

- **(a)** Пусть начальное количество равно 10 единицам загрязнителя. Напишите формулу для $A(t)$, дающую количество (в единицах загрязнителя) загрязнителя через t лет.
- **(b)** Какое количество загрязнителей (в единицах загрязнителя) будет в атмосфере долины через 5 лет?
- **(c)** Предположим, в долине опасно жить, когда количество загрязнителей достигает 100 единиц загрязнителя. Сколько для этого потребуется времени?

51. В результате аварии на атомной электростанции некоторый регион был загрязнен радиоактивным веществом, которое распадается по экспоненциальному закону. Начальное количество радиоактивного вещества равно 15 стронциевых единиц, а 5 месяцев спустя — все еще 10 стронциевых единиц. Предположим, что 1 стронциевая единица считается безопасным количеством для проживания.

- **(a)** Написать формулу, дающую количество $A(t)$ радиоактивного вещества (в стронциевых единицах) через t месяцев.
- **(b)** Какое количество радиоактивного вещества останется через 8 месяцев?
- **(c)** Через сколько месяцев останется $A = 1$ стронциевая единица, так что регион будет безопасным для людей?

52. В настоящее время во всем мире насчитывается приблизительно 3300 различных человеческих “языковых семейств”. Предположите, что все они возникли из единственного первоначального языка и что языковое семейство распадается на 1,5 языкового семейства каждые 6 тысяч лет. Когда же был единственный первоначальный разговорный язык?

53. Тысячи лет назад предки коренных американцев пересекли Берингов пролив из Азии и вошли в западное полушарие. С тех пор они расселились в Северной и Южной Америке. Единственный язык, на котором первоначально говорили коренные американцы, с тех пор распался на многие индийские языковые семейства. Примите (как в задаче 52), что количество этих семейств языка умножается на 1,5 каждые 6000 лет. Теперь насчитывается 150 языковых семейств коренных американцев в западном полушарии. Когда первые предки сегодняшних коренных американцев прибыли в Америку?

54. Резервуар имеет форму вертикального цилиндра, первоначально он заполнен водой на 9 футов; из основания в момент времени $t = 0$ (часы) вынимается пробка. После 1 часа глубина воды понизилась и стала равной 4 футам. Сколько потребуется времени, чтобы из резервуара вытекла вся вода?

55. Предположим, что резервуар в задаче 54 имеет радиус 3 фута и что в его основании есть круглое отверстие радиусом 1 дюйм. Сколько потребуется времени, чтобы из резервуара вытекла вся вода, если первоначально глубина воды равна 9 футам?

56. В момент времени $t = 0$ из основания (в вершине конуса) полного конического водного резервуара высотой 16 футов вынута пробка. После 1 часа глубина воды равна 9 футам. Когда резервуар будет пуст?

57. Предположим, что цилиндрический резервуар, первоначально содержащий V_0 галлонов воды, сливается через отверстие в основании за T минут. Используйте закон Торричелли, чтобы показать, что объем воды в резервуаре после $t \leqq T$ минут равен $V = V_0\,[1 - (t/T)]^2$.

58. Водный резервуар имеет форму тела, полученного вращением кривой $y = x^{4/3}$ вокруг оси y. Пробка в основании вынимается в 12 часов полудня, когда глубина воды в резервуаре равна 12 футов. В 13:00 глубина воды равна 6 футам. Когда резервуар будет пуст?

59. Водный резервуар имеет форму тела, полученного вращением параболы $x^2 = by$ вокруг оси y. Глубина воды равна 4 футам в 12 часов полудня, когда вынимается круглая пробка в основании резервуара. В 13:00 глубина воды равна 1 футу. **(a)** Найти глубину $y(t)$ воды, остающейся после t часов. **(b)** Когда резервуар будет пуст? **(c)** Предположим, что начальный радиус (верхний) поверхности воды равен 2 футам. Каков радиусом кругового отверстия в основании?

60. Цилиндрический резервуар длиной 5 футов и радиусом 3 фута расположен так, что его ось горизонтальна. Предположим, что круговое отверстие в основании с радиусом 1 дюйм открыто и резервуар первоначально заполнен наполовину ксилолом. Сколько времени потребуется, чтобы жидкость вытекла полностью?

61. Сферический резервуар радиусом 4 фута полон бензина, когда в основании открывается круглое отверстие радиусом 1 дюйм. Сколько времени потребуется, чтобы из резервуара вытек весь бензин?

62. Предположим, что первоначально полный полусферический водный резервуар радиуса 1 м поставлен на свое плоское дно. Он имеет в основании отверстие радиуса 1 см. Если это отверстие основания открыть в 13:00, когда резервуар будет пуст?

63. Рассмотрим первоначально полный полусферический водный резервуар из примера 8, но пусть теперь радиус r его кругового отверстия основания неизвестен. В 13:00 в основании открывается отверстие, и в 13:30 глубина воды в резервуаре равна 2 футам. **(a)** Используйте закон Торричелли в форме $dV/dt = -(0{,}6)\pi r^2\sqrt{2gy}$ (принимается во внимание сжатие), чтобы определить, когда резервуар будет пуст. **(b)** Каков радиус отверстия в основании?

64. (*Клепсидра*, или водные часы.) Нужно сконструировать (разработать) 12-часовые водные часы, имеющие измерения, показанные на рис. 1.4.10. Они должны иметь форму, подобную поверхности, полученной вращением кривой $y = f(x)$ вокруг оси y. Какова должна быть эта кривая? Каков должен быть радиус кругового отверстия в основании, чтобы уровень воды падал с *постоянной* скоростью 4 дюйма в час?

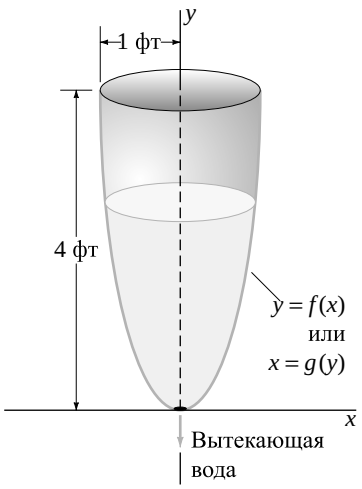


Рис. 1.4.10. Клепсидра

65. Как раз перед полуднем безжизненное тело жертвы убийства было найдено в комнате с постоянной температурой 70°F. В 12 полудня температура тела была равна 80°F, а в 13:00 — 75°F. Предположите, что температура тела во время смерти была $98{,}6^\circ$F и что оно охлаждалось в соответствии с законом Ньютона. Когда произошло убийство?

66. Однажды рано утром начался снегопад, причем количество выпадаемого снега росло с постоянной скоростью. В 7 утра снегоочиститель начал чистить дорогу. В 8 утра он очистил 2 мили, но снегоочистителю требовалось еще два часа (до 10 утра), чтобы пройти оставшиеся 2 мили. (a) Пусть $t = 0$ в момент, когда начался снегопад; через x обозначим расстояние, которое прошел снегоочиститель в момент времени t. Примем также предположение, что снегоочиститель очищает снег с постоянной скоростью (т. е. определенное количество кубических футов снега в час, например). Покажите, что

$$k\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$$

где k — константа. (b) Когда начал идти снег? (*Ответ*: в 6 утра.)

67. Снегоочиститель отправляется в 7 утра, как в задаче 66. Предположим теперь, что в 8 утра он прошел 4 мили и что в 9 утра очистил еще 3 мили. Когда начал идти снег? Это более трудная задача для снегоочистителя, потому что теперь, чтобы найти значение k, должно быть решено трансцендентное уравнение в числовой форме. (*Ответ*: в 4:27 утра.)

68. На рис. 1.4.11 показана бусинка, соскальзывающая без трения от точки P до точки Q. В *задаче о брахистохроне* спрашивается, какой формы должен быть провод, чтобы время соскальзывания бусинки (время спуска от P до Q) было минимальным. В июне 1696 года Иоганн Бернулли предложил научному сообществу решить эту задачу в течение не более чем 6 месяцев (позже этот срок был продлен до Пасхи 1697 года по просьбе Готфрида Лейбница). Исаак Ньютон, в то время уже оставивший академические занятия и занявший должность директора Монетного двора в Лондоне, получил вызов Бернулли 29 января 1697 года. Сразу же на следующий день он сообщил свое собственное решение Королевскому Обществу в Лондоне: кривая минимального времени спуска — это перевернутая дуга циклоиды. Чтобы получить современный вывод этого результата, предположите, что бусинка начинает соскальзывать с состояния покоя в начале координат P и пусть $y = y(x)$ — уравнение искомой кривой в системе координат, ось y которой направлена вниз. Тогда механический аналог закона Снеллиуса, часто применяемого в оптике,

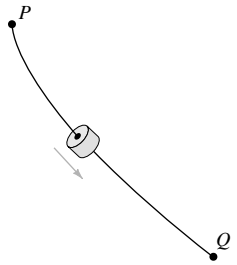


Рис. 1.4.11. Бусинка, соскальзывающая с провода — задача о брахистохроне

даст, что

$$\frac{\sin\alpha}{v} = \text{const}, \tag{i}$$

где α обозначает угол отклонения (от вертикальной линии) касательной к направляющей кривой, так что $\operatorname{ctg}\alpha = y'(x)$ (почему?) и $v = \sqrt{2gy}$ — скорость бусинки, когда она спустилась на расстояние y по вертикали (поскольку Кинетическая энергия $= \frac{1}{2}mv^2 = mgy = -$Потенциальной энергии).

(a) Сначала из уравнения (i) выведите дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a-y}{y}}, \tag{ii}$$

где a — подходящая положительная константа.

(b) Подставьте $y = 2a\sin^2 t$, $dy = 4a\sin t\cos t\,dt$ в (ii), чтобы получить решение

$$x = a(2t - \sin 2t), \quad y = a(1 - \cos 2t), \tag{iii}$$

для которого $t = y = 0$, когда $x = 0$. Наконец, подстановка $\theta = 2a$ в (iii) дает стандартное параметрическое уравнение $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ циклоиды, которая является траекторией точки на ободе кругового колеса радиуса a, когда оно катится по оси x. [См. пример 5 в разделе 10.4 учебника анализа Edwards and Penney, *Calculus*, 6th ed. (Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002).]

69. Предположим, что однородный гибкий кабель зажат в двух точках $(\pm L, H)$, находящихся на равных высотах, причем эти точки расположены симметрично по обеим сторонам оси y (рис. 1.4.12). С помощью законов физики можно показать, что форма $y = y(x)$ зависшего кабеля удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$a\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

где константа $a = T/\rho$ — отношение натяжения T кабеля в его самой низкой точке $x = 0$ (где $y'(0) = 0$) и его (постоянной) линейной плотности ρ. Если мы подставим $v = dy/dx$, $dv/dx = d^2y/dx^2$ в это дифференциальное уравнение второго порядка, мы получим уравнение первого порядка

$$a\frac{dv}{dx} = \sqrt{1+v^2}.$$

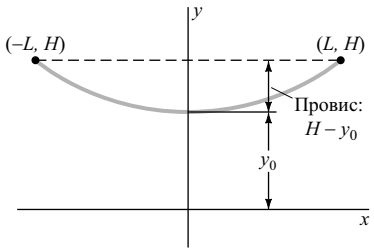


Рис. 1.4.12. Цепная линия

Решите это дифференциальное уравнение относительно $y'(x) = v(x) = \sinh(x/a)$. Затем проинтегрируйте его, чтобы получить функцию

$$y(x) = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right) + C,$$

описывающую форму провисшего кабеля. Эту кривую называют *цепной линией*, потому что именно по ней провисает тяжелая *цепь*.

1.4. Приложение. Логистическое уравнение

Как и в уравнении (3) из этого раздела, решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными приводит к вычислению двух неопределенных интегралов. Это соблазняет использовать систему компьютерной алгебры для этой цели. Мы иллюстрируем этот подход на примере *логистического дифференциального уравнения*

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2, \tag{1}$$

которое моделирует численность населения $x(t)$ с количеством рождений (в единицу времени), пропорциональным x, и количеством смертных случаев, пропорциональным x^2. Здесь мы сконцентрируемся на решении уравнения (1) и отложим обсуждение приложений прироста населения до раздела 2.1.

Например, если $a = 0{,}01$ и $b = 0{,}0001$, уравнение (1) принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = (0{,}01)x - (0{,}0001)x^2 = \frac{x}{10000}(100 - x). \tag{2}$$

Разделение переменных приводит к

$$\int \frac{1}{x(100-x)}\,dx = \int \frac{1}{10000}\,dt = \frac{t}{10000} + C. \tag{3}$$

Мы можем вычислить интеграл слева, используя команду *Maple*

```
int(1/(x*(100 - x)), x);
```

команду системы *Mathematica*

```
Integrate[ 1/(x*(100 - x)), x ]
```

или команду MATLAB

```
syms x;   int(1/(x*(100 - x)))
```

Любая система компьютерной алгебры дает результат вида

$$\frac{1}{100}\ln x - \frac{1}{100}\ln(x-100) = \frac{t}{10000} + C \tag{4}$$

эквивалентный результату графического калькулятора, показанному на рис. 1.4.13.

Вы можете теперь использовать начальное условие $x(0) = x_0$, объединить логарифмы и, наконец, выполнить потенцироваие, после чего решить уравнение (4) и найти частное решение

$$x(t) = \frac{100x_0e^{t/100}}{100 - x_0 + x_0e^{t/100}} \tag{5}$$

уравнения (2). Поле направлений и интегральные кривые показаны на рис. 1.4.14. Из рисунка видно, что независимо от начального значения x_0, решение $x(t)$ приближается к 100 при $t \to +\infty$. Вы можете с помощью уравнения (5) проверить эту догадку?

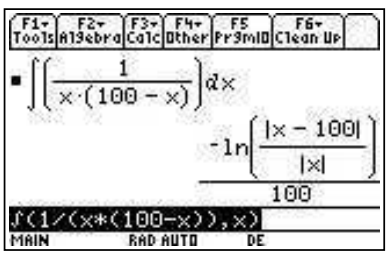


Рис. 1.4.13. На экране TI-89 показан интеграл уравнения (3)

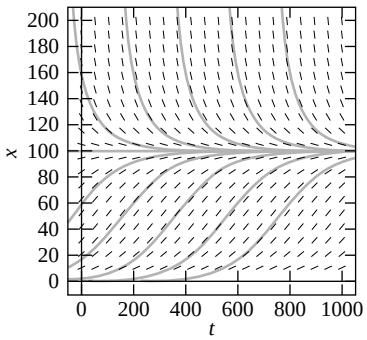


Рис. 1.4.14. Поле направлений и интегральные кривые уравнения $x' = (0{,}01)x - (0{,}0001)x^2$

Исследование. Исследуйте частный случай логистического уравнения (1), в котором $a = m/n$ и $b = 1/n$, причем m и n пусть будут *наибольшими* двумя различными цифрами (в любом порядке) в вашем номере студенческого билета.

- **(a)** Сначала начертите поле направлений для полученного дифференциального уравнения, причем изобразите достаточное количество интегральных кривых, чтобы увидеть то, что случится с населением при $t \to +\infty$. Сформулируйте ваш вывод явно.
- **(b)** Затем используйте систему компьютерной алгебры, чтобы решить дифференциальное уравнение символически, а потом используйте символическое решение, чтобы найти предел $x(t)$ при $t \to +\infty$. Был ли правильным ваш вывод, основанный на графиках?

(c) Наконец, поставьте и решите числовую задачу, используя символическое решение. Например, сколько времени потребуется, чтобы x возросло от заданного начального значения x_0 до заданного значения x_1?

1.5. Линейные уравнения первого порядка

В разделе 1.4 мы научилось решать дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, интегрируя его *после* умножения обеих частей на подходящий множитель. Например, чтобы решить уравнение

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \quad (y > 0), \tag{1}$$

мы умножаем его обе части на множитель $1/y$, чтобы получить

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = 2x; \quad \text{т. е.} \quad D_x\left(\ln y\right) = D_x\left(x^2\right). \tag{2}$$

Поскольку каждая часть уравнения (2) рассматривается как *производная* (по независимой переменной x), все, что остается, — два простых интегрирования, которые приводят к уравнению $\ln y = x^2 + C$. По этой причине функция $\rho(y) = 1/y$ называется интегрирующим множителем для первоначального уравнения (1). **Интегрирующий множитель** дифференциального уравнения — это функция $\rho(x, y)$, такая что умножение каждой части дифференциального уравнения на $\rho(x, y)$ приводит к уравнению, в котором каждая часть может рассматриваться как производная.

Умножая обе части уравнения на подходящий интегрирующий множитель, можно стандартным методом решать **линейные уравнения первого порядка**

➤
$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{3}$$

на интервале, на котором непрерывны коэффициенты (функции) $P(x)$ и $Q(x)$. Мы умножаем каждую часть в уравнении (3) на интегрирующий множитель

➤
$$\rho(x) = e^{\int P(x)\,dx}. \tag{4}$$

Результат —

$$e^{\int P(x)\,dx}\frac{dy}{dx} + P(x)e^{\int P(x)\,dx}y = Q(x)e^{\int P(x)\,dx}. \tag{5}$$

Поскольку

$$D_x\left[\int P(x)\,dx\right] = P(x),$$

левая часть — производная *произведения* $y(x) \cdot e^{\int P(x)\,dx}$, так что уравнение (5) эквивалентно

$$D_x\left[y(x) \cdot e^{\int P(x)\,dx}\right] = Q(x)e^{\int P(x)\,dx}.$$

Интегрирование обеих частей этого уравнения дает

$$y(x)e^{\int P(x)\,dx} = \int \left(Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\right)\,dx + C.$$

Наконец, решая это уравнение относительно y, получаем общее решение линейного уравнения первого порядка (3):

$$y(x) = e^{-\int P(x)\,dx}\left[\int \left(Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\right)\,dx + C\right]. \tag{6}$$

Эту формулу **не нужно** запоминать. В конкретной задаче вообще проще использовать *метод*, которым мы вывели формулу. Иными словами, чтобы решить уравнение, которое может быть записано в форме уравнения (3) с коэффициентами (функциями) $P(x)$ и $Q(x)$, заданными явно, нужно попытаться выполнить следующие шаги.

МЕТОД: РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1. Сначала вычислить интегрирующий множитель $\rho(x) = e^{\int P(x)\,dx}$.
2. Затем умножить обе части дифференциального уравнения на $\rho(x)$.
3. Затем левую часть получившегося уравнения рассмотреть как производную произведения:
$$D_x\left[\rho(x)y(x)\right] = \rho(x)Q(x).$$
4. Наконец, проинтегрировать полученное уравнение
$$\rho(x)y(x) = \int \rho(x)Q(x)\,dx + C,$$
а затем решить его относительно y, чтобы получить общее решение первоначального дифференциального уравнения.

Замечание 1. Учитывая начальное условие $y(x_0) = y_0$, можно обычно подставить $x = x_0$ и $y = y_0$ в общее решение и решить его относительно значения C, что даст частное решение, которое удовлетворяет этому начальному условию.

Замечание 2. Вы не обязаны указывать явно постоянную интегрирования, когда находите интегрирующий множитель $\rho(x)$. Ведь если в равенстве (4) мы заменим

$$\int P(x)\,dx \quad \text{на} \quad \int P(x)\,dx + K,$$

то в результате получится

$$\rho(x) = e^{K+\int P(x)\,dx} = e^K e^{\int P(x)\,dx}.$$

Но постоянный множитель e^K не влияет существенно на результат умножения обеих частей дифференциального уравнения на $\rho(x)$, так что мы могли бы также взять $K = 0$. Вы можете поэтому выбрать для $\int P(x)\,dx$ *любую* удобную примитивную $P(x)$, не беспокоясь о прибавлении постоянной интегрирования. ■

Пример 1 Решим задачу Коши (задачу с начальными условиями)

$$\frac{dy}{dx} - y = \tfrac{11}{8}e^{-x/3}, \quad y(0) = -1.$$

Решение Здесь мы имеем $P(x) \equiv -1$ и $Q(x) = \frac{11}{8}e^{-x/3}$, так что интегрирующий множитель

$$\rho(x) = e^{\int (-1)\,dx} = e^{-x}.$$

Умножение обеих частей данного уравнения на e^{-x} влечет

$$e^{-x}\frac{dy}{dx} - e^{-x}y = \tfrac{11}{8}e^{-4x/3}, \tag{7}$$

что мы рассматриваем как

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x}y\right) = \tfrac{11}{8}e^{-4x/3}.$$

Следовательно, интегрирование по x дает

$$e^{-x}y = \int \tfrac{11}{8}e^{-4x/3}\,dx = -\tfrac{33}{32}e^{-4x/3} + C,$$

и умножение на e^{x} дает общее решение

$$y(x) = Ce^{x} - \tfrac{33}{32}e^{-x/3}. \tag{8}$$

Подстановка $x = 0$ и $y = -1$ теперь дает $C = \frac{1}{32}$, так что искомое частное решение представляет собой функцию

$$y(x) = \tfrac{1}{32}e^{x} - \tfrac{33}{32}e^{-x/3} = \tfrac{1}{32}\left(e^{x} - 33e^{-x/3}\right). \qquad \blacksquare$$

Замечание. На рис. 1.5.1 показано поле направлений и типичные интегральные кривые уравнения (7), включая и ту, которая проходит через точку $(0, -1)$. Обратите внимание, что некоторые решения растут быстро в положительном направлении (т. е. при увеличении x), в то время как другие растут быстро в отрицательном направлении. Поведение данной интегральной кривой определено начальным условием $y(0) = y_0$. Два типа поведения отделены частным решением $y(x) = -\frac{33}{32}e^{-x/3}$, которое получается из равенства (8), если в нем положить $C = 0$. Поэтому для интегральной кривой, которая выделена штриховой линией на рис. 1.5.1, $y_0 = -\frac{33}{32}$. Если $y_0 > -\frac{33}{32}$, то $C > 0$ в уравнении (8), так что член e^{x} в конечном счете определяет поведение $y(x)$ и, следовательно, $y(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$. Но если $y_0 < -\frac{33}{32}$, то $C < 0$, так что оба слагаемых в $y(x)$ отрицательны, и поэтому $y(x) \to -\infty$ при $x \to +\infty$. Таким образом, начальное условие $y_0 = -\frac{33}{32}$ является *критическим* в том смысле, что решения, начало которых лежит выше $-\frac{33}{32}$ на оси y, растут в положительном направлении, а решения, начало которых лежит ниже $-\frac{33}{32}$, растут в отрицательном направлении при $x \to +\infty$. Интерпретация математической модели часто зависит от обнаружения такого критического условия, которое отделяет один вид поведения решения от другого вида поведения. $\blacksquare$

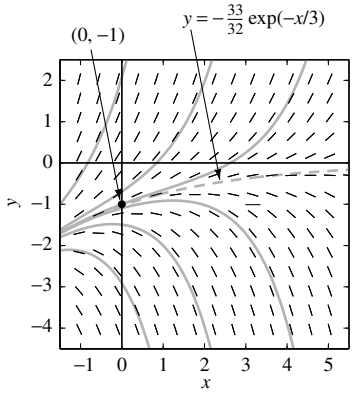


Рис. 1.5.1. Поле направлений и интегральные кривые уравнения $y' = y + \frac{11}{8}e^{-x/3}$

Пример 2 Найдем общее решение уравнения

$$(x^2+1)\frac{dy}{dx} + 3xy = 6x. \tag{9}$$

Решение После деления обеих частей уравнения на x^2+1 мы рассматриваем результат

$$\frac{dy}{dx} + \frac{3x}{x^2+1}y = \frac{6x}{x^2+1}$$

как линейное уравнение первого порядка с коэффициентами $P(x) = 3x/(x^2+1)$ и $Q(x) = 6x/(x^2+1)$. Умножение на

$$\rho(x) = \exp\left(\int \frac{3x}{x^2+1}\,dx\right) = \exp\left(\tfrac{3}{2}\ln(x^2+1)\right) = (x^2+1)^{3/2}$$

дает

$$(x^2+1)^{3/2}\frac{dy}{dx} + 3x(x^2+1)^{1/2}y = 6x(x^2+1)^{1/2},$$

и, таким образом,

$$D_x\left[(x^2+1)^{3/2}y\right] = 6x(x^2+1)^{1/2}.$$

Интегрирование влечет

$$(x^2+1)^{3/2}y = \int 6x(x^2+1)^{1/2}\,dx = 2(x^2+1)^{3/2} + C.$$

Умножение обеих частей на $(x^2+1)^{-3/2}$ дает общее решение

$$y(x) = 2 + C(x^2+1)^{-3/2}. \tag{10}$$

■

Замечание. На рис. 1.5.2 показано поле направлений и типичные интегральные кривые уравнения (9). Обратите внимание на то, что при $x \to +\infty$ все другие интегральные кривые приближаются к горизонтальной интегральной кривой (графику постоянной функции) $y(x) \equiv 2$, которой соответствует $C = 0$ в уравнении (10). Это постоянное решение может быть описано как *равновесное решение* дифференциального уравнения, потому что $y(0) = 2$ подразумевает, что $y(x) = 2$ для всех x (и таким образом значение решения не изменяется, т. е. не зависит от выбора начального значения). ■

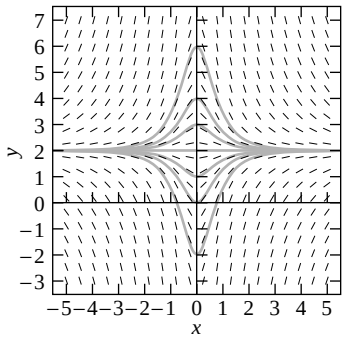


Рис. 1.5.2. Поле направлений и интегральные кривые дифференциального уравнения (9)

Более пристальный взгляд на метод разделения переменных

На предыдущее решение уравнения линейного уравнения первого порядка $y' + Py = Q$, выраженное формулой (6), стоит взглянуть более пристально. Предположим, что коэффициенты-функции $P(x)$ и $Q(x)$ непрерывны (хотя, возможно, и неограничены) на открытом интервале I. Тогда примитивные

$$\int P(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int \left(Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\right) dx$$

существуют на I. Наш вывод уравнения (6) показывает, что *если* $y = y(x)$ — решение уравнения (3) на I, *то* $y(x)$ дается формулой (6) при некотором значении константы C. Наоборот, можно проверить непосредственной заменой (задача 31), что функция $y(x)$, определенная равенством (6), удовлетворяет уравнению (3). Наконец, для заданной точки x_0 интервала I и любого числа y_0 существует (это отмечалось ранее) единственное значение C такое, что $y(x_0) = y_0$. Следовательно, мы доказали следующую теорему существования и единственности решения.

Теорема 1 Линейное уравнение первого порядка

Если функции $P(x)$ и $Q(x)$ непрерывны на открытом интервале I, содержащем точку x_0, то задача Коши (задача с начальными условиями)

➤
$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x), \quad y(x_0) = y_0 \tag{11}$$

имеет единственное решение $y(x)$ на I, даваемое равенством (6) при соответствующем значении C. ▲

Замечание 1. Теорема 1 дает решение *линейного* дифференциального уравнения на *всем* интервале I в отличие от теоремы 1 из раздела 1.3, которая гарантирует существование решения только на некотором, возможно меньшем, интервале.

Замечание 2. Теорема 1 утверждает, что каждое решение уравнения (3) входит в общее решение, даваемое равенством (6). Таким образом, *линейное* дифференциальное уравнение первого порядка *не* имеет никаких особых решений.

Замечание 3. Соответствующее значение константы C в равенстве (6) при необходимости решить задачу Коши (задачу с начальными условиями) в равенстве (6) можно выбрать "автоматически", достаточно написать

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \exp\left(\int_{x_0}^{x} P(t)\,dt\right), \\ y(x) &= \frac{1}{\rho(x)}\left[y_0 + \int_{x_0}^{x} \rho(t)Q(t)\,dt\right]. \end{aligned} \tag{12}$$

Указав пределы интегрирования x_0 и x, мы производим такой выбор констант в неопределенных интегралах в равенстве (6), который гарантирует, что $\rho(x_0) = 1$ и что $y(x_0) = y_0$ (вы можете проверить это непосредственно, подставляя $x = x_0$ в равенство (12)). ■

Пример 3 Решим задачу Коши (задачу с начальными условиями)

$$x^2\frac{dy}{dx} + xy = \sin x, \quad y(1) = y_0. \tag{13}$$

Решение Деление на x^2 дает линейное уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x^2}$$

с коэффициентами $P(x) = 1/x$ и $Q(x) = (\sin x)/x^2$. При $x_0 = 1$ интегрирующий множитель, даваемый равенством (12), равен

$$\rho(x) = \exp\left(\int_1^x \frac{1}{t}\,dt\right) = \exp(\ln x) = x,$$

так что искомое частное решение дается формулой

$$y(x) = \frac{1}{x}\left[y_0 + \int_1^x \frac{\sin t}{t}\,dt\right]. \tag{14}$$

В соответствии с теоремой 1, это решение определено на целой положительной полуоси x. ■

Комментарий. Чтобы найти значение решения $y(x)$ для заданного значения x, интеграл того типа, который входит в равенство (14), для заданного значения x иногда приходится приближать с помощью численных методов, например с помощью формулы Симпсона. В данном случае, однако, мы имеем функцию интегрального синуса

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt,$$

которая появляется в приложениях настолько часто, что ее значения приведены в таблицах. Хороший набор таблиц специальных функций имеется в справочнике по специальным функциям М. Абрамовица и И. Стиган; Abramowitz and Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (New York: Dover, 1965)[3]. Затем частное решение из равенства (14) приводит к

$$y(x) = \frac{1}{x}\left[y_0 + \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt - \int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,dt\right] = \frac{1}{x}\left[y_0 + \mathrm{Si}(x) - \mathrm{Si}(1)\right]. \qquad (15)$$

Функция интегрального синуса доступна во многих научных вычислительных системах и может использоваться для вычерчивания типичных интегральных кривых, определенных уравнением (15). На рис. 1.5.3 показаны отдельные интегральные кривые с начальными значениями $y(1) = y_0$ для значений y_0 от $y_0 = -3$ до $y_0 = 3$. Из рисунка видно, что на каждой интегральной кривой $y(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, на самом деле так и есть, потому что функция "интегральный синус" ограничена. ■

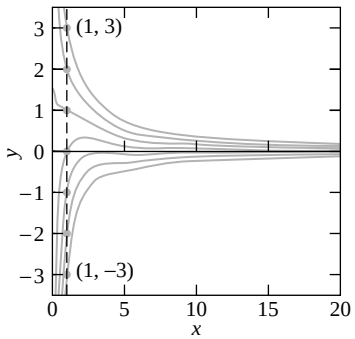


Рис. 1.5.3. Типичные интегральные кривые, определенные уравнением (15)

Далее мы увидим, что случай, когда решение дифференциального уравнения может быть выражено в элементарных функциях — это исключение, а не правило. Мы изучим различные методы, позволяющие получить хорошие аппроксимации к значениям некоторых часто встречающихся неэлементарных функций. В главе 2 мы несколько подробнее обсудим численное интегрирование дифференциальных уравнений.

Задачи на смеси

Как первое приложение линейных уравнений первого порядка, мы рассматриваем резервуар, содержащий раствор — смесь растворенного вещества и растворителя, — например раствор соли в воде. Есть приток и отток растворенного вещества, и мы хотим вычислить *количество* $x(t)$ растворенного вещества в резервуаре в момент времени t, зная количество $x(0) = x_0$ в момент времени $t = 0$. Предположим, что раствор с концентрацией c_i граммов растворенного вещества в литре раствора вливается в резервуар с постоянной скоростью r_i литров секунду и что раствор в резервуаре сразу же тщательно перемешивается, причем отток имеет постоянную скорость r_o литров в секунду.

[3] Есть перевод на русский язык: *Справочник по специальным функциям* под редакцией М. Абрамовица и И. Стиган. — М.: Наука, 1979. — *Примеч. ред.*

Чтобы написать дифференциальное уравнение для $x(t)$, мы вычислим изменение Δx количества x в течение краткого временного интервала $[t, t + \Delta t]$. Количество раствора, который вливается в резервуар в течение Δt секунд равно $r_i c_i \Delta t$ граммов. Чтобы проверить это, обратите внимание на размерность полученного нами результата: выражение

$$\left(r_i \frac{\text{литр}}{\text{секунда}}\right)\left(c_i \frac{\text{грамм}}{\text{литр}}\right)(\Delta t \text{ секунда})$$

дает количество, выраженное в граммах.

Количество раствора, который вытекает из резервуара в течение этого же самого временного интервала, зависит от концентрации $c_o(t)$ растворенного вещества в растворе в момент времени t. Но, как показано на рис. 1.5.4, $c_o(t) = x(t)/V(t)$, где $V(t)$ обозначает объем (является константой только если $r_i = r_o$) раствора в резервуаре в момент времени t. Тогда

$$\begin{aligned}\Delta x =& \{\text{грамм вливаемого растворенного вещества}\} - \\ &- \{\text{грамм выливаемого растворенного вещества}\} \approx \\ \approx& r_i c_i \Delta t - r_o c_o \Delta t.\end{aligned}$$

Теперь делим на Δt:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \approx r_i c_i - r_o c_o.$$

Наконец, берем предел при $\Delta t \to 0$; если все имеющиеся здесь функции непрерывны и $x(t)$ дифференцируема, то ошибка в этой аппроксимации также приближается к нулю, и мы получаем дифференциальное уравнение

➤
$$\frac{dx}{dt} = r_i c_i - r_o c_o, \tag{16}$$

в котором r_i, c_i и r_o являются константами, а c_o обозначает переменную концентрацию

$$c_o(t) = \frac{x(t)}{V(t)} \tag{17}$$

растворенного вещества в резервуаре в момент времени t. Таким образом, количество растворенного вещества в резервуаре $x(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{dt} = r_i c_i - \frac{r_o}{V} x. \tag{18}$$

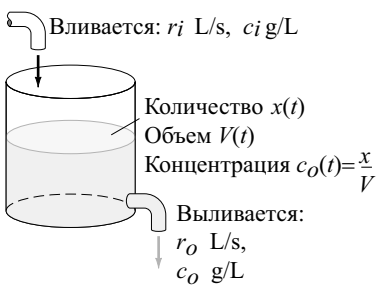


Рис. 1.5.4. Задача на смесь в единственном резервуаре

Если $V_0 = V(0)$, то $V(t) = V_0 + (r_i - r_o)t$, так что уравнение (18) — линейное дифференциальное уравнение первого порядка для количества $x(t)$ растворенного вещества в резервуаре в момент времени t.

Важно. Уравнение (18) не нужно запоминать. Нужно стремиться понять именно метод вывода этого уравнения поведения системы в короткий временной интервал $[t, t + \Delta t]$, потому что именно этот метод позволяет вывести дифференциальные уравнения всех видов.

Замечание. При получении уравнения (18) было удобно использовать указанные нами единицы массы и объема. Но для измерения количества растворенного вещества и объема раствора может использоваться и любая другая совместимая система единиц. В следующем примере мы измеряем обе эти величины в кубических километрах. ■

Пример 4 Предположим, что озеро Эри имеет объем 480 км^3 и что скорость притока в него (из озера Гурон) и оттока из него (в озеро Онтарио) равна 350 км^3 в год. Предположим, что в момент времени $t = 0$ (годы), концентрация загрязнителя в озере Эри вызвана прошлым промышленным загрязнением, которому теперь приказали прекратиться (а оно взяло да и послушалось!), в пять раз больше, чем концентрация загрязнителя в озере Гурон. Предположим, что при оттоке вода в озере тщательно перемешивается. Сколько потребуется времени, чтобы концентрация загрязнителя в озере Эри вдвое превышала концентрацию загрязнителя в озере Гурон?

Решение Здесь мы имеем

$$\begin{aligned} V &= 480 \quad (\text{км}^3), \\ r_i &= r_o = r = 350\,(\text{км}^3/\text{год}), \\ c_i &= c\,(\text{концентрация загрязнителя в озере}) \text{ и} \\ x_0 &= x(0) = 5cV, \end{aligned}$$

а вопрос формулируется так: когда $x(t) = 2cV$? В этих обозначениях уравнение (18) представляет собой уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dx}{dt} = rc - \frac{r}{V}x, \tag{19}$$

которое мы переписываем в виде линейного уравнения первого порядка

$$\frac{dx}{dt} + px = q \tag{20}$$

с постоянными коэффициентами $p = r/V$, $q = rc$; его интегрирующий множитель равен $\rho = e^{pt}$. Вы можете решить это уравнение непосред-

ственно или применить формулу (12). Последняя дает

$$x(t) = e^{-pt}\left[x_0 + \int_0^t qe^{pt}\,dt\right] = e^{-pt}\left[x_0 + \frac{q}{p}\left(e^{pt} - 1\right)\right] =$$

$$= e^{-rt/V}\left[5cV + \frac{rc}{r/V}\left(e^{rt/V} - 1\right)\right];$$

$$x(t) = cV + 4cVe^{-rt/V}. \tag{21}$$

Поэтому, чтобы найти, когда $x(t) = 2cV$, мы должны только решить уравнение

$$cV + 4cVe^{-rt/V} = 2cV, \quad \text{откуда}$$

$$t = \frac{V}{r}\ln 4 = \frac{480}{350}\ln 4 \approx 1{,}901 \text{ (года)}. \qquad \blacksquare$$

Пример 5 120-галлонный резервуар первоначально содержит 90 фунтов соли, растворенной в 90 галлонах воды. Морская вода, содержащая 2 фунта соли в галлоне, вливается в резервуар со скоростью 4 галлона в минуту, а тщательно перемешанная смесь вытекает из резервуара со скоростью 3 галлона в минуту. Сколько соли содержит заполненный резервуар?

Решение Интересная особенность этого примера — из-за различия в скоростях притока и оттока объем морской воды в резервуаре увеличивается равномерно, причем $V(t) = 90 + t$ галлонов. Изменение Δx количества соли x в резервуаре с момента времени t к моменту времени $t + \Delta t$ (минут) дается формулой

$$\Delta x \approx (4)(2)\Delta t - 3\left(\frac{x}{90+t}\right)\Delta t,$$

так что наше дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{dx}{dt} + \frac{3}{90+t}x = 8.$$

Интегрирующий множитель равен

$$\rho(x) = \exp\left(\int \frac{3}{90+t}\,dt\right) = e^{3\ln(90+t)} = (90+t)^3,$$

что дает

$$D_t\left[(90+t)^3 x\right] = 8(90+t)^3;$$
$$(90+t)^3 x = 2(90+t)^4 + C.$$

Условие $x(0) = 90$ дает $C = -(90)^4$, так что количество соли в резервуаре в момент времени t равно

$$x(t) = 2(90+t) - \frac{90^4}{(90+t)^3}.$$

Резервуар заполнится через 30 минут, а когда $t = 30$, мы имеем

$$x(30) = 2(90 + 30) - \frac{90^4}{120^3} \approx 202 \text{ (фунтов)}$$

соли в резервуаре. ■

1.5. Задачи

Найдите общие решения дифференциальных уравнений в задачах 1–25. Если задано начальное условие, найдите соответствующее частное решение. Повсюду штрихи обозначают производные по x.

1. $y' + y = 2,\ y(0) = 0$

2. $y' - 2y = 3e^{2x},\ y(0) = 0$

3. $y' + 3y = 2xe^{-3x}$

4. $y' - 2xy = e^{x^2}$

5. $xy' + 2y = 3x,\ y(1) = 5$

6. $xy' + 5y = 7x^2,\ y(2) = 5$

7. $2xy' + y = 10\sqrt{x}$

8. $3xy' + y = 12x$

9. $xy' - y = x,\ y(1) = 7$

10. $2xy' - 3y = 9x^3$

11. $xy' + y = 3xy,\ y(1) = 0$

12. $xy' + 3y = 2x^5,\ y(2) = 1$

13. $y' + y = e^x,\ y(0) = 1$

14. $xy' - 3y = x^3,\ y(1) = 10$

15. $y' + 2xy = x,\ y(0) = -2$

16. $y' = (1 - y)\cos x,\ y(\pi) = 2$

17. $(1 + x)y' + y = \cos x,\ y(0) = 1$

18. $xy' = 2y + x^3 \cos x$

19. $y' + y \cot x = \cos x$

20. $y' = 1 + x + y + xy,\ y(0) = 0$

21. $xy' = 3y + x^4 \cos x,\ y(2\pi) = 0$

22. $y' = 2xy + 3x^2 \exp(x^2),\ y(0) = 5$

23. $xy' + (2x - 3)y = 4x^4$

24. $(x^2 + 4)y' + 3xy = x,\ y(0) = 1$

25. $(x^2 + 1)\dfrac{dy}{dx} + 3x^3 y = 6x \exp\left(-\frac{3}{2}x^2\right),\ y(0) = 1$

Решите дифференциальные уравнения в задачах 26–28 относительно y, рассматривая ее (а не x) в качестве независимой переменной.

26. $(1 - 4xy^2)\dfrac{dy}{dx} = y^3$

27. $(x + ye^y)\dfrac{dy}{dx} = 1$

28. $(1 + 2xy)\dfrac{dy}{dx} = 1 + y^2$

29. Выразите общее решение $dy/dx = 1 + 2xy$ через **интеграл (вероятности) ошибок**

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$$

30. Выразите решение задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$2x\frac{dy}{dx} = y + 2x\cos x, \quad y(1) = 0$$

через интеграл, т. е. так, как в примере 3 из этого раздела.

31. **(a)** Покажите, что

$$y_c(x) = Ce^{-\int P(x)\,dx}$$

является общим решением уравнения $dy/dx + P(x)y = 0$. **(b)** Покажите, что

$$y_p(x) = e^{-\int P(x)\,dx}\left[\int \left(Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\right) dx\right]$$

является частным решением уравнения $dy/dx+P(x)y = Q(x)$. **(c)** Предположим, что $y_c(x)$ — любое общее решение уравнения $dy/dx + P(x)y = 0$ и что $y_p(x)$ является произвольным частным решением уравнения $dy/dx + P(x)y = Q(x)$. Покажите, что $y(x) = y_c(x) + y_p(x)$ — общее решение уравнения $dy/dx + P(x)y = Q(x)$.

32. **(a)** Найдите константы A и B такие, что $y_p(x) = A\sin x+B\cos x$ является решением уравнения $dy/dx + y = 2\sin x$. **(b)** Используя результат части (a) и метод задачи 31, найдите общее решение уравнения $dy/dx + y = 2\sin x$. **(c)** Решите задачу Коши (задачу с начальными условиями) $dy/dx + y = 2\sin x$, $y(0) = 1$.

33. Резервуар содержит 1000 литров водного раствора 100 кг соли. Чистая вода накачивается в резервуар со скоростью 5 литров в секунду, равномерно перемешивается и откачивается с той же самой скоростью. Сколько времени потребуется, чтобы в резервуаре осталось только 10 кг соли?

34. Рассмотрим бассейн объемом 8 миллиардов кубических футов, в котором начальная концентрация загрязнителя равна 0,25%. Есть ежедневный приток 500 миллионов кубических футов воды с концентрацией загрязнителя 0,05% и равный ежедневный отток хорошо перемешанной воды в бассейне. Сколько времени потребуется, чтобы в резервуаре концентрация загрязнителя снизилась до 0,10%?

35. Решите заново пример 4 для озера Онтарио. Единственное отличие заключается в том, что это озеро имеет объем 1640 км^3, а скорость оттока и притока равна 410 км^3 в год.

36. Резервуар первоначально содержит 60 галлонов чистой воды. Морская вода, содержащая 1 фунт соли в галлоне, вливается в резервуар со скоростью 2 галлона в минуту, полученный (тщательно перемешанный) раствор вытекает из резервуара со скоростью 3 галлона в минуту; таким образом, резервуар будет пуст ровно через 1 час. **(a)** Найдите количество соли в резервуаре после t минут. **(b)** Каково максимальное количество соли в резервуаре?

37. Резервуар объемом 400 галлонов первоначально содержит 100 галлонов морской воды, содержащей 50 фунтов соли. Морская вода, содержащая 1 фунт соли в галлоне, вливается в резервуар со скоростью 5 галлонов в секунду, хорошо перемешанный рассол вытекает из резервуара со скоростью 3 галлона в секунду. Сколько соли будет содержать резервуар, когда он заполнится рассолом?

38. Рассмотрим *каскад* из двух резервуаров, показанных на рис. 1.5.5, причем объемы морской воды в двух резервуарах равны $V_1 = 100$ (гал) и $V_2 = 200$ (гал). Каждый резервуар первоначально содержит также 50 фунтов соли. Через каждую из трех труб, показанных на рисунке, вливается 5 галлонов жидкости в минуту, причем чистая вода вливается в резервуар 1. **(a)** Найдите количество $x(t)$ соли в резервуаре 1 в момент времени t. **(b)** Предположим, что $y(t)$ — количество соли в резервуаре 2 в момент времени t. Покажите сначала, что

$$\frac{dy}{dt} = \frac{5x}{100} - \frac{5y}{200},$$

а затем решите это уравнение относительно $y(t)$, используя функцию $x(t)$, найденную в части (a). **(c)** Наконец, найдите максимальное количество соли в резервуаре 2.

39. Предположим, что в каскаде, показанном на рис. 1.5.5, резервуар 1 первоначально содержит 100 галлонов чистого этанола, а резервуар 2 первоначально содержит 100 галлонов чистой воды. Чистая вода вливается в резервуар 1 со скоростью 10 галлонов в минуту, и через другие две трубы также протекает 10 галлонов в минуту. **(a)** Найдите количества $x(t)$ и $y(t)$ этанола в двух резервуарах в момент времени $t \geqq 0$. **(b)** Найдите максимальное количество этанола в резервуаре 2.

40. Множественный каскад показан на рис. 1.5.6. В момент времени $t = 0$ резервуар 0 содержит 1 галлон этанола и 1 галлон воды; все остальные резервуары содержат 2 галлона чистой воды

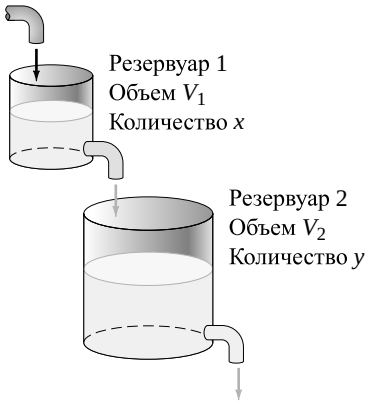


Рис. 1.5.5. Каскад из двух резервуаров

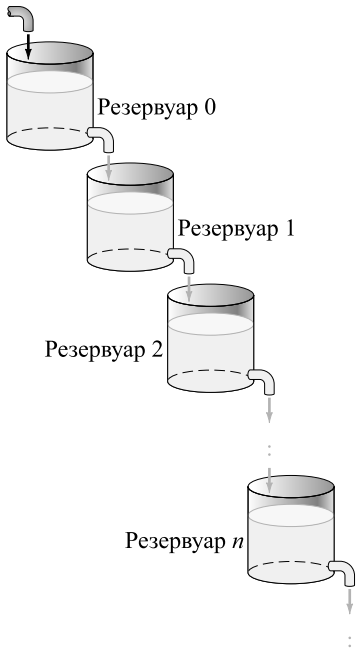


Рис. 1.5.6. Множественный каскад

каждый. Чистая вода накачивается в резервуар 0 со скоростью 1 галлон в минуту, и изменяющаяся смесь в каждом резервуаре накачивается в резервуар ниже данного с той же самой скоростью. Примите, как обычно, что смеси в результате перемешивания являются совершенно однородными. Пусть $x_n(t)$ обозначает количество этанола в резервуаре n в момент времени t. **(a)** Покажите, что $x_0(t) = e^{-t/2}$. **(b)** Покажите индукцией по n, что

$$x_n(t) = \frac{t^n e^{-t/2}}{n!\,2^n} \quad \text{для } n > 0.$$

(c) Покажите, что максимальное значение $x_n(t)$ для $n > 0$ равно $M_n = n^n e^{-n}/n!$. **(d)** Используя **формулу Стирлинга для аппроксимации** $n! \approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$, покажите, что $M_n \approx \approx (2\pi n)^{-1/2}$.

41. 30-летняя женщина занимает должность инженера с начальным заработком 30 000 долларов в год. Ее заработок $S(t)$ увеличивается по экспоненте, причем $S(t) = 30e^{t/20}$ тысяч долларов через t лет. Тем временем 12% заработка депонируются непрерывно на пенсионный счет, на котором сумма накапливается непрерывно по ежегодной норме 6%. **(a)** Выразите ΔA через Δt, чтобы получить дифференциальное уравнение, удовлетворяемое величиной $A(t)$ — суммой на ее пенсионном счете после t лет. **(b)** Вычислите сумму $A(40)$ на момент выхода на пенсию в 70 лет.

42. Предположим что градина с плотностью $\delta = 1$ начинает падение с состояния покоя, имея незначительный радиус $r = 0$. При падении ее радиус $r = kt$ (k — константа), поскольку он растет (градина увеличивается во время ее падения). Поставьте и решите задачу Коши (задачу с начальными условиями)

$$\frac{d}{dt}(mv) = mg, \quad v(0) = 0,$$

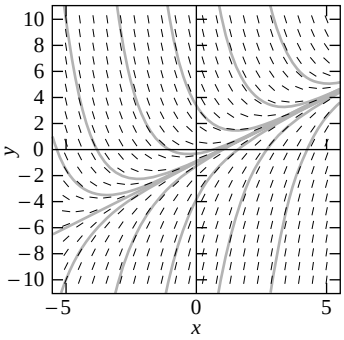


Рис. 1.5.7. Поле направлений и интегральные кривые уравнения $y' = x - y$

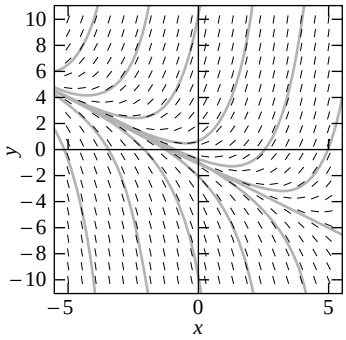


Рис. 1.5.8. Поле направлений и интегральные кривые уравнения $y' = x + y$

где m — переменная масса градины, $v = dy/dt$ — ее скорость, а ось y направлена вниз. Затем покажите, что $dv/dt = g/4$. Таким образом, градина падает, как бы под влиянием менее чем *одной четвертой* силы тяжести.

43. На рис. 1.5.7 показано поле направлений и типичные интегральные кривые уравнения $y' = x - y$. **(a)** Покажите, что каждая интегральная кривая приближается к прямой линии $y = x - 1$ при $x \to +\infty$. **(b)** Для каждого из пяти значений $y_1 = 3{,}998$, $3{,}999$, $4{,}000$, $4{,}001$ и $4{,}002$ определите начальное значение y_0 (с точностью до четырех десятичных знаков) так, чтобы $y(5) = y_1$ для решения, удовлетворяющего начальному условию $y(-5) = y_0$.

44. На рис. 1.5.8 показано поле направлений и типичные интегральные кривые уравнения $y' = x + y$. **(a)** Покажите, что каждая интегральная кривая приближается к прямой линии $y = -x - 1$ при $x \to -\infty$. **(b)** Для каждого из пяти значений $y_1 = -10$, -5, 0, 5 и 10 определите (с точностью до пяти знаков) начальное значение y_0 такое, что $y(5) = y_1$ для решения, удовлетворяющего начальному условию $y(-5) = y_0$.

В задачах 45 и 46 мы рассматриваем мелкий бассейн, причем площадь поверхности воды в нем равна одному квадратному километру, а средняя глубина воды — 2 метрам. Первоначально он заполнен пресной водой, но в момент времени $t = 0$ вода, загрязненная жидким загрязнителем, начинает течь в бассейн со скоростью 200 тысяч кубических метров в месяц. Хорошо перемешанная вода вытекает из бассейна с той же самой скоростью. Ваша первая задача состоит в том, чтобы найти количество $x(t)$ загрязнителя (в миллионах литров) в бассейне после t месяцев.

45. Поступающая вода имеет концентрацию загрязнителя $c(t) = 10$ литров на кубический метр. Проверьте, что график $x(t)$ напоминает устойчиво поднимающуюся кривую на рис. 1.5.9, которая асимптотически приближается к графику равновесного решения $x(t) \equiv 20$, который соответствует длительному содержанию загрязнителя в бассейне. Сколько времени потребуется, чтобы концентрация загрязнителя в бассейне достигла 5 литров на кубический метр?

46. Поступающая вода имеет концентрацию загрязнителя $c(t) = 10(1 + \cos t)$ л/м^3, которая изменяется между 0 и 20, причем средняя концентрация равна 10 л/м^3, а период колебания немного превышает $6\frac{1}{4}$ месяца. Правда ли, что содержание загрязнителя в озере в конечном счете будет колебаться периодически около среднего уровня 20 миллионов литров? Проверьте, что график $x(t)$ действительно напоминает колеблющуюся кривую, показанную на рис. 1.5.9. Сколько времени потребуется, чтобы концентрация загрязнителя в бассейне достигла 5 л/м^3?

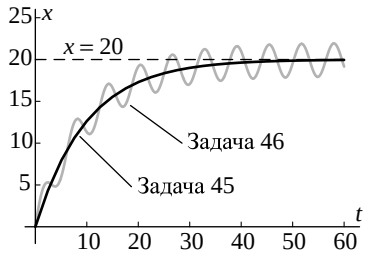


Рис. 1.5.9. Графики решений в задачах 45 и 46

1.5. Приложение. Колебания температуры внутри помещения

В интересной прикладной задаче, в которой используется решение линейного дифференциального уравнения, рассматриваются колебания температуры внутри помещения, которые вынуждаются наружными колебаниями температуры, имеющими форму

$$A(t) = a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t. \tag{1}$$

Если $\omega = \pi/12$, то эти колебания имеют период 24 часа (так что цикл колебания наружной температуры повторяется ежедневно). Например, в течение типичного дня июля в г. Атенс (Афины в штате Джорджия) минимальная температура равна 70°F в момент времени $t = 4$ (4 утра), а максимум 90°F достигается, когда $t = 16$ (4 часа пополудни). В этом случае мы взяли бы

$$A(t) = 80 - 10 \cos \omega(t - 4) = 80 - 5 \cos \omega t - 5\sqrt{3} \sin \omega t. \tag{2}$$

Мы получили уравнение (2), используя тождество $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$. Затем мы определили значения коэффициентов $a_0 = 80$, $a_1 = -5$ и $b_1 = -5\sqrt{3}$ в уравнении (1).

Если мы запишем закон Ньютона для охлаждающегося тела (уравнение (3) из раздела 1.1) для соответствующей внутренней температуры $u(t)$ в момент времени t, но вместо постоянной температуры A окружающей среды $A(t)$ подставим внешнюю температуру, данную уравнением (1), мы получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{du}{dt} = -k(u - A(t));$$

иными словами,

$$\frac{du}{dt} + ku = k(a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t) \tag{3}$$

с коэффициентами (функциями) $P(t) \equiv k$ и $Q(t) = kA(t)$. Типичные значения константы пропорциональности k лежат в интервале от $0{,}2$ до $0{,}5$ (хотя k может быть больше, чем $0{,}5$ для плохо изолированного здания с открытыми окнами, или меньше, чем $0{,}2$ для хорошо теплоизолированного здания с плотно (почти герметично) закрытыми окнами).

Сценарий. Предположим, что однажды в полночь (в момент времени $t_0 = 0$) наш кондиционер сломался, и мы не можем отремонтировать его до дня зарплаты в конце месяца. Мы поэтому хотим исследовать колебания температуры в комнате, которые нам придется терпеть в течение нескольких следующих дней.

Начните ваше исследование с решения уравнения (3) с начальным условием $u(0) = u_0$ (внутренняя температура во время отказа кондиционера). Вы можете использовать систему компьютерной алгебры. Вы должны получить решение

$$u(t) = a_0 + c_0 e^{-kt} + c_1 \cos \omega t + d_1 \sin \omega t, \tag{4}$$

где

$$c_0 = u_0 - a_0 - \frac{k^2 a_1 - k\omega b_1}{k^2 + \omega^2},$$

$$c_1 = \frac{k^2 a_1 - k\omega b_1}{k^2 + \omega^2}, \quad d_1 = \frac{k\omega a_1 + k^2 b_1}{k^2 + \omega^2},$$

причем $\omega = \pi/12$.

При $a_0 = 80, a_1 = -5, b_1 = -5\sqrt{3}$ (как в уравнении (2)) $\omega = \pi/12$ и $k = 0{,}2$ (например), это решение приводится (приблизительно) к

$$u(t) = 80 + e^{-t/5}\,(u_0 - 82{,}3351) + (2{,}3351)\cos\frac{\pi t}{12} - (5{,}6036)\sin\frac{\pi t}{12}. \tag{5}$$

Заметьте сначала, что затухающий показательный член в уравнении (5) стремится к нулю при $t \to +\infty$, почти не влияя на длительное "устойчивое периодическое" решение

$$u_{\text{sp}}(t) = 80 + (2{,}3351)\cos\frac{\pi t}{12} - (5{,}6036)\sin\frac{\pi t}{12}. \tag{6}$$

Следовательно, через длительное время внутренняя температура колеблется каждые 24 часа около той же самой средней температуры 80°F, что и средняя наружная температура.

На рис. 1.5.10 показано множество интегральных кривых, соответствующих возможным начальным температурам u_0 в пределах от 65°F до 95°F. Заметьте, что независимо от начальной температуры внутренняя температура устанавливается в течение приблизительно 18 часов и входит в режим периодических ежедневных колебаний. Но амплитуда изменения температуры в закрытом помещении меньше, чем на открытом воздухе. Действительно, используя тригонометрическое тождество, упомянутое раньше, равенство (6) можно переписать (проверьте это!) в виде

$$u(t) = 80 - (6{,}0707)\cos\left(\frac{\pi t}{12} - 1{,}9656\right) =$$

$$= 80 - (6{,}0707)\cos\frac{\pi}{12}(t - 7{,}5082). \tag{7}$$

Понятно ли вам, что отсюда следует, что внутренняя температура изменяется между минимумом, равным приблизительно 74°F, и максимумом, равным приблизительно 86°F?

Наконец, сравнение уравнений (2) и (7) показывает, что внутренняя температура отстает от наружной температуры примерно на $7{,}5082 - 4 \approx 3{,}5$ часа, как показано на рис. 1.5.11.

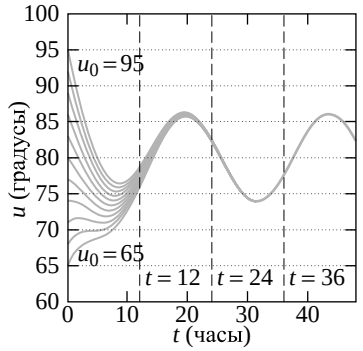


Рис. 1.5.10. Интегральные кривые для уравнения (5) при $u_0 = 65, 68, 71, \ldots, 92, 95$

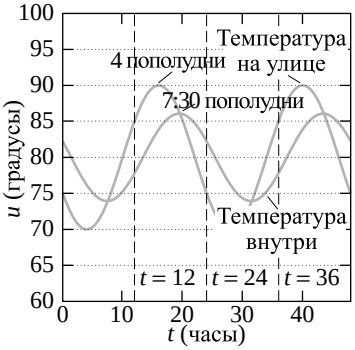


Рис. 1.5.11. Сравнение внутренних и наружных колебаний температуры

Таким образом, каждый вечер температура в доме продолжает повышаться примерно до 19:30, так что самая жаркая часть дня внутри — ранний вечер, а не поздний день (как снаружи).

Выполните подобный анализ, используя средние ежедневные максимальные и минимальные значения температуры в июле в вашей местности, взяв значение k для вашего собственного дома. Вы можете также провести аналогичное исследование для зимнего дня вместо летнего. (Чем отличаются задачи о внутренней температуре для зимнего и летнего дня?)

1.6. Замена переменных и уравнения в полных дифференциалах

Все дифференциальные уравнения первого порядка, которые мы решили в предыдущих разделах, были или с разделяющимися переменными, или линейными. Но многие приложения приводят к дифференциальным уравнениям, которые не являются ни уравнениями с разделяющимися переменными, ни линейными. В этом разделе мы иллюстрируем (главным образом на примерах) различные замены переменных, которые иногда могут помочь преобразовать данное дифференциальное уравнение в такое, которое мы уже знаем, как решить.

Например, дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1}$$

с зависимой переменной y и независимой переменной x может содержать выражение

$$v = \alpha(x, y), \tag{2}$$

в которое входят x и y, такое, что его можно взять в качестве новой независимой переменной v. Таким образом, в дифференциальном уравнении

$$\frac{dy}{dx} = (x + y + 3)^2$$

фактически требуется замена $v = x + y + 3$, приведенная в равенстве (2).

Если уравнение (2) может быть разрешено относительно

$$y = \beta(x, v), \tag{3}$$

то применение правила дифференцирования сложной функции v, рассматриваемой как (неизвестная) функция переменной x, дает

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial \beta}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial \beta}{\partial v}\frac{dv}{dx} = \beta_x + \beta_v \frac{dv}{dx}, \tag{4}$$

где частные производные $\partial\beta/\partial x = \beta_x(x, v)$ и $\partial\beta/\partial v = \beta_v(x, v)$ являются *известными* функциями переменных x и v. Если мы подставим правую часть для dy/dx из уравнения (1) в уравнение (4) и затем решим полученное уравнение относительно dv/dx, в результате получится *новое* дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dv}{dx} = g(x, v) \tag{5}$$

с *новой* зависимой переменной v. Если это новое уравнение является уравнением с разделяющимися переменными или линейным, то мы можем применить методы предыдущих разделов для его решения.

Если $v = v(x)$ — решение уравнения (5), то $y = \beta(x, v(x))$ будет решением первоначального уравнения (1). Фокус состоит в том, чтобы выбрать замену такой, чтобы мы смогли решить преобразованное уравнение (5). Даже если это возможно, это далеко не всегда просто; это может потребовать изобретательности, огромного количества неудачных попыток и разочарований из-за ошибок.

Пример 1 Решим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = (x + y + 3)^2.$$

Решение Как указывалось раньше, давайте попробуем выполнить замену

$$v = x + y + 3; \quad \text{т. е.} \quad y = v - x - 3.$$

Тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} - 1,$$

так что преобразованное уравнение примет вид

$$\frac{dv}{dx} = 1 + v^2.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными, и совсем нетрудно получить его решение

$$x = \int \frac{dv}{1 + v^2} = \operatorname{arctg} v + C.$$

Так что $v = \operatorname{tg}(x - C)$. Поскольку $v = x + y + 3$, общее решение первоначального уравнения $dy/dx = (x+y+3)^2$ имеет вид $x+y+3 = \operatorname{tg}(x-C)$; иными словами,

$$y(x) = \operatorname{tg}(x - C) - x - 3. \qquad \blacksquare$$

Замечание. На рис. 1.6.1 показано поле направлений и типичные интегральные кривые для дифференциального уравнения из примера 1. Мы видим, что, хотя функция $f(x, y) = (x + y + 3)^2$ непрерывно дифференцируема для всех x и y, каждое решение непрерывно только на ограниченном интервале. В частности, поскольку функция тангенс непрерывна на открытом интервале $(-\pi/2, \pi/2)$, частное решение с произвольным значением постоянной C непрерывно на интервале $-\pi/2 < x - C < \pi/2$; т. е. на интервале $C - \pi/2 < x < C + \pi/2$. ■

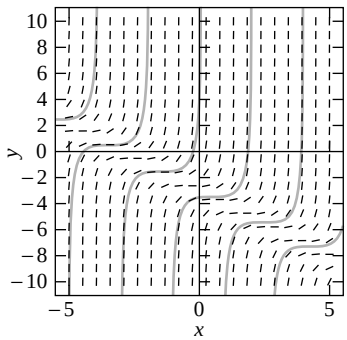


Рис. 1.6.1. Поле направлений и интегральные кривые уравнения $y' = (x + y + 3)^2$

Пример 1 иллюстрирует тот факт, что любое дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = F(ax + by + c) \tag{6}$$

можно преобразовать в уравнение с разделяющимися переменными с помощью замены $v = ax + by + c$ (см. задачу 31). В следующих абзацах рассматриваются другие классы уравнений первого порядка, для которых существуют стандартные замены, о которых известно, что они приводят к успеху.

Однородные уравнения

Однородное дифференциальное уравнение первого порядка — это уравнение, которое можно записать в форме

➤
$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right). \tag{7}$$

Если сделать замену

$$v = \frac{y}{x}, \quad y = vx, \quad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}, \tag{8}$$

то уравнение (7) преобразуется в уравнение *с разделяющимися переменными*

$$x\frac{dv}{dx} = F(v) - v.$$

Таким образом, каждое однородное дифференциальное уравнение первого порядка посредством замен (8) может быть сведено к задаче интегрирования.

Пример 2 Решим дифференциальное уравнение

$$2xy\frac{dy}{dx} = 4x^2 + 3y^2.$$

Решение Это уравнение не является ни уравнением с разделяющимися переменными, ни линейным, но мы распознаем его как однородное уравнение, записывая в форме

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^2 + 3y^2}{2xy} = 2\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{y}{x}\right).$$

Замены (8) тогда принимают вид

$$y = vx, \quad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}, \quad v = \frac{y}{x} \quad \text{и} \quad \frac{1}{v} = \frac{x}{y}.$$

Они приводят к уравнению

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{2}{v} + \frac{3}{2}v$$

и, следовательно, к уравнению

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{2}{v} + \frac{v}{2} = \frac{v^2 + 4}{2v};$$

$$\int \frac{2v}{v^2 + 4}\,dv = \int \frac{1}{x}\,dx;$$

$$\ln(v^2 + 4) = \ln|x| + \ln C.$$

Мы применяем показательную функцию к обеим частям последнего уравнения, после чего получаем

$$v^2 + 4 = C|x|;$$

$$\frac{y^2}{x^2} + 4 = C|x|;$$

$$y^2 + 4x^2 = kx^3.$$

Обратите внимание, что левая часть этого уравнения обязательно неотрицательна. Из этого следует, что $k > 0$ в случае решений, которые определены для $x > 0$, в то время как $k < 0$ для тех решений, где $x < 0$. Действительно, семейство интегральных кривых, показанных на рис. 1.6.2, симметрично относительно обеих координатных осей. Фактически существуют положительные и отрицательные решения вида $y(x) = \pm\sqrt{kx^3 - 4x^2}$ которые определены для $x > 4/k$, если константа k положительна, и для $x < 4/k$, если k отрицательна. ■

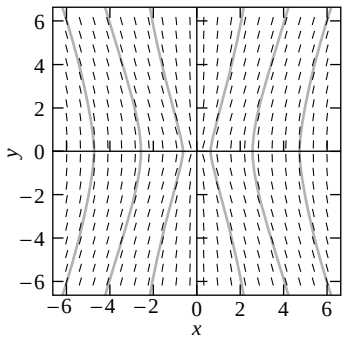


Рис. 1.6.2. Поле направлений и интегральные кривые уравнения $2xyy' = 4x^2 + 3y^2$

Пример 3 Решим задачу Коши (задачу с начальными условиями)

$$x\frac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 - y^2}, \quad y(x_0) = 0$$

при $x_0 > 0$.

Решение Деля обе части на x, находим, что

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2},$$

так что, делая замены (8), получаем

$$v + x\frac{dv}{dx} = v + \sqrt{1 - v^2};$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}\, dv = \int \frac{1}{x}\, dx;$$

$$\arcsin v = \ln x + C.$$

Мы не обязаны писать $\ln|x|$, потому что $x > 0$ в окрестности $x = x_0 > 0$. Теперь обратите внимание, что $v(x_0) = y(x_0)/x_0 = 0$, так что $C = \arcsin 0 - \ln x_0 = -\ln x_0$. Следовательно,

$$v = \frac{y}{x} = \sin(\ln x - \ln x_0) = \sin\left(\ln\frac{x}{x_0}\right),$$

и поэтому функция

$$y(x) = x\sin\left(\ln\frac{x}{x_0}\right)$$

как раз и представляет собой искомое частное решение. Поскольку область значений $\arcsin v = \ln(x/x_0)$ представляет собой интервал $-\pi/2 \leqq \ln(x/x_0) \leqq \pi/2$, из этого следует, что данное частное решение определено на интервале $x_0 e^{-\pi/2} \leqq x \leqq x_0 e^{\pi/2}$. На рис. 1.6.3 показаны

некоторые типичные интегральные кривые. Из-за корня в дифференциальном уравнении эти интегральные кривые не выходят из обозначенной треугольной области $x \geqq |y|$. Вы можете проверить, что границы $y = x$ и $y = -x$ (для $x > 0$) — особые интегральные кривые, которые состоят из точек касания к ранее найденным интегральным кривым. ■

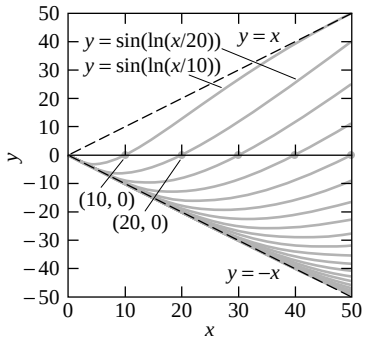


Рис. 1.6.3. Интегральные кривые уравнения $xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}$

Уравнения Бернулли

Дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \tag{9}$$

называется **уравнением Бернулли.** Если $n = 0$ или $n = 1$, то уравнение (9) линейно. В противном случае в задаче 56 показывается, что замена

$$v = y^{1-n} \tag{10}$$

преобразует уравнение (9) в линейное уравнение

$$\frac{dv}{dx} + (1-n)P(x)v = (1-n)Q(x).$$

Вместо того чтобы запоминать форму этого преобразованного уравнения, удобнее делать замену в уравнении (10) явно, как в следующих примерах.

Пример 4 Если мы перепишем однородное уравнение $2xyy' = 4x^2 + 3y^2$ из примера 2 в виде

$$\frac{dy}{dx} - \frac{3}{2x}y = \frac{2x}{y},$$

то мы увидим, что оно является также уравнением Бернулли, причем $P(x) = -3/(2x)$, $Q(x) = 2x$, $n = -1$ и $1 - n = 2$. Следовательно, мы

подставляем

$$v = y^2, \quad y = v^{1/2} \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2}v^{-1/2}\frac{dv}{dx}.$$

Это дает

$$\frac{1}{2}v^{-1/2}\frac{dv}{dx} - \frac{3}{2x}v^{1/2} = 2xv^{-1/2}.$$

Затем умножение на $2v^{1/2}$ приводит к линейному уравнению

$$\frac{dv}{dx} - \frac{3}{x}v = 4x$$

с интегрирующим множителем $\rho = e^{\int(-3/x)\,dx} = x^{-3}$. Так что мы получаем

$$D_x(x^{-3}v) = \frac{4}{x^2};$$

$$x^{-3}v = -\frac{4}{x} + C;$$

$$x^{-3}y^2 = -\frac{4}{x} + C;$$

$$y^2 = -4x^2 + Cx^3. \qquad \blacksquare$$

Пример 5 Уравнение

$$x\frac{dy}{dx} + 6y = 3xy^{4/3}$$

не является ни уравнением с разделяющимися переменными, ни линейным, ни однородным, но это уравнение Бернулли, причем $n = \frac{4}{3}, 1 - n = -\frac{1}{3}$. Замены

$$v = y^{-1/3}, \quad y = v^{-3} \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx} = -3v^{-4}\frac{dv}{dx}$$

преобразовывают его к виду

$$-3xv^{-4}\frac{dv}{dx} + 6v^{-3} = 3xv^{-4}.$$

Деление на $-3xv^{-4}$ дает линейное уравнение

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x}v = -1$$

с интегрирующим множителем $\rho = e^{\int(-2/x)\,dx} = x^{-2}$. Это дает

$$D_x(x^{-2}v) = -\frac{1}{x^2}; \quad x^{-2}v = \frac{1}{x} + C; \quad v = x + Cx^2$$

и, наконец,

$$y(x) = \frac{1}{(x + Cx^2)^3}. \qquad \blacksquare$$

Пример 6 Уравнение

$$2xe^{2y}\frac{dy}{dx} = 3x^4 + e^{2y} \tag{11}$$

не является ни уравнением с разделяющимися переменными, ни линейным, ни однородным и даже не является уравнением Бернулли. Но мы замечаем, что y появляется только в выражениях e^{2y} и $D_x(e^{2y}) = 2e^{2y}y'$. Это подсказывает замену

$$v = e^{2y}, \quad \frac{dv}{dx} = 2e^{2y}\frac{dy}{dx},$$

которая преобразует уравнение (11) в линейное уравнение $xv'(x) = 3x^4 + v(x)$; т. е.

$$\frac{dv}{dx} - \frac{1}{x}v = 3x^3.$$

После умножения на интегрирующий множитель $\rho = 1/x$ находим, что

$$\frac{1}{x}v = \int 3x^2\,dx = x^3 + C, \quad \text{так что} \quad e^{2y} = v = x^4 + Cx,$$

и, следовательно,

$$y(x) = \tfrac{1}{2}\ln\left|x^4 + Cx\right|. \qquad \blacksquare$$

Траектория полета

Предположим, что самолет вылетает из точки $(a, 0)$, расположенной к востоку от аэропорта назначения, расположенного в начале координат $(0, 0)$. Самолет перемещается с постоянной скоростью v_0 относительно ветра, который дует на север с постоянной скоростью w. Как показано на рис. 1.6.4, мы предполагаем, что пилот держит курс на начало координат.

Рис. 1.6.5 помогает получить компоненты скорости самолета относительно земли. Они равны

$$\frac{dx}{dt} = -v_0\cos\theta = -\frac{v_0 x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{dy}{dt} = -v_0\sin\theta + w = -\frac{v_0 y}{\sqrt{x^2+y^2}} + w.$$

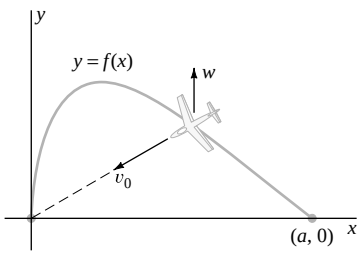


Рис. 1.6.4. Самолет держит курс на начало координат

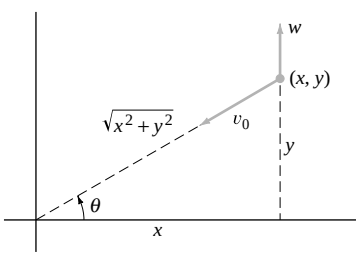


Рис. 1.6.5. Компоненты скорости вектора самолета

Следовательно, траектория $y = f(x)$ самолета удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1}{v_0 x}\left(v_0 y - w\sqrt{x^2+y^2}\right). \tag{12}$$

Если мы положим

$$k = \frac{w}{v_0}, \tag{13}$$

т. е. введем константу k, равную отношению скорости ветра к скорости полета самолета, то уравнение (12) преобразуется к однородному вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - k\left[1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right]^{1/2}. \tag{14}$$

Замена $y = xv$, $y' = v + xv'$ приведет его к виду

$$\int \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = -\int \frac{k}{x}\,dx. \tag{15}$$

Воспользовавшись тригонометрической подстановкой или таблицей интегралов, мы находим, что

$$\ln\left(v + \sqrt{1+v^2}\right) = -k\ln x + C, \tag{16}$$

и начальное условие $v(a) = y(a)/a = 0$ дает

$$C = k\ln a. \tag{17}$$

Согласно задаче 68, в результате подстановки (17) в уравнение (16) и последующего решения полученного уравнения относительно v, получаем

$$v = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{-k} - \left(\frac{x}{a}\right)^{k}\right]. \tag{18}$$

Поскольку $y = xv$, мы наконец получаем

$$y(x) = \frac{a}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{1-k} - \left(\frac{x}{a}\right)^{1+k}\right] \tag{19}$$

в качестве уравнения траектории самолета.

Обратите внимание, что кривая, определяемая уравнением (19), проходит через начало координат только в случае $k < 1$ (т. е. в случае $w < v_0$), так что самолет достигнет аэропорта назначения только в этом случае. Если $w = v_0$ (так что $k = 1$), то уравнение (19) примет форму $y(x) = \frac{1}{2}a(1 - x^2/a^2)$, так что траектория самолета приближается к точке $(0, a/2)$, а не к $(0, 0)$. Ситуация еще хуже, если $w > v_0$ (так что $k > 1$) — в этом случае, как следует из уравнения (19), $y \to +\infty$ при $x \to 0$.

Пример 7 Если $a = 200$ миль, $v_0 = 500$ миль в час и $w = 100$ миль в час, то $k = w/v_0 = \frac{1}{5}$, так что самолет успешно долетит до аэропорта в точке $(0, 0)$. При этих значениях уравнение (19) дает

$$y(x) = 100\left[\left(\frac{x}{200}\right)^{4/5} - \left(\frac{x}{200}\right)^{6/5}\right]. \tag{20}$$

Теперь предположим, что мы хотим найти максимальное расстояние, на которое самолет относится ветром от курса во время полета. Иными словами, мы хотим найти максимальное значение $y(x)$ для $0 \leqq x \leqq 200$.

Решение Дифференцирование функции $y(x)$ из уравнения (20) дает

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{4}{5}\left(\frac{x}{200}\right)^{-1/5} - \frac{6}{5}\left(\frac{x}{200}\right)^{1/5}\right],$$

и мы легко решаем уравнение $y'(x) = 0$. В результате получаем $(x/200)^{2/5} = \frac{2}{3}$. Следовательно,

$$y_{\max} = 100\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3\right] = \frac{400}{27} \approx 14{,}81.$$

Таким образом, самолет уносится почти на 15 миль на север во время его полета на запад. (График функции из уравнения (20) приведен на рис. 1.6.4. Вертикальный масштаб там увеличен в 4 раза.) ■

Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Мы видели, что общее решение $y(x)$ дифференциального уравнения первого порядка часто определяется неявно уравнением вида

$$F(x, y(x)) = C, \tag{21}$$

где C — константа. С другой стороны, учитывая тождество (21), мы можем восстановить первоначальное дифференциальное уравнение, дифференцируя каждую часть по x. При условии, что уравнение (21) неявно определяет y как дифференцируемую функцию x, это позволяет переписать первоначальное дифференциальное уравнение в форме

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0;$$

иными словами,

$$M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0, \tag{22}$$

где $M(x, y) = F_x(x, y)$ и $N(x, y) = F_y(x, y)$.

Иногда удобно переписать уравнение (22) в более симметричной форме

➤
$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0. \tag{23}$$

Уравнение в таком виде называется уравнением в **дифференциальной** форме. Общее дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$ можно записать в этой форме, если принять, что $M = f(x, y)$ и $N \equiv -1$. Ранее было показано, что *если* существует функция $F(x, y)$ такая, что

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M \quad \text{и} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N,$$

то уравнение

➤
$$F(x, y) = C$$

неявно определяет общее решение уравнения (23). В этом случае уравнение (23) называют **уравнением в полных дифференциалах**[4], поскольку дифференциал

$$dF = F_x\,dx + F_y\,dy$$

функции $F(x, y)$ в точности представляет собой $M dx + N dy$.

Естественно, возникают следующие вопросы. Как определить, является ли дифференциальное уравнение (23) уравнением в полных дифференциалах? И если это так, как найти функцию F такую, что $F_x = M$ и $F_y = N$? Чтобы ответить на первый вопрос, давайте вспомним, что если смешанные частные производные второго порядка F_{xy} и F_{yx} непрерывны на открытом множестве в плоскости xy, то они равны: $F_{xy} = F_{yx}$. Если уравнение (23) является уравнением в полных дифференциалах, причем и M, и N имеют непрерывные частные производные, то тогда

$$\frac{\partial M}{\partial y} = F_{xy} = F_{yx} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Таким образом, равенство

➤
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{24}$$

является *необходимым условием* того, что дифференциальное уравнение $M dx + N dy = 0$ представляет собой уравнение в полных дифференциалах. Иными словами, если $M_y \neq N_x$, то рассматриваемое дифференциальное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах, так что не стоит даже пытаться найти функцию $F(x, y)$ такую, что $F_x = M$ и $F_y = N$; такая функция не существует.

Пример 8 Дифференциальное уравнение

$$y^3\,dx + 3xy^2\,dy = 0 \tag{25}$$

является уравнением в полных дифференциалах, потому что функция $F(x, y) = xy^3$ имеет частные производные $F_x = y^3$ и $F_y = 3xy^2$. Таким образом, общее решение уравнения (25) можно записать в виде

$$xy^3 = C$$

или, если хотите, в виде $y(x) = kx^{-1/3}$. ■

[4] А также **уравнением в точных дифференциалах** и **точным уравнением**. — *Примеч. ред.*

Но предположим, что мы разделили каждую часть дифференциального уравнения из примера 8 на y^2 и получили

$$y\,dx + 3x\,dy = 0. \tag{26}$$

Это уравнение не является уравнением в полных дифференциалах, потому что при $M = y$ и $N = 3x$ мы имеем

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \neq 3 = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Следовательно, необходимое условие в уравнении (24) не удовлетворяется.

Мы здесь сталкиваемся с любопытным явлением. Дифференциальные уравнения (25) и (26) по существу эквивалентны и они имеют точно те же самые решения, но одно из них является уравнением в полных дифференциалах, а другое — нет. Короче говоря, является ли данное дифференциальное уравнение уравнением в полных дифференциалах, зависит от вида $M dx + N dy = 0$, в котором оно записано. Теорема 1 говорит нам, что (при условиях дифференцируемости, которые на практике обычно удовлетворяются) необходимое условие (24) является также и *достаточным* условием для того, чтобы уравнение было уравнением в полных дифференциалах. Другими словами, если $M_y = N_x$, то дифференциальное уравнение $M dx + N dy = 0$ представляет собой уравнение в полных дифференциалах.

Теорема 1 Критерий уравнения в полных дифференциалах

Предположим, что функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка в открытом прямоугольнике $R\colon\ a < x < b, c < y < d$. Тогда дифференциальное уравнение

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{23}$$

является уравнением в полных дифференциалах в R, если и только если

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{24}$$

в каждой точке R. Иными словами, существует определенная на R функция $F(x, y)$, такая что $\partial F/\partial x = M$ и $\partial F/\partial y = N$, если и только если равенство (24) выполнено на R.

Доказательство. Мы уже видели, что если уравнение (23) является уравнением в полных дифференциалах, то равенство (24) выполняется. Чтобы доказать обратное утверждение, мы должны показать, что если справедливо равенство (24), то мы можем найти функцию $F(x, y)$ такую, что $\partial F/\partial x = M$ и $\partial F/\partial y = N$. Сначала обратите внимание, что для *любой* функции $g(y)$ функция

$$F(x, y) = \int M(x, y)\,dx + g(y) \tag{27}$$

удовлетворяет условию $\partial F/\partial x = M$. (В равенстве (27) $\int M(x, y)\,dx$ обозначает примитивную (неопределенный интеграл) функции $M(x, y)$ по x.) Мы планируем выбрать $g(y)$ так, чтобы

$$N = \frac{\partial F}{\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)\,dx\right) + g'(y),$$

т. е. так, чтобы

$$g'(y) = N - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx. \tag{28}$$

Чтобы убедиться, что такая функция y *существует*, достаточно показать, что правая часть в уравнении (28) является функцией только от y. Мы можем тогда найти $g(y)$, интегрируя по y. Поскольку правая часть уравнения (28) определена на прямоугольнике и, следовательно, определена на интервале как функция x, достаточно показать, что ее производная по x тождественно равна нулю. Но

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(N - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx\right) &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx = \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)\,dx = \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0\end{aligned}$$

в соответствии с условием теоремы. Так что мы действительно можем найти искомую функцию $g(y)$, интегрируя уравнение (28). Мы подставляем этот результат в уравнение (27) и получаем

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \int\left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx\right)dy \tag{29}$$

в качестве искомой функции, удовлетворяющей условиям $F_x = M$ и $F_y = N$. ▲

Вместо того чтобы запоминать уравнение (29), обычно лучше решить уравнение в полных дифференциалах $M\,dx + N\,dy = 0$, повторяя выкладки, указанные в уравнениях (27) и (28). Сначала мы интегрируем $M(x,y)$ по x и пишем

$$F(x,y) = \int M(x,y)\,dx + g(y),$$

считая функцию $g(y)$ "произвольной постоянной интегрирования", поскольку мы работаем с переменной x. Затем мы определяем $g(y)$, налагая условие $\partial F/\partial y = N(x,y)$. Это приводит к общему решению в неявной форме $F(x,y) = C$.

Пример 9 Найдем решение дифференциального уравнения

$$(6xy - y^3)\,dx + (4y + 3x^2 - 3xy^2)\,dy = 0. \tag{30}$$

Решение Пусть $M(x,y) = 6xy - y^3$ и $N(x,y) = 4y + 3x^2 - 3xy^2$. Данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах, потому что

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6x - 3y^2 = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Интегрируя $\partial F/\partial x = M(x, y)$ по x, получаем

$$F(x, y) = \int (6xy - y^3)\, dx = 3x^2y - xy^3 + g(y).$$

Затем мы дифференцируем по y и полагаем $\partial F/\partial y = N(x, y)$. Это влечет

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3x^2 - 3xy^2 + g'(y) = 4y + 3x^2 - 3xy^2,$$

а из этого следует, что $g'(y) = 4y$. Следовательно, $g(y) = 2y^2 + C_1$ и, таким образом,

$$F(x, y) = 3x^2y - xy^3 + 2y^2 + C_1.$$

Поэтому общее решение дифференциального уравнения определено неявно уравнением

$$3x^2y - xy^3 + 2y^2 = C \tag{31}$$

(мы включили константу C_1 в константу C). ■

Замечание. На рис. 1.6.6 показано довольно сложное строение интегральных кривых для дифференциального уравнения из примера 9. Решение, удовлетворяющее данному начальному условию $y(x_0) = y_0$, определено неявно уравнением (31), причем C определяется подстановкой $x = x_0$ и $y = y_0$ в это уравнение. Например, частное решение, удовлетворяющее условию $y(0) = 1$, определено неявно уравнением $3x^2y - xy^3 + 2y^2 = 2$. Другие две особые точки на рисунке — это начало координат $(0, 0)$ и точка рядом с точкой $(0{,}75,\ 2{,}12)$ — это точки, где обе функции-коэффициенты уравнения (30) обращаются в нуль, так что теорема о существовании и единственности решения, приведенная в разделе 1.3, не гарантирует единственность решения. ■

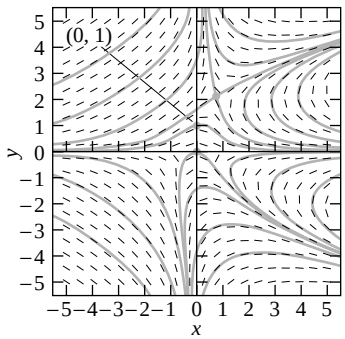


Рис. 1.6.6. Поле направлений и интегральные кривые уравнения в полных дифференциалах из примера 9

Уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

Дифференциальное уравнение второго порядка содержит вторую производную неизвестной функции $y(x)$ и, таким образом, имеет общую форму

$$F(x, y, y', y'') = 0. \tag{32}$$

Если *хоть одна из переменных* — зависимая переменная y *или* независимая переменная x — отсутствует в уравнении второго порядка, то оно легко простой заменой приводится к уравнению первого порядка, которое может быть разрешено методами этой главы.

Зависимая переменная y отсутствует. Если y отсутствует, то уравнение (32) имеет форму

➤
$$F(x, y', y'') = 0. \tag{33}$$

Тогда замена

➤
$$p = y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{dp}{dx} \tag{34}$$

приводит к дифференциальному уравнению *первого порядка*

$$F(x, p, p') = 0.$$

Если мы можем найти общее решение $p(x, C_1)$, содержащее произвольную постоянную C_1, то остается только написать

$$y(x) = \int y'(x)\,dx = \int p(x, C_1)\,dx + C_2,$$

чтобы получить решение уравнения (33), которое содержит две произвольные постоянные C_1 и C_2 (как и должно быть в случае дифференциального уравнения второго порядка).

Пример 10 Решим уравнение $xy'' + 2y' = 6x$, в котором отсутствует зависимая переменная y.

Решение Замена, указанная в (34), дает уравнение первого порядка

$$x\frac{dp}{dx} + 2p = 6x; \quad \text{т. е. } \frac{dp}{dx} + \frac{2}{x}p = 6.$$

Это уравнение является линейным, так что мы умножаем его на его интегрирующий множитель $\rho = \exp\left(\int (2/x)\,dx\right) = e^{2\ln x} = x^2$ и получаем

$$\begin{aligned} D_x(x^2 p) &= 6x^2, \\ x^2 p &= 2x^3 + C_1, \\ p = \frac{dy}{dx} &= 2x + \frac{C_1}{x^2}. \end{aligned}$$

Заключительное интегрирование по x приводит к общему решению

$$y(x) = x^2 + \frac{C_1}{x} + C_2$$

уравнения второго порядка $xy'' + 2y' = 6x$. Интегральные кривые для $C_1 = 0$ — просто параболы, полученные вертикальным сдвигом из параболы $y = x^2$. На рис. 1.6.7 показаны типичные интегральные кривые при $C_2 = 0$. Интегральные кривые при отличных от нуля C_1 и C_2 получаются вертикальными сдвигами из интегральных кривых, показанных на рис. 1.6.7. ■

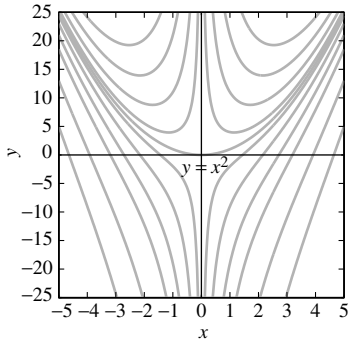


Рис. 1.6.7. Интегральные кривые $y = x^2 + \dfrac{C_1}{x}$ при $C_1 = 0, \pm 3, \pm 10, \pm 20, \pm 35, \pm 60, \pm 100$

Независимая переменная x отсутствует. Если отсутствует x, то уравнение (32) принимает вид

$$F(y, y', y'') = 0. \tag{35}$$

Тогда замена

$$p = y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy} \tag{36}$$

приводит к дифференциальному уравнению *первого порядка*

$$F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0$$

относительно p как функции y. Если мы можем найти общее решение $p(y, C_1)$, содержащее произвольную постоянную C_1, то (принимая, что $y' \neq 0$) остается только написать

$$x(y) = \int \frac{dx}{dy}\,dx = \int \frac{1}{dy/dx}\,dx = \int \frac{1}{p}\,dy = \int \frac{dy}{p(y, C_1)} + C_2.$$

Если заключительный интеграл $P = \int (1/p)\,dy$ может быть взят, в результате получится решение $x(y) = P(y, C_1) + C_2$ нашего дифференциального уравнения второго порядка в неявном виде.

Пример 11 Решим уравнение $yy'' = (y')^2$, в котором отсутствует независимая переменная x.

Решение Временно мы предполагаем, что y и y' являются неотрицательными, а затем в конце покажем, что это предположение излишне. Замена, определенная в (36), дает уравнение первого порядка

$$yp\frac{dp}{dx} = p^2.$$

Затем разделение переменных дает

$$\begin{aligned}\int \frac{dp}{p} &= \int \frac{dy}{y},\\ \ln p &= \ln y + C \quad \text{(потому что } y > 0 \text{ и } p = y' > 0),\\ p &= C_1 y,\end{aligned}$$

где $C_1 = e^C$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dy} &= \frac{1}{p} = \frac{1}{C_1 y},\\ C_1 x &= \int \frac{dy}{y} = \ln y + C_1.\end{aligned}$$

Окончательно найдем общее решение уравнения второго порядка $yy'' = (y')^2$ в виде

$$y(x) = \exp(C_1 x - C_2) = Ae^{Bx},$$

где $A = e^{-C_2}$ и $B = C_1$. Несмотря на наше временное предположение о том, что обе константы A и B положительны, мы проверяем, что $y(x) = Ae^{Bx}$ удовлетворяет $yy'' = (y')^2$ для *всех* вещественных значений A и B. При $B = 0$ и различных значениях A мы получаем все горизонтальные прямые плоскости как интегральные кривые. В верхней половине рис. 1.6.8 показаны интегральные кривые, полученные при $A = 1$

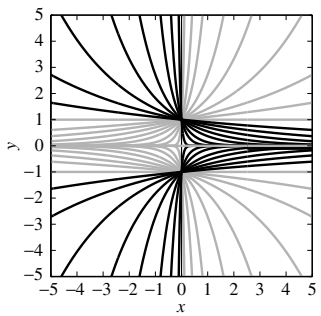


Рис. 1.6.8. Интегральные кривые уравнения $y = Ae^{Bx}$ при $B = 0$ и $A = 0, \pm 1$ — горизонтальные линии $y = 0$, ± 1. Экспоненты при $B > 0$ и $A = \pm 1$ выделены серым цветом, а при $B < 0$ и $A = \pm 1$ они нарисованы черными

(например) и различных положительных значениях B. При $A = -1$ эти интегральные кривые отражаются относительно оси x. А при отрицательных значениях B они отражаются относительно оси y. В частности, мы видим, что мы получаем решения $yy'' = (y')^2$, в которых допускаются и положительные, и отрицательные значения и для y, и для y'. ■

1.6. Задачи

В задачах 1–30 найдите общие решения дифференциальных уравнений. Штрихи везде обозначают производные по x.

1. $(x+y)y' = x-y$
2. $2xyy' = x^2 + 2y^2$
3. $xy' = y + 2\sqrt{xy}$
4. $(x-y)y' = x+y$
5. $x(x+y)y' = y(x-y)$
6. $(x+2y)y' = y$
7. $xy^2y' = x^3 + y^3$
8. $x^2y' = xy + x^2e^{y/x}$
9. $x^2y' = xy + y^2$
10. $xyy' = x^2 + 3y^2$
11. $(x^2 - y^2)y' = 2xy$
12. $xyy' = y^2 + x\sqrt{4x^2 + y^2}$
13. $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$
14. $yy' + x = \sqrt{x^2 + y^2}$
15. $x(x+y)y' + y(3x+y) = 0$
16. $y' = \sqrt{x+y+1}$
17. $y' = (4x+y)^2$
18. $(x+y)y' = 1$
19. $x^2y' + 2xy = 5y^3$
20. $y^2y' + 2xy^3 = 6x$
21. $y' = y + y^3$
22. $x^2y' + 2xy = 5y^4$
23. $xy' + 6y = 3xy^{4/3}$
24. $2xy' + y^3e^{-2x} = 2xy$
25. $y^2(xy' + y)(1 + x^4)^{1/2} = x$
26. $3y^2y' + y^3 = e^{-x}$
27. $3xy^2y' = 3x^4 + y^3$
28. $xe^yy' = 2(e^y + x^3e^{2x})$
29. $(2x\sin y\cos y)y' = 4x^2 + \sin^2 y$
30. $(x + e^y)y' = xe^{-y} - 1$

В задачах 31–42 проверьте, что данное дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах, а затем решите его.

31. $(2x+3y)\,dx + (3x+2y)\,dy = 0$
32. $(4x-y)\,dx + (6y-x)\,dy = 0$
33. $(3x^2 + 2y^2)\,dx + (4xy + 6y^2)\,dy = 0$
34. $(2xy^2 + 3x^2)\,dx + (2x^2y + 4y^3)\,dy = 0$
35. $\left(x^3 + \dfrac{y}{x}\right)dx + (y^2 + \ln x)\,dy = 0$
36. $(1 + ye^{xy})\,dx + (2y + xe^{xy})\,dy = 0$
37. $(\cos x + \ln y)\,dx + \left(\dfrac{x}{y} + e^y\right)dy = 0$
38. $(x + \operatorname{arctg} y)\,dx + \dfrac{x+y}{1+y^2}\,dy = 0$
39. $(3x^2y^3 + y^4)\,dx + (3x^3y^2 + y^4 + 4xy^3)\,dy = 0$
40. $(e^x\sin y + \operatorname{tg} y)\,dx + (e^x\cos y + x\sec^2 y)\,dy = 0$
41. $\left(\dfrac{2x}{y} - \dfrac{3y^2}{x^4}\right)dx + \left(\dfrac{2y}{x^3} - \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{1}{\sqrt{y}}\right)dy = 0$
42. $\dfrac{2x^{5/2} - 3y^{5/3}}{2x^{5/2}y^{2/3}}\,dx + \dfrac{3y^{5/3} - 2x^{5/2}}{3x^{3/2}y^{5/3}}\,dy = 0$

В задачах 43–54 найдите общее решение каждого приводимого дифференциального уравнения второго порядка, допускающего понижение порядка. Примите, что x, y и y' положительны, если это полезно (как в примере 11).

43. $xy'' = y'$
44. $yy'' + (y')^2 = 0$
45. $y'' + 4y = 0$
46. $xy'' + y' = 4x$
47. $y'' = (y')^2$
48. $x^2y'' + 3xy' = 2$
49. $yy'' + (y')^2 = yy'$
50. $y'' = (x + y')^2$
51. $y'' = 2y(y')^3$
52. $y^3y'' = 1$
53. $y'' = 2yy'$
54. $yy'' = 3(y')^2$

55. Покажите, что замена $v = ax + by + c$ преобразует дифференциальное уравнение $dy/dx = F(ax + by + c)$ в уравнение с разделяющимися переменными.

56. Предположим, что $n \neq 0$ и $n \neq 1$. Покажите, что замена $v = y^{1-n}$ преобразует уравнение Бернулли $dy/dx + P(x)y = Q(x)y^n$ в линейное уравнение

$$\frac{dv}{dx} + (1 - n)P(x)v(x) = (1 - n)Q(x).$$

57. Покажите, что замена $v = \ln y$ преобразует дифференциальное уравнение $dy/dx + P(x)y = Q(x)(y \ln y)$ в линейное уравнение $dv/dx + P(x) = Q(x)v(x)$.

58. Используйте идею задачи 57 для решения уравнения

$$x\frac{dy}{dx} - 4x^2y + 2y \ln y = 0.$$

59. Решите дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y - 1}{x + y + 3},$$

найдя h и k так, чтобы замены $x = u + h$, $y = v + k$ преобразовали его в однородное уравнение

$$\frac{dv}{du} = \frac{u - v}{u + v}.$$

60. Используйте метод задачи 59, чтобы решить дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - x + 7}{4x - 3y - 18}.$$

61. Сделайте подходящую замену, чтобы найти решение уравнения $dy/dx = \sin(x - y)$. Содержит ли это общее решение линейное решение $y(x) = x - \pi/2$, которое легко проверить подстановкой в дифференциальное уравнение?

62. Покажите, что интегральные кривые дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y(2x^3 - y^3)}{x(2y^3 - x^3)}$$

имеют вид $x^3 + y^3 = 3Cxy$.

63. Уравнение $dy/dx = A(x)y^2 + B(x)y + C(x)$ называется **уравнением Риккати.** Предположим, что одно частное решение $y_1(x)$ этого уравнения известно. Покажите, что замена

$$y = y_1 + \frac{1}{v}$$

преобразует уравнение Риккати в *линейное* уравнение

$$\frac{dv}{dx} + (B + 2Ay_1)v = -A.$$

Используйте метод задачи 63 для решения уравнений в задачах 64 и 65 при условии, что $y_1(x) = x$ *— решение каждого из этих уравнений.*

64. $\dfrac{dy}{dx} + y^2 = 1 + x^2$

65. $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 1 + x^2 + y^2$

66. Уравнение вида

$$y = xy' + g(y') \tag{37}$$

называют **уравнением Клеро**. Покажите, что однопараметрическое семейство прямых линий, заданных уравнением

$$y(x) = Cx + g(C), \tag{38}$$

является общим решением уравнения (37).

67. Рассмотрим уравнение Клеро

$$y = xy' - \tfrac{1}{4}(y')^2,$$

для которого $g(y') = -\frac{1}{4}(y')^2$ в уравнении (37). Покажите, что линия

$$y = Cx - \tfrac{1}{4}C^2$$

касается параболы $y = x^2$ в точке $\left(\frac{1}{2}C, \frac{1}{4}C^2\right)$. Объясните, почему отсюда следует, что $y = x^2$ — особое решение данного уравнения Клеро. Это особое решение и однопараметрическое семейство прямых линий, являющихся решениями, показаны на рис. 1.6.9.

68. Выведите уравнение (18) из этого раздела из уравнений (16) и (17).

69. В условиях примера 7 предположите, что $a = 100$ миль, $v_0 = 400$ миль в час и $w = 40$ миль в час. Как далеко на север ветер отнесет самолет?

70. Как и в тексте, предположите, что самолет держит курс на аэропорт, находящийся в начале координат. Пусть $v_0 = 500$ миль в час и $w = 50$ миль в час (причем ветер дует на север), а самолет вылетает из точки $(200, 150)$. Покажите, что траектория самолета описывается уравнением

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = 2(200x^9)^{1/10}.$$

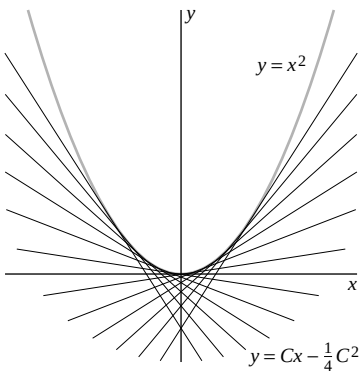


Рис. 1.6.9. Решения уравнения Клеро из задачи 67. "Типичная" прямая линия с уравнением $y = Cx - \frac{1}{4}C^2$ касается параболы в точке $(\frac{1}{2}C, \frac{1}{4}C^2)$

71. Река шириной 100 футов течет на север со скоростью w футов в секунду. Собака начинает плыть в точке $(100, 0)$ и плывет со скоростью $v_0 = 4$ фута в секунду, всегда направляясь к дереву в точке $(0, 0)$ на западном берегу непосредственно перед отправной точкой. **(a)** Пусть $w = 2$ фута в секунду. Покажите, что собака достигнет дерева. **(b)** Пусть $w = 4$ фута в секунду. Покажите, что собака достигает вместо этого точки на западном берегу в 50 футах к северу от дерева. **(c)** Пусть $w = 6$ футов в секунду. Покажите, что собака никогда не достигает западного берега.

72. Из курса анализа известно, что *кривизна* κ плоской кривой $y = y(x)$ в точке (x, y) дается равенством

$$\kappa = \frac{|y''(x)|}{[1 + y'(x)^2]^{3/2}}$$

и что кривизна окружности радиуса r равна $\kappa = 1/r$. [См. пример 3 в разделе 12.6 учебника анализа Edwards and Penney, *Calculus*, 6th edition (Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 2002).] Используя замену $\rho = y'$, получите общее решение дифференциального уравнения второго порядка

$$ry'' = [1 + (y')^2]^{3/2}$$

(с константой r) в форме

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Таким образом, окружность радиуса r (или ее часть) — единственная плоская кривая с постоянной кривизной $1/r$.

1.6. Приложение. Решение с помощью компьютерной алгебры

Системы компьютерной алгебры обычно включают команды для "автоматического" решения дифференциальных уравнений. Но две различные такие системы часто дают различные результаты, эквивалентность которых не очевидна, и конкретная система может дать решение в чрезмерно сложной форме. Следовательно, решения дифференциальных уравнений с помощью компьютерной алгебры часто требуют значительной "доработки" или упрощения человеком-пользователем, чтобы из них можно было извлечь нужную информацию. Ниже мы иллюстрируем эти проблемы, используя интересное дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \sin(x - y), \tag{1}$$

которое появилось в приложении к разделу 1.3. Команда системы *Maple*

```
dsolve( D(y)(x) = sin(x - y(x)), y(x));
```

приводит к простому и привлекательному результату

$$y(x) = x - 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x - 2 - C1}{x - C1}\right), \tag{2}$$

который и был там приведен. Но эквивалентная команда системы *Mathematica*

```
DSolve[ y'[x] == Sin[x - y[x]], y[x], x]
```

возвращает более сложный результат:

$$y(x) = x \pm 2\cos^{-1}\left(\pm\frac{\sqrt{4+4x+x^2+4C1+2xC1+C1^2}}{\sqrt{4+4x+2x^2+4C1+4xC1+2C1^2}}\right). \tag{3}$$

Это очевидное несовпадение не необычно, и для другого дифференциального уравнения система *Mathematica* вполне может сгенерировать решение в более простой форме. Чтобы избежать проблем с результатами, которые возникли для уравнений (2) и (3), обычно перед передачей дифференциального уравнения системе компьютерной алгебры его нужно упростить.

Упражнение 1. Покажите, что замена $v = x - y$ в уравнении (1) дает уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dv}{dx} = 1 - \sin v. \tag{4}$$

Теперь команда системы *Mathematica*

```
Integrate[1/(1 - Sin[v]), v] // TrigReduce
```

дает

$$\int \frac{1}{1-\sin v}\,dv = \frac{\cos v}{1-\sin v} \tag{5}$$

(Система *Mathematica* по умолчанию опускает постоянную интегрирования.)

Упражнение 2. Примените тригонометрические тождества

$$\sin 2A = 2\sin A\cos A \qquad \text{и} \qquad \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A,$$

чтобы из уравнения (5) вывести

$$\int \frac{1}{1-\sin v}\,dv = \frac{1+\operatorname{tg}(v/2)}{1-\operatorname{tg}(v/2)} + C. \tag{6}$$

Упражнение 3. Выведите из (6), что уравнение (4) имеет общее решение

$$v(x) = 2\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1+C}{x+1+C}\right),$$

и, следовательно, что уравнение (1) имеет общее решение

$$y(x) = x - 2\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1+C}{x+1+C}\right). \tag{7}$$

Упражнение 4. Наконец, установите, что равенства (2) и (7) дают одно и то же семейство решений. Каково соотношение между константами C и $C1$?

Упражнение 5. Покажите, что интеграл в уравнении (5) немедленно дает показанное на рис. 1.6.10 неявное решение, найденное графическим калькулятором.

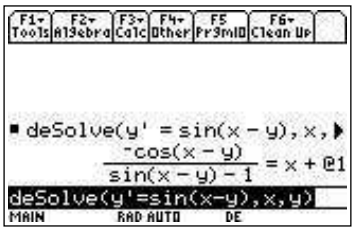


Рис. 1.6.10. Неявное решение уравнения $y' = \sin(x - y)$, найденное графическим калькулятором TI-89

Исследование. Пусть p и q — две различные цифры, отличные от нуля, в номере вашего студенческого билета. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{p}\cos(x - qy). \tag{8}$$

(a) Найдите символическое общее решение, используя систему компьютерной алгебры (и, возможно, некоторые методы, рассмотренные в этой главе).

(b) Найдите символическое частное решение, удовлетворяющее нескольким типичным начальным условиям вида $y(x_0) = y_0$.

(c) Определите возможные значения a и b такие, что прямая линия $y = ax + b$ является интегральной кривой уравнения (8).

(d) Начертите поле направлений и некоторые типичные интегральные кривые. Можете ли вы увидеть связь между символическим решением и вашими (прямолинейными и кривыми) интегральными кривыми?

Глава 1. Резюме

В этой главе мы обсудили приложения и методы решения нескольких важных типов дифференциальных уравнений первого порядка, включая те, которые являются уравнениями с разделяющимися переменными (раздел 1.4), линейными (раздел 1.5) или уравнениями в полных дифференциалах (раздел 1.6). В разделе 1.6 мы также обсуждали методы замены, которые иногда позволяют преобразовать данное дифференциальное уравнение первого порядка в такое, которое является уравнением с разделяющимися переменными или линейным, или уравнением в полных дифференциалах.

Чтобы не казалось, что эти методы представляют собой набор специальных и несвязанных методов, важно обратить внимание, что все они объединены единой идеей. Дифференциальное уравнение

$$f(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

мы пытаемся записать в форме

$$\frac{d}{dx}\left[G(x, y)\right] = 0. \tag{2}$$

Именно для того, чтобы привести его к форме уравнения (2), мы умножаем обе части уравнения (1) на подходящий интегрирующий множитель (даже если мы только разделяем переменные). Но как только мы нашли функцию $G(x, y)$ такую, что уравнения (1) и (2) являются эквивалентными, общее решение определено неявно с помощью уравнения

$$G(x, y) = C, \tag{3}$$

которое получается интегрированием уравнения (2).

Ниже описан метод, который может помочь решить конкретное дифференциальное уравнение первого порядка. Он состоит из следующих шагов.

- Можно ли разделить переменные (свести уравнение к уравнению *с разделенными переменными*)? Если это так, разделите переменные (сведите уравнение к уравнению с разделенными переменными) и интегрируйте (раздел 1.4).
- Это *линейное* уравнение? Иными словами, можно ли его записать в виде

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)?$$

  Если это так, умножьте его на интегрирующий множитель $\rho = \exp\left(\int P\,dx\right)$, указанный в разделе 1.5.
- Это *уравнение в полных дифференциалах*? Иными словами, можно ли его записать в виде $M\,dx + N\,dy = 0$, где $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$ (раздел 1.6)?
- Если уравнение не является ни уравнением с разделяющимися переменными, ни линейным и не является уравнением в полных дифференциалах, есть ли замена, которая позволит свести его к одному из этих типов? Например, является ли оно однородным (раздел 1.6)?

Многие дифференциальные уравнения первого порядка можно решить с помощью этой процедуры. Однако еще больше таких, которые решить таким способом не удается. Поскольку сейчас широко доступны компьютеры, чтобы найти приближенные решения тех дифференциальных уравнений, которые не могут быть решены явно методами этой главы, обычно используются *численные* методы. Действительно, большинство интегральных кривых, показанных на рисунках в этой главе, было нарисовано с помощью численных аппроксимаций, а не точных решений. Некоторые численные методы решения дифференциальных уравнений будут рассмотрены в главе 2.

Глава 1. Обзорные задачи

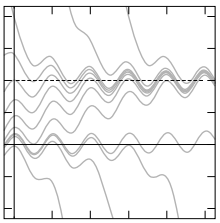
В задачах 1–30 найдите общие решения дифференциальных уравнений. Штрихи обозначают производные по x.

1. $x^3 + 3y - xy' = 0$
2. $xy^2 + 3y^2 - x^2y' = 0$
3. $xy + y^2 - x^2y' = 0$
4. $2xy^3 + e^x + (3x^2y^2 + \sin y)y' = 0$
5. $3y + x^4y' = 2xy$
6. $2xy^2 + x^2y' = y^2$
7. $2x^2y + x^3y' = 1$
8. $2xy + x^2y' = y^2$
9. $xy' + 2y = 6x^2\sqrt{y}$
10. $y' = 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2$
11. $x^2y' = xy + 3y^2$
12. $6xy^3 + 2y^4 + (9x^2y^2 + 8xy^3)y' = 0$

13. $4xy^2 + y' = 5x^4y^2$
14. $x^3y' = x^2y - y^3$
15. $y' + 3y = 3x^2e^{-3x}$
16. $y' = x^2 - 2xy + y^2$
17. $e^x + ye^{xy} + (e^y + xe^{yx})y' = 0$
18. $2x^2y - x^3y' = y^3$
19. $3x^5y^2 + x^3y' = 2y^2$
20. $xy' + 3y = 3x^{-3/2}$
21. $(x^2 - 1)y' + (x - 1)y = 1$
22. $xy' = 6y + 12x^4y^{2/3}$
23. $e^y + y\cos x + (xe^y + \sin x)y' = 0$
24. $9x^2y^2 + x^{3/2}y' = y^2$
25. $2y + (x + 1)y' = 3x + 3$
26. $9x^{1/2}y^{4/3} - 12x^{1/5}y^{3/2} + (8x^{3/2}y^{1/3} - 15x^{6/5}y^{1/2})y' = 0$
27. $3y + x^3y^4 + 3xy' = 0$
28. $y + xy' = 2e^{2x}$
29. $(2x + 1)y' + y = (2x + 1)^{3/2}$
30. $y' = \sqrt{x + y}$

Каждое из дифференциальных уравнений, приведенных в задачах 31–36, принадлежит к двум различным типам, которые рассматривались в этой главе (уравнение с разделяющимися переменными, линейное, однородное, Бернулли, уравнение в полных дифференциалах и т.д.). Следовательно, получите общие решения каждого из этих уравнений двумя различными способами; потом сравните ваши результаты.

31. $\dfrac{dy}{dx} = 3(y + 7)x^2$
32. $\dfrac{dy}{dx} = xy^3 - xy$
33. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3x^2 + 2y^2}{4xy}$
34. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + 3y}{y - 3x}$
35. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy + 2x}{x^2 + 1}$
36. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{y} - y}{\operatorname{tg} x}$



ГЛАВА 2

Математические модели и численные методы

2.1. Модели роста населения

В разделе 1.4 мы ввели экспоненциальное дифференциальное уравнение $dP/dt = kP$, имеющее решение $P(t) = P_0 e^{kt}$ в качестве математической модели естественного прироста населения, который происходит в результате постоянства показателей рождаемости и смертности. Здесь мы представляем более общую модель роста населения, которая учитывает изменение показателей рождаемости и смертности, которые теперь уже не обязательно будут константами. Как и прежде, однако, наша функция численности населения $P(t)$ будет *непрерывной* аппроксимацией фактической численности населения, которая, конечно, изменяется не непрерывно, а скачками, так как ее приращения являются целыми числами.

Предположим, что численность населения изменяется только в результате рождений и случаев смерти, а иммиграцию и эмиграцию учитывать не будем. Общепринято оценивать прирост или уменьшение населения с помощью функций — *коэффициента рождаемости* и *показателя смертности*, определенных следующим образом:

- $\beta(t)$ — число рождений на единицу населения на единицу времени в момент времени t;
- $\delta(t)$ — число случаев смерти на единицу населения на единицу времени в момент времени t.

Тогда количество рождений и случаев смерти, которые происходят в течение временного интервала $[t, t + \Delta t]$, выражаются (приблизительно) так:

$$\text{рождений} — \quad \beta(t) \cdot P(t) \cdot \Delta t, \qquad \text{случаев смерти} — \quad \delta(t) \cdot P(t) \cdot \Delta t.$$

Следовательно, изменение численности населении ΔP в течение временного интервала $[t, t + \Delta t]$ длиной Δt равно

$$\Delta P = \{\text{количество рождений}\} - \{\text{количество случаев смерти}\} \approx$$
$$\approx \beta(t) \cdot P(t) \cdot \Delta t - \delta(t) \cdot P(t) \cdot \Delta t,$$

так что

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} \approx [\beta(t) - \delta(t)]\, P(t).$$

Ошибка в этой аппроксимации должна приближаться к нулю при $\Delta t \to 0$, так что в результате предельного перехода мы получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{dP}{dt} = (\beta - \delta)P, \tag{1}$$

в котором мы пишем $\beta = \beta(t)$, $\delta = \delta(t)$ и $P = P(t)$ для краткости. Уравнение (1) — **общее уравнение численности населения.** Если β и δ являются постоянными, уравнение (1) приводит к уравнению естественного роста с $k = \beta - \delta$. Но не исключено, что β и δ являются переменными функциями времени t. Количество рождений и показатель смертности не всегда известны заранее; они могут зависеть от неизвестной функции $P(t)$.

Пример 1 Предположим, что популяция аллигаторов первоначально насчитывает 100 особей и что ее показатель смертности $\delta = 0$ (так что ни один аллигатор никогда не умирает). Пусть коэффициент рождаемости $\beta = (0{,}0005)P$. Таким образом, популяция увеличивается, причем уравнение (1) приводит к задаче Коши (задаче с начальными условиями)

$$\frac{dP}{dt} = (0{,}0005)P^2, \quad P(0) = 100$$

(t измеряется в годах). Тогда после разделения переменных мы получаем

$$\int \frac{1}{P^2}\, dP = \int (0{,}0005)\, dt;$$

$$-\frac{1}{P} = (0{,}0005)t + C.$$

Замена $t = 0$, $P = 100$ дает $C = -1/100$, а затем мы легко решаем полученное уравнение и находим

$$P(t) = \frac{2000}{20 - t}.$$

Пусть, например, $P(10) = 2000/10 = 200$, так что через 10 лет количество аллигаторов в популяции удвоилось. Но поскольку $P \to +\infty$ при $t \to 20$, то реальный "демографический" взрыв происходит через 20 лет. Действительно, поле направлений и интегральные кривые, показанные на рис. 2.1.1, указывают, что демографический взрыв происходит всегда, независимо от (положительного) начального значения численности популяции $P(0) = P_0$. В частности, численность популяции неограниченно возрастает за *конечный* период времени. ■

Модели ограниченного роста популяции и логистическое уравнение

Однако по мере увеличения численности населения коэффициент рождаемости уменьшается. Точно так же коэффициент рождаемости уменьшается и в популяции мух в закрытом

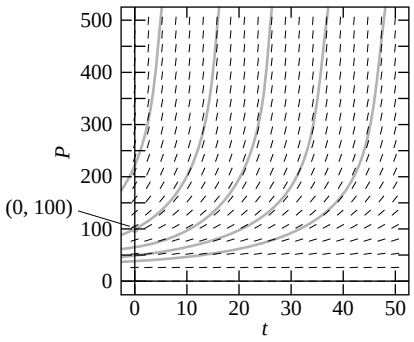


Рис. 2.1.1. Поле направлений и интегральные кривые уравнения $dP/dt = (0{,}0005)P^2$ из примера 1

контейнере. Причины могут быть самыми разными — от возрастания роли науки, образования или усложнения культуры до ограниченности поставок продовольствия. Предположим, например, что коэффициент рождаемости β — *линейная* убывающая функция, зависящая от численности населения P, так что $\beta = \beta_0 - \beta_1 P$, где β_0 и β_1 — положительные константы. Если показатель смертности $\delta = \delta_0$ остается постоянным, то уравнение (1) принимает вид

$$\frac{dP}{dt} = (\beta_0 - \beta_1 P - \delta_0)P;$$

иными словами,

$$\frac{dP}{dt} = aP - bP^2, \tag{2}$$

где $a = \beta_0 - \delta_0$ и $b = \beta_1$.

Если коэффициенты a и b оба положительны, то уравнение (2) называют **логистическим уравнением.** Ради удобства исследования зависимости численности населения $P(t)$ от значений параметров в уравнении, полезно переписать логистическое уравнение в виде

$$\frac{dP}{dt} = kP(M - P), \tag{3}$$

где $k = b$ и $M = a/b$ — константы.

Пример 2 В примере 4 из раздела 1.3 мы исследовали график численности населения, которая удовлетворяет логистическому уравнению

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}0004P(150 - P) = 0{,}06P - 0{,}0004P^2. \tag{4}$$

Чтобы решить это дифференциальное уравнение в символьном виде, мы разделяем переменные и интегрируем. Мы получаем

$$\int \frac{dP}{P(150-P)} = \int 0{,}0004\,dt,$$

$$\frac{1}{150}\int \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{150-P}\right) dP = \int 0{,}0004\,dt, \quad \text{[элементарные дроби]}$$

$$\ln|P| - \ln|150-P| = 0{,}06t + C,$$

$$\frac{P}{150-P} = \pm e^{C} e^{0{,}06t} = Be^{0{,}06t} \quad [\text{где } B = \pm e^{C}].$$

Если мы подставим $t = 0$ и $P = P_0 \neq 150$ в это последнее уравнение, мы найдем $B = P_0/(150 - P_0)$. Следовательно,

$$\frac{P}{150-P} = \frac{P_0 e^{0{,}06t}}{150-P_0}.$$

Наконец, это уравнение просто решить относительно численности населения

$$P(t) = \frac{150P_0}{P_0 + (150-P_0)e^{-0{,}06t}} \tag{5}$$

в момент времени t, считая известной начальную численность населения $P_0 = P(0)$. На рис. 2.1.2 показано множество интегральных кривых, соответствующих различным значениям начальной численности населения в пределах от $P_0 = 20$ до $P_0 = 300$. Обратите внимание, что все эти интегральные кривые асимптотически приближаются к горизонтальной линии $P = 150$. Действительно, из уравнения (5) непосредственно видно, что $\lim_{t\to\infty} P(t) = 150$ независимо от начального значения $P_0 > 0$. ■

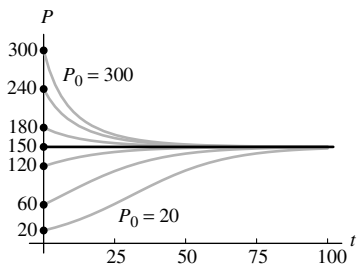


Рис. 2.1.2. Типичные интегральные кривые логистического уравнения $P' = 0{,}06P - 0{,}0004P^2$

Модели ограниченного роста популяции и потенциальная емкость экологической системы

Конечное ограничение численности популяции, рассмотренное в примере 2, характерно для логистических моделей роста популяции. В задаче 32 мы просим, используя метод решения примера 2, показать, что решением логистической задачи Коши (задачи с начальными

условиями)

$$\frac{dP}{dt} = kP(M - P), \quad P(0) = P_0 \tag{6}$$

является функция

$$P(t) = \frac{MP_0}{P_0 + (M - P_0)e^{-kMt}}. \tag{7}$$

Фактическое значение численности популяции животных положительно. Если $P_0 = M$, то (7) приводит к постоянному значению (константе), т. е. к "равновесной численности" популяции $P(t) \equiv M$. Иными словами, поведение популяции, подчиняющейся логистической модели, зависит от того, какому из неравенств удовлетворяет ее численность: $0 < P_0 < M$ или $P_0 > M$. Если $0 < P_0 < M$, то из (6) и (7) следует, что $P' > 0$ и

$$P(t) = \frac{MP_0}{P_0 + (M - P_0)e^{-kMt}} = \frac{MP_0}{P_0 + \{\text{положительное число}\}} < \frac{MP_0}{P_0} = M.$$

Однако, если $P_0 > M$, то из (6) и (7) следует, что $P' < 0$ и

$$P(t) = \frac{MP_0}{P_0 + (M - P_0)e^{-kMt}} = \frac{MP_0}{P_0 + \{\text{отрицательное число}\}} > \frac{MP_0}{P_0} = M.$$

В любом случае "положительное" или "отрицательное" число в знаменателе имеет абсолютное значение меньшее, чем P_0, и из-за экспоненциального множителя стремится к 0 при $t \to +\infty$. Из этого следует, что

$$\lim_{t \to +\infty} P(t) = \frac{MP_0}{P_0 + 0} = M. \tag{8}$$

Таким образом, численность популяции, которая удовлетворяет логистическому уравнению, *не* растет неограниченно, как при экспоненциальном росте, моделируемом экспоненциальным уравнением $P' = kP$. Вместо этого она приближается к конечной **предельной** численности популяции M при $t \to +\infty$. Как следует из вида типичных логистических интегральных кривых на рис. 2.1.3, численность населения $P(t)$ устойчиво увеличивается и приближается к M снизу, если $0 < P_0 < M$, но устойчиво уменьшается и приближается

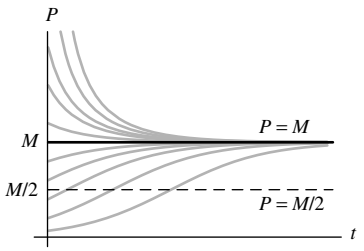


Рис. 2.1.3. Типичные интегральные кривые логистического уравнения $P' = kP(M - P)$. Каждая интегральная кривая, которая начинается ниже линии $P = M/2$, имеет точку перегиба на этой линии. (См. задачу 34)

к M сверху, если $P_0 > M$. Иногда M называют **потенциальной емкостью экологической системы**, полагая ее равной максимальной численности популяции, которую среда может поддерживать длительное время.

Пример 3 Предположим, что в 1885 году численность населения некоторой страны была равна 50 миллионам и возрастала со скоростью $750\,000$ человек в год. Предположим также, что в 1940 году численность ее населения была равна 100 миллионам и возрастала со скоростью 1 миллион в год. Кроме того, предположим, что численность населения удовлетворяет логистическому уравнению. Определим предельное значение численности населения M и предскажем численность населения в 2000 году.

Решение Мы подставляем данные в уравнение (3) и находим, что

$$0{,}75 = 50k(M - 50), \quad 1{,}00 = 100k(M - 100).$$

Мы решаем полученную систему уравнений и находим $M = 200$ и $k = 0{,}0001$. Таким образом, численность населения рассматриваемой страны ограничена 200 миллионами. При этих значениях M и k мы полагаем $t = 0$ для 1940 года (когда $P_0 = 100$) и находим, что, согласно равенству (7) численность населения в 2000 году будет равна

$$P(60) = \frac{100 \cdot 200}{100 + (200 - 100)e^{-(0{,}0001)(200)(60)}},$$

т. е. приблизительно $153{,}7$ миллиона человек. ■

Историческая справка

Логистическое уравнение было введено около 1840 года бельгийским математиком и демографом П. Ф. Ферхюльстом (P. F. Verhulst)[1] как возможная модель прироста населения. В следующих двух примерах мы сравниваем естественный рост, и логистическая модель согласуется с данными переписи населения США, за XIX столетие, а затем мы сравниваем прогнозы численности в течение XX столетия.

Пример 4 В США численность населения в 1800 году была равна $5{,}308$ миллиона, а в 1900 году было $76{,}212$ миллиона человек. Если положить $P_0 = 5{,}308$ (и $t = 0$ в 1800 году) в модели естественного роста $P(t) = P_0 e^{rt}$ и подставить $t = 100$, $P = 76{,}212$, мы получим, что

$$76{,}212 = 5{,}308e^{100r}, \quad \text{так что} \quad r = \frac{1}{100} \ln \frac{76{,}212}{5{,}308} \approx 0{,}026643.$$

[1] Более точно, логистическое уравнение ввел Ферхюльст в 1838 году, им широко пользовался Лотка, а в 1920 году его переоткрыли американский эколог Перл (иногда встречается написание Пирл) и Рид. Часто оно называется ***уравнением Ферхюльста–Перла***. Мне остается лишь добавить (для любителей копаться в толстых книгах и Интернете), что встречаются также написания Ферхульст и Верхюльст, а потому не удивляйтесь, если встретите логистическое уравнение под названием ***уравнение Верхюльста–Перла***. Ни математики, ни биологи, конечно же, не остались в долгу у любителей изящной словесности: пока последние упражнялись в написании фамилии бельгийского математика и демографа, математики пытались придать этому уравнению наиболее простой вид, ну а биологи — ввести в него необходимые им параметры. Поэтому вы можете встретить логистическое уравнение в самых разных формах и с самыми разными параметрами. — *Примеч. ред.*

Таким образом, наша модель естественного роста американского населения в течение XIX столетия будет содержать равенство

$$P(t) = (5{,}308)e^{(0{,}026643)t} \tag{9}$$

(причем t измеряется в годах, а P — в миллионах). Поскольку $e^{0{,}026643} \approx$ $\approx 1{,}02700$, средний прирост населения между 1800 и 1900 годами был приблизительно равен $2{,}7\%$ в год. ■

Пример 5 В США численность населения в 1850 году была равна 23,192 миллиона. Если положить $P_0 = 5{,}308$ и подставить данные $t = 50$, $P = 23{,}192$ (для 1850 года) и $t = 100$, $P = 76{,}212$ (для 1900 года) в логистическую формулу (уравнение (7)), мы получим следующие два уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{(5{,}308)M}{5{,}308 + (M - 5{,}308)e^{-50kM}} &= 23{,}192, \\ \frac{(5{,}308)M}{5{,}308 + (M - 5{,}308)e^{-100kM}} &= 76{,}212 \end{aligned} \tag{10}$$

с двумя неизвестными k и M. Нелинейные системы, подобные полученной, обычно решаются численно с помощью подходящей компьютерной системы. Но с помощью удачного алгебраического фокуса (задача 36 в этом разделе) уравнения (10) могут быть решены вручную, и мы найдем $k = 0{,}000167716$, $M = 188{,}121$. Подстановка этих значений в уравнение (7) дает логистическую модель

$$P(t) = \frac{998{,}546}{5{,}308 + (182{,}813)e^{-(0{,}031551)t}}. \tag{11}$$

В таблице на рис. 2.1.4 сравниваются фактические данные для переписи населения в США в 1800–1990 годах с предсказанными экспоненциальной моделью роста (9) и логистической моделью (11). Обе модели хорошо согласуются с данными для XIX столетия. Но экспоненциальная модель заметно расходится от данных переписи в ранние десятилетия XX столетия, тогда как логистическая модель остается достаточно точной до 1940 года. К концу XX столетия экспоненциальная модель дает значительно завышенный прогноз численности населения (более чем миллиард в 2000 году) — тогда как логистическая модель дает несколько заниженную численность населения.

Чтобы сопоставить данную модель с фактическими данными, общепринято определять **среднюю ошибку** (модели) как *квадратный корень из среднего арифметического квадратов отдельных ошибок*; средние ошибки приведены в четвертом и шестом столбцах таблицы на рис. 2.1.4). Используя только эти данные за 1800–1900 годы, в соответствии с этим определением мы получили 3,162 для средней ошибки экспоненциальной модели, в то время как средняя ошибка логистической модели равна только 0,452. Следовательно, даже в 1900 году мы могли ожидать, что логистическая модель предскажет прирост населения США в течение XX столетия гораздо более точно, чем экспоненциальная модель. ■

Год	Фактическое население США	Эксп. модель	Ошибка эксп.	Логистическая модель	Ошибка логистическая
1800	5,308	5,308	0,000	5,308	0,000
1810	7,240	6,929	0,311	7,202	0,038
1820	9,638	9,044	0,594	9,735	−0,097
1830	12,861	11,805	1,056	13,095	−0,234
1840	17,064	15,409	1,655	17,501	−0,437
1850	23,192	20,113	3,079	23,192	0,000
1860	31,443	26,253	5,190	30,405	1,038
1870	38,558	34,268	4,290	39,326	−0,768
1880	50,189	44,730	5,459	50,034	0,155
1890	62,980	58,387	4,593	62,435	0,545
1900	76,212	76,212	0,000	76,213	−0,001
1910	92,228	99,479	−7,251	90,834	1,394
1920	106,022	129,849	−23,827	105,612	0,410
1930	123,203	169,492	−46,289	119,834	3,369
1940	132,165	221,237	−89,072	132,886	−0,721
1950	151,326	288,780	−137,454	144,354	6,972
1960	179,323	376,943	−197,620	154,052	25,271
1970	203,302	492,023	−288,721	161,990	41,312
1980	226,542	642,236	−415,694	168,316	58,226
1990	248,710	838,308	−589,598	173,252	76,458
2000	281,422	1094,240	−812,818	177,038	104,384

Рис. 2.1.4. Сравнение моделей экспоненциального роста и логистических с данными американских переписей населения (в миллионах)

Мораль примеров 4 и 5 состоит в том, что нельзя ожидать слишком много от моделей, которые базируются на довольно скудной информации (пара-тройка данных). Большая часть *статистики* как науки посвящена методам анализа больших "наборов данных" с целью сформулировать полезную (и по возможности надежную) математическую модель.

Дополнительные приложения логистического уравнения

Теперь мы опишем некоторые ситуации, в которых логистическое уравнение является удовлетворительной математической моделью.

1. *Ограниченные ресурсы среды*. Некоторая среда может поддерживать популяцию численностью M особей. Тогда разумно ожидать, что прирост $\beta - \delta$ (объединенный показатель рождаемости и смертности) пропорционален $M - P$, потому что мы можем рассматривать $M - P$ как потенциал для дальнейшего роста. Тогда $\beta - \delta = k(M - P)$, так что

$$\frac{dP}{dt} = (\beta - \delta)P = kP(M - P).$$

Классический пример среды с ограниченными ресурсами — популяция плодовой мушки в закрытом контейнере.

2. *Конкуренция*. Если коэффициент рождаемости β является константой, но показатель смертности δ пропорционален P, так что $\delta = \alpha P$, то

$$\frac{dP}{dt} = (\beta - \alpha P)P = kP(M - P).$$

Это может быть разумной рабочей гипотезой при изучении каннибалистической популяции, в которой все смертные случаи являются следствиями случайных столкновений между особями. Конечно, обычно конкуренция между особями не настолько смертельна, а ее эффекты обычно не носят столь драматичного характера.

3. *Пропорциональность произведению*. Пусть $P(t)$ обозначает количество особей в популяции с постоянной численностью M, которые инфицированы некоторой неизлечимой инфекционной болезнью. Болезнь распространяется случайно. Тогда $P'(t)$ пропорционально произведению числа P заболевших особей и числа здоровых особей $M - P$, поэтому $dP/dt = kP(M - P)$. Снова мы обнаруживаем, что математическая модель включает логистическое уравнение. Математическое описание распространения слухов среди населения численностью M индивидуумов идентично.

Пример 6 Предположим, что в момент времени $t = 0$ в городе с населением $M = 100$ тысяч человек некоторый слух услышали 10 тысяч человек. Через 1 неделю число $P(t)$ тех, кто его услышал, увеличилось и стало равным $P(1) = 20$ тысячам. Предполагая, что $P(t)$ удовлетворяет логистическому уравнению, вычислите, когда слух услышит 80% населения города.

Решение Подставляя $P_0 = 10$ и $M = 100$ (тысяч) в равенство (7), мы получаем

$$P(t) = \frac{1000}{10 + 90e^{-100kt}}. \tag{12}$$

Тогда замена $t = 1$, $P = 20$ дает уравнение

$$20 = \frac{1000}{10 + 90e^{-100k}},$$

которое легко решается относительно

$$e^{-100k} = \tfrac{4}{9}, \quad \text{так что} \quad k = \tfrac{1}{100}\ln\tfrac{9}{4} \approx 0{,}008109.$$

При $P(t) = 80$ равенство (12) принимает вид

$$80 = \frac{1000}{10 + 90e^{-100kt}};$$

это уравнение мы решаем относительно $e^{-100kt} = \frac{1}{36}$. Из этого следует, что 80% населения услышали слух тогда, когда

$$t = \frac{\ln 36}{100k} = \frac{\ln 36}{\ln\frac{9}{4}} \approx 4{,}42,$$

таким образом, — приблизительно через 4 недели и 3 дня. ■

Судный День и исчезновение популяции

Рассмотрим популяцию численностью $P(t)$ бесхитростных животных, в которой особи женского пола для репродуктивных целей полагаются исключительно на случайные встречи с особями мужского пола. Разумно ожидать, что вероятность таких встреч пропорциональна произведению числа $P/2$ особей мужского пола и числа особей женского пола $P/2$, следовательно, пропорциональна P^2. Мы поэтому предполагаем, что рождения происходят со скоростью kP^2 (в единицу времени, причем k — константа). Коэффициент рождаемости (количество рождений /время/ численность популяции) тогда равен $\beta = kP$. Если показатель смертности δ является константой, то общее уравнение роста популяции (1) принимает вид дифференциального уравнения

$$\frac{dP}{dt} = kP^2 - \delta P = kP(P - M) \tag{13}$$

(где $M = \delta/k > 0$), которое рассматривается как математическая модель роста численности популяции.

Обратите внимание, что правая часть в уравнении (13) имеет знак, *противоположный* знаку правой части логистического уравнения (3). Мы увидим, что постоянная M теперь представляет собой **пороговое значение численности популяции**, так как поведение численности популяции в будущем критически зависит от того, является ли начальное значение численности популяции P_0 меньшим или большим, чем M.

Пример 7 Рассмотрим популяцию животных численностью $P(t)$, которая моделируется уравнением

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}0004P(P - 150) = 0{,}0004P^2 - 0{,}06P. \tag{14}$$

Мы хотим найти $P(t)$ если (a) $P(0) = 200$; (b) $P(0) = 100$.

Решение Чтобы решить уравнение (14), мы отделяем переменные и интегрируем. Мы получаем

$$\int \frac{dP}{P(P - 150)} = \int 0{,}0004\, dt,$$

$$-\frac{1}{150}\int \left(\frac{1}{P} - \frac{1}{P - 150}\right) dP = \int 0{,}0004\, dt, \quad \text{[элементарные дроби]}$$

$$\ln|P| - \ln|P - 150| = -0{,}06t + C,$$

$$\frac{P}{P - 150} = \pm e^C e^{-0{,}06t} = Be^{-0{,}06t} \qquad [\text{где } B = \pm e^C]. \tag{15}$$

(a) Замена $t = 0$ и $P = 200$ в (15) дает $B = 4$. При этом значении B мы решаем уравнение (15) и получаем

$$P(t) = \frac{600e^{-0{,}06t}}{4e^{-0{,}06t} - 1}. \tag{16}$$

Заметьте, что при увеличении t, когда оно стремится к $T = \frac{\ln(4)}{0{,}06} \approx 23{,}105$, положительный знаменатель справа в (16) уменьшается и стремится к 0. Следовательно, $P(t) \to +\infty$ при $t \to T^-$. Это *Судный День* — в этот день происходит реальный демографический *взрыв*.

(b) Подстановка $t = 0$ и $P = 100$ в (15) дает $B = -2$. При этом значении B мы решаем уравнение (15) и находим

$$P(t) = \frac{300e^{-0{,}06t}}{2e^{-0{,}06t} + 1} = \frac{300}{2 + e^{0{,}06t}}. \tag{17}$$

Заметьте, что, при неограниченном увеличении t положительный знаменатель в правой части равенства (17) стремится к $+\infty$. Следовательно, $P(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Это — состояние окончательного *исчезновения*.■

Таким образом, популяция в примере 7 или взрывается, или подвергается другой опасности — угрозе исчезновения, в зависимости от того, превышает ли ее начальная численность пороговое значение $M = 150$. Нечто подобное этому явлению иногда наблюдается в некоторых популяциях животных, таких как популяции аллигаторов в некоторых штатах на Юге Соединенных Штатов.

На рис. 2.1.5 показаны типичные интегральные кривые, которые иллюстрируют эти две возможности для численности популяции $P(t)$, удовлетворяющей уравнению (13). Если $P_0 = M$ (точно равно!), тогда численность популяции остается постоянной. Однако это равновесное положение очень непостоянно. Если P_0 превышает M (даже немного), то $P(t)$ быстро и неограниченно увеличивается, ну а если начальное (положительное) значение численности популяции меньше чем M (хотя бы и немного), то оно уменьшается (более постепенно) и стремится к нулю при $t \to +\infty$. См. задачу 33.

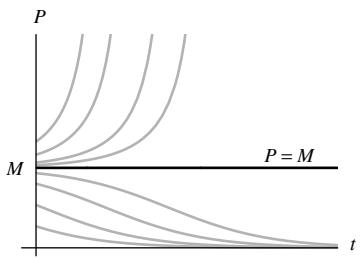


Рис. 2.1.5. Типичные интегральные кривые уравнения $P' = kP(P - M)$, моделирующего взрыв численности популяции или ее исчезновение

2.1. Задачи

Отделите переменные и используйте разложение на элементарные дроби, чтобы решить задачи Коши (задачи с начальными условиями) в задачах 1–8. Используйте точное решение или машинно-генерируемое поле направлений, чтобы сделать набросок графиков нескольких решений данного дифференциального уравнения, и выделите указанное частное решение.

1. $\dfrac{dx}{dt} = x - x^2,\ x(0) = 2$

2. $\dfrac{dx}{dt} = 10x - x^2,\ x(0) = 1$

3. $\dfrac{dx}{dt} = 1 - x^2,\ x(0) = 3$

4. $\dfrac{dx}{dt} = 9 - 4x^2,\ x(0) = 0$

5. $\dfrac{dx}{dt} = 3x(5 - x),\ x(0) = 8$

6. $\dfrac{dx}{dt} = 3x(x - 5),\ x(0) = 2$

7. $\dfrac{dx}{dt} = 4x(7 - x),\ x(0) = 11$

8. $\dfrac{dx}{dt} = 7x(x - 13),\ x(0) = 17$

9. Скорость изменения численности популяции кроликов P пропорциональна квадратному корню P. В момент времени $t = 0$ (месяцы) популяция кроликов насчитывает 100 особей и увеличивается со скоростью 20 кроликов в месяц. Сколько кроликов будет через один год?

10. Предположим, что популяция рыб численностью $P(t)$ в озере атакована болезнью в момент времени $t = 0$, так что в итоге воспроизводство рыб прекращается (так что коэффициент рождаемости равен $\beta = 0$), а показатель смертности (количество смертей в неделю, приходящихся на одну рыбу) δ после этого пропорционален $1/\sqrt{P}$. Если первоначально в озере было 900 рыб, а через 6 недель осталась 441 рыба, то через какое время в озере исчезнет вся рыба?

11. Предположим, что в некотором озере показатели рождения и смертности рыбы β и δ оба обратно пропорциональны квадратному корню из ее численности $\sqrt{P}$. **(a)** Покажите, что

$$P(t) = \left(\tfrac{1}{2}kt + \sqrt{P_0}\right)^2,$$

где k — константа. **(b)** Пусть $P_0 = 100$ и через 6 месяцев в озере осталось 169 рыб. Сколько рыб там будет через 1 год?

12. Скорость изменения численности P популяции аллигаторов в болоте пропорциональна квадрату P. В болоте в 1988 году водилась дюжина аллигаторов, а в 1998 году — две дюжины. Когда в болоте будет четыре дюжины аллигаторов? Что случится после этого?

13. Рассмотрим плодовитую породу кроликов, у которых показатели рождения и смертности β и δ пропорциональны численности популяции кроликов $P = P(t)$, причем $\beta > \delta$. **(a)** Покажите, что

$$P(t) = \frac{P_0}{1 - kP_0t}, \quad \text{где } k \text{ — константа.}$$

Обратите внимание, что $P(t) \to +\infty$ при $t \to 1/(kP_0)$. Это — Судный День. **(b)** Предположим, что $P_0 = 6$ и что через десять месяцев будет девять кроликов. Когда наступит Судный День?

14. Решите проблему, поставленную в части (a) задачи 13, в случае $\beta < \delta$. Что теперь случается с популяцией кроликов в конечном счете?

15. Численность популяции $P(t)$ удовлетворяет логистическому уравнению $dP/dt = aP - bP^2$, где $B = aP$ — число рождений и $D = bP^2$ — число смертных случаев в единицу времени. Пусть начальная численность популяции равна $P(0) = P_0$ и B_0 — количество рождений в месяц, а D_0 — количество смертей в месяц в момент времени $t = 0$. Покажите, что численность популяции ограничена числом $M = B_0P_0/D_0$.

16. Популяция кроликов численностью $P(t)$ удовлетворяет логистическому уравнению (как в задаче 15). Если начальная численность популяции равна 120 кроликам и в месяц рождается 8 кроликов, а 6 умирает в месяц в момент времени $t = 0$, то через сколько месяцев $P(t)$ будет равно 95% граничного значения M численности популяции?

17. Численность популяции кроликов $P(t)$ удовлетворяет логистическому уравнению (как в задаче 15). Если начальная численность популяции равна 240 кроликам и в месяц рождается 9 кроликов, а 12 умирает в месяц в момент времени $t = 0$, то через сколько месяцев $P(t)$ будет равно 105% граничного значения M численности популяции?

18. Численность популяции $P(t)$ удовлетворяет уравнению взрыва или исчезновения $dP/dt = aP^2 - bP$, где $B = aP^2$ — скорость рождения и $D = bP$ — скорость смертных случаев. Пусть начальная численность популяции равна $P(0) = P_0$ и происходит B_0 рождений в месяц, и D_0 смертей в месяц в момент времени $t = 0$. Покажите, что пороговое значение численности популяции равно $M = D_0P_0/B_0$.

19. Численность $P(t)$ популяции аллигаторов удовлетворяет уравнению исчезновения или взрыва (как в задаче 18). Пусть начальная численность популяции равна 100 аллигаторам и в месяц происходит 10 рождений и 9 случаев смерти в момент времени $t = 0$. Сколько месяцев потребуется, чтобы $P(t)$ в 10 раз превысила пороговое значение численности популяции M?

20. Численность $P(t)$ популяции аллигаторов удовлетворяет уравнению исчезновения или взрыва (как в задаче 18). Пусть начальная численность популяции равна 110 аллигаторам и в месяц происходит 11 рождений и 12 случаев смерти в момент времени $t = 0$. Сколько месяцев потребуется, чтобы $P(t)$ достигла 10% от порогового значения численности популяции M?

21. Предположим, что численность $P(t)$ населения некоторой страны удовлетворяет дифференциальному уравнению $dP/dt = kP(200 - P)$, причем k — константа. Пусть в 1940 году численность населения была равна 100 миллионам и возрастала тогда со скоростью 1 миллион в год. Предскажите численность населения этой страны в 2000 году.

22. Предположим, что в момент времени $t = 0$ половина "логистического" населения 100 000 человек услышала некоторый слух и что численность тех, кто его услышал, в этот момент увеличивалось со скоростью 1000 человек в день. Когда этот слух узнает 80% населения? (*Указание*. Найдите значение k, подставляя $P(0)$ и $P'(0)$ в логистическое уравнение (3).)

23. При растворении соли KNO_3 в метаноле количество $x(t)$ граммов соли в растворе через t секунд удовлетворяет дифференциальному уравнению $dx/dt = 0{,}8x - 0{,}004x^2$.

(a) Какое максимальное количество соли будет растворено в метаноле?

(b) Пусть $x = 50$ при $t = 0$. Сколько потребуется времени, чтобы растворить еще 50 г соли?

24. Предположим, что некоторая община насчитывает 15 000 человек, которые восприимчивы к синдрому Мичода (Michaud's syndrome), инфекционной болезни. В момент времени $t = 0$ количество $N(t)$ людей, у которых обнаружился синдром Мичода, равно 5000 и увеличивается со скоростью 500 в день. Предположите, что $N'(t)$ пропорционально произведению чисел тех, кто заразился болезнью и тех, кто не заболел. Через какое время синдром Мичода обнаружится еще у 5000 человек?

25. Данные на рис. 2.1.6 даются для численности населения $P(t)$, которая удовлетворяет логистическому уравнению (3).

Год	P **(миллионы)**
1924	24,63
1925	25,00
1926	25,38
⋮	⋮
1974	47,04
1975	47,54
1976	48,04

Рис. 2.1.6. Данные по численности населения для задачи 25

(a) Чему равна граничная численность населения M? (*Указание.* Используйте аппроксимацию

$$P'(t) \approx \frac{P(t+h) - P(t-h)}{2h}$$

при $h = 1$, чтобы вычислить значения $P'(t)$ при $P = 25{,}00$ и $P = 47{,}54$. Затем подставьте эти значения в логистическое уравнение и решите его относительно k и M.)

(b) Используя значения k и M, найденные в части (a), определите, когда $P = 75$. (*Указание.* Положите $t = 0$ в 1925 году.)

26. Численность $P(t)$ популяции маленьких грызунов имеет коэффициент рождаемости $\beta = (0{,}001)P$ (рождений в месяц на одного грызуна) и *постоянный* показатель смертности δ. Если $P(0) = 100$ и $P'(0) = 8$, через сколько месяцев численность популяции удвоится, т. е. станет равной 200 грызунам? (*Указание.* Сначала найдите значение δ.)

27. Численность $P(t)$ популяции животных имеет постоянный показатель смертности $\delta = 0{,}01$ (смертного случая на животное в месяц) и с коэффициентом рождаемости β пропорциональным P. Предположим, что $P(0) = 200$ и $P'(0) = 2$. **(a)** Когда $P = 1000$? **(b)** Когда наступит Судный День?

28. Предположим, что количество аллигаторов $x(t)$ (t выражено в месяцах) в болоте удовлетворяет дифференциальному уравнению $dP/dt = 0{,}0001x^2 - 0{,}01x$.

(a) Пусть первоначально в болоте есть 25 аллигаторов. Решите это дифференциальное уравнение и определите, что случится с популяцией аллигаторов в конечном счете.

(b) Сделайте то же, что и в части (a), но предположите, что первоначально в болоте есть 150 аллигаторов.

29. В течение периода с 1790 до 1930 года население США $P(t)$ (t измеряется в годах) возросло от 3,9 миллиона до 123,2 миллиона человек. В течение этого периода $P(t)$ было близко к решению задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}03135P - 0{,}0001489P^2, \quad P(0) = 3{,}9.$$

(a) Какая численность населения будет в 1930 году в соответствии с этим логистическим уравнением?

(b) Какое ограничение на численность населения налагает это уравнение?

(c) Действительно ли это логистическое уравнение продолжало и после 1930 года точно моделировать численность населения США?

[Эта задача базируется на вычислениях, которые провел Ферхюльст (Verhulst) в 1845 году. Он использовал данные по численности населения США в 1790–1840 годах, чтобы предсказать точно численность американского населения до 1930 года (через длительное время после его собственной смерти, конечно).]

30. Опухоль может рассматриваться как популяция бесконтрольно размножающихся клеток. Опытным путем найдено, что "коэффициент рождаемости" клеток опухоли уменьшается по экспоненте со временем, так, что $\beta(t) = \beta_0 e^{-\alpha t}$ (где α и β_0 — положительные константы), и, следовательно,

$$\frac{dP}{dt} = \beta_0 e^{-\alpha t} P, \quad P(0) = P_0.$$

Решите эту задачу Коши (задачу с начальными условиями), чтобы найти

$$P(t) = P_0 \exp\left(\frac{\beta_0}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})\right).$$

Заметьте, что численность популяции $P(t)$ приближается к конечному ограничению $P_0 \exp(\beta_0/\alpha)$ при $t \to +\infty$.

31. Предположите, что опухоль (задача 30) в момент времени $t = 0$ насчитывает $P_0 = 10^6$ клеток и что $P(t)$ в этот момент увеличивается со скоростью 3×10^5 клеток в месяц. После 6 месяцев опухоль удвоилась (в размере и в числе клеток). Найдите численное значение α, а затем найдите граничное количество клеток опухоли.

32. Получите решение

$$P(t) = \frac{MP_0}{P_0 + (M - P_0)e^{-kMt}}$$

логистической задачи Коши (задачи с начальными условиями) $P' = kP(M - P)$, $P(0) = P_0$. Выясните, как результат зависит от выполнения условия $0 < P_0 < M$ или $P_0 > M$.

33. **(a)** Получите решение

$$P(t) = \frac{MP_0}{P_0 + (M - P_0)e^{kMt}}$$

задачи Коши (задачи с начальными условиями) (типа взрыва или исчезновения) $P' = = kP(P - M)$, $P(0) = P_0$.

(b) Как поведение $P(t)$ при увеличении t зависит от выполнения условия $0 < P_0 < M$ или $P_0 > M$?

34. Пусть $P(t)$ удовлетворяет логистическому уравнению (3). Используя правило дифференцирования сложной функции, покажите, что

$$P''(t) = 2k^2 P(P - \tfrac{1}{2}M)(P - M).$$

Заключите, что $P'' > 0$, если $0 < P < \frac{1}{2}M$; $P'' = 0$, если $P = \frac{1}{2}M$; $P'' < 0$, если $\frac{1}{2}M < < P < M$; $P'' > 0$, если $P > M$. В частности, из этого следует, что если интегральная кривая пересекает прямую линию $P = \frac{1}{2}M$, то точка пересечения является точкой перегиба, и потому такая интегральная кривая напоминает нижние кривые в форме буквы S на рис. 2.1.3.

35. Пусть две функции численности популяции $P_1(t)$ и $P_2(t)$ удовлетворяют логистическому уравнению с тем же самым ограничением численности популяции M, но с различными значениями k_1 и k_2 константы k в уравнении (3). Пусть $k_1 < k_2$. Численность какой популяции приближается к M быстрее? Вы можете использовать *геометрические соображения*, исследуя поля направлений (особенно это упрощает решение, если доступно соответствующее программное обеспечение), или найти ответ, анализируя решение, данное равенством (7), в *символьном* виде, или даже найти ответ с помощью вычислений, представив решение в *численном* виде, т. е. вычислив значения решения для последовательных значений t.

36. Чтобы решить оба уравнения (10) и найти значения k и M, начните с решения первого уравнения относительно неизвестного $x = e^{-50kM}$ и второго уравнения относительно $x^2 = e^{-100kM}$. После приравнивания двух полученных выражений для x^2 (выражающих одну и ту же величину через M), вы получите уравнение, которое легко решить относительно M. Значение M теперь известно, и потому любое из первоначальных уравнений легко решить относительно k. Эта методика может использоваться, чтобы "подогнать" логистическое уравнение под любые три известных значения численности населения P_0, P_1 и P_2, полученных через *одинаковые* периоды времени, т. е. в том случае, когда можно считать, что подсчет (перепись) выполнялся в моменты времени $t_0 = 0$, t_1 и $t_2 = 2t_1$.

37. Используйте метод задачи 36, чтобы подогнать логистическое уравнение под фактические данные численности населения США (см. рис. 2.1.4) в 1850, 1900 и 1950 годах. Решите полученное логистическое уравнение, и сравните предсказанные и фактические значения численности населения в 1990 и 2000 гг.

38. Подгоните логистическое уравнение под фактические данные численности населения США (см. рис. 2.1.4) в 1900, 1930 и 1960 годах. Решите полученное логистическое уравнение, и сравните предсказанные и фактические значения численности населения в 1980, 1990 и 2000 годах.

39. Показатели рождения и смертности в популяции животных обычно не постоянны, а изменяются периодически в зависимости от сезона. Найдите $P(t)$, если численность популяции P удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dP}{dt} = (k + b\cos 2\pi t)P,$$

где t выражено в годах, а k и b — положительные константы. Таким образом, функция скорости роста $r(t) = k + b\cos 2\pi t$ изменяется периодически — она колеблется около своего среднего значения k. Нарисуйте график, который показывает отклонение численности такой популяции от популяции, которая имеет то же самое начальное значение численности P_0, но удовлетворяет уравнению естественного роста $P' = kP$ (k — та же самая константа). Как будут отличаться численности этих двух популяций многие годы спустя?

2.1. Приложение. Логистическая модель роста населения

Эти исследования имеют целью приспособить логистическую модель к фактическим данным численности населения. Таким образом мы хотим определить числовые постоянные a и b так, чтобы решение $P(t)$ задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$\frac{dP}{dt} = aP + bP^2, \quad P(0) = P_0 \tag{1}$$

приблизительно соответствовало известным значениям $P_0, P_1, \ldots, P_n$ численности населения в моменты времени $t_0 = 0, t_1, \ldots, t_n$. Если мы перепишем уравнение (1) (логистическое уравнение с $kM = a$ и $k = -b$) в форме

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = a + bP, \tag{2}$$

то увидим, что все точки

$$\left(P(t_i), \frac{P'(t_i)}{P(t_i)}\right), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

должны лежать на прямой линии, которая на оси y отсекает отрезок a и имеет наклон b (как определено функцией P в правой части уравнения (2)).

Это позволяет найти a и b. Если мы можем определить приближенные значения производных $P_1', P_2', \ldots$, соответствующих заданным значениям численности населения, то мы сможем выполнить следующий план.

- Сначала начертим точки $(P_1, P_1'/P_1), (P_2, P_2'/P_2), \ldots$ на миллиметровке с горизонтальной осью P.
- Затем проведем прямую линию, которая проходит как можно ближе к этим точкам.
- Наконец, найдем отрезок a, отсекаемый на координатной оси y этой прямой линией, и ее наклон b.

Но как найти необходимые значения производной $P'(t)$ (пока еще) неизвестной функции P? Кажется, проще всего использовать аппроксимацию

$$P_i' = \frac{P_{i+1} - P_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}, \tag{3}$$

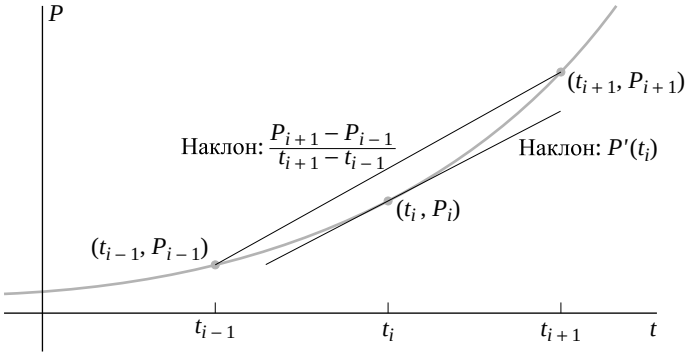


Рис. 2.1.7. Аппроксимация производной $P'(t_i)$ с помощью симметричной разности $\dfrac{P_{i+1} - P_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}$

показанную на рис. 2.1.7. Например, если взять $i = 0$, соответствующее 1790 году, то данные переписи населения США, приведенные на рис. 2.1.8, дают

$$P_1' = \frac{P_2 - P_0}{t_2 - t_0} = \frac{7{,}240 - 3{,}929}{20} \approx 0{,}166$$

для наклона в точке (t_1, P_1) на 1800 год.

Исследование А. Используя уравнение (3), проверьте значения наклона, приведенные в заключительном столбце таблицы на рис. 2.1.8, а затем начертите точки $(P_1, P_1'/P_1), \ldots,$

Год	i	t_i	Население P_i	Наклон P_i'
1790	0	−10	3,929	
1800	1	0	5,308	0,166
1810	2	10	7,240	0,217
1820	3	20	9,638	0,281
1830	4	30	12,861	0,371
1840	5	40	17,064	0,517
1850	6	50	23,192	0,719
1860	7	60	31,443	0,768
1870	8	70	38,558	0,937
1880	9	80	50,189	1,221
1890	10	90	62,980	1,301
1900	11	100	76,212	1,462
1910	12	110	92,228	

Рис. 2.1.8. Данные по численности населения Соединенных Штатов Америки (в млн. чел.) и приблизительные значения наклона

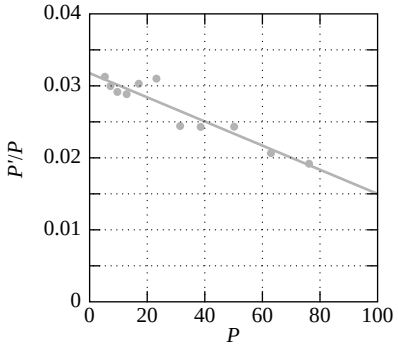


Рис. 2.1.9. Данные по численности населения США с 1800 года до 1900 года и приближающая их прямая линия

Год	Мировое население (млрд. чел.)
1960	3,049
1965	3,358
1970	3,721
1975	4,103
1980	4,473
1985	4,882
1990	5,249
1995	5,679
2000	6,127

Рис. 2.1.10. Данные по численности мирового населения

$(P_{11}, P'_{11}/P_{11})$, обозначенные звездочками на рис. 2.1.9. Если есть подходящий графический калькулятор, электронная таблица или компьютерная программа, используйте их, чтобы найти прямую линию $y = a + bP$ с уравнением (2), которая лучше всего аппроксимирует эти данные, т. е. ближе всего проходит к полученным точкам. Если хотите, нарисуйте прямую линию вашим собственным способом, лишь бы она как можно ближе подходила к этим точкам, а затем измерьте отрезок a, отсекаемый на координатной оси, и вычислите наклон b любым доступным вам способом. Затем решите логистическое уравнение (1) с этими числовыми параметрами, принимая, что $t = 0$ соответствует 1800 году. Наконец, сравните предсказание для XX столетия с фактическими данными по численности населения США, приведенными на рис. 2.1.4.

Исследование B. Повторите исследование A, но возьмите $t = 0$ для 1900 года и используйте только данные по численности населения в XX столетии. Получится ли лучшая аппроксимация для численности населения США для последних десятилетий XX столетия?

Исследование C. Смоделируйте подобным образом данные о численности населения мира, приведенные на рис. 2.1.10. Департамент населения (Population Division) Организации Объединенных Наций предсказывает численность мирового населения на уровне $8{,}177$ миллиарда в 2025 году. А какую численность предсказываете вы?

2.2. Равновесные решения и устойчивость

В предыдущих разделах мы часто использовали решения дифференциальных уравнений в явном виде, чтобы ответить на конкретные вопросы, связанные с вычислением числовых значений. Но даже если для данного дифференциального уравнения трудно или невозможно найти решение в явном виде, часто можно извлечь *качественную* информацию об общих

свойствах его решений. Например, иногда мы можем установить, что каждое решение $x(t)$ возрастает неограниченно при $t \to +\infty$, или стремится к конечному пределу, или является периодической функцией t. В этом разделе мы рассмотрим (главным образом простые) дифференциальные уравнения, которые *могут* быть решены явно, но постараемся ответить на самые важные качественные вопросы, на которые можно иногда ответить для тех уравнений, для которых трудно или невозможно найти решение в явном виде.

Пример 1 Пусть $x(t)$ обозначает температуру физического тела, причем его начальная температура $x(0) = x_0$. В момент времени $t = 0$ это тело помещается в среду с постоянной температурой A. Принимая во внимание закон Ньютона для охлаждения тела,

$$\frac{dx}{dt} = -k(x - A) \qquad \text{(константа } k > 0\text{)}, \tag{1}$$

мы легко решаем (разделением переменных) это уравнение и находим явное решение

$$x(t) = A + (x_0 - A)e^{-kt}.$$

Из этого немедленно следует, что

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = A, \tag{2}$$

так что температура тела приближается к температуре окружающей среды (что интуитивно очевидно). Обратите внимание, что постоянная функция $x(t) \equiv A$ — решение уравнения (1); она соответствует температуре тела, когда оно находится в тепловом равновесии с окружающей средой. На рис. 2.2.1 предел в (2) значит, что каждая другая интегральная кривая асимптотически приближается к равновесной интегральной кривой $x = A$ при $t \to +\infty$. ■

Замечание. Поведение решений уравнения (1) кратко подытожено в **фазовой диаграмме** на рис. 2.2.2. Правая часть $f(x) = -k(x - A) = k(A - x)$ положительна, если

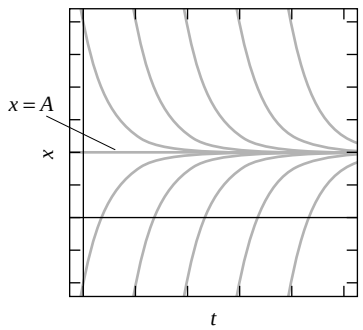


Рис. 2.2.1. Типичные интегральные кривые уравнения, описывающего закон Ньютона охлаждения физического тела, $dx/dt = -k(x - A)$

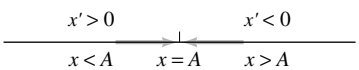


Рис. 2.2.2. Фазовая диаграмма уравнения $dx/dt = f(x) = k(A - x)$

$x < A$, и отрицательна если $x > A$. Это наблюдение соответствует тому факту, что решения, начинающиеся выше линии $x = A$, и те, которые начинаются ниже ее, приближаются к граничному решению $x(t) \equiv A$ при увеличении t (как обозначено стрелками) ■

В разделе 2.1 мы ввели общее уравнение для численности населения

$$\frac{dx}{dt} = (\beta - \delta)x, \tag{3}$$

где β и δ — показатели рождения и смертности соответственно, т. е. выражают количество случаев рождения или смерти на одного человека в единицу времени. Очевидный интерес представляет вопрос, ограничена или неограничена численность населения $x(t)$ при $t \to +\infty$. Во многих поселениях, подчиняющихся логистическому закону, и в поселениях типа взрыва или исчезновения из раздела 2.1 показатели рождения и смертности представляют собой известные функции x. Тогда уравнение (3) принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \tag{4}$$

Это **автономное** дифференциальное уравнение первого порядка, в которое независимая переменная t не входит явно. Как и в примере 1, решения уравнения $f(x) = 0$ играют важную роль и называются **положениями равновесия**, **точками равновесия**, **стационарными точками**, **точками покоя**, **неподвижными точками**, **особыми точками** или **критическими точками** автономного дифференциального уравнения $dx/dt = f(x)$.

Если $x = c$ — точка равновесия уравнения (4), то дифференциальное уравнение имеет постоянное решение $x(t) \equiv c$. Постоянное решение дифференциального уравнения иногда называют **равновесным решением** (можно думать о населении, которое остается постоянным, потому что оно находится в "равновесии" с его средой). Таким образом точка равновесия $x = c$, т. е. число, соответствующее равновесному решению $x(t) \equiv c$, может рассматриваться как постоянная функция (константа).

Пример 2 показывает, что, зная точки равновесия автономного уравнения первого порядка, можно описать качественное поведение решений уравнения при увеличении t.

Пример 2 Рассмотрим логистическое дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = kx(M - x) \tag{5}$$

(с $k > 0$ и $M > 0$). Оно имеет две точки равновесия — решения $x = 0$ и $x = M$ уравнения

$$f(x) = kx(M - x) = 0.$$

В разделе 2.1 мы обсуждали решение логистического уравнения

$$x(t) = \frac{Mx_0}{x_0 + (M - x_0)e^{-kMt}}, \tag{6}$$

удовлетворяющее начальному условию $x(0) = x_0$. Обратите внимание, что начальные значения $x_0 = 0$ и $x_0 = M$ дают равновесные решения $x(t) \equiv 0$ и $x(t) \equiv M$ уравнения (5).

В разделе 2.1 мы видели, что если $x_0 > 0$, то $x(t) \to M$ при $t \to +\infty$. Но если $x_0 < 0$, то знаменатель в уравнении (6) первоначально положителен, но обращается в нуль, когда

$$t = t_1 = \frac{1}{kM} \ln \frac{M - x_0}{-x_0} > 0.$$

Поскольку в этом случае числитель в (6) отрицателен, из этого следует, что

$$\lim_{t \to t_1^-} x(t) = -\infty, \quad \text{если} \quad x_0 < 0.$$

Из этого следует, что интегральные кривые логистического уравнения (5) выглядят так, как показано на рис. 2.2.3. ■

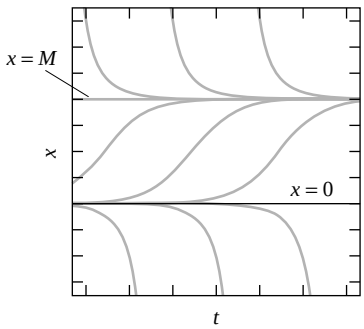


Рис. 2.2.3. Типичные интегральные кривые логистического уравнения $dx/dt = kx(M - x)$

Устойчивость точек равновесия

Рис. 2.2.3 иллюстрирует понятие (концепцию) *устойчивости*. Говорят, что точка равновесия $x = c$ автономного уравнения первого порядка является *устойчивой*, если из того, что начальное значение x_0 достаточно близко к c, следует, что $x(t)$ остается близким к c для всех $t > 0$. Более точно, точка равновесия c **устойчива**, если для каждого $\epsilon > 0$, существует $\delta > 0$, такое, что из

$$|x_0 - c| < \delta \quad \text{следует, что} \quad |x(t) - c| < \epsilon \tag{7}$$

для всех $t > 0$. Точка равновесия $x = c$ называется **неустойчивой**, если она не является устойчивой.

На рис. 2.2.4 показан "общий вид" интегральных кривых логистического уравнения при $k = 1$ и $M = 4$. Обратите внимание, что полоса $3{,}5 < x < 4{,}5$, которая содержит устойчивую равновесную кривую $x = 4$, действует подобно *стоку*, — все входящие в нее интегральные кривые (при движении точки по кривой слева направо) остаются внутри ее. А вот полоса $-0{,}5 < x < 0{,}5$, содержащая неустойчивую интегральную кривую $x = 0$, действует подобно *источнику*, из которого бьют струи, — интегральные кривые разбегаются

из этой полосы (и не возвращаются в нее), как струи из фонтана. Таким образом, предыдущая точка равновесия $x = M$ устойчива, а точка равновесия $x = 0$ неустойчива.

Замечание 1. Мы можем судить о поведении решений логистического уравнения (5) по фазовой диаграмме, показанной на рис. 2.2.5, если известны начальные значения. Действительно, из фазовой диаграммы видно, что $x(t) \to M$ при $t \to +\infty$, если $x_0 > M$ или $0 < x_0 < M$, тогда как $x(t) \to -\infty$ при увеличении t, если $x_0 < 0$. То, что M является устойчивой точкой равновесия, важно, например, если мы желаем провести эксперимент с популяцией из M бактерий. Невозможно отсчитать точно M бактерий, если M достаточно большое, но численность популяции приблизится к M при увеличении t независимо от ее первоначального (положительного) значения.

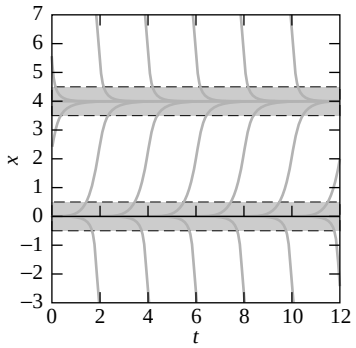


Рис. 2.2.4. Интегральные кривые уравнения $dx/dt = 4x - x^2$: сток и источник

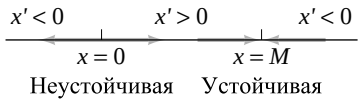


Рис. 2.2.5. Фазовая диаграмма логистического уравнения $dx/dt = f(x) = kx(M - x)$

Замечание 2. С устойчивостью граничного решения $M = a/b$ логистического уравнения

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 \tag{8}$$

связана "предсказуемость" фактической численности популяции M. Едва ли коэффициенты a и b известны точно для реальной популяции. Но если для них известны хорошие приближения $a^\star$ и $b^\star$ — в результате эмпирических исследований, — то приблизительная граничная численность популяции $M^\star = a^\star/b^\star$ будет близка к фактической граничной численности популяции $M = a/b$. Так что значение M (граничная численность популяции, предсказанная по логистическому уравнению) является не только устойчивой точкой равновесия дифференциального уравнения; это значение также "устойчиво" относительно малых возмущений постоянных коэффициентов уравнения. (Обратите внимание, что одно из этих двух утверждений относится к возмущениям (изменениям) начального значение x_0; другое же относится к возмущениям коэффициентов a и b). ■

Пример 3 Рассмотрим теперь уравнение взрыва или исчезновения

$$\frac{dx}{dt} = kx(x - M) \tag{9}$$

(уравнение (10)) из раздела 2.1. Подобно логистическому уравнению, оно имеет две точки равновесия $x = 0$ и $x = M$, соответствующие равновесным решениям $x(t) \equiv 0$ и $x(t) \equiv M$. Согласно задаче 33 из раздела 2.1, его решение при $x(0) = x_0$ дается формулой

$$x(t) = \frac{Mx_0}{x_0 + (M - x_0)e^{kMt}} \tag{10}$$

(и это решение отличается только знаком от решения логистического уравнения (6)). Если $x_0 < M$, то (поскольку коэффициент при показательной функции в знаменателе положителен), из уравнения (10) немедленно следует, что $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Но если $x_0 > M$, то знаменатель в (10) первоначально положителен, но обращается в нуль при

$$t = t_1 = \frac{1}{kM} \ln \frac{x_0}{x_0 - M} > 0.$$

Поскольку в этом случае числитель в (10) положителен, из этого следует, что

$$\lim_{t \to t_1^-} x(t) = +\infty, \quad \text{если} \quad x_0 > M.$$

Поэтому интегральные кривые уравнения взрыва или исчезновения (9) выглядят так, как показано на рис. 2.2.6. Узкая полоса около равновесной кривой $x = 0$ (как на рис. 2.2.4) служит стоком, в то время как полоса около интегральной кривой $x = M$ служит источником для решений. Поведение решений уравнения (9) подытожено фазовой диаграммой на рис. 2.2.7, из которой видно, что точка равновесия $x = 0$ устойчива, а точка равновесия $x = M$ неустойчива. ■

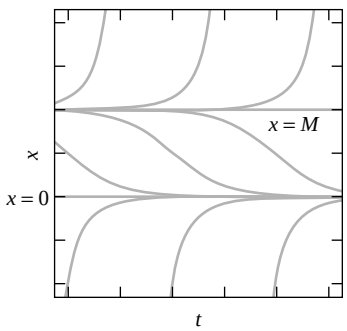


Рис. 2.2.6. Типичные интегральные кривые уравнения взрыва или исчезновения $dx/dt = kx(x - M)$

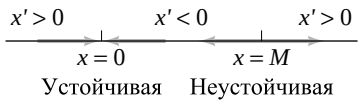


Рис. 2.2.7. Фазовая диаграмма для уравнения взрыва или исчезновения $dx/dt = f(x) = kx(x - M)$

Сбор урожая в логистической популяции

Автономное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 - h \tag{11}$$

(где a, b и h положительны) можно применить для описания логистической популяции со *сбором урожая*. Например, можно рассматривать популяцию рыб в озере, из которого ежегодно вылавливают h рыб.

Пример 4 Давайте перепишем уравнение (11) в форме

$$\frac{dx}{dt} = kx(M - x) - h, \tag{12}$$

в котором граничная численность популяции равна M в случае $h = 0$, т. е. в случае отсутствия сбора урожая. Принимая теперь, что $h > 0$, мы можем решить квадратное уравнение $-kx^2 + kMx - h = 0$ и найти следующие две точки равновесия:

$$H, N = \frac{kM \pm \sqrt{(kM)^2 - 4hk}}{2k} = \frac{1}{2}\left(M \pm \sqrt{M^2 - 4h/k}\right). \tag{13}$$

Принимая предположение о том, что скорость сбора урожая h является достаточно малой, а именно, что $4h < kM^2$, мы получим, что оба корня H и N вещественны, причем $0 < H < N < M$. Тогда мы можем переписать уравнение (12) в форме

$$\frac{dx}{dt} = k(N - x)(x - H). \tag{14}$$

Однако количество точек равновесия уравнения может резко измениться при изменении значения параметра. В задаче 24 мы просим решить это уравнение и найти его решение в виде

$$x(t) = \frac{N(x_0 - H) - H(x_0 - N)e^{-k(N-H)t}}{(x_0 - H) - (x_0 - N)e^{-k(N-H)t}} \tag{15}$$

в зависимости от начального значения $x(0) = x_0$.

Обратите внимание, что показатель степени $-k(N - H)t$ отрицателен для $t > 0$. Если $x_0 > N$, то все коэффициенты (выражения в круглых скобках) в уравнении (15) положительны; из этого следует, что

$$\text{если} \quad x_0 > N, \quad \text{то} \quad x(t) \to N \quad \text{при} \quad t \to +\infty. \tag{16}$$

В задаче 25 мы просим вывести из уравнения (15) также следующее утверждение:

$$\text{если} \quad H < x_0 < N, \quad \text{то} \quad x(t) \to N \quad \text{при} \quad t \to +\infty, \tag{17}$$

тогда как

$$\text{если} \quad x_0 < H, \quad \text{то} \quad x(t) \to -\infty \quad \text{при} \quad t \to t_1 \tag{18}$$

для некоторого положительного значения t_1, которое зависит от x_0. Из этого следует, что интегральные кривые уравнения (12) — все еще при предположении, что $4h < kM^2$ — выглядят так, как показано на рис. 2.2.8. (Вы можете представить сток вокруг линии $x = N$ и источник вокруг

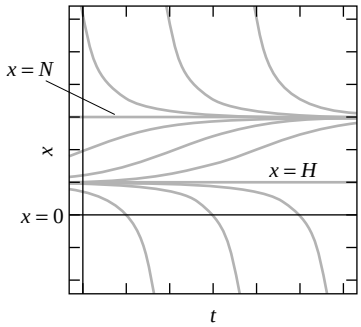


Рис. 2.2.8. Типичные интегральные кривые логистического уравнения со сбором урожая $dx/dt = k(N - x)(x - H)$

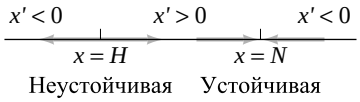


Рис. 2.2.9. Фазовая диаграмма для логистического уравнения со сбором урожая $dx/dt = f(x) = k(N - x)(x - H)$

линии $x = H$?) Таким образом, постоянное решение $x(t) \equiv N$ — это равновесное *граничное решение*, тогда как $x(t) \equiv H$ — *пороговое решение*, — которое отделяет различные поведения популяции; численность популяции приближается к N, если $x_0 > H$. Но популяция вымирает из-за сбора урожая, если $x_0 < H$. Наконец, устойчивая точка равновесия $x = N$ и неустойчивая точка равновесия $x = H$ показаны на фазовой диаграмме на рис. 2.2.9. ■

Пример 5 Для конкретного приложения наших заключений об устойчивости в примере 4 предположим, что $k = 1$ и $M = 4$ для численности $x(t)$ логистической популяции рыб в озере, причем численность измеряется в сотнях, а время t в годах. Без вылова рыбы вообще озеро в конечном счете содержало бы почти 400 рыб независимо от начальной численности популяции. Теперь предположим, что $h = 3$, так что ежегодно вылавливаются 300 рыб (с постоянной нормой в течение года). Уравнение (12) тогда примет вид $dx/dt = x(4 - x) - 3$, и квадратное уравнение

$$-x^2 + 4x - 3 = (3 - x)(x - 1) = 0$$

имеет решения $H = 1$ и $N = 3$. Таким образом, пороговая численность популяции — 100 рыб, и (новая) граничная численность популяции равна 300 рыбам. Короче говоря, если в озере первоначально было больше 100 особей рыбы, то при увеличении t численность популяции рыб приблизится к граничному значению 300 рыб. Но если в озере первоначально было меньше 100 особей рыбы, то вся рыба в озере будет выловлена, и рыба исчезнет полностью за конечный период времени. ■

Бифуркация и зависимость от параметров

Биологическая или физическая система, которая моделируется дифференциальным уравнением, может существенно зависеть от числовых значений некоторых коэффициентов или параметров, которые входят в уравнение. Например, при изменении значения параметра может резко измениться количество точек равновесия уравнения.

Пример 6 Дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = x(4 - x) - h \tag{19}$$

(x в сотнях) моделирует сбор урожая в логистической популяции при $k = 1$ и граничной численности популяции $M = 4$ (сотни). В примере 5 мы рассматривали случай сбора урожая на уровне $h = 3$, и нашли, что новая граничная численность популяции равна $N = 3$ (сотни) и пороговое значение численности популяции равно $H = 1$ (сотня). Типичные интегральные кривые, включая равновесные решения $x(t) \equiv 3$ и $x(t) \equiv 1$, напоминают изображенные на рис. 2.2.8.

Теперь давайте исследуем зависимость поведения кривых от сбора урожая h. Согласно уравнению (13) при $k = 1$ и $M = 4$, граничная и пороговая численности популяции N и H определяются так:

$$H, N = \frac{1}{2}\left(4 \pm \sqrt{16 - 4h}\right) = 2 \pm \sqrt{4 - h}. \tag{20}$$

Если $h < 4$ (мы ведь можем рассматривать и отрицательные значения $-h$, чтобы описать добавление (завоз рыбы вместо вылова рыбы)), то существуют различные равновесные решения $x(t) \equiv N$ и $x(t) \equiv H$ при $N > H$, как показано на рис. 2.2.8.

Но если $h = 4$, то уравнение (20) дает $N = H = 2$, так что дифференциальное уравнение имеет только единственное равновесное решение $x(t) \equiv 2$. В этом случае интегральные кривые уравнения напоминают показанные на рис. 2.2.10. Если начальная численность x_0 (в сотнях) рыбы превышает 2, то численность популяции приближается к граничной численности популяции 2 (сотни рыбы). Однако при любой начальной численности популяции $x_0 < 2$ (сотни) результатом будет полное исчезновение рыбы вследствие вылова (сбора урожая) 4 (сотен) рыб ежегодно.

Если, наконец, $h > 4$, то квадратное уравнение, соответствующее (20), не имеет вещественных решений, и потому дифференциальное уравнение (19) не имеет никаких равновесных решений. Интегральные кривые тогда напоминают показанные на рис. 2.2.11, и (независимо от начального числа рыб), популяция исчезнет в результате чрезмерного вылова (сбора урожая). ■

Если мы будем постепенно увеличить значение параметра h в уравнении (10), то будет изменяться и вид интегральных кривых — от того, который подобен изображенному на рис. 2.2.8 при $h < 4$, до того, который подобен изображенному на рис. 2.2.10 при $h = 4$, и, наконец, к тому, который подобен изображенному на рис. 2.2.11 при $h > 4$. Таким образом, дифференциальное уравнение

- имеет две точки равновесия, если $h < 4$;
- имеет одну точку равновесия, если $h = 4$;
- не имеет точек равновесия, если $h > 4$.

Значение $h = 4$, при котором изменяется качественный характер решений при увеличении h, называют **точкой бифуркации** (точкой удвоения) для дифференциального уравнения,

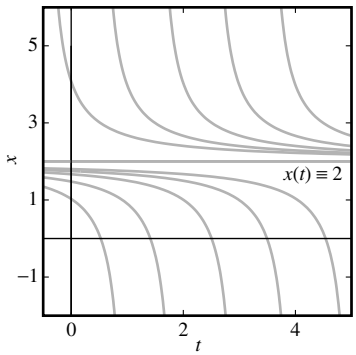


Рис. 2.2.10. Интегральные кривые уравнения $x' = x(4 - x) - h$ в случае критического сбора урожая $h = 4$

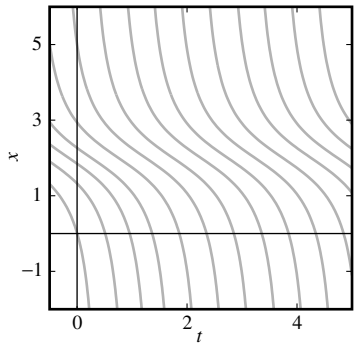


Рис. 2.2.11. Интегральные кривые уравнения $x' = x(4 - x) - h$ при чрезмерном сборе урожая $h = 5$

содержащего параметр h. Общий способ визуализировать соответствующую бифуркацию решений состоит в том, чтобы начертить диаграмму бифуркаций, состоящую из всех точек (h, c), где c — точка равновесия уравнения $x' = x(4-x)+h$. Например, если мы перепишем уравнение (20) в виде

$$c = 2 \pm \sqrt{4 - h},$$
$$(c - 2)^2 = 4 - h,$$

где $c = N$ или $c = H$, то получим уравнение параболы, показанной на рис. 2.2.12. Эта парабола и есть диаграмма бифуркации для нашего дифференциального уравнения, которое моделирует численность логистической популяции рыб с выловом (сбором урожая) на уровне, заданном параметром h.

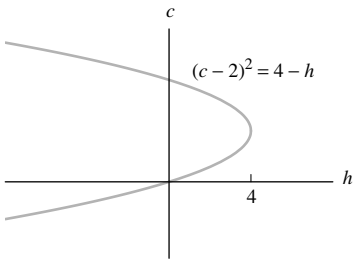


Рис. 2.2.12. Парабола $(c - 2)^2 = 4 - h$ — это диаграмма бифуркации для дифференциального уравнения $x' = x(4 - x) - h$

2.2. Задачи

В задачах 1–12 сначала решите уравнение $f(x) = 0$, чтобы найти точки равновесия данного автономного дифференциального уравнения $dx/dt = f(x)$. Затем проанализируйте знак $f(x)$, чтобы определить, устойчива или неустойчива каждая из найденных точек равновесия, и нарисуйте соответствующую фазовую диаграмму для дифференциального уравнения. Затем решите

дифференциальное уравнение явно — найдите зависимость $x(t)$ от t. Наконец, используйте точное решение или машинно-генерируемое поле направлений для вычерчивания типичных интегральных кривых данного дифференциального уравнения и визуально проверьте устойчивость каждой точки равновесия.

1. $\dfrac{dx}{dt} = x - 4$

2. $\dfrac{dx}{dt} = 3 - x$

3. $\dfrac{dx}{dt} = x^2 - 4x$

4. $\dfrac{dx}{dt} = 3x - x^2$

5. $\dfrac{dx}{dt} = x^2 - 4$

6. $\dfrac{dx}{dt} = 9 - x^2$

7. $\dfrac{dx}{dt} = (x-2)^2$

8. $\dfrac{dx}{dt} = -(3-x)^2$

9. $\dfrac{dx}{dt} = x^2 - 5x + 4$

10. $\dfrac{dx}{dt} = 7x - x^2 - 10$

11. $\dfrac{dx}{dt} = (x-1)^3$

12. $\dfrac{dx}{dt} = (2-x)^3$

В задачах 13–18 используйте компьютерную систему или графический калькулятор для вычерчивания поля направлений (или достаточно многих интегральных кривых), чтобы указать устойчивость или неустойчивость каждой точки равновесия данного дифференциального уравнения.

13. $\dfrac{dx}{dt} = (x+2)(x-2)^2$

14. $\dfrac{dx}{dt} = x(x^2 - 4)$

15. $\dfrac{dx}{dt} = (x^2 - 4)^2$

16. $\dfrac{dx}{dt} = (x^2 - 4)^3$

17. $\dfrac{dx}{dt} = x^2(x^2 - 4)$

18. $\dfrac{dx}{dt} = x^3(x^2 - 4)$

19. Дифференциальное уравнение $dx/dt = \frac{1}{10}x(10-x) - h$ моделирует логистическую популяцию со сбором урожая по норме h. Определите (как в примере 6) зависимость количества точек равновесия от параметра h, а затем создайте диаграмму бифуркации, подобную приведенной на рис. 2.2.12.

20. Дифференциальное уравнение $dx/dt = \frac{1}{100}x(x-5) + s$ моделирует численность популяции с пополнением по норме s. Определите зависимость количества точек равновесия c от параметра s, а затем нарисуйте соответствующую диаграмму бифуркации в плоскости *Osc*.

21. Рассмотрим дифференциальное уравнение $dx/dt = kx - x^3$. **(a)** Пусть $k \le 0$. Покажите, что единственному критическому значению $c = 0$ переменной x соответствует устойчивое равновесное решение. **(b)** Пусть $k > 0$. Покажите, что точка равновесия $c = 0$ теперь неустойчива, но зато устойчивы точки равновесия $c = \pm\sqrt{k}$. Таким образом, качественный характер решений изменяется при значении параметра $k = 0$, и потому $k = 0$ — точка бифуркации дифференциального уравнения с параметром k. Чертеж, на котором нанесены все точки вида (k, c), где c — точка равновесия уравнения $x' = kx - x^3$, представляет собой знаменитую "диаграмму бифуркации", показанную на рис. 2.2.13.

22. Рассмотрим дифференциальное уравнение $dx/dt = x + kx^3$, содержащее параметр k. Проанализируйте (как в задаче 21) зависимость числа и характера точек равновесия от значения k, и создайте соответствующую диаграмму бифуркации.

23. Предположим, что логистическое уравнение $dx/dt = kx(M - x)$ моделирует численность $x(t)$ популяции рыб в озере после t месяцев, в течение которых вылов рыбы не производится. Теперь предположите, что вылов рыбы из озера равен hx рыб в месяц (причем h — положительная константа). Таким образом, количество вылавливаемых рыб пропорционально численности популяции рыб, а не равно постоянной норме, как в примере 4. **(a)** Пусть $0 < h < kM$. Покажите, что численность популяции все равно удовлетворяет логистическому уравнению.

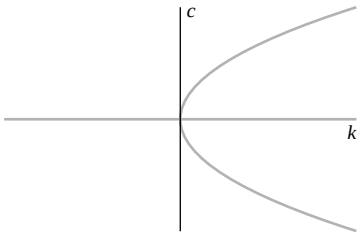


Рис. 2.2.13. Диаграмма бифуркации уравнения $dx/dt = kx - x^3$

Каково новое ограничение численности популяции? **(b)** Пусть $h \geqq kM$. Покажите, что $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, так что озеро в конечном счете останется без рыбы.

24. Отделите переменные в логистическом уравнении со сбором урожая $dx/dt = k(N - x)(x - -H)$, а затем используйте разложение на элементарные дроби, чтобы получить решение, данное в уравнении (15).

25. Используйте альтернативное представление

$$x(t) = \frac{N(x_0 - H) + H(N - x_0)e^{-k(N-H)t}}{(x_0 - H) + (N - x_0)e^{-k(N-H)t}}$$

$$= \frac{H(N - x_0)e^{-k(N-H)t} - N(H - x_0)}{(N - x_0)e^{-k(N-H)t} - (H - x_0)}$$

решения (15), чтобы прийти к утверждениям (17) и (18).

В примере 4 рассматривался случай $4h > kM^2$ для уравнения $dx/dt = kx(M - x) - h$, который описывает сбор урожая по постоянной норме с логистической популяции. В задачах 26 и 27 рассматриваются другие случаи.

26. Пусть $4h = kM^2$. Покажите, что типичные интегральные кривые выглядят так, как показано на рис. 2.2.14. Таким образом, если $x_0 \geqq M/2$, то $x(t) \to M/2$ при $t \to +\infty$. Но если $x_0 < < M/2$, то $x(t) = 0$ после истечения конечного периода времени, так что вся рыба в озере будет выловлена. Точку равновесия $x = M/2$ можно было бы назвать *полуустойчивой*, потому что, с одной стороны, она выглядит как устойчивая, а с другой — как неустойчивая.

27. Пусть $4h > kM^2$. Покажите, что $x(t) = 0$ после конечного периода времени, так что вся рыба в озере будет выловлена (независимо от начальной численности популяции). *Указание.* Выделите квадрат и перепишите дифференциальное уравнение в форме $dx/dt = -k[(x - - a)^2 + b^2]$. Затем найдите решение в явном виде путем отделения переменных. Результаты этой и предыдущей задач (вместе с примером 4) показывают, что $h = \frac{1}{4}kM^2$ — критическая скорость сбора урожая в логистической популяции. При любой меньшей скорости сбора урожая численность популяции приближается к граничной численности популяции N, которая меньше M (почему?), а при любой большей скорости сбора урожая популяция исчезнет.

28. В этой задаче рассматривается дифференциальное уравнение $dx/dt = kx(x - M) - h$, которое моделирует сбор урожая в бесхитростной популяции (например, в популяции аллигаторов). Покажите, что это уравнение может быть переписано в форме $dx/dt = k(x - H)(x - K)$, где

$$H = \tfrac{1}{2}\left(M + \sqrt{M^2 + 4h/k}\right) > 0,$$

$$K = \tfrac{1}{2}\left(M - \sqrt{M^2 + 4h/k}\right) < 0.$$

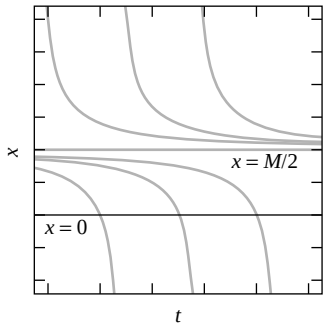


Рис. 2.2.14. Интегральные кривые логистического уравнения для популяции со сбором урожая при $4h = kM^2$

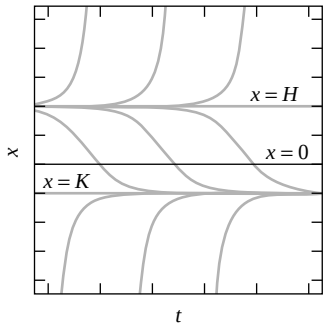


Рис. 2.2.15. Интегральные кривые в случае популяции аллигаторов со сбором урожая (с отловом аллигаторов)

Покажите, что типичные интегральные кривые выглядят так, как показано на рис. 2.2.15.

29. Рассмотрим следующие два дифференциальные уравнения:

$$\frac{dx}{dt} = (x-a)(x-b)(x-c) \tag{21}$$

и

$$\frac{dx}{dt} = (a-x)(b-x)(c-x), \tag{22}$$

каждое из которых имеет точки равновесия a, b и c; предположим, что $a < b < c$. Для одного из этих уравнений устойчива только точка равновесия b; для другого уравнения b — единственная неустойчивая точка равновесия. Нарисуйте фазовые диаграммы для этих двух уравнений и по нарисованным диаграммам определите, какой случай относится к какому из уравнений. Не пытаясь явно решить ни одно из уравнений, сделайте грубые наброски типичных интегральных кривых для каждого из уравнений. Вы увидите два стока и источник в одном случае, два источника и сток в другом.

2.3. Модели типа ускорение-скорость

В разделе 1.2 мы обсуждали вертикальное движение массы m около поверхности земли под влиянием гравитационного поля, в котором ускорение постоянно. Если мы пренебрегаем любыми эффектами сопротивления воздуха, то второй закон Ньютона ($F = ma$) подразумевает, что скорость v тела, имеющего массу m, удовлетворяет уравнению

$$m\frac{dv}{dt} = F_G, \tag{1}$$

где $F_G = -mg$ — направленная вниз сила тяжести, а гравитационное ускорение равно $g \approx 9{,}8$ м/с^2 (в единицах системы МКС; $g \approx 32$ фт/с^2 в единицах системы fps).

Пример 1 Предположим, что стрела выстрелена из арбалета прямо вверх с поверхности земли ($y_0 = 0$) с начальной скоростью $v_0 = 49$ (м/с). Тогда уравнение (1) с $g = 9{,}8$ дает

$$\frac{dv}{dt} = -9{,}8, \quad \text{так что} \quad v(t) = -(9{,}8)t + v_0 = -(9{,}8)t + 49.$$

Следовательно, высота (рассматриваемая как функция времени) стрелы $y(t)$ дается формулой

$$y(t) = \int [-(9{,}8)t + 49]\, dt = -(4{,}9)t^2 + 49t + y_0 = -(4{,}9)t^2 + 49t.$$

Стрела достигает ее максимальной высоты, когда $v = -(9{,}8)t + 49 = 0$, следовательно, в момент времени $t = 5$ (с). Таким образом, максимальная высота

$$y_{\max} = y(5) = -(4{,}9)(5^2) + (49)(5) = 122{,}5 \text{ (м)}.$$

Стрела упадет на землю, когда $y = -(4{,}9)t(t - 10) = 0$, таким образом, после 10 секунд полета. ■

Теперь мы хотим в этой задаче принять во внимание сопротивление воздуха, т. е. сделать так, как в примере 1. Сила F_R, оказываемая сопротивлением воздуха на двигающееся тело массой m, должна быть добавлена в правую часть уравнения (1), так что теперь

$$m\frac{dv}{dt} = F_G + F_R. \tag{2}$$

Ньютон в своих знаменитых *Началах* (*Principia Mathematica*) показал, что из простых физических предположений следует, что F_R пропорциональна *квадрату* скорости: $F_R = kv^2$. Но эмпирические исследования показывают, что фактическая зависимость сопротивления воздуха от скорости может быть весьма сложной. Для многих целей достаточно предположить, что

$$F_R = kv^p,$$

где $1 \leqq p \leqq 2$ и значение k зависит от размера и формы тела, а также от плотности и вязкости воздуха. Вообще говоря, $p = 1$ для относительно малых скоростей и $p = 2$ для больших скоростей, ну а для промежуточных скоростей $1 < p < 2$. Но конкретные значения "низких скоростей" и "высоких скоростей" зависят от тех же самых коэффициентов, которые определяют значение коэффициента k.

Таким образом, сопротивление воздуха — сложное физическое явление. Но для упрощения предположим, что F_R точно выражается приведенной выше формулой, причем $p = 1$ или $p = 2$. В конце концов, это приводит к хорошей математической модели, которая предсказывает самые важные качественные особенности движения тела в среде с сопротивлением.

Сопротивление, пропорциональное скорости

Давайте сначала рассмотрим вертикальное движение тела массой m около поверхности земли. На тело действуют две силы — направленная вниз сила тяготения F_G и сила F_R сопротивления воздуха, которая пропорциональна скорости (так что $p = 1$). Сила сопротивления воздуха, конечно же, направлена против направления движения тела. Если в системе координат положительное направление y направлено вверх, причем $y = 0$ на уровне земли, то $F_G = -mg$ и

➤
$$F_R = -kv, \tag{3}$$

где k — положительная константа и $v = dy/dt$ — скорость тела. Обратите внимание, что знак "минус" в уравнении (3) делает F_R положительным (сила направлена вверх), если



Рис. 2.3.1. Вертикальное движение при сопротивлении воздуха

тело падает (v отрицательно) и делает F_R отрицательным (сила направлена вниз), если тело набирает высоту (v положительна). Как видно из рис. 2.3.1, равнодействующая сил, действующих на тело, равна

$$F = F_R + F_G = -kv - mg,$$

и закон Ньютона движения $F = m(dv/dt)$ приводит к уравнению

$$m\frac{dv}{dt} = -kv - mg.$$

Таким образом,

➤
$$\frac{dv}{dt} = -\rho v - g, \tag{4}$$

где $\rho = k/m > 0$. Вы должны самостоятельно непосредственной проверкой убедиться, что, если бы положительное направление оси y было направлено вниз, то уравнение (4) имело бы вид $dv/dt = -\rho v + g$.

Уравнение (4) — дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными, и его решением является функция

$$v(t) = \left(v_0 + \frac{g}{\rho}\right) e^{-\rho t} - \frac{g}{\rho}. \tag{5}$$

Здесь $v_0 = v(0)$ — начальная скорость тела. Обратите внимание, что

$$v_\tau = \lim_{t\to\infty} v(t) = -\frac{g}{\rho}. \tag{6}$$

Таким образом, скорость тела, падающего при сопротивлении воздуха, *не увеличивается* неограниченно; вместо этого она приближается к *конечной* граничной скорости, или **предельной** скорости,

$$|v_\tau| = \frac{g}{\rho} = \frac{mg}{k}. \tag{7}$$

Этот объясняет, почему парашютист не разбивается при прыжке; это даже помогает объяснить случайное выживание людей, которые выпадают без парашютов из высоко летящих самолетов.

Мы теперь перепишем уравнение (5) в виде

$$\frac{dy}{dt} = (v_0 - v_\tau)e^{-\rho t} + v_\tau. \tag{8}$$

Интегрирование дает

$$y(t) = -\frac{1}{\rho}(v_0 - v_\tau)e^{-\rho t} + v_\tau t + C.$$

Мы подставляем 0 вместо t и обозначаем через $y_0 = y(0)$ начальную высоту тела. Таким образом, мы находим, что $C = y_0 + (v_0 - v_\tau)/\rho$, и потому

$$y(t) = y_0 + v_\tau t + \frac{1}{\rho}(v_0 - v_\tau)(1 - e^{-\rho t}). \tag{9}$$

Равенства (8) и (9) дают скорость v и высоту y тела, двигающегося вертикально под действием сил тяжести и сопротивления воздуха. Формулы зависят от начальной высоты y_0 тела, его начальной скорости v_0 и *коэффициента лобового сопротивления* ρ. (Коэффициент лобового сопротивления — это константа, такая, что ускорение из-за сопротивления воздуха равно $a_R = -\rho v$.) Эти два уравнения также содержат предельную скорость v_τ, определенную в уравнении (6).

Для человека, спускающегося на парашюте, обычно значение ρ равно $1{,}5$, что соответствует предельной скорости $|v_\tau| \approx 21{,}3$ фута в секунду, или приблизительно $14{,}5$ мили в час. Для парашутиста-неудачника, выпрыгнувшем вместо парашюта в расстегнутом пальто, трепещущем на ветру при падении, ρ может увеличиться, возможно, даже до $0{,}5$, что дает предельную скорость $|v_\tau| \approx 65$ футов в секунду, или приблизительно 44 мили в час. В задачах 10 и 11 даются данные для некоторых вычислений, связанных с прыжками с парашютом.

Пример 2 Мы снова полагаем, что стрела выстрелена из арбалета прямо вверх с начальной скоростью $v_0 = 49$ м/с с поверхности земли. Но теперь мы принимаем во внимание сопротивление воздуха, причем $\rho = 0{,}04$ в уравнении (4). Мы спрашиваем, как изменится максимальная высота и время полета вверх по сравнению со значениями, найденными в примере 1.

Решение Мы подставляем $y_0 = 0$, $v_0 = 49$ и $v_\tau = -g/\rho = -245$ в равенства (5) и (9) и получаем

$$v(t) = 294e^{-t/25} - 245,$$
$$y(t) = 7350 - 245t - 7350e^{-t/25}.$$

Найдем время, требуемое для того, чтобы стрела достигла максимальной высоты (тогда $v = 0$). Для этого мы решаем уравнение

$$v(t) = 294e^{-t/25} - 245 = 0$$

и находим $t_m = 25\ln(294/245) \approx 4{,}558$ (с). Максимальная высота равна $y_{\max} = v(t_m) \approx 108{,}280$ метра (а не $122{,}5$ метра, как было бы при отсутствии сопротивления воздуха). Чтобы узнать, когда стрела упадет на

землю, нужно решить уравнение

$$y(t) = 7350 - 245t - 7350e^{-t/25} = 0.$$

Используя метод Ньютона, мы можем начать с начального значения $t_0 = 10$ и выполнять итерации $t_{n+1} = t_n - y(t_n)/y'(t_n)$, чтобы найти последовательные приближения к корню. Или мы можем просто использовать команду `Solve` на калькуляторе или в компьютере. Мы находим, что стрела находится в воздухе $t_f \approx 9{,}411$ секунды (а не 10 секунд, как было бы при отсутствии сопротивления воздуха). Она упадет на землю с меньшей скоростью $|v(t_f)| \approx 43{,}227$ м/с (а не с начальной скоростью 49 м/с).

Таким образом, эффект сопротивления воздуха уменьшает максимальную высоту стрелы, полное время полета и ее скорость при падении. Также обратите внимание, что стрела при наличии сопротивлении воздуха падает дольше ($t_f - t_m \approx 4{,}853$ с), чем поднимается в воздухе ($t_m \approx 4{,}558$ с). ■

Сопротивление пропорционально квадрату скорости

Теперь мы предполагаем, что сила сопротивления воздуха пропорциональна *квадрату* скорости:

➤
$$F_R = \pm kv^2, \tag{10}$$

причем $k > 0$. Выбор знаков здесь зависит от направления движения, против которого направлена сила сопротивления. Если положительное направление оси y направлено вверх, то $F_R < 0$ для движения вверх (когда $v > 0$) и $F_R > 0$ для движения вниз (когда $v < 0$). Таким образом, знак F_R всегда противоположен знаку v, так что мы можем переписать уравнение (10) в виде

$$F_R = -kv|v|. \tag{10′}$$

Тогда второй закон Ньютона дает

$$m\frac{dv}{dt} = F_G + F_R = -mg - kv|v|;$$

т. е.

$$\frac{dv}{dt} = -g - \rho v|v|, \tag{11}$$

где $\rho = k/m > 0$. Мы должны рассмотреть случаи движения вверх и вниз отдельно.

Движение вверх. Предположим, что снаряд запущен прямо вверх из начального положения y_0 с начальной скоростью $v_0 > 0$. Тогда уравнение (11) для $v > 0$ дает дифференциальное уравнение

$$\frac{dv}{dt} = -g - \rho v^2 = -g\left(1 + \frac{\rho}{g}v^2\right). \tag{12}$$

В задаче 13 мы просим вас сделать замену $u = v\sqrt{\rho/g}$ и применить знакомый интеграл

$$\int \frac{1}{1+u^2}\,du = \operatorname{arctg} u + C,$$

чтобы найти скорость снаряда в виде функции

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{\rho}}\operatorname{tg}\left(C_1 - t\sqrt{\rho g}\right), \quad \text{причем} \quad C_1 = \operatorname{arctg}\left(v_0\sqrt{\frac{\rho}{g}}\right). \tag{13}$$

Поскольку $\int \operatorname{tg} u\,du = -\ln|\cos u| + C$, второе интегрирование (см. задачу 14), приводит к функции, выражающей положение тела:

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\rho}\ln\left|\frac{\cos\left(C_1 - t\sqrt{\rho g}\right)}{\cos C_1}\right|. \tag{14}$$

Движение вниз. Предположим, что снаряд запущен (или сброшен) прямо вниз из начального положения y_0 с начальной скоростью $v_0 \leqq 0$. Тогда уравнение (11) при $v < 0$ приводит к дифференциальному уравнению

$$\frac{dv}{dt} = -g + \rho v^2 = -g\left(1 - \frac{\rho}{g}v^2\right). \tag{15}$$

В задаче 15 мы просим вас сделать замену $u = v\sqrt{\rho/g}$ и применить интеграл

$$\int \frac{1}{1-u^2}\,du = \operatorname{arc\,th} u + C,$$

чтобы получить скорость снаряда в виде функции

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{\rho}}\operatorname{th}\left(C_2 - t\sqrt{\rho g}\right), \quad \text{где} \qquad C_2 = \operatorname{arc\,th}\left(v_0\sqrt{\frac{\rho}{g}}\right). \tag{16}$$

Поскольку $\int \operatorname{th} u\,du = \ln|\cosh u| + C$, еще одно интегрирование (задача 16) приводит к функции, дающей положение

$$y(t) = y_0 - \frac{1}{\rho}\ln\left|\frac{\cosh\left(C_2 - t\sqrt{\rho g}\right)}{\cosh C_2}\right|. \tag{17}$$

(Обратите внимание на аналогию между уравнениями (16) и (17) и уравнениями (13) и (14) для движения вверх.)

Если $v_0 = 0$, то $C_2 = 0$, так что $v(t) = -\sqrt{g/\rho}\operatorname{th}\left(t\sqrt{\rho g}\right)$. Поскольку

$$\lim_{x\to\infty}\operatorname{th} x = \lim_{x\to\infty}\frac{\sinh x}{\cosh x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})}{\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})} = 1,$$

то из этого следует, что в случае движения вниз скорость тела приближается к предельной скорости

$$|v_\tau| = \sqrt{\frac{g}{\rho}} \tag{18}$$

(по сравнению с $|v_\tau| = g/\rho$ в случае движения вниз с линейным сопротивлением, удовлетворяющим уравнению (4)).

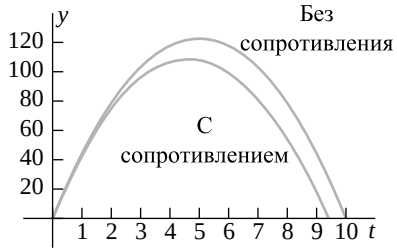


Рис. 2.3.2. Графики функций (высоты), найденных в примере 1 (без сопротивления воздуха), в примере 2 (с линейным сопротивлением воздуха) и в примере 3 (с сопротивлением воздуха, пропорциональным квадрату скорости). Два последних графика визуально неразличимы.

Пример 3 Мы снова рассматриваем стрелу, выпущенную прямо вверх с начальной скоростью $v_0 = 49$ м/с из арбалета с поверхности земли, как в примере 2. Но теперь мы принимаем, что сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости, причем $\rho = 0{,}0011$ в уравнениях (12) и (15). В задачах 17 и 18 мы просим проверить последнюю строку следующей таблицы.

Сопр. воздуха	Макс. высота (фт)	Время полета (с)	Время подъема (с)	Время спуска (с)	Прицельн. скорость (фт/с)
0,0	122,5	10	5	5	49
$(0{,}04)v$	108,28	9,41	4,56	4,85	43,23
$(0{,}0011)v^2$	108,47	9,41	4,61	4,80	43,49

Сравнение последних двух строк для движения нашей стрелы, выпущенной из арбалета, показывает, что есть небольшая разность между движением при сопротивлении воздуха, линейно зависящим от скорости, и при сопротивлении воздуха, пропорциональном квадрату скорости. И потому на рис. 2.3.2, где соответствующие функции (высоты) изображены в виде графиков, разность едва заметна. Однако в более сложных ситуациях, например, при входе в атмосферу и спуске космического корабля, разность между линейным и нелинейным сопротивлением может быть существенна. ■

Переменное гравитационное ускорение

Если снаряд при вертикальном движении не остается в непосредственной близости от поверхности земли, гравитационное ускорение, действующее на него, не постоянно. Согласно закону всемирного тяготения Ньютона, сила притяжения между двумя точечными массами M и m, находящимися на расстоянии r, равна

➤
$$F = \frac{GMm}{r^2}, \tag{19}$$

где G — некоторая эмпирическая константа ($G \approx 6{,}6726 \times 10^{-11}$ Н·(м/кг)^2 в системе МКС). Формула также имеет силу, если одна или обе из этих двух масс представляют собой однородные сферы; в этом случае расстояние r равно расстоянию между центрами сфер.

Следующий пример подобен примеру 2 из раздела 1.2, но теперь мы принимаем во внимание притяжение Луны.

Пример 4 Лунный посадочный модуль свободно падает на Луну, причем на высоте 53 км над поверхностью Луны его скорость, направленная к Луне, равна 1477 км/час. Его тормозные реактивные двигатели, запущенные в безвоздушном пространстве, обеспечивают замедление $T = 4$ м/с^2. На какой высоте над поверхностью Луны должны быть активизированы тормозные реактивные двигатели, чтобы гарантировать "мягкое приземление" ($v = 0$ при соударении)?

Решение Пусть $r(t)$ обозначает расстояние посадочного модуля от центра Луны в момент времени t (рис. 2.3.3). Складывая (постоянное) ускорение тяги T и (отрицательное) лунное ускорение $F/m = GM/r^2$ из уравнения (19), получаем дифференциальное уравнение, левая часть которого есть ускорение

$$\frac{d^2r}{dt^2} = T - \frac{GM}{r^2}, \tag{20}$$

где $M = 7{,}35 \times 10^{22}$ (кг) — масса Луны, которая имеет радиус $R = 1{,}74 \times$ $\times 10^6$ м (или 1740 км, немного больше четверти радиуса Земли). Замечая, что это дифференциальное уравнение второго порядка не содержит независимую переменную t, мы заменяем

$$v = \frac{dr}{dt}, \quad \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = v\frac{dv}{dr}$$

(как в уравнении (36) из раздела 1.6) и получаем уравнение первого порядка

$$v\frac{dv}{dr} = T - \frac{GM}{r^2}$$

с новой независимой переменной r. Интегрирование по r теперь приводит к уравнению

$$\frac{1}{2}v^2 = Tr + \frac{GM}{r} + C, \tag{21}$$

которое мы можем применить как перед запуском ($T = 0$), так и после запуска посадочного двигателя ($T = 4$).

Перед запуском посадочного двигателя. Замена $T = 0$ в (21) дает уравнение

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{GM}{r} + C_1 \tag{21a}$$

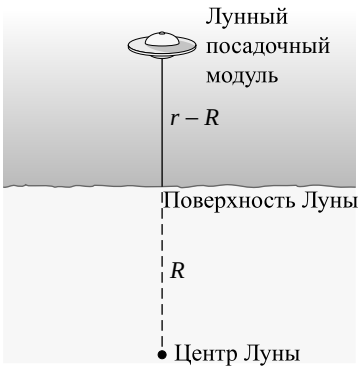


Рис. 2.3.3. Лунный посадочный модуль, спускающийся на поверхность Луны

где константа $C_1 = v_0^2/2 - GM/r_0$, причем

$$v_0 = -1477\frac{\text{км}}{\text{час}} \times 1000\frac{\text{м}}{\text{км}} \times \frac{1\text{ час}}{3600\text{ с}} = -\frac{14770}{36}\frac{\text{м}}{\text{с}}$$

и $r_0 = (1{,}74 \times 10^6) + 53000 = 1{,}793 \times 10^6$ м (от начального положения в системе координат скорость–положение).

После запуска посадочного двигателя. Замена $T = 4$ и $v = 0, r = R$ (при приземлении) в (21) дает

$$\frac{1}{2}v^2 = 4r + \frac{GM}{r} + C_2, \tag{21b}$$

где константа $C_2 = -4R - GM/R$ получена подстановкой значений $v = 0, r = R$ при приземлении.

В момент запуска посадочного двигателя лунного посадочного модуля его положение и скорость удовлетворяют и уравнению (21a), и уравнению (21b). Поэтому, чтобы найти его искомую высоту h над поверхностью Луны при запуске посадочного двигателя, мы можем приравнять правые части в (21a) и (21b). Это дает $r = \frac{1}{4}(C_1 - C_2) = 1{,}78187 \times$ $\times 10^6$ и, наконец, $h = r - R = 41870$ м (т. е. 41,87 км — чуть больше 26 миль). Кроме того, подстановка этого значения r в (21a) дает скорость $v = -450$ м/с в момент воспламенения. ■

Вторая космическая скорость

Жюль Верн в своем романе *С Земли на Луну*, написанном еще в 1865 году, поднял вопрос о том, какую начальную скорость должен иметь снаряд, запущенный с поверхности Земли, для того чтобы достичь Луны. Точно так же мы можем спросить, какой должна быть начальная скорость v_0 для того, чтобы снаряд не упал на Землю и не стал спутником Земли. Это будет так, если его скорость $v = dr/dt$ остается *положительной* для всех $t > 0$, так что

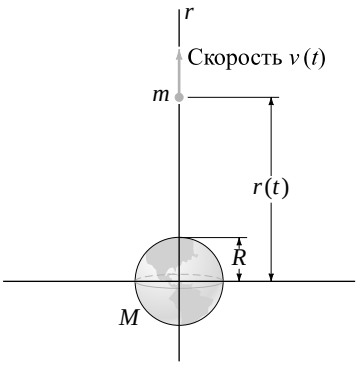


Рис. 2.3.4. Масса m на большом расстоянии от Земли

снаряд всегда движется от Земли. Обозначим через $r(t)$ расстояние снаряда от центра Земли в момент времени t (рис. 2.3.4). Тогда мы имеем уравнение

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2}, \tag{22}$$

подобное уравнению (20), но в нем $T = 0$ (отсутствует тяга) и $M = 5{,}975 \times 10^{24}$ (кг) обозначает массу Земли, которая имеет экваториальный радиус $R = 6{,}378 \times 10^6$ (м). Подстановка выражения $dv/dt = v(dv/dr)$ (полученного по цепному правилу), как и в примере 4, дает

$$v\frac{dv}{dr} = -\frac{GM}{r^2}.$$

Тогда интегрирование обеих частей по r приводит к равенству

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{GM}{r} + C.$$

Теперь $v = v_0$ и $r = R$, когда $t = 0$, так что $C = \frac{1}{2}v_0^2 - GM/R$, и, следовательно, решение уравнения относительно v^2 дает

$$v^2 = v_0^2 + 2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right). \tag{23}$$

Это неявное решение уравнения (22) определяет скорость снаряда v как функцию его расстояния r от центра Земли. В частности,

$$v^2 > v_0^2 - \frac{2GM}{R},$$

так что v останется положительным при условии, что $v_0^2 \geqq 2GM/R$. Поэтому **вторая космическая скорость** для Земли дается формулой

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \tag{24}$$

В задаче 27 мы просим показать, что если начальная скорость снаряда превышает $\sqrt{2GM/R}$, то $r(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, так что снаряд действительно улетит с Земли. Для данных значений G и массы M Земли и ее радиуса R, формула дает $v_0 \approx 11180$ (м/с) (приблизительно 36680 футов в секунду, приблизительно 6,95 мили в секунду, приблизительно 25000 миль в час).

Замечание. Уравнение (24) дает вторую космическую скорость для любого (сферического) планетарного тела, если в это уравнение подставить массу и радиус *планеты*. Например, если подставить массу M и радиус R Луны, данные в примере 4, мы найдем, что вторая космическая скорость для старта с поверхности Луны равна $v_0 \approx 2375$ м/с. Это только чуть больше одной пятой второй космической скорости для старта с поверхности Земли, факт, который очень облегчает возвращение на Землю (см. роман *С Луны на Землю*). ■

2.3. Задачи

1. Ускорение спортивного автомобиля Maserati пропорционально разности между 250 км/час и его скоростью. Эта машина может ускориться из состояния покоя до 100 км/час за 10 с. Сколько времени потребуется для этого автомобиля, чтобы ускориться из состояния покоя до 200 км/час?
2. Предположим, что тело движется в среде, причем сопротивление среды пропорционально скорости v тела, так что $dv/dt = -kv$. **(a)** Покажите, что скорость и положение тела в момент времени t даются формулами
$$v(t) = v_0 e^{-kt}$$
и
$$x(t) = x_0 + \left(\frac{v_0}{k}\right)(1 - e^{-kt}).$$
(b) Убедитесь, что тело переместится только на конечное расстояние, и найдите это расстояние.
3. Предположим, что моторная лодка движется со скоростью 40 футов в секунду, когда ее двигатель внезапно выходит из строя, и что через 10 с после этого лодка замедлилась до 20 футов в секунду. Примите, как и в задаче 2, что сопротивление, с которым сталкивается судно во время каботажного плавания, пропорционально скорости судна. Как далеко может проплыть лодка?
4. Рассмотрим тело, которое перемещается горизонтально в среде, сопротивление которой пропорционально *квадрату* скорости v, так что $dv/dt = -kv^2$. Покажите, что
$$v(t) = \frac{v_0}{1 + v_0 kt}$$
и что
$$x(t) = x_0 + \frac{1}{k}\ln(1 + v_0 kt).$$
Обратите внимание что, в отличие от результата задачи 2, $x(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$.
5. Предполагая сопротивление среды пропорциональным квадрату скорости (как в задаче 4), определите, сколько проплывет моторная лодка из задачи 3 вдоль побережья за первую минуту после выхода ее мотора из строя?
6. Предположим, что тело, двигающееся со скоростью v, испытывает сопротивление среды, определяемое формулой $dv/dt = -kv^{3/2}$. Покажите, что
$$v(t) = \frac{4v_0}{\left(kt\sqrt{v_0} + 2\right)^2}$$

и что

$$x(t) = x_0 + \frac{2}{k}\sqrt{v_0}\left(1 - \frac{2}{kt\sqrt{v_0}+2}\right).$$

Заключите, что если сопротивление пропорционально скорости тела в степени $\frac{3}{2}$, то тело пройдет только конечное расстояние до остановки.

7. Предположим, что автомобиль начинает двигаться из состояния покоя и его двигатель обеспечивает ускорение 10 фт/с^2, а сопротивление воздуха обеспечивает замедление 0,1 фт/с^2 на каждый фут в секунду скорости автомобиля. **(a)** Найдите максимально возможную (граничную) скорость автомобиля. **(b)** Сколько времени потребуется автомобилю, чтобы достичь 90% его граничной скорости, и как далеко он переместится при этом?

8. Решите заново обе части задачи 7, но теперь примите, что замедление из-за сопротивления воздуха равно $(0{,}001)v^2$ фт/с^2, если скорость автомобиля равна v фут в секунду.

9. Моторная лодка весит 32 000 фунтов, и ее двигатель обеспечивает тягу 5000 фунтов. Предположите, что сопротивление воды равно 100 фунтам на каждый фут в секунду скорости v лодки. Тогда

$$1000\frac{dv}{dt} = 5000 - 100v.$$

Если лодка начинает двигаться из состояния покоя, то какой максимальной скорости она может достичь?

10. Женщина выпрыгивает из самолета на высоте 10 000 футов, падает свободно в течение 20 с, а затем открывает парашют. Сколько времени ей потребуется, чтобы достичь поверхности земли? Примите, что сопротивление воздуха линейно зависит от скорости: ρv фт/с^2, и возьмите $\rho = 0{,}15$ для полета без парашюта и $\rho = 1{,}5$ для полета с парашютом. (*Указание*. Сначала определите высоту и скорость в момент раскрытия парашюта.)

11. Согласно заметке в газете, парашютист выжил, совершив тренировочный прыжок с 1200 футов, но его парашют не раскрылся, хотя и обеспечил немного дополнительного сопротивления, так как трепетался нераскрытым на ветру. Предположительно он ударился о землю со скоростью 100 миль в час после падения в течение 8 с. Проверьте точность этой заметки. (*Указание*. Найдите ρ из уравнения (4), принимая, что предельная скорость равна 100 миль в час. Затем вычислите время, требуемое для падения с высоты 1200 футов.)

12. Предложено избавиться от ядерных отходов, залитых в металлические бочки весом $W = 640$ фунтов и объемом 8 кубических футов, путем сброса их в океан ($v_0 = 0$). Сила сопротивления воды для металлической бочки, сбрасываемой в океан, дается уравнением

$$m\frac{dv}{dt} = -W + B + F_R,$$

где сила B равна весу (при удельном весе 62,5 фунта на кубический фут) объема воды, вытесненной металлической бочкой (закон Архимеда), а сила сопротивления воды F_R найдена опытным путем, и оказалось, что она равна 1 фунту на каждый фут в секунду скорости металлической бочки. Если металлические бочки могут лопнуть при соударении на скорости больше 75 футов в секунду, то какова максимальная глубина, на которую они могут быть сброшены в океан так, чтобы они не лопнули?

13. Отделите переменные в уравнении (12) и сделайте замену $u = v\sqrt{\rho/g}$, чтобы получить функцию, выражающую скорость при движении вверх (эта функция определена в уравнении (13)) при начальном условии $v(0) = v_0$.

14. Проинтегрируйте функцию, выражающую скорость в уравнении (13), чтобы получить функцию, выражающую положение тела при движении вверх (эта функция определена в уравнении (14)) при начальном условии $y(0) = y_0$.

15. Отделите переменные в уравнении (15) и сделайте замену $u = v\sqrt{\rho/g}$, чтобы получить функцию, выражающую скорость, при движении вниз (эта функция определена в уравнении (16)) при начальном условии $v(0) = v_0$.

16. Проинтегрируйте функцию, выражающую скорость (эта функция определена в уравнении (16)), чтобы получить функцию, выражающую положение тела при движении вниз (эта функция дана в уравнении (17)) при начальном условии $y(0) = y_0$.

17. Стрела выпущена из арбалета, как в примере 3, прямо вверх с поверхности земли ($y = 0$) в момент времени $t = 0$ с начальной скоростью $v_0 = 49$ м/с. Положите $g = 9{,}8$ м/с^2 и $\rho = 0{,}0011$ в уравнении (12). Затем используйте уравнения (13) и (14), чтобы показать, что стрела достигает максимальной высоты приблизительно $108{,}47$ м приблизительно за $4{,}61$ с.

18. Продолжая рассматривать стрелу из задачи 17, предположите, что стрела теперь начинает падение ($v_0 = 0$) с высоты $y_0 = 108{,}47$ м. Затем с помощью равенств (16) и (17) покажите, что она упадет на землю приблизительно через $4{,}80$ с, имея при соударении скорость приблизительно $43{,}49$ м/с.

19. Моторная лодка начинает двигаться из состояния покоя (начальная скорость $v(0) = v_0 = 0$). Ее двигатель обеспечивает постоянное ускорение 4 фт/с^2, но сопротивление воды причиняет замедление $v^2/400$ фт/с^2. Найдите v в момент времени $t = 10$ с, а также найдите *предел* скорости при $t \to +\infty$ (т. е. максимальную возможную скорость лодки).

20. Стрела выпущена прямо вверх с поверхности земли с начальной скоростью 160 футов в секунду. Она испытывает замедление вследствие силы тяжести и замедление $v^2/800$ из-за сопротивления воздуха. На какую максимальную высоту она поднимется?

21. Пусть шар подбрасывается вверх с поверхности земли с начальной скоростью v_0. Выведите из уравнения (14), что его максимальная высота равна

$$y_{\max} = \frac{1}{2\rho} \ln\left(1 + \frac{\rho v_0^2}{g}\right).$$

22. Предположим, что $\rho = 0{,}075$ (в единицах fps, причем $g = 32$ фт/с^2) в уравнении (15) для парашютиста, падающего с раскрытым парашютом. Если он прыгает с высоты $10\,000$ футов и немедленно раскрывает свой парашют, какова будет его предельная скорость? Сколько ему потребуется времени, чтобы достичь поверхности земли?

23. Предположим, что парашютист из задачи 22 падает свободно в течение 30 с, причем $\rho = 0{,}00075$ перед раскрытием его парашюта. Сколько ему теперь потребуется времени, чтобы достичь поверхности земли?

24. Масса Солнца в $329\,320$ раз больше, чем масса Земли, а его радиус в 109 раз больше радиуса Земли. **(a)** Какой радиус (в метрах) земля должен быть у Земли, чтобы она была *черной дырой*, т. е. чтобы вторая космическая скорость на ее поверхности была равна скорости света $c = 3 \times 10^8$ м/с? **(b)** Решите задачу из части (a) для Солнца вместо Земли.

25. **(a)** Покажите, что если снаряд запущен прямо вверх с поверхности Земли с начальной скоростью v_0 меньшей, чем вторая космическая скорость $\sqrt{2GM/R}$, то максимальное расстояние от центра Земли, достигаемое снарядом, равно

$$r_{\max} = \frac{2GMR}{2GM - Rv_0^2},$$

где M и R — масса и радиус Земли соответственно. **(b)** С какой начальной скоростью v_0 нужно запустить такой снаряд, чтобы он достиг максимальной высоты 100 км над поверхностью Земли? **(c)** Выразите в долях земного радиуса максимальное расстояние от центра Земли, достигаемое снарядом, запущенным с поверхности Земли с 90% второй космической скорости.

26. Предположим, что двигатель вашей ракеты отказал и вы стали пленником астероида диаметром 3 мили, причем его плотность равна плотности Земли, радиус которой равен 3960 милям. Вы можете подскочить на высоту 4 фута на Земле в скафандре. Сможете ли вы оторваться от этого астероида, подпрыгнув с его поверхности?

27. **(a)** Предположим, что снаряд запущен вертикально с поверхности Земли радиуса $r = R$ с начальной скоростью $v_0 = \sqrt{2GM/R}$, так что $v_0^2 = k^2/R$, где $k^2 = 2GM$. Найдите решение дифференциального уравнения $dr/dt = k/\sqrt{r}$ (используя уравнение (23) из этого раздела) в явном виде, чтобы вывести, что $r(t) \to \infty$ при $t \to \infty$.

(b) Пусть снаряд запущен вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 > \sqrt{2GM/R}$. Выведите, что

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{k^2}{r} + \alpha} > \frac{k}{\sqrt{r}}.$$

Почему из этого снова следует, что $r(t) \to \infty$ при $t \to \infty$?

28. **(a)** Предположим, что физическое тело сброшено ($v_0 = 0$) с расстояния $r_0 > R$ от центра земли, так что его ускорение $dv/dt = -GM/r^2$. Игнорируйте сопротивление воздуха. Покажите, что тело достигает высоты $r < r_0$ в момент времени

$$t = \sqrt{\frac{r_0}{2GM}}\left(\sqrt{rr_0 - r^2} + r_0 \arccos\sqrt{\frac{r}{r_0}}\right).$$

(*Указание*. Подставьте $r = r_0 \cos^2\theta$, чтобы вычислить $\int \sqrt{r/(r_0 - r)}\, dr$.) **(b)** Пусть тело сброшено с высоты 1000 км над поверхностью земли, причем сопротивлением воздуха можно пренебречь. За сколько времени тело упадет на землю и какая скорость будет при ударе о поверхность земли?

29. Предположим, что снаряд запущен прямо вверх с поверхности земли с начальной скоростью $v_0 < \sqrt{2GM/R}$. Тогда его высота $y(t)$ над поверхностью является решением задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{GM}{(y+R)^2}; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = v_0.$$

Выполните замену $dv/dt = v(dv/dy)$ и затем проинтегрируйте, чтобы получить

$$v^2 = v_0^2 - \frac{2GMy}{R(R+y)}$$

для скорости v снаряда на высоте y. Какой максимальной высоты он достигнет, если его начальная скорость равна 1 км/с?

30. В задаче, поставленной Жюлем Верном, снаряд, запущенный с поверхности Земли притягивается и Землей, и Луной, так что его расстояние $r(t)$ от центра Земли является решением задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM_e}{r^2} + \frac{GM_m}{(S-r)^2}; \quad r(0) = R, \quad r'(0) = v_0,$$

где M_e и M_m обозначают массы Земли и Луны, соответственно; R — радиус Земли и $S = 384\,400$ км — расстояние между центрами Земли и Луны. Чтобы достичь Луны, снаряд должен только пройти точку между Луной и Землей, где его результирующее ускорение обращается в нуль. После этого он находится “под управлением” Луны и падает на поверхность Луны. Найдите *минимальную* скорость запуска v_0, которая позволяет снаряду преодолеть путь “С Земли до Луны”.

2.3. Приложение. Движение ракеты

Предположим, что ракета на рис. 2.3.5 направлена прямо вверх и отрывается от поверхности земли в момент времени $t = 0$. Мы хотим вычислить ее высоту y и скорость $v = dy/dt$ в момент времени t. Ракета двигается за счет выхлопных газов, которые выпускаются двигателями (в направлении назад) с постоянной (относительно ракеты) скоростью c. Из-за сгорания топлива масса $m = m(t)$ ракеты будет переменной.

Чтобы вывести уравнение движения ракеты, мы используем второй закон Ньютона в форме

$$\frac{dP}{dt} = F, \tag{1}$$

где P — импульс (произведение массы на скорость), а F обозначает равнодействующую внешних сил (веса, сопротивления воздуха и т. д.). Если масса m постоянна, то уравнение (1) принимает стандартную форму $F = m(dv/dt) = ma$.

Но здесь масса m не постоянна. Предположим, масса изменяется от m до $m + \Delta m$, а скорость изменяется от v до $v + \Delta v$ за короткий временной интервал от момента времени t до момента времени $t + \Delta t$. Тогда изменение *импульса самой ракеты* равно

$$\Delta P \approx (m + \Delta m)(v + \Delta v) - mv = m\,\Delta v + v\,\Delta m + \Delta m\,\Delta v.$$

Но система также включает выхлопные газы, удаляемые в течение этого временного интервала, их масса равна $-\Delta m$, а скорость приблизительно равна $v - c$. Следовательно, полное изменение импульса в течение временного интервала Δt равно

$$\begin{aligned}\Delta P &\approx (m\,\Delta v + v\,\Delta m + \Delta m\,\Delta v) + (-\Delta m)(v - c) = \\ &= m\,\Delta v + c\,\Delta m + \Delta m\,\Delta v.\end{aligned}$$

Если мы разделим на Δt и возьмем предел при $\Delta t \to 0$, а затем подставим полученное выражение для dP/dt в (1), мы получим **уравнение движения ракеты**

$$m\frac{dv}{dt} + c\frac{dm}{dt} = F. \tag{2}$$

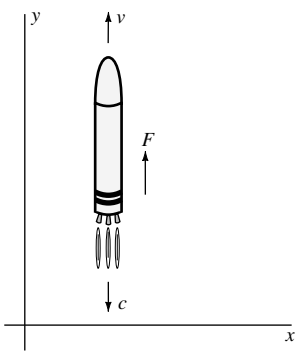


Рис. 2.3.5. Ракета движется вверх

Если $F = F_G + F_R$, где $F_G = -mg$ — постоянная сила тяжести и $F_R = -kv$ — сила сопротивления воздуха, пропорциональная скорости, то уравнение (2), наконец, примет вид

$$m\frac{dv}{dt} + c\frac{dm}{dt} = -mg - kv. \tag{3}$$

Постоянная сила тяги

Теперь предположим, что скорость сгорания реактивного топлива постоянна и равна β в течение временного интервала $[0, t_1]$, в течение которого масса ракеты уменьшается от m_0 до m_1. Таким образом,

$$\begin{aligned} &m(0) = m_0, \qquad && m(t_1) = m_1, \\ &m(t) = m_0 - \beta t, \qquad && \frac{dm}{dt} = -\beta \quad \text{для } t \le t_1, \end{aligned} \tag{4}$$

причем топливо выгорит в момент времени $t = t_1$.

Задача 1. Подставляя выражения из равенств (4) в уравнение (3), получим дифференциальное уравнение

$$(m - \beta t)\frac{dv}{dt} + kv = \beta c - (m_0 - \beta t)g. \tag{5}$$

Решая это линейное уравнение, находим

$$v(t) = v_0 M^{k/\beta} + \frac{\beta c}{k}(1 - M^{k/\beta}) + \frac{gm_0}{\beta - k}(1 - M^{k/\beta}), \tag{6}$$

где $v_0 = v(0)$ и

$$M = \frac{m(t)}{m_0} = \frac{m_0 - mt}{m_0}$$

обозначает **часть массы ракеты** в момент времени t.

Сопротивление отсутствует

Задача 2. В случае отсутствия сопротивления воздуха полагаем $k = 0$ в уравнении (5) и интегрируем его; в результате этого получим

$$v(t) = v_0 - gt + c \ln \frac{m_0}{m_0 - \beta t}. \tag{7}$$

Поскольку $m_0 - \beta t_1 = m_1$, из этого следует, что скорость ракеты в момент выгорания топлива ($t = t_1$) равна

$$v_1 = v(t_1) = v_0 - gt_1 + c \ln \frac{m_0}{m_1}. \tag{8}$$

Задача 3. Начнем с уравнения (7) и проинтегрируем его; в результате получим

$$y(t) = (v_0 + c)t - \frac{1}{2}gt^2 - \frac{c}{\beta}(m_0 - \beta t)\ln\frac{m_0}{m_0 - \beta t}. \tag{9}$$

Из этого следует, что высота ракеты в момент выгорания топлива равна

$$y_1 = y(t_1) = (v_0 + c)t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 - \frac{cm_1}{\beta}\ln\frac{m_0}{m_1}. \tag{10}$$

Задача 4. Ракета V-2, которая использовалась для бомбардировки Лондона во время Второй мировой войны, имела начальную массу 12 850 кг, из которых 68,5 % приходилось на топливо. Это топливо, сжигаемое равномерно в течение 70 секунд, выбрасывалось в виде выхлопных газов со скоростью 2 км/с. Предположите, что на ракету действует сопротивление воздуха 1,45 Н на каждый метр в секунду скорости. Затем найдите скорость и высоту V-2 в момент выгорания топлива, предположив, что ракета была запущена вертикально вверх с поверхности земли.

Безвоздушное пространство

Предположим, наконец, что ракета ускоряется в безвоздушном пространстве, где нет ни силы тяжести, ни сопротивления, так что $g = k = 0$. При $g = 0$ из уравнения (8) следует, что по мере уменьшения массы ракеты от m_0 до m_1 ее скорость увеличивается на

$$\Delta v = v_1 - v_0 = c\ln\frac{m_0}{m_1}. \tag{11}$$

Заметьте, что Δv зависит только от скорости выхлопных газов c и отношения начальной массы к конечной m_0/m_1, но не зависит от скорости сжигания β. Например, если ракета запускается из состояния покоя ($v_0 = 0$) и $c = 5$ км/с и $m_0/m_1 = 20$, то ее скорость в момент выгорания топлива равна $v_1 = 5\ln 20 \approx 15$ км/с. Таким образом, если в момент запуска ракета имеет большой запас топлива, то она может достичь скоростей, значительно больших, чем (относительная) скорость ее выхлопных газов.

2.4. Числовая аппроксимация. Метод Эйлера

Это действительно исключение, а не правило, когда дифференциальное уравнение общего вида

➤
$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

может быть решено точно и в явном виде элементарными методами, подобными тем, которые обсуждались в главе 1. Например, рассмотрим линейное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x^2}. \tag{1}$$

Решение уравнения (1) — просто примитивная (неопределенный интеграл) функции e^{-x^2}. Но известно, что каждая примитивная функции $f(x) = e^{-x^2}$ — **неэлементарная** функция,

которая не может быть выражена как конечная комбинация функций, знакомых из элементарного курса анализа. Следовательно, никакое частное решение уравнения (1) нельзя выразить через конечную комбинацию элементарных функций. Любая попытка использовать символические методы главы 1 для нахождения простой явной формулы для решения уравнения (1) поэтому обречена на неудачу.

Но есть альтернатива: компьютерный графопостроитель можно запрограммировать так, чтобы нарисовать интегральную кривую, которая начинается в начальной точке (x_0, y_0) и пытается проложить свой путь вдоль поля направлений данного дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$. Процедура, которую должен выполнить графопостроитель, может быть описана следующим образом.

- Установить перо графопостроителя в начальной точке (x_0, y_0) и продвинуться на один шаг на крошечное расстояние вдоль отрезка, имеющего заданный уравнением наклон в точке (x_0, y_0). Это приведет в точку (x_1, y_1).
- В точке (x_1, y_1) изменить направление движения пера и теперь переместить его на крошечное расстояние вдоль отрезка, имеющего заданный уравнением наклон в этой новой отправной точке (x_1, y_1). Это приведет к следующей отправной точке (x_2, y_2).
- В точке (x_2, y_2) снова изменить направление движения пера и теперь переместить его на крошечное расстояние вдоль отрезка, имеющего заданный уравнением наклон в этой новой отправной точке (x_2, y_2). Это приведет к следующей отправной точке (x_3, y_3).

Рис. 2.4.1 иллюстрирует результат продолжения построения этим способом — интегральная кривая заменяется последовательностью дискретных прямолинейных отрезков от одной отправной точки до следующей. На этом рисунке мы видим, что многозвенная кривая состоит из отрезков, которые последовательно соединяют точки $(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots$. Однако теперь давайте предположим, что каждое перемещение пера на "крошечное расстояние" вдоль отрезка, наклон которого определяется уравнением, настолько мало, что невооруженный глаз не может отличить отдельные звенья, составляющие многоугольную ломаную кривую. Тогда полученная многоугольная кривая напоминает гладкую, непрерывно изменяющую направление интегральную кривую дифференциального уравнения. Действительно, в сущности именно так компьютер построил большую часть интегральных кривых, показанных на рисунках в главе 1.

Эйлер не имел компьютерного графопостроителя (в XVIII столетии!), и ему пришлось воплотить эту идею в цифровой форме, а не графически. Чтобы найти приближенное решение задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{2}$$

мы сначала выбираем постоянную **величину шага** h по (горизонтальной) оси, а затем используем ее на каждом шаге создания звена ломаной, соединяющего предыдущую точку со следующей. Предположим, мы начали в начальной точке (x_0, y_0) и после n шагов достигли точки (x_n, y_n). Тогда шаг от (x_n, y_n) к следующей точке (x_{n+1}, y_{n+1}) показан на рис. 2.4.2. Наклон отрезка, проходящего через точку (x_n, y_n), равен $m = f(x_n, y_n)$. Следовательно, горизонтальное изменение h от x_n к x_{n+1} соответствует вертикальному изменению $m \cdot h = h \cdot f(x_n, y_n)$ от y_n до y_{n+1}. Поэтому координаты новой точки (x_{n+1}, y_{n+1}) выражаются через старые координаты так:

$$x_{n+1} = x_n + h, \quad y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n).$$

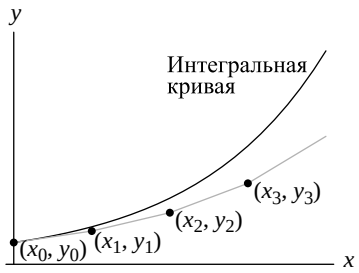


Рис. 2.4.1. Несколько первых шагов при приближенном построении интегральной кривой

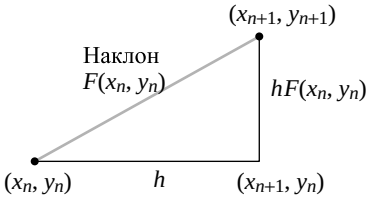


Рис. 2.4.2. Шаг от (x_n, y_n) к (x_{n+1}, y_{n+1})

Предположим, мы хотим решить задачу Коши (задачу с начальными условиями) (2) **методом Эйлера**, задав величину шага h. Тогда мы начинаем двигаться из начальной точки (x_0, y_0) и применяем формулы

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + h & y_1 &= y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) \\ x_2 &= x_1 + h & y_2 &= y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) \\ x_3 &= x_2 + h & y_3 &= y_2 + h \cdot f(x_2, y_2) \\ &\vdots & &\vdots \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

для вычисления последовательности точек (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), ... на приближении интегральной кривой.

Однако обычно мы не рисуем набросок соответствующей многоугольной аппроксимации. Вместо этого обычно мы получаем числовой результат применения метода Эйлера — последовательность *аппроксимаций*

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$$

к *точным значениям*

$$y(x_1), y(x_2), y(x_3), \ldots, y(x_n), \ldots$$

в точках $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ *точного* (хотя и неизвестного) решения $y(x)$ задачи Коши (задачи с начальными условиями). Эти результаты обычно представляются в форме таблицы приближенных значений искомого решения.

АЛГОРИТМ Метод Эйлера

Решая задачу Коши (задачу с начальными условиями)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{2}$$

методом Эйлера, сначала выбираем **величину шага** h, а затем повторно применяем формулу

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n) \quad (n \geq 0) \tag{3}$$

для вычисления последовательных приближений $y_1, y_2, y_3, \ldots$ к [точным] значениям $y(x_1)$, $y(x_2), y(x_3), \ldots$ [точного] решения $y = y(x)$ в точках $x_1, x_2, x_3, \ldots$, соответственно. ▲

Повторное применение формулы (3) позволяет сделать шаг от y_n к y_{n+1}. Это и есть главный "двигатель" метода Эйлера. Хотя самые важные приложения метода Эйлера относятся к нелинейным уравнениям, мы сначала проиллюстрируем метод для простой задачи Коши (задачи с начальными условиями), точное решение которой известно. Затем мы сравним приближенное и точное решения.

Пример 1 Применим метод Эйлера для вычисления приближенного решения задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$\frac{dy}{dx} = x + \frac{1}{5}y, \quad y(0) = -3, \tag{4}$$

(a) сначала выберем величину шага $h = 1$ на интервале $[0, 5]$,

(b) затем выберем величину шага $h = 0{,}2$ на интервале $[0, 1]$.

Решение **(a)** Для $x_0 = 0, y_0 = -3, f(x, y) = x + \frac{1}{5}y$ и $h = 1$ итеративная формула (3) дает приближенные значения

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + h \cdot [x_0 + \tfrac{1}{5}y_0] = (-3) + (1)[0 + \tfrac{1}{5}(-3)] = -3{,}6,\\
y_2 &= y_1 + h \cdot [x_1 + \tfrac{1}{5}y_1] = (-3{,}6) + (1)[1 + \tfrac{1}{5}(-3{,}6)] = -3{,}32,\\
y_3 &= y_2 + h \cdot [x_2 + \tfrac{1}{5}y_2] = (-3{,}32) + (1)[2 + \tfrac{1}{5}(-3{,}32)] = -1{,}984,\\
y_4 &= y_3 + h \cdot [x_3 + \tfrac{1}{5}y_3] = (-1{,}984) + (1)[3 + \tfrac{1}{5}(-1{,}984)] = 0{,}6192 \quad \text{и}\\
y_5 &= y_4 + h \cdot [x_4 + \tfrac{1}{5}y_4] = (0{,}6912) + (1)[4 + \tfrac{1}{5}(0{,}6912)] \approx 4{,}7430
\end{aligned}$$

в точках $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4$ и $x_5 = 5$. Обратите внимание, что результат каждого вычисления используется в следующем шаге. Ниже приведена таблица приближенных значений

x	0	1	2	3	4	5
Приближенное значение y	-3	$-3{,}6$	$-3{,}32$	$-1{,}984$	0,6912	4,7430

На рис. 2.4.3 показан график этой аппроксимации, вместе с графиками аппроксимаций Эйлера, полученных при величине шага $h = 0{,}2$ и 0,05, а также график точного решения

$$y(x) = 22e^{x/5} - 5x - 25,$$

которое легко найти, используя метод решения линейного уравнения, описанный в разделе 1.5. Мы видим, что уменьшение шага увеличивает точность, но после очередной аппроксимации точность уменьшается. Таким образом, точность уменьшается по мере удаления от начальной точки.

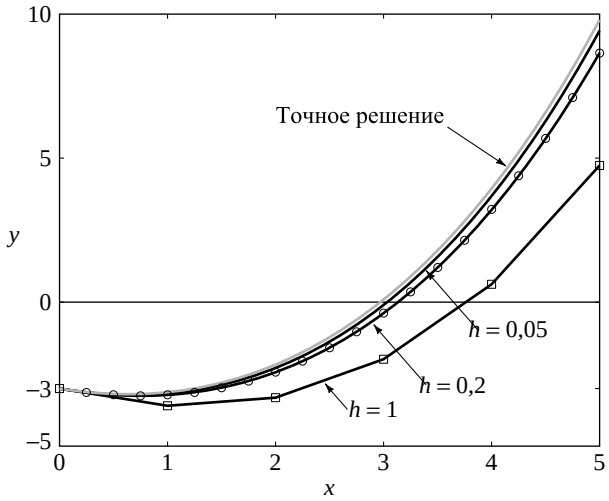


Рис. 2.4.3. Графики аппроксимаций Эйлера при величине шага $h = 1$, $h = 0{,}2$ и $h = 0{,}05$

(b) Начиная заново с $x_0 = 0$, $y_0 = -3$, $f(x, y) = x + \frac{1}{5}y$ и $h = 0{,}2$, мы получаем приближенные значения

$$y_1 = y_0 + h \cdot [x_0 + \tfrac{1}{5}y_0] = (-3) + (0{,}2)[0 + \tfrac{1}{5}(-3)] = -3{,}12,$$
$$y_2 = y_1 + h \cdot [x_1 + \tfrac{1}{5}y_1] = (-3{,}12) + (0{,}2)[0{,}2 + \tfrac{1}{5}(-3{,}12)] \approx -3{,}205,$$
$$y_3 = y_2 + h \cdot [x_2 + \tfrac{1}{5}y_2] \approx (-3{,}205) + (0{,}2)[0{,}4 + \tfrac{1}{5}(-3{,}205)] \approx -3{,}253,$$
$$y_4 = y_3 + h \cdot [x_3 + \tfrac{1}{5}y_3] \approx (-3{,}253) + (0{,}2)[0{,}6 + \tfrac{1}{5}(-3{,}253)] \approx -3{,}263,$$
$$y_5 = y_4 + h \cdot [x_4 + \tfrac{1}{5}y_4] \approx (-3{,}263) + (0{,}2)[0{,}8 + \tfrac{1}{5}(-3{,}263)] \approx -3{,}234$$

в точках $x_1 = 0{,}2$, $x_2 = 0{,}4$, $x_3 = 0{,}6$, $x_4 = 0{,}8$ и $x_5 = 1$. Ниже приведена таблица приближенных значений.

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
Приближение y	-3	$-3{,}12$	$-3{,}205$	$-3{,}253$	$-3{,}263$	$-3{,}234$

■

Чтобы с помощью метода Эйлера достичь высокой точности, обычно требуется очень малый шаг, а следовательно, и большое количество шагов — обычно большее, чем может быть выполнено вручную. Поэтому в приложении к этому разделу приведены программы для калькулятора и компьютера, чтобы вы могли автоматизировать метод Эйлера. Одна из этих программ использовалась, чтобы вычислить данные, приведенные в таблице на рис. 2.4.4. Мы видим, что 500 шагов в методе Эйлера (величина шага $h = 0{,}002$) от $x = 0$ до $x = 1$ дают значения, погрешность которых не превышает 0,001.

Пример 2 Предположим, что бейсбольный мяч из примера 3 в разделе 1.3 просто выпадает (а не выбрасывается вниз) с вертолета. Тогда его скорость $v(t)$ после t секунд является решением задачи Коши (задачи с начальными

условиями)

$$\frac{dv}{dt} = 32 - 0{,}16v, \quad v(0) = 0. \tag{5}$$

Мы используем метод Эйлера при $h = 1$, чтобы проследить увеличение скорости шара на интервалах длительностью 1 секунда в течение первых 10 секунд падения. При $t_0 = 0$, $v_0 = 0$, $F(t, v) = 32 - 0{,}16v$ и $h = 1$ итеративная формула (3) дает приближенные значения

$$v_1 = v_0 + h \cdot [32 - 0{,}16v_0] = (0) + (1)[32 - 0{,}16(0)] = 32,$$
$$v_2 = v_1 + h \cdot [32 - 0{,}16v_1] = (32) + (1)[32 - 0{,}16(32)] = 58{,}88,$$
$$v_3 = v_2 + h \cdot [32 - 0{,}16v_2] = (58{,}88) + (1)[32 - 0{,}16(58{,}88)] \approx 81{,}46,$$
$$v_4 = v_3 + h \cdot [32 - 0{,}16v_3] = (81{,}46) + (1)[32 - 0{,}16(81{,}46)] \approx 100{,}43 \text{ и}$$
$$v_5 = v_4 + h \cdot [32 - 0{,}16v_4] = (100{,}43) + (1)[32 - 0{,}16(100{,}43)] \approx 116{,}36.$$

Продолжая этим способом, мы заполняем для $h = 1$ столбец значений v, приведенный в таблице на рис. 2.4.5, где мы округлили значения скорости к самому близкому целому числу футов в секунду. Значения, соответствующие $h = 0{,}1$, были рассчитаны с помощью компьютера, и мы видим, что их погрешность не превышает 1 фута в секунду. Обратите внимание также на то, что после 10 секунд падающий шар достиг приблизительно 80 % его предельной скорости 200 футов в секунду. ■

x	Приближение к y при $h = 0{,}2$	Приближение к y при $h = 0{,}02$	Приближение к y при $h = 0{,}002$	Точное значение y
0	−3,000	−3,000	−3,000	−3,000
0,2	−3,120	−3,104	−3,102	−3,102
0,4	−3,205	−3,172	−3,168	−3,168
0,6	−3,253	−3,201	−3,196	−3,195
0,8	−3,263	−3,191	−3,184	−3,183
1	−3,234	−3,140	−3,130	−3,129

Рис. 2.4.4. Аппроксимации Эйлера при величине шага $h = 0{,}2$, $h = 0{,}02$ и $h = 0{,}002$

Локальные погрешности и накопление ошибок

В методе Эйлера есть несколько источников погрешности, из-за которых аппроксимация y_n к $y(x_n)$ может быть ненадежной для больших значений n, т. е. для тех, для которых x_n расположено достаточно далеко от x_0. Причина ошибки в линейной аппроксимирующей формуле

$$y(x_{n+1}) \approx y_n + h \cdot f(x_n, y_n) = y_{n+1} \tag{6}$$

состоит в том, что касательная в точке (x_n, y_n) не совпадает с интегральной кривой, проходящей через точку (x_n, y_n), как показано на рис. 2.4.6. Эту ошибку, неизбежную в каждом шаге процесса, называют **локальной ошибкой** метода Эйлера.

t	Приближение к v при $h = 1$	Приближение к v при $h = 0{,}1$	Точное значение v
1	32	30	30
2	59	55	55
3	81	77	76
4	100	95	95
5	116	111	110
6	130	124	123
7	141	135	135
8	150	145	144
9	158	153	153
10	165	160	160

Рис. 2.4.5. Аппроксимации Эйлера в примере 2 для величины шага $h = 1$ и $h = 0{,}1$

Локальная ошибка, показанная на рис. 2.4.6 *была бы* полной (суммарной) погрешностью (ошибкой) в точке y_{n+1}, *если бы* отправное значение y_n в (6) было бы точным значением, а не представляло собой просто аппроксимацию к фактическому значению $y(x_n)$. Но само значение y_n зависит ото всех локальных ошибок, накопленных в предыдущих шагах. Таким образом, касательная на рис. 2.4.6 касается "совсем не той" интегральной кривой — той, которая проходит через (x_n, y_n), а не настоящей интегральной кривой, проходящей через начальную точку (x_0, y_0). Рис. 2.4.7 иллюстрирует эту **накопленную ошибку** в методе Эйлера; она представляет собой расстояние, на которое многозвенная ломаная, выходящая из точки (x_0, y_0), отклоняется от фактической интегральной кривой, проходящей через точку (x_0, y_0).

Обычно, чтобы уменьшить накопленную (суммарную) ошибку в методе Эйлера, нужно уменьшить величину шага h. В таблице на рис. 2.4.8 приведены результаты, полученные при приближении точного решения $y(x) = 2e^x - x - 1$ задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$\frac{dy}{dx} = x + y, \quad y(0) = 1,$$

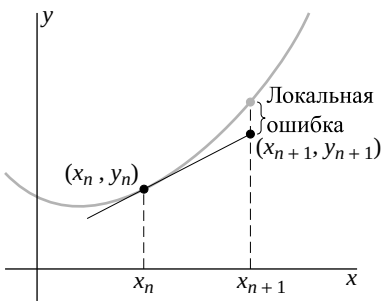


Рис. 2.4.6. Локальная ошибка в методе Эйлера

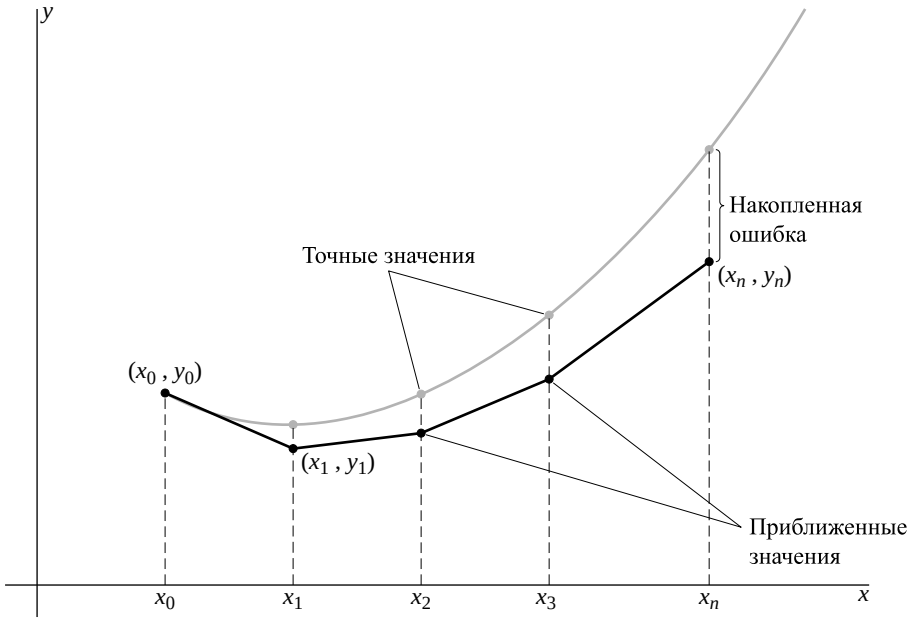


Рис. 2.4.7. Накопленная ошибка в методе Эйлера

с помощью последовательного уменьшения величины шага $h = 0{,}1$, $h = 0{,}02$, $h = 0{,}005$ и $h = 0{,}001$. Мы приводим вычисленные значения только с промежутком $\Delta x = 0{,}1$. Например, при $h = 0{,}001$ вычисление требовало 1000 шагов метода Эйлера, но приведены только те значения y_n, для которых число n кратно 100, так что при этом x_n окажется кратным $0{,}1$.

x	y при $h = 0{,}1$	y при $h = 0{,}02$	y при $h = 0{,}005$	y при $h = 0{,}001$	Точное y
0,1	1,1000	1,1082	1,1098	1,1102	1,1103
0,2	1,2200	1,2380	1,2416	1,2426	1,2428
0,3	1,3620	1,3917	1,3977	1,3993	1,3997
0,4	1,5282	1,5719	1,5807	1,5831	1,5836
0,5	1,7210	1,7812	1,7933	1,7966	1,7974
0,6	1,9461	2,0227	2,0388	2,0431	2,0442
0,7	2,1974	2,2998	2,3205	2,3261	2,3275
0,8	2,4872	2,6161	2,6422	2,6493	2,6511
0,9	2,8159	2,9757	3,0082	3,0170	3,0192
1,0	3,1875	3,3832	3,4230	3,4238	3,4266

Рис. 2.4.8. Приближеннные решения уравнения $dy/dx = x + y, y(0) = 1$, полученные при последовательном уменьшении шага

Просматривая столбец на рис. 2.4.8, мы замечаем, что для каждой фиксированной величины шага h ошибка $y_{\text{точн}} - y_{\text{прибл}}$ увеличивается по мере удаления x от отправной точки $x_0 = 0$. Но просматривая строки таблицы, мы видим, что для каждого фиксированного x ошибка уменьшается по мере уменьшения величины шага h. Ошибки (в процентах) в конечной точке $x = 1$ убывают от $7{,}25\%$ при $h = 0{,}1$ до всего лишь $0{,}08\%$ при $h = 0{,}001$. Таким образом, чем меньше шаг, тем медленнее растет ошибка при увеличении расстояния от отправной точки.

Столбец данных для шага $h = 0{,}1$ на рис. 2.4.8 требует только 10 шагов, так что вычисления по методу Эйлера можно выполнить на карманном калькуляторе. Но чтобы достичь $x = 1$, требуется 50 шагов при $h = 0{,}02$, а при $h = 0{,}005$ — 200 шагов и 1000 шагов — при $h = 0{,}001$. Поэтому чтобы провести вычисления по методу Эйлера, когда требуются более чем 10 или 20 шагов, почти всегда используется компьютер. Как только была написана соответствующая компьютерная программа, величина шага в принципе перестала играть решающую роль в удобстве вычислений; в конце концов, для компьютера количество шагов не принципиально.

Почему же тогда мы не выбираем чрезвычайно маленький шаг (например $h = 10^{-12}$), чтобы достичь очень большой точности? Есть две причины для того, чтобы так не делать. Первая очевидна — время, требуемое для вычисления. Например, данные на рис. 2.4.8 были получены с помощью карманного калькулятора, который выполнял девять шагов метода Эйлера в секунду. Таким образом, требуется немного больше одной секунды, чтобы найти приближение $y(1)$ при $h = 0{,}1$ и приблизительно 1 минута 50 секунд при $h = 0{,}001$. Но при $h = 10^{-12}$ это потребовало бы более чем 3000 лет!

Вторая причина является более тонкой. В дополнение к предварительно обсужденным локальным и накопленным ошибкам, сам компьютер вносит **ошибку округления** на каждом шаге, потому что в каждом вычислении может использоваться только конечное число значащих разрядов. Вычисление по методу Эйлера при $h = 0{,}0001$ вносит ошибки округления в 1000 раз чаще, чем такое же вычисление при $h = 0{,}1$. Следовательно, для некоторых дифференциальных уравнений $h = 0{,}1$ фактически может дать более точные результаты, чем полученные при $h = 0{,}0001$, потому что эффект накопления ошибок округления в таком случае может превысить суммарный эффект накопления ошибок метода и ошибок округления в случае $h = 0{,}1$.

На практике, так же как и в теории, трудно определить “наилучшее” значение h. Оно зависит от природы функции $f(x, y)$ в задаче Коши (задаче с начальными условиями) (2), от точности кода программы и от конкретного типа компьютера. Если шаг слишком большой, аппроксимации, выполненные по методу Эйлера, не будут достаточно точными, тогда как если h является слишком маленьким, то могут накопиться ошибки округления или программа может требовать слишком много времени для выполнения. Тема *распространения ошибок* в числовых алгоритмах рассматривается в курсах и учебниках численного анализа.

Вычисления на рис. 2.4.8 иллюстрируют общую стратегию применения численного алгоритма, такого как метод Эйлера. Сам алгоритм выполняется несколько раз. Сначала нужно выбрать количество n подынтервалов для первого применения алгоритма. Затем следует удвоить n для каждого последующего применения метода. Визуальное сравнение последовательных результатов часто может обеспечить “интуитивное чувство уверенности” в точности полученных результатов. В следующих двух примерах мы представляем графически результаты последовательных применений метода Эйлера.

Пример 3 Точное решение логистического уравнения в задаче Коши (задаче с начальными условиями)

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{3}y(8-y), \quad y(0) = 1$$

представляет собой функцию $y(x) = 8/(1+7e^{-8x/3})$. На рис. 2.4.9 показаны точная интегральная кривая и приближенные интегральные кривые, полученные применением метода Эйлера на интервале $0 \leqq x \leqq 5$ при разбиении его на $n = 5, n = 10$ и $n = 20$ подынтервалов. Каждая из этих "кривых" фактически состоит из отрезков, соединяющих последовательные точки (x_n, y_n) и (x_{n+1}, y_{n+1}). Аппроксимация Эйлера с 5 подынтервалами плоха, а аппроксимация с 10 подынтервалами также весьма неточна, поскольку перескакивает за предельное значение $y = 8$ для решения перед выравниванием, но вот при 20 подынтервалах мы получаем довольно хорошее качественное совпадение с фактическим поведением решения. ■

Пример 4 Точное решение задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$\frac{dy}{dx} = y\cos x, \quad y(0) = 1$$

представляет собой периодическую функцию $y(x) = e^{\sin x}$. На рис. 2.4.10 показаны точная интегральная кривая и приблизительные интегральные кривые, полученные применением метода Эйлера на интервале $0 \leqq x \leqq 6\pi$ для $n = 50, n = 100, n = 200$ и $n = 400$ подынтервалов. Даже при таком большом количестве подынтервалов метод Эйлера испытывает значительные трудности в попытках не отстать от колебаний в фактическом решении. Следовательно, для серьезных числовых исследований необходимы более точные методы, рассматриваемые в последующих разделах. ■

Предостережение

Данные, приведенные на рис. 2.4.8, показывают, что методом Эйлера можно найти хорошее приближение решения задачи Коши $dy/dx = x + y$, $y(0) = 1$ на интервале $[0, 1]$. Иными словами, для каждого фиксированного x оказывается, что приближенные значения приближаются к фактическому значению $y(x)$ при уменьшении величины шага h. Например, приближенные значения в строках, соответствующих $x = 0{,}3$ и $x = 0{,}5$, равны $y(0{,}3) \approx 1{,}40$ и $y(0{,}5) \approx 1{,}80$, т. е. весьма близки к фактическим значениями, приведенным в заключительном столбце таблицы.

Пример 5, напротив, показывает, что некоторые задачи Коши (задачи с начальными условиями) ведут себя совсем не так хорошо.

Пример 5 Используем метод Эйлера, чтобы найти приближенное решение задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2, \quad y(0) = 1 \tag{7}$$

на интервале $[0, 1]$.

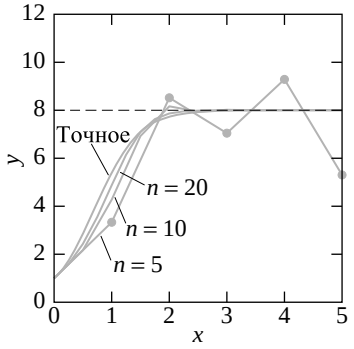


Рис. 2.4.9. Приближение решения логистического уравнения с помощью метода Эйлера для $n = 5$, $n = 10$ и $n = 20$ подынтервалов

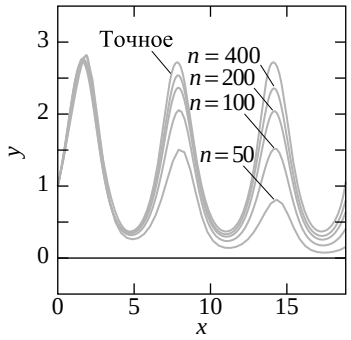


Рис. 2.4.10. Приближение точного решения $y = e^{\sin x}$ с помощью метода Эйлера для 50, 100, 200 и 400 подынтервалов

Решение Здесь $f(x, y) = x^2 + y^2$, так что итеративная формула метода Эйлера принимает вид

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot (x_n^2 + y_n^2). \tag{8}$$

При величине шага $h = 0{,}1$ мы получаем

$$y_1 = 1 + (0{,}1) \cdot [(0)^2 + (1)^2] = 1{,}1,$$
$$y_2 = 1{,}1 + (0{,}1) \cdot [(0{,}1)^2 + (1{,}1)^2] = 1{,}222,$$
$$y_3 = 1{,}222 + (0{,}1) \cdot [(0{,}2)^2 + (1{,}222)^2] \approx 1{,}3753,$$

и т. д. Округляя к четырем десятичным знакам первые десять значений, полученных по этому способу, получаем

$$y_1 = 1{,}1000 \qquad y_6 = 2{,}1995$$
$$y_2 = 1{,}2220 \qquad y_7 = 2{,}7193$$
$$y_3 = 1{,}3753 \qquad y_8 = 3{,}5078$$
$$y_4 = 1{,}5735 \qquad y_9 = 4{,}8023$$
$$y_5 = 1{,}8371 \qquad y_{10} = 7{,}1895$$

Но, вместо того чтобы наивно принимать эти результаты как достаточно точные аппроксимации, мы решили использовать компьютер, чтобы повторить вычисления с меньшими значениями h. В таблице на рис. 2.4.11 приведены результаты, полученные для величины шага $h = 0{,}1$, $h = 0{,}02$ и $h = 0{,}005$. Заметьте, что теперь "устойчивость" метода, отмеченная в примере 1, отсутствует. Действительно, кажется очевидным, что кое-что идет не так, как надо, в окрестности точки $x = 1$.

На рис. 2.4.12 это затруднение продемонстрировано графически. Здесь показано поле направлений уравнения $dy/dx = x^2 + y^2$ вместе с интегральной кривой, проходящей через точку $(0, 1)$. (График был нарисован с использованием одного из более точных методов аппроксимации,

x	y при $h = 0{,}1$	y при $h = 0{,}02$	y при $h = 0{,}005$
0,1	1,1000	1,1088	1,1108
0,2	1,2220	1,2458	1,2512
0,3	1,3753	1,4243	1,4357
0,4	1,5735	1,6658	1,6882
0,5	1,8371	2,0074	2,0512
0,6	2,1995	2,5201	2,6104
0,7	2,7193	3,3612	3,5706
0,8	3,5078	4,9601	5,5763
0,9	4,8023	9,0000	12,2061
1,0	7,1895	30,9167	1502,2090

Рис. 2.4.11. Попытка найти приближенное решение задачи Коши $dy/dx = x^2 + y^2, y(0) = 1$

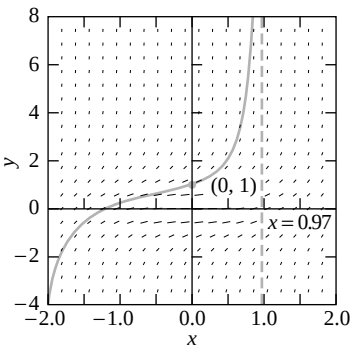


Рис. 2.4.12. Решение задачи $dy/dx = x^2 + y^2, y(0) = 1$

рассмотренных в следующих двух разделах.) Оказывается, что эта интегральная кривая имеет вертикальную асимптоту в окрестности точки $x = 0{,}97$. Действительно, используя точное решение, в которое входят функции Бесселя (подробнее — в задаче 16 в разделе 8.6), можно показать, что $y(x) \to +\infty$ при $x \to 0{,}969811$ (приблизительно). Хотя метод Эйлера дает значения (поддельные) в точке $x = 1$, фактически решение не существует на всем интервале $[0, 1]$. Кроме того, метод Эйлера не позволяет эффективно учитывать быстрые изменения функции $y(x)$, которые происходят, когда x приближается к точке, в которой функция терпит бесконечный разрыв (при значении аргумента, близком к $0{,}969811$). ■

Мораль примера 5 состоит в том, что при численном решении некоторых задач Коши (задач с начальными условиями) можно угодить в ловушки. Конечно, бессмысленно пытаться найти приближенное решение на интервале, если оно там не существует (или если оно не единственно, ведь тогда нет никакого общего способа предсказать, по какому пути пойдут числовые аппроксимации в окрестностях точки, где отсутствует единственность). Нельзя считать точными результаты, полученные методом Эйлера для единственной фиксированной величины шага h. Повторное выполнение с меньшей величиной шага ($h/2$, скажем, или $h/5$, или $h/10$) может дать похожие результаты, таким образом подтверждая их точность, или, как в примере 5, может показать некоторую скрытую трудность в задаче. Для решения многих задач просто требуются более точные и мощные методы, которые обсуждаются в последних двух разделах этой главы.

2.4. Задачи

В задачах 1–10 поставлена задача Коши (задача с начальными условиями) и приведено ее точное решение $y(x)$. Дважды применяя метод Эйлера, найдите приближение к этому решению на интервале $[0, \frac{1}{2}]$, — сначала с величиной шага $h = 0{,}25$, а затем с величиной шага $h = 0{,}1$. Сравните

значения с тремя десятичными знаками этих двух аппроксимаций в точке $x = \frac{1}{2}$ с фактическим значением $y(\frac{1}{2})$ точного решения.

1. $y' = -y$, $y(0) = 2$; $y(x) = 2e^{-x}$

2. $y' = 2y$, $y(0) = \frac{1}{2}$; $y(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$

3. $y' = y + 1$, $y(0) = 1$; $y(x) = 2e^{x} - 1$

4. $y' = x - y$, $y(0) = 1$; $y(x) = 2e^{-x} + x - 1$

5. $y' = y - x - 1$, $y(0) = 1$; $y(x) = 2 + x - e^{x}$

6. $y' = -2xy$, $y(0) = 2$; $y(x) = 2e^{-x^2}$

7. $y' = -3x^2y$, $y(0) = 3$; $y(x) = 3e^{-x^3}$

8. $y' = e^{-y}$, $y(0) = 0$; $y(x) = \ln(x + 1)$

9. $y' = \frac{1}{4}(1 + y^2)$, $y(0) = 1$; $y(x) = \operatorname{tg} \frac{1}{4}(x + \pi)$

10. $y' = 2xy^2$, $y(0) = 1$; $y(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$

Обратите внимание. *В приложении после этого набора задач приведены иллюстративные программы для калькулятора или компьютера, которые могут использоваться при решении остальных задач.*

Программируемый калькулятор или компьютер будут полезны при решении задач 11–16. В каждой задаче найдите точное решение данной задачи Коши (задачи с начальными условиями). Затем дважды примените метод Эйлера, чтобы найти приближение (с четырьмя десятичными знаками) к этому решению на данном интервале, — сначала при величине шага $h = 0{,}01$, а затем при величине шага $h = 0{,}005$. Сделайте таблицу, в которой приведите приближенные значения и фактическое значение, а также ошибку в процентах для более точной аппроксимации. Значения x в таблице возьмите кратными $0{,}2$. Штрихи всюду обозначают производные по x.

11. $y' = y - 2$, $y(0) = 1; 0 \leqq x \leqq 1$

12. $y' = \frac{1}{2}(y - 1)^2$, $y(0) = 2; 0 \leqq x \leqq 1$

13. $yy' = 2x^3$, $y(1) = 3; 1 \leqq x \leqq 2$

14. $xy' = y^2$, $y(1) = 1; 1 \leqq x \leqq 2$

15. $xy' = 3x - 2y$, $y(2) = 3; 2 \leqq x \leqq 3$

16. $y^2y' = 2x^5$, $y(2) = 3; 2 \leqq x \leqq 3$

Для решения задач 17–24 требуется компьютер с принтером. В этих задачах для решения задачи Коши (задачи с начальными условиями) используйте метод Эйлера с величиной шага $h = 0{,}1$, $0{,}02$, $0{,}004$ и $0{,}0008$, чтобы приблизить с точностью четырех десятичных знаков значения решения в десяти точках, разбивающих данный интервал на равные подынтервалы. Напечатайте результаты в табличной форме с соответствующими заголовками, чтобы легко наблюдать эффект изменения величины шага h. Штрихи всюду обозначают производные по x.

17. $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0; 0 \leqq x \leqq 1$

18. $y' = x^2 - y^2$, $y(0) = 1; 0 \leqq x \leqq 2$

19. $y' = x + \sqrt{y}$, $y(0) = 1; 0 \leqq x \leqq 2$

20. $y' = x + \sqrt[3]{y}$, $y(0) = -1; 0 \leqq x \leqq 2$

21. $y' = \ln y$, $y(1) = 2; 1 \leqq x \leqq 2$

22. $y' = x^{2/3} + y^{2/3}$, $y(0) = 1; 0 \leqq x \leqq 2$

23. $y' = \sin x + \cos y$, $y(0) = 0; 0 \leqq x \leqq 1$

24. $y' = \dfrac{x}{1 + y^2}$, $y(-1) = 1; -1 \leqq x \leqq 1$

25. Вы прыгаете из вертолета (как в примере 2) и немедленно дергаете вытяжной трос вашего парашюта. Теперь $k = 1{,}6$ в уравнении (5), так что ваша убывающая скорость является решением задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$\frac{dv}{dt} = 32 - 1{,}6v, \quad v(0) = 0$$

(причем t измеряется в секундах и v в футах в секунду). Используйте программируемый калькулятор или компьютер, чтобы методом Эйлера найти приближенное решение для $0 \leqq t \leqq 2$,

сначала с величиной шага $h = 0{,}01$, а затем с $h = 0{,}005$, округляя приближенные значения v к одному десятичному знаку. Какой процент от предельной скорости 20 футов в секунду будет достигнут через 1 секунду? А через 2 секунды?

26. Предположим, что численность $P(t)$ популяции оленей в маленьком лесу первоначально равна 25 и удовлетворяет логистическому уравнению

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}0225P - 0{,}0003P^2$$

(t в месяцах). Используйте программируемый калькулятор или компьютер, чтобы методом Эйлера найти приближенное решение на интервале длительностью 10 лет, сначала с величиной шага $h = 1$, а затем с $h = 0{,}5$, округляя приближенные значения P к целому числу оленей. Какой процент от предельной численности популяции (75 оленей) будет достигнут через 5 лет? А через 10 лет?

Используйте метод Эйлера с компьютерной системой, чтобы найти искомые значения решения в задачах 27 и 28. Начните с величины шага $h = 0{,}1$, а затем последовательно используйте меньшие величины шага, пока последовательность приближенных значений для решения в точке $x = 2$ не стабилизируется после округления к 2 десятичным знакам.

27. $y' = x^2 + y^2 - 1$, $y(0) = 0$; $y(2) = ?$ **28.** $y' = x + \frac{1}{2}y^2$, $y(-2) = 0$; $y(2) = ?$

29. Рассмотрим задачу Коши (задачу с начальными условиями)

$$7x\frac{dy}{dx} + y = 0, \quad y(-1) = 1.$$

(a) Решите эту задачу и найдите точное решение

$$y(x) = -\frac{1}{x^{1/7}},$$

которое терпит бесконечный разрыв в точке $x = 0$. **(b)** Применяя метод Эйлера при величине шага $h = 0{,}15$, найдите приближение к этому решению на интервале $-1 \leqq x \leqq 0{,}5$. Обратите внимание, что, глядя на эти данные, вы не могли подозревать ни о какой трудности в окрестности $x = 0$. Причина состоит в том, что числовая аппроксимация перескакивает через точку разрыва к другому решению $7xy' + y = 0$ для $x > 0$. **(c)** Наконец, примените метод Эйлера при величине шага $h = 0{,}03$ и $h = 0{,}006$, но печатайте результаты только в точках $x = -1{,}00$, $-0{,}85$, $-0{,}70$, …, $1{,}20$, $1{,}35$. и $1{,}50$. Вы теперь можете заподозрить, что функция, определяемая той же формулой, что и точное решение, терпит разрыв?

30. Примените метод Эйлера с последовательно уменьшающимися величинами шага на интервале $[0, 2]$, чтобы опытным путем проверить, что решение задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2, \quad y(0) = 0$$

имеет вертикальную асимптоту в окрестности $x = 2{,}003147$. (Сопоставьте это с примером 2, в котором $y(0) = 1$.)

31. Общее решение уравнения

$$\frac{dy}{dx} = (1 + y^2)\cos x$$

дает функция $y(x) = \operatorname{tg}(C + \sin x)$. Для начального условия $y(0) = 0$ решение $y(x) = \operatorname{tg}(\sin x)$ ведет себя хорошо. Но для $y(0) = 1$ это решение $y(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\pi + \sin x\right)$ имеет вертикальную асимптоту в точке $x = \arcsin(\pi/4) \approx 0{,}90334$. Используйте метод Эйлера, чтобы проверить этот факт опытным путем.

2.4. Приложение. Реализация метода Эйлера

Построение программы для калькулятора или компьютера, реализующей числовой алгоритм, помогает глубже понять алгоритм. На рис. 2.4.13 представлены программы на входном языке калькулятора TI-85 и на языке BASIC, позволяющие методом Эйлера найти приближенное решение задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$\frac{dy}{dx} = x + y, \quad y(0) = 1,$$

рассмотренной в этом разделе. Комментарии в заключительном столбце должны сделать эти программы понятными, даже если вы совсем мало знакомы с языком программирования BASIC и калькулятором TI.

TI-85	BASIC	Комментарии
PROGRAM:EULER	Program EULER	Заголовок программы
:10→N	N = 10	Количество шагов
:0→X	X = 0	Начальное значение x
:1→Y	Y = 1	Начальное значение y
:1→X1	X1 = 1	Конечное значение x
:(X1-X)/N→H	H = (X1-X)/N	Величина шага
:For(I,1,N)	FOR I=1 TO N	Начало цикла
:X+Y→F	F = X + Y	Значение функции
:Y+H*F→Y	Y = Y + H*F	Итерация Эйлера
:X+H→X	X = X + H	Новое значение x
:Disp X,Y	PRINT X,Y	Отобразить результаты
:End	NEXT I	Конец цикла

Рис. 2.4.13. Программы, реализующие метод Эйлера на языках TI-85 и BASIC

Чтобы увеличить количество шагов (и таким образом уменьшить величину шага), нужно только изменить значение `N`, указанное в первой строке программы. Чтобы применить метод Эйлера к другому уравнению вида $dy/dx = f(x, y)$, нужно только изменить единственную строку, в которой вычисляется значение функции `F`.

На любом другом процедурном языке программирования (таком как ФОРТРАН или Pascal), следуя образцам, показанным на рис. 2.4.13 для входного языка калькулятора TI-85 и языка программирования BASIC, можно запрограммировать метод Эйлера. Некоторые современные языки функционального программирования даже содержат операторы, более близкие к стандартной системе математических обозначений. На рис. 2.4.14 показана реализация метода Эйлера на входном языке системы MATLAB. Функция `euler` в качестве входных параметров принимает начальное значение `x`, начальное значение `y`, конечное (последнее) значение `x1` переменной x и желаемое количество `n` подынтервалов. Например, команда MATLAB

```
[X, Y] = euler(0, 1, 1, 10)
```

вычисляет значения x_n и y_n, приведенные в первых двух столбцах таблицы на рис. 2.4.8.

Вы должны реализовать метод Эйлера на вашем собственном калькуляторе или компьютере. Сначала проверьте вашу программу, применив ее к задаче Коши (задаче с начальными условиями) из примера 1, а затем к некоторым другим задачам из этого раздела.

Исследование знаменитых чисел

Следующие задачи описывают числа $e \approx 2{,}71828$, $\ln 2 \approx 0{,}69315$ и $\pi \approx 3{,}14159$, как конкретные значения решений некоторых задач Коши (задач с начальными условиями). В каждом случае примените метод Эйлера для $n = 50, 100, 200, \ldots$ подынтервалов (удваивая n каждый раз). Сколько подынтервалов необходимо для получения (дважды подряд) правильного значения вычисляемого числа, округленного к трем десятичным знакам?

1. Число $e = y(1)$, где $y(x)$ — решение задачи Коши (задачи с начальными условиями) $dy/dx = y$, $y(0) = 1$.
2. Число $\ln 2 = y(2)$, где $y(x)$ — решение задачи Коши (задачи с начальными условиями) $dy/dx = 1/x$, $y(1) = 0$.
3. Число $\pi = y(1)$, где $y(x)$ — решение задачи Коши (задачи с начальными условиями) $dy/dx = 4/(1 + x^2)$, $y(0) = 0$.

В каждой задаче также объясните, почему именно данное знаменитое число является значением решения соответствующей задачи Коши.

2.5. Более подробный анализ метода Эйлера

Метод Эйлера в том виде, в каком он представлен в разделе 2.4, нечасто используется на практике, главным образом потому, что есть более точные методы. Но метод Эйлера имеет преимущество, так как проще других методов, а тщательное изучение этого метода приводит

```
function yp = f(x,y)
yp = x + y;                 % yp = y'

function [X,Y] = euler(x,y,x1,n)
h = (x1 - x)/n;             % величина шага
X = x;                      % начальное значение x
Y = y;                      % начальное значение y
for i = 1:n                 % начало цикла
    y = y + h*f(x,y);       % итерация Эйлера
    x = x + h;              % новое значение x
    X = [X;x];              % обновить столбец x
    Y = [Y;y];              % обновить столбец y
    end                     % конец цикла
```

Рис. 2.4.14. Реализация метода Эйлера с помощью пакета MATLAB

к пониманию работы более точных методов, потому что многие из них представляют собой усовершенствования или уточнения метода Эйлера.

Чтобы сравнить два различных метода числовой аппроксимации, необходим способ измерения точности каждого метода. Теорема 1 указывает степень точности метода Эйлера.

Теорема 1 Ошибка метода Эйлера

Предположим, что задача Коши (задача с начальными условиями)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

имеет единственное решение $y(x)$ на замкнутом интервале $[a, b]$, причем $a = x_0$ и $y(x)$ имеет непрерывную вторую производную на $[a, b]$. (Это действительно так, если функции f, f_x и f_y непрерывны в прямоугольнике $a \leqq x \leqq b$ и $c \leqq y \leqq d$, где $c \leqq y(x) \leqq d$ для всех x из $[a, b]$.) Тогда существует константа C такая, что истинно следующее утверждение. Если аппроксимации y_1, y_2, y_3, ..., y_k к фактическим значениям $y(x_1)$, $y(x_2)$, $y(x_3)$, ..., $y(x_k)$ в точках интервала $[a, b]$ вычислены методом Эйлера с величиной шага $h > 0$, то

$$|y_n - y(x_n)| \leqq Ch \tag{2}$$

для каждого $n = 1, 2, 3, \ldots, k$. ▲

Замечание. Ошибка

$$y_{\text{факт}} - y_{\text{прибл}} = y(x_n) - y_n$$

в (2) обозначает [совокупную] ошибку (погрешность) метода Эйлера после n шагов аппроксимации, но *не учитывает* ошибок округления (т. е. учитывает только те ошибки, которые мы сделали бы и в том случае, если использовали бы точную машину, которая не делала бы ошибок округления). Утверждение теоремы можно кратко сформулировать так: *ошибка метода Эйлера имеет порядок* h; иными словами, ошибка ограничена [предопределенной] константой C, умноженной на величину шага h. Отсюда следует, например, что (на данном замкнутом интервале) в результате деления на два величины шага максимальная ошибка также уменьшится вдвое; точно так же, выбирая величину шага $h/10$, мы повышаем точность в 10 раз (т. е. новая максимальная ошибка составит $1/10$ часть максимальной ошибки при прежней величине шага h). Следовательно, в принципе мы можем достичь любой желаемой точности, выбирая h достаточно малым. ■

Мы опустим доказательство этой теоремы. Его можно найти в главе 7 книги Г. Биркгофа и Г. Рота, посвященной обыкновенным дифференциальным уравнениям, 4-е издание которой вышло в 1989 году (G. Birkhoff and G.-C. Rota, *Ordinary Differential Equations*, 4th ed. (New York: John Wiley, 1989)). Константа C заслуживает некоторого комментария. Поскольку C имеет тенденцию увеличиваться так же, как увеличивается максимальное значение $|y''(x)|$ на $[a, b]$, зависимость C от y довольно сложная, и на практике вычислить значение C, при котором выполняется неравенство (2), обычно не удается. На практике обычно используется следующая процедура.

1. Применить метод Эйлера к задаче Коши (задаче с начальными условиями) (1) с разумным значением h.

2. Повторить вычисления для $h/2$, $h/4$ и т.д, т. е. при каждом повторении метода Эйлера делить на два величину шага.
3. Продолжить таким образом до тех пор, пока результаты, полученные при очередном повторении, не совпадут с полученными на предыдущей итерации с точностью до заданного количества значащих разрядов. В этом случае полагают, что приближенные значения, полученные на данной итерации, вероятно, точны до указанного количества значащих разрядов.

Пример 1 Применяя эту процедуру к задаче Коши (задаче с начальными условиями)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy}{1+x^2}, \quad y(0) = 1, \tag{3}$$

найдем приближение к точному значению $y(1)$ решения в точке $x = 1$.

Решение Используя программу для метода Эйлера, возможно, одну из приведенных на рис. 2.4.7 и 2.4.8, мы начинаем с величины шага $h = 0{,}04$, так что требуется $n = 25$ шагов, чтобы достичь точки $x = 1$. В таблице на рис. 2.5.1 приведены приближенные значения $y(1)$, полученные для меньших значений h. Полученные данные подсказывают, что истинное значение $y(1)$ в точности равно $0{,}5$. Действительно, точное решение задачи Коши (задачи с начальными условиями) (3) представляет собой функцию $y(x) = 1/(1+x^2)$, так что истинное значение $y(1)$ действительно в точности равно $\frac{1}{2}$. ■

h	Приближение $y(1)$	Точное значение $y(1)$	$\lvert$Ошибка$\rvert/h$
0,04	0,50451	0,50000	0,11
0,02	0,50220	0,50000	0,11
0,01	0,50109	0,50000	0,11
0,005	0,50054	0,50000	0,11
0,0025	0,50027	0,50000	0,11
0,00125	0,50013	0,50000	0,10
0,000625	0,50007	0,50000	0,11
0,0003125	0,50003	0,50000	0,10

Рис. 2.5.1. Таблица значений в примере 1

В заключительном столбце таблицы на рис. 2.5.1 приведено отношение величины ошибки к h, т. е. $|y_{\text{факт}} - y_{\text{прибл}}|/h$. Понаблюдайте, как данные в этом столбце подтверждают теорему 1 — в данном случае оценка ошибки, даваемая равенством (2), кажется, выполняется при значении C, немного большем, чем $0{,}1$.

Уточнение метода Эйлера

Как показано на рис. 2.5.2, метод Эйлера довольно асимметричен. Он использует предсказанный наклон $k = f(x_n, y_n)$ графика решения в левой конечной точке интервала $[x_n, x_n+h]$ так, как будто это фактический наклон решения во всем интервале. Мы теперь обращаем наше внимание на несложный способ увеличения точности; этот способ называется *усовершенствованным методом Эйлера*, или уточнением метода Эйлера.

Решая задачу Коши (задачу с начальными условиями)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{4}$$

обычно предполагают, что после выполнения n шагов с величиной шага h мы вычислили аппроксимацию y_n к фактическому значению $y(x_n)$ решения в точке $x_n = x_0 + nh$. Мы можем использовать метод Эйлера, чтобы получить первое приближение, которое мы теперь обозначаем через u_{n+1} (а не через y_{n+1}), к значению решения в точке $x_{n+1} = x_n + h$. Таким образом,

➤ $$u_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n) = y_n + h \cdot k_1.$$

Теперь, когда вычислено $u_{n+1} \approx y(x_{n+1})$, мы можем взять

➤ $$k_2 = f(x_{n+1}, u_{n+1})$$

в качестве второго значения наклона интегральной кривой $y = y(x)$ в точке $x = x_{n+1}$.

Конечно, приближенное значение наклона $k_1 = f(x_n, y_n)$ в точке $x = x_n$ было уже вычислено. Почему бы не взять *среднее* этих двух значений наклона, чтобы получить более точную оценку среднего значения наклона интегральной кривой во всем подынтервале

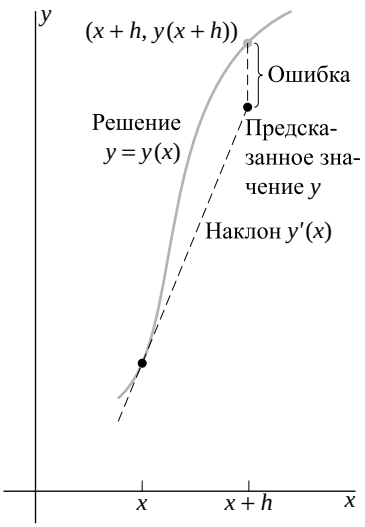


Рис. 2.5.2. Истинные и предсказанные значения в методе Эйлера

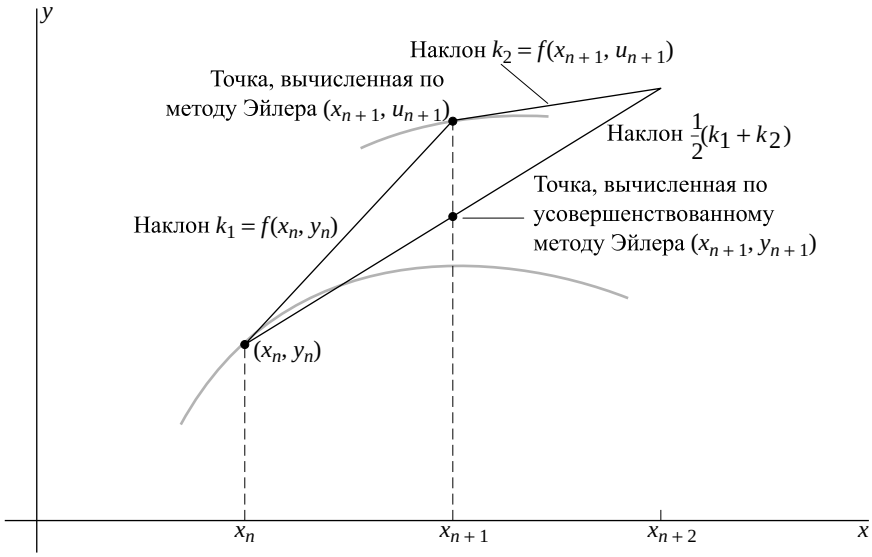


Рис. 2.5.3. Усовершенствованный метод Эйлера: среднее значений наклона касательных в точках (x_n, y_n) и (x_{n+1}, u_{n+1})

$[x_n, x_{n+1}]$? Эта идея и лежит в основе *усовершенствованного* метода Эйлера. На рис. 2.5.3 этот метод проиллюстрирован геометрически.

АЛГОРИТМ Усовершенствованный метод Эйлера

Решая задачу Коши (задачу с начальными условиями)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

усовершенствованным методом Эйлера при заданной величине шага h, применяем итеративные формулы

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n), \\ u_{n+1} &= y_n + h \cdot k_1, \\ k_2 &= f(x_{n+1}, u_{n+1}), \\ y_{n+1} &= y_n + h \cdot \tfrac{1}{2}(k_1 + k_2) \end{aligned} \tag{5}$$

для вычисления последовательности приближений y_1, y_2, y_3, ... к [истинным] значениям $y(x_1), y(x_2), y(x_3), \ldots$ [точного] решения $y = y(x)$ в точках $x_1, x_2, x_3, \ldots$ соответственно. ▲

Замечание. Последняя формула в (5) будет выглядеть так:

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot k,$$

т. е. будет иметь тот же вид, что и формула в (обычном) методе Эйлера, если взять

$$k = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

в качестве приблизительного значения *среднего наклона* на интервале $[x_n, x_{n+1}]$. ■

Усовершенствованный метод Эйлера относится к классу числовых методов, называемых **методами предиктор–корректор**[2]. Сначала вычисляется предсказание (прогноз) u_{n+1} следующего значения y; затем оно используется для того, чтобы поправить его же. Таким образом, **усовершенствованный метод Эйлера** при заданной величине шага h состоит в итеративном использовании **предсказания**

➤
$$u_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n) \tag{6}$$

и **поправки**

➤
$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \tfrac{1}{2} \left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, u_{n+1}) \right] \tag{7}$$

для вычисления последовательности приближений $y_1, y_2, y_2, \ldots$ к значениям $y(x_1), y(x_2), y(x_3), \ldots$ фактического решения задачи Коши (задачи с начальными условиями) (4).

Замечание. Каждый шаг усовершенствованного метода Эйлера требует вычисления двух значений функции $f(x, y)$, а не одного значения функции, как требуется для шага обыкновенного метода Эйлера. Естественно задать вопрос: оправдывает ли себя эта удвоенная вычислительная работа?

Ответ. Если точное решение $y = y(x)$ задачи Коши (задачи с начальными условиями) (4) имеет непрерывную третью производную, то ошибка в усовершенствованном методе Эйлера имеет порядок h^2. Доказательство этого утверждения имеется в главе 7 монографии Г. Биркгофа и Г. Рота, посвященной дифференциальным уравнениям. Это означает, что на данном ограниченном интервале $[a, b]$ каждое приближенное значение y_n удовлетворяет неравенству

➤
$$|y(x_n) - y_n| \leqq Ch^2, \tag{8}$$

где константа C не зависит от h. Поскольку h^2 намного меньше, чем h, если само h мало, это означает, что усовершенствованный метод Эйлера более точен, чем (простой) метод Эйлера. Это преимущество несколько омрачается тем, что требуется вдвое больше вычислений. Но множитель h^2 в (8) означает, что деля на два величину шага, мы в 4 раза уменьшаем максимальную ошибку, а при величине шага $h/10$ мы повышаем точность в 100 раз, т. е. максимальная ошибка при величине шага составляет $1/100$ максимальной ошибки при величине шага h. ■

[2] Эти методы также называются **предсказывающе-исправляющими методами**, **методами прогноза и коррекции** и **методами предсказаний и поправок**. В таких методах обычно пользуются каким-нибудь методом с начальным условием, вычисленным по любой экстраполяционной формуле. Метод экстраполяции, т. е. метод получения предсказания (прогноза), при этом называют **предиктором**. Получив предсказание (прогноз), с помощью другого (возможно, неявного) метода, уточняют (корректируют, поправляют) этот прогноз. Второй медод, используемый для уточнения предсказания, т. е. метод коррекции (поправки) как раз и называется **корректором**. — *Примеч. ред.*

Пример 2 На рис. 2.4.8 показан результат применения метода Эйлера к задаче Коши (задаче с начальными условиями)

$$\frac{dy}{dx} = x + y, \quad y(0) = 1, \tag{9}$$

имеющей точное решение $y(x) = 2e^x - x - 1$. При $f(x, y) = x + y$ в равенствах (6) и (7) формулы предсказания и поправки для усовершенствованного метода Эйлера имеют вид

$$u_{n+1} = y_n + h \cdot (x_n + y_n),$$
$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \tfrac{1}{2}\left[(x_n + y_n) + (x_{n+1} + u_{n+1})\right].$$

Используя величину шага $h = 0{,}1$, мы вычисляем

$$u_1 = 1 + (0{,}1) \cdot (0 + 1) = 1{,}1,$$
$$y_1 = 1 + (0{,}05) \cdot [(0 + 1) + (0{,}1 + 1{,}1)] = 1{,}11,$$
$$u_2 = 1{,}11 + (0{,}1) \cdot (0{,}1 + 1{,}11) = 1{,}231,$$
$$y_2 = 1{,}11 + (0{,}05) \cdot [(0{,}1 + 1{,}11) + (0{,}2 + 1{,}231)] = 1{,}24205,$$

и т. д. В таблице на рис. 2.5.4 результаты, полученные с помощью усовершенствованного метода Эйлера, сравниваются с результатами, полученными ранее с помощью "неусовершенствованного" метода Эйлера. Когда используется та же самая величина шага $h = 0{,}1$, ошибка в аппроксимации $y(1)$ по Эйлеру составляет $7{,}25\%$, а ошибка в усовершенствованном методе составляет только $0{,}24\%$.

Действительно, усовершенствованный метод Эйлера при $h = 0{,}1$ более точен (в этом примере), чем первоначальный метод Эйлера при

	Метод Эйлера, $h = 0{,}1$ значения y	**Метод Эйлера, $h = 0{,}005$ значения y**	**Усовершенствованный метод Эйлера, $h = 0{,}1$ значения y**	**Точное значение y**
0,1	1,1000	1,1098	1,1100	1,1103
0,2	1,2200	1,2416	1,2421	1,2428
0,3	1,3620	1,3977	1,3985	1,3997
0,4	1,5282	1,5807	1,5818	1,5836
0,5	1,7210	1,7933	1,7949	1,7974
0,6	1,9431	2,0388	2,0409	2,0442
0,7	2,1974	2,3205	2,3231	2,3275
0,8	2,4872	2,6422	2,6456	2,6511
0,9	2,8159	3,0082	3,0124	3,0192
1,0	3,1875	3,4230	3,4282	3,4366

Рис. 2.5.4. Аппроксимации решения задачи $dy/dx = x + y, y(0) = 1$ по методу Эйлера и усовершенствованному методу Эйлера

$h = 0{,}005$. Последний требует 200 вычислений функции $f(x, y)$, а усовершенствованный — только 20 таких вычислений, так что в данном случае усовершенствованный метод Эйлера приводит к большей точности, хотя объем вычислений составляет приблизительно только одну десятую часть.

	Усовершенствованный метод Эйлера, прибл.	**Точное значение**
x	y	y
0,0	1,00000	1,00000
0,1	1,11034	1,11034
0,2	1,24280	1,24281
0,3	1,39971	1,39972
0,4	1,58364	1,58365
0,5	1,79744	1,79744
0,6	2,04423	2,04424
0,7	2,32749	2,32751
0,8	2,65107	2,65108
0,9	3,01919	3,01921
1,0	3,43654	3,43656

Рис. 2.5.5. Аппроксимация решения уравнения (9) при величине шага $h = 0{,}005$ с помощью усовершенствованного метода Эйлера

На рис. 2.5.5 показаны полученные результаты для того случая, когда усовершенствованный метод Эйлера применен к задаче Коши (задаче с начальными условиями) (9) при величине шага $h = 0{,}005$. Точность пяти значащих цифр очевидна из таблицы. Это показывает, что, в отличие от первоначального метода Эйлера, усовершенствованный метод Эйлера достаточно точен для некоторых практических приложений, таких как построение интегральных кривых. ■

Программа для усовершенствованного метода Эйлера (подобная приведенным в материале для проектов из этого раздела) использовалась для вычисления аппроксимации к точному значению $y(1) = 0{,}5$ решения $y(x) = 1/(1 + x^2)$ задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy}{1 + x^2}, \quad y(0) = 1 \tag{3}$$

из примера 1. Результаты, полученные последовательным делением величины шага на два, приведены в таблице на рис. 2.5.6. Обратите внимание, что заключительный столбец этой таблицы выразительно подтверждает оценку ошибки (8): каждое деление величины шага на два уменьшает ошибку почти точно в 4 раза, как и должно случиться, если ошибка пропорциональна h^2.

	Приближение по усовершенствованному методу Эйлера к $y(1)$	Ошибка	$\lvert$Ошибка$\rvert\ /h^2$
0,04	0,500195903	−0,000195903	0,12
0,02	0,500049494	−0,000049494	0,12
0,01	0,500012437	−0,000012437	0,12
0,005	0,500003117	−0,000003117	0,12
0,0025	0,500000780	−0,000000780	0,12
0,00125	0,500000195	−0,000000195	0,12
0,000625	0,500000049	−0,000000049	0,12
0,0003125	0,500000012	−0,000000012	0,12

Рис. 2.5.6. Аппроксимация $y(1)$ по усовершенствованному методу Эйлера для задачи $dy/dx = -2xy/(1+x^2)$, $y(0) = 1$

В следующих двух примерах приводятся графические результаты, полученные с помощью стратегии последовательного деления величины шага на два, и таким образом, удвоения числа подынтервалов того фиксированного интервала, на котором ищется приближение к решению.

Пример 3

В примере 3 из раздела 2.4 мы применяли метод Эйлера к логистическому уравнению в задаче Коши (задаче с начальными условиями)

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{3}y(8-y), \quad y(0) = 1.$$

На рис. 2.4.9 показана очевидная разница между точным решением $y(x) = 8/(1+7e^{-8x/3})$ и аппроксимацией Эйлера на интервале $0 \leqq x \leqq 5$ для $n = 20$ подынтервалов. На рис. 2.5.7 показаны приблизительные интегральные кривые, причем график начерчен с использованием усовершенствованного метода Эйлера.

Аппроксимация для пяти подынтервалов все еще плоха, — вероятно, она самая худшая! Оказывается, она срезает фактическую граничную численность популяции $M = 8$. Вы должны выполнить по крайней мере первые два шага усовершенствованного метода Эйлера вручную, чтобы лично увидеть, как случается так, что после правильного увеличения на первом шаге приближенное решение *убывает* на втором шаге вместо того, чтобы продолжить возрастать (как оно должно). В проекте для этого раздела мы просим вас показать опытным путем, что приближенное решение, полученное по усовершенствованному методу Эйлера при величине шага $h = 1$ выпрямляется на уровне $y \approx 4{,}3542$.

Напротив, приблизительная интегральная кривая при $n = 20$ подынтервалах ближе приближается к точной интегральной кривой, и при $n = 40$ подынтервалах точная и приблизительная интегральные кривые неразличимы на рис. 2.5.7. Таблица на рис. 2.5.8 указывает, что аппрок-

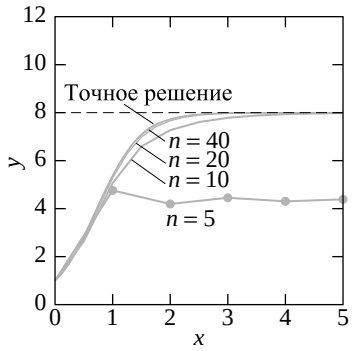


Рис. 2.5.7. Приближение к решению логистического уравнения с помощью усовершенствованного метода Эйлера для $n = 5$, $n = 10$, $n = 20$ и $n = 40$ подынтервалов

x	Точное значение $y(x)$	Усовершенствованный метод Эйлера при $n = 200$
0	1,0000	1,0000
1	5,3822	5,3809
2	7,7385	7,7379
3	7,9813	7,9812
4	7,9987	7,9987
5	7,9999	7,9999

Рис. 2.5.8. Использование усовершенствованного метода Эйлера для нахождения приближения к фактическому решению задачи Коши (задачи с начальными условиями) в примере 3

симация по усовершенствованному методу Эйлера при $n = 200$ подынтервалах точна при округлении к трем десятичным знакам (т. е. точны четыре значащих разряда) на интервале $0 \leqq x \leqq 5$. Поскольку несоответствия в четвертом значащем разряде визуально не видны при разрешении обыкновенного компьютерного монитора, усовершенствованный метод Эйлера (для нескольких сотен подынтервалов) считают вполне подходящим для многих графических целей. ■

Пример 4 В примере 4 из раздела 2.4 мы применяли метод Эйлера к задаче Коши (задаче с начальными условиями)

$$\frac{dy}{dx} = y \cos x, \quad y(0) = 1.$$

На рис. 2.4.10 показаны очевидные визуальные отличия между периодическим точным решением $y(x) = e^{\sin x}$ и аппроксимацией Эйлера на интервале $0 \leqq x \leqq 6\pi$ для $n = 400$ подынтервалов.

На рис. 2.5.9 вычерчены точная интегральная кривая и приблизительные интегральные кривые, полученные с помощью усовершенствованного метода Эйлера для $n = 50$, $n = 100$ и $n = 200$ подынтервалов. Аппроксимация, полученная для $n = 200$, неотличима от точной интегральной кривой, а аппроксимация при $n = 100$ только едва отличима от нее. ■

Хотя рис. 2.5.7 и 2.5.9 показывают, что усовершенствованный метод Эйлера может обеспечить точность, которая вполне удовлетворительна для многих графических целей, он не обеспечивает более высокую точность чисел, которая иногда необходима для более тщательных исследований. Например, снова рассмотрим задачу Коши (задачу с начальными

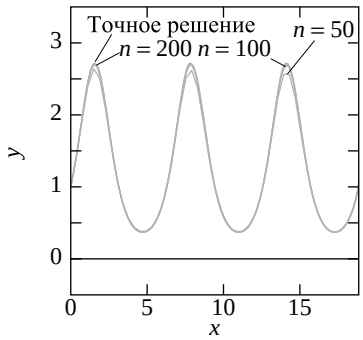


Рис. 2.5.9. Приближение точного решения $y = e^{\sin x}$ с помощью усовершенствованного метода Эйлера при $n = 50, 100$ и 200 подынтервалах

условиями)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy}{1+x^2}, \quad y(0) = 1$$

из примера 1. Заключительный столбец таблицы на рис. 2.5.6 показывает, что если усовершенствованный метод Эйлера используется на интервале $0 \leqq x \leqq 1$ с n подынтервалами при величине шага $h = 1/n$, то окончательная ошибка E в заключительной аппроксимации $y_n \approx y(1)$ дается формулой

$$E = |y(1) - y_n| \approx (0{,}12)h^2 = \frac{0{,}12}{n^2}.$$

Если это так, то для достижения точности в 12 знаках (например) в значении $y(1)$ потребовалось бы выполнения неравенства $(0{,}12)n^{-2} < 5 \times 10^{-13}$, что означает, что $n \geqq 489\,898$. Таким образом, потребовалось бы выполнить примерно полмиллиона шагов длины $h \approx 0{,}000002$. Кроме вероятной непрактичности, такое большое количество шагов (для выполнения которых потребовались бы значительные вычислительные ресурсы), ошибки округления, неизбежные в такой длинной последовательности шагов, могли бы значительно превысить накопленную (суммарную) ошибку, предсказанную в соответствии с теорией (в которой принимается, что вычисления точны в каждом отдельном шаге). Следовательно, для вычислений с такой высокой точностью все же необходимы еще более точные методы, чем усовершенствованный метод Эйлера. Один из таких методов представлен в разделе 2.6.

2.5. Задачи

Карманный калькулятор вполне подойдет для решения задач 1–10, в которых ставится задача Коши (задача с начальными условиями) и дается ее точное решение. Применяя усовершенствованный метод Эйлера, найдите приближение к этому решению на интервале $[0, 0{,}5]$ *при величине шага* $h = 0{,}1$. *Создайте таблицу, в которой приведите значения (с четырьма десятичными знаками) приближенного решения и фактического решения в точках* $x = 0{,}1$, *0,2, 0,3, 0,4, 0,5.*

1. $y' = -y$, $y(0) = 2$; $y(x) = 2e^{-x}$

2. $y' = 2y$, $y(0) = \frac{1}{2}$; $y(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$

3. $y' = y + 1$, $y(0) = 1$; $y(x) = 2e^{x} - 1$

4. $y' = x - y$, $y(0) = 1$; $y(x) = 2e^{-x} + x - 1$

5. $y' = y - x - 1$, $y(0) = 1$; $y(x) = 2 + x - e^x$ **6.** $y' = -2xy$, $y(0) = 2$; $y(x) = 2e^{-x^2}$
7. $y' = -3x^2y$, $y(0) = 3$; $y(x) = 3e^{-x^3}$ **8.** $y' = e^{-y}$, $y(0) = 0$; $y(x) = \ln(x + 1)$
9. $y' = \frac{1}{4}(1 + y^2)$, $y(0) = 1$; $y(x) = \operatorname{tg} \frac{1}{4}(x + \pi)$
10. $y' = 2xy^2$, $y(0) = 1$; $y(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$

Обратите внимание! *В приложении после этого набора задач приведены примеры программ для калькулятора и компьютера, которые могут использоваться в задачах 11–24.*

Программируемый калькулятор или компьютер будут полезны для решения задач 11–16. В каждой задаче найдите точное решение данной задачи Коши (задачи с начальными условиями). Затем, дважды применяя усовершенствованный метод Эйлера, найдите приближение (с пятью десятичными знаками) этого решения на данном интервале, — сначала при величине шага $h = 0{,}01$, а затем возьмите величину шага $h = 0{,}005$. Сделайте таблицу, в которой приведите приближенные значения и фактическое значение, а также ошибку (в процентах) в более точных аппроксимациях, для значений x, кратных $0{,}2$. Штрихи везде обозначают производные по x.

11. $y' = y - 2$, $y(0) = 1$; $0 \leqq x \leqq 1$ **12.** $y' = \frac{1}{2}(y - 1)^2$, $y(0) = 2$; $0 \leqq x \leqq 1$
13. $yy' = 2x^3$, $y(1) = 3$; $1 \leqq x \leqq 2$ **14.** $xy' = y^2$, $y(1) = 1$; $1 \leqq x \leqq 2$
15. $xy' = 3x - 2y$, $y(2) = 3$; $2 \leqq x \leqq 3$ **16.** $y^2y' = 2x^5$, $y(2) = 3$; $2 \leqq x \leqq 3$

Для решения задач 17–24 требуется компьютер с принтером. Для решения этих задач Коши (задач с начальными условиями) используйте усовершенствованный метод Эйлера с величинами шага $h =$ $= 0{,}1$, $0{,}02$, $0{,}004$ и $0{,}0008$, чтобы найти приближения значений решения с пятью десятичными знаками в десяти точках, разбивающих данный интервал на равные подынтервалы. Напечатайте результаты в табличной форме с соответствующими заголовками, чтобы облегчать наблюдение эффекта изменения величины шага h. Штрихи везде обозначают производные по x.

17. $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$; $0 \leqq x \leqq 1$ **18.** $y' = x^2 - y^2$, $y(0) = 1$; $0 \leqq x \leqq 2$
19. $y' = x + \sqrt{y}$, $y(0) = 1$; $0 \leqq x \leqq 2$ **20.** $y' = x + \sqrt[3]{y}$, $y(0) = -1$; $0 \leqq x \leqq 2$
21. $y' = \ln y$, $y(1) = 2$; $1 \leqq x \leqq 2$ **22.** $y' = x^{2/3} + y^{2/3}$, $y(0) = 1$; $0 \leqq x \leqq 2$
23. $y' = \sin x + \cos y$, $y(0) = 0$; $0 \leqq x \leqq 1$ **24.** $y' = \dfrac{x}{1 + y^2}$, $y(-1) = 1$; $-1 \leqq x \leqq 1$

25. Как и в задаче 25 из раздела 2.4, вы прыгаете из вертолета и немедленно открываете ваш парашют, так что ваша убывающая скорость является решением задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$\frac{dv}{dt} = 32 - 1{,}6v, \quad v(0) = 0$$

(причем t измеряется в секундах, а v в футах в секунду). Используйте усовершенствованный метод Эйлера и на программируемом калькуляторе или компьютере найдите приближенное решение для $0 \leqq t \leqq 2$, сначала при величине шага $h = 0{,}01$, а затем при $h = 0{,}005$, округляя приближенные значения v к трем десятичным знакам. Какой процент от предельной скорости 20 футов в секунду был достигнут через 1 секунду? А через 2 секунды?

26. Как и в задаче 26 из раздела 2.4, предположите, что численность популяции оленей $P(t)$ в маленьком лесу первоначально составляет 25 особей и удовлетворяет логистическому уравнению

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}0225P - 0{,}0003P^2$$

(причем t выражено в месяцах). Используйте усовершенствованный метод Эйлера и программируемый калькулятор или компьютер, чтобы найти приближенное решение в течение 10 лет, сначала с величиной шага $h = 1$, а затем с $h = 0{,}5$, округляя приближенные значения P к трем десятичным знакам. Какой процент от граничной численности популяции, равной 75 оленям, был достигнут через 5 лет? А через 10 лет?

Используйте усовершенствованный метод Эйлера и компьютерную систему, чтобы найти искомые значения решения в задачах 27 и 28. Начните с величины шага $h = 0{,}1$, а затем используйте последовательность меньших величин шага, пока последовательные приближенные значения решения в точке $x = 2$ не совпадут при округлении до четырех десятичных знаков.

27. $y' = x^2 + y^2 - 1$, $y(0) = 0$; $y(2) = ?$ **28.** $y' = x + \frac{1}{2}y^2$, $y(-2) = 0$; $y(2) = ?$

29. Пусть стрела выпущена из арбалета, как в примере 2 раздела 2.3, прямо вверх с поверхности земли с начальной скоростью 49 м/с. Из-за линейного сопротивления воздуха, функция, выражающая скорость стрелы $v(t)$, является решением задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$\frac{dv}{dt} = -(0{,}04)v - 9{,}8, \quad v(0) = 49,$$

которая имеет точное решение $v(t) = 294e^{-t/25} - 245$. Используйте калькулятор или компьютерную реализацию усовершенствованного метода Эйлера, чтобы приблизить $v(t)$ для $0 \leqq t \leqq 10$ для $n = 50$ и $n = 100$ подынтервалов. Отобразите результаты с промежутком в 1 секунду. Совпадают ли эти две аппроксимации после округления к двум десятичным знакам и с точным решением? Если точное решение неизвестно, объясните, как можно использовать усовершенствованный метод Эйлера, чтобы найти хорошее приближение для **(a)** времени подъема стрелы к верхней точке ее траектории (данное в разделе 2.3 — 4,56 с) и **(b)** ее прицельной скорости через 9,41 с полета в воздухе.

30. Рассмотрим теперь стрелу, выпущенную из арбалета, как в примере 3 из раздела 2.3. Она выстрелена прямо вверх с поверхности земли с начальной скоростью 49 м/с, но из-за того, что сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости, функция, выражающая скорость $v(t)$, является решением задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$\frac{dv}{dt} = -(0{,}0011)v|v| - 9{,}8, \quad v(0) = 49.$$

Решение в символическом виде было найдено в разделе 2.3; оно требовало отдельного исследования подъема стрелы и ее падения, причем $v(t)$ представляла собой функцию тангенс во время подъема и функцию гиперболический тангенс во время падения. Но усовершенствованный метод Эйлера не требует такого отдельного разбора случаев. Используйте калькулятор или компьютерную реализацию усовершенствованного метода Эйлера, чтобы приблизить $v(t)$ для $0 \leqq t \leqq 10$ при $n = 100$ и при $n = 200$ подынтервалах. Отобразите результаты с промежутками в 1 секунду. Совпадают ли эти две аппроксимации после округления к двум десятичным знакам? Если точное решение неизвестно, объясните, как можно использовать усовершенствованный метод Эйлера, чтобы найти хорошее приближение для **(a)** времени подъема стрелы к верхней точке ее траектории (данное в разделе 2.3 — 4,61 с) и **(b)** ее прицельной скорости через 9,41 с полета в воздухе.

2.5. Приложение. Реализация усовершенствованного метода Эйлера

На рис. 2.5.10 приведены программы (для калькулятора TI-85 и на языке BASIC), реализующие усовершенствованный метод Эйлера нахождения приближенного решения задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$\frac{dy}{dx} = x + y, \quad y(0) = 1,$$

рассмотренной в примере 2 из этого раздела. Комментарии, приведенные в заключительном столбце, должны сделать эти программы понятными, даже если вы совсем мало знакомы с языками программировании BASIC и TI.

TI-85	BASIC	Комментарии
PROGRAM:IMPEULER	Program IMPEULER	Заголовок программы
:F=X+Y	DEF FN F(X,Y) = X + Y	Определение функции f
:10→N	N = 10	Количество шагов
:0→X	X = 0	Начальное значение x
:1→Y	Y = 1	Начальное значение y
:1→X1	X1 = 1	Конечное значение x
:(X1-X)/N→H	H = (X1-X)/N	Величина шага
:For(I,1,N)	FOR I=1 TO N	Начало цикла
:Y→Y0	Y0 = Y	Сохранить предыдущее значение y
:F→K1	K1 = FNF(X,Y)	Первый наклон
:Y0+H*K1→Y	Y = Y0 + H*K1	Предсказание
:X+H→X	X = X + H	Новое значение x
:F→K2	K2 = FNF(X,Y)	Второй наклон
:(K1+K2)/2→K	K = (K1 + K2)/2	Средний наклон
:Y0+H*K→Y	Y = Y0 + H*K	Поправка
:Disp X,Y	PRINT X,Y	Отобразить результаты
:End	NEXT I	Конец цикла

Рис. 2.5.10. Программы на языках TI-85 и BASIC для реализации усовершенствованного метода Эйлера

Чтобы применить усовершенствованный метод Эйлера к дифференциальному уравнению $dy/dx = f(x, y)$, необходимо только изменить начальную строку программы, в которой определена функция f. Чтобы увеличивать количество шагов (и таким образом, уменьшать величину шага), необходимо только изменить значение N, указанное во второй строке программы.

На рис. 2.5.11 показана одна из возможных реализаций усовершенствованного метода Эйлера на входном языке пакета MATLAB. Входными параметрами функции `impeuler` являются начальное значение `x`, начальное значение `y`, конечное значение `x1` переменной x и желаемое количество `n` подынтервалов. В результате работы этой функции генерируются векторы-столбцы `X` и `Y` значений x и y. Например, команда MATLAB

```
[X, Y] = impeuler(0, 1, 1, 10)
```

генерирует первый и четвертый столбцы данных, приведенных в таблице на рис. 2.5.4.

Вы должны начать проект по реализации усовершенствованного метода Эйлера для вашего собственного калькулятора или компьютерной системы. Проверьте вашу программу; для этого сначала примените ее к задаче Коши (задаче с начальными условиями) из примера 1, а затем к некоторым другим задачам из этого раздела.

```
function yp = f(x,y)
yp = x + y;                      % yp = y'

function [X,Y] = impeuler(x,y,x1,n)
h = (x1 - x)/n;                  % величина шага
X = x;                           % начальное значение x
Y = y;                           % начальное значение y
for i = 1:n;                     % начало цикла
    k1 = f(x,y);                 % первый наклон
    k2 = f(x+h,y+h*k1);          % второй наклон
    k = (k1 + k2)/2;;            % средний наклон
    x = x + h;                   % новое значение x
    y = y + h*k;                 % новое значение y
    X = [X;x];                   % обновить столбец x
    Y = [Y;y];                   % обновить столбец y
    end                          % конец цикла
```

Рис. 2.5.11. Реализация усовершенствованного метода Эйлера на MATLAB

Новые встречи со знаменитыми числами

В следующих задачах описываются числа $e \approx 2{,}7182818$, $\ln 2 \approx 0{,}6931472$ и $\pi \approx 3{,}1415927$ как конкретные значения решений некоторых задач Коши (задач с начальными условиями). В каждом случае примените усовершенствованный метод Эйлера для $n = 10, 20, 40, \ldots$ подынтервалов (удваивая n каждый раз). Сколько необходимо подынтервалов, чтобы получить дважды подряд правильное значение числа, округленного к пяти десятичным знакам?

1. Число $e = y(1)$, где $y(x)$ — решение задачи Коши (задачи с начальными условиями) $dy/dx = y, y(0) = 1$.
2. Число $\ln 2 = y(2)$, где $y(x)$ — решение задачи Коши (задачи с начальными условиями) $dy/dx = 1/x, y(1) = 0$.
3. Число $\pi = y(1)$, где $y(x)$ — решение задачи Коши (задачи с начальными условиями) $dy/dx = 4/(1 + x^2), y(0) = 0$.

Исследование логистического уравнения роста численности населения

Примените вашу усовершенствованную программу метода Эйлера к задаче Коши (задаче с начальными условиями) $dy/dx = \frac{1}{3}y(8-y), y(0) = 1$ из примера 3. В частности, проверьте (как утверждается), что приближенное решение при величине шага $h = 1$ срезается на уровне $y \approx 4{,}3542$, а не при граничном значении $y = 8$ точного решения. Возможно, таблица значений для $0 \leqq x \leqq 100$ сделает это очевидным.

Проведите собственное исследование численности популяции, удовлетворяющей логистическому уравнению. Для этого рассмотрите задачу Коши (задачу с начальными условиями)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n}y(m-y), \quad y(0) = 1,$$

где m и n — (например) наибольшая и наименьшая отличные от нуля цифры в номере вашего студенческого билета. Правда ли, что аппроксимация по усовершенствованному методу Эйлера при величине шага $h = 1$ срезается на уровне "правильного" граничного значении точного решения? Если это не так, найдите меньшее значение h такое, при котором это верно.

Периодический сбор урожая и пополнение запасов

Дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = ky(M - y) - h \sin\left(\frac{2\pi t}{P}\right)$$

моделирует численность логистической популяции, в которой периодически (период равен P) собирается урожай и пополняются запасы, причем максимальная норма сбора и пополнения запасов равна h. Чтобы начертить типичные интегральные кривые для случая $k = M = h = P = 1$, использовалась программа численной аппроксимации; интегральные кривые показаны на рис. 2.5.12. Этот рисунок наводит на мысль (хотя и не доказывает этого строго) о существовании порогового значения начальной численности популяции такого, что

- если начальная численность популяции выше этого порога, население колеблется (возможно, с периодом P) вокруг устойчивой граничной численности популяции $y(t) \equiv M$, определенной при условии отсутствия сбора урожая, тогда как
- популяция вымирает, если начальная численность популяции ниже этого порога.

Используйте соответствующую утилиту для построения графиков, чтобы исследовать ваше собственное логистическое уравнение для численности популяции с периодическим сбором урожая и пополнением запасов (выбирайте типичные значения параметров k, M, h и P). Окажутся ли верными сделанные предположения для вашей модели такой популяции?

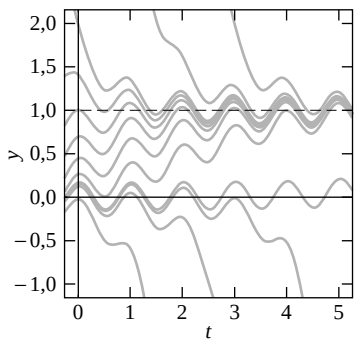


Рис. 2.5.12. Интегральные кривые уравнения $dy/dt = y(1 - y) - \sin 2\pi t$

2.6. Метод Рунге–Кутта

Мы теперь обсудим метод нахождения приближенного решения $y = y(x)$ задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{1}$$

который является значительно более точным, чем усовершенствованный метод Эйлера, и более широко используется на практике, чем любой из численных методов, рассмотренных в разделах 2.4 и 2.5. Он называется *методом Рунге–Кутта*, в честь немецких математиков, которые придумали его, — Карла Рунге[3] и Вильгельма Кутта[4].

Принимая обычную систему обозначений, предположите, что мы вычислили аппроксимации $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ к фактическим значениям $y(x_1), y(x_2), y(x_3), \ldots, y(x_n)$ и теперь хотим вычислить $y_{n+1} \approx y(x_{n+1})$. Тогда

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x)\,dx = \int_{x_n}^{x_n+h} y'(x)\,dx \tag{2}$$

по фундаментальной теореме анализа. Затем правило Симпсона для численного интегрирования приводит к равенству

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) \approx \frac{h}{6}\left[y'(x_n) + 4y'\left(x_n + \frac{h}{2}\right) + y'(x_{n+1})\right]. \tag{3}$$

Следовательно, мы хотим определить y_{n+1} так, чтобы

$$y_{n+1} \approx y_n + \frac{h}{6}\left[y'(x_n) + 2y'\left(x_n + \frac{h}{2}\right) + 2y'\left(x_n + \frac{h}{2}\right) + y'(x_{n+1})\right]; \tag{4}$$

мы разбили $4y'\left(x_n + \frac{1}{2}h\right)$ на сумму двух слагаемых, потому что мы намереваемся выразить приближенное значение наклона $y'\left(x_n + \frac{1}{2}h\right)$ в середине $x_n + \frac{1}{2}h$ интервала $[x_n, x_{n+1}]$ двумя различными способами.

В правой части (4) заменяем [точные] значения наклона $y'(x_n), y'\left(x_n + \frac{1}{2}h\right), y'\left(x_n + \frac{1}{2}h\right)$ и $y'(x_{n+1})$ соответственно следующими значениями (его приближенными оценками):

➤
$$k_1 = f(x_n, y_n). \tag{5a}$$

- Это наклон в точке x_n, вычисленный по методу Эйлера.

➤
$$k_2 = f\left(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_1\right) \tag{5b}$$

[3] Немецкий физик и математик Карл Давид Тольме Рунге (Carl Davil Tolme Runge) родился 30 августа 1856 года в Бремене, а умер 3 января 1927 года в Геттингене. — *Примеч. ред.*

[4] Немецкий физик и математик Мартин Вильгельм Кутта (Martin Wilhelm Kutta) родился 3 ноября 1867 года, а умер 25 декабря 1944 года. В 1901 году развил метод численного решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений, придуманный Карлом Рунге. — *Примеч. ред.*

- Это оценка наклона в середине интервала $[x_n, x_{n+1}]$ методом Эйлера. Она используется для предсказания значения ординаты в середине этого интервала.

➤ $$k_3 = f\left(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_2\right) \tag{5c}$$

- Это значение наклона в середине, вычисленное по усовершенствованному методу Эйлера.

➤ $$k_4 = f(x_{n+1}, y_n + hk_3) \tag{5d}$$

- Это наклон в x_{n+1}, вычисленный методом Эйлера с использованием исправленного наклона k_3 в середине при переходе к x_{n+1}.

Если сделать эти замены в уравнении (4), в результате получится итеративная формула

➤ $$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \tag{6}$$

Последовательное использование этой формулы для вычисления аппроксимаций $y_1, y_2, y_3, \ldots$ и составляет **метод Рунге–Кутта**. Обратите внимание, что уравнение (6) примет "форму Эйлера"

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot k,$$

если считать

$$k = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{7}$$

приближенным *средним наклоном* на интервале $[x_n, x_{n+1}]$.

Метод Рунге–Кутта является методом *четвертого порядка*, поскольку может быть доказано, что накопленная (суммарная) ошибка на ограниченном интервале $[a, b]$ с $a = x_0$ имеет порядок h^4. (Таким образом, итерацию в равенстве (6) иногда называют методом Рунге–Кутта *четвертого порядка*, потому что можно придумать методы Рунге–Кутта других порядков.) Иными словами,

➤ $$|y(x_n) - y_n| \leqq Ch^4, \tag{8}$$

где константа C зависит от функции $f(x, y)$ и интервала $[a, b]$, но не зависит от величины шага h. Следующий пример иллюстрирует эту более высокую точность по сравнению с точностью наших предыдущих численных методов более низких порядков.

Пример 1 Мы сначала применяем метод Рунге–Кутта к иллюстративной задаче Коши (задаче с начальными условиями)

$$\frac{dy}{dx} = x + y, \quad y(0) = 1, \tag{9}$$

которая показана на рис. 2.4.8 раздела 2.4, а затем снова рассматривалась в примере 2 раздела 2.5. Точное решение этой задачи — $y(x) = 2e^x - x - 1$. Чтобы доказать наше утверждение, мы используем $h = 0{,}5$, — большую величину шага, чем в любом из предыдущих примеров, так что для перехода от $x = 0$ к $x = 1$ понадобятся только два шага.

В первом шаге мы используем формулы (5) и (6) для вычисления

$$k_1 = 0 + 1 = 1,$$
$$k_2 = (0 + 0{,}25) + (1 + (0{,}25) \cdot (1)) = 1{,}5,$$
$$k_3 = (0 + 0{,}25) + (1 + (0{,}25) \cdot (1{,}5)) = 1{,}625,$$
$$k_4 = (0{,}5) + (1 + (0{,}5) \cdot (1{,}625)) = 2{,}3125$$

и затем

$$y_1 = 1 + \frac{0{,}5}{6}[1 + 2 \cdot (1{,}5) + 2 \cdot (1{,}625) + 2{,}3125] \approx 1{,}7969.$$

Точно так же второй шаг приводит к $y_2 \approx 3{,}4347$.

	Усовершенствованный метод Эйлера		**Метод Рунге–Кутта**		**Точное значение**
x	y **при** $h = 0{,}1$	**Ошибка в %%**	y **при** $h = 0{,}5$	**Ошибка в %%**	y
0,0	1,0000	0,00%	1,0000	0,00%	1,0000
0,5	1,7949	0,14%	1,7969	0,03%	1,7974
1,0	3,4282	0,24%	3,4347	0,05%	3,4366

Рис. 2.6.1. Результаты применения метода Рунге–Кутта и усовершенствованного метода Эйлера к задаче Коши (задаче с начальными условиями) $dy/dx = x + y, y(0) = 1$

На рис. 2.6.1 эти результаты представлены вместе с результатами (см. рис. 2.5.4) применения усовершенствованного метода Эйлера при величине шага $h = 0{,}1$. Мы видим, что даже при большей величине шага метод Рунге–Кутта имеет (для этой задачи) в четыре–пять раз большую точность (т. е. меньшую относительную ошибку, вычисленную в процентах), чем усовершенствованный метод Эйлера. ■

Общепринято измерять вычислительную работу, необходимую для нахождения решения уравнения $dy/dx = f(x, y)$ количеством необходимых вычислений значений функции $f(x, y)$. В примере 1 метод Рунге–Кутта требовал вычисления восьми значений $f(x, y) = x + y$ (по четыре в каждом шаге), тогда как усовершенствованный метод Эйлера требовал вычисления 20 таких значений (по два для каждого из 10 шагов). Таким образом, метод Рунге–Кутта дает в четыре раза большую точность, требуя только 40% вычислений.

Компьютерные программы, реализующие метод Рунге–Кутта, приведены в приложении к этому разделу. На рис. 2.6.2 приведены результаты, полученные с помощью усовершенствованного метода Эйлера и метода Рунге–Кутта для задачи $dy/dx = x + y, y(0) = 1$ с той же самой величиной шага $h = 0{,}1$. Относительная ошибка в значении, вычисленном по усовершенствованному методу Эйлера, в точке $x = 1$ приблизительно равна $0{,}24\%$, но для значения, вычисленного по методу Рунге–Кутта, она равна всего лишь $0{,}00012\%$. В этом сравнении метод Рунге–Кутта приблизительно в 2000 раз более точен, хотя и требует только вдвое больше вычислений значений функции, чем усовершенствованный метод Эйлера.

Оценка погрешности

$$|y(x_n) - y_n| \leqq Ch^4 \tag{8}$$

x	Усовершенствованный метод Эйлера, y	Метод Рунге–Кутта, y	Точное y
0,1	1,1100	1,110342	1,110342
0,2	1,2421	1,242805	1,242806
0,3	1,3985	1,399717	1,399718
0,4	1,5818	1,583648	1,583649
0,5	1,7949	1,797441	1,797443
0,6	2,0409	2,044236	2,044238
0,7	2,3231	2,327503	2,327505
0,8	2,6456	2,651079	2,651082
0,9	3,0124	3,019203	3,019206
1,0	3,4282	3,436559	3,436564

Рис. 2.6.2. Результаты, полученные методом Рунге–Кутта и усовершенствованным методом Эйлера, для задачи Коши (задачи с начальными условиями) $dy/dx = x + y$, $y(0) = 1$ с одной и той же величиной шага $h = 0{,}1$

для метода Рунге–Кутта показывает, что величина ошибок быстро уменьшается при уменьшении величины шага h. (Впрочем, при очень маленькой величине шага могут недопустимо возрасти ошибки округления.) Из неравенства (8) следует, что (на фиксированном ограниченном интервале) деление величины шага на два уменьшает абсолютную ошибку в 16 раз. Следовательно, обычно применяемый на практике метод последовательного деления величины шага на два "стабилизирует" результаты вычислений особенно эффективно, если применяется вместе с методом Рунге–Кутта.

Пример 2 В примере 5 из раздела 2.4 мы видели, что метод Эйлера не позволяет найти приближенное решение $y(x)$ задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2, \quad y(0) = 1, \tag{10}$$

если x приближается к точке, в которой решение терпит бесконечный разрыв, — это происходит в окрестности точки $x = 0{,}969811$ (см. рис. 2.6.3). Теперь мы применим метод Рунге–Кутта к этой задаче Коши (задаче с начальными условиями).

На рис. 2.6.4 показаны результаты применения метода Рунге–Кутта на интервале $[0{,}0,\ 0{,}9]$, причем вычисления выполнялись при величине шага $h = 0{,}1$, $h = 0{,}05$ и $h = 0{,}025$. Конечно, есть все же некоторое затруднение в окрестности $x = 0{,}9$, но из полученных данных вполне можно заключить, что $y(0{,}5) \approx 2{,}0670$.

Поэтому мы снова применим метод Рунге–Кутта к задаче Коши (задаче с начальными условиями)

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2, \quad y(0{,}5) = 2{,}0670. \tag{11}$$

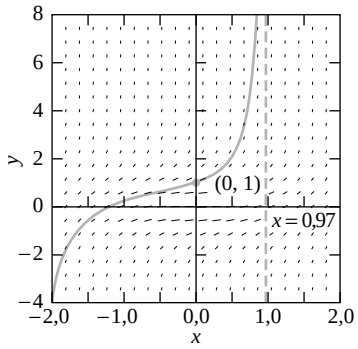


Рис. 2.6.3. Решения уравнения $dy/dx = x^2 + y^2, y(0) = 1$

x	y при $h = 0{,}1$	y при $h = 0{,}05$	y при $h = 0{,}025$
0,1	1,1115	1,1115	1,1115
0,3	1,4397	1,4397	1,4397
0,5	2,0670	2,0670	2,0670
0,7	3,6522	3,6529	3,6529
0,9	14,0218	14,2712	14,3021

Рис. 2.6.4. Приближение решения задачи Коши (задачи с начальными условиями) (10)

На рис. 2.6.5 приведены результаты вычислений на интервале $[0{,}5, 0{,}9]$, полученные при величине шага $h = 0{,}01$, $h = 0{,}005$ и $h = 0{,}0025$. Теперь можно заключить, что $y(0{,}9) \approx 14{,}3049$.

x	y при $h = 0{,}01$	y при $h = 0{,}005$	y при $h = 0{,}0025$
0,5	2,0670	2,0670	2,0670
0,6	2,6440	2,6440	2,6440
0,7	3,6529	3,6529	3,6529
0,8	5,8486	5,8486	5,8486
0,9	14,3048	14,3049	14,3049

Рис. 2.6.5. Приближение решения задачи Коши (задачи с начальными условиями) (11)

Наконец, результаты вычислений, приведенные на рис. 2.6.6, представляют собой решение для задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2, \quad y(0{,}9) = 14{,}3049, \tag{12}$$

x	y при $h = 0{,}002$	y при $h = 0{,}001$	y при $h = 0{,}0005$
0,90	14,3049	14,3049	14,3049
0,91	16,7024	16,7024	16,7024
0,92	20,0617	20,0617	20,0617
0,93	25,1073	25,1073	25,1073
0,94	33,5363	33,5363	33,5363
0,95	50,4722	50,4723	50,4723

Рис. 2.6.6. Приближенное решение задачи Коши (задачи с начальными условиями) (12)

на интервале $[0{,}90, 0{,}95]$. Они получены при величине шага $h = 0{,}002$, $h = 0{,}001$ и $h = 0{,}0005$. Наш заключительный приближенный результат представляет собой значение $y(0{,}95) \approx 50{,}4723$. Точное значение решения в точке $x = 0{,}95$ равно $y(0{,}95) \approx 50{,}471867$. Наш результат чуть больше — главным образом потому, что начальное значение с четырьмя знаками в (12) является (в действительности) результатом округления *в большую сторону* фактического значения $y(0{,}9) \approx 14{,}304864$; такие ошибки значительно увеличиваются при приближении к вертикальной асимптоте. ■

Пример 3 Парашютист массой 60 кг спрыгивает с вертолета, зависшего на начальной высоте 5 км. Предположим, что парашютист начинает падать вертикально с начальной скоростью, равной нулю. На парашютиста действует направленная вверх сила F_R сопротивления воздуха, зависящая от скорости v (в метрах в секунду). Эта зависимость силы сопротивления воздуха от скорости v дается формулой

$$F_R = (0{,}0096)(100v + 10v^2 + v^3)$$

(в ньютонах, причем координатная ось направлена вниз, чтобы $v > 0$ при спуске на землю). Если парашютист не откроет парашют, какова будет его предельная скорость? Как быстро он будет падать через 5 с после начала прыжка? А через 10 с? А через 20 с?

Решение Закон Ньютона $F = ma$ дает уравнение

$$m\frac{dv}{dt} = mg - F_R,$$

т. е.

$$60\frac{dv}{dt} = (60)(9{,}8) - (0{,}0096)(100v + 10v^2 + v^3), \qquad (13)$$

потому что $m = 60$ и $g = 9{,}8$. Таким образом, функция, выражающая скорость $v(t)$, является решением задачи Коши (задачи с начальными

условиями)

$$\frac{dv}{dt} = f(v), \quad v(0) = 0, \tag{14}$$

где

$$f(v) = 9{,}8 - (0{,}00016)(100v + 10v^2 + v^3). \tag{15}$$

Парашютист достигает своей предельной скорости, когда сила тяжести уравновесит сопротивление воздуха, так что $f(v) = 0$. Поэтому предельную скорость можно вычислить немедленно, решая уравнение

$$f(v) = 9{,}8 - (0{,}00016)(100v + 10v^2 + v^3) = 0. \tag{16}$$

На рис. 2.6.7 показан график функции $f(v)$ и выделен единственный вещественный корень $v \approx 35{,}5780$ (его можно найти графически, или с помощью калькулятора, или же с помощью компьютерной процедуры `Solve`). Таким образом, предельная скорость парашютиста приблизительно равна $35{,}578$ м/с, что составляет приблизительно 128 км/час (почти 80 миль в час).

На рис. 2.6.8 показаны результаты нахождения приближенного решения задачи Коши (задачи с начальными условиями) (14) методом Рунге–Кутта; при величине шага $h = 0{,}2$ и $h = 0{,}1$ получаются те же самые результаты (с точностью до трех десятичных знаков). Заметьте, что предельная скорость фактически достигается уже через 15 с. Но скорость парашютиста равна $91{,}85\%$ его предельной скорости уже после всего лишь 5 с, а $99{,}78\%$ — после всего лишь 10 с. ■

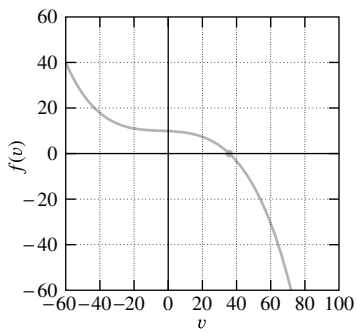


Рис. 2.6.7. График функции $f(v) = 9{,}8 - (0{,}00016)(100v + 10v^2 + v^3)$

t (с)	v (м/с)	t (с)	v (м/с)
0	0	11	35,541
1	9,636	12	35,560
2	18,386	13	35,569
3	25,299	14	35,574
4	29,949	15	35,576
5	32,678	16	35,577
6	34,137	17	35,578
7	34,875	18	35,578
8	35,239	19	35,578
9	35,415	20	35,578
10	35,500		

Рис. 2.6.8. Скорость парашютиста

Заключительный пример этого раздела содержит *предупреждение*: для некоторых типов задач Коши (задач с начальными условиями), численные методы, которые мы обсудили, далеко не столь успешны, как в предыдущих примерах.

Пример 4 Рассмотрим с виду безобидную задачу Коши (задачу с начальными условиями)

$$\frac{dy}{dx} = 5y - 6e^{-x}, \quad y(0) = 1, \tag{17}$$

точное решение которой представляет собой функцию $y(x) = e^{-x}$. В таблице на рис. 2.6.9 приведены результаты, полученные методом Рунге–Кутта на интервале $[0, 4]$ при величине шага $h = 0{,}2$, $h = 0{,}1$ и $h = 0{,}05$. Очевидно, эти попытки решить данную задачу на практике оказались неудачными. Хотя $y(x) = e^{-x} \to 0$ при $x \to +\infty$, кажется, что наши приближенные числовые значения стремятся к $-\infty$, а не к нулю.

x	Рунге–Кутта y при $h = 0{,}2$	Рунге–Кутта y при $h = 0{,}1$	Рунге–Кутта y при $h = 0{,}05$	Точное значение y
0,4	0,66880	0,67020	0,67031	0,67032
0,8	0,43713	0,44833	0,44926	0,44933
1,2	0,21099	0,29376	0,30067	0,30199
1,6	−0,46019	0,14697	0,19802	0,20190
2,0	−4,72142	−0,27026	0,10668	0,13534
2,4	−35,53415	−2,90419	−0,12102	0,09072
2,8	−261,25023	−22,05352	−1,50367	0,06081
3,2	−1 916,69395	−163,25077	−11,51868	0,04076
3,6	−14059,35494	−1205,71249	−85,38156	0,02732
4,0	−103 126,5270	−8903,12866	−631,03934	0,01832

Рис. 2.6.9. Попытки решить в числовой форме задачу Коши (задача с начальными условиями) (17) методом Рунге–Кутта

Объяснение состоит в том, что общее решение уравнения $dy/dx = 5y - 6e^{-x}$ представляет собой функцию

$$y(x) = e^{-x} + Ce^{5x}. \tag{18}$$

Частное решение задачи (17), удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 1$, получается при $C = 0$. Но любое отклонение, пусть самое маленькое, от точного решения $y(x) = e^{-x}$ — даже из-за ошибки округления — вносит ошибку, благодаря которой в действительности значение константы C в уравнении (18) вроде бы становится отличным от нуля. И как показано на рис. 2.6.10, все интегральные кривые вида (18) при $C \neq 0$ быстро расходятся далеко от решения, получаемого при $C = 0$, даже если их начальные значения близки к 1. ■

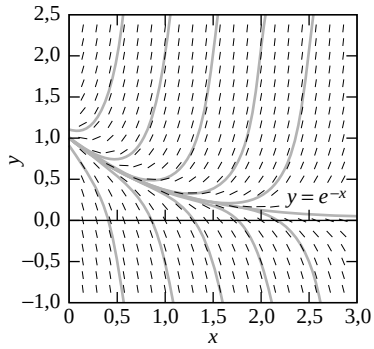


Рис. 2.6.10. Поле направлений и интегральные кривые уравнения $dy/dx = 5y - 6e^{-x}$

Трудности такого сорта, проиллюстрированные примером 4, иногда неизбежны, но можно по крайней мере надеяться распознать такую задачу. Приближенные значения, порядок величины которых изменяется с изменяющимся величины шага, — вот наиболее общий индикатор такой неустойчивости. Эти трудности обсуждаются в учебниках численного анализа и являются темой текущего "полевого" исследования в данном разделе.

2.6. Задачи

Карманный калькулятор вполне подойдет для решения задач 1–10, в которых ставится задача Коши (задача с начальными условиями) и дается ее точное решение. Примените метод Рунге–Кутта, чтобы найти приближение к этому решению на интервале $[0, 0{,}5]$ *при величине шага* $h = 0{,}25$. *Создайте таблицу, в которой приведите значения приближенного решения с пятью десятичными знаками и значения фактического решения в точках* $x = 0{,}25$ *и 0,5.*

1. $y' = -y$, $y(0) = 2$; $y(x) = 2e^{-x}$

2. $y' = 2y$, $y(0) = \frac{1}{2}$; $y(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$

3. $y' = y + 1$, $y(0) = 1$; $y(x) = 2e^{x} - 1$

4. $y' = x - y$, $y(0) = 1$; $y(x) = 2e^{-x} + x - 1$

5. $y' = y - x - 1$, $y(0) = 1$; $y(x) = 2 + x - e^{x}$

6. $y' = -2xy$, $y(0) = 2$; $y(x) = 2e^{-x^2}$

7. $y' = -3x^2y$, $y(0) = 3$; $y(x) = 3e^{-x^3}$

8. $y' = e^{-y}$, $y(0) = 0$; $y(x) = \ln(x + 1)$

9. $y' = \frac{1}{4}(1 + y^2)$, $y(0) = 1$; $y(x) = \operatorname{tg} \frac{1}{4}(x + \pi)$

10. $y' = 2xy^2$, $y(0) = 1$; $y(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$

Обратите внимание. *В приложении после этого набора задач приведены программы для калькулятора и компьютера, которые могут использоваться в остальных задачах.*

Программируемый калькулятор или компьютер будут полезны для решения задач 11–16. В каждой задаче найдите точное решение данной задачи Коши (задачи с начальными условиями). Затем, дважды применяя метод Рунге–Кутта, найдите приближение этого решения на данном интервале (с точностью до пяти десятичных знаков), — сначала при величине шага $h = 0{,}2$, *а затем при величине шага* $h = 0{,}1$. *Сделайте таблицу, в которой приведите приближенные значения и фактические значения, а также ошибку (в процентах) в более точной аппроксимации, для значений* x *кратных* $0{,}2$. *Штрихи везде обозначают производные по* x.

11. $y' = y - 2$, $y(0) = 1$; $0 \leqq x \leqq 1$

12. $y' = \frac{1}{2}(y - 1)^2$, $y(0) = 2$; $0 \leqq x \leqq 1$

13. $yy' = 2x^3$, $y(1) = 3$; $1 \leqq x \leqq 2$ **14.** $xy' = y^2$, $y(1) = 1$; $1 \leqq x \leqq 2$

15. $xy' = 3x - 2y$, $y(2) = 3$; $2 \leqq x \leqq 3$ **16.** $y^2y' = 2x^5$, $y(2) = 3$; $2 \leqq x \leqq 3$

Компьютер с принтером потребуется для решения задач 17–24. Для решения этих задач Коши (задач с начальными условиями) используйте метод Рунге–Кутта с величиной шага $h = 0{,}2$, $0{,}1$, $0{,}05$ *и* $0{,}025$. *С помощью метода Рунге–Кутта найдите приближение с шестью десятичными знаками для значений решения в пяти точках, разбивающих данный интервал на равные подынтервалы. Напечатайте результаты в табличной форме под соответствующими заголовками, чтобы было легче увидеть эффект изменения величины шага* h. *Штрихи везде обозначают производные по* x.

17. $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$; $0 \leqq x \leqq 1$ **18.** $y' = x^2 - y^2$, $y(0) = 1$; $0 \leqq x \leqq 2$

19. $y' = x + \sqrt{y}$, $y(0) = 1$; $0 \leqq x \leqq 2$ **20.** $y' = x + \sqrt[3]{y}$, $y(0) = -1$; $0 \leqq x \leqq 2$

21. $y' = \ln y$, $y(1) = 2$; $1 \leqq x \leqq 2$ **22.** $y' = x^{2/3} + y^{2/3}$, $y(0) = 1$; $0 \leqq x \leqq 2$

23. $y' = \sin x + \cos y$, $y(0) = 0$; $0 \leqq x \leqq 1$ **24.** $y' = \dfrac{x}{1+y^2}$, $y(-1) = 1$; $-1 \leqq x \leqq 1$

25. Как и в задаче 25 из раздела 2.5, вы выпрыгиваете из вертолета и немедленно открываете ваш парашют, так что ваша убывающая скорость является решением задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$\frac{dv}{dt} = 32 - 1{,}6v, \quad v(0) = 0$$

(где t измеряется в секундах, а v — в футах в секунду). Используйте метод Рунге–Кутта и программируемый калькулятор или компьютер, чтобы найти приближенное решение для $0 \leqq t \leqq 2$, сначала с величиной шага $h = 0{,}1$, а затем с величиной шага $h = 0{,}05$, округляя приближенные значения v к трем десятичным знакам. Какой процент от предельной скорости 20 футов в секунду будет достигнут через 1 секунду? Через 2 секунды?

26. Как и в задаче 26 из раздела 2.5, предположите, что численность популяции оленей $P(t)$ в маленьком лесу первоначально равна 25 особям и удовлетворяет логистическому уравнению

$$\frac{dP}{dt} = 0{,}0225P - 0{,}0003P^2$$

(причем t измеряется в месяцах). Используйте метод Рунге–Кутта и программируемый калькулятор или компьютер, чтобы найти приближенное решение для 10 лет, сначала с величиной шага $h = 6$, а затем с величиной шага $h = 3$, округляя приближенные значения P к четырем десятичным знакам. Какой процент от граничной численности популяции, равной 75 оленям, будет достигнут через 5 лет? А через 10 лет?

В задачах 27 и 28 найдите искомые значения решения с помощью метода Рунге–Кутта и компьютерной системы. Начните при величине шага $h = 1$, *а затем используйте последовательность меньших величин шага, пока последовательные приближенные значения решения в точке* $x = 2$ *не совпадут при округлении до 5 десятичных знаков.*

27. $y' = x^2 + y^2 - 1$, $y(0) = 0$; $y(2) = ?$ **28.** $y' = x + \frac{1}{2}y^2$, $y(-2) = 0$; $y(2) = ?$

Задачи, связанные со скоростью и ускорением

В задачах 25 и 26 линейное ускорение $a = dv/dt$ *двигающейся частицы дает формула* $dv/dt = f(t, v)$, *где скорость* $v = dy/dt$ *— производная функции* $y = y(t)$, *задающей положение частицы в момент времени* t. *Предположим, что приближенное значение скорости* $v(t)$ *вычисляется методом Рунге–Кутта. Для этого методом Рунге–Кутта ищется решение задачи Коши (задачи с начальными условиями)*

$$\frac{dv}{dt} = f(t, v), \quad v(0) = v_0. \tag{19}$$

Иными словами, применяются формулы в уравнениях (5) и (6) (причем t и v используются вместо x и y). Вычислите последовательность приближений значений скорости v_1, v_2, v_3, …, v_m в последовательные моменты времени t_1, t_2, t_3, …, t_m (причем $t_{n+1} = t_n + h$). Для этого в качестве отправной точки ваших вычислений используйте начальные данные $t_0 = 0$ и v_0. Затем найдите также приближенное значение расстояния *$y(t)$, пройденного частицей. Для этого в качестве отправной точки выберите начальное положение $y(0) = y_0$ и вычисляйте*

$$y_{n+1} = y_n + v_n h + \tfrac{1}{2} a_n h^2 \tag{20}$$

($n = 1, 2, 3, \ldots$), где $a_n = f(t_n, v_n) \approx v'(t_n)$ — приближенное значение ускорения частицы в момент времени t_n. Формула (20) дает точное приращение (от y_n до y_{n+1}), если ускорение является константой в течение временного интервала $[t_n, t_{n+1}]$.

Таким образом, как только рассчитана таблица приблизительных скоростей, уравнение (20) позволяет просто вычислить таблицу последовательных положений тела. Этот процесс иллюстрируется в проекте для этого раздела, причем данные по скорости приведены на рис. 2.6.8 (пример 3), а затем, используя эти данные, можно отслеживать положение парашютиста во время его спуска на землю.

29. Рассмотрим снова стрелу, выпущенную из арбалета прямо вверх с поверхности земли, как в примере 2 в разделе 2.3. Начальная скорость стрелы равна 49 м/с. Из-за линейного сопротивления воздуха функция, выражающая скорость $v = dy/dt$, является решением задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$\frac{dv}{dt} = -(0{,}04)v - 9{,}8, \quad v(0) = 49,$$

которая имеет точное решение $v(t) = 294e^{-t/25} - 245$. **(a)** Примените калькулятор или программу, реализующую метод Рунге–Кутта на компьютере, чтобы найти приближенные значения $v(t)$ для $0 \leqq t \leqq 10$, разбив этот отрезок на $n = 100$ и $n = 200$ подынтервалов. Отобразите результаты с промежутками в 1 секунду. Совпадут ли эти две аппроксимации после округления до четырех десятичных знаков между собой и с точным решением? **(b)** Теперь используйте данные по скорости, полученные в части (a), чтобы найти приближенные значения $y(t)$ для $0 \leqq t \leqq 10$, разбив отрезок на $n = 200$ подынтервалов. Отобразите результаты с промежутками в 1 секунду. Совпадут ли приближенные значения положения после округления к двум десятичным знакам с точным решением

$$y(t) = 7350\left(1 - e^{-t/25}\right) - 245t?$$

(c) Если бы точное решение было неизвестно, объясните, как вы могли бы использовать метод Рунге–Кутта, чтобы найти достаточно хорошее приближение для времени подъема и спуска стрелы, а также максимальной высоты, которой она достигает.

30. Теперь снова рассмотрите стрелу, выпущенную из арбалета, как в примере 3 в разделе 2.3. Она выстрелена прямо вверх с поверхности земли с начальной скоростью 49 м/с, но сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости стрелы, так что функция, выражающая скорость $v(t)$, является решением задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$\frac{dv}{dt} = -(0{,}0011)v|v| - 9{,}8, \quad v(0) = 49.$$

Приступая к решению этой задачи Коши (задачи с начальными условиями), повторите вычисления, проведенные в частях (a)–(c) задачи 25 (за исключением того, что, возможно, придется взять $n = 200$ подынтервалов, чтобы получить точность до четырех знаков в части (a) и $n = 400$ подынтервалов для точности до двух знаков в части (b)). Согласно результатам задач 17

и 18 из раздела 2.3, скорость стрелы и функция, выражающая положение во время подъема и спуска, выражаются следующими формулами.

Подъем.
$v(t) = (94{,}388)\,\mathrm{tg}(0{,}478837 - [0{,}103827]t),$
$y(t) = 108{,}465 + (909{,}091)\ln(\cos(0{,}478837 - [0{,}103827]t))\,;$

Снижение.
$v(t) = -(94{,}388)\,\mathrm{th}(0{,}103827[t - 4{,}6119]),$
$y(t) = 108{,}465 - (909{,}091)\ln(\cosh(0{,}103827[t - 4{,}6119]))\,.$

2.6. Приложение. Реализация метода Рунге–Кутта

На рис. 2.6.11 приведена программа (на входном языке калькулятора TI-85 и на языке программирования BASIC), реализующая метод Рунге–Кутта для нахождения приближенного решения задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$\frac{dy}{dx} = x + y, \quad y(0) = 1,$$

рассмотренной в примере 1 этого раздела. Комментарии, приведенные в заключительном столбце, должны сделать эти программы понятными, даже если вы совсем мало работали с языками программирования BASIC и TI.

Чтобы применить метод Рунге–Кутта к другим уравнениям вида $dy/dx = f(x, y)$, необходимо только изменить начальную строку программы, в которой определена функция f. Чтобы увеличить количество шагов (и, таким образом, уменьшить величину шага), необходимо только изменить значение `N`, указанное во второй строке программы.

На рис. 2.6.12 приведена реализация метода Рунге–Кутта на входном языке пакета MATLAB. Предположим, что уже определена функция f из правой части дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$. Тогда функция `rk` в качестве входного параметра принимает начальное значение `x`, начальное значение `y`, конечное значение `x1` переменной x и желаемое количество `n` подынтервалов. В качестве результата она генерирует векторы-столбцы `X` и `Y`, содержащие значения x и y. Например, команда MATLAB

```
[X, Y] = rk(0, 1, 1, 10)
```

генерирует первый и третий столбцы данных, показанных в таблице на рис. 2.6.2.

Вы должны начать работу над этим проектом с реализации метода Рунге–Кутта на вашем собственном калькуляторе или компьютерной системе. Проверьте вашу программу, применяя ее сначала к задаче Коши (задаче с начальными условиями) из примера 1, а затем к некоторым другим задачам из этого раздела.

Новая встреча со знаменитыми числами, на этот раз последняя

Следующие задачи описывают числа

$$e \approx 2{,}71828182846, \quad \ln 2 \approx 0{,}69314718056 \quad \text{и} \quad \pi \approx 3{,}14159265359$$

как конкретные значения величин, являющихся решением некоторых задач Коши (задач с начальными условиями). В каждом из этих случае примените метод Рунге–Кутта для $n = 10$,

TI-85	BASIC	Комментарии
PROGRAM:RK	Program RK	Заголовок программы
:F=X+Y	DEF FN F(X,Y) = X + Y	Определение функции f
:10→N	N = 10	Количество шагов
:0→X	X = 0	Начальное значение x
:1→Y	Y = 1	Начальное значение y
:1→X1	X1 = 1	Конечное значение x
:(X1-X)/N→H	H = (X1-X)/N	Величина шага
:For(I,1,N)	FOR I=1 TO N	Начало цикла
:X→X0	X0 = X	Сохранить предыдущее значение x
:Y→Y0	Y0 = Y	Сохранить предыдущее значение y
:F→K1	K1 = FNF(X,Y)	Первый наклон
:X0+H/2→X	X = X0 + H/2	Середина
:Y0+H*K1/2→Y	Y = Y0 + H*K1/2	Предсказание в середине
:F→K2	K2 = FNF(X,Y)	Второй наклон
:Y0+H*K2/2→Y	Y = Y0 + H*K2/2	Предсказание в середине
:F→K3	K3 = FNF(X,Y)	Третий наклон
:X0+H→X	X = X0 + H	Новое значение x
:Y0+H*K3→Y	Y = Y0 + H*K3	Предсказание в конце
:F→K4	K4 = FNF(X,Y)	Четвертый наклон
:(K1+2*K2+2*K3 +K4)/6→K	K = (K1+2*K2+2*K3 +K4)/6	Средний наклон
:Y0+H*K→Y	Y = Y0 + K*K	Поправка
:Disp X,Y	PRINT X,Y	Отображение результатов на дисплее
:End	NEXT I	Конец цикла

Рис. 2.6.11. Программа Рунге–Кутта на входных языках TI-85 и BASIC

$20, 40, \ldots$ подынтервалов (удваивая n каждый раз). Сколько подынтервалов необходимо для того, чтобы получить дважды подряд правильное значение вычисляемого числа, округленного к девяти десятичным знакам?

1. Число $e = y(1)$, где $y(x)$ — решение задачи Коши (задачи с начальными условиями) $dy/dx = y, y(0) = 1$.
2. Число $\ln 2 = y(2)$, где $y(x)$ — решение задачи Коши (задачи с начальными условиями) $dy/dx = 1/x, y(1) = 0$.
3. Число $\pi = y(1)$, где $y(x)$ — решение задачи Коши (задачи с начальными условиями) $dy/dx = 4/(1 + x^2), y(0) = 0$.

```
function yp = f(x,y)
yp = x + y;                          % yp = y'

function [X,Y] = rk(x,y,x1,n)
h = (x1 - x)/n;                      % величина шага
X = x;                               % начальное значение
x
Y = y;                               % начальное значение
y
for i = 1:n                          % начало цикла
    k1 = f(x,y);                     % первый наклон
    k2 = f(x+h/2,y+h*k1/2);          % второй наклон
    k3 = f(x+h/2,y+h*k2/2);          % третий наклон
    k4 = f(x+h,y+h*k3);              % четвертый наклон
    k  = (k1+2*k2+2*k3+k4)/6;        % средний наклон
    x  = x + h;                      % новое значение x
    y  = y + h*k;                    % новое значение y
    X = [X;x];                       % обновить столбец x
    Y = [Y;y];                       % обновить столбец y
    end                              % конец цикла
```

Рис. 2.6.12. Реализация метода Рунге–Кутта на входном языке пакета MATLAB

Спуск парашютиста

Следующая функция на входном языке MATLAB является описанием функции, дающей ускорение парашютиста в примере 3.

```
function    vp = f(t,v)
vp = 9,8 - 0,00016*(100*v + 10*v^2 + v^3);
```

Тогда команды

```
k = 200                      % 200 подынтервалов
[t,v] = rk(0, 20, 0, k);     % аппроксимация Рунге-Кутта
[t(1:10:k+1); v(1:10:k+1)]   % отображать каждое 10-е значение
```

генерируют таблицу приближенных скоростей, приведенную на рис. 2.6.8. Наконец, команды

```
y = zeros(k+1,1):                          % инициализируем y
h = 0,1;                                   % величина шага
for n = 1:k                                % для n = 1 до k
  a = f(t(n),v(n)):                        % ускорение
  y(n+1) = y(n) + v(n)*h + 0,5*a*h^2;      % Уравнение (20)
end                                        % конец цикла
[t(1:20:k+1),v(1:20:k+1),y(1:20:k+1)] % каждое 20-е значение
```

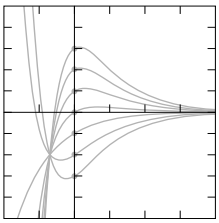
выполняют вычисления функции, дающей положение. (Эта функция описана в уравнении (20) в инструкциях к решению задач 25 и 26.) Результаты этих вычислений приведены в таблице на рис. 2.6.13. Оказывается, что длина пути парашютиста составляет 629,866 м в те-

t (с)	v (м/с)	y (м)
0	0	0
2	18,386	18,984
4	29,949	68,825
6	34,137	133,763
8	35,239	203,392
10	35,500	274,192
12	35,560	345,266
14	35,574	416,403
16	35,577	487,555
18	35,578	558,710
20	35,578	629,866

Рис. 2.6.13. Данные по скорости парашютиста и его положению

чение первых 20 с спуска, а затем он находится в состоянии свободного падения остающиеся $4370{,}134$ метра к земле с предельной скоростью $35{,}578$ м/с. Следовательно, полное время спуска равно $20 + (4370{,}134/35{,}578) \approx 142{,}833$ с, или приблизительно 2 минуты 23 секунды.

После реализации рассмотренных методов решите на доступной вам компьютерной системе собственную задачу парашютиста. В этой задаче масса m парашютиста должна быть равна вашей массе, а сила сопротивления воздуха должна иметь вид $F_R = av + bv^2 + + cv^3$ с подходящими значениями констант. Значение высоты может, конечно, отличаться от использованного выше.



ГЛАВА 3

Линейные уравнения высших порядков

3.1. Введение: линейные уравнения второго порядка

В главах 1 и 2 рассматривались дифференциальные уравнения первого порядка. Теперь мы переходим к уравнениям более высокого порядка $n \geqq 2$. Мы начнем с линейных уравнений. Поскольку многие положения общей теории линейных дифференциальных уравнений могут быть продемонстрированы на уравнениях второго порядка ($n = 2$), в первом разделе будет рассмотрен случай $n = 2$, т. е. фактически будет изложена теория уравнений второго порядка.

Напомним, что дифференциальное уравнение второго порядка относительно (неизвестной) функции $y(x)$ имеет вид

$$G(x, y, y', y'') = 0. \tag{1}$$

Это дифференциальное уравнение называется **линейным**, если G — линейная функция по переменной y и ее производным y' и y''. В частности, линейное уравнение второго порядка может быть записано в виде

➤
$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = F(x). \tag{2}$$

Мы всегда (если не сказано иное) будем предполагать, что (известные) функции $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ и $F(x)$ непрерывны на некотором открытом (возможно неограниченном) интервале I (на котором мы хотим решить уравнение), но мы *не* будем требовать линейности этих функций. Поэтому уравнение

$$e^x y'' + (\cos x)y' + (1 + \sqrt{x}\,)y = \operatorname{tg}^{-1} x$$

является линейным, так как оно линейно по переменной y и ее производным y' и y''. И наоборот, уравнения

$$y'' = yy' \quad \text{и} \quad y'' + 3(y')^2 + 4y^3 = 0$$

не линейны, так как в них входят произведения и степени y или ее производных.

Если функция $F(x)$ в правой части уравнения (2) тождественно равна 0 на I, то оно называется **однородным** линейным уравнением; в противном случае уравнение называется **неоднородным**. Например, уравнение второго порядка

$$x^2y'' + 2xy' + 3y = \cos x$$

— неоднородное; *соответствующее* ему[1] однородное уравнение —

$$x^2y'' + 2xy' + 3y = 0.$$

В общем случае, для уравнения (2) **соответствующее** ему однородное линейное уравнение имеет вид

➤
$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0. \tag{3}$$

Если дифференциальное уравнение (2) моделирует некоторую физическую систему, то неоднородный член $F(x)$ часто соответствует какому-либо *внешнему* воздействию на систему.

Стандартное применение

Линейные дифференциальные уравнения часто представляют собой математические модели механических систем и электрических цепей. Предположим, например, что к телу (материальной точке) массой m с одной стороны присоединена пружина, действующая на него с силой F_S, а с другой — амортизатор, действующий на него с силой F_R (рис. 3.1.1). Будем также считать, что сила упругости F_S пружины пропорциональна смещению x тела относительно положения равновесия (положительного при смещении вправо и отрицательного при смещении влево), а сила действия амортизатора F_R пропорциональна скорости тела $v = dx/dt$. На рис. 3.1.2 показано направление действия этих сил:

$$F_S = -kx \quad \text{и} \quad F_R = -cv \quad (k, c > 0).$$



Рис. 3.1.1. Система, состоящая из тела заданной массы, закрепленного на пружине с амортизатором

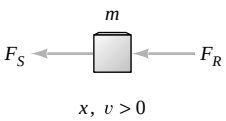


Рис. 3.1.2. Направления сил, действующих на материальную точку массой m

Заметим, что знаки "минус" поставлены верно — F_S отрицательна при положительных x, а F_R отрицательна при положительных v. Из второго закона Ньютона $F = ma$ следует

$$mx'' = F_S + F_R; \tag{4}$$

[1] Называемое также иногда *ассоциированным* с ним. — *Примеч. перев.*

иными словами,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0. \tag{5}$$

Таким образом, мы получили дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет значение координаты $x(t)$ тела массой m. Это однородное линейное уравнение второго порядка описывает *свободные колебания* материальной точки; мы вернемся к этому в разделе 3.4.

Если, к тому же, кроме F_S и F_R на точечную массу m действует внешняя сила $F(t)$, ее необходимо добавить к правой части уравнения (4) и в результате мы получим уравнение

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F(t). \tag{6}$$

Это неоднородное линейное дифференциальное уравнение характеризует *вынужденные колебания* материальной точки под действием внешней силы $F(t)$.

Однородные линейные уравнения второго порядка

В общем случае линейное дифференциальное уравнение второго порядка имеет вид

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = F(x), \tag{7}$$

где функции A, B, C и F непрерывны на открытом интервале I. Кроме того, мы будем предполагать, что $A(x) \neq 0$ во всех точках интервала I. Следовательно, мы можем разделить все слагаемые в уравнении (7) на $A(x)$ и записать его в виде

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \tag{8}$$

Рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{9}$$

Очень полезным свойством решений этого *однородного* линейного уравнения является то, что и сумма любых двух его решений, и решение, умноженное на произвольную постоянную, также будут решениями. Об этом пойдет речь в следующей теореме.

Теорема 1 Принцип суперпозиции для однородных уравнений

Пусть y_1 и y_2 — два решения однородного линейного дифференциального уравнения (9) на интервале I. Тогда для любых постоянных c_1 и c_2 линейная комбинация

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 \tag{10}$$

также является решением уравнения (9) на I.

Доказательство. Утверждение теоремы немедленно следует из линейности операции дифференцирования:

$$y' = c_1y_1' + c_2y_2' \quad \text{и} \quad y'' = c_1y_1'' + c_2y_2''.$$

Иными словами,

$$\begin{aligned} y'' + py' + qy &= (c_1y_1 + c_2y_2)'' + p(c_1y_1 + c_2y_2)' + q(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= (c_1y_1'' + c_2y_2'') + p(c_1y_1' + c_2y_2') + q(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= c_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + c_2(y_2'' + py_2' + qy_2) \\ &= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

так как y_1 и y_2 являются решениями уравнения. Следовательно, функция

$$y = c_1y_1 + c_2y_2$$

также является решением. ▲

Пример 1 Непосредственной проверкой легко убедиться, что функции

$$y_1(x) = \cos x \quad \text{и} \quad y_2(x) = \sin x$$

представляют собой два решения уравнения

$$y'' + y = 0.$$

Из теоремы 1 следует, что любая их линейная комбинация, например

$$y(x) = 3y_1(x) - 2y_2(x) = 3\cos x - 2\sin x,$$

также является решением. Позже мы увидим, что и наоборот, *каждое* решение $y'' + y = 0$ является линейной комбинацией этих двух частных решений y_1 и y_2. Поэтому решения уравнения $y'' + y = 0$ имеют следующий общий вид:

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x.$$

Важно отметить, что одна эта формула для общего решения дает "бесконечное" семейство частных решений, зависящее от двух параметров, каждый из которых может принимать бесконечно много значений. (Ведь оба коэффициента c_1 и c_2 могут быть выбраны независимо). На рис. 3.1.3–3.1.5 показаны некоторые возможные решения при c_1 или c_2, равных нулю, а также при ненулевых значениях обоих этих параметров ■

Ранее в этом разделе мы получили уравнение движения материальной точки $mx'' + cx' + kx = F(t)$ (см. рис. 3.1.1). С физической точки зрения движение материальной точки полностью определяется ее начальным положением и скоростью. Следовательно, для любых начальных значений $x(0)$ и $x'(0)$, уравнение (6) должно иметь *единственное* решение, которое удовлетворяет этим начальным данным. В общем случае, для того чтобы быть "хорошей" математической моделью детерминированного физического явления, дифференциальное уравнение должно иметь единственное решение, удовлетворяющее любым подходящим начальным данным. Следующая теорема существования и единственности решения (ее доказательство приведено в приложении) подтверждает это для общего уравнения второго порядка.

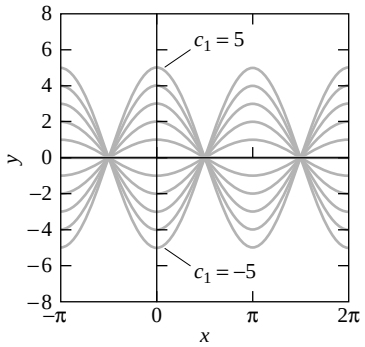


Рис. 3.1.3. Решения вида $y(x) = c_1 \cos x$ уравнения $y'' + y = 0$

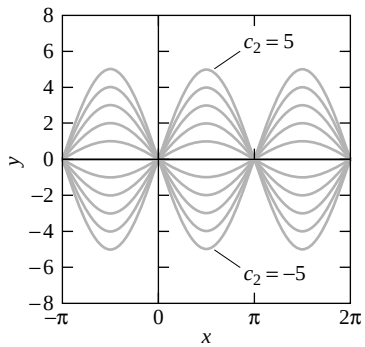


Рис. 3.1.4. Решения вида $y(x) = c_2 \sin x$ уравнения $y'' + y = 0$

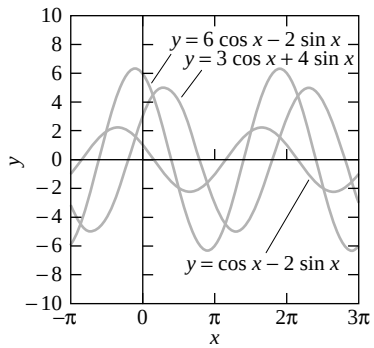


Рис. 3.1.5. Решения уравнения $y'' + y = 0$ при ненулевых значениях c_1 и c_2

Теорема 2 Существование и единственность решения линейного уравнения

Предположим, что функции p, q и f непрерывны на открытом интервале I, содержащем точку a. Тогда для любых b_0 и b_1 уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{8}$$

имеет единственное (т. е. ровно одно) решение на интервале I, которое удовлетворяет начальным условиям

$$y(a) = b_0, \quad y'(a) = b_1. \tag{11}$$

▲

Замечание 1. Уравнение (8) и условия (11) представляют **задачу с начальными условиями (данными)**, или **задачу Коши** для линейного уравнения второго порядка. Теорема 2 утверждает, что любая такая задача имеет единственное решение *на всем* интервале

I непрерывности коэффициентов уравнения (8). Напомним, что в общем случае (раздел 1.3) для *нелинейного* дифференциального уравнения, единственность решения можно гарантировать лишь на меньшем интервале.

Замечание 2. Хотя дифференциальное уравнение *первого* порядка $dy/dx = F(x, y)$ в общем случае допускает лишь одно решение $y = y(x)$, график которого проходит через заданную точку (a, b), из теоремы 2 следует, что для уравнения *второго* порядка (8) решений, графики которых проходят через точку $(a,\ b_0)$, бесконечно много, поскольку каждому (действительному) значению наклона $y'(a) = b_1$ касательной в данной точке соответствует свое решение. Таким образом, несмотря на то, что лишь одна прямая касается графика данного решения в точке (a, b_0), *каждая* невертикальная прямая, проходящая через (a, b_0), является касательной к графику некоторого решения. На рис. 3.1.6 изображено несколько графиков решений уравнения $y'' + 3y' + 2y = 0$ с одним и тем же начальным значением $y(0) = 1$. На рис. 3.1.7 изображено несколько графиков решений с одним и тем же начальным углом наклона касательной $y'(0) = 1$. В приложении в конце этого раздела рассматривается вопрос построения таких семейств кривых — графиков решений для заданного однородного линейного уравнения. ■

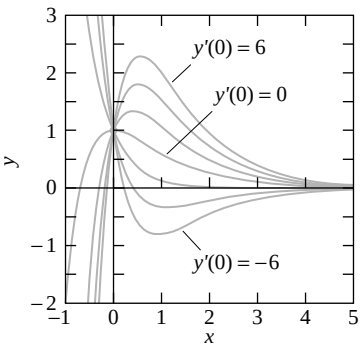


Рис. 3.1.6. Решения $y'' + 3y' + 2y = 0$ с одинаковым начальным значением $y(0) = 1$, но с разными касательными

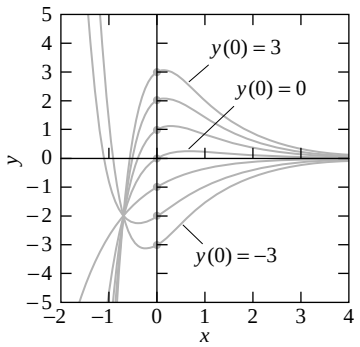


Рис. 3.1.7. Решения $y'' + 3y' + 2y = 0$ с одинаковыми касательными $y'(0) = 1$, но с разными начальными значениями

Пример 1 *Продолжение*

В первой части примера 1 мы увидели, что $y(x) = 3\cos x - 2\sin x$ является решением уравнения $y'' + y = 0$ на всей действительной оси. Его начальные значения $y(0) = 3$, $y'(0) = -2$. Согласно теореме 2, это *единственное* решение с такими начальными данными. В общем случае функция

$$y(x) = b_0 \cos x + b_1 \sin x$$

удовлетворяет *произвольным* начальным данным $y(0) = b_0$, $y'(0) = b_1$; отсюда следует *существование* такого решения (как и из теоремы 2). ■

В примере 1 показано, как для заданного *однородного* линейного уравнения второго порядка можно найти решение $y(x)$, существование которого гарантируется теоремой 2. Сначала нужно найти два "существенно разных" решения y_1 и y_2; затем попытаться найти

такое общее решение

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2, \tag{12}$$

которое удовлетворяет начальным условиям $y(a) = b_0$, $y'(a) = b_1$, т. е. попытаться решить систему уравнений

$$\begin{aligned} c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) &= b_0, \\ c_1 y_1'(a) + c_2 y_2'(a) &= b_1 \end{aligned} \tag{13}$$

относительно коэффициентов c_1 и c_2.

Пример 2 Проверить, что функции

$$y_1(x) = e^x \quad \text{и} \quad y_2(x) = xe^x$$

являются решениями уравнения

$$y'' - 2y' + y = 0,$$

и затем найти решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$.

Решение Проверка выполняется стандартным образом; мы пропустим ее. Подставив в начальные условия общее решение

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x,$$

для которого

$$y'(x) = (c_1 + c_2)e^x + c_2 x e^x,$$

мы получим систему уравнений

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 &&= 3, \\ y'(0) &= c_1 + c_2 &&= 1. \end{aligned}$$

Ее решение $c_1 = 3, c_2 = -2$. Таким образом, решение поставленной задачи Коши (задачи с начальными условиями) представляет собой функцию

$$y(x) = 3e^x - 2xe^x.$$

На рис. 3.1.8 изображено несколько решений $y'' - 2y' + y = 0$ с одинаковым начальным значением $y(0) = 3$. ■

Чтобы гарантировать успешное выполнение процедуры из примера 2, решения y_1 и y_2 должны обладать следующим нетривиальным свойством: система (13) должна иметь решения c_1 и c_2 для любых значений b_0 и b_1. Следующее определение строго описывает, насколько разными должны быть функции y_1 и y_2.

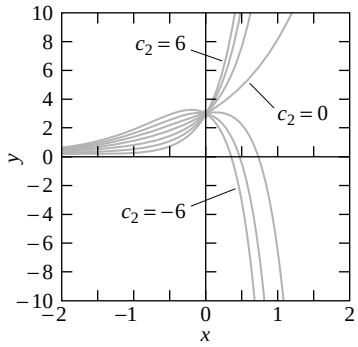


Рис. 3.1.8. Различные решения $y(x) = 3e^x + c_2 x e^x$ уравнения $y'' - 2y' + y = 0$ с одинаковым начальным значением $y(0) = 3$

Определение. Линейная независимость двух функций

Две функции, определенные на некотором интервале I, называются **линейно независимыми** на этом интервале I, если на нем ни одна из них не равна произведению другой на некоторую постоянную.

Две функции называются **линейно зависимыми** на открытом интервале, если они не являются линейно независимыми; т. е. одна из них равна произведению другой на константу. Мы всегда можем установить, являются ли данные функции f и g линейно зависимыми на интервале I, проверив, является ли постоянным хотя бы одно из отношений[2] f/g или g/f на I.

Пример 3 Понятно, что следующие пары функций линейно независимы на всей действительной оси:

$$\begin{aligned} \sin x &\quad \text{и} \quad \cos x; \\ e^x &\quad \text{и} \quad e^{-2x}; \\ e^x &\quad \text{и} \quad xe^x; \\ x+1 &\quad \text{и} \quad x^2; \\ x &\quad \text{и} \quad |x|. \end{aligned}$$

Иными словами, ни функция $\sin x / \cos x = \operatorname{tg} x$ ни функция $\cos x / \sin x = \operatorname{ctg} x$; ни функция $e^x / e^{-2x} = e^{3x}$, ни функция e^{-2x}/e^x не является постоянной, и т. д. Заметим, что функция $f(x) \equiv 0$, тождественно равная нулю, и любая функция g линейно зависимы на любом интервале, так как $0 \cdot g(x) = 0 = f(x)$. Функции

$$f(x) = \sin 2x \quad \text{и} \quad g(x) = \sin x \, \cos x$$

[2] Случай, когда хотя бы одна из функций тождественно равна нулю, очевиден: в этом случае функции линейно зависимы. — *Примеч. ред.*

тоже линейно зависимы на любом интервале, так как равенство

$$f(x) = 2g(x)$$

представляет собой известное тригонометрическое тождество $\sin 2x = 2\sin x \cos x$. ■

Общие решения

Всегда ли однородное линейное уравнение $y'' + py' + qy = 0$ имеет два линейно независимых решения? Из теоремы 2 следует, что да! Нам необходимо лишь выбрать y_1 и y_2 так, чтобы

$$y_1(a) = 1,\ y_1'(a) = 0 \quad \text{и} \quad y_2(a) = 0,\ y_2'(a) = 1.$$

Тогда не может быть верным ни равенство $y_1 = ky_2$, ни равенство $y_2 = ky_1$, так как $k \cdot 0 \neq 1$ для любой постоянной k. По теореме 2, два таких линейно независимых решения *существуют*; вообще говоря, нахождение их является ключевой задачей, которую мы вкратце рассмотрим в конце этого раздела, а более подробно разберем в начале раздела 3.3.

Покажем, что, зная *любые* два заданных линейно независимых решения y_1 и y_2 однородного уравнения

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0, \tag{9}$$

любое решение y уравнения (9) можно представить в виде линейной комбинации

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \tag{12}$$

этих решений y_1 и y_2. Это означает, что функция, заданная в (12), является *общим решением* уравнения (9) — из нее могут быть получены все возможные решения дифференциального уравнения.

Из уравнений (13) следует, что константы c_1 и c_2 в (12) зависят от некоторого определителя второго порядка (т. е. определителя матрицы размера 2×2) значений функций y_1, y_2 и их производных. **Определителем Вронского**[3] двух заданных функций f и g называется определитель

➤
$$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g.$$

Мы будем обозначать его $W(f, g)$ или $W(x)$, в зависимости от того, что мы хотим подчеркнуть — его зависимость от функций или от точки x, в которой необходимо посчитать определитель Вронского. Примеры определителей Вронского:

$$W(\cos x, \sin x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

и

$$W(e^x, xe^x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix} = e^{2x}.$$

[3] Или *вронскианом. — Примеч. ред.*

Это определители Вронского линейно *независимых* пар решений линейных дифференциальных уравнений (см. примеры 1 и 2). Заметим, что определители Вронского в данном случае нигде *не равны нулю*.

С другой стороны, если функции f и g линейно зависимы, например $f = kg$, то

$$W(f,g) = \begin{vmatrix} kg & g \\ kg' & g' \end{vmatrix} = kgg' - kg'g \equiv 0.$$

Иными словами, определитель Вронского линейно *зависимых* функций тождественно равен 0. В разделе 3.2 мы докажем, что если две функции y_1 и y_2 являются решениями однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка, то имеет место и утверждение, обратное сформулированному в пункте (b) теоремы 3.

Теорема 3 Вронскианы решений

Пусть y_1 и y_2 — два решения однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

на открытом интервале I, на котором функции p и q непрерывны.

(a) Если y_1 и y_2 линейно зависимы, то $W(y_1, y_2) \equiv 0$ на I.

(b) Если y_1 и y_2 линейно независимы, то $W(y_1, y_2) \neq 0$ ни в одной точке интервала I.▲

Следовательно, для двух решений уравнения (9) возможен лишь один из двух случаев — либо определитель Вронского W тождественно равен нулю (так будет, если решения линейно зависимы), либо определитель Вронского нигде не обращается в нуль (так будет, если решения линейно независимы). Теперь покажем, что $y = c_1y_1 + c_2y_2$ — общее решение уравнения (9), если y_1 и y_2 — линейно независимые решения.

Теорема 4 Общие решения однородных уравнений

Пусть y_1 и y_2 — два линейно независимых решения однородного уравнения (9)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

причем p и q непрерывны на открытом интервале I. Если Y — произвольное решение уравнения (9) на I, то существуют такие постоянные c_1 и c_2, что

$$Y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

для всех x из I. ▲

По существу, теорема 4 гласит, что если известны *два* линейно независимых решения однородного уравнения второго порядка (9), то можно найти *все* его решения. Поэтому линейную комбинацию $Y = c_1y_1 + c_2y_2$ мы называем *общим решением* дифференциального уравнения.

Доказательство теоремы 4. Зафиксируем точку a из интервала I и рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) &= Y(a), \\ c_1 y_1'(a) + c_2 y_2'(a) &= Y'(a). \end{aligned} \tag{14}$$

Определитель этой системы уравнений относительно неизвестных c_1 и c_2 — просто определитель Вронского $W(y_1, y_2)$ в точке $x = a$. По теореме 3 он не равен нулю, поэтому из простого алгебраического утверждения следует, что (14) имеет решения c_1 и c_2. С помощью значений c_1 и c_2 мы находим решение

$$G(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

уравнения (9); тогда

$$G(a) = c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) = Y(a)$$

и

$$G'(a) = c_1 y_1'(a) + c_2 y_2'(a) = Y'(a).$$

Следовательно, Y и G, а также Y' и G' имеют одинаковые значения в точке a. Из единственности решения, определенного начальными данными (теорема 2), следует, что Y и G совпадают на I. Отсюда

$$Y(x) \equiv G(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),$$

что и требовалось доказать. ▲

Пример 4 Пусть $y_1(x) = e^{2x}$ и $y_2(x) = e^{-2x}$, тогда

$$y_1'' = (2)(2)e^{2x} = 4e^{2x} = 4y_1 \quad \text{и} \quad y_2'' = (-2)(-2)e^{-2x} = 4e^{-2x} = 4y_2.$$

Следовательно, y_1 и y_2 — линейно независимые решения

$$y'' - 4y = 0. \tag{15}$$

Но $y_3(x) = \cosh 2x$ и $y_4(x) = \sinh 2x$ также являются решениями уравнения (15), так как

$$\frac{d^2}{dx^2}(\cosh 2x) = \frac{d}{dx}(2 \sinh 2x) = 4 \cosh 2x$$

и, аналогично, $(\sinh 2x)'' = 4 \sinh 2x$. Тогда из теоремы 4 следует, что $\cosh 2x$ и $\sinh 2x$ являются линейными комбинациями решений $y_1(x) = e^{2x}$ и $y_2(x) = e^{-2x}$. Конечно, это неудивительно, ведь

$$\cosh 2x = \tfrac{1}{2}e^{2x} + \tfrac{1}{2}e^{-2x} \quad \text{и} \quad \sinh 2x = \tfrac{1}{2}e^{2x} - \tfrac{1}{2}e^{-2x}$$

по определению гиперболических косинуса и синуса. ■

Замечание. Поскольку e^{2x}, e^{-2x} и $\cosh x$, $\sinh x$ — две пары линейно независимых решений уравнения $y''-4y=0$, по теореме 4 каждое частное решение $Y(x)$ этого уравнения может быть записано и в виде

$$Y(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x},$$

и в виде

$$Y(x)=a\cosh x+b\sinh x.$$

Следовательно, эти две линейные комбинации (с произвольными постоянными коэффициентами) задают два различных описания множества частных решений одного и того же уравнения $y''-4y=0$, т. е. обе они являются общим решением этого уравнения. Поэтому правильнее называть такую линейную комбинацию "*произвольным* общим решением", а не "*конкретным* общим решением". ■

Линейные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

В качестве иллюстрации общей теории, представленной в этом разделе, мы рассмотрим однородное линейное дифференциальное уравнение

$$ay''+by'+cy=0 \tag{16}$$

с *постоянными* коэффициентами a, b и c. Сначала найдем *одно* решение уравнения (16). Заметим, что

$$(e^{rx})'=re^{rx} \quad \text{и} \quad (e^{rx})''=r^2e^{rx}, \tag{17}$$

т. е. любая производная функции e^{rx} является произведением e^{rx} на константу. Поэтому если мы подставим $y=e^{rx}$ в (16), то все слагаемые будут представлять собой функцию e^{rx}, умноженную на постоянную, зависящую от r и коэффициентов a, b и c. Поэтому можно попытаться найти такое значение r, при котором сумма коэффициентов при e^{rx} равна нулю. Если такое r найти удастся, то функция $y=e^{rx}$ и будет решением уравнения (16).

Например, при подстановке $y=e^{rx}$ в уравнение

$$y''-5y'+6y=0,$$

получим

$$r^2e^{rx}-5re^{rx}+6e^{rx}=0.$$

Отсюда

$$(r^2-5r+6)e^{rx}=0; \quad (r-2)(r-3)e^{rx}=0.$$

Таким образом, $y=e^{rx}$ является решением уравнения при $r=2$ и $r=3$. Итак, пытаясь найти одно решение, мы, вообще говоря, можем найти два: $y_1(x)=e^{2x}$ и $y_2(x)=e^{3x}$.

Чтобы реализовать подобный алгоритм в общем случае, подставим $y=e^{rx}$ в (16). Из равенств (17) получим

$$ar^2e^{rx}+bre^{rx}+ce^{rx}=0.$$

Поскольку e^{rx} нигде не обращается в нуль, $y(x)=e^{rx}$ будет удовлетворять дифференциальному уравнению (16) тогда и только тогда, когда r — корень *алгебраического* уравнения

$$ar^2+br+c=0. \tag{18}$$

Это квадратное уравнение называют **характеристическим уравнением** однородного линейного дифференциального уравнения

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{16}$$

Если уравнение (18) имеет два *различных* (неравных) корня r_1 и r_2, тогда соответствующие решения $y_1(x) = e^{r_1 x}$ и $y_2(x) = e^{r_2 x}$ уравнения (16) линейно независимы. (Почему?) Имеем следующий результат.

Теорема 5 Случай различных действительных корней

Если корни r_1 и r_2 характеристического уравнения (18) действительные и различные, то функция

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \tag{19}$$

является общим решением уравнения (16). ▲

Пример 5 Найдем общее решение уравнения

$$2y'' - 7y' + 3y = 0.$$

Решение Характеристическое уравнение

$$2r^2 - 7r + 3 = 0$$

можно решить, разложив левую часть на множители:

$$(2r - 1)(r - 3) = 0.$$

Корни $r_1 = \frac{1}{2}$ и $r_2 = 3$ действительны и различны, поэтому по теореме 5 общим решением будет

$$y(x) = c_1 e^{x/2} + c_2 e^{3x}.$$ ■

Пример 6 Для дифференциального уравнения $y'' + 2y' = 0$ характеристическое уравнение имеет вид

$$r^2 + 2r = r(r + 2) = 0$$

Оно имеет два различных действительных корня $r_1 = 0$ и $r_2 = -2$. Поскольку $e^{0 \cdot x} \equiv 1$, общее решение имеет вид

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-2x}.$$

На рис. 3.1.9 изображено несколько различных графиков решений при $c_1 = 1$, причем каждое решение стремится к $y(x) \equiv 1$ (т. е. к решению с $c_2 = 0$) при $x \to +\infty$. ■

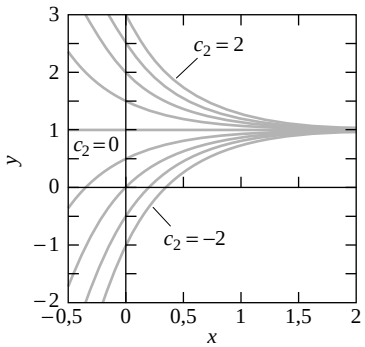


Рис. 3.1.9. Решения $y(x) = 1 + c_2 e^{-2x}$ уравнения $y'' + 2y' = 0$ при различных c_2

Замечание. Заметим, что теорема 5 сводит решение дифференциального уравнения к решению *алгебраического* уравнения. ■

Если у характеристического уравнения (18) корни равны $r_1 = r_2$, то мы можем (поначалу) получить лишь одно решение $y_1(x) = e^{r_1 x}$ уравнения (16). Задача в этом случае сводится к получению "недостающего" второго решения дифференциального уравнения.

Корень кратности два $r = r_1$ может появиться только тогда, когда характеристическое уравнение с точностью до некоторой постоянной имеет вид

$$(r - r_1)^2 = r^2 - 2r_1 r + r_1^2 = 0.$$

Тогда дифференциальное уравнение эквивалентно следующему:

$$y'' - 2r_1 y' + r_1^2 y = 0. \tag{20}$$

Но в этом случае простой подстановкой легко убедиться, что функция $y = xe^{r_1 x}$ является вторым решением уравнения (20). Очевидно (но вам стоит проверить!), что функции

$$y_1(x) = e^{r_1 x} \quad \text{и} \quad y_2(x) = xe^{r_1 x}$$

линейно независимы, т. е. общее решение дифференциального уравнения (20) имеет вид

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_1 x}.$$

Теорема 6 Случай кратных корней

Если у характеристического уравнения (18) два одинаковых (но обязательно действительных) корня $r_1 = r_2$, то

➤ $$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{r_1 x} \tag{21}$$

является общим решением уравнения(16). ▲

Пример 7 Для решения задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$y'' + 2y' + y = 0;$$
$$y(0) = 5, \quad y'(0) = -3$$

заметим, что у характеристического уравнения

$$r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2 = 0$$

два равных корня $r_1 = r_2 = -1$. Поэтому по теореме 6 общее решение имеет вид

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}.$$

Продифференцировав, имеем

$$y'(x) = -c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x} - c_2 x e^{-x}.$$

Подстановка начальных данных приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 &&= 5, \\ y'(0) &= -c_1 + c_2 &&= -3, \end{aligned}$$

откуда следует, что $c_1 = 5$ и $c_2 = 2$. Так что требуемое частное решение есть

$$y(x) = 5e^{-x} + 2xe^{-x}.$$

Это частное решение вместе с некоторыми другими вида $y(x) = c_1 e^{-x} + 2xe^{-x}$ изображено на рис. 3.1.10. ■

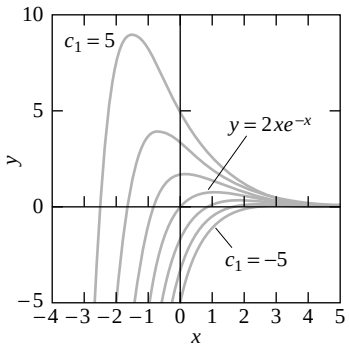


Рис. 3.1.10. Решения $y(x) = c_1 e^{-x} + 2xe^{-x}$ уравнения $y'' + 2y' + y = 0$ с различными значениями c_1

Характеристическое уравнение (18) может иметь как действительные, так и комплексные корни. Случай комплексных корней будет рассмотрен в разделе 3.3.

3.1. Задачи

В задачах 1–16 даны однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка, две функции y_1 и y_2 и начальные данные. Сначала проверьте, что функции y_1 и y_2 являются решениями дифференциального уравнения, затем найдите частное решение $y = c_1y_1 + c_2y_2$, которое удовлетворяет заданным начальным условиям. Штрихи везде обозначают производные по x.

1. $y'' - y = 0$; $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$

2. $y'' - 9y = 0$; $y_1 = e^{3x}$, $y_2 = e^{-3x}$; $y(0) = -1$, $y'(0) = 15$

3. $y'' + 4y = 0$; $y_1 = \cos 2x$, $y_2 = \sin 2x$; $y(0) = 3$, $y'(0) = 8$

4. $y'' + 25y = 0$; $y_1 = \cos 5x$, $y_2 = \sin 5x$; $y(0) = 10$, $y'(0) = -10$

5. $y'' - 3y' + 2y = 0$; $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

6. $y'' + y' - 6y = 0$; $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{-3x}$; $y(0) = 7$, $y'(0) = -1$

7. $y'' + y' = 0$; $y_1 = 1$, $y_2 = e^{-x}$; $y(0) = -2$, $y'(0) = 8$

8. $y'' - 3y' = 0$; $y_1 = 1$, $y_2 = e^{3x}$; $y(0) = 4$, $y'(0) = -2$

9. $y'' + 2y' + y = 0$; $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = xe^{-x}$; $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$

10. $y'' - 10y' + 25y = 0$; $y_1 = e^{5x}$, $y_2 = xe^{5x}$; $y(0) = 3$, $y'(0) = 13$

11. $y'' - 2y' + 2y = 0$; $y_1 = e^x \cos x$, $y_2 = e^x \sin x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$

12. $y'' + 6y' + 13y = 0$; $y_1 = e^{-3x} \cos 2x$, $y_2 = e^{-3x} \sin 2x$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$

13. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$; $y_1 = x$, $y_2 = x^2$; $y(1) = 3$, $y'(1) = 1$

14. $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$; $y_1 = x^2$, $y_2 = x^{-3}$; $y(2) = 10$, $y'(2) = 15$

15. $x^2y'' - xy' + y = 0$; $y_1 = x$, $y_2 = x \ln x$; $y(1) = 7$, $y'(1) = 2$

16. $x^2y'' + xy' + y = 0$; $y_1 = \cos(\ln x)$, $y_2 = \sin(\ln x)$; $y(1) = 2$, $y'(1) = 3$

На примере следующих трех задач видно, что принцип суперпозиции для нелинейных уравнений, вообще говоря, не выполняется.

17. Покажите, что функция $y = 1/x$ является решением уравнения $y' + y^2 = 0$, но при $c \neq 0$ и $c \neq 1$ функция $y = c/x$ решением не является.

18. Покажите, что функция $y = x^3$ является решением $yy'' = 6x^4$, но при $c^2 \neq 1$ функция $y = cx^3$ решением не является.

19. Покажите, что функции $y_1 \equiv 1$ и $y_2 = \sqrt{x}$ являются решениями уравнения $yy'' + (y')^2 = 0$, но их сумма $y = y_1 + y_2$ решением не является.

В задачах 20–26 определите, являются ли данные пары функций линейно независимыми на действительной оси.

20. $f(x) = \pi$, $g(x) = \cos^2 x + \sin^2 x$

21. $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2|x|$

22. $f(x) = 1 + x$, $g(x) = 1 + |x|$

23. $f(x) = xe^x$, $g(x) = |x|e^x$

24. $f(x) = \sin^2 x$, $g(x) = 1 - \cos 2x$

25. $f(x) = e^x \sin x$, $g(x) = e^x \cos x$

26. $f(x) = 2\cos x + 3\sin x$, $g(x) = 3\cos x - 2\sin x$

27. Пусть y_p — частное решение неоднородного дифференциального уравнения $y'' + py' + qy = f(x)$, а y_c — решение соответствующего однородного уравнения. Покажите, что $y = y_c + y_p$ также является решением данного неоднородного уравнения.

28. Зная, что в условии задачи 27 решениями уравнения $y'' + y = 1$ являются функции $y_p = 1$ и $y_c = c_1 \cos x + c_2 \sin x$, найдите то решение этого уравнения, которое удовлетворяет начальному условию $y(0) = -1 = y'(0)$.

29. Покажите, что $y_1 = x^2$ и $y_2 = x^3$ — два различных решения уравнения $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$, каждое из которых удовлетворяет начальным данным $y(0) = 0 = y'(0)$. Объясните, почему это не противоречит утверждению о единственности решения в теореме 2.

30. **(a)** Покажите, что $y_1 = x^3$ и $y_2 = |x^3|$ — линейно независимые (на действительной оси) решения уравнения $x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$. **(b)** Проверьте, что определитель Вронского $W(y_1, y_2)$ тождественно равен нулю. Почему это не противоречит утверждению теоремы 3?

31. Покажите, что $y_1 = \sin x^2$ и $y_2 = \cos x^2$ — линейно независимые функции, но их определитель Вронского равен нулю при $x = 0$. Почему из этого следует, что *не существует* дифференциального уравнения вида $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ с непрерывными на всей действительной оси коэффициентами p и q, решениями которого являются y_1 и y_2?

32. Пусть y_1 и y_2 — два решения уравнения $A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0$ на открытом интервале I, где A, B и C непрерывны и $A(x)$ нигде не обращается в нуль. **(a)** Пусть $W = W(y_1, y_2)$. Покажите, что

$$A(x)\frac{dW}{dx} = (y_1)(Ay_2'') - (y_2)(Ay_1'').$$

Выразив Ay_2'' и Ay_1'' из исходного дифференциального уравнения, покажите, что

$$A(x)\frac{dW}{dx} = -B(x)W(x).$$

(b) Решив это дифференциальное уравнение, докажите **формулу Абеля**

$$W(x) = K\exp\left(-\int\frac{B(x)}{A(x)}\,dx\right),$$

где K — некоторая постоянная. **(c)** Как с помощью формулы Абеля доказать, что определитель Вронского $W(y_1, y_2)$ либо тождественно равен нулю, либо нигде не обращается в нуль (утверждение теоремы 3)?

В задачах 33–42 найдите общие решения дифференциальных уравнений, используя теоремы 5 и 6. Штрихи обозначают производные по x.

33. $y'' - 3y' + 2y = 0$
34. $y'' + 2y' - 15y = 0$
35. $y'' + 5y' = 0$
36. $2y'' + 3y' = 0$
37. $2y'' - y' - y = 0$
38. $4y'' + 8y' + 3y = 0$
39. $4y'' + 4y' + y = 0$
40. $9y'' - 12y' + 4y = 0$
41. $6y'' - 7y' - 20y = 0$
42. $35y'' - y' - 12y = 0$

В задачах 43–48 даны общие решения $y(x)$ однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами $ay'' + by' + cy = 0$. Найдите соответствующие уравнения.

43. $y(x) = c_1 + c_2e^{-10x}$
44. $y(x) = c_1e^{10x} + c_2e^{-10x}$
45. $y(x) = c_1e^{-10x} + c_2xe^{-10x}$
46. $y(x) = c_1e^{10x} + c_2e^{100x}$
47. $y(x) = c_1 + c_2x$
48. $y(x) = e^x\left(c_1e^{x\sqrt{2}} + c_2e^{-x\sqrt{2}}\right)$

В задачах 49 и 50 рассматриваются графики решений уравнения $y'' + 3y' + 2y = 0$, изображенные на рис. 3.1.6 и 3.1.7.

49. Найдите наивысшую точку на той интегральной кривой, которая изображенна на рис. 3.1.6 и удовлетворяет условиям $y(0) = 1$ и $y'(0) = 6$.

50. Найдите на рис. 3.1.7 точку пересечения интегральных кривых в третей четверти.

51. Уравнение Эйлера второго порядка имеет вид

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0 \tag{22}$$

где a, b, c — постоянные. **(a)** Покажите, что если $x > 0$, то с помощью подстановки $v = \ln x$ уравнение (22) приводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами

$$a\frac{d^2y}{dv^2} + (b-a)\frac{dy}{dv} + cy = 0 \tag{23}$$

относительно неизвестной переменной v. **(b)** Покажите, что если корни r_1 и r_2 характеристического уравнения дифференциального уравнения (23) действительны и различны, то общее решение уравнения Эйлера (22) — $y(x) = c_1x^{r_1} + c_2x^{r_2}$.

В задачах 52–56 найдите общие решения уравнений Эйлера (для $x > 0$), сделав подстановку $v = \ln x$ из задачи 51.

52. $x^2y'' + xy' - y = 0$
53. $x^2y'' + 2xy' - 12y = 0$
54. $4x^2y'' + 8xy' - 3y = 0$
55. $x^2y'' + xy' = 0$
56. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$

3.1. Приложение. Построение графиков семейств решений уравнений второго порядка

В этом приложении будет идти речь о построении семейств решений уравнений на компьютере (таких как на рис. 3.1.6 и 3.1.7). Покажите, что общее решение уравнения

$$y'' + 3y' + 2y = 0 \tag{1}$$

имеет вид

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}. \tag{2}$$

Для рис. 3.1.6, покажите, что частное решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным данным $y(0) = 1, y'(0) = b$, представляет собой функцию

$$y(x) = (b+2)e^{-x} - (b+1)e^{-2x}. \tag{3}$$

С помощью следующего цикла на входном языке системы MATLAB:

```
x = - 1 : 0.02 : 5     % x - вектор от x = - 1 до x = 5
for b = -6 : 2 : 6     % для b = -6 до 6 шаг db = 2 выполнить
   y = (b + 2)*exp(-x) - (b + 1)*exp(-2*x);
   plot(x,y)
end
```

был создан рис. 3.1.6.

Покажите для рис. 3.1.7, что частное решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = a, y'(0) = 1$, задается формулой

$$y(x) = (2a+1)e^{-x} - (a+1)e^{-2x}. \tag{4}$$

С помощью следующего цикла на входном языке системы MATLAB:

```
x = -2 : 0.02 : 4      % x - вектор от x = -2 до x = 4
for a = -3 : 1 : 3     % для a = -3 до 3 шаг da = 1 выполнить
   y = (2*a + 1)*exp(-x) - (a + 1)*exp(-2*x);
   plot(x,y)
end
```

был создан рис. 3.1.7.

Графические калькуляторы (т. е. калькуляторы с возможностью построения графиков) и системы компьютерной алгебры (такие как *Maple* и *Mathematica*) могут выполнять циклы for, подобные приведенным выше. Сначала попытайтесь с их помощью начертить рис. 3.1.6 и 3.1.7. Затем постройте те семейства решений следующих уравнений, которые удовлетворяют условию либо $y(0) = 1$, либо условию $y'(0) = 1$.

1. $y'' - y = 0$

2. $y'' - 3y' + 2y = 0$

3. $2y'' + 3y' + y = 0$

4. $y'' + y = 0$ (см. пример 1)

5. $y'' + 2y' + 2y = 0$, общее решение которого $y(x) = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$.

3.2. Общие решения линейных уравнений

Теперь мы естественным образом обобщим изложенное в разделе 3.1 для линейных уравнений второго порядка на случай **линейного** дифференциального уравнения n**-го порядка** вида

$$P_0(x)y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = F(x). \tag{1}$$

Мы всегда (если не сказано иное) будем предполагать, что (известные) функции $P_i(x)$ и $F(x)$ непрерывны на некотором, возможно неограниченном интервале I (на котором мы хотим найти решение уравнения). Если дополнительно предположить, что $P_0(x) \neq 0$ всюду на I, мы можем разделить все слагаемые в уравнении (1) на $P_0(x)$ (чтобы коэффициент при старшей производной был равен 1)

➤
$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x). \tag{2}$$

Однородное линейное уравнение, **соответствующее** уравнению (2), представляет собой уравнение

➤
$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0. \tag{3}$$

Как и для уравнения второго порядка, *однородное* линейное дифференциальное уравнение n-го порядка обладает тем свойством, что любая *линейная комбинация* решений также является решением. Доказательство последующей теоремы с точностью до технических деталей аналогично доказательству теоремы 1 раздела 3.1.

Теорема 1 Принцип суперпозиции для однородных уравнений

Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — решения однородного уравнения (3) на интервале I. Тогда при любых постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_n$ линейная комбинация

➤
$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n \tag{4}$$

также является решением уравнения (3) на I. ▲

Пример 1 Легко проверить, что функции

$$y_1(x) = e^{-3x}, \quad y_2(x) = \cos 2x \quad \text{и} \quad y_3(x) = \sin 2x$$

являются решениями однородного уравнения третьего порядка

$$y^{(3)} + 3y'' + 4y' + 12y = 0$$

на всей действительной оси. По теореме 1 любая линейная комбинация, в частности

$$y(x) = -3y_1(x) + 3y_2(x) - 2y_3(x) = -3e^{-3x} + 3\cos 2x - 2\sin 2x,$$

также является решением на всей действительной оси. В дальнейшем мы увидим, что верно и обратное утверждение: каждое уравнение является линейной комбинацией y_1, y_2 и y_3. Поэтому общее решение этого уравнения может быть представлено в виде

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x.$$ ■

Существование и единственность решений

В разделе 3.1 было показано, что частное решение линейного уравнения *второго порядка* однозначно определяется *двумя* начальными условиями. Аналогично, частное решение линейного дифференциального уравнения n-го порядка задается n начальными условиями. Следующая теорема является естественным обобщением теоремы 2 раздела 3.1 (доказательство приведено в приложении).

Теорема 2 Существование и единственность решений линейных дифференциальных уравнений

Пусть функции $p_1, p_2, \ldots, p_n$ и f непрерывны на открытом интервале I, содержащем точку a. Тогда для любых заданных n чисел b_0, b_1, …, b_{n-1} линейное уравнение n-го порядка (уравнение (2))

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x)$$

имеет единственное (т. е. ровно одно) решение на всем интервале I, удовлетворяющее n начальным условиям

$$y(a) = b_0, \quad y'(a) = b_1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(a) = b_{n-1}. \tag{5}$$

▲

Уравнение (2) и условия (5) составляют **задачу Коши** для уравнения n-го порядка. По теореме 2 любая такая задача имеет единственное решение на *всем* интервале I непрерывности коэффициентов уравнения (2). Однако теорема 2 не поясняет, как найти это решение. В разделе 3.3 для достаточно важного в приложениях случая *постоянных* коэффициентов мы научимся строить решения задачи Коши (задачи с начальными условиями) в явном виде.

Пример 1

Продолжение

Мы уже знаем, что функция

$$y(x) = -3e^{-3x} + 3\cos 2x - 2\sin 2x$$

является решением уравнения

$$y^{(3)} + 3y'' + 4y' + 12y = 0$$

на всей действительной оси. Начальные условия для этого частного решения можно записать в виде $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$ и $y''(0) = -39$. Согласно теореме 2, других решений, удовлетворяющих этим условиям, нет. Заметим, что график этого решения в правой части рис. 3.2.1 похож на график периодической функции. В самом деле, $y(x) \approx 3\cos 2x - 2\sin 2x$ для больших положительных x (из-за отрицательной степени экспоненты). ■

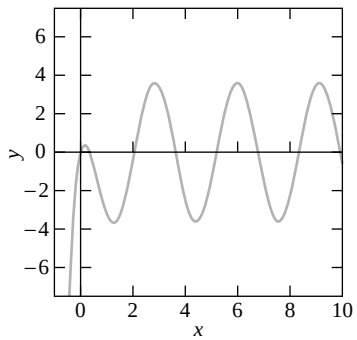


Рис. 3.2.1. Частное решение $y(x) = -3e^{-3x} + 3\cos 2x - 2\sin 2x$

Замечание. Общее решение уравнения третьего порядка в примере 1 содержит три произвольных постоянных c_1, c_2 и c_3. Поэтому уравнение имеет трехпараметрическое семейство решений, причем каждый параметр может принимать бесконечное множество значений. В этом семействе можно выделить три семейства решений особенно простого вида:

- $y(x) = c_1 e^{-3x}$ (получается из общего решения при $c_2 = c_3 = 0$);
- $y(x) = c_2 \cos 2x$ (получается из общего решения при $c_1 = c_3 = 0$);
- $y(x) = c_3 \sin 2x$ (получается из общего решения при $c_1 = c_2 = 0$).

С другой стороны, по теореме 2 трехпараметричность семейства решений обусловлена произвольным выбором трех начальных данных в условиях $y(0) = b_0$, $y'(0) = b_1$ и $y''(0) = b_2$. На рис. 3.2.2–3.2.4 изображены три соответствующих семейства решений (для каждого из них два начальных значения равны 0). ■

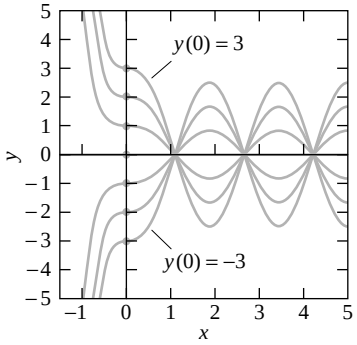


Рис. 3.2.2. Решения уравнения $y^{(3)} + 3y'' + 4y' + 12y = 0$ при $y'(0) = y''(0) = 0$ для различных значений $y(0)$

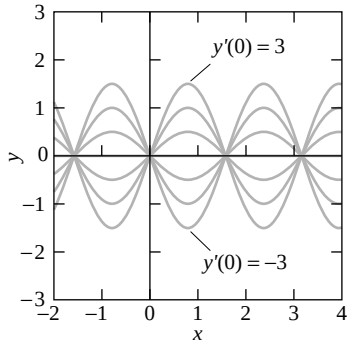


Рис. 3.2.3. Решения уравнения $y^{(3)} + 3y'' + 4y' + 12y = 0$ при $y(0) = y''(0) = 0$ для различных значений $y'(0)$

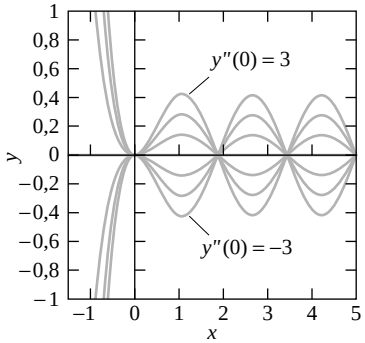


Рис. 3.2.4. Решения уравнения $y^{(3)} + 3y'' + 4y' + 12y = 0$ при $y(0) = y'(0) = 0$ для различных значений $y''(0)$

Заметим, что по теореме 2 *тривиальное* решение $y(x) \equiv 0$ является единственным решением *однородного* уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0, \tag{3}$$

удовлетворяющим *тривиальным* начальным условиям

$$y(a) = y'(a) = \cdots = y^{(n-1)}(a) = 0.$$

Пример 2 Легко проверить, что функции

$$y_1(x) = x^2 \quad \text{и} \quad y_2(x) = x^3$$

представляют собой два решения уравнения

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

Кроме того, оба эти решения удовлетворяют начальным условиям $y(0) = y'(0) = 0$. Почему это не противоречит теореме 2? Причина состоит в том, что старший коэффициент дифференциального уравнения равен нулю при $x = 0$. Поэтому на интервале, содержащем $x = 0$, уравнение не может быть записано в форме (3) с *непрерывными* коэффициентами. ■

Линейно независимые решения

На основе наших знаний об уравнениях второго порядка можно предположить, что общее решение *однородного* линейного уравнения n-го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \tag{3}$$

является линейной комбинацией

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n, \tag{4}$$

частных решений y_1, y_2, ..., y_n уравнения (3). Но эти n частных решений должны быть "достаточно независимыми", чтобы в равенстве (4) c_1, c_2, ..., c_n можно было выбрать так, чтобы полученное при этом решение удовлетворяло произвольным начальным условиям вида (5). В чем же заключается эта *независимость* трех и более функций?

Напомним, что *две* функции f_1 и f_2 линейно *зависимы*, если одна из них является произведением другой на некоторую постоянную (т. е. если или $f_1 = kf_2$, или $f_2 = kf_1$ для некоторой постоянной k). Из этого условия, записанного в виде

$$(1)f_1 + (-k)f_2 = 0 \quad \text{или} \quad (k)f_1 + (-1)f_2 = 0,$$

видно, что если f_1 и f_2 линейно зависимы, то существуют некоторые *одновременно не равные нулю* постоянные c_1 и c_2, такие что

$$c_1f_1 + c_2f_2 = 0. \tag{6}$$

Наоборот, если такие c_1 и c_2 существуют, то из (6) очевидным образом следует линейная зависимость функций f_1 и f_2.

По аналогии с равенством (6) n функций f_1, f_2, ..., f_n называются *линейно зависимыми*, если их некоторая *нетривиальная* линейная комбинация

$$c_1f_1 + c_2f_2 + \cdots + c_nf_n$$

тождественно равна нулю. *Нетривиальность* здесь означает, что *не все* из коэффициентов c_1, c_2, ..., c_n нулевые (хотя некоторые, возможно, равны нулю).

Определение. Линейная зависимость функций

Функции f_1, f_2, ..., f_n называются **линейно зависимыми** на интервале I, если существуют константы c_1, c_2, ..., c_n, не все равные нулю, притом такие что

$$c_1f_1 + c_2f_2 + \cdots + c_nf_n = 0 \tag{7}$$

на I; т. е.

$$c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \cdots + c_nf_n(x) = 0$$

для всех x из I.

Очевидно, что в равенстве (7) хотя бы один коэффициент может быть отличен от нуля тогда и только тогда, когда хотя бы одну функцию можно выразить в виде линейной комбинации других (следовательно, $f_1, f_2, \ldots, f_n$ линейно зависимы лишь в этом случае).

Пример 3 Функции

$$f_1(x) = \sin 2x, \quad f_2(x) = \sin x \cos x \quad \text{и} \quad f_3(x) = e^x$$

линейно зависимы на действительной оси, так как

$$(1)f_1 + (-2)f_2 + (0)f_3 = 0$$

(по известному тригонометрическому тождеству $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$). ■

Функции $f_1, f_2, \ldots, f_n$ называются **линейно независимыми** на интервале I, если они не являются линейно зависимыми на нем, т. е. равенство

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n = 0 \tag{7}$$

выполняется на I лишь в тривиальном случае

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0.$$

Таким образом, функции линейно независимы на интервале I, если *ни одна* нетривиальная линейная комбинация не равна тождественно нулю на I. Другими словами, функции f_1, $f_2, \ldots, f_n$ линейно независимы, если ни одна из них не является линейной комбинацией остальных. (Почему?)

Иногда в линейной зависимости n данных функций можно убедиться, построив, как в примере 3, их нетривиальную комбинацию, которая тождественно равна нулю. Но чтобы показать, что n заданных функций линейно независимы, необходимо доказать, что *не существует* нетривиальной линейной комбинации, тождественно равной нулю. А это может быть существенно труднее.

К счастью, в случае, когда данные n функций являются решениями однородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка, для проверки линейной зависимости можно воспользоваться специальным аппаратом, который во многих случаях позволяет свести такую проверку к рутинной работе. Таким аппаратом является определитель Вронского, определение которого для случая $n = 2$ было дано в разделе 3.1. Предположим, что каждая из n функций $f_1, f_2, \ldots, f_n$ дифференцируема $n-1$ раз. Тогда их **определителем Вронского** называется следующий определитель порядка n:

➤
$$W = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Мы будем обозначать его $W(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ или $W(x)$, в зависимости от того, что мы хотим подчеркнуть — зависимость от функций или от точки x, в которой вычисляется его значение. Этот определитель назван в честь польского математика Вронского (J. M. H. Wronski, 1778–1853)[4].

В разделе 3.1 мы убедились, что определитель Вронского двух линейно зависимых функций тождественно равен нулю. Обобщим это утверждение: *определитель Вронского n линейно зависимых функций f_1, f_2, …, f_n тождественно равен нулю*. Для доказательства этого предположим, что равенство (7) имеет место на интервале I для некоторых значений $c_1, c_2, \ldots, c_n$, не все из которых равны нулю. Продифференцировав это равенство $n-1$ раз, получим n равенств

$$\begin{aligned} c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) \quad &+ \cdots + \quad c_n f_n(x) = 0, \\ c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) \quad &+ \cdots + \quad c_n f_n'(x) = 0, \\ &\vdots \\ c_1 f_1^{(n-1)}(x) + c_2 f_2^{(n-1)}(x) &+ \cdots + c_n f_n^{(n-1)}(x) = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

которые выполняются для всех x из I. Из курса линейной алгебры известно, что система n линейных *однородных* уравнений с n неизвестными имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы ее коэффициентов равен нулю. Определителем системы уравнений (9) относительно неизвестных c_1, c_2, …, c_n является определитель Вронского $W(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ в точке x интервала I. Так что если не все c_i равны нулю, то $W(x) \equiv 0$, что и требовалось доказать.

Следовательно, чтобы показать, что функции f_1, f_2, …, f_n *линейно независимы* на интервале I, достаточно показать, что их определитель Вронского не равен нулю хотя бы в одной точке интервала I.

Пример 4 Покажем, что функции $y_1(x) = e^{-3x}$, $y_2(x) = \cos 2x$ и $y_3(x) = \sin 2x$ (из примера 1) линейно независимы.

[4] Более точно эту фамилию следовало бы писать *Вроньский*, поскольку именно такое написание в большей степени соответствует написанию фамилии Wroński на польском языке. Впрочем, настоящая фамилия этого польского математика и философа-мистика — Хене (Hoene). Поэтому он также известен как Гене-Вронский. Юзеф Мария (Józef Maria) Вронский родился 24 августа 1776 года в Волштыне (Польша). Имел бурную биографию (служил артиллерийским офицером в армии Костюшко, а впоследствии в штабе А. В. Суворова до отставки в 1897 году). Публиковал свои работы по математике начиная с 1811 года. Хотя для его работ характерна чрезвычайная широта и общность постановки задач, система обозначений в них была чрезвычайно сложной, а склоняющийся к мистицизму стиль затруднял изучение его работ. Поэтому разработкой научного наследия Вронского занялись многие математики во второй половине XIX века уже после его смерти. Умер Вронский 9 августа 1853 года в Париже. Функциональный определитель, который теперь изучается во всех достаточно полных курсах анализа и дифференциальных уравнений, был впервые введен Вронским в 1812 году. — *Примеч. ред.*

Решение Их определитель Вронского

$$W = \begin{vmatrix} e^{-3x} & \cos 2x & \sin 2x \\ -3e^{-3x} & -2\sin 2x & 2\cos 2x \\ 9e^{-3x} & -4\cos 2x & -4\sin 2x \end{vmatrix} =$$

$$= e^{-3x}\begin{vmatrix} -2\sin 2x & 2\cos 2x \\ -4\cos 2x & -4\sin 2x \end{vmatrix} + 3e^{-3x}\begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -4\cos 2x & -4\sin 2x \end{vmatrix} +$$

$$+ 9e^{-3x}\begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 26e^{-3x} \neq 0.$$

Поскольку $W \neq 0$ всюду на вещественной оси, y_1, y_2 и y_3 линейно независимы на любом открытом интервале (включая и всю вещественную ось). ■

Пример 5 Покажем сначала, что три решения

$$y_1(x) = x, \quad y_2(x) = x\ln x \quad \text{и} \quad y_3(x) = x^2$$

уравнения третьего порядка

$$x^3 y^{(3)} - x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0 \tag{10}$$

линейно независимы на открытом интервале $x > 0$. Затем найдем частное решение уравнения (10), удовлетворяющее начальным условиям

$$y(1) = 3, \quad y'(1) = 2, \quad y''(1) = 1. \tag{11}$$

Решение Заметим, что при $x > 0$ можно разделить каждое слагаемое в левой части уравнения (10) на x^3. В результате получится однородное уравнение вида (3). Вычислим определитель Вронского трех данных решений:

$$W = \begin{vmatrix} x & x\ln x & x^2 \\ 1 & 1+\ln x & 2x \\ 0 & \dfrac{1}{x} & 2 \end{vmatrix} = x.$$

Поскольку $W(x) \neq 0$ для всех $x > 0$, y_1, y_2 и y_3 линейно независимы на интервале $x > 0$. Чтобы найти требуемое частное решение, подставим начальные данные (11) в систему

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 x + c_2 x\ln x + c_3 x^2, \\ y'(x) &= c_1 + c_2(1+\ln x) + 2c_3 x, \\ y''(x) &= 0 + \frac{c_2}{x} + 2c_3. \end{aligned}$$

Получим систему уравнений

$$\begin{aligned} y(1) &= c_1 + c_3 = 3, \\ y'(1) &= c_1 + c_2 + 2c_3 = 2, \\ y''(1) &= c_2 + 2c_3 = 1. \end{aligned}$$

Ее решения: $c_1 = 1, c_2 = -3, c_3 = 2$. Искомое частное решение:

$$y(x) = x - 3x \ln x + 2x^2. \qquad \blacksquare$$

Если $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$, то (по теореме 4) для любых начальных условий (5) можно найти удовлетворяющее им решение

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n.$$

Для линейно независимых решений теорема 3 гарантирует, что W не обращается в нуль.

Теорема 3 Вронскианы решений

Предположим, что $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — это n решений однородного линейного уравнения n-го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \tag{3}$$

на открытом интервале I, где все p_i непрерывны. Пусть

$$W = W(y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

(a) Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно зависимы, то $W \equiv 0$ на I.

(b) Если $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно независимы, то $W \neq 0$ в каждой точке I.

Иными словами, возможны лишь два случая: либо $W = 0$ всюду на I, либо $W \neq 0$ на всем I.

Доказательство. Пункт (a) мы уже доказали. Чтобы доказать (b), предположим, что $W(a) = 0$ в некоторой точке I. Достаточно показать, что тогда решения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно зависимы. Но $W(a)$ есть определитель матрицы коэффициентов системы n однородных линейных уравнений

$$\begin{aligned} c_1 y_1(a) + \quad & c_2 y_2(a) + \cdots + \quad c_n y_n(a) = 0, \\ c_1 y_1'(a) + \quad & c_2 y_2'(a) + \cdots + \quad c_n y_n'(a) = 0, \\ & \vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(a) + {} & c_2 y_2^{(n-1)}(a) + \cdots + c_n y_n^{(n-1)}(a) = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

относительно n неизвестных $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Если бы $W(a) = 0$, то из известной теоремы линейной алгебры (той, которую мы уже использовали сразу после (9)), следовало бы, что система (12) имеет нетривиальное решение. Иными словами, существовало бы нетривиальное решение $c_1, c_2, \ldots, c_n$, в котором не все эти числа равны нулю.

Рассмотрим соответствующее этим числам частное решение

$$Y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) \tag{13}$$

уравнения (3). Из системы уравнений (12) следует, что Y удовлетворяет тривиальным начальным условиям

$$Y(a) = Y'(a) = \cdots = Y^{(n-1)}(a) = 0.$$

Тогда из единственности решений (теорема 2) следует, что $Y(x) \equiv 0$ на I. Учитывая (13) и выбор $c_1, c_2, \ldots, c_n$ (не все равны нулю), получаем противоречие: решения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ линейно зависимы. Это и завершает доказательство теоремы 3. ▲

Общие решения

Теперь мы уже можем показать, что любое решение *однородного* уравнения n-го порядка можно представить как линейную комбинацию n данных линейно независимых решений. Доказательство следующей теоремы по существу аналогично доказательству теоремы 4 раздела 3.1 (случай $n = 2$). Нужно лишь воспользоваться утверждением теоремы 3: определитель Вронского n линейно независимых решений не равен нулю.

Теорема 4 Общие решения однородных уравнений

Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — это n линейно независимых решений однородного дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = 0 \tag{3}$$

на открытом интервале I, где все p_i непрерывны. Если Y — произвольное решение уравнения (3), то существуют постоянные $c_1, c_2, \ldots, c_n$, такие что

$$Y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

для всех x из I. ▲

Следовательно, *любое* решение однородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка является линейной комбинацией

➤ $$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$$

любых n данных линейно независимых решений. На основе этого мы будем называть такую линейную комбинацию **общим решением** дифференциального уравнения.

Пример 6 Рассматривая пример 4, мы установили, что частные решения $y_1(x) = e^{-3x}$, $y_2(x) = \cos 2x$ и $y_3(x) = \sin 2x$ линейного дифференциального уравнения $y^{(3)} + 3y'' + 4y' + 12y = 0$ линейно независимы. С другой стороны, по теореме 2 для любых заданных b_0, b_1 и b_2 существует частное решение $y(x)$, удовлетворяющее условиям $y(0) = b_0$, $y'(0) = b_1$

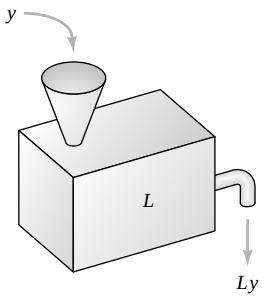


Рис. 3.2.5. Вот так оператор L "действует" на функцию y

и $y''(0) = b_2$. Согласно теореме 4, *это* частное решение является линейной комбинацией y_1, y_2 и y_3. Иными словами, существуют числа c_1, c_2 и c_3, такие что

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x.$$

Последовательным дифференцированием и подстановкой $x = 0$ можно убедиться, что для определения этих коэффициентов (см. приложение к этому разделу) нужно лишь решить систему трех линейных уравнений

$$\begin{aligned} c_1 + \ c_2 \qquad &= b_0, \\ -3c_1 \qquad + 2c_3 &= b_1, \\ 9c_1 - 4c_2 \qquad &= b_2. \end{aligned}$$

■

Неоднородные уравнения

Рассмотрим теперь *неоднородное* линейное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$Ly = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x). \tag{2}$$

Соответствующее ему однородное уравнение имеет вид

$$Ly = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0. \tag{3}$$

Буквой L обозначим **оператор**, в результате *действия* которого на n раз дифференцируемую функцию y (рис. 3.2.5) получается линейная комбинация

$$Ly = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y \tag{14}$$

функции y и ее первых n производных. Принцип суперпозиции (теорема 1) просто означает, что оператор L линейный; это значит, что

$$L(c_1y_1 + c_2y_2) = c_1Ly_1 + c_2Ly_2 \tag{15}$$

для любых постоянных c_1 и c_2.

Предположим, что известно некоторое решение y_p неоднородного уравнения (2) и что Y — произвольное (другое) решение (2). Тогда из равенства (15) следует, что

$$L(Y - y_p) = LY - Ly_p = f - f = 0.$$

Таким образом, $y_c = Y - y_p$ является решением соответствующего однородного уравнения (3). Тогда

$$Y = y_c + y_p, \tag{16}$$

и, по теореме 4

$$y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n, \tag{17}$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — линейно независимые решения соответствующего *однородного* уравнения. Назовем y_c **дополняющей функцией** неоднородного уравнения. Таким образом, мы только что доказали, что *общее решение* неоднородного уравнения (2) можно представить в виде суммы общего решения y_c соответствующего однородного уравнения и какого-либо частного решения y_p неоднородного уравнения (2).

Теорема 5 Решения неоднородных уравнений

Пусть y_p — частное решение неоднородного линейного дифференциального уравнения (2) на открытом интервале I, на котором непрерывны функции p_i и f. Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — линейно независимые решения соответствующего однородного уравнения (3). Если Y — некоторое произвольное решение уравнения (2) на I, то существуют некоторые числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$, такие что

$$Y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) + y_p(x) \tag{18}$$

для всех x в I. ▲

Пример 7 Очевидно, что $y_p = 3x$ — это частное решение уравнения

$$y'' + 4y = 12x \tag{19}$$

и что $y_c(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$ решение соответствующего ему однородного уравнения. Найдем решение уравнения (19), которое удовлетворяет условиям $y(0) = 5, y'(0) = 7$.

Решение Общее решение уравнения (19) имеет вид

$$y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + 3x.$$

Тогда

$$y'(x) = -2c_1 \sin 2x + 2c_2 \cos 2x + 3.$$

Поэтому из начальных условий следует, что

$$y(0) = c_1 = 5,$$

$$y'(0) = 2c_2 + 3 = 7.$$

Отсюда находим $c_1 = 5$ и $c_2 = 2$. Следовательно, искомым решением является функция

$$y(x) = 5\cos 2x + 2\sin 2x + 3x. \qquad \blacksquare$$

3.2. Задачи

В задачах 1–6 непосредственной проверкой покажите, что данные функции линейно зависимы на действительной оси (найдите тождественно равную нулю нетривиальную линейную комбинацию данных функций).

1. $f(x) = 2x$, $g(x) = 3x^2$, $h(x) = 5x - 8x^2$
2. $f(x) = 5$, $g(x) = 2 - 3x^2$, $h(x) = 10 + 15x^2$
3. $f(x) = 0$, $g(x) = \sin x$, $h(x) = e^x$
4. $f(x) = 17$, $g(x) = 2\sin^2 x$, $h(x) = 3\cos^2 x$
5. $f(x) = 17$, $g(x) = \cos^2 x$, $h(x) = \cos 2x$
6. $f(x) = e^x$, $g(x) = \cosh x$, $h(x) = \sinh x$

В задачах 7–12, используя определитель Вронского, докажите линейную независимость данных функций на указанном интервале.

7. $f(x) = 1$, $g(x) = x$, $h(x) = x^2$; на действительной оси
8. $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{2x}$, $h(x) = e^{3x}$; на действительной оси
9. $f(x) = e^x$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = \sin x$; на действительной оси
10. $f(x) = e^x$, $g(x) = x^{-2}$, $h(x) = x^{-2}\ln x$; $x > 0$
11. $f(x) = x$, $g(x) = xe^x$, $h(x) = x^2e^x$; на действительной оси
12. $f(x) = x$, $g(x) = \cos(\ln x)$, $h(x) = \sin(\ln x)$; $x > 0$

В задачах 13–20 заданы однородное линейное уравнение третьего порядка и три линейно независимых его решения. Найдите частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

13. $y^{(3)} + 2y'' - y' - 2y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 0$; $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$, $y_3 = e^{-2x}$
14. $y^{(3)} - 6y'' + 11y' - 6y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 3$; $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$, $y_3 = e^{3x}$
15. $y^{(3)} - 3y'' + 3y' - y = 0$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$; $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$, $y_3 = x^2e^x$
16. $y^{(3)} - 5y'' + 8y' - 4y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$, $y''(0) = 0$; $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$, $y_3 = xe^{2x}$
17. $y^{(3)} + 9y' = 0$; $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 2$; $y_1 = 1$, $y_2 = \cos 3x$, $y_3 = \sin 3x$
18. $y^{(3)} - 3y'' + 4y' - 2y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$; $y_1 = e^x$, $y_2 = e^x\cos x$, $y_3 = e^x\sin x$.
19. $x^3y^{(3)} - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$; $y(1) = 6$, $y'(1) = 14$, $y''(1) = 22$; $y_1 = x$, $y_2 = x^2$, $y_3 = x^3$
20. $x^3y^{(3)} + 6x^2y'' + 4xy' - 4y = 0$; $y(1) = 1$, $y'(1) = 5$, $y''(1) = -11$; $y_1 = x$, $y_2 = x^{-2}$, $y_3 = x^{-2}\ln x$

В задачах 21–24 заданы неоднородное дифференциальное уравнение, его частное решение y_p и общее решение соответствующего однородного уравнения y_c. Найдите решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

21. $y'' + y = 3x$; $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$;
$y_c = c_1\cos x + c_2\sin x$; $y_p = 3x$
22. $y'' - 4y = 12$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 10$;
$y_c = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$; $y_p = -3$
23. $y'' - 2y' - 3y = 6$; $y(0) = 3$, $y'(0) = 11$;
$y_c = c_1e^{-x} + c_2e^{3x}$; $y_p = -2$
24. $y'' - 2y' + 2y = 2x$; $y(0) = 4$, $y'(0) = 8$;
$y_c = c_1e^x\cos x + c_2e^x\sin x$; $y_p = x + 1$

25. Пусть $Ly = y'' + py' + qy$. Предположим, что y_1 и y_2 такие функции, что

$$Ly_1 = f(x) \quad \text{и} \quad Ly_2 = g(x).$$

Покажите, что их сумма $y = y_1 + y_2$ — решение неоднородного уравнения $Ly = f(x) + g(x)$.

26. **(a)** Найдите частные решения неоднородных уравнений

$$y'' + 2y = 4 \quad \text{и} \quad y'' + 2y = 6x.$$

(b) Используя результат задачи 25, найдите частное решение дифференциального уравнения $y'' + 2y = 6x + 4$.

27. Докажите, что функции

$$f_1(x) \equiv 1, \quad f_2(x) = x, \quad \text{и} \quad f_3(x) = x^2$$

линейно независимы на всей действительной оси. (*Указание*. Предположите, что $c_1 + c_2x + c_3x^2 = 0$. Затем продифференцируйте это равенство дважды. Вы получите три равенства, которые должны выполняться для всех действительных x, включая и значение $x = 0$. Выведите из этого, что $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.)

28. Обобщив метод задачи 27, докажите, что функции

$$f_0(x) \equiv 1, \;\; f_1(x) = x, \;\; f_2(x) = x^2, \ldots, \;\; f_n(x) = x^n$$

линейно независимы на всей действительной оси.

29. Используя результат задачи 28 и определение линейной независимости, докажите, что для любой постоянной r функции

$$f_0(x) = e^{rx}, \quad f_1(x) = xe^{rx}, \ldots, \quad f_n(x) = x^n e^{rx}$$

линейно независимы на всей действительной оси.

30. Проверьте, что функции $y_1 = x$ и $y_2 = x^2$ линейно независимы на всей действительной оси и являются на ней решениями дифференциального уравнения

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

Однако их определитель Вронского $W(x, x^2)$ равен нулю при $x = 0$. Почему это обстоятельство не противоречит части (b) теоремы 3?

31. В этой задаче выясняется, почему на решение дифференциального уравнения n-го порядка можно наложить *только* n начальных условий. **(a)** Дано уравнение

$$y'' + py' + qy = 0.$$

Объясните, почему значение $y''(a)$ полностью определяется значениями $y(a)$ и $y'(a)$. **(b)** Докажите, что уравнение

$$y'' - 2y' - 5y = 0$$

имеет решение, удовлетворяющее условиям

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad \text{и} \quad y''(0) = C$$

тогда и только тогда, когда $C = 5$.

32. Докажите, что однородное линейное дифференциальное уравнение n-го порядка, удовлетворяющее условиям теоремы 2, имеет n линейно независимых решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$. (*Указание*. Обозначьте через y_i то единственное решение уравнения, которое удовлетворяет условиям

$$y_i^{(i-1)}(a) = 1 \quad \text{и} \quad y_i^{(k)}(a) = 0 \quad \text{при } k \neq i - 1.)$$

33. Предположим, что все три числа r_1, r_2 и r_3 различны. Покажите, что в этом случае три функции $\exp(r_1 x)$, $\exp(r_2 x)$ и $\exp(r_3 x)$ линейно независимы. Для этого покажите, что их определитель Вронского

$$W = \exp([r_1 + r_2 + r_3]x) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 \end{vmatrix}$$

не равен нулю для всех x.

34. Как известно, **определитель Вандермонда**

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \cdots & r_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

не равен нулю для любых попарно неравных $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Используя этот факт и метод, указанный в задаче 33, покажите, что функции

$$f_i(x) = \exp(r_i x), \quad 1 \leqq i \leqq n$$

линейно независимы.

35. Согласно задаче 32 раздела 3.1, определитель Вронского $W(y_1, y_2)$ двух решений дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

выражается по формуле Абеля

$$W(x) = K \exp\left(-\int p_1(x)\,dx\right)$$

для некоторой постоянной K. Можно доказать, что определитель Вронского n решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ дифференциального уравнения n-го порядка

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

удовлетворяет аналогичному равенству. Для случая $n = 3$ покажите это следующим образом. **(a)** Производная функционального определителя равна сумме функциональных определителей, каждый из которых получается из исходного определителя дифференцированием одной строки. Выведите из этого, что

$$W' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1^{(3)} & y_2^{(3)} & y_3^{(3)} \end{vmatrix}.$$

(b) Подставьте $y_1^{(3)}$, $y_2^{(3)}$ и $y_3^{(3)}$ из уравнения

$$y^{(3)} + p_1 y'' + p_2 y' + p_3 y = 0,$$

и затем покажите, что $W' = -p_1 W$. Формула Абеля теперь получается интегрированием.

36. Предположим, что одно из решений $y_1(x)$ однородного линейного уравнения второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{20}$$

известно на интервале I, причем функции p и q на нем непрерывны. Метод **понижения порядка** уравнения заключается в том, что в уравнение (20) сначала необходимо подставить $y_2(x) = v(x)y_1(x)$. Затем надо попытаться найти функцию $v(x)$, такую что функция $y_2(x)$ представляет собой еще одно (притом линейно независимое) решение данного уравнения. После подстановки $y = v(x)y_1(x)$ в уравнение (20) учтите, что функция $y_1(x)$ является решением, после чего у вас получится уравнение

$$y_1v'' + (2y_1' + py_1)v' = 0. \tag{21}$$

Если функция $y_1(x)$ известна, то уравнение (21) представляет собой уравнение с разделяющимися переменными относительно производной $v'(x)$ функции $v(x)$. Интегрированием $v'(x)$ находится требуемая (отличная от постоянной) функция $v(x)$.

37. Чтобы воспользоваться уравнением (21) для решения однородного линейного уравнения второго порядка (одно решение $y_1(x)$ которого известно), необходимо сначала записать данное уравнение в виде (20) со старшим коэффициентом 1. Это позволит правильно определить коэффициент (функцию) $p(x)$. Однако часто удобнее просто подставить $y = v(x)y_1(x)$ в данное дифференциальное уравнение и затем найти $v(x)$ в явном виде. Поэтому, поверив, что функция $y_1(x) = x^3$ является решением уравнения

$$x^2y'' - 5xy' + 9y = 0 \quad (x > 0),$$

подставьте $y = vx^3$ и получите уравнение $xv'' + v' = 0$. Его решением будет $v(x) = C\ln x$. Подставив $C = 1$, получите второе решение $y_2(x) = x^3\ln x$ этого уравнения.

В задачах 38–45 заданы дифференциальное уравнение и одно его решение y_1. Используя метод понижения порядка аналогично тому, как это было сделано в задаче 37, найдите второе линейно независимое решение y_2.

38. $x^2y'' + xy' - 9y = 0$ $(x > 0)$; $y_1(x) = x^3$

39. $4y'' - 4y' + y = 0$; $y_1(x) = e^{x/2}$

40. $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0$ $(x > 0)$; $y_1(x) = x$

41. $(x+1)y'' - (x+2)y' + y = 0$ $(x > -1)$; $y_1(x) = e^x$

42. $(1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$ $(-1 < x < 1)$; $y_1(x) = x$

43. Сначала поверьте, что функция $y_1(x) = x$ является решением уравнения Лежандра первого порядка

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

Затем используйте метод понижения порядка и получите второе решение

$$y_2(x) = 1 - \frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \quad (\text{при } -1 < x < 1).$$

44. Сначала подстановкой проверьте, что функция $y_1(x) = x^{-1/2}\cos x$ является одним из решений (при $x > 0$) уравнения Бесселя порядка $\frac{1}{2}$,

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \tfrac{1}{4})y = 0.$$

Затем с помощью понижения порядка получите второе решение $y_2(x) = x^{-1/2}\sin x$.

3.2. Приложение. Построение семейств решений уравнений третьего порядка

В этом приложении будет идти речь о построении семейств решений уравнений на компьютере (таких как например рис. 3.2.2–3.2.4). В примере 6 было показано, что общее решение уравнения

$$y^{(3)} + 3y'' + 4y' + 12y = 0 \tag{1}$$

можно представить в виде

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 \cos 2x + c_3 \sin 2x. \tag{2}$$

Используя метод примера 6 для рис. 3.2.2, покажите, что частное решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = a$, $y'(0) = 0$ и $y''(0) = 0$, имеет вид

$$y(x) = \frac{a}{13}\left(4e^{-3x} + 9\cos 2x + 6\sin 2x\right). \tag{3}$$

Рис. 3.2.2 был построен с помощью следующего цикла на входном языке системы MATLAB:

```
x = -1.5 : 0.02 : 5    % x-vector from x = -1.5 to x = 5
for a = -3 : 1 : 3     % for a = -3 to 3 with da = 1 do
   c1 = 4*a/13;
   c2 = 9*a/13;
   c3 = 6*a/13;
   y = c1*exp(-3*x) + c2*cos(2*x) + c3*sin(2*x);
   plot(x,y)
end
```

Взгляните на рис. 3.2.3 и покажите, что частное решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным данным $y(0) = 0$, $y'(0) = b$ и $y''(0) = 0$, задается уравнением

$$y(x) = \frac{b}{2}\sin 2x, \tag{4}$$

Перепишите предшествующий цикл для этого случая.

Взгляните на рис. 3.2.3 и покажите, что частное решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным данным $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ и $y''(0) = c$, можно записать в виде

$$y(x) = \frac{c}{26}\left(2e^{-3x} - 2\cos 2x + 3\sin 2x\right). \tag{5}$$

Графические калькуляторы и системы компьютерной алгебры (такие как *Maple* и *Mathematica*) можно использовать для выполнения указанных выше циклов. Сначала попытайтесь с их помощью получить рис. 3.2.2–3.2.4. Затем постройте аналогичные графики семейств решений уравнений в задачах 13–20.

3.3. Однородные уравнения с постоянными коэффициентами

В разделе 3.2 было показано, что общее решение однородного линейного уравнения n-го порядка является линейной комбинацией n линейно независимых частных решений. Однако о методах поиска решений было сказано мало. Для нахождения решения линейного дифференциального уравнения с *переменными* коэффициентами в общем случае необходимо применить численные методы (глава 2) или использовать разложение в бесконечный ряд (глава 8). Но в случае линейного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами можно в явном виде найти требуемые n линейно независимых решений. В общем случае такое уравнение имеет вид

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{1}$$

где коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ — вещественные постоянные, причем $a_n \neq 0$.

Характеристическое уравнение

Для начала попробуем найти *одно* решение уравнения (1). Заметим, что

$$\frac{d^k}{dx^k}(e^{rx}) = r^k e^{rx}, \tag{2}$$

т. е. любая производная функции e^{rx} представима в виде произведения e^{rx} на константу. Поэтому, подставив $y = e^{rx}$ в уравнение (1), увидим, что все слагаемые являются произведениями e^{rx} на некоторые постоянные, зависящие от r и коэффициентов a_i. Поэтому можно попытаться найти такое значение r, при котором сумма коэффициентов при e^{rx} обратится в нуль. В этом случае функция $y = e^{rx}$ будет решением уравнения (1).

Например, в разделе 3.1 подстановкой $y = e^{rx}$ в уравнение второго порядка

$$ay'' + by' + cy = 0$$

мы получили характеристическое уравнение

$$ar^2 + br + c = 0,$$

корнем которого должно быть искомое значение r.

Чтобы обобщить этот метод, подставим $y = e^{rx}$ в уравнение (1). Из равенства (2) получим, что

$$a_n r^n e^{rx} + a_{n-1} r^{n-1} e^{rx} + \cdots + a_2 r^2 e^{rx} + a_1 r e^{rx} + a_0 e^{rx} = 0;$$

иными словами,

$$e^{rx}\left(a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0\right) = 0.$$

Поскольку функция e^{rx} нигде не равна нулю, $y = e^{rx}$ будет решением уравнения (1) тогда и только тогда, когда r является корнем уравнения

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0. \tag{3}$$

Это уравнение называется **характеристическим уравнением** или **вспомогательным уравнением** дифференциального уравнения (1). Таким образом, мы свели задачу решения дифференциального уравнения к решению обычного алгебраического.

Согласно основной теореме алгебры комплексных чисел многочлен n-й степени (такой как в уравнении (3)) имеет ровно n корней, вообще говоря не обязательно разных и не обязательно действительных. Нахождение точных значений этих корней часто является достаточно сложной задачей; иногда точные значения корней найти не удается. Для уравнений второго порядка достаточно использовать формулу корней квадратного уравнения, но для уравнений более высоких порядков может потребоваться либо угадать разложение многочлена на множители, либо применить численные методы, такие как, например, метод Ньютона (или команда `solve` для калькулятора или компьютера).

Случай различных действительных корней

Будем считать, что каким-либо методом мы нашли корни характеристического уравнения. Тогда, оказывается, можно написать общее решение дифференциального уравнения в явном виде. В случае комплексных или кратных корней уравнения (3) ситуация немного сложнее, поэтому начнем с самого простого случая. Пусть все n корней характеристического уравнения $r_1, r_2, \ldots, r_n$ различны и *действительны*. Тогда функции

$$e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, \ldots, e^{r_n x}$$

все являются решениями уравнения (1) и, кроме того, (см. задачу 34 из раздела 3.2), все эти n решений линейно независимы на всей действительной оси. Таким образом, мы доказали теорему 1.

Теорема 1 Случай различных действительных корней

Пусть корни $r_1, r_2, \ldots, r_n$ характеристического уравнения (3) действительны и различны. Тогда общее решение уравнения (1) имеет вид

➤
$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \cdots + c_n e^{r_n x}. \tag{4}$$

▲

Пример 1 Найдите решение задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$y^{(3)} + 3y'' - 10y' = 0;$$
$$y(0) = 7, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 70.$$

Решение Характеристическое уравнение данного дифференциального уравнения имеет вид

$$r^3 + 3r^2 - 10r = 0.$$

Разложим левую часть на множители. Получим

$$r(r^2 + 3r - 10) = r(r + 5)(r - 2) = 0.$$

Отсюда видно, что характеристическое уравнение имеет различные действительные корни $r = 0$, $r = -5$ и $r = 2$. Так как $e^0 = 1$, согласно теореме 1 общее решение данного уравнения имеет вид

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-5x} + c_3 e^{2x}.$$

Подстановкой начальных условий получим систему уравнений

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 + c_3 = 7, \\ y'(0) &= -5c_2 + 2c_3 = 0, \\ y''(0) &= 25c_2 + 4c_3 = 70 \end{aligned}$$

относительно коэффициентов c_1, c_2 и c_3. Из двух последних уравнений следует, что $y''(0) - 2y'(0) = 35c_2 = 70$, т. е. $c_2 = 2$. Тогда из второго уравнения получим $c_3 = 5$. Наконец, из первого уравнения получим $c_1 = 0$. Таким образом, искомое частное решение уравнения:

$$y(x) = 2e^{-5x} + 5e^{2x}.$$ ■

Многочлен от оператора

Если *не все* корни характеристического уравнения (3) различны (т. е. кратность некоторых корней больше 1), то одной лишь теоремы 1 недостаточно для получения n линейно независимых решений уравнения (1). Например, если корни равны 1, 2, 2 и 2, то с помощью теоремы 1 можно получить лишь *две* функции: e^x и e^{2x}. Таким образом, задача состоит в том, чтобы построить недостающие линейно независимые решения. Для этой цели удобно использовать операторную нотацию, введенную в конце раздела 3.2. Уравнение (1) соответствует операторному уравнению $Ly = 0$, где L — оператор

$$L = a_n \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_2 \frac{d^2}{dx^2} + a_1 \frac{d}{dx} + a_0. \tag{5}$$

Обозначим через $D = d/dx$ операцию дифференцирования по переменной x, т. е.

$$Dy = y', \quad D^2 y = y'', \quad D^3 y = y^{(3)},$$

и т. д. С помощью символа D оператор L, определенный равенством (5), можно записать в виде

$$L = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_2 D^2 + a_1 D + a_0. \tag{6}$$

Правую часть равенства (6) удобно рассматривать как (формальный) многочлен степени n относительно "переменной" D. Полученное выражение называется **полиномом (многочленом) от оператора**[5].

Полином первой степени от оператора имеет вид $D - a$, где a — действительное число. Действуя им на функцию $y = y(x)$, получим

$$(D - a)y = Dy - ay = y' - ay.$$

[5] Точнее, значением **полинома (многочлена) от оператора**. Это значение является, конечно, оператором. — *Примеч. ред.*

Важно отметить коммутативность таких операторов. Иными словами, любые два таких оператора *коммутируют*, т. е.

$$(D-a)(D-b)y = (D-b)(D-a)y \tag{7}$$

для любой дважды дифференцируемой функции $y = y(x)$. Формулу (7) доказывают следующие вычисления:

$$\begin{aligned}(D-a)(D-b)y &= (D-a)(y'-by) = \\ &= D(y'-by) - a(y'-by) = \\ &= y'' - (b+a)y' + aby = y'' - (a+b)y' + bay = \\ &= D(y'-ay) - b(y'-ay) = \\ &= (D-b)(y'-ay) = (D-b)(D-a)y.\end{aligned}$$

Случай кратных корней

Пусть теперь характеристическое уравнение

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0 \tag{3}$$

имеет *кратные* корни. Предположим, например, что уравнение (3) имеет только два разных корня: r_0 кратности 1 и r_1 кратности $k > 1$. Тогда (если разделить на a_n) уравнение (3) можно переписать так:

$$(r-r_1)^k (r-r_0) = (r-r_0)(r-r_1)^k = 0. \tag{8}$$

В этом случае соответствующий оператор L, заданный равенством (6), можно представить в виде

$$L = (D-r_1)^k (D-r_0) = (D-r_0)(D-r_1)^k, \tag{9}$$

причем в соответствии с формулой (7) порядок множителей значения не имеет.

Двумя решениями дифференциального уравнения $Ly = 0$, несомненно, будут функции $y_0 = e^{r_0 x}$ и $y_1 = e^{r_1 x}$. Однако для построения общего решения этого недостаточно, поскольку необходимо найти $k+1$ линейно независимых решений (так как наше уравнение имеет порядок $k+1$). Чтобы найти нужные нам еще $k-1$ решений, заметим, что

$$Ly = (D-r_0)[(D-r_1)^k y] = 0.$$

Следовательно, *каждое* решение уравнения k-го порядка

$$(D-r_1)^k y = 0 \tag{10}$$

будет также решением исходного уравнения $Ly = 0$. Таким образом, нам достаточно найти общее решение уравнения (10).

Учитывая, что $y_1 = e^{r_1 x}$ является решением уравнения (10), попробуем найти решение в виде

$$y(x) = u(x) y_1(x) = u(x) e^{r_1 x}, \tag{11}$$

где функция $u(x)$ является искомой. Заметим, что

$$(D - r_1)\left[ue^{r_1 x}\right] = (Du)e^{r_1 x} + u(r_1 e^{r_1 x}) - r_1(ue^{r_1 x}) = (Du)e^{r_1 x}. \tag{12}$$

Применив это рассуждение k раз, получим, что

$$(D - r_1)^k\left[ue^{r_1 x}\right] = (D^k u)e^{r_1 x} \tag{13}$$

для любой достаточное количество раз дифференцируемой функции $u(x)$. Отсюда следует, что функция $y = ue^{r_1 x}$ является решением уравнения (10) тогда и только тогда, когда $D^k u = u^{(k)} = 0$. Но это равносильно тому, что $u(x)$ является многочленом степени не выше $k - 1$:

$$u(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots + c_k x^{k-1}.$$

Таким образом, искомым решением уравнения (10) является функция

$$y(x) = ue^{r_1 x} = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots + c_k x^{k-1})e^{r_1 x}.$$

В частности, в качестве (недостающих) линейно независимых решений исходного дифференциального уравнения $Ly = 0$ можно выбрать функции $xe^{r_1 x}, x^2 e^{r_1 x}, \ldots, x^{k-1}e^{r_1 x}$.

Предыдущие вычисления, которые мы выполнили для оператора $D - r_1$, можно провести для произвольного многочлена от оператора. Значит, мы доказали следующую теорему.

Теорема 2 Случай кратных корней

Если характеристическое уравнение (3) имеет кратный корень r кратности k, то та часть общего решения дифференциального уравнения (1), которая соответствует корню r, имеет вид

➤ $$(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots + c_k x^{k-1})e^{rx}. \tag{14}$$

▲

Заметим, что, согласно задаче 29 из раздела 3.2, k функций $e^{rx}, xe^{rx}, x^2 e^{rx} \ldots x^{k-1}e^{rx}$, задействованных в формуле (14), линейно независимы на действительной оси. Поэтому корню кратности k соответствуют k линейно независимых решения дифференциального уравнения.

Пример 2 Найдите общее решение дифференциального уравнения пятого порядка

$$9y^{(5)} - 6y^{(4)} + y^{(3)} = 0.$$

Решение Характеристическим уравнением в данном случае будет

$$9r^5 - 6r^4 + r^3 = r^3(9r^2 - 6r + 1) = r^3(3r - 1)^2 = 0.$$

Его корни: $r = 0$ кратности три и $r = \frac{1}{3}$ кратности два. Корень $r = 0$ дает первую часть

$$c_1 e^{0\cdot x} + c_2 x e^{0\cdot x} + c_3 x^2 e^{0\cdot x} = c_1 + c_2 x + c_3 x^2$$

общего решения, а корень $r = \frac{1}{3}$ — вторую: $c_4 e^{x/3} + c_5 x e^{x/3}$. Поэтому общим решением данного дифференциального уравнения будет

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{x/3} + c_5 x e^{x/3}.$$

■

Комплекснозначные функции и формула Эйлера

Поскольку мы предполагаем, что все коэффициенты нашего дифференциального уравнения (и соответственно характеристического уравнения) действительны, любое комплексное (не действительное) число является корнем вместе со своим сопряженным (т. е. эти корни имеют вид $a \pm bi$, где a и b действительны, а $i = \sqrt{-1}$). Поэтому возникает вопрос: что может означать экспонента вида $\exp([a + bi]x)$?

Чтобы ответить на этот вопрос, напомним разложение экспоненты в ряд Тейлора

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots .$$

Если мы подставим $t = ix$ в этот ряд и используем тот факт, что $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, и т. д., то получим

$$\begin{aligned} e^{ix} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \\ &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \cdots = \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right). \end{aligned}$$

Поскольку два ряда в последней строке являются разложениями в ряд Тейлора функций $\cos x$ и $\sin x$ соответственно, получим, что

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \tag{15}$$

Это утверждение известно как **формула Эйлера**. Поэтому мы *определим* экспоненту e^z для произвольного комплексного числа $z = x + iy$ как

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y). \tag{16}$$

Поэтому мы можем утверждать, что комплексный корень характеристического уравнения соответствует комплекснозначному решению дифференциального уравнения. **Комплекснозначная функция** F действительной переменной x ставит в соответствие любому действительному числу x из своей области определения комплексное число

$$F(x) = f(x) + ig(x). \tag{17}$$

Вещественнозначные функции f и g называются **действительной** и **мнимой** частями функции F соответственно. Если они обе дифференцируемы, **производную** F' функции F можно определить как

$$F'(x) = f'(x) + ig'(x). \tag{18}$$

Таким образом, чтобы найти производную комплекснозначной функции F, нужно продифференцировать действительную и мнимую части F по отдельности.

Будем говорить, что комплекснозначная функция $F(x)$ удовлетворяет однородному линейному дифференциальному уравнению $L[F(x)] = 0$, если и действительная, и мнимая

части функции (17) по отдельности удовлетворяют данному уравнению, т. е. если $L[F(x)] = L[f(x)] + iL[g(x)] = 0$.

Особый интерес представляют комплекснозначные функции вида $F(x) = e^{rx}$, где $r = a \pm bi$. Заметим, что согласно формуле Эйлера

$$e^{(a+bi)x} = e^{ax}e^{ibx} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx) \tag{19a}$$

и

$$e^{(a-bi)x} = e^{ax}e^{-ibx} = e^{ax}(\cos bx - i \sin bx). \tag{19b}$$

Самым важным для нас свойством функции e^{rx} является то, что

$$D_x(e^{rx}) = re^{rx}, \tag{20}$$

если r — комплексное число. Доказательство этого факта получается в результате простых вычислений, в которых учитываются приведенные ранее определения и формулы:

$$\begin{aligned} D_x(e^{rx}) &= D_x(e^{ax}\cos bx) + iD_x(e^{ax}\sin bx) = \\ &= (ae^{ax}\cos bx - be^{ax}\sin bx) + i\,(ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx) = \\ &= (a+bi)(e^{ax}\cos bx + ie^{ax}\sin bx) = re^{rx}. \end{aligned}$$

Случай комплексных корней

Из формулы (20) следует, что если r комплексное (в частности, оно может быть и действительным), то e^{rx} будет решением дифференциального уравнения (1) тогда и только тогда, когда это число r является корнем характеристического уравнения данного дифференциального уравнения. Если в паре сопряженных корней $r_1 = a + bi$ и $r_2 = a - bi$ кратность каждого корня равна 1 (иными словами,эти корни простые), то соответствующая этой паре часть общего решения уравнения (1) имеет вид

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} = C_1e^{(a+bi)x} + C_2e^{(a-bi)x} = \\ &= C_1e^{ax}(\cos bx + i\sin bx) + C_2e^{ax}(\cos bx - i\sin bx); \\ y(x) &= (C_1 + C_2)e^{ax}\cos bx + i(C_1 - C_2)e^{ax}\sin bx, \end{aligned}$$

где произвольные постоянные C_1 и C_2 могут быть комплексными. Например, выбрав $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$, получим действительнозначное решение $y_1(x) = e^{ax}\cos bx$, а выбрав $C_1 = -\frac{1}{2}i$, $C_2 = \frac{1}{2}i$, получим линейно независимое с ним действительнозначное решение $y_2(x) = e^{ax}\sin bx$. Отсюда следует важная теорема.

Теорема 3 Случай комплексных корней

Если сопряженные комплексные числа $a \pm bi$ (при $b \neq 0$) являются простыми корнями характеристического уравнения (3), то соответствующая им часть общего решения уравнения (1) имеет вид

➤ $$e^{ax}(c_1\cos bx + c_2\sin bx). \tag{21}$$

▲

Пример 3 Характеристическое уравнение дифференциального уравнения

$$y'' + b^2 y = 0 \quad (b > 0)$$

имеет вид $r^2 + b^2 = 0$. Его корни $r = \pm bi$. Тогда по теореме 3 (при $a = 0$) его общее решение можно записать так:

$$y(x) = c_1 \cos bx + c_2 \sin bx.$$ ■

Пример 4 Найдем частное решение уравнения

$$y'' - 4y' + 5y = 0,$$

удовлетворяющее условиям $y(0) = 1$ и $y'(0) = 5$.

Решение Характеристическое уравнение имеет вид

$$r^2 - 4r + 5 = (r - 2)^2 + 1 = 0.$$

Его корнями являются числа $2 + i$ и $2 - i$. Учитывая это, общее решение можем записать в виде

$$y(x) = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x).$$

Отсюда

$$y'(x) = 2e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + e^{2x}(-c_1 \sin x + c_2 \cos x),$$

поэтому из начальных условий следует, что

$$y(0) = c_1 = 1 \quad \text{и} \quad y'(0) = 2c_1 + c_2 = 5.$$

Из этой системы уравнений находим $c_2 = 3$. Требуемое частное решение имеет вид

$$y(x) = e^{2x}(\cos x + 3 \sin x).$$ ■

Пример 5 Найдем общее решение уравнения $y^{(4)} + 4y = 0$.

Решение Сначала запишем характеристическое уравнение:

$$r^4 + 4 = (r^2 + 2i)(r^2 - 2i) = 0.$$

Вот его четыре его корня: $\pm\sqrt{\pm 2i}$. Так как $i = e^{i\pi/2}$, а $-i = e^{3i\pi/2}$, имеем:

$$\sqrt{i} = \left(e^{i\pi/2}\right)^{1/2} = e^{i\pi/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

и

$$\sqrt{-i} = \left(e^{3i\pi/2}\right)^{1/2} = e^{3i\pi/4} = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}.$$

Поэтому четыре (простых) корня характеристического уравнения $r = \pm(1 \pm i)$. Эти две пары комплексных сопряженных корней $1 \pm i$ и $-1 \pm i$ дают общее решение

$$y(x) = e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + e^{-x}(c_3 \cos x + c_4 \sin x)$$

дифференциального уравнения $y^{(4)} + 4y = 0$. ■

В примере 5 мы представили комплексное число в экспоненциальной форме (т. е. с модулем и аргументом, которые в полярных координатах называются соответственно радиусом-вектором и полярным углом):

$$x + iy = re^{i\theta}. \tag{22}$$

Связи между действительной частью x, мнимой частью y, **модулем** числа r и **аргументом** θ изображены на рис. 3.3.1. Одним из следствий формулы (22) является то, что ненулевое комплексное число $x + iy$ имеет два различных квадратных корня

$$(x + iy)^{1/2} = (re^{i\theta})^{1/2} = \pm r^{1/2} e^{i\theta/2}. \tag{23}$$

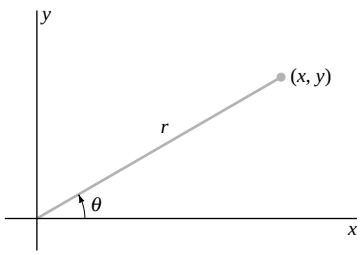


Рис. 3.3.1. Модуль и аргумент комплексного числа $x + iy$

Случай кратных комплексных корней

Теорема 2 имеет место также для случая комплексных корней. Если кратность сопряженных комплексных корней $a \pm bi$ равна k, то соответствующая им часть общего решения дифференциального уравнения имеет вид

$$(A_1 + A_2 x + \cdots + A_k x^{k-1})e^{(a+bi)x} + (B_1 + B_2 x + \cdots + B_k x^{k-1})e^{(a-bi)x} = \\ = \sum_{p=0}^{k-1} x^p e^{ax}(c_i \cos bx + d_i \sin bx). \tag{24}$$

Можно показать, что $2k$ функций

$$x^p e^{ax}\cos bx, \quad x^p e^{ax}\sin bx, \quad 0 \leqq p \leqq k-1$$

из формулы (24) линейно независимы.

Пример 6 Найдем общее решение уравнения $(D^2+6D+13)^2 y = 0$.

Решение Выделив полный квадрат, находим, что характеристическое уравнение

$$(r^2+6r+13)^2 = [(r+3)^2+4]^2 = 0$$

имеет пару сопряженных комплексных корней $-3 \pm 2i$ кратности $k=2$. Отсюда по формуле (24) получим общее решение

$$y(x) = e^{-3x}(c_1\cos 2x + d_1 \sin 2x) + xe^{-3x}(c_2\cos 2x + d_2 \sin 2x). \quad \blacksquare$$

В приложениях редко встречается ситуация, когда разложение характеристического уравнения на множители найти так же просто, как и в примере 6. Часто наибольшие затруднения при решении однородного дифференциального уравнения вызывает поиск корней его характеристического уравнения. Иногда корень многочлена можно найти перебором. Соответствующий подход проиллюстрирован в примере 7. В конце этого раздела приведены также и другие методы.

Пример 7 Характеристическим уравнением дифференциального уравнения

$$y^{(3)} + y' - 10y = 0$$

является кубическое уравнение

$$r^3 + r - 10 = 0.$$

По общеизвестной теореме элементарной алгебры, рациональными корнями этого уравнения могут быть лишь делители целого числа 10, т. е. числа ± 1, ± 2, ± 5 и ± 10. Методом подбора (или методом перебора) находим, что 2 является корнем характеристического уравнения. Из теоремы элементарной алгебры о разложении многочлена на множители следует, что $r^3 + r - 10$ делится на $r-2$. Выполнив деление, находим частное

$$r^2 + 2r + 5 = (r+1)^2 + 4.$$

Его корнями являются сопряженные комплексные числа $-1 \pm 2i$. Зная все три корня характеристического уравнения, строим общее решение дифференциального уравнения в виде

$$y(x) = c_1 e^{2x} + e^{-x}(c_2\cos 2x + c_3 \sin 2x). \quad \blacksquare$$

Пример 8 Пусть корни характеристического уравнения некоторого дифференциального уравнения равны $3, -5, 0, 0, 0, 0, -5, 2 \pm 3i$ и $2 \pm 3i$. Напишите общее решение этого дифференциального уравнения.

Решение Общее решение записывается непосредственно по набору корней характеристического уравнения. Оно имеет вид

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + c_5 e^{3x} + c_6 e^{-5x} + c_7 x e^{-5x} + e^{2x}(c_8 \cos 3x + c_9 \sin 3x) + x e^{2x}(c_{10} \cos 3x + c_{11} \sin 3x).$$

■

3.3. Задачи

В задачах 1–20 найдите общие решения дифференциальных уравнений.

1. $y'' - 4y = 0$
2. $2y'' - 3y' = 0$
3. $y'' + 3y' - 10y = 0$
4. $2y'' - 7y' + 3y = 0$
5. $y'' + 6y' + 9y = 0$
6. $y'' + 5y' + 5y = 0$
7. $4y'' - 12y' + 9y = 0$
8. $y'' - 6y' + 13y = 0$
9. $y'' + 8y' + 25y = 0$
10. $5y^{(4)} + 3y^{(3)} = 0$
11. $y^{(4)} - 8y^{(3)} + 16y'' = 0$
12. $y^{(4)} - 3y^{(3)} + 3y'' - y' = 0$
13. $9y^{(3)} + 12y'' + 4y' = 0$
14. $y^{(4)} + 3y'' - 4y = 0$
15. $y^{(4)} - 8y'' + 16y = 0$
16. $y^{(4)} + 18y'' + 81y = 0$
17. $6y^{(4)} + 11y'' + 4y = 0$
18. $y^{(4)} = 16y$
19. $y^{(3)} + y'' - y' - y = 0$
20. $y^{(4)} + 2y^{(3)} + 3y'' + 2y' + y = 0$ (*Указание*: раскройте скобки в выражении $(r^2 + r + 1)^2$).

В задачах 21–26 найдите решения данных задач Коши.

21. $y'' - 4y' + 3y = 0$; $y(0) = 7$, $y'(0) = 11$
22. $9y'' + 6y' + 4y = 0$; $y(0) = 3$, $y'(0) = 4$
23. $y'' - 6y' + 25y = 0$; $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$
24. $2y^{(3)} - 3y'' - 2y' = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 3$
25. $3y^{(3)} + 2y'' = 0$; $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$
26. $y^{(3)} + 10y'' + 25y' = 0$; $y(0) = 3$, $y'(0) = 4$, $y''(0) = 5$

В задачах 27–32 найдите общие решения данных дифференциальных уравнений. Для этого сначала угадайте один из корней характеристического уравнения, а затем найдите остальные разложением на множители.

27. $y^{(3)} + 3y'' - 4y = 0$
28. $2y^{(3)} - y'' - 5y' - 2y = 0$
29. $y^{(3)} + 27y = 0$
30. $y^{(4)} - y^{(3)} + y'' - 3y' - 6y = 0$
31. $y^{(3)} + 3y'' + 4y' - 8y = 0$
32. $y^{(4)} + y^{(3)} - 3y'' - 5y' - 2y = 0$

В задачах 33–36 дано одно решение дифференциального уравнения. Найдите общее решение.

33. $y^{(3)} + 3y'' - 54y = 0$; $y = e^{3x}$
34. $3y^{(3)} - 2y'' + 12y' - 8y = 0$; $y = e^{2x/3}$
35. $6y^{(4)} + 5y^{(3)} + 25y'' + 20y' + 4y = 0$; $y = \cos 2x$

36. $9y^{(3)} + 11y'' + 4y' - 14y = 0$; $y = e^{-x}\sin x$

37. Найдите функцию $y(x)$ такую, что $y^{(4)}(x) = y^{(3)}(x)$ для всех x и $y(0) = 18$, $y'(0) = 12$, $y''(0) = 13$ и $y^{(3)}(0) = 7$.

38. Найдите решение задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$y^{(3)} - 5y'' + 100y' - 500y = 0;$$
$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 10, \quad y''(0) = 250,$$

если известно, что функция $y_1(x) = e^{5x}$ является частным решением данного дифференциального уравнения.

В задачах 39–42 найдите линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами по данному его общему решению.

39. $y(x) = (A + Bx + Cx^2)e^{2x}$ **40.** $y(x) = Ae^{2x} + B\cos 2x + C\sin 2x$

41. $y(x) = A\cos 2x + B\sin 2x + C\cosh 2x + D\sinh 2x$

42. $y(x) = (A + Bx + Cx^2)\cos 2x + (D + Ex + Fx^2)\sin 2x$

Задачи 43–47 посвящены решению дифференциальных уравнений с комплексными коэффициентами.

43. **(a)** Используя формулу Эйлера, покажите, что любое комплексное число может быть записано в виде $re^{i\theta}$, где $r \geqq 0$ и $-\pi < \theta \leqq \pi$. **(b)** Представьте числа 4, -2, $3i$, $1 + i$ и $-1 + i\sqrt{3}$ в виде $re^{i\theta}$. **(c)** Комплексные числа $\pm e^{i\theta/2}\sqrt{r}$ являются квадратными корнями из комплексного числа $re^{i\theta}$. Извлеките квадратные корни из чисел $2 - 2i\sqrt{3}$ и $-2 + 2i\sqrt{3}$.

44. Используя формулу корней квадратного уравнения, решите следующие уравнения. Обратите внимание, что корни не являются комплексно сопряженными.

(a) $x^2 + ix + 2 = 0$ **(b)** $x^2 - 2ix + 3 = 0$

45. Найдите общее решение уравнения $y'' - 2iy' + 3y = 0$.

46. Найдите общее решение уравнения $y'' - iy' + 6y = 0$.

47. Найдите общее решение уравнения $y'' = \left(-2 + 2i\sqrt{3}\,\right)y$.

48. Найдите решение задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$y^{(3)} = y; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = y''(0) = 0.$$

Указание. Подставьте данные из начальных условий в общее решение

$$y(x) = Ae^x + Be^{\alpha x} + Ce^{\beta x},$$

где α и β — комплексно сопряженные корни уравнения $r^3 - 1 = 0$. Покажите, что решением задачи Коши (задачи с начальными условиями) является функция

$$y(x) = \frac{1}{3}\left(e^x + 2e^{-x/2}\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}\right).$$

49. Найдите решение задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$y^{(4)} = y^{(3)} + y'' + y' + 2y;$$
$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, y^{(3)}(0) = 30.$$

50. В дифференциальном уравнении

$$y'' + (\operatorname{sgn} x)y = 0 \tag{25}$$

один из коэффициентов является разрывной функцией

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1 & \text{при } x > 0, \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Покажите, что несмотря на это, уравнение (25) имеет два линейно независимых решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$, определенных для всех x, притом таких, что каждое из них

- удовлетворяет уравнению (25) во всех точках $x \neq 0$;
- имеет непрерывную производную в точке $x = 0$;
- $y_1(0) = y_2'(0) = 1$ и $y_2(0) = y_1'(0) = 0$.

(*Указание*. Каждое из решений $y_i(x)$ определено одной формулой для $x < 0$ и другой для $x \geqq 0$). Графики этих двух решений изображены на рис. 3.3.2.

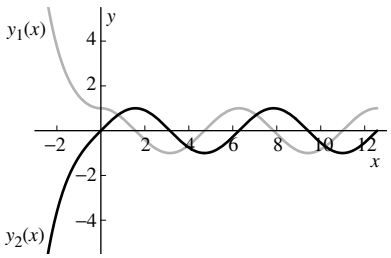


Рис. 3.3.2. Графики решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ из задачи 50

51. Согласно задаче 51 из раздела 3.1, с помощью подстановки $v = \ln x$ ($x > 0$) дифференциальное уравнение Эйлера второго порядка $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$ можно преобразовать в однородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами. Покажите аналогичным образом, что с помощью той же подстановки уравнение Эйлера третьего порядка

$$ax^3y''' + bx^2y'' + cxy' + dy = 0$$

(где a, b, c, d постоянны) сводится к уравнению с постоянными коэффициентами

$$a\frac{d^3y}{dv^3} + (b - 3a)\frac{d^2y}{dv^2} + (c - b + 2a)\frac{dy}{dv} + dy = 0.$$

В задачах 52–58 с помощью подстановки $v = \ln x$ из задачи 51 найдите общие решения (для $x > 0$) уравнений Эйлера.

52. $x^2y'' + xy' + 9y = 0$

53. $x^2y'' + 7xy' + 25y = 0$

54. $x^3y''' + 6x^2y'' + 4xy' = 0$

55. $x^3y''' - x^2y'' + xy' = 0$

56. $x^3y''' + 3x^2y'' + xy' = 0$

57. $x^3y''' - 3x^2y'' + xy' = 0$

58. $x^3y''' + 6x^2y'' + 7xy' + y = 0$

3.3. Приложение. Приближенные решения линейных уравнений

Для решения задач, связанных с разложением многочленов на множители (как, например, в этом разделе), в ситуациях, когда это трудно или невозможно сделать явно, можно использовать численные методы. С этой целью в калькуляторах и компьютерных программах имеются функции для поиска приближенных значений корней многочленов. Например, предположим, что мы хотим решить однородное линейное дифференциальное уравнение

$$y^{(3)} - 3y'' + y = 0, \tag{1}$$

характеристическое уравнение которого имеет вид

$$r^3 - 3r^2 + 1 = 0. \tag{2}$$

Среди функций стандартного графического калькулятора есть команда `solve`, которую можно использовать для нахождения приближенных значений корней многочленов. На рис. 3.3.3 и 3.3.4 приведены команды, с помощью которых мы нашли корни уравнения (2): $r \approx -0{,}5321$, $0{,}6527$ и $2{,}8794$. Некоторые подобные команды для систем компьютерной алгебры:

```
fsolve(r^3 - 3*r^2 + 1 = 0, r);      (Maple)
NSolve[r^3 - 3*r^2 + 1 == 0, r]      (Mathematica)
roots([1   -3   0   1])              (MATLAB)
```

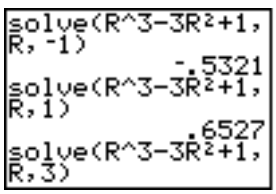


Рис. 3.3.3. Чтобы найти решение уравнения $r^3 - 3r^2 + 1 = 0$ с помощью калькулятора TI-83, требуется указать начальное приближение для каждого корня

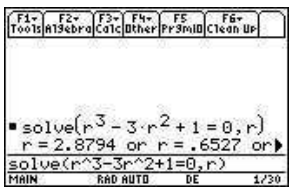


Рис. 3.3.4. Решение характеристического уравнения на калькуляторе TI-89 с помощью усовершенствованной команды `solve`

(*Комментарий.* В команде MATLAB необходимо ввести вектор коэффициентов полинома `[1 -3 0 1]`, причем коэффициенты полинома записываются в порядке убывания степеней.) Таким образом, мы нашли приближенные значения корней. Поэтому общее (приближенное) решение дифференциального уравнения (1) можно записать в виде

$$y(x) = c_1 e^{-(0{,}5321)x} + c_2 e^{(0{,}6527)x} + c_3 e^{(2{,}8794)x}. \tag{3}$$

Используя подобным образом калькулятор или компьютер, найдите (приближенные) общие решения следующих дифференциальных уравнений:

1. $y^{(3)} - 3y' + y = 0$
2. $y^{(3)} + 3y'' - 3y = 0$
3. $y^{(3)} + y' + y = 0$
4. $y^{(3)} + 3y' + 5y = 0$
5. $y^{(4)} + 2y^{(3)} - 3y = 0$
6. $y^{(4)} + 3y' - 4y = 0$

3.4. Механические колебания

Движение бруска, соединенного с пружиной — относительно простой пример колебаний, возникающих в гораздо более сложных механических системах. Для многих подобных систем задача исследования этих колебаний сводится к решению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим физическое тело (материальную точку) массой m, соединенное с обыкновенной пружиной, которая оказывает сопротивление как растяжению, так и сжатию. Другой конец пружины жестко закреплен в стене (как показано на рис. 3.4.1). Предположим, что тело покоится на горизонтальной плоскости без трения и что оно может двигаться только вперед или назад так, что пружина при этом сжимается или растягивается. Обозначим через x расстояние от тела до его **положения равновесия** — положения, при котором пружина не сжата и не растянута. Будем считать, что $x > 0$, когда пружина растянута, и $x < 0$, когда она сжата.

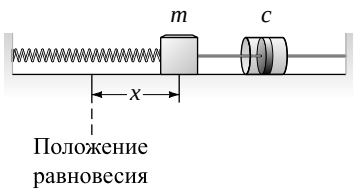


Рис. 3.4.1. Система, состоящая из тела заданной массы, закрепленного на пружине с амортизатором

Согласно закону Гука, возвращающая сила F_S, с которой пружина действует на тело, пропорциональна расстоянию x, на которое пружина растянута или сжата. Так как это расстояние равно смещению x тела массой m относительно положения равновесия, то сила

$$F_S = -kx. \tag{1}$$

Положительный коэффициент пропорциональности k называется **жесткостью пружины** или **коэффициентом жесткости пружины.** Заметим, что F_S и x имеют разные знаки: $F_S < 0$ при $x > 0$ и $F_S > 0$ при $x < 0$.

Показанное на рис. 3.4.1 тело также соединено с амортизатором — устройством, поглощающим удары. Сила, с которой действует амортизатор, направлена в сторону, противоположную направлению движения тела массой m. Предположим, что амортизатор устроен таким образом, что он действует с силой F_R, пропорциональной скорости $v = dx/dt$ движения тела, т. е.

$$F_R = -cv = -c\frac{dx}{dt}. \tag{2}$$

Положительная постоянная c называется **постоянной демпфирования**, или **коэффициентом ослабления (поглощения, затухания)** амортизатора. В общем случае можно считать, что уравнение (2) описывает силы сопротивления в системе (включая сопротивление воздуха при движении тела массой m).

Если кроме сил F_S и F_R на тело действует также заданная **внешняя сила** $F_E = F(t)$, то равнодействующая сил, действующих на тело, равна $F = F_S + F_R + F_E$. Используя второй закон Ньютона

$$F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = mx'',$$

получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$mx'' + cx' + kx = F(t), \tag{3}$$

которое описывает движение тела.

Если амортизатор отсутствует (или мы просто пренебрегаем силами сопротивления), коэффициент c в уравнении (3) равен нулю. В этом случае колебания называются **незатухающими**; при $c > 0$ колебания называются **затухающими**. Если на систему внешние силы не действуют, $F(t)$ в уравнении (3) полагаем равным 0. Такие колебания называются **свободными**. В случае $F(t) \neq 0$ колебания называются **вынужденными**. Таким образом, однородное уравнение

$$mx'' + cx' + kx = 0 \tag{4}$$

описывает свободные колебания системы, состоящей из тела, пружины и амортизатора, не подверженной воздействию внешних сил. Случай вынужденных колебаний будет рассмотрен в разделе 3.6.

В качестве другого примера можно рассмотреть систему, в которой тело прикреплено к нижнему концу подвешенной пружины. Верхний конец пружины закреплен неподвижно (рис. 3.4.2). В этом случае сила тяжести $W = mg$ тела растянет пружину на расстояние s_0, которое удовлетворяет уравнению (1), причем $F_S = -W$ и $x = s_0$. Иными словами, $mg = ks_0$, откуда $s_0 = mg/k$. Это положение **статического** равновесия тела. Обозначим через y смещение тела при движении относительно положения равновесия, причем положительным направлением будем считать направление вниз. В задаче 9 мы просим вас показать, что y удовлетворяет уравнению (3), т. е.

$$my'' + cy' + ky = F(t) \tag{5}$$

с учетом сил сопротивления.

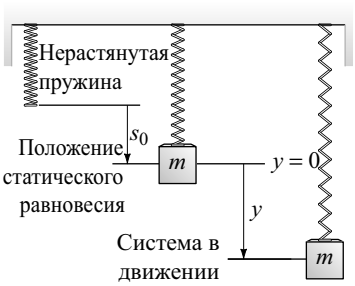


Рис. 3.4.2. Тело, подвешенное на пружине

Математический маятник

Дифференциальные уравнения (3) и (5) особенно важны потому, что они описывают движение также и многих других простых механических систем. Рассмотрим, например, **математический маятник**. Он состоит из материальной точки массой m, подвешенной на невесомой нити (или на *невесомом стержне*) длиной L, причем эта материальная точка качается из стороны в сторону, как показано на рис. 3.4.3. Положение тела в момент времени t можно задать с помощью угла отклонения нити (или стержня) от вертикальной оси $\theta = \theta(t)$ (положительного при отклонении против часовой стрелки). Чтобы получить дифференциальное уравнение колебаний материальной точки массой m, запишем закон *сохранения механической энергии*, согласно которому сумма кинетической и потенциальной энергии тела постоянна.

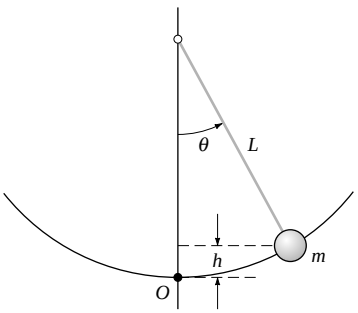


Рис. 3.4.3. Математический маятник

Расстояние от положения равновесия 0 до материальной точки массой m вдоль дуги $s = L\theta$. Следовательно, скорость движения материальной точки равна $v = ds/dt = L(d\theta/dt)$, откуда кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}mL^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

Выберем в качестве начала отсчета самую низкую точку O, через которую проходит при движении материальная точка (рис. 3.4.3). Тогда потенциальная энергия V равна произведению mg на высоту $h = L(1 - \cos\theta)$ тела над точкой O, т. е.

$$V = mgL(1 - \cos\theta).$$

Поскольку сумма T и V равна некоторой постоянной C, получим, что

$$\frac{1}{2}mL^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mgL(1 - \cos\theta) = C.$$

Продифференцировав обе части этого равенства по t, получим

$$mL^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) + mgL(\sin\theta)\frac{d\theta}{dt} = 0;$$

отсюда после деления на $mL^2(d\theta/dt)$ получим уравнение

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0. \tag{6}$$

Как известно, $\sin\theta \approx \theta$ при достаточно малых θ. На самом деле при значениях $|\theta|$ не превосходящих $\pi/12$ (или $15°$) $\sin\theta$ и θ совпадают до второго знака после запятой. А в обычных часах с маятником θ никогда не превышает $15°$. Поэтому математическую модель математического маятника можно упростить, заменив в уравнении (6) $\sin\theta$ на θ. Если также включить слагаемое $c\theta'$ в качестве сил сопротивления окружающей среды, то в результате получим уравнение, аналогичное уравнению (4):

$$\theta'' + c\theta' + k\theta = 0, \tag{7}$$

где $k = g/L$. Заметим, что в это уравнение не входит масса m тела, закрепленного на конце стержня. Однако можно ожидать, что погрешность между значениями θ и $\sin\theta$ может накапливаться с течением времени, поэтому уравнение (7) не будет точно отображать движение маятника на протяжении длительного периода времени.

В оставшейся части этого раздела сначала будут рассмотрены свободные незатухающие колебания, а затем — свободные затухающие.

Свободные незатухающие колебания

В случае, когда рассматриваемая механическая система состоит лишь из тела и пружины, а внешние силы и сопротивление отсутствуют, уравнение (3) принимает более простой вид

$$mx'' + kx = 0. \tag{8}$$

Удобно обозначить

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \tag{9}$$

и записать уравнение (8) в виде

$$x'' + \omega_0^2 x = 0. \tag{8′}$$

Общее решение уравнения (8′) представляет собой функцию

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t. \tag{10}$$

Чтобы исследовать колебания, описываемые этим решением, определим постоянные C и α так, чтобы

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \cos\alpha = \frac{A}{C} \quad \text{и} \quad \sin\alpha = \frac{B}{C}. \tag{11}$$

Геометрическая интерпретация этих постоянных показана на рис. 3.4.4. Заметим, что хотя $\operatorname{tg}\alpha = B/A$, угол α *не* равен значению арктангенса этой величины, так как арктангенс принимает значения из интервала $-\pi/2 < x < \pi/2$. Вместо этого, α — угол между 0 и 2π такой, что его косинус и синус заданы равенствами (11), в которых и A, и B или даже обе эти величины могут быть отрицательными. Поэтому

$$\alpha = \begin{cases} \operatorname{arctg}(B/A), & \text{если } A > 0, B > 0 \text{ (первая четверть)}, \\ \pi + \operatorname{arctg}(B/A), & \text{если } A < 0 \text{ (вторая или третья четверть)}, \\ 2\pi + \operatorname{arctg}(B/A), & \text{если } A > 0, B < 0 \text{ (четвертая четверть)}, \end{cases}$$

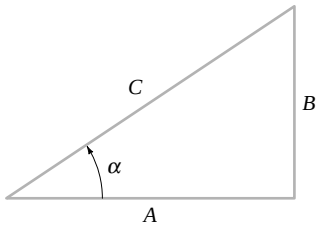


Рис. 3.4.4. Угол α

где $\operatorname{arctg}(B/A)$ — значение угла из интервала $(-\pi/2, \pi/2)$, которое вычисляется на калькуляторе или компьютере.

В любом из этих случаев из равенств (10) и (11) получим

$$x(t) = C\left(\frac{A}{C}\cos\omega_0 t + \frac{B}{C}\sin\omega_0 t\right) = C(\cos\alpha\cos\omega_0 t + \sin\alpha\sin\omega_0 t).$$

По формуле косинуса суммы углов, это равенство можно переписать так:

$$x(t) = C\cos(\omega_0 t - \alpha). \tag{12}$$

Следовательно, тело колеблется около положения равновесия, причем колебание описывается следующими параметрами.

1. **Амплитуда** C.
2. **Круговая частота** ω_0.
3. **Фаза** α.

Такие колебания называются **гармоническими колебаниями**[6].

Если t измеряется в секундах, то круговая частота ω_0 имеет размерность радиан в секунду (рад/с). **Периодом** колебаний называется время, необходимое системе для совершения одного полного колебания (качания). Период колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \tag{13}$$

секундам. **Частота** колебаний равна

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} \tag{14}$$

герц (Гц). Она равна количеству полных колебаний, совершаемых маятником за 1 секунду. Заметим, что частота измеряется в колебаниях в секунду, в то время как круговая частота — в радианах в секунду.

Типичный график зависимости смещения материальной точки, совершающей гармонические колебания, от времени, т. е. график функции

$$x(t) = C\cos(\omega_0 t - \alpha) = C\cos\left(\omega_0\left(t - \frac{\alpha}{\omega_0}\right)\right) = C\cos(\omega_0(t-\delta))$$

[6] Отмечу, что их параметры часто называются иначе. Круговая частота часто называется *циклической частотой* или *угловой частотой*, а фаза — *фазовым углом*, *углом сдвига фаз* или просто *сдвигом по фазе*. — *Примеч. ред.*

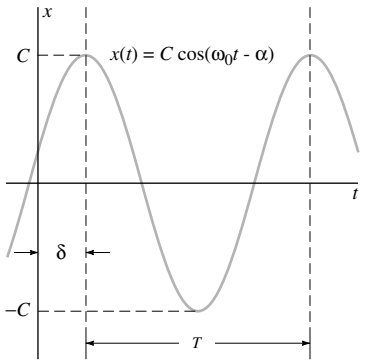


Рис. 3.4.5. Простые гармонические колебания

приведен на рис. 3.4.5. Также там указан геометрический смысл амплитуды C, периода T и **временной задержки**[7]

$$\delta = \frac{\alpha}{\omega_0}.$$

Если заданы начальное положение $x(0) = x_0$ и начальная скорость $x'(0) = v_0$ материальной точки, то сначала можно определить значения коэффициентов A и B в формуле (10), а затем — амплитуду C и фазу α, выполняя указанные выше преобразования, приведшие к формуле (12).

Пример 1 Тело массой $m = \frac{1}{2}$ килограмм (кг) прикреплено к пружине. Пружина под действием силы 100 ньютонов (Н) растягивается на 2 метра (м). Тело начинает двигаться из начального положения $x_0 = 1$ (м) с начальной скоростью $v_0 = -5$ (м/с). (Заметим, что из начальных данных следует, что в момент времени $t = 0$ тело смещено вправо и движется влево.) Найти уравнение движения данного тела, а также амплитуду, частоту, период колебаний и временную задержку колебаний.

Решение Жесткость пружины $k = (100\,\text{Н})/(2\,\text{м}) = 50$ (Н/м). Поэтому уравнение (8) принимает вид $\frac{1}{2}x'' + 50x = 0$ или

$$x'' + 100x = 0.$$

Следовательно, круговая частота гармонических колебаний равна $\omega_0 = \sqrt{100} = 10$ (рад/с). Поэтому период колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{10} \approx 0{,}6283\,\text{с},$$

а частота равна

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{10}{2\pi} \approx 1{,}5915\,\text{Гц}.$$

[7] Называется также *задержкой во времени*, *отставанием по (во) времени* и *запаздыванием по (во) времени*. — *Примеч. ред.*

Подставим теперь начальные условия $x(0) = 1$ и $x'(0) = -5$ в уравнение движения

$$x(t) = A\cos 10t + B\sin 10t \quad \text{с} \quad x'(t) = -10A\sin 10t + 10B\cos 10t.$$

Получим $A = 1$ и $B = -\frac{1}{2}$, т. е. уравнение движения тела в данном случае имеет вид

$$x(t) = \cos 10t - \frac{1}{2}\sin 10t.$$

Следовательно, амплитуда колебаний

$$C = \sqrt{(1)^2 + (-\tfrac{1}{2})^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{5}\,(\text{м}).$$

Чтобы найти значение временной задержки, запишем равенство

$$x(t) = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\cos 10t - \frac{1}{\sqrt{5}}\sin 10t\right) = \frac{\sqrt{5}}{2}\cos(10t - \alpha),$$

где фазовый угол α удовлетворяет условиям

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} > 0 \quad \text{и} \quad \sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} < 0.$$

Отсюда заключаем, что α лежит в четвертой четверти

$$\alpha = 2\pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{-1/\sqrt{5}}{2/\sqrt{5}}\right) = 2\pi - \operatorname{arctg}(\tfrac{1}{2}) \approx 5{,}8195.$$

Поэтому временная задержка

$$\delta = \frac{\alpha}{\omega_0} \approx 0{,}5820\,\text{с}.$$

Зная значения амплитуды и временной задержки, уравнение движения тела можно записать в виде

$$x(t) \approx \tfrac{1}{2}\sqrt{5}\cos(10t - 5.8195).$$

Его график изображен на рис. 3.4.6. ■

Свободные затухающие колебания

Дифференциальное уравнение затухающих колебаний в случае отсутствия внешних сил принимает вид $mx'' + cx' + kx = 0$ или

$$x'' + 2px' + \omega_0^2 x = 0, \tag{15}$$

где $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ — круговая частота *незатухающих* колебаний и

$$p = \frac{c}{2m} > 0. \tag{16}$$

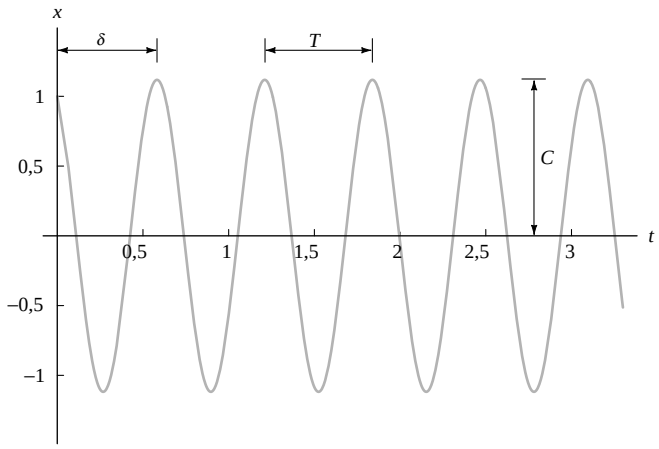


Рис. 3.4.6. График уравнения движения $x(t) = C\cos(\omega_0 t - \alpha)$ из примера 1, с амплитудой $C \approx 1{,}118$, периодом $T \approx 0{,}628$ и временной задержкой $\delta \approx 0{,}582$

Корни характеристического уравнения $r^2 + 2pr + \omega_0^2 = 0$ дифференциального уравнения (15)

$$r_{1,2} = -p \pm (p^2 - \omega_0^2)^{1/2}. \tag{17}$$

Вещественные они или комплексные — это зависит от знака подкоренного выражения

$$p^2 - \omega_0^2 = \frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m} = \frac{c^2 - 4km}{4m^2}. \tag{18}$$

Поэтому **критическое затухание**[8] c_{cr} вычисляется по формуле $c_{\text{cr}} = \sqrt{4km}$. Рассмотрим отдельно три случая: $c > c_{\text{cr}}$, $c = c_{\text{cr}}$ и $c < c_{\text{cr}}$.

Случай сверхзатухания, или сильного демпфирования[9]**: $c > c_{\text{cr}}$($c^2 > 4km$).** Поскольку c в этом случае относительно велико, мы имеем дело с большим сопротивлением при относительно слабой пружине или малой массе. Тогда уравнение (17) имеет два различных действительных корня r_1 и r_2, причем они оба отрицательные. Уравнение движения имеет вид

$$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}. \tag{19}$$

Ясно, что $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Поэтому тело будет двигаться к своему положению равновесия без каких-либо колебаний (задача 29). На рис 3.4.7 изображены графики некоторых уравнений движения в этом случае. Выбрав фиксированное положительное значение x_0, мы показали зависимость уравнения движения от начальной скорости v_0. Во всех случаях колебания были демпфированы (поглощены демпфером).

[8] В некоторых случаях называется также *затуханием на границе апериодичности* и *критическим демпфированием*. — *Примеч. ред.*

[9] В этом случае затухание называется также *закритическим*. — *Примеч. ред.*

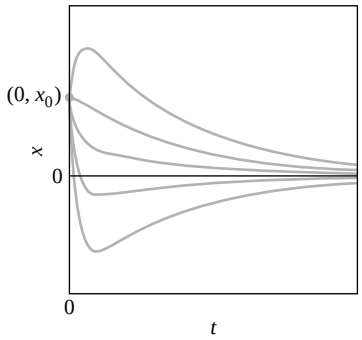


Рис. 3.4.7. Сверхзатухающие колебания: $x(t) = = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$ при $r_1 < 0$ и $r_2 < 0$. Приведены графики решений с одинаковым начальным положением x_0 и различными начальными скоростями

Случай критического затухания: $c = c_{cr} (c^2 = 4km)$. В этом случае корни характеристического уравнения, определяемые из равенств (17), равны: $r_1 = r_2 = -p$. Поэтому общее решение имеет вид

$$x(t) = e^{-pt}(c_1 + c_2 t). \tag{20}$$

Поскольку $e^{-pt} > 0$, а $c_1 + c_2 t$ имеет не больше одного нуля при положительных t, материальная точка пройдет через свое положение равновесия не более одного раза. Ясно, что $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Графики некоторых уравнений движения в случае критического затухания изображены на рис. 3.4.8. Заметим, что они очень похожи на аналогичные графики в случае сверхзатухания (см. рис. 3.4.7). В случае критического затухания сопротивление амортизатора достаточно для поглощения любых колебаний. Но даже небольшое уменьшение сопротивления приводит к оставшемуся случаю, в котором поведение системы наиболее поразительно.

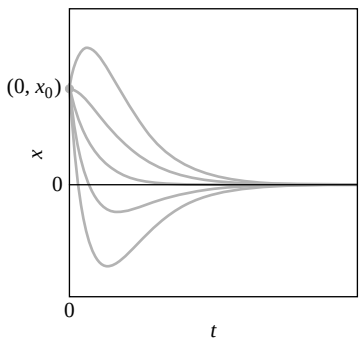


Рис. 3.4.8. Случай критического затухания: $x(t) = (c_1 + + c_2 t)e^{-pt}$ при $p > 0$. Изображены графики решений с одинаковым начальным положением x_0 и различными начальными скоростями

Затухающие колебания[10]**: $c < c_{cr}(c^2 < 4km)$.** Теперь характеристическое уравнение имеет два комплексных сопряженных корня $-p \pm i\sqrt{\omega_0^2 - p^2}$. Общее решение имеет вид

➤
$$x(t) = e^{-pt}(A\cos\omega_1 t + B\sin\omega_1 t), \tag{21}$$

где

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - p^2} = \frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m}. \tag{22}$$

Используя, как и при выводе уравнения (12), формулу косинуса суммы, уравнение (21) можно переписать как

$$x(t) = Ce^{-pt}\left(\frac{A}{C}\cos\omega_1 t + \frac{B}{C}\sin\omega_1 t\right),$$

откуда

➤
$$x(t) = Ce^{-pt}\cos(\omega_1 t - \alpha), \tag{23}$$

где

➤
$$C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \cos\alpha = \frac{A}{C} \quad \text{и} \quad \sin\alpha = \frac{B}{C}.$$

Решение (22) отображает экспоненциально затухающие колебания материальной точки около положения равновесия. График функции $x(t)$ лежит между "ограничивающими амплитуду" кривыми $x = -Ce^{-pt}$ и $x = Ce^{-pt}$, касаясь их в точках[11], где $\omega_1 t - \alpha$ кратно π. Такие колебания не являются гармоническими, а движение — периодическим[12], но, тем не менее, и в этом случае ω_1 называется **круговой частотой** (или, более точно, **круговой частотой затухающих гармонических колебаний**), $T_1 = 2\pi/\omega_1$ — **условным периодом затухающих гармонических колебаний**, а Ce^{-pt} — **амплитудой затухающих колебаний**, или — чтобы подчеркнуть зависимость от времени, — **амплитудой, зависящей от времени**. Геометрический смысл большинства этих величин указан на графике решения уравнения затухающих колебаний,изображенном на рис. 3.4.9. Из уравнения (22) видно, что в этом случае ω_1 меньше, чем круговая частота незатухающих колебаний ω_0, поэтому T_1 больше периода T колебаний тела такой же массой, подвешенного на такой же пружине, при отсутствии амортизатора. Следовательно, действие амортизатора выражается, по крайней мере, в двух явлениях.

[10] В этом случае затухание называется также *докритическим*. — *Примеч. ред.*

[11] Конечно, из этого совсем не следует, что именно в этих точках решение имеет локальные экстремумы. Действительно, функция $x = -Ce^{-pt}$ монотонно возрастает, а функция $x = Ce^{-pt}$ монотонно убывает, потому что производная первой функции везде положительна, а второй — везде отрицательна. Поэтому в точках касания производная решения *не* обращается в нуль. Локальные экстремумы решения, как легко видеть, находятся чуть *левее* точек касания. Теперь легко сообразить, что в моменты времени, равные абсциссам точек касания, и скорость материальной точки отлична от нуля, что соответствует тому факту, что она чуть ранее *прошла* очередную точку максимального удаления от положения равновесия и уже возвращается (притом с ненулевой скоростью!) к положению равновесия. — *Примеч. ред.*

[12] Оно называется *квазипериодическим*, если непериодические колебания в течение достаточно длительного времени сохраняют основные характеристики физического процесса, например амплитуду колебания. В этом случае колебания называются *слабозатухающими*. — *Примеч. ред.*

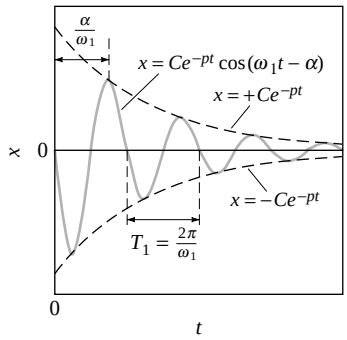


Рис. 3.4.9. Затухающие колебания: $x(t) = Ce^{-pt}\cos(\omega_1 t - \alpha)$

1. Амортизатор гасит колебания и они экспоненциально затухают (это выражается в зависимости (уменьшении) амплитуды от времени).
2. Амортизатор замедляет движение, т. е. уменьшает частоту колебаний.

На следующем примере видно, что затухание обычно также увеличивает отставание (задержку во времени) по сравнению с незатухающими колебаниями с теми же начальными условиями.

Пример 2 Пусть теперь, как и в примере 1, материальная точка подвешена на пружине, но, кроме пружины, на нее действует амортизатор с силой сопротивления 1 Н на каждый метр в секунду скорости. Тело приведено в движение из того же начального положения $x(0) = 1$ с той же начальной скоростью $x'(0) = -5$, как и в примере 1. Найдите уравнение движения тела, его круговую частоту и условный период колебаний, временную задержку, а также определите время, необходимое материальной точке для ее первых четырех прохождений через точку $x = 0$.

Решение На этот раз мы не будем использовать ранее выведенные формулы. Вместо этого мы получим дифференциальное уравнение и затем найдем решение в явном виде. Напомним, что $m = \frac{1}{2}$ и $k = 50$; также имеем $c = 1$. Отсюда уравнение (4) принимает вид $\frac{1}{2}x'' + x' + 50x = 0$ или

$$x'' + 2x' + 100x = 0.$$

Запишем характеристическое уравнение: $r^2 + 2r + 100 = (r + 1)^2 + 99 = 0$. Его корни $r_1,2 = -1 \pm \sqrt{99}\,i$, поэтому общее решение имеет вид

$$x(t) = e^{-t}(A\cos\sqrt{99}\,t + B\sin\sqrt{99}\,t). \qquad (24)$$

Следовательно, новая круговая частота затухающих колебаний $\omega_1 = \sqrt{99} \approx 9{,}9499$ (сравните с $\omega_0 = 10$ в примере 1). Условный период

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{99}} \approx 0{,}6315 \text{ с}$$

и частота

$$\nu_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{\sqrt{99}}{2\pi} \approx 1{,}5836\,\text{Гц}$$

(сравните с $T \approx 0{,}6283 < T_1$ и $\nu \approx 1{,}5915 > \nu_1$ в примере 1).

Подставим теперь начальные данные $x(0) = 1$ и $x'(0) = -5$ в уравнение движения (24). Тогда получим функцию скорости движения

$$x'(t) = -e^{-t}(A\cos\sqrt{99}\,t + B\sin\sqrt{99}\,t) + \\ + \sqrt{99}\,e^{-t}(-A\sin\sqrt{99}\,t + B\cos\sqrt{99}\,t).$$

Отсюда следует, что

$$x(0) = A = 1 \quad \text{и} \quad x'(0) = -A + B\sqrt{99} = -5.$$

Таким образом, $A = 1$ и $B = -4/\sqrt{99}$. Значит, уравнение движения тела имеет вид

$$x(t) = e^{-t}\left(\cos\sqrt{99}\,t - \frac{4}{\sqrt{99}}\sin\sqrt{99}\,t\right).$$

Амплитуда затухающих колебаний равна

$$C_1 e^{-t} = \sqrt{(1)^2 + \left(-\frac{4}{\sqrt{99}}\right)^2}\,e^{-t} = \sqrt{\frac{115}{99}}\,e^{-t}.$$

Следовательно, можно записать уравнение движения

$$x(t) = \frac{\sqrt{115}}{\sqrt{99}}e^{-t}\left(\frac{\sqrt{99}}{\sqrt{115}}\cos\sqrt{99}\,t - \frac{4}{\sqrt{115}}\sin\sqrt{99}\,t\right) = \\ = \sqrt{\frac{115}{99}}e^{-t}\cos(\sqrt{99}\,t - \alpha_1),$$

где фаза α_1 удовлетворяет условиям

$$\cos\alpha_1 = \frac{\sqrt{99}}{\sqrt{115}} > 0 \quad \text{и} \quad \sin\alpha_1 = -\frac{4}{\sqrt{115}} < 0.$$

Поэтому α_1 лежит в четвертой четверти, т. е.

$$\alpha_1 = 2\pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{-4/\sqrt{115}}{\sqrt{99}/\sqrt{115}}\right) = 2\pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{\sqrt{99}}\right) \approx 5{,}9009,$$

и временная задержка

$$\delta_1 = \frac{\alpha_1}{\omega_1} \approx 0{,}5931\,\text{с}$$

(сравните с $\delta \approx 0{,}5820 < \delta_1$ в примере 1). Подставив найденные амплитуду затухающих колебаний и приближенное значение фазы, получим уравнение движения в форме

$$x(t) \approx \sqrt{\frac{115}{99}}\, e^{-t} \cos(\sqrt{99}\, t - 5{,}9009). \tag{25}$$

График этой функции представляет собой график гармонического колебания, промодулированного убывающей экспонентой, как показано на рис. 3.4.10 (сравните с графиком гармонических колебаний в примере 1).

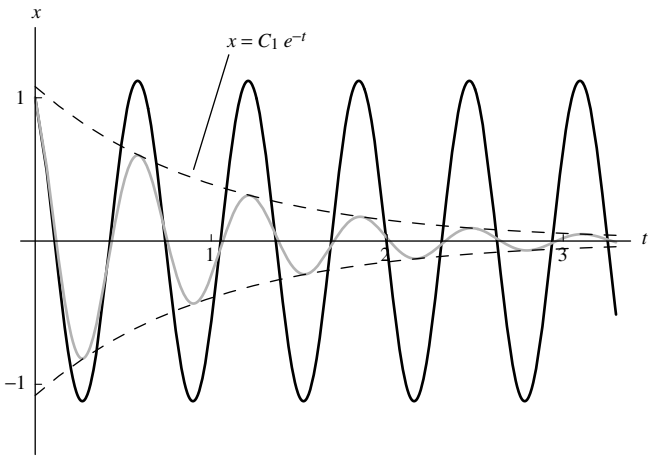


Рис. 3.4.10. Графики функций смещения $x(t) = C_1 e^{-t} \cos(\omega_1 t - \alpha_1)$ из примера 2 (затухающие колебания), $x(t) = C\cos(\omega_0 t - \alpha)$ из примера 1 (гармонические колебания) и огибающих кривых $x(t) = \pm C_1 e^{-t}$

Из (24) видно, что тело проходит положение равновесия (точку $x = 0$) тогда, когда $\cos(\omega_1 t - \alpha_1) = 0$, т. е. при

$$\omega_1 t - \alpha_1 = -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots, \quad \text{или}$$

$$t = \delta_1 - \frac{3\pi}{2\omega_1}, \delta_1 - \frac{\pi}{2\omega_1}, \delta_1 + \frac{\pi}{2\omega_1}, \delta_1 + \frac{3\pi}{2\omega_1}, \ldots .$$

Аналогично, в примере 1 (без затухания) тело проходит через положение равновесия в моменты времени

$$t = \delta_0 - \frac{3\pi}{2\omega_0}, \delta_0 - \frac{\pi}{2\omega_0}, \delta_0 + \frac{\pi}{2\omega_0}, \delta_0 + \frac{3\pi}{2\omega_0}, \ldots .$$

В следующей таблице приведены для сравнения четыре первых значения t_1, t_2, t_3, t_4, подсчитанные для гармонических и затухающих колебаний соответственно.

n	1	2	3	4
t_n (незатухающие)	0,1107	0,4249	0,7390	1,0532
t_n (затухающие)	0,1195	0,4352	0,7509	1,0667

В соответствии с этим на рис. 3.4.11 (где изображены лишь первых три прохождения через положение равновесия) видно, что затухающие колебания немного запаздывают по сравнению с гармоническими. ■

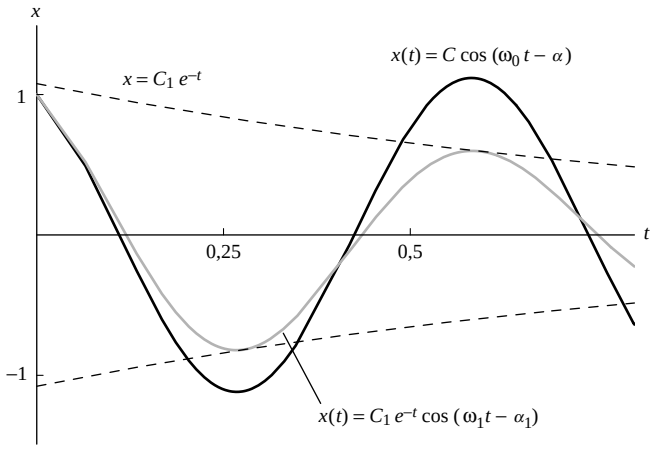


Рис. 3.4.11. Графики на интервале $0 \le t \le 0{,}8$ иллюстрируют временную задержку, связанную с затуханием

3.4. Задачи

1. Определите период и частоту простых гармонических колебаний 4-килограммового тела на конце пружины с жесткостью 16 Н/м.

2. Определите период и частоту простых гармонических колебаний тела массы 0,75 кг на конце пружины с жесткостью 48 Н/м.

3. Тело массой 3 кг закреплено на пружине, которая удлиняется на 20 см под действием силы в 15 Н. Тело начинает движение из точки $x_0 = 0$ с начальной скоростью $v_0 = -10$ м/с. Найдите амплитуду, период и частоту колебаний.

4. Тело массой 250 г закреплено на пружине, которая удлиняется на 25 см под действием силы в 9 Н. В момент времени $t = 0$ тело оттянули на 1 м вправо (растянув пружину) и толкнули влево с начальной скоростью 5 м/с. **(a)** Найдите смещение тела $x(t)$ в форме $C\cos(\omega_0 t - \alpha)$. **(b)** амплитуду и период колебаний тела.

В задачах 5–8 предположим, что уравнение математического маятника длиной L имеет вид $L\theta'' + g\theta = 0$, где $g = GM/R^2$ — ускорение свободного падения там, где расположен маятник (на расстоянии R от центра Земли; M обозначает массу Земли).

5. Периоды колебаний двух маятников длиной L_1 и L_2, расположенных на расстояниях R_1 и R_2 от центра Земли, соответственно равны p_1 и p_2. Покажите, что

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{R_1\sqrt{L_1}}{R_2\sqrt{L_2}}.$$

6. Некоторый маятник точно отображает время в Париже, где $R = 3956$ (миль), но отстает на 2 минуты 40 секунд за день на экваторе. Используя результат задачи 5, найдите расстояние от центра Земли до экватора.

7. Маятник длиной 100,10 дюймов, расположенный на уровне моря, где радиус земли $R = 3960$ (миль), имеет тот же период колебаний, что и маятник длиной 100,00 дюймов, расположенный на близлежащей горе. Используя результат задачи 5, найдите высоту горы.

8. Большинство дедушкиных часов имеют маятники, длину которых можно регулировать. Одни такие часы отстают на 10 мин в день при длине их маятника 30 дюймов. Какой длины должен быть маятник, чтобы часы показывали точное время?

9. Попробуйте вывести уравнение (5), которое описывает движение тела, подвешенного на пружине. (*Указание.* Обозначьте через $x(t)$ смещение тела вниз от нерастянутого состояния пружины; найдите дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет x, а затем подставьте $y = x - x_0$ в полученное дифференциальное уравнение.)

10. Плавающий буй представляет собой однородный цилиндр радиуса r высотой h с плотностью $\rho \leqq 0{,}5$ (напомним, что плотность воды равна 1 г/см^3). Предположим, что буй плавает так, что ось цилиндра вертикальна. Вначале буй подвешен над водой так, что его нижнее основание касается поверхности воды. В момент $t = 0$ его отпускают. На него действуют две силы: направленная вниз сила тяготения, равная его весу $mg = \rho\pi r^2 hg$, и направленная вверх сила Архимеда, равная весу $\pi r^2 xg$ вытесненной им воды, где $x = x(t)$ — глубина, на которую погрузилось нижнее основание буя в момент времени t (рис. 3.4.12). Покажите, что буй будет совершать простые гармонические колебания около своего положения равновесия $x_e = \rho h$ с периодом $p = 2\pi\sqrt{\rho h/g}$. Вычислите p и амплитуду колебаний, если $\rho = 0{,}5$ г/см^3, $h = 200$ см, а $g = 980$ см/с^2.

11. Цилиндрический буй весом 100 фунтов (массой $m = 3{,}125$ слагов (единиц массы в системе фунт–сила, точнее, в системе единиц фут–фунт–секунда (fps)), т. е. 45,5 кг плавает в воде так, что его ось вертикальна (как в задаче 10). Если на него немного надавить, а затем отпустить, он будет совершать четыре колебания каждые 10 секунд. Пренебрегая сопротивлением среды, найдите радиус буя.

12. Предположим, что Земля имеет форму шара, радиус которого равен $R = 3960$ (миль), а ее масса равна M. Предположим также, что ее плотность одинакова по всему объему. Для частицы массой m, находящейся *внутри* Земли на расстоянии r от центра, сила притяжения частицы к центру Земли равна $F_r = -GM_r m/r^2$, где M_r обозначает массу той части Земли, которая заключена внутри шара радиуса r. **(a)** Покажите, что $F_r = -GMmr/R^3$. **(b)** Предположим, что прямо через центр Земли просверлено небольшое отверстие, соединяющее диаметрально противоположные точки ее поверхности. Частицу массой m в момент времени $t = 0$ бросили в это отверстие с нулевой начальной скоростью. Обозначим через $r(t)$ расстояние от центра Земли до частицы в момент времени t (рис. 3.4.13). Учитывая второй закон Ньютона и результат, полученный в пункте (a), покажите, что $r''(t) = -k^2 r(t)$, где $k^2 = GM/R^3 = g/R$.

(c) Пусть $g = 32{,}2$ фут/с^2. Учитывая результат пункта (b), покажите, что частица будет совершать простые гармонические колебания от одного конца отверстия к другому с периодом около 84 минут. **(d)** Найдите (или выведите) период вращения спутника вокруг Земли, предполагая, что он скользит по поверхности; сравните его с результатом пункта (c). Как вы объясните совпадение? *Является* ли это совпадением? **(e)** С какой скоростью (в милях в час) частица пролетает мимо центра Земли? **(f)** Найдите (или выведите) скорость полета спутника вокруг

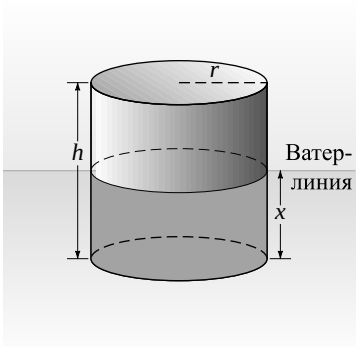


Рис. 3.4.12. Буй из задачи 10

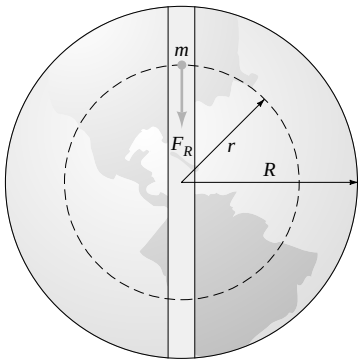


Рис. 3.4.13. Частица массой m, падающая в отверстие, проходящее через центр земли (задача 12)

Земли, предполагая, что он скользит по поверхности; сравните с результатом пункта (e). Как вы объясните совпадение? Действительно ли это *совпадение*?

13. Пусть система состоит из тела заданной массы, закрепленного на пружине с амортизатором. Пусть параметры системы следующие: $m = 10$, $c = 9$ и $k = 2$. Предположим, что тело приведено в движение с начальными условиями $x(0) = 0$ и $x'(0) = 5$. **(a)** Найдите смещение $x(t)$ и покажите, что график этой функции похож на изображенный на рис. 3.4.14. **(b)** Найдите, насколько тело отклонится вправо перед тем, как начнет возвращаться в положение равновесия.

14. Пусть система состоит из тела заданной массы, закрепленного на пружине с амортизатором. Пусть параметры системы следующие: $m = 25$, $c = 10$ и $k = 226$. Предположим, что тело приведено в движение с начальными условиями $x(0) = 20$ и $x'(0) = 41$. **(a)** Найдите смещение $x(t)$ и покажите, что график этой функции похож на изображенный на рис. 3.4.15. **(b)** Найдите условный период затухающих колебаний и уравнения огибающих, изображенных на рисунке штрихами.

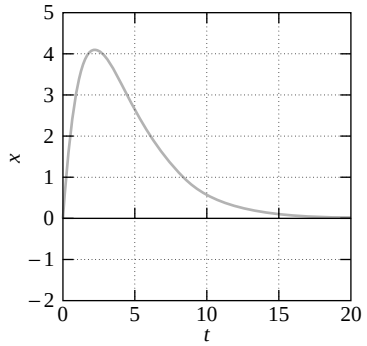


Рис. 3.4.14. Функция смещения $x(t)$ из задачи 13

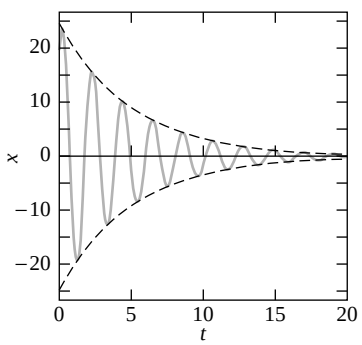


Рис. 3.4.15. График смещения $x(t)$ из задачи 14

В оставшихся задачах этого раздела рассматриваются свободные затухающие колебания. В задачах 15–21 тело массой m закреплено на пружине, жесткость которой равна k, и соединено

с амортизатором, коэффициент затухания которого равен c. Тело приведено в движение из начального положения x_0 со скоростью v_0. Найдите уравнение движения $x(t)$ и определите тип колебаний (затухающие, сверхзатухающие или предельные на границе апериодичности). В случае затухающих колебаний запишите уравнение движения в виде $x(t) = C_1 e^{-pt}\cos(\omega_1 t - \alpha_1)$. Найдите также уравнение движения без затухания $u(t) = C_0\cos(\omega_0 t - \alpha_0)$, т. е. в случае, когда тело приведено в движение из того же начального положения и с той же скоростью, но амортизатор в системе отсутствует (в этом случае нужно положить $c = 0$). Наконец, проиллюстрируйте эффект затухания, сравнив графики $x(t)$ и $u(t)$).

15. $m = \frac{1}{2}$, $c = 3$, $k = 4$; $x_0 = 2$, $v_0 = 0$

16. $m = 3$, $c = 30$, $k = 63$; $x_0 = 2$, $v_0 = 2$

17. $m = 1$, $c = 8$, $k = 16$; $x_0 = 5$, $v_0 = -10$

18. $m = 2$, $c = 12$, $k = 50$; $x_0 = 0$, $v_0 = -8$

19. $m = 4$, $c = 20$, $k = 169$; $x_0 = 4$, $v_0 = 16$

20. $m = 2$, $c = 16$, $k = 40$; $x_0 = 5$, $v_0 = 4$

21. $m = 1$, $c = 10$, $k = 125$; $x_0 = 6$, $v_0 = 50$

22. Тело весом 12 фунтов (массой $m = 0{,}375$ слагов (единиц массы в системе фунт–сила)) подвешено на пружине и прикреплено к амортизатору. Пружина растягивается на под действием веса тела на 6 дюймов. Амортизатор оказывает сопротивление в 3 фута на каждый фут в секунду скорости. **(a)** Предположим, в момент времени $t = 0$ тело оттянули на 1 фут вниз из его положения равновесия и сразу же отпустили. Найдите смещение $x(t)$. **(b)** Найдите частоту, амплитуду затухающих колебаний и фазовый угол колебаний.

23. В этой задаче рассматривается сильно упрощенная модель автомобиля весом 3200 фунтов (массой $m = 100$ слагов (единиц массы в системе фунт–сила)). Предположим, что подвеска автомобиля работает как обычная пружина, а амортизирующие устройства — как обычный амортизатор. Иными словами, вертикальные колебания подвески удовлетворяют уравнению (4) с подходящими значениями коэффициентов. **(a)** Найдите коэффициент жесткости k пружины, если известно, что автомобиль совершает 80 колебаний в минуту (колебание/мин) при отсоединенных амортизаторах. **(b)** При подсоединенных амортизаторах, если машина проехала ухаб, она совершает затухающие колебания с частотой 78 колебание/мин. Через какое время амплитуда примет значение, равное 1% от начального значения?

В задачах 24–34 рассматривается система, состоящая из тела заданной массы, закрепленного на пружине с амортизатором, причем в этой системе функция $x(t)$, выражающая смещение, удовлетворяет дифференциальному уравнению (4). Обозначим $x_0 = x(0)$ и $v_0 = x'(0)$. Напомним также, что $p = c/(2m)$, $\omega_0^2 = k/m$ и $\omega_1^2 = \omega_0^2 - p^2$. В каждой из задач также указано, являются ли колебания в системе сверхзатухающими, затухающими или предельными на границе апериодичности.

24. (Предельные колебания на границе апериодичности.) Покажите, что в этом случае

$$x(t) = (x_0 + v_0 t + p x_0 t)e^{-pt}.$$

25. (Предельные колебания на границе апериодичности.) Используя результат задачи 24, покажите, что тело проходит точку $x = 0$ в некоторый момент времени $t > 0$ тогда и только тогда, когда x_0 и $v_0 + p x_0$ разных знаков.

26. (Предельные колебания на границе апериодичности.) Используя результат задачи 24, покажите, что $x(t)$ имеет локальный максимум или минимум в некоторый момент времени $t > 0$ тогда и только тогда, когда v_0 и $v_0 + p x_0$ одного знака.

27. (Сверхзатухание.) Покажите, что в этом случае

$$x(t) = \frac{1}{2\gamma}\left[(v_0 - r_2 x_0)e^{r_1 t} - (v_0 - r_1 x_0)e^{r_2 t}\right],$$

где $r_1, r_2 = -p \pm \sqrt{p^2 - \omega_0^2}$ и $\gamma = (r_1 - r_2)/2 > 0$.

28. (Сверхзатухание.) Пусть $x_0 = 0$. Используя результат задачи 27, покажите, что

$$x(t) = \frac{v_0}{\gamma} e^{-pt} \sinh \gamma t.$$

29. (Сверхзатухание.) Покажите, что в этом случае тело может пройти через положение равновесия $x = 0$ не более одного раза.

30. (Затухающие колебания.) Покажите, что в этом случае

$$x(t) = e^{-pt} \left(x_0 \cos \omega_1 t + \frac{v_0 + p x_0}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right).$$

31. (Слабо затухающие колебания.) Применив разложение в ряд, покажите, что если коэффициент поглощения c мал по сравнению с $\sqrt{8mk}$, то

$$\omega_1 \approx \omega_0 \left(1 - \frac{c^2}{8mk} \right).$$

32. (Затухающие колебания.) Покажите, что если

$$\operatorname{tg}(\omega_1 t - \alpha) = -\frac{p}{\omega_1},$$

то функция

$$x(t) = Ce^{-pt} \cos(\omega_1 t - \alpha)$$

достигает своего локального экстремума (минимума или максимума). Докажите, что если t_1 и t_2 — моменты времени, в которые эта функция достигает последовательных максимумов, то $t_2 - t_1 = 2\pi/\omega_1$.

33. (Затухающие колебания.) Пусть x_1 и x_2 — два последовательных максимальных значения $x(t)$. Используя результат задачи 32, покажите, что

$$\ln \frac{x_1}{x_2} = \frac{2\pi p}{\omega_1}.$$

Постоянная $\Delta = 2\pi p/\omega_1$ называется **логарифмическим декрементом** осциллятора. Обратите внимание, что $c = m\omega_1 \Delta/\pi$, так как $p = c/(2m)$.

Замечание. *Используя результат задачи 33, можно придумать метод измерения* вязкости *жидкости. Вязкость является важным параметром в гидродинамике, однако измерить ее непосредственно достаточно сложно. Согласно закону Стокса о медленном движении твердого тела в жидкости, на сферическое тело радиусом a, которое движется (относительно медленно) в жидкости с вязкостью μ, действует сила сопротивления $F_R = 6\pi\mu a v$. Поэтому, если сферическое тело подвесить на пружине так, чтобы оно погрузилось в жидкость, и привести в движение, то благодаря этой силе сопротивления колебания будут затухать с коэффициентом затухания $c = 6\pi a\mu$. Частоту ω_1 и логарифмический декремент затухания Δ колебаний можно измерить непосредственно. Используя последнюю формулу задачи 33, несложно найти c, а значит, и вязкость жидкости.*

34. (Затухающие колебания.) Тело весом 100 фунтов (массой $m = 3{,}125$ слага (единицы массы в системе фунт–сила)), закрепленное на пружине и соединенное с амортизатором, совершает колебания. Тело достигло двух своих первых локальных максимумов смещения, равных $6{,}73$ и $1{,}46$ дюймов в моменты времени $0{,}34$ и $1{,}17$ секунд соответственно. Вычислите коэффициент затухания (в фунтах в секунду на фут) и коэффициент жесткости пружины (в фунтах на фут).

Дифференциальные уравнения и детерминизм
Пусть заданы масса m тела, коэффициент демпфирования c и коэффициент жесткости пружины k. По теореме 2 из раздела 3.1 уравнение

$$mx'' + cx' + kx = 0 \tag{26}$$

имеет единственное *решение для $t \geqq 0$, удовлетворяющее данным начальным условиям $x(0) = x_0$, $x'(0) = v_0$. Поэтому последующее движение идеальной системы, состоящей из тела, закрепленного на пружине с амортизатором, полностью определяется дифференциальным уравнением и начальными данными. Конечно, в реальной физической системе невозможно измерить m, c и k* точно. *В задачах 35–38 исследуется связанная с этим неопределенность (неточность, неуверенность, ненадежность, недостоверность, погрешность, если хотите) в предсказании поведения физической системы.*

35. Предположим, что в уравнении (25) $m = 1$, $c = 2$ и $k = 1$. Покажите, что решением, удовлетворяющим условиям $x(0) = 0$ и $x'(0) = 1$, является функция

$$x_1(t) = te^{-t}.$$

36. Предположим, что $m = 1$ и $c = 2$, но $k = 1 - 10^{-2n}$. Покажите, что решением уравнения (25), удовлетворяющим условиям $x(0) = 0$ и $x'(0) = 1$, является функция

$$x_2(t) = 10^n e^{-t} \sinh 10^{-n} t.$$

37. Предположим, что $m = 1$ и $c = 2$, но $k = 1 + 10^{-2n}$. Покажите, что решением уравнения (25), удовлетворяющим условиям $x(0) = 0$ и $x'(0) = 1$, является функция

$$x_3(t) = 10^n e^{-t} \sin 10^{-n} t.$$

38. Хотя графики $x_1(t)$ и $x_2(t)$ похожи на графики на рис. 3.4.7 и 3.4.8, график $x_3(t)$ демонстрирует затухающие колебания, подобные показанным на рис. 3.4.9, но с очень большим условным периодом затухающих колебаний. Тем не менее, покажите, что для любого фиксированного $t > 0$

$$\lim_{n\to\infty} x_2(t) = \lim_{n\to\infty} x_3(t) = x_1(t).$$

Таким образом, *на заданном конечном временном интервале* эти три решения "практически совпадают" при достаточно больших n.

3.5. Неоднородные уравнения и метод неопределенных коэффициентов

В разделе 3.3 мы научились решать линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Но в разделе 3.4 мы видели, что если в простых механических системах учитывать внешние силы, то в дифференциальном уравнении появляется еще одно (или несколько) слагаемое, и уравнение перестает быть однородным. В общем случае неоднородное линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с целыми коэффициентами имеет вид

➤
$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x). \tag{1}$$

По теореме 5 из раздела 3.2, общее решение уравнения (1) можно представить в виде

$$y = y_c + y_p, \tag{2}$$

где дополняющая функция $y_c(x)$ является общим решением соответствующего однородного линейного уравнения

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{3}$$

а $y_p(x)$ — частное решение уравнения (1). Таким образом, необходимо научиться находить y_p.

Метод неопределенных коэффициентов позволяет непосредственно найти необходимое решение в случае, когда данная функция $f(x)$ в уравнении (1) достаточно проста для того, чтобы можно было сделать предположения об общем виде y_p. Например, предположим, что $f(x)$ — многочлен степени m. Тогда, поскольку производные многочлена также являются многочленами более низких степеней, логично искать решение в виде функции

$$y_p(x) = A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \cdots + A_1 x + A_0,$$

которая также является многочленом степени m, но с (пока) неопределенными коэффициентами. Затем, подставив выражение для y_p в уравнение (1) и приведя подобные (для этого достаточно просуммировать коэффициенты при одинаковых степенях x), можно попытаться найти значения $A_0, A_1, \ldots, A_m$ такие, что y_p действительно будет решением уравнения (1).

Подобным образом можно поступить и в том случае, когда

$$f(x) = a \cos kx + b \sin kx.$$

В этом случае логично попытаться найти частное решение в виде

$$y_p(x) = A \cos kx + B \sin kx,$$

т. е. в виде линейной комбинации с неопределенными коэффициентами A и B. Причина заключается в том, что любая производная линейной комбинации функций $\cos kx$ и $\sin kx$ также является линейной комбинацией этих функций. В этом случае мы можем подставить выражение для y_p в уравнение (1) и привести подобные при $\cos kx$ и $\sin kx$ в обеих частях полученного уравнения, а затем попытаться определить значения A и B, при которых y_p действительно будет частным решением.

Таким образом, что этот метод подходит в том случае, когда производные $f(x)$ имеют тот же вид, что и сама функция $f(x)$. Перед описанием этого метода во всей его общности в качестве иллюстрации предварительно приведем несколько примеров его применения.

Пример 1 Найдем частное решение уравнения $y'' + 3y' + 4y = 3x + 2$.

Решение Здесь $f(x) = 3x + 2$ — многочлен степени 1. Поэтому полагаем

$$y_p(x) = Ax + B.$$

Тогда $y_p' = A$ и $y_p'' = 0$, так что y_p удовлетворяет дифференциальному уравнению, если

$$(0) + 3(A) + 4(Ax + B) = 3x + 2.$$

Это так тогда и только тогда, когда $4A = 3$ и $3A + 4B = 2$. Система этих двух уравнений имеет решение $A = \frac{3}{4}$ и $B = -\frac{1}{16}$, поэтому мы нашли частное решение

$$y_p(x) = \tfrac{3}{4}x - \tfrac{1}{16}.$$ ■

Пример 2 Найдем частное решение уравнения $y'' - 4y = 2e^{3x}$.

Решение Любая производная функции e^{3x} имеет вид произведения e^{3x} на константу. Поэтому логично попытаться испытать в качестве решения

$$y_p(x) = Ae^{3x}.$$

В этом случае $y_p'' = 9Ae^{3x}$, поэтому данное дифференциальное уравнение удовлетворяется, если

$$9Ae^{3x} - 4(Ae^{3x}) = 2e^{3x}.$$

Отсюда находим $5A = 2$, откуда $A = \frac{2}{5}$. Поэтому одним из частных решений будет $y_p(x) = \frac{2}{5}e^{3x}$. ■

Пример 3 Найдем частное решение уравнения $3y'' + y' - 2y = 2\cos x$.

Решение Поначалу кажется, что решение можно попытаться найти в виде $y_p(x) = A\cos x$. Однако из-за присутствия y' в левой части, возможно, потребуется слагаемое, которое содержит также и $\sin x$. Поэтому попробуем их линейную комбинацию

$$\begin{aligned} y_p(x) &= A\cos x + B\sin x; \\ y_p'(x) &= -A\sin x + B\cos x, \\ y_p''(x) &= -A\cos x - B\sin x. \end{aligned}$$

Тогда постановка y_p и ее производных в данное дифференциальное уравнение даст

$$3(-A\cos x - B\sin x) + (-A\sin x + B\cos x) - 2(A\cos x + B\sin x) = 2\cos x.$$

Приведя подобные (просуммировав коэффициенты) при $\cos x$ и $\sin x$ в обеих частях уравнения и приравняв коэффициенты слева и справа, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} -5A + B &= 2, \\ -A - 5B &= 0, \end{aligned}$$

которая имеет решение $A = -\frac{5}{13}$, $B = \frac{1}{13}$. Так что в качестве искомого частного решения можно взять

$$y_p(x) = -\tfrac{5}{13}\cos x + \tfrac{1}{13}\sin x.$$ ■

Следующий пример внешне похож на пример 2. Однако он показывает, что метод неопределенных коэффициентов не всегда так прост, как кажется на первый взгляд.

Пример 4 Найдем частное решение уравнения $y'' - 4y = 2e^{2x}$.

Решение Если подставить $y_p(x) = Ae^{2x}$, то получим, что

$$y_p'' - 4y_p = 4Ae^{2x} - 4Ae^{2x} = 0 \neq 2e^{2x}.$$

Поэтому независимо от конкретного значения A, функция Ae^{2x} не может удовлетворять данному неоднородному уравнению. Фактически приведенные вычисления показывают, что Ae^{2x} удовлетворяет соответствующему *однородному* уравнению. Поэтому необходимо придумать такую основную функцию $y_p(x)$, чтобы ее производные включали как e^{2x}, так и *еще что-нибудь другое*, что может сократиться при подстановке в дифференциальное уравнение, причем в результате приведения подобных должно остаться нужное нам слагаемое e^{2x}. Правдоподобно предположить, что подойдет функция

$$y_p(x) = Axe^{2x},$$

производные которой

$$y_p'(x) = Ae^{2x} + 2Axe^{2x} \quad \text{и} \quad y_p''(x) = 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x}.$$

Подстановка в исходное дифференциальное уравнение дает

$$(4Ae^{2x} + 4Axe^{2x}) - 4(Axe^{2x}) = 2e^{2x}.$$

Слагаемые, подобные xe^{2x}, сократились. Осталось лишь $4Ae^{2x} = 2e^{2x}$, откуда $A = \frac{1}{2}$. Следовательно, одним из частных решений является функция

$$y_p(x) = \tfrac{1}{2}xe^{2x}.$$ ■

Общий метод неопределенных коэффициентов

Сложности в примере 4 появились из того, что функция $f(x) = 2e^{2x}$ удовлетворяет соответствующему однородному дифференциальному уравнению. Правило 1 позволяет выбрать вид решения в том случае, если подобных трудностей нет, а правило 2 — в том случае, когда такие трудности есть.

Метод неопределенных коэффициентов применим, когда функция $f(x)$ в уравнении (1) является (конечной) линейной комбинацией произведений функций следующих трех видов.

1. Многочлен от переменной x;
2. Экспонента e^{rx}; (4)
3. $\cos kx$ или $\sin kx$.

Любая такая функция, например

$$f(x) = (3 - 4x^2)e^{5x} - 4x^3 \cos 10x,$$

обладает тем ключевым свойством, что сама функция $f(x)$ и ее производные всех порядков содержат только *конечное* число линейно независимых функций в качестве своих слагаемых. (После приведения подобных, разумеется. — *Примеч. ред.*) В правилах 1 и 2 подразумевается, что $Ly = f(x)$ — неоднородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами, а функция $f(x)$ имеет именно такой вид.

Правило 1 Метод неопределенных коэффициентов

Предположим, что ни одно из слагаемых в функции $f(x)$ или любой ее производной не удовлетворяет соответствующему однородному дифференциальному уравнению $Ly = 0$. Тогда в качестве пробного решения y_p необходимо взять линейную комбинацию всех таких линейно независимых слагаемых и их производных. Затем нужно определить коэффициенты полученной линейной комбинации, подставив это пробное решение в исходное неоднородное дифференциальное уравнение $Ly = f(x)$. ▲

Заметим, что это правило не теорема, требующая доказательства. Это лишь общая процедура для поиска частного решения y_p. Если удастся найти такое y_p, то это и будет необходимым результатом. (Однако можно доказать, что эта процедура всегда будет успешной при указанных предположениях.)

На практике предположения в правиле 1 можно проверить, использовав сначала характеристическое уравнение для поиска общего решения соответствующего однородного дифференциального уравнения y_c, а затем выписав список всех слагаемых, которые входят в запись функции $f(x)$ и ее производных. Если ни одно слагаемое из списка не совпадает со слагаемыми из y_c, тогда можно применять правило 1.

Пример 5 Найдем частное решение уравнения

$$y'' + 4y = 3x^3. \tag{5}$$

Решение (Известным) общим решением однородного уравнения, соответствующего уравнению (5), является функция

$$y_c(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x.$$

Функция $f(x) = 3x^3$ и ее производные являются произведениями на константы линейно независимых функций x^3, x^2, x и 1. Так как ни одна из них не входит в y_c, попробуем

$$\begin{aligned} y_p &= Ax^3 + Bx^2 + Cx + D, \\ y_p' &= 3Ax^2 + 2Bx + C, \\ y_p'' &= 6Ax + 2B. \end{aligned}$$

Подстановка в уравнение (5) дает

$$y_p'' + 4y_p = (6Ax + 2B) + 4(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) = \\ = 4Ax^3 + 4Bx^2 + (6A + 4C)x + (2B + D) = 3x^3.$$

Приведя подобные в последнем уравнении (просуммировав коэффициенты при одинаковых степенях x), получим систему уравнений

$$\begin{aligned} 4A &= 3, & 4B &= 0, \\ 6A + 4C &= 0, & 2B + D &= 0. \end{aligned}$$

Она имеет решение $A = \frac{3}{4}, B = 0, C = -\frac{9}{8}$ и $D = 0$. Поэтому функция

$$y_p(x) = \tfrac{3}{4}x^3 - \tfrac{9}{8}x$$ ■

представляет собой одно из частных решений уравнения (5).

Пример 6 Найдем решение задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$\begin{aligned} &y'' - 3y' + 2y = 3e^{-x} - 10\cos 3x; \\ &y(0) = 1, \quad y'(0) = 2. \end{aligned} \tag{6}$$

Решение Характеристическое уравнение $r^2 - 3r + 2 = 0$ имеет корни $r = 1$ и $r = 2$, поэтому общим решением соответствующего однородного уравнения является функция

$$y_c(x) = c_1 e^x + c_2 e^{2x}.$$

В записи функции $f(x) = 3e^{-x} - 10\cos 3x$ и ее производных встречаются следующие слагаемые: e^{-x}, $\cos 3x$ и $\sin 3x$. Так как ни одно из них не входит в y_c, подставим

$$\begin{aligned} y_p &= \quad Ae^{-x} + \quad B\cos 3x + \quad C\sin 3x, \\ y_p' &= -Ae^{-x} - 3B\sin 3x + 3C\cos 3x, \\ y_p'' &= \quad Ae^{-x} - 9B\cos 3x - \quad 9C\sin 3x \end{aligned}$$

в наше уравнение. После подстановки этих выражений в уравнение (6) и приведения подобных слагаемых получим равенство

$$y_p'' - 3y_p' + 2y_p = 6Ae^{-x} + (-7B - 9C)\cos 3x + (9B - 7C)\sin 3x = \\ = 3e^{-x} - 10\cos 3x.$$

Приравняем коэффициенты при e^{-x}, при $\cos 3x$ и при $\sin 3x$. Получим систему уравнений

$$\begin{aligned} 6A &= \quad 3, \\ -7B - 9C &= -10, \\ 9B - 7C &= \quad 0, \end{aligned}$$

которая имеет решение $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{7}{13}$ и $C = \frac{9}{13}$. Отсюда получим частное решение

$$y_p(x) = \tfrac{1}{2}e^{-x} + \tfrac{7}{13}\cos 3x + \tfrac{9}{13}\sin 3x,$$

которое, однако, не удовлетворяет начальным условиям (6).

Чтобы найти решение, удовлетворяющее начальным условиям, начнем с *общего* решения

$$\begin{aligned} y(x) &= y_c(x) + y_p(x) = \\ &= c_1e^x + c_2e^{2x} + \tfrac{1}{2}e^{-x} + \tfrac{7}{13}\cos 3x + \tfrac{9}{13}\sin 3x, \end{aligned}$$

производная которого

$$y'(x) = c_1e^x + 2c_2e^{2x} - \tfrac{1}{2}e^{-x} - \tfrac{21}{13}\sin 3x + \tfrac{27}{13}\cos 3x.$$

Из начальных условий (6) получим систему уравнений

$$y(0) = c_1 + c_2 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{7}{13} = 1,$$

$$y'(0) = c_1 + 2c_2 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{27}{13} = 2,$$

решением которой будут числа $c_1 = -\frac{1}{2}, c_2 = \frac{6}{13}$. Таким образом, искомое частное решение имеет вид

$$y(x) = -\tfrac{1}{2}e^x + \tfrac{6}{13}e^{2x} + \tfrac{1}{2}e^{-x} + \tfrac{7}{13}\cos 3x + \tfrac{9}{13}\sin 3x. \quad \blacksquare$$

Пример 7 Найдем общее решение уравнения

$$y^{(3)} + 9y' = x\sin x + x^2e^{2x}. \tag{7}$$

Решение Характеристическое уравнение $r^3 + 9r = 0$ имеет корни $r = 0$, $r = -3i$ и $r = 3i$. Поэтому общим решением соответствующего однородного уравнения является функция

$$y_c(x) = c_1 + c_2\cos 3x + c_3\sin 3x.$$

Производные правой части уравнения (7) содержат слагаемые

$$\cos x, \quad \sin x, \quad x\cos x, \quad x\sin x,$$
$$e^{2x}, \quad xe^{2x} \quad \text{и} \quad x^2e^{2x}.$$

Поскольку ни одно из слагаемых не входит в общее решение однородного уравнения, в качестве пробного решения можно взять

$$y_p(x) = A\cos x + B\sin x + Cx\cos x + Dx\sin x + Ee^{2x} + Fxe^{2x} + Gx^2e^{2x}.$$

Подставляя y_p в уравнение (7) и приводя подобные, получаем семь уравнений, позволяющих определить семь коэффициентов A, B, C, D, E, F и G. $\blacksquare$

Случай совпадения слагаемых

Теперь рассмотрим случай, когда правило 1 неприменимо, т. е. когда некоторые слагаемые, которые входят в функцию $f(x)$ и ее производные, удовлетворяют соответствующему однородному дифференциальному уравнению. Пусть, например, мы хотим найти частное решение дифференциального уравнения

$$(D-r)^3 y = (2x-3)e^{rx}. \tag{8}$$

Следуя правилу 1, мы попытались бы в качестве решения взять функцию вида

$$y_p(x) = Ae^{rx} + Bxe^{rx}. \tag{9}$$

Но этот вид $y_p(x)$ не подходит, так как общим решением однородного уравнения соответствующего уравнению (8) является функция

$$y_c(x) = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx} + c_3 x^2 e^{rx}. \tag{10}$$

По этой причине подстановка (9) в левую часть уравнения (8) даст в правой части нуль, а не $(2x-3)e^{rx}$.

Чтобы подправить вид нашей функции, заметим, что

$$(D-r)^2[(2x-3)e^{rx}] = [D^2(2x-3)]e^{rx} = 0$$

согласно равенству (13) из раздела 3.3. Пусть $y(x)$ — *любое* решение уравнения (8). Применим оператор $(D-r)^2$ к обеим частям уравнения. Тогда получим, что $y(x)$ также является решением уравнения $(D-r)^5 y = 0$. Общим решением этого *однородного* уравнения является функция

$$y(x) = \underbrace{c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx} + c_3 x^2 e^{rx}}_{y_c} + \underbrace{Ax^3 e^{rx} + Bx^4 e^{rx}}_{y_p}.$$

Поэтому *каждое* решение исходного уравнения (8) можно представить в виде суммы решения соответствующего однородного уравнения и *частного решения* в виде

$$y_p(x) = Ax^3 e^{rx} + Bx^4 e^{rx}. \tag{11}$$

Заметим, что правая часть равенства (11) может быть получена умножением всех слагаемых функции (9) (наше первоначальное предположение о виде решения) на наименьшую целую положительную степень x (в нашем случае x^3), достаточную для того, чтобы $y_p(x)$ и общее решение однородного уравнения $y_c(x)$ (в данном случае его дает формула (10)) не содержали подобных членов. Эта процедура применима и в общем случае.

Чтобы упростить применение общей процедуры, предусмотренной правилом 2, заметим следующее. Для того чтобы найти частное решение неоднородного линейного дифференциального уравнения

$$Ly = f_1(x) + f_2(x), \tag{12}$$

достаточно найти *по отдельности* частные решения $Y_1(x)$ и $Y_2(x)$ двух уравнений

$$Ly = f_1(x) \quad \text{и} \quad Ly = f_2(x) \tag{13}$$

соответственно. Из линейности тогда следует, что

$$L[Y_1 + Y_2] = LY_1 + LY_2 = f_1(x) + f_2(x),$$

откуда $y_p = Y_1 + Y_2$ будет частным решением уравнения (12). (Это похоже на "принцип суперпозиции" для неоднородных линейных уравнений.)

Теперь наша задача состоит в том, чтобы найти частное решение уравнения $Ly = f(x)$, где $f(x)$ — линейная комбинация произведений элементарных функций из списка (4). Поэтому $f(x)$ можно записать в виде суммы слагаемых вида

$$P_m(x)e^{rx}\cos kx \quad \text{или} \quad P_m(x)e^{rx}\sin kx, \tag{14}$$

где $P_m(x)$ — многочлен от x степени m. Заметим, что любая производная такого слагаемого является суммой слагаемых того же вида, но содержит *как* синус, *так и* косинус. Процедура, с помощью которой мы ранее получили частное решение (11) уравнения (8), может быть обобщена следующим образом.

Правило 2 Метод неопределенных коэффициентов

Если функцию $f(x)$ можно записать в виде (14), то в качестве пробного решения следует взять

$$\begin{aligned} y_p(x) = x^s[&(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_mx^m)e^{rx}\cos kx + \\ &+ (B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_mx^m)e^{rx}\sin kx], \end{aligned} \tag{15}$$

где s — такое наименьшее неотрицательное целое число, что y_p и общее решение соответствующего однородного уравнения y_c не содержат подобных членов. Затем необходимо определить неизвестные коэффициенты в формуле (15), подставив y_p в неоднородное уравнение. ▲

На практике мы редко имеем дело с функцией $f(x)$ в наиболее общем виде. В таблице на рис. 3.5.1 приведен список некоторых пробных функций y_p в чаще всего встречающихся случаях, в которых $m = 0$, $r = 0$ или $k = 0$.

С другой стороны, часто встречаются функции вида

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

$f(x)$	y_p
$P_m = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m$	$x^s(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_mx^m)$
$a\cos kx + b\sin kx$	$x^s(A\cos kx + B\sin kx)$
$e^{rx}(a\cos kx + b\sin kx)$	$x^se^{rx}(A\cos kx + B\sin kx)$
$P_m(x)e^{rx}$	$x^s(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_mx^m)e^{rx}$
$P_m(x)(a\cos kx + b\sin kx)$	$x^s[(A_0 + A_1x + \cdots + A_mx^m)\cos kx + (B_0 + B_1x + \cdots + B_mx^m)\sin kx]$

Рис. 3.5.1. Подстановки для метода неопределенных коэффициентов

где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — различные функции типов, приведенных в таблице на рис. 3.5.1. В таком случае надо взять y_p в виде суммы пробных функций для $f_1(x)$ и $f_2(x)$, выбрав *s отдельно* для каждой части, чтобы устранить возможные совпадения слагаемых. Данная процедура проиллюстрирована в примерах 8–10.

Пример 8 Найдем частное решение уравнения

$$y^{(3)} + y'' = 3e^x + 4x^2. \tag{16}$$

Решение Характеристическое уравнение $r^3 + r^2 = 0$ имеет корни $r_1 = r_2 = 0$ и $r_3 = -1$, поэтому общим решением соответствующего однородного уравнения является функция

$$y_c(x) = c_1 + c_2x + c_3e^{-x}.$$

Сначала в качестве частного решения попытаемся взять сумму

$$(Ae^x) + (B + Cx + Dx^2).$$

Часть Ae^x суммы, соответствующая $3e^x$, не содержит слагаемых, подобных слагаемым в общем решении. Но часть $B + Cx + Dx^2$ необходимо умножить на x^2, чтобы устранить подобные члены. Таким образом, можно взять

$$\begin{aligned} y_p &= Ae^x + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4, \\ y_p' &= Ae^x + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3, \\ y_p'' &= Ae^x + 2B + 6Cx + 12Dx^2 \quad \text{и} \\ y_p^{(3)} &= Ae^x + 6C + 24Dx. \end{aligned}$$

Подставим найденные производные в уравнение (16). Получим

$$2Ae^x + (2B + 6C) + (6C + 24D)x + 12Dx^2 = 3e^x + 4x^2.$$

Система уравнений

$$\begin{aligned} 2A = 3, \qquad & 2B + 6C = 0, \\ 6C + 24D = 0, \qquad & 12D = 4 \end{aligned}$$

имеет решение $A = \frac{3}{2}$, $B = 4$, $C = -\frac{4}{3}$ и $D = \frac{1}{3}$. Поэтому искомое частное решение можно записать в виде

$$y_p(x) = \tfrac{3}{2}e^x + 4x^2 - \tfrac{4}{3}x^3 + \tfrac{1}{3}x^4. \qquad \blacksquare$$

Пример 9 Найдем подходящий вид частного решения

$$y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 2x.$$

Решение Характеристическое уравнение $r^2 + 6r + 13 = 0$ имеет корни $-3 \pm 2i$, поэтому общим решением соответствующего однородного уравнения является функция

$$y_c(x) = e^{-3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x).$$

Это решение имеет такой же вид, что и пробное частное решение $e^{-3x}(A \cos 2x + B \sin 2x)$, полученное с первой попытки, поэтому для устранения подобных слагаемые частного решения необходимо умножить на x. В результате получим

$$y_p(x) = e^{-3x}(Ax \cos 2x + Bx \sin 2x). \quad \blacksquare$$

Пример 10 Определим подходящий вид частного решения для уравнения пятого порядка

$$(D-2)^3(D^2+9)y = x^2e^{2x} + x \sin 3x.$$

Решение Характеристическое уравнение $(r-2)^3(r^2+9) = 0$ имеет корни $r = 2$, 2, 2, $3i$ и $-3i$, поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$y_c(x) = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + c_3x^2e^{2x} + c_4 \cos 3x + c_5 \sin 3x.$$

Пытаясь получить частное решение, сначала рассмотрим сумму

$$[(A + Bx + Cx^2)e^{2x}] + [(D + Ex) \cos 3x + (F + Gx) \sin 3x].$$

Чтобы устранить члены, подобные слагаемым из $y_c(x)$, первую часть, соответствующую x^2e^{2x}, умножим на x^3, а вторую часть, соответствующую $x \sin 3x$, — на x. Тогда получим

$$y_p(x) = (Ax^3 + Bx^4 + Cx^5)e^{2x} + (Dx + Ex^2) \cos 3x + (Fx + Gx^2) \sin 3x. \quad \blacksquare$$

Вариация произвольных постоянных

Наконец, обратим внимание на случай, в котором метод неопределенных коэффициентов неприменим. Рассмотрим, например, уравнение

$$y'' + y = \operatorname{tg} x, \tag{17}$$

которое на первый взгляд должно решаться аналогично рассмотренным примерам. Но это не так; функция $f(x) = \operatorname{tg} x$ имеет *бесконечно много* линейно независимых производных

$$\sec^2 x, \quad 2 \sec^2 x \operatorname{tg} x, \quad 4 \sec^2 x \operatorname{tg}^2 x + 2 \sec^4 x, \quad \ldots .$$

Поэтому у нас нет подходящей *конечной* линейной комбинации, которую можно было бы использовать в качестве пробного частного решения.

Мы рассмотрим метод **вариации произвольных постоянных**, называемый иногда методом **вариации параметров**, который всегда (точнее, когда могут быть вычислены появляющиеся в нем интегралы) может быть использован для поиска частного решения неоднородного линейного дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x), \tag{18}$$

если уже известно общее решение

$$y_c = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n \tag{19}$$

соответствующего ему однородного дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0. \tag{20}$$

Изложим вкратце основную идею метода вариации произвольных постоянных. Предположим, что мы заменили произвольные постоянные, или *параметры*, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ в общем решении (19) соответствующего однородного уравнения на *переменные* (т. е. на функции) $u_1, u_2, \ldots, u_n$ от x. В каких случаях можно выбрать эти функции таким образом, чтобы комбинация

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) + \cdots + u_n(x)y_n(x) \tag{21}$$

была частным решением неоднородного уравнения (18)? Оказывается, что сделать это *можно во всех случаях*.

По сути метод совершенно одинаков для всех порядков $n \geqq 2$, но мы подробно опишем его лишь для уравнений порядка $n = 2$. Таким образом, мы рассматриваем неоднородное уравнение второго порядка

➤
$$L[y] = y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x), \tag{22}$$

причем пусть соответствующее однородное уравнение на некотором открытом интервале I непрерывности функций P и Q имеет в качестве общего решения функцию

$$y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x). \tag{23}$$

Мы хотим найти функции u_1 и u_2 такие, что функция

➤
$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) \tag{24}$$

будет частным решением уравнения (22).

Одно из условий, которым должны удовлетворять функции u_1 и u_2, состоит в том, что должно выполняться равенство $L[y_p] = f(x)$. Так как для определения двух функций необходимо иметь два условия, можно потребовать выполнения дополнительных условий. Мы постараемся потребовать выполнения таких условий, которые максимально упрощают вычисления. Однако сначала для проверки выполнения условия $L[y_p] = f(x)$ необходимо найти производные y_p' и y_p''. Используя формулу для производной произведения, получим уравнение

$$y_p' = (u_1y_1' + u_2y_2') + (u_1'y_1 + u_2'y_2).$$

Для того чтобы избежать появления вторых производных u_1'' и u_2'', потребуем выполнения дополнительного условия: вторая сумма должна быть равна нулю. Таким образом, дополнительное условие можно записать так:

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0. \tag{25}$$

Тогда

$$y_p' = u_1y_1' + u_2y_2' \tag{26}$$

и по формуле для производной произведения

$$y_p'' = (u_1y_1'' + u_2y_2'') + (u_1'y_1' + u_2'y_2'). \tag{27}$$

Но поскольку y_1 и y_2 удовлетворяют однородному уравнению

$$y'' + Py' + Qy = 0,$$

соответствующему нашему неоднородному уравнению (22), то

$$y_i'' = -Py_i' - Qy_i \tag{28}$$

для $i = 1, 2$. Тогда из уравнения (27) следует, что

$$y_p'' = (u_1'y_1' + u_2'y_2') - P \cdot (u_1y_1' + u_2y_2') - Q \cdot (u_1y_1 + u_2y_2).$$

Используя уравнения (24) и (26), находим, что

$$y_p'' = (u_1'y_1' + u_2'y_2') - Py_p' - Qy_p;$$

откуда

$$L[y_p] = u_1'y_1' + u_2'y_2'. \tag{29}$$

Поскольку y_p должно удовлетворять неоднородному уравнению (22), т. е. $L[y_p] = f(x)$, то

$$u_1'y_1' + u_2'y_2' = f(x). \tag{30}$$

Наконец, уравнения (25) и (30) определяют необходимые нам функции u_1 и u_2. Эти уравнения образуют систему

$$\begin{aligned} u_1'y_1 + u_2'y_2 &= 0, \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' &= f(x) \end{aligned} \tag{31}$$

двух линейных уравнений относительно двух *производных* u_1' и u_2'. Заметим, что определитель коэффициентов системы (31) является определителем Вронского $W(y_1, y_2)$. Решив систему уравнений (31) относительно производных u_1' и u_2', проинтегрируем их и получим u_1 и u_2 такие, что

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2 \tag{32}$$

будет искомым частным решением уравнения (22). В задаче 63 мы попросим вас проделать эту процедуру явно и таким образом проверить формулу для $y_p(x)$ из следующей теоремы.

Теорема 1 Вариация произвольных постоянных

Если функция $y_c(x) = c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ является общим решением однородного уравнения, соответствующего неоднородному уравнению $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$, то одно из частных решений неоднородного уравнения задается формулой

$$y_p(x) = -y_1(x)\int \frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}\,dx + y_2(x)\int \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}\,dx, \tag{33}$$

где $W = W(y_1, y_2)$ — определитель Вронского двух линейно независимых решений y_1 и y_2 соответствующего однородного уравнения. ▲

Пример 11 Найдем частное решение уравнения $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

Решение Общее решение соответствующего однородного уравнения представляет собой функцию $y_c(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Зная его, соответствующие функции можно просто подставить в формулу (33). Но для наглядности лучше записать уравнения (31) и решить их относительно u_1' и u_2'. В данном случае

$$\begin{aligned} y_1 &= \cos x, & y_2 &= \sin x,\\ y_1' &= -\sin x, & y_2' &= \cos x. \end{aligned}$$

Поэтому уравнения (31) имеют вид

$$\begin{aligned} (u_1')(\cos x) + (u_2')(\sin x) &= 0,\\ (u_1')(-\sin x) + (u_2')(\cos x) &= \operatorname{tg} x. \end{aligned}$$

Решив эти уравнения, получим

$$u_1' = -\sin x \operatorname{tg} x = -\frac{\sin^2 x}{\cos x} = \cos x - \sec x,$$

$$u_2' = \cos x \operatorname{tg} x = \sin x.$$

Откуда

$$u_1 = \int (\cos x - \sec x)\,dx = \sin x - \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|$$

и

$$u_2 = \int \sin x\,dx = -\cos x.$$

(Понимаете ли вы, почему мы могли положить постоянные интегрирования равными нулю?) Поэтому наше частное решение имеет вид

$$\begin{aligned} y_p(x) &= u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) =\\ &= (\sin x - \ln|\sec x + \operatorname{tg} x|)\cos x + (-\cos x)(\sin x); \end{aligned}$$

т. е.

$$y_p(x) = -(\cos x)\ln|\sec x + \operatorname{tg} x|.$$ ■

3.5. Задачи

В задачах 1–20 найдите частное решение y_p данного уравнения. Во всех этих задачах штрихи обозначают производные по x.

1. $y'' + 16y = e^{3x}$
2. $y'' - y' - 2y = 3x + 4$
3. $y'' - y' - 6y = 2\sin 3x$
4. $4y'' + 4y' + y = 3xe^x$
5. $y'' + y' + y = \sin^2 x$
6. $2y'' + 4y' + 7y = x^2$
7. $y'' - 4y = \sinh x$
8. $y'' - 4y = \cosh 2x$
9. $y'' + 2y' - 3y = 1 + xe^x$
10. $y'' + 9y = 2\cos 3x + 3\sin 3x$
11. $y^{(3)} + 4y' = 3x - 1$
12. $y^{(3)} + y' = 2 - \sin x$
13. $y'' + 2y' + 5y = e^x \sin x$
14. $y^{(4)} - 2y'' + y = xe^x$
15. $y^{(5)} + 5y^{(4)} - y = 17$
16. $y'' + 9y = 2x^2e^{3x} + 5$
17. $y'' + y = \sin x + x\cos x$
18. $y^{(4)} - 5y'' + 4y = e^x - xe^{2x}$
19. $y^{(5)} + 2y^{(3)} + 2y'' = 3x^2 - 1$
20. $y^{(3)} - y = e^x + 7$

В задачах 21–30 установите подходящий вид частного решения y_p, не определяя при этом значения коэффициентов.

21. $y'' - 2y' + 2y = e^x \sin x$
22. $y^{(5)} - y^{(3)} = e^x + 2x^2 - 5$
23. $y'' + 4y = 3x\cos 2x$
24. $y^{(3)} - y'' - 12y' = x - 2xe^{-3x}$
25. $y'' + 3y' + 2y = x(e^{-x} - e^{-2x})$
26. $y'' - 6y' + 13y = xe^{3x}\sin 2x$
27. $y^{(4)} + 5y'' + 4y = \sin x + \cos 2x$
28. $y^{(4)} + 9y'' = (x^2 + 1)\sin 3x$
29. $(D-1)^3(D^2-4)y = xe^x + e^{2x} + e^{-2x}$
30. $y^{(4)} - 2y'' + y = x^2\cos x$

В задачах 31–40 найдите решения данных задач Коши.

31. $y'' + 4y = 2x$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$
32. $y'' + 3y' + 2y = e^x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$
33. $y'' + 9y = \sin 2x$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
34. $y'' + y = \cos x$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$
35. $y'' - 2y' + 2y = x + 1$; $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$
36. $y^{(4)} - 4y'' = x^2$; $y(0) = y'(0) = 1$, $y''(0) = y^{(3)}(0) = -1$
37. $y^{(3)} - 2y'' + y' = 1 + xe^x$; $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$
38. $y'' + 2y' + 2y = \sin 3x$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$
39. $y^{(3)} + y'' = x + e^{-x}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$
40. $y^{(4)} - y = 5$; $y(0) = y'(0) = y''(0) = y^{(3)}(0) = 0$
41. Найдите какое-нибудь частное решение уравнения

$$y^{(4)} - y^{(3)} - y'' - y' - 2y = 8x^5.$$

42. Найдите решение задачи Коши (задачи с начальными условиями) для уравнения из задачи 41, если заданы следующие начальные условия:

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = y^{(3)}(0) = 0.$$

43. **(а)** Запишите частный случай формулы Эйлера

$$\cos 3x + i\sin 3x = e^{3ix} = (\cos x + i\sin x)^3,$$

раскройте скобки и приравняйте действительные и мнимые части. Этим вы докажете тождества

$$\cos^3 x = \tfrac{3}{4}\cos x + \tfrac{1}{4}\cos 3x,$$
$$\sin^3 x = \tfrac{3}{4}\sin x - \tfrac{1}{4}\sin 3x.$$

(b) Используйте результат пункта (a) для поиска общего решения уравнения

$$y'' + 4y = \cos^3 x.$$

В задачах 44–46 найдите общие решения уравнений, применив тригонометрические тождества.

44. $y'' + y' + y = \sin x \sin 3x$

45. $y'' + 9y = \sin^4 x$

46. $y'' + y = x \cos^3 x$

В задачах 47–56 с помощью метода вариации произвольных постоянных найдите какое-нибудь частное решение данного дифференциального уравнения.

47. $y'' + 3y' + 2y = 4e^x$

48. $y'' - 2y' - 8y = 3e^{-2x}$

49. $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}$

50. $y'' - 4y = \sinh 2x$

51. $y'' + 4y = \cos 3x$

52. $y'' + 9y = \sin 3x$

53. $y'' + 9y = 2 \sec 3x$

54. $y'' + y = \csc^2 x$

55. $y'' + 4y = \sin^2 x$

56. $y'' - 4y = xe^x$

57. Подстановкой можно проверить, что функция $y_c = c_1 x + c_2 x^{-1}$ является решением однородного уравнения, соответствующего неоднородному дифференциальному уравнению второго порядка

$$x^2 y'' + xy' - y = 72x^5.$$

Но перед применением метода вариации произвольных постоянных необходимо разделить это уравнение на старший коэффициент x^2 и записать его в стандартной форме

$$y'' + \frac{1}{x} y' - \frac{1}{x^2} y = 72x^3.$$

Поэтому в уравнении (22) функция $f(x) = 72x^3$. Теперь решите соответствующие уравнения (31) и найдите частное решение $y_p = 3x^5$.

В задачах 58–62 даны неоднородное дифференциальное уравнение и общее решение соответствующего однородного уравнения y_c. Примените метод задачи 57 для поиска какого-нибудь частного решения данного уравнения.

58. $x^2 y'' - 4xy' + 6y = x^3$; $y_c = c_1 x^2 + c_2 x^3$

59. $x^2 y'' - 3xy' + 4y = x^4$; $y_c = x^2(c_1 + c_2 \ln x)$

60. $4x^2 y'' - 4xy' + 3y = 8x^{4/3}$; $y_c = c_1 x + c_2 x^{3/4}$

61. $x^2 y'' + xy' + y = \ln x$; $y_c = c_1 \cos(\ln x) + c_2 \sin(\ln x)$

62. $(x^2 - 1)y'' - 2xy' + 2y = x^2 - 1$; $y_c = c_1 x + c_2(1 + x^2)$

63. Выполните все указанные в тексте преобразования для вывода формулы вариации произвольных постоянных (33) из уравнений (31) и (32).

64. Примените формулу вариации произвольных постоянных (33) для получения частного решения $y_p(x) = -x \cos x$ неоднородного уравнения $y'' + y = 2 \sin x$.

3.5. Приложение. Автоматизирование вариации произвольных постоянных

Если в формуле вариации произвольных постоянных (33) интегралы сложны или неудобны для ручных вычислений, ее можно использовать для вычислений с помощью систем

компьютерной алгебры. Например предположим, что мы хотим найти частное решение уравнения

$$y'' + y = \operatorname{tg} x$$

примера 11, зная общее решение соответствующего однородного уравнения $y_c(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$. Тогда последовательность команд на входном языке системы компьютерной алгебры *Maple*

```
y1 := cos(x):
y2 := sin(x):
f := tan(x):
W := y1*diff(y2,x) - y2*diff(y1,x):
W := simplify(W):
yp := -y1*int(y2*f/W,x) + y2*int(y1*f/W,x):
simplify(yp);
```

выполняет вычисления, указанные в формуле (33). Полученный результат

$$y_p(x) = -(\cos x) \ln\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)$$

эквивалентен результату $y_p(x) = -(\cos x)\ln(\sec x + \operatorname{tg} x)$, найденному в примере 11. Аналогичная последовательность команд на входном языке системы компьютерной алгебры *Mathematica*

```
y1 = Cos[x];
y2 = Sin[x];
f = Tan[x];
W = y1*D[y2,x] - y2*D[y1,x]   //   Simplify
yp = -y1*Integrate[y2*f/W,x] + y2*Integrate[y1*f/W,x];
Simplify[yp]
```

выдает результат

$$y_p(x) = -(\cos x) \ln\left(\frac{\cos(x/2)+\sin(x/2)}{\cos(x/2)-\sin(x/2)}\right),$$

который (по формуле разности квадратов) также эквивалентен результату примера 11. (Конечно, более новые версии систем компьютерной алгебры могут выдать и иные (хотя и эквивалентные) результаты. Система компьютерной алгебры *Mathematica 5.0* выдает, например, результат в виде -2 ArcTanh[Tan[x/2]]Cos[x]. — *Примеч. ред.*)

Чтобы таким же образом решить уравнение второго порядка $y''+P(x)y'+Q(x)y = f(x)$, зная общее решение $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ соответствующего однородного уравнения, нужно вставить определения $y_1(x)$, $y_2(x)$ и $f(x)$ в начальные строки приведенной выше программы. В задачах 1–6 найдите указанным образом частное решение $y_p(x)$ неоднородных уравнений.

1. $y'' + y = 2\sin x$ $\qquad$ $y_p(x) = -x\cos x$

2. $y'' + y = 4x\sin x$ $\qquad$ $y_p(x) = x\sin x - x^2\cos x$

3. $y'' + y = 12x^2\sin x$ $\qquad$ $y_p(x) = 3x^2\sin x + (3x - 2x^3)\cos x$

4. $y'' - 2y' + 2y = 2e^x\sin x$ $\qquad$ $y_p(x) = -xe^x\cos x$

5. $y'' - 2y' + 2y = 4xe^x \sin x$ $\qquad y_p(x) = e^x(x \sin x - x^2 \cos x)$

6. $y'' - 2y' + 2y = 12x^2 e^x \sin x$ $\qquad y_p(x) = e^x \left[3x^2 \sin x + (3x - 2x^3) \cos x\right]$

3.6. Вынужденные колебания и резонанс

В разделе 3.4 нами было получено дифференциальное уравнение

$$mx'' + cx' + kx = F(t). \tag{1}$$

Это уравнение можно рассматривать в качестве закона одномерного движения материальной точки массой m, закрепленной на пружине (жесткости k) и соединенной с амортизатором (с коэффициентом демпфирования c), на которое также действует внешняя сила $F(t)$. Многие механизмы с вращающимися частями обычно содержат системы, состоящие из тела, закрепленного на пружине с амортизатором (или эквивалентные им), внешняя сила в которых является гармонической:

$$F(t) = F_0 \cos \omega t \quad \text{или} \quad F(t) = F_0 \sin \omega t, \tag{2}$$

где постоянная F_0 — амплитуда периодической силы, а ω — ее круговая частота.

Чтобы понять, как возникает гармоническая сила в механизме с вращающимися частями, рассмотрим тележку с вращающимся вертикальным маховиком (рис. 3.6.1). Масса тележки без маховика (массой m_0) равна $m - m_0$. Центр масс маховика расположен на расстоянии a от его геометрического центра. Угловая скорость вращения маховика равна ω (радиан в секунду). Тележка прикреплена к пружине (жесткости k), как показано на рисунке. Предположим, что центр масс тележки без маховика расположен прямо под центром маховика. Обозначим через $x(t)$ смещение тележки от ее положения равновесия (в котором пружина не растянута). Из рис. 3.6.1 видно, что смещение $\overline{x}$ центра масс тележки вместе с маховиком

$$\overline{x} = \frac{(m - m_0)x + m_0(x + a \cos \omega t)}{m} = x + \frac{m_0 a}{m} \cos \omega t.$$

Пренебрегая силами сопротивления, второй закон Ньютона можно записать в виде $m\overline{x}'' = -kx$, так как сила действия пружины равна $-kx$. Подставим выражение для $\overline{x}$ в последнее уравнение. Тогда получим

$$mx'' - m_0 a \omega^2 \cos \omega t = -kx,$$

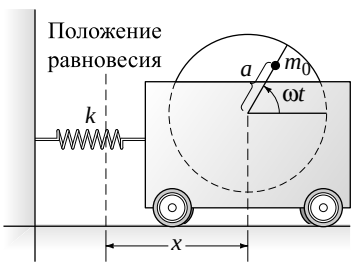


Рис. 3.6.1. Система, содержащая тележку и маховик

т. е.

$$mx'' + kx = m_0 a\omega^2 \cos \omega t. \tag{3}$$

Поэтому тележка с вращающимся маховиком ведет себя как закрепленное на пружине тело, которое движется под действием внешней простой гармонической силы, амплитуда которой равна $F_0 = m_0 a\omega^2$. Такая система является моделью стиральной машины с загрузкой спереди, если центр масс одежды смещен относительно геометрического центра барабана. Поэтому исследование решения уравнения (1) с внешними силами вида (2) имеет большое практическое значение.

Незатухающие вынужденные колебания

Для изучения незатухающих колебаний под действием внешней силы $F(t) = F_0 \cos \omega t$ положим в уравнении (1) $c = 0$. Рассмотрим полученное неоднородное дифференциальное уравнение

➤
$$mx'' + kx = F_0 \cos \omega t. \tag{4}$$

Общим решением соответствующего однородного уравнения является функция $x_c = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t$. Здесь

➤
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

обозначает (круговую, или циклическую) **собственную частоту** колебаний системы, состоящей из тела, закрепленного на пружине. Предположим сначала, что внешняя и собственная частоты *не равны*: $\omega \neq \omega_0$. Чтобы найти частное решение, подставим $x_p = A \cos \omega t$ в уравнение (4). (Мы не включили слагаемое с синусом в x_p, так как в левую часть уравнения (4) не входит x'.) В результате получим

$$-m\omega^2 A \cos \omega t + kA \cos \omega t = F_0 \cos \omega t,$$

откуда

$$A = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2}, \tag{5}$$

и поэтому

$$x_p(t) = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t. \tag{6}$$

Следовательно, общее решение $x = x_c + x_p$ имеет вид

$$x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t, \tag{7}$$

где постоянные c_1 и c_2 определяются начальными условиями $x(0)$ и $x'(0)$. Так же как и уравнение (12) из раздела 3.4, уравнение (7) можно переписать в виде

$$x(t) = C \cos(\omega_0 t - \alpha) + \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t. \tag{8}$$

Поэтому результирующее движение является суперпозицией двух колебаний: одного с собственной частотой ω_0, а другого — с частотой ω внешней силы.

Пример 1 Предположим, что $m = 1$, $k = 9$, $F_0 = 80$ и $\omega = 5$. Тогда дифференциальное уравнение (4) примет вид

$$x'' + 9x = 80\cos 5t.$$

Найдем $x(t)$, если $x(0) = x'(0) = 0$.

Решение В данном случае собственная частота $\omega_0 = 3$ и частота внешней силы $\omega = 5$ не совпадают, как и в случае, рассмотренном выше. Сначала подставим $x_p = A\cos 5t$ в дифференциальное уравнение. Получим $-25A + 9A = 80$, откуда $A = -5$. Следовательно, частное решение

$$x_p(t) = -5\cos 5t.$$

Общим решением соответствующего однородного уравнения является функция $x_c = c_1\cos 3t + c_2\sin 3t$, поэтому общее решение данного неоднородного уравнения можно записать в виде

$$x(t) = c_1\cos 3t + c_2\sin 3t - 5\cos 5t,$$

его производная

$$x'(t) = -3c_1\sin 3t + 3c_2\cos 3t + 25\sin 5t.$$

Из начальных условий $x(0) = 0$ и $x'(0) = 0$ следует, что $c_1 = 5$ и $c_2 = 0$, откуда требуемое частное решение

$$x(t) = 5\cos 3t - 5\cos 5t.$$

Как показано на рис. 3.6.2, период $x(t)$ равен наименьшему общему кратному 2π периодов $2\pi/3$ и $2\pi/5$ двух слагаемых с косинусами. ■

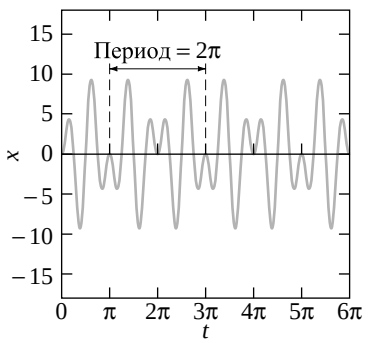


Рис. 3.6.2. График $x(t) = 5\cos 3t - 5\cos 5t$ из примера 1

Биения

Если мы потребуем, чтобы решение (7) удовлетворяло начальным условиям $x(0) = x'(0) = 0$, то получим

$$c_1 = -\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad \text{и} \quad c_2 = 0.$$

Поэтому частным решением является функция

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}(\cos \omega t - \cos \omega_0 t). \tag{9}$$

Используя тригонометрическое тождество $2 \sin A \sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$ при $A = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t$ и $B = \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)t$, уравнение (9) можно переписать в виде

$$x(t) = \frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \tfrac{1}{2}(\omega_0 - \omega)t \sin \tfrac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t. \tag{10}$$

Предположим теперь, что $\omega \approx \omega_0$, поэтому $\omega_0 + \omega$ велико по сравнению с $|\omega_0 - \omega|$. Тогда $\sin \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t$ будет *быстро* изменяющейся функцией, тогда как $\sin \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)t$ будет *медленно* изменяющейся функцией. Значит, в этом случае уравнение (10) можно рассматривать как частые колебания с круговой (циклической) частотой $\frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)$,

$$x(t) = A(t) \sin \tfrac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t,$$

но с медленно изменяющейся амплитудой

$$A(t) = \frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \tfrac{1}{2}(\omega_0 - \omega)t.$$

Пример 2 При $m = 0{,}1$, $F_0 = 50$, $\omega_0 = 55$ и $\omega = 45$ из уравнения (10) получим

$$x(t) = \sin 5t \sin 50t.$$

На рис. 3.6.3 изображены соответствующие колебания с частотой $\frac{1}{2}(\omega_0 + \omega) = 50$, которые "модулируются" амплитудной функцией $A(t) = \sin 5t$ с частотой $\frac{1}{2}(\omega_0 - \omega) = 5$.

■

Частые колебания со сравнительно медленным периодическим изменением амплитуды демонстрируют явление *биения*. Например, если два недостаточно точно отрегулированных духовых музыкальных инструмента (расстроенных один относительно другого) одновременно играют одну и ту же ноту "до", один с частотой $\omega_0/(2\pi) = 258$ Гц, а другой — с частотой $\omega/(2\pi) = 254$ Гц, то будут слышны биения (т. е. изменение *амплитуды* звука) с частотой

$$\frac{(\omega_0 - \omega)/2}{2\pi} = \frac{258 - 254}{2} = 2 \text{ (Гц)}.$$

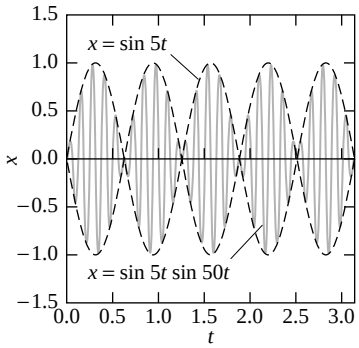


Рис. 3.6.3. Явление биения

Резонанс

Из уравнения (6) видно, что если собственная частота ω_0 приблизительно равна внешней частоте ω, то амплитуда A решения x_p велика. Иногда полезно записать уравнение (5) в виде

$$A = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{F_0/k}{1 - (\omega/\omega_0)^2} = \pm\frac{\rho F_0}{k}. \tag{11}$$

Здесь F_0/k называется **статическим смещением** пружины жесткости k под действием *постоянной* силы F_0, а ρ — **коэффициентом усиления**; по определению он равен

$$\rho = \frac{1}{|1 - (\omega/\omega_0)^2|}. \tag{12}$$

Очевидно, что $\rho \to +\infty$ при $\omega \to \omega_0$. Это явление **резонанса** — неограниченный рост (при $\omega \to \omega_0$) амплитуды колебаний системы (при отсутствии сил сопротивления) с собственной частотой ω_0 под действием внешней силы с частотой $\omega \approx \omega_0$.

Мы предполагали, что $\omega \neq \omega_0$. Какой же катастрофы следует ожидать, если ω и ω_0 точно совпадают? Тогда уравнение (4), после деления всех слагаемых на m, примет вид

$$x'' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega_0 t. \tag{13}$$

Поскольку $\cos\omega_0 t$ является слагаемым общего решения соответствующего однородного уравнения, в соответствии с методом неопределенных коэффициентов необходимо искать частное решение в виде

$$x_p(t) = t(A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t).$$

Подставим это выражение в уравнение (13) и получим, что $A = 0$ и $B = F_0/(2m\omega_0)$. Таким образом, частным решением является функция

$$x_p(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t\sin\omega_0 t. \tag{14}$$

Из графика $x_p(t)$, изображенного на рис. 3.6.4, где принято $m = 1$, $F_0 = 100$ и $\omega_0 = 50$, хорошо видно, как (теоретически) неограниченно должна возрастать амплитуда колебаний в случае *чистого резонанса,* $\omega = \omega_0$. Можно рассматривать это явление как усиление собственных колебаний системы под действием внешних колебаний той же частоты.

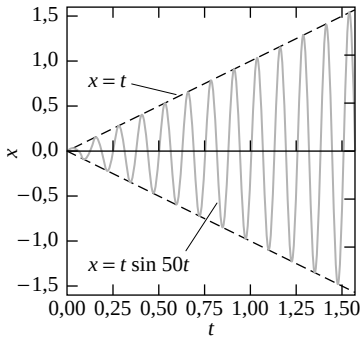


Рис. 3.6.4. Явление резонанса

Пример 3 Предположим, что в системе, состоящей из тележки и маховика (рис. 3.6.1), $m = 5$ кг и что $k = 500$ Н/м. Тогда собственная частота колебаний $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 10$ рад/с; т. е. $10/(2\pi) \approx 1{,}59$ Гц. Поэтому следует ожидать колебаний очень большой амплитуды, если маховик вращается со скоростью приблизительно $1{,}59 \times 60 \approx 95$ оборотов в минуту. ■

На практике механическая система с очень малым затуханием под действием резонансных колебаний может сломаться. Впечатляющим примером может служить марш в ногу колонны солдат по мосту. Любая столь сложная конструкция, как мост, имеет много собственных частот колебаний. Если частота шага приблизительно совпадает с одной из собственных частот моста, то, как и в примере с телом, подвешенным на пружине, возникнет резонанс. И на самом деле амплитуда резонансных колебаний может достичь значений, достаточных для разрушения моста. Такие случаи действительно случались: например, в 1831 году в Англии близ Манчестера обвалился мост Broughton Bridge. По этой причине сейчас во многих уставах при движении по мосту предусмотрена команда “сбить ногу”. Вполне возможно, что именно резонанс был причиной катастрофы в Канзас-Сити в 1981 году, когда балкон отеля *Skywalk* (“Небесная прогулка”) обрушился вместе с танцорами. Разрушение зданий при землетрясении иногда происходит из-за резонансных колебаний, возникших благодаря колебаниям земли с одной из собственных частот строения; именно это случилось с многими зданиями во время землетрясения в Мехико 19 сентября 1985 года. Известен случай крушения самолета, связанный с резонансными колебаниями крыльев, вызванных колебаниями двигателей. Сообщалось, что во время одного из первых коммерческих реактивных рейсов собственная частота вертикальных колебаний самолета, вызванных турбулентностью, практически совпала с частотой колебаний системы, подобной системам, состоящим из тела заданной массы, закрепленного на пружине. Оказалось, что такая система состояла из головы пилота (тело заданной массы) и его позвоночника (пружина). Из-за возникшего резонанса у пилота возникли проблемы с чтением приборов. Большие современные коммерческие реактивные самолеты имеют другие собственные частоты, поэтому таких проблем с резонансом больше не возникает.

Моделирование механических систем

При разработке механических конструкций и систем всех видов обязательно ставится задача избежать разрушительного действия резонансных колебаний. Часто самым важным шагом в задаче определения собственной частоты колебаний системы является составление дифференциального уравнения этих колебаний. Для этой цели, кроме второго закона Ньютона $F = ma$, иногда оказывается полезным закон сохранения энергии (как, например, при выводе уравнения колебаний маятника в разделе 3.4). Часто используются следующие формулы для кинетической и потенциальной энергии.

1. *Кинетическая энергия* $T = \frac{1}{2}mv^2$ тела массы m, двигающегося со скоростью v.
2. *Кинетическая энергия* $T = \frac{1}{2}I\omega^2$ вращения тела с моментом инерции I с угловой скоростью ω.
3. *Потенциальная энергия* $V = \frac{1}{2}kx^2$ пружины с жесткостью k, сжатой или растянутой на расстояние x.
4. *Потенциальная энергия* $V = mgh$ тела массы m на высоте h над некоторым уровнем (на котором $V = 0$) в постоянном гравитационном поле, т. е. если g можно считать постоянным.

Пример 4 Найдем собственную частоту колебаний однородного диска радиуса a массой m, закрепленного на пружине жесткости k так, что он катится без проскальзывания, как показано на рис. 3.6.5.

Решение Во введенных ранее обозначениях принцип сохранения энергии можно записать в виде уравнения

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 = E,$$

где общая механическая энергия системы E постоянна. Поскольку $v = a\omega$ и $I = ma^2/2$ для однородного круглого диска, последнее уравнение упрощается и его можно записать так:

$$\tfrac{3}{4}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 = E.$$

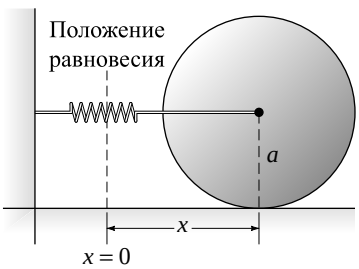


Рис. 3.6.5. Диск, который катится без проскальзывания

Дифференцированием ($v = x'$, $v' = x''$) получим

$$\tfrac{3}{2}mx'x'' + kxx' = 0.$$

Разделив все слагаемые на $\frac{3}{2}mx'$, получим

$$x'' + \frac{2k}{3m}x = 0.$$

Таким образом, собственная круговая частота $\omega_0 = \sqrt{2k/(3m)}$; она в $\sqrt{2/3} \approx 0{,}8165$ раз отличается от собственной частоты в случае скольжения без трения. ■

Пример 5 Предположим, что машина колеблется вертикально так, как колебалось бы тело массой $m = 800$ кг на пружине (с жесткостью $k = 7 \times 10^4$ Н/м), соединенное с амортизатором (с коэффициентом поглощения $c = 3000$ Н·с/м). Предположим, что машина при *отсоединенном* амортизаторе едет по волнистому дорожному покрытию, у которого амплитуда равна 5 см, а длина волны — $L = 10$ м (рис. 3.6.6). При какой скорости движения автомобиля возникнут резонансные колебания?

Решение Будем считать машину одноколесной, как на рис. 3.6.7. Пусть $x(t)$ обозначает смещение вверх тела массой m относительно положения равновесия; мы не будем учитывать силу тяготения, так как она лишь смещает положение равновесия (как в задаче 9 раздела 3.4). Запишем уравнение поверхности дороги в виде

$$y = a\cos\frac{2\pi s}{L} \quad (a = 0{,}05\text{ м},\ L = 10\text{ м}). \tag{15}$$

При движении машины пружина растягивается на величину $x - y$. По второму закону Ньютона $F = ma$; значит,

$$mx'' = -k(x - y),$$

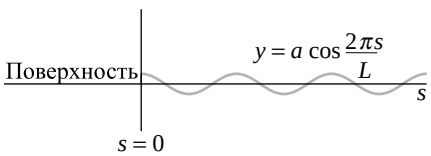


Рис. 3.6.6. Поверхность дороги в примере 5

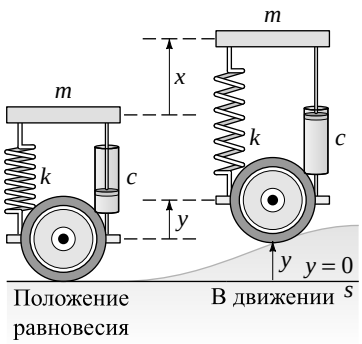


Рис. 3.6.7. "Одноколесная модель" автомобиля

т. е.

$$mx'' + kx = ky. \tag{16}$$

Если скорость машины равна v, то в уравнении (15) $s = vt$, поэтому уравнение (16) примет вид

$$mx'' + kx = ka\cos\frac{2\pi vt}{L}. \tag{16′}$$

Это дифференциальное уравнение описывает вертикальные колебания автомобиля. Сравнивая его с уравнением (4), мы видим, что автомобиль совершает вынужденные колебания с круговой (циклической) частотой $\omega = 2\pi v/L$. Резонанс возникнет, если $\omega = \omega_0 = \sqrt{k/m}$. Подставляя численные данные, найдем скорость:

$$v = \frac{L}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{10}{2\pi}\sqrt{\frac{7\times 10^4}{800}} \approx 14{,}89\ (\text{м/с});$$

это около 33,3 миль/ч (мы использовали переводной коэффициент 2,237, чтобы перевести м/с в миль/ч). ■

Вынужденные затухающие колебания

В реальных физических системах всегда присутствует затухание, вызванное трением или чем-нибудь еще. Общее решение x_c однородного уравнения, соответствующего уравнению

➤
$$mx'' + cx' + kx = F_0\cos\omega t, \tag{17}$$

дается равенством (18), (19) или (20) из раздела 3.4, в зависимости от того, какое из неравенств $c > c_{\text{cr}} = \sqrt{4km}$, $c = c_{\text{cr}}$ или $c < c_{\text{cr}}$ выполняется. Конкретный вид общего решения здесь не важен. Важно лишь то, что во всех случаях $x_c(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Поэтому x_c будет **переходной составляющей решения** уравнения (17), т. е. той составляющей, которая исчезает с течением времени, оставляя лишь частное решение x_p.

Согласно методу неопределенных коэффициентов в уравнение (17) можно подставить функцию

$$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t.$$

После подстановки, приведения подобных и приравнивания коэффициентов при $\cos\omega t$ и $\sin\omega t$, получим два уравнения:

$$(k - m\omega^2)A + c\omega B = F_0, \qquad -c\omega A + (k - m\omega^2)B = 0, \tag{18}$$

найти решения которых не составит труда:

$$A = \frac{(k - m\omega^2)F_0}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}, \quad B = \frac{c\omega F_0}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}. \tag{19}$$

Записав, как обычно, равенство

$$A\cos\omega t + B\sin\omega t = C(\cos\omega t\cos\alpha + \sin\omega t\sin\alpha) = C\cos(\omega t - \alpha),$$

видим, что установившиеся периодические колебания

$$x_p(t) = C\cos(\omega t - \alpha) \tag{20}$$

имеют амплитуду

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}. \tag{21}$$

Теперь из (19) следует, что $\sin\alpha = B/C > 0$, так что фазовый угол α лежит в первой или второй четверти. Поэтому

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{B}{A} = \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \quad \text{при} \quad 0 < \alpha < \pi, \tag{22}$$

откуда

$$\alpha = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{c\omega}{k - m\omega^2} & \text{при } k > m\omega^2, \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{c\omega}{k - m\omega^2} & \text{при } k < m\omega^2 \end{cases}$$

(причем $\alpha = \pi/2$ при $k = m\omega^2$).

Заметим, что если $c > 0$, то "вынужденная амплитуда", т. е. функция $C(\omega)$, заданная формулой (21), всегда остается конечной (в отличие от того, что происходит в случае резонанса при отсутствии затухания, т. е. когда частота ω вынуждающей силы совпадает с собственной частотой $\omega_0 = \sqrt{k/m}$). Но вынужденная амплитуда может достичь максимума для некоторого значения ω. Тогда мы говорим о *практическом резонансе*. Для того чтобы увидеть, когда возникает практический резонанс, нужно лишь построить график C как функции от ω и найти глобальный максимум. Можно показать (задача 27), что если $c \geqq \sqrt{2km}$, то C — монотонно убывающая функция от ω. Но при $c < \sqrt{2km}$ амплитуда C достигает максимума (т. е. возникает практический резонанс) при некотором значении ω, меньшем, чем ω_0, а затем она стремится к нулю при $\omega \to +\infty$. Отсюда следует, что в системе с затуханием происходят вынужденные колебания, амплитуда которых

- велика при значении ω, близком к критической резонансной частоте;
- близка к F_0/k, если ω очень мало;
- очень мала, если ω очень велико.

Пример 6 Найдем движение в переходном режиме и установившиеся периодические колебания в системе, состоящей из тела заданной массы, закрепленного на пружине, при наличии затухания с параметрами $m = 1$, $c = 2$ и $k = 26$ под действием внешней силы $F(t) = 82\cos 4t$ при начальных условиях $x(0) = 6$ и $x'(0) = 0$. Исследуем также возможности возникновения практического резонанса в данной системе.

Решение Результирующее уравнение движения $x(t) = x_{\text{tr}}(t) + x_{\text{sp}}(t)$ тела является решением задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$x'' + 2x' + 26x = 82\cos 4t; \quad x(0) = 6, x'(0) = 0. \tag{23}$$

Вместо того чтобы просто применить общие формулы, выведенные ранее в этом разделе, мы решим эту задачу заново. Сначала запишем характеристическое уравнение:

$$r^2 + 2r + 26 = (r+1)^2 + 25 = 0.$$

Теперь найдем его корни: $r = -1 \pm 5i$. Поэтому общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$x_c(t) = e^{-t}(c_1 \cos 5t + c_2 \sin 5t).$$

Подставив в данное уравнение пробное решение

$$x(t) = A \cos 4t + B \sin 4t$$

и приведя подобные и приравняв коэффициенты при $\cos 4t$ и $\sin 4t$, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} 10A + \ \ 8B &= 82, \\ -8A + 10B &= \ 0, \end{aligned}$$

решением которой являются числа $A = 5$ и $B = 4$. Поэтому общее решение уравнения (23) можно записать в виде

$$x(t) = e^{-t}(c_1 \cos 5t + c_2 \sin 5t) + 5 \cos 4t + 4 \sin 4t.$$

Теперь подставим начальные данные $x(0) = 6, x'(0) = 0$ и найдем $c_1 = 1$ и $c_2 = -3$. Следовательно, движение в переходном режиме и установившиеся периодические колебания тела задаются уравнениями

$$x_{\mathrm{tr}}(t) = e^{-t}(\cos 5t - 3 \sin 5t)$$

и

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{sp}}(t) = 5 \cos 4t + 4 \sin 4t &= \sqrt{41} \left(\frac{5}{\sqrt{41}} \cos 4t + \frac{4}{\sqrt{41}} \sin 4t \right) = \\ &= \sqrt{41} \cos(4t - \alpha), \end{aligned}$$

где $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{5}\right) \approx 0{,}6747$.

На рис. 3.6.8 изображены графики решения $x(t) = x_{\mathrm{tr}}(t) + x_{\mathrm{sp}}(t)$ задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$x'' + 2x' + 26x = 82 \cos 4t, \quad x(0) = x_0, x'(0) = 0 \tag{24}$$

для различных значений $x_0 = -20, -10, 0, 10$ и 20 начального положения. Ясно видно, что для переходной составляющей решения $x_{\mathrm{tr}}(t)$ означают слова “затухание с течением времени, в результате которого остается лишь установившееся периодическое движение $x_{\mathrm{sp}}(t)$”. Действительно, из-за того что $x_{\mathrm{tr}}(t) \to 0$ экспоненциально, всего через несколько циклов полное решение $x(t)$ и установившееся периодическое решение $x_{\mathrm{sp}}(t)$ практически неразличимы.

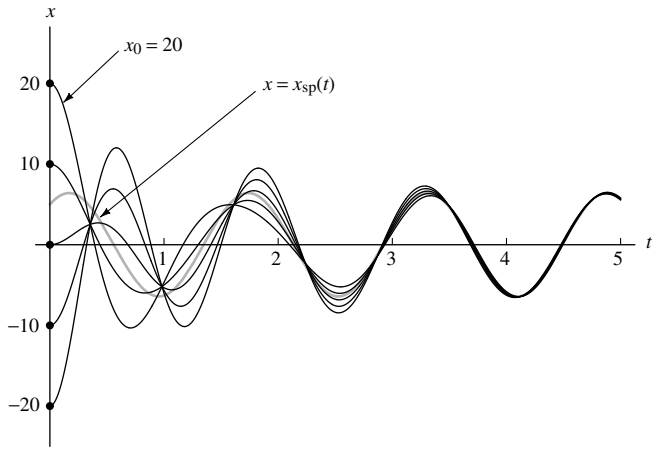


Рис. 3.6.8. Решения задачи Коши (задачи с начальными условиями) (24) при $x_0 = -20, -10, 0, 10$ и 20

Чтобы определить, возможен ли практический резонанс в данной системе, подставим значения $m = 1$, $c = 2$ и $k = 26$ в (21). Получим, что вынужденная амплитуда при частоте ω равна

$$C(\omega) = \frac{82}{\sqrt{676 - 48\omega^2 + \omega^4}}.$$

График $C(\omega)$ изображен на рис. 3.6.9. Максимум амплитуды достигается тогда, когда

$$C'(\omega) = \frac{-41(4\omega^3 - 96\omega)}{(676 - 48\omega^2 + \omega^4)^{3/2}} = \frac{-164\omega(\omega^2 - 24)}{(676 - 48\omega^2 + \omega^4)^{3/2}} = 0.$$

Поэтому практический резонанс возникает при критическом значении частоты $\omega = \sqrt{24}$ (это немного меньше, чем критическая частота

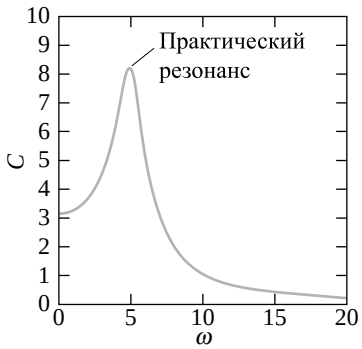


Рис. 3.6.9. График зависимости амплитуды C от внешней частоты ω

$\omega_0 = \sqrt{k/m} = \sqrt{26}$ системы, состоящей из тела, закрепленного на пружине, при отсутствии затухания). ■

3.6. Задачи

В задачах 1–6 выразите решение данной задачи Коши (задачи с начальными условиями) в виде суммы двух колебаний (как в уравнении (8)). Всюду штрихи обозначают производные по времени t. В задачах 1–4 постройте интегральную кривую (график решения $x(t)$) таким образом, чтобы можно было определить и отметить (как на рис. 3.6.2) период колебания.

1. $x'' + 9x = 10\cos 2t;\ x(0) = x'(0) = 0$ **2.** $x'' + 4x = 5\sin 3t;\ x(0) = x'(0) = 0$

3. $x'' + 100x = 225\cos 5t + 300\sin 5t;\ x(0) = 375,\ x'(0) = 0$

4. $x'' + 25x = 90\cos 4t;\ x(0) = 0,\ x'(0) = 90$

5. $mx'' + kx = F_0\cos\omega t$ при $\omega \neq \omega_0$; $x(0) = x_0,\ x'(0) = 0$

6. $mx'' + kx = F_0\cos\omega t$ при $\omega = \omega_0$; $x(0) = 0,\ x'(0) = v_0$

В задачах 7–10 найдите установившееся периодическое решение $x_{\text{sp}}(t) = C\cos(\omega t - \alpha)$ данного уравнения $mx'' + cx' + kx = F(t)$ с периодической вынуждающей функцией $F(t)$ с частотой ω. Затем для сравнения постройте графики $x_{\text{sp}}(t)$ и приведенной вынуждающей функции $F_1(t) = F(t)/m\omega$.

7. $x'' + 4x' + 4x = 10\cos 3t$ **8.** $x'' + 3x' + 5x = -4\cos 5t$

9. $2x'' + 2x' + x = 3\sin 10t$ **10.** $x'' + 3x' + 3x = 8\cos 10t + 6\sin 10t$

В задачах 11–14 найдите (и постройте график) установившееся периодическое решение $x_{\text{sp}}(t) = C\cos(\omega t - \alpha)$ данного дифференциального уравнения и той переходной составляющей решения $x_{\text{tr}}(t)$, которая удовлетворяет заданным начальным условиям.

11. $x'' + 4x' + 5x = 10\cos 3t;\ x(0) = x'(0) = 0$

12. $x'' + 6x' + 13x = 10\sin 5t;\ x(0) = x'(0) = 0$

13. $x'' + 2x' + 26x = 600\cos 10t;\ x(0) = 10,\ x'(0) = 0$

14. $x'' + 8x' + 25x = 200\cos t + 520\sin t;\ x(0) = -30,\ x'(0) = -10$

В задачах 15–18 заданы параметры системы, состоящей из тела, закрепленного на пружине, с амортизатором (с дифференциальным уравнением $mx'' + cx' + kx = F_0\cos\omega t$). Исследуйте возможность практического резонанса в этой системе. В частности, найдите амплитуду $C(\omega)$ установившихся периодических вынужденных колебаний с частотой ω. Постройте график $C(\omega)$ и найдите частоту практического резонанса ω (если таковая существует).

15. $m = 1,\ c = 2,\ k = 2,\ F_0 = 2$ **16.** $m = 1,\ c = 4,\ k = 5,\ F_0 = 10$

17. $m = 1,\ c = 6,\ k = 45,\ F_0 = 50$ **18.** $m = 1,\ c = 10,\ k = 650,\ F_0 = 100$

19. Тело весом 100 фунтов (массой $m = 3{,}125$ слага (единиц массы в системе измерения фунт–сила)) закреплено на конце пружины, которая растягивается на 1 дюйм под действием силы в 100 фунтов. На тело действует сила $F_0\cos\omega t$. При какой частоте (в герцах) возникнут резонансные колебания? Затуханием пренебречь.

20. Стиральная машина с загрузкой спереди закреплена на толстой резиновой опоре, действующей как пружина; под действием веса $W = mg$ (где $g = 9{,}8$ м/с^2) машины опора сжимается ровно на 0,5 см. Когда барабан машины вращается со скоростью ω радиан в секунду, он действует на машину с вертикально направленной силой $F_0\cos\omega t$ ньютон. При какой скорости (измеренной в оборотах в минуту) будут возникать резонансные колебания? Затуханием пренебречь.

21. На рис. 3.6.10 изображено тело массой m на конце маятника (длиной L), присоединенное также к горизотальной пружине (жесткости k). Предположим, что колебания тела настолько малы, что пружина остается практически горизонтальной. Кроме того, затухание не учитывайте. Выразите собственную радиальную частоту ω_0 колебаний тела через L, k, m и гравитационную постоянную g.

22. Тело массой m висит на конце провода, перекинутого через блок радиусом a с моментом инерции I (рис. 3.6.11). К ободу блока присоединена пружина жесткостью k. Предположим, что колебания тела настолько малы, что пружина остается практически горизонтальной. Кроме того, трение не учитывайте. Выразите собственную радиальную частоту системы через m, a, k, I и g.

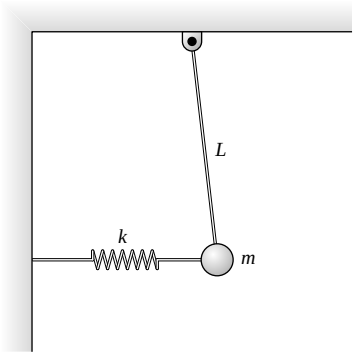


Рис. 3.6.10. Система маятник на пружине из задачи 21

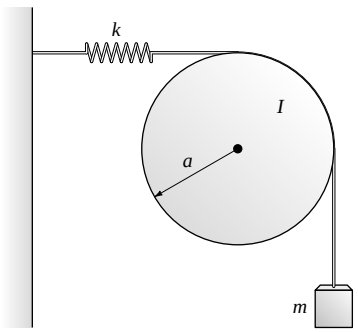


Рис. 3.6.11. Система задачи 22, состоящая из тела на пружине с блоком

23. Здание состоит из двух этажей. Первый этаж стоит неподвижно на земле. Второй этаж имеет массу $m = 1000$ слагов (единиц массы в системе фунт–сила) и весит 16 тонн (32 000 фунтов). Эластичный каркас здания ведет себя как пружина, противостоящая горизонтальному смещению второго этажа. Чтобы сместить второй этаж на 1 фут, необходимо подействовать на него силой в 5 тонн в горизонтальном направлении. Предположим, что при землетрясении земля колеблется с амплитудой A_0 и круговой (циклической) частотой ω, действуя на второй этаж здания с внешней силой $F(t) = mA_0\omega^2 \sin \omega t$. **(a)** Какова (в герцах) собственная частота колебаний второго этажа? **(b)** Если земля совершает одно колебание каждые 2,25 секунды с амплитудой в 3 дюйма, какой будет амплитуда вынужденных колебаний второго этажа?

24. Тело, закрепленное на пружине, совершает незатухающие колебания. Предположим, что на тело действует внешняя сила $F(t) = F_0 \cos^3 \omega t$. Покажите, что существуют *два* значения ω, при которых возникает резонанс, и найдите их оба.

25. Найдите установившееся периодическое решение уравнения

$$mx'' + cx' + kx = F_0 \sin \omega t.$$

В частности, покажите, что оно такое, какого и следовало ожидать, исходя из формулы (20), т. е. имеет тот же вид с теми же значениями C и ω, за исключением того, что $\sin(\omega t - \alpha)$ необходимо заменить на $\cos(\omega t - \alpha)$.

26. Дано дифференциальное уравнение

$$mx'' + cx' + kx = E_0 \cos \omega t + F_0 \sin \omega t,$$

в котором внешняя сила равна сумме двух вынуждающих сил, одна из которых представлена слагаемым, содержащим косинус, а вторая — синус. Найдите установившееся периодическое решение уравнения

$$x_{\text{sp}}(t) = \frac{\sqrt{E_0^2 + F_0^2}}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \cos(\omega t - \alpha - \beta),$$

где α определено в уравнении (22), а $\beta = \operatorname{arctg}(F_0/E_0)$. (*Указание*. Сложите два установившихся периодических решения уравнения, соответствующих отдельно $E_0 \cos \omega t$ и $F_0 \sin \omega t$ (см. задачу 25).)

27. Согласно уравнению (21), амплитуда вынужденных установившихся периодических колебаний системы с уравнением $mx'' + cx' + kx = F_0 \cos \omega t$ равна

$$C(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}.$$

(a) Пусть $c \geqq c_{\text{cr}}/\sqrt{2}$, где $c_{\text{cr}} = \sqrt{4km}$. Покажите, что C монотонно убывает при возрастании ω. **(b)** Пусть $c < c_{\text{cr}}/\sqrt{2}$. Покажите, что C достигает максимума (практический резонанс) при

$$\omega = \omega_m = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{2m^2}} < \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

28. Как было показано в этом разделе на примере системы, состоящей из тележки с маховиком, несбалансированная вращающаяся часть механизма обычно действует с силой, амплитуда которой пропорциональна *квадрату* частоты ω. **(a)** В дифференциальном уравнении

$$mx'' + cx' + kx = mA\omega^2 \cos \omega t$$

внешняя сила представлена слагаемым, аналогичным тому, которое имеется в уравнении (17). Покажите, что амплитуда установившегося периодического решения этого дифференциального уравнения задается формулой

$$C(\omega) = \frac{mA\omega^2}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}.$$

(b) Предположим, что $c^2 < 2mk$. Покажите, что максимум амплитуды достигается при частоте ω_m, равной

$$\omega_m = \sqrt{\frac{k}{m}\left(\frac{2mk}{2mk - c^2}\right)}.$$

Поэтому резонансная частота в этом случае *больше* (в отличие от результата задачи 27), чем собственная частота $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. (*Указание*. Найдите максимум *квадрата* C.)

Автомобильные колебания

В задачах 29 и 30 продолжается изучение автомобиля, начатое в примере 5. Если амортизатор подсоединен (т. е. $c > 0$), то уравнение вертикальных колебаний примет вид $mx'' + cx' + kx = cy' + ky$. Подставив уравнение поверхности дороги $y = a \sin \omega t$ в это дифференциальное уравнение, получим

$$mx'' + cx' + kx = E_0 \cos \omega t + F_0 \sin \omega t,$$

где $E_0 = c\omega a$ и $F_0 = ka$.

29. Применив результат задачи 26, покажите, что амплитуда C установившихся периодических колебаний автомобиля задается формулой

$$C = \frac{a\sqrt{k^2 + (c\omega)^2}}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}.$$

Поскольку $\omega = 2\pi v/L$, то это выражение дает зависимость C от скорости v движения автомобиля.

30. На рис. 3.6.12 изображен график амплитуды $C(\omega)$ (как функции ω) при численных значениях, приведенных в примере 5 (включая $c = 3000$ Н·с/м). Из графика видно, что при постепенном ускорении автомобиля (из состояния покоя), амплитуда его начальных колебаний немного больше 5 см. Максимальные резонансные колебания с амплитудой приблизительно 14 см возникнут на скорости около 32 миль/час. Но на более высоких скоростях амплитуда уменьшится. Проверьте сделанные на основе графика выводы, проанализировав поведение функции $C(\omega)$. В частности, найдите частоту практического резонанса и соответствующую амплитуду.

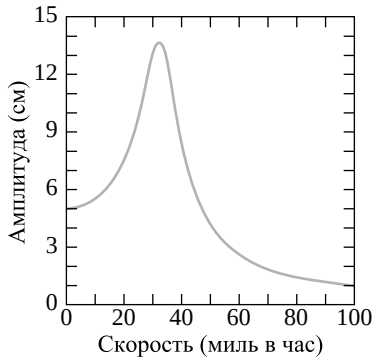


Рис. 3.6.12. Амплитуда колебаний автомобиля на ухабистой дороге

3.6. Приложение. Вынужденные колебания

Теперь рассмотрим вынужденные колебания в системе, состоящей из тела, закрепленного на пружине, причем к телу подсоединен амортизатор. Такая система описывается уравнением

$$mx'' + cx' + kx = F(t). \tag{1}$$

Для упрощения выкладок положим $m = p^2$, $c = 2p$, а $k = p^2q^2 + 1$, где $p > 0$ и $q > 0$. Тогда общим решением однородного уравнения, соответствующего уравнению (1), будет функция

$$x_c(t) = e^{-t/p}(c_1 \cos qt + c_2 \sin qt). \tag{2}$$

Пусть $p = 5, q = 3$. Исследуем поведение переходной составляющей решения и установившегося периодического решения уравнения

$$25x'' + 10x' + 226x = F(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0 \tag{3}$$

для нескольких различных примеров функции $F(t)$. Чтобы самостоятельно получить собственные аналогичные результаты, вы можете выбрать числа p и q так, чтобы выполнялись неравенства $6 \leqq p \leqq 9$ и $2 \leqq q \leqq 5$.

Исследование 1. Пусть периодическая внешняя сила задана функцией $F(t) = 901\cos 3t$. Тогда, чтобы нарисовать график, изображенный на рис. 3.6.13, достаточно выполнить следующую последовательность команд на входном языке системы MATLAB:

```
x = dsolve('25*D2x+10*Dx+226*x=901*cos(3*t)',
     'x(0)=0, Dx(0)=0');
x = simple(x);
syms t, xsp = cos(3*t) + 30*sin(3*t);
ezplot(x, [0  6*pi]),hold on
ezplot(xsp, [0  6*pi])
```

Ясно видно, что (переходная составляющая плюс установившееся периодическое) решение

$$x(t) = \cos 3t + 30\sin 3t + e^{-t/5}\left(-\cos 3t - \tfrac{451}{15}\sin 3t\right)$$

быстро "приближается" к установившимся периодическим колебаниям $x_{\rm sp}(t) = \cos 3t + 30\sin 3t$.

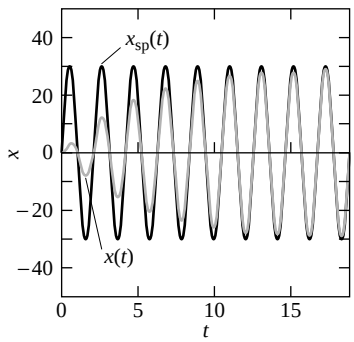


Рис. 3.6.13. Решение $x(t) = x_{\rm tr}(t) + x_{\rm sp}(t)$ и установившееся периодическое решение $x(t) = x_{\rm sp}(t)$ при периодической внешней силе $F(t) = 901\cos 3t$

Исследование 2. В случае затухающей внешней силы

$$F(t) = 900e^{-t/5}\cos 3t$$

возникают слагаемые, подобные слагаемым в функции (2), являющейся общим решением соответствующего однородного уравнения. Тогда, чтобы нарисовать график, изображенный на рис. 3.6.14, достаточно выполнить следующую последовательность команд на входном языке системы *Maple*:

```
de2 := 25*diff(x(t),t,t)+10*diff(x(t),t)+226*x(t) =
       900*exp(-t/5)*cos(3*t);
dsolve({de2,x(0)=0,D(x)(0)=0}, x(t));
x := simplify(combine(rhs(%),trig));
C := 6*t*exp(-t/5);
plot({x,C,-C},t=0..8*Pi);
```

Решение

$$x(t) = 6te^{-t/5}\sin 3t,$$

как видно из графика, колеблется между кривыми $x = \pm 6te^{-t/5}$. (Обратите внимание на множитель t, который обусловлен резонансом.)

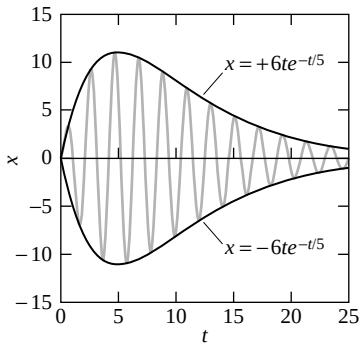


Рис. 3.6.14. Решение $x(t) = 6te^{-t/5}\sin 3t$, колеблющееся между кривыми $x(t) = \pm 6te^{-t/5}$ при затухающей внешней силе $F(t) = 900e^{-t/5}\cos 3t$

Исследование 3. Пусть теперь осциллирующая затухающая внешняя сила описывается уравнением

$$F(t) = 2700te^{-t/5}\cos 3t.$$

Это еще более сложный случай. Тогда, чтобы нарисовать график, изображенный на рис. 3.6.15, достаточно выполнить следующую последовательность команд на входном языке системы *Mathematica*:

```
de3 = 25 x''[t] + 10 x'[t] + 226 x[t] ==
      2700 t Exp[-t/5] Cos[3t]
soln = DSolve[{de3, x[0] == 0, x'[0] == 0}, x[t], t]
x = First[x[t]  /.  soln]
amp = Exp[-t/5] Sqrt[(3t)^2 + (9t^2 - 1)^2]
Plot[{x, amp, -amp}, {t, 0, 10 Pi}];
```

На графике видно, что решение

$$x(t) = e^{-t/5}\left[3t\cos t + (9t^2 - 1)\sin 3t\right]$$

колеблется между огибающими кривыми

$$x = \pm e^{-t/5}\sqrt{(3t)^2 + (9t^2 + 1)^2}.$$

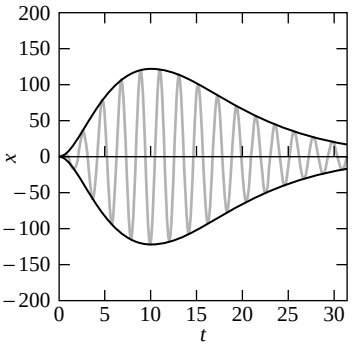


Рис. 3.6.15. При внешней силе $F(t) = 2700te^{-t/5}\cos 3t$ решение $x(t) = e^{-t/5}[3t\cos t + (9t^2 - 1)\sin 3t]$ колеблется между огибающими кривыми $x(t) = \pm e^{-t/5}\sqrt{(3t)^2 + (9t^2+1)^2}$

3.7. Электрические цепи

В этом разделе рассматриваются RLC-цепи, являющиеся важной составной частью более сложных электрических цепей и сетей. В состав таких цепей, как показано на рис. 3.7.1, входят следующие элементы:

резистор (называемый часто также **сопротивлением**), сопротивление которого равно R *ом*;

катушка (называемая часто также **индуктивностью**), индуктивность которой равна L *генри*;

конденсатор (называемый часто также **емкостью**), емкость которого равна C *фарад*.

Эти элементы подсоединены к источнику электродвижущей силы (например, к батарее или к генератору), который в момент времени t в цепь подает напряжение в $E(t)$ (*вольт*). Пусть теперь цепь замкнута, т. е. переключатель на рис. 3.7.1 включен. Обозначим силу тока в сети в момент времени t через $I(t)$ (*ампер*), а заряд конденсатора — через $Q(t)$ (*кулон*). Тогда

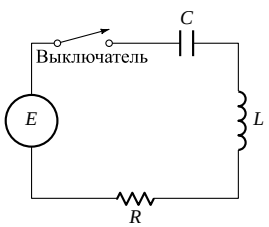


Рис. 3.7.1. Электрическая цепь, состоящая из резистора, катушки и конденсатора

функции Q и I удовлетворяют следующему уравнению:

$$\frac{dQ}{dt} = I(t). \tag{1}$$

Мы в таких случаях всегда будем пользоваться системой МКС (метр–килограмм–секунда), в которой время измеряется в секундах.

Согласно элементарным законам электричества, **падение напряжения** на указанных элементах приведено в таблице на рис. 3.7.2. Для исследования поведения цепи, изображенной на рис. 3.7.1, мы будем использовать эту таблицу и второй закон Кирхгофа:

> (Алгебраическая) сумма падений напряжений на элементах контура цепи равна напряжению, приложенному к данной цепи.

Как следствие, сила тока и заряд в простой цепи, состоящей из резистора, катушки и конденсатора (рис. 3.7.1), удовлетворяют основному уравнению цепи

➤
$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = E(t). \tag{2}$$

Подставив (1) в уравнение (2), получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$LQ'' + RQ' + \frac{1}{C}Q = E(t) \tag{3}$$

относительно заряда $Q(t)$ при известном напряжении $E(t)$.

В большинстве практических задач интерес представляет сила тока I, а не заряд Q. Поэтому продифференцируем обе части уравнения (3), подставим I вместо Q' и получим

➤
$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E'(t). \tag{4}$$

Элемент цепи	Падение напряжения на элементе
Катушка	$L\frac{dI}{dt}$
Резистор	RI
Конденсатор	$\frac{1}{C}Q$

Рис. 3.7.2. Таблица падения напряжения на элементах цепи

Мы *не будем* требовать от читателя каких-либо предварительных познаний в теории электрических цепей. Можно считать, что резистор, катушка и конденсатор представляют собой “черные ящики”, поведение которых полностью определяется (постоянными) параметрами R, L и C. Батарея или генератор полностью определяется напряжением $E(t)$, которое это устройство генерирует. Если цепь разомкнута (переключатель выключен), то

в цепи тока нет; а если цепь замкнута (переключатель включен), то сила тока равна $I(t)$, а заряд конденсатора — $Q(t)$. Об этих постоянных и функциях необходимо знать лишь то, что они удовлетворяют уравнениям (1)–(4) нашей математической модели цепи, состоящей из резистора, катушки и конденсатора. И об электричестве можно узнать многое, изучая эту математическую модель.

Соответствия механических и электрических систем

Поразительно, что уравнения (3) и (4) имеют точно ту же форму, что и уравнение

➤
$$mx'' + cx' + kx = F(t), \tag{5}$$

представляющее собой уравнение движения системы (состоящей из тела, закрепленного на пружине с амортизатором), на которую действует внешняя сила $F(t)$. Таким образом, между механическими и электрическими системами существует очень важная аналогия. В таблице на рис. 3.7.3 приведено важное **соответствие параметров механических и электрических систем.** Как следствие, большинство результатов раздела 3.6, полученных для механических систем, применимы и к электрическим цепям. То, что одно и то же дифференциальное уравнение служит математической моделью для таких разных физических систем, впечатляюще иллюстрирует важную объединяющую роль математики в исследовании природных явлений. Точнее, соответствие величин, указанное на рис. 3.7.3, можно использовать для построения электрической модели любой заданной механической системы, причем для такого построения достаточно использовать доступные электрические элементы. Поведение механической системы можно предсказать с помощью точных, но достаточно простых измерений параметров электрической модели. Это особенно полезно, если создание механической системы дорого или если измерение ее параметров (например, скоростей или смещений) связано со сложностью, неточностью либо просто опасно. Эта идея лежит в основе *аналоговых компьютеров* — электрических моделей механических систем. С помощью аналоговых компьютеров были смоделированы первые ядерные реакторы для промышленных электростанций и силовых установок подводных лодок до их создания.

Обычно напряжение переменного тока равно $E(t) = E_0 \sin \omega t$. В этом случае уравнение (4) примет вид

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C} I = \omega E_0 \cos \omega t. \tag{6}$$

Так же как и при рассмотрении механической системы, состоящей из тела, закрепленного на пружине, с амортизатором, на которую действует внешняя периодическая сила, пред-

Механическая система	Электрическая система
Масса m	Индуктивность L
Коэффициент затухания c	Сопротивление R
Жесткость пружины k	Величина $1/C$, обратная емкости
Смещение x	Заряд Q (в (3) (или сила тока I в (4)))
Сила F	Электродвижущая сила E (или ее производная E')

Рис. 3.7.3. Соответствие механических и электрических параметров

ставленная простой гармоникой, решение уравнения (6) можно представить в виде суммы **переходного тока** (**тока при переходном процессе**, или **тока неустановившегося режима**) $I_{\rm tr}$, стремящегося к нулю при $t \to +\infty$ (при условии, что все коэффициенты в уравнении (6) положительны, так что корни характеристического уравнения имеют отрицательные действительные части), и **установившегося периодического тока** $I_{\rm sp}$. Иными словами,

$$I = I_{\rm tr} + I_{\rm sp}. \tag{7}$$

Напомним (раздел 3.6, уравнения (19)–(21)), что установившееся периодическое решение уравнения (5) при $F(t) = F_0 \cos \omega t$ равно

$$x_{\rm sp}(t) = \frac{F_0 \cos(\omega t - \alpha)}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}},$$

где

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{c\omega}{k - m\omega^2}, \quad 0 \leqq \alpha \leqq \pi.$$

Заменив в этой формуле m на L, c на R, k на $1/C$ и F_0 на ωE_0, получим формулу для установившегося периодического тока

$$I_{\rm sp}(t) = \frac{E_0 \cos(\omega t - \alpha)}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}, \tag{8}$$

в которой фазовый угол

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\omega RC}{1 - LC\omega^2}, \quad 0 \leqq \alpha \leqq \pi. \tag{9}$$

Реактивное сопротивление, или реактивность, и импеданс

Выражение в знаменателе в формуле (8)

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad \text{(Ом)}, \tag{10}$$

называют **полным сопротивлением**, **кажущимся сопротивлением**, **волновым сопротивлением** или **импедансом** цепи, а иногда — просто **сопротивлением**. Тогда установившийся периодический ток равен

$$I_{\rm sp}(t) = \frac{E_0}{Z} \cos(\omega t - \alpha), \tag{11}$$

а его амплитуда

$$I_0 = \frac{E_0}{Z}, \tag{12}$$

что напоминает закон Ома $I = E/R$.

В уравнении (11) установившийся периодический ток представляет собой косинусоиду, в то время как напряжение на входе $E(t) = E_0 \sin \omega t$ — синусоиду. Чтобы представить I_{sp} в виде синусоиды, введем **реактивное сопротивление**, или **реактивность**

$$S = \omega L - \frac{1}{\omega C}. \tag{13}$$

Тогда $Z = \sqrt{R^2 + S^2}$. Из уравнения (9) видно, что α такое, как изображено на рис. 3.7.4, причем угол задержки $\delta = \alpha - \frac{1}{2}\pi$. Теперь из уравнения (11) получаем

$$\begin{aligned} I_{\text{sp}}(t) &= \frac{E_0}{Z}(\cos\alpha \cos\omega t + \sin\alpha \sin\omega t) = \\ &= \frac{E_0}{Z}\left(-\frac{S}{Z}\cos\omega t + \frac{R}{Z}\sin\omega t\right) = \\ &= \frac{E_0}{Z}(\cos\delta \sin\omega t - \sin\delta \cos\omega t). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$I_{\text{sp}}(t) = \frac{E_0}{Z}\sin(\omega t - \delta), \tag{14}$$

где

$$\delta = \operatorname{arctg}\frac{S}{R} = \operatorname{arctg}\frac{LC\omega^2 - 1}{\omega RC}. \tag{15}$$

Отсюда наконец получим **временную задержку (запаздывание во времени)** δ/ω (в секундах) установившегося периодического тока I_{sp} от напряжения на входе (рис. 3.7.5).

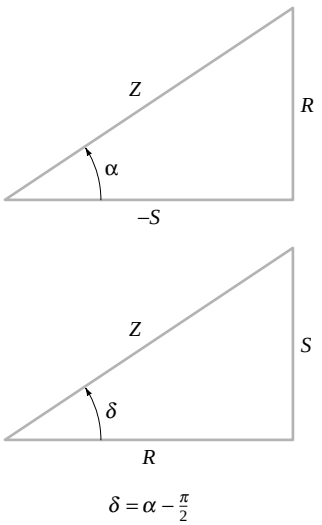


Рис. 3.7.4. Реактивное сопротивление и угол задержки

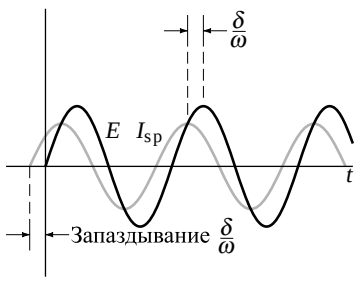


Рис. 3.7.5. Отставание тока по времени от напряжения на входе

Задачи Коши (задачи с начальными условиями)

В задачах, где требуется найти кратковременный ток, обычно заданы начальные значения $I(0)$ и $Q(0)$. Поэтому сначала необходимо найти $I'(0)$. Для этого подставим $t = 0$ в уравнение (2). Получим уравнение

$$LI'(0) + RI(0) + \frac{1}{C}Q(0) = E(0), \tag{16}$$

которое позволяет выразить $I'(0)$ через начальные значения тока, заряда и напряжения.

Пример 1 Рассмотрим RLC-цепь (т. е. цепь, состоящую из резистора, катушки и конденсатора), у которой $R = 50$ ом (Ω), $L = 0{,}1$ генри (Гн) и $C = 5 \times 10^{-4}$ фарад (Ф). В момент времени $t = 0$, когда значения $I(0)$ и $Q(0)$ равны нулю, к цепи подключили генератор переменного тока напряжением 110 В и частотой 60 Гц. Найдите силу тока в цепи и отставание во времени установившегося периодического тока от напряжения.

Решение Если частота равна 60 Гц, то $\omega = (2\pi)(60)$ рад/с, т. е. приблизительно 377 рад/с. Поэтому $E(t) = 110 \sin 377t$ (будем считать это равенство точным, а не приблизительным). Дифференциальное уравнение (6) в этом случае примет вид

$$(0{,}1)I'' + 50I' + 2000I = (377)(110)\cos 377t.$$

Подставив в уравнение (10) данные значения R, L, C и $\omega = 377$, получим импеданс: $Z = 59{,}58\ \Omega$. Поэтому амплитуда установившегося периодического решения

$$I_0 = \frac{110\ \text{(вольт)}}{59{,}58\ \text{(Ом)}} = 1{,}846\ \text{ампер (А)}.$$

Подставив эти же данные в уравнение (15), получим синус фазового угла, а затем найдем и сам угол:

$$\delta = \operatorname{arctg}(0{,}648) = 0{,}575.$$

Поэтому отставание по времени тока от напряжения равно

$$\frac{\delta}{\omega} = \frac{0{,}575}{377} = 0{,}0015\ \text{с},$$

а установившийся периодический ток равен

$$I_{\text{sp}} = (1{,}846)\sin(377t - 0{,}575).$$

Характеристическое уравнение $(0{,}1)r^2 + 50r + 2000 = 0$ имеет два корня $r_1 \approx -44$ и $r_2 \approx -456$. Используя эти приближенные значения, запишем общее решение в виде

$$I(t) = c_1 e^{-44t} + c_2 e^{-456t} + (1{,}846)\sin(377t - 0{,}575),$$

его производная

$$I'(t) = -44c_1e^{-44t} - 456c_2e^{-456t} + 696\cos(377t - 0{,}575).$$

Поскольку $I(0) = Q(0) = 0$, из уравнения (16) получим, что и $I'(0) = 0$. Подставив эти начальные данные, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} I(0) &= c_1 + c_2 - 1{,}004 = 0, \\ I'(0) &= -44c_1 - 456c_2 + 584 = 0; \end{aligned}$$

она имеет решение $c_1 = -0{,}307$, $c_2 = 1{,}311$. Поэтому переходную составляющую решения можно записать в виде

$$I_{\text{tr}}(t) = (-0{,}307)e^{-44t} + (1{,}311)e^{-456t}.$$

Заметим, что после одной пятой секунды $|I_{\text{tr}}(0{,}2)| < 0{,}000047$ А (что сравнимо по величине с током, протекающим в одном нервном волокне человека). Такое малое значение тока показывает, что переходная составляющая решения действительно исчезает очень быстро. ■

Пример 2 Предположим, что RLC-цепь из примера 1 с теми же начальными данными $I(0) = Q(0) = 0$ в момент $t = 0$ подключается к батарее с постоянным напряжением 110 В. Найдем ток в цепи.

Решение Поскольку теперь $E(t) \equiv 110$, из уравнения (16) получим

$$I'(0) = \frac{E(0)}{L} = \frac{110}{0{,}1} = 1100 \text{ (А/с)},$$

так что дифференциальное уравнение принимает вид

$$(0{,}1)I'' + 50I' + 2000I = E'(t) = 0.$$

Его общее решение совпадает с общим решением однородного уравнения, найденным в примере 1:

$$I(t) = c_1e^{-44t} + c_2e^{-456t}.$$

Решив систему уравнений

$$\begin{aligned} I(0) &= c_1 + c_2 = 0, \\ I'(0) &= -44c_1 - 456c_2 = 1100, \end{aligned}$$

получим $c_1 = -c_2 = 2{,}670$. Отсюда находим

$$I(t) = (2{,}670)(e^{-44t} - e^{-456t}).$$

Заметим, что $I(t) \to 0$ при $t \to +\infty$ несмотря на то, что напряжение постоянно. ■

Электрический резонанс

Снова вернемся к дифференциальному уравнению (6), соответствующему синусоидальному напряжению на входе $E(t) = E_0 \sin \omega t$. Мы знаем, что амплитуда установившегося периодического тока равна

$$I_0 = \frac{E_0}{Z} = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}. \tag{17}$$

График I_0 как функции от ω, при типичных значениях R, L, C и E_0 изображен на рис. 3.7.6. Функция I_0 достигает максимального значения при $\omega_m = 1/\sqrt{LC}$, а затем стремится к нулю при $\omega \to +\infty$. Критическая частота ω_m является **резонансной частотой** цепи.

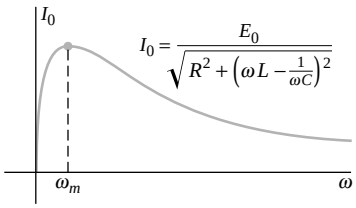


Рис. 3.7.6. Зависимость I_0 от частоты

В разделе 3.6 была подчеркнута важность избежания резонанса в большинстве механических систем (примером механической системы, в которой резонанс *приветствуется*, является виолончель). Многие же электрические приборы, в отличие от механических, правильно работают только при наличии резонанса. Ярким примером служит радио. Сильно упрощенной моделью цепи настройки радио является рассмотренная нами RLC-цепь (т. е. цепь, состоящая из резистора, катушки и конденсатора). Ее индуктивность L и сопротивление R постоянны, но емкость C изменяется, когда вы выбираете на шкале настройки нужную частоту.

Предположим, что мы хотим поймать радиостанцию, которая вещает на частоте ω и таким образом создает напряжение $E(t) = E_0 \sin \omega t$ на входе контура настройки радио. Полученный установившийся периодический ток I_{sp} в контуре настройки поступает на усилитель, а затем — на динамик. Громкость звука, который мы слышим, приблизительно пропорциональна амплитуде I_0 силы тока I_{sp}. Чтобы услышать выбранную станцию (с частотой вещания ω) громче всего и одновременно "отстроиться" от станций, которые вещают на других частотах, нужно выбрать C так, чтобы максимизировать I_0. Однако поскольку в уравнении (17) мы считаем ω постоянной, изменять можно только один единственный параметр C. Сразу же без вычислений видно, что I_0 максимально при

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0;$$

иными словами, максимум достигается при

$$C = \frac{1}{L\omega^2}. \tag{18}$$

Поэтому при настройке, плавно вращая ручку, мы устанавливаем емкость, приблизительно равную этому значению.

Таким образом работали старые ламповые радиоприемники. Современные АМ-приемники имеют более сложную конструкцию. В них используется *пара* конденсаторов изменяемой емкости. Первый позволяет настроить частоту так, как уже было описано; второй регулирует частоту сигнала, который генерирует сам радиоприемник, причем поддерживает ее на уровне, который приблизительно на 455 килогерц (кГц) выше желаемой. Результирующее *биение* с частотой 455 кГц (эта частота называется *промежуточной частотой*) затем усиливается в нескольких каскадах. Преимуществом такого метода является то, что несколько RLC-цепей в каскадах усилителя легко сконструировать так, чтобы они резонировали при частоте 455 кГц, подавляя другие частоты. В результате значительно повышается селективность (избирательность, избирательная способность) радиоприемника и достигается больший коэффициент усиления принимаемого сигнала.

3.7. Задачи

В задачах 1–6 рассматривается RL-цепь, в которой последовательно включен резистор с сопротивлением R Ом, катушка с индуктивностью в L генри (рис. 3.7.7) и источник электродвижущей силы (ЭДС), но конденсатор отсутствует. В этом случае уравнение (2) сводится к линейному уравнению первого порядка

$$LI' + RI = E(t).$$

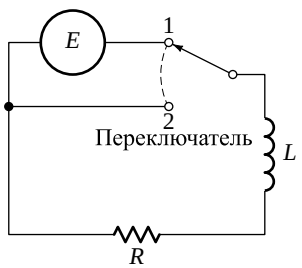


Рис. 3.7.7. Цепь в задачах 1–6

1. Предположим, что в цепи на рис. 3.7.7 $L = 5$ Гн, $R = 25\ \Omega$, а источник ЭДС E — батарея с постоянным напряжением 100 В. Предположим также, что переключатель находится в положении 1 уже долгое время, т. е. в цепи течет установившийся ток 4 А. В момент времени $t = 0$ переключатель устанавливают в положение 2, так что $I(0) = 4$ и $E = 0$ для $t \geqq 0$. Найдите $I(t)$.
2. Рассмотрим ту же цепь, что и в примере 1. Предположим, что вначале переключатель находится в положении 2, но в момент времени $t = 0$ его переключают в положение 1 так, что $I(0) = 0$ и $E = 100$ для $t \geqq 0$. Найдите $I(t)$ и покажите, что $I(t) \to 4$ при $t \to +\infty$.
3. Предположим, что батарею в задаче 2 заменили генератором переменного тока с напряжением $E(t) = 100 \cos 60t$ вольт. Считая, что все остальное осталось неизменным, найдите $I(t)$.
4. Рассмотрим цепь, изображенную на рис. 3.7.7. Пусть переключатель находится в положении 1 и $L = 2$, $R = 40$, $E(t) = 100e^{-10t}$, $I(0) = 0$. Найдите максимальное значение силы тока для $t \geqq 0$.
5. Рассмотрим цепь, изображенную на рис. 3.7.7. Пусть переключатель установлен в положение 1 и $E(t) = 100e^{-10t} \cos 60t$, $R = 20$, $L = 2$, а $I(0) = 0$. Найдите $I(t)$.

6. Рассмотрим цепь, изображенную на рис. 3.7.7. Пусть переключатель установлен в положение 1 и $L = 1$, $R = 10$, а $E(t) = 30\cos 60t + 40\sin 60t$. **(a)** Подставьте $I_{\text{sp}}(t) = A\cos 60t + B\sin 60t$, затем определите значения A и B и, наконец, найдите ток I_{sp} в установившемся режиме цепи. **(b)** Запишите решение в виде $I_{\text{sp}}(t) = C\cos(\omega t - \alpha)$.

В задачах 7–10 рассматривается RC-цепь, изображенная на рис. 3.7.8. Она состоит из резистора с сопротивлением R Ом, конденсатора емкостью C фарад, переключателя и источника ЭДС, но в ней нет катушки. Подставив $L = 0$ в уравнение (3), получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

относительно заряда $Q = Q(t)$ на конденсаторе в момент времени t. Заметим, что $I(t) = Q'(t)$.

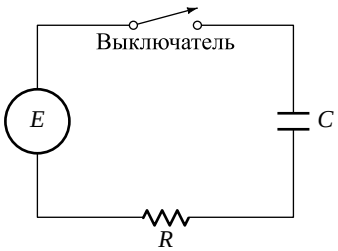


Рис. 3.7.8. Цепь в задачах 7–10

7. **(a)** Найдите заряд $Q(t)$ и силу тока $I(t)$ в данной цепи, если $E(t) \equiv E_0$ (постоянное напряжение, которое обеспечивает батарея) и переключатель замыкает цепь в момент времени $t = 0$, т. е. $Q(0) = 0$. **(b)** Покажите, что

$$\lim_{t\to+\infty} Q(t) = E_0C \quad \text{и} \quad \lim_{t\to+\infty} I(t) = 0.$$

8. Предположим, что в цепи на рис. 3.7.8 $R = 10$, $C = 0{,}02$, $Q(0) = 0$, а $E(t) = 100e^{-5t}$ (вольт). **(a)** Найдите $Q(t)$ и $I(t)$. **(b)** Найдите максимальное значение заряда на конденсаторе при $t \geqq 0$ и момент времени, когда оно достигается.

9. Предположим, что в цепи на рис. 3.7.8 $R = 200$, $C = 2{,}5 \times 10^{-4}$, $Q(0) = 0$, а $E(t) = = 100\cos 120t$. **(a)** Найдите $Q(t)$ и $I(t)$. **(b)** Какова амплитуда тока в установившемся режиме?

10. В момент времени $t = 0$ переключатель замыкает RC-цепь, показанную на рис. 3.7.8, и источник ЭДС, генерирующий напряжение $E(t) = E_0\cos\omega t$, включается в эту RC-цепь. Пусть $Q(0) = 0$. Подставив $Q_{\text{sp}}(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ в дифференциальное уравнение, покажите, что ток через конденсатор в установившемся режиме периодических колебаний равен

$$Q_{\text{sp}}(t) = \frac{E_0C}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}\cos(\omega t - \beta),$$

где $\beta = \operatorname{arctg}(\omega RC)$.

В задачах 11–16 заданы параметры RLC-цепи, причем входное напряжение равно $E(t)$. Используя подходящее значение ω, подставьте

$$I_{\text{sp}}(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

в уравнение (4) и найдите установившийся периодический ток в виде $I_{\text{sp}}(t) = I_0\sin(\omega t - \delta)$.

11. $R = 30\ \Omega$, $L = 10$ Гн, $C = 0{,}02$ Ф; $E(t) = 50\sin 2t$ В

12. $R = 200\ \Omega$, $L = 5$ Гн, $C = 0{,}001$ Ф; $E(t) = 100 \sin 10t$ В

13. $R = 20\ \Omega$, $L = 10$ Гн, $C = 0{,}01$ Ф; $E(t) = 200 \cos 5t$ В

14. $R = 50\ \Omega$, $L = 5$ Гн, $C = 0{,}005$ Ф; $E(t) = 300 \cos 100t + 400 \sin 100t$ В

15. $R = 100\ \Omega$, $L = 2$ Гн, $C = 5 \times 10^{-6}$ Ф; $E(t) = 110 \sin 60\pi t$ В

16. $R = 25\ \Omega$, $L = 0{,}2$ Гн, $C = 5 \times 10^{-4}$ Ф; $E(t) = 120 \cos 377t$ В.

В задачах 17–22 описаны RLC-цепи с входным напряжением $E(t)$. Найдите силу тока $I(t)$, зная начальные данные: силу тока (в амперах) и заряд конденсатора (в кулонах).

17. $R = 16\ \Omega$, $L = 2$ Гн, $C = 0{,}02$ Ф; $E(t) = 100$ В; $I(0) = 0$, $Q(0) = 5$

18. $R = 60\ \Omega$, $L = 2$ Гн, $C = 0{,}0025$ Ф; $E(t) = 100e^{-t}$ В; $I(0) = 0$, $Q(0) = 0$

19. $R = 60\ \Omega$, $L = 2$ Гн, $C = 0{,}0025$ Ф; $E(t) = 100e^{-10t}$ В; $I(0) = 0$, $Q(0) = 1$.

В задачах 20–22 постройте графики установившегося периодического тока $I_{\text{sp}}(t)$ и общего тока $I(t) = I_{\text{sp}}(t) + I_{\text{tr}}(t)$.

20. Цепь и входное напряжение как в задаче 11, причем $I(0) = 0$ и $Q(0) = 0$.

21. Цепь и входное напряжение как в задаче 13, причем $I(0) = 0$ и $Q(0) = 3$.

22. Цепь и входное напряжение как в задаче 15, причем $I(0) = 0$ и $Q(0) = 0$.

23. Рассмотрим LC-цепь, т. е. RLC-цепь, в которой сопротивление резистора $R = 0$. Пусть напряжение на входе $E(t) = E_0 \sin \omega t$. Покажите, что при некоторой резонансной частоте будут возникать неограниченные колебания силы тока. Выразите эту частоту через L и C.

24. Раньше было сказано, что если R, L и C положительны, то любое решение уравнения $LI'' + RI' + I/C = 0$ является переходной составляющей решения, т. е. оно стремится к нулю при $t \to +\infty$. Докажите это.

25. Докажите, что амплитуда I_0 установившегося периодического решения уравнения (6) максимальна при частоте $\omega = 1/\sqrt{LC}$.

3.8. Краевые задачи и собственные значения

Теперь вы знаете, что решение линейного дифференциального уравнения второго порядка однозначно определяется двумя начальными условиями. В частности, единственным решением задачи с начальными условиями

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0; \quad y(a) = 0, \quad y'(a) = 0 \tag{1}$$

является тривиальное решение $y(x) \equiv 0$. В большей части главы 3 так или иначе используется единственность решения задачи с начальными условиями для линейного уравнения (которая гарантируется теоремой 2 из раздела 3.2).

Теперь мы увидим, что для задачи

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0; \quad y(a) = 0, \quad y(b) = 0, \tag{2}$$

ситуация совершенно иная.

Разница между задачами (1) и (2) состоит в том, что в (2) два условия взяты в двух *разных* точках a и b, причем для определенности пусть $a < b$. В задаче (2) мы должны найти решение дифференциального уравнения на интервале (a, b), которое удовлетворяет условиям $y(a) = 0$ и $y(b) = 0$ на концах интервала. Такая задача называется **краевой**,

или **задачей с граничными условиями.** Примеры затруднений, которые могут возникать в краевых задачах, приведены в примерах 1 и 2.

Пример 1 Рассмотрим краевую задачу

$$y'' + 3y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0. \tag{3}$$

Общим решением данного дифференциального уравнения является функция

$$y(x) = A\cos x\sqrt{3} + B\sin x\sqrt{3}.$$

Из краевых условий следует, что

$$y(0) = A = 0 \quad \text{и} \quad y(\pi) = B\sin\pi\sqrt{3} \approx (-0{,}7458)B = 0,$$

откуда $B = 0$. Поэтому единственным решением краевой задачи (3) будет тривиальное решение $y(x) \equiv 0$; в этом нет ничего удивительного. ■

Пример 2 Рассмотрим краевую задачу

$$y'' + 4y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0. \tag{4}$$

Общим решением дифференциального уравнения является функция

$$y(x) = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

Из краевых условий следует, что $y(0) = A = 0$ и

$$y(\pi) = A\cos 2\pi + B\sin 2\pi = B \cdot 0 = 0.$$

Независимо от значения B, условие $y(\pi) = 0$ автоматически выполняется, так как $\sin 2\pi = 0$. Поэтому функции

$$y(x) = B\sin 2x$$

являются решениями краевой задачи (4) для *всех* значений B. Это пример краевой задачи, имеющей бесконечно много нетривиальных решений. ■

Задачи на собственные значения

Примеры 1 и 2 скорее не исключения, а типичные ситуации для краевых задач, таких как задача (2): задача на собственные значения очень часто может не иметь нетривиальных решений или иметь их бесконечно много. Заметим, что обе задачи (3) и (4) можно записать в виде

➤
$$y'' + p(x)y' + \lambda q(x)y = 0; \quad y(a) = 0, \quad y(b) = 0, \tag{5}$$

где $p(x) \equiv 0$, $q(x) \equiv 1$, $a = 0$ и $b = \pi$. Число λ — параметр задачи (он не имеет никакого отношения к параметрам, рассмотренным в разделе 3.5). Если мы возьмем $\lambda = 3$, то получим уравнение (3); при $\lambda = 4$ мы получим уравнение (4). Примеры 1 и 2 показывают, что ситуация

в краевой задаче с параметром может (и, в большинстве случаев это так и есть) сильно зависеть от конкретного численного значения параметра.

Краевая задача с неким параметром, скажем, λ, например краевая задача (5), называется **задачей на собственные значения**. В задаче на собственные значения ставится вопрос: при каких (действительных) значениях параметра λ существует нетривиальное (т. е. ненулевое) решение краевой задачи? Такое значение λ называется **собственным**, или **характеристическим числом**, или **значением** данной задачи. Поэтому можно сказать, что в примере 2 мы убедились, что $\lambda = 4$ является собственным числом краевой задачи

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0. \tag{6}$$

Однако из рассуждений, проведенных в примере 1, следует, что $\lambda = 3$ не является собственным числом этой задачи.

Предположим что $\lambda_\star$ — собственное число задачи (5), а $y_\star$ — нетривиальное решение задачи, получающейся после подстановки этого собственного числа, т. е. задачи

$$y_\star'' + p(x)y_\star' + \lambda_\star q(x)y_\star = 0 \quad \text{и} \quad y_\star(a) = 0, \quad y_\star(b) = 0.$$

Тогда $y_\star$ называется **собственной функцией**, соответствующей собственному числу $\lambda_\star$. Таким образом, в примере 2 мы видели, что $y_\star(x) = \sin 2x$ (как и функция $\sin 2x$, умноженная на произвольную постоянную) является собственной функцией, соответствующей собственному числу $\lambda_\star = 4$.

В соответствии с общим определением, задача (5) является *однородной* в том смысле, что любая собственная функция, умноженная на любую постоянную, также является собственной функцией (конечно, соответствующей тому же собственному числу). Иными словами, если $y = y_\star(x)$ удовлетворяет задаче (5) с собственным значением $\lambda = \lambda_\star$, то же самое верно и для $cy_\star(x)$ для любой постоянной c. Можно доказать (при определенных ограничениях на функции (коэффициенты) p и q), что любые две собственные функции, соответствующие одному собственному значению, являются линейно зависимыми.

Пример 3 Найдем собственные значения и соответствующие им собственные функции краевой задачи

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0 \quad (L > 0). \tag{7}$$

Решение Необходимо проверить все возможные (действительные) значения λ — положительные, нулевое и отрицательные.

Если $\lambda = 0$, то уравнение примет вид $y'' = 0$. Его общее решение

$$y(x) = Ax + B.$$

Тогда из краевых условий $y(0) = 0 = y(L)$ непосредственно следует, что $A = B = 0$. Поэтому единственным решением в этом случае является тривиальное — функция $y(x) \equiv 0$. Следовательно, $\lambda = 0$ *не* является собственным значением задачи (7).

Если $\lambda < 0$, положим $\lambda = -\alpha^2$ (где $\alpha > 0$). Тогда дифференциальное уравнение примет вид

$$y'' - \alpha^2 y = 0.$$

Его общее решение

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x} = A \cosh \alpha x + B \sinh \alpha x,$$

где $A = c_1 + c_2$ и $B = c_1 - c_2$. (Напомним, что $\cosh \alpha x = (e^{\alpha x} + e^{-\alpha x})/2$ и что $\sinh \alpha x = (e^{\alpha x} - e^{-\alpha x})/2$.) Из условия $y(0) = 0$ следует, что

$$y(0) = A \cosh 0 + B \sinh 0 = A = 0,$$

поэтому $y(x) = B \sinh \alpha x$. Но тогда из второго краевого условия $y(L) = 0$ следует, что $y(L) = B \sinh \alpha L = 0$. Поэтому $B = 0$, так как $\alpha \neq 0$ и $\sinh x = 0$ только для $x = 0$ (посмотрите на графики $y = \sinh x$ и $y = \cosh x$, изображенные на рис. 3.8.1). Поэтому единственным решением задачи (7) в случае $\lambda < 0$ является функция $y \equiv 0$. Из этого следует, что у данной задачи *нет* отрицательных собственных чисел.

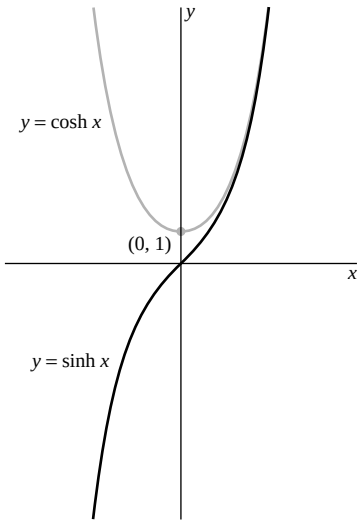


Рис. 3.8.1. Графики гиперболического синуса и гиперболического косинуса

Осталось проверить лишь случай $\lambda = \alpha^2 > 0$ для некоторого $\alpha > 0$. В этом случае дифференциальное уравнение примет вид

$$y'' + \alpha^2 y = 0.$$

Его общее решение

$$y(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x.$$

Из условия $y(0) = 0$ следует, что $A = 0$, поэтому $y(x) = B \sin \alpha x$. Из условия $y(L) = 0$ следует, что

$$y(L) = B \sin \alpha L = 0.$$

Возможно ли это при $B \neq 0$? Да, но только если αL нацело делится на π, т. е. при

$$\alpha L = \pi, \quad 2\pi, \quad 3\pi, \quad \ldots, \quad n\pi, \quad \ldots,$$

или при

$$\lambda = \alpha^2 = \frac{\pi^2}{L^2}, \quad \frac{4\pi^2}{L^2}, \quad \frac{9\pi^2}{L^2}, \quad \ldots, \quad \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad \ldots.$$

Таким образом, мы установили, что задача (7) имеет *бесконечную последовательность* положительных собственных чисел

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{8}$$

При $B = 1$ собственная функция, соответствующая собственному значению λ_n, равна

$$y_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{9}$$

■

Пример 3 иллюстрирует общую ситуацию. В соответствии с теоремой, точная формулировка которой будет дана в разделе 10.1, при условии, что $q(x) > 0$ на интервале $[a, b]$, у задачи (5) существует возрастающая расходящаяся последовательность

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots < \lambda_n < \cdots \to +\infty$$

собственных чисел. Это остается верным и в более общей постановке задачи на собственные значения, в которой краевые условия содержат не только значения y, но и значения производной y':

$$\begin{aligned} &y'' + p(x)y' + \lambda q(x)y = 0; \\ &a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0, \quad b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0, \end{aligned} \tag{10}$$

где a_1, a_2, b_1 и b_2 — заданные постоянные. При $a_1 = 1 = b_2$ и $a_2 = 0 = b_1$ получим задачу из примера 4 (в которой $p(x) \equiv 0$ и $q(x) \equiv 1$, как и в предыдущем примере).

Пример 4 Найдем собственные значения и собственные функции задачи

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(L) = 0. \tag{11}$$

Решение Рассуждая так же, как и в примере 3, можно показать, что собственные значения (если они есть!) могут быть только положительными. Положим $\lambda = \alpha^2 > 0$ ($\alpha > 0$). Тогда дифференциальное уравнение примет вид

$$y'' + \alpha^2 y = 0,$$

его общим решением является функция

$$y(x) = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x.$$

Из условия $y(0) = 0$ следует, что $A = 0$, поэтому

$$y(x) = B \sin \alpha x \quad \text{и} \quad y'(x) = B\alpha \cos \alpha x.$$

Второе граничное условие $y'(L) = 0$ дает, что

$$y'(L) = B\alpha \cos \alpha L = 0.$$

При $B \neq 0$ это выполняется, только если αL равно произведению целого положительного нечетного числа на $\pi/2$:

$$\alpha L = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2}, \quad \ldots, \quad \frac{(2n-1)\pi}{2}, \quad \ldots;$$

в этом случае

$$\lambda = \frac{\pi^2}{4L^2}, \quad \frac{9\pi^2}{4L^2}, \quad \ldots, \quad \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4L^2}, \quad \ldots.$$

Собственная функция задачи (11), соответствующая n-му собственному числу λ_n, равна

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4L^2} \quad \text{и} \quad y_n(x) = \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L} \tag{12}$$

для $n = 1, 2, 3, \ldots$. ■

Общий метод определения собственных чисел в задаче (10) вкратце описан ниже. Сначала запишем общее решение дифференциального уравнения в виде

$$y = Ay_1(x, \lambda) + By_2(x, \lambda).$$

Мы пишем $y_i(x, \lambda)$, так как y_1 и y_2 зависят от λ. В примерах 3 и 4

$$y_1(x) = \cos \alpha x = \cos x\sqrt{\lambda} \quad \text{и} \quad y_2(x) = \sin \alpha x = \sin x\sqrt{\lambda}.$$

Затем попытаемся удовлетворить двум краевых условиям. Заметим, что они линейны по y и y', а значит также и по A и B. Приведя подобные (просуммировав коэффициенты) при A и B в двух уравнениях, мы получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \alpha_1(\lambda)A + \beta_1(\lambda)B &= 0, \\ \alpha_2(\lambda)A + \beta_2(\lambda)B &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Теперь λ будет собственным значением тогда и только тогда, когда у системы (13) есть нетривиальное решение (хотя бы одно из чисел A и B не равно нулю). Но однородная система линейных уравнений имеет нетривиальное решение только тогда, когда определитель, составленный из ее коэффициентов, равен нулю. Поэтому собственные числа задачи (10) являются (действительными) решениями уравнения

$$D(\lambda) = \alpha_1(\lambda)\beta_2(\lambda) - \alpha_2(\lambda)\beta_1(\lambda) = 0. \tag{14}$$

Возможно, решить это уравнение в явном виде не удастся. В этом случае можно использовать приближенные численные методы, такие как метод Ньютона.

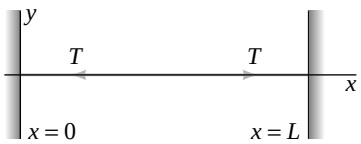
Задача на собственные значения наиболее интересна благодаря своим многочисленным применениям в физике. В оставшейся части этого раздела мы рассмотрим три таких применения. Многие дополнительные применения рассматриваются в главах 9 и 10 (в которых идет речь об уравнениях в частных производных и задачи с граничными условиями).

Вращающаяся струна

Вас когда-нибудь интересовал вопрос, какую форму примет быстро вращающаяся скакалка? Рассмотрим форму натянутой упругой струны длиной L постоянной линейной плотностью ρ (равной массе единицы длины струны), которая вращается (как скакалка) вокруг положения равновесия с постоянной угловой скоростью ω (радианах в секунду). Выберем ось x так, чтобы струна вращалась вокруг оси x. Будем считать, что в каждой точке сила натяжения струны в одну сторону равна силе натяжения в другую сторону и равна постоянной силе T, которая направлена по касательной к струне в этой точке. Кроме этого будем считать, что при вращении струны вокруг оси x каждая точка струны описывает окружность, центр которой находится на оси x в положении равновесия этой точки. Так как струна эластичная, при вращении она растягивается и принимает изогнутую форму. Обозначим через $y(x)$ смещение струны от точки x на оси вращения. Наконец, будем считать отклонение струны настолько малым, что $\sin\theta \approx \operatorname{tg}\theta = y'(x)$ (рис. 3.8.2(c)).

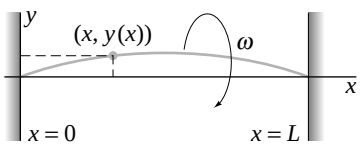
Попробуем получить дифференциальное уравнение для $y(x)$, применяя второй закон Ньютона $F = ma$ к участку струны массы $\rho\,\Delta x$, соответствующему интервалу $[x, x + \Delta x]$. На этот участок действуют только силы натяжения, приложенные к его концам. Из рис. 3.8.3 мы видим, что вертикальная составляющая силы в направлении y равна

$$F = T\sin(\theta + \Delta\theta) - T\sin\theta \approx T\operatorname{tg}(\theta + \Delta\theta) - T\operatorname{tg}\theta,$$



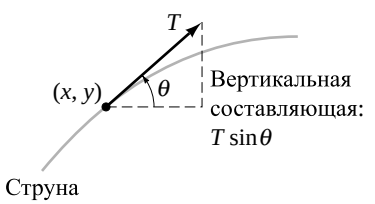
Положение равновесия

(a)



Вращающаяся струна

(b)



(c)

Рис. 3.8.2. Вращающаяся струна

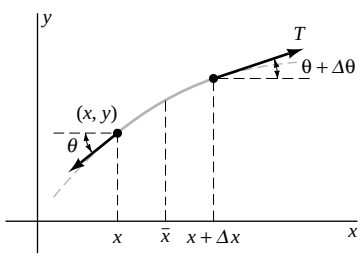


Рис. 3.8.3. Силы, приложенные к маленькому сегменту вращающейся струны

поэтому

$$F \approx Ty'(x+\Delta x) - Ty'(x). \tag{15}$$

Из начального курса анализа (или элементарного курса физики) известно, что центростремительное ускорение тела при равномерном круговом движении равно $a = r\omega^2$ (где r — радиус круга, а ω — угловая скорость тела). Здесь $r = y$, поэтому вертикальное ускорение участка струны равно $a = -\omega^2 y$ (знак "минус" поставлен потому, что направление внутрь противоположно направлению оси y). Учитывая, что $m = \rho\,\Delta x$, подставим это выражение и формулу (15) в $F = ma$. Получим

$$Ty'(x+\Delta x) - Ty'(x) \approx -\rho\omega^2 y \Delta x,$$

откуда

$$T \cdot \frac{y'(x+\Delta x) - y'(x)}{\Delta x} \approx -\rho\omega^2 y.$$

Перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$. Получим дифференциальное уравнение движения струны:

$$Ty'' + \rho\omega^2 y = 0. \tag{16}$$

Обозначим

$$\lambda = \frac{\rho\omega^2}{T}. \tag{17}$$

Использовав условие, что концы струны закреплены, получим задачу на собственные значения

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0. \tag{7}$$

Мы уже рассматривали эту задачу в примере 3. Там мы нашли, что собственными значениями задачи (7) являются числа

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{8}$$

и что числу λ_n соответствует собственная функция $y_n(x) = \sin(n\pi x/L)$.

Но что это значит в задаче о вращающейся струне? Это значит, что если значение λ в (17) не равно одному из собственных значений (8), то единственным решением задачи является тривиальное решение $y(x) \equiv 0$. В этом случае струна остается в положении равновесия, а отклонение, естественно, равно нулю. Но если мы приравняем (17) и (8) и из полученного уравнения найдем значение ω_n, соответствующее λ_n

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\lambda_n T}{\rho}} = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}, \tag{18}$$

то для $n = 1, 2, 3, \ldots$ мы получим последовательность **критических скоростей**, т. е. **критических частот вращения**. Только при этих критических значениях угловой скорости струна может вращаться вне своего положения равновесия. При угловой скорости ω_n она

принимает форму $y_n = c_n \sin(n\pi x/L)$. Однако в нашей математической модели не хватает данных для определения коэффициента c_n.

Предположим, что мы начинаем вращать струну со скоростью

$$\omega < \omega_1 = \frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\rho}}$$

и постепенно увеличиваем скорость ее вращения. Пока $\omega < \omega_1$, струна остается в несмещенном положении и $y \equiv 0$. Но при $\omega = \omega_1$ струна перескакивает (вращаясь) в положение $y = c_1 \sin(\pi x/L)$. А когда ω снова возрастает, струна быстро возвращается в несмещенное положение на оси вращения!

Провисание (прогиб) однородной балки

Рассмотрим пример применения достаточно простой краевой задачи для объяснения довольно сложного физического явления — формы, которую принимает горизонтальная балка под действием вертикальной силы.

Рассмотрим горизонтальную балку из однородного материала с постоянным сечением, изображенную на рис. 3.8.4. Если она опирается только на концах, то под действием собственного веса ее продольная ось симметрии изгибается (на рисунках 3.8.4 и 3.8.5 она отмечена пунктиром). Наша цель — исследовать форму кривой $y = y(x)$, т. е. **кривой прогиба** балки. Для этого введем систему координат так, как показано на рис. 3.8.5. Ось y направлена вниз.

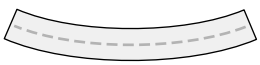


Рис. 3.8.4. Искривление (деформация) горизонтальной балки

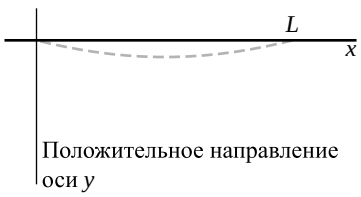


Рис. 3.8.5. Кривая прогиба

Из теории упругости следует, что при достаточно малых отклонениях балки (настолько малых, что величиной $[y'(x)]^2$ можно пренебречь по сравнению с единицей), кривая прогиба описывается математической моделью, в основу которой положено дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$EIy^{(4)} = F(x), \tag{19}$$

где

- E обозначает модуль Юнга материала балки;
- I обозначает момент инерции поперечного сечения балки относительно горизонтальной линии проходящей через центр тяжести поперечного сечения;
- $F(x)$ обозначает плотность силы, действующей вертикально *вниз* на балку в точке x.

Что такое *плотность* силы? В данной задаче это сила, действующая на единицу длины. Таким образом, сила, действующая на очень короткий отрезок балки $[x, x + \Delta x]$, приблизительно равна $F(x)\Delta x$. Размерностью $F(x)$ является единица силы на единицу длины. Мы

рассмотрим случай, когда единственной силой, распределенной по балке, будет ее собственный вес, w фунтов на фут, так что $F(x) \equiv w$. Тогда уравнение (19) примет вид

$$EIy^{(4)} = w, \tag{20}$$

где E, I и w — константы.

Замечание. Мы не предполагаем наличие каких-либо предварительных знаний по теории упругости или уравнений (19) и (20). Однако важно уметь анализировать дифференциальные уравнения, получаемые в других прикладных областях. Ведь изучая решения уравнения, мы учимся понимать его смысл. Заметим, что из уравнения (20) следует, что четвертая производная пропорциональна плотности веса, т. е. удельной плотности. Коэффициент пропорциональности содержит *две* постоянные — модуль Юнга E, который зависит только от материала балки, и момент инерции I, который зависит только от формы поперечного сечения балки. Значение модуля Юнга для разных материалов можно найти в справочниках физических величин; $I = \frac{1}{4}\pi a^4$ для круглого поперечного сечения радиусом a.

Несмотря на то, что уравнение (20) является дифференциальным уравнением четвертого порядка, решение его сводится к решению уравнений первого порядка, которые решаются интегрированием. Проинтегрировав уравнение (20) первый раз, получим, что

$$EIy^{(3)} = wx + C_1;$$

после второго интегрирования получим

$$EIy'' = \tfrac{1}{2}wx^2 + C_1x + C_2;$$

еще одно интегрирование даст

$$EIy' = \tfrac{1}{6}wx^3 + \tfrac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3;$$

и наконец, последнее интегрирование дает

$$EIy = \tfrac{1}{24}wx^4 + \tfrac{1}{6}C_1x^3 + \tfrac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4,$$

где C_1, C_2, C_3 и C_4 — некоторые произвольные постоянные. Таким образом получим решение уравнения (20) в виде

$$y(x) = \frac{w}{24EI}x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D, \tag{21}$$

где A, B, C и D — константы, полученные после четырех интегрирований.

Эти четыре постоянные можно определяются способом крепления балки на концах, т. е. при $x = 0$ и $x = L$. На рис. 3.8.6изображены два способа крепления, причем каждый конец можно закрепить своим способом. Например, на рис. 3.8.7 изображена консоль — балка прочно закреплена в точке $x = 0$, но *не закреплена* (вообще нет никакой опоры) на конце $x = L$. В следующей таблице показаны **граничные**, или **краевые**, **условия** для трех самых распространенных случаев. Именно эти краевые условия часто используются при решении задач, связанных с креплением балок, но подробное их обсуждение выходит за пределы данной книги.



Концы подвешены или просто опираются на опоры



Концы жестко закреплены (заделаны)

Рис. 3.8.6. Два способа крепления балки



Консоль

Рис. 3.8.7. Консоль — балка, один конец которой заделан, а второй не закреплен вообще

Опора	Краевые условия
Простая опора	$y = y'' = 0$
Заделанный (защемленный) конец	$y = y' = 0$
Свободный конец	$y'' = y^{(3)} = 0$

Например, кривая прогиба консоли на рис. 3.8.7 задается уравнением (21), где коэффициенты A, B, C и D определяются из условий

$$y(0) = y'(0) = 0 \quad \text{и} \quad y''(L) = y^{(3)}(L) = 0, \tag{22}$$

т. е. конец в точке $x = 0$ закреплен, а конец в точке $x = L$ — свободен (не закреплен). Условия (22) и дифференциальное уравнение (21) составляют **краевую задачу.**

Пример 5 Найдем кривую прогиба однородной горизонтальной балки длиной L и весом w на единицу длины, оба конца которой лежат на простых опорах.

Решение Запишем краевые условия в нашей задаче:

$$y(0) = y''(0) = 0 = y(L) = y''(L).$$

Вместо того чтобы подставлять их прямо в уравнение (21), мы начнем с дифференциального уравнения $EIy^{(4)} = w$ и найдем постоянные, которые будут возникать при (четырехкратном) интегрировании. В результате первых двух интегрирований получим

$$EIy^{(3)} = wx + A; \quad EIy'' = \tfrac{1}{2}wx^2 + Ax + B.$$

Поскольку $y''(0) = 0$, то $B = 0$, и тогда из $y''(L) = 0$ следует, что

$$0 = \tfrac{1}{2}wL^2 + AL.$$

Поэтому $A = -wL/2$ и тогда

$$EIy'' = \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}wLx.$$

Теперь нужно проинтегрировать еще два раза. Сначала будем иметь

$$EIy' = \tfrac{1}{6}wx^3 - \tfrac{1}{4}wLx^2 + C,$$

а после последнего интегрирования получим

$$EIy(x) = \tfrac{1}{24}wx^4 - \tfrac{1}{12}wLx^3 + Cx + D. \tag{23}$$

Теперь из $y(0) = 0$ следует, что $D = 0$; затем, так как $y(L) = 0$,

$$0 = \tfrac{1}{24}wL^4 - \tfrac{1}{12}wL^4 + CL.$$

Отсюда находим $C = wL^3/24$. Из уравнения (23) мы получим уравнение

$$y(x) = \frac{w}{24EI}(x^4 - 2Lx^3 + L^3x), \tag{24}$$

которое определяет форму балки, свободно лежащей на простых опорах. Из соображений симметрии (см. также задачу 17) понятно, что *наибольшее отклонение* $y_{\max}$ балки достигается посередине, т. е. при $x = L/2$, и оно равно

$$y_{\max} = y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{w}{24EI}\left(\frac{1}{16}L^4 - \frac{2}{8}L^4 + \frac{1}{2}L^4\right);$$

иными словами,

$$y_{\max} = \frac{5wL^4}{384EI}. \tag{25}$$

■

Пример 6 Пусть, например, необходимо вычислить наибольшее отклонение стального стержня, концы которого лежат на простых опорах, если известно, что длина стержня равна 20 футам, а его сечение представляет собой круг диаметра 1 фут. В справочнике мы находим, что плотность стали равна $\delta = 7{,}75\,\text{г/см}^3$, а ее модуль Юнга равен $E = 2 \times 10^{12}\,\text{г/см}\cdot\text{с}^2$, так что нам удобнее работать в системе СГС (в системе сантиметр–грамм–секунда). Сначала переведем в эту систему размеры нашего стержня:

$$\text{длина} \quad L = (20\text{ футов})\left(30{,}48\,\frac{\text{см}}{\text{фут}}\right) = 609{,}60\,\text{см}$$

$$\text{и} \quad \text{радиус} \quad a = \left(\frac{1}{2}\text{ дюйма}\right)\left(2{,}54\,\frac{\text{см}}{\text{дюйм}}\right) = 1{,}27\,\text{см}.$$

Линейная плотность (масса на единицу длины) стержня равна

$$\rho = \pi a^2 \delta = \pi(1{,}27)^2(7{,}75) \approx 39{,}27 \ \frac{\text{г}}{\text{см}},$$

поэтому

$$w = \rho g = \left(39{,}27 \ \frac{\text{г}}{\text{см}}\right)\left(980 \ \frac{\text{см}}{\text{с}^2}\right) \approx 38484{,}6 \ \frac{\text{г}}{\text{с}^2}.$$

Момент инерции (момент второго порядка) диска радиусом a вокруг диаметра равен $I = \frac{1}{4}\pi a^4$, так что

$$I = \frac{1}{4}\pi(1{,}27)^4 \approx 2{,}04 \ \text{см}^4.$$

Из равенства (25) следует, что

$$y_{\max} \approx \frac{(5)(38484{,}6)(609{,}60)^4}{(384)(2 \times 10^{12})(2{,}04)} \approx 16{,}96 \ \text{см},$$

т. е. $6{,}68$ дюйма; это и есть максимальное отклонение стержня, причем оно достигается, как мы уже знаем, посредине. Интересно, что $y_{\max}$ пропорционально L^4, поэтому, если бы длина стержня была только 10 футов, то его максимальное отклонение было бы в 16 раз меньше — всего около $0{,}42$ дюйма. Так как $I = \frac{1}{4}\pi a^4$, из равенства (25) следует, что такого же уменьшения отклонения можно достичь, увеличив радиус стержня a вдвое. ■

Стержень на стяжке

На рис. 3.8.8 изображен однородный стержень длиной L. Его концы закреплены на шарнирах. Он выгибается под действием продольной сжимающей силы P, приложенной к одному из концов. Мы считаем сжатие стержня настолько малым, что областью определения кривой $y = y(x)$ можно считать отрезок $0 \leqq x \leqq L$. В теории упругости линейная краевая задача

$$EIy'' + Py = 0, \quad y(0) = y(L) = 0 \tag{26}$$

описывает действительное (нелинейное) поведение стержня. Как и в задаче о прогибе балки, E обозначает модуль Юнга материала, а I — момент инерции поперечного сечения балки относительно горизонтальной линии, проходящей через центр тяжести поперечного сечения. Если мы напишем

$$\lambda = \frac{P}{EI}, \tag{27}$$

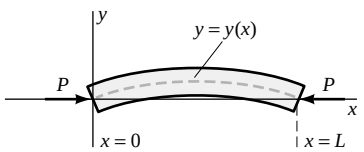


Рис. 3.8.8. Стержень на стяжке

то задача (26) примет вид задачи на собственные значения

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = y(L) = 0, \tag{7}$$

которую мы рассмотрели в примере 3. Напомним, что ее собственные числа $\{\lambda_n\}$ равны

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{8}$$

Каждому значению λ_n соответствует собственная функция $y_n = \sin(n\pi x/L)$. (В задачах о вращающейся струне и прогибе стержня собственные числа и собственные значения одни и те же.)

Чтобы интерпретировать этот результат для выгибающегося стержня, напомним, что в соответствии с равенством (27) $P = \lambda EI$. Силы

$$P_n = \lambda_n EI = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{28}$$

являются *критическими силами сжатия* стержня. Только когда сжимающая сила P равна одному из критических значений силы сжатия, стержень будет "выгибаться", и его форма будет отлична от его прямого (неизогнутого) положения. Наименьшее сжимающее усилие, при котором это происходит, равно

$$P_1 = \frac{\pi^2 EI}{L^2}. \tag{29}$$

Эта наименьшая критическая сила называется *эйлеровым критическим усилием при продольном изгибе*[13] стержня. Это верхняя граница тех сжимающих усилий, которые можно приложить к стержню, не опасаясь изогнуть его. (Однако на практике стержень может согнуться при значительно меньшей нагрузке под влиянием факторов, которые не учтены в этой математической модели.)

Пример 7 Предположим, нужно вычислить эйлерово критическое усилие при продольном изгибе стального стержня длиной 10 футов, если известно, что поперечное сечение стержня представляет собой круг диаметром 1 дюйм. В системе СГС (сантиметр–грамм–секунда) мы имеем

$$E = 2 \times 10^{12}\ \text{г/см}\cdot\text{с}^2,$$

$$L = (10\ \text{футов})\left(30{,}48\ \frac{\text{см}}{\text{фут}}\right) = 304{,}8\ \text{см} \qquad \text{и}$$

$$I = \frac{\pi}{4}\left[(0{,}5\ \text{дюйма})\left(2{,}54\ \frac{\text{см}}{\text{дюйм}}\right)\right]^4 \approx 2{,}04\ \text{см}^4.$$

Подставляя эти значения в равенство (29), находим, что эйлерово критическое усилие при продольном изгибе этого стального стержня равно

$$P_1 \approx 4{,}34 \times 10^8\ \text{дин} \approx 976\ \text{фунтов},$$

если использовать переводной коэффициент $4{,}448 \times 10^5$ дин/фунт. ■

[13] А также иногда *эйлеровой критической силой*, или просто *критической силой*. — *Примеч. ред.*

3.8. Задачи

Собственные числа в задачах 1–5 неотрицательны. Сначала определите, является ли $\lambda = 0$ собственным числом; затем найдите положительные собственные значения и соответствующие им собственные функции.

1. $y'' + \lambda y = 0;\ y'(0) = 0,\ y(1) = 0$

2. $y'' + \lambda y = 0;\ y'(0) = 0,\ y'(\pi) = 0$

3. $y'' + \lambda y = 0;\ y(-\pi) = 0,\ y(\pi) = 0$

4. $y'' + \lambda y = 0;\ y'(-\pi) = 0,\ y'(\pi) = 0$

5. $y'' + \lambda y = 0;\ y(-2) = 0,\ y'(2) = 0$

6. Рассмотрим задачу на собственные значения

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y'(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0.$$

Все ее собственные числа неотрицательны, поэтому запишем $\lambda = \alpha^2$, где $\alpha \geqq 0$. **(a)** Покажите, что $\lambda = 0$ не является собственным числом. **(b)** Покажите, что $y = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$ удовлетворяет краевым условиям тогда и только тогда, когда $B = 0$ и α является положительным решением уравнения $\operatorname{tg} z = 1/z$. Эти корни $\{\alpha_n\}_1^\infty$ — абсциссы точек пересечения кривых $y = \operatorname{tg} z$ и $y = 1/z$ (как показано на рис. 3.8.9). Поэтому собственными значениями и собственными функциями этой задачи будут числа $\{\alpha_n^2\}_1^\infty$ и функции $\{\cos\alpha_n x\}_1^\infty$ соответственно.

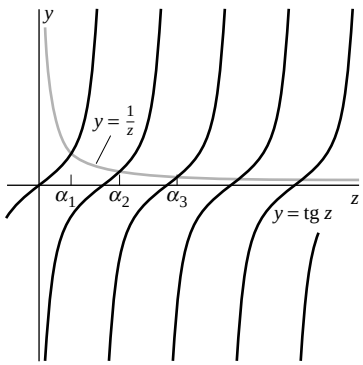


Рис. 3.8.9. Собственные числа — точки пересечения графиков $y = \operatorname{tg} z$ и $y = 1/z$

7. Рассмотрим задачу на собственные значения

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0.$$

Все ее собственные числа неотрицательны. **(a)** Покажите, что $\lambda = 0$ не является собственным числом. **(b)** Покажите, что собственные функции равны $\{\sin\alpha_n x\}_1^\infty$, где α_n — n-й положительный корень уравнения $\operatorname{tg} z = -z$. **(c)** Постройте график, изобразив корни $\{\alpha_n\}_1^\infty$, как абсциссы точек пересечения кривых $y = \operatorname{tg} z$ и $y = -z$. Покажите на графике, что $\alpha_n \approx (2n-1)\pi/2$ при большом n.

8. Рассмотрим задачу на собственные значения

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = y'(1).$$

Все ее собственные числа неотрицательны. **(a)** Покажите, что $\lambda = 0$ — собственное число, причем ему соответствует собственная функция $y_0(x) = x$. **(b)** Покажите, что остальные собственные функции равны $y_n(x) = \sin\beta_n x$, где β_n — n-й положительный корень уравнения $\operatorname{tg} z = z$. Постройте график, отметив на нем эти корни. Покажите на графике, что $\beta_n \approx (2n + 1)\pi/2$ при большом n.

9. Докажите, что у краевой задачи из примера 4 нет отрицательных собственных чисел.

10. Докажите, что у краевой задачи

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0$$

нет отрицательных собственных чисел. (*Указание*. Покажите графически, что уравнение $\operatorname{th} z = -z$ имеет единственное решение $z = 0$.)

11. Используя метод решения задачи 10, покажите, что в задаче 6 на собственные значения нет отрицательных собственных значений.

12. Рассмотрим задачу на собственные значения

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y(-\pi) = y(\pi), \quad y'(-\pi) = y'(\pi).$$

Эта задача не похожа на задачу (10), так как краевые условия "не разделены" между двумя концами. **(a)** Покажите, что $\lambda_0 = 0$ — собственное число, причем ему соответствует собственная функция $y_0(x) \equiv 1$. **(b)** Покажите, что отрицательных собственных значений нет. **(c)** Покажите, что n-е положительное собственное число равно n^2 и что ему соответствуют две линейно независимые собственные функции $\cos nx$ и $\sin nx$.

13. Рассмотрим задачу на собственные значения

$$y'' + 2y' + \lambda y = 0; \quad y(0) = y(1) = 0.$$

(a) Покажите, что $\lambda = 1$ не является собственным числом. **(b)** Покажите, что не существует собственных значений λ таких, что $\lambda < 1$. **(c)** Покажите, что n-е положительное собственное число равно $\lambda_n = n^2\pi^2 + 1$, причем ему соответствует собственная функция $y_n(x) = e^{-x} \sin n\pi x$.

14. Рассмотрим задачу на собственные значения

$$y'' + 2y' + \lambda y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0.$$

Покажите, что все собственные числа положительны и что n-е положительное собственное число равно $\lambda_n = \alpha_n^2 + 1$, причем ему соответствует собственная функция $y_n(x) = e^{-x} \sin \alpha_n x$, где α_n — n-й положительный корень уравнения $\operatorname{tg} z = z$.

15. **(a)** Однородная консольная балка жестко закреплена в точке $x = 0$ и свободна в точке $x = L$ (другой ее конец). Покажите, что она примет форму кривой

$$y(x) = \frac{w}{24EI}(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2).$$

(b) Покажите, что $y'(x) = 0$ только при $x = 0$ и что из этого следует (почему?), что максимальное провисание равно $y_{\max} = y(L) = wL^4/(8EI)$.

16. **(a)** Предположим, что концы балки ($x = 0$ и $x = L$) жестко закреплены (заделаны). Покажите, что форма балки задается уравнением

$$y(x) = \frac{w}{24EI}(x^4 - 2Lx^3 + L^2x^2).$$

(b) Покажите, что корнями уравнения $y'(x) = 0$ являются числа $x = 0$, $x = L$ и $x = L/2$, откуда следует (почему?), что максимальное значение провисания балки равно

$$y_{\max} = y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{wL^4}{384EI},$$

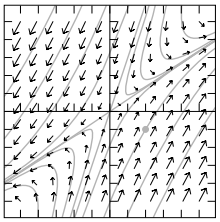
т. е. одной пятой максимального провисания балки, концы которой лежат на простых опорах.

17. Пусть концы балки лежат на простых опорах, а кривая прогиба задается формулой (24). Покажите, что уравнение $y'(x) = 0$ на $[0, L]$ имеет единственный корень $x = L/2$, откуда следует (почему?), что максимальное значение провисания балки действительно задается формулой (25).

18. **(a)** Левый конец балки ($x = 0$) закреплен, а правый ($x = L$) лежит на простой опоре. Покажите, что кривая провисания задается формулой

$$y(x) = \frac{w}{48EI}(2x^4 - 5Lx^3 + 3L^2x^2).$$

(b) Покажите, что максимум провисания балки достигается при $x = \left(15 - \sqrt{33}\right)L/16$ и равен приблизительно $41{,}6\%$ максимального провисания балки в том случае, если бы оба ее конца лежали на простых опорах.



ГЛАВА 4

Введение в системы дифференциальных уравнений

4.1. Системы первого порядка и их приложения

В предыдущих главах мы рассматривали методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений с одной неизвестной функцией. Однако во многих приложениях встречаются обыкновенные дифференциальные уравнения, содержащие две или больше неизвестных функций, зависящих от одной переменной (обычно от времени). Такие задачи естественно приводят к *системе* обыкновенных дифференциальных уравнений. Обычно мы будем обозначать неизвестные функции, зависящие от переменной t, через x_1, x_2, x_3, ..., или через x, y, z, ... Штрихами мы будем обозначать производные по t.

Сосредоточим наше внимание на системах, в которых количество уравнений равно количеству неизвестных функций. Например, систему двух уравнений первого порядка относительно неизвестных функций x и y в общем виде можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} f(t, x, y, x', y') &= 0, \\ g(t, x, y, x', y') &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где функции f и g заданы. **Решением** этой системы на некотором интервале значений t называется пара функций $x(t)$, $y(t)$ от t, в результате подстановки которой в оба уравнения эти уравнения превращаются в тождества на этом интервале.

Приведем пример системы уравнений второго порядка. Для этого рассмотрим частицу массой m, которая движется в пространстве под действием силового поля $\mathbf{F}$, зависящего от времени t, координат $(x(t), y(t), z(t))$ частицы и ее скорости $(x'(t), y'(t), z'(t))$. Записывая второй закон Ньютона $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ в координатной форме, получим систему

$$\begin{aligned} mx'' &= F_1(t, x, y, z, x', y', z'), \\ my'' &= F_2(t, x, y, z, x', y', z'), \\ mz'' &= F_3(t, x, y, z, x', y', z') \end{aligned} \tag{2}$$

трех дифференциальных уравнений второго порядка относительно неизвестных функций x, y, z, зависящих от независимой переменной t. Три стоящих с правой стороны функции F_1, F_2, F_3 — компоненты векторнозначной функции $\mathbf{F}$.

Простейшие применения

Примеры 1–3 иллюстрируют, каким образом системы дифференциальных уравнений возникают в научных задачах.

Пример 1 Рассмотрим систему, состоящую из двух тел и двух пружин, изображенную на рис. 4.1.1, причем заданная внешняя сила $f(t)$ действует на тело массой m_2, находящееся справа. Обозначим через $x(t)$ смещение (вправо) тела массы m_1 от его статического положения равновесия (когда система не движется и находится в положении равновесия и, кроме того, $f(t) = 0$), а через $y(t)$ — смещение тела массой m_2 от его положения равновесия. Таким образом, если x и y равны нулю, пружины не являются ни сжатыми, ни растянутыми.

На рис. 4.1.1 первая пружина растянута на x единиц, а вторая на $y - x$ единиц. Применив второй закон Ньютона к двум "диаграммам свободных тел", изображенных на рис. 4.1.2, мы получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} m_1 x'' &= -k_1 x + k_2(y - x), \\ m_2 y'' &= -k_2(y - x) + f(t) \end{aligned} \tag{3}$$

с двумя неизвестными функциями $x(t)$ и $y(t)$ — смещениями тел; фактические смещения тел должны удовлетворять этой системе уравнений. Например, если $m_1 = 2, m_2 = 1, k_1 = 4, k_2 = 2$, а $f(t) = 40 \sin 3t$ в соответствующих физических единицах измерения, то система (3) сводится к

$$\begin{aligned} 2x'' &= -6x + 2y, \\ y'' &= 2x - 2y + 40 \sin 3t. \end{aligned} \tag{4}$$

■

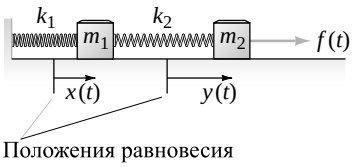


Рис. 4.1.1. Система тел и пружин из примера 1

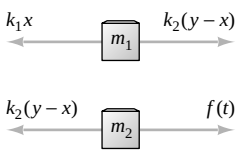


Рис. 4.1.2. "Диаграммы свободных тел" для системы из примера 1

Пример 2 Два резервуара с раствором соли соединены так, как показано на рис. 4.1.3. Резервуар 1 содержит $x(t)$ фунтов соли на 100 галлонов воды, а резервуар 2 — $y(t)$ фунтов соли на 200 галлонов воды. Соляной раствор в каждом

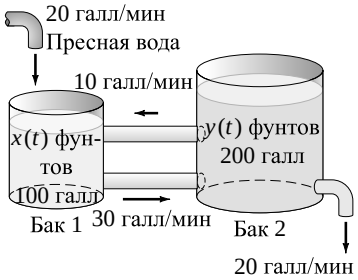


Рис. 4.1.3. Два резервуара с раствором соли из примера 2

из резервуаров тщательно перемешивается, и потому раствор можно считать абсолютно однородным. Раствор соли перекачивается из резервуара в резервуар, скорости указаны на рис. 4.1.3. Кроме того, в резервуар 1 со скоростью 20 галлонов/мин вливается пресная вода, а соляной раствор вытекает из резервуара 2 со скоростью 20 галлонов/мин (таким образом, объем раствора в резервуарах остается постоянным). Концентрации соли в резервуарах равны $x/100$ фунтов на галлон и $y/200$ фунтов на галлон соответственно. Вычислив скорости изменения количества соли в резервуарах, мы получим систему дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $x(t)$ и $y(t)$:

$$x' = -30 \cdot \frac{x}{100} + 10 \cdot \frac{y}{200} = -\frac{3}{10}x + \frac{1}{20}y,$$
$$y' = 30 \cdot \frac{x}{100} - 10 \cdot \frac{y}{200} - 20 \cdot \frac{y}{200} = \frac{3}{10}x - \frac{3}{20}y;$$

иными словами,

$$\begin{aligned} 20x' &= -6x + y, \\ 20y' &= 6x - 3y. \end{aligned} \tag{5}$$

■

Пример 3 Рассмотрим электрическую цепь, изображенную на рис. 4.1.4. Обозначим через $I_1(t)$ ток, проходящий в указанном направлении через дроссель (катушку индуктивности) L, а через $I_2(t)$ — ток, проходящий через резистор R_2. Ток, проходящий через резистор R_1 в указанном направлении, равен $I = I_1 - I_2$. Согласно закону Кирхгофа для напряжения (алгебраическая) сумма падений напряжений в любом замкнутом контуре этой цепи равна нулю. Как и в разделе 3.7, напряжения на элементах (всех трех типов) цепи приведены на рис. 4.1.5. Применив закон Кирхгофа к левому замкнутому контуру цепи, получим уравнение

$$2\frac{dI_1}{dt} + 50(I_1 - I_2) - 100 = 0, \tag{6}$$

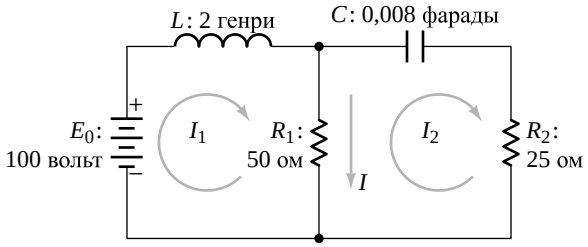


Рис. 4.1.4. Электрическая цепь из примера 3

Элемент цепи	Падение напряжения на элементе
Дроссель	$L\dfrac{dI}{dt}$
Резистор	RI
Конденсатор	$\dfrac{1}{C}Q$

Рис. 4.1.5. Падения напряжения на элементах электрической цепи

так как падение напряжения между отрицательным и положительным полюсами батареи равно -100. Для правого замкнутого контура цепи получим уравнение

$$125Q_2 + 25I_2 + 50(I_2 - I_1) = 0, \tag{7}$$

где $Q_2(t)$ — заряд конденсатора. Так как $dQ_2/dt = I_2$, дифференцируя обе части уравнения (7), получим уравнение

$$125I_2 + 75\frac{dI_2}{dt} - 50\frac{dI_1}{dt} = 0. \tag{8}$$

Разделив обе части уравнений (6) и (8) на 2 и -25 соответственно, получим систему

$$\begin{aligned} &\frac{dI_1}{dt} + 25I_1 - 25I_2 = 50, \\ &2\frac{dI_1}{dt} - 3\frac{dI_2}{dt} - 5I_2 = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

дифференциальных уравнений, которой должны удовлетворять токи $I_1(t)$ и $I_2(t)$. ■

Системы первого порядка

Предположим, что каждое дифференциальное уравнение системы можно разрешить относительно старшей производной (производной наивысшего порядка) зависимой переменной, входящей в данное уравнение. Иными словами, предположим, что в каждом уравнении старшая производная (т. е. производная наивысшего порядка) зависимых переменных, входящих в уравнение, может быть представлена в виде явной функции от t и производных зависимых переменных более низких порядков[1]. Например, в случае системы уравнений второго порядка наше предположение эквивалентно тому, что систему можно представить в виде

$$\begin{aligned} x_1'' &= f_1(t, x_1, x_2, x_1', x_2'), \\ x_2'' &= f_2(t, x_1, x_2, x_1', x_2'). \end{aligned} \tag{10}$$

[1] Системы такого вида называются *нормальными системами дифференциальных уравнений*, или просто *нормальными системами*. — *Примеч. ред.*

Как с практической, так и с теоретической точек зрения очень важно, что любая такая система высшего порядка может быть преобразована в эквивалентную систему уравнений *первого порядка*.

Чтобы описать выполнение такого преобразования, сначала рассмотрим "систему", состоящую из одного уравнения n-го порядка

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}). \tag{11}$$

Введем новые зависимые переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ следующим образом:

$$x_1 = x, \quad x_2 = x', \quad x_3 = x'', \quad \ldots, \quad x_n = x^{(n-1)}. \tag{12}$$

Заметим, что $x_1' = x' = x_2$, $x_2' = x'' = x_3$ и т. д. Поэтому, подставив равенства (12) в уравнение (11), получим систему

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= x_3, \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n, \\ x_n' &= f(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{13}$$

n уравнений *первого порядка*. Очевидно, что эта система эквивалентна исходному уравнению n-го порядка (11) в том смысле, что функция $x(t)$ будет решением уравнения (11) тогда и только тогда, когда функции $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$, определенные равенствами (12), удовлетворяют системе уравнений (13).

Пример 4 Уравнение третьего порядка

$$x^{(3)} + 3x'' + 2x' - 5x = \sin 2t$$

можно представить в виде (11), если ввести функцию

$$f(t, x, x', x'') = 5x - 2x' - 3x'' + \sin 2t.$$

Тогда, подставив

$$x_1 = x, \quad x_2 = x' = x_1', \quad x_3 = x'' = x_2',$$

получим систему

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= x_3, \\ x_3' &= 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 + \sin 2t \end{aligned}$$

трех уравнений первого порядка. ■

Может показаться, что система уравнений первого порядка, полученная в примере 4, не дает практически никаких преимуществ, так как можно использовать методы главы 3 для

решения исходного (линейного) уравнения третьего порядка. Но предположим, что нужно найти решение нелинейного уравнения

$$x'' = x^3 + (x')^3.$$

Для того чтобы найти решения такого уравнения ни один из известных нам (пока) методов не подходит. Но соответствующая система уравнений первого порядка имеет вид

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= (x_1)^3 + (x_2)^3. \end{aligned} \tag{14}$$

В разделе 4.3 мы увидим, что существуют достаточно эффективные численные методы для приближения решений по существу всех систем уравнений первого порядка. Поэтому в данном случае переход к системе уравнений первого порядка *будет* полезным. На практике большие системы дифференциальных уравнений высших порядков обычно решаются численными методами с помощью компьютеров. Поэтому первым шагом в поиске решения таких систем является преобразование такой системы в систему первого порядка, для решения которой можно применить существующие компьютерные программы.

Пример 5 Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} 2x'' &= -6x + 2y, \\ y'' &= 2x - 2y + 40\sin 3t \end{aligned} \tag{4}$$

уравнений второго порядка, полученную в примере 1. Преобразуем эту систему в эквивалентную систему уравнений первого порядка.

Решение Используя в качестве образца равенства (12), положим

$$x_1 = x, \quad x_2 = x' = x_1', \quad y_1 = y, \quad y_2 = y' = y_1'.$$

Тогда из системы (4) получим систему

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ 2x_2' &= -6x_1 + 2y_1, \\ y_1' &= y_2, \\ y_2' &= 2x_1 - 2y_1 + 40\sin 3t \end{aligned} \tag{15}$$

четырех дифференциальных уравнений первого порядка с зависимыми переменными (неизвестными функциями) x_1, x_2, y_1 и y_2. ■

Простые двумерные системы

Линейное уравнение второго порядка

$$x'' + px' + qx = 0 \tag{16}$$

с постоянными коэффициентами и независимой переменной t с помощью подстановок $x' = y, x'' = y'$ преобразуется в двумерную систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -qx - py. \end{aligned} \tag{17}$$

И наоборот, чтобы решить систему (17), достаточно решить уже хорошо знакомое нам уравнение (16).

Пример 6 Чтобы найти решение двумерной системы

$$\begin{aligned} x' &= -2y, \\ y' &= \tfrac{1}{2}x, \end{aligned} \tag{18}$$

сначала заметим, что

$$x'' = -2y' = -2\left(\tfrac{1}{2}x\right) = -x.$$

Отсюда получим одно уравнение второго порядка $x'' + x = 0$, общим решением которого является функция

$$x(t) = A\cos t + B\sin t = C\cos(t - \alpha),$$

где $A = C\cos\alpha$ и $B = C\sin\alpha$. Тогда

$$\begin{aligned} y(t) = -\tfrac{1}{2}x'(t) &= -\tfrac{1}{2}(-A\sin t + B\cos t) = \\ &= \tfrac{1}{2}C\sin(t - \alpha). \end{aligned}$$

Из тождества $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ следует, что для любого значения t точка $(x(t), y(t))$ лежит на эллипсе

$$\frac{x^2}{C^2} + \frac{y^2}{(C/2)^2} = 1,$$

полуоси которого равны C и $C/2$. На рис. 4.1.6 изображено несколько таких эллипсов на плоскости xy.

■

Решение $(x(t), y(t))$ двумерной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} x' &= f(t, x, y), \\ y' &= g(t, x, y) \end{aligned}$$

можно рассматривать как параметризацию **фазовой траектории** (называемой часто просто **траекторией**) системы на плоскости xy. Таким образом, траекториями системы (18) будут эллипсы, изображенные на рис. 4.1.6. Выбор начальной точки $(x(0), y(0))$ однозначно определяет, какую именно из траекторий параметризирует частное решение.

Рисунок, изображающий траектории системы на плоскости xy, называется *фазовым портретом*. Фазовый портрет не дает информации о том, как именно точка $(x(t), y(t))$ дви-

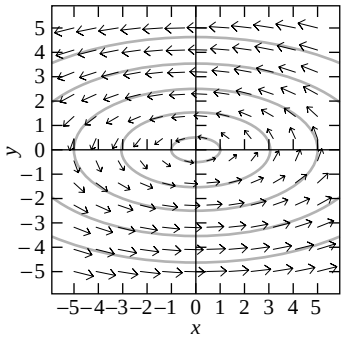


Рис. 4.1.6. Поле направлений и фазовые траектории системы $x' = -2y, y' = \frac{1}{2}x$ из примера 6

жется по своей траектории. Если функции f и g не зависят от независимой переменной t, можно построить **поле направлений**. Поле направлений обычно изображается стрелками, которые изображают векторы, компоненты которых пропорциональны производным $x' = f(x, y)$ и $y' = g(x, y)$. Так как вектор скорости движущейся точки $(x(t), y(t))$ равен $(x'(t), y'(t))$, поле направлений указывает направление, в котором движется точка по своей траектории. Например, поле направлений, изображенное на рис. 4.1.6 показывает, что каждая точка движется по своей эллиптической траектории против часовой стрелки. Дополнительная информация может быть получена с помощью построения отдельных графиков[2] $x(t)$ и $y(t)$, как функций, зависящих от переменной t.

[2] Используя механическое истолкование нормальной системы, говорят, что решению системы соответствует *движение точки* в пространстве, координатами которого служат независимое переменное (время) и искомые функции. Таким образом, в соответствии с механическим истолкованием нормальной системы, интегральная кривая называется *движением*. Само пространство, координатами которого служат искомые функции, называется *фазовым пространством*. Если фазовое пространство двумерно, оно, естественно, называется *фазовой плоскостью*. Кривая, описываемая в фазовом пространстве движущейся точкой, естественно, называется *траекторией*. Взаимосвязь между траекторией и движением состоит в том, что *траектория есть проекция движения* (оно расположено в пространстве, координатами которого служат независимое переменное и зависимые переменные) в пространство, координатами которого служат зависимые переменные. Решение (в механической интерпретации называемое *движением*) не только определяет траекторию как геометрическое место точек, но, определяя положение точки на траектории в любой момент времени, показывает, *как* происходит движение точки по траектории с течением времени. Это и неудивительно, поскольку движение (интегральная кривая) расположено в пространстве, размерность которого на единицу больше размерности пространства, в котором расположена траектория. Поскольку интегральная кривая (движение) и траектория расположены в пространствах разных размерностей (и сами имеют разные размерности, отличающиеся на единицу!), совершенно очевидно, что, строго говоря, траектория и интегральная кривая (движение) — совершенно разные вещи! Впрочем, строгостью этой некоторые англоязычные авторы иногда пренебрегают, поскольку траекторию (trajectory) часто называют также solution curve (что иногда подразумевает интегральную кривую). Но в любом конкретном случае из контекста понятно, что имеется в виду. Чтобы убедиться в этом, еще раз взгляните на рис. 4.1.6 и, закрыв подрисуночную подпись, ответьте, что там изображено — интегральные кривые или траектории. (*Подсказка*. Конечно, в переводе книги в подрисуночной подписи указано, что именно там изображено. Но даже в математических (не говоря уже о других, например, исторических) книгах не следует слепо доверять написанному. В данном случае такая проверка весьма полезна — она позволит лучше разобраться в понятиях интегральной кривой и траектории. Посчитайте размерности пространств, в которых лежат траектории и интегральные кривые. Размерность изображенных на рис. 4.1.6 объектов (плоских кривых — эллипсов) чуть-чуть маловата для интегральных кривых указанной там нормальной системы, не правда ли? Значит, там изображены ... (ответьте самостоятельно). Теперь откройте подрисуночную подпись и сверьте свой ответ.) — *Примеч. ред.*

Пример 6

Продолжение

Подставив начальные значения $x(0) = 2$, $y(0) = 0$ в общее решение уравнения из примера 6, получим

$$x(0) = A = 2, \quad y(0) = -\tfrac{1}{2}B = 0.$$

Значит, искомым частным решением является пара функций

$$x(t) = 2\cos t, \quad y(t) = \sin t.$$

Графики этих двух функций изображены на рис. 4.1.7. Мы видим, что сначала $x(t)$ убывает, а $y(t)$ возрастает. Отсюда следует, что с ростом t точка решения $(x(t), y(t))$ движется по траектории $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$ против часовой стрелки, как и указывает поле направлений, изображенное на рис. 4.1.6. ■

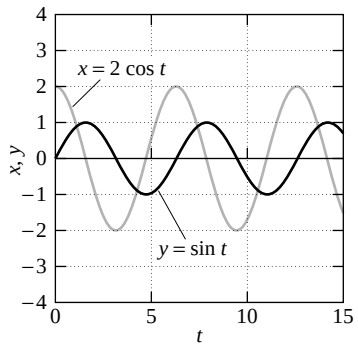


Рис. 4.1.7. Графики компонентов решения задачи Коши (задачи с начальными условиями) $x' = -2y$, $y' = \frac{1}{2}x$, $x(0) = 2$, $y(0) = 0$, т. е. графики функций x и y, являющихся компонентами параметрического представления фазовой траектории

Пример 7

Чтобы найти общее решение системы уравнений

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= 2x + y, \end{aligned} \tag{19}$$

вначале заметим, что

$$x'' = y' = 2x + y = x' + 2x.$$

Отсюда получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$x'' - x' - 2x = 0$$

с характеристическим уравнением

$$r^2 - r - 2 = (r + 1)(r - 2) = 0$$

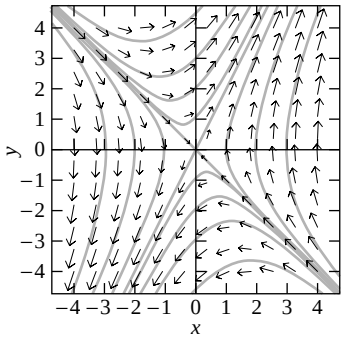


Рис. 4.1.8. Поле направлений и фазовые траектории системы $x' = y, y' = 2x + y$ из примера 7

и общим решением

$$x(t) = Ae^{-t} + Be^{2t}. \tag{20}$$

Тогда

$$y(t) = x'(t) = -Ae^{-t} + 2Be^{2t}. \tag{21}$$

Типичные траектории на фазовой плоскости системы уравнений (19), параметрическое задание которых определено уравнениями (20) и (21), изображены на рис. 4.1.8. Дальнейшее исследование этих траекторий выполняется в задаче 23. ■

Пример 8 Чтобы решить задачу Коши (задачу с начальными условиями)

$$\begin{aligned} x' &= -y, \\ y' &= (1{,}01)x - (0{,}2)y, \\ x(0) &= 0, \quad y(0) = -1, \end{aligned} \tag{22}$$

вначале заметим, что

$$x'' = -y' = -[(1{,}01)x - (0{,}2)y] = (-1{,}01)x - (0{,}2)x'.$$

Отсюда получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$x'' + (0{,}2)x' + (1{,}01)x = 0$$

с характеристическим уравнением

$$r^2 + (0{,}2)r + 1{,}01 = (r + 0{,}1)^2 + 1 = 0.$$

Корни характеристического уравнения равны $-0{,}1 \pm i$, а его общее решение представляет собой функцию

$$x(t) = e^{-t/10}(A\cos t + B\sin t).$$

Тогда $x(0) = A = 0$, откуда

$$x(t) = Be^{-t/10}\sin t,$$

$$y(t) = -x'(t) = \tfrac{1}{10}Be^{-t/10}\sin t - Be^{-t/10}\cos t.$$

Наконец, $y(0) = -B = -1$. Поэтому искомое решение системы (22) можно записать в виде

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-t/10}\sin t, \\ y(t) &= \tfrac{1}{10}e^{-t/10}(\sin t - 10\cos t). \end{aligned} \tag{23}$$

Эти уравнения задают параметрическое представление траектории, которая в данном примере представляет собой спираль, изображенную на рис. 4.1.9. Траектория стремится к началу координат при $t \to +\infty$. На рис. 4.1.10 изображены графики компонентов решения задачи Коши (задачи с начальными условиями), т. е. графики функций x и y, заданных равенствами (23); эти-то функции и являются компонентами параметрического представления фазовой траектории. ■

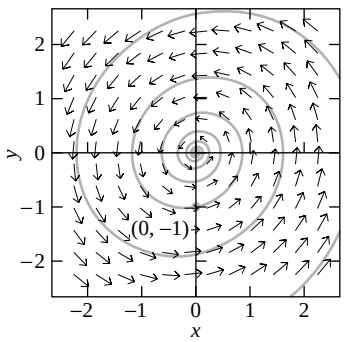


Рис. 4.1.9. Поле направлений и фазовая траектория системы $x' = -y$, $y' = (1{,}01)x - (0{,}2)y$ из примера 8

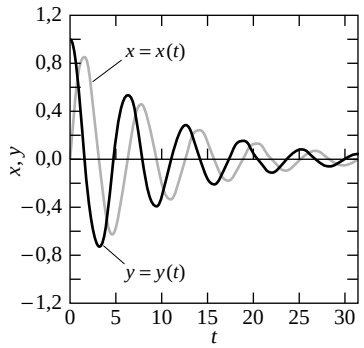


Рис. 4.1.10. Графики компонент решения задачи Коши (задачи с начальными условиями), т. е. графики функций x и y, являющихся компонентами параметрического представления фазовой траектории из примера 8

Почему у таких очень похожих систем дифференциальных уравнений в примерах 6–8 траектории, изображенные на рис. 4.1.6, 4.1.8 и 4.1.9, столь сильно отличаются? На этот вопрос мы дадим ответ при более глубоком изучении линейных систем в главе 5.

Линейные системы

На практике с помощью численных методов проще найти приближенное решение системы дифференциальных уравнений первого порядка, чем системы высшего порядка. Но не только этим практическим соображением определяются преимущества систем первого порядка. Общей теории систем дифференциальных уравнений, да и систематическим методам их решения, можно придать более простой и более краткий вид, если ограничиться системами

первого порядка. (Все необходимые результаты для систем высшего порядка легче получить, рассматривая их как сводящиеся к системам первого порядка.) Рассмотрим, например, *линейную* систему уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} x_1' &= p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2 + \cdots + p_{1n}x_n + f_1(t), \\ x_2' &= p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2 + \cdots + p_{2n}x_n + f_2(t), \\ &\vdots \\ x_n' &= p_{n1}(t)x_1 + p_{n2}(t)x_2 + \cdots + p_{nn}x_n + f_n(t). \end{aligned} \tag{24}$$

Эта система называется **однородной**, если все функции $f_1, f_2, \ldots, f_n$ тождественно равны нулю; в противном случае эта система называется **неоднородной.** Согласно этому определению, система (5) является однородной, а линейная система (15) — неоднородная. Система (14) не относится к линейным, так как правая часть второго уравнения не является линейной функцией относительно неизвестных функций x_1 и x_2.

Решением системы уравнений (24) назовем кортеж из n функций $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\ldots$, $x_n(t)$, которые (на некотором интервале) тождественно удовлетворяют каждому из уравнений (24)[3]. Мы увидим, что общая теория систем n линейных дифференциальных уравнений первого порядка во многом схожа с общей теорией одного линейного дифференциального уравнения n-го порядка. Теорема 1, доказанная в приложении, похожа на теорему 2 из раздела 3.2. В ней идет речь о том, что если коэффициенты системы (24) — функции p_{ij} и f_j, непрерывны, то система имеет единственное решение, удовлетворяющее начальным данным.

Теорема 1 Существование решения линейной системы и его единственность

Предположим, что функции $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{nn}$ и функции $f_1, f_2, \ldots, f_n$ непрерывны на открытом интервале I, содержащем точку a. Тогда для заданных n чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ система (24) имеет единственное на интервале I решение, которое удовлетворяет n начальным условиям

$$x_1(a) = b_1, \quad x_2(a) = b_2, \quad \ldots, \quad x_n(a) = b_n. \tag{25}$$

▲

Следовательно, для определения какого-нибудь конкретного решения системы n линейных дифференциальных уравнений первого порядка необходимы n начальных условий. Поэтому стоит ожидать, что общее решение такой системы будет включать n произвольных постоянных. Например, в примере 5 мы видели, что система линейных дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} 2x'' &= -6x + 2y, \\ y'' &= 2x - 2y + 40\sin 3t, \end{aligned}$$

которая описывает зависимость координат $x(t)$ и $y(t)$ из примера 1 от времени, эквивалентна системе *четырех* линейных уравнений первого порядка (15). Следовательно, для определения движения системы из двух тел в примере 1 необходимо иметь четыре начальных условия.

[3] Кортеж из n объектов математики часто называют *энкой*. Поэтому можно сказать, что ***решением*** *системы дифференциальных уравнений уравнений с n неизвестными функциями называется энка функций, которые (на некотором интервале) тождественно удовлетворяют каждому из уравнений данной системы. — Примеч. ред.*

Стандартные начальные условия: начальные положения тел $x(0)$ и $y(0)$ и начальные их скорости $x'(0)$ и $y'(0)$. Еще один пример: количество соли $x(t)$ и $y(t)$ в резервуарах в примере 2 описывается системой

$$\begin{aligned} 20x' &= -6x + y, \\ 20y' &= 6x - 3y \end{aligned}$$

двух линейных уравнений первого порядка. Поэтому для определения решения достаточно двух начальных значений $x(0)$ и $y(0)$. Чтобы определить необходимое (для единственности решения) количество начальных условий заданной системы высшего порядка, часто ее необходимо преобразовать ее в эквивалентную систему первого порядка. Согласно теореме 1, количество таких условий равно количеству уравнений в эквивалентной системе первого порядка.

4.1. Задачи

В задачах 1–10 преобразуйте данное дифференциальное уравнение или систему в эквивалентную систему дифференциальных уравнений первого порядка.

1. $x'' + 3x' + 7x = t^2$

2. $x^{(4)} + 6x'' - 3x' + x = \cos 3t$

3. $t^2x'' + tx' + (t^2 - 1)x = 0$

4. $t^3x^{(3)} - 2t^2x'' + 3tx' + 5x = \ln t$

5. $x^{(3)} = (x')^2 + \cos x$

6. $x'' - 5x + 4y = 0,\ y'' + 4x - 5y = 0$

7. $x'' = -\dfrac{kx}{(x^2 + y^2)^{3/2}},\ y'' = -\dfrac{ky}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$

8. $x'' + 3x' + 4x - 2y = 0,\ y'' + 2y' - 3x + y = \cos t$

9. $x'' = 3x - y + 2z,\ y'' = x + y - 4z,\ z'' = 5x - y - z$

10. $x'' = (1 - y)x,\ y'' = (1 - x)y$

В задачах 11–20, используя метод, примененный в примерах 6, 7 и 8, найдите общие решения систем. Если заданы начальные условия, найдите удовлетворяющее им частное решение. В каждой задаче с помощью компьютерной системы или графического калькулятора постройте поле направлений и типичные фазовые траектории данной системы.

11. $x' = y,\ y' = -x$

12. $x' = y,\ y' = x$

13. $x' = -2y,\ y' = 2x;\ x(0) = 1,\ y(0) = 0$

14. $x' = 10y,\ y' = -10x;\ x(0) = 3,\ y(0) = 4$

15. $x' = \frac{1}{2}y,\ y' = -8x$

16. $x' = 8y,\ y' = -2x$

17. $x' = y,\ y' = 6x - y;\ x(0) = 1,\ y(0) = 2$

18. $x' = -y,\ y' = 10x - 7y;\ x(0) = 2,\ y(0) = -7$

19. $x' = -y,\ y' = 13x + 4y;\ x(0) = 0,\ y(0) = 3$

20. $x' = y,\ y' = -9x + 6y$

21. **(a)** Вычислите $[x(t)]^2 + [y(t)]^2$ и покажите, что траектории системы $x' = y,\ y' = -x$ из задачи 11 представляют собой круги. **(b)** Вычислите $[x(t)]^2 - [y(t)]^2$, чтобы показать, что траектории системы $x' = y,\ y' = x$ из задачи 12 представляют собой гиперболы.

22. **(a)** Начав с общего решения системы $x' = -2y,\ y' = 2x$ из задачи 13, вычислите $x^2 + y^2$, чтобы показать, что траектории системы представляют собой окружности. **(b)** Аналогично покажите, что траектории системы $x' = \frac{1}{2}y,\ y' = -8x$ из задачи 15 представляют собой эллипсы, заданные уравнением $16x^2 + y^2 = C^2$.

23. Сначала выразите из уравнений (20) и (21) e^{-t} и e^{2t} через $x(t)$, $y(t)$ и постоянные A и B. Затем подставьте полученные выражения в тождество $(e^{2t})(e^{-t})^2 = 1$ и тем самым покажите, что траектории системы $x' = y$, $y' = 2x + y$ из примера 7 удовлетворяют уравнению в виде

$$4x^3 - 3xy^2 + y^3 = C \quad \text{(постоянная)}.$$

Затем покажите, что при значении постоянной $C = 0$ получаются прямые $y = -x$ и $y = 2x$, изображенные на рис. 4.1.8.

24. Выведите уравнения

$$\begin{aligned} m_1x_1'' &= -(k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2, \\ m_2x_2'' &= k_2x_1 - (k_2 + k_3)x_2 \end{aligned}$$

которым удовлетворяют смещения (от положения равновесия) двух тел, изображенных на рис. 4.1.11.

25. Две частицы, масса каждой из которых равна m, закреплены на струне, к которой приложено постоянное растягивающее усилие T (рис. 4.1.12). Предположим, что частицы колеблются вертикально (т. е. параллельно оси y), причем амплитуды колебаний настолько малы, что синусы изображенных углов приблизительно равны их тангенсам. Покажите, что смещения y_1 и y_2 удовлетворяют уравнениям

$$ky_1'' = -2y_1 + y_2, \quad ky_2'' = y_1 - 2y_2,$$

где $k = mL/T$.

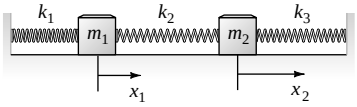


Рис. 4.1.11. Система тел из задачи 24

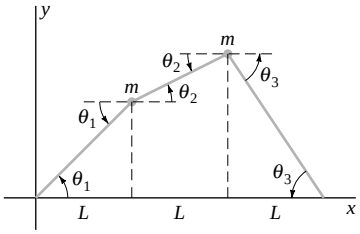


Рис. 4.1.12. Механическая система из задачи 25

26. Три бродильных чана на 100 галлонов соединены так, как показано на рис. 4.1.13. Смеси в каждом из резервуаров тщательно перемешиваются и потому всегда однородны. Обозначим через $x_i(t)$ количество (в фунтах) алкоголя в резервуаре T_i в момент времени t ($i = 1, 2, 3$). Предположим, что смесь циркулирует между резервуарами со скоростью 10 галлонов/мин. Выведите уравнения

$$\begin{aligned} 10x_1' &= -x_1 + x_3, \\ 10x_2' &= x_1 - x_2, \\ 10x_3' &= x_2 - x_3. \end{aligned}$$

27. Выведите систему дифференциальных уравнений первого порядка для токов в электрической цепи, показанной на рис. 4.1.14.

28. Решите задачу 27 при условии, что генератор заменен на батарею, электродвижущая сила которой равна 100 В, а катушка индуктивности заменена конденсатором емкостью 1 милифарада (мФ).

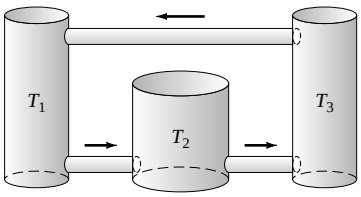


Рис. 4.1.13. Бродильные чаны из задачи 26

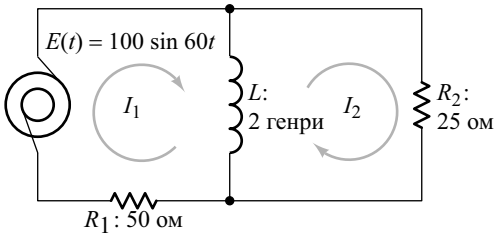


Рис. 4.1.14. Электрическая цепь из задачи 27

29. Частица массы m, координаты которой обозначены через $(x(t)$ и $y(t)$, движется в плоскости под действием силового поля, в котором сила направлена в начало координат, а ее величина равна $k/(x^2+y^2)$. (Таким образом, данное силовое поле является центрально-симметричным, причем центральная сила обратно пропорциональна квадрату расстояния между точкой и центром силы, который совпадает с началом координат.) Покажите, что

$$mx'' = -\frac{kx}{r^3} \quad \text{и} \quad my'' = -\frac{ky}{r^3},$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

30. Предположим, что снаряд массой m движется в вертикальной плоскости в атмосфере возле поверхности Земли под действием двух сил — направленной вниз силы тяготения, величина которой равна mg, и силы сопротивления $\mathbf{F}_R$ (направленной противоположно вектору скорости $\mathbf{v}$), величина которой равна kv^2 (где $v = |\mathbf{v}|$ — скорость снаряда; рис. 4.1.15). Покажите, что уравнения движения снаряда имеют вид

$$mx'' = -kvx', \quad my'' = -kvy' - mg,$$

где $v = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$.

31. Предположим, что частица, масса которой равна m, а электрический заряд равен q, движется в плоскости xy под действием магнитного поля $\mathbf{B} = B\mathbf{k}$ (это однородное поле, паралельное оси z), так что сила, действующая на частицу, равна $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$, где $\mathbf{v}$ — вектор скорости. Покажите, что уравнения движения частицы имеют вид

$$mx'' = +qBy', \quad my'' = -qBx'.$$

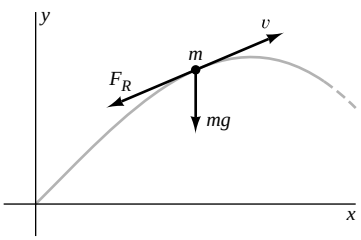


Рис. 4.1.15. Траектория снаряда из задачи 30

4.1. Приложение. Гравитация и движение планет, законы Кеплера

В начале XVII столетия[4] Иоганн Кеплер проанализировал результаты наблюдения движения планет, которые были выполнены датским астрономом Тихо Браге[5]. Кеплер сделал вывод, что движение планет вокруг Солнца определяется следующими тремя **законами движения планет**, которые теперь называются **законами Кеплера.**

1. Орбита каждой планеты представляет собой эллипс, в одном из фокусов которого находится Солнце.
2. Радиус-вектор, проведенный от Солнца к планете, описывает (заметает) площадь, пропорциональную времени движения планеты[6].
3. Квадрат периода обращения планеты вокруг Солнца пропорционален кубу большей полуоси ее эллиптической орбиты[7].

В своих *Началах* (*Principia Mathematica*, 1687) Исаак Ньютон вывел из законов Кеплера закон всемирного тяготения, согласно которому сила притяжения между двумя телами обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. В этом приложении мы покажем, как из закона тяготения, открытого Ньютоном, вывести первые два закона Кеплера[8].

Предположим, что Солнце расположено в начале координат плоскости движения планеты[9]. Запишем радиус-вектор планеты в виде

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}, \tag{1}$$

где $\mathbf{i} = (1, 0)$ и $\mathbf{j} = (0, 1)$ — единичные векторы осей x и y. Согласно закону всемирного тяготения, сила притяжения между двумя телами обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и потому (задача 29) вектор ускорения планеты $\mathbf{r}''(t)$ задается равенством

$$\mathbf{r}'' = -\frac{k\mathbf{r}}{r^3}, \tag{2}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ — расстояние от Солнца до планеты. Если полярные координаты планеты в момент времени t равны $(r(t), \theta(t))$, то единичный полярный радиус (единичный вектор, направленный вдоль радиус-вектора), и перпендикулярный ему единичный вектор (они

[4] Примерно в 1609–1619 годах. — *Примеч. ред.*

[5] Тихо Браге родился в Кнудструпе 14 декабря 1546 года, а умер 24 октября 1601 года в Праге. Значительную часть своей жизни посвятил определению положения звезд и планет. Его наблюдения были наиболее точными до изобретения телескопа. Кроме того, его работы способствовали развитию тригонометрии. — *Примеч. ред.*

[6] Иными словами, секторная скорость каждой планеты относительно Солнца постоянна. — *Примеч. ред.*

[7] Иными словами, отношение квадратов периодов обращения планет к кубам больших полуосей их орбит постоянно и для всех планет одинаково. — *Примеч. ред.*

[8] Задача, в которой требуется найти орбиты двух тел, силы взаимодействия между которыми определяются законом обратных квадратов, называется *задачей Кеплера*. Задачу Кеплера решил Исаак Ньютон. — *Примеч. ред.*

[9] Данное движение является плоским. Это следует из того, что движение происходит под действием центральной силы и *теоремы об изменении момента количества движения: производная по времени от момента*

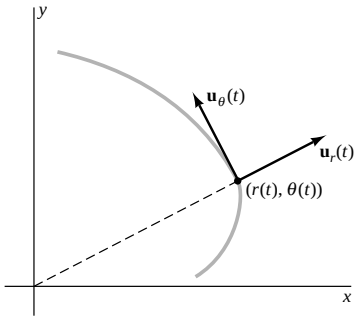


Рис. 4.1.16. Единичный полярный радиус $\mathbf{u}_r$ и перпендикулярный ему единичный вектор $\mathbf{u}_\theta$

изображены на рис. 4.1.16) соответственно равны[10]

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{i}\cos\theta + \mathbf{j}\sin\theta \quad \text{и} \quad \mathbf{u}_\theta = -\mathbf{i}\sin\theta + \mathbf{j}\cos\theta. \tag{3}$$

Единичный полярный радиус $\mathbf{u}_r$, приложенный к планете, всегда направлен от начала координат, а перпендикулярный ему единичный вектор $\mathbf{u}_\theta$ получается из него вращением $\mathbf{u}_r$ против часовой стрелки на 90°.

Шаг 1. Продифференцируйте уравнения (3) покомпонентно и покажите, что

$$\frac{d\mathbf{u}_r}{dt} = \mathbf{u}_\theta \frac{d\theta}{dt} \quad \text{и} \quad \frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} = -\mathbf{u}_r \frac{d\theta}{dt}. \tag{4}$$

количества движения материальной точки равна моменту равнодействующей сил, приложенных к ней. (Конечно, момент количества движения и момент равнодействующей нужно брать относительно одного и того же центра моментов.) Эта теорема часто называется также *теоремой моментов количества движения*. Теперь докажем, что *при движения материальной точки под действием центральной силы траектория движения есть плоская кривая.* Для этого удобно применить теорему об изменении момента количества движения, выбрав в качестве центра моментов центр отталкивания или притяжения — ту фиксированную точку пространства, через которую всегда проходит линия действия заданной центральной силы. Действительно, по теореме об изменении момента количества движения, производная по времени от момента количества движения материальной точки равна моменту равнодействующей сил, приложенных к ней. А момент равнодействующей сил, равный векторному произведению радиуса-вектора на силу, в случае центральной силы равен нулю, поскольку центральная сила коллинеарна радиусу-вектору. Значит, сам вектор момента количества движения $\mathbf{G}$ постоянен. (Равенство $\mathbf{G} = \mathbf{C} = \mathbf{const}$ в теоретической механике часто называется *первым интегралом дифференциальных уравнений движения в векторном виде*. Вектор $\mathbf{C}$ — постоянная интегрирования, определяемая из начальных условий.) Поскольку момент $\mathbf{G} = [m\mathbf{r}, \mathbf{v}]$ перпендикулярен радиус-вектору $\mathbf{r}$, то их скалярное произведение равно нулю. А так как скалярное произведение $\mathbf{Gr} = 0$, то движение происходит в плоскости, векторное уравнение которой имеет вид $\mathbf{Gr} = 0$. (Ведь $\mathbf{G} = \mathbf{C} = \mathbf{const}$, и, значит, $\mathbf{Gr} = 0$ — уравнение плоскости.) Эта плоскость проходит через начало координат, ее нормаль коллинеарна вектору $\mathbf{G}$, а сама плоскость перпендикулярна вектору $\mathbf{G}$. Утверждение доказано. Остается заметить еще, что координатная запись уравнения плоскости $\mathbf{Gr} = 0$ называется *вторым интегралом дифференциальных уравнений движения*. — *Примеч. ред.*

[10] Иными словами, векторы $\mathbf{u}_r$ и $\mathbf{u}_\theta$ являются ортами полярной системы координат. — *Примеч. ред.*

Шаг 2. Используя уравнения (4), продифференцируйте радиус-вектор планеты $\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r$ и таким образом покажите, что ее вектор скорости равен

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u}_r \frac{dr}{dt} + r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{u}_\theta. \tag{5}$$

Шаг 3. Продифференцировав еще раз, покажите, что вектор ускорения планеты $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ равен

$$\mathbf{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\mathbf{u}_r + \left[\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right]\mathbf{u}_\theta. \tag{6}$$

Шаг 4. Радиальные и перпендикулярные компоненты в правых частях уравнений (2) и (6) должны совпадать. Приравняв перпендикулярные к радиус-вектору компоненты, получим

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 0, \tag{7}$$

откуда следует, что

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = h, \tag{8}$$

где h — постоянная. Элемент площади в полярных координатах, который позволяет вычислить площадь $A(t)$, заштрихованную на рис. 4.1.17, равен $dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta$. Поэтому из уравнения (8) следует, что производная $A'(t)$ *постоянна*, а это и есть второй закон Кеплера[11].

Шаг 5. Приравняйте радиальные компоненты уравнений (2) и (6), а затем с помощью равенства (8), покажите, что расстояние планеты от начала координат (радиальная координатная функция) $r(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{k}{r^2}. \tag{9}$$

Шаг 6. Предположив, что уравнение орбиты можно записать в полярных координатах[12] в виде $r = r(\theta)$, используя цепное правило и уравнение (8), покажите, что если $r = 1/z$, то

$$\frac{dr}{dt} = -h\frac{dz}{d\theta}.$$

[11] Поскольку момент количества движения материальной точки равен удвоенной массе точки, умноженной на вектор секторной скорости, то из постоянства момента количества движения материальной точки (первый интеграл дифференциальных уравнений движения в векторном виде) следует постоянство вектора секторной скорости. А поскольку секторная скорость измеряется плоскостным элементом, заметаемым радиусом-вектором, то отсюда следует *теорема площадей: если материальная точка движется под действием центральной силы, то ее секторная скорость — постоянный вектор*. Вот эквивалентная формулировка этой теоремы: *при движении материальной точки под действием центральной силы ее радиус-вектор за любые одинаковые промежутки времени описывает одинаковые плоскостные элементы*. Второй закон Кеплера является частным случаем теоремы площадей. (Заметьте, что и первый, и второй интегралы дифференциальных уравнений движения были получены лишь в предположении, что на материальную точку действует центральная сила; конкретный вид этой силы при выводе интегралов не имеет значения.) — *Примеч. ред.*

[12] Мы уже вывели закон площадей $r^2\frac{d\theta}{dt} = h$. Поскольку полярный радиус положителен, то из закона площадей следует, что полярный угол изменяется монотонно, если $h \neq 0$. А тогда (по теореме о неявной функции) функция, выражающая зависимость полярного угла от времени, т. е. функция $\theta = \theta(t)$, имеет обратную функцию $t = t(\theta)$. Из этого немедленно следует, что траектория движения может быть представлена в полярных координатах уравнением вида $r = r(\theta)$. — *Примеч. ред.*

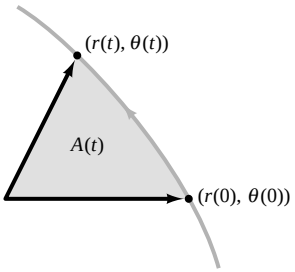


Рис. 4.1.17. Площадь, которую описывает (заметает) радиус-вектор

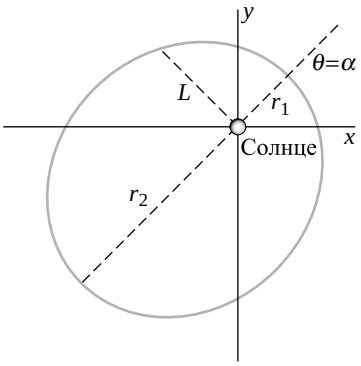


Рис. 4.1.18. Эллиптическая орбита

$$r = \frac{L}{1 + e\cos(\theta - \alpha)},$$

перигелий которой равен $r_1 = L/(1+e)$, а афелий — $r_2 = L/(1-e)$

Продифференцировавеще раз, с помощью уравнения (9) покажите, что функция $z(\theta) = 1/r(\theta)$ удовлетворяет уравнению второго порядка

$$\frac{d^2z}{d\theta^2} + z = \frac{k}{h^2}. \tag{10}$$

Шаг 7. Покажите, что уравнение (10) имеет общее решение

$$z(\theta) = A\sin\theta + B\cos\theta + \frac{k}{h^2}. \tag{11}$$

Шаг 8. Наконец, из уравнения (11) выведите, что $r(\theta) = 1/z(\theta)$ выражается формулой

$$r(\theta) = \frac{L}{1 + e\cos(\theta - \alpha)}, \tag{12}$$

где $e = Ch^2/k$, $C\cos\alpha = A$, $C\sin\alpha = B$ и $L = h^2/k$. График уравнения (12) в полярных координатах представляет собой коническое сечение, эксцентриситет которого равен e. Это коническое сечение с фокусом в начале координат является эллипсом при $0 \leqq e < 1$, параболой — при $e = 1$ и гиперболой — при $e > 1$. Орбиты планет расположены в ограниченной области (движения планет *финитны*) и, следовательно, являются эллипсами с эксцентриситетом $e < 1$. Как показано на рис. 4.1.18, большая ось эллипса лежит на прямой $\theta = \alpha$.

Шаг 9. Постройте несколько стандартных эллиптических орбит, заданных уравнением (12) при различных значениях эксцентриситета, размерах и ориентациях. Чтобы построить эллиптическую орбиту, эксцентриситет которой равен e, а половина фокального параметра — L (рис. 4.1.18), повернутую на угол α, можно воспользоваться ее параметрическим



Рис. 4.1.19. Форма орбиты кометы Галлея

заданием в прямоугольных декартовых координатах

$$x(t) = r(t)\cos t, \quad y(t) = r(t)\sin t, \quad 0 \leqq t \leqq 2\pi.$$

Эксцентриситет орбиты Земли приблизительно равен $e \approx 0{,}0167$, т. е. настолько близок к нулю, что орбита является практически круговой (но Солнце находится в фокусе, а не в центре), а значения эксцентриситетов орбит других планет варьируются от $0{,}0068$ — для Венеры и $0{,}0933$ — для Марса, до $0{,}2056$ — для Меркурия и $0{,}2486$ — для Плутона. Однако эксцентриситет орбит многих комет значительно больше. Например, эксцентриситет орбиты кометы Галлея $e \approx 0{,}97$ (рис. 4.1.19)[13].

4.2. Метод исключения

Самый простой подход к решению систем линейных дифференциальных уравнений состоит в исключении неизвестных функций с помощью сложения двух уравнений, предварительно умноженных на подходящие множители. Цель этой процедуры — последовательное исключение неизвестных функций до тех пор, пока не останется лишь одно уравнение, содержащее лишь одну неизвестную функцию. Это оставшееся уравнение обычно будет линейным уравнением высшего порядка и часто может быть решено методами, описанными в главе 3. После того как его решение найдено, другие неизвестные функции можно найти по очереди, используя либо первоначальные дифференциальные уравнения системы, либо полученные в процессе исключения неизвестных.

Метод исключения переменных для систем линейных дифференциальных уравнений аналогичен методу решения системы линейных алгебраических уравнений с помощью процесса исключения переменнных по одной до тех пор, пока не останется лишь одна неизвестная и одно уравнение. Он удобнее всего при решении достаточно малых систем: тех, которые состоят не более чем из двух-трех уравнений. Для таких систем метод исключения является простым и четким подходом, не требующим обширных предварительных знаний и громоздких вычислений. Но для больших систем дифференциальных уравнений, как и для теоретического изучения, более удобными являются матричные методы, рассматриваемые в главе 5.

Пример 1 Найдем частное решение системы

$$x' = 4x - 3y, \quad y' = 6x - 7y, \tag{1}$$

которое удовлетворяет начальным данным $x(0) = 2, y(0) = -1$.

[13] Изложенный выше метод решения задачи двух тел с физической точки зрения содержит некоторые упрощения. Не учитывается, например, притяжение Солнца планетой. С учетом этого притяжения задачу двух тел можно решить, сведя ее к только что решенной нами задаче о движении одного тела. Для этого необходимо рассматривать центр масс системы двух тел и их *приведенную массу*. — *Примеч. ред.*

Решение Решив второе уравнение системы (1) относительно x, получим

$$x = \tfrac{1}{6}y' + \tfrac{7}{6}y, \tag{2}$$

откуда

$$x' = \tfrac{1}{6}y'' + \tfrac{7}{6}y'. \tag{3}$$

Теперь подставим эти выражения для x и x' в первое уравнение системы (1); получим

$$\tfrac{1}{6}y'' + \tfrac{7}{6}y' = 4\left(\tfrac{1}{6}y' + \tfrac{7}{6}y\right) - 3y,$$

откуда после упрощения

$$y'' + 3y' - 10y = 0.$$

Характеристическое уравнение этого линейного дифференциального уравнения второго порядка имеет вид

$$r^2 + 3r - 10 = (r-2)(r+5) = 0,$$

так что общее решение дифференциального уравнения второго порядка представляет собой функцию

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-5t}. \tag{4}$$

Теперь, подставив (4) в (2), получим

$$x(t) = \tfrac{1}{6}\left(2c_1 e^{2t} - 5c_2 e^{-5t}\right) + \tfrac{7}{6}\left(c_1 e^{2t} + c_2 e^{-5t}\right);$$

иными словами,

$$x(t) = \tfrac{3}{2}c_1 e^{2t} + \tfrac{1}{3}c_2 e^{-5t}. \tag{5}$$

Равенства (4) и (5) задают общее решение системы (1).

Из заданных начальных условий следует, что

$$x(0) = \tfrac{3}{2}c_1 + \tfrac{1}{3}c_2 = 2$$

и что

$$y(0) = c_1 + c_2 = -1;$$

несложно решить эту систему уравнений и найти, что $c_1 = 2$ и $c_2 = -3$. Следовательно, искомое решение представляет собой пару функций

$$x(t) = 3e^{2t} - e^{-5t}, \quad y(t) = 2e^{2t} - 3e^{-5t}.$$

На рис. 4.2.1 изображены эта и другие фазовые траектории, параметрические уравнения которых суть $x(t) = \frac{3}{2}c_1 e^{2t} + \frac{1}{3}c_2 e^{-5t}$, $y(t) = c_1 e^{2t} + {} + c_2 e^{-5t}$ при различных значениях постоянных c_1 и c_2. Это два семейства кривых, которые напоминают гиперболы с одной и той же парой асимптот, пересекающихся под углом, отличным от прямого. ■

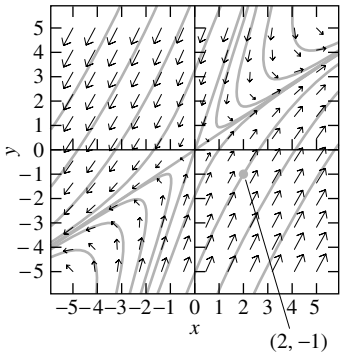


Рис. 4.2.1. Поле направлений и фазовые траектории системы $x' = 4x - 3y$, $y' = 6x - 7y$ из примера 1

Замечание. Общее решение, заданное равенствами (4) и (5), можно рассматривать, как пару или вектор $(x(t), y(t))$. Используя правило покоординатного сложения (и умножения на скаляр) векторов, можно записать общее решение (4) и (5) в виде

$$(x(t), y(t)) = \left(\tfrac{3}{2}c_1e^{2t} + \tfrac{1}{3}c_2e^{-5t}, c_1e^{2t} + c_2e^{-5t}\right) =$$
$$= c_1\left(\tfrac{3}{2}e^{2t}, e^{2t}\right) + c_2\left(\tfrac{1}{3}e^{-5t}, e^{-5t}\right).$$

Это выражение представляет общее решение системы (1) в виде линейной комбинации двух частных решений

$$(x_1, y_1) = \left(\tfrac{3}{2}e^{2t}, e^{2t}\right) \quad \text{и} \quad (x_2, y_2) = \left(\tfrac{1}{3}e^{-5t}, e^{-5t}\right). \qquad \blacksquare$$

Линейные операторы

В примере 1 с помощью специальной процедуры удалось исключить одну зависимую переменную, выразив ее через другую. Теперь опишем систематический метод исключения. Для этой цели удобнее всего воспользоваться операционной нотацией. **Линейным дифференциальным оператором** порядка n с *постоянными* коэффициентами называется оператор

$$L = a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1D + a_0, \tag{6}$$

где D обозначает операцию дифференцирования по независимой переменной t. Если L_1 и L_2 — два таких оператора, то их произведение L_1L_2 определяется следующим образом:

➤
$$L_1L_2[x] = L_1[L_2x]. \tag{7}$$

Например, если $L_1 = D + a$, а $L_2 = D + b$, то

$$L_1L_2[x] = (D + a)[(D + b)x] = D(Dx + bx) + a(Dx + bx) =$$
$$= [D^2 + (a + b)D + ab]x.$$

На этом примере видно, что два линейных дифференциальных оператора с постоянными коэффициентами можно перемножать так, как обычные многочлены относительно "переменной" D. Из коммутативности умножения многочленов следует, что

$$L_1L_2[x] = L_2L_1[x] \tag{8}$$

в случае, когда требуемые производные функции $x(t)$ существуют. Заметим, что, в отличие от операторов с постоянными коэффициентами, линейные операторы с переменными коэффициентами свойством коммутативности не обладают — см. задачи 21 и 22.

Любая система двух линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами может быть записана в виде

$$\begin{aligned} L_1x + L_2y &= f_1(t), \\ L_3x + L_4y &= f_2(t), \end{aligned} \tag{9}$$

где L_1, L_2, L_3 и L_4 — линейные дифференциальные операторы (возможно различных порядков), заданные равенствами типа (6), а $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — заданные функции. Например, систему дифференциальных уравнений (1) из примера 1 можно записать в виде

$$\begin{aligned} (D-4)x + \quad 3y &= 0, \\ -6x + (D+7)y &= 0, \end{aligned} \tag{10}$$

где $L_1 = D-4$, $L_2 = 3$, $L_3 = -6$ и $L_4 = D+7$.

Чтобы исключить зависимую переменную x из системы (9), подействуем оператором L_3 на первое уравнение и оператором L_1 — на второе. Тогда получим систему

$$\begin{aligned} L_3L_1x + L_3L_2y &= L_3f_1(t), \\ L_1L_3x + L_1L_4y &= L_1f_2(t). \end{aligned} \tag{11}$$

Вычитая первое уравнение от второго, получим следующее (единственное) уравнение

$$(L_1L_4 - L_2L_3)y = L_1f_2(t) - L_3f_1(t) \tag{12}$$

с одной зависимой переменной y. Решив это уравнение, получим функцию $y = y(t)$. Затем подставим ее в какое-либо из исходных уравнений (9), решив которое, получим $x = x(t)$.

В качестве альтернативы аналогичным образом можно исключить из исходной системы (9) зависимую переменную y. В этом случае мы получим уравнение

$$(L_1L_4 - L_2L_3)x = L_4f_1(t) - L_2f_2(t), \tag{13}$$

которое теперь можно решить относительно неизвестной функции $x = x(t)$.

Заметим, что в левой части обоих уравнений (12) и (13) появляется один и тот же оператор $L_1L_4 - L_2L_3$. Это **определитель-оператор**

$$\begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix} = L_1L_4 - L_2L_3 \tag{14}$$

системы (9). С помощью определителей уравнения (12) и (13) можно переписать так:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix} x &= \begin{vmatrix} f_1(t) & L_2 \\ f_2(t) & L_4 \end{vmatrix}, \\ \begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix} y &= \begin{vmatrix} L_1 & f_1(t) \\ L_3 & f_2(t) \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{15}$$

Важно отметить, что определители в правой части уравнений (15) выражаются с помощью операторов, действующих на функции. Уравнения (15) очень похожи на правило Крамера решения системы двух линейных уравнений от двух (алгебраических) переменных и поэтому их легко запомнить. Действительно, систему двух линейных дифференциальных уравнений можно решить либо только что описанным методом последовательного исключения переменных, либо с помощью непосредственного использования детерминантов в формулах (15). Второй способ особенно прост в случае, когда система однородна ($f_1(t) \equiv 0$ и $f_2(t) \equiv 0$), так как в этом случае правые части уравнений (12), (13) и (15) равны нулю.

Пример 2 Найдем общее решение системы

$$\begin{aligned} (D-4)x + \quad 3y &= 0, \\ -6x + (D+7)y &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Решение Определитель-оператор этой системы равен

$$(D-4)(D+7) - 3 \cdot (-6) = D^2 + 3D - 10. \tag{16}$$

Следовательно, уравнения (13) и (12) принимают вид

$$\begin{aligned} x'' + 3x' - 10x &= 0, \\ y'' + 3y' - 10y &= 0. \end{aligned}$$

Каждое из этих уравнений имеет характеристическое уравнение

$$r^2 + 3r - 10 = (r-2)(r+5) = 0,$$

откуда их (по отдельности) общие решения даются формулами

$$\begin{aligned} x(t) &= a_1 e^{2t} + a_2 e^{-5t}, \\ y(t) &= b_1 e^{2t} + b_2 e^{-5t}. \end{aligned} \tag{17}$$

Эти формулы содержат *четыре* произвольные постоянные a_1, a_2, b_1 и b_2. Но, согласно теореме 1 раздела 4.1, общее решение системы двух дифференциальных уравнений первого порядка должно содержать только две произвольные постоянные. Эту очевидную проблему следует немедленно разрешить.

Причина подобного явления проста: между этими четырьмя постоянными должны быть какие-то скрытые соотношения. Их можно обнаружить, подставив решения (17) в какое-либо из уравнений системы (10). Подставив в первое уравнение, получим

$$\begin{aligned} 0 &= x' - 4x + 3y = \\ &= (2a_1 e^{2t} - 5a_2 e^{-5t}) - 4(a_1 e^{2t} + a_2 e^{-5t}) + 3(b_1 e^{2t} + b_2 e^{-5t}); \end{aligned}$$

иными словами,

$$0 = (-2a_1 + 3b_1)e^{2t} + (-9a_2 + 3b_2)e^{-5t}.$$

Но функции e^{2t} и e^{-5t} линейно независимы, откуда $a_1 = \frac{3}{2}b_1$ и $a_2 = \frac{1}{3}b_2$. Следовательно, искомое общее решение имеет вид

$$x(t) = \tfrac{3}{2}b_1e^{2t} + \tfrac{1}{3}b_2e^{-5t}, \quad y(t) = b_1e^{2t} + b_2e^{-5t}.$$

Заметим, что полученный результат совпадает с общим решением (формулы (4) и (5)), полученным в примере 1 другим методом. ■

Как видно из примера 2, процедура исключения переменных обычно приводит к появлению лишних взаимно зависящих (а поэтому ненужных и нежелательных) произвольных постоянных. Они должны быть исключены с помощью подстановки полученных формул общего решения в одно или несколько исходных дифференциальных уравнений. Если определитель-оператор в формулах (15) *не равен тождественно нулю*, то количество независимых произвольных постоянных в решении системы (9) равно порядку определителя-оператора, т. е. его степени как многочлена от переменной D. (Доказательство этого факта приведено на с. 144–150 монографии Айнса по обыкновенным дифференциальным уравнениям, изданной в Нью-Йорке в 1956 году (E. L. Ince, *Ordinary Differential Equations*, New York: Dover, 1956).) Таким образом, общее решение системы (10) из примера 2 содержит две произвольные постоянные, так как его определитель-оператор $D^2 + 3D - 10$ имеет порядок 2.

Если определитель-оператор тождественно равен нулю, то система называется **вырожденной**. Вырожденная система либо не имеет решений, либо имеет бесконечно много решений. Например, уравнения

$$\begin{aligned} Dx - \ \ Dy &= 0, \\ 2Dx - 2Dy &= 1 \end{aligned}$$

составляют систему, определитель-оператор которой тождественно равен нулю. Конечно, эта система несовместна, и, следовательно, не имеет решений. Другой пример: уравнения

$$\begin{aligned} Dx + \ \ Dy &= \ \ t, \\ 2Dx + 2Dy &= 2t \end{aligned}$$

составляют систему, определитель-оператор которой также тождественно равен нулю. Очевидно, эти уравнения эквивалентны; любое из них является следствием другого и его можно считать избыточным (лишним). Поэтому *любую* непрерывно дифференцируемую функцию можно подставить вместо $x(t)$, а затем проинтегрировать полученное уравнение и таким образом получить $y(t)$. Грубо говоря, любая вырожденная система эквивалентна либо несовместной (переопределенной) системе, либо системе, содержащей избыточные уравнения (т. е. недоопределенной, поскольку число уравнений исходной системы равно числу неизвестных).

Хотя приведенные выше процедуры и результаты описаны для систем двух уравнений, их можно обобщить и на системы трех и больше уравнений. Для системы

$$\begin{aligned} L_{11}x + L_{12}y + L_{13}z &= f_1(t), \\ L_{21}x + L_{22}y + L_{23}z &= f_2(t), \\ L_{31}x + L_{32}y + L_{33}z &= f_3(t) \end{aligned} \tag{18}$$

трех линейных уравнений, неизвестная функция $x(t)$ удовлетворяет одному линейному уравнению

$$\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} f_1(t) & L_{12} & L_{13} \\ f_2(t) & L_{22} & L_{23} \\ f_3(t) & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix}. \tag{19}$$

Другие неизвестные функции $y = y(t)$ и $z = z(t)$ удовлетворяют аналогичным уравнениям. Однако для большей части систем более чем трех уравнений метод определителей-операторов слишком трудоемкий и поэтому на практике не применяется.

Механические колебания

Механическая система обычно колеблется (вибрирует, осциллирует) одним или несколькими способами. Методы, изложенные в этом разделе, можно использовать для анализа "собственных мод колебаний" данной механической системы. Проиллюстрируем этот подход на примере 3.

Пример 3 В примере 1 раздела 4.1 мы вывели уравнения

$$\begin{aligned} (D^2+3)x + \quad (-1)y &= 0, \\ -2x + (D^2+2)y &= 0, \end{aligned} \tag{20}$$

которым удовлетворяют смещения двух материальных точек на рис. 4.2.2. Здесь $f(t) \equiv 0$, так как мы предполагаем, что внешние силы на систему не действуют. Найдем общее решение системы (20).

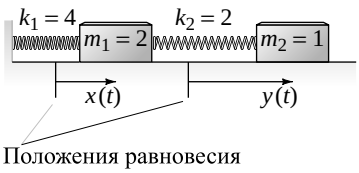


Рис. 4.2.2. Система из примера 3, состоящая из двух материальных точек, закрепленных на пружинах

Решение Определитель-оператор системы (20) равен

$$(D^2+3)(D^2+2) - (-1)(-2) = D^4 + 5D^2 + 4 = (D^2+1)(D^2+4).$$

Следовательно, $x(t)$ и $y(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} (D^2+1)(D^2+4)x &= 0, \\ (D^2+1)(D^2+4)y &= 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Корни характеристического уравнения $(r^2+1)(r^2+4)=0$ равны i, $-i$, $2i$ и $-2i$. Поэтому общие решения уравнений (21) имеют вид

$$\begin{aligned} x(t) &= a_1\cos t + a_2\sin t + b_1\cos 2t + b_2\sin 2t,\\ y(t) &= c_1\cos t + c_2\sin t + d_1\cos 2t + d_2\sin 2t. \end{aligned} \tag{22}$$

Поскольку определитель-оператор имеет порядок 4, общее решение должно содержать четыре (а не восемь) произвольных постоянных. Подставив значения $x(t)$ и $y(t)$ из равенств (22) в первое уравнение системы (20), получим

$$\begin{aligned} 0 = x'' + 3x - y = \\ = (-a_1\cos t - a_2\sin t - 4b_1\cos 2t - 4b_2\sin 2t) + \\ + 3(a_1\cos t + a_2\sin t + b_1\cos 2t + b_2\sin 2t) - \\ - (c_1\sin t + c_2\sin t + d_1\cos 2t + d_2\sin 2t); \end{aligned}$$

отсюда

$$\begin{aligned} 0 = (2a_1 - c_1)\cos t + (2a_2 - c_2)\sin t + \\ + (-b_1 - d_1)\cos 2t + (-b_2 - d_2)\sin 2t. \end{aligned}$$

Поскольку функции $\cos t$, $\cos 2t$, $\sin t$ и $\sin 2t$ линейно независимы, коэффициенты при них в последнем равенстве равны нулю. Следовательно,

$$c_1 = 2a_1, \quad c_2 = 2a_2, \quad d_1 = -b_1 \quad \text{и} \quad d_2 = -b_2.$$

Отсюда следует, что искомым общим решением системы (20) будут функции

$$\begin{aligned} x(t) &= \ a_1\cos t + \ a_2\sin t + b_1\cos 2t + b_2\sin 2t\ ,\\ y(t) &= 2a_1\cos t + 2a_2\sin t - b_1\cos 2t - b_2\sin 2t\ . \end{aligned} \tag{23}$$

■

Уравнения (23) описывают **свободные колебания** механической системы, состоящей из материальной точки, закрепленной на пружине (эта система изображена на рис. 4.2.2), т. е. движение рассматриваемой системы *при отсутствии* внешних сил. Для определения значений a_1, a_2, b_1 и b_2 необходимы четыре начальных условия (обычно это начальные координаты и скорости). Выражение

$$\begin{aligned} (x(t), y(t)) = a_1(\cos t, 2\cos t) + a_2(\sin t, 2\sin t) + \\ + b_1(\cos 2t, -\cos 2t) + b_2(\sin 2t, -\sin 2t), \end{aligned} \tag{24}$$

представляющее собой линейную комбинацию частных решений, как раз и есть общее решение системы дифференциальных уравнений (20). Более того, первые два из этих частных решений (как и два последующих) описывают сходные с физической точки зрения колебания тел.

Действительно, с помощью обычных тригонометрических преобразований можем записать

$$a_1 \cos t + \ a_2 \sin t = \ A\cos(t-\alpha),$$
$$2a_1 \cos t + 2a_2 \sin t = 2A\cos(t-\alpha)$$

и

$$b_1 \cos 2t + b_2 \sin 2t = \ B\cos(2t-\beta),$$
$$-b_1 \cos 2t - b_2 \sin 2t = -B\cos(2t-\beta)$$

где $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, $\operatorname{tg}\alpha = a_2/a_1$, $B = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$ и $\operatorname{tg}\beta = b_2/b_1$. Тогда уравнение (24) примет вид

$$(x, y) = A(x_1, y_1) + B(x_2, y_2), \tag{25}$$

где частные решения

$$(x_1(t), y_1(t)) = (\cos(t-\alpha), 2\cos(t-\alpha)) \tag{26}$$

и

$$(x_2(t), y_2(t)) = (\cos(2t-\beta), -\cos(2t-\beta)) \tag{27}$$

описывают две **собственные моды колебаний** системы, состоящей из материальной точки, закрепленной на пружине. Более того, благодаря им обнаруживаются две (круговые, или циклические) **собственные частоты** $\omega_1 = 1$ и $\omega_2 = 2$.

Линейная комбинация в формуле (25) отображает произвольные свободные колебания системы, состоящей из материальной точки, закрепленной на пружине, как суперпозицию ее двух собственных мод колебаний с постоянными A, α, B и β, которые определяются начальными условиями. На рис. 4.2.3 (при $\alpha = 0$) изображена собственная мода (x_1, y_1), заданная формулой (26), при которой две материальные точки движутся синхронно в одном и том же направлении с одинаковой частотой колебаний $\omega_1 = 1$, но амплитуда тела массой m_2 в два раза больше, чем тела массой m_1 (так как $y_1 = 2x_1$). На рис. 4.2.4 (при $\beta = 0$) изображена собственная мода (x_2, y_2), заданная формулой (27), при которой две материальные точки движутся синхронно в противоположных направлениях с одинаковой частотой колебаний $\omega_2 = 2$, причем амплитуды колебаний равны (так как $y_2 = -x_2$).

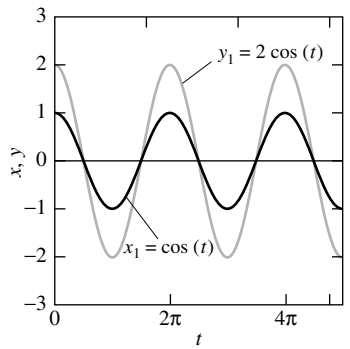


Рис. 4.2.3. Два тела движутся в одинаковых направлениях, каждое с частотой $\omega_1 = 1$

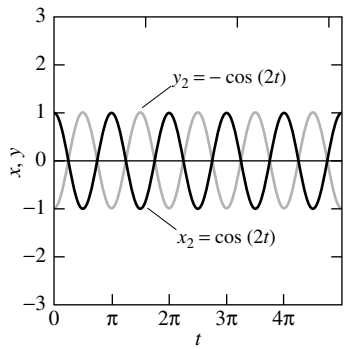


Рис. 4.2.4. Два тела движутся в противоположных направлениях с частотой $\omega_2 = 2$

4.2. Задачи

В задачах 1–20 найдите общие решения данных систем линейных уравнений. Если заданы начальные условия, найдите удовлетворяющее им частное решение. В задачах 1–6 с помощью компьютерной системы или графического калькулятора постройте поле направлений и некоторые фазовые траектории данной системы.

1. $x' = -x + 3y,\ y' = 2y$

2. $x' = x - 2y,\ y' = 2x - 3y$

3. $x' = -3x + 2y,\ y' = -3x + 4y;\ x(0) = 0,\ y(0) = 2$

4. $x' = 3x - y,\ y' = 5x - 3y;\ x(0) = 1,\ y(0) = -1$

5. $x' = -3x - 4y,\ y' = 2x + y$

6. $x' = x + 9y,\ y' = -2x - 5y;\ x(0) = 3,\ y(0) = 2$

7. $x' = 4x + y + 2t,\ y' = -2x + y$

8. $x' = 2x + y,\ y' = x + 2y - e^{2t}$

9. $x' = 2x - 3y + 2\sin 2t,\ y' = x - 2y - \cos 2t$

10. $x' + 2y' = 4x + 5y,\ 2x' - y' = 3x;\ x(0) = 1,\ y(0) = -1$

11. $2y' - x' = x + 3y + e^t,\ 3x' - 4y' = x - 15y + e^{-t}$

12. $x'' = 6x + 2y,\ y'' = 3x + 7y$

13. $x'' = -5x + 2y,\ y'' = 2x - 8y$

14. $x'' = -4x + \sin t,\ y'' = 4x - 8y$

15. $x'' - 3y' - 2x = 0,\ y'' + 3x' - 2y = 0$

16. $x'' + 13y' - 4x = 6\sin t,\ y'' - 2x' - 9y = 0$

17. $x'' + y'' - 3x' - y' - 2x + 2y = 0,\ 2x'' + 3y'' - 9x' - 2y' - 4x + 6y = 0$

18. $x' = x + 2y + z,\ y' = 6x - y,\ z' = -x - 2y - z$

19. $x' = 4x - 2y,\ y' = -4x + 4y - 2z,\ z' = -4y + 4z$

20. $x' = y + z + e^{-t},\ y' = x + z,\ z' = x + y$ (*Указание*. Решите характеристическое уравнение методом подбора корней.)

21. Пусть $L_1 = a_1D^2 + b_1D + C_1$ и $L_2 = a_2D^2 + b_2D + c_2$, причем все коэффициенты постоянны, а функция $x(t)$ дважды дифференцируема. Проверьте, что $L_1L_2x = L_2L_1x$.

22. Предположим, что $L_1x = tDx + x$ и что $L_2x = Dx + tx$. Покажите, что $L_1L_2x \neq L_2L_1x$, т. е. линейные операторы с *переменными* коэффициентами в общем случае не перестановочны.

В задачах 23–25 покажите, что данные системы являются вырожденными. В каждой задаче определите (попытавшись решить систему), имеет ли данная система бесконечно много решений или не имеет их вообще.

23. $(D + 2)x + (D + 2)y = e^{-3t},$
$(D + 3)x + (D + 3)y = e^{-2t}$

24. $(D + 2)x + (D + 2)y = t,$
$(D + 3)x + (D + 3)y = t^2$

25. $(D^2 + 5D + 6)x + D(D + 2)y = 0,$
$(D + 3)x + Dy = 0$

В задачах 26–29 сначала вычислите определитель-оператор, а затем попытайтесь решить данную систему, чтобы определить количество произвольных постоянных, которые содержит общее решение.

26. $(D^2 + 1)x + D^2y = 2e^{-t},$
$(D^2 - 1)x + D^2y = 0$

27. $(D^2 + 1)x + (D^2 + 2)y = 2e^{-t},$
$(D^2 - 1)x + D^2y = 0$

28. $(D^2 + D)x + D^2y = 2e^{-t},$
$(D^2 - 1)x + (D^2 - D)y = 0$

29. $(D^2 + 1)x - D^2y = 2e^{-t},$
$(D^2 - 1)x + D^2y = 0$

30. Предположим, что в начальный момент времени $t = 0$ концентрация соли в обоих резервуарах из примера 2 раздела 4.1 равна 0,5 фунтов/галлон. Решив систему (5), приведенную в разделе 4.1, определите количества соли $x(t)$ и $y(t)$ в резервуарах в момент времени t.

31. Предположим, что электрическая цепь из примера 3 раздела 4.1 первоначально разомкнута, т. е. ток по ней не течет. Пусть ее замыкают в момент времени $t = 0$. Решив систему (9), приведенную в разделе 4.1, найдите $I_1(t)$ и $I_2(t)$.

32. Решите задачу 31 для электрической цепи из задачи 27 раздела 4.1.

33. Решите задачу 31 для электрической цепи из задачи 28 раздела 4.1. Пусть также $I_1(0) = 2$ и $Q(0) = 0$, т. е. в момент времени $t = 0$ конденсатор не заряжен.

34. Три рассольных бака объемом по 100 галлонов соединены так, как изображено на рис. 4.1.13 раздела 4.1. Предположим, что в первом из баков содержится 100 фунтов соли, а два других бака заполнены пресной водой. Найдите количества соли в каждом из трех баков в момент времени t. (*Указание*. Рассмотрите уравнения, выведенные в задаче 26 раздела 4.1.)

35. В задаче 31 раздела 4.1 вы вывели уравнения движения частицы массой m с электрическим зарядом q в однородном магнитном поле $\mathbf{B} = B\mathbf{k}$:

$$mx'' = qBy', \quad my'' = -qBx'.$$

Пусть заданы начальные условия $x(0) = r_0$, $y(0) = 0$, $x'(0) = 0$ и $y'(0) = -\omega r_0$, где $\omega = qB/m$. Покажите, что траектория движения частицы представляет собой окружность радиусом r_0.

36. Пусть на заряженную частицу из задачи 35, которая движется со скоростью $\mathbf{v}$, кроме магнитного поля $\mathbf{B} = B\mathbf{k}$ действует еще и однородное электрическое поле $\mathbf{E} = E\mathbf{i}$. Тогда на частицу действует сила $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Предположим, что в начальный момент времени частица покоится в начале координат. Покажите, что ее траектория представляет собой циклоиду

$$x = a(1 - \cos \omega t), \quad y = -a(\omega t - \sin \omega t),$$

где $a = E/(\omega B)$ и $\omega = qB/m$. График такой циклоиды изображен на рис. 4.2.5.

37. Предположим, что в системе из примера 3, состоящей из материальных точек, закрепленных на пружинах, $m_1 = 2$, $m_2 = 0{,}5$, $k_1 = 75$ и $k_2 = 25$. **(a)** Найдите общее решение уравнений движения системы. В частности, покажите, что ее собственные частоты равны $\omega_1 = 5$ и $\omega_2 = 5\sqrt{3}$. **(b)** Опишите собственные моды колебаний системы.

38. Рассмотрим систему, состоящую из двух тел и трех пружин, которая изображена на рис. 4.2.6. Выведите уравнения движения этой системы:

$$\begin{aligned} m_1x'' &= -(k_1 + k_2)x + k_2y \\ m_2y'' &= k_2x - (k_2 + k_3)y. \end{aligned}$$

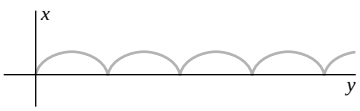


Рис. 4.2.5. Траектория движения частицы из задачи 36 представляет собой циклоиду

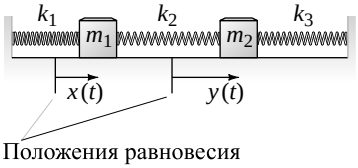


Рис. 4.2.6. Механическая система из задачи 38

В задачах 39–46 найдите общее решение системы из задачи 38 при заданных массах материальных точек и жесткостях пружин. Найдите собственные частоты механической системы и опишите ее собственнные моды колебаний. Используя компьютерную систему или графический калькулятор, проиллюстрируйте графически две собственные моды (как на рис. 4.2.3 и 4.2.4).

39. $m_1 = 4,\ m_2 = 2,\ k_1 = 8,\ k_2 = 4,\ k_3 = 0$ **40.** $m_1 = 2,\ m_2 = 1,\ k_1 = 100,\ k_2 = 50,\ k_3 = 0$

41. $m_1 = 1,\ m_2 = 1,\ k_1 = 1,\ k_2 = 4,\ k_3 = 1$ **42.** $m_1 = 1,\ m_2 = 2,\ k_1 = 1,\ k_2 = 2,\ k_3 = 2$

43. $m_1 = 1,\ m_2 = 1,\ k_1 = 1,\ k_2 = 2,\ k_3 = 1$ **44.** $m_1 = 1,\ m_2 = 1,\ k_1 = 2,\ k_2 = 1,\ k_3 = 2$

45. $m_1 = 1,\ m_2 = 2,\ k_1 = 2,\ k_2 = 4,\ k_3 = 4$ **46.** $m_1 = 1,\ m_2 = 1,\ k_1 = 4,\ k_2 = 6,\ k_3 = 4$

47. **(a)** Для системы, изображенной на рис. 4.2.7, выведите систему уравнений движения

$$\begin{aligned} mx'' &= -2kx + ky \\ my'' &= kx - 2ky + kz \\ mz'' &= ky - 2kz. \end{aligned}$$

(b) Предположим, что $m = k = 1$. Покажите, что собственные частоты колебаний системы

$$\omega_1 = \sqrt{2},\ \omega_2 = \sqrt{2 - \sqrt{2}},\ \text{и}\ \omega_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

48. Предположим, что частица движется в плоскости, причем ее траектория $(x(t), y(t))$ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений с начальными условиями

$$\begin{aligned} &x'' - 2y' + 3x = 0, \\ &y'' + 2x' + 3y = 0; \\ &x(0) = 4, \quad y(0) = x'(0) = y'(0) = 0. \end{aligned}$$

Решите эту задачу. У вас должно получиться решение

$$\begin{aligned} x(t) &= 3\cos t + \cos 3t, \\ y(t) &= 3\sin t - \sin 3t. \end{aligned}$$

Проверьте, что эти уравнения задают *гипоциклоиду*, — кривую, которую рисует точка $P(x, y)$ окружности радиуса $b = 1$, которая катится без скольжения по неподвижной окружности радиуса $a = 4$ внутри ее. Если в момент времени $t = 0$ точка P начинает свое движение из точки $A(a, 0)$, то в качестве параметра t можно взять угол AOC, изображенный на рис. 4.2.8.

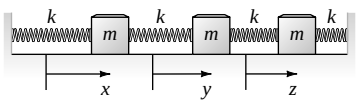


Рис. 4.2.7. Механическая система из задачи 47

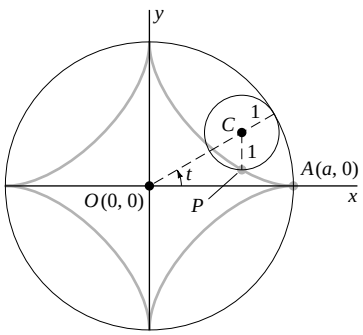


Рис. 4.2.8. Гипоциклоида из задачи 48

4.2. Приложение. Решение систем с помощью компьютерной алгебры

Системы компьютерной алгебры можно использовать не только для решения отдельных дифференциальных уравнений, но и для решения систем дифференциальных уравнений. Рассмотрим, например, систему

$$\frac{dx}{dt} = 4x - 3y, \quad \frac{dy}{dt} = 6x - 7y \tag{1}$$

из примера 1. Команда *Maple*

```
dsolve({diff(x(t),t) = 4*x(t) - 3*y(t),
        diff(y(t),t) = 6*x(t) - 7*y(t)}, {x(t),y(t)});
```

дает результат

$$\begin{aligned} x(t) &= \tfrac{1}{7}(3a_1 - 2a_2)e^{-5t} + \tfrac{1}{7}(-3a_1 + 9a_2)e^{2t}, \\ y(t) &= \tfrac{1}{7}(9a_1 - 6a_2)e^{-5t} + \tfrac{1}{7}(-2a_1 + 6a_2)e^{2t} \end{aligned} \tag{2}$$

(после небольших упрощений), а команда системы *Mathematica*

```
DSolve[ {x'[t] == 4 x[t] - 3 y[t],
         y'[t] == 6 x[t] - 7 y[t]}, {x[t],y[t]}, t ]
```

дает результат

$$x(t) = b_1 e^{-5t} + 3b_2 e^{2t}, \quad y(t) = 3b_1 e^{-5t} + 2b_2 e^{2t}. \tag{3}$$

Очевидно ли вам, что общие решения (2) и (3) эквивалентны между собой и эквивалентны общему решению

$$x(t) = \tfrac{3}{2}c_1 e^{2t} + \tfrac{1}{3}c_2 e^{-5t}, \quad y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-5t}, \tag{4}$$

которое ранее было найдено в тексте? Каковы соотношения между постоянными a_1, a_2 в общем решении (2), постоянными b_1, b_2 в общем решении (3) и постоянными c_1, c_2 в общем решении (4)?

Теперь рассмотрим задачу Коши (задачу с начальными условиями)

$$\begin{aligned} x'' &= -3x + y, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 6, \\ y'' &= 2x - 2y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 6 \end{aligned} \tag{5}$$

для системы из примера 3, состоящей из тел, закрепленных на пружинах. Тогда команда *Maple*

```
dsolve({diff(x(t),t,t) = -3*x(t) + y(t),
        diff(y(t),t,t) = 2*x(t) - 2*y(t),
        x(0) = 0, y(0) = 0, D(x)(0) = 6, D(y)(0) = 6},
        {x(t),y(t)});
```

и команда системы *Mathematica*

```
DSolve[{x''[t] == -3 x[t] + y[t],
        y''[t] == 2 x[t] - 2 y[t],
```

```
x[0] == 0, y[0] == 0, x'[0] == 6, y'[0] == 6},
{x[t], y[t]}, t ] // ExpToTrig // Simplify
```

дадут один и тот же результат:

$$x(t) = 4\sin t + \sin 2t, \quad y(t) = 8\sin t - \sin 2t, \tag{6}$$

в котором без труда можно узнать линейную комбинацию

- колебаний с частотой 1, при которых два тела движутся синхронно, причем амплитуда колебаний второго тела в два раза больше, чем у первого и
- колебаний с частотой 2, при которых два тела движутся в противоположных направлениях, причем амплитуды колебаний равны.

Попробуйте аналогичным образом применить доступную вам систему компьютерной алгебры для решения задач 1–20 и 39–46 из этого раздела. В задачах 39–46, если хотите, можете также найти частные решения, удовлетворяющие заданным начальным условиям.

4.3. Численные методы решения систем

Теперь рассмотрим численные методы для нахождения приближенных решений систем дифференциальных уравнений. Наша цель — применить методы из разделов 2.4–2.6 к задаче Коши (задаче с начальными условиями) вида

➤
$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{1}$$

для системы m дифференциальных уравнений первого порядка. В системе (1) t — скаляр, а

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \quad \text{и} \quad \mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$$

— векторнозначные функции. Если координатные функции $\mathbf{f}$ и все их частные производные непрерывны в некоторой окрестности точки $(t_0, \mathbf{x}_0)$, то, согласно теоремам 3 и 4 из приложения, на некотором подынтервале [оси t], содержащем точку t_0, существует и единственно решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ системы (1). Таким образом, мы можем приступить к рассмотрению следующей проблемы: найти численное приближение этого решения.

Выберем величину шага h. Мы хотим найти приближенные значения функции $\mathbf{x}(t)$ в точках $t_1, t_2, t_3, \ldots$, где $t_{n+1} = t_n + h$ для $n \geqq 0$. Предположим, что мы уже вычислили *приближения*

$$\mathbf{x}_1, \quad \mathbf{x}_2, \quad \mathbf{x}_3, \quad \ldots, \quad \mathbf{x}_n$$

к *точным значениям*

$$\mathbf{x}(t_1), \quad \mathbf{x}(t_2), \quad \mathbf{x}(t_3), \quad \ldots, \quad \mathbf{x}(t_n)$$

точного решения системы (1). Тогда, с помощью одного из методов, приведенных в разделах 2.4–2.6, можно сделать шаг от $\mathbf{x}_n$ к следующему приближенному значению $\mathbf{x}_{n+1} \approx \mathbf{x}(t_{n+1})$. По существу нужно только записать итерационную формулу для выбранного метода в векторном виде.

Методы Эйлера для систем

Например, итерационная формула метода Эйлера в случае системы дифференциальных уравнений имеет вид

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_n). \tag{2}$$

В случае пары дифференциальных уравнений первого порядка (т. е. в случае $m = 2$), мы пишем

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}.$$

В этом случае задача Коши (задача с начальными условиями) (1) примет вид

$$\begin{aligned} x' &= f(t, x, y), \quad & x(t_0) &= x_0, \\ y' &= g(t, x, y), \quad & y(t_0) &= y_0, \end{aligned} \tag{3}$$

а скалярные компоненты векторной формулы (2) будут иметь вид

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + hf(t_n, x_n, y_n), \\ y_{n+1} &= y_n + hg(t_n, x_n, y_n). \end{aligned} \tag{4}$$

Заметим, что каждая итерационная формула в (4) имеет тот же вид, что в одномерном методе Эйлера, но теперь в первую формулу (для вычисления x_{n+1}) входит y_n в качестве параметра, во вторую (для вычисления y_{n+1}) — x_n. Все остальные методы из разделов 2.4–2.6 на случай системы (3) обобщаются по такому же образцу.

Усовершенствованный метод Эйлера заключается в том, что сначала вычисляется прогноз

$$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h\mathbf{f}(t_n, \mathbf{x}_n), \tag{5}$$

а затем поправка

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \frac{h}{2}[\mathbf{f}(t_n, \mathbf{x}_n) + \mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{u}_{n+1})]. \tag{6}$$

В случае двумерных задач Коши (задач с начальными условиями) (3), скалярные компоненты в формулах (5) и (6) имеют вид

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= x_n + hf(t_n, x_n, y_n), \\ v_{n+1} &= y_n + hg(t_n, x_n, y_n) \end{aligned} \tag{7}$$

и

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{2}[f(t_n, x_n, y_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1}, v_{n+1})], \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}[g(t_n, x_n, y_n) + g(t_{n+1}, u_{n+1}, v_{n+1})]. \end{aligned} \tag{8}$$

Пример 1 Рассмотрим задачу Коши (задачу с начальными условиями)

$$\begin{aligned} x' &= 3x - 2y, \qquad x(0) = 3; \\ y' &= 5x - 4y, \qquad y(0) = 6. \end{aligned} \tag{9}$$

Точное решение системы (9) дают функции

$$x(t) = 2e^{-2t} + e^t, \qquad y(t) = 5e^{-2t} + e^t. \tag{10}$$

Теперь в равенствах (3) мы полагаем $f(x, y) = 3x - 2y$ и $g(x, y) = 5x - 4y$. Поэтому итерационные формулы Эйлера (4) примут вид

$$x_{n+1} = x_n + h \cdot (3x_n - 2y_n), \quad y_{n+1} = y_n + h \cdot (5x_n - 4y_n).$$

При величине шага $h = 0{,}1$ получим

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 + (0{,}1) \cdot [3 \cdot 3 - 2 \cdot 6] = 2{,}7, \\ y_1 &= 6 + (0{,}1) \cdot [5 \cdot 3 - 4 \cdot 6] = 5{,}1 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} x_2 &= 2{,}7 + (0{,}1) \cdot [3 \cdot (2{,}7) - 2 \cdot (5{,}1)] = 2{,}49, \\ y_2 &= 5{,}1 + (0{,}1) \cdot [5 \cdot (2{,}7) - 4 \cdot (5{,}1)] = 4{,}41. \end{aligned}$$

В точке $t_2 = 0{,}2$ фактические (истинные) значения решения (10) равны $x(0{,}2) \approx 2{,}562$ и $y(0{,}2) \approx 4{,}573$.

Теперь вычислим приблизительные значения $x(0{,}2)$ и $y(0{,}2)$ усовершенствованным методом Эйлера за один только шаг. Для этого возьмем величину шага $h = 0{,}2$. Сначала вычислим прогнозы

$$\begin{aligned} u_1 &= 3 + (0{,}2) \cdot [3 \cdot 3 - 2 \cdot 6] = 2{,}4, \\ v_1 &= 6 + (0{,}2) \cdot [5 \cdot 3 - 4 \cdot 6] = 4{,}2. \end{aligned}$$

Затем по формулам (8) для поправок вычисляем

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 + (0{,}1) \cdot ([3 \cdot 3 - 2 \cdot 6] + [3 \cdot (2{,}4) - 2 \cdot (4{,}2)]) = 2{,}58, \\ y_1 &= 6 + (0{,}1) \cdot ([5 \cdot 3 - 4 \cdot 6] + [5 \cdot (2{,}4) - 4 \cdot (4{,}2)]) = 4{,}62. \end{aligned}$$

Как и следовало ожидать, за один шаг усовершенствованного метода Эйлера удается получить более точное приближение, чем два шага обычного метода Эйлера. ■

Метод Рунге–Кутта и уравнения второго порядка

Вот векторный вид итерационной формулы метода Рунге–Кутта:

➤
$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4), \tag{11}$$

где векторы $\mathbf{k}_1$, $\mathbf{k}_2$, $\mathbf{k}_3$ и $\mathbf{k}_4$ определяются (аналогично формулам (5a)–(5d) из раздела 2.6) следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(t_n, \mathbf{x}_n),\\
&\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}\left(t_n + \tfrac{1}{2}h, \mathbf{x}_n + \tfrac{1}{2}h\mathbf{k}_1\right),\\
&\mathbf{k}_3 = \mathbf{f}\left(t_n + \tfrac{1}{2}h, \mathbf{x}_n + \tfrac{1}{2}h\mathbf{k}_2\right),\\
&\mathbf{k}_4 = \mathbf{f}(t_n + h, \mathbf{x}_n + h\mathbf{k}_3).
\end{aligned} \tag{12}$$

Для того чтобы найти скалярный вид формул метода Рунге–Кутта для двумерной задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$\begin{aligned}
x' &= f(t, x, y), \qquad x(t_0) = x_0,\\
y' &= g(t, x, y), \qquad y(t_0) = y_0
\end{aligned} \tag{3}$$

запишем

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{k}_i = \begin{bmatrix} F_i \\ G_i \end{bmatrix}.$$

Тогда итерационные формулы Рунге–Кутта для перехода от (x_n, y_n) к следующему приближению $(x_{n+1}, y_{n+1}) \approx (x(t_{n+1}), y(t_{n+1}))$ будут иметь вид

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{6}(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4),\\
y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(G_1 + 2G_2 + 2G_3 + G_4),
\end{aligned} \tag{13}$$

где значения F_1, F_2, F_3 и F_4 функции f вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
&F_1 = f(t_n, x_n, y_n),\\
&F_2 = f\left(t_n + \tfrac{1}{2}h, x_n + \tfrac{1}{2}hF_1, y_n + \tfrac{1}{2}hG_1\right),\\
&F_3 = f\left(t_n + \tfrac{1}{2}h, x_n + \tfrac{1}{2}hF_2, y_n + \tfrac{1}{2}hG_2\right),\\
&F_4 = f(t_n + h, x_n + hF_3, y_n + hG_3),
\end{aligned} \tag{14}$$

а значения G_1, G_2, G_3 и G_4 функции g вычисляются по аналогичным формулам.

Вероятно, двумерный метод Рунге–Кутта чаще всего применяется для численного решения задач Коши (задач с начальными условиями) для дифференциального уравнения второго порядка вида

$$\begin{aligned}
&x'' = g(t, x, x'),\\
&x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = y_0.
\end{aligned} \tag{15}$$

Введем вспомогательную переменную $y = x'$. Тогда задача (15) сведется к двумерной задаче первого порядка

$$\begin{aligned}
x' &= y, \qquad x(t_0) = x_0,\\
y' &= g(t, x, y), \qquad y(t_0) = y_0.
\end{aligned} \tag{16}$$

Эта задача имеет вид (3) при $f(t, x, y) = y$.

Если функции f и g не слишком сложны, то можно вручную выполнить необходимое количество шагов для описанного здесь двумерного метода Рунге–Кутта. Однако первые действующие электронные вычислительные устройства были созданы (во время Второй мировой войны) специально для вычисления траекторий артиллерийских снарядов по численным методам, очень похожим на метод Рунге–Кутта. В приложении к этому разделу приведены две версии программы RK2DIM, которую можно использовать для решения двумерных систем: одна — для калькулятора TI-85, а вторая — на языке BASIC.

Пример 2 Точным решением задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$x'' = -x; \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1 \tag{17}$$

является функция $x(t) = \sin t$. Подстановка $y = x'$ преобразует уравнение (17) в двумерную задачу

$$\begin{aligned} x' &= y, & x(0) &= 0; \\ y' &= -x, & y(0) &= 1, \end{aligned} \tag{18}$$

которая имеет вид (3) при $f(t, x, y) = y$ и $g(t, x, y) = -x$. В таблице на рис. 4.3.1 приведены результаты для $0 \leqq t \leqq 5$ (радиан), полученные с помощью программы RK2DIM при величине шага $h = 0{,}05$. Все значения $x = \sin t$ и $y = \cos t$ точны до пятого знака. ■

t	$x = \sin t$	$y = \cos t$
0,5	+0,47943	+0,87758
1,0	+0,84147	+0,54030
1,5	+0,99749	+0,07074
2,0	+0,90930	−0,41615
2,5	+0,59847	−0,80114
3,0	+0,14112	−0,98999
3,5	−0,35078	−0,93646
4,0	−0,75680	−0,65364
4,5	−0,97753	−0,21080
5,0	−0,95892	+0,28366

Рис. 4.3.1. Значения, полученные методом Рунге–Кутта (при $h = 0{,}05$) для задачи (18)

Пример 3 В примере 4 раздела 2.3 мы рассматривали лунный посадочный модуль, который в начальный момент времени находится в состоянии свободного падения на поверхность Луны. Его тормозные двигатели в рабочем состоянии обеспечивают замедление $T = 4$ м/с^2. Ранее мы нашли, что мягкая посадка на поверхность Луны будет достигнута в том случае, если

эти тормозные реактивные двигатели включить тогда, когда посадочный модуль находится на высоте 41 870 метров (немного больше 26 миль) над поверхностью Луны, причем в этот момент лунный посадочный модуль снижается со скоростью 450 м/с.

Теперь мы хотим вычислить *время спуска* лунного посадочного модуля. Пусть расстояние $x(t)$ посадочного модуля от центра Луны измеряется в метрах, а время t — в секундах. Согласно анализу, проведенному в разделе 2.3 (где мы использовали обозначение $r(t)$ вместо $x(t)$), $x(t)$ является решением задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$\begin{gathered}\frac{d^2x}{dt^2} = T - \frac{GM}{x^2} = 4 - \frac{4{,}9044 \times 10^{12}}{x^2}, \\ x(0) = R + 41870 = 1781870, \quad x'(0) = -450,\end{gathered} \tag{19}$$

где $G \approx 6{,}6726 \times 10^{-11}$ Н·(м/кг)^2 — универсальная гравитационная постоянная, а $M = 7{,}35 \times 10^{22}$ кг и $R = 1{,}74 \times 10^6$ м — масса и радиус Луны. Мы ищем значение t, при котором $x(t) = R = 1\,740\,000$.

Задача (19) эквивалентна системе уравнений первого порядка

$$\begin{aligned}&\frac{dx}{dt} = y, \quad x(0) = 1781870; \\ &\frac{dy}{dx} = 4 - \frac{4{,}9044 \times 10^{12}}{x^2}, \quad y(0) = -450.\end{aligned} \tag{20}$$

В таблице на рис. 4.3.2 приведен результат аппроксимации методом Рунге–Кутта при величине шага $h = 1$ (приведенные данные совпадают с данными, полученным при величине шага $h = 2$). Очевидно, что посадка на поверхность Луны ($x = 1\,740\,000$) произойдет в некоторый момент времени между $t = 180$ и $t = 190$ секунд. В таблице на рис. 4.3.3 приведены результаты следующего приближения методом Рунге–Кутта при $t(0) = 180$, $x(0) = 1\,740\,059$, $y(0) = -16{,}83$ и $h = 0{,}1$. Теперь очевидно, что время спуска посадочного модуля к поверхности Луны очень близко к 187 секундам, т. е. к 3 минутам и 7 секундам. (Последние значения скорости в этих двух таблицах положительны, потому что посадочный модуль начал бы подниматься, если бы его тормозные реактивные двигатели не были выключены при посадке.) ■

Системы высших порядков

Как было показано в разделе 4.1, любая система дифференциальных уравнений высшего порядка может быть заменена эквивалентной системой дифференциальных уравнений первого порядка. Например, рассмотрим систему

$$\begin{aligned}x'' &= F(t, x, y, x', y'), \\ y'' &= G(t, x, y, x', y')\end{aligned} \tag{21}$$

уравнений второго порядка. Если мы подставим

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad x' = x_3 = x_1', \quad y' = x_4 = x_2',$$

t (с)	x (м)	v (м/с)
0	1 781 870	−450,00
20	1 773 360	−401,04
40	1 765 826	−352,37
60	1 759 264	−303,95
80	1 753 667	−255,74
100	1 749 033	−207,73
120	1 745 357	−159,86
140	1 742 637	−112,11
160	1 740 872	−64,45
180	1 740 059	−16,83
200	1 740 199	30,77

Рис. 4.3.2. Спуск посадочного модуля на поверхность Луны

t (с)	x (м)	v (м/с)
180	1 740 059	−16,83
181	1 740 044	−14,45
182	1 740 030	−12,07
183	1 740 019	−9,69
184	1 740 011	−7,31
185	1 740 005	−4,93
186	1 740 001	−2,55
187	1 740 000	−0,17
188	1 740 001	2,21
189	1 740 004	4,59
190	1 740 010	6,97

Рис. 4.3.3. Более подробные данные по высоте и скорости при мягкой посадке лунного посадочного модуля

то получим эквивалентную систему

$$\begin{aligned} x_1' &= x_3, \\ x_2' &= x_4, \\ x_3' &= F(t, x_1, x_2, x_3, x_4), \\ x_4' &= G(t, x_1, x_2, x_3, x_4) \end{aligned} \tag{22}$$

четырех уравнений первого порядка с неизвестными функциями $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = y(t)$, $x_3(t)$ и $x_4(t)$. Писать четырехмерную версию программы RK2DIM для решения этой системы — достаточно громоздкое и утомительное занятие. Но на языках программирования, которые могут обрабатывать векторы, программа n-мерной версии метода Рунге–Кутта едва ли более сложна, чем одномерная. Например, в приложении к этому разделу приведена программа `rkn` на входном языке системы MATLAB для решения n-мерных систем. Заметим, что она почти не отличается от одномерной программы `rk`, приведенной на рис. 2.6.11.

Пример 4 Предположим, что бейсбольный мяч после удара вылетает из точки $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ с начальной скоростью $v_0 = 160$ футов/с под углом $\theta = 30°$. Если сопротивлением воздуха пренебречь, элементарными методами из раздела 1.2 можно вычислить, что расстояние, которое пролетит бейсбольный мяч по горизонтали до удара о землю, равно $400\sqrt{3}$ футов (приблизительно 693 футов) и что полет займет 5 секунд. Теперь предположим, что, кроме направленного вниз ускорения свободного падения ($g = 32$ фута/с^2), бейсбольный мяч испытывает ускорение из-за сопротивления воздуха, равное $(0{,}0025)v^2$ футов в секунду за секунду, причем направление этого ускорения противоположно направлению движения.

Определим, как далеко в горизонтальной плоскости переместится мяч при этих условиях.

Решение Согласно задаче 30 из раздела 4.1, уравнения движения бейсбольного мяча имеют вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -cv\frac{dx}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -cv\frac{dy}{dt} - g, \tag{23}$$

где $v = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$ — скорость мяча, $c = 0{,}0025$, а $g = 32$ в единицах fps. Как и при выводе системы (22), преобразуем нашу систему в эквивалентную ей систему первого порядка. Получим систему четырех дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} x_1' &= x_3, \\ x_2' &= x_4, \\ x_3' &= -cx_3\sqrt{x_3^2 + x_4^2}, \\ x_4' &= -cx_4\sqrt{x_3^2 + x_4^2} - g \end{aligned} \tag{24}$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} &x_1(0) = x_2(0) = 0, \\ &x_3(0) = 80\sqrt{3}, \quad x_4(0) = 80. \end{aligned} \tag{25}$$

Заметим, что $x_3(t)$ и $x_4(t)$ — просто x- и y-компоненты вектора скорости бейсбольного мяча, и потому $v = \sqrt{x_3^2 + x_4^2}$.

При отсутствии сопротивления воздуха. На рис. 4.3.4 приведены численные результаты, полученные с помощью программы для метода Рунге–Кутта, такой как `rkn` при величине шага $k = 0{,}1$ и $c = 0$ (сопротивление воздуха отсутствует). Для удобства физической интерпретации на каждом шаге приведены горизонтальная и вертикальная координаты мяча x и y, его скорость v и угол наклона α его вектора скорости (отсчет ведется в градусах от горизонтальной оси). Эти результаты совпадают с точным решением при $c = 0$. Мяч пролетает горизонтальное расстояние в $400\sqrt{3} \approx 692{,}82$ футов в точности за 5 секунд, достигая максимальной высоты 100 футов через 2,5 секунды полета. Заметим также, что скорость мяча при ударе о землю равна его начальной скорости, а угол, под которым мяч упадет на землю, равен начальному углу.

При наличии сопротивления воздуха. На рис. 4.3.5 изображены результаты, полученные при достаточно правдоподобном значении постоянной $c = 0{,}0025$ для сопротивления воздуха в случае бейсбольного мяча. При величине шага $h = 0{,}05$ и $h = 0{,}025$ результаты совпадают с точностью до одной сотой фута. При наличии сопротивлением воздуха мяч пролетает существенно меньшее расстояние, чем 400 футов, за

t	x	y	v	α
0,0	0,00	0,00	160,00	+30
0,5	69,28	36,00	152,63	+25
1,0	138,56	64,00	146,64	+19
1,5	207,85	84,00	142,21	+13
2,0	277,13	96,00	139,48	+7
2,5	346,41	100,00	138,56	+0
3,0	415,69	96,00	139,48	−7
3,5	484,97	84,00	142,21	−13
4,0	554,26	64,00	146,64	−19
4,5	623,54	36,00	152,63	−25
5,0	692,82	0,00	160,00	−30

Рис. 4.3.4. Полет бейсбольного мяча при отсутствии сопротивления воздуха ($c = 0$)

t	x	y	v	α
0,0	0,00	0,00	160,00	+30
0,5	63,25	32,74	127,18	+24
1,0	117,11	53,20	104,86	+17
1,5	164,32	63,60	89,72	+8
2,0	206,48	65,30	80,17	−3
2,5	244,61	59,22	75,22	−15
3,0	279,29	46,05	73,99	−27
3,5	310,91	26,41	75,47	−37
4,0	339,67	0,91	78,66	−46

Рис. 4.3.5. Полет бейсбольного мяча, испытывающего сопротивление воздуха ($c = 0{,}0025$)

время, чуть большее 4 секунд. Более подробные данные, приведенные на рис. 4.3.6, показывают, что мяч пролетит лишь около 340 футов, причем максимальная высота приблизительно равна всего лишь 66 футам. Как показано на рис. 4.3.7, сопротивление воздуха превратило выдающийся удар (мяч попал бы точно в центр поля) в весьма посредственный. Заметим также, что при ударе о землю скорость мяча немного меньше *половины* его начальной скорости (всего лишь около 79 футов/с), причем мяч пада-

t	x	y	v	α	
1,5	164,32	63,60	89,72	+8	
1,6	173,11	64,60	87,40	+5	
1,7	181,72	65,26	85,29	+3	
1,8	190,15	65,60	83,39	+1	
1,9	198,40	65,61	81,68	−1	⟵Высшая точка
2,0	206,48	65,30	80,17	−3	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
3,8	328,50	11,77	77,24	−42	
3,9	334,14	6,45	77,93	−44	
4,0	339,67	0,91	78,66	−46	
4,1	345,10	−4,84	79,43	−47	⟵Удар
4,2	350,41	−10,79	80,22	−49	

Рис. 4.3.6. Полет мяча: высшая точка и удар о землю

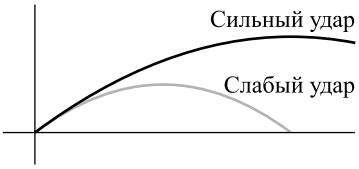


Рис. 4.3.7. Полет бейсбольного мяча: точное попадание в цель или упадет куда попало?

ет под более крутым углом (приблизительно $46°$). Каждый бейсбольный болельщик, конечно, из опыта хорошо знаком с этими особенностями траектории полета мяча.

Методы с переменной величиной шага

Метод Рунге–Кутта для больших систем требует весьма большого объема вычислений, даже если применяется компьютер. Поэтому, так же как нельзя выбирать слишком большую величину шага h (потому что погрешность результата — решения — может быть больше допустимой), нельзя выбирать и слишком маленькую величину шага, так как объем вычислительной работы может превзойти имеющиеся вычислительные ресурсы. Таким образом, на практике при применении численных методов решения дифференциальных уравнений необходимо найти компромисс между точностью и эффективностью.

Чтобы не жертвовать точностью и не выполнять лишних вычислений, разработаны современные *методы с переменной величиной шага*, в которых величина шага h может изменяться в процессе вычисления решения. Большая величина шага выбирается там, где зависимые переменные изменяются медленно; меньшая величина шага берется тогда, когда эти переменные изменяются быстро, — это позволяет предотвратить большие ошибки.

Приспособленный для этой цели метод Рунге–Кутта называется *адаптивным* методом Рунге–Кутта, методом Рунге–Кутта *с выбором величины шага*, или методом Рунге–Кутта *с переменной величиной шага*. В этом варианте (или метода Рунге–Кутта используются заданные наперед значения минимальной допустимой погрешности *MinTol* и максимальной допустимой погрешности *MaxTol* для того, чтобы ошибка, допущенная на очередном шаге при переходе от $\mathbf{x}_n$ к $\mathbf{x}_{n+1}$, была не слишком большой (что повлекло бы большую погрешность результата) и не слишком малой (что повлекло бы неэффективность метода вследствие слишком большого объема вычислений). Достаточно простая схема для приспособления метода Рунге–Кутта выглядит следующим образом.

- Достигнув $\mathbf{x}_n$ с помощью метода Рунге–Кутта при величине шага $t_n - t_{n-1} = h$, обозначим через $\mathbf{x}^{(1)}$ результат продвижения методом Рунге–Кутта еще на один шаг величиной h, а через $\mathbf{x}^{(2)}$ — результат продвижения методом Рунге–Кутта на *два* шага, величина каждого из которых равна $h/2$.
- Считая аппроксимацию $\mathbf{x}^{(2)}$ более точной к действительному значению $\mathbf{x}(t_n + h)$, чем $\mathbf{x}^{(1)}$, в качестве оценки допущенной ошибки при вычислении $\mathbf{x}^{(1)}$ принимаем

$$Err = |\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}|.$$

- Если допущенная ошибка удовлетворяет неравенствам $MinTol \leqq Err \leqq MaxTol$, то положим $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}^{(1)}$, $t_{n+1} = t_n + h$ и перейдем к следующему шагу.
- Если допущенная ошибка $Err < MinTol$, то считаем ошибку слишком маленькой! Следовательно, положим $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}^{(1)}$, $t_{n+1} = t_n + h$, а величину шага на следующей итерации *удвоим* (получим величину шага $2h$).
- Если допущенная ошибка $Err > MaxTol$, то ошибка слишком велика. В этом случае отбросим значение $\mathbf{x}^{(1)}$ и попытаемся начать заново с $\mathbf{x}_n$, но перед этим уменьшим величину шага *вдвое*, т. е. возьмем величину шага равной $h/2$.

Детальная реализация такой схемы может быть значительно более сложной. Более подробное, но вполне доступное обсуждение адаптивных методов Рунге–Кутта приведено в разделе 15.2 монографии Уильяма Х. Пресса, посвященной рецептурным тонкостям применения численных методов (искусству научных вычислений), которая была выпущена издательством Кембриджского университета в 1986 году (William H. Press et al., *Numerical Recipes*: *The Art of Scientific Computing* (Cambridge University Press, 1986)).

В состав нескольких широко доступных пакетов для научных вычислений (таких как *Maple*, *Mathematica* и MATLAB) входят достаточно сложные программы с выбором переменной величины шага, которые могут находить решение системы дифференциальных уравнений практически произвольного порядка. Такие универсальные программы (программы общего назначения) можно использовать, например, для численного моделирования движения главных составных "частей" Солнечной системы: Солнца и девяти (известных) главных планет. Обозначим через m_i массу, а через $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$ — радиус-вектор i-го из этих десяти небесных тел. Тогда в соответствии с законом Ньютона уравнение движения тела массой m_i можно записать в виде

$$m_i \mathbf{r}_i'' = \sum_{j \neq i} \frac{G m_i m_j}{(r_{ij})^3} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i), \tag{26}$$

где $r_{ij} = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|$ обозначает расстояние между m_i и m_j. Для всех $i = 1, 2, \ldots, 10$ сумма в уравнениях системы (26) берется по всем значениям $j \neq i$ от 1 до 10. Системе из 10 векторных уравнений (26) соответствует система из 30 скалярных дифференциальных уравнений второго порядка, а эквивалентная система уравнений первого порядка состоит уже из 60 дифференциальных уравнений, содержащих координаты и компоненты скоростей этих 10 главных небесных тел в Солнечной системе. Математические модели с подобным (или большим) количеством дифференциальных уравнений часто встречаются в различных отраслях науки и техники. Системы дифференциальных уравнений такого (или большего) порядка приходится решать не только при проведении научных исследований, но и при разработке (проектировании) новых машин и технологий. Для получения числового решения таких систем и его анализа требуется довольно сложное программное обеспечение.

Орбиты спутников системы, состоящей из двух небесных тел — Земли и Луны

В качестве примера (научной) программы, для эффективной реализации которой потребовались адаптивные методы с переменной величиной шага, рассмотрим орбиту искусственного спутника Аполлон вокруг Земли E и Луны M. Начало системы координат $x_1 x_2$, изображенной на рис. 4.3.8, совпадает с центром масс системы, состоящей из двух тел — Земли и Луны,

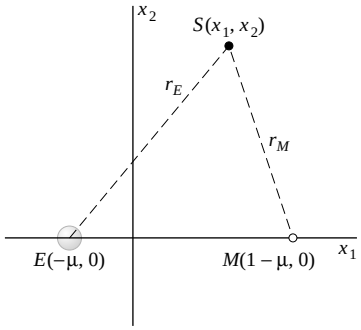


Рис. 4.3.8. Начало системы координат находится в центре масс системы, состоящей из двух тел — Земли и Луны

причем эта система координат вращается с угловой скоростью один оборот за "лунный месяц" (т. е. примерно за $\tau = 27{,}32$ дней). Вследствие этого вращения ось x_1 можно выбрать так, чтобы положения Земли и Луны были фиксированы на оси x_1. За единицу расстояния удобно выбрать расстояние между центрами Земли и Луны (будем считать его постоянным и равным приблизительно $384\,000$ км). Тогда координаты планет будут следующие: у Земли — $E(-\mu, 0)$, а у Луны — $M(1-\mu, 0)$, где, считая массу Земли равной m_E, а массу Луны — m_M, $\mu = m_M/(m_E + m_M)$. За единицу массы удобно принять общую массу Земли и Луны $m_E + m_M$, а за единицу времени — $\tau/(2\pi) \approx 4{,}35$ дня. Тогда в наших единицах измерения гравитационная постоянная в уравнении (26) $G = 1$, а координаты спутника $S(x_1, x_2)$ удовлетворяют уравнениям движения

$$\begin{aligned} x_1'' &= x_1 + 2x_2' - \frac{(1-\mu)(x_1+\mu)}{(r_E)^3} - \frac{\mu(x_1-1+\mu)}{(r_M)^3}, \\ x_2'' &= x_2 - 2x_1' - \frac{(1-\mu)x_2}{(r_E)^3} - \frac{\mu x_2}{(r_M)^3}, \end{aligned} \tag{27}$$

где r_E и r_M обозначают расстояния от спутника до Земли и до Луны (как показано на рис. 4.3.8). Два первых слагаемых в правой части каждого уравнения обусловлены вращением системы координат[14]. В наших единицах измерения масса Луны приблизительно равна $m_M = 0{,}012277471$. С помощью подстановки

$$x_1' = x_3, \quad x_2' = x_4 \quad (\text{так что} \quad x_1'' = x_3', \quad x_2'' = x_4')$$

система уравнений второго порядка (27) может быть преобразована в эквивалентную систему четырех дифференциальных уравнений первого порядка.

[14] Система координат, вращающаяся относительно инерциальной системы, является неинерциальной. В неинерциальной системе на тело действуют также силы инерции (переносная и кориолисова). Поэтому во втором законе Ньютона для неинерциальной системы необходимо учитывать два дополнительных слагаемых — переносную силу инерции и кориолисову силу инерции. Этим силам соответствует переносное и кориолисово ускорение. В случае вращающейся системы координат нужно учитывать центростремительное и кориолисово ускорения. — *Примеч. ред.*

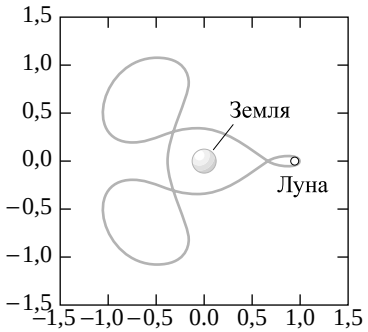


Рис. 4.3.9. Орбита искусственного спутника Аполлон вокруг системы, состоящей из двух небесных тел — Земли и Луны, при начальной скорости $v_0 = 7476$ км/ч

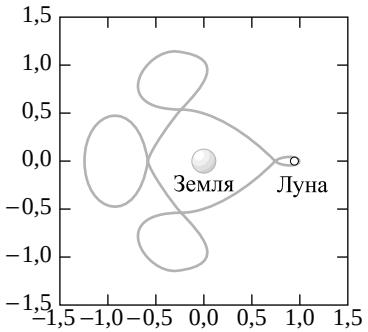


Рис. 4.3.10. Орбита искусственного спутника Аполлон вокруг системы, состоящей из двух небесных тел — Земли и Луны, при начальной скорости $v_0 = 7365$ км/ч

Предположим, что спутник первоначально движется по круговой орбите радиуса 2400 км вокруг Луны по часовой стрелке. В самой дальней точке его траектории от Земли ($x_1 = 0{,}994$) его "запускают" на орбиту вокруг системы, состоящей из двух тел — Земли и Луны, с начальной скоростью v_0. Тогда соответствующие начальные условия можно записать так:

$$x_1(0) = 0{,}994, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 0, \quad x_4(0) = -v_0.$$

Чтобы получить численное решение системы (27) с помощью пакета MATLAB, можно использовать адаптивный метод с переменной величиной шага `ode45`. Орбиты на рис. 4.3.9 и 4.3.10 были получены при

$$v_0 = 2{,}031732629557 \quad \text{и} \quad v_0 = 2{,}001585106379,$$

соответственно. (В наших единицах измерения, единица скорости равна приблизительно 3680 км/ч.) Хотя в каждом случае траектория вокруг Луны и Земли получается замкнутая с многими циклами (нечто вроде петляющего автобусного маршрута), но даже (относительно) незначительное изменение начальной скорости изменяет количество циклов! Дополнительная информация содержится в докладе NASA, посвященном изучению численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений, подготовленном О. Б. Фрэнсисом-мл. с соавторами (O. B. Francis, Jr. et al.) для Центра управления Космическими полетами NASA (NASA–George C. Marshall Space Flight Center) 7 июня 1966 года (NASA Contractor Report CR-61139, "Study of the Methods for the Numerical Solution of Ordinary Differential Equations").

4.3. Задачи

Для решения задач 1–8 вполне подойдет карманный калькулятор. В каждой из задач даны задача Коши (задача с начальными условиями) и точное ее решение. Найдите приблизительные значения $x(0{,}2)$ и $y(0{,}2)$ тремя способами: ***(a)*** *с помощью метода Эйлера за два шага при величине шага*

$h = 0{,}1$; ***(b)*** *с помощью усовершенствованного метода Эйлера за один шаг* $h = 0{,}2$; ***(c)*** *с помощью метода Рунге–Кутта за один шаг при величине шага* $h = 0{,}2$. *Сравните полученные приближенные значения с точными значениями* $x(0{,}2)$ *и* $y(0{,}2)$.

1. $x' = x + 2y$, $x(0) = 0$,
$y' = 2x + y$, $y(0) = 2$;
$x(t) = e^{3t} - e^{-t}$, $y(t) = e^{3t} + e^{-t}$

2. $x' = 2x + 3y$, $x(0) = 1$,
$y' = 2x + y$, $y(0) = -1$;
$x(t) = e^{-t}$, $y(t) = -e^{-t}$

3. $x' = 3x + 4y$, $x(0) = 1$,
$y' = 3x + 2y$, $y(0) = 1$;
$x(t) = \frac{1}{7}(8e^{6t} - e^{-t})$,
$y(t) = \frac{1}{7}(6e^{6t} + e^{-t})$

4. $x' = 9x + 5y$, $x(0) = 1$,
$y' = -6x - 2y$, $y(0) = 0$;
$x(t) = -5e^{3t} + 6e^{4t}$,
$y(t) = 6e^{3t} - 6e^{4t}$

5. $x' = 2x - 5y$, $x(0) = 2$,
$y' = 4x - 2y$, $y(0) = 3$;
$x(t) = 2\cos 4t - \frac{11}{4}\sin 4t$,
$y(t) = 3\cos 4t + \frac{1}{2}\sin 4t$

6. $x' = x - 2y$, $x(0) = 0$,
$y' = 2x + y$, $y(0) = 4$;
$x(t) = -4e^{t}\sin 2t$,
$y(t) = 4e^{t}\cos 2t$

7. $x' = 3x - y$, $x(0) = 2$,
$y' = x + y$, $y(0) = 1$;
$x(t) = (t + 2)e^{2t}$,
$y(t) = (t + 1)e^{2t}$

8. $x' = 5x - 9y$, $x(0) = 0$,
$y' = 2x - y$, $y(0) = -1$;
$x(t) = 3e^{2t}\sin 3t$,
$y(t) = e^{2t}(\sin 3t - \cos 3t)$

Для решения остальных задач этого раздела необходим компьютер. В задачах 9–12 даны задача Коши (задача с начальными условиями) и ее точное решение. В каждой их этих четырех задач методом Рунге–Кутта с величиной шага $h = 0{,}1$ *и* $h = 0{,}05$ *найдите приближения с пятью десятичными знаками значений* $x(1)$ *и* $y(1)$. *Сравните аппроксимации с фактическими значениями.*

9. $x' = 2x - y, \quad x(0) = 1,$
$y' = x + 2y, \quad y(0) = 0;$
$x(t) = e^{2t}\cos t,$
$y(t) = e^{2t}\sin t$

10. $x' = x + 2y, \quad x(0) = 0,$
$y' = x + e^{-t}, \quad y(0) = 0;$
$x(t) = \frac{1}{9}(2e^{2t} - 2e^{-t} + 6te^{-t}),$
$y(t) = \frac{1}{9}(e^{2t} - e^{-t} + 6te^{-t})$

11. $x' = -x - y - (1 + t^3)e^{-t}, \quad x(0) = 0,$
$y' = -x - y - (t - 3t^2)e^{-t}, \quad y(0) = 1;$
$x(t) = e^{-t}(\sin t - t), \quad y(t) = e^{-t}(\cos t + t^3)$

12. $x'' + x = \sin t, \quad x(0) = 0;$
$x(t) = \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$

13. Предположим, что арбалетная стрела была пущена вертикально вверх с начальной скоростью 288 футов/с. Если ее торможение (замедление) из-за сопротивления воздуха равно $(0{,}04)v$, то ее высота $x(t)$ является решением задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$x'' = -32 - (0{,}04)x'; \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 288.$$

Найдите максимальную высоту, которой достигает стрела, и время, требуемое, чтобы достичь этой высоты.

14. Решите задачу 13, но предположите теперь, что торможение (замедление) стрелы из-за сопротивления воздуха равно $(0{,}0002)v^2$.

15. Предположим, что снаряд был запущен вертикально вверх с начальной скоростью v_0 с поверхности Земли. Если пренебречь сопротивлением воздуха, то высота снаряда $x(t)$ в момент времени t является решением задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{gR^2}{(x + R)^2}; \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = v_0.$$

Используйте значение ускорения свободного падения $g = 32{,}15$ футов/с$^2 \approx 0{,}006089$ миль/с^2 на землю у ее поверхности и значение радиуса Земли $R = 3960$ миль. При $v_0 = 1$ миль/с найдите максимальную высоту высоту, достигнутую снарядом, и время, необходимое для подъема на эту высоту.

В задачах 16–18 рассматривается бейсбольный мяч из примера 4, пущенный с начальной скоростью 160 *футов/с, причем коэффициент сопротивления воздуха равен* $c = 0{,}0025$.

16. Найдите *дальность* — расстояние по горизонтали, которое мяч пролетит до падения на землю, — и полное время полета, если угол наклона траектории в начальный момент был равен $40°$, $45°$ или $50°$.

17. Найдите начальный угол наклона траектории (ближайшее целое значение в градусах), при котором дальность полета будет максимальной. При условии отсутствия сопротивления воздуха он был бы равен в точности $45°$, однако ваш ответ должен быть меньше $45°$.

18. Найдите начальный угол наклона траектории (с точностью до половины градусах), больший $45°$, при котором дальность полета равна 300 футов.

19. Пусть $c = 0{,}0025$, а угол наклона траектории бейсбольного мяча, по которому ударила малышка Бейб Рут (Babe Ruth), в начальный момент равен $40°$. Найдите начальную скорость бейсбольного мяча после удара, если мяч ударился в открытую трибуну на высоте 50 футов на расстоянии 500 футов по горизонтали от точки удара.

20. Арбалетная стрела из задачи 14 выпущена с той же начальной скоростью 288 футов/с, причем из-за сопротивления воздуха замедление (торможение) равно $(0{,}0002)v^2$ и направлено против движения. Предположим, что эта стрела запущена с уровня земли под углом $45°$. Определите максимальную высоту, дальность и продолжительность полета стрелы.

21. Артиллерийский снаряд запущен с уровня земли с начальной скоростью 3000 футов/с, причем угол наклона траектории в начальный момент равен $40°$. Предположим также, что замедление (торможение) из-за сопротивления воздуха равно $(0{,}0001)v^2$. **(a)** Какова дальность полета снаряда и полное время его полета? Какова его скорость при соударении с землей? **(b)** Какова максимальная высота подъема снаряда и когда эта высота достигается? **(c)** Вы обнаружите, что в самой высокой точке своей траектории снаряд продолжает терять скорость. Какой *минимальной* скорости достигает снаряд во время спуска?

4.3. Приложение. Кометы и космические корабли

На рис. 4.3.11 приведены две версии двумерной программы RK2DIM, реализующей метод Рунге–Кутта. Одна версия предназначена для калькулятора TI-85, а вторая написана на языке программирования BASIC. Вы должны обратить внимание, что эти версии очень похожи на приведенные на рис. 2.6.11 аналогичные версии одномерной программы, реализующей метод Рунге–Кутта, за исключением того, что (в соответствующих местах) одна строка заменена двумя (для вычисления *пары* значений наклонов для функций x и y). Заметим также, что используемая система обозначений по существу совпадает с уравнениями (13) и (14) из этого раздела. В нескольких первых строках определены функции и начальные данные из примера 1.

На рис. 4.3.12 приведена алгоритм реализации метода Рунге–Кутта для систем из n уравнений на входном языке пакета MATLAB. В функции `f`, написанной на входном языке пакета MATLAB, определяется вектор правых частей решаемой системы дифференциальных уравнений в $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$. Функция `rkn` в качестве входных параметров принимает начальное значение t (параметр `t`), вектор-столбец начальных значений x (параметр `x`), конечное значение t (параметр `t1`) и желаемое количество подынтервалов (параметр `n`). В результате выполнения она генерирует вектор-столбец `T` значений t и матрицу `X`, строки которой задают соответствующие значения x. Например, если функция $\mathbf{f}$ определена так, как показано на рисунке, команда MATLAB

TI-85	BASIC	Комментарии
PROGRAM:RK2DIM	Program RK2DIM	Заголовок программы
:F=Y	DEF FN F(T,X,Y) = Y	Определение функции f
:G=-X	DEF FN G(T,X,Y) = -X	Определение функции g
:50→N	N = 50	Количество шагов
:0→T	T = 0	Начальное значение t
:0→X	X = 0	Начальное значение x
:1→Y	Y = 1	Начальное значение y
:5→T1	T1 = 5	Конечное значение t
:(T1-T)/N→H	H = (T1-T)/N	Величина шага
:For(I,1,N)	FOR I=1 TO N	Начало цикла
:T→T0	T0 = T	Сохранить предыдущее t
:X→X0	X0 = X	Сохранить предыдущее x
:Y→Y0	Y0 = Y	Сохранить предыдущее y
:F→F1	F1 = FNF(T,X,Y)	Первый наклон f
:G→G1	G1 = FNG(T,X,Y)	Первый наклон g
:T0+H/2→T	T = T0 + H/2	t в середине
:X0+H*F1/2→X	X = X0 + H*F1/2	Прогноз x в середине
:Y0+H*G1/2→Y	Y = Y0 + H*G1/2	Прогноз y в середине
:F→F2	F2 = FNF(T,X,Y)	Второй наклон f
:G→G2	G2 = FNG(T,X,Y)	Второй наклон g
:X0+H*F2/2→X	X = X0 + H*F2/2	Прогноз x в середине
:Y0+H*G2/2→Y	Y = Y0 + H*G2/2	Прогноз y в середине
:F→F3	F3 = FNF(T,X,Y)	Третий наклон f
:G→G3	G3 = FNG(T,X,Y)	Третий наклон g
:T0+H→T	T = T0 + H	Новое значение t
:X0+H*F3→X	X = X0 + H*F3	Прогноз x в конце
:Y0+H*G3→Y	Y = Y0 + H*G3	Прогноз y в конце
:F→F4	F4 = FNF(T,X,Y)	Четвертый наклон f
:G→G4	G4 = FNG(T,X,Y)	Четвертый наклон g
:(F1+2*F2+2*F3 +F4)/6→FA	FA = (F1+2*F2+2*F3 +F4)/6	Средний наклон f
:(G1+2*G2+2*G3 +G4)/6→GA	GA = (G1+2*G2+2*G3 +G4)/6	Средний наклон g
:X0+H*FA→X	X = Y0 + H*FA	Поправка x
:Y0+H*GA→Y	Y = Y0 + H*GA	Поправка y
:Disp T,X,Y	PRINT T,X,Y	Вывод результатов
:End	NEXT I	Конец цикла

Рис. 4.3.11. Программы, реализующие метод Рунге–Кутта для двумерных систем на калькуляторе TI-85 и на языке BASIC

```
function xp = f(t,x)
xp = x;
xp(1) = x(2);
xp(2) = -x(1);

function [T,Y] = rkn(t,x,t1,n)
h = (t1 - t)/n;                    % величина шага
T = t;                             % начальное значение
t
X = x';                            % начальный вектор x
for i = 1:n                        % начало цикла
    k1 = f(t,x);                   % первый вектор k
    k2 = f(t+h/2,x+h*k1/2);        % второй вектор k
    k3 = f(t+h/2,x+h*k2/2);        % третий вектор k
    k4 = f(t+h  ,x+h*k3  );        % четвертый вектор k
    k  = (k1+2*k2+2*k3+k4)/6;      % вектор средних k
    t  = t + h;                    % новое значение t
    x  = x + h*k;                  % новое значение x
    T = [T;t];                     % обновить столбец t
    X = [X;x'];                    % обновить матрицу x
    end                            % конец цикла
```

Рис. 4.3.12. Реализация метода Рунге–Кутта на входном языке пакета MATLAB

```
[T,X] = rkn(0, [0;1], 5, 50)
```

генерирует данные, приведенные в таблице на рис. 4.3.1 (приведено каждое пятое значение переменных).

Для проверки вашей собственной реализации метода Рунге–Кутта можно использовать примеры 1–3 из этого раздела. Затем решите задачи о кометах и приведенные ниже задачи о космических кораблях. Дополнительный прикладной материал содержится также на сайте `www.prenhall.com/edwards`. Сайт содержит описание дополнительных исследований по решению обыкновенных дифференциальных уравнений числовыми методами. В качестве модельных задач рассматриваются самые разнообразные задачи — от задач о полете бейсбольного мяча до задач определения траекторий полета космического корабля Аполлона (результаты этих вычислений — орбиты Аполлона — показаны на рис. 4.3.9 и 4.3.10).

Посадка вашего космического корабля

Ваш космический корабль движется с постоянной скоростью V, приближаясь к далекой планете земного типа, масса которой равна M, а радиус — R. Тормозная система вашего космического корабля во включенном состоянии обеспечивает постоянную тягу T до соударения с поверхностью планеты. Во время замедления от вашего корабля до центра планеты $x(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2x}{dt^2} = T - \frac{GM}{x^2}, \tag{1}$$

где $G \approx 6{,}6726 \times 10^{-11}$ Н·(м/кг)^2, как и в примере 3. Вы хотите узнать, на какой высоте над поверхностью необходимо включить тормозную систему, чтобы посадка на планету была мягкой? В качестве правдоподобной задачи можно взять

$$\begin{aligned} M &= 5{,}97 \times 10^{24}\,(\text{кг}),\\ R &= 6{,}38 \times 10^{6}\,(\text{м}),\\ V &= p \times 10^{4}\,(\text{км/ч}),\\ T &= g + q\,(\text{м/с}^2) \end{aligned}$$

где $g = GM/R^2$ ускорение свободного падения на поверхности планеты. Выберите в качестве p наименьшую отличную от нуля цифру в номере вашего студенческого билета, а в качестве q — следующую по величине. Найдите с точностью до метра высоту, на которой необходимо включить тормозную систему, а также расчетное время спуска с точностью до одной десятой секунды.

Движение планет и спутников: законы Кеплера

Рассмотрим движение спутника по эллиптической орбите вокруг планеты массой M. Предположим, что единицы измерения выбраны так, что $GM = 1$ (где G — гравитационная постоянная). Если планета расположена в начале координат плоскости xy, то уравнения движения спутника можно записать в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{y}{(x^2+y^2)^{3/2}}. \tag{2}$$

Пусть T обозначает период обращения спутника. Согласно третьему закону Кеплера, *квадрат* T пропорционален *кубу* большей полуоси a эллиптической орбиты спутника. В частности, если $GM = 1$, то

$$T^2 = 4\pi^2 a^3. \tag{3}$$

Более подробные сведения приведены в разделе 12.6 6-го издания учебника анализа Эдвардса и Пенни, вышедшего в 2002 году (Edwards and Penney, *Calculus*, 6th edition (Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall, 2002)). Если x- и y-компоненты скорости спутника обозначить через $x_3 = x' = x_1'$ и $x_4 = y' = x_2'$, то система (2) преобразуется в эквивалентную систему четырех дифференциальных уравнений первого порядка, имеющую вид (22) из этого раздела.

(a) Решите численно эту систему размера 4×4 при начальных условиях

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$$

которые теоретически соответствуют круговой орбите радиуса $a = 1$; тогда из равенства (3) следует, что $T = 2\pi$. Это ли вы получили?

(b) Теперь решите численно эту систему при начальных условиях

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad y'(0) = \tfrac{1}{2}\sqrt{6},$$

которые теоретически соответствуют эллиптической орбите, большая полуось которой равна $a = 2$; тогда из равенства (3) следует, что $T = 4\pi\sqrt{2}$. Это ли вы получили?

Комета Галлея

В последний раз комета Галлея проходила через свой перигелий (ближайшая к Солнцу точка орбиты) 9 февраля 1986 года. (Само Солнце считается расположенным в начале координат.) Координаты и компоненты скорости кометы Галлея в тот момент были равны

$$\mathbf{p}_0 = (0{,}325514, -0{,}459460, 0{,}166229) \qquad \text{и}$$
$$\mathbf{v}_0 = (-9{,}096111, -6{,}916686, -1{,}305721)$$

соответственно, причем расстояние здесь выражено в астрономических единицах длины — а.е.д., или просто а.е. (астрономическая единица, т. е. длина большей главной полуоси земной орбиты), а время — в годах. В этих единицах измерения трехмерные уравнения движения кометы имеют вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu x}{r^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu y}{r^3}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{\mu z}{r^3}, \tag{4}$$

где

$$\mu = 4\pi^2 \quad \text{и} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Решите численно систему уравнений (4). Сверьте внешний вид проекции орбиты кометы Галлея на плоскость yz с изображенным на рис. 4.3.13. Начертите также проекции на плоскости xy и xz.

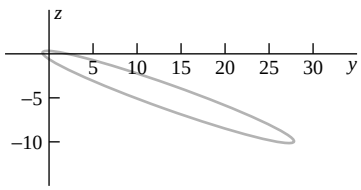


Рис. 4.3.13. Проекция орбиты кометы Галлея на плоскость yz

На рис. 4.3.14 изображен график расстояния $r(t)$ кометы Галлея от Солнца. На графике видно, что при прохождении через афелий (наиболее удаленная от Солнца точка орбиты) комета Галлея будет удалена на максимальное расстояние от Солнца, приблизительно равное 35 а.е., причем расстояние от перигелия до афелия комета Галлея преодолевает за время, немного меньшее, чем 40 лет, и снова вернется в перигелий примерно через три четверти века (после предыдущего прохождения перигелия). На увеличенном участке графика, приведенном на рис. 4.3.15, видно, что период обращения кометы Галлея приблизительно равен 76 лет. Используйте ваше численное решение для уточнения этих данных. Постарайтесь наиболее точно вычислить календарную дату следующего прохода кометы Галлея через ее перигелий?

Ваша собственная комета

В ночь перед вашим днем рождения в 1997 году вы установили свой телескоп на вершине недалеко расположенной от вашего дома горы. Ночь была ясной, безоблачной, звездной и вам улыбнулась фортуна: в 0 часов 30 минут ночи вы заметили новую комету. После повторных

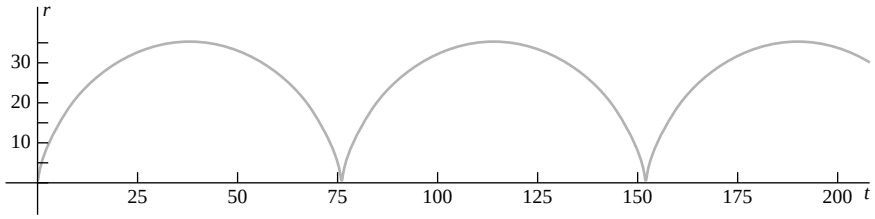


Рис. 4.3.14. График расстояния $r(t)$ от кометы Галлея до Солнца на протяжении 200 лет. Есть ли пересечение около точки $t = 75$?

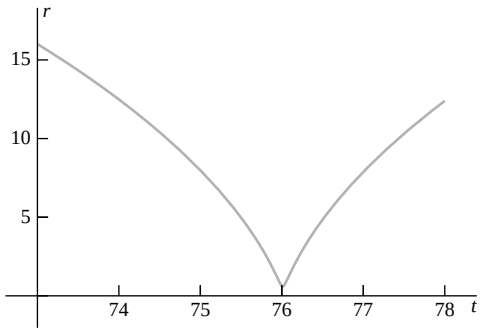
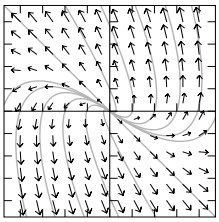


Рис. 4.3.15. Увеличенный участок графика при проходе кометы Галлея через перигелий приблизительно через 76 лет

наблюдений в следующие ночи вам удалось вычислить ее координаты в ту первую ночь: координаты в гелиоцентрической системе координат: $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ и вектор скорости $\mathbf{v}_0 = (vx_0, vy_0, vz_0)$. Используя эти данные, определите

- расстояние кометы от Солнца в перигелии (самая близкая к Солнцу точка орбиты) и в афелии (самая дальняя от Солнца точка орбиты);
- скорости кометы при прохождении через перигелий и через афелий;
- период обращения кометы вокруг Солнца;
- следующие две даты прохождения кометы через перигелий.

Если измерять расстояние в астрономических единицах, а время — в годах, то уравнения движения кометы примут вид (4). Для вашей собственной кометы выберите произвольные начальные координаты и скорости того же порядка, что и у кометы Галлея. В случае необходимости повторно осуществляйте произвольный выбор начального положения и вектора скорости до тех пор, пока не получите правдоподобную эксцентрическую орбиту, выходящую за пределы орбиты Земли (как у большинства настоящих комет).



ГЛАВА 5

Линейные системы дифференциальных уравнений

5.1. Матрицы и линейные системы

Хотя простые методы исключения раздела 4.2 позволяют найти решение маленьких линейных систем с постоянными коэффициентами, содержащих только два или три уравнения, общие свойства линейных систем, а также методы решения больших систем легче всего (и наиболее компактно) можно представить, только используя язык и систему обозначений векторов и матриц. Для того чтобы быстро вспомнить обозначения и основные результаты, в начале этого раздела приведен достаточно завершенный и независимый обзор матричной системы обозначений и необходимой терминологии. Специальные методы линейной алгебры, особенно те, которые связаны с собственными значениями и собственными векторами, будут представлены по мере необходимости в последующих разделах этой главы.

Обзор матричной системы обозначений и терминологии

Матрица размера $m \times n$ — прямоугольный массив mn чисел (или **элементов**), который состоит из m (горизонтальных) **строк** и n (вертикальных) **столбцов**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

Обычно матрицы мы будем обозначать прописными **жирными** буквами. Иногда мы будем использовать сокращение $\mathbf{A} = [\, a_{ij} \,]$ для матрицы с элементом a_{ij} в i-й строке и j-м столбце, как в равенстве (1). **Нулевую матрицу**, каждый элемент которой равен нулю, мы обозначаем

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Фактически для каждой пары положительных целых чисел m и n существует своя нулевая матрица размера $m \times n$, но единственный символ $\mathbf{0}$ используется для обозначения всех этих нулевых матриц.

Говорят, что две матрицы размера $m \times n$ $\mathbf{A} = [\, a_{ij} \,]$ и $\mathbf{B} = [\, b_{ij} \,]$ равны, если **равны** их соответствующие элементы; т. е. если $a_{ij} = b_{ij}$ для $1 \leqq i \leqq m$ и $1 \leqq j \leqq n$. Чтобы **сложить** $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, мы складываем соответствующие их элементы:

➤
$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [\, a_{ij} \,] + [\, b_{ij} \,] = [\, a_{ij} + b_{ij} \,]. \tag{3}$$

Таким образом, элемент на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ равен $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Чтобы умножать матрицу $\mathbf{A}$ на число c, мы просто умножаем каждый из ее элементов на c:

➤
$$c\mathbf{A} = \mathbf{A}c = [ca_{ij}]. \tag{4}$$

Пример 1 Если

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -13 & 10 \\ 7 & -5 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -7 \end{bmatrix},$$

то

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -13 & 10 \\ 7 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 7 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}$$

и

$$6\mathbf{C} = 6 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 30 & -42 \end{bmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Мы обозначаем $(-1)\mathbf{A}$ через $-\mathbf{A}$ и определяем **вычитание** матриц следующим образом:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}). \tag{5}$$

Только что определенные матричные операции имеют следующие свойства, каждое из которых походит на знакомое алгебраическое свойство системы вещественных чисел:

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}, \qquad \mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{0}; \tag{6}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \qquad \text{(коммутативность)}; \tag{7}$$

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \qquad \text{(ассоциативность)}; \tag{8}$$

$$\begin{aligned} c(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= c\mathbf{A} + c\mathbf{B}, \\ (c + d)\mathbf{A} &= c\mathbf{A} + d\mathbf{A}. \end{aligned} \qquad \text{(дистрибутивность)} \tag{9}$$

Каждое из этих свойств легко проверяется поэлементным сравнением матриц с учетом соответствующего свойства вещественных чисел. Например, $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$ для всех i и j, потому что сложение вещественных чисел коммутативно. Следовательно,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \left[\, a_{ij} + b_{ij} \,\right] = \left[\, b_{ij} + a_{ij} \,\right] = \mathbf{B} + \mathbf{A}.$$

Матрица $\mathbf{A}^T$, **транспонированная** к матрице размера $m \times n$ $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ — это матрица размера $n \times m$ (заметьте!) j-й столбец которой — это j-я строка матрицы **A** (и следовательно, ее i-я строка — это i-й столбец матрицы **A**). Таким образом, $\mathbf{A}^T = \left[\, a_{ji} \,\right]$, хотя это и не идеально с точки зрения введенной системы обозначений; вы должны помнить, что $\mathbf{A}^T$ имеет тот же самый размер, что и **A**, только если она **квадратная** матрица, т. е. только если $m = n$.

Матрица размера $m \times 1$ — это матрица, имеющая только один единственный столбец. Такую матрицу называют **вектором-столбцом**, или просто **вектором**. Мы часто обозначаем векторы-столбцы **жирными** строчными буквами[1], вот так:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}.$$

Точно так же **вектор-строка** — это матрица размера $1 \times n$, имеющая только одну единственную строку, например, $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 5 & 17 & 0 & -3 \end{bmatrix}$. По эстетическим и типографским причинам мы часто записываем вектор-столбец как результат транспонирования вектора-строки; например, два предыдущих вектора-столбца могут быть написаны в виде

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 0 \end{bmatrix}^T \quad \text{и} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m \end{bmatrix}^T.$$

Иногда удобно записать матрицу размера $m \times n$ как состоящую из m векторов-строк или из ее n векторов-столбцов. Таким образом, если мы пишем

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_n \end{bmatrix},$$

это значит, что $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots$ и $\mathbf{a}_m$ — векторы-*строки* матрицы **A** и $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots$ и $\mathbf{b}_n$ — векторы-*столбцы* матрицы **B**.

Матричное умножение

Свойства, перечисленные в тождествах (6)–(9), весьма естественны и ничего необычного в них нет. Первые неожиданности в царстве матричной арифметики связаны с умножением. Сначала мы определим **скалярное произведение** вектора-строки **a** и вектор-столбца **b**, если каждый из этих векторов имеет то же самое число p элементов. Если

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_p \end{bmatrix}^T,$$

[1] Иными словами, буквами на *нижнем* регистре. — *Примеч. ред.*

то $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ определяется следующим образом:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{k=1}^{p} a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_p b_p, \tag{10}$$

точно так, как *скалярное* произведение двух векторов, знакомое из элементарного курса аналитической геометрии.

Произведение $\mathbf{AB}$ двух матриц определено только тогда, когда число столбцов $\mathbf{A}$ равно числу строк $\mathbf{B}$. Если $\mathbf{A}$ — матрица размера $m \times p$ и $\mathbf{B}$ — матрица размера $p \times n$, то их **произведение** $\mathbf{AB}$ является матрицей размера $m \times n$ $\mathbf{C} = \left[\, c_{ij} \,\right]$, где c_{ij} — скалярное произведение i-го вектора-строки $\mathbf{a}_i$ матрицы $\mathbf{A}$ на j-й вектор-столбец $\mathbf{b}_j$ матрицы $\mathbf{B}$. Таким образом,

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \left[\, \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j \,\right]. \tag{11}$$

Пользуясь обозначениями элементов матриц $\mathbf{A} = \left[\, a_{ij} \,\right]$ и $\mathbf{B} = \left[\, b_{ij} \,\right]$, равенство (11) можно записать в форме

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}. \tag{12}$$

Для ручного вычисления определение из уравнения (11) и (12) просто запомнить, представляя

$$\mathbf{a}_i \longrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ & & & & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix}, \quad .$$

$$\uparrow$$
$$\mathbf{b}_j$$

Это показывает, что для того, чтобы получить элемент c_{ij}, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца произведения $\mathbf{AB}$, нужно взять скалярное произведение вектора-строки $\mathbf{a}_i$ на вектор-столбец $\mathbf{b}_j$. Это можно представить как "слияние строки $\mathbf{A}$ со столбцом из $\mathbf{B}$". Это также напоминает, что число столбцов матрицы $\mathbf{A}$ должно быть равно числу строк матрицы $\mathbf{B}$.

Пример 2 Проверьте, правильно ли вы понимаете определение матричного умножения, проверив, что если

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 13 & 9 \\ 4 & 0 \end{bmatrix},$$

то

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 & 9 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 18 \\ 7 & -9 \end{bmatrix}.$$

Подобно этому, проверьте, что

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & -2 \\ 6 & -7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - 3y + z \\ 4x + 5y - 2z \\ 6x - 7y \end{bmatrix}$$

и что

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -1 \\ 2 & 15 & 1 \\ 4 & 23 & 3 \\ 6 & 31 & 5 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Прямым (хотя и длинным) вычислением, основанным на определении, можно показать, что матричное умножение ассоциативно и дистрибутивно относительно матричного сложения; иными словами,

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C} \tag{13}$$

и

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}, \tag{14}$$

при условии, что матрицы имеют такие размеры, что указанные умножения и сложения определены.

Но матричное умножение не коммутативно. Иными словами, если **A** и **B** — две матрицы размера $n \times n$ (так что оба произведения **AB** и **BA** определены и результаты умножения имеют тот же самый размер — $n \times n$), то, вообще говоря,

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}. \tag{15}$$

Кроме того, может случиться, что

$$\mathbf{AB} = \mathbf{0} \quad \text{даже при том, что} \quad \mathbf{A} \neq \mathbf{0} \quad \text{и} \quad \mathbf{B} \neq \mathbf{0}. \tag{16}$$

Примеры, иллюстрирующие равенства (15) и (16) могут быть найдены в задачах, хотя вы легко можете придумать ваши собственные примеры матриц размера 2×2 с маленькими целочисленными элементами.

Обратные матрицы

Квадратная матрица размера $n \times n$ по определению имеет **порядок** n. **Единичная** матрица порядка n — это квадратная матрица

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \tag{17}$$

в которой каждый элемент на **главной диагонали** равен 1, а все недиагональные элементы являются нулевыми. Весьма просто проверить, что

$$\mathbf{AI} = \mathbf{A} = \mathbf{IA} \tag{18}$$

для любой квадратной матрицы $\mathbf{A}$ того же самого порядка, что и $\mathbf{I}$.

Если $\mathbf{A}$ — квадратная матрица, то **обратная** к $\mathbf{A}$ квадратная матрица $\mathbf{B}$ имеет тот же самый порядок, что и $\mathbf{A}$, причем выполнены *оба* равенства

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I} \quad \text{и} \quad \mathbf{BA} = \mathbf{I}.$$

Нетрудно показать, что если матрица $\mathbf{A}$ имеет обратную матрицу, то эта обратная матрица единственна. Следовательно, мы можем говорить о матрице, обратной к $\mathbf{A}$, как об *однозначно* определяемой по матрице $\mathbf{A}$, и мы обозначаем матрицу, обратную к матрице $\mathbf{A}$, через $\mathbf{A}^{-1}$. Таким образом,

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}, \tag{19}$$

если существует $\mathbf{A}^{-1}$. Ясно, что некоторые квадратные матрицы не имеют обратных, включая и любую квадратную нулевую матрицу. Также просто показать, что если $\mathbf{A}^{-1}$ существует, то существует $(\mathbf{A}^{-1})^{-1}$ и $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$.

В линейной алгебре доказывается, что $\mathbf{A}^{-1}$ существует тогда и только тогда, когда детерминант $\det(\mathbf{A})$ квадратной матрицы $\mathbf{A}$ отличен от нуля. Если это так, матрица $\mathbf{A}$ называется **несингулярной (неособой)**[2]; если $\det(\mathbf{A}) = 0$, то матрица $\mathbf{A}$ называется **сингулярной (особой)**[3] матрицей.

Детерминанты

Мы предполагаем, что вам уже приходилось вычислять детерминанты матриц размеров 2×2 и 3×3 в предшествующих курсах. Если $\mathbf{A} = \left[\, a_{ij} \,\right]$ — матрица размера 2×2, то ее **детерминант** $\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}|$ определен как

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{}$$

Детерминанты высших порядков могут быть определены по индукции следующим образом. Пусть $\mathbf{A} = \left[\, a_{ij} \,\right]$ — матрица размера $n \times n$. Тогда обозначим через $\mathbf{A}_{ij}$ матрицу размера $(n-1) \times (n-1)$, полученную из $\mathbf{A}$ вычеркиванием ее i-й строки и ее j-го столбца. *Разложение* детерминанта $|\mathbf{A}|$ по его i-й строке дает формула

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |\mathbf{A}_{ij}| \qquad (i \text{ фиксировано}), \tag{20a}$$

а его разложение по его j-му столбцу дается формулой

$$|\mathbf{A}| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |\mathbf{A}_{ij}| \qquad (j \text{ фиксировано}). \tag{20b}$$

[2] А также **неособенной** и **невырожденной**. — *Примеч. ред.*
[3] А также **особенной** и **вырожденной**. — *Примеч. ред.*

В линейной алгебре доказывается, что какую бы строку мы ни использовали в равенстве (20a), и какой бы столбец мы ни использовали в равенстве (20b), результаты будут теми же самыми во всех $2n$ случаях. Следовательно, определение детерминанта $|\mathbf{A}|$ этими формулами приемлемо с логической точки зрения.

Пример 3 Если

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix},$$

то разложение $|\mathbf{A}|$ по его второй строке имеет вид

$$|\mathbf{A}| = -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} =$$
$$= -4 \cdot 11 + 2 \cdot 11 - 1 \cdot 11 = -33.$$

А разложение $|\mathbf{A}|$ по его третьему столбцу выглядит так:

$$|\mathbf{A}| = -2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= -2 \cdot 16 - 1 \cdot 11 + 5 \cdot 2 = -33. \quad \blacksquare$$

Калькуляторы и компьютеры удобны для вычисления детерминантов и обратных матриц более высоких порядков, но детерминанты матриц и обратные матрицы размера 2×2 просто вычислить и вручную. Например, если детерминант матрицы размера 2×2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

отличен от нуля ($|\mathbf{A}| = ad - bc \neq 0$), то обратная к ней матрица

➤
$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Обратите внимание, что матрица в правой части равенства (21) получена из $\mathbf{A}$ обращением порядка следования диагональных элементов и изменением знаков недиагональных элементов.

Пример 4 Если

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 7 \end{bmatrix},$$

то $|\mathbf{A}| = 6 \cdot 7 - 5 \cdot 8 = 2$. Следовательно, уравнение (21) дает

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -4 \\ -\frac{5}{2} & 3 \end{bmatrix}.$$

Сейчас вы должны самостоятельно проверить, что

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -4 \\ -\frac{5}{2} & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Матричные (матричнозначные) функции

Матричнозначная функция, или просто **матричная функция,** — это матрица, например

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \tag{22a}$$

или

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}(t) & a_{m2}(t) & \cdots & a_{mn}(t) \end{bmatrix}, \tag{22b}$$

в которой каждый элемент является функцией t. Мы говорим, что матричная функция $\mathbf{A}(t)$ **непрерывна** (или **дифференцируема**) в точке (или на интервале), если каждый из ее элементов имеет то же самое свойство. **Производная** дифференцируемой матричной функции определена поэлементным дифференцированием; т. е.

➤
$$\mathbf{A}'(t) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \left[\frac{da_{ij}}{dt} \right]. \tag{23}$$

Пример 5 Если

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \\ e^{-t} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} \sin t & 1 \\ t & \cos t \end{bmatrix},$$

то

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2t \\ -e^{-t} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{A}'(t) = \begin{bmatrix} \cos t & 0 \\ 1 & -\sin t \end{bmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Правила дифференцирования

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{B}}{dt} \tag{24}$$

и

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}\frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{B} \tag{25}$$

легко проверяются поэлементным применением аналогичных правил дифференцирования, известных из элементарного курса анализа действительных (вещественнозначных) функций. Если c — (постоянное) вещественное число и $\mathbf{C}$ — постоянная матрица, то

$$\frac{d}{dt}(c\mathbf{A}) = c\frac{d\mathbf{A}}{dt}, \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{CA}) = \mathbf{C}\frac{dA}{dt} \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{AC}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{C}. \tag{26}$$

Из-за некоммутативности матричного умножения порядок множителей в уравнениях (25) и (26) изменить нельзя.

Линейные системы первого порядка

Система обозначений и терминология, принятая в теории матриц и векторной алгебре, могут оказаться сложными только при первом знакомстве, но их легко освоить на практике. Мы в основном будем использовать матричные обозначения для упрощения вычислений, необходимых для решения систем дифференциальных уравнений, особенно тех вычислений, которые были бы обременительны в скалярной нотации.

Мы обсудим здесь общую систему n линейных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned}
x_1' &= p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2 + \cdots + p_{1n}(t)x_n + f_1(t),\\
x_2' &= p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2 + \cdots + p_{2n}(t)x_n + f_2(t),\\
x_3' &= p_{31}(t)x_1 + p_{32}(t)x_2 + \cdots + p_{3n}(t)x_n + f_3(t),\\
&\vdots\\
x_n' &= p_{n1}(t)x_1 + p_{n2}(t)x_2 + \cdots + p_{nn}(t)x_n + f_n(t).
\end{aligned} \tag{27}$$

Если мы введем *матрицу коэффициентов*

$$\mathbf{P}(t) = \left[\, p_{ij}(t) \,\right]$$

и векторы-столбцы

$$\mathbf{x} = \left[\, x_i \,\right] \quad \text{и} \quad \mathbf{f}(t) = \left[\, f_i(t) \,\right],$$

то система (27) примет вид единственного матричного уравнения

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t). \tag{28}$$

Мы увидим, что общая теория линейной систем вида (27) аналогична теории одного уравнения n-го порядка. Матричные обозначения, используемые в уравнении (28), не только подчеркивают эту аналогию, но и позволяют значительно сократить запись.

Решение уравнения (28) на открытом интервале I является вектор-функцией (столбцом) $\mathbf{x}(t) = \left[\, x_i(t) \,\right]$, такой что составляющие функции $\mathbf{x}$ удовлетворяют системе (27) тождественно на I. Если обе функции $p_{ij}(t)$ и $f_i(t)$ непрерывны на I, то теорема 1 из раздела 4.1 гарантирует существование на I единственного решения $\mathbf{x}(t)$, удовлетворяющего заданным начальным условиям $\mathbf{x}(a) = \mathbf{b}$.

Пример 6 Система первого порядка

$$x_1' = 4x_1 - 3x_2,$$
$$x_2' = 6x_1 - 7x_2$$

может быть записана в виде единственного матричного уравнения

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -7 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{x}.$$

Чтобы проверить, что обе вектор-функции

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} 3e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{x}_2(t) = \begin{bmatrix} e^{-5t} \\ 3e^{-5t} \end{bmatrix}$$

являются решениями матричного дифференциального уравнения с матрицей коэффициентов $\mathbf{P}$, достаточно вычислить

$$\mathbf{P}\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6e^{2t} \\ 4e^{2t} \end{bmatrix} = \mathbf{x}_1'$$

и

$$\mathbf{P}\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-5t} \\ 3e^{-5t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5e^{-5t} \\ -15e^{-5t} \end{bmatrix} = \mathbf{x}_2'. \quad \blacksquare$$

Чтобы исследовать общий характер (природу) решений уравнения (28), мы сначала рассматриваем **соответствующее однородное уравнение**

➤
$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}, \tag{29}$$

которое имеет вид уравнения (28), но только если в нем положить $\mathbf{f}(t) \equiv \mathbf{0}$. Мы ожидаем, что оно имеет n решений $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$, которые независимы в некотором соответствующем смысле, притом таких, что каждое решение уравнения (29) является линейной комбинацией этих n частных решений. Данные n решений $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ уравнения (29), позволяют нам ввести обозначение

$$\mathbf{x}_j(t) = \begin{bmatrix} x_{1j}(t) \\ \vdots \\ x_{ij}(t) \\ \vdots \\ x_{nj}(t) \end{bmatrix}. \tag{30}$$

Таким образом, $x_{ij}(t)$ обозначает i-й компонент вектора $\mathbf{x}_j(t)$, так что второй индекс относится к вектор-функции $\mathbf{x}_j(t)$, а первый индекс обозначает компонент этой функции. Теорема 1 походит на теорему 1 из раздела 3.2.

Теорема 1 Принцип суперпозиции

Пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ — это n решений однородного линейного уравнения (29) на открытом интервале I. Если $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — константы, то линейная комбинация

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t) \tag{31}$$

также представляет собой решение уравнения (29) на I.

Доказательство. Мы знаем, что $\mathbf{x}_i' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}_i$ для каждого i ($1 \leqq i \leqq n$), так что из этого немедленно следует, что

$$\begin{aligned}\mathbf{x}' &= c_1\mathbf{x}_1' + c_2\mathbf{x}_2' + \cdots + c_n\mathbf{x}_n' = \\ &= c_1\mathbf{P}(t)\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{P}(t)\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{P}(t)\mathbf{x}_n = \\ &= \mathbf{P}(t)(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n).\end{aligned}$$

Иными словами, $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$, что и нужно было доказать. Замечательная простота этого доказательства наглядно демонстрирует одно из преимуществ матричной системы обозначений. ▲

Пример 6 *Продолжение*

Если $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ — два решения уравнения

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}\mathbf{x},$$

приведенные в примере 6, то линейная комбинация

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) = c_1\begin{bmatrix} 3e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} e^{-5t} \\ 3e^{-5t} \end{bmatrix}$$

также является решением. В скалярной форме при $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2]^T$ это дает решение

$$\begin{aligned}x_1(t) &= 3c_1e^{2t} + \ c_2e^{-5t}, \\ x_2(t) &= 2c_1e^{2t} + 3c_2e^{-5t},\end{aligned}$$

что эквивалентно общему решению, найденному методом исключения в примере 2 из раздела 4.2. ■

Независимость и общие решения

Линейная независимость определена тем же самым способом для векторнозначных функций, что и для действительных (вещественных) функций (раздел 3.2). Векторнозначные функции $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ **линейно зависимы** на интервале I, если существуют константы c_1, $c_2, \ldots, c_n$, *не все равные нулю*, такие что

➤
$$c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t) = \mathbf{0} \tag{32}$$

для всех t из I. В противном случае функции называются **линейно независимыми**. Эквивалентная формулировка: функции линейно независимы, если никакая из них не является

линейной комбинацией других. Например, два решения $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ из примера 6 линейно независимы, потому что, очевидно, ни одна из этих функций не равна скаляру (числу), умноженному на другую.

Как и в случае единственного уравнения n-го порядка, существует детерминант Вронского, который позволяет установить, действительно ли линейно зависимы n данных решений однородного уравнения (29). Если $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ — это такие решения, тогда их **детерминант Вронского** — детерминант матрицы размера $n \times n$

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}, \tag{33}$$

если использовать систему обозначений (30) для компонентов решений. Мы можем обозначать этот детерминант $W(t)$ или $W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$. Обратите внимание, что W — детерминант матрицы, векторами-*столбцами* которой являются решения $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$. Теорема 2 походит на теорему 3 из раздела 3.2. Кроме того, ее доказательство, по сути то же самое, только определение $W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$ равенством (33) заменяет определение детерминанта Вронского n решений единственного уравнения n-го порядка (см. задачи 42–44).

Теорема 2 Вронскианы решений

Предположим, что $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ — это n решений однородного линейного уравнения $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ на открытом интервале I. Предположим также, что $\mathbf{P}(t)$ непрерывна на открытом интервале I. Пусть

$$W = W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n).$$

Тогда:

- если $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ линейно зависимы на открытом интервале I, то $W = 0$ в каждой точке открытого интервала I;
- если $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ линейно независимы на открытом интервале I, то $W \neq 0$ в каждой точке открытого интервала I.

Таким образом, для решений однородных систем есть только две возможности: либо $W = 0$ в *каждой* точке интервала I, либо $W = 0$ ни в *одной* точке интервала I. ▲

Пример 7 Легко проверить (как в примере 6), что

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} 2e^t \\ 2e^t \\ e^t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2(t) = \begin{bmatrix} 2e^{3t} \\ 0 \\ -e^{3t} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{x}_3(t) = \begin{bmatrix} 2e^{5t} \\ -2e^{5t} \\ e^{5t} \end{bmatrix}$$

являются решениями уравнения

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}. \tag{34}$$

Вронскиан этих решений

$$W = \begin{vmatrix} 2e^t & 2e^{3t} & 2e^{5t} \\ 2e^t & 0 & -2e^{5t} \\ e^t & -e^{3t} & e^{5t} \end{vmatrix} = e^{9t} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -16e^{9t}$$

всегда отличен от нуля. Следовательно, из теоремы 2 следует, что решения $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ и $\mathbf{x}_3$ линейно независимы (на любом открытом интервале). ■

Теорема 3 походит на теорему 4 из раздела 3.2. Она говорит, что **общее решение** *однородной системы* с матрицей размера $n \times n$ $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ является линейной комбинацией

➤
$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n \tag{35}$$

любых n данных линейно независимых решений $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$.

Теорема 3 Общие решения однородных систем

Пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ — это n линейно независимых решения однородного линейного уравнения $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ на открытом интервале I, на котором непрерывна функция $\mathbf{P}(t)$. Если $\mathbf{x}(t)$ — любое решение уравнения $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ на открытом интервале I, то существуют числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$, такие что

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t) \tag{35}$$

для всех t из интервала I.

Доказательство. Пусть a — фиксированная точка интервала I. Сначала мы покажем, что существуют числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$, такие что решение

$$\mathbf{y}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t) \tag{36}$$

имеет те же самые начальные значения при $t = a$, что и данное решение $\mathbf{x}(t)$; т. е. такие что

$$c_1\mathbf{x}_1(a) + c_2\mathbf{x}_2(a) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(a) = \mathbf{x}(a). \tag{37}$$

Пусть $\mathbf{X}(t)$ — матрица размера $n \times n$ с векторами-столбцами $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ и пусть $\mathbf{c}$ — вектор-столбец с компонентами $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Тогда уравнение (37) может быть записано в форме

$$\mathbf{X}(a)\mathbf{c} = \mathbf{x}(a). \tag{38}$$

Детерминант Вронского $W(a) = |\mathbf{X}(a)|$ отличен от нуля, потому что решения $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ линейно независимы. Следовательно, матрица $\mathbf{X}(a)$ имеет обратную матрицу $\mathbf{X}(a)^{-1}$. Поэтому вектор $\mathbf{c} = \mathbf{X}(a)^{-1}\mathbf{x}(a)$ удовлетворяет уравнению (38), что и было нужно.

Наконец, обратите внимание на то, что данное решение $\mathbf{x}(t)$ и решение $\mathbf{y}(t)$ уравнения (36) — со значениями c_i, определенными равенством $\mathbf{c} = \mathbf{X}(a)^{-1}\mathbf{x}(a)$, — имеют те же самые начальные значения (при $t = a$). Тогда из теоремы существования и единственности раздела 4.1 следует, что $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t)$ для всех t на интервале I. Это доказывает справедливость равенства (35). ▲

Замечание. Каждая система $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ с непрерывной матрицей коэффициентов размера $n \times n$ действительно имеет n линейно независимых решений $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$, что предполагается в условии теоремы 3. Достаточно, например, в качестве $\mathbf{x}_j(t)$ выбрать то единственное решение, которое удовлетворяет условию

$$\mathbf{x}_j(a) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \longleftarrow \text{строка } j$$

— т. е. вектор-столбец со всеми нулевыми элементами, за исключением 1 на j-м месте. (Другими словами, $\mathbf{x}_j(a)$ — это просто j-й столбец единичной матрицы.) Тогда

$$W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)\big|_{t=a} = |\mathbf{I}| \neq 0,$$

так что решения $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ линейно независимы по теореме 2. Как фактически найти эти решения в явном виде — другой вопрос, к нему мы обратимся в разделе 5.2 (в случае постоянных матриц коэффициентов). ■

Задачи Коши (задачи с начальными условиями) и элементарные операции над строками

Общее решение уравнения (35) однородной линейной системы $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ может быть записано в форме

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{c}, \tag{39}$$

где

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) & \mathbf{x}_2(t) & \cdots & \mathbf{x}_n(t) \end{bmatrix} \tag{40}$$

— матрица размера $n \times n$, *векторы-столбцы* которой представляют собой линейно независимые решения $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$, причем $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}^T$ — вектор коэффициентов в линейной комбинации

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t). \tag{35}$$

Предположим теперь, что мы желаем решить *задачу Коши (задачу с начальными условиями)*

➤
$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{P}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(a) = \mathbf{b} \tag{41}$$

с заданным начальным вектором $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}^T$. Тогда, согласно равенству (39), достаточно решить систему

$$\mathbf{X}(a)\mathbf{c} = \mathbf{b}, \tag{42}$$

чтобы найти коэффициенты $c_1, c_2, \ldots, c_n$ в равенстве (35).

Поэтому мы кратко рассмотрим *метод элементарных преобразований строк*, позволяющий решить систему линейных *алгебраических* уравнений с матрицей размера $n \times n$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned} \tag{43}$$

При этом предполагается, что матрица коэффициентов $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ несингулярна (неособая), постоянный вектор $\mathbf{b} = [b_i]$ заранее задан, а неизвестными считаются $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Основная идея состоит в том, чтобы преобразовать систему (43) в более простую систему, имеющую *верхнюю треугольную форму*

$$\begin{aligned} \overline{a}_{11}x_1 + \overline{a}_{12}x_2 + \cdots + \overline{a}_{1n}x_n &= \overline{b}_1, \\ \overline{a}_{22}x_2 + \cdots + \overline{a}_{2n}x_n &= \overline{b}_2, \\ &\vdots \\ \overline{a}_{nn}x_n &= \overline{b}_n, \end{aligned} \tag{44}$$

в которой явно в j-е уравнение входят только неизвестные $x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n$ ($j = 1, 2, \ldots, n$). Преобразованная система тогда легко решается процессом *обратной замены (подстановки)*. Сначала последнее уравнение (44) решается относительно x_n, затем предпоследнее решается относительно x_{n-1} и т. д., пока наконец не будет решено первое уравнение относительно x_1.

Преобразование системы (43) к верхней треугольной форме легче всего описать в терминах элементарных операций над строками *расширенной матрицы коэффициентов*

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right], \tag{45}$$

которая получается приписыванием вектора $\mathbf{b}$ к матрице $\mathbf{A}$ в качестве дополнительного столбца. Допустимы **элементарные операции над строками** следующих трех типов.

1. Умножить любую (отдельную) строку матрицы на константу, отличную от нуля.
2. Поменять местами любые две строки матрицы.
3. Вычесть одну строку, умноженную на (постоянное) число, из любой другой строки.

Цель состоит в том, чтобы использовать последовательность таких операций (одну за другой, по очереди), чтобы преобразовать $\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{array}\right]$ в верхнюю треугольную матрицу, т. е.

в такую матрицу, которая имеет только нули ниже своей главной диагонали. Тогда эта верхняя треугольная расширенная матрица коэффициентов соответствует верхней треугольной системе (44). Процесс преобразования $\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{b} \end{array}\right]$ выполняется над одним столбцом на одном шаге, слева направо, как показано в следующем примере.

Пример 8 Используем векторы решения, данные в примере 7, чтобы решить задачу Коши (задачу с начальными условиями)

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}. \tag{46}$$

Решение Из теоремы 3 следует, что линейная комбинация

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + c_3\mathbf{x}_3(t) =$$

$$= c_1 \begin{bmatrix} 2e^t \\ 2e^t \\ e^t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2e^{3t} \\ 0 \\ -e^{3t} \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 2e^{5t} \\ -2e^{5t} \\ e^{5t} \end{bmatrix}$$

является общим решением линейной системы (46) с матрицей размера 3×3. В скалярной форме это дает общее решение

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 2c_1e^t + 2c_2e^{3t} + 2c_3e^{5t}, \\ x_2(t) &= 2c_1e^t \qquad\quad - 2c_3e^{5t}, \\ x_3(t) &= \ c_1e^t - \ c_2e^{3t} + \ c_3e^{5t}. \end{aligned}$$

Мы ищем частное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 2, \quad x_3(0) = 6.$$

Подставив эти значения в три предыдущих скалярных уравнения, получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} 2c_1 + 2c_2 + 2c_3 &= 0, \\ 2c_1 \qquad - 2c_3 &= 2, \\ c_1 - \ c_2 + \ c_3 &= 6 \end{aligned}$$

с расширенной матрицей коэффициентов

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right].$$

Умножение каждой из первых двух строк на $\frac{1}{2}$ дает

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \end{array}\right],$$

а затем вычитание первой строки из второй строки и из третьей строки дает матрицу

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 6 \end{array}\right].$$

Первый столбец этой матрицы теперь имеет желаемую форму.

Теперь мы умножаем вторую строку на -1, а затем дважды прибавляем результат к третьей строке. Таким образом мы получаем верхнюю треугольную расширенную матрицу коэффициентов

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right],$$

которая соответствует преобразованной системе

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + \ c_3 &= \ \ 0, \\ c_2 + 2c_3 &= -1, \\ 4c_3 &= \ \ 4. \end{aligned}$$

Наконец, мы решаем эту систему: мы по очереди находим $c_3 = 1$, $c_2 = = -3$ и $c_1 = 2$. Таким образом, искомое частное решение выражается формулами

$$\mathbf{x}(t) = 2\mathbf{x}_1(t) - 3\mathbf{x}_2(t) + \mathbf{x}_3(t) = \left[\begin{array}{l} 4e^t - 6e^{3t} + 2e^{5t} \\ 4e^t \qquad\quad - 2e^{5t} \\ 2e^t + 3e^{3t} + \ e^{5t} \end{array}\right]. \qquad \blacksquare$$

Решения неоднородных систем

Наконец, мы обращаем наше внимание на *неоднородную* линейную систему вида

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t). \tag{47}$$

Следующая теорема походит на теорему 5 из раздела 3.2 и доказывается точно тем же самым способом. В этом разделе она играет ту же роль, которую аналогичные теоремы играли в разделе 3.2. Короче говоря, теорема 4 означает, что общее решение уравнения (47) имеет вид

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{x}_p(t), \tag{48}$$

где $\mathbf{x}_p(t)$ — какое-нибудь одно частное решение уравнения (47), а **дополнительная функция** $\mathbf{x}_c(t)$ — общее решение соответствующего однородного уравнения $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$.

Теорема 4 Решения неоднородных систем

Пусть $\mathbf{x}_p$ — частное решение неоднородного линейного уравнения (47) на открытом интервале I, на котором непрерывны функции $\mathbf{P}(t)$ и $\mathbf{f}(t)$. Пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$, — линейно

независимые решения соответствующего однородного уравнения на открытом интервале I. Если $\mathbf{x}(t)$ — любое решение уравнения (47) на I, то существуют числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$, такие что

➤
$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t) + \mathbf{x}_p(t) \tag{49}$$

для всех t из I. ▲

Таким образом, нахождение общего решения неоднородной линейной системы содержит два отдельных шага.

1. Нахождение общего решения $\mathbf{x}_c(t)$ соответствующей однородной системы.
2. Нахождение какого-нибудь одного частного решения $\mathbf{x}_p(t)$ неоднородной системы.

Тогда сумма $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{x}_p(t)$ будет общим решением неоднородной системы.

Пример 9 Неоднородная линейная система

$$\begin{aligned} x_1' &= 3x_1 - 2x_2 - 9t + 13\,, \\ x_2' &= -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 7t - 15, \\ x_3' &= -x_2 + 3x_3 - 6t + 7 \end{aligned}$$

имеет вид (47) при

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} -9t + 13 \\ 7t - 15 \\ -6t + 7 \end{bmatrix}.$$

В примере 7 мы видели, что общее решение соответствующей однородной линейной системы

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

выражается формулой

$$\mathbf{x}_c(t) = \begin{bmatrix} 2c_1e^t + 2c_2e^{3t} + 2c_3e^{5t} \\ 2c_1e^t - 2c_3e^{5t} \\ c_1e^t - c_2e^{3t} + c_2e^{5t} \end{bmatrix},$$

и мы можем подстановкой проверить, что функция

$$\mathbf{x}_p(t) = \begin{bmatrix} 3t \\ 5 \\ 2t \end{bmatrix}$$

(найденная с использованием системы компьютерной алгебры) является частным решением первоначальной неоднородной системы. Следовательно, согласно теореме 4, общее решение неоднородной системы выражается формулой

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{x}_p(t);$$

т. е. формулами

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 2c_1e^t + 2c_2e^{3t} + 2c_3e^{5t} + 3t, \\ x_2(t) &= 2c_1e^t \qquad\quad - 2c_3e^{5t} + \ 5, \\ x_3(t) &= \ c_1e^t - \ c_2e^{3t} + \ c_3e^{5t} + 2t. \end{aligned}$$

■

5.1. Задачи

1. Пусть

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Найдите **(a)** $2\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$; **(b)** $3\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$; **(c)** $\mathbf{AB}$; **(d)** $\mathbf{BA}$.

2. Проверьте, что (a) $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$ и что (b) $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$, где матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ те же, что и в задаче 1, а

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. Найдите $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{BA}$, если

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -4 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

4. Пусть матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ те же, что и в задаче 3 и

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2t \\ e^{-t} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} t^2 \\ \sin t \\ \cos t \end{bmatrix}.$$

Найдите $\mathbf{Ay}$ и $\mathbf{Bx}$. Определены ли произведения $\mathbf{Ax}$ и $\mathbf{By}$? Объясните ваш ответ.

5. Пусть

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ -5 & 2 & 7 \end{bmatrix} \text{ и } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Найдите **(a)** $7\mathbf{A} + 4\mathbf{B}$; **(b)** $3\mathbf{A} - 5\mathbf{B}$; **(c)** $\mathbf{AB}$; **(d)** $\mathbf{BA}$; **(e)** $\mathbf{A} - t\mathbf{I}$.

6. Пусть

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(a) Покажите, что $\mathbf{A}_1\mathbf{B} = \mathbf{A}_2\mathbf{B}$, и заметьте, что $\mathbf{A}_1 \neq \mathbf{A}_2$. Таким образом, закон сокращения для матриц не выполняется; т. е. из $\mathbf{A}_1\mathbf{B} = \mathbf{A}_2\mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$ не следует, что $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2$. **(b)** Пусть $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2$. Покажите, что $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$. Таким образом, произведением двух матриц, отличных от нуля, может быть нулевая матрица.

7. Вычислите детерминанты матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ из задачи 6. Действительно ли ваши результаты подтверждают теорему о том, что

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$$

для любых двух квадратных матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ того же самого порядка?

8. Предположим, что $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — матрицы из задачи 5. Проверьте, что $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{BA})$.

В задачах 9 и 10 проверьте правило дифференцирования произведения $(\mathbf{AB})' = \mathbf{A}'\mathbf{B} + \mathbf{AB}'$.

9. $\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} t & 2t-1 \\ t^3 & \dfrac{1}{t} \end{bmatrix}$ и $\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} 1-t & 1+t \\ 3t^2 & 4t^3 \end{bmatrix}$

10. $\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} e^t & t & t^2 \\ -t & 0 & 2 \\ 8t & -1 & t^3 \end{bmatrix}$ и $\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2e^{-t} \\ 3t \end{bmatrix}$

В задачах 11–20 запишите данную систему в форме $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$.

11. $x' = -3y, y' = 3x$

12. $x' = 3x - 2y, y' = 2x + y$

13. $x' = 2x + 4y + 3e^t, y' = 5x - y - t^2$

14. $x' = tx - e^t y + \cos t, y' = e^{-t}x + t^2 y - \sin t$

15. $x' = y + z, y' = z + x, z' = x + y$

16. $x' = 2x - 3y, y' = x + y + 2z, z' = 5y - 7z$

17. $x' = 3x - 4y + z + t, y' = x - 3z + t^2, z' = 6y - 7z + t^3$

18. $x' = tx - y + e^t z, y' = 2x + t^2 y - z, z' = e^{-t}x + 3ty + t^3 z$

19. $x_1' = x_2, x_2' = 2x_3, x_3' = 3x_4, x_4' = 4x_1$

20. $x_1' = x_2 + x_3 + 1, x_2' = x_3 + x_4 + t, x_3' = x_1 + x_4 + t^2, x_4' = x_1 + x_2 + t^3$

В задачах 21–30 сначала проверьте, что данные векторы являются решениями данной системы. Затем используйте детерминант Вронского, чтобы показать, что они линейно независимы. Наконец, напишите общее решение системы.

21. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$; $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2e^t \\ -3e^t \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{bmatrix}$

22. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\mathbf{x}$; $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ 3e^{3t} \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$

23. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x}$; $\mathbf{x}_1 = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

24. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$; $\mathbf{x}_1 = e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

25. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}\mathbf{x}$; $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 3e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} e^{-5t} \\ 3e^{-5t} \end{bmatrix}$

26. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{x}$; $\mathbf{x}_1 = e^t\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = e^{3t}\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_3 = e^{5t}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

27. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}$; $\mathbf{x}_1 = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_3 = e^{-t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

28. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$; $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -13 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = e^{3t}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_3 = e^{-4t}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

29. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -8 & -11 & -2 \\ 6 & 9 & 2 \\ -6 & -6 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$; $\mathbf{x}_1 = e^{-2t} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{x}_2 = e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_3 = e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

30. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & -12 & -1 & -6 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$; $\mathbf{x}_1 = e^{-t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$\mathbf{x}_2 = e^{-t} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_3 = e^{t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_4 = e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

В задачах 31–40 найдите то частное решение данной линейной системы, которое удовлетворяет заданным начальным условиям.

31. Система из задачи 22: $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 5$

32. Система из задачи 23: $x_1(0) = 5$, $x_2(0) = -3$

33. Система из задачи 24: $x_1(0) = 11$, $x_2(0) = -7$

34. Система из задачи 25: $x_1(0) = 8$, $x_2(0) = 0$

35. Система из задачи 26: $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 4$

36. Система из задачи 27: $x_1(0) = 10$, $x_2(0) = 12$, $x_3(0) = -1$

37. Система из задачи 29: $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 2$, $x_3(0) = 3$

38. Система из задачи 29: $x_1(0) = 5$, $x_2(0) = -7$, $x_3(0) = 11$

39. Система из задачи 30: $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 1$

40. Система из задачи 30: $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 3$, $x_3(0) = 4$, $x_4(0) = 7$

41. **(a)** Покажите, что вектор-функции

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}$$

линейно независимы на вещественной оси. **(b)** Почему из теоремы 2 следует, что *не* существует непрерывной матрицы $\mathbf{P}(t)$, такой что $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ являются решениями системы $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$?

42. Предположим, что одна из вектор-функций

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{x}_2(t) = \begin{bmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \end{bmatrix}$$

равна произведению постоянной (т. е. числа) на другую функцию на открытом интервале I. Покажите, что их детерминант Вронского $W(t) = |[x_{ij}(t)]|$ должен обратиться в нуль тождественно на I. Это доказывает часть (a) теоремы 2 в случае $n = 2$.

43. Предположим, что векторы $\mathbf{x}_1(t)$ и $\mathbf{x}_2(t)$ из задачи 42 являются решениями уравнения $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$, причем матрица размера 2×2 $\mathbf{P}(t)$ непрерывна на открытом интервале I. Покажите, что если существует точка a интервала I, в которой детерминант Вронского $W(a)$ равен нулю, то существуют числа c_1 и c_2, не оба равные нулю, такие что $c_1\mathbf{x}_1(a) + c_2\mathbf{x}_2(a) = \mathbf{0}$. Затем из единственности решения уравнения $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ выведите, что

$$c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{0}$$

для всех t из I; т. е. что $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ линейно зависимы. Это доказывает часть (b) теоремы 2 в случае $n = 2$.

44. Обобщите задачи 42 и 43, чтобы доказать теорему 2 для произвольного положительного целого числа n.

45. Пусть $\mathbf{x}_1(t)$, $\mathbf{x}_2(t)$, ..., $\mathbf{x}_n(t)$ — вектор-функции, i-е компоненты которых (для некоторого фиксированного i) $x_{i1}(t)$, $x_{i2}(t)$, ..., $x_{in}(t)$ представляют собой линейно независимые вещественные функции. Заключите, что и сами вектор-функции линейно независимы.

5.1. Приложение. Автоматическое решение линейных систем

Линейные системы с более чем двумя или тремя уравнениями чаще всего решаются с помощью калькуляторов или компьютеров. Вспомните, например, что в примере 8 нам пришлось решить линейную систему

$$\begin{aligned} 2c_1 + 2c_2 + 2c_3 &= 0, \\ 2c_1 \qquad - 2c_3 &= 2, \\ c_1 - \ c_2 + \ c_3 &= 6, \end{aligned} \tag{1}$$

которая может быть записана в форме $\mathbf{AC} = \mathbf{B}$ с матрицей коэффициентов размера 3×3 $\mathbf{A}$ в правой части и вектором-столбцом размера 3×1 $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}^T$ и вектором-столбцом неизвестных $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}^T$. На рис. 5.1.1 показано решение системы $\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ на калькуляторе TI, так что в итоге получилось $c_1 = 2$, $c_2 = -3$ и $c_3 = 1$. Тот же самый результат можно найти с помощью команд системы *Maple*:

```
with(linalg):
A := array([[2, 2, 2], [2, 0, -2], [1, -1, 1]]):
B := array([[0], [2], [6] ]):
C := multiply(inverse(A),B);
```

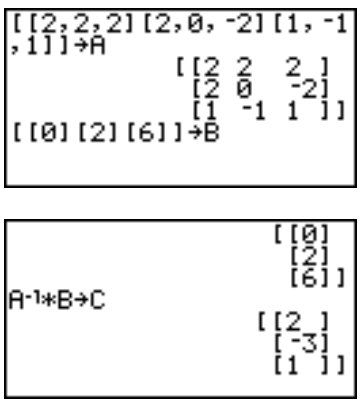


Рис. 5.1.1. Решение системы (1) вида $\mathbf{AC} = \mathbf{B}$ на калькуляторе TI-86

команд системы *Mathematica*:

```
A = {{2, 2, 2}, {2, 0, -2}, {1, -1, 1}};
B = {{0}, {2}, {6}};
C = Inverse[A].B
```

или команд системы MATLAB:

```
A = [[2   2   2]; [2   0   -2]; [1   -1   1]];
B = [0; 2; 6];
C = inv(A)*B
```

Используйте ваш собственный калькулятор или доступную вам систему компьютерной алгебры, чтобы "автоматически" решить задачи 31–40 из этого раздела.

5.2. Метод собственных значений для однородных систем

Вы уже знаете, как с помощью метода исключений найти общее решение *однородной* линейной системы первого порядка с *постоянными* коэффициентами

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Мы теперь познакомим вас с другим мощным методом, который применяется для этой же цели. Согласно теореме 3 из раздела 5.1, для этого достаточно найти n линейно независимых векторов решения $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$; тогда линейная комбинация

➤
$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n \tag{2}$$

с произвольными коэффициентами как раз и представляет собой общее решение системы (1).

Чтобы найти n нужных линейно независимых векторов решения, мы проведем аналогию с методом корней характеристического уравнения, позволяющим найти решение одного однородного уравнения с постоянными коэффициентами (раздел 3.3). Разумно ожидать, что векторы решения имеют вид

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 e^{\lambda t} \\ v_2 e^{\lambda t} \\ v_3 e^{\lambda t} \\ \vdots \\ v_n e^{\lambda t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} e^{\lambda t} = \mathbf{v}e^{\lambda t}, \tag{3}$$

где $\lambda, v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ — подходящие скалярные константы. Ведь если подставить

$$x_i = v_i e^{\lambda t}, \qquad x_i' = \lambda v_i e^{\lambda t}$$

($i = 1, 2, \ldots, n$) в (1), то множитель $e^{\lambda t}$ сократится повсюду. Это приведет нас к n линейным уравнениям, которые (для подходящих значений λ) мы можем надеяться решить и, таким образом, найти такие значения коэффициентов $v_1, v_2, \ldots, v_n$ в уравнении (3), чтобы $\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t}$. Тогда эта функция действительно будет решением системы (1).

Чтобы исследовать эту возможность, лучше записать систему (1) в матричной форме

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{4}$$

где $\mathbf{A} = \left[\, a_{ij} \,\right]$. После подстановки пробного решения $\mathbf{x} = \mathbf{v}e^{\lambda t}$ (его производная равна $\mathbf{x}' = \lambda \mathbf{v}e^{\lambda t}$) в уравнение (4) получим

$$\lambda \mathbf{v}e^{\lambda t} = \mathbf{A}\mathbf{v}e^{\lambda t}.$$

Сокращая отличный от нуля скалярный множитель $e^{\lambda t}$, получаем

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}. \tag{5}$$

Это означает, что $\mathbf{x} = \mathbf{v}e^{\lambda t}$ будет нетривиальным решением уравнения (4) при условии, что вектор $\mathbf{v}$ *отличен от нуля* и λ является константой, такой что выполняется равенство (5). Иными словами, в этом случае *матричное произведение* $\mathbf{A}\mathbf{v}$ *представляет собой умноженный на скаляр (число) вектор* $\mathbf{v}$. Теперь возникает вопрос: как найти $\mathbf{v}$ и λ?

Чтобы ответить на этот вопрос, мы перепишем уравнение (5) в форме

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}. \tag{6}$$

При заданном λ это система n однородных линейных уравнений с неизвестными v_1, v_2, $\ldots$, v_n. По известной теореме линейной алгебры она имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда детерминант ее матрицы коэффициентов обращается в нуль; т. е. тогда и только тогда, когда

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0. \tag{7}$$

В его самой простой формулировке **метод собственных значений**, позволяющий найти решение системы $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, состоит в том, чтобы сначала найти λ так, чтобы выполнялось равенство (7), а затем при этом значении λ найти решение уравнения (6) и тем самым получить $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Тогда $\mathbf{x} = \mathbf{v}e^{\lambda t}$ будет представлять собой вектор решения. Название (имя) метода объясняет следующее определение.

Определение. Собственные значения и собственные векторы

Число λ (нуль или отличное от нуля) называют **собственным значением** матрицы размера $n \times n$ $\mathbf{A}$, если

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = 0. \tag{7}$$

Собственный вектор, соответствующий собственному значению λ — это *отличный от нуля* вектор $\mathbf{v}$, такой что $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$, так что

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}. \tag{6}$$

Обратите внимание, что если собственный вектор $\mathbf{v}$ соответствует собственному значению λ, то и произведение любого постоянного скаляра, отличного от нуля, на $\mathbf{v}$, т. е. $c\mathbf{v}$, также представляет собой собственный вектор, соответствующий тому же собственному значению. Это следует из того, что каждую часть в уравнении (6) можно умножить на $c \neq 0$.

Прилагательное *собственный* обязано немецкому слову *eigen*, которое переводится в данном контексте приблизительно как *собственный*; часто употребляются также термины *характеристическое значение* и *характеристический вектор*[4]. По этой причине уравнение

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{8}$$

называется **характеристическим уравнением** матрицы $\mathbf{A}$; его корни — собственные значения $\mathbf{A}$. После раскрытия детерминанта в равенстве (8) мы, очевидно, получим многочлен степени n вида

$$(-1)^n\lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0 = 0. \tag{9}$$

По основной теореме алгебры это уравнение имеет n корней. (Возможно, некоторые из них не вещественные, а комплексные; возможно, некоторые них являются кратными.) Таким образом, матрица размера $n \times n$ имеет n собственных значений (учитывая кратность корней). Хотя мы предполагаем, что элементы матрицы $\mathbf{A}$ — вещественные числа, мы допускаем возможность наличия комплексных собственных значений и комплексных собственных векторов.

Наше обсуждение уравнений (4)–(7) позволяет дать доказательство следующей теоремы, которая лежит в основе метода собственных значений, применяя который, можно (иногда без труда!) найти решение линейной системы первого порядка с постоянными коэффициентами.

Теорема 1 Собственные значения и решения уравнения $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$

Пусть λ будет собственным значением [постоянной] матрицы коэффициентов $\mathbf{A}$ линейной системы первого порядка

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}.$$

Если собственный вектор $\mathbf{v}$ соответствует λ, то

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t}$$

является нетривиальным решением системы. ▲

[4] На английском *собственное число — eigenvalue*, а *собственный вектор — eigenvector*. Объясняя происхождение английских терминов, представляющих собой одно слово, авторы говорят о *приставке eigen*. Терминам *характеристическое значение* и *характеристический вектор* в английском языке соответствуют *characteristic value* и *characteristic vector*. — *Примеч. ред.*

Метод собственных значений

Схематически этот метод, позволяющий найти решение однородной системы с матрицей размера $n \times n$ с постоянными коэффициентами $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, можно представить следующим образом.

1. Сначала мы решаем характеристическое уравнение (8) и находим собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ матрицы $\mathbf{A}$.
2. Затем мы пытаемся найти n *линейно независимых* собственных векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, соответствующих этим собственным значениям.
3. Выполнить шаг 2 не всегда возможно, но когда это возможно, мы получаем n линейно независимых решений

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t}, \quad \mathbf{x}_2(t) = \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \ldots, \quad \mathbf{x}_n(t) = \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t}. \tag{10}$$

В этом случае общее решение системы $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ представляет собой линейную комбинацию

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t)$$

этих n решений.

Мы обсудим отдельно различные случаи, которые могут представиться в зависимости от того, являются ли собственные значения простыми или кратными, вещественными или комплексными. Случай кратных собственных значений — кратных корней характеристического уравнения — отложим до раздела 5.4.

Простые вещественные собственные значения

Если собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ вещественны и различны, тогда мы подставляем каждое из них по очереди в уравнение (6) и решая его, находим соответствующие собственные векторы $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. В этом случае может быть доказано, что векторы частного решения, определенные равенствами (10), всегда линейно независимы. (Соответствующее доказательство имеется, например, в разделе 6.2 учебника Эдвардса и Пенни по элементарной линейной алгебре, выпущенном в 1988 году (Edwards and Penney, *Elementary Linear Algebra* (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1988).) В любом конкретном примере линейную независимость можно всегда проверить с помощью детерминанта Вронского, введенного в разделе 5.1. Следующий пример иллюстрирует обсуждаемую процедуру.

Пример 1 Найдем общее решение системы

$$\begin{aligned} x_1' &= 4x_1 + 2x_2, \\ x_2' &= 3x_1 - \ x_2. \end{aligned} \tag{11}$$

Решение Матричная форма системы (11) имеет вид

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}. \tag{12}$$

Характеристическое уравнение матрицы коэффициентов можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-1-\lambda) - 6 = \\ = \lambda^2 - 3\lambda - 10 = (\lambda+2)(\lambda-5) = 0,$$

так что мы имеем различные (простые) вещественные собственные значения $\lambda_1 = -2$ и $\lambda_2 = 5$.

Для матрицы коэффициентов $\mathbf{A}$ в уравнении (12) уравнение собственного вектора $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ принимает вид

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & -1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{13}$$

причем соответствующий собственный вектор $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}^T$.

Случай 1: $\lambda_1 = -2$. Подстановка первого собственного значения $\lambda_1 = -2$ в уравнение (13) дает систему

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

т. е. два скалярных уравнения

$$\begin{aligned} 6a + 2b &= 0, \\ 3a + \ \ b &= 0. \end{aligned} \tag{14}$$

В отличие от несингулярных (неособых) (алгебраических) линейных систем, решения которых мы обсуждали в разделе 5.1, однородная линейная система (14) *сингулярна* (*особая*) — два скалярных уравнения, очевидно, эквивалентны (каждое получается в результате умножения другого на число). Поэтому система уравнений (14) имеет бесконечно много решений, отличных от нуля, — мы можем выбрать произвольным (но отличный от нуля) значение a и затем решить эту систему относительно b.

Подстановка собственного значения λ в уравнение собственного вектора $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ всегда дает сингулярную (особую) однородную линейную систему, и среди ее бесконечного множества решений мы обычно ищем "простое" решение с маленькими целочисленными значениями (если это возможно). С учетом второго уравнения (14) выбор $a = 1$ дает $b = -3$, и, таким образом,

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

— собственный вектор, который соответствует $\lambda_1 = -2$ (как и произведение любого (постоянного) отличного от нуля числа на $\mathbf{v}_1$).

Замечание. Если вместо "самого простого" выбора $a = 1, b = -3$, мы сделали бы другой выбор $a = c \neq 0$, $b = -3c$, мы получили бы собственный вектор

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} c \\ -3c \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Поскольку это в действительности произведение константы на наш предыдущий результат (собственный вектор), любой выбор приводит к произведению [постоянного] числа на то же самое решение

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} e^{-2t}.$$

Случай 2: $\lambda_2 = 5$. Подстановка второго собственного значения $\lambda = 5$ в (13) дает пару

$$\begin{aligned} -a + 2b &= 0, \\ 3a - 6b &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

эквивалентных скалярных уравнений. При $b = 1$ в первом уравнении мы получаем $a = 2$, так что собственный вектор

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

соответствует $\lambda_2 = 5$. Другой выбор $a = 2c$, $b = c \neq 0$ просто дал бы произведение $\mathbf{v}_2$ на [постоянное] число.

Эти два собственных значения и соответствующие собственные векторы приводят к двум решениям

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} e^{-2t} \quad \text{и} \quad \mathbf{x}_2(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t}.$$

Они линейно независимы, потому что их детерминант Вронского

$$\begin{vmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{vmatrix} = 7e^{3t}$$

отличен от нуля. Следовательно, общее решение системы (11) можно записать в виде

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t};$$

или (в скалярной форме),

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \quad c_1e^{-2t} + 2c_2e^{5t}, \\ x_2(t) &= -3c_1e^{-2t} + \quad c_2e^{5t}. \end{aligned}$$

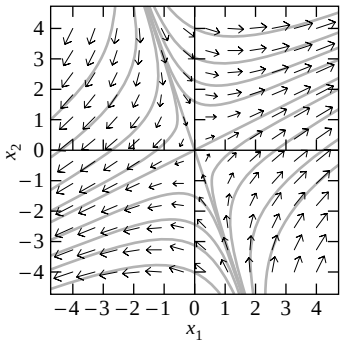


Рис. 5.2.1. Поле направлений и интегральные кривые линейной системы $x_1' = 4x_1 + 2x_2$, $x_2' = 3x_1 - x_2$ из примера 1

На рис. 5.2.1 показаны некоторые типичные интегральные кривые системы (11). Мы видим два семейства гипербол, имеющих одну и ту же пару асимптот: прямую $x_1 = 2x_2$, получающуюся из общего решения при $c_1 = 0$ и прямую $x_2 = -3x_1$, получающуюся при $c_2 = 0$. Учитывая начальные значения $x_1(0) = b_1$, $x_2(0) = b_2$, из рисунка видно, что

- если (b_1, b_2) лежит справа от прямой линии $x_2 = -3x_1$, то оба решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ стремятся к $+\infty$ при $t \to +\infty$;
- если (b_1, b_2) лежит слева от прямой линии $x_2 = -3x_1$, то оба решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ стремятся к $-\infty$ при $t \to +\infty$. ■

Замечание. Как и в примере 1, при обсуждении линейной системы $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ удобно использовать векторы $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ для обозначения различных векторнозначных решений системы, а *скалярами* x_1, x_2, $\ldots$, x_n удобно обозначать компоненты отдельного векторнозначного решения $\mathbf{x}$. ■

Анализ подсистем

Часто сложный процесс или систему можно разбить на более простые подсистемы или части, которые могут быть проанализированы отдельно. Тогда, чтобы смоделировать всю систему, достаточно иметь описания взаимодействия между различными частями. Таким образом, химический завод, например, может состоять из последовательности отдельных каскадов (или даже физических отделений), в которых объединяются или смешиваются различные реагенты и продукты. Иногда случается, что каждую отдельную подсистему можно описать одним дифференциальным уравнением, тогда модель всей физической системы может быть представлена системой дифференциальных уравнений.

Как простой пример системы с тремя каскадами (этапами) рассмотрим показанные на рис. 5.2.2 три рассольных бака, содержащие V_1, V_2 и V_3 галлонов рассола соответственно. Пресная вода вливается в бак 1, в то время как перемешанный рассол выливается из бака 1 в бак 2, из бака 2 в бак 3 и вытекает из бака 3. Пусть $x_i(t)$ обозначает количество (в фунтах)

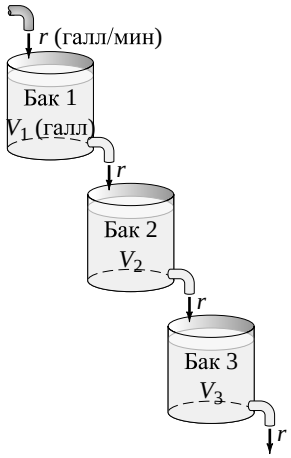


Рис. 5.2.2. Три рассольных бака из примера 2

соли в баке i в момент времени t для $i = 1, 2$ и 3. Если в каждый бак вливается и выливается r галлонов в минуту (иными словами, расход равен r галлонов в минуту), то простой учет концентраций соли, как в примере 2 из раздела 4.1, приводит к системе первого порядка

$$\begin{aligned} x_1' &= -k_1 x_1, \\ x_2' &= k_1 x_1 - k_2 x_2, \\ x_3' &= \ k_2 x_2 - k_3 x_3, \end{aligned} \tag{16}$$

где

$$k_i = \frac{r}{V_i}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{17}$$

Пример 2 Пусть $V_1 = 20, V_2 = 40, V_3 = 50, r = 10$ (галлонов в минуту), а начальные количества соли в трех рассольных баках равны (в фунтах)

$$x_1(0) = 15, \quad x_2(0) = x_3(0) = 0.$$

Найдем количество соли в каждом резервуаре в момент времени $t \geqq 0$.

Решение Подставляя данные числовые значения в равенства (16) и (17), мы получаем задачу Коши (задачу с начальными условиями)

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0{,}0 & 0{,}0 \\ 0{,}5 & -0{,}25 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 0{,}25 & -0{,}2 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{18}$$

для вектора $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & x_3(t) \end{bmatrix}^T$. Простая форма матрицы

$$\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} = \begin{bmatrix} -0{,}5 - \lambda & 0{,}0 & 0{,}0 \\ 0{,}5 & -0{,}25 - \lambda & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 0{,}25 & -0{,}2 - \lambda \end{bmatrix} \tag{19}$$

сразу приводит к характеристическому уравнению

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = (-0{,}5 - \lambda)(-0{,}25 - \lambda)(-0{,}2 - \lambda) = 0.$$

Таким образом, матрица коэффициентов в уравнении (18) имеет различные собственные значения $\lambda_1 = -0{,}5$, $\lambda_2 = -0{,}25$ и $\lambda_3 = -0{,}2$.

Случай 1: $\lambda_1 = -0{,}5$. Подставляя $\lambda = -0{,}5$ в равенство (19), получаем уравнение

$$\left[\, \mathbf{A} + (0{,}5) \cdot \mathbf{I} \,\right] \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0{,}0 & 0{,}0 & 0{,}0 \\ 0{,}5 & 0{,}25 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 0{,}25 & 0{,}3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

для соответствующего собственного вектора $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T$. Последние две строки, после деления на $0{,}25$ и $0{,}05$ соответственно, приводят к скалярным уравнениям

$$\begin{aligned} 2a + \ \ b \ \ \ \ \ &= 0, \\ 5b + 6c &= 0. \end{aligned}$$

Второе уравнение удовлетворяется при $b = -6$ и $c = 5$, а тогда первое уравнение дает $a = 3$. Таким образом, собственный вектор

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 5 \end{bmatrix}^T$$

соответствует собственному значению $\lambda_1 = -0{,}5$.

Случай 2: $\lambda_2 = -0{,}25$. Подставляя $\lambda = -0{,}25$ в равенство (19), получаем уравнение

$$\left[\, \mathbf{A} + (0{,}25) \cdot \mathbf{I} \,\right] \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -0{,}25 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

для соответствующего собственного вектора $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T$. Каждая из первых двух строк дает $a = 0$, а деление третьей строки на $0{,}05$ дает уравнение

$$5b + c = 0,$$

которое удовлетворяется при $b = 1$, $c = -5$. Таким образом, собственному значению $\lambda_2 = -0{,}25$ соответствует собственный вектор

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}^T.$$

Случай 3: $\lambda_3 = -0{,}2$. Подставляя $\lambda = -0{,}2$ в равенство (19), получаем уравнение

$$\left[\, \mathbf{A} + (0{,}2)\cdot \mathbf{I} \,\right] \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -0{,}3 & 0{,}0 & 0{,}0 \\ 0{,}5 & -0{,}05 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 0{,}25 & 0{,}0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

для собственного вектора $\mathbf{v}$. Первая и третья строки показывают, что $a = 0$ и $b = 0$ соответственно, но нулевой третий столбец позволяет в качестве c выбрать произвольное число (но отличное от нуля). Таким образом, собственный вектор

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

соответствует собственному значению $\lambda_3 = -0{,}2$.

Следовательно, общее решение

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} + c_3\mathbf{v}_3 e^{\lambda_3 t}$$

имеет вид

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix} e^{(-0{,}5)t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} e^{(-0{,}25)t} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{(-0{,}2)t}.$$

Полученные скалярные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 3c_1 e^{(-0{,}5)t}, \\ x_2(t) &= -6c_1 e^{(-0{,}5)t} + c_2 e^{(-0{,}25)t}, \\ x_3(t) &= 5c_1 e^{(-0{,}5)t} - 5c_2 e^{(-0{,}25)t} + c_3 e^{(-0{,}2)t}\ . \end{aligned}$$

Когда мы налагаем начальные условия $x_1(0) = 15$, $x_2(0) = x_3(0) = 0$, мы получаем уравнения

$$\begin{aligned} 3c_1 \qquad\quad &= 15, \\ -6c_1 + c_2 \qquad &= 0, \\ 5c_1 - 5c_2 + c_3 &= 0, \end{aligned}$$

решения которых (в свою очередь) легко находятся: $c_1 = 5$, $c_2 = 30$ и $c_3 = 125$. Таким образом, наконец, количества соли в момент времени t в трех рассольных баках даются функциями

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 15e^{(-0{,}5)t}, \\ x_2(t) &= -30e^{(-0{,}5)t} + 30e^{(-0{,}25)t}, \\ x_3(t) &= 25e^{(-0{,}5)t} - 150e^{(-0{,}25)t} + 125e^{(-0{,}2)t}. \end{aligned}$$

На рис. 5.2.3 показаны графики функций $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $x_3(t)$. Как и следует ожидать, соль из бака 1 быстро "вымывается" поступающей пресной водой, и $x_1(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Количества $x_2(t)$ и $x_3(t)$ соли в баках 2 и 3 сначала возрастают, а затем приближаются к нулю, поскольку изо всей системы с тремя баками соль вымывается при $t \to +\infty$. ■

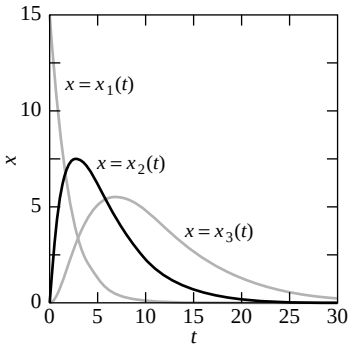


Рис. 5.2.3. Функции, указывающие содержание соли в баках из примера 2

Комплексные собственные значения

Даже если некоторые из собственных значений комплексные, но простые (не кратные), описанный метод все равно приводит к n линейно независимым решениям. Единственное осложнение состоит в том, что собственные векторы, соответствующие комплексным собственным значениям, обычно являются комплексными, так что мы будем иметь комплекснозначные решения.

Вот как мы собираемся получить действительные решения. Сначала мы заметим, что все коэффициенты характеристического уравнения (8) вещественны, поскольку мы предполагаем, что все элементы матрицы $\mathbf{A}$ вещественны. Следовательно, все комплексные (не вещественные) собственные значения можно сгруппировать в пары комплексно сопряженных корней. Предположим, что $\lambda = p + qi$ и $\overline{\lambda} = p - qi$ — такая пара собственных значений. Если собственный вектор $\mathbf{v}$ соответствует λ, так что

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0},$$

то переход к комплексно сопряженным числам дает равенство

$$(\mathbf{A} - \overline{\lambda}\mathbf{I})\overline{\mathbf{v}} = \mathbf{0}.$$

Таким образом, сопряженный к $\mathbf{v}$ собственный вектор $\overline{\mathbf{v}}$ соответствует $\overline{\lambda}$. Конечно, сопряженный вектор определяется покомпонентно; если

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 i \\ a_2 + b_2 i \\ \vdots \\ a_n + b_n i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} i = \mathbf{a} + \mathbf{b}i, \tag{20}$$

то $\overline{\mathbf{v}} = \mathbf{a} - \mathbf{b}i$. Комплекснозначное решение, соответствующее λ и $\mathbf{v}$, в таком случае равно

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t} = \mathbf{v}e^{(p+qi)t} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}i)e^{pt}(\cos qt + i \sin qt);$$

иными словами,

$$\mathbf{x}(t) = e^{pt}(\mathbf{a}\cos qt - \mathbf{b}\sin qt) + ie^{pt}(\mathbf{b}\cos qt + \mathbf{a}\sin qt). \tag{21}$$

Поскольку вещественная и мнимая части комплекснозначного решения также являются решениями, мы этим способом получаем два *действительных* решения

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1(t) &= \mathrm{Re}(\mathbf{x}(t)) = e^{pt}(\mathbf{a}\cos qt - \mathbf{b}\sin qt),\\ \mathbf{x}_2(t) &= \mathrm{Im}(\mathbf{x}(t)) = e^{pt}(\mathbf{b}\cos qt + \mathbf{a}\sin qt),\end{aligned} \tag{22}$$

соответствующих комплексно сопряженным собственным значениям $p \pm qi$. Просто проверить, что те же самые два действительных решения являются результатом взятия вещественной мнимой части $\overline{\mathbf{v}}e^{\overline{\lambda}t}$ и потому не стоит запоминать формулы (22), а предпочтительнее в конкретном примере действовать следующим образом:

- сначала найти явно какое-нибудь одно комплексное решение $\mathbf{x}(t)$, соответствующее комплексному собственному значению λ;
- затем найти вещественную и мнимую части $\mathbf{x}_1(t)$ и $\mathbf{x}_2(t)$, чтобы получить два независимых вещественных решения, соответствующих двум комплексно сопряженным собственным значениям λ и $\overline{\lambda}$.

Пример 3 Найдем общее решение системы

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= 4x_1 - 3x_2,\\ \frac{dx_2}{dt} &= 3x_1 + 4x_2.\end{aligned} \tag{23}$$

Решение Матрица коэффициентов

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

имеет характеристическое уравнение

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)^2 + 9 = 0,$$

и, следовательно, имеет комплексно сопряженные собственные значения $\lambda = 4 - 3i$ и $\overline{\lambda} = 4 + 3i$.

Подставляя $\lambda = 4 - 3i$ в уравнение собственного вектора $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$, получаем уравнение

$$[\mathbf{A} - (4-3i)\cdot\mathbf{I}]\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3i & -3 \\ 3 & 3i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

для соответствующего собственного значения $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}^T$. Деление каждой строки на 3 дает два скалярных уравнения

$$\begin{aligned} ia - b &= 0,\\ a + ib &= 0,\end{aligned}$$

каждое из которых удовлетворяется при $a = 1$ и $b = i$. Таким образом, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & i \end{bmatrix}^T$ — комплексный собственный вектор, соответствующий комплексному собственному значению $\lambda = 4 - 3i$.

Поэтому соответствующее комплекснозначное решение $\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t}$ уравнения $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ можно записать в виде

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{(4-3i)t} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{4t}(\cos 3t - i \sin 3t) = e^{4t} \begin{bmatrix} \cos 3t - i \sin 3t \\ i \cos 3t + \sin 3t \end{bmatrix}.$$

Вещественная и мнимая части $\mathbf{x}(t)$ — действительные решения

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{4t} \begin{bmatrix} \cos 3t \\ \sin 3t \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{x}_2(t) = e^{4t} \begin{bmatrix} -\sin 3t \\ \cos 3t \end{bmatrix}.$$

Поэтому действительное общее решение системы $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ выражается формулой

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) = e^{4t} \begin{bmatrix} c_1 \cos 3t - c_2 \sin 3t \\ c_1 \sin 3t + c_2 \cos 3t \end{bmatrix}.$$

Наконец, общее решение системы (23) в скалярной форме имеет вид

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{4t}(c_1 \cos 3t - c_2 \sin 3t), \\ x_2(t) &= e^{4t}(c_1 \sin 3t + c_2 \cos 3t). \end{aligned}$$

На рис. 5.2.4 показаны некоторые типичные интегральные кривые системы (23). Каждая из них является спиралью, раскручивающейся против часовой стрелки, причем она раскручивается от начала координат в плоскости x_1x_2. Фактически, из-за множителя e^{4t} в общем решении мы видим, что

- двигаясь по интегральной кривой, точка $(x_1(t), x_2(t))$ приближается к началу координат при $t \to -\infty$, тогда как
- оба абсолютные значения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ увеличиваются неограниченно при $t \to +\infty$. ■

На рис. 5.2.5 показана "замкнутая" система, состоящая из трех рассольных баков с объемами V_1, V_2 и V_3. Разница между этой системой и "открытой" системой, изображенной на рис. 5.2.2, состоит в том, что теперь вода, которая вытекает из бака 3, вливается в бак 1. В той же самой системе обозначений, что и в примере 2, соответствующая модификация уравнения (16) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -k_1x_1 \qquad\qquad + k_3x_3, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \quad k_1x_1 - k_2x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} &= \qquad\quad k_2x_2 - k_3x_3, \end{aligned} \tag{24}$$

где $k_i = r/V_i$ как в (17).

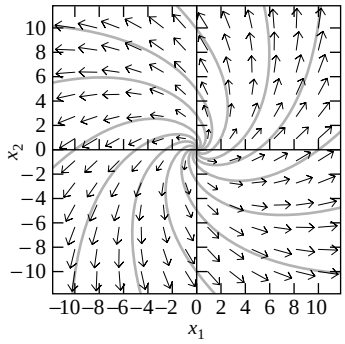


Рис. 5.2.4. Поле направлений и интегральные кривые линейной системы $x_1' = 4x_1 - 3x_2$, $x_2' = 3x_1 + 4x_2$ из примера 3

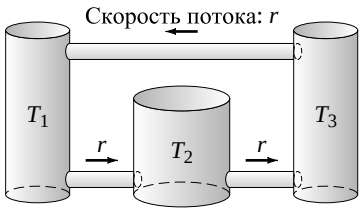


Рис. 5.2.5. Три рассольных бака из примера 4

Пример 4 Найдем количества $x_1(t), x_2(t)$ b $x_3(t)$ соли в момент времени t в трех рассольных баках, показанных на рис. 5.2.5, если $V_1 = 50$ галлонов, $V_2 = 25$ галлонов, $V_3 = 50$ галлонов и $r = 10$ галлонов в минуту.

Решение При заданных числовых значениях уравнение (24) принимает вид

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -0{,}2 & 0 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & -0{,}4 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & -0{,}2 \end{bmatrix} \mathbf{x} \tag{25}$$

причем, как обычно, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$. Разлагая детерминант матрицы

$$\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I} = \begin{bmatrix} -0{,}2 - \lambda & 0{,}0 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & -0{,}4 - \lambda & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 0{,}4 & -0{,}2 - \lambda \end{bmatrix} \tag{26}$$

по его первой строке, мы находим, что характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{aligned}(-0{,}2 - \lambda)(-0{,}4 - \lambda)(-0{,}2 - \lambda) + (0{,}2)(0{,}2)(0{,}4) = \\ = -\lambda^3 - (0{,}8) \cdot \lambda^2 - (0{,}2) \cdot \lambda = \\ = -\lambda \left[(\lambda + 0{,}4)^2 + (0{,}2)^2\right] = 0.\end{aligned}$$

Таким образом, матрица $\mathbf{A}$ имеет нулевое собственное значение $\lambda_0 = 0$ и комплексно сопряженные собственные значения $\lambda, \overline{\lambda} = -0{,}4 \pm (0{,}2)i$.

Случай 1: $\lambda_0 = 0$. Подставляя $\lambda = 0$ в уравнение (26), получаем уравнение для собственного вектора

$$(\mathbf{A} - 0 \cdot \mathbf{I})\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -0{,}2 & 0{,}0 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & -0{,}4 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 0{,}4 & -0{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

для $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T$. Первая строка дает $a = c$, а вторая строка дает $a = 2b$, так что $\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ — собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_0 = 0$. Соответствующее решение $\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{v}_0 e^{\lambda_0 t}$ уравнения (25) представляет собой постоянное решение

$$\mathbf{x}_0(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Случай 2: $\lambda = -0{,}4 - (0{,}2)i$. Подставляя $\lambda = -0{,}4 - (0{,}2)i$ в уравнение (26), получаем уравнение для собственного вектора

$$[\mathbf{A} - (-0{,}4 - (0{,}2)i)\mathbf{I}]\,\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0{,}2 + (0{,}2)i & 0{,}0 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & (0{,}2)i & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 0{,}4 & 0{,}2 + (0{,}2)i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Второе уравнение $(0{,}2)a + (0{,}2)ib = 0$ удовлетворяется при $a = 1$ и $b = i$. Тогда первое уравнение

$$[0{,}2 + (0{,}2)i]a + (0{,}2)c = 0$$

дает $c = -1 - i$. Таким образом, $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & i & (-1 - i) \end{bmatrix}^T$ — комплексный собственный вектор, соответствующий комплексному собственному значению $\lambda = -0{,}4 - (0{,}2)i$.

Соответствующее комплексное решение $\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t}$ уравнения (25) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & i & -1 - i \end{bmatrix}^T e^{(-0{,}4 - 0{,}2i)t} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & i & -1 - i \end{bmatrix}^T e^{(-0{,}4)t}(\cos 0{,}2t - i \sin 0{,}2t) = \\ &= e^{(-0{,}4)t} \begin{bmatrix} \cos 0{,}2t - i \sin 0{,}2t \\ \sin 0{,}2t + i \cos 0{,}2t \\ -\cos 0{,}2t - \sin 0{,}2t - i \cos 0{,}2t + i \sin 0{,}2t \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Вещественная и мнимая части $\mathbf{x}(t)$ являются вещественными решениями

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t) &= e^{(-0{,}4)t} \begin{bmatrix} \cos 0{,}2t \\ \sin 0{,}2t \\ -\cos 0{,}2t - \sin 0{,}2t \end{bmatrix}, \\ \mathbf{x}_2(t) &= e^{(-0{,}4)t} \begin{bmatrix} -\sin 0{,}2t \\ \cos 0{,}2t \\ -\cos 0{,}2t + \sin 0{,}2t \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{28}$$

Общее решение

$$\mathbf{x}(t) = c_0\mathbf{x}_0(t) + c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t)$$

имеет скалярные компоненты

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 2c_0 + e^{(-0,4)t}(c_1\cos 0{,}2t - c_2\sin 0{,}2t),\\ x_2(t) &= \ \ c_0 + e^{(-0,4)t}(c_1\sin 0{,}2t + c_2\cos 0{,}2t),\\ x_3(t) &= 2c_0 + e^{(-0,4)t}[(-c_1 - c_2)\cos 0{,}2t + (-c_1 + c_2)\sin 0{,}2t], \end{aligned} \tag{29}$$

выражающие количества соли в трех баках в момент времени t.

Заметьте, что

$$x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) \equiv 5c_0. \tag{30}$$

Конечно, общее количество (сумма $x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$) соли в закрытой системе постоянно; константа c_0 в равенстве (30) равна одной пятой от общего количества (сумма $x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$) соли. Из-за множителей $e^{(-0,4)t}$ в равенствах (29)

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t) = 2c_0, \quad \lim_{t\to\infty} x_2(t) = c_0 \quad \text{и} \quad \lim_{t\to\infty} x_3(t) = 2c_0.$$

Таким образом, при $t \to +\infty$ распределение соли в системе приближается к *установившемуся распределению*, при котором по 40% от общего количества соли содержится в каждом из двух 50-галлонных баков, а остальные 20% — в 25-галлонном баке. Так что, независимо от начального распределения соли по трем бакам, при предельном распределении концентрация соли однородна по всей системе. На рис. 5.2.6 показаны графики трех функций решения при $c_0 = 10$, $c_1 = 30$ и $c_2 = -10$, и в этом случае

$$x_1(0) = 50 \quad \text{и} \quad x_2(0) = x_3(0) = 0. \qquad \blacksquare$$

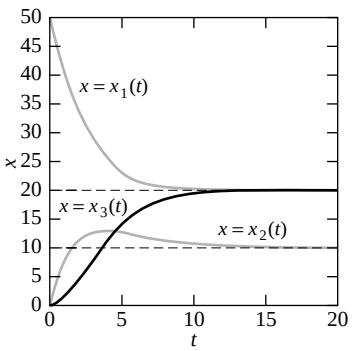


Рис. 5.2.6. Содержание соли в баках из примера 4

5.2. Задачи

В задачах 1–16 примените метод собственных значений из этого раздела, чтобы найти общее решение заданной системы. Если даны начальные значения, найдите также удовлетворяющее им частное решение. В каждой задаче с помощью компьютерной системы или графического калькулятора начертите поле направлений и типичные интегральные кривые данной системы.

1. $x_1' = x_1 + 2x_2,\ \ x_2' = 2x_1 + x_2$

2. $x_1' = 2x_1 + 3x_2,\ \ x_2' = 2x_1 + x_2$

3. $x_1' = 3x_1 + 4x_2,\ \ x_2' = 3x_1 + 2x_2;\ \ x_1(0) = x_2(0) = 1$

4. $x_1' = 4x_1 + x_2,\ \ x_2' = 6x_1 - x_2$

5. $x_1' = 6x_1 - 7x_2,\ \ x_2' = x_1 - 2x_2$

6. $x_1' = 9x_1 + 5x_2,\ \ x_2' = -6x_1 - 2x_2;\ x_1(0) = 1,\ \ x_2(0) = 0$

7. $x_1' = -3x_1 + 4x_2,\ \ x_2' = 6x_1 - 5x_2$

8. $x_1' = x_1 - 5x_2,\ \ x_2' = x_1 - x_2$

9. $x_1' = 2x_1 - 5x_2,\ \ x_2' = 4x_1 - 2x_2;\ x_1(0) = 2,\ \ x_2(0) = 3$

10. $x_1' = -3x_1 - 2x_2,\ \ x_2' = 9x_1 + 3x_2$

11. $x_1' = x_1 - 2x_2,\ \ x_2' = 2x_1 + x_2;\ x_1(0) = 0,\ \ x_2(0) = 4$

12. $x_1' = x_1 - 5x_2,\ \ x_2' = x_1 + 3x_2$

13. $x_1' = 5x_1 - 9x_2,\ \ x_2' = 2x_1 - x_2$

14. $x_1' = 3x_1 - 4x_2,\ \ x_2' = 4x_1 + 3x_2$

15. $x_1' = 7x_1 - 5x_2,\ \ x_2' = 4x_1 + 3x_2$

16. $x_1' = -50x_1 + 20x_2,\ \ x_2' = 100x_1 - 60x_2$

В задачах 17–25 собственные значения матрицы коэффициентов могут быть найдены подбором и разложением на множители. Примените метод собственных значений, чтобы найти общее решение каждой системы.

17. $x_1' = 4x_1 + x_2 + 4x_3,$
$x_2' = x_1 + 7x_2 + x_3,$
$x_3' = 4x_1 + x_2 + 4x_3$

18. $x_1' = x_1 + 2x_2 + 2x_3,$
$x_2' = 2x_1 + 7x_2 + x_3,$
$x_3' = 2x_1 + x_2 + 7x_3$

19. $x_1' = 4x_1 + x_2 + x_3,$
$x_2' = x_1 + 4x_2 + x_3,$
$x_3' = x_1 + x_2 + 4x_3$

20. $x_1' = 5x_1 + x_2 + 3x_3,$
$x_2' = x_1 + 7x_2 + x_3,$
$x_3' = 3x_1 + x_2 + 5x_3$

21. $x_1' = 5x_1 - 6x_3,$
$x_2' = 2x_1 - x_2 - 2x_3,$
$x_3' = 4x_1 - 2x_2 - 4x_3$

22. $x_1' = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3,$
$x_2' = -5x_1 - 4x_2 - 2x_3,$
$x_3' = 5x_1 + 5x_2 + 3x_3$

23. $x_1' = 3x_1 + x_2 + x_3,$
$x_2' = -5x_1 - 3x_2 - x_3,$
$x_3' = 5x_1 + 5x_2 + 3x_3$

24. $x_1' = 2x_1 + x_2 - x_3,$
$x_2' = -4x_1 - 3x_2 - x_3,$
$x_3' = 4x_1 + 4x_2 + 2x_3$

25. $x_1' = 5x_1 + 5x_2 + 2x_3,\ \ x_2' = -6x_1 - 6x_2 - 5x_3,\ \ x_3' = 6x_1 + 6x_2 + 5x_3$

26. Найдите то частное решение системы

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \ \ 3x_1 \qquad\ \ + \ \ x_3,\\ \frac{dx_2}{dt} &= \ \ 9x_1 - \ \ x_2 + 2x_3,\\ \frac{dx_3}{dt} &= -9x_1 + 4x_2 - \ \ x_3,\end{aligned}$$

которое удовлетворяет начальным условиям $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 17$.

Количества $x_1(t)$ и $x_2(t)$ соли в двух рассольных баках, показанных на рис. 5.2.7, удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{dx_1}{dt} = -k_1 x_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = k_1 x_1 - k_2 x_2,$$

где $k_i = r/V_i$ для $i = 1, 2$. В задачах 27 и 28 заданы объемы V_1 и V_2. Сначала решите уравнения относительно $x_1(t)$ и $x_2(t)$, предполагая, что $r = 10$ (галлонов в минуту), $x_1(0) = 15$ (фунтов) и $x_2(0) = 0$. Затем найдите максимальное количество соли, когда-либо содержащейся в резервуаре 2. Наконец, нарисуйте графики функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

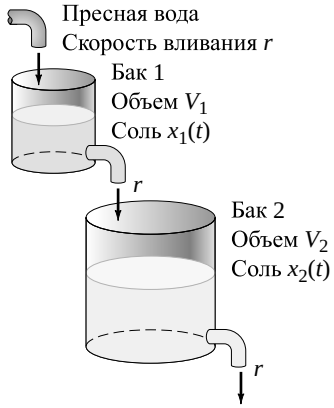


Рис. 5.2.7. Два рассольных бака из задач 27 и 28

27. $V_1 = 50$ (галлонов), $V_2 = 25$ (галлонов) **28.** $V_1 = 25$ (галлонов), $V_2 = 40$ (галлонов)

Количества $x_1(t)$ и $x_2(t)$ соли в двух рассольных баках, показанных на рис. 5.2.8, удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{dx_1}{dt} = -k_1 x_1 + k_2 x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = k_1 x_1 - k_2 x_2,$$

где, как обычно, $k_i = r/V_i$. В задачах 29 и 30 найдите решения данных дифференциальных уравнений, т. е. найдите функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$, предполагая, что $r = 10$ (галлонов в минуту), $x_1(0) = 15$ (фунтов) и $x_2(0) = 0$. Затем начертите графики функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

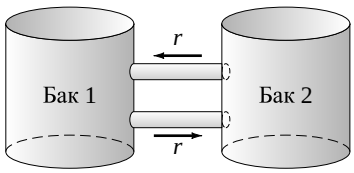


Рис. 5.2.8. Два рассольных бака из задач 29 и 30

29. $V_1 = 50$ (галлонов), $V_2 = 25$ (галлонов) **30.** $V_1 = 25$ (галлонов), $V_2 = 40$ (галлонов)

В задачах 31–34 рассматривается открытая система из трех резервуаров рис. 5.2.2. Пресная вода вливается в резервуар 1, а тщательно перемешанный рассол вытекает из резервуара 1 и вливается в резервуар 2, тщательно перемешанный рассол из резервуара 2 вытекает в резервуар 3

и выливается из резервуара 3, причем расход во всех резервуарах равен r галлонов в минуту. Заданы начальные количества $x_1(0) = x_0$ (фунтов), $x_2(0) = 0$ и $x_3(0) = 0$ соли в трех резервуарах, а также их объемы V_1, V_2 и V_3 (в галлонах). Сначала найдите решения дифференциальных уравнений, т. е. найдите количества соли в трех резервуарах в момент времени t, а затем определите максимальное количество соли в резервуаре 3. Наконец, начертите графики функций $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $x_3(t)$.

31. $r = 30$, $x_0 = 27$, $V_1 = 30$, $V_2 = 15$, $V_3 = 10$
32. $r = 60$, $x_0 = 45$, $V_1 = 20$, $V_2 = 30$, $V_3 = 60$
33. $r = 60$, $x_0 = 45$, $V_1 = 15$, $V_2 = 10$, $V_3 = 30$
34. $r = 60$, $x_0 = 40$, $V_1 = 20$, $V_2 = 12$, $V_3 = 60$

В задачах 35–37 рассматривается закрытая система с тремя резервуарами, показанная на рис. 5.2.5, которая описывается уравнениями (24). Тщательно перемешанный рассол вытекает из резервуара 1 в резервуар 2, рассол из резервуара 2 вытекает в резервуар 3, а из резервуара 3 рассол вливается в резервуар 1, причем расход во всех резервуарах равен r галлонов в минуту. Заданы начальные количества соли $x_1(0) = x_0$ (фунтов), $x_2(0) = 0$ и $x_3(0) = 0$ в трех резервуарах, а также объемы резервуаров V_1, V_2 и V_3 (в галлонах). Сначала найдите решения дифференциальных уравнений, т. е. найдите количества соли в трех резервуарах в момент времени t, а затем определите предельное количество (при $t \to +\infty$) соли в каждом резервуаре. Наконец, начертите графики функций $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $x_3(t)$.

35. $r = 120$, $x_0 = 33$, $V_1 = 20$, $V_2 = 6$, $V_3 = 40$
36. $r = 10$, $x_0 = 18$, $V_1 = 20$, $V_2 = 50$, $V_3 = 20$
37. $r = 60$, $x_0 = 55$, $V_1 = 60$, $V_2 = 20$, $V_3 = 30$

Для каждой матрицы $\mathbf{A}$, данной в задачах 38–40, нули в матрице облегчают вычисление ее характеристического многочлена. Найдите общее решение уравнения $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

38. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

39. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 9 \\ 4 & 2 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

40. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -21 & -5 & -27 & -9 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -21 & -2 \end{bmatrix}$

41. Матрица $\mathbf{A}$ коэффициентов (размера 4×4) системы

$$\begin{aligned} x_1' &= 4x_1 + x_2 + x_3 + 7x_4, \\ x_2' &= x_1 + 4x_2 + 10x_3 + x_4, \\ x_3' &= x_1 + 10x_2 + 4x_3 + x_4, \\ x_4' &= 7x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 \end{aligned}$$

имеет собственные значения $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -6$, $\lambda_3 = 10$ и $\lambda_4 = 15$. Найдите частное решение этой системы, которое удовлетворяет начальным условиям:

$$x_1(0) = 3, \quad x_2(0) = x_3(0) = 1, \quad x_4(0) = 3.$$

В задачах 42–50 вычислите собственные значения и собственные векторы с помощью калькулятора или компьютерной системы (как показано в приложении к разделу 5.2). Затем, используя полученные результаты, найдите общее решение линейной системы $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ с данной матрицей коэффициентов $\mathbf{A}$.

42. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -40 & -12 & 54 \\ 35 & 13 & -46 \\ -25 & -7 & 34 \end{bmatrix}$

43. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -20 & 11 & 13 \\ 12 & -1 & -7 \\ -48 & 21 & 31 \end{bmatrix}$

44. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 147 & 23 & -202 \\ -90 & -9 & 129 \\ 90 & 15 & -123 \end{bmatrix}$

45. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & -7 & -5 & 0 \\ -12 & 7 & 11 & 9 \\ 24 & -17 & -19 & -9 \\ -18 & 13 & 17 & 9 \end{bmatrix}$

46. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 13 & -42 & 106 & 139 \\ 2 & -16 & 52 & 70 \\ 1 & 6 & -20 & -31 \\ -1 & -6 & 22 & 33 \end{bmatrix}$

47. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 23 & -18 & -16 & 0 \\ -8 & 6 & 7 & 9 \\ 34 & -27 & -26 & -9 \\ -26 & 21 & 25 & 12 \end{bmatrix}$

48. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 47 & -8 & 5 & -5 \\ -10 & 32 & 18 & -2 \\ 139 & -40 & -167 & -121 \\ -232 & 64 & 360 & 248 \end{bmatrix}$

49. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 139 & -14 & -52 & -14 & 28 \\ -22 & 5 & 7 & 8 & -7 \\ 370 & -38 & -139 & -38 & 76 \\ 152 & -16 & -59 & -13 & 35 \\ 95 & -10 & -38 & -7 & 23 \end{bmatrix}$

50. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 13 & 0 & 0 & 0 & -13 \\ -14 & 19 & -10 & -20 & 10 & 4 \\ -30 & 12 & -7 & -30 & 12 & 18 \\ -12 & 10 & -10 & -9 & 10 & 2 \\ 6 & 9 & 0 & 6 & 5 & -15 \\ -14 & 23 & -10 & -20 & 10 & 0 \end{bmatrix}$

5.2. Приложение. Автоматическое вычисление собственных значений и собственных векторов

В большей части вычислительных систем предусмотрена возможность легко и просто находить собственные значения и собственные векторы. Например, на рис. 5.2.9 показано

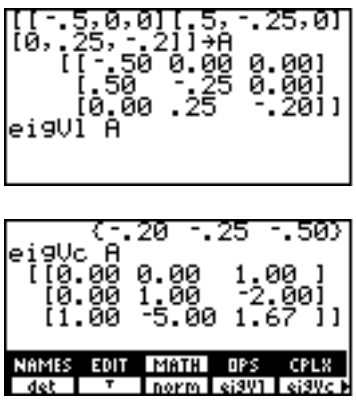


Рис. 5.2.9. Вычисление собственных значений и собственных векторов матрицы $\mathbf{A}$ на калькуляторе TI-86

вычисление собственных значений и собственных векторов матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0{,}0 & 0{,}0 \\ 0{,}5 & -0{,}25 & 0{,}0 \\ 0{,}0 & 0{,}25 & -0{,}2 \end{bmatrix}$$

из примера 2 на графическом калькуляторе. Мы видим, что каждый собственный вектор отображается как вектор-столбец ниже соответствующего ему собственного значения. Обратите внимание, что поскольку результаты представлены в десятичной форме, именно вы должны предположить (и проверить матричным умножением), что точный собственный вектор, соответствующий третьему собственному значению $\lambda = -\frac{1}{2}$, есть $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & \frac{5}{3} \end{bmatrix}^T$. Команды пакета *Maple*

```
with(linalg)
A := matrix(3,3,[-0.5,0,0,0.5,-0.25,0,0,0.25,-0.2]);
eigenvects(A);
```

команды пакета *Mathematica*

```
A = {{-0.5,0,0},{0.5,-0.25,0},{0,0.25,-0.2}}
Eigensystem[A]
```

и команды пакета MATLAB

```
A = [-0.5,0,0; 0.5,-0.25,0; 0,0.25,-0.2]
[V,D] = eig(A)
```

(где `D` будет диагональной матрицей, содержащей собственные значения матрицы `A`, а векторы-столбцы `V` как раз и будут соответствующими собственными векторами) дают подобные результаты. Вы можете использовать эти команды, чтобы найти собственные значения и собственные векторы, необходимые для любой из задач в этом разделе.

Для более серьезного исследования выберите положительное целое число $n < 10$ ($n = 5$, например), и пусть $q_1, q_2, \ldots, q_n$ обозначают первые n отличных от нуля цифр в номере вашего студенческого билета. Теперь рассмотрите открытую систему рассольных баков, такую как изображенная на рис. 5.2.2, за исключением того, что ваша система состоит из n последовательных резервуаров, а не из трех. Пусть объемы этих баков равны $V_i = 10q_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) галлонов. Если расход в каждом баке равен $r = 10$ галлонов в минуту, то количества соли $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ удовлетворяют линейной системе

$$\begin{aligned} x_1' &= -k_1 x_1, \\ x_i' &= \quad k_{i-1}x_{i-1} - k_i x_i \quad (i = 2, 3, \ldots, n), \end{aligned}$$

где $k_i = r/V_i$. Примените метод собственных значений и с его помощью найдите решение этой системы при начальных условиях:

$$x_1(0) = 10, \quad x_2(0) = x_3(0) = \cdots = x_n(0) = 0.$$

Нарисуйте график функции, представляющей собой решение, и оцените по графику максимальное количество соли, содержащееся когда-либо в каждом из резервуаров.

Теперь проведите еще одно исследование. Для этого предположите, что система из n резервуаров замкнута так, как изображено на рис. 5.2.5. Иными словами, в резервуар 1 вливается то, что выливается из резервуара n (а не пресная вода). Тогда первое уравнение должно

быть заменено уравнением $x_1' = k_n x_n - k_1 x_1$. Теперь покажите, что в этой *замкнутой* системе при $t \to +\infty$ соль, первоначально содержащаяся только в резервуаре 1, распределяется равномерно (т. е. с постоянной концентрацией) по всем резервуарам. Чертеж, подобный рис. 5.2.6, должен сделать это утверждение довольно очевидным.

5.3. Системы второго порядка и механические приложения[5]

В этом разделе мы применяем матричные методы разделов 5.1 и 5.2 для исследования колебаний типичных систем, состоящих из тела определенной массы и пружины, имеющих две или больше степени свободы. Наши примеры подобраны так, чтобы проиллюстрировать явления, которые обычно характерны для сложных механических систем.

На рис. 5.3.1 показаны три массы, связанные связанные между собой и с двумя стенками четырьмя показанными пружинами. Мы предполагаем, что массы скользят без трения и что каждая пружина подчиняется закону Гука — ее растяжение (удлинение) или сжатие x и сила реакции F связаны формулой $F = -kx$. Если смещения вправо x_1, x_2 и x_3 этих трех масс (от их соответствующих равновесных положений) положительны, то

- первая пружина растянута на расстояние x_1;
- вторая пружина растянута на расстояние $x_2 - x_1$;
- третья пружина растянута на расстояние $x_3 - x_2$;
- четвертая пружина сжата на расстояние x_3.

Поэтому, применяя закон Ньютона $F = ma$ к этим трем массам (как в примере 1 из раздела 4.1), получаем уравнения их движения:

$$\begin{aligned} m_1 x_1'' &= -k_1 x_1 \qquad\quad + k_2(x_2 - x_1), \\ m_2 x_2'' &= -k_2(x_2 - x_1) + k_3(x_3 - x_2), \\ m_3 x_3'' &= -k_3(x_3 - x_2) - k_4 x_3. \end{aligned} \tag{1}$$

Вводя обозначения **вектора смещений** $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}^T$, **матрицы масс**

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \tag{2}$$

и **матрицы жесткости**

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -(k_1 + k_2) & k_2 & 0 \\ k_2 & -(k_2 + k_3) & k_3 \\ 0 & k_3 & -(k_3 + k_4) \end{bmatrix}, \tag{3}$$

[5] Этот дополнительный раздел может быть опущен без ущерба для понимания остального текста. В нем приведены технические приложения собственных значений к физике и техническим задачам.

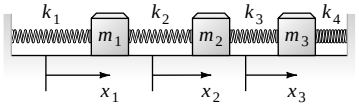


Рис. 5.3.1. Три тела заданных масс, соединенные пружинами

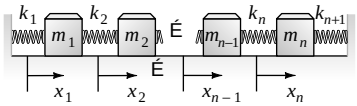


Рис. 5.3.2. Система n масс, соединенных пружинами

систему (1) можно записать в матричной форме

$$\mathbf{M}\mathbf{x}'' = \mathbf{K}\mathbf{x}. \tag{4}$$

Система обозначений в уравнениях (1)–(4) обобщается естественным способом для системы n соединенных пружинами масс, показанных на рис. 5.3.2. Мы должны только положить

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_n \end{bmatrix} \tag{5}$$

и

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -(k_1+k_2) & k_2 & 0 & \cdots & 0 \\ k_2 & -(k_2+k_3) & k_3 & \cdots & 0 \\ 0 & k_3 & -(k_3+k_4) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & k_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -(k_{n-1}+k_n) & k_n \\ 0 & 0 & \cdots & k_n & -(k_n+k_{n+1}) \end{bmatrix} \tag{6}$$

в качестве матриц масс и жесткости в уравнении (4).

Диагональная матрица $\mathbf{M}$, очевидно, несингулярна (неособая); чтобы получить ее обратную $\mathbf{M}^{-1}$, нужно только заменить каждый диагональный элемент его обратной величиной. Следовательно, умножая обе части уравнения (4) на $\mathbf{M}^{-1}$, получим однородную **систему второго порядка**

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{7}$$

где $\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$. Существует много разнообразных механических систем *без трения* (т. е. трением в них можно пренебречь), для которых могут быть определены смещение, или радиус-вектор $\mathbf{x}$, несингулярная (неособая) матрица масс $\mathbf{M}$, а также матрица жесткости $\mathbf{K}$, которые удовлетворяют уравнению (4).

Решение систем второго порядка

Чтобы найти решение уравнения (7), мы подставляем (как в разделе 5.2 в случае системы первого порядка) пробное решение вида

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}e^{\alpha t}, \tag{8}$$

где $\mathbf{v}$ — постоянный вектор. Тогда $\mathbf{x}'' = \alpha^2\mathbf{v}e^{\alpha t}$, так что подстановка (8) в уравнение (7) дает

$$\alpha^2\mathbf{v}e^{\alpha t} = \mathbf{A}\mathbf{v}e^{\alpha t},$$

откуда следует, что

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \alpha^2\mathbf{v}. \tag{9}$$

Поэтому $\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}e^{\alpha t}$ является решением уравнения $\mathbf{x}'' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ тогда и только тогда, когда $\alpha^2 = \lambda$ является собственным значением матрицы $\mathbf{A}$, а $\mathbf{v}$ — соответствующим ему собственным вектором.

Если уравнение $\mathbf{x}'' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ служит моделью механической системы, то обычно собственные значения матрицы $\mathbf{A}$ являются *отрицательными* вещественными числами. Если

$$\alpha^2 = \lambda = -\omega^2 < 0,$$

то $\alpha = \pm\omega i$. В этом случае решение, данное уравнением (8), представляет собой функцию

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}e^{i\omega t} = \mathbf{v}(\cos\omega t + i\sin\omega t).$$

Тогда вещественная и мнимая части

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{v}\cos\omega t \quad \text{и} \quad \mathbf{x}_2(t) = \mathbf{v}\sin\omega t \tag{10}$$

функции $\mathbf{x}(t)$ представляют собой линейно независимые *действительные* решения системы. Этот анализ приводит к следующей теореме.

Теорема 1 Линейные однородные системы второго порядка

Если матрица $\mathbf{A}$ размера $n \times n$ имеет различные (простые) отрицательные собственные значения $-\omega_1^2, -\omega_2^2, \ldots, -\omega_n^2$, соответствующие [вещественным] собственным векторам $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, то общее решение

➤ $$\mathbf{x}'' = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

дается формулой

➤ $$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n}(a_i\cos\omega_i t + b_i\sin\omega_i t)\mathbf{v}_i \tag{11}$$

с произвольными постоянными a_i и b_i. В частном случае простого нулевого собственного значения λ_0, соответствующего собственному вектору $\mathbf{v}_0$, соответствующая часть общего решения имеет вид

$$\mathbf{x}_0(t) = (a_0 + b_0 t)\mathbf{v}_0. \tag{12}$$

▲

Замечание. Отличный от нуля вектор $\mathbf{v}_0$ является собственным вектором, соответствующим собственному значению $\lambda_0 = 0$, если $\mathbf{A}\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$. Если $\mathbf{x}(t) = (a_0 + b_0 t)\mathbf{v}_0$, то

$$\mathbf{x}'' = 0 \cdot \mathbf{v}_0 = (a_0 + b_0 t) \cdot \mathbf{0} = (a_0 + b_0 t) \cdot (\mathbf{A}\mathbf{v}_0) = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

что согласуется с уравнением (12). ■

Пример 1 Рассмотрим систему, состоящую из n тел заданной массы. Пусть $n = 2$ и тела закреплены на пружинах так, как показано на рис. 5.3.3. Поскольку нет никакой третьей пружины, связанной с правой стеной, мы полагаем $k_3 = 0$. Если $m_1 = 2$, $m_2 = 1$, $k_1 = 100$ и $k_2 = 50$, то уравнение $\mathbf{M}\mathbf{x}'' = \mathbf{K}\mathbf{x}$ примет вид

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}'' = \begin{bmatrix} -150 & 50 \\ 50 & -50 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \tag{13}$$

что приводит нас к уравнению $\mathbf{x}'' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ с

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -75 & 25 \\ 50 & -50 \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение матрицы $\mathbf{A}$ принимает вид

$$(-75 - \lambda)(-50 - \lambda) - 50 \cdot 25 = \lambda^2 + 125\lambda + 2500 = \\ = (\lambda + 25)(\lambda + 100) = 0,$$

так что матрица $\mathbf{A}$ имеет отрицательные собственные значения $\lambda_1 = -25$ и $\lambda_2 = -100$. Поэтому по теореме 1 система (13) имеет решения с [круговыми] частотами $\omega_1 = 5$ и $\omega_2 = 10$.

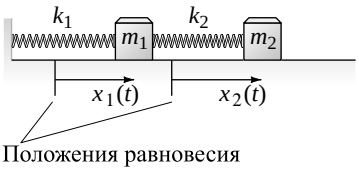


Рис. 5.3.3. Система примера 1, состоящая из тела заданной массы, закрепленного на пружине

Случай 1: $\lambda_1 = -25$. Уравнение собственного вектора $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ имеет вид

$$\begin{bmatrix} -50 & 25 \\ 50 & -25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

так что собственный вектор, соответствующий $\lambda_1 = -25$, есть $\mathbf{v}_1 = \\ = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$.

Случай 2: $\lambda_2 = -100$. Уравнение собственного вектора $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} 25 & 25 \\ 50 & 50 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

так что собственный вектор, соответствующий $\lambda_2 = -100$, есть $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$.

Из уравнения (11) следует, что общее решение системы (13) выражается формулой

$$\mathbf{x}(t) = (a_1 \cos 5t + b_1 \sin 5t)\mathbf{v}_1 + (a_2 \cos 10t + b_2 \sin 10t)\mathbf{v}_2. \qquad (14)$$

Как и при обсуждении примера 3 из раздела 4.2, два слагаемых в правой части уравнения (14) представляют собой **свободные колебания** системы, состоящей из тела заданной массы, закрепленного на пружине. Они описывают две **собственные моды** (**собственные формы**) колебания физической системы при ее двух [круговых] **собственных частотах** $\omega_1 = 5$ и $\omega_2 = 10$. Собственная мода

$$\mathbf{x}_1(t) = (a_1 \cos 5t + b_1 \sin 5t)\mathbf{v}_1 = c_1 \cos(5t - \alpha_1) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(при $c_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$, $\cos\alpha_1 = a_1/c_1$ и $\sin\alpha_1 = b_1/c_1$) имеет скалярные составляющие, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \ \ c_1 \cos(5t - \alpha_1), \\ x_2(t) &= 2c_1 \cos(5t - \alpha_1), \end{aligned} \qquad (15)$$

и поэтому описывает свободное колебание, в котором эти две массы двигаются синхронно в том же самом направлении и с той же самой частотой $\omega_1 = 5$, но амплитуда движения m_2 вдвое больше, чем у m_1 (рис. 5.3.4). Собственная мода

$$\mathbf{x}_2(t) = (a_2 \cos 10t + b_2 \sin 10t)\mathbf{v}_2 = c_2 \cos(10t - \alpha_2) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

имеет скалярные составляющие, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \ \ c_2 \cos(10t - \alpha_2), \\ x_2(t) &= -c_2 \cos(10t - \alpha_2), \end{aligned} \qquad (16)$$

и поэтому описывает свободное колебание, в котором эти две массы двигаются синхронно в противоположных направлениях с той же самой частотой $\omega_2 = 10$ и с равными амплитудами колебания (рис. 5.3.5). ■

Пример 2 На рис. 5.3.6 показаны три железнодорожных вагона, связанные буферными пружинами, которые реагируют на сжатие, но расцепляются, а не

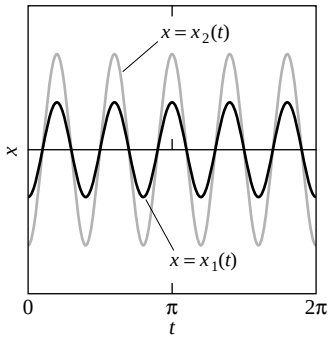


Рис. 5.3.4. Колебания в том же самом направлении с частотой $\omega_1 = 5$; амплитуда движения тела 2 вдвое больше амплитуды тела 1

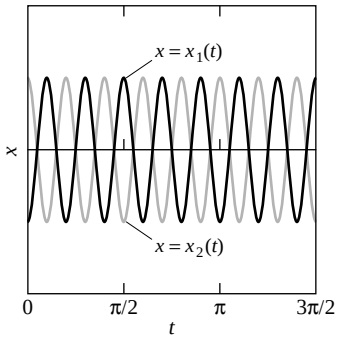


Рис. 5.3.5. Колебания в противоположных направлениях с частотой $\omega_2 = 10$; амплитуды движения этих двух масс одинаковы

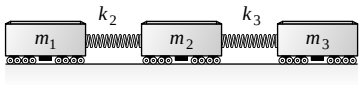


Рис. 5.3.6. Три железнодорожных вагона из примера 2

растягиваются. При $n = 3$, $k_2 = k_3 = k$ и $k_1 = k_4 = 0$ из уравнений (2)–(4) мы получаем систему

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \mathbf{x}'' = \begin{bmatrix} -k & k & 0 \\ k & -2k & k \\ 0 & k & -k \end{bmatrix} \mathbf{x}, \tag{17}$$

которая эквивалентна (матричному) уравнению

$$\mathbf{x}'' = \begin{bmatrix} -c_1 & c_1 & 0 \\ c_2 & -2c_2 & c_2 \\ 0 & c_3 & -c_3 \end{bmatrix} \mathbf{x} \tag{18}$$

с

$$c_i = \frac{k}{m_i} \quad (i = 1, 2, 3). \tag{19}$$

Если предположить, что $m_1 = m_3$, так что $c_1 = c_3$, то краткое вычисление дает характеристическое уравнение

$$-\lambda(\lambda + c_1)(\lambda + c_1 + 2c_2) = 0 \tag{20}$$

для матрицы **A** коэффициентов уравнения (18). Следовательно, матрица **A** имеет собственные значения

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -c_1, \quad \lambda_3 = -c_1 - 2c_2, \tag{21a}$$

соответствующие собственным частотам

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{c_1}, \quad \omega_3 = \sqrt{c_1 + 2c_2} \tag{21b}$$

рассматриваемой физической системы.

В числовом примере предположим, что первый и третий железнодорожные вагоны весят по 12 тонн каждый, а средний вагон весит 8 тонн и что жесткость пружины равна $k = 1{,}5$ тонна/фут; т. е. $k = 3000$ фунтов/фут. Тогда удобно использовать единицы fps, и выражать массу в слагах (единица массы в системе фунт–сила). (Тело весом 32 фунта имеет массу 1 слаг (это и есть единица массы в системе фунт–сила).) Итак, мы имеем

$$m_1 = m_3 = 750, \quad m_2 = 500$$

и

$$c_1 = \frac{3000}{750} = 4, \quad c_2 = \frac{3000}{500} = 6.$$

Следовательно, матрица $\mathbf{A}$ коэффициентов будет

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 6 & -12 & 6 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}, \tag{22}$$

и пары собственных значений (частоты), определяемые равенствами (21a) и (21b), равны $\lambda_1 = 0, \omega_1 = 0$; $\lambda_2 = -4, \omega_2 = 2$; $\lambda_3 = -16, \omega_3 = 4$.

Случай 1: $\lambda_1 = 0, \omega_1 = 0$. Уравнение собственного вектора

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

принимает вид

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 6 & -12 & 6 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

так что ясно, что $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ — собственный вектор, соответствующий $\lambda_1 = 0$. Согласно теореме 1, соответствующая часть общего решения уравнения $\mathbf{x}'' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ имеет вид

$$\mathbf{x}_1(t) = (a_1 + b_1 t)\mathbf{v}_1.$$

Случай 2: $\lambda_2 = -4, \omega_2 = 2$. Уравнение собственного вектора $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ имеет вид

$$(\mathbf{A} + 4\mathbf{I})\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 6 & -8 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

так что ясно, что $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$ — собственный вектор, соответствующий $\lambda_2 = -4$. Согласно теореме 1, соответствующая часть общего решения уравнения $\mathbf{x}'' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ имеет вид

$$\mathbf{x}_2(t) = (a_2 \cos 2t + b_2 \sin 2t)\mathbf{v}_2.$$

Случай 3: $\lambda_3 = -16, \omega_3 = 4$. Уравнение собственного вектора $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ имеет вид

$$(\mathbf{A} + 16\mathbf{I})\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 0 \\ 6 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

так что ясно, что $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}^T$ — собственный вектор, соответствующий $\lambda_3 = -16$. Согласно теореме 1, соответствующая часть общего решения уравнения $\mathbf{x}'' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ имеет вид

$$\mathbf{x}_3(t) = (a_3 \cos 4t + b_3 \sin 4t)\mathbf{v}_3.$$

Поэтому общее решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3$ уравнения $\mathbf{x}'' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ выражается формулой

$$\mathbf{x}(t) = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b_1 t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cos 2t + b_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \sin 2t + a_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \cos 4t + b_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \sin 4t. \tag{23}$$

Чтобы найти частное решение, предположим, что крайний левый вагон двигается вправо со скоростью v_0 и в момент времени $t = 0$ ударяет по другим двум вагонам, которые вместе составляют единую механическую систему, притом находящуюся в покое. Соответствующие начальные условия имеют вид

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0, \tag{24a}$$
$$x_1'(0) = v_0, \quad x_2'(0) = x_3'(0) = 0. \tag{24b}$$

Тогда подстановка (24a) в (23) дает скалярные уравнения

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \ \ a_3 &= 0, \\ a_1 \qquad - 3a_3 &= 0, \\ a_1 - a_2 + \ \ a_3 &= 0, \end{aligned}$$

решая которые, без труда находим $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. Следовательно, функции, выражающие положения этих трех вагонов, следующие:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= b_1 t + b_2 \sin 2t + \ \ b_3 \sin 4t, \\ x_2(t) &= b_1 t \qquad\qquad - 3b_3 \sin 4t, \\ x_3(t) &= b_1 t - b_2 \sin 2t + \ \ b_3 \sin 4t, \end{aligned} \tag{25}$$

а функции, выражающие скорости, такие:

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= b_1 + 2b_2 \cos 2t + \ 4b_3 \cos 4t, \\ x_2'(t) &= b_1 \qquad\qquad - 12b_3 \cos 4t, \\ x_3'(t) &= b_1 - 2b_2 \cos 2t + \ 4b_3 \cos 4t. \end{aligned} \tag{26}$$

Подстановка (24b) в (26) приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} b_1 + 2b_2 + \ 4b_3 &= v_0, \\ b_1 \qquad\quad - 12b_3 &= \ 0, \\ b_1 - 2b_2 + \ 4b_3 &= \ 0, \end{aligned}$$

из которых легко находятся $b_1 = \frac{3}{8}v_0$, $b_2 = \frac{1}{4}v_0$ и $b_3 = \frac{1}{32}v_0$. Наконец, функции из уравнения (25) (они дают положения) принимают вид

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \tfrac{1}{32}v_0(12t + 8\sin 2t + \ \sin 4t), \\ x_2(t) &= \tfrac{1}{32}v_0(12t \qquad\quad - 3\sin 4t), \\ x_3(t) &= \tfrac{1}{32}v_0(12t - 8\sin 2t + \ \sin 4t). \end{aligned} \tag{27}$$

Но эти уравнения справедливы только тогда, когда две буферные пружины сжаты; т. е. только тогда, когда удовлетворяются оба неравенства

$$x_2 - x_1 < 0 \quad \text{и} \quad x_3 - x_2 < 0.$$

Чтобы определить, что это значит для t, мы вычисляем

$$\begin{aligned} x_2(t) - x_1(t) &= \tfrac{1}{32}v_0(-8\sin 2t - 4\sin 4t) = \\ &= -\tfrac{1}{32}v_0(8\sin 2t + 8\sin 2t\cos 2t) = \\ &= -\tfrac{1}{4}v_0(\sin 2t)(1 + \cos 2t) \end{aligned}$$

и точно так же

$$x_3(t) - x_2(t) = -\tfrac{1}{4}v_0(\sin 2t)(1 - \cos 2t).$$

Из этого следует, что $x_2 - x_1 < 0$ и $x_3 - x_2 < 0$ до момента времени $t = \pi/2 \approx 1{,}57$ (секунды); при этом значении t из равенств (26) и (27) получаем значения

$$x_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = x_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = x_3\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi v_0}{16},$$

$$x_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) = x_2'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad x_3'\left(\frac{\pi}{2}\right) = v_0.$$

Мы заключаем, что эти три железнодорожных вагона остаются сцепленными и перемещаются вправо, пока не происходит разъединение в момент времени $t = \pi/2$. После этого вагоны 1 и 2 остаются в покое(!), в то время как вагон 3 продолжает двигаться вправо со скоростью v_0. Если, например, $v_0 = 48$ футов в секунду (приблизительно 33 мили в час), то эти три вагона перемещаются на расстояние $9\pi \approx 28{,}27$ (фута) в течение того времени ($1{,}57$ секунды), когда они сцеплены, и

$$x_1(t) = x_2(t) = 9\pi, \quad x_3(t) = 48t - 15\pi \tag{27′}$$

для $t > \pi/2$. На рис. 5.3.7 показано, что было в ситуациях "до" и "после", а на рис. 5.3.8 показаны графики функций $x_1(t)$, $x_2(t)$ и $x_3(t)$ из уравнений (27) и (27′). ■

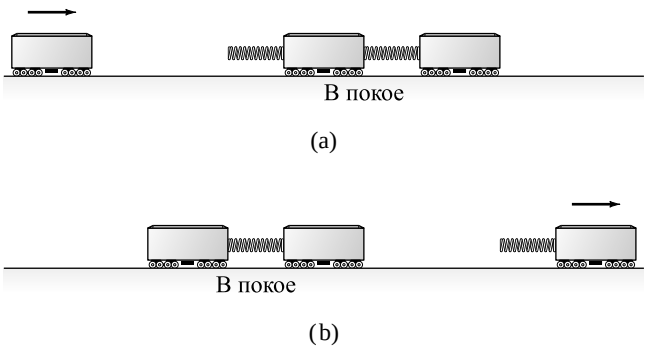


Рис. 5.3.7. Состояние вагонов: (a) — до; (b) — после

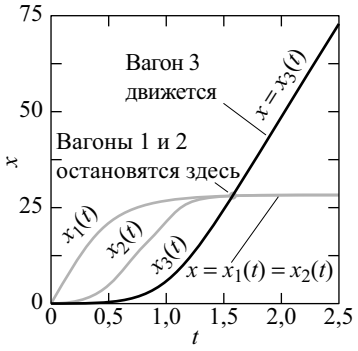


Рис. 5.3.8. Функции, дающие положения трех железнодорожных вагонов из примера 2

Вынужденные колебания и резонанс

Рассмотрим систему тел заданной массы, соединенных пружинами, показанную на рис. 5.3.2. Предположим теперь, что кроме сил, действующих со стороны пружин, на которых закреплено i-е тело системы, к этому телу приложена внешняя сила F_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Тогда однородное уравнение $\mathbf{Mx}'' = \mathbf{Kx}$ заменяется неоднородным уравнением

$$\mathbf{Mx}'' = \mathbf{Kx} + \mathbf{F}, \tag{28}$$

где $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 & \ldots & F_n \end{bmatrix}^T$ — **вектор внешних сил** для данной системы. Умножая на $\mathbf{M}^{-1}$, получаем

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{Ax} + \mathbf{f}, \tag{29}$$

где $\mathbf{f}$ — внешний вектор силы *на единицу массы*. Нас особенно интересует случай *периодической внешней силы*

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{F}_0 \cos \omega t \tag{30}$$

(где $\mathbf{F}_0$ — постоянный вектор). В этом случае мы ожидаем наличие периодического частного решения

$$\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{c} \cos \omega t \tag{31}$$

с известной внешней частотой ω, в которое входит также некоторый вектор коэффициентов $\mathbf{c}$ (его еще предстоит определить). Поскольку $\mathbf{x}_p'' = -\omega^2 \mathbf{c} \cos \omega t$, подстановка (30) и (31) в (29), после сокращения на общий множитель $\cos \omega t$, приводит к линейной системе

$$(\mathbf{A} + \omega^2 \mathbf{I})\mathbf{c} = -\mathbf{F}_0 \tag{32}$$

которую нужно решить, чтобы найти $\mathbf{c}$.

Заметим, что матрица $\mathbf{A} + \omega^2 \mathbf{I}$ несингулярная (неособая), если, конечно, неверно, что $-\omega^2 = \lambda$, собственному значению матрицы $\mathbf{A}$. (Именно в этом случае уравнение (32) может

быть решено относительно **c**.) Таким образом, периодическое частное решение вида, указанного в уравнении (31), существует при условии, что частота внешней (вынуждающей) силы *не* равняется одной из собственных частот $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ системы. Случай, в котором ω *является* собственной частотой, соответствует явлению **резонанса**, обсужденному в разделе 3.6.

Пример 3 Предположим, что на второе тело в примере 1 действует внешняя периодическая сила $50\cos\omega t$. Тогда при $m_1 = 2, m_2 = 1, k_1 = 100, k_2 = 50$ и $F_0 = 50$ из рис. 5.3.9 следует, что уравнение (29) принимает вид

$$\mathbf{x}'' = \begin{bmatrix} -75 & 25 \\ 50 & -50 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 50 \end{bmatrix}\cos\omega t, \tag{33}$$

и подстановка $\mathbf{x} = \mathbf{c}\cos\omega t$ приводит к уравнению

$$\begin{bmatrix} \omega^2 - 75 & 25 \\ 50 & \omega^2 - 50 \end{bmatrix}\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ -50 \end{bmatrix} \tag{34}$$

для вектора коэффициентов $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix}^T$. Эта система легко решается, и находятся значения

$$c_1 = \frac{1250}{(\omega^2 - 25)(\omega^2 - 100)}, \quad c_2 = -\frac{50(\omega^2 - 75)}{(\omega^2 - 25)(\omega^2 - 100)}. \tag{35}$$

Например, если частота внешней силы, возведенная в квадрат, равна $\omega^2 = 50$, то уравнение (35) дает $c_1 = -1$, $c_2 = -1$. Получающееся вынужденное периодическое колебание описывается функциями

$$x_1(t) = -\cos\omega t, \quad x_2(t) = -\cos\omega t.$$

Таким образом, наши два тела колеблются синхронно с равными амплитудами и в том же самом направлении.

Если частота внешней силы, возведенная в квадрат, равна $\omega^2 = 125$, то уравнение (35) дает $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = -1$. Получающееся вынужденное периодическое колебание описывается функциями

$$x_1(t) = \tfrac{1}{2}\cos\omega t, \quad x_2(t) = -\cos\omega t,$$

причем теперь эти два тела колеблются синхронно в противоположных направлениях, а амплитуда колебаний тела массы m_2 вдвое больше амплитуды колебаний тела массы m_1.

По виду знаменателей в уравнении (35) очевидно, что c_1 и c_2 приближаются к $+\infty$, когда ω стремится к любой из двух собственных частот $\omega_1 = 5$ и $\omega_2 = 10$ (найденных в примере 1). На рис. 5.3.10 показан график зависимости (функции) амплитуды $\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ вынужденного периодического решения $\mathbf{x}(t) = \mathbf{c}\cos\omega t$ от частоты ω вынуждающей силы. Пики в $\omega_2 = 5$ и $\omega_2 = 10$ визуально демонстрируют явление резонанса. ■

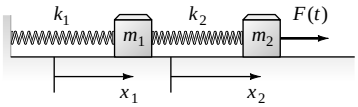


Рис. 5.3.9. Система тел заданных масс, закрепленных на пружинах из примера 3, на которую действует вынуждающая сила

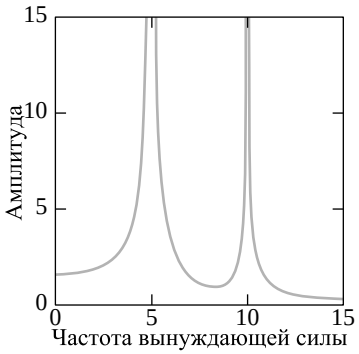


Рис. 5.3.10. График зависимости амплитуды от частоты в примере 3

Периодические решения и переходные составляющие решения (дифференциального уравнения)

Из теоремы 4 из раздела 5.1 следует, что частное решение вынуждаемой системы

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{F}_0 \cos \omega t \tag{36}$$

будет иметь форму

➤
$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{x}_p(t), \tag{37}$$

где $\mathbf{x}_p(t)$ — частное решение неоднородной системы, а $\mathbf{x}_c(t)$ — решение соответствующей однородной системы. Обычно именно явление трения (силы сопротивления, обусловленные трением) в механических системах заглушает общее решение однородного уравнения (функцию $\mathbf{x}_c(t)$), так что

$$\mathbf{x}_c(t) \to \mathbf{0} \quad \text{при} \quad t \to +\infty. \tag{38}$$

Следовательно, $\mathbf{x}_c(t)$ — **переходная составляющая решения (дифференциального уравнения)**, которая зависит только от начальных условий; со временем она затухнет, останется только **установившееся периодическое решение** $\mathbf{x}_p(t)$, обусловленное внешней движущей силой:

$$\mathbf{x}(t) \to \mathbf{x}_p(t) \quad \text{при} \quad t \to +\infty. \tag{39}$$

На практике каждая физическая система включает фрикционное (обусловленное трением) сопротивление (хотя бы и маленькое), которое заглушает переходные составляющие решения (дифференциального уравнения) так, как мы только что видели.

5.3. Задачи

В задачах 1–7 рассматривается система тел заданных масс, закрепленных на пружинах. (Такая система показана на рис. 5.3.11.) Матрица жесткости данной системы имеет вид

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -(k_1 + k_2) & k_2 \\ k_2 & -(k_2 + k_3) \end{bmatrix}.$$

Кроме того, в системе МКС заданы значения жесткостей пружин и массы тел. Найдите обе собственные частоты системы и опишите ее две собственные моды колебаний.

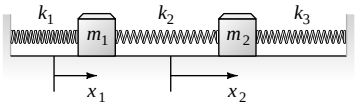


Рис. 5.3.11. Система тел заданных масс, закрепленных на пружинах в задачах 1–6

1. $m_1 = m_2 = 1$; $k_1 = 0, k_2 = 2, k_3 = 0$ (стенки отсутствуют)

2. $m_1 = m_2 = 1$; $k_1 = 1, k_2 = 4, k_3 = 1$

3. $m_1 = 1, m_2 = 2$; $k_1 = 1, k_2 = k_3 = 2$

4. $m_1 = m_2 = 1$; $k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 1$

5. $m_1 = m_2 = 1$; $k_1 = 2, k_2 = 1, k_3 = 2$

6. $m_1 = 1, m_2 = 2$; $k_1 = 2, k_2 = k_3 = 4$

7. $m_1 = m_2 = 1$; $k_1 = 4, k_2 = 6, k_3 = 4$

В задачах 8–10 указанная система тел заданных масс, закрепленных на пружинах, приведена в движение из состояния покоя ($x_1'(0) = x_2'(0) = 0$) в ее равновесном положении ($x_1(0) = x_2(0) = 0$) заданными внешними силами $F_1(t)$ и $F_2(t)$, действующими на тела массой m_1 и m_2 соответственно. Найдите полученное в результате этого движение системы и опишите его как результат сложения колебаний трех различных частот.

8. Та же система тел заданных масс, закрепленных на пружинах, что и в задаче 2, причем $F_1(t) = 96\cos 5t$, $F_2(t) \equiv 0$

9. Та же система тел заданных масс, закрепленных на пружинах, что и в задаче 3, причем $F_1(t) \equiv 0$, $F_2(t) = 120\cos 3t$

10. Та же система тел заданных масс, закрепленных на пружинах, что и в задаче 7, причем $F_1(t) = 30\cos t$, $F_2(t) = 60\cos t$

11. Рассмотрим систему, состоящую из двух тел заданных масс $m_1 = 1$ и $m_2 = 1$, закрепленных на пружине. Пусть функции, выражающие смещения $x(t)$ и $y(t)$, удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$x'' = -40x + 8y,$$
$$y'' = 12x - 60y.$$

(a) Найдите две фундаментальные моды свободных колебаний системы. **(b)** Пусть эти две массы начинают движение при начальных условиях

$$x(0) = 19, \quad x'(0) = 12$$

и

$$y(0) = 3, \quad y'(0) = 6,$$

причем на них действуют одинаковые силы $F_1(t) = F_2(t) = -195\cos 7t$. Опишите полученное в результате этого движение системы как результат сложения колебаний трех различных частот.

В задачах 12 и 13 найдите собственные частоты системы с тремя массами, показанной на рис. 5.3.1, используя данные значения масс жесткостей пружин. Для каждой собственной частоты ω определите отношение $a_1{:}a_2{:}a_3$ амплитуд для соответствующей собственной моды $x_1 = a_1 \cos \omega t$, $x_2 = a_2 \cos \omega t$, $x_3 = a_3 \cos \omega t$.

12. $m_1 = m_2 = m_3 = 1$; $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1$

13. $m_1 = m_2 = m_3 = 1$; $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 2$
(*Подсказка*. Одно собственное значение равно $\lambda = -4$.)

14. В системе, изображенной на рис. 5.3.12, $m_1 = 1$, $k_1 = 50$, $k_2 = 10$ и $F_0 = 5$ в единицах системы МКС и $\omega = 10$. Найдите m_2 такое, чтобы в получившихся установившихся периодических колебаниях масса m_1 оставалась в покое(!). Таким образом, действие подсистемы, состоящей из второй массы, закрепленной на пружине, должно нейтрализовать действие силы на первую массу. Это — пример *противовеса* (точнее, *динамического гасителя вибраций*). Он имеет электрическую аналогию, которую используют некоторые кабельные компании для предотвращения приема некоторых кабельных каналов (пользователями, которым они не предназначены).

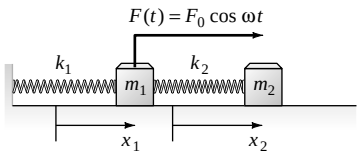


Рис. 5.3.12. Механическая система из задачи 14

15. Предположим, что $m_1 = 2$, $m_2 = \frac{1}{2}$, $k_1 = 75$, $k_2 = 25$, $F_0 = 100$ и $\omega = 10$ (все в единицах системы МКС) в вынуждаемой системе тел с заданными массами, закрепленных на пружинах (см. рис. 5.3.9). Найдите решение системы $\mathbf{M}\mathbf{x}'' = \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{F}$, которое удовлетворяет начальным условиям $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}'(0) = \mathbf{0}$.

16. На рис. 5.3.13 показаны два железнодорожных вагона с буферной пружиной. Мы хотим исследовать передачу импульса, которая происходит после соударения вагона 1 с вагоном 2, если известно, что начальная скорость вагона 1 равна v_0, а вагон 2 в момент соударения находится в состоянии покоя. Аналогом уравнения (18) в тексте является уравнение

$$\mathbf{x}'' = \begin{bmatrix} -c_1 & c_1 \\ c_2 & -c_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

при $c_i = k/m_i$ для $i = 1, 2$. Покажите, что собственные значения матрицы коэффициентов $\mathbf{A}$ равны $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = -c_1 - c_2$, причем им соответствуют собственные векторы $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ и $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} c_1 & -c_2 \end{bmatrix}^T$.

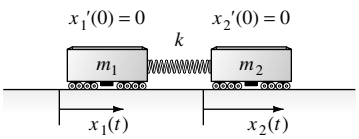


Рис. 5.3.13. Два железнодорожных вагона из задач 16–19

17. Пусть каждый из двух вагонов из задачи 16 весит 16 тонн (так что $m_1 = m_2 = 1000$ (слагов (единица массы в системе фунт–сила))) и $k = 1$ тонна/фут (т. е. 2000 фунтов/фут). Покажите, что вагоны расцепятся через $\pi/2$ секунд и что $x_1'(t) = 0$ и $x_2'(t) = v_0$ после расцепления. Таким образом, первоначальный импульс вагона 1 полностью передается вагону 2.

18. Пусть вагоны 1 и 2 весят 8 и 16 тонн соответственно, причем $k = 3000$ фунтов/фут. Покажите, что эти два вагона расцепятся через $\pi/3$ секунд и что

$$x_1'(t) = -\tfrac{1}{3}v_0 \quad \text{и} \quad x_2'(t) = +\tfrac{2}{3}v_0$$

после расцепления. Таким образом, после отдачи эти два вагона поедут в противоположных направлениях.

19. Пусть вагоны 1 и 2 весят 24 и 8 тонн соответственно, и $k = 1500$ фунтов/фут. Покажите, что вагоны расцепятся через $\pi/2$ секунд и что

$$x_1'(t) = +\tfrac{1}{2}v_0 \quad \text{и} \quad x_2'(t) = +\tfrac{3}{2}v_0$$

после расцепления. Таким образом, оба вагона продолжат двигаться в первоначальном направлении движения, но с различными скоростями.

20. Рассмотрим систему с тремя железнодорожными вагонами, показанными на рис. 5.3.6. Предположим, что каждый из вагонов 1 и 3 весит 32 тонны, а вагон 2 весит 8 тонн, причем жесткость каждой пружины равна 4 тонны на фут. Пусть $x_1'(0) = v_0$ и $x_2'(0) = x_3'(0) = 0$. Покажите, что обе пружины сжаты до момента времени $t = \pi/2$ и что

$$x_1'(t) = -\tfrac{1}{9}v_0 \quad \text{и} \quad x_2'(t) = x_3'(t) = +\tfrac{8}{9}v_0$$

после этого момента времени. Таким образом, вагон 1 дает обратный ход (отскакивает), но вагоны 2 и 3 продолжают двигаться с той же самой скоростью.

Двухосный автомобиль

В примере 4 из раздела 3.6 мы исследовали вертикальные колебания автомобиля с одной осью, т. е. фактически одноколесного велосипеда. Теперь мы можем проанализировать более реалистическую модель: автомобиль с двумя осями и с отдельными передней и задней подвесными системами. На рис. 5.3.14 представлена подвесная система такого автомобиля. Мы предполагаем, что кузов легкового автомобиля оказывает такое же действие, как и цельный брус (стержень) массы m и длиной $L = L_1 + L_2$. Он имеет момент инерции I относительно его центра масс C, который находится на расстоянии L_1 от передней части автомобиля. Автомобиль имеет переднюю и заднюю пружины подвесной системы с константами Гука k_1 и k_2 соответственно. Когда автомобиль находится в движении, пусть $x(t)$ обозначает вертикальное смещение центра масс автомобиля от положения равновесия; пусть также $\theta(t)$ обозначает его угловое смещение (в радианах) от горизонтальной оси. Тогда, применяя законы Ньютона для линейного и углового ускорения, получим уравнения движения

$$\begin{aligned} mx'' &= -(k_1 + k_2)x + (k_1L_1 - k_2L_2)\theta, \\ I\theta'' &= (k_1L_1 - k_2L_2)x - (k_1L_1^2 + k_2L_2^2)\theta. \end{aligned} \tag{40}$$

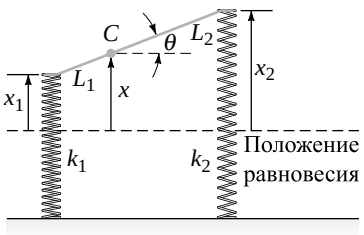


Рис. 5.3.14. Модель автомобиля с двумя осями

21. Предположим, что $m = 75$ слагов (единица массы в системе фунт–сила), т. е. автомобиль весит 2400 фунтов, $L_1 = 7$ футов, $L_2 = 3$ фута (это автомобиль с задним расположением двигателя), $k_1 = k_2 = 2000$ фунт/фут и $I = 1000$ фут·футн·с^2. Тогда уравнения (40) примут вид

$$75x'' + 4000x - \quad 8000\theta = 0,$$

$$1000\theta'' - 8000x + 116{,}000\theta = 0.$$

(a) Найти две собственных частоты ω_1 и ω_2 автомобиля. **(b)** Теперь предположите, что автомобиль едет со скоростью v фут в секунду по волнистому дорожному покрытию, имеющему форму, подобную синусоиде, у которой длина волны равна 40 футам. В результате на автомобиль будет действовать периодическая сила, частота которой равна $\omega = 2\pi v/40 = \pi v/20$. Резонанс происходит при $\omega = \omega_1$ или $\omega = \omega_2$. Найдите две критические скорости автомобиля (в футах в секунду и в милях в час).

22. Предположим, что $k_1 = k_2 = k$ и $L_1 = L_2 = \frac{1}{2}L$ на рис. 5.3.14 (симметричное расположение). Покажите, что в этом случае каждое свободное колебание является суммой вертикального колебания с частотой

$$\omega_1 = \sqrt{2k/m}$$

и углового колебания с частотой

$$\omega_2 = \sqrt{kL^2/(2I)}.$$

В задачах 23–25 система, изображенная на рис. 5.3.14, взята в качестве модели незадемпфированного автомобиля с заданными параметрами, которые измеряются в единицах fps. ***(a)*** *Найдите две собственных частоты колебания (в герцах).* ***(b)*** *Предположим, что этот автомобиль едет по синусоидальному волнистому дорожному покрытию с длиной волны 40 футов. Найдите две критические скорости.*

23. $m = 100$, $I = 800$, $L_1 = L_2 = 5$, $k_1 = k_2 = 2000$

24. $m = 100$, $I = 1000$, $L_1 = 6$, $L_2 = 4$, $k_1 = k_2 = 2000$

25. $m = 100$, $I = 800$, $L_1 = L_2 = 5$, $k_1 = 1000$, $k_2 = 2000$

5.3. Приложение. Колебания многоэтажных зданий, вызванные землетрясением

В этом приложении вы должны исследовать поведение семиэтажного здания, показанного на рис. 5.3.15, во время поперечных колебаний земли, вызванных землетрясением. Предположим, что каждый из семи [наземных] этажей весит 16 тонн, так что масса каждого этажа равна $m = 1000$ (слагов, единица массы в системе фунт–сила). Также примите во внимание горизонтальную силу восстановления $k = 5$ (тонн на фут) между смежными этажами. Иными словами, нужно учесть те внутренние силы, которые возникают в ответ на горизонтальные смещения каждого из этажей; эти силы показаны на рис. 5.3.16. Из этого следует, что свободные поперечные колебания, показанные на рис. 5.3.15, удовлетворяют уравнению $\mathbf{Mx}'' = \mathbf{Kx}$ при $n = 7$, $m_i = 1000$ (для каждого i) и $k_i = 10000$ (фунт/фут) для $1 \leqq i \leqq 7$.

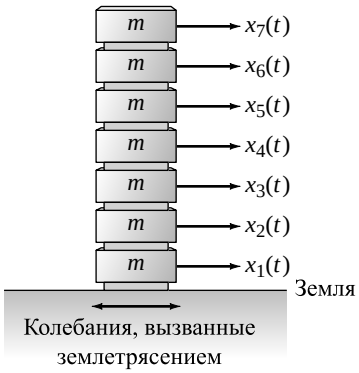


Рис. 5.3.15. Семиэтажное здание

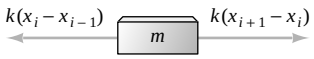


Рис. 5.3.16. Силы, действующие на на i-й этаж

Наша система тогда приводится к форме $\mathbf{x}'' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ с

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -20 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & -20 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -20 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -20 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & -20 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & -10 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

После ввода матрицы **A** в калькулятор TI-86 команда `eigVl A` приблизительно через 15 секунд вычислила семь собственных значений, показанных в столбце λ таблицы на рис. 5.3.17. В качестве альтернативы для вычисления собственных значений вы можете использовать команду системы *Maple* `eigenvals(A)`, команду пакета MATLAB `eig(A)` или команду системы *Mathematica* `Eigenvalues[A]`. Затем вычислите элементы в остальных столбцах таблицы. Иными словами, вычислите собственные частоты и периоды колебания

i	**Собственное значение** λ	**Частота** $\omega = \sqrt{-\lambda}$	**Период** $P = \frac{2\pi}{\omega}$ **(секунд)**
1	−38,2709	6,1863	1,0157
2	−33,3826	5,7778	1,0875
3	−26,1803	5,1167	1,2280
4	−17,9094	4,2320	1,4847
5	−10,0000	3,1623	1,9869
6	−3,8197	1,9544	3,2149
7	−0,4370	0,6611	9,5042

Рис. 5.3.17. Частоты и периоды собственных колебаний семиэтажного здания

семиэтажного здания. Обратите внимание, что типичное землетрясение, вызывающее наземные колебания с периодом 2 секунды, опасно из-за близости к пятой собственной частоте (с периодом $1{,}9869$ секунды) здания.

Горизонтальное колебание поверхности земли, вызванное землетрясением, $E\cos\omega t$ с амплитудой E и ускорением $a = -E\omega^2\cos\omega t$, порождает противодействующую силу инерции $F = ma = mE\omega^2\sin\omega t$ на каждом этаже здания. В результате получается неоднородная система

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{A}\mathbf{x} + (E\omega^2\cos\omega t)\mathbf{b}, \tag{2}$$

где $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ и $\mathbf{A}$ — матрица уравнения (1). На рис. 5.3.18 показан график зависимости *максимальной амплитуды* (вынужденных колебаний любого отдельного этажа) от *периода* колебаний, вызванных землетрясением. Пики соответствуют первым шести из семи резонансных частот. Мы видим, например, что, хотя землетрясение с периодом 2 (с), вероятно, вызовет разрушительные резонансные колебания в здании, здание, по всей вероятности, останется целым и невредимым при землетрясении с периодом $2{,}5$ (с). Различные здания имеют различные собственные частоты колебаний, и поэтому какое-нибудь конкретное землетрясение может уничтожить одно здание, но оставит нетронутым ближайшее к нему. Эта кажущаяся аномалия наблюдалась в Мехико после разрушительного землетрясения 19 сентября 1985 года.

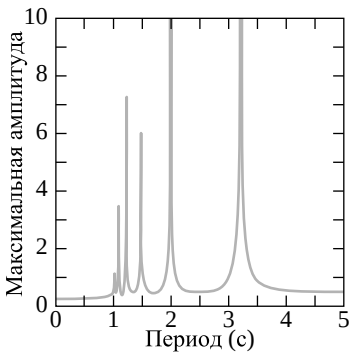


Рис. 5.3.18. Резонансные колебания семиэтажного здания — максимальная амплитуда как функция периода

Проведите ваше персональное исследование семиэтажного здания, полагая вес (в тоннах) каждого этажа равным наибольшей цифре номера вашего студенческого билета. Положите k (в единицах тонна на фут) равным наименьшей отличной от нуля цифре номера вашего студенческого билета. Получите числовые и графические результаты, подобные показанным на рис. 5.3.17 и 5.3.18. Действительно ли ваше здание настолько чувствительно к колебаниям, что есть вероятность повреждения его землетрясением с периодом, лежащим в диапазоне от 2 до 3 секунд?

Если хотите, можете начать с решения (вручную) следующих подготовительных задач.

1. Найти периоды собственных колебаний здания с двумя наземными этажами, каждый из которых весит 16 тонн, причем на каждый из них действует восстанавливающая сила, равная $k = 5$ тонн на фут.
2. Найти периоды собственных колебаний здания с тремя наземными этажами, каждый из которых весит 16 тонн, причем на каждый из них действует восстанавливающая сила, равная $k = 5$ тонн на фут.
3. Найти собственные частоты и собственные моды колебаний здания с тремя наземными этажами, как в задаче 2, за исключением того, что верхние два этажа весят 8 тонн каждый, а не 16. Найдите отношения амплитуд A, B и C колебаний этих трех этажей в виде $A:B:C$, полагая $A = 1$.
4. Предположим, что здание из задачи 3 находится в зоне землетрясения, в котором земля совершает горизонтальные синусоидальные колебания с периодом 3 с амплитудой 3 дюйма. Найдите амплитуды получившихся в результате устоявшихся периодических колебаний трех наземных этажей. Примите во внимание тот факт, что движение $E\sin\omega t$ земли с ускорением $a = -E\omega^2\sin\omega t$ вызывает противодействующую силу инерции $F = -ma = mE\omega^2\sin\omega t$ на этаж массой m.

5.4. Решения в случае кратных собственных значений

В разделе 5.2 мы видели, что, если матрица $\mathbf{A}$ размера $n\times n$ имеет n *различных* (вещественных или комплексных) собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, соответствующих их собственным векторам $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, то общее решение системы

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{1}$$

представляет собой функцию

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{v}_1e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{v}_2e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n\mathbf{v}_ne^{\lambda_n t} \tag{2}$$

с произвольными постоянными $c_1, c_2, \ldots, c_n$. В этом разделе мы обсуждаем случай, когда характеристическое уравнение

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0 \tag{3}$$

не имеет n различных корней, и, таким образом, имеет по крайней мере один кратный корень.

Собственное значение имеет **кратность**[6] k, если оно является корнем кратности k уравнения (3). Для каждого собственного значения λ уравнение собственного вектора

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{4}$$

имеет по крайней мере одно отличное от нуля решение $\mathbf{v}$, так что есть по крайней мере один собственный вектор, соответствующий λ. Но собственное значение кратности $k > 1$

[6] Так определенную кратность называют еще **алгебраической кратностью**. — *Примеч. ред.*

может иметь *меньше* k линейно независимых соответствующих ему собственных векторов. В этом случае мы не сможем найти "полную систему" n линейно независимых собственных векторов матрицы $\mathbf{A}$, необходимых для построения общего решения (2).

Давайте называть собственное значение кратности k **полным**, если оно имеет k линейно независимых соответствующих собственных векторов. Если каждое собственное значение матрицы $\mathbf{A}$ полное, то, поскольку собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, линейно независимы, из этого следует, что $\mathbf{A}$ действительно имеет полную систему n линейно независимых собственных векторов $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, соответствующих собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (каждое повторяется столько раз, какова его кратность). В этом случае общее решение уравнения $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ все еще дается обычной суперпозицией (2).

Пример 1 Найдем общее решение системы

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 0 \\ -6 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}. \tag{5}$$

Решение Характеристическое уравнение матрицы коэффициентов в уравнении (5) имеет вид

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| &= \begin{vmatrix} 9-\lambda & 4 & 0 \\ -6 & -1-\lambda & 0 \\ 6 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (3-\lambda)[(9-\lambda)(-1-\lambda)+24] = \\ &= (3-\lambda)(15-8\lambda+\lambda^2) = \\ &= (5-\lambda)(3-\lambda)^2 = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $\mathbf{A}$ имеет простое собственное значение $\lambda_1 = 5$ и кратное собственное значение $\lambda_2 = 3$ кратности $k = 2$.

Случай 1: $\lambda_1 = 5$. Уравнение собственного вектора $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$, где $\mathbf{v} = [a \quad b \quad c]^T$, имеет вид

$$(\mathbf{A} - 5\mathbf{I})\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -6 & -6 & 0 \\ 6 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Каждое из первых двух уравнений, $4a + 4b = 0$ и $-6a - 6b = 0$, приводит к равенству $b = -a$. Тогда третье уравнение приводит к равенству $2a - -2c = 0$, так что $c = a$. Выбирая $a = 1$, получаем собственный вектор

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T,$$

соответствующий собственному значению $\lambda_1 = 5$.

Случай 2: $\lambda_2 = 3$. Теперь уравнение собственного вектора имеет вид

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -6 & -4 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

так что отличный от нуля вектор $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T$ будет собственным вектором тогда и только тогда, когда

$$6a + 4b = 0; \tag{6}$$

т. е. при $b = -\frac{3}{2}a$. Тот факт, что уравнение (6) не содержит c, означает, что значение c можно выбирать произвольно, лишь бы выполнялось условие $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Если $c = 1$, то мы можем выбрать $a = b = 0$; это дает собственный вектор

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T,$$

соответствующий $\lambda_2 = 3$. Если $c = 0$, то мы должны выбрать a отличным от нуля. Например, если $a = 2$ (чтобы избежать дробей), то $b = -3$, так что вторым линейно независимым собственным вектором, соответствующим собственному значению $\lambda_2 = 3$ кратности 2, будет

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Таким образом, мы нашли полную систему $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ трех собственных векторов, соответствующих собственным значениям 5, 3, 3. Соответствующее общее решение уравнения (5) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= c_1\mathbf{v}_1e^{5t} + c_2\mathbf{v}_2e^{3t} + c_3\mathbf{v}_3e^{3t} = \\ &= c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_3 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} e^{3t}, \end{aligned} \tag{7}$$

а его скалярные составляющие функции задаются формулами

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1e^{5t} + \phantom{c_2e^{3t}} + 2c_3e^{3t}, \\ x_2(t) &= -c_1e^{5t} \phantom{+ c_2e^{3t}} - 3c_3e^{3t}, \\ x_3(t) &= c_1e^{5t} + c_2e^{3t}. \end{aligned}$$

■

Замечание. Наш выбор в примере 1 этих двух собственных векторов

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T \quad \text{и} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}^T,$$

соответствующих кратному собственному значению $\lambda_2 = 3$, нуждается в некотором комментарии. Тот факт, что $b = -\frac{3}{2}a$ для любого собственного вектора, соответствующего

$\lambda_2 = 3$, означает, что любой такой собственный вектор может быть записан в виде

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a \\ -\frac{3}{2}a \\ c \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{2}a \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix} = c\mathbf{v}_2 + \tfrac{1}{2}a\mathbf{v}_3,$$

и, таким образом, является линейной комбинацией $\mathbf{v}_2$ и $\mathbf{v}_3$. Поэтому при заданных не равных одновременно нулю a и c мы могли выбрать $\mathbf{v}$, а не $\mathbf{v}_3$ в качестве нашего третьего собственного вектора, и тогда новое общее решение

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{v}_1e^{5t} + c_2\mathbf{v}_2e^{3t} + c_3\mathbf{v}e^{3t}$$

было бы эквивалентно решению, даваемому равенством (7). Таким образом, мы не должны волноваться по поводу "правильного" выбора независимых собственных векторов, соответствующих кратному собственному значению. Подходит любой выбор; обычно мы выбираем самый простой подходящий вектор. ■

Дефектные собственные значения

Следующий пример показывает, что, к сожалению, не все кратные собственные значения полны.

Пример 2 Матрица

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \tag{8}$$

имеет характеристическое уравнение

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 3 & 7-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (1-\lambda)(7-\lambda) + 9 = \\ &= \lambda^2 - 8\lambda + 16 = (\lambda - 4)^2 = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $\mathbf{A}$ имеет единственное собственное значение $\lambda_1 = 4$ кратности 2. Уравнение собственного вектора

$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

тогда приводит к эквивалентным скалярным уравнениям

$$-3a - 3b = 0, \quad 3a + 3b = 0.$$

Следовательно, $b = -a$, если вектор $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}^T$, является собственным вектором матрицы $\mathbf{A}$. Поэтому любой собственный вектор, соответствующий $\lambda_1 = 4$, является произведением отличного от нуля числа на вектор $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$. Таким образом, собственное значение $\lambda_1 = 4$

кратности 2 имеет только один независимый собственный вектор, и, следовательно, не является полным[7]. ■

Собственное значение λ кратности $k > 1$ называется **дефектным**, если оно не является полным. Если λ имеет только $p < k$ линейно независимых собственных векторов, то число

$$d = k - p \tag{9}$$

"отсутствующих" собственных векторов называется **дефектом** дефектного собственного значения λ. Таким образом, дефектное собственное значение $\lambda_1 = 4$ в примере 2 имеет кратность $k = 2$ и дефект $d = 1$, потому что оно имеет только $p = 1$ соответствующий ему собственный вектор[8].

Если не все собственные значения матрицы $\mathbf{A}$ размера $n \times n$ полны, то метод собственных значений, в том виде, как он был описан, даст *меньше*, чем необходимо (а их необходимо n) линейно независимых решений системы $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Мы поэтому должны научиться находить "отсутствующие решения", соответствующие дефектному собственному значению λ кратности $k > 1$.

Случай дефекта $\mathbf{k = 2}$

Давайте начнем со случая $k = 2$ и предположим, что мы установили (как в примере 2), что есть только один[9] собственный вектор $\mathbf{v}_1$, соответствующий дефектному собственному значению λ. Ранее описанным способом мы в этом случае нашли бы только одно[10] решение

➤
$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{v}_1 e^{\lambda t} \tag{10}$$

уравнения $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. По аналогии со случаем кратных характеристических корней для одного линейного дифференциального уравнения (раздел 3.3), мы можем надеяться найти второе решение вида

$$\mathbf{x}_2(t) = (\mathbf{v}_2 t)e^{\lambda t} = \mathbf{v}_2 t e^{\lambda t}. \tag{11}$$

Подставив $\mathbf{x} = \mathbf{v}_2 t e^{\lambda t}$ в $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, получим уравнение

$$\mathbf{v}_2 e^{\lambda t} + \lambda \mathbf{v}_2 t e^{\lambda t} = \mathbf{A}\mathbf{v}_2 t e^{\lambda t}.$$

Но поскольку коэффициенты при обеих функциях $e^{\lambda t}$ и $te^{\lambda t}$ должны быть равны, из этого следует, что $\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, и, следовательно, что $\mathbf{x}_2(t) \equiv \mathbf{0}$. Это означает, что наша надежда была напрасной: система $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ не имеет *нетривиального* решения вида (11).

[7] Максимальное число линейно независимых собственных векторов линейного оператора A на конечномерном пространстве, отвечающих его собственному значению λ, называется геометрической кратностью скаляра λ. Она обозначается ***геом. кр.*** (λ). Геометрическая кратность собственного значения λ не превосходит алгебраической кратности собственного значения λ (т. е. кратности собственного значения λ как корня характеристического многочлена). В конечномерном пространстве геом. кр. $(\lambda) = \dim \ker(A - \lambda E)$. — *Примеч. ред.*

[8] Здесь подразумевается, что нет других собственных векторов, которые могли бы образовать линейно независимую систему векторов. Так что в данном случае собственный вектор определен с точностью до скаляра. — *Примеч. ред.*

[9] Здесь опять подразумевается, что нет других собственных векторов, которые могли бы образовать линейно независимую систему векторов. (Авторы такие мелочи не оговаривают и считают само собой разумеющимися из контекста.) Так что в данном случае собственный вектор определен с точностью до скаляра. — *Примеч. ред.*

[10] Здесь опять подразумевается, что нет других решений, которые могли бы образовать линейно независимую систему решений. (Авторы такие мелочи не оговаривают и считают само собой разумеющимися из контекста.) Так что в данном случае решение определено с точностью до скаляра. — *Примеч. ред.*

Вместо того чтобы просто отбросить эту идею и разочаровываться в равенстве (11), давайте немного обобщим эту идею и заменим $\mathbf{v}_2 t$ вектором $\mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2$. Таким образом, мы исследуем возможность наличия второго решения вида

➤
$$\mathbf{x}_2(t) = (\mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2)e^{\lambda t} = \mathbf{v}_1 t e^{\lambda t} + \mathbf{v}_2 e^{\lambda t}, \tag{12}$$

где $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ — постоянные отличные от нуля векторы. Когда мы подставим $\mathbf{x} = \mathbf{v}_1 t e^{\lambda t} + \mathbf{v}_2 e^{\lambda t}$ в уравнение $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, мы получим уравнение

$$\mathbf{v}_1 e^{\lambda t} + \lambda \mathbf{v}_1 t e^{\lambda t} + \lambda \mathbf{v}_2 e^{\lambda t} = \mathbf{A}\mathbf{v}_1 t e^{\lambda t} + \mathbf{A}\mathbf{v}_2 e^{\lambda t}. \tag{13}$$

Мы приравниваем коэффициенты при $e^{\lambda t}$ и $te^{\lambda t}$ и таким образом получаем следующие два уравнения:

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \tag{14}$$

и

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1, \tag{15}$$

которым должны удовлетворять векторы $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$, чтобы вектор (12) был решением $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Обратите внимание, что уравнение (14) просто подтверждает, что $\mathbf{v}_1$ — собственный вектор, соответствующий собственному значению λ матрицы $\mathbf{A}$. Тогда уравнение (15) говорит, что вектор $\mathbf{v}_2$ удовлетворяет уравнению

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^2 \mathbf{v}_2 = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})[(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v}_2] = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}.$$

Из этого следует, что для того, чтобы решить систему этих двух уравнений (14) и (15), достаточно найти какое-нибудь решение $\mathbf{v}_2$ одного уравнения $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ такое, чтобы удовлетворяющий ему вектор $\mathbf{v}_1 = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v}_2$ был *отличным от нуля*. Оказывается, что это всегда возможно, если дефектное собственное значение λ матрицы $\mathbf{A}$ имеет кратность 2. Следовательно, процедура, описанная в следующем алгоритме, всегда позволяет найти два независимых решения, соответствующих такому собственному значению.

АЛГОРИТМ Дефектные собственные значения кратности 2

1. Сначала найдите отличное от нуля решение $\mathbf{v}_2$ уравнения

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}, \tag{16}$$

такое что вектор

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \tag{17}$$

отличен от нуля, и поэтому собственный вектор $\mathbf{v}_1$ соответствует собственному значению λ.

2. Затем постройте два независимых решения

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{v}_1 e^{\lambda t} \tag{18}$$

и

$$\mathbf{x}_2(t) = (\mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2)e^{\lambda t} \tag{19}$$

уравнения $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, соответствующих λ. ▲

Пример 3 Найдем общее решение системы

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \mathbf{x}. \tag{20}$$

Решение В примере 2 мы нашли, что матрица $\mathbf{A}$ коэффициентов в уравнении (20) имеет дефектное собственное значение $\lambda = 4$ кратности 2. Мы поэтому начинаем с вычисления

$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^2 = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, уравнение (16) принимает вид

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}_2 = \mathbf{0},$$

и поэтому удовлетворяется при *любом* выборе вектора $\mathbf{v}_2$. В принципе, может случиться так, что вектор $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{v}_2$ отличен от нуля (как и нужно) для некоторых выбранных значений $\mathbf{v}_2$, хотя и не для всех. Если мы пробуем взять $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$, мы найдем, что вектор

$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix} = \mathbf{v}_1$$

отличен от нуля, и поэтому является собственным вектором, соответствующим $\lambda = 4$. (Это в -3 раза увеличенный собственный вектор, найденный в примере 2.) Поэтому двумя решениями уравнения (20), найденными из равенств (18) и (19), будут

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{v}_1 e^{4t} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix} e^{4t},$$

$$\mathbf{x}_2(t) = (\mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2)e^{4t} = \begin{bmatrix} -3t + 1 \\ 3t \end{bmatrix} e^{4t}.$$

Полученное в результате общее решение

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t)$$

имеет скалярные составляющие (функции)

$$x_1(t) = (-3c_2 t + c_2 - 3c_1)e^{4t},$$
$$x_2(t) = (3c_2 t + 3c_1)e^{4t}.$$

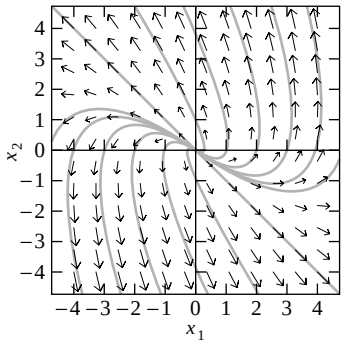


Рис. 5.4.1. Поле направлений и интегральные кривые линейной системы $x_1' = x_1 - 3x_2$, $x_2' = 3x_1 + 7x_2$ из примера 3

При $c_2 = 0$ решения этих уравнений приводят к уравнениям $x_1(t) = -3c_1e^{4t}$, $x_2(t) = 3c_1e^{4t}$, которые параметризуют прямую линию $x_1 = -x_2$ на плоскости Ox_1x_2. Точка $(x_1(t), x_2(t))$ тогда удаляется по этой линии от начала координат при $t \to +\infty$ к северо-западу, если $c_1 > 0$, и к юго-востоку, если $c_1 < 0$. Как показано на рис. 5.4.1, каждая интегральная кривая при $c_2 \neq 0$ касается прямой линии $x_1 = -x_2$ в начале координат; точка $(x_1(t), x_2(t))$ приближается к началу координат при $t \to -\infty$ и стремится к $+\infty$ по интегральной кривой при $t \to +\infty$. ■

Обобщенные собственные векторы

Вектор $\mathbf{v}_2$ в уравнении (16) служит примером обобщенного собственного вектора. Если матрица $\mathbf{A}$ имеет собственное значение λ, то **обобщенный собственный вектор ранга** r, соответствующий λ, — это такой вектор $\mathbf{v}$, что

➤
$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^r\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad \text{но} \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{r-1}\mathbf{v} \neq \mathbf{0}. \tag{21}$$

Если $r = 1$, то равенство (21) просто означает, что собственный вектор $\mathbf{v}$ соответствует собственному числу λ. Таким образом, обобщенный собственный вектор ранга 1 — это обыкновенный собственный вектор. Вектор $\mathbf{v}_2$ в равенстве (16) — обобщенный собственный вектор ранга 2 (а не обыкновенный собственный вектор).

Ранее описанный метод в случае кратности 2 сводится к нахождению пары обобщенных собственных векторов $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, причем первый из них должен иметь ранг 1, а второй — ранг 2, и, кроме того, должно выполняться равенство $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$. В случае более высокой кратности для применения метода необходима более длинная цепочка обобщенных собственных векторов[11]. **Цепочка (длины k) обобщенных собственных векторов, начинающаяся с собственного вектора**[12] $\mathbf{v}_1$, — это последовательность $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$

[11] Цепочка обобщенных собственных векторов иногда называется также *серией*. — *Примеч. ред.*

[12] В таком случае иногда также говорят, что цепочка основана на этом собственном векторе или что он лежит в ее основании. — *Примеч. ред.*

из k обобщенных собственных векторов, такая что

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_k &= \mathbf{v}_{k-1},\\ (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_{k-1} &= \mathbf{v}_{k-2},\\ &\vdots\\ (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}_1.\end{aligned} \tag{22}$$

Поскольку $\mathbf{v}_1$ — обыкновенный собственный вектор, $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$. Поэтому из (22) следует, что

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}. \tag{23}$$

Если $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ — цепочка длины 3 из обобщенных собственных векторов, соответствующих кратному собственному значению λ матрицы $\mathbf{A}$, то просто проверить, что три линейно независимых решения уравнения $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ выражаются формулами

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1(t) &= \mathbf{v}_1 e^{\lambda t},\\ \mathbf{x}_2(t) &= (\mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2)e^{\lambda t},\\ \mathbf{x}_3(t) &= \left(\tfrac{1}{2}\mathbf{v}_1 t^2 + \mathbf{v}_2 t + \mathbf{v}_3\right) e^{\lambda t}.\end{aligned} \tag{24}$$

Например, уравнения (22) дают

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 + \lambda\mathbf{v}_3, \quad \mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \lambda\mathbf{v}_2, \quad \mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}_1,$$

так что

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\mathbf{x}_3 &= \left[\tfrac{1}{2}\mathbf{A}\mathbf{v}_1 t^2 + \mathbf{A}\mathbf{v}_2 t + \mathbf{A}\mathbf{v}_3\right] e^{\lambda t} =\\ &= \left[\tfrac{1}{2}\lambda\mathbf{v}_1 t^2 + (\mathbf{v}_1 + \lambda\mathbf{v}_2)t + (\mathbf{v}_2 + \lambda\mathbf{v}_3)\right] e^{\lambda t} =\\ &= (\mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2)e^{\lambda t} + \lambda\left(\tfrac{1}{2}\mathbf{v}_1 t^2 + \mathbf{v}_2 t + \mathbf{v}_3\right) e^{\lambda t} =\\ &= \mathbf{x}_3'.\end{aligned}$$

Поэтому $\mathbf{x}_3(t)$ в (24) действительно определяет решение уравнения $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Следовательно, чтобы учесть кратность 3 собственного значения λ, достаточно найти цепочку (длины 3) обобщенных собственных значений $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, соответствующих λ. Из уравнения (23), видно, что достаточно найти только решение $\mathbf{v}_3$ уравнения

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0},$$

такое что оба векторы

$$\mathbf{v}_2 = (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_3 \quad \text{и} \quad \mathbf{v}_1 = (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_2$$

отличны от нуля (как мы увидим потом, это не всегда возможно).

Пример 4 Найдем три линейно независимых решения системы

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -5 & -3 & -7 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}. \tag{25}$$

Решение Характеристическое уравнение матрицы коэффициентов уравнения (25) имеет вид

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ -5 & -3-\lambda & -7 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= 1 \cdot [-7 - 2 \cdot (-3 - \lambda)] + (-\lambda)[(-\lambda)(-3 - \lambda) + 5] =$$

$$= -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = -(\lambda + 1)^3 = 0,$$

и, таким образом, матрица $\mathbf{A}$ имеет собственное значение $\lambda = -1$ кратности 3. Уравнение собственного вектора $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ для собственного вектора $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T$ имеет вид

$$(\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -5 & -2 & -7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Третья строка $a + c = 0$ дает $c = -a$, тогда первая строка $a + b + 2c = 0$ дает $b = a$. Таким образом, с точностью до постоянного множителя, собственное значение $\lambda = -1$ имеет только один соответствующий ему собственный вектор $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a & a & -a \end{bmatrix}^T$ с $a \neq 0$, и потому дефект собственного значения $\lambda = -1$ равен 2.

Чтобы применить описанный здесь метод для тройного собственного значения [13], сначала вычисляем

$$(\mathbf{A} + \mathbf{I})^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -5 & -2 & -7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -5 & -2 & -7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

и

$$(\mathbf{A} + \mathbf{I})^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -5 & -2 & -7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, *любой* отличный от нуля вектор $\mathbf{v}_3$ будет решением уравнения $(\mathbf{A} + \mathbf{I})^3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$. Начиная, например, с $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, мы

[13] Под тройным (двойным и т. д.) собственным значением, естественно, подразумевается, что данное собственное значения является тройным (двойным и т. д.) корнем характеристического уравнения. — *Примеч. ред.*

вычисляем

$$\mathbf{v}_2 = (\mathbf{A}+\mathbf{I})\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -5 & -2 & -7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}_1 = (\mathbf{A}+\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -5 & -2 & -7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Заметьте, что $\mathbf{v}_1$ — ранее найденный собственный вектор $\mathbf{v}$ при $a = -2$; такое совпадение позволяет проверить правильность проведенных нами вычислений с матрицами.

Таким образом, мы нашли цепочку длины 3 обобщенных собственных векторов $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$, соответствующих тройному собственному значению $\lambda = -1$. Подстановка в равенство (24) теперь дает линейно независимые решения

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{v}_1 e^{-t} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-t},$$

$$\mathbf{x}_2(t) = (\mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2)e^{-t} = \begin{bmatrix} -2t+1 \\ -2t-5 \\ 2t+1 \end{bmatrix} e^{-t},$$

$$\mathbf{x}_3(t) = \left(\tfrac{1}{2}\mathbf{v}_1 t^2 + \mathbf{v}_2 t + \mathbf{v}_3\right) e^{-t} = \begin{bmatrix} -t^2+t+1 \\ -t^2-5t \\ t^2+t \end{bmatrix} e^{-t}$$

системы $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. ■

Общий случай

Фундаментальная теорема линейной алгебры утверждает, что каждая матрица $\mathbf{A}$ размера $n \times n$ имеет n линейно независимых обобщенных собственных векторов. Эти n обобщенных собственных векторов могут быть размещены в цепочках так, что сумма длин цепочек, соответствующих данному собственному значению λ, равна кратности λ. Но структура этих цепочек зависит от дефекта собственного значения λ и может быть весьма сложной. Например, собственное значение кратности 4 может соответсвовать

- четырем цепочкам длины 1 (дефект 0);
- двум цепочкам длины 1 и одной цепочке длины 2 (дефект 1);
- двум цепочкам длины 2 (дефект 2);
- одной цепочке длины 1 и одной цепочке длины 3 (дефект 2);
- одной цепочке длины 4 (дефект 3).

Обратите внимание, что в каждом из этих случаев длина самой длинной цепочки не превышает $d+1$, где d — дефект собственного значения. Следовательно, как только мы нашли

все обыкновенные собственные векторы, соответствующие кратному собственному значению λ, и поэтому узнали дефект d собственного значения λ, мы можем начать с решения уравнения

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{d+1}\mathbf{u}=\mathbf{0} \tag{26}$$

для построения цепочки обобщенных собственных векторов соответствующих собственному значению λ.

АЛГОРИТМ Цепочки обобщенных собственных значений

Начните с отличного от нуля решения $\mathbf{u}_1$ уравнения (26) и последовательно умножайте его на матрицу $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}$ до получения нулевого вектора. Если

$$\begin{gathered}(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{u}_1=\mathbf{u}_2\neq\mathbf{0},\\ \vdots\\ (\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{u}_{k-1}=\mathbf{u}_k\neq\mathbf{0},\end{gathered}$$

но $(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{u}_k=\mathbf{0}$, то векторы

$$\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k\}=\{\mathbf{u}_k,\mathbf{u}_{k-1},\ldots,\mathbf{u}_2,\mathbf{u}_1\}$$

(перечисленные в порядке, обратном их появлению) образуют цепочку (длины k) обобщенных собственных векторов, основанных на (обыкновенном) собственном векторе $\mathbf{v}_1$. ▲

Каждая цепочка длины k обобщенных собственных векторов $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\ldots,\mathbf{v}_k\}$ (в которой $\mathbf{v}_1$ — обыкновенный собственный вектор, соответствующий λ) определяет набор k независимых решений уравнения $\mathbf{x}'=\mathbf{A}\mathbf{x}$, соответствующих собственному значению λ:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1(t)&=\mathbf{v}_1e^{\lambda t},\\ \mathbf{x}_2(t)&=(\mathbf{v}_1t+\mathbf{v}_2)e^{\lambda t},\\ \mathbf{x}_3(t)&=\left(\tfrac{1}{2}\mathbf{v}_1t^2+\mathbf{v}_2t+\mathbf{v}_3\right)e^{\lambda t},\\ &\vdots\\ \mathbf{x}_k(t)&=\left(\frac{\mathbf{v}_1t^{k-1}}{(k-1)!}+\cdots+\frac{\mathbf{v}_{k-2}t^2}{2!}+\mathbf{v}_{k-1}t+\mathbf{v}_k\right)e^{\lambda t}.\end{aligned} \tag{27}$$

Обратите внимание, что уравнение (27) сводится к уравнениям (18)–(19) и (24) в случаях $k=2$ и $k=3$ соответственно.

Но можно ли гарантировать, что мы получим n обобщенных собственных векторов матрицы $\mathbf{A}$ размера $n\times n$, которые на самом деле будут линейно независимыми? (Ведь только в этом случае они порождают полную систему n линейно независимых решений уравнения $\mathbf{x}'=\mathbf{A}\mathbf{x}$, когда мы объединим все цепочки решений, соответствующие различным цепочкам обобщенных собственных векторов.) Оказывается, да! И эта уверенность основана на следующих двух утверждениях.

- Любая цепочка обобщенных собственных векторов состоит из линейно независимых векторов.
- Если две цепочки обобщенных собственных векторов основаны на линейно независимых собственных векторах, то объединение этих двух цепочек есть линейно независимая система векторов (причем это утверждение справедливо, независимо от того, соответствуют ли два основных собственных вектора различным собственным значениям или одному и тому же самому собственному значению).

Пример 5 Предположим, что матрица $\mathbf{A}$ размера 6×6 имеет два собственных значения $\lambda_1 = -2$ и $\lambda_2 = 3$ кратности 3 с дефектами 1 и 2 соответственно. Тогда λ_1 должно иметь соответствующий собственный вектор $\mathbf{u}_1$ и цепочку (длины 2) обобщенных собственных векторов $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ (причем собственные векторы $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{v}_1$ линейно независимы), тогда как λ_2 должно иметь цепочку длины 3 обобщенных собственных векторов $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$, основанных на одном собственном векторе $\mathbf{w}_1$. Шесть обобщенных собственных векторов $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ и $\mathbf{w}_3$ тогда будут линейно независимы и приведут к следующим шести линейно независимым решениям уравнения $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1(t) &= \mathbf{u}_1 e^{-2t},\\
\mathbf{x}_2(t) &= \mathbf{v}_1 e^{-2t},\\
\mathbf{x}_3(t) &= (\mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2) e^{-2t},\\
\mathbf{x}_4(t) &= \mathbf{w}_1 e^{3t},\\
\mathbf{x}_5(t) &= (\mathbf{w}_1 t + \mathbf{w}_2) e^{3t},\\
\mathbf{x}_6(t) &= \left(\tfrac{1}{2}\mathbf{w}_1 t^2 + \mathbf{w}_2 t + \mathbf{w}_3\right) e^{3t}.
\end{aligned}$$

■

Как иллюстрирует пример 5, вычисление независимых решений, соответствующих различным собственным значениям и цепочкам обобщенных собственных значений, — обычная рутинная процедура. Определение структуры цепочки, соответствующей данному кратному собственному значению, может быть более интересным (как в примере 6).

Приложение-пример: соединенные пружинами вагоны с демпфером

На рис. 5.4.2 показаны два железнодорожных вагона, которые связаны пружинами (постоянно прикрепленными к обоим вагонам) и демпфер, который прикладывает противоположные силы к этим двум вагонам, причем величина этих сил равна $c(x_1' - x_2')$, т. е. пропорциональна относительной скорости вагонов. На эти два вагона также действуют силы трения (сопротивление движению) $c_1 x_1'$ и $c_2 x_2'$, пропорциональные их соответствующим скоростям. Применение закона Ньютона $ma = F$ (как в примере 1 из раздела 4.1) приводит к уравнениям движения

$$\begin{aligned}
m_1 x_1'' &= k(x_2 - x_1) - c_1 x_1' - c(x_1' - x_2'),\\
m_2 x_2'' &= k(x_1 - x_2) - c_2 x_2' - c(x_2' - x_1').
\end{aligned} \tag{28}$$

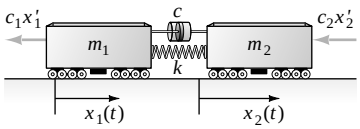


Рис. 5.4.2. Железнодорожные вагоны из примера 6

Вводя радиус-вектор $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix}^T$, эти уравнения можно записать в матричной форме в виде

$$\mathbf{M}\mathbf{x}'' = \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{R}\mathbf{x}', \tag{29}$$

где $\mathbf{M}$ и $\mathbf{K}$ — матрицы массы и жесткости (как в уравнениях (2) и (3) из раздела 5.3), а

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -(c+c_1) & c \\ c & -(c+c_2) \end{bmatrix}$$

— *матрица сопротивления*. К сожалению, из-за присутствия члена, содержащего $\mathbf{x}'$, методы раздела 5.3 не могут использоваться напрямую.

Вместо этого мы перепишем систему (28) в виде системы первого порядка с четырьмя неизвестными функциями $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t) = x_1'(t)$ и $x_4(t) = x_2'(t)$. Если $m_1 = m_2 = 1$, мы получаем уравнение

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{30}$$

где теперь $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^T$ и

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k & k & -(c+c_1) & c \\ k & -k & c & -(c+c_2) \end{bmatrix}. \tag{31}$$

Пример 6 При $m_1 = m_2 = c = 1$ и $k = c_1 = c_2 = 2$ система уравнений (30) принимает вид

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}. \tag{32}$$

Не слишком утомительно вычислить ее характеристическое уравнение вручную, хотя система компьютерной алгебры, такая как *Maple*, *Mathematica*, или MATLAB, может оказаться весьма полезной для такого рода вычислений. Как бы то ни было, мы нашли характеристическое уравнение:

$$\lambda^4 + 6\lambda^3 + 12\lambda^2 + 8\lambda = \lambda(\lambda+2)^3 = 0$$

матрицы $\mathbf{A}$ коэффициентов уравнения (32). Таким образом, матрица $\mathbf{A}$ имеет простое собственное значение $\lambda_0 = 0$ и тройное собственное значение $\lambda_1 = -2$.

Случай 1: $\lambda_0 = 0$. При этом собственном значении уравнение $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ для собственного вектора $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix}^T$ принимает вид

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Первые две строки дают $c = d = 0$, тогда как последние две строки влекут $a = b$. Таким образом,

$$\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

— собственный вектор, соответствующий $\lambda_0 = 0$.

Случай 2: $\lambda_1 = -2$. При этом собственном значении уравнение $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ принимает вид

$$(\mathbf{A} + 2\mathbf{I})\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Третье и четвертое скалярные уравнения здесь представляют собой разности первого и второго уравнений и поэтому избыточны. Следовательно, $\mathbf{v}$ определен первыми двумя уравнениями:

$$2a + c = 0 \quad \text{и} \quad 2b + d = 0.$$

Мы можем выбрать a и b независимо, а затем решить полученные уравнения относительно c и d. Таким образом мы получим *два* собственных вектора, соответствующих тройному собственному значению $\lambda_1 = -2$. Выбор $a = 1$, $b = 0$ дает $c = -2$, $d = 0$ и, таким образом, получаем собственный вектор

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Выбор $a = 0$, $b = 1$ дает $c = 0$, $d = -2$ и, таким образом, получаем собственный вектор

$$\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}^T.$$

Поскольку дефект собственного значения $\lambda_1 = -2$ равен 1, нужно найти обобщенный собственный вектор ранга 2 и, следовательно, нужно найти отличное от нуля решение $\mathbf{v}_2$ уравнения

$$(\mathbf{A} + 2\mathbf{I})^2\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}.$$

Очевидно,

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$$

— как раз и есть такой вектор, и мы находим, что вектор

$$(\mathbf{A}+2\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{v}_1$$

отличен от нуля, и поэтому он и есть искомый собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = -2$. Тогда $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ — нужная нам цепочка длины 2.

Только что найденный собственный вектор $\mathbf{v}_1$ не совпадает ни с одним из ранее найденных двух собственных векторов $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$, но, как легко заметить, $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$. Для цепочки (длины 1) $\mathbf{w}_1$ мы можем выбрать любую линейную комбинацию $\mathbf{u}_1$ и $\mathbf{u}_2$, которая является независимой от $\mathbf{v}_1$. Например, мы можем выбрать $\mathbf{w}_1 = \mathbf{u}_1$ или $\mathbf{w}_1 = \mathbf{u}_2$. Однако мы мгновенно увидим, что конкретный выбор

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}^T$$

приводит к решению системы, которое представляет физический интерес.

Наконец, цепочки $\{\mathbf{v}_0\}, \{\mathbf{w}_1\}$ и $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ приводят к четырем независимым решениям

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t) &= \mathbf{v}_0 e^{0\cdot t} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \\ \mathbf{x}_2(t) &= \mathbf{w}_1 e^{-2t} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}^T e^{-2t}, \\ \mathbf{x}_3(t) &= \mathbf{v}_1 e^{-2t} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}^T e^{-2t}, \\ \mathbf{x}_4(t) &= (\mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2) e^{-2t} = \\ &= \begin{bmatrix} t & -t & -2t+1 & 2t-1 \end{bmatrix}^T e^{-2t} \end{aligned} \tag{33}$$

системы (32), имеющей вид $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Четыре скалярных компонента общего решения

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + c_3\mathbf{x}_3(t) + c_4\mathbf{x}_4(t)$$

описываются уравнениями

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 + e^{-2t}(c_2 + c_3 + c_4 t), \\ x_2(t) &= c_1 + e^{-2t}(c_2 - c_3 - c_4 t), \\ x_3(t) &= e^{-2t}(-2c_2 - 2c_3 + c_4 - 2c_4 t), \\ x_4(t) &= e^{-2t}(-2c_2 + 2c_3 - c_4 + 2c_4 t). \end{aligned} \tag{34}$$

Осталось только вспомнить, что функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$ дают положения этих двух тел, а функции $x_3(t) = x_1'(t)$ и $x_4(t) = x_2'(t)$ — соответствующие скорости.

Предположим, например, что $x_1(0) = x_2(0) = 0$ и что $x_1'(0) = = x_2'(0) = v_0$. Тогда легко решаются уравнения

$$\begin{aligned} x_1(0) &= c_1 + c_2 + c_3 &&= 0,\\ x_2(0) &= c_1 + c_2 - c_3 &&= 0,\\ x_1'(0) &= -2c_2 - 2c_3 + c_4 &&= v_0,\\ x_2'(0) &= -2c_2 + 2c_3 - c_4 &&= v_0, \end{aligned}$$

и мы находим $c_1 = \frac{1}{2}v_0$, $c_2 = -\frac{1}{2}v_0$ и $c_3 = c_4 = 0$, так что

$$\begin{aligned} x_1(t) = x_2(t) &= \tfrac{1}{2}v_0\left(1 - e^{-2t}\right),\\ x_1'(t) = x_2'(t) &= v_0 e^{-2t}. \end{aligned}$$

В этом случае наши два железнодорожных вагона продолжают двигаться в том же самом направлении с равными, но экспоненциально уменьшающимися скоростями, приближаясь к смещениям $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}v_0$ при $t \to +\infty$.

Представляет интерес физическая интерпретация конкретного решения (33), полученного с помощью обобщенных собственных векторов. Вырожденное (при $\lambda_0 = 0$) решение

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

описывает состояние покоя этих двух масс; вот функции, выражающие положения вагонов: $x_1(t) \equiv 1$ и $x_2(t) \equiv 1$. Решение

$$\mathbf{x}_2(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}^T e^{-2t},$$

соответствующее тщательно выбранному собственному вектору $\mathbf{w}_1$, описывает затухающие движения $x_1(t) = e^{-2t}$ и $x_2(t) = e^{-2t}$ этих двух масс с равными скоростями в том же самом направлении. Наконец, оба решения $\mathbf{x}_3(t)$ и $\mathbf{x}_4(t)$, получающиеся из цепочки (длины 2) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, описывают затухающие движения этих двух масс, двигающихся в противоположных направлениях. ■

Методы этого раздела применимы не только к комплексным кратным собственным значениям, но и к вещественных кратным собственным значениям (хотя необходимые вычисления бывают несколько длинными). Если мы имеем комплексно сопряженную пару $\alpha \pm \beta i$ собственных значений кратности k, мы работаем с одним из них (например, $\alpha - \beta i$) как будто на самом деле мы хотим найти k независимых комплексных решений. Вещественные и мнимые части этих комплексных решений тогда дают $2k$ действительных решений, соответствующих этим двум собственным значениям $\lambda = \alpha - \beta i$ и $\overline{\lambda} = \alpha + \beta i$, каждое из которых имеет кратность k. Этому посвящены задачи 33 и 34.

5.4. Задачи

Найдите общие решения систем в задачах 1–22. В задачах 1–6 используйте компьютерную систему или графический калькулятор, чтобы нарисовать поле направлений и типичные интегральные кривые данной системы.

1. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

2. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

3. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

4. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

5. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

6. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

7. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -7 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

8. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 25 & 12 & 0 \\ -18 & -5 & 0 \\ 6 & 6 & 13 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

9. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -19 & 12 & 84 \\ 0 & 5 & 0 \\ -8 & 4 & 33 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

10. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -13 & 40 & -48 \\ -8 & 23 & -24 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

11. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -4 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

12. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

13. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

14. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -5 & -1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

15. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -2 & -9 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

16. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

17. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 18 & 7 & 4 \\ -27 & -9 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

18. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

19. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & -12 & -1 & -6 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

20. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

21. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

22. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & -14 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

В задачах 23–32 даются собственные значения матрицы $\mathbf{A}$ *коэффициентов. Найдите общее решение указанной системы* $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. *В задачах 29–32 может быть особенно полезно использовать систему компьютерной алгебры (как в прикладном материале этого раздела).*

23. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 39 & 8 & -16 \\ -36 & -5 & 16 \\ 72 & 16 & -29 \end{bmatrix} \mathbf{x}$;
$\lambda = -1, 3, 3$

24. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 28 & 50 & 100 \\ 15 & 33 & 60 \\ -15 & -30 & -57 \end{bmatrix} \mathbf{x}$;
$\lambda = -2, 3, 3$

25. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -2 & 17 & 4 \\ -1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$;
$\lambda = 2, 2, 2$

26. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$;
$\lambda = 3, 3, 3$

27. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -3 & 5 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \\ 8 & -8 & 10 \end{bmatrix} \mathbf{x}$;
$\lambda = 2, 2, 2$

28. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -15 & -7 & 4 \\ 34 & 16 & -11 \\ 17 & 7 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x}$;
$\lambda = 2, 2, 2$

29. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 7 & -4 & -6 & 11 \\ 5 & -1 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & -2 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{x}$;
$\lambda = -1, -1, 2, 2$

30. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & -13 & 22 & -12 \\ 0 & -27 & 45 & -25 \end{bmatrix} \mathbf{x}$;
$\lambda = -1, -1, 2, 2$

31. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 35 & -12 & 4 & 30 \\ 22 & -8 & 3 & 19 \\ -10 & 3 & 0 & -9 \\ -27 & 9 & -3 & -23 \end{bmatrix} \mathbf{x}$;
$\lambda = 1, 1, 1, 1$

32. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 11 & -1 & 26 & 6 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & 0 & -24 & -6 & 3 \\ 3 & 0 & 9 & 5 & -1 \\ -48 & -3 & -138 & -30 & 18 \end{bmatrix} \mathbf{x}$;
$\lambda = 2, 2, 3, 3, 3$

33. Характеристическое уравнение матрицы $\mathbf{A}$ коэффициентов системы

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

имеет вид

$$\phi(\lambda) = (\lambda^2 - 6\lambda + 25)^2 = 0.$$

Поэтому $\mathbf{A}$ имеет кратную комплексно сопряженную пару собственных значений $3 \pm 4i$. Сначала покажите, что комплексные векторы

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad \text{и} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 1 & i \end{bmatrix}^T$$

образуют цепочку (длины 2) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, соответствующую собственному значению $\lambda = 3 - 4i$. Затем вычислите вещественные и мнимые части комплексных решений

$$\mathbf{v}_1 e^{\lambda t} \quad \text{и} \quad (\mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2) e^{\lambda t},$$

чтобы найти четыре независимых действительных решения уравнения $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

34. Характеристическое уравнение матрицы $\mathbf{A}$ коэффициентов системы

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -8 & -3 \\ -18 & -1 & 0 & 0 \\ -9 & -3 & -25 & -9 \\ 33 & 10 & 90 & 32 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

имеет вид

$$\phi(\lambda) = (\lambda^2 - 4\lambda + 13)^2 = 0.$$

Поэтому матрица $\mathbf{A}$ имеет кратную комплексно сопряженную пару собственных значений $2 \pm 3i$. Сначала покажите, что комплексные векторы

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -i & 3 + 3i & 0 & -i \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 & -10 + 9i & -i & 0 \end{bmatrix}^T$$

образуют цепочку (длины 2) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, соответствующую собственному значению $\lambda = 2 + 3i$. Затем вычислите (как в задаче 33) четыре независимых действительных решения уравнения $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

35. Найдите функции $x_1(t)$ и $x_2(t)$, дающие положения железнодорожных вагонов, показанных на рис. 5.4.1, если известны следующие физические параметры:

$$m_1 = m_2 = c_1 = c_2 = c = k = 1$$

и заданы следующие начальные условия:

$$x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1'(0) = x_2'(0) = v_0.$$

На какое расстояние переместятся вагоны перед остановкой?

36. Повторно решите задачу 35 при предположении, что вагон 1 экранирован от сопротивления воздуха вагоном 2, так что теперь $c_1 = 0$. Покажите, что теперь до остановки вагоны проедут вдвое большее расстояние, чем было вычислено в задаче 35.

5.4. Приложение. Дефектные собственные значения и обобщенные собственные векторы

Типичная система компьютерной алгебры может вычислить и собственные значения данной матрицы $\mathbf{A}$, и линейно независимые (обыкновенные) собственные векторы, соответствующие каждому собственному значению. Пусть, например, имеем матрицу размера 4×4

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 35 & -12 & 4 & 30 \\ 22 & -8 & 3 & 19 \\ -10 & 3 & 0 & -9 \\ -27 & 9 & -3 & -23 \end{bmatrix} \tag{1}$$

из задачи 31 этого раздела. После ввода матрицы $\mathbf{A}$ команда системы *Maple*

```
with(linalg): eigenvectors(A);
[1, 4, {[-1, 0, 1, 1], [0, 1, 3, 0]}]
```

и команда системы *Mathematica*

```
Eigensystem[A]
{{1,1,1,1},
{{-3,-1,0,3}, {0,1,3,0}, {0,0,0,0}, {0,0,0,0}}}
```

вычисляет, что матрица $\mathbf{A}$ в уравнении (1) имеет единственное собственное значение $\lambda = 1$ кратности 4, причем ему соответствуют только два независимых собственных вектора $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$. Команда пакета MATLAB

```
[V, D] = eig(sym(A))
```

выдает ту же самую информацию. Поэтому дефект собственного значения $\lambda = 1$ равен $d = 2$. Полагая $\mathbf{B} = \mathbf{A} - (1)\mathbf{I}$, убедитесь, что $\mathbf{B}^2 \neq \mathbf{0}$, но $\mathbf{B}^3 = \mathbf{0}$. Если

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{B}\mathbf{u}_1, \quad \mathbf{u}_3 = \mathbf{B}\mathbf{u}_2,$$

то $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ — цепочка обобщенных собственных векторов длины 3, основанных на обыкновенном собственном векторе $\mathbf{u}_3$ (который должен быть линейной комбинацией первоначальных собственных векторов $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$). Используйте вашу систему компьютерной

алгебры, чтобы выполнить это построение, и, наконец, написать четыре линейно независимых решения линейной системы $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Давайте теперь исследуем более экзотическую матрицу. Для этого в качестве примера выберем матрицу из галереи пакета MATLAB с помощью команды `gallery(5)`

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -9 & 11 & -21 & 63 & -252 \\ 70 & -69 & 141 & -421 & 1684 \\ -575 & 575 & -1149 & 3451 & -13801 \\ 3891 & -3891 & 7782 & -23345 & 93365 \\ 1024 & -1024 & 2048 & -6144 & 24572 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Используя соответствующие команды, подобные приведенным здесь, покажите, что матрица $\mathbf{A}$ имеет единственное собственное значение $\lambda = 0$ кратности 5 и дефекта 4. Поскольку $\mathbf{A} - (0)\mathbf{I} = \mathbf{A}$, вы должны найти, что $\mathbf{A}^4 \neq \mathbf{0}$, но что $\mathbf{A}^5 = \mathbf{0}$. Следовательно, вычислите векторы

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{A}\mathbf{u}_1, \quad \mathbf{u}_3 = \mathbf{A}\mathbf{u}_2, \quad \mathbf{u}_4 = \mathbf{A}\mathbf{u}_3, \quad \mathbf{u}_5 = \mathbf{A}\mathbf{u}_4.$$

Вы должны найти, что $\mathbf{u}_5$ — отличный от нуля вектор, такой что $\mathbf{A}\mathbf{u}_5 = \mathbf{0}$, и поэтому он является (обыкновенным) собственным вектором, соответствующим собственному значению $\lambda = 0$. Таким образом, $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5\}$ — цепочка длины 5 обобщенных собственных векторов матрицы $\mathbf{A}$ из равенства (2), и потому вы можете, наконец, написать пять линейно независимых решений линейной системы $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

5.5. Экспоненциальная функция от матрицы и линейные системы

Векторы решения однородной линейной системы

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{1}$$

можно использовать для построения матрицы $\mathbf{X} = \mathbf{\Phi}(t)$, которая удовлетворяет *матричному дифференциальному уравнению*

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}, \tag{1'}$$

соответствующему уравнению (1). Предположим, что $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$ — n линейно независимых решений уравнения (1). Тогда матрица размера $n \times n$

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{x}_1(t) & \mathbf{x}_2(t) & \cdots & \mathbf{x}_n(t) \\ | & | & & | \end{bmatrix}, \tag{2}$$

столбцами которой являются эти векторы-решения, называется **фундаментальной матрицей** системы (1).

Фундаментальные матричные решения

Поскольку вектор-столбец $\mathbf{x} = \mathbf{x}_j(t)$ фундаментальной матрицы $\mathbf{\Phi}(t)$ в (2) удовлетворяет дифференциальному уравнению $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, сама матрица $\mathbf{X} = \mathbf{\Phi}(t)$ удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$. Поскольку ее векторы-столбцы линейно независимы, фундаментальная матрица $\mathbf{\Phi}(t)$ несингулярна (неособая), и поэтому имеет обратную матрицу $\mathbf{\Phi}(t)^{-1}$. Наоборот, любая несингулярная (неособая) матрица $\mathbf{\Psi}(t)$, являющаяся решением уравнения (1′), имеет линейно независимые векторы-столбцы, которые удовлетворяют уравнению (1), так что $\mathbf{\Psi}(t)$ — фундаментальная матрица системы (1).

Если использовать фундаментальную матрицу $\mathbf{\Phi}(t)$, определяемую равенством (2), общее решение

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t) \tag{3}$$

системы $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$ можно записать в форме

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{c}, \tag{4}$$

где $\mathbf{c} = [c_1 \quad c_2 \quad \ldots \quad c_n]^T$ — произвольный *постоянный* вектор. Если $\mathbf{\Psi}(t)$ — любая другая фундаментальная матрица системы (1), то каждый вектор-столбец $\mathbf{\Psi}(t)$ — линейная комбинация векторов-столбцов матрицы $\mathbf{\Phi}(t)$, так что из уравнения (4) следует, что

$$\mathbf{\Psi}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C} \tag{4′}$$

для некоторой матрицы $\mathbf{C}$ констант размера $n \times n$.

Чтобы решение $\mathbf{x}(t)$, даваемое равенством (3), удовлетворяло данному начальному условию

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \tag{5}$$

достаточно выбрать вектор коэффициентов $\mathbf{c}$ в (4) так, чтобы $\mathbf{\Phi}(0)\mathbf{c} = \mathbf{x}_0$; т. е. так, чтобы

$$\mathbf{c} = \mathbf{\Phi}(0)^{-1}\mathbf{x}_0. \tag{6}$$

Когда мы подставим (6) в уравнение (4), мы получим заключение следующей теоремы.

Теорема 1 Фундаментальные матричные решения

Пусть $\mathbf{\Phi}(t)$ — фундаментальная матрица однородной линейной системы $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Тогда [единственное] решение задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{7}$$

дает равенство

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}(0)^{-1}\mathbf{x}_0. \tag{8}$$

▲

В разделе 5.2 мы узнали, как найти фундаментальную матрицу решений для системы

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{9}$$

с постоянной матрицей $\mathbf{A}$ коэффициентов размера $n \times n$, по крайней мере в случае, когда у матрицы $\mathbf{A}$ существует полная система n линейно независимых собственных векторов $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, соответствующая [не обязательно различным] собственным значениям λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_n соответственно. В этом случае соответствующие векторы решения уравнения (9) даются формулой

$$\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{v}_i e^{\lambda_i t}$$

для $i = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому матрица размера $n \times n$

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} & \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} & \cdots & \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t} \\ | & | & & | \end{bmatrix} \tag{10}$$

векторы-столбцы которой являются решениями $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$, как раз и есть фундаментальная матрица системы $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Чтобы применить равенство (8), нужно вычислить обратную матрицу $\boldsymbol{\Phi}(0)^{-1}$. Матрица, обратная к несингулярной (неособой) матрице размера 2×2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

есть матрица

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \tag{11}$$

где $\Delta = \det(\mathbf{A}) = ad - bc \neq 0$. Матрица, обратная к несингулярной (неособой) матрице $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ размера 3×3, может быть вычислена по формуле

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} +A_{11} & -A_{12} & +A_{13} \\ -A_{21} & +A_{22} & -A_{23} \\ +A_{31} & -A_{32} & +A_{33} \end{bmatrix}^T, \tag{12}$$

где $\Delta = \det(\mathbf{A}) \neq 0$ и A_{ij} обозначает детерминант подматрицы (матрицы $\mathbf{A}$) размера 2×2, получающейся вычеркиванием i-й строки и j-го столбца матрицы $\mathbf{A}$. (Обратите внимание на операцию *транспонирования* (символ T) в формуле (12).) Формулу (12) можно обобщить также и для матрицы размера $n \times n$, но на практике обратные к большим матрицам обычно вычисляются не по этой формуле, а методами приведения матрицы к треугольной форме с помощью выполнения элементарных преобразований строк (алгоритм приводится в любом учебнике линейной алгебры) или с помощью системы компьютерной алгебры или калькулятора.

Пример 1 Найдем фундаментальную матрицу для системы

$$\begin{aligned} x' &= 4x + 2y, \\ y' &= 3x - \ \ y, \end{aligned} \tag{13}$$

а затем с ее помощью найдем решение системы (13), которое удовлетворяет начальным условиям $x(0) = 1, y(0) = -1$.

Решение Линейно независимые решения

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -3e^{-2t} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{x}_2(t) = \begin{bmatrix} 2e^{5t} \\ e^{5t} \end{bmatrix},$$

найденные в примере 1 из раздела 5.2, приводят к фундаментальной матрице

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Тогда

$$\mathbf{\Phi}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix},$$

и формула (11) дает обратную матрицу

$$\mathbf{\Phi}(0)^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Следовательно, формула (8) дает решение

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{bmatrix} \left(\frac{1}{7}\right) \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \\ &= \left(\frac{1}{7}\right) \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

а, значит,

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3e^{-2t} + 4e^{5t} \\ -9e^{-2t} + 2e^{5t} \end{bmatrix}.$$

Таким образом, решение первоначальной задачи Коши (задачи с начальными условиями) выражается формулой

$$x(t) = \tfrac{3}{7}e^{-2t} + \tfrac{4}{7}e^{5t}, \quad y(t) = -\tfrac{9}{7}e^{-2t} + \tfrac{2}{7}e^{5t}. \qquad \blacksquare$$

Замечание. Преимущество применения фундаментальной матрицы состоит в следующем. Как только мы знаем фундаментальную матрицу $\mathbf{\Phi}(t)$ и обратную матрицу $\mathbf{\Phi}(0)^{-1}$, мы можем легко вычислить с помощью умножения матриц решения, удовлетворяющие различным начальным условиям. Предположим, например, что мы ищем решение системы (13), удовлетворяющее новым начальным условиям $x(0) = 77$, $y(0) = 49$. Тогда, подставляя (14) и (15) в (8), получаем новое частное решение

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \frac{1}{7}\begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 77 \\ 49 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{7}\begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -21 \\ 280 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3e^{-2t} + 80e^{5t} \\ 9e^{-2t} + 40e^{5t} \end{bmatrix}. \end{aligned} \qquad \blacksquare$$

Экспоненты матриц

Мы теперь обсудим возможность построения фундаментальной матрицы для линейной системы с постоянными коэффициентами $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ непосредственно с помощью матрицы $\mathbf{A}$ коэффициентов, т. е. без предварительного применения описанных в предыдущих разделах методов нахождения линейно независимой системы векторов-решений.

Мы видели, что экспоненциальные функции играют центральную роль в решении линейных дифференциальных уравнений и систем, начиная от скалярного уравнения $x' = kx$ с решением $x(t) = x_0 e^{kt}$ до решения-вектора $\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t}$ линейной системы $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, матрица $\mathbf{A}$ коэффициентов которой имеет собственное значение λ, которому соответствует собственный вектор $\mathbf{v}$. Теперь мы определим экспоненциальные функции матриц таким способом, что

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t}$$

будет матричным решением матричного дифференциального уравнения

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$$

с матрицей $\mathbf{A}$ (размера $n \times n$), составленной из коэффициентов.

Экспоненциальная функция e^z комплексного числа z может быть определена (как в разделе 3.3) с помощью экспоненциального ряда

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots . \tag{16}$$

Точно так же, если $\mathbf{A}$ — матрица размера $n \times n$, то **экспонента матрицы** $e^{\mathbf{A}}$ — матрица размера $n \times n$, определенная рядом

➤
$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^n}{n!} + \cdots , \tag{17}$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица. Значение бесконечного ряда в правой части равенства (17) выражается формулой

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n}{n!} = \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{k} \frac{\mathbf{A}^n}{n!} \right) \tag{18}$$

где $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$, $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}\mathbf{A}^2$ и т. д. Таким образом, если $n \geqq 0$, то $\mathbf{A}^{n+1}$ определяется по индуктции с помощью равенства $\mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{A}^n$. Можно показать, что предел в формуле (18) существует для каждой квадратной матрицы $\mathbf{A}$ размера $n \times n$. Иными словами, экспонента матрицы $e^{\mathbf{A}}$ определена (равенством (17)) для каждой квадратной матрицы $\mathbf{A}$.

Пример 2 Рассмотрим диагональную матрицу размера 2×2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}.$$

Тогда очевидно, что

$$\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix}$$

для каждого целого числа $n \geqq 1$. Отсюда следует, что

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \cdots =$$
$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a^2/2! & 0 \\ 0 & b^2/2! \end{bmatrix} + \cdots =$$
$$= \begin{bmatrix} 1 + a + a^2/2! + \cdots & 0 \\ 0 & 1 + b + b^2/2! + \cdots \end{bmatrix}.$$

Таким образом,

$$e^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{bmatrix},$$

так что значение экспоненциальной функции от *диагональной* матрицы $\mathbf{A}$ размера 2×2 получается просто возведением основания натурального логарифма в степень, равную соответствующему диагональному элементу матрицы $\mathbf{A}$. ■

Аналогично тому, как был получен результат в примере 2 для диагональной матрицы размера 2×2, можно тем же самым способом установить и аналогичный результат для диагональных матриц размера $n \times n$. Значение экспоненциальной функции от диагональной матрицы размера $n \times n$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \tag{19}$$

равно диагональной матрице размера $n \times n$

$$e^{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} e^{a_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{a_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{a_n} \end{bmatrix}, \tag{20}$$

получающейся возведением основания натурального логарифма в степень, равную соответствующему диагональному элементу $\mathbf{D}$.

Экспонента матрицы $e^{\mathbf{A}}$ удовлетворяет большей части соотношений для экспоненты, которые хорошо знакомы в случае экспоненты от скаляров. Например, если $\mathbf{0}$ — нулевая матрица размера $n \times n$, то уравнение (17) дает

$$e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I}, \tag{21}$$

единичную матрицу размера $n \times n$. В задаче 31 мы просим вас показать, что для перестановочных (коммутирующих) матриц размера $n \times n$ выполняется важный закон для суммы показателей степеней:

$$\text{если} \quad \mathbf{AB} = \mathbf{BA}, \quad \text{то} \quad e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}}. \tag{22}$$

В задаче 32 мы просим вас показать, что

$$\left(e^{\mathbf{A}}\right)^{-1} = e^{-\mathbf{A}}. \tag{23}$$

В частности, матрица $e^{\mathbf{A}}$ несингулярна (неособая) для каждой матрицы $\mathbf{A}$ размера $n \times n$ (это напоминает утверждение о том, что $e^z \neq 0$ для всех z). Это следует из утверждения (хорошо известного из элементарной линейной алгебры) о том, что векторы-столбцы матрицы $e^{\mathbf{A}}$ всегда линейно независимы.

Если t — скалярная переменная, то подстановка $\mathbf{A}t$ вместо $\mathbf{A}$ в равенство (17) дает формулу

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}\,t + \mathbf{A}^2\,\frac{t^2}{2!} + \cdots + \mathbf{A}^n\,\frac{t^n}{n!} + \cdots. \tag{24}$$

(Конечно, $\mathbf{A}t$ получается просто умножением каждого элемента матрицы $\mathbf{A}$ на t.)

Пример 3 Если

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

то

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

так что $\mathbf{A}^n = \mathbf{0}$ для $n \geqq 3$. Поэтому из уравнения (24) следует, что

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}\,t + \tfrac{1}{2}\mathbf{A}^2\,t^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} t + \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} t^2;$$

иными словами, что

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & 3t & 4t + 9t^2 \\ 0 & 1 & 6t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Замечание. Если $\mathbf{A}^n = \mathbf{0}$ для некоторого положительного целого числа n, то экспоненциальный ряд в (24) обрывается после конечного числа членов, так что экспонента матрицы $e^{\mathbf{A}}$ (или $e^{\mathbf{A}t}$) легко вычисляется (как в примере 3). Такая матрица (т. е. матрица, некоторая степень которой обращается в нуль) называется **нильпотентной**. $\blacksquare$

Пример 4 Если

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

то

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{D} + \mathbf{B},$$

где $\mathbf{D} = 2\mathbf{I}$ — диагональная матрица и $\mathbf{B}$ — нильпотентная матрица из примера 3. Поэтому из формул (20) и (22) следует, что

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{(\mathbf{D}+\mathbf{B})t} = e^{\mathbf{D}t}e^{\mathbf{B}t} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3t & 4t+9t^2 \\ 0 & 1 & 6t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

таким образом,

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 3te^{2t} & (4t+9t^2)e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & 6te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Построение решения с помощью экспоненциальной функции от матриц

Оказывается, что допустимо почленное дифференцирование ряда (24), в результате чего получается

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\mathbf{A}t}\right) = \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 t + \mathbf{A}^3\frac{t^2}{2!} + \cdots = \mathbf{A}\left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2\frac{t^2}{2!} + \cdots\right);$$

иными словами,

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\mathbf{A}t}\right) = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}, \tag{25}$$

по аналогии с формулой $D_t\left(e^{kt}\right) = ke^{kt}$, известной из элементарного курса анализа. Таким образом, матричная (матричнозначная) функция

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t}$$

удовлетворяет матричному дифференциальному уравнению

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}.$$

Поскольку матрица $e^{\mathbf{A}t}$ несингулярная (неособая), то *экспоненциальная функция от этой матрицы* $e^{\mathbf{A}t}$ *представляет собой фундаментальную матрицу линейной системы* $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. В частности, именно *эта* фундаментальная матрица $\mathbf{X}(t)$ удовлетворяет условию $\mathbf{X}(0) = \mathbf{I}$. Поэтому из теоремы 1 вытекает следующий результат.

Теорема 2 Построение решения с помощью экспоненциальной функции от матриц

Если $\mathbf{A}$ — матрица размера $n \times n$, то решение задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{26}$$

дает формула

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0, \tag{27}$$

и это решение единственно. ▲

Таким образом, решение однородных линейных систем приводит к задаче вычисления экспонент от матриц. Наоборот, если мы уже знаем фундаментальную матрицу $\mathbf{\Phi}(t)$ линейной системы $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, то, поскольку $e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C}$ (в соответствии с уравнением (44′)) и $e^{\mathbf{A}\cdot 0} = e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I}$ (единичной матрице), получаем

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}(0)^{-1}. \tag{28}$$

Так что мы можем найти экспоненциальную функцию от матрицы $e^{\mathbf{A}t}$, зная решение линейной системы $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Пример 5 В примере 1 мы нашли, что система $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ при

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

имеет фундаментальную матрицу

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{bmatrix}, \quad \text{где} \quad \mathbf{\Phi}(0)^{-1} = \tfrac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, уравнение (28) дает

$$e^{\mathbf{A}t} = \tfrac{1}{7}\begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \tfrac{1}{7}\begin{bmatrix} e^{-2t} + 6e^{5t} & -2e^{-2t} + 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} + 3e^{5t} & 6e^{-2t} + e^{5t} \end{bmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Пример 6 Используя экспоненту от матрицы, решим задачу Коши (задачу с начальными условиями)

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 19 \\ 29 \\ 39 \end{bmatrix}. \tag{29}$$

Решение Матрица $\mathbf{A}$ коэффициентов в уравнении (29), очевидно, имеет характеристическое уравнение $(2-\lambda)^3 = 0$ и, таким образом, тройное собственное значение $\lambda = 2, 2, 2$. Совершенно ясно, что уравнение собственного вектора принимает вид

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

и потому имеет (с точностью до постоянного числового множителя) единственное решение $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. Таким образом, есть только один[14]

[14] С точностью до постоянного числового множителя. — *Примеч. ред.*

собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda = 2$. Значит, мы все еще не имеем трех линейно независимых решений, необходимых для построения фундаментальной матрицы. Но мы обращаем внимание, что $\mathbf{A}$ — та самая матрица, экспоненциальная функция от которой

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 3te^{2t} & (4t+9t^2)e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & 6te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

была вычислена в примере 4. Следовательно, используя теорему 2, решение задачи Коши (задачи с начальными условиями) (29) определим по формуле

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} e^{2t} & 3te^{2t} & (4t+9t^2)e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & 6te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 \\ 29 \\ 39 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (19+243t+351t^2)e^{2t} \\ (29+234t)e^{2t} \\ 39e^{2t} \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Экспоненциальная функция от матрицы общего вида

Относительно простое вычисление значения $e^{\mathbf{A}t}$, выполненное в примере 4 (и использованное в примере 6), базировалось на том факте, что если

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

то матрица $\mathbf{A} - 2\mathbf{I}$ нильпотентна:

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \tag{30}$$

Подобный результат справедлив для любой матрицы $\mathbf{A}$ размера 3×3, имеющей тройное собственное значение r, если ее характеристическое уравнение имеет вид $(\lambda - r)^3 = 0$. Для экспоненты такой матрицы можно провести явное вычисление, подобное тому, что сделано в равенствах (30). Такое вычисление покажет, что

$$(\mathbf{A} - r\mathbf{I})^3 = \mathbf{0}. \tag{31}$$

(Этот конкретный результат — частный случай теоремы Гамильтона–Кэли, известной из расширенного курса линейной алгебры. Согласно теореме Гамильтона–Кэли, каждая матрица

является корнем ее собственного характеристического уравнения.) Таким образом, матрица $\mathbf{A} - r\mathbf{I}$ нильпотентна, и из этого следует, что

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{(r\mathbf{I}+\mathbf{A}-r\mathbf{I})t} = e^{r\mathbf{I}t} \cdot e^{(\mathbf{A}-r\mathbf{I})t} = e^{rt}\mathbf{I} \cdot \left[\mathbf{I} + (\mathbf{A} - r\mathbf{I})t + \tfrac{1}{2}(\mathbf{A} - r\mathbf{I})^2 t^2\right], \qquad (32)$$

причем экспоненциальный ряд здесь обрывается, так как справедливо равенство (31). Этим способом мы можем довольно легко вычислить экспоненциальную функцию от любой квадратной матрицы $e^{\mathbf{A}t}$, если эта матрица имеет только одно собственное значение.

Вычисления, подобные записанным в равенствах (32), позволяют разработать метод вычисления $e^{\mathbf{A}t}$ для любой матрицы $\mathbf{A}$ размера $n \times n$. Как мы видели в разделе 5.4, $\mathbf{A}$ имеет n линейно независимых обобщенных собственных векторов $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$. Каждый обобщенный собственный вектор $\mathbf{u}$ соответствует собственному значению λ матрицы $\mathbf{A}$ и имеет *ранг* $r \geqq 1$, такой что

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^r \mathbf{u} = \mathbf{0}, \qquad \text{но} \qquad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{r-1}\mathbf{u} \neq \mathbf{0}. \qquad (33)$$

(Если $r = 1$, то $\mathbf{u}$ — обыкновенный собственный вектор, такой что $\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$.)

Даже если мы еще не вычислили $e^{\mathbf{A}t}$ явно, мы можем рассмотреть функцию $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{u}$, которая является линейной комбинацией векторов-столбцов матрицы $e^{\mathbf{A}t}$ и поэтому представляет собой решение линейной системы $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ при условии, что $\mathbf{x}(0) = \mathbf{u}$. Действительно, мы можем выразить $\mathbf{x}$ явно через $\mathbf{A}$, $\mathbf{u}$, λ и r:

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{u} = e^{(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})t}\mathbf{u} = e^{\lambda\mathbf{I}t}e^{(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})t}\mathbf{u} =$$
$$= e^{\lambda t}\mathbf{I}\left[\mathbf{I} + (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})t + \cdots + (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{r-1}\frac{t^{r-1}}{(r-1)!} + \cdots\right]\mathbf{u},$$

так что

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\left[\mathbf{u} + (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u}t + (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^2\mathbf{u}\frac{t^2}{2!} + \cdots + \right.$$
$$\left. + (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{r-1}\mathbf{u}\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\right]. \qquad (34)$$

Здесь мы использовали формулу (33) и то, что $e^{\lambda\mathbf{I}t} = e^{\lambda t}\mathbf{I}$.

Если линейно независимые решения $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$ системы $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ вычислены по формуле (34) для линейно независимых обобщенных собственных векторов $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$, то матрица размера $n \times n$

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) & \mathbf{x}_2(t) & \cdots & \mathbf{x}_n(t) \end{bmatrix} \qquad (35)$$

является фундаментальной матрицей системы $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Наконец, конкретная фундаментальная матрица $\mathbf{X}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}(0)^{-1}$ удовлетворяет начальному условию $\mathbf{X}(0) = \mathbf{I}$, и, таким образом, она и представляет собой искомое значение экспоненциальной функции от матрицы, т. е. $e^{\mathbf{A}t}$. Таким образом, мы нашли доказательство следующей теоремы.

Теорема 3 Вычисление матрицы $e^{\mathbf{A}t}$

Пусть $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ — это n линейно независимых обобщенных собственных векторов матрицы $\mathbf{A}$ размера $n \times n$. Для каждого i, $1 \leqq i \leqq n$, пусть $\mathbf{x}_i(t)$ — решение системы $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$,

даваемое формулой (34), в которую подставлено $\mathbf{u} = \mathbf{u}_i$, соответствующее собственное значение λ и ранг r обобщенного собственного вектора $\mathbf{u}_i$. Если фундаментальная матрица $\mathbf{\Phi}(t)$ определена формулой (35), то

➤
$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}(0)^{-1}. \tag{36}$$
▲

Пример 7 Найдем $e^{\mathbf{A}t}$, если

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \tag{37}$$

Решение Теорему 3 можно применить даже в том случае, если матрица $\mathbf{A}$ не является верхней треугольной. Но поскольку в данном случае матрица $\mathbf{A}$ является верхней треугольной, мы можем сразу написать ее характеристическое уравнение:

$$(5 - \lambda)(3 - \lambda)^2 = 0.$$

Таким образом, матрица $\mathbf{A}$ имеет простое собственное значение $\lambda_1 = 5$ и кратное собственное значение $\lambda_2 = 3$.

Случай 1: $\lambda_1 = 5$. Уравнение собственного вектора $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u} = 0$ для $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T$ принимает вид

$$(\mathbf{A} - 5\mathbf{I})\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Последние два скалярных уравнения $4c = 0$ и $-2c = 0$ дают $c = 0$. Тогда первое уравнение $-2a + 4b = 1$ удовлетворяется при $a = 2$ и $b = 1$. Таким образом, собственное значение $\lambda_1 = 5$ имеет (обыкновенный) собственный вектор $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$. Соответствующее решение системы $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ определяется по формуле

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{5t}\mathbf{u}_1 = e^{5t} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T. \tag{38}$$

Случай 2: $\lambda_2 = 3$. Уравнение собственного вектора $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u} = 0$ для $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}^T$ принимает вид

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Из первых двух уравнений $4b + 5c = 0$ и $2b + 4c = 0$ следует, что $b = c = 0$, но a можно выбирать произвольно. Таким образом, собственное

значение $\lambda_2 = 3$ имеет единственный[15] (обыкновенный) собственный вектор $\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. Соответствующее решение системы $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ определяется по формуле

$$\mathbf{x}_2(t) = e^{3t}\mathbf{u}_2 = e^{3t}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T. \tag{39}$$

Чтобы найти обобщенный собственный вектор ранга $r = 2$, удовлетворяющий уравнению (33), мы рассматриваем уравнение

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})^2\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 16 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Первые два уравнения $8b + 16c = 0$ и $4b + 8c = 0$ удовлетворяются при $b = 2$ и $c = -1$, но a можно выбрать произвольно. При $a = 0$ мы получаем обобщенный собственный вектор $\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T$ ранга $r = 2$, соответствующий собственному значению $\lambda = 3$. Поскольку $(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})^2\mathbf{u} = \mathbf{0}$, из равенства (34) находим третье решение

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_3(t) &= e^{3t}\left[\mathbf{u}_3 + (\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\mathbf{u}_3 t\right] = \\ &= e^{3t}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} t\right) = e^{3t}\begin{bmatrix} 3t \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{40}$$

Зная решения, приведенные в равенствах (39) и (40), фундаментальную матрицу

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) & \mathbf{x}_2(t) & \mathbf{x}_3(t) \end{bmatrix}$$

можно определить по формуле (35):

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{5t} & e^{3t} & 3te^{3t} \\ e^{5t} & 0 & 2e^{3t} \\ 0 & 0 & -e^{3t} \end{bmatrix}, \quad \text{причем} \quad \mathbf{\Phi}(0)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, по теореме 3, наконец, получаем

$$\begin{aligned}e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}(0)^{-1} = \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{5t} & e^{3t} & 3te^{3t} \\ e^{5t} & 0 & 2e^{3t} \\ 0 & 0 & -e^{3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} e^{3t} & 2e^{5t} - 2e^{3t} & 4e^{5t} - (4 + 3t)e^{3t} \\ 0 & e^{5t} & 2e^{5t} - 2e^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

■

Замечание. Как и в примере 7, теорема 3 позволяет вычислить $e^{\mathbf{A}t}$ при условии, что известен базис, состоящий из обобщенных собственных векторов матрицы $\mathbf{A}$. Кроме того, может использоваться система компьютерной алгебры так, как указано в приложении к этому разделу. ■

[15] С точностью до постоянного числового множителя. — *Примеч. ред.*

5.5. Задачи

В задачах 1–8 найдите фундаментальную матрицу каждой из систем, а затем примените уравнение (8), чтобы найти решение, удовлетворяющее данным начальным условиям.

1. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

2. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

3. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

4. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

5. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

6. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

7. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -6 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \end{bmatrix}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

8. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -5 & -4 & -2 \\ 5 & 5 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Вычислите экспоненциальную функцию от матрицы $e^{\mathbf{A}t}$ для каждой системы $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, данной в задачах 9–20.

9. $x_1' = 5x_1 - 4x_2$, $x_2' = 2x_1 - x_2$

10. $x_1' = 6x_1 - 6x_2$, $x_2' = 4x_1 - 4x_2$

11. $x_1' = 5x_1 - 3x_2$, $x_2' = 2x_1$

12. $x_1' = 5x_1 - 4x_2$, $x_2' = 3x_1 - 2x_2$

13. $x_1' = 9x_1 - 8x_2$, $x_2' = 6x_1 - 5x_2$

14. $x_1' = 10x_1 - 6x_2$, $x_2' = 12x_1 - 7x_2$

15. $x_1' = 6x_1 - 10x_2$, $x_2' = 2x_1 - 3x_2$

16. $x_1' = 11x_1 - 15x_2$, $x_2' = 6x_1 - 8x_2$

17. $x_1' = 3x_1 + x_2$, $x_2' = x_1 + 3x_2$

18. $x_1' = 4x_1 + 2x_2$, $x_2' = 2x_1 + 4x_2$

19. $x_1' = 9x_1 + 2x_2$, $x_2' = 2x_1 + 6x_2$

20. $x_1' = 13x_1 + 4x_2$, $x_2' = 4x_1 + 7x_2$

*В задачах 21–24 покажите, что матрица **A** нильпотентна, а затем используйте этот факт, чтобы найти (как в примере 3) экспоненциальную функцию $e^{\mathbf{A}t}$ от этой матрицы.*

21. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

22. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -9 & -6 \end{bmatrix}$

23. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

24. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

*В задачах 25–30 каждая матрица **A** коэффициентов представляет собой сумму нильпотентной матрицы и единичной матрицы, умноженной на некоторое число. Используйте этот факт (как в примере 6), чтобы решить данную задачу Коши (задачу с начальными условиями).*

25. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$

26. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 11 & 7 \end{bmatrix}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ -10 \end{bmatrix}$

27. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

28. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 0 \\ 20 & 30 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 40 \\ 50 \\ 60 \end{bmatrix}$

29. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

30. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 3 & 0 \\ 12 & 9 & 6 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

31. Предположим, что матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ размера $n \times n$ перестановочны (коммутируют); т. е. что $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$. Докажите, что $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}} e^{\mathbf{B}}$. (*Указание*. Сгруппируйте слагаемые в произведении двух рядов в правой части так, чтобы получить ряд слева.)

32. Выведите из результата задачи 31, что для каждой квадратной матрицы $\mathbf{A}$ матрица $e^{\mathbf{A}}$ является несингулярной (неособой), причем $\left(e^{\mathbf{A}}\right)^{-1} = e^{-\mathbf{A}}$.

33. Предположим, что

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Покажите, что $\mathbf{A}^{2n} = \mathbf{I}$ и что $\mathbf{A}^{2n+1} = \mathbf{A}$, если n — положительное целое число. Заключите отсюда, что

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} \operatorname{ch} t + \mathbf{A} \operatorname{sh} t,$$

и примените этот факт, чтобы найти общее решение системы $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$. Проверьте, что полученное решение эквивалентно общему решению, найденному методом собственных значений.

34. Предположим, что

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Покажите, что $e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} \cos 2t + \frac{1}{2}\mathbf{A} \sin 2t$. Примените этот факт, чтобы найти общее решение системы $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$, и проверить, что полученное решение эквивалентно решению, найденному методом собственных значений.

В задачах 35–40 примените теорему 3, чтобы вычислить экспоненциальную функцию от матрицы $e^{\mathbf{A}t}$ для каждой из данных матриц.

35. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

36. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

37. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

38. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 20 & 30 \\ 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

39. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

40. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

5.5. Приложение. Автоматизация поиска решения с помощью экспоненциальной функции от матрицы

Если задана матрица $\mathbf{A}$ размера $n \times n$, то с помощью системы компьютерной алгебры можно сначала вычислить фундаментальную матрицу $e^{\mathbf{A}t}$ системы $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, а потом вычислить матричное произведение $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0$, чтобы получить решение, удовлетворяющее начальному условию $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Предположим, например, что мы хотим решить задачу Коши (задачу с начальными условиями)

$$\begin{aligned} x_1' &= 13x_1 + 4x_2, \\ x_2' &= \ \ 4x_1 + 7x_2; \\ x_1(0) = 11, &\quad x_2(0) = 23. \end{aligned}$$

После ввода матриц

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 13 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 11 \\ 23 \end{bmatrix}$$

команда системы *Maple*

```
with(linalg): exponential(A*t)
```

команда системы *Mathematica*

```
MatrixExp[A t]
```

или команда системы MATLAB

```
syms t, expm(A*t)
```

вычисляет экспоненциальную функцию от матрицы:

$$\mathbf{expAt} = \tfrac{1}{5}\begin{bmatrix} e^{5t} + 4e^{15t} & -2e^{5t} + 2e^{15t} \\ -2e^{5t} + 2e^{15t} & 4e^{5t} + e^{15t} \end{bmatrix}.$$

Затем любая из следующих команд (`multiply(expAt,x0)` в случае *Maple*, `expAt.x0` в случае *Mathematica* и `expAt*x0` в случае MATLAB) находит произведение и дает вектор решения

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -7e^{5t} + 18e^{15t} \\ 14e^{5t} + 9e^{15t} \end{bmatrix}.$$

Очевидно, это, наконец, и есть самый простой способ решения задачи!

В качестве примера трехмерной задачи решите задачу Коши (задачу с начальными условиями)

$$\begin{aligned} x_1' &= -149x_1 - \ \ 50x_2 - 154x_3, \\ x_2' &= \ \ 537x_1 + 180x_2 + 546x_3, \\ x_3' &= \ \ -27x_1 - \ \ \ 9x_2 - \ \ 25x_3; \\ x_1(0) = 17, &\quad x_2(0) = 43, \quad x_3(0) = 79. \end{aligned}$$

И вот — четырехмерная задача:

$$\begin{aligned} x_1' &= 4x_1 + x_2 + x_3 + 7x_4, \\ x_2' &= x_1 + 4x_2 + 10x_3 + x_4, \\ x_3' &= x_1 + 10x_2 + 4x_3 + x_4, \\ x_4' &= 7x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4; \end{aligned}$$

$$x_1(0) = 15, \quad x_2(0) = 35, \quad x_3(0) = 55, \quad x_4(0) = 75.$$

Если вам понравилась экспоненциальная функция от матрицы, составьте несколько собственных задач. Выберите, например, любую однородную линейную систему из этой главы и поэкспериментe с различными начальными условиями. Экзотическая матрица **A** размера 5×5 из приложения к разделу 5.4 может предложить некоторые интересные возможности.

5.6. Неоднородные линейные системы

В разделе 3.5 мы показали два метода нахождения частного решения одного неоднородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка: метод неопределенных коэффициентов и метод вариации параметров. Каждый из них может быть обобщен для неоднородных линейных систем. При моделировании физической ситуации с помощью линейных систем неоднородные члены обычно соответствуют внешним влияниям, таким как приток жидкости в каскад рассольных баков или внешние силы, действующие на систему, состоящую из тела заданной массы, закрепленного на пружине.

Предположим, мы имеем неоднородную линейную систему первого порядка

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \tag{1}$$

где **A** — постоянная матрица размера $n \times n$ и "неоднородный член" $\mathbf{f}(t)$ — данная непрерывная векторнозначная функция. Тогда по теореме 4 из раздела 5.1 общее решение уравнения (1) имеет форму

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{x}_p(t), \tag{2}$$

где

- $\mathbf{x}_c(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t)$ — общее решение соответствующей *однородной* системы $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, и
- $\mathbf{x}_p(t)$ — какое-нибудь частное решение первоначальной неоднородной системы (1).

В предыдущих разделах мы научились находить $\mathbf{x}_c(t)$, так что теперь наша задача состоит в том, чтобы научиться находить $\mathbf{x}_p(t)$.

Метод неопределенных коэффициентов

Сначала мы предположим, что неоднородный член $\mathbf{f}(t)$ в уравнении (1) представляет собой линейную комбинацию (с постоянными коэффициентами-векторами) произведений многочленов, экспоненциальных функций, синусов и косинусов. Тогда метод неопределенных

коэффициентов для систем, по сути, имеет тот же самый вид, что и для одного линейного дифференциального уравнения. Мы сначала пытаемся угадать общую форму частного решения $\mathbf{x}_p$, а затем пытаемся определить коэффициенты $\mathbf{x}_p$ подстановкой его в уравнение (1). Кроме того, эта общая форма выбирается по существу точно так же, как и в случае единственного уравнения (этот выбор обсуждался в разделе 3.5); все отличие состоит только в том, что используются неопределенные коэффициенты-*векторы*, а не неопределенные скаляры. Мы поэтому ограничим данное обсуждение иллюстративными примерами.

Пример 1 Найдем частное решение неоднородной системы

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2t \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Решение Неоднородный член $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 3 & 2t \end{bmatrix}^T$ является линейным, так что разумно выбрать линейное пробное частное решение в виде

$$\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{a}t + \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

После замены $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p$ в уравнении (3) мы получаем

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 t + b_1 \\ a_2 t + b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2t \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3a_1 + 2a_2 \\ 7a_1 + 5a_2 + 2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 3b_1 + 2b_2 + 3 \\ 7b_1 + 5b_2 \end{bmatrix}.$$

Мы приравниваем коэффициенты при t и постоянные слагаемые в обоих компонентах (в x_1 и в x_2) и таким образом получаем уравнения

$$\begin{aligned} 3a_1 + 2a_2 &= 0, \\ 7a_1 + 5a_2 + 2 &= 0, \\ 3b_1 + 2b_2 + 3 &= a_1, \\ 7b_1 + 5b_2 &= a_2. \end{aligned} \tag{5}$$

Мы решаем первые два уравнения системы (5) и находим $a_1 = 4$ и $a_2 = -6$. Подставляя эти значения, мы можем затем решить последние два уравнения системы (5) и найти $b_1 = 17$ и $b_2 = -25$. Подстановка этих коэффициентов в уравнение (4) дает частное решение $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^T$, которое в скалярной форме можно записать так:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 4t + 17, \\ x_2(t) &= -6t - 25. \end{aligned}$$

■

Пример 2 На рис. 5.6.1 показана система, состоящая из трех рассольных баков, изученная в примере 2 раздела 5.2. Объемы трех баков равны $V_1 = 20$,

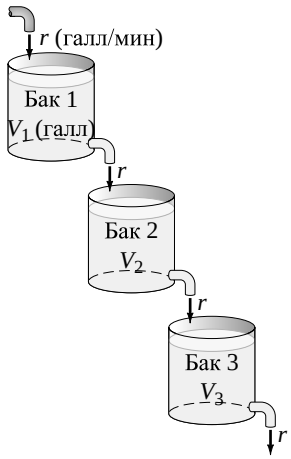


Рис. 5.6.1. Три рассольных бака из примера 2

$V_2 = 40$ и $V_3 = 50$ (галлонов), причем общий (суммарный) расход равен $r = 10$ (галлонов в минуту). Предположим, что все три бака первоначально содержат пресную воду, но в бак 1 вливается рассол, содержащий 2 фунта соли в галлоне, так что бак 1 в минуту вливается 20 фунтов растворенной соли. Из уравнения (18) раздела 5.2 следует, что вектор $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & x_3(t) \end{bmatrix}^T$ количеств соли (в фунтах) в трех баках в момент времени t удовлетворяет неоднородной задаче Коши (задаче с начальными условиями)

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & -0{,}25 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & -0{,}2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \qquad (6)$$

Неоднородный член $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ здесь соответствует притоку соли 20 фунтов в минуту в бак 1, при отсутствии (внешнего) притока соли в баки 2 и 3.

Поскольку неоднородный член представляет собой константу, мы, естественно, выбираем постоянную пробную функцию

$$\mathbf{x}_p = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}^T,$$

для которой $\mathbf{x}_p' \equiv \mathbf{0}$. Тогда подстановка $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p$ в (6) дает систему

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}5 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & -0{,}25 & 0 \\ 0 & 0{,}25 & -0{,}2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

которая легко решается, и мы находим по очереди $a_1 = 40$, $a_2 = 80$ и $a_3 = 100$. Таким образом, наше частное решение имеет вид $\mathbf{x}_p(t) = \begin{bmatrix} 40 & 80 & 100 \end{bmatrix}^T$.

В примере 2 из раздела 5.2 мы нашли общее решение

$$\mathbf{x}_c(t) = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix} e^{-t/2} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} e^{-t/4} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t/5}$$

соответствующей однородной системы, так что общее решение $\mathbf{x} = \mathbf{x}_c + \mathbf{x}_p$ неоднородной системы (6) дает формула

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix} e^{-t/2} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} e^{-t/4} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t/5} + \begin{bmatrix} 40 \\ 80 \\ 100 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Подставив нулевые начальные условия в систему (6), мы получим скалярные уравнения

$$\begin{aligned} 3c_1 \qquad\quad &+ \;\; 40 = 0, \\ -6c_1 + \;\; c_2 \qquad &+ \;\; 80 = 0, \\ 5c_1 - 5c_2 + c_3 &+ 100 = 0, \end{aligned}$$

которые легко решаются, и мы найдем $c_1 = -\frac{40}{3}$, $c_2 = -160$ и $c_3 = -\frac{2500}{3}$. Подставляя эти коэффициенты в уравнение (7), находим, что количества соли в трех баках в момент времени t даются формулами

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 40 - 40e^{-t/2}, \\ x_2(t) &= 80 + 80e^{-t/2} - 160e^{-t/4}, \\ x_3(t) &= 100 + \tfrac{100}{3}\left(-2e^{-t/2} + 24e^{-t/4} - 25e^{-t/5}\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Как видно из рис. 5.6.2, соль в баках распределяется так, чтобы при $t \to +\infty$ установилась однородная концентрация 2 фунта на галлон — та же самая концентрация соли, что и во вливаемом рассоле в бак 1. ■

В случае, если возникают подобные слагаемые в общем решении однородного уравнения и неоднородных членах, есть одно отличие между методом неопределенных коэффициентов для систем и методом неопределенных коэффициентов для одного уравнения (правило 2 в разделе 3.5). В случае системы обычно первое выбираемое пробное решение нужно умножить не только на наименьшую целую степень t, такую чтобы устранить подобные, но также и на все более низкие (неотрицательные целые) степени t, причем все полученные таким образом слагаемые должны быть включены в пробное решение.

Пример 3 Рассмотрим неоднородную систему

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} - \begin{bmatrix} 15 \\ 4 \end{bmatrix} te^{-2t}. \tag{9}$$

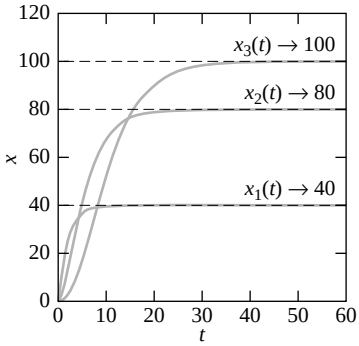


Рис. 5.6.2. Интегральные кривые (графики количеств соли), определенные равенствами (8)

В примере 1 раздела 5.2 мы нашли решение

$$\mathbf{x}_c(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t} \tag{10}$$

соответствующей однородной системы. В первоначально сконструированном пробном решении $\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{a}te^{-2t} + \mathbf{b}e^{-2t}$ есть слагаемые, подобные слагаемым в общем решении однородного уравнения, заданном формулой (10). Поэтому пришлось бы выбрать

$$\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{a}t^2e^{-2t} + \mathbf{b}te^{-2t} + \mathbf{c}e^{-2t}$$

в качестве пробного решения, и тогда нам пришлось бы определить шесть скалярных коэффициентов. Более просто использовать метод вариации параметров, рассматриваемый в следующем разделе. ■

Вариация параметров

В разделе 3.5 уже говорилось, что метод вариации параметров может быть применен к линейному дифференциальному уравнению с переменными коэффициентами, причем его применение не ограничено только неоднородными слагаемыми в виде многочленов, экспоненциальных и синусоидальных функций. Метод вариации параметров для систем имеет такую же самую гибкость и краткую матричную формулировку, которая удобна и для практических и теоретических целей.

Мы хотим найти частное решение $\mathbf{x}_p$ неоднородной линейной системы

➤ $$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \tag{11}$$

учитывая, что мы уже нашли общее решение

➤ $$\mathbf{x}_c(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t) \tag{12}$$

соответствующей однородной системы

➤ $$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}. \tag{13}$$

Мы сначала с помощью фундаментальной матрицы $\mathbf{\Phi}(t)$, векторами-столбцами которой служат $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$, перепишем общее решение однородного уравнения, даваемое формулой (12), в виде

$$\mathbf{x}_c(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{c}. \tag{14}$$

Наша идея состоит в том, чтобы заменить векторный "параметр" $\mathbf{c}$ переменным вектором $\mathbf{u}(t)$, и, таким образом, мы ищем частное решение в виде

➤
$$\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{u}(t). \tag{15}$$

Мы должны определить $\mathbf{u}(t)$ так, чтобы $\mathbf{x}_p$ и в самом деле удовлетворяло уравнению (11).

Производная $\mathbf{x}_p(t)$ в соответствии с правилом дифференцирования произведения равна

$$\mathbf{x}_p'(t) = \mathbf{\Phi}'(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{u}'(t). \tag{16}$$

Следовательно, подстановка уравнений (15) и (16) в (11) дает

$$\mathbf{\Phi}'(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{f}(t). \tag{17}$$

Но

$$\mathbf{\Phi}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{\Phi}(t), \tag{18}$$

потому что каждый вектор-столбец матрицы $\mathbf{\Phi}(t)$ удовлетворяет уравнению (13). Поэтому уравнение (17) приводит к

$$\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(t). \tag{19}$$

Таким образом, достаточно выбрать $\mathbf{u}(t)$ так, чтобы

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{\Phi}(t)^{-1}\mathbf{f}(t); \tag{20}$$

т. е. так, чтобы

$$\mathbf{u}(t) = \int \mathbf{\Phi}(t)^{-1}\mathbf{f}(t)\,dt. \tag{21}$$

Подставив (21) в (15), мы, наконец, получим искомое частное решение в том виде, который предусмотрен в следующей теореме.

Теорема 1 Вариация параметров

Если $\mathbf{\Phi}(t)$ — фундаментальная матрица однородной системы $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ на некотором интервале, где $\mathbf{P}(t)$ и $\mathbf{f}(t)$ непрерывны, то частное решение неоднородной системы

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$$

может быть определено по формуле

➤
$$\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{\Phi}(t)\int \mathbf{\Phi}(t)^{-1}\mathbf{f}(t)\,dt. \tag{22}$$

▲

Это и есть нужная нам **формула вариации параметров** для линейной системы первого порядка. Если мы сложим это частное решение и общее решение однородного уравнения, даваемое формулой (14), мы получим общее решение

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{c} + \mathbf{\Phi}(t)\int \mathbf{\Phi}(t)^{-1}\mathbf{f}(t)\,dt \tag{23}$$

неоднородной системы (11).

Выбор постоянной интегрирования в уравнении (22) несуществен, поскольку нам нужно только одно (произвольное) частное решение. При решении задач Коши (задач с начальными условиями) часто удобно выбрать постоянную интегрирования так, чтобы $\mathbf{x}_p(a) = \mathbf{0}$, и, таким образом, интегрировать от a до t:

$$\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{\Phi}(t)\int_a^t \mathbf{\Phi}(s)^{-1}\mathbf{f}(s)\,ds. \tag{24}$$

Если мы сложим частное решение неоднородной задачи

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{x}(a) = \mathbf{0}$$

в (24) с решением $\mathbf{x}_c(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}(a)^{-1}\mathbf{x}_a$ соответствующей однородной задачи $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(a) = \mathbf{x}_a$, мы получим решение

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}(a)^{-1}\mathbf{x}_a + \mathbf{\Phi}(t)\int_a^t \mathbf{\Phi}(s)^{-1}\mathbf{f}(s)\,ds \tag{25}$$

неоднородной задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{x}(a) = \mathbf{x}_a. \tag{26}$$

Уравнения (22) и (25) справедливы для любой фундаментальной матрицы $\mathbf{\Phi}(t)$ однородной системы $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$. В случае постоянного коэффициента $\mathbf{P}(t) \equiv \mathbf{A}$ можно использовать для $\mathbf{\Phi}(t)$ экспоненту (матрицу $e^{\mathbf{A}t}$), т. е. частную фундаментальную матрицу, такую что $\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}$. Тогда, поскольку $(e^{\mathbf{A}t})^{-1} = e^{-\mathbf{A}t}$, подстановка $\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}$ в (22) дает частное решение

$$\mathbf{x}_p(t) = e^{\mathbf{A}t}\int e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{f}(t)\,dt \tag{27}$$

неоднородной системы $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$. Точно так же подстановка $\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}$ в уравнение (25) при $a = 0$ дает решение

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + e^{\mathbf{A}t}\int_0^t e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{f}(t)\,dt \tag{28}$$

задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \tag{29}$$

Замечание. Если сохранить t в качестве независимой переменной, но использовать s в качестве переменной интегрирования, то решения (27) и (28) могут быть записаны в виде

$$\mathbf{x}_p(t) = \int e^{-\mathbf{A}(s-t)}\mathbf{f}(s)\,ds \quad \text{и} \quad \mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{-\mathbf{A}(s-t)}\mathbf{f}(s)\,ds. \qquad \blacksquare$$

Пример 4 Решим задачу Коши (задачу с начальными условиями)

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} - \begin{bmatrix} 15 \\ 4 \end{bmatrix} te^{-2t}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}. \tag{30}$$

Решение Решение соответствующей однородной системы дается формулой (10). Она дает фундаментальную матрицу

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{bmatrix}, \quad \text{причем} \quad \mathbf{\Phi}(0)^{-1} = \tfrac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Из равенства (28) раздела 5.5 следует, что экспоненциальная функция от матрицы коэффициентов $\mathbf{A}$ из (30) будет иметь вид

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}(0)^{-1} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{bmatrix} \cdot \tfrac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \tfrac{1}{7} \begin{bmatrix} e^{-2t} + 6e^{5t} & -2e^{-2t} + 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} + 3e^{5t} & 6e^{-2t} + e^{5t} \end{bmatrix}.$$

Тогда по формуле вариации параметров (равенство (28)) получим

$$e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{-\mathbf{A}s}\mathbf{f}(s)\,ds =$$

$$= \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} + \int_0^t \tfrac{1}{7} \begin{bmatrix} e^{2s} + 6e^{-5s} & -2e^{2s} + 2e^{-5s} \\ -3e^{2s} + 3e^{-5s} & 6e^{2s} + e^{-5s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -15se^{-2s} \\ -4se^{-2s} \end{bmatrix} ds =$$

$$= \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} -s - 14se^{-7s} \\ 3s - 7se^{-7s} \end{bmatrix} ds =$$

$$= \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{14} \begin{bmatrix} -4 - 7t^2 + 4e^{-7t} + 28te^{-7t} \\ -2 + 21t^2 + 2e^{-7t} + 14te^{-7t} \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t) = \tfrac{1}{14} \begin{bmatrix} 94 - 7t^2 + 4e^{-7t} + 28te^{-7t} \\ 40 + 21t^2 + 2e^{-7t} + 14te^{-7t} \end{bmatrix}.$$

После умножения правой части на $e^{\mathbf{A}t}$ мы находим, что решение задачи Коши (задачи с начальными условиями), поставленной в (30), определяется формулой

$$\mathbf{x}(t) = \tfrac{1}{7} \begin{bmatrix} e^{-2t} + 6e^{5t} & -2e^{-2t} + 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} + 3e^{5t} & 6e^{-2t} + e^{5t} \end{bmatrix} \cdot \tfrac{1}{14} \begin{bmatrix} 94 - 7t^2 + 4e^{-7t} + 28te^{-7t} \\ 40 + 21t^2 + 2e^{-7t} + 14te^{-7t} \end{bmatrix} =$$

$$= \tfrac{1}{14} \begin{bmatrix} (6 + 28t - 7t^2)e^{-2t} + 92e^{5t} \\ (-4 + 14t + 21t^2)e^{-2t} + 46e^{5t} \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

5.6. Задачи

В задачах 1–14 примените метод неопределенных коэффициентов, чтобы найти частное решение каждой из данных систем. Если заданы начальные условия, найдите частное решение, которое удовлетворяет этим условиям. Штрихи обозначают производные по t.

1. $x' = x + 2y + 3,\ y' = 2x + y - 2$ **2.** $x' = 2x + 3y + 5,\ y' = 2x + y - 2t$

3. $x' = 3x + 4y,\ y' = 3x + 2y + t^2; x(0) = y(0) = 0$

4. $x' = 4x + y + e^t,\ y' = 6x - y - e^t; x(0) = y(0) = 1$

5. $x' = 6x - 7y + 10,\ y' = x - 2y - 2e^{-t}$ **6.** $x' = 9x + y + 2e^t,\ y' = -8x - 2y + te^t$

7. $x' = -3x + 4y + \sin t,\ y' = 6x - 5y; x(0) = 1,\ y(0) = 0$

8. $x' = x - 5y + 2\sin t,\ y' = x - y - 3\cos t$

9. $x' = x - 5y + \cos 2t,\ y' = x - y$ **10.** $x' = x - 2y,\ y' = 2x - y + e^t \sin t$

11. $x' = 2x + 4y + 2,\ y' = x + 2y + 3; x(0) = 1,\ y(0) = -1$

12. $x' = x + y + 2t,\ y' = x + y - 2t$ **13.** $x' = 2x + y + 2e^t,\ y' = x + 2y - 3e^t$

14. $x' = 2x + y + 1,\ y' = 4x + 2y + e^{4t}$

*Задачи 15 и 16 подобны примеру 2, но в них рассматривается система из двух рассольных баков (имеющих объемы V_1 и V_2 галлонов — см. рис. 5.6.2), а не из трех баков. Каждый бак первоначально содержит пресную воду, причем в бак 1 вливается рассол со скоростью r галлонов в минуту, имеющий концентрацию соли c_0 фунтов на галлон. **(a)** Найдите количества $x_1(t)$ и $x_2(t)$ соли в двух баках после t минут. **(b)** Найдите предельное (т.е. получающееся через длительное время) количество соли в каждом баке. **(c)** Найдите, сколько времени потребуется для того, чтобы в каждом баке концентрации соли достигла 1 фунта на галлон.*

15. $V_1 = 100,\ V_2 = 200,\ r = 10,\ c_0 = 2$ **16.** $V_1 = 200,\ V_2 = 100,\ r = 10,\ c_0 = 3$

В задачах 17–34 используйте метод вариации параметров (и возможно, систему компьютерной алгебры), чтобы решить задачу Коши (задачу с начальными условиями)

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{x}(a) = \mathbf{x}_a.$$

В каждой задаче мы приводим вычисленное с помощью системы компьютерной алгебры значение экспоненциальной функции от матрицы $e^{\mathbf{A}t}$.

17. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 60 \\ 90 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$

$e^{\mathbf{A}t} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -e^{-t} + 7e^{5t} & 7e^{-t} - 7e^{5t} \\ -e^{-t} + e^{5t} & 7e^{-t} - e^{5t} \end{bmatrix}$

18. Снова решите задачу 17, но замените $\mathbf{f}(t)$ на $\begin{bmatrix} 100t \\ -50t \end{bmatrix}$.

19. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 180t \\ 90 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$

$e^{\mathbf{A}t} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} e^{-3t} + 4e^{2t} & -2e^{-3t} + 2e^{2t} \\ -2e^{-3t} + 2e^{2t} & 4e^{-3t} + e^{2t} \end{bmatrix}$

20. Снова решите задачу 19, но замените $\mathbf{f}(t)$ на $\begin{bmatrix} 75e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}$.

21. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 18e^{2t} \\ 30e^{2t} \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$

$e^{\mathbf{A}t} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -e^{-t} + 5e^{3t} & e^{-t} - e^{3t} \\ -5e^{-t} + 5e^{3t} & 5e^{-t} - e^{3t} \end{bmatrix}$

22. Снова решите задачу 21, но замените $\mathbf{f}(t)$ на $\begin{bmatrix} 28e^{-t} \\ 20e^{3t} \end{bmatrix}$.

23. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$,

$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 1+3t & -t \\ 9t & 1-3t \end{bmatrix}$

24. Снова решите задачу 23, но положите $\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ t^{-2} \end{bmatrix}$ и $\mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$.

25. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 4t \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} \cos t + 2\sin t & -5\sin t \\ \sin t & \cos t - 2\sin t \end{bmatrix}$

26. Снова решите задачу 25, но замените $\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 4\cos t \\ 6\sin t \end{bmatrix}$ и $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

27. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 36t^2 \\ 6t \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 1+2t & -4t \\ t & 1-2t \end{bmatrix}$

28. Снова решите задачу 27, но замените $\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 4\ln t \\ t^{-1} \end{bmatrix}$ и $\mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

29. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} \sec t \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$

30. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} t\cos 2t \\ t\sin 2t \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} \cos 2t & -\sin 2t \\ \sin 2t & \cos 2t \end{bmatrix}$

31. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6e^t \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^t & 2te^t & (3t+2t^2)e^t \\ 0 & e^t & 2te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$

32. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2e^{2t} \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^t & 3te^t & (-13-9t)e^t + 13e^{2t} \\ 0 & e^t & -3e^t + 3e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$

33. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{f}(t) = 30\begin{bmatrix} t \\ t \\ t \\ t \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & 4t & 8t+6t^2 & 32t^2+8t^3 \\ 0 & 1 & 3t & 8t+6t^2 \\ 0 & 0 & 1 & 4t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

34. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 6t \\ 0 \\ e^{2t} \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$,

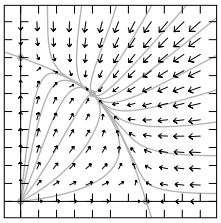
$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & 4t & 4(-1+e^{2t}) & 16t(-1+e^{2t}) \\ 0 & 1 & 0 & 4(-1+e^{2t}) \\ 0 & 0 & e^{2t} & 4te^{2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

5.6. Приложение. Автоматизированная вариация параметров

Приложение формулы вариации параметров к уравнению (28) позволяет автоматизировать процесс решения настолько, что можно воспользоваться системой компьютерной алгебры. Следующие команды системы *Mathematica* позволяют проверить результаты, полученные в примере 4 этого раздела:

```
A = {{4,2}, {3,-1}};
x0 ={{7}, {3}};
f[t_] := {{-15 t Exp[-2t]},{-4 t Exp[-2t]}};
exp[A_] := MatrixExp[A]
x = exp[A*t].(x0 + Integrate[exp[-A*s].f[s], {s,0,t}])
```

Команды, позволяющие вычислить экспоненциальную функцию от матрицы, которые были приведены в приложении к разделу 5.5, составляют основу для аналогичных вычислений в системах *Maple* и MATLAB. Так что вы можете легко проверить ответы к задачам 17–34 из этого раздела.



ГЛАВА 6

Нелинейные системы и явления

6.1. Устойчивость и фазовая плоскость

Самые разнообразные природные явления могут быть смоделированы двумерными системами первого порядка вида

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F(x,y), \\ \frac{dy}{dt} &= G(x,y), \end{aligned} \tag{1}$$

в которые независимая переменная t не входит явно. Такую систему называют **автономной системой.** Благодаря отсутствию t в правых частях система (1) не только выглядит более просто, но гораздо проще анализировать ее решения и визуализировать их. Мы предполагаем, что функции F и G непрерывно дифференцируемы в некоторой области R плоскости xy, которую называют **фазовой плоскостью** системы (1). Тогда, согласно теореме существования и единственности, приведенной в приложении, для заданного t_0 и любой точки $(x_0,\ y_0)$ области R существует *единственное* определенное на некотором открытом интервале (a, b), содержащем t_0, решение $x = x(t)$, $y = y(t)$ уравнения (1) такое, которое удовлетворяет начальным условиям

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0. \tag{2}$$

В этом случае уравнения $x = x(t)$, $y = y(t)$ представляют собой параметрическое задание интегральной кривой в фазовой плоскости. Любую такую интегральную кривую называют **траекторией** системы (1); точно одна траектория проходит через каждую точку

области R (задача 29). **Точка равновесия**[1] системы (1) — это точка $(x_\star, y_\star)$, такая что

➤
$$F(x_\star, y_\star) = G(x_\star, y_\star) = 0. \tag{3}$$

Если $(x_\star,\ y_\star)$ — точка равновесия системы, то функции-константы

$$x(t) \equiv x_\star, \quad y(t) \equiv y_\star \tag{4}$$

удовлетворяют уравнениям (1). Такое решение-константа называется **равновесным решением**[2] системы. Обратите внимание, что траектория равновесного решения (4) состоит из единственной (отдельной) точки $(x_\star,\ y_\star)$.

В некоторых практических задачах именно эти очень простые решения и траектории как раз и представляют собой самый большой интерес. Предположим, например, что система $x' = F(x, y)$, $y' = G(x, y)$ моделирует две популяции животных численностью $x(t)$ и $y(t)$, которые живуют в той же самой среде, и, возможно, конкурируют за то же самое продовольствие или охотятся друг на друга; $x(t)$ пусть обозначает число кроликов, а $y(t)$ число белок в момент времени t. Тогда точка равновесия $(x_\star, y_\star)$ системы определяет *постоянную* численность $x_\star$ популяции кроликов и *постоянную* численность $y_\star$ популяции белок, которые могут сосуществовать друг с другом в данной среде обитания. Если (x_0, y_0) *не является* точкой равновесия системы, то популяции постоянных численностей x_0 кроликов и y_0 белок сосуществовать *не могут*; одна или обе численности должны измениться со временем.

Пример 1 Найдем точки равновесия системы

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 14x - 2x^2 - xy, \\ \frac{dy}{dt} &= 16y - 2y^2 - xy. \end{aligned} \tag{5}$$

Решение Точка равновесия (x, y) должна удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned} 14x - 2x^2 - xy &= x(14 - 2x - y) = 0, \\ 16y - 2y^2 - xy &= y(16 - 2y - x) = 0, \end{aligned}$$

из которых мы видим, что либо

$$x = 0 \quad \text{или} \quad 14 - 2x - y = 0, \tag{6a}$$

[1] Точки равновесия называют очень часто *особыми точками*. Кроме того, их называют также *стационарными точками*, *стационарными решениями*, *положениями равновесия*, *неподвижными точками*, *точками покоя*, а также *критическими точками*. Термин *особая точка* в теории дифференциальных уравнений встречается, пожалуй, чаще всего. В переводе же предпочтение часто отдается термину *точка равновесия* из-за очевидной механической интерпретации. Что же касается функций F и G, то у них в этой точке никаких особенностей нет. Особенности могут появиться у соответствующего поля, например поля направлений. В окрестности этих точек может меняться, например, направление. — *Примеч. ред.*

[2] А также *стационарным решением*. Напомню, что точки равновесия называют очень часто *особыми точками*. Можно было бы подумать, что интегральная кривая, походящая через точку равновесия (особую точку), представляет собой график *особого решения*. Но особые решения в теории дифференциальных уравнений имеют совсем другое определение (особым называется решение, в каждой точке которого нарушается единственность решения задачи Коши). Это также одна из причин, по которой в переводе мы часто отдаем предпочтение термину *точка равновесия*. — *Примеч. ред.*

либо

$$y = 0 \quad \text{или} \quad 16 - 2y - x = 0. \tag{6b}$$

Если $x = 0$ и $y \neq 0$, то из второго уравнения (6b) находим $y = 8$. Если $y = 0$ и $x \neq 0$, то из второго уравнения (6a) определяем $x = 7$. Если x и y отличны от нуля, то мы решаем систему уравнений

$$2x + y = 14, \quad x + 2y = 16,$$

из которой находим $x = 4$, $y = 6$. Таким образом, система (5) имеет найденные нами четыре точки равновесия $(0, 0)$, $(0, 8)$, $(7, 0)$ и $(4, 6)$. Если $x(t)$ и $y(t)$ обозначают соответственно число кроликов и число белок, и если численности обеих популяций *постоянны*, то из этого следует, что уравнения (5) допускают только три нетривиальных возможности: либо нет кроликов вообще и есть только 8 белок, либо есть 7 кроликов, а белок нет вообще, либо есть только 4 кролика и 6 белок. В частности, точка равновесия $(4, 6)$ описывает *единственную* возможность для сосуществования популяций постоянных численностей, отличных от нуля для обоих видов. ■

Фазовые портреты

Если начальная точка (x_0, y_0) не является точкой равновесия, то соответствующая траектория представляет собой кривую в плоскости xy, по которой перемещается точка $(x(t), y(t))$ при увеличении t. Оказывается, что любая траектория, не состоящая из единственной (изолированной) точки, представляет собой невырожденную кривую без самопересечений (задача 30). Чтобы показать качественно поведение решений системы (1), достаточно сделать набросок ее **фазового портрета** в фазовой плоскости — на фазовом портрете будут отчетливо видны ее точки равновесия и типичные невырожденные траектории. Мы можем начертить **поле направлений**, рисуя типичные отрезки прямых, имеющие наклон

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)}.$$

Кроме того, **поле направлений** можно нарисовать и иначе: для этого достаточно нарисовать типичные векторы, указывающие в каждой точке в том же самом направлении, что и вектор $(F(x, y), G(x, y))$[3]. Такое векторное поле указывает направление, в котором перемещается частица по траектории, когда "плывет в потоке", задаваемом системой.

На рис. 6.1.1 показаны поле направлений и фазовый портрет для системы, описывающей популяции белок и кроликов (из примера 1). Стрелки поля направлений указывают направление движения точки $(x(t), y(t))$. Мы видим, что при любых положительных начальных числах $x_0 \neq 4$ и $y_0 \neq 6$ кроликов и белок, эта точка перемещаются по траектории, приближающейся к критической (особой) точке $(4, 6)$ при увеличении t.

[3] Конечно же, этот вектор имеет наклон $\frac{G(x,y)}{F(x,y)}$. — *Примеч. ред.*

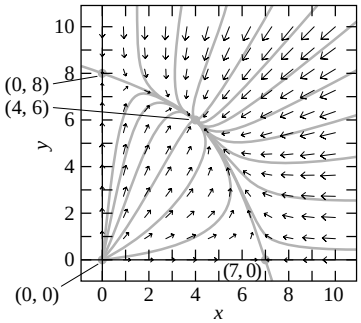


Рис. 6.1.1. Поле направлений и фазовый портрет системы $x' = 14x - 2x^2 - xy$, $y' = 16y - 2y^2 - xy$, описывающей популяции белок и кроликов (пример 1)

Пример 2 В случае системы

$$\begin{aligned} x' &= x - y, \\ y' &= 1 - x^2 \end{aligned} \tag{7}$$

из первого уравнения следует, что $x = y$, а из второго — что $x = \pm 1$ в каждой критической точке. Таким образом, эта система имеет две точки равновесия: $(-1, -1)$ и $(1, 1)$. Поле направлений на рис. 6.1.2 показывает, что траектории тем или иным способом "вращаются" против часовой стрелки вокруг точки равновесия $(-1, -1)$, причем кажется, что некоторые траектории приближаются к точке равновесия $(1, 1)$, а другие убегают от нее. Эти наблюдения подтверждаются фазовым портретом системы (7), показанным на рис. 6.1.3. ■

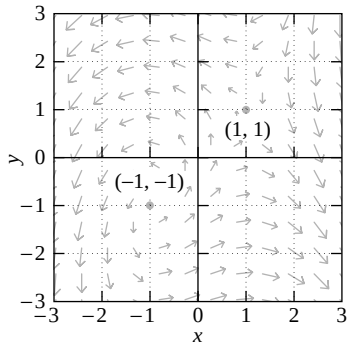


Рис. 6.1.2. Поле направлений системы уравнений (7)

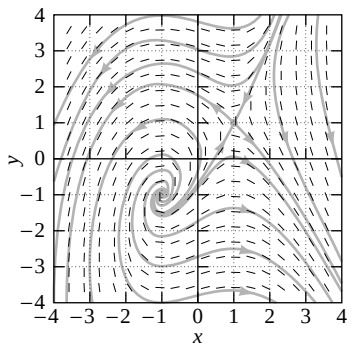


Рис. 6.1.3. Фазовый портрет системы уравнений (7)

Поведение в окрестности точки равновесия

Поведение траекторий в окрестности изолированной точки равновесия автономной системы представляет особый интерес. В оставшейся части этого раздела мы на простых примерах проиллюстрируем некоторые из самых общих возможностей.

Пример 3 Рассмотрим автономную линейную систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -x, \\ \frac{dy}{dt} &= -ky \quad (k - \text{отличная от нуля константа}), \end{aligned} \tag{8}$$

единственная точка равновесия которой находится в начале координат $(0, 0)$. Решение, выходящее из начальной точки (x_0, y_0), имеет вид

$$x(t) = x_0 e^{-t}, \quad y(t) = y_0 e^{-kt}. \tag{9}$$

Если $x_0 \neq 0$, мы можем написать

$$y = y_0 e^{-kt} = \frac{y_0}{x_0^k}(x_0 e^{-t})^k = bx^k, \tag{10}$$

где $b = y_0/x_0^k$. Характер (природа) точки равновесия $(0, 0)$ зависит от того, положителен или отрицателен отличный от нуля параметр k.

Случай 1: $k > 0$. Если параметр k положителен, то из (9) мы видим, что точка $(x(t), y(t))$ приближается к началу координат по кривой $y = bx^k$ при $t \to +\infty$. Вид этой кривой зависит от величины k:

- если $k = 1$, то $y = bx$ (причем $b = y_0/x_0$) — прямая линия, проходящая через точку (x_0, y_0). Эти прямолинейные траектории отчетливо видны на фазовом портрете, приведенном на рис. 6.1.4;
- если $k > 1$ и ни x_0, ни y_0 в уравнении (10) не равно нулю, то кривая $y = bx^k$ касается оси x в начале координат. Этот случай иллюстрирован фазовым портретом, приведенным на рис. 6.1.5, где $k = 2$ и все траектории — параболы. Более точно, траекториями являются *полу*оси и правые и левые *половины (ветви)* этих парабол;
- если $0 < k < 1$ и ни x_0, ни y_0 не равно нулю, то фазовый портрет подобен приведенному на рис. 6.1.5, за исключением того, что каждая кривая $y = bx^k$ касается оси y (а не оси x) в начале координат.

Тип точки равновесия, показанной на рис. 6.1.4 и 6.1.5 называется *узлом.* Вообще, критическую точку $(x_\star, y_\star)$ автономной системы (1) называют **узлом**, если

- *либо* все траектории стремятся к $(x_\star, y_\star)$ при $t \to +\infty$, *либо* все траектории выходят из $(x_\star, y_\star)$ при $t \to +\infty$, *и*
- каждая траектория касается в $(x_\star, y_\star)$ некоторой прямой, проходящей через критическую точку.

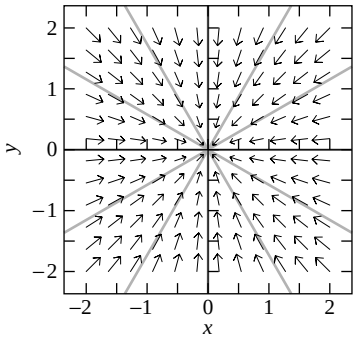


Рис. 6.1.4. Дикритический узел; все траектории входят в начало координат, следовательно, этот узел представляет собой сток

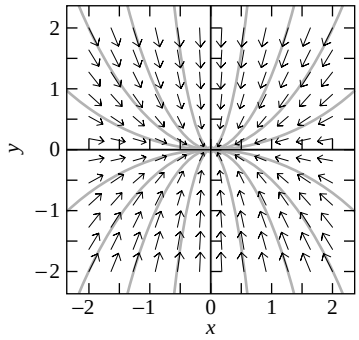


Рис. 6.1.5. Вырожденный узел, потому что все траектории касаются одной прямой; они приближаются к началу координат, так что этот узел — сток

Узел называется **дикритическим** (собственным, правильным), если никакие две различные пары "противоположных" траекторий не касательны к одной и той же самой прямой, проходящей через критическую точку. Именно такой узел изображен на рис. 6.1.4 (в котором траектории *являются* прямыми линиями, а не просто касательными к прямым линиям). Дикритический узел можно было бы назвать "звездной точкой", или "нейтральной точкой звезды". На рис. 6.1.5 все траектории (кроме одной противоположной пары) касаются одной прямой, проходящей через критическую точку. Этот тип узла называется **вырожденным** (несобственным, или неправильным).

Узел также называют **стоком**, если все траектории приближаются к критической точке, и **источником**, если все траектории выходят (убегают) из нее. Таким образом, начало координат на рис. 6.1.4 — *дикритический узел-сток,* тогда как на рис. 6.1.5 изображен *несобственный узел-сток.* Если бы стрелки поля направлений на каждом рисунке были обращены в противоположном направлении, то начало координат было бы *узлом-источником* на каждом из этих рисунков[4].

Случай 2: $k < 0$. Если k отрицательно, то по виду траектории похожи на изображенные на рис. 6.1.6 для случая $k = -1$. Если ни x_0, ни y_0 не равны нулю, то соответствующая траектория на рис. 6.1.6 представляет собой одну ветвь равнобочной гиперболы $xy = b$ и $|y(t)| \to +\infty$ при $t \to +\infty$. Если x_0 или y_0 *равно* нулю, то траектория представляет собой полуось

[4] Подытожим сказанное об узлах. Узел — это тип расположения траекторий автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$x' = f(x), \quad x = (x_1, x_2), \quad f : G \subseteq R^2 \to R^2, \quad f \in C(G),$$

где G — область единственности в окрестности особой точки x_0. Этот тип характеризуется следующим образом. Существует окрестность U точки x_0, такая что для всех траекторий системы, начинающихся в $U \backslash \{x_0\}$, отрицательные полутраектории являются уходящими (с течением времени покидают любой компакт $V \subset U$),

гиперболы[5]. Точка $(x(t), y(t))$ приближается к началу координат по оси x, но убегает от него по оси y при $t \to +\infty$. Таким образом, есть две траектории, которые приближаются к критической точке $(0, 0)$, но все другие неограничены при $t \to +\infty$. Этот тип точки равновесия, показанной на рис. 6.1.6, называется **седловой точкой** или просто седлом. ■

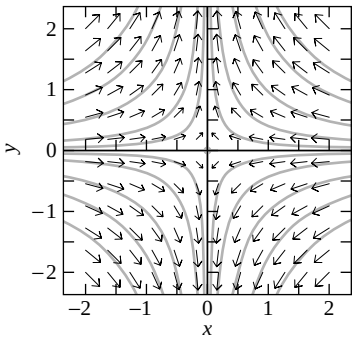


Рис. 6.1.6. Седловая точка с траекториями, напоминающими контурные кривые седловой точки на поверхности

а положительные полутраектории — асимптотическими (не выходя из U, примыкают к x_0, причем, будучи дополнены самой точкой x_0, касаются в ней определенных направлений), или наоборот. Узлом называется в таком случае и сама точка x_0. Классификация узлов и особых точек у разных авторов может отличаться. Узлом называют, например, точку притяжения, в которой все орбиты, отличные от стационарной точки, имеют касательную в стационарной точке. (Изолированная стационарная точка $x = 0$ называется точкой притяжения для $t = \infty$ (или $t = -\infty$), если все решения $x = x(t)$ задачи $x' = f(x), \quad x(0) = x_0$ при малых $\|x_0\|$ существуют для $t \geqslant 0$ (или $t \leqslant 0$) и $x_0(t) \to 0$ при $t \to \infty$ (или $t \to -\infty$).) Пусть $f \in C^1(G)$, причем ненулевая матрица Якоби в точке покоя имеет различные действительные собственные значения λ_1 и λ_2 одного знака. Тогда такая точка будет узлом. Однако узлом точка покоя может быть и в тех случаях, когда $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$, $\lambda_1 = 0 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. В случае $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$ точка x_0 будет узлом, если $f \in C^2(G)$, в противном случае она может оказаться *фокусом*. Узел называется *обыкновенным*, если все траектории системы касаются в точке x_0 направлений, соответствующих меньшему по абсолютной величине собственному значению λ_1, за исключением двух траекторий, которые касаются в x_0 направлений, соответствующих другому собственному значению (при этом различаются диаметрально противоположные направления). Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то собственными для матрицы Якоби будут либо лишь два противоположных направления (в этом случае узел называется *вырожденным*), либо все направления. Если собственными являются все направления, то при условии $f \in C^2(G)$ каждого направления касается в точке x_0 единственная траектория системы, и такой узел называется *дикритическим*. Но часто употребляются и другие названия узлов. Дикритический узел часто называется *собственным* (иногда также *особым*), вырожденный узел — *несобственным*. Кроме того, часто узел называется *собственным*, если для каждого направления существует единственное решение, которое касается этого направления; в противном случае узел часто называется *несобственным*. Заметьте, что согласно этому последнему соглашению к несобственным узлам относятся не только *вырожденные узлы*, но и (*простые*) *узлы*. — *Примеч. ред.*

[5] Имеется в виду, конечно, координатная полуось, т. е. “полуасимптота” гиперболы. — *Примеч. ред.*

Устойчивость

Точка равновесия $(x_\star, y_\star)$ автономной системы (1) называется *устойчивой*, если из того, что начальная точка (x_0, y_0) расположена достаточно близко к $(x_\star, y_\star)$, следует, что $(x(t), y(t))$ остается близкой к $(x_\star, y_\star)$ для всех $t > 0$. В векторной системе обозначений $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ расстояние между начальной точкой $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ и точкой равновесия $\mathbf{x}_\star = (x_\star, y_\star)$ равно

$$|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_\star| = \sqrt{(x_0 - x_\star)^2 + (y_0 - y_\star)^2}\,.$$

Таким образом, точка равновесия $\mathbf{x}_\star$ **устойчива**, если выполнено следующее условие: для каждого $\epsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если

$$|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_\star| < \delta, \quad \text{то} \quad |\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_\star| < \epsilon \tag{11}$$

для всех $t > 0$. Обратите внимание, что условие (11) тривиально выполнено, если $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{x}_\star$ при $t \to +\infty$ как в случае узла-стока. Таким образом, узлы-стоки, показанные на рис. 6.1.4 и 6.1.5, представляют собой *устойчивые узлы*.

Критическую точку $(x_\star, y_\star)$ называют **неустойчивой**, если она не является устойчивой. Седловая точка $(0, 0)$ на рис. 6.1.6 — неустойчивая точка равновесия, потому что точка $(x(t), y(t))$ убегает в бесконечность при $t \to +\infty$ (при условии, что $x_0 y_0 \neq 0$), и, следовательно, условие (11) не выполняется.

Пример 3 *Продолжение*

Если знак правой части в (8) изменить, то получится система

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x, \\ \frac{dy}{dt} &= ky \quad (k \text{ — отличная от нуля константа}). \end{aligned} \tag{12}$$

Ее решением будут функции $x(t) = x_0 e^t$, $y(t) = y_0 e^{kt}$. Тогда при $k = 1$ и $k = 2$ траектории будут те же самые, что и показанные на рис. 6.1.4 и 6.1.5 соответственно, но стрелки будут иметь противоположные направления, так что точка $(x(t), y(t))$ убегает в бесконечность при $t \to \infty$. Поэтому в каждом случае в начале координат $(0, 0)$ получится узел-источник, т. е. *неустойчивый узел*. ■

Если $(x_\star, y_\star)$ — точка равновесия, то равновесное решение $x(t) \equiv x_\star$, $y(t) \equiv y_\star$ называется **устойчивым** или **неустойчивым** в зависимости от характера (природы) точки равновесия. В приложениях часто важно (критически важно!) ответить на вопрос об устойчивости равновесного решения. Например, предположите в примере 1, что $x(t)$ и $y(t)$ соответственно обозначают численности популяций кроликов и белок *(в сотнях)*. Мы увидим в разделе 6.3, что точка равновесия $(4, 6)$, показанная на рис. 6.1.1, устойчива. Из этого следует, что если численность популяции кроликов *близка к* 400, а численность популяции белок — к 600, но численности популяций не точно равны этим равновесным значениям, то в течение всего будущего времени в данной среде обитания останутся приблизительно 400 кроликов и приблизительно 600 белок. Таким образом, практическое следствие устойчивости состоит в том, что небольшие изменения (возможно из-за случайных рождений и случаев смерти) в равновесных популяциях не будут расшатывать равновесие настолько, чтобы все кончилось большими отклонениями от равновесных решений.

Траектории могут оставаться в окрестности устойчивой точки равновесия, не приближаясь к ней, как показано в примере 4.

Пример 4 Рассмотрим материальную точку массы m, которая без демфирования колеблется на пружине, константа Гука которой равна k. Тогда функция, дающая положение $x(t)$ материальной точки, удовлетворяет дифференциальному уравнению $x'' + \omega^2 x = 0$ (где $\omega^2 = k/m$). Если обозначить скорость материальной точки данной массы через $y = dx/dt$, мы получим систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -\omega^2 x \end{aligned} \tag{13}$$

с общим решением

$$x(t) = \quad A\cos\omega t + \quad B\sin\omega t, \tag{14a}$$

$$y(t) = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t. \tag{14b}$$

При $C = \sqrt{A^2 + B^2}$, $A = C\cos\alpha$ и $B = C\sin\alpha$ мы можем переписать решение системы (14) в форме

$$x(t) = \quad C\cos(\omega t - \alpha), \tag{15a}$$

$$y(t) = -\omega C\sin(\omega t - \alpha). \tag{15b}$$

Теперь очевидно, что каждая траектория, отличная от точки равновесия $(0, 0)$, является эллипсом, уравнение которого можно записать в форме

$$\frac{x^2}{C^2} + \frac{y^2}{\omega^2 C^2} = 1. \tag{16}$$

Как видно из фазового портрета, приведенного на рис. 6.1.7 (где $\omega = \frac{1}{2}$), каждая точка (x_0, y_0), отличная от начала координат плоскости xy, лежит в точности на одном из этих эллипсов, причем каждое решение $(x(t), y(t))$ обходит эллипс начиная с его начальной точки (x_0, y_0) по часовой стрелке с *периодом* $P = 2\pi/\omega$. (Из (15) видно, что $x(t+P) = x(t)$ и $y(t+P) = y(t)$ для всех t.) Таким образом, каждое нетривиальное решение системы (13) является периодическим, а его траектория — простая замкнутая кривая, обходящая критическую точку, расположенную в начале координат. ■

На рис. 6.1.8 показана типичная эллиптическая траектория из примера 4, причем ее меньшая полуось обозначена через δ, а ее главная (большая) полуось — через ϵ. Мы видим, что если начальная точка (x_0, y_0) удалена от начала координат на расстояние, не превосходящее δ (так что проходящая через нее эллиптическая траектория лежит внутри вычерченного эллипса), то точка $(x(t), y(t))$ всегда остается в пределах заданного расстояния ϵ от начала координат. Следовательно, начало координат $(0, 0)$ — устойчивая точка равновесия системы $x' = y$, $y' = -\omega^2 x$. В отличие от случая, показанного на рис. 6.1.4 и 6.1.5, нет никаких траекторий, приближающихся к точке $(0, 0)$. Устойчивую критическую точку, окруженную простыми замкнутыми траекториями, представляющими периодические решения, называют **(устойчивым) центром.**

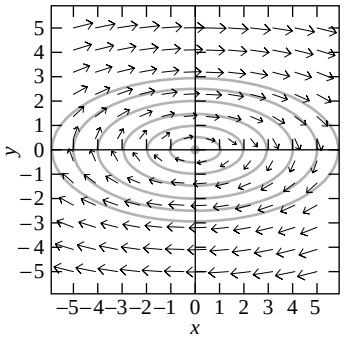


Рис. 6.1.7. Поле направлений и эллиптические траектории для системы $x' = y$, $y' = -\frac{1}{4}x$. Начало координат — устойчивый центр

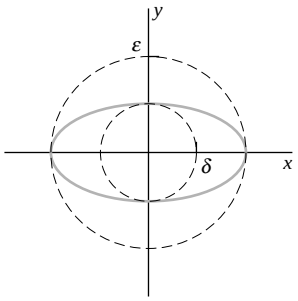


Рис. 6.1.8. Если расстояние начальной точки (x_0, y_0) от начала координат не превышает δ, то расстояние точки $(x(t), y(t))$ от начала координат не превышает ϵ

Асимптотическая устойчивость

Критическую точку $(x_\star, y_\star)$ называют **асимптотически устойчивой**, если она устойчива и, кроме того, каждая траектория, которая начинается достаточно близко к $(x_\star, y_\star)$, также приближается к $(x_\star, y_\star)$ при $t \to +\infty$. Иными словами, существует $\delta > 0$, такое что

$$\text{из } |\mathbf{x} - \mathbf{x}_\star| < \delta \quad \text{следует, что} \quad \lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_\star, \tag{17}$$

где $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$, $\mathbf{x}_\star = (x_\star, y_\star)$ и $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ — решение, причем $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

Замечание. Устойчивые узлы, показанные на рис. 6.1.4 и 6.1.5, асимптотически устойчивы, потому что каждая траектория приближается к критической точке $(0, 0)$ при $t \to +\infty$. Центр $(0, 0)$, показанный на рис. 6.1.7, устойчив, но не асимптотически устойчив, потому что точка, двигающаяся по любой эллиптической траектории (даже по очень маленькому эллипсу) не приближается к началу координат. Таким образом, асимптотическая устойчивость — более сильное условие, чем простая устойчивость. ■

Теперь предположим, что $x(t)$ и $y(t)$ обозначают численности сосуществующих популяций, для которых $(x_\star, y_\star)$ является асимптотически устойчивой точкой равновесия. Тогда, если начальные численности популяций x_0 и y_0 достаточно близки к $x_\star$ и $y_\star$ соответственно, то и

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_\star \quad \text{и} \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = y_\star. \tag{18}$$

Иными словами, $x(t)$ и $y(t)$ фактически приближаются к равновесным численностям популяций $x_\star$ и $y_\star$ при $t \to +\infty$, а не просто остаются близкими к этим значениям.

Для механической системы, как и в примере 4, точка равновесия представляет *равновесное состояние* системы — если скорость $y = x'$ и ускорение $y' = x''$ обращаются в нуль одновременно, то материальная точка заданной массы остается в покое, если равнодействующая всех сил, действующих на нее, равна нулю. Вопрос об устойчивости точки равновесия равносилен вопросу о том, как перемещается материальная точка заданной массы, когда она немного отклонена от ее положения равновесия:

1) двигается обратно к точке равновесия при $t \to +\infty$,

2) просто остается в окрестности точки равновесия, не приближаясь к нему, или

3) убегает дальше от точки равновесия.

В случае 1 критическая точка [положение равновесия] асимптотически устойчива; в случае 2 она устойчива, но не асимптотически; а в случае 3 она представляет собой неустойчивую точку равновесия. Мраморный шарик, находящийся в положении равновесия на вершине футбольного мяча, — пример системы с неустойчивой точкой равновесия. Материальная точка заданной массы на пружине с демпфированием иллюстрирует случай асимптотической устойчивости механической системы. Материальная точка заданной массы на пружине без демпфирования в примере 4 — пример системы, которая является устойчивой, но не асимптотически устойчивой.

Пример 5 Предположим, что $m = 1$ и $k = 2$ для системы, состоящей из материальной точки заданной массы и пружины в примере 4, и что к точке заданной массы приложен также поршень с коэффициентом затухания $c = 2$. Тогда функция, выражающаея смещение $x(t)$ данной системы, удовлетворяет уравнению второго порядка

$$x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = 0. \tag{19}$$

Полагая $y = x'$, мы получаем эквивалентную систему первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -2x - 2y \end{aligned} \tag{20}$$

с точкой равновесия $(0, 0)$. Характеристическое уравнение $r^2 + 2r + 2 = 0$ для уравнения (19) имеет корни $-1 + i$ и $-1 - i$, так что общее решение системы (20) дает функция

$$x(t) = e^{-t}(A\cos t + B\sin t) = Ce^{-t}\cos(t - \alpha), \tag{21a}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-t}\left[(B - A)\cos t - (A + B)\sin t\right] = \\ &= -C\sqrt{2}e^{-t}\sin\left(t - \alpha + \tfrac{1}{4}\pi\right), \end{aligned} \tag{21b}$$

где $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ и $\alpha = \operatorname{arctg}(B/A)$. Мы видим, что $x(t)$ и $y(t)$ колеблются около нуля, принимая то положительные, то отрицательные значения, причем обе эти функции стремятся к нулю при $t \to +\infty$. Таким образом, типичные спиральные траектории направлены внутрь к началу координат, как видно по изображенной спирали на рис. 6.1.9. ■

Из (21) ясно, что точка $(x(t), y(t))$ приближается к началу координат при $t \to +\infty$, а из этого следует, что $(0, 0)$ — асимптотически устойчивая точка равновесия для системы $x' = y$, $y' = -2x - 2y$ из примера 5. Такую асимптотически устойчивую критическую точку — вокруг которой траектории обвиваются подобно спирали (при приближении к этой точке), —

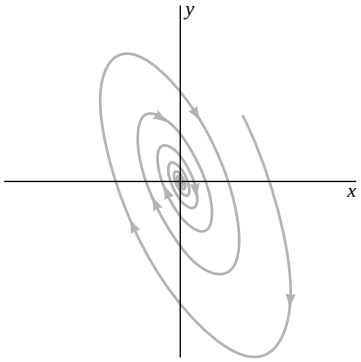


Рис. 6.1.9. Устойчивый фокус и одна близлежащая траектория

называют **устойчивым фокусом** (или **спиральным стоком**). В случае системы, состоящей из материальной точки заданной массы, закрепленной на пружине с поршнем, спиральный сток (устойчивый фокус) в фазовой плоскости свидетельствует о наличии затухающих колебаний, причем затухание происходит из-за сопротивления.

Если бы стрелки на рис. 6.1.9 были реверсированы, мы увидели бы траекторию, которая, подобно спирали, разматывается *наружу* от начала координат. Неустойчивую критическую точку — вокруг которой траектории раскручиваются по спирали по мере удаления от этой точки, — называют **неустойчивым фокусом** (или **спиральным источником**). В примере 6 показано, что траектория может по спирали накручиваться на **замкнутую траекторию** — простую замкнутую интегральную кривую, которая представляет собой периодическое решение (подобно эллиптическим траекториям на рис. 6.1.7).

Пример 6 Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -ky + x(1 - x^2 - y^2), \\ \frac{dy}{dt} &= kx + y(1 - x^2 - y^2). \end{aligned} \tag{22}$$

В задаче 21 мы просим вас показать, что $(0, 0)$ — ее единственная точка равновесия. Решение этой системы может быть найдено в явном виде следующим образом. Давайте для этого введем полярные координаты $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Сначала обратите внимание, что

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right) = \frac{xy' - x'y}{x^2 + y^2}.$$

Затем данные выражения подставьте в (22) вместо x' и y'. У вас получится

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{k(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = k.$$

Из этого следует, что

$$\theta(t) = kt + \theta_0, \qquad \text{где } \theta_0 = \theta(0). \tag{23}$$

Тогда дифференцирование равенства $r^2 = x^2 + y^2$ приводит к

$$2r\frac{dr}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = \\ = 2(x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2) = 2r^2(1 - r^2),$$

так что $r = r(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dr}{dt} = r(1 - r^2). \tag{24}$$

В задаче 22 мы просим вас получить решение

$$r(t) = \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + (1 - r_0^2)e^{-2t}}}, \tag{25}$$

где $r_0 = r(0)$. Так что типичное решение системы (22) может быть выражено в форме

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t)\cos(kt + \theta_0), \\ y(t) &= r(t)\sin(kt + \theta_0). \end{aligned} \tag{26}$$

Если $r_0 = 1$, то уравнение (25) дает $r(t) \equiv 1$ (единичная окружность). Иначе, если $r_0 > 0$, то из уравнения (25) следует, что $r(t) \to 1$ при $t \to +\infty$. Следовательно, траектория, определенная равенствами (26), накручивается (как спираль) на единичную окружность, если $r_0 > 1$, и подобно спирали приближается к этой замкнутой траектории, если $0 < r_0 < 1$. На рис. 6.1.10 показана траектория, которая подобно спирали сматывается по направлению от начала координат, и четыре траектории, которые подобно спирали наматываются внутрь, все приближаясь к замкнутой траектории$r(t) \equiv 1$. ■

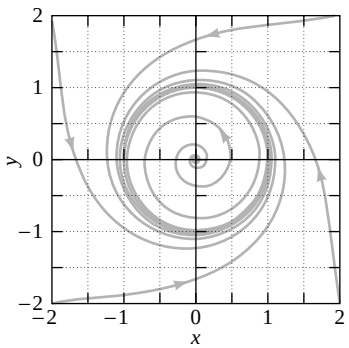


Рис. 6.1.10. Спиральные траектории системы уравнений (22) при $k = 5$

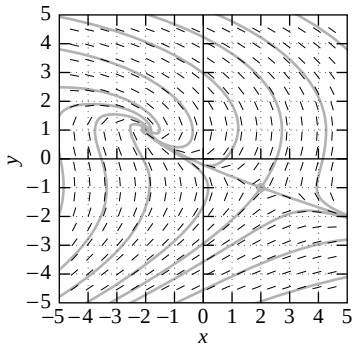


Рис. 6.1.11. Фокус $(-2, 1)$ и седловая точка $(2, -1)$

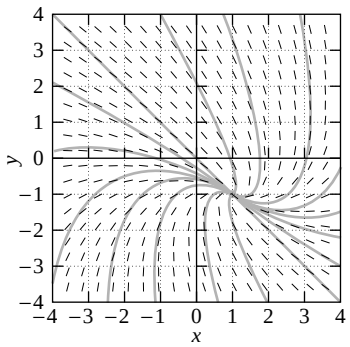


Рис. 6.1.12. Фокус $(1, -1)$

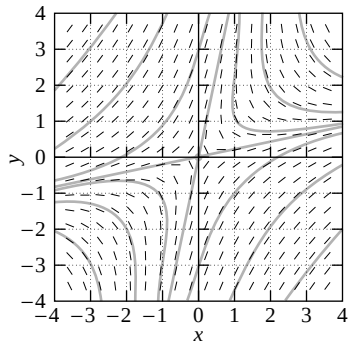


Рис. 6.1.13. Седловая точка $(0, 0)$

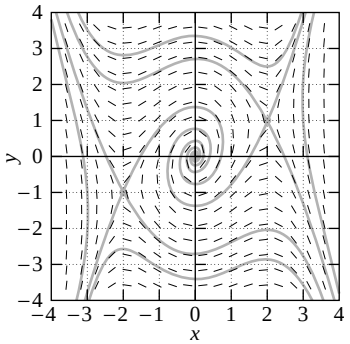


Рис. 6.1.14. Фокус $(0, 0)$; седловые точки $(-2, -1)$ и $(2, 1)$

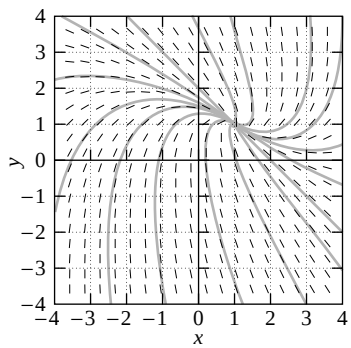


Рис. 6.1.15. Узел $(1, 1)$

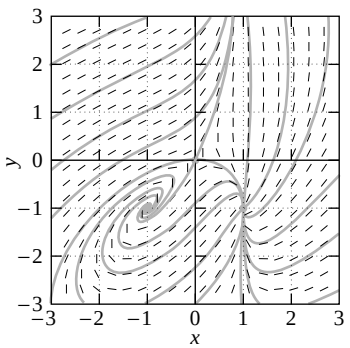


Рис. 6.1.16. Фокус $(-1, -1)$, седловая точка $(0, 0)$ и узел $(1, -1)$

При довольно общих предположениях можно показать, что есть четыре возможности для невырожденной траектории автономной системы

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = G(x, y).$$

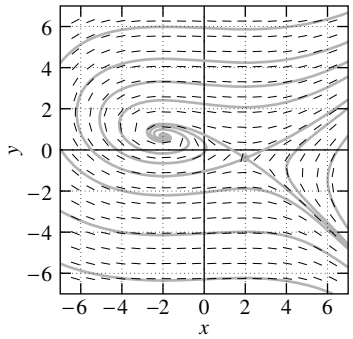


Рис. 6.1.17. Фокус $\left(-2, \frac{2}{3}\right)$ и седловая точка $\left(2, -\frac{2}{5}\right)$

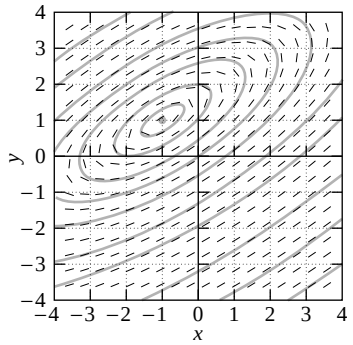


Рис. 6.1.18. Устойчивый центр $(-1, 1)$

Вот эти четыре возможности.

1. $(x(t), y(t))$ приближается к критической точке при $t \to +\infty$;
2. $(x(t), y(t))$ неограниченно удаляется от начала координат с увеличением t;
3. $(x(t), y(t))$ — периодическое решение, которому соответствует замкнутая траектория;
4. $(x(t), y(t))$ подобно спирали наматывается на замкнутую траекторию при $t \to +\infty$.

Из этого следует, что качественный характер (природа) траекторий (фазового портрета на фазовой плоскости) автономной системы в значительной степени определяется местоположениями ее точек равновесия и поведением ее траекторий в окрестности ее точек равновесия. В разделе 6.2 мы увидим, что при весьма слабых ограничениях на функции F и G каждая изолированная точка равновесия системы $x' = F(x, y)$, $y' = G(x, y)$ качественно напоминает один из примеров этого раздела — она является узлом (дикритическим или особым), седлом (седловой точкой), центром или фокусом.

6.1. Задачи

В задачах 1–8 найдите критическую точку (или точки) данной автономной системы и таким образом найдите фазовый портрет каждой системы среди рис. 6.1.11–6.1.18.

1. $\dfrac{dx}{dt} = 2x - y, \quad \dfrac{dy}{dt} = x - 3y$

2. $\dfrac{dx}{dt} = x - y, \quad \dfrac{dy}{dt} = x + 3y - 4$

3. $\dfrac{dx}{dt} = x - 2y + 3, \quad \dfrac{dy}{dt} = x - y + 2$

4. $\dfrac{dx}{dt} = 2x - 2y - 4, \quad \dfrac{dy}{dt} = x + 4y + 3$

5. $\dfrac{dx}{dt} = 1 - y^2, \quad \dfrac{dy}{dt} = x + 2y$

6. $\dfrac{dx}{dt} = 2 - 4x - 15y, \quad \dfrac{dy}{dt} = 4 - x^2$

7. $\dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \quad \dfrac{dy}{dt} = 4x - x^3$

8. $\dfrac{dx}{dt} = x - y - x^2 + xy, \quad \dfrac{dy}{dt} = -y - x^2$

В задачах 9–12 найдите каждое равновесное решение $x(t) \equiv x_0$ данного дифференциального уравнения второго порядка $x'' + f(x, x') = 0$. С помощью компьютерной системы или графического

калькулятора начертите фазовый портрет и поле направлений для эквивалентной системы первого порядка $x' = y$, $y' = -f(x, y)$. Таким образом установите, напоминает ли точка равновесия $(x_0, 0)$ центр, седловую точку или фокус данной системы.

9. $x'' + 4x - x^3 = 0$

10. $x'' + 2x' + x + 4x^3 = 0$

11. $x'' + 3x' + 4\sin x = 0$

12. $x'' + (x^2 - 1)x' + x = 0$

Решите каждую из линейных систем, данных в задачах 13–20, и определите, устойчива, асимптотически устойчива или неустойчива точка равновесия $(0, 0)$. С помощью компьютерной системы или графического калькулятора начертите фазовый портрет и поле направлений для данной системы. Таким образом установите устойчивость или неустойчивость каждой точки равновесия и визуально классифицируйте ее как узел, седловую точку, центр или фокус.

13. $\dfrac{dx}{dt} = -2x, \quad \dfrac{dy}{dt} = -2y$

14. $\dfrac{dx}{dt} = 2x, \quad \dfrac{dy}{dt} = -2y$

15. $\dfrac{dx}{dt} = -2x, \quad \dfrac{dy}{dt} = -y$

16. $\dfrac{dx}{dt} = x, \quad \dfrac{dy}{dt} = 3y$

17. $\dfrac{dx}{dt} = y, \quad \dfrac{dy}{dt} = -x$

18. $\dfrac{dx}{dt} = -y, \quad \dfrac{dy}{dt} = 4x$

19. $\dfrac{dx}{dt} = 2y, \quad \dfrac{dy}{dt} = -2x$

20. $\dfrac{dx}{dt} = y, \quad \dfrac{dy}{dt} = -5x - 4y$

21. Проверьте, что $(0,\ 0)$ — единственная точка равновесия системы в примере 6.

22. Отделите переменные в уравнении (24) и найдите решение (25).

В задачах 23–26 задана система $dx/dt = F(x, y)$, $dy/dt = G(x, y)$. Решите уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)}$$

и найдите траектории данной системы. С помощью компьютерной системы или графического калькулятора начертите фазовый портрет и поле направлений для системы и, таким образом, идентифицируйте визуально очевидную природу и устойчивость точки равновесия $(0, 0)$ данной системы.

23. $\dfrac{dx}{dt} = y, \quad \dfrac{dy}{dt} = -x$

24. $\dfrac{dx}{dt} = y(1 + x^2 + y^2), \quad \dfrac{dy}{dt} = x(1 + x^2 + y^2)$

25. $\dfrac{dx}{dt} = 4y(1 + x^2 + y^2), \quad \dfrac{dy}{dt} = -x(1 + x^2 + y^2)$

26. $\dfrac{dx}{dt} = y^3 e^{x+y}, \quad \dfrac{dy}{dt} = -x^3 e^{x+y}$

27. Пусть $(x(t), y(t))$ — нетривиальное решение неавтономной системы

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = tx.$$

Предположим, что $\phi(t) = x(t + \gamma)$ и $\psi(t) = y(t + \gamma)$, где $\gamma \neq 0$. Покажите, что $(\phi(t), \psi(t))$ *не является* решением данной системы.

В задачах 28–30 рассматривается система

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = G(x, y)$$

в области, где функции F и G непрерывно дифференцируемы, так что для каждого числа a и точки $(x_0,\ y_0)$ существует единственное решение, такое что $x(a) = x_0$ и $y(a) = y_0$.

28. Предположим, что $(x(t), y(t))$ — решение автономной системы и $\gamma \neq 0$. Определите $\phi(t) = x(t+\gamma)$ и $\psi(t) = y(t+\gamma)$. Затем покажите, что, в отличие от ситуации в задаче 27, $(\phi(t), \psi(t))$ — также решение системы. Таким образом, автономные системы имеют простое, но важное свойство: сдвиг решения вдоль оси t также представляет собой решение.

29. Пусть $(x_1(t), y_1(t))$ и $(x_2(t), y_2(t))$ — два решения, траектории которых пересекаются в точке (x_0, y_0); таким образом $x_1(a) = x_2(b) = x_0$ и $y_1(a) = y_2(b) = y_0$ для некоторых значений a и b переменной t. Определите

$$x_3(t) = x_2(t+\gamma) \quad \text{и} \quad y_3(t) = y_2(t+\gamma),$$

где $\gamma = b - a$, так что $(x_2(t), y_2(t))$ и $(x_3(t), y_3(t))$ имеют ту же самую траекторию. Примените теорему единственности, чтобы показать, что решения $(x_1(t), y_1(t))$ и $(x_3(t), y_3(t))$ совпадают. Следовательно, две первоначальные траектории совпадают. Таким образом, никакие две различные траектории автономной системы не могут пересечься.

30. Предположим, что решение $(x_1(t), y_1(t))$ определено для всех t и что его траектория имеет точку самопересечения:

$$x_1(a) = x_1(a+P) = x_0, \quad y_1(a) = y_1(a+P) = y_0$$

для некоторого $P > 0$. Введите решение

$$x_2(t) = x_1(t+P), \quad y_2(t) = y_1(t+P)$$

и затем примените теорему единственности, чтобы показать, что

$$x_1(t+P) = x_1(t) \quad \text{и} \quad y_1(t) = y_1(t+P)$$

для *всех* t. Таким образом, решение $(x_1(t), y_1(t))$ является периодическим с периодом P и имеет замкнутую траекторию. Следовательно, решение автономной системы либо является периодическим с замкнутой траекторией, либо его траектория никогда не проходит через ту же самую точку дважды (т. е. точки самопересечения отсутствуют).

6.1. Приложение. Фазовые портреты и уравнения первого порядка

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G(x,y)}{F(x,y)}, \tag{1}$$

найти решение которого в явном виде может быть трудно (или невозможно). Тем не менее интегральные кривые данного дифференциального уравнения можно вычертить как траектории соответствующей автономной двумерной системы

$$\frac{dx}{dt} = F(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = G(x,y). \tag{2}$$

Большая часть графопостроителей, в которых предусмотрено построение решений обыкновенных дифференциальных уравнений, обычно может вычерчивать фазовые портреты автономных систем. Многие из таких портретов, приведенных в этой главе, были вычерчены с помощью программы `pplane` для пакета MATLAB. Эту программу составил

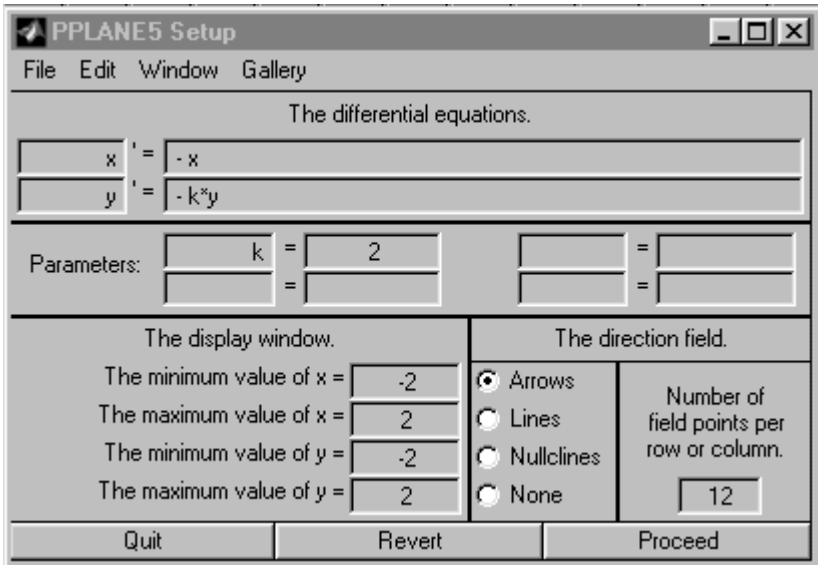


Рис. 6.1.19. Меню программы `pplane` пакета MATLAB для вычечивания поля направлений и фазового портрета системы $x' = -x$, $y' = -2y$ (они приведены на рис. 6.1.5)

Джон Полкинг (John Polking), причем она бесплатна для образовательного использования (`math.rice.edu/~dfield`). Другой свободно доступной и дружественной для пользователей системы MATLAB на основе пакета для решения обыкновенных дифференциальных уравнений с подобными графическими возможностями является программа `Iode` (`www.math.uiuc.edu/iode`).

Например, чтобы вычертить интегральные кривые дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy - y^2}{x^2 - 2xy}, \tag{3}$$

мы чертим траектории системы

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - 2xy, \quad \frac{dy}{dt} = 2xy - y^2. \tag{4}$$

Результат показан на рис. 6.1.20.

Начертите подобным образом некоторые интегральные кривые для следующих дифференциальных уравнений:

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x - 5y}{2x + 3y}$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x - 5y}{2x - 3y}$

3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x - 3y}{2x - 5y}$

4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$

5. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + 2xy}{y^2 + 2xy}$

Теперь создайте некоторые собственные примеры. Однородные функции, подобные приведенным в задачах 1–5 (т. е. рациональные функции с числителем и знаменателем той же самой степени относительно x и y), вполне подходят для данной цели. Дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{25x + y(1 - x^2 - y^2)(4 - x^2 - y^2)}{-25y + x(1 - x^2 - y^2)(4 - x^2 - y^2)} \tag{5}$$

имеет обсуждаемый вид и обобщает пример 6 из данного раздела, но найти его решение в явном виде было бы весьма затруднительно. На его фазовом портрете (рис. 6.1.21) показаны две периодические замкнутые траектории — окружности $r = 1$ и $r = 2$. Кто-нибудь хочет найти третью окружность?

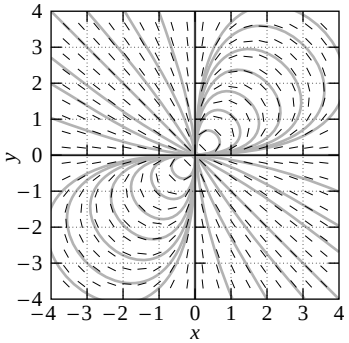


Рис. 6.1.20. Фазовый портрет системы уравнений (4)

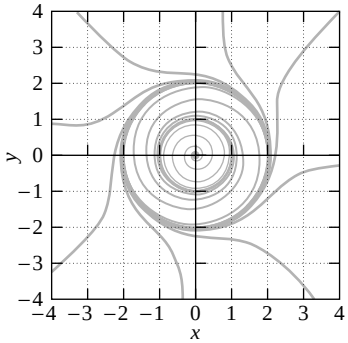


Рис. 6.1.21. Фазовый портрет системы, соответствующей уравнению (5)

6.2. Линейные и почти линейные системы

Мы теперь обсудим поведение решений автономной системы

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = g(x, y) \tag{1}$$

в окрестности изолированной точки равновесия (x_0, y_0), в которой $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$. Критическую точку называют **изолированной**, если в некоторой ее окрестности нет другой точки равновесия. Мы считаем, что функции f и g непрерывно дифференцируемы в окрестности точки (x_0, y_0).

Мы можем принять без потери общности, что $x_0 = y_0 = 0$. В противном случае мы делаем подстановки $u = x - x_0$, $v = y - y_0$. Тогда $dx/dt = du/dt$ и $dy/dt = dv/dt$, так что система (1) эквивалентна системе

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= f(u + x_0, v + y_0) = f_1(u, v), \\ \frac{dv}{dt} &= g(u + x_0, v + y_0) = g_1(u, v), \end{aligned} \tag{2}$$

для которой начало координат $(0, 0)$ является изолированной точкой равновесия.

Пример 1 Одной из точек равновесия системы

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3x - x^2 - xy = x(3 - x - y), \\ \frac{dy}{dt} &= y + y^2 - 3xy = y(1 - 3x + y) \end{aligned} \tag{3}$$

является $(1, 2)$. Мы подставляем $u = x - 1$, $v = y - 2$; т. е. $x = u + 1$, $y = v + 2$. Тогда

$$3 - x - y = 3 - (u + 1) - (v + 2) = -u - v$$

и

$$1 - 3x + y = 1 - 3(u + 1) + (v + 2) = -3u + v,$$

так что система (3) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= (u + 1)(-u - v) = -u - v - u^2 - uv, \\ \frac{dv}{dt} &= (v + 2)(-3u + v) = -6u + 2v + v^2 - 3uv \end{aligned} \tag{4}$$

и имеет $(0, 0)$ в качестве точки равновесия. Если мы можем определить траектории системы (4) в окрестности начала координат $(0, 0)$, то тот их сдвиг (движение плоскости), который начало координат $(0, 0)$ переводит в точку $(1, 2)$, как раз и переведет траектории из начала координат в окрестность точки $(1, 2)$ и потому с его помощью мы получим траектории исходной системы (3). Этот метод получения траекторий показан на рис. 6.2.1 (на котором показаны вычерченные компьютером траектории системы (3) в окрестности точки равновесия $(1, 2)$ на плоскости xy и рис. 6.2.2 (на котором показаны вычерченные компьютером траектории системы (4) в окрестности точки равновесия $(0, 0)$ в плоскости uv). ■

Рис. 6.2.1 и 6.2.2 иллюстрируют тот факт, что интегральные кривые системы (1) (с неизвестными функциями x и y) являются просто образами при сдвиге $(u, v) \to (u + x_0, v + y_0)$ интегральных кривых системы (2) (с неизвестными функциями u и v). В окрестностях двух соответствующих точек равновесия — (x_0, y_0) в плоскости xy и $(0, 0)$ в плоскости uv — оба фазовых портрета выглядят в точности одинаково.

Линеаризация в окрестности точки равновесия

Из формулы Тейлора для функций двух переменных следует, что если функция $f(x, y)$ непрерывно дифференцируема в окрестности неподвижной точки (x_0, y_0), то

$$f(x_0 + u, y_0 + v) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)u + f_y(x_0, y_0)v + r(u, v),$$

где остаточный член $r(u, v)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{r(u, v)}{\sqrt{u^2 + v^2}} = 0.$$

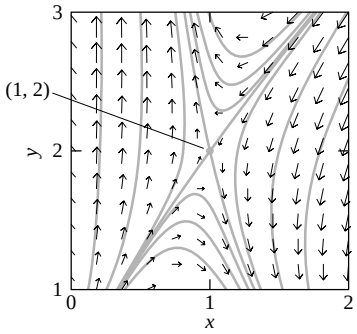


Рис. 6.2.1. Седловая точка $(1, 2)$ системы $x' = 3x - x^2 - xy$, $y' = y + y^2 - 3xy$ из примера 1

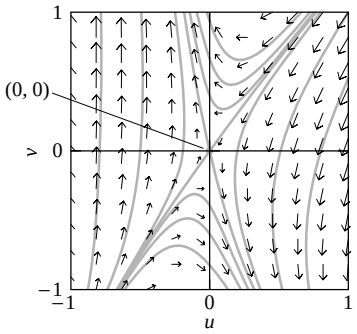


Рис. 6.2.2. Седловая точка $(0, 0)$ эквивалентной системы $u' = -u - v - u^2 - uv$, $v' = -6u + 2v + v^2 - 3uv$

(Обратите внимание, что это условие не было бы удовлетворено, если бы $r(u, v)$ было суммой, содержащей константы или слагаемые, линейные по u или v. В этом смысле, $r(u, v)$ состоит из "нелинейной части" функции $f(x_0 + u, y_0 + v)$, рассматриваемой как функция u и v.)

Если мы применим формулу Тейлора к f и g в равенствах (2) и предположим, что (x_0, y_0) — изолированная точка равновесия, так что $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$, то в результате получим

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= f_x(x_0, y_0)u + f_y(x_0, y_0)v + r(u, v), \\ \frac{dv}{dt} &= g_x(x_0, y_0)u + g_y(x_0, y_0)v + s(u, v), \end{aligned} \tag{5}$$

где $r(u, v)$ и аналогичный остаточный член $s(u, v)$ для g удовлетворяют условию

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{r(u, v)}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{s(u, v)}{\sqrt{u^2 + v^2}} = 0. \tag{6}$$

Тогда при достаточно малых значениях u и v остаточные члены $r(u, v)$ и $s(u, v)$ являются тоже *очень* маленькими (маленькими даже по сравнению с u и v).

Следовательно, когда точка (u, v) попадает в достаточно малую окрестность начала координат $(0, 0)$, то (вообще говоря нелинейная) система $u' = f(x_0 + u, y_0 + v)$, $v' = g(x_0 + u, y_0 + v)$ (5) достаточно хорошо приближается **линеаризованной системой**

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= f_x(x_0, y_0)u + f_y(x_0, y_0)v, \\ \frac{dv}{dt} &= g_x(x_0, y_0)u + g_y(x_0, y_0)v, \end{aligned} \tag{7}$$

➤

причем ее постоянные коэффициенты — значения $f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$ и $g_x(x_0, y_0)$, $g_y(x_0, y_0)$ частных производных функций f и g в критической точке (x_0, y_0). В предположении, что $(0, 0)$ является также изолированной точкой равновесия этой линейной системы и что остаточный член (5) удовлетворяют условию (6), первоначальная система $x' = f(x, y)$,

$y' = g(x, y)$ называется **почти линейной**[6] в изолированной критической точке (x_0, y_0). В этом случае ее **линеаризация** в (x_0, y_0) — линейная система (7). Короче говоря, эта линеаризация представляет собой линейную систему $\mathbf{u}' = \mathbf{J}\mathbf{u}$ (где $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix}^T$), чья матрица коэффициентов — так называемая матрица функционального определителя (**матрица Якоби**)

$$\mathbf{J}(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{bmatrix} \tag{8}$$

функций f и g, вычисленная в точке (x_0, y_0).

Пример 1 *Продолжение*

В (3) мы имеем $f(x, y) = 3x - x^2 - xy$ и $g(x, y) = y + y^2 - 3xy$. Тогда

$$\mathbf{J}(x, y) = \begin{bmatrix} 3 - 2x - y & -x \\ -3y & 1 + 2y - 3x \end{bmatrix},$$

так что

$$\mathbf{J}(1, 2) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, линеаризация системы $x' = 3x - x^2 - xy$, $y' = y + y^2 - 3xy$ в ее критической точке $(1, 2)$ представляет собой линейную систему

$$u' = -u - v,$$
$$v' = -6u + 2v,$$

которую мы получим, опустив нелинейные (квадратичные) члены в (4). ■

Оказывается, что в большинстве случаев (хотя и не во всех) фазовый портрет почти линейной системы в окрестности изолированной точки равновесия (x_0, y_0) в качественном отношении сильно напоминает фазовый портрет его линеаризации в окрестности начала координат. Следовательно, первый шаг к пониманию общих автономных систем должен состоять в том, чтобы установить характер точек равновесия линейных систем.

Точки равновесия линейных систем

Чтобы исследовать критическую точку $(0, 0)$ линейной системы

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{9}$$

с постоянной матрицей коэффициентов $\mathbf{A}$, мы можем использовать метод собственных векторов и собственных значений из раздела 5.2. Вспомните, что собственные значения λ_1 и λ_2 матрицы $\mathbf{A}$ являются решениями характеристического уравнения

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0.$$

[6] А также *квазилинейной* и *близкой к линейной*. — *Примеч. ред.*

Мы предполагаем, что $(0,0)$ — *изолированная* точка равновесия системы (9), а из этого следует, что детерминант матрицы коэффициентов $ad-bc$ системы $ax+by=0, cx+dy=0$ *отличен от нуля.* Отсюда следует, что $\lambda = 0$ *не является* решением (9), и, следовательно, что оба собственных значения матрицы **A** отличны от нуля.

Поэтому характер (природа) изолированной точки равновесия $(0,0)$ зависит от того, являются ли два отличных от нуля собственных значения λ_1 и λ_2 матрицы **A**

- вещественными и неравными с тем же самым знаком;
- вещественными и неравными с противоположными знаками;
- вещественными и равными;
- комплексно сопряженными с отличной от нуля вещественной частью; или
- чисто мнимыми числами.

Эти пять случаев обсуждаются отдельно. В каждом случае точка равновесия $(0,0)$ напоминает одну из тех, что мы встретили в примерах раздела 6.1 — узел (обыкновенный или вырожденный), седловую точку, фокус или центр.

Неравные вещественные собственные значения с тем же самым знаком. В этом случае матрица **A** имеет линейно независимые собственные векторы $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ и общее решение $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) & y(t) \end{bmatrix}^T$ системы (9) принимает вид

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{10}$$

Это решение проще всего описать в косоугольной системе координат u и v, изображенной на рис. 6.2.3, в которой оси u и v направлены вдоль собственных векторов $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$. Тогда координатные (в координатах u и v) функции $u(t)$ и $v(t)$ двигающейся точки $\mathbf{x}(t)$ — просто ее расстояния от начала координат, измеренные вдоль направлений, параллельных векторам $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$, поэтому из уравнения (10) следует, что траектория системы задается уравнениями

$$u(t) = u_0 e^{\lambda_1 t}, \quad v(t) = v_0 e^{\lambda_2 t}, \tag{11}$$

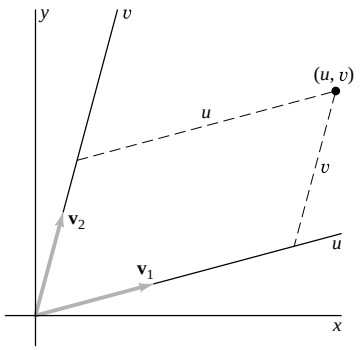


Рис. 6.2.3. Косоугольная система координат u и v, определенная собственными векторами $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$

где $u_0 = u(0)$ и $v_0 = v(0)$. Если $v_0 = 0$, то эта траектория находится на оси u, а если $u_0 = 0$, то она лежит на оси v. В противном случае, т. е. если оба значения u_0 и v_0 отличны от нуля, параметрическая кривая (11) может быть задана в явной форме $v = Cu^k$, где $k = \lambda_2/\lambda_1 > 0$. Эти интегральные кривые в начале координат $(0, 0)$ касаются оси u, если $k > 1$, и оси v, если $0 < k < 1$. Таким образом, мы имеем в этом случае **вырожденный узел** — как в примере 3 из раздела 6.1. Если λ_1 и λ_2 положительны, то из (10) и (11) следует, что эти интегральные кривые убегают от начала координат при увеличении t, так что $(0, 0)$ — **узел-источник**. Но если оба значения λ_1 и λ_2 отрицательны, то эти интегральные кривые приближаются к началу координат при увеличении t, так что $(0, 0)$ — **узел-сток**.

Пример 2 **(a)** Матрица

$$\mathbf{A} = \tfrac{1}{8}\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -3 & 17 \end{bmatrix}$$

имеет собственные значения $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 2$ с соответствующими собственными векторами $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}^T$ и $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}^T$. На рис. 6.2.4 показаны поле направлений и типичные траектории соответствующей линейной системы $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Обратите внимание, что эти два собственных вектора указывают в направлениях прямолинейных траекторий. Как и характерно для вырожденного узла, все другие траектории касательны к одной из наклонных осей в начале координат. В этом примере оба неравных вещественных собственных значения положительны, так что точка равновесия $(0, 0)$ — вырожденный узел-источник.

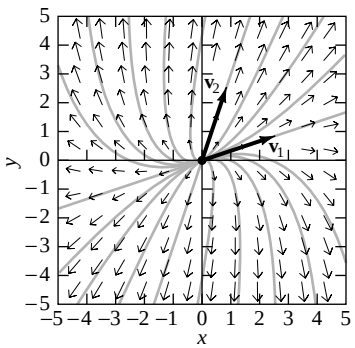


Рис. 6.2.4. Вырожденный узел-источник из примера 2

(b) Матрица

$$\mathbf{B} = -\mathbf{A} = \tfrac{1}{8}\begin{bmatrix} -7 & -3 \\ 3 & -17 \end{bmatrix}$$

имеет собственные значения $\lambda_1 = -1$ и $\lambda_2 = -2$ с теми же самыми соответствующими собственными векторами $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}^T$ и $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}^T$. Новая линейная система $\mathbf{x}' = \mathbf{B}\mathbf{x}$ имеет то же самое поле направлений и траектории, что и на рис. 6.2.4, но все стрелки поля направлений теперь имеют противоположные направления, так что $(0, 0)$ — теперь вырожденный узел-сток. ■

Неравные вещественные собственные значения с противоположными знаками. Здесь ситуация та же самая, что и в предыдущем случае, за исключением того, что $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ в (11). Траектории при $u_0 = 0$ или $v_0 = 0$ лежат на осях u и v, проходящих через критическую точку $(0, 0)$. Если оба значения u_0 и v_0 отличны от нуля, то кривые могут быть заданы в явной форме $v = Cu^k$, где $k = \lambda_2/\lambda_1 < 0$. Как и в случае $k < 0$ из примера 3 в разделе 6.1, нелинейные траектории напоминают гиперболы, причем точка равновесия $(0, 0)$ — неустойчивая **седловая точка.**

Пример 3 Матрица

$$\mathbf{A} = \tfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

имеет собственные значения $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = -1$ с соответствующими собственными векторами $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}^T$ и $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}^T$. На рис. 6.2.5 показаны поле направлений и типичные траектории соответствующей линейной системы $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Обратите внимание, что эти два собственных вектора снова указывают в направлениях прямолинейных траекторий. Здесь $k = -1$ и нелинейные траектории — гиперболы в наклонной системе координат uv, так что мы имеем седловую точку, как и показано на рисунке. Обратите внимание, что эти два собственных вектора имеют асимптотические направления для этих гипербол. ■

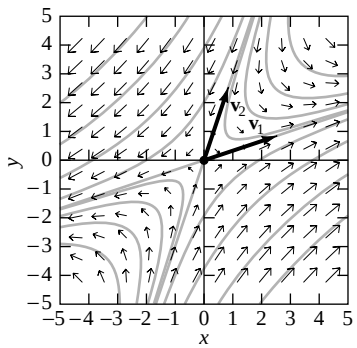


Рис. 6.2.5. Седловая точка в примере 3

Равные вещественные корни. В этом случае, при $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$, тип точки равновесия $(0, 0)$ зависит от того, имеет ли матрица коэффициентов **A** два линейно независимых собственных вектора $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$. Если это так, то мы имеем косоугольную систему координат u и v (как на рис. 6.2.3), и траектории определяются уравнениями

$$u(t) = u_0 e^{\lambda t}, \quad v(t) = v_0 e^{\lambda t}, \tag{12}$$

которые по виду напоминают уравнения (11). Но теперь $k = \lambda_2/\lambda_1 = 1$, так что все траектории при $u_0 \neq 0$ имеют форму $v = Cu$ и, следовательно, лежат на прямых линиях, проходящих через начало координат. Поэтому $(0, 0)$ — **дикритический узел** (или **звезда**), как показано на рис. 6.1.4, причем он является источником, если $\lambda > 0$, и стоком, если $\lambda < 0$.

Если кратное собственное значение $\lambda \neq 0$ имеет только единственный соответствующий собственный вектор $\mathbf{v}_1$, то (как мы видели в разделе 5.4), тем не менее, существует обобщенный собственный вектор $\mathbf{v}_2$, такой что $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$, и линейная система $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ имеет два линейно независимых решения

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{v}_1 e^{\lambda t} \quad \text{и} \quad \mathbf{x}_2(t) = (\mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2)e^{\lambda t}. \tag{13}$$

Мы можем все еще использовать эти два вектора $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$, чтобы ввести косоугольные координаты u и v, как показано на рис. 6.2.3. Тогда из (13) следует, что координатные функции $u(t)$ и $v(t)$ двигающейся точки $\mathbf{x}(t)$ на траектории даются формулами

$$u(t) = (u_0 + v_0 t)e^{\lambda t}, \quad v(t) = v_0 e^{\lambda t}, \tag{14}$$

где $u_0 = u(0)$ и $v_0 = v(0)$. Если $v_0 = 0$, то эта траектория лежит на оси u. В противном случае мы имеем непрямолинейную траекторию с

$$\frac{dv}{du} = \frac{dv/dt}{du/dt} = \frac{\lambda v_0 e^{\lambda t}}{v_0 e^{\lambda t} + \lambda(u_0 + v_0 t)e^{\lambda t}} = \frac{\lambda v_0}{v_0 + \lambda(u_0 + v_0 t)}.$$

Мы видим, что $dv/du \to 0$ при $t \to \pm\infty$, поэтому отсюда следует, что каждая траектория касается оси u. Следовательно, $(0, 0)$ — **вырожденный узел.** Если $\lambda < 0$, тогда из (14) следует, что этот узел — сток, но это источник, если $\lambda > 0$.

Пример 4 Матрица

$$\mathbf{A} = \tfrac{1}{8}\begin{bmatrix} -11 & 9 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$$

имеет кратное собственное значение $\lambda = -1$, которому соответствует единственный собственный вектор $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}^T$. Оказывается, что $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}^T$ — обобщенный собственный вектор, основанный на $\mathbf{v}_1$, но единственный настоящий собственный вектор обнаруживается на фазовом портрете линейной системы $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Как показано на рис. 6.2.6, собственный вектор $\mathbf{v}_1$ определяет ось u, проходящую через вырожденный узел-сток $(0, 0)$; эта ось является касательной к каждой из непрямолинейных траекторий. ■

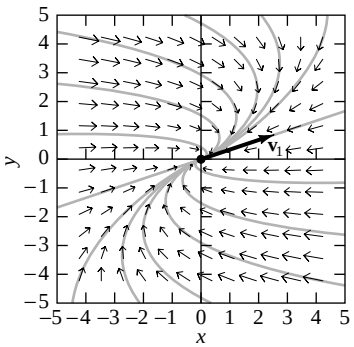


Рис. 6.2.6. Вырожденный узел-сток из примера 4

Комплексно сопряженные собственные значения. Предположим, что матрица $\mathbf{A}$ имеет собственные значения $\lambda = p + qi$ и $\overline{\lambda} = p - qi$ (причем оба числа p и q отличны от нуля), которым соответствуют комплексно сопряженные собственные векторы $\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{b}i$ и $\overline{\mathbf{v}} = \mathbf{a} - \mathbf{b}i$. Тогда в разделе 5.2 мы видели (см. там равенство (22)), что линейная система $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ имеет два независимых действительных решения

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{pt}(\mathbf{a}\cos qt - \mathbf{b}\sin qt) \quad \text{и} \quad \mathbf{x}_2(t) = e^{pt}(\mathbf{b}\cos qt + \mathbf{a}\sin qt). \tag{15}$$

Таким образом, компоненты $x(t)$ и $y(t)$ любого решения $\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t)$ колеблются между положительными и отрицательными значениями при увеличении t, так что точка равновесия $(0, 0)$ — **фокус**, как было в примере 5 из раздела 6.1. Если вещественная часть p собственных значений отрицательна, то из (15) ясно, что $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0}$ при $t \to +\infty$, так что начало координат — спиральный сток (устойчивый фокус). Но если p положительно, то точка равновесия — спиральный источник (неустойчивый фокус).

Пример 5 Матрица

$$\mathbf{A} = \tfrac{1}{4}\begin{bmatrix} -10 & 15 \\ -15 & 8 \end{bmatrix}$$

имеет комплексно сопряженные собственные значения $\lambda = -\frac{1}{4} \pm 3i$ с отрицательной вещественной частью, так что $(0, 0)$ — спиральный сток (устойчивый фокус). На рис. 6.2.7 показаны поле направлений и типичная спиральная траектория, приближающаяся к началу координат при $t \to +\infty$. ■

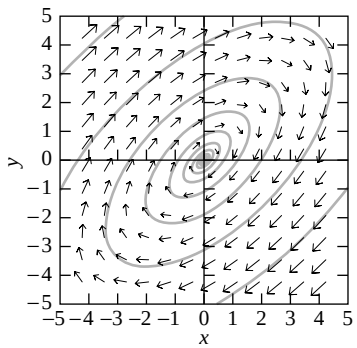


Рис. 6.2.7. Спиральный сток (устойчивый фокус) из примера 5

Чисто мнимые собственные значения. Если матрица $\mathbf{A}$ имеет сопряженные мнимые собственные значения $\lambda = qi$ и $\overline{\lambda} = -qi$ с соответствующими комплексно сопряженными собственными векторами $\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{b}i$ и $\overline{\mathbf{v}} = \mathbf{a} - \mathbf{b}i$, то (15) при $p = 0$ дает независимые решения

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{a}\cos qt - \mathbf{b}\sin qt \quad \text{и} \quad \mathbf{x}_2(t) = \mathbf{b}\cos qt + \mathbf{a}\sin qt \tag{16}$$

линейной системы $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Так же как в примере 4 из раздела 6.1, из этого следует, что любое решение $\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t)$ дает эллипс с центром в начале координат в плоскости xy. Следовательно, начало координат $(0, 0)$ — **устойчивый центр** в этом случае.

Пример 6 Матрица

$$\mathbf{A} = \tfrac{1}{4}\begin{bmatrix} -9 & 15 \\ -15 & 9 \end{bmatrix}$$

имеет чисто мнимые сопряженные собственные значения $\lambda = \pm 3i$, и поэтому $(0, 0)$ — устойчивый центр. На рис. 6.2.8 показаны поле направлений и типичные эллиптические траектории, внутри которых находится критическая точка. ■

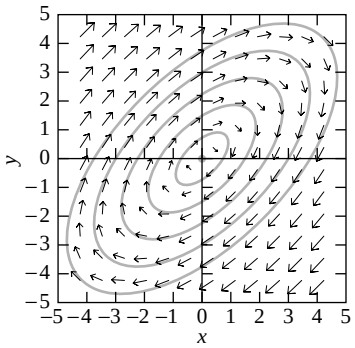


Рис. 6.2.8. Устойчивый центр из примера 6

Для двумерной линейной системы $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ с $\det \mathbf{A} \neq 0$ в таблице на рис. 6.2.9 указан тип точки равновесия в начале координат $(0, 0)$, найденный в этих пяти рассмотренных здесь случаях в зависимости от характера (природы) собственных значений λ_1 и λ_2 матрицы коэффициентов $\mathbf{A}$. Наше обсуждение различных случаев показывает, что устойчивость точки равновесия $(0, 0)$ определяется *знаками* вещественных частей этих собственных значений, как утверждается в заключении теоремы 1. Обратите внимание, что если λ_1 и λ_2 вещественны, то они сами являются их вещественными частями.

Собственные значения матрицы A	Тип точки равновесия
Вещественные, неравные, того же самого знака	Вырожденный узел
Вещественные, неравные, противоположных знаков	Седловая точка
Вещественные равные	Дикритический или вырожденный узел
Комплексно сопряженные	Фокус
Чисто мнимые числа	Центр

Рис. 6.2.9. Классификация точки равновесия $(0, 0)$ двумерной системы $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Теорема 1 Устойчивость линейных систем

Пусть λ_1 и λ_2 — собственные значения матрицы коэффициентов **A** двумерной линейной системы

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by, \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy, \end{aligned} \tag{17}$$

причем $ad - bc \neq 0$. Тогда точка равновесия $(0, 0)$

1) асимптотически устойчива, если обе вещественные части корней λ_1 и λ_2 отрицательны;

2) устойчива, но не асимптотически устойчива, если обе вещественные части λ_1 и λ_2 нулевые (так что $\lambda_1, \lambda_2 = \pm qi$);

3) неустойчивая, если λ_1 или λ_2 имеет положительную вещественную часть. ▲

Особого внимания заслуживает исследование эффекта маленьких возмущений в коэффициентах a, b, c и d линейной системы (17), которые приводят к маленьким возмущениям в собственных значениях λ_1 и λ_2. Если эти возмущения действительно являются достаточно маленькими, то положительные вещественные части (собственных значений λ_1 и λ_2) остаются положительными и отрицательные вещественные части остаются отрицательными. Следовательно, асимптотически устойчивая точка равновесия остается асимптотически устойчивой, а неустойчивая точка равновесия остается неустойчивой. Поэтому единственный случай, в котором произвольно маленькие возмущения могут затронуть устойчивость точки равновесия $(0, 0)$, рассматривается в части 2 теоремы 1. В этом случае чисто мнимые корни $\lambda_1, \lambda_2 = \pm qi$ характеристического уравнения могут измениться; корни могут принять близлежащие комплексные значения $\mu_1, \mu_2 = r \pm si$, причем r может стать положительным или отрицательным (рис. 6.2.10). Следовательно, маленькое возмущение коэффициентов линейной системы (7) может привести к смене устойчивого центра фокусом, который является либо неустойчивым, либо асимптотически устойчивым.

Есть еще один исключительный случай, в котором за счет маленького возмущения коэффициентов может измениться тип (но не устойчивость) точки равновесия $(0, 0)$ в результате возмущения коэффициентов. Дело обстоит так при $\lambda_1 = \lambda_2$, т. е. когда уравнение имеет равные корни $\lambda_1 = \lambda_2$, которые (при маленьком возмущении коэффициентов) могут распасться на два корня μ_1 и μ_2, которые будут либо комплексно сопряженными, либо неравными вещественными корнями (рис. 6.2.11). В любом случае знак вещественных частей корней сохраняется, так что устойчивость (или неустойчивость) точки равновесия сохранится. Однако ее характер (природа) может измениться, в таблице на рис. 6.2.9 показано, что узел при $\lambda_1 = \lambda_2$ может либо остаться узлом (если μ_1 и μ_2 вещественны) или будет заменен фокусом (если μ_1 и μ_2 комплексно сопряжены).

Предположим, что линейная система (17) моделирует физическое явление. Маловероятно, что коэффициенты в (17) могут быть измерены абсолютно точно, так что предположим,

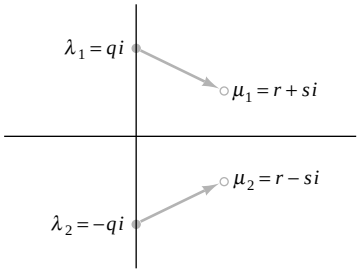


Рис. 6.2.10. Эффекты возмущения чисто мнимых корней

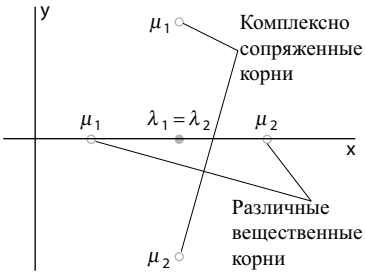


Рис. 6.2.11. Эффекты возмущения вещественных равных корней

что уточненная линейная модель имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a^\star x + b^\star y, \\ \frac{dy}{dt} &= c^\star x + d^\star y. \end{aligned} \tag{17*}$$

Если коэффициенты в (17) достаточно близки к коэффициентам в $(17^\star)$, то из обсуждения в предыдущем абзаце следует, что начало координат $(0, 0)$ — асимптотически устойчивая точка равновесия для системы (17), если она является асимптотически устойчивой точкой равновесия для системы $(17^\star)$, и неустойчивая точка равновесия для системы (17), если она является неустойчивой точкой равновесия для системы $(17^\star)$. Таким образом, в этом случае приблизительная модель (17) и точная модель $(17^\star)$ предсказывают то же самое качественное поведение (имея в виду асимптотическую устойчивость или неустойчивость).

Почти линейные системы

Мы теперь возвращаемся к рассмотрению почти линейной системы

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by + r(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy + s(x, y), \end{aligned} \tag{18}$$

для которой начало координат $(0, 0)$ является изолированной точкой равновесия при $ad - bc \neq 0$. Теорема 2, которую мы оставляем без доказательства, по сути, утверждает, что по отношению к типу устойчивости точки равновесия $(0, 0)$ влияние маленьких нелинейных слагаемых $r(x, y)$ и $s(x, y)$ эквивалентно влиянию маленького возмущения в коэффициентах соответствующей *линейной* системы (17).

Теорема 2 Устойчивость почти линейных систем

Пусть λ_1 и λ_2 — собственные значения матрицы коэффициентов линейной системы (17), соответствующей почти линейной системе (18). Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если $\lambda_1 = \lambda_2$ — равные вещественные собственные значения, то точка равновесия $(0, 0)$ системы (18) является узлом либо фокусом, причем она асимптотически устойчива, если $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, и неустойчива, если $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$.
2. Если λ_1 и λ_2 — чисто мнимые числа, то начало координат $(0, 0)$ является либо центром, либо фокусом, причем оно может быть асимптотически устойчивым, устойчивым или неустойчивым.
3. Во всех остальных случаях, т. е. исключая случаи, когда λ_1 и λ_2 являются либо вещественными равными, либо чисто мнимыми числами, точка равновесия $(0, 0)$ почти линейной системы (18) имеет тот же самый тип и устойчивость, что и точка равновесия $(0, 0)$ соответствующей линейной системы (17). ▲

Таким образом, если $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и $\mathrm{Re}(\lambda_1) \neq 0$, то тип и устойчивость точки равновесия почти линейной системы (18) могут быть определены путем анализа соответствующей ей линейной системы (17) и только в случае чисто мнимых собственных значений устойчивость начала координат $(0, 0)$ нельзя определить путем анализа соответствующей ей линейной системы. Кроме "чувствительных" случаев (т. е. случаев, когда все зависит от конкретных условий или изменения условий) $\lambda_1 = \lambda_2$ и $\mathrm{Re}(\lambda_i) = 0$, траектории в окрестности начала координат $(0, 0)$ напоминают качественно таковые для соответствующей линейной системы — они входят в критическую точку (или обходят ее) тем же самым способом, но могут быть "деформированы" нелинейным преобразованием. Таблица на рис. 6.2.12 суммирует сказанное.

Собственные значения λ_1, λ_2 для линеаризованной системы	**Тип точки равновесия почти линейной системы**
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Устойчивый несобственный узел
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Устойчивый узел или фокус
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	Неустойчивая седловая точка
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Неустойчивый узел или фокус
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Неустойчивый несобственный узел
$\lambda_1, \lambda_2 = a \pm bi \quad (a < 0)$	Устойчивый фокус
$\lambda_1, \lambda_2 = a \pm bi \quad (a > 0)$	Неустойчивый фокус
$\lambda_1, \lambda_2 = \pm bi$	Устойчивый или неустойчивый центр или фокус

Рис. 6.2.12. Классификация точек равновесия почти линейной системы

Важное следствие классификации случаев в теореме 2 состоит в том, что *точка равновесия почти линейной системы является асимптотически устойчивой, если она асимптотически устойчивая точка равновесия линеаризации системы.* Кроме того, точка равновесия почти линейной системы неустойчива, если она является неустойчивой точкой равновесия линеаризованной системы. Если для моделирования физического явления используется почти линейная система, то — кроме чувствительных случаев, упомянутых раньше, — из этого следует, что качественное поведение системы в окрестности точки равновесия может быть определено в результате исследования линеаризации данной системы.

Пример 7 Определим тип и устойчивость точки равновесия $(0, 0)$ почти линейной системы

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 4x + 2y + 2x^2 - 3y^2, \\ \frac{dy}{dt} &= 4x - 3y + 7xy. \end{aligned} \tag{19}$$

Решение Характеристическое уравнение для соответствующей линейной системы (ее получить очень просто — нужно только удалить квадратичные слагаемые в (19)) имеет вид

$$(4 - \lambda)(-3 - \lambda) - 8 = (\lambda - 5)(\lambda + 4) = 0,$$

так что собственные значения $\lambda_1 = 5$ и $\lambda_2 = -4$ вещественны, неравны и имеют противоположные знаки. Из предыдущего обсуждения этого случая мы знаем, что $(0, 0)$ — неустойчивая седловая точка линейной системы и, следовательно, по части 3 теоремы 2, это также неустойчивая седловая точка почти линейной системы (19). Траектории линейной системы в окрестности начала координат $(0, 0)$ показаны на рис. 6.2.13, а таковые нелинейной системы (19) показаны на рис. 6.2.14. На рис. 6.2.15 показан фазовый портрет нелинейной системы (19) с "птичьего полета". Кроме седловой точки в начале координат $(0, 0)$, есть еще фокусы в окрестности точек $(0{,}279, 1{,}065)$ и $(0{,}933, -1{,}057)$, а также узел рядом с точкой $(-2{,}354, -0{,}483)$. ■

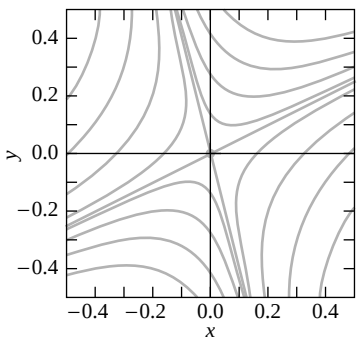


Рис. 6.2.13. Траектории линеаризованной системы из примера 7

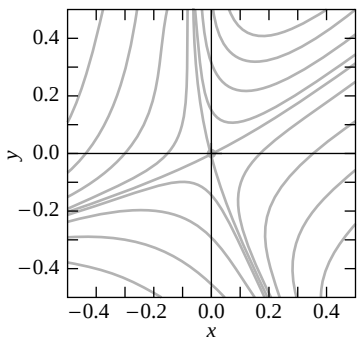


Рис. 6.2.14. Траектории исходной почти линейной системы из примера 7

Мы видели, что система $x' = f(x, y)$, $y' = g(x, y)$ с изолированной точкой равновесия (x_0, y_0) с помощью подстановки $x = u + x_0$, $y = v + y_0$ может быть преобразована к эквивалентной системе с неизвестными u и v (причем у новой системы соответствующая точка равновесия будет находиться в начале координат $(0, 0)$) и линеаризация будет иметь вид $\mathbf{u}' = \mathbf{J}\mathbf{u}$, причем ее матрица коэффициентов $\mathbf{J}$ преставляет собой матрицу Якоби (8) функций f и g в точке (x_0, y_0). Следовательно, совсем необязательно выполнять замену явно; вместо этого можно непосредственно вычислить собственные значения $\mathbf{J}$ перед применением теоремы 2.

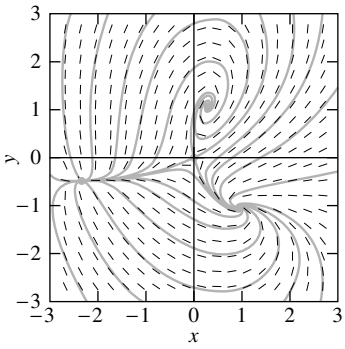


Рис. 6.2.15. Фазовый портрет почти линейной системы уравнений (19)

Пример 8 Определим тип и устойчивость точки равновесия $(4, 3)$ почти линейной системы

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 33 - 10x - 3y + x^2, \\ \frac{dy}{dt} &= -18 + 6x + 2y - xy. \end{aligned} \tag{20}$$

Решение При $f(x, y) = 33 - 10x - 3y + x^2$, $g(x, y) = -18 + 6x + 2y - xy$ и $x_0 = 4$, $y_0 = 3$ мы имеем

$$\mathbf{J}(x, y) = \begin{bmatrix} -10 + 2x & -3 \\ 6 - y & 2 - x \end{bmatrix}, \quad \text{так что} \quad \mathbf{J}(4, 3) = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Соответствующая линейная система

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -2u - 3v, \\ \frac{dv}{dt} &= 3u - 2v \end{aligned} \tag{21}$$

имеет характеристическое уравнение $(\lambda + 2)^2 + 9 = 0$, корни которого $\lambda = -2 \pm 3i$ являются комплексно сопряженными. Следовательно, начало координат $(0, 0)$ — асимптотически устойчивый фокус линейной системы (21), так что из теоремы 2 следует, что $(4, 3)$ — асимптотически устойчивый фокус исходной почти линейной системы (20). На рис. 6.2.16 показана типичная траектория линейной системы (21), причем на рис. 6.2.17 показано, как этот фокус вписывается в фазовый портрет исходной почти линейной системы (20). ■

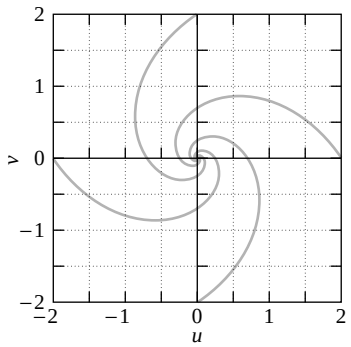


Рис. 6.2.16. Спиральные траектории линейной системы уравнений (21)

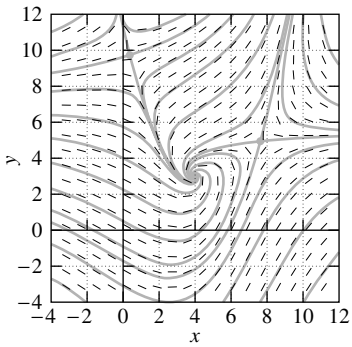


Рис. 6.2.17. Фазовый портрет почти линейной системы уравнений (20)

6.2. Задачи

В задачах 1–10 с помощью теоремы 1 определите тип точки равновесия $(0,0)$ *и, кроме того, определите, является ли она асимптотически устойчивой, устойчивой или неустойчивой. Проверьте ваше заключение, создав фазовый портрет для данной системы с помощью компьютерной системы или графического калькулятора.*

1. $\dfrac{dx}{dt} = -2x + y, \quad \dfrac{dy}{dt} = x - 2y$

2. $\dfrac{dx}{dt} = 4x - y, \quad \dfrac{dy}{dt} = 2x + y$

3. $\dfrac{dx}{dt} = x + 2y, \quad \dfrac{dy}{dt} = 2x + y$

4. $\dfrac{dx}{dt} = 3x + y, \quad \dfrac{dy}{dt} = 5x - y$

5. $\dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \quad \dfrac{dy}{dt} = 2x - 3y$

6. $\dfrac{dx}{dt} = 5x - 3y, \quad \dfrac{dy}{dt} = 3x - y$

7. $\dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y, \quad \dfrac{dy}{dt} = 4x - y$

8. $\dfrac{dx}{dt} = x - 3y, \quad \dfrac{dy}{dt} = 6x - 5y$

9. $\dfrac{dx}{dt} = 2x - 2y, \quad \dfrac{dy}{dt} = 4x - 2y$

10. $\dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \quad \dfrac{dy}{dt} = 5x - y$

В задачах 11–18 каждая из данных систем имеет единственную критическую точку (x_0, y_0)*. С помощью теоремы 2 классифицируйте эту критическую точку (определите ее тип и устойчивость). Проверьте ваше заключение, создав фазовый портрет для данной системы с помощью компьютерной системы или графического калькулятора.*

11. $\dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \quad \dfrac{dy}{dt} = 3x - 4y - 2$

12. $\dfrac{dx}{dt} = x - 2y - 8, \quad \dfrac{dy}{dt} = x + 4y + 10$

13. $\dfrac{dx}{dt} = 2x - y - 2, \quad \dfrac{dy}{dt} = 3x - 2y - 2$

14. $\dfrac{dx}{dt} = x + y - 7, \quad \dfrac{dy}{dt} = 3x - y - 5$

15. $\dfrac{dx}{dt} = x - y, \quad \dfrac{dy}{dt} = 5x - 3y - 2$

16. $\dfrac{dx}{dt} = x - 2y + 1, \quad \dfrac{dy}{dt} = x + 3y - 9$

17. $\dfrac{dx}{dt} = x - 5y - 5, \quad \dfrac{dy}{dt} = x - y - 3$

18. $\dfrac{dx}{dt} = 4x - 5y + 3, \quad \dfrac{dy}{dt} = 5x - 4y + 6$

В задачах 19–28 исследуйте тип точки равновесия $(0,0)$ *данной почти линейной системы. Проверьте ваше заключение, создав фазовый портрет для данной системы с помощью компьютерной*

системы или графического калькулятора. Также найдите (приблизительно) положения и очевидные типы любых других точек равновесия, которые будут видны на вашем рисунке. Не поленитесь исследовать эти дополнительные точки равновесия; для исследований можете использовать численные методы, обсуждаемые в приложении к этому разделу.

19. $\dfrac{dx}{dt} = x - 3y + 2xy,$
$\dfrac{dy}{dt} = 4x - 6y - xy$

20. $\dfrac{dx}{dt} = 6x - 5y + x^2,$
$\dfrac{dy}{dt} = 2x - y + y^2$

21. $\dfrac{dx}{dt} = x + 2y + x^2 + y^2,$
$\dfrac{dy}{dt} = 2x - 2y - 3xy$

22. $\dfrac{dx}{dt} = x + 4y - xy^2,$
$\dfrac{dy}{dt} = 2x - y + x^2y$

23. $\dfrac{dx}{dt} = 2x - 5y + x^3,$
$\dfrac{dy}{dt} = 4x - 6y + y^4$

24. $\dfrac{dx}{dt} = 5x - 3y + y(x^2 + y^2),$
$\dfrac{dy}{dt} = 5x + y(x^2 + y^2)$

25. $\dfrac{dx}{dt} = x - 2y + 3xy,$
$\dfrac{dy}{dt} = 2x - 3y - x^2 - y^2$

26. $\dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y - x^2 - y^2,$
$\dfrac{dy}{dt} = 2x - y - 3xy$

27. $\dfrac{dx}{dt} = x - y + x^4 - y^2,$
$\dfrac{dy}{dt} = 2x - y + y^4 - x^2$

28. $\dfrac{dx}{dt} = 3x - y + x^3 + y^3,$
$\dfrac{dy}{dt} = 13x - 3y + 3xy$

В задачах 29–32 найдите все точки равновесия данной системы и исследуйте тип и устойчивость каждой из них. Проверьте ваше заключение, создав фазовый портрет для данной системы с помощью компьютерной системы или графического калькулятора.

29. $\dfrac{dx}{dt} = x - y, \quad \dfrac{dy}{dt} = x^2 - y$

30. $\dfrac{dx}{dt} = y - 1, \quad \dfrac{dy}{dt} = x^2 - y$

31. $\dfrac{dx}{dt} = y^2 - 1, \quad \dfrac{dy}{dt} = x^3 - y$

32. $\dfrac{dx}{dt} = xy - 2, \quad \dfrac{dy}{dt} = x - 2y$

Бифуркации

Термин бифуркация *(раздвоение, разветвление, ветвление, двоение, разветвление надвое, развилка) вообще относится к чему-либо, что может расщепиться или расколоться на части. По отношению к дифференциальным уравнениям или системам, содержащим параметр, этот термин означает резкие изменения характера решений, когда сам параметр изменяется непрерывно. Задачи 33–36 иллюстрируют чувствительные случаи, в которых маленькие возмущения в коэффициентах линейной или почти линейной системы могут изменить тип или устойчивость (или и то, и другое) точки равновесия.*

33. Рассмотрим линейную систему

$$\frac{dx}{dt} = \epsilon x - y, \quad \frac{dy}{dt} = x + \epsilon y.$$

Покажите, что точка равновесия $(0, 0)$ является **(a)** устойчивым фокусом, если $\epsilon < 0$; **(b)** центром, если $\epsilon = 0$; **(c)** неустойчивым фокусом, если $\epsilon > 0$. Таким образом, маленькие возмущения системы $x' = -y$, $y' = x$ могут изменить и тип, и устойчивость точки равновесия. Рис. 6.2.18 (a)–(e) иллюстрируют потерю устойчивости, которая происходит при $\epsilon = 0$, когда параметр увеличивается от $\epsilon < 0$ до $\epsilon > 0$.

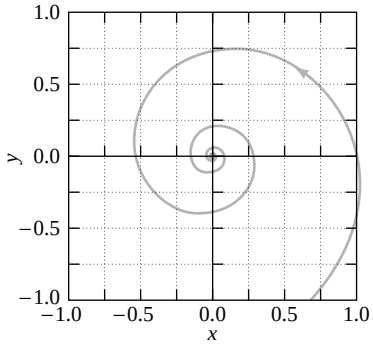


Рис. 6.2.18, a. Устойчивая спираль при $\epsilon = -0{,}2$

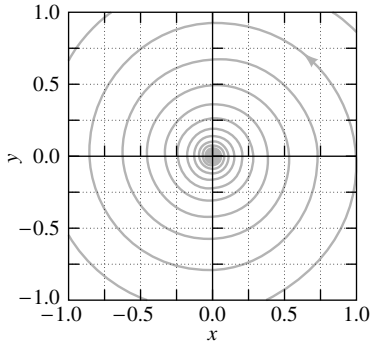


Рис. 6.2.18, b. Устойчивая спираль при $\epsilon = -0{,}05$

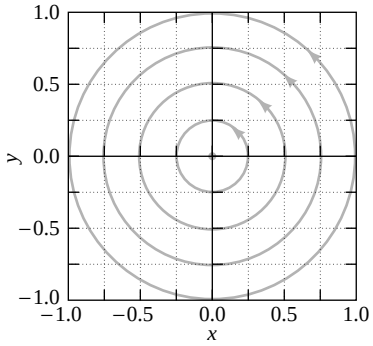


Рис. 6.2.18, c. Устойчивый центр при $\epsilon = 0$

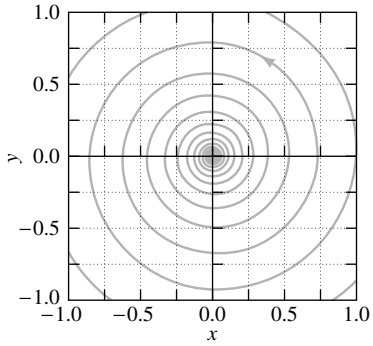


Рис. 6.2.18, d. Неустойчивая спираль при $\epsilon = 0{,}05$

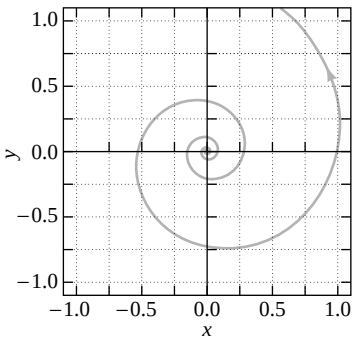


Рис. 6.2.18, e. Неустойчивая спираль при $\epsilon = 0{,}2$

34. Рассмотрим линейную систему

$$\frac{dx}{dt} = -x + \epsilon y, \quad \frac{dy}{dt} = x - y.$$

Покажите, что точка равновесия $(0,0)$ является **(a)** устойчивым фокусом, если $\epsilon < 0$; **(b)** устойчивым узлом, если $0 \leqq \epsilon < 1$. Таким образом, маленькие возмущения системы $x' = -x$, $y' = x - y$ могут изменить тип точки равновесия $(0,0)$, не изменяя ее устойчивость.

35. Эта задача имеет дело с почти линейной системой

$$\frac{dx}{dt} = y + hx(x^2 + y^2), \quad \frac{dy}{dt} = -x + hy(x^2 + y^2),$$

она иллюстрирует чувствительный случай теоремы 2, в котором теорема не гарантирует никакой информации об устойчивости точки равновесия $(0,0)$. **(a)** Покажите, что начало координат $(0,0)$ является центром линейной системы, которая получится, если положить $h = 0$. **(b)** Предположим, что $h \neq 0$. Пусть $r^2 = x^2 + y^2$, затем воспользуйтесь тем, что

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = r\frac{dr}{dt},$$

и покажите, что $dr/dt = hr^3$. **(c)** Предположим, что $h = -1$. Проинтегрируйте дифференциальное уравнение (b); затем покажите, что $r \to 0$ при $t \to +\infty$. Таким образом, $(0,0)$ — асимптотически устойчивая точка равновесия почти линейной системы в этом случае. **(d)** Предположим, что $h = +1$. Покажите, что $r \to +\infty$ при увеличении t, так что $(0,0)$ — неустойчивая точка равновесия в этом случае.

36. В этой задаче рассматривается знаменитая *бифуркация Хопфа* (эта бифуркация называется также бифуркацией рождения цикла. — *Примеч. ред.*) для почти линейной системы

$$\frac{dx}{dt} = \epsilon x + y - x(x^2 + y^2),$$
$$\frac{dy}{dt} = -x + \epsilon y - y(x^2 + y^2),$$

которая имеет мнимые корни характеристического уравнения $\lambda = \pm i$, если $\epsilon = 0$. **(a)** Как и в примере 6 из раздела 6.1, перейдите к полярным координатам и получите систему $r' = r(\epsilon - r^2)$, $\theta' = -1$. **(b)** Отделите переменные и проинтегрируйте. Этим вы покажете, что, если $\epsilon \leqq 0$, то $r(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, так что в этом случае начало координат — устойчивый фокус. **(c)** Подобным способом покажите, что, если $\epsilon > 0$, то $r(t) \to \sqrt{\epsilon}$ при $t \to +\infty$, так что в этом случае начало координат — неустойчивый фокус. Сама окружность $r(t) \equiv \sqrt{\epsilon}$ представляет собой замкнутое периодическое решение, или *предельный цикл*. Таким образом, предельный цикл увеличивающегося размера порождается при увеличении параметра ϵ, когда он проходит через критическое значение 0.

37. В случае двумерной системы, которая *не является* почти линейной, структура поведения траекторий в окрестности изолированной точки равновесия может быть значительно более сложной, чем структуры в окрестности узлов, центров, седловых точек и фокусов, обсужденных в этом разделе. Рассмотрите, например, систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(x^3 - 2y^3), \\ \frac{dy}{dt} &= y(2x^3 - y^3) \end{aligned} \tag{22}$$

и убедитесь, что $(0,0)$ — изолированная точка равновесия. Эта система не является почти линейной уже хотя бы потому, что начало координат $(0,0)$ не является *изолированной* точкой равновесия соответствующей тривиальной линейной системы $x' = 0$, $y' = 0$. Решите однородное уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(2x^3 - y^3)}{x(x^3 - 2y^3)}$$

и покажите, что траекториями системы (22) являются *листы Декарта*, уравнения которых имеют форму

$$x^3 + y^3 = 3cxy,$$

где c — произвольная постоянная (рис. 6.2.19).

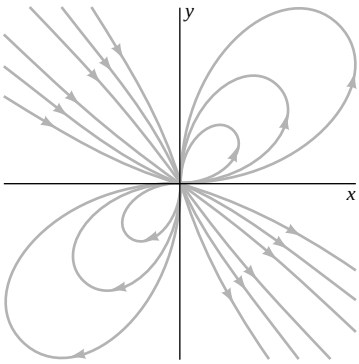


Рис. 6.2.19. Траектории системы уравнений (22)

5. Сначала обратите внимание, что характеристическое уравнение матрицы $\mathbf{A}$ размера 2×2 может быть записано в форме $\lambda^2 - T\lambda + D = 0$, где D обозначает детерминант матрицы $\mathbf{A}$, а T — след матрицы $\mathbf{A}$, т. е. сумму ее двух диагональных элементов. Затем примените теорему 1 и покажите, что тип точки равновесия $(0, 0)$ системы $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ (как показано на рис. 6.2.20)

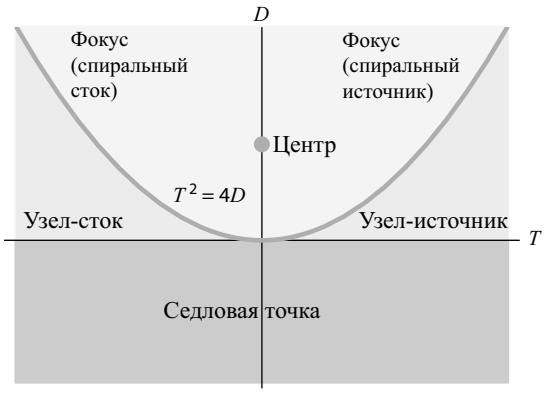


Рис. 6.2.20. Точка равновесия $(0, 0)$ системы $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ является

- фокусом (стоком или источником), если точка (T, D) находится выше параболы $T^2 = 4D$, но не на оси D;
- устойчивым центром, если (T, D) находится на положительной полуоси D;
- узлом (стоком или источником), если (T, D) находится между параболой и осью T;
- седловой точкой, если (T, D) находится ниже оси T

определяется положением точки (T, D) на *плоскости с осями координат, по которым откладываются значения детерминанта и следа*, причем горизонтальной осью на этой плоскости служит T, вертикальной осью — D.

6.2. Приложение. Фазовые портреты почти линейных систем

Интересные и сложные фазовые портреты часто появляются в результате простых нелинейных возмущений линейных систем. Например, на рис. 6.2.21 показан фазовый портрет почти линейной системы

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y\cos(x+y-1), \\ \frac{dy}{dt} &= x\cos(x-y+1). \end{aligned} \tag{1}$$

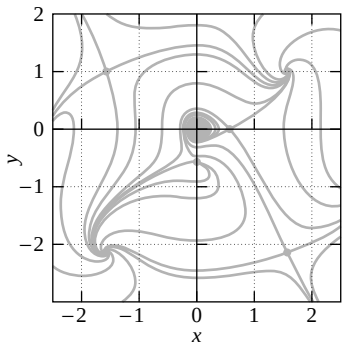


Рис. 6.2.21. Фазовый портрет системы уравнений (1)

Среди семи точек равновесия, отмеченных точками, мы видим следующие:

- очевидные фокусы в первом и третьем квадрантах плоскости xy;
- очевидные седловые точки во втором и четвертом квадрантах, а также еще одна на положительной полуоси x;
- точка равновесия неопределенной природы на отрицательной полуоси y;
- очевидно "очень слабый" фокус в начале координат, это означает, что к нему траектории приближаются очень медленно при увеличении или уменьшении t (в зависимости от того, что это — сток или источник).

Некоторые системы программного обеспечения для решения обыкновенных дифференциальных уравнений могут автоматически определить местонахождение точек равновесия и классифицировать их. Например, на рис. 6.2.22 показано окно, которое генерирует программа `pplane`, написанная Джоном Полкингом (John Polking) для пакета MATLAB (она

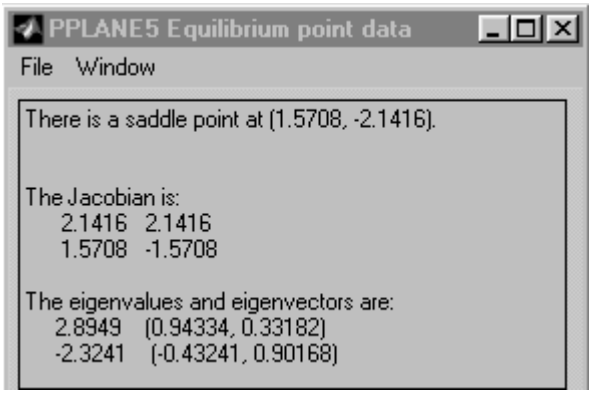


Рис. 6.2.22. Найдена седловая точка в четвертом квадранте

уже упоминалась в приложении к разделу 6.1). Из него видно, что точка равновесия в четвертом квадранте на рис. 6.2.21 имеет (приблизительные) координаты $(1{,}5708,\ -2{,}1416)$ и что матрица коэффициентов соответствующей линейной системы имеет положительное собственное значение $\lambda_1 \approx 2{,}8949$ и отрицательное собственное значение $\lambda_2 \approx -2{,}3241$. Поэтому из теоремы 2 следует, что эта точка равновесия действительно является седловой точкой почти линейной системы (1).

Если применить универсальную систему компьютерной алгебры типа *Maple* или *Mathematica*, то вам самостоятельно, вероятно, придется сделать совсем немного работы — или же точно сказать компьютеру, что именно нужно сделать, чтобы найти и классифицировать критическую точку. Например, команда системы *Maple*

```
fsolve({-y*cos(x+y-1)=0,x*cos(x-y+1)=0},
       {x,y},{x=1..2,y=-3..-2});
```

или команда системы *Mathematica*

```
FindRoot[{-y*Cos[x+y-1] == 0, x*Cos[x-y+1] == 0},
         {x,1,2}, {y,-3,-2}]
```

найдет координаты указанной ранее точки равновесия $a = 1{,}5708$, $b = -2{,}1416$. Затем замена $x = u + a$, $y = v + b$ приводит к системе

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= (2{,}1416 - v)\cos(1{,}5708 - u - v) = f(u, v), \\ \frac{dv}{dt} &= (1{,}5708 + u)\cos(4{,}7124 + u - v) = g(u, v), \end{aligned} \tag{2}$$

которая получается в результате переноса начала координат. Если мы подставим $u = v = 0$ в матрицу Якоби $\partial(f, g)/\partial(u, v)$, мы получим матрицу коэффициентов

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2{,}1416 & 2{,}1416 \\ 1{,}5708 & -1{,}5708 \end{bmatrix}$$

линейной системы, соответствующей (2). Тогда команда *Maple*

```
evalf(Eigenvals(A))
```

или команда системы *Mathematica*

```
Eigenvalues[A]
```

(вычисляющая собственные значения) позволит найти собственные значения $\lambda_1 \approx 2{,}8949$ и $\lambda_2 \approx -2{,}3241$, таким образом мы убедимся, что точка равновесия $(1{,}5708, -2{,}1416)$ действительно является седловой точкой.

Используйте систему компьютерной алгебры, чтобы найти и классифицировать другие точки равновесия системы (1), показанные на рис. 6.2.21. Затем исследуйте подобным способом придуманную вами почти линейную систему. Один удобный способ создания таких систем состоит в том, чтобы начать с линейной системы и вставить множители-коэффициенты с синусом или косинусом примерно так, как сделано это в системе (1).

6.3. Экологические модели: хищники и конкуренты

Некоторые из самых интересных и важных приложений теории устойчивости получаются в результате рассмотрения взаимодействий между несколькими биологическими популяциями, населяющими ту же самую среду обитания. Мы рассматриваем сначала модель **хищник–жертва**, в которой всего два вида. Один вид — **хищник** — использует в качестве корма другой вид — **жертву (добычу)**, которая в свою очередь использует в качестве корма некоторый третий вид продовольствия, в изобилии имеющийся в среде обитания. Стандартный пример — численности популяций лис и кроликов в лесистой местности; лисы (хищники) едят кроликов (жертва, добыча), в то время как кролики едят некоторую растительность в лесистой местности. Другие примеры — акулы (хищники) и продовольственная рыба (добыча); окунь (хищники) и солнечник (большая медуза) (жертва, добыча); божьи коровки (хищники) и растительные тли (жертва, добыча), а также жуки (хищники) и более мелкие насекомые (жертва, добыча).

Классическая математическая модель хищник–жертва была развита в 1920-х годах итальянским математиком Вито Вольтерра (1860–1940) с целью анализа циклических изменений, наблюдаемых в популяциях акул и промысловых рыб в Адриатическом море. Чтобы создать такую модель, мы обозначаем численность популяции жертвы в момент времени t через $x(t)$, а численность популяции хищников — через $y(t)$ и делаем следующие упрощающие предположения.

1. В отсутствии хищников численность популяции жертвы росла бы по экспоненциальному закону, причем $dx/dt = ax$, $a > 0$.
2. В отсутствии жертвы численность популяции хищника уменьшалась бы по экспоненциальному закону, причем $dy/dt = -by$, $b > 0$.
3. Когда есть и хищники, и жертвы, то в соответствии с этими естественными нормами прироста и смертности происходит как уменьшение численности популяции жертвы, так и прирост численности популяции хищника, причем изменение численности каждой из популяций пропорционально частоте столкновений между особями этих двух видов. Мы предполагаем далее, что частота таких столкновений пропорциональна произведению xy, считая, что удвоение любой популяции должно удвоить частоту столкновений, удвоение же обоих популяций должно учетверить частоту

столкновений. Следовательно, потребление жертвы (добычи) хищниками определяется скоростью взаимодействия, которая приводит

- к уменьшению $-pxy$ численности x популяции жертвы (добычи) в результате охоты, и
- к приросту qxy численности y популяции хищника.

Когда мы учитываем скорость естественного прироста ax и скорость взаимодействия, приводящую к уменьшению $-pxy$ численности x популяции жертвы (добычи), а также скорость естественного прироста $-by$ и прирост qxy численности y популяции хищника, мы получаем систему **хищник–жертва**

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax - pxy = x(a - py), \\ \frac{dy}{dt} &= -by + qxy = y(-b + qx), \end{aligned} \tag{1}$$

где все константы a, b, p и q положительны. *Обратите внимание*: в системе (1) уравнения для численности популяций хищника и жертвы (добычи) можно написать в любом порядке. Однако независимо от порядка важно отметить, что уравнение для численности хищника имеет отрицательное линейное слагаемое и положительное слагаемое для взаимодействия, тогда как уравнение численности жертвы (добычи) имеет положительное линейное слагаемое и отрицательное слагаемое для взаимодействия.

Пример 1

Точки равновесия Точка равновесия общей системы хищник–жертва (1) является решением (x, y) уравнений

$$x(a - py) = 0, \quad y(-b + qx) = 0. \tag{2}$$

Из первого из этих двух уравнений следует, что или $x = 0$ или $y = a/p \neq 0$, а из второго — что $y = 0$ или $x = b/q \neq 0$. Отсюда легко следует, что эта система хищник–жертва имеет следующие две точки равновесия: $(0, 0)$ и $(b/q, a/p)$.

Точка равновесия $(0, 0)$. Матрица Якоби системы (1) имеет вид

$$\mathbf{J}(x, y) = \begin{bmatrix} a - py & -px \\ qy & -b + qx \end{bmatrix}, \quad \text{так что} \quad \mathbf{J}(0, 0) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Матрица $\mathbf{J}(0, 0)$ имеет характеристическое уравнение $(a - \lambda)(-b - \lambda) = 0$ и собственные значения $\lambda_1 = a > 0$, $\lambda_2 = -b < 0$ с различными знаками. Следовательно, из теорем 1 и 2 раздела 6.2 следует, что точка равновесия $(0, 0)$ является неустойчивой седловой точкой, причем для обеих систем — исходной системы хищник–жертва и ее линеаризации в начале координат $(0, 0)$. Соответствующее равновесное решение $x(t) \equiv 0, y(t) \equiv 0$ просто описывает одновременное исчезновение популяций жертвы (добычи) (ее численность обозначена через x) и хищника (численность которого обозначена через y).

Точка равновесия $(b/q, a/p)$. Матрица Якоби

$$\mathbf{J}(b/q, a/p) = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{pb}{q} \\ \dfrac{aq}{p} & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

имеет характеристическое уравнение $\lambda^2 + ab = 0$ и чисто мнимые собственные значения λ_1, $\lambda_2 = \pm i\sqrt{ab}$. Следовательно, из теоремы 1 раздела 6.2 следует, что линеаризация системы хищник–жертва в точке $(b/q, a/p)$ имеет устойчивый центр в начале координат. Таким образом, мы имеем неопределенный случай в теореме 2 раздела 6.2, когда точка равновесия может (кроме устойчивого центра) также быть или устойчивым спиральным стоком (устойчивым фокусом), или неустойчивым спиральным источником (неустойчивым фокусом) для самой системы хищник–жертва. Следовательно, дальнейшее исследование обязано определить фактическую природу точки равновесия $(b/q, a/p)$. Соответствующее равновесное решение $x(t) \equiv b/q, y(t) \equiv a/p$ описывает единственно возможные постоянные *отличные от нуля* численности популяций жертвы (x) и хищника (y), которые могут сосуществовать сколь угодно долго.

Фазовый портрет. В задаче 1 мы просим вас провести численный анализ типичной системы хищник–жертва и проверить, что ее линеаризации в ее двух критических точках качественно согласуются с фазовым портретом, приведенным на рис. 6.3.1, на котором видна нетривиальная точка равновесия, которая, как кажется визуально, является устойчивым центром. Конечно, только первый квадрант этого портрета соответствует

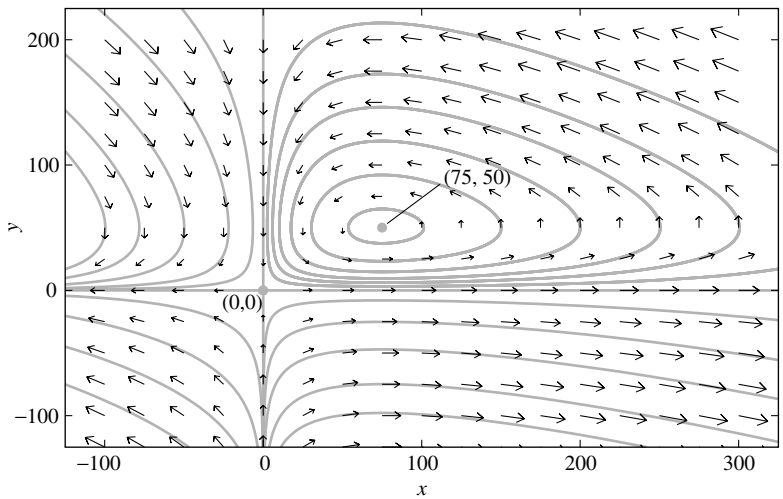


Рис. 6.3.1. Фазовый портрет системы хищник–жертва $x' = 200x - 4xy$, $y' = -150y + 2xy$ с критическими точками $(0, 0)$ и $(75, 50)$

физически значимым решениям, описывающим неотрицательные численности популяций жертвы (добычи) и хищника.

В задаче 2 мы просим вас найти точное неявное решение системы хищник–жертва, приведенной на рис. 6.3.1, — решение, которое может использоваться для того, чтобы показать, что его траектории на фазовой плоскости в первом квадранте действительно представляют собой простые замкнутые кривые, внутри которых находится критическая точка $(75, 50)$, как и показано на рисунке. Тогда из задачи 30 в разделе 6.1 следует, что обе точные функции-решения $x(t)$ и $y(t)$ являются периодическими функциями переменной t, а это как раз и дает объяснение периодических флуктуаций, которые наблюдаются опытным путем в популяциях жертвы (добычи) и хищника. ■

Пример 2 **Колебания численности популяций.** На рис. 6.3.2 показано машинно-генерируемое поле направлений и фазовый портрет системы хищник–жертва

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (0{,}2)x - (0{,}005)xy = (0{,}005)x(40 - y), \\ \frac{dy}{dt} &= -(0{,}5)y + (0{,}01)xy = (0{,}01)y(-50 + x), \end{aligned} \tag{5}$$

где $x(t)$ обозначает количество кроликов и $y(t)$ — количество лис после t месяцев. Очевидно, точка равновесия $(50, 40)$ — устойчивый центр, представляющий равновесные популяции численностью 50 кроликов и 40 лис. Любая другая начальная точка находится на замкнутой траектории, содержащей внутри себя эту точку равновесия. Поле направлений показывает, что точка $(x(t), y(t))$ движется по своей траектории против часовой стрелки, а численности популяций кроликов и лис совершают периодические колебания между их отдельными максимальными и минимальными значениями. Недостаток состоит в том, что чертеж на фазовой плоскости не содержит информации о скорости, с которой точка движется по каждой из траекторий.

Это утраченное чувство времени можно возвратить, если для каждой популяции начертить отдельный график функции, представляющей собой численность соответствующей популяции, в зависимости от времени, т. е. представить численность соответствующей популяции как функцию времени t. На рис. 6.3.3 мы имеем приблизительные графики функций-решений $x(t)$ и $y(t)$, рассчитанные по методу Рунге–Кутта из раздела 4.3 при начальных значениях $x(0) = 70$ и $y(0) = 40$. Мы видим, что численность популяции кроликов колеблется между экстремумами $x_{\max} \approx 72$ и $x_{\min} \approx 33$, в то время как численность популяции лис колеблется (не в фазе, т. е. ее фаза не совпадает) между экстремумами $y_{\max} \approx 70$ и $y_{\min} \approx 20$. Тщательные измерения показывают, что период P колебаний каждой численности популяции немного превышает 20 месяцев. Чтобы уточнить эти оценки периода и максимального и минимального значений численности

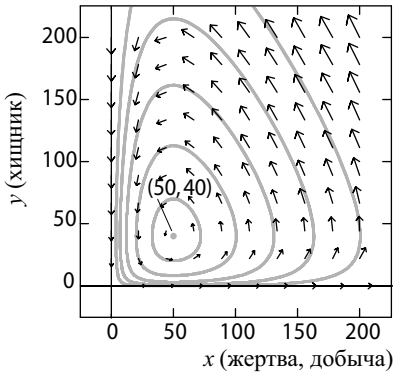


Рис. 6.3.2. Фазовый портрет системы хищник–жертва из примера 2

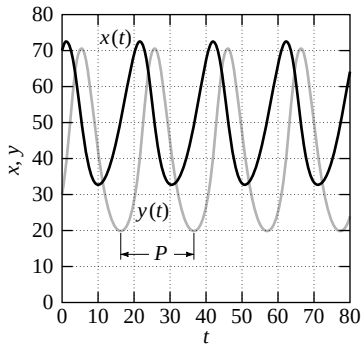


Рис. 6.3.3. Периодические колебания численности популяций хищника и жертвы (добычи) в примере 2

популяций кроликов и лис, можно увеличить масштаб в точках максимума и минимума на каждом графике.

Любые положительные значения в начальных условиях $x_0 = x(0)$ и $y_0 = y(0)$ дают подобную картину, так что обе популяции — лис и кроликов — выживают в сосуществовании друг с другом. ■

Конкурирующие виды

Теперь мы рассматрим два вида (например, животных, растений или бактерий), которые конкурируют друг с другом за продовольствие, доступное в их общей среде. Численности их популяций в момент времени t обозначим через $x(t)$ и $y(t)$. Этот случай существенно отличается от случая, в котором один вид охотится на другой. Чтобы создать математическую модель, которая является настолько реалистической, насколько это возможно, давайте предположим, что в отсутствии любых других видов, данный вид имел бы ограниченную [логистическим уравнением] численность популяции подобно тем видам, которые были рассмотрены в разделе 2.1. В отсутствии любого взаимодействия или соревнования (конкуренции) между двумя видами, численности их популяций $x(t)$ и $y(t)$ удовлетворяли бы дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1 x - b_1 x^2, \\ \frac{dy}{dt} &= a_2 y - b_2 y^2, \end{aligned} \tag{6}$$

каждое из которых имеет вид уравнения (2) из раздела 2.1. Но кроме того мы предполагаем, что конкуренция (соревнование) влияет на скорость снижения численности каждой популяции, которая пропорциональна произведению их численностей xy. Мы вставляем такие слагаемые с *отрицательными* коэффициентами пропорциональности $-c_1$ и $-c_2$ в уравне-

ния (6), чтобы получить систему, описывающую **конкуренцию (соревнование)**

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1 x - b_1 x^2 - c_1 xy = x(a_1 - b_1 x - c_1 y), \\ \frac{dy}{dt} &= a_2 y - b_2 y^2 - c_2 xy = y(a_2 - b_2 y - c_2 x), \end{aligned} \tag{7}$$

где все коэффициенты $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1\ c_2$ положительны.

Почти линейная система (7) имеет четыре точки равновесия. После приравнивания правых частей этих двух уравнений нулю, мы видим, что если $x = 0$, то или $y = 0$, или $y = a_2/b_2$, тогда как если $y = 0$, то или $x = 0$, или $x = a_1/b_1$. Это дает три точки равновесия $(0, 0)$, $(0, a_2/b_2)$ и $(a_1/b_1, 0)$. Четвертая точка равновесия получается в результате решения системы уравнений

$$b_1 x + c_1 y = a_1, \quad b_2 x + c_2 y = a_2. \tag{8}$$

Мы предполагаем, что, как и в самых интересных приложениях, эти уравнения имеют единственное решение и что соответствующая точка равновесия находится в первом квадранте плоскости xy. Тогда эта точка (x_E, y_E) — четвертая точка равновесия системы (7), причем именно она представляет возможность сосуществования двух видов с постоянными отличными от нуля равновесными численностями популяций $x(t) \equiv x_E$ и $y(t) \equiv y_E$.

Мы интересуемся устойчивостью точки равновесия (x_E, y_E). Это, оказывается, зависит от того, какое из неравенств выполняется:

$$c_1 c_2 < b_1 b_2 \quad \text{или} \quad c_1 c_2 > b_1 b_2. \tag{9}$$

Каждое неравенство в (9) имеет естественную интерпретацию. Исследуя уравнения в системе (6), мы видим, что коэффициенты b_1 и b_2 оказывают задерживающее влияние на рост численности каждой популяции (возможно, из-за ограниченности запасов продовольствия или пространства). С другой стороны, c_1 и c_2 представляют эффект конкуренции (соревнования) между этими двумя популяциями. Таким образом, $b_1 b_2$ — мера *подавления*, в то время как $c_1 c_2$ — мера *конкуренции (соревнования)*. Общий анализ системы (7) показывает следующее.

1. Если $c_1 c_2 < b_1 b_2$, так что конкуренция (соревнование) незначительна по сравнению с подавлением, то (x_E, y_E) — асимптотически устойчивая точка равновесия, к которой приближается каждое решение при $t \to +\infty$. Таким образом, оба вида могут сосуществовать и действительно сосуществуют в этом случае.
2. Если $c_1 c_2 > b_1 b_2$, так что конкуренция (соревнование) доминирует по сравнению с подавлением, то (x_E, y_E) — неустойчивая точка равновесия, и либо $x(t)$, либо $y(t)$ стремится к нулю при $t \to +\infty$. Таким образом, два вида не могут сосуществовать в этом случае; один из них выживает, а другой вымирает.

Вместо того чтобы детально проделать этот общий анализ, мы представим два примера, которые иллюстрируют данные две возможности.

Пример 3 **Выживание отдельного вида.** Предположим, что численности популяций $x(t)$ и $y(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 14x - \tfrac{1}{2}x^2 - xy, \\ \frac{dy}{dt} &= 16y - \tfrac{1}{2}y^2 - xy, \end{aligned} \tag{10}$$

в которых $a_1 = 14$, $a_2 = 16$, $b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$, и $c_1 = c_2 = 1$. Тогда $c_1c_2 = 1 > \frac{1}{4} = b_1b_2$, так что мы должны ожидать выживание одного вида в соответствии с предсказанием в случае 2. Мы легко находим следующие четыре точки равновесия: $(0,0)$, $(0,32)$, $(28,0)$ и $(12,8)$. Мы исследуем их отдельно.

Точка равновесия (0, 0). Матрица Якоби системы (10) имеет вид

$$\mathbf{J}(x,y) = \begin{bmatrix} 14-x-y & -x \\ -y & 16-y-x \end{bmatrix}, \text{ так что } \mathbf{J}(0,0) = \begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Матрица $\mathbf{J}(0,0)$ имеет характеристическое уравнение $(14-\lambda)(16-\lambda) = 0$. Решая это характеристическое уравнение, находим собственные значения матрицы

$\lambda_1 = 14$, которому соответствует собственный вектор $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$,

и

$\lambda_2 = 16$, которому соответствует собственный вектор $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$.

Поскольку оба собственных значения положительны, то $(0,0)$ — неустойчивый узел (источник) для линеаризации системы $x' = 14x$, $y' = 16y$ в начале координат $(0,0)$ и, следовательно, — по теореме 2 из раздела 6.2 — является также неустойчивым узлом (источником) для первоначальной системы (10). На рис. 6.3.4 показан фазовый портрет для линеаризованной системы в окрестности начала координат $(0,0)$.

Точка равновесия (0, 32). Матрица Якоби

$$\mathbf{J}(0,32) = \begin{bmatrix} -18 & 0 \\ -32 & -16 \end{bmatrix} \tag{12}$$

соответствует линеаризации

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -18u, \\ \frac{dv}{dt} &= -32u - 16v \end{aligned} \tag{13}$$

системы (10) в окрестности точки $(0, 32)$. Матрица $\mathbf{J}(0, 32)$ имеет характеристическое уравнение $(-18-\lambda)(-16-\lambda) = 0$. Решая это характеристическое уравнение, находим собственные значения матрицы $\lambda_1 = -18$, которому соответствует собственный вектор $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 16 \end{bmatrix}^T$, и $\lambda_2 = -16$, которому соответствует собственный вектор $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$. Поскольку оба собственных значения отрицательны, начало координат $(0, 0)$ — узел-сток для линеаризованной системы, и, следовательно, — по теореме 2 из раздела 6.2 — точка $(0, 32)$ является также устойчивым узлом (стоком) для первоначальной системы (10). На рис. 6.3.5 показан фазовый портрет для линеаризованной системы в окрестности начала координат $(0, 0)$.

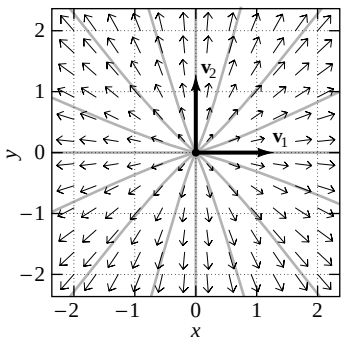


Рис. 6.3.4. Фазовый портрет линейной системы $x' = 14x$, $y' = 16y$ в окрестности критической точки $(0, 0)$

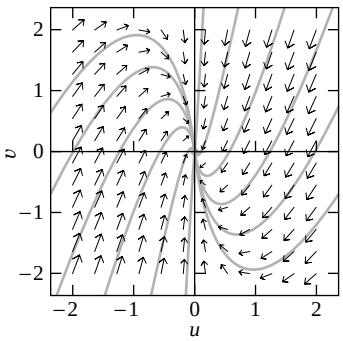


Рис. 6.3.5. Фазовый портрет линейной системы уравнений (13) в окрестности критической точки $(0, 32)$

Точка равновесия (28, 0). Матрица Якоби

$$\mathbf{J}(28, 0) = \begin{bmatrix} -14 & -28 \\ 0 & -12 \end{bmatrix} \tag{14}$$

соответствует линеаризации

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -14u - 28v, \\ \frac{dv}{dt} &= -12v \end{aligned} \tag{15}$$

системы (10) в окрестности точки $(28, 0)$. Матрица $\mathbf{J}(28, 0)$ имеет характеристическое уравнение $(-14-\lambda)(-12-\lambda) = 0$. Решая это характеристическое уравнение, находим собственные значения матрицы $\lambda_1 = -14$, которому соответствует собственный вектор $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$, и $\lambda_2 = -12$, которому соответствует собственный вектор $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -14 & 1 \end{bmatrix}^T$. Поскольку оба собственных значения отрицательны, начало координат $(0, 0)$ представляет собой узел-сток для линеаризованной системы и, следовательно, — по теореме 2 из раздела 6.2 — точка $(28, 0)$ является также устойчивым узлом-стоком для первоначальной нелинейной системы (10).

На рис. 6.3.6 показан фазовый портрет для линеаризованной системы в окрестности начала координат $(0, 0)$.

Точка равновесия (12, 8). Матрица Якоби

$$\mathbf{J}(12, 8) = \begin{bmatrix} -6 & -12 \\ -8 & -4 \end{bmatrix} \tag{16}$$

соответствует линеаризации

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -6u - 12v, \\ \frac{dv}{dt} &= -8u - 4v \end{aligned} \tag{17}$$

системы (10) в точке $(12, 8)$. Матрица $\mathbf{J}(12, 8)$ имеет характеристическое уравнение

$$(-6 - \lambda)(-4 - \lambda) - (-8)(-12) = \lambda^2 + 10\lambda - 72 = 0.$$

Решая это характеристическое уравнение, находим собственные значения матрицы

$$\lambda_1 = -5 - \sqrt{97} < 0,$$

которому соответствует собственный вектор $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{8}\left(1 + \sqrt{97}\right) & 1 \end{bmatrix}^T$, и

$$\lambda_2 = -5 + \sqrt{97} > 0,$$

которому соответствует собственный вектор $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{8}\left(1 - \sqrt{97}\right) & 1 \end{bmatrix}^T$.

Поскольку эти два собственных значения имеют противоположные знаки, то $(0, 0)$ — седловая точка для линеаризованной системы и, следовательно, — по теореме 2 раздела 6.2 — особая точка $(12, 8)$ является также неустойчивой седловой точкой для первоначальной системы (10). На рис. 6.3.7 показан фазовый портрет для линеаризованной системы в окрестности начала координат $(0, 0)$.

Теперь, когда наш локальный анализ каждой из этих четырех точек равновесия закончен, остается лишь собрать найденную информацию, чтобы уяснить глобальную картину. Если мы принимаем как факт, что

- в окрестности каждой точки равновесия траектории первоначальной системы (10) напоминают качественно траектории линеаризированной системы, показанные на рис. 6.3.4–6.3.7, и
- при $t \to +\infty$ каждая траектория или приближается к критической точке, или убегает от нее к бесконечности,

то оказывается, что фазовый портрет для первоначальной системы должен напоминать грубый эскиз, приведенный на рис. 6.3.8. На этом эскизе вручную вычерчено несколько типичных траекторий, соединяющих узел-

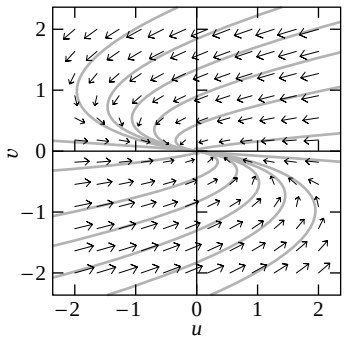


Рис. 6.3.6. Фазовый портрет для линейной системы уравнений (15) в окрестности критической точки $(28, 0)$

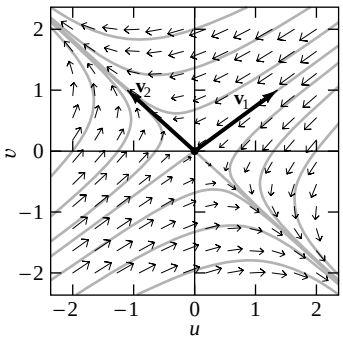


Рис. 6.3.7. Фазовый портрет линейной системы уравнений (17) в окрестности критической точки $(12, 8)$

источник в начале координат $(0, 0)$, узлы-стоки в точках $(0, 32)$ и $(28, 0)$ и седловую точку с координатами $(12, 8)$, причем указаны направления движения по этим траекториям в соответствии с известной природой (характером) этих точек равновесия. На рис. 6.3.9 приведены более точный, созданный компьютером, фазовый портрет и поле направлений для нелинейной системы (10).

Две траектории, которые приближаются к седловой точке $(12, 8)$, вместе с самой седловой точкой образуют **сепаратрису**, которая отделяет области I и II на рис. 6.3.9. Она играет критическую роль в определении поведения этих двух популяций на протяжении длительного периода времени. Если начальная точка (x_0, y_0) находится точно на сепаратрисе, то $(x(t), y(t))$ стремится к $(12, 8)$ при $t \to +\infty$. (Конечно, случайные события делают это чрезвычайно невероятным, так что едва ли $(x(t), y(t))$ останется на сепаратрисе.) В противном случае мирное сосуществование двух видов невозможно. Если (x_0, y_0) находится в области I выше сепара-

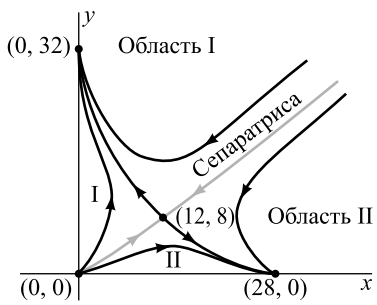


Рис. 6.3.8. Грубый эскиз, построенный в соответствии с анализом в примере 3

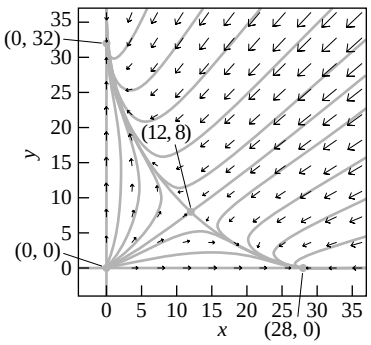


Рис. 6.3.9. Фазовый портрет системы в примере 3

трисы, то $(x(t), y(t))$ стремится к $(0, 32)$ при $t \to +\infty$, так что численность популяции $x(t)$ уменьшается до нуля. Альтернативно, если (x_0, y_0) находится в области II ниже сепаратрисы, то $(x(t), y(t))$ стремится к $(28, 0)$ при $t \to +\infty$, так что к нулю стремится численность популяции $y(t)$ и вымирает эта популяция. Короче говоря, какой бы ни была численность популяции, выживает та популяция, которая имеет в самом начале преимущество в конкурентной борьбе, а другая популяция обречена на исчезновение. ■

Пример 4 **Мирное сосуществование двух видов.** Предположим, что численности популяций $x(t)$ и $y(t)$ удовлетворяют системе уравнений, моделирующих конкуренцию (соревнование)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 14x - 2x^2 - xy, \\ \frac{dy}{dt} &= 16y - 2y^2 - xy, \end{aligned} \tag{18}$$

в которой $a_1 = 14$, $a_2 = 16$, $b_1 = b_2 = 2$ и $c_1 = c_2 = 1$. Тогда $c_1 c_2 = 1 < 4 = b_1 b_2$, так что теперь эффект подавления превалирует над конкуренцией (соревнованием). Мы легко находим следующие четыре точки равновесия: $(0, 0)$, $(0, 8)$, $(7, 0)$ и $(4, 6)$. Мы продолжаем так же, как это делали в примере 3.

Точка равновесия (0, 0). Если опустить квадратичные слагаемые в (18), в начале координат $(0, 0)$ мы получим ту же самую линеаризацию $x' = 14x, y' = 16y$, что и в примере 3. Таким образом, матрица коэффициентов линеаризованной системы имеет два положительных собственных значения $\lambda_1 = 14$ и $\lambda_2 = 16$, а ее фазовый портрет имеет тот же самый вид, что и на рис. 6.3.3. Поэтому $(0, 0)$ — неустойчивый узел-источник для первоначальной системы (18).

Точка равновесия (0, 8). Матрица Якоби системы (18) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{J}(x, y) &= \begin{bmatrix} 14 - 4x - y & -x \\ -y & 16 - 4y - x \end{bmatrix}, \quad \text{так что} \\ \mathbf{J}(0, 8) &= \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -8 & -16 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{19}$$

Матрица $\mathbf{J}(0, 8)$ соответствует линеаризации

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= 6u, \\ \frac{dv}{dt} &= -8u - 16v \end{aligned} \tag{20}$$

системы (18) в точке $(0, 8)$. Она имеет характеристическое уравнение $(6 - \lambda)(-16 - \lambda) = 0$. Решая это характеристическое уравнение, находим положительное собственное значение матрицы $\lambda_1 = 6$, которому

соответствует собственный вектор $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 11 & -4 \end{bmatrix}^T$, и отрицательное собственное значение матрицы $\lambda_2 = -16$, которому соответствует собственный вектор $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$. Из этого следует, что начало координат $(0, 0)$ представляет собой седловую точку для линеаризованной системы и, следовательно, начало координат $(0, 8)$ является неустойчивой седловой точкой для первоначальной системы (18). На рис. 6.3.10 показан фазовый портрет для линеаризованной системы в окрестности начала координат $(0, 0)$.

Точка равновесия (7, 0). Матрица Якоби

$$\mathbf{J}(7, 0) = \begin{bmatrix} -14 & -7 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \tag{21}$$

соответствует линеаризации

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -14u - 7v, \\ \frac{dv}{dt} &= 9v \end{aligned} \tag{22}$$

системы (18) в точке $(7, 0)$. Матрица $\mathbf{J}(7, 0)$ имеет характеристическое уравнение $(-14 - \lambda)(9 - \lambda) = 0$ и имеет отрицательное собственное значение $\lambda_1 = -14$, которому соответствует собственный вектор $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ и положительное собственное значение $\lambda_2 = 9$, которому соответствует собственный вектор $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -7 & 23 \end{bmatrix}^T$. Из этого следует, что $(0, 0)$ — седловая точка для линеаризованной системы, и, следовательно, что точка $(7, 0)$ является неустойчивой седловой точкой для первоначальной системы (18). На рис. 6.3.11 показан фазовый портрет для линеаризованной системы в окрестности начала координат $(0, 0)$.

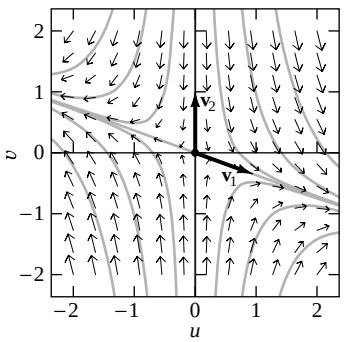


Рис. 6.3.10. Фазовый портрет линейной системы уравнений (20) в окрестности критической точки $(0, 8)$

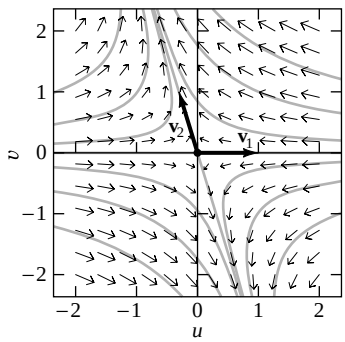


Рис. 6.3.11. Фазовый портрет линейной системы уравнений (22) в окрестности критической точки $(7, 0)$

Точка равновесия (4, 6). Матрица Якоби

$$\mathbf{J}(4,6) = \begin{bmatrix} -8 & -4 \\ -6 & -12 \end{bmatrix} \tag{23}$$

соответствует линеаризации

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -8u - 4v, \\ \frac{dv}{dt} &= -6u - 12v \end{aligned} \tag{24}$$

системы (18) в точке $(4, 6)$. Матрица $\mathbf{J}(4, 6)$ имеет характеристическое уравнение

$$(-8 - \lambda)(-12 - \lambda) - (-6)(-4) = \lambda^2 + 20\lambda + 72 = 0$$

и имеет два отрицательных собственных значения

$$\lambda_1 = 2\big(-5 - \sqrt{7}\,\big),$$

которому соответствует собственный вектор $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\big(-1 + \sqrt{7}\,\big) & 1 \end{bmatrix}^T$, и

$$\lambda_2 = 2\big(-5 + \sqrt{7}\,\big),$$

которому соответствует собственный вектор $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}\big(-1 - \sqrt{7}\big) & 1 \end{bmatrix}^T$.

Из этого следует, что начало координат $(0, 0)$ представляет собой узел-сток для линеаризованной системы и, следовательно, точка $(4, 6)$ является устойчивым узлом-стоком для первоначальной системы (18). На рис. 6.3.12 показан фазовый портрет для линеаризованной системы в окрестности начала координат $(0, 0)$.

На рис. 6.3.13 собрана вся эта локальную информация и представлен глобальный фазовый портрет для первоначальной системы (18). Известная особенность этой системы состоит в том, что для *любых* положительных значений начальных численностей популяций x_0 и y_0 точка $(x(t), y(t))$ приближается к единственной критической точке $(4, 6)$ при $t \to +\infty$. Из этого следует, что оба вида выживают в устойчивом (мирном) сосуществовании. ■

Взаимодействие логистических популяций

Если коэффициенты a_1, a_2, b_1, b_2 положительны, но $c_1 = c_2 = 0$, то уравнения

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1 x - b_1 x^2 - c_1 xy, \\ \frac{dy}{dt} &= a_2 y - b_2 y^2 - c_2 xy \end{aligned} \tag{25}$$

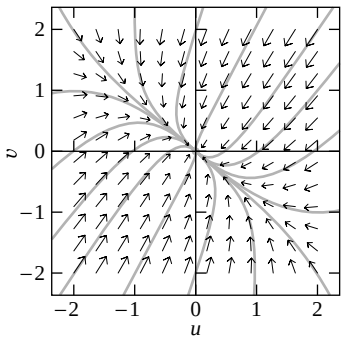


Рис. 6.3.12. Фазовый портрет линейной системы уравнений (24) в окрестности критической точки $(4, 6)$

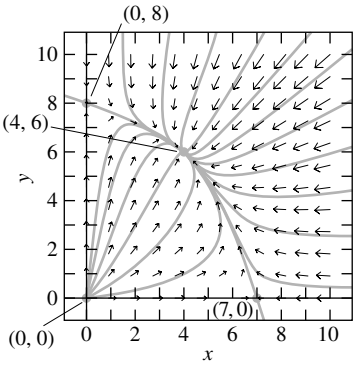


Рис. 6.3.13. Поле направлений и фазовый портрет системы $x' = 14x - 2x^2 - -xy, y' = 16y - 2y^2 - xy$, описывающей конкуренцию видов из примера 4

описывают две различные логистические популяции с численностями $x(t)$ и $y(t)$, которые никак не влияют друг на друга. Примеры 3 и 4 иллюстрируют случаи, в которых оба коэффициента c_1 и c_2 при xy *положительны*. Взаимодействие между этими двумя популяциями тогда классифицируется как **конкуренция (соревнование)**, потому что влияние слагаемых, содержащих xy, в (25) направлено на *уменьшение* скорости прироста обеих популяций, т. е. численность каждой популяции уменьшается в результате их взаимного взаимодействия.

Предположим, однако, что оба коэффициента взаимодействия c_1 и c_2 в (25) *отрицательны*. Тогда благодаря слагаемым, содержащим xy, увеличиваются скорости прироста обеих популяций, т. е. каждая из популяций выигрывает от их взаимного взаимодействия. Несомненно, этот тип взаимодействия следует квалифицировать как **сотрудничество** между двумя логистическими популяциями.

Наконец, взаимодействие между двумя популяциями относится к **хищничеству**, если коэффициенты взаимодействия имеют *различные знаки*. Например, если $c_1 > 0$, но $c_2 < 0$, то при взаимодействии популяция, численность которой обозначена через x, страдает, а популяция, численность которой обозначена через y, наоборот, выигрывает от такого взаимодействия. Поэтому можно рассматривать $x(t)$ как численность популяции жертвы (добычи), а $y(t)$ — как численность популяции хищника.

Если b_1 или b_2 равно нулю в (25), то численность соответствующей популяции (в отсутствии другой) возрастает по экспоненте, а не по логистическому закону. Например, предположим, что $a_1 > 0$, $a_2 < 0$, $b_1 = b_2 = 0$, причем $c_1 > 0$, $c_2 < 0$. Тогда $x(t)$ — растущая по экспоненциальному закону численность популяции жертвы (добычи), в то время как $y(t)$ — снижающаяся по экспоненте численность популяции хищника. Это — первоначальная модель хищник–жертва, с рассмотрения которой мы начали этот раздел.

Задачи 26–34 иллюстрируют разнообразие указанных здесь возможностей. Задачи и примеры в этом разделе иллюстрируют мощь элементарного анализа точки равновесия. Но помните, что экологические системы в природе редко столь просты, как в этих примерах. Часто они включают больше, чем два вида, причем скорости роста этих популяций, да и взаимодействия между ними часто более сложны, чем те, которые обсуждались в этом разделе. Следовательно, математическое моделирование экологических систем остается именно той областью, в которой активно ведутся научные исследования.

6.3. Задачи

В задачах 1 и 2 рассматривается система хищник–жертва

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 200x - 4xy, \\ \frac{dy}{dt} &= -150y + 2xy, \end{aligned} \tag{1}$$

которой соответствует рис. 6.3.1.

1. Рассмотрев сначала матрицу Якоби системы (1), получите линеаризации данной системы в двух критических точках $(0, 0)$ и $(75, 50)$. С помощью графического калькулятора или компьютерной системы создайте фазовые портреты для этих двух линеаризаций, которые вполне согласуются с глобальной картиной, приведенной на рис. 6.3.1.
2. Отделите переменные в частном

   $$\frac{dy}{dx} = \frac{-150y + 2xy}{200x - 4xy}$$

   двух уравнений системы (1) и таким образом получите точное неявное решение

   $$200 \ln y + 150 \ln x - 2x - 4y = C$$

   данной системы. Используйте графический калькулятор или компьютерную систему (точнее ее возможности для вычерчивания контурных графиков (линий уровня)) и вычертите линии уровня этого уравнения, проходящие через точки $(75, 100)$, $(75, 150)$, $(75, 200)$, $(75, 250)$ и $(75, 300)$ в плоскости xy. Действительно ли ваши результаты согласуются с рис. 6.3.1?
3. Пусть $x(t)$ — численность популяции вредных насекомых (например, тлей), которая в естественных условиях находится под мягким (“гуманным”) контролем популяции насекомых-хищников численностью $y(t)$ (предположим, божьи коровки). Предположите, что $x(t)$ и $y(t)$ удовлетворяют уравнениям системы хищник–жертва (1), так что популяции находятся в состоянии устойчивого равновесия $x_E = b/q$ и $y_E = a/p$. Теперь предположите, что используется инсектицид, который подавляет (в единицу времени) ту же самую часть $f < a$ каждого вида насекомых. Покажите, что численность популяции вредных насекомых x_E увеличится, в то время как численность популяции y_E мягких (гуманных) хищников уменьшится, так что использование инсектицида приводит к нежелательному эффекту (практически противоположному тому, который ожидается). Это случай, в котором математический анализ показывает нежелательные последствия полного благих намерений вмешательства в природу.

В задачах 4–7 рассматривается система конкуренции (соревнования)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 60x - 4x^2 - 3xy, \\ \frac{dy}{dt} &= 42y - 2y^2 - 3xy, \end{aligned} \tag{2}$$

в которой $c_1c_2 = 9 > 8 = b_1b_2$, так что эффект конкуренции (соревнования) превалирует над эффектом подавления. В задачах 4–7 подразумеваются, что следующие четыре точки равновесия $(0, 0)$, $(0, 21)$, $(15, 0)$ и $(6, 12)$ системы (2) напоминают то, что показано на рис. 6.3.9 — узел-источник в начале координат, узел-сток на каждой координатной оси и интерьер седловой точки в первом квадранте. В каждой из этих задач с помощью графического калькулятора или компьютерной системы начертите фазовый портрет линеаризации в указанной критической точке. Наконец, начертите фазовый портрет нелинейной системы (2) в первом квадранте. Согласуются ли ваши локальные портреты с глобальным?

4. Покажите, что матрица коэффициентов линеаризации $x' = 60x$, $y' = 42y$ системы (2) в начале координат $(0, 0)$ имеет положительные собственные значения $\lambda_1 = 60$ и $\lambda_2 = 42$. Следовательно, начало координат $(0, 0)$ — узел-источник для системы (2).

5. Покажите, что линеаризация системы (2) в точке $(0, 21)$ имеет вид $u' = -3u$, $v' = -63u - 42v$. Затем покажите, что матрица коэффициентов этой линейной системы имеет отрицательные собственные значения $\lambda_1 = -3$ и $\lambda_2 = -42$. Следовательно, $(0, 21)$ — узел-сток для системы (2).

6. Покажите, что линеаризация системы (2) в точке $(15, 0)$ имеет вид $u' = -60u - 45v$, $v' = -3v$. Затем покажите, что матрица коэффициентов этой линейной системы имеет отрицательные собственные значения $\lambda_1 = -60$ и $\lambda_2 = -3$. Следовательно, $(15, 0)$ — узел-сток для системы (2).

7. Покажите, что линеаризация системы (2) в точке $(6, 12)$ имеет вид $u' = -24u - 18v$, $v' = -36u - 24v$. Затем покажите, что матрица коэффициентов этой линейной системы имеет собственные значения $\lambda_1 = -24 - 18\sqrt{2} < 0$ и $\lambda_2 = -24 + 18\sqrt{2} > 0$. Следовательно, $(6, 12)$ — седловая точка для системы (2).

В задачах 8–10 рассматривается система конкуренции (соревнования)

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 60x - 3x^2 - 4xy, \\ \frac{dy}{dt} &= 42y - 3y^2 - 2xy, \end{aligned} \tag{3}$$

в которой $c_1c_2 = 8 < 9 = b_1b_2$, так что эффект подавления превалирует над эффектом конкуренции (соревнования). Линеаризация системы (3) в начале координат $(0, 0)$ та же самая, что и системы (2). Из этого наблюдения и результатов задач 8–10 следует, что следующие четыре точки равновесия $(0, 0)$, $(0, 14)$, $(20, 0)$ и $(12, 6)$ системы (3) напоминают картину, вычерченную на рис. 6.3.13: узел-источник в начале координат, седловая точка на каждой координатной оси и интерьер узла-стока в первом квадранте. В каждой из этих задач с помощью графического калькулятора или компьютерной системы начертите фазовый портрет линеаризации в указанной критической точке. Наконец, начертите фазовый портрет нелинейной системы (3) в первом квадранте. Согласуются ли ваши локальные портреты с глобальным?

8. Покажите, что линеаризация системы (3) в точке $(0, 14)$ имеет вид $u' = 4u$, $v' = -28u - 42v$. Затем покажите, что матрица коэффициентов этой линейной системы имеет положительное собственное значение $\lambda_1 = 4$ и отрицательное собственное значение $\lambda_2 = -42$. Следовательно, $(0, 14)$ — седловая точка для системы (3).

9. Покажите, что линеаризация системы (3) в точке $(20, 0)$ имеет вид $u' = -60u - 80v$, $v' = 2v$. Затем покажите, что матрица коэффициентов этой линейной системы имеет отрицательное собственное значение $\lambda_1 = -60$ и положительное собственное значение $\lambda_2 = 2$. Следовательно, $(20, 0)$ — седловая точка для системы (3).

10. Покажите, что линеаризация системы (3) в точке $(12, 6)$ имеет вид $u' = -36u - 48v$, $v' = -12u - 18v$. Затем покажите, что матрица коэффициентов этой линейной системы имеет собственные значения $\lambda_1 = -27 + 3\sqrt{73}$ и $\lambda_2 = -27 - 3\sqrt{73}$, причем они оба отрицательны. Следовательно, $(12, 6)$ — узел-сток для системы (3).

В задачах 11–13 рассматривается система хищник–жертва

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 5x - x^2 - xy, \\ \frac{dy}{dt} &= -2y + xy, \end{aligned} \tag{4}$$

в которой численность популяции жертвы (добычи) $x(t)$ подчиняется логистическому закону, а численность популяции хищника $y(t)$ в отсутствии любой жертвы (добычи) убывала бы по

экспоненциальному закону. В задачах 11–13 подразумевается, что следующие три точки равновесия $(0,0)$, $(5,0)$ *и* $(2,3)$ *системы (4) расположены так, как показано на рис. 6.3.14 — седловые точки в начале координат и на положительной полуоси* x, *а внутри первого квадранта находится спиральный сток (устойчивый фокус). В каждой из этих задач с помощью графического калькулятора или компьютерной системы вычертите фазовый портрет для линеаризации в указанной критической точке. Согласуются ли ваши локальные портреты с рис. 6.3.14?*

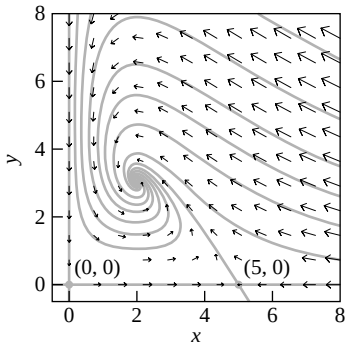


Рис. 6.3.14. Поле направлений и фазовый портрет системы хищник–жертва в задачах 11–13

11. Покажите, что матрица коэффициентов линеаризации $x' = 5x$, $y' = -2y$ системы (4) в начале координат $(0,0)$ имеет положительное собственное значение $\lambda_1 = 5$ и отрицательное собственное значение $\lambda_2 = -2$. Следовательно, начало координат $(0,0)$ — седловая точка системы (4).

12. Покажите, что линеаризация системы (4) в $(5,0)$ имеет вид $u' = -5u - 5v$, $v' = 3v$. Затем покажите, что матрица коэффициентов этой линейной системы имеет отрицательное собственное значение $\lambda_1 = -5$ и положительное собственное значение $\lambda_2 = 3$. Следовательно, $(5,0)$ — седловая точка для системы (4).

13. Покажите, что линеаризация системы (4) в точке $(2,3)$ имеет вид $u' = -2u - 2v$, $v' = 3u$. Затем покажите, что матрица коэффициентов этой линейной системы имеет комплексно сопряженные собственные значения $\lambda_1, \lambda_2 = -1 \pm i\sqrt{5}$ с отрицательной вещественной частью. Следовательно, $(2,3)$ — спиральный сток (устойчивый фокус) для системы (4).

В задачах 14–17 рассматривается система хищник–жертва

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x^2 - 2x - xy, \\ \frac{dy}{dt} &= y^2 - 4y + xy. \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь численность каждой популяции — численность популяции жертвы (добычи) $x(t)$ *и численность популяции хищника* $y(t)$ *— подчиняется бесхитростным законам роста (или убывания) численности популяции (подобно численности популяции аллигаторов в разделе 2.1), для которой (в отсутствие других популяций) единственно возможными альтернативами являются Судный День и исчезновение. В задачах 14–17 подразумевается, что следующие четыре точки равновесия* $(0,0)$, $(0,4)$, $(2,0)$ *и* $(3,1)$ *системы (5) расположены так, как показано на рис. 6.3.15: узелсток в начале координат, седловая точка на каждой координатной оси и спиральный источник (неустойчивый фокус) внутри первого квадранта. Это двумерная версия "Судного Дня против*

исчезновения". Если начальная точка (x_0, y_0) находится в Области I, то численность обеих популяций увеличивается неограниченно (до Судного Дня), тогда как, если она находится в Области II, то численность обеих популяций уменьшается до нуля (и, таким образом, оба вида вымирают). В каждой из этих задач с помощью графического калькулятора или компьютерной системы вычертите фазовый портрет для линеаризации в указанной критической точке. Согласуются ли ваши локальные портреты с рис. 6.3.15?

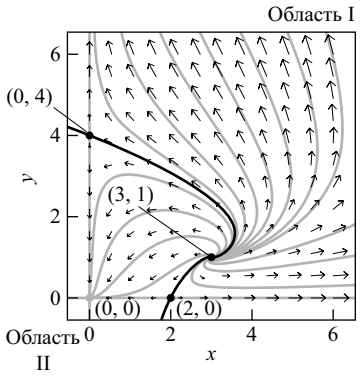


Рис. 6.3.15. Поле направлений и фазовый портрет системы хищник–жертва в задачах 14–17

14. Покажите, что матрица коэффициентов линеаризации $x' = -2x$, $y' = -4y$ системы (5) в начале координат $(0, 0)$ имеет отрицательные собственные значения $\lambda_1 = -2$ и $\lambda_2 = -4$. Следовательно, начало координат $(0, 0)$ — узел-сток для системы (5).

15. Покажите, что линеаризация системы (5) в точке $(0, 4)$ имеет вид $u' = -6u$, $v' = 4u + 4v$. Затем покажите, что матрица коэффициентов этой линейной системы имеет отрицательное собственное значение $\lambda_1 = -6$ и положительное собственное значение $\lambda_2 = 4$. Следовательно, $(0, 4)$ — седловая точка для системы (5).

16. Покажите, что линеаризация системы (5) в точке $(2, 0)$ имеет вид $u' = 2u - 2v$, $v' = -2v$. Затем покажите, что матрица коэффициентов этой линейной системы имеет положительное собственное значение $\lambda_1 = 2$ и отрицательное собственное значение $\lambda_2 = -2$. Следовательно, $(2, 0)$ — седловая точка системы (5).

17. Покажите, что линеаризация системы (5) в точке $(3, 1)$ имеет вид $u' = 3u - 3v$, $v' = u + v$. Затем покажите, что матрица коэффициентов этой линейной системы имеет комплексно сопряженные собственные значения λ_1, $\lambda_2 = 2 \pm i\sqrt{2}$ с положительной вещественной частью. Следовательно, $(3, 1)$ — спиральный источник (неустойчивый фокус) для системы (5).

В задачах 18–25 рассматривается система хищник–жертва

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x - xy + \epsilon x(5 - x), \\ \frac{dy}{dt} &= -5y + xy, \end{aligned} \tag{6}$$

для которой бифуркация (раздвоение) происходит при значении $\epsilon = 0$ параметра ϵ. В задачах 18–19 рассматривается случай $\epsilon = 0$, когда система (6) принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = 2x - xy, \quad \frac{dy}{dt} = -5x + xy, \tag{7}$$

причем в этих задачах предполагается, что две точки равновесия $(0,0)$ *и* $(5,2)$ *системы (7) расположены так, как показано на рис. 6.3.16: седловая точка в начале координат и центр в точке* $(5,2)$. *В каждой из задач с помощью графического калькулятора или компьютерной системы начертите фазовый портрет линеаризации в указанной критической точке. Согласуются ли ваши локальные портреты с рис. 6.3.16?*

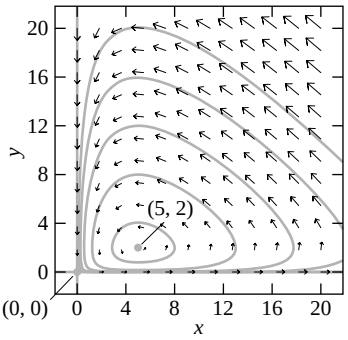


Рис. 6.3.16. Случай $\epsilon = 0$ (задачи 18 и 19)

18. Покажите, что матрица коэффициентов линеаризации $x' = 2x$, $y' = -5y$ системы (7) в начале координат $(0,0)$ имеет положительное собственное значение $\lambda_1 = 2$ и отрицательное собственное значение $\lambda_2 = -5$. Следовательно, начало координат $(0,0)$ — седловая точка для системы (7).

19. Покажите, что линеаризация системы (7) в точке $(5,2)$ имеет вид $u' = -5v$, $v' = 2u$. Затем покажите, что матрица коэффициентов этой линейной системы имеет сопряженные мнимые собственные значения λ_1, $\lambda_2 = \pm i\sqrt{10}$. Следовательно, начало координат $(0,0)$ — устойчивый центр линейной системы. Хотя это неопределенный случай теоремы 2 из раздела 6.2, из рис. 6.3.16 видно, что $(5,2)$ — также устойчивый центр для системы (7).

В задачах 20–22 рассматривается случай $\epsilon = -1$, *для которого система (6) принимает вид*

$$\frac{dx}{dt} = -3x + x^2 - xy, \quad \frac{dy}{dt} = -5y + xy, \tag{8}$$

причем ее три точки равновесия $(0,0)$, $(3,0)$ *и* $(5,2)$ *расположены так, как показано на рис. 6.3.17: узел-сток в начале координат, седловая точка на положительной полуоси* x *и спиральный источник (неустойчивый фокус) в точке* $(5,2)$. *В каждой задаче с помощью графического калькулятора или компьютерной системы начертите фазовый портрет для линеаризации в указанной критической точке. Согласуются ли ваши локальные портреты с рис. 6.3.17?*

20. Покажите, что матрица коэффициентов линеаризации $x' = -3x$, $y' = -5y$ системы (8) в начале координат $(0,0)$ имеет отрицательные собственные значения $\lambda_1 = -3$ и $\lambda_2 = -5$. Следовательно, начало координат $(0,0)$ — узел-сток для системы (8).

21. Покажите, что линеаризация системы (8) в $(3,0)$ имеет вид $u' = 3u - 3v$, $v' = -2v$. Затем покажите, что матрица коэффициентов этой линейной системы имеет положительное собственное значение $\lambda_1 = 3$ и отрицательное собственное значение $\lambda_2 = -2$. Следовательно, $(3,0)$ — седловая точка для системы (8).

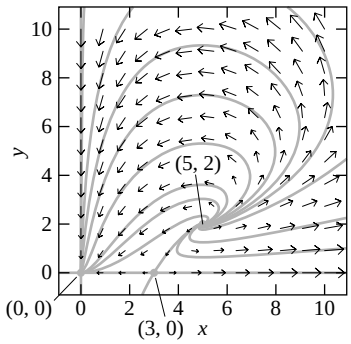


Рис. 6.3.17. Случай $\epsilon = -1$ (задачи 20–22)

22. Покажите, что линеаризация системы (8) в точке $(5, 2)$ имеет вид $u' = 5u - 5v$, $v' = 2u$. Затем покажите, что матрица коэффициентов этой линейной системы имеет комплексно сопряженные собственные значения λ_1, $\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(5 \pm i\sqrt{15}\right)$ с положительной вещественной частью. Следовательно, $(5, 2)$ — спиральный источник (неустойчивый фокус) для системы (8).

В задачах 23–25 рассматривается случай $\epsilon = 1$, так что система (6) принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = 7x - x^2 - xy, \quad \frac{dy}{dt} = -5y + xy, \tag{9}$$

причем из результатов этих задач следует, что три точки равновесия $(0, 0)$, $(7, 0)$ и $(5, 2)$ системы (9) расположены так, как показано на рис. 6.3.18: седловые точки в начале координат и на положительной полуоси x и спиральный сток (устойчивый фокус) в точке $(5, 2)$. В каждой задаче с помощью графического калькулятора или компьютерной системы начертите фазовый портрет для линеаризации в указанной критической точке. Согласуются ли ваши локальные портреты с рис. 6.3.18?

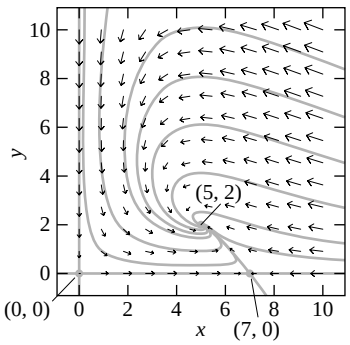


Рис. 6.3.18. Случай $\epsilon = +1$ (задачи 23–25)

23. Покажите, что матрица коэффициентов линеаризации $x' = 7x$, $y' = -5y$ системы (9) в начале координат $(0, 0)$ имеет положительное собственное значение $\lambda_1 = 7$ и отрицательное собственное значение $\lambda_2 = -5$. Следовательно, начало координат $(0, 0)$ — седловая точка для системы (9).

24. Покажите, что линеаризация системы (9) в точке $(7, 0)$ имеет вид $u' = -7u - 7v$, $v' = 2v$. Затем покажите, что матрица коэффициентов этой линейной системы имеет отрицательное

собственное значение $\lambda_1 = -7$ и положительное собственное значение $\lambda_2 = 2$. Следовательно, $(7, 0)$ — седловая точка для системы (9).

25. Покажите, что линеаризация системы (9) в точке $(5, 2)$ имеет вид $u' = -5u - 5v$, $v' = 2u$. Затем покажите, что матрица коэффициентов этой линейной системы имеет комплексно сопряженные собственные значения λ_1, $\lambda_2 = \frac{1}{2}\left(-5 \pm i\sqrt{15}\,\right)$ с отрицательными вещественными частями. Следовательно, $(5, 2)$ — спиральный сток (устойчивый фокус) для системы (9).

В задачах 26–34 для каждой системы с двумя популяциями сначала опишите тип популяций x и y (подчиняется экспоненциальному закону или логистическому) и характер (природа) их взаимодействия — конкуренция (соревнование), сотрудничество или хищничество. Затем найдите и охарактеризуйте точки равновесия системы (укажите их тип и устойчивость). Определите, при каких отличных от нуля x и y могут сосуществовать эти популяции? Наконец, создайте фазовый портрет, который даст возможность описать длительное поведение этих двух популяций в терминах начальных численностей этих популяций $x(0)$ и $y(0)$.

26. $\dfrac{dx}{dt} = 2x - xy, \quad \dfrac{dy}{dt} = 3y - xy$

27. $\dfrac{dx}{dt} = 2xy - 4x, \quad \dfrac{dy}{dt} = xy - 3y$

28. $\dfrac{dx}{dt} = 2xy - 16x, \quad \dfrac{dy}{dt} = 4y - xy$

29. $\dfrac{dx}{dt} = 3x - x^2 - \dfrac{1}{2}xy, \quad \dfrac{dy}{dt} = 4y - 2xy$

30. $\dfrac{dx}{dt} = 3x - x^2 + \dfrac{1}{2}xy, \quad \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{5}xy - y$

31. $\dfrac{dx}{dt} = 3x - x^2 - \dfrac{1}{4}xy, \quad \dfrac{dy}{dt} = xy - 2y$

32. $\dfrac{dx}{dt} = 30x - 3x^2 + xy, \quad \dfrac{dy}{dt} = 60y - 3y^2 + 4xy$

33. $\dfrac{dx}{dt} = 30x - 2x^2 - xy, \quad \dfrac{dy}{dt} = 80y - 4y^2 + 2xy$

34. $\dfrac{dx}{dt} = 30x - 2x^2 - xy, \quad \dfrac{dy}{dt} = 20y - 4y^2 + 2xy$

6.3. Приложение. Ваш собственный заповедник живой природы

Вы имеете большой заповедник для сохранения живой природы, в который вы первоначально поселили F_0 лис и R_0 кроликов 1 января 1999 года. Следующие дифференциальные уравнения моделируют численность кроликов $R(t)$ и лис $F(t)$ спустя t месяцев:

$$\frac{dR}{dt} = (0{,}01)pR - (0{,}0001)aRF,$$

$$\frac{dF}{dt} = -(0{,}01)qF + (0{,}0001)bRF,$$

где p и q — две наибольшие цифры (причем $p < q$), а a и b — две наименьшие отличные от нуля цифры (причем $a < b$) в номере вашего студенческого билета.

Численности лис и кроликов будут колебаться периодически, не в фазе (т. е. фазы совпадать не будут) друг с другом (подобно функциям $x(t)$ и $y(t)$ на рис. 6.3.3). Выберите ваши начальные численности лис F_0 и кроликов R_0 (примерно несколько сотен для каждого вида) так, чтобы полученная интегральная кривая в плоскости RF была довольно эксцентричной замкнутой кривой. (Эксцентриситет легко увеличить, если начать с относительно большого

количества кроликов и небольшого количества лис — именно так естественно поступил бы любой владелец заповедника для сохранения живой природы, потому что лисы охотятся на кроликов.)

Ваша задача состоит в том, чтобы определить следующие параметры:

1) период колебания численности популяций кроликов и лис;
2) максимальные и минимальные численности кроликов и календарные даты, на которые приходятся эти значения в первый раз;
3) максимальные и минимальные численности лис и календарные даты, на которые приходятся эти значения в первый раз.

Используя программное обеспечение, которое может вычертить траектории на плоскости *RF*, и интегральные кривые (зависимости R и F от t) так, как это сделано на рис. 6.3.2 и 6.3.3, вы можете увеличить графики в окрестности точек, координаты которых представляют собой искомые значения.

6.4. Нелинейные механические системы

Теперь мы применяем качественные методы разделов 6.1 и 6.2 к анализу простых механических систем, подобных системе "материальная точка заданной массы на пружине", показанной на рис. 6.4.1. Пусть m обозначает массу в подходящей системе единиц, а через $x(t)$ обозначим смещение материальной точки заданной массы в момент времени t от ее положения равновесия (в котором пружина нерастянута). Ранее мы всегда предполагали, что сила $F(x)$, приложенная пружиной к материальной точке заданной массы, является *линейной* функцией от x: $F(x) = -kx$ (закон Гука). В действительности, однако, каждая пружина по своей природе фактически нелинейна (хотя бы даже и совсем незначительно). Кроме того, пружины в некоторых автомобильных подвесных системах преднамеренно разрабатываются так, чтобы они были нелинейными. В данном разделе мы особенно интересуемся эффектами нелинейности.

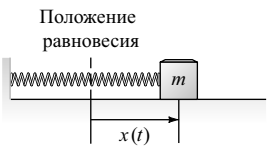


Рис. 6.4.1. Материальная точка заданной массы на пружине

Итак, теперь мы считаем силовую функцию $F(x)$ нелинейной. Поскольку $F(0) = 0$ в положении равновесия $x = 0$, мы можем предположить, что F имеет разложение в степенной ряд вида

$$F(x) = -kx + \alpha x^2 + \beta x^3 + \cdots . \tag{1}$$

Мы полагаем $k > 0$, так что реакция пружины направлена напротив смещения, когда x является достаточно маленьким. Если мы предполагаем также, что реакция пружины симметрична относительно положительных и отрицательных смещений на то же самое расстояние,

то $F(-x) = -F(x)$, так что F — *нечетная* функция. В таком случае из этого следует, что коэффициент при x^n в уравнении (1) равен нулю, если n четное, так что первый нелинейный член — тот, который содержит x^3.

Поэтому в качестве простой математической модели нелинейной пружины мы берем

➤
$$F(x) = -kx + \beta x^3, \tag{2}$$

игнорируя в уравнении (1) все слагаемые степени больше 3. Тогда уравнение движения материальной точки заданной массы m примет вид

➤
$$mx'' = -kx + \beta x^3. \tag{3}$$

Фазовая плоскость скорость–положение

Если мы введем *скорость*

$$y(t) = x'(t) \tag{4}$$

материальной точки заданной массы, *положение* которой задает функция $x(t)$, то мы сможем перейти от уравнения (3) к эквивалентной системе первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ m\frac{dy}{dt} &= -kx + \beta x^3. \end{aligned} \tag{5}$$

Если на фазовой плоскости скорость–положение начертить траекторию этой системы, то чертеж будет иллюстрировать движение материальной точки заданной массы на пружине. Мы можем решить систему явно и тем самым найти траектории этой системы. Для этого запишем уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-kx + \beta x^3}{my},$$

откуда получим уравнение

$$my\,dy + (kx - \beta x^3)\,dx = 0.$$

Последующее интегрирование позволяет получить уравнение типичной траектории в виде

$$\tfrac{1}{2}my^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 - \tfrac{1}{4}\beta x^4 = E. \tag{6}$$

Мы пишем E в качестве произвольной постоянной интегрирования, потому что $KE = \tfrac{1}{2}my^2$ — кинетическая энергия материальной точки заданной массы, движущейся со скоростью y, и естественно определить

$$PE = \tfrac{1}{2}kx^2 - \tfrac{1}{4}\beta x^4 \tag{7}$$

как потенциальную энергию пружины. С учетом этого уравнение (6) принимает вид $KE + PE = E$ и, таким образом, выражает закон сохранения энергии для движения материальной точки заданной массы на пружине *без сопротивления* (т. е. без демпфирования, без трения).

Поведение материальной точки заданной массы зависит от знака нелинейного члена в уравнении (2). Пружину называют

- *жесткой*, если $\beta < 0$,
- *мягкой (незакаленной)*, если $\beta > 0$.

Мы рассматриваем эти два случая отдельно.

Колебания жесткой пружины. Если $\beta < 0$, то второе уравнение в (5) принимает вид $my' = -x\left(|\beta|x^2 + k\right)$, так что единственная точка равновесия системы находится в начале координат $(0, 0)$. Каждая траектория

$$\tfrac{1}{2}my^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 + \tfrac{1}{4}|\beta|x^4 = E > 0 \tag{8}$$

представляет собой овальную замкнутую кривую, подобную показанным на рис. 6.4.2, а потому начало координат $(0, 0)$ представляет собой устойчивый центр. Поскольку точка $(x(t), y(t))$ движется по траектории в направлении по часовой стрелке, положение $x(t)$ и скорость $y(t)$ материальной точки заданной массы колеблется поочередно, как показано на рис. 6.4.3. Материальная точка заданной массы движется направо (при увеличении x), когда $y > 0$, и налево, когда $y < 0$. Таким образом, поведение материальной точки заданной массы на нелинейной жесткой пружине напоминает качественно поведение материальной точки заданной массы на линейной пружине при $\beta = 0$ (как в примере 4 из раздела 6.1). Но есть одно различие между линейными и нелинейными ситуациями: период $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ колебаний материальной точки заданной массы на линейной пружине не зависит от начальных условий, а период колебаний материальной точки заданной массы на нелинейной пружине зависит от начального положения $x(0)$ и начальной скорости $y(0)$ (подробности см. в задачах 17–22).

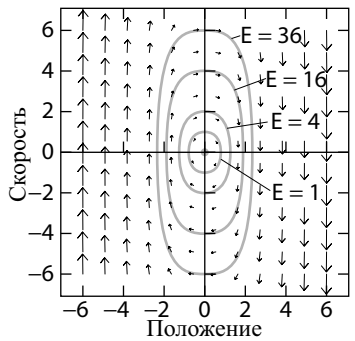


Рис. 6.4.2. Фазовый портрет скорость–положение для системы, состоящей из материальной точки заданной массы, закрепленной на жесткой пружине, при $m = k = 2$ и $\beta = -4 < 0$

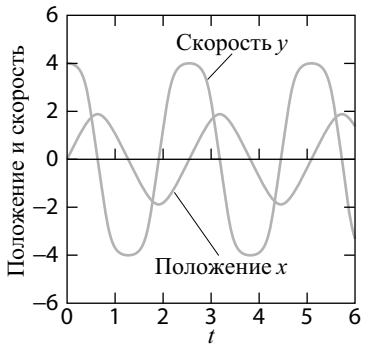


Рис. 6.4.3. Интегральные кривые для положения и скорости в случае системы, состоящей из материальной точки заданной массы, закрепленной на жесткой пружине, при $m = k = 2$ и $\beta = -4 < 0$

Замечание. Уравнение для жесткой пружины $mx'' = -kx - |\beta|x^3$ эквивалентно системе первого порядка

$$x' = y, \quad y' = -\frac{k}{m}x - \frac{|\beta|}{m}x^3$$

с матрицей Якоби

$$\mathbf{J}(x,y)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m}-\dfrac{3|\beta|}{m}x^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{так что} \quad \mathbf{J}(0,0)=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}$$

(как обычно, вводим обозначение $k/m=\omega^2$). Последняя матрица имеет характеристическое уравнение $\lambda^2+\omega^2=0$ и чисто мнимые собственные значения $\lambda_1,\ \lambda_2=\pm\omega i$. Таким образом, линеаризованная система $x'=y,\ y'=-\omega^2 x$ имеет устойчивый центр в критической точке $(0,0)$, как мы видели в примере 4 из раздела 6.1. Однако нелинейный кубический член в дифференциальном уравнении повлиял на эллиптические траектории (показанные на рис. 6.1.7) линейной системы и теперь они заменены более сплющенными овалами, имеющими уравнение четвертой степени (они показаны на рис. 6.4.2). ■

Колебания мягкой пружины. Если $\beta>0$, то второе уравнение системы (5) принимает вид $my'=x\left(\beta x^2-k\right)$. Поэтому, кроме критической точки $(0,0)$, система имеет еще две точки равновесия $\left(\pm\sqrt{k/\beta},0\right)$. Эти три точки равновесия соответствуют трем решениям, для которых материальная точка заданной массы может остаться в покое, причем других таких решений нет. Следующий пример иллюстрирует больший диапазон возможных типов поведения материальной точки заданной массы на мягкой пружине.

Пример 1 При $m=1$, $k=4$ и $\beta=1$ уравнение движения материальной точки заданной массы примет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2}+4x-x^3=0, \tag{9}$$

и уравнение (6) даст траектории вида

$$\tfrac{1}{2}y^2+2x^2-\tfrac{1}{4}x^4=E. \tag{10}$$

Найдя y из этого уравнения, получим

$$y=\pm\sqrt{2E-4x^2+\tfrac{1}{2}x^2}. \tag{10′}$$

Мы можем выбрать фиксированное значение постоянной энергии E и вручную начертить траекторию, подобную одной из тех, что мы видим на сгенерированном компьютером фазовом портрете в координатах скорость–положение (рис. 6.4.4).

Различные типы траекторий на фазовой плоскости соответствуют различным значениям энергии E. Если мы подставим $x=\pm\sqrt{k/\beta}$ и $y=0$ в (6), мы получим значение энергии $E=k^2/(4\beta)=4$ (потому что $k=4$ и $\beta=1$), которое соответствует траекториям, которые пересекают ось x в нетривиальных критических точках $(-2,0)$ и $(2,0)$. Эти выделенные траектории называют **сепаратрисами**, потому что они отделяют области фазовой плоскости, в которых поведение траекторий разное.

Характер (природа) движения материальной точки заданной массы определяется типом траектории, который в свою очередь определяется начальными условиями. Простые замкнутые траектории, содержащие

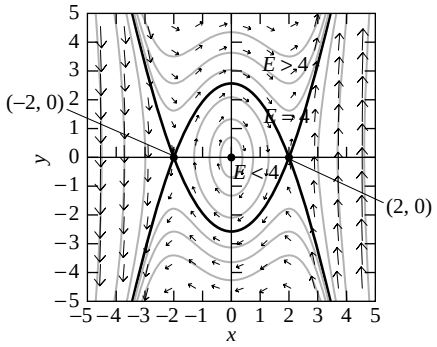


Рис. 6.4.4. Фазовый портрет в координатах скорость–положение для системы, состоящей из материальной точки заданной массы, закрепленной на мягкой пружине, при $m = 1$, $k = 4$ и $\beta = 1 > 0$. Сепаратрисы выделены

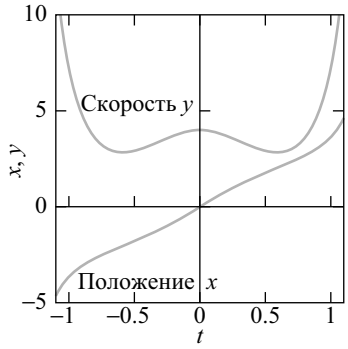


Рис. 6.4.5. Интегральные кривые положения и скорости для системы, состоящей из материальной точки заданной массы, закрепленной на мягкой пружине, при $m = 1$, $k = 4$, $\beta = 1 > 0$, и энергии $E = 8$ — достаточно большой, чтобы материальная точка заданной массы приблизилась к началу координат слева и удалилась от него вправо

внутри себя начало координат $(0, 0)$ в области, ограниченной сепаратрисами, соответствуют энергиям в диапазоне $0 < E < 4$. Эти замкнутые траектории представляют *периодические* колебания материальной точки заданной массы назад и вперед около точки равновесия $x = 0$.

Неограниченные траектории, лежащие в областях выше и ниже сепаратрис, соответствуют значениям E, большим 4. Они представляют движения, в которых материальная точка заданной массы приближается к $x = 0$ с достаточно большой энергией, благодаря чему она проходит через точку равновесия, к которой затем никогда не возвращается снова (как показано на рис. 6.4.5).

Неограниченные незамнутые траектории справа и слева соответствуют отрицательным значениям E. Они представляют движения, в которых материальная точка заданной массы первоначально направляется к точке равновесия $x = 0$, но с энергией, недостаточной, чтобы достичь ее. В некоторый момент материальная точка заданной массы полностью изменяет направление и возвращается назад туда, откуда она пришла.

На рис. 6.4.4 видно, что точка равновесия $(0, 0)$ — устойчивый центр, тогда как точки равновесия $(\pm 2, 0)$ напоминают седловые точки эквивалентной системы первого порядка

$$x' = y, \quad y' = -4x + x^3 \tag{11}$$

с матрицей Якоби

$$\mathbf{J}(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 + 3x^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Чтобы подтвердить эти наблюдения обычным анализом точки равновесия, мы сначала обращаем внимание на то, что матрица Якоби

$$\mathbf{J}(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

в критической точке $(0,0)$ имеет характеристическое уравнение $\lambda^2 + 4 = 0$ и чисто мнимые собственные значения λ_1, $\lambda_2 = \pm 2i$, что указывает на устойчивый центр. Кроме того, матрицы Якоби

$$\mathbf{J}(\pm 2, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix},$$

соответствующие двум другим критическим точкам, имеют характеристическое уравнение $\lambda^2 - 8 = 0$ и вещественные собственные значения λ_1, $\lambda_2 = \pm\sqrt{8}$ противоположных знаков, что указывает на поведение в окрестности седловой точки, что мы и наблюдаем в окрестности точек $(-2,0)$ и $(+2,0)$. ■

Замечание. Рис. 6.4.2 и 6.4.4 иллюстрируют существенную качественную разницу между жесткими (закаленными) пружинами с $\beta < 0$ и мягкими пружинами с $\beta > 0$ в нелинейном уравнении $mx'' = kx + \beta x^3$. Принимая во внимание, что все траектории на фазовой плоскости для жестких (закаленных) пружин ограничены, мягким пружинам на фазовой плоскости соответствуют неограниченные траектории (а также ограниченные). Однако мы должны понимать, что неограниченные траектории в случае мягких пружины на самом деле не представляют физически реальные движения, когда при движении по ним будет превышена способность пружины растягиваться без разрыва. ■

Нелинейные затухающие колебания

Предположим теперь, что материальная точка заданной массы на пружине связана также с поршнем, который действует с силой сопротивления, пропорциональной скорости $y = dx/dt$ материальной точки заданной массы. Если пружина все еще рассматривается как нелинейная (т. е. как в уравнении (2)), то уравнение движения материальной точки заданной массы имеет вид

➤
$$mx'' = -cx' - kx + \beta x^3, \tag{12}$$

где $c > 0$ — константа сопротивления. Если $\beta > 0$, то эквивалентная система первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{-kx - cy + \beta x^3}{m} = -\frac{c}{m}y - \frac{k}{m}x\left(1 - \frac{\beta}{k}x^2\right) \tag{13}$$

имеет точки равновесия $(0,0)$ и $\left(\pm\sqrt{k/\beta}, 0\right)$ и матрицу Якоби

$$\mathbf{J}(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} + \dfrac{3\beta}{m}x^2 & -\dfrac{c}{m} \end{bmatrix}.$$

Теперь наибольший интерес представляет точка равновесия в начале координат. Матрица Якоби

$$\mathbf{J}(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{c}{m} \end{bmatrix}$$

имеет характеристическое уравнение

$$(-\lambda)\left(-\frac{c}{m} - \lambda\right) + \frac{k}{m} = \frac{1}{m}(m\lambda^2 + c\lambda + k) = 0$$

и собственные значения

$$\lambda_1,\ \lambda_2 = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}.$$

Из теоремы 2 раздела 6.2 следует, что в критической точке $(0, 0)$ системы (13) имеем

- узел-сток, если сопротивление является настолько большим, что $c^2 > 4km$ (т. е. когда собственные значения отрицательны и неравны), но
- спиральный сток (устойчивый фокус), если $c^2 < 4km$ (т. е. когда собственные значения комплексно сопряженные с отрицательной вещественной частью).

Следующий пример иллюстрирует последний случай. (В пограничном случае равных отрицательных собственных значений начало координат может быть или узлом-стоком, или спиральным стоком (устойчивым фокусом).)

Пример 2 Предположим, что $m = 1$, $c = 2$, $k = 5$ и $\beta = \frac{5}{4}$. Тогда нелинейная система (13) примет вид

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -5x - 2y + \tfrac{5}{4}x^3 = -2y - 5x(1 - \tfrac{1}{4}x^2). \tag{14}$$

Она имеет точки равновесия $(0, 0)$, $(\pm 2, 0)$ и матрицу Якоби

$$\mathbf{J}(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 + \frac{15}{4}x^2 & -2 \end{bmatrix}.$$

В начале координат $(0, 0)$ матрица Якоби

$$\mathbf{J}(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$$

имеет характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ и комплексно сопряженные собственные значения $\lambda_1,\ \lambda_2 = -1 \pm 2i$ с отрицательной вещественной частью. Следовательно, начало координат $(0, 0)$ — спиральный сток (устойчивый фокус) нелинейной системы (14), причем линеаризованная функция, дающая положение материальной точки заданной массы, имеет вид

$$x(t) = e^{-t}(A\cos 2t + B\sin 2t),$$

которой соответствует экспоненциально затухающее колебание с положением равновесия $x = 0$.

В точке $(\pm 2, 0)$ матрица Якоби

$$\mathbf{J}(\pm 2, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & -2 \end{bmatrix}$$

имеет характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2\lambda - 10 = 0$ и вещественные собственные значения $\lambda_1 = -1 - \sqrt{11} < 0$ и $\lambda_2 = -1 + \sqrt{11} > 0$ с различными знаками. Из этого следует, что обе точки $(-2, 0)$ и $(+2, 0)$ — седловые точки системы (14).

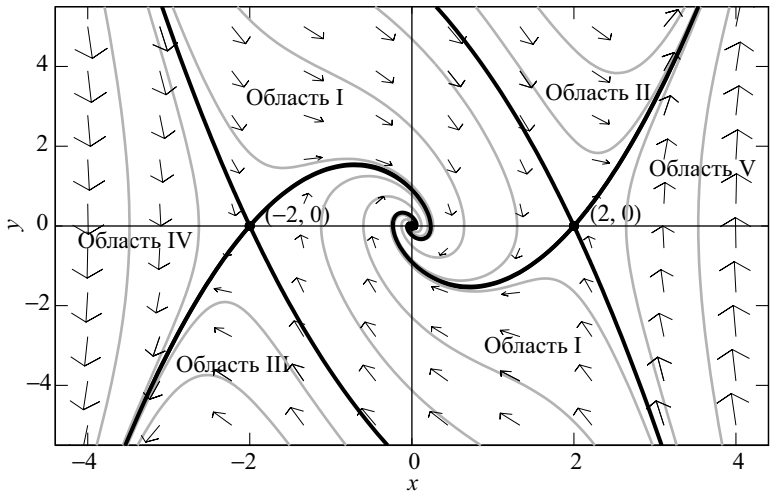


Рис. 6.4.6. Фазовый портрет в координатах скорость–положение для системы, состоящей из материальной точки заданной массы, закрепленной на мягкой пружине, при $m = 1$, $k = 5$, $\beta = \frac{5}{4}$, причем константа сопротивления $c = 2$. Сепаратрисы выделены черным

Фазовый портрет в координатах скорость–положение на рис. 6.4.6 показывает траектории (14) и спиральный сток (устойчивый фокус) в начале координат $(0, 0)$, а также неустойчивые седловые точки $(-2, 0)$ и $(2, 0)$. Выделенные сепаратрисы делят фазовую плоскость на области, в которых поведение траекторий различно. Поведение материальной точки заданной массы зависит от области, в которой расположена ее начальная точка (x_0, y_0). Если эта начальная точка находится в

- области I между сепаратрисами, то спиральные траектории стремятся к началу координат при $t \to +\infty$ и, следовательно, незатухающие периодические колебания недемпфированного случая (рис. 6.4.4) теперь заменены затухающими колебаниями вокруг устойчивого положения равновесия $x = 0$;
- области II, то материальная точка заданной массы проходит через $x = 0$ при движении слева направо (x увеличивается);

- области III, то материальная точка заданной массы проходит через $x = 0$ при движении справа налево (x уменьшается);
- области IV, то материальная точка заданной массы стремится к положению неустойчивого равновесия (но не достигает его) $x = -2$ слева, но останавливается и затем возвращается влево;
- области V, то материальная точка заданной массы стремится к положению неустойчивого равновесия (но не достигает его) $x = 2$ справа, но останавливается и затем возвращается вправо.

Если начальная точка (x_0, y_0) находится точно на одной из сепаратрис, то соответствующая траектория или приближается к устойчивому фокусу, или убегает на бесконечность от седловой точки при $t \to +\infty$. ■

Нелинейный маятник

В разделе 3.4 мы получили уравнение

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0 \tag{15}$$

для незатухающих колебаний математического маятника, показанного на рис. 6.4.7. Там мы использовали аппроксимацию $\sin\theta \approx \theta$ для θ в окрестности нуля, чтобы заменить уравнение (15) линейной моделью

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0, \tag{16}$$

где $\omega^2 = g/L$. Общее решение

$$\theta(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \tag{17}$$

уравнения (16) описывает колебания около положения равновесия $\theta = 0$ с круговой частотой ω и амплитудой $C = (A^2 + B^2)^{1/2}$.

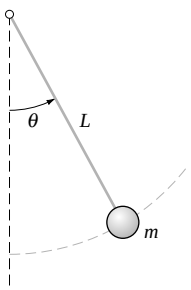


Рис. 6.4.7. Математический маятник

Линейная модель непригодна для описания возможных движений маятника для больших значений θ. Например, равновесное решение $\theta(t) \equiv \pi$ уравнения (15) для маятника, стоящего прямо, не удовлетворяет линейному уравнению (16). И при этом уравнение (17)

не описывает движение, при котором маятник неоднократно проходит через вершину, т. е. когда $\theta(t)$ монотонно увеличивается, а не является колеблющейся функцией, зависящей от t. Чтобы исследовать эти явления, мы должны проанализировать нелинейное уравнение $\theta'' + \omega^2 \sin\theta = 0$, а не просто его линеаризацию $\theta'' + \omega^2\theta = 0$. Мы также хотим включить возможность учета сопротивления, пропорционального скорости, так что мы рассматриваем общее *нелинейное уравнение маятника*

➤
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + c\frac{d\theta}{dt} + \omega^2 \sin\theta = 0. \tag{18}$$

Мы исследуем сначала случай незатухающих колебаний, в котором $c = 0$. При $x(t) = \theta(t)$ и $y(t) = \theta'(t)$ эквивалентная система первого порядка принимает вид

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\omega^2 \sin x. \tag{19}$$

Мы видим, что эта система почти линейна, если записать ее в форме

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -\omega^2 x + g(x), \end{aligned} \tag{20}$$

где

$$g(x) = -\omega^2(\sin x - x) = \omega^2\left(\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)$$

имеет только члены более высокого порядка.

Точки равновесия системы (19) — это точки $(n\pi, 0)$ где n — целое число, причем матрица Якоби равна

$$\mathbf{J}(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 \cos x & 0 \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Характер (природа) точки равновесия $(n\pi, 0)$ зависит от того, является n четным или нечетным.

Случай четного n. Если $n = 2m$ — четное целое число, то $\cos n\pi = +1$, так что (21) дает матрицу

$$\mathbf{J}(2m\pi, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}$$

с характеристическим уравнением $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ и чисто мнимыми собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2 = \pm\omega i$. Поэтому линеаризация (19) в точке $(n\pi, 0)$ представляет собой систему

$$\frac{du}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = -\omega^2 u, \tag{22}$$

для которой начало координат $(0, 0)$ является знакомым устойчивым центром, окруженным эллиптическими траекториями (как в примере 4 из раздела 6.1). Хотя это тонкий случай, для которого теорема 2 из раздела 6.2 не решает вопрос, мы увидим теперь, что $(2m\pi, 0)$ также является устойчивым центром для первоначальной нелинейной системы (19), описывающей маятник.

Случай нечетного n. Если $n = 2m + 1$ — нечетное целое число, то $\cos n\pi = -1$, так что (21) дает матрицу

$$\mathbf{J}((2m+1)\pi, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{bmatrix}$$

с характеристическим уравнением $\lambda^2 - \omega^2 = 0$ и вещественными собственными значениями λ_1, $\lambda_2 = \pm\omega$ с различными знаками. Поэтому линеаризация (19) в точке $((2m+1)\pi, 0)$ представляет собой систему

$$\frac{du}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = \omega^2 u, \tag{23}$$

для которой начало координат $(0, 0)$ является седловой точкой. Теперь из теоремы 2 раздела 6.2 следует, что точка равновесия $((2m+1)\pi, 0)$ — подобная седловая точка для первоначальной нелинейной системы (19), описывающей маятник.

Траектории. Теперь, чтобы увидеть, как эти "четные центры" и "нечетные седловые точки" примыкают один к одному, из системы (19) найдем траектории на фазовой плоскости в явном виде. Если мы напишем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = -\frac{\omega^2 \sin x}{y}$$

и отделим переменные,

$$y\,dy + \omega^2 \sin x\,dx = 0,$$

то интегрирование от $x = 0$ до $x = x$ приведет нас к равенству

$$\tfrac{1}{2}y^2 + \omega^2(1 - \cos x) = E. \tag{24}$$

Мы пишем E в качестве произвольной постоянной интегрирования, потому что если физические единицы выбраны так, что $m = L = 1$, то первый член в левой части является кинетической энергией, а второй выражает потенциальную энергию материальной точки заданной массы, закрепленной на конце маятника. Тогда E — полная механическая энергия; таким образом, уравнение (24) выражает закон сохранения механической энергии для незатухающих колебаний маятника.

Если мы решим уравнение (24) относительно y и используем тождество для половинного угла, мы получим уравнение

$$y = \pm\sqrt{2E - 4\omega^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}x} \tag{25}$$

траекторий на фазовой плоскости. Обратите внимание, что подкоренное выражение в (25) остается положительным, если $E > 2\omega^2$. На рис. 6.4.8 показаны (вместе с полем направлений) результаты построения этих траекторий для различных значений энергии E.

Сепаратрисы (выделенные черным на рис. 6.4.8) соответствуют критическому значению $E = 2\omega^2$ энергии; они входят (и убегают) в неустойчивые точки равновесия $(n\pi, 0)$, где n — нечетное целое число. Следуя вдоль стрелок по сепаратрисам, маятник теоретически приближается к вертикальному положению (балансировать в котором было бы весьма трудно) $\theta = x = (2m+1)\pi$ с количеством энергии, достаточным только для того, чтобы достичь этого положения, но недостаточным, чтобы "перескочить через вершину". Неустойчивость

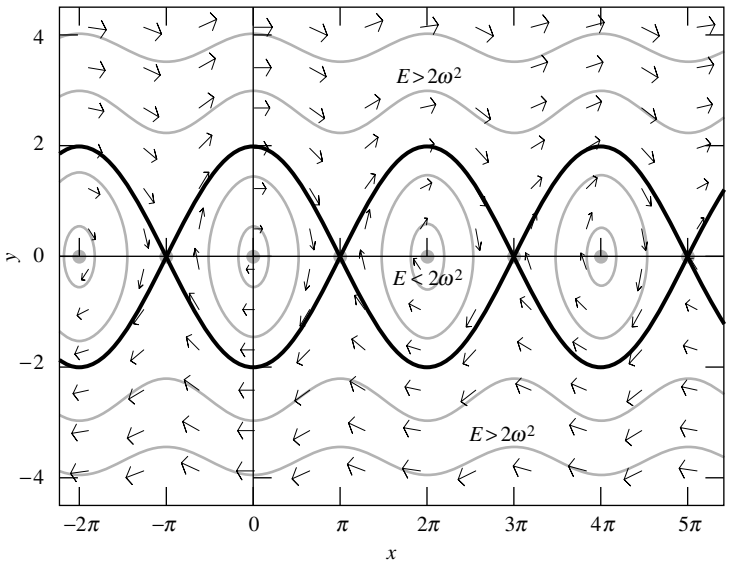


Рис. 6.4.8. Фазовый портрет в координатах скорость–положение для системы $x' = y$, $y' = -\sin x$, описывающей незатухающие колебания маятника. Сепаратрисы выделены черным

этого положения равновесия указывает, что такое поведение никогда не может наблюдаться практически!

Простые замкнутые траектории, окружающие устойчивые точки равновесия — все они соответствуют нижнему положению $\theta = 2m\pi$ маятника, — представляют периодические колебания маятника назад и вперед вокруг положения устойчивого равновесия $\theta = 0$. Они соответствуют энергиям $E < 2\omega^2$, которые недостаточны, чтобы маятник поднялся до вертикального положения.

Неограниченные траектории с $E > 2\omega^2$ представляют круговые движения маятника, в которых он неоднократно проскакивает через вершину в направлении по часовой стрелке, если $y(t)$ остается положительным, и в направлении против часовой стрелки, если $y(t)$ отрицательно.

Период незатухающих колебаний

Если маятник отпущен из состояния покоя с начальными условиями

$$x(0) = \theta(0) = \alpha, \quad y(0) = \theta'(0) = 0, \tag{26}$$

то уравнение (24) при $t = 0$ приводит к

$$\omega^2(1 - \cos\alpha) = E. \tag{27}$$

Следовательно, $E < 2\omega^2$, если $0 < \alpha < \pi$, так что маятник совершает периодические колебания. Чтобы определить *период* этих колебаний, мы вычитаем уравнение (27) из урав-

нения (24) и пишем результат (при $x = \theta$ и $y = d\theta/dt$) в форме

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \omega^2(\cos\theta - \cos\alpha). \tag{28}$$

Период T времени, требуемый для одного полного колебания, в четыре раза больше времени, требуемого для уменьшения θ от $\theta = \alpha$ до $\theta = 0$, т. е. времени, необходимого для совершения одной четверти колебания. Следовательно, чтобы найти период, мы решаем уравнение (28) относительно $dt/d\theta$ и интегрируем полученное выражение:

$$T = \frac{4}{\omega\sqrt{2}}\int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}. \tag{29}$$

Чтобы оценить этот интеграл, мы сначала используем тождество $\cos\theta = 1 - 2\sin^2(\theta/2)$ и получаем

$$T = \frac{2}{\omega}\int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{k^2 - \sin^2(\theta/2)}},$$

где

$$k = \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Затем замена $u = (1/k)\sin(\theta/2)$ приводит к

$$T = \frac{4}{\omega}\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}.$$

Наконец, замена $u = \sin\phi$ дает

$$T = \frac{4}{\omega}\int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\phi}}. \tag{30}$$

Интеграл в (30) в действительности представляет собой *эллиптический интеграл первого рода*, который часто обозначается $F(k, \pi/2)$. Его численное значение может быть оценено следующим образом. Сначала, чтобы разложить в ряд подынтегральное выражение в (30), мы используем биномиальный ряд

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}x^n \tag{31}$$

при $x = k^2\sin^2\phi < 1$. Затем мы почленно интегрируем, используя табличную формулу интегрирования

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n}\phi\, d\phi = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}. \tag{32}$$

Окончательный результат выражает формула

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\right)^2 k^{2n}\right] = \\ &= T_0\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + \cdots\right] \end{aligned} \tag{33}$$

для периода T нелинейного маятника, выпущенного из состояния покоя с начальным углом $\theta(0) = \alpha$. Эта формула дает выражение искомого периода нелинейных колебаний через период линейных колебаний $T_0 = 2\pi/\omega$ и $k = \sin(\alpha/2)$.

Бесконечный ряд во второй паре скобок в равенстве (33) представляет собой коэффициент (множитель) T/T_0, который указывает, во сколько раз период T нелинейных колебаний больше, чем период линейных колебаний. Таблица на рис. 6.4.9 получена численным суммированием этого ряда; она показывает, как T/T_0 увеличивается при увеличении α. Таким образом, T на $0{,}19\%$ больше, чем T_0, если $\alpha = 10°$, тогда как T на $18{,}03\%$ больше, чем T_0, если $\alpha = 90°$. Но даже разница на $0{,}19\%$ существенна, как показывает вычисление

$$(0{,}0019) \times 3600 \frac{\text{секунда}}{\text{час}} \times 24 \frac{\text{час}}{\text{день}} \times 7 \frac{\text{день}}{\text{неделя}} \approx 1149 \,(\text{секунда}/\text{неделя}).$$

Это вычисление показывает, что линеаризованная модель весьма неадекватна для часового маятника; ведь расхождение на 19 минут 9 секунд только за одну неделю недопустимо.

α	T/T_0
$10°$	1,0019
$20°$	1,0077
$30°$	1,0174
$40°$	1,0313
$50°$	1,0498
$60°$	1,0732
$70°$	1,1021
$80°$	1,1375
$90°$	1,1803

Рис. 6.4.9. Зависимость периода T нелинейных колебаний маятника от начального угла отклонения α

Затухающие колебания маятника

Наконец, мы кратко обсудим нелинейные *затухающие* колебания маятника. Почти линейный эквивалент системы первого порядка уравнению (19) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -\omega^2 \sin x - cy, \end{aligned} \tag{34}$$

и снова координаты точки равновесия имеют вид $(n\pi, 0)$ где n — целое число. В задачах 9–11 мы просим вас проверить, что

- если n нечетно, то $(n\pi, 0)$ — неустойчивая седловая точка системы (34), — так же, как и в случае незатухающих колебаний; но

- если n четно и $c^2 > 4\omega^2$, то $(n\pi, 0)$ — узел-сток; тогда как
- если n четно и $c^2 < 4\omega^2$, то $(n\pi, 0)$ — спиральный сток (устойчивый фокус).

На рис. 6.4.10 показаны траектории на фазовой плоскости для более интересного случая слабозатухающих колебаний, $c^2 < 4\omega^2$. Кроме физически нереализуемых траекторий-сепаратрис, которые входят в неустойчивые седловые точки, каждая траектория в конечном счете попадает в ловушку, т. е. ловится одним из устойчивых фокусов $(n\pi, 0)$, где n — четное целое число. Это означает, что даже если маятник начинает колебаться с достаточным количеством энергии, чтобы пробежать через вершину, после некоторого (конечного) числа оборотов он потеряет такое (т. е. достаточно большое для этого) количество энергии, что после этого он будет совершать затухающие колебания вокруг его устойчивого (нижнего) положения равновесия.

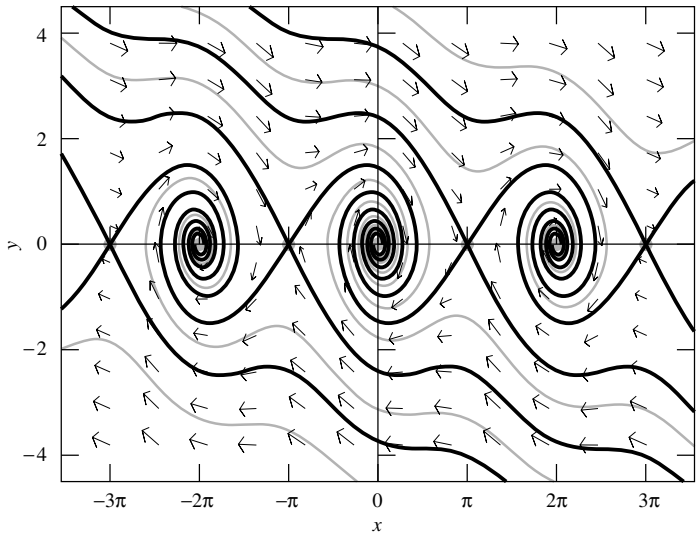


Рис. 6.4.10. Фазовый портрет (в координатах скорость–положение) для системы $x' = y, y' = -\sin x - \frac{1}{4}y$, описывающей затухающие колебания маятника. Сепаратрисы выделены черным

6.4. Задачи

В задачах 1–4 покажите, что данная система почти линейна, причем имеет точку равновесия $(0, 0)$*, и классифицируйте эту критическую точку, т. е. определите ее тип и устойчивость. С помощью компьютерной системы или графического калькулятора начертите фазовый портрет, который иллюстрирует ваше заключение.*

1. $\dfrac{dx}{dt} = 1 - e^x + 2y$, $\dfrac{dy}{dt} = -x - 4\sin y$

2. $\dfrac{dx}{dt} = 2\sin x + \sin y$, $\dfrac{dy}{dt} = \sin x + 2\sin y$ (рис. 6.4.11)

3. $\dfrac{dx}{dt} = e^x + 2y - 1$, $\dfrac{dy}{dt} = 8x + e^y - 1$

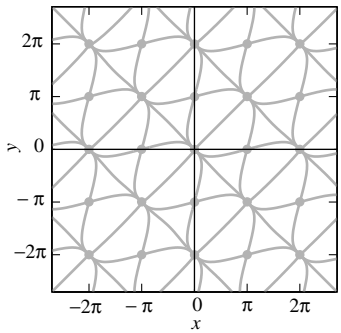


Рис. 6.4.11. Траектории системы в задаче 2

4. $\dfrac{dx}{dt} = \sin x \cos y - 2y$, $\dfrac{dy}{dt} = 4x - 3\cos x \sin y$

В задачах 5–8 найдите и классифицируйте каждую из точек равновесия почти линейных систем. С помощью компьютерной системы или графического калькулятора начертите фазовый портрет, который иллюстрирует ваши результаты.

5. $\dfrac{dx}{dt} = -x + \sin y$, $\dfrac{dy}{dt} = 2x$

6. $\dfrac{dx}{dt} = y$, $\dfrac{dy}{dt} = \sin \pi x - y$

7. $\dfrac{dx}{dt} = 1 - e^{x-y}$, $\dfrac{dy}{dt} = 2\sin x$

8. $\dfrac{dx}{dt} = 3\sin x + y$, $\dfrac{dy}{dt} = \sin x + 2y$

В задачах 9–11 рассматривается система $x' = y$, $y' = -\omega^2 \sin x - cy$, описывающая затухающие колебания маятника.

9. Покажите, что если n — нечетное целое число, то точка равновесия $(n\pi, 0)$ является седловой точкой для системы, описывающей затухающие колебания маятника.

10. Покажите, что если n — четное целое число и $c^2 > 4\omega^2$, то точка равновесия $(n\pi, 0)$ — узел-сток для системы, описывающей затухающие колебания маятника.

11. Покажите, что если n — четное целое число и $c^2 < 4\omega^2$, то точка равновесия $(n\pi, 0)$ — спиральный сток (устойчивый фокус) для системы, описывающей затухающие колебания маятника.

В каждой из задач 12–16 дано уравнение второго порядка вида $x'' + f(x, x') = 0$, которое соответствует некоторой системе, состоящей из материальной точки заданной массы, закрепленной на пружине. Найдите и классифицируйте точки равновесия эквивалентной системы первого порядка.

12. $x'' + 20x - 5x^3 = 0$. Проверьте, что точки равновесия напоминают показанные на рис. 6.4.4.

13. $x'' + 2x' + 20x - 5x^3 = 0$. Проверьте, что точки равновесия напоминают показанные на рис. 6.4.6.

14. $x'' - 8x + 2x^3 = 0$. Здесь линейная часть силы является отталкивающей, а не притягивающей (как в обыкновенной пружине). Проверьте, что точки равновесия напоминают показанные на рис. 6.4.12. Таким образом, есть две точки устойчивого равновесия и три типа периодических колебаний.

15. $x'' + 4x - x^2 = 0$. Здесь силовая функция несимметрична. Проверьте, что точки равновесия напоминают показанные на рис. 6.4.13.

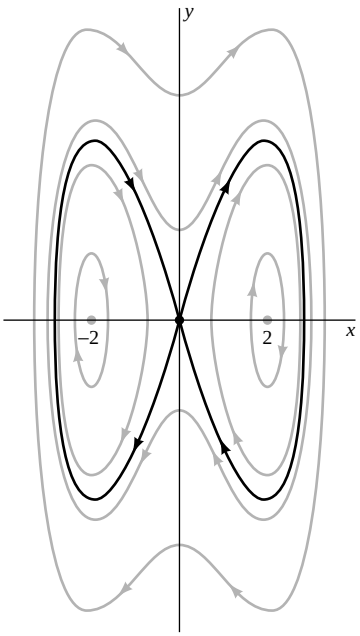


Рис. 6.4.12. Фазовый портрет для задачи 14

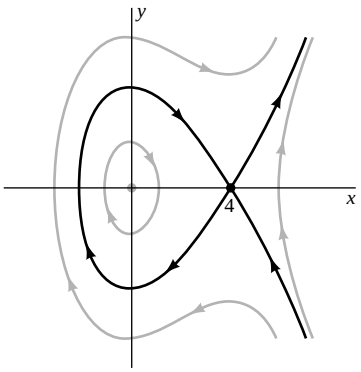


Рис. 6.4.13. Фазовый портрет для задачи 15

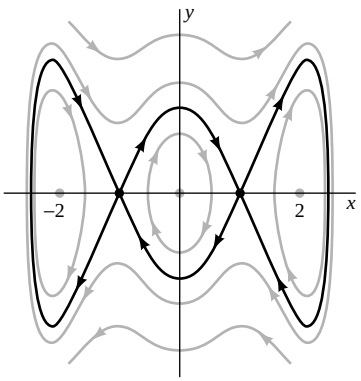


Рис. 6.4.14. Фазовый портрет для задачи 16

16. $x'' + 4x - 5x^3 + x^5 = 0$. Здесь идея состоит в том, что в силовой функции сохранены слагаемые всех нечетных степеней, вплоть до пятой. Проверьте, что точки равновесия напоминают показанные на рис. 6.4.14.

В задачах 17–20 проанализируйте точки равновесия указанной системы, с помощью компьютерной системы начертите иллюстративный фазовый портрет в координатах скорость–положение и опишите совершаемые колебания.

17. Пример 2 в этом разделе иллюстрирует случай затухающих колебаний в системе, состоящей из материальной точки заданной массы, закрепленной на мягкой пружине. Исследуйте пример затухающих колебаний в системе, состоящей из материальной точки заданной массы, закрепленной на жесткой (закаленной) пружине. Параметры системы возьмите те же самые, что и в примере 2, за исключением того, что теперь положите $\beta = -\frac{5}{4} < 0$.

18. Пример 2 иллюстрирует случай затухающих колебаний в системе, состоящей из материальной точки заданной массы, закрепленной на пружине, сопротивление которой пропорционально скорости. Исследуйте случай, когда член, выражающий сопротивление, пропорционален *квадрату* скорости. Параметры системы возьмите те же самые, что и в примере 2, но слагаемое, выражающее сопротивление, возьмите в виде $-cx'|x'|$, а не в виде $-cx'$, как в уравнении (12).

19. Теперь снова решите пример 2, но с изменениями, соответствующими задачам 17 и 18. Иными словами, возьмите $\beta = -\frac{5}{4} < 0$ *и* в уравнении (12) замените слагаемое, выражающее сопротивление, выражением $-cx'|x'|$.

20. Уравнения $x' = y$, $y' = -\sin x - \frac{1}{4}y|y|$ моделируют систему, состоящую из маятника с демпфером. Уравнения этой системы похожи на уравнения (34). Фазовый портрет этой системы похож на представленный на рис. 6.4.10. Но теперь сопротивление пропорционально *квадрату* угловой скорости маятника. Сравните совершаемые колебания с теми, которые происходят, когда сопротивление пропорционально угловой скорости.

Задачи 21–26 посвящены исследованию периода T колебаний материальной точки заданной массы на нелинейной пружине с уравнением движения

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \phi(x) = 0. \tag{35}$$

Если $\phi(x) = kx$, причем $k > 0$, то пружина фактически линейна, причем период $T_0 = 2\pi/\sqrt{k}$.

21. Проинтегрируйте один раз данное уравнение (по образцу уравнения (6)) и получите уравнение энергии

$$\tfrac{1}{2}y^2 + V(x) = E, \tag{36}$$

где $y = dx/dt$ и

$$V(x) = \int_0^x \phi(u)\,du. \tag{37}$$

22. Если материальная точка заданной массы, отпущенная из состояния покоя при начальных условиях $x(0) = x_0$, $y(0) = 0$, совершает периодические колебания, то из уравнения (36) следует, что $E = V(x_0)$ и что время T, требуемое для совершения одного полного колебания, равно

$$T = \frac{4}{\sqrt{2}}\int_0^{x_0} \frac{du}{\sqrt{V(x_0) - V(u)}}. \tag{38}$$

23. Пусть $\phi(x) = kx - \beta x^3$ (как в основном тексте). Выведите из уравнений (37) и (38), что

$$T = 4\sqrt{2}\int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{(x_0^2 - u^2)(2k - \beta x_0^2 - \beta u^2)}}. \tag{39}$$

24. Подставьте $u = x_0\cos\phi$ в (39) и покажите, что

$$T = \frac{2T_0}{\pi\sqrt{1-\epsilon}}\int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \mu\sin^2\phi}}, \tag{40}$$

где $T_0 = 2\pi/\sqrt{k}$ — период линейных колебаний,

$$\epsilon = \frac{\beta}{k}x_0^2 \quad \text{и} \quad \mu = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\epsilon}{1-\epsilon}. \tag{41}$$

25. Наконец, используйте биномиальный ряд (31) и формулу (32) для интеграла и оцените эллиптический интеграл (40) и таким способом покажите, что период T колебаний выражается формулой

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\epsilon}}\left(1 + \frac{1}{4}\mu + \frac{9}{64}\mu^2 + \frac{25}{256}\mu^3 + \cdots\right). \tag{42}$$

26. Пусть $\epsilon = \beta x_0^2/k$ является настолько маленьким, что величиной ϵ^2 можно пренебречь. Выведите из уравнений (41) и (42), что

$$T \approx T_0 \left(1 + \frac{3}{8}\epsilon\right) = T_0 \left(1 + \frac{3\beta}{8k} x_0^2\right). \tag{43}$$

Из этого следует, что

- если $\beta > 0$, т. е. пружина *мягкая*, то $T > T_0$, и с увеличением x_0 увеличивается T, так что большие овалы на рис. 6.4.4 соответствуют меньшим частотам;
- если $\beta < 0$, т. е. пружина *жесткая (закаленная)*, то $T < T_0$, и увеличение x_0 уменьшает T, так что большие овалы на рис. 6.4.2 соответствуют большим частотам.

6.4. Приложение. Уравнения Рэлея и Ван-дер-Поля

Чтобы моделировать колебания, возникающие в дудочке кларнета, британский ученый в области математической физики Лорд Рэлей (Lord Rayleigh, John William Strutt, 1842–1919) рассматривал уравнение вида

$$mx'' + kx = ax' - b(x')^3. \tag{1}$$

При $y = x'$ мы получаем автономную систему

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= \frac{-kx + ay - by^3}{m}, \end{aligned} \tag{2}$$

чей фазовый портрет показан на рис. 6.4.15 (для случая $m = k = a = b = 1$). Внутренние и внешние спиральные траектории сходятся к решению, которое является "предельным циклом", соответствующим периодическим колебаниям, возникающим в дудочке. Период T (и, следовательно, частота) этих колебаний может быть измерена по интегральной кривой, вычерченной в координатах t и x. Ее график изображен на рис. 6.4.16. Этот период колебаний зависит только от параметров m, k, a и b в уравнении (1) и не зависит от начальных условий (почему?).

Выберите ваши собственные значения параметров m, k, a и b (возможно наименьшие четыре отличные от нуля цифры в номере вашего студенческого билета) и с помощью доступной утилиты для построения графиков решений обыкновенных дифференциальных уравнений начертите траектории и интегральные кривые, как показано на рис. 6.4.15 и 6.4.16. Измените *один* из ваших параметров, чтобы увидеть, как в результате этого изменится амплитуда и частота получающихся периодических колебаний.

Уравнение Ван-дер-Поля

На рис. 6.4.17 показана простая цепь RLC, состоящая из сопротивления, индуктивности и емкости, в которой обычное (пассивное) сопротивление R было заменено активным элементом (типа электронной лампы или полупроводника), причем падение напряжения V в этой цепи дается известной функцией $f(I)$ от тока I. Конечно, $V = f(I) = IR$ для резистора. Если мы подставим $f(I)$ вместо IR в знакомое из раздела 3.7 уравнение RLC-цепи

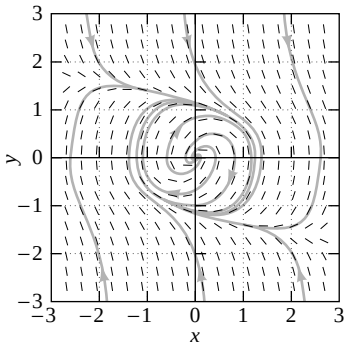


Рис. 6.4.15. Фазовый портрет для системы Рэлея (2) при $m = k = a = b = 1$

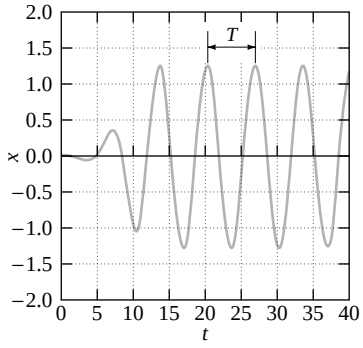


Рис. 6.4.16. Интегральная кривая в координатах t и x с начальными условиями $x(0) = 0{,}01$, $x'(0) = 0$

$LI' + RI + Q/C = 0$, то дифференцирование даст уравнение второго порядка

$$LI'' + f'(I)I' + \frac{I}{C} = 0. \tag{3}$$

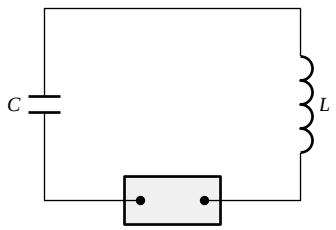


Рис. 6.4.17. Простая цепь с активным элементом

В 1924 году изучая колебательные цепи в ранних коммерческих радиоприборах, Балтазар Ван-дер-Поль (Balthasar van der Pol, 1889–1959) предположил, что падение напряжения дается нелинейной функцией вида $f(I) = bI^3 - aI$, подстановка которой в уравнение (3) дает уравнение

$$LI'' + (3bI^2 - a)I' + \frac{I}{C} = 0. \tag{4}$$

Это уравнение тесно связано с уравнением Рэлея и имеет фазовые портреты, напоминающие приведенные на рис. 6.4.15. Действительно, дифференцирование второго уравнения в (2) и замена $x' = y$ приводят к уравнению

$$my'' + (3by^2 - a)y' + ky = 0, \tag{5}$$

которое имеет тот же самый вид, что и уравнение (4).

Если мы обозначим переменной τ время в уравнении (4) и сделаем подстановки $I = px$, $t = \tau/\sqrt{LC}$, получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(3bp^2x^2 - a\right)\sqrt{\frac{C}{L}}\,\frac{dx}{dt} + x = 0.$$

При $p = \sqrt{a/(3b)}$ и $\mu = a\sqrt{C/L}$ получится стандартная форма

$$x'' + \mu(x^2 - 1)x' + x = 0 \tag{6}$$

уравнения Ван-дер-Поля.

Для каждого неотрицательного значения параметра μ решение уравнения Ван-дер-Поля при $x(0) = 2$, $x'(0) = 0$ является периодическим, причем соответствующая траектория на фазовой плоскости представляет собой предельный цикл, к которому сходятся другие траектории (как на рис. 6.4.15). Вам будет весьма поучительно численно решить уравнение Ван-дер-Поля и начертить эту периодическую траекторию для избранных значений от $\mu = 0$ до $\mu = 1000$ или больше. При $\mu = 0$ это окружность радиуса 2 (почему?). На рис. 6.4.18 показана периодическая траектория при $\mu = 1$, а на рис. 6.4.19 приведены соответствующие интегральные кривые $x(t)$ и $y(t)$. При больших μ уравнение Ван-дер-Поля является "весьма жестким", и периодическая траектория более эксцентрична — как на рис. 6.4.20, график на котором был вычерчен с помощью программы `ode15s` для решения жестких обыкновенных дифференциальных уравнениий, которая входит в состав пакета MATLAB. Соответствующие интегральные кривые $x(t)$ и $y(t)$ на рис. 6.4.21 и 6.4.22 демонстрируют удивительное поведение этих координатных функций. В каждой из них длинные интервалы очень медленного изменения чередуются с периодами резкого изменения, притом в течение очень коротких временных интервалов, которые соответствуют "квазиразрывам", которые видимы на рис. 6.4.21 и 6.4.22. Например, на рис. 6.4.23 видно, что между $t = 1614{,}28$ и $t = 1614{,}29$, значение $y(t)$ увеличивается от величины, примерно равной нулю, до более чем 1300 и затем снова возвращается назад. Возможно, вам удастся измерить расстояние

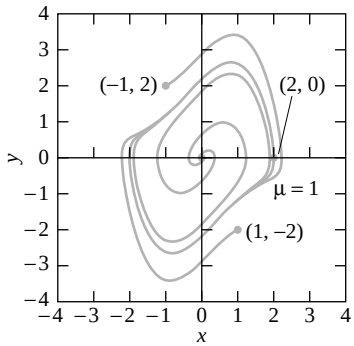


Рис. 6.4.18. Траектория периодического решения уравнения Ван-дер-Поля на фазовой плоскости при $\mu = 1$, а также некоторые спиральные траектории внутри и вне цикла

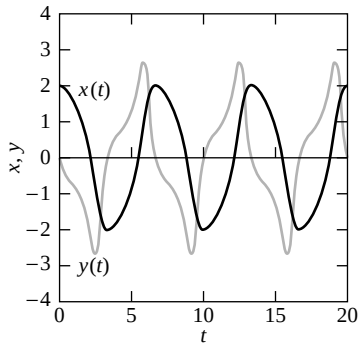


Рис. 6.4.19. Интегральные кривые $x(t)$ и $y(t)$, определяющие периодическое решение уравнения Ван-дер-Поля при $\mu = 1$

1.1

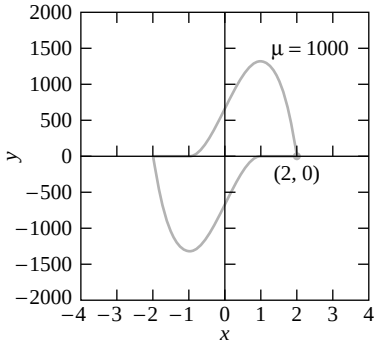


Рис. 6.4.20. Траектория периодического решения уравнения Ван-дер-Поля на фазовой плоскости при $\mu = 1000$

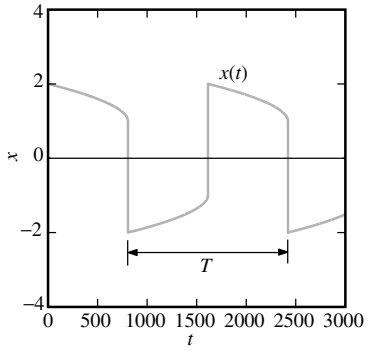


Рис. 6.4.21. График $x(t)$ при $\mu = 1000$

между началом координат и точками пересечения на координатной оси x или y (т. е. измерить отрезки, отсекаемые на координатных осях). Тогда вы сможете показать, что на рис. 6.4.20 период обхода вокруг цикла приблизительно равен $T = 1614$. Действительно, вычисления и построение рисунков, подобных приведенным здесь, могут служить хорошим испытанием ошибкоустойчивости программы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, входящей в состав вашей компьютерной системы.

Вы могли бы также начертить другие траектории для $\mu = 10\,100$ или 1000, что (подобно траекториям на рис. 6.4.18) находятся внутри и вне предельного цикла. Начало координат напоминает фокус на рис. 6.4.18. И действительно, покажите, что $(0, 0)$ является спиральным источником (неустойчивым фокусом) для уравнения Ван-дер-Поля при $0 < \mu < 2$, но узлом-источником при $\mu \geq 2$.

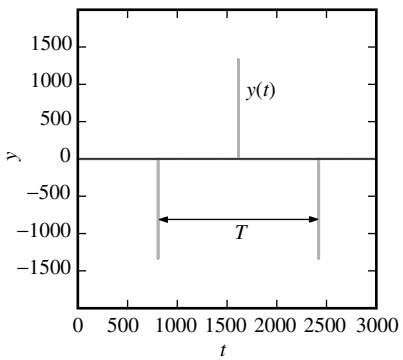


Рис. 6.4.22. График $y(t)$ при $\mu = 1000$

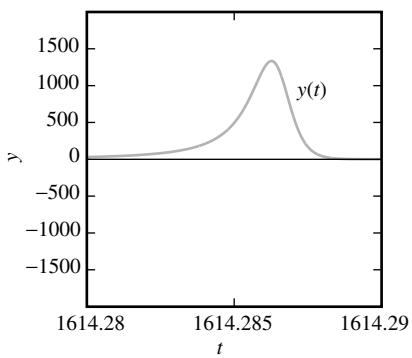


Рис. 6.4.23. Верхний пик на графике $y(t)$

6.5. Хаос в динамических системах

В предыдущих разделах мы рассматривали прирост популяции и механические системы как детерминированные: мы считали, что начальное состояние физической системы полностью определяет ее будущее развитие. Но многие часто встречающиеся самые обычные системы часто демонстрируют поведение, которое иногда кажется хаотическим в том смысле, что будущие состояния таких систем не являются надежно предсказуемыми, даже если известны начальные условия. Этот раздел содержит материал для проекта, который иллюстрирует явление *хаоса*, к которому в настоящее время проявляется большой интерес в науке и технике.

Прирост популяции и удвоение периода

В разделе 2.1 мы ввели логистическое дифференциальное уравнение

$$\frac{dP}{dt} = aP - bP^2, \qquad (a, b > 0), \tag{1}$$

которое моделирует ограниченный (а не экспоненциальный) рост численности популяции. Действительно, если численность популяции $P(t)$ удовлетворяет уравнению (1), то при $t \to +\infty$ $P(t)$ приближается к [конечной] граничной численности популяции $M = a/b$. Мы обсудим здесь "дискретную" версию логистического уравнения, которое давно было знакомо ученым, но только недавно было обнаружено, что именно это уравнение поможет предсказать весьма экзотические и неожиданные модели поведения некоторых популяций.

Чтобы численно решить уравнение (1), как и в разделе 2.4, мы сначала выбираем фиксированную величину шага $h > 0$ и рассматриваем дискретную последовательность моментов времени

$$t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n, t_{n+1}, \ldots, \tag{2}$$

где $t_{n+1} = t_n + h$ для каждого n. Начиная с начального значения $P_0 = P(t_0)$, мы вычисляем аппроксимации

$$P_1, P_2, \ldots, P_n, P_{n+1}, \ldots \tag{3}$$

к точным значениям $P(t_1)$, $P(t_2)$, $P(t_3)$, $\ldots$ фактической численности популяции $P(t)$. Например, метод Эйлера для логистического уравнения (1) состоит из вычисления аппроксимаций (3) посредством многократного применения формулы

$$P_{n+1} = P_n + (aP_n - bP_n^2) \cdot h. \tag{4}$$

Теперь предположим, что численность популяции такова, что величину шага h можно выбрать так, что аппроксимации, рассчитанные с помощью равенства (4), имеют приемлемую точность в сравнении с фактическими значениями популяции. Это могло бы иметь место, например, для популяции животных или насекомых, в которой все воспроизводство (размножение, репродукция) происходит в период случных сезонов короткой продолжительности, которые повторяются через постоянные интервалы времени. Если h — интервал между последовательными случными сезонами, то численность популяции P_n в течение одного случного сезона может зависеть только от численности популяции P_{n-1} в течение

предыдущего сезона, причем P_n полностью определяет численность популяции P_{n+1} в течение следующего случного сезона.

Так что давайте в ходе обсуждения предполагать, что последовательные значения $P_n = P(t_n)$ численности популяции можно определить с помощью уравнения

$$P_{n+1} = P_n + (aP_n - bP_n^2) \cdot h. \tag{4}$$

Таким образом, мы заменяем первоначальное дифференциальное уравнение (1) "дискретным" *уравнением в конечных разностях*

$$\Delta P_n = (aP_n - bP_n^2)\,\Delta t, \tag{5}$$

которое выражает прирост популяции $\Delta P_n = P_{n+1} - P_n$ через шаг по времени $h = \Delta t$ и предыдущую численность популяции P_n.

Уравнение (4) может быть переписано как *логистическое уравнение в конечных разностях*

$$P_{n+1} = rP_n - sP_n^2, \tag{6}$$

где

$$r = 1 + ah \quad \text{и} \quad s = bh. \tag{7}$$

Подстановка

$$P_n = \frac{r}{s} x_n \tag{8}$$

в уравнении (6) упрощает все это еще больше, и в конце концов мы получаем уравнение

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n). \tag{9}$$

Теперь мы сосредотачиваем наше внимание на полученной итерационной формуле — равенстве (9). Считая заданными начальные значения x_0 и r, по этой формуле можно сгенерировать последовательность значений $x_1, x_2, x_3, \ldots$, соответствующих последовательным моментам времени $t_1, t_2, t_3, \ldots$. Значение x_n в момент времени t_n можно рассматривать как *часть* максимального значения численности популяции, которую может поддерживать среда. Принимая предположение о том, что существует предельное значение дробей, выражающих часть численности популяции

$$x_\infty = \lim_{n \to \infty} x_n, \tag{10}$$

мы хотим исследовать, как x_∞ зависит от *параметра роста* r в уравнении (9). Иными словами, мы расматриваем r как *входной* параметр (аргумент) процесса, а x_∞ — как *выходной* параметр (результат) и спрашиваем, как выходной параметр (результат) зависит от входного параметра (аргумента).

Итерация в уравнении (9) легко программируется на любом доступном входном языке калькулятора или языке программирования. На рис. 6.5.1 показано, как на входных языках пакетов *Maple, Mathematica* и MATLAB закодировать простую программу, которая начиная с $x_1 = 0{,}5$ вычисляет результаты (и строит их список) первых нескольких сотен ($k = 200$) итераций при $r = 1{,}5$.

Maple	*Mathematica*
`r := 1.5:`	`r = 1.5;`
`x = array(1..200):`	`x = Table[n,{n,1,200}];`
`x[1] := 0.5:`	`x[[1]] = 0.5;`
`for n from 2 to 200 do`	`For[n=2, n<=200,`
`  z := x[n-1]:`	`  n=n+1,`
`  x[n] := r*z*(1-z):`	`  z = x[[n-1]];`
`  od:`	`  x[[n]] = r*z*(1-z)];`

```
r = 1.5;
x = 1:200;
x(1) = 0.5;
for n = 2:200
   z = x(n-1);
   x(n) = r*z*(1-z);
   end
```

Рис. 6.5.1. Версии простой итеративной программы на входных языках пакетов *Maple*, *Mathematica* и MATLAB

Поскольку в уравнении (7) $r = 1 + ah$, для нашей идеализированной модели дискретного прироста популяции подходящими являются только те значения r, которые больше 1. Оказывается, что если взять типичное значение параметра роста r (оно приведено в первой строке), то результаты не зависят существенно от начального значения x_1. После достаточного количества (это число зависит от значения значения r) итераций оказывается, что значение x_n практически стабилизируется и оказывается примерно равным предельному значению x_∞, которое определяется равенством (10). Например, на рис. 6.5.2 показаны результаты выполнения нашей простой итеративной программы для значений $r = 1{,}5$, $2{,}0$ и $2{,}5$ параметра скорости прироста; в результате получились дроби (части численности популяции)

$$x_\infty = 0{,}333333, \qquad 0{,}500000 \qquad \text{и} \qquad 0{,}6000000$$

соответственно. Таким образом, оказывается, что x_∞ существует и что его значение монотонно возрастает с увеличением r.

Упражнение 1. Попробуйте взять несколько других значений параметра скорости роста в диапазоне $1 < r < 3$. Подтверждают ли ваши результаты догадку о том, что предельная численность популяции всегда существует и является возрастающей функцией от r?

Результаты, приведенные на рис. 6.5.3, показывают, что догадка, которая могла возникнуть на основе изучения ограниченного количества примеров (см. упражнение 1), ложна! При возрастании параметра скорость роста от $r = 3{,}1$ до $r = 3{,}25$ [дробная] часть численности популяции не может стабилизироваться около единственной предельной численности популяции. (Мы провели вычисления для более чем тысячи итераций, чтобы удостовериться

При	$r = 1{,}5$	$r = 2{,}0$	$r = 2{,}5$
x_1	0,5	0,5	0,5
x_2	0,3750	0,5000	0,6250
x_3	0,3516	0,5000	0,5859
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{197}	0,3333	0,5000	0,6000
x_{198}	0,3333	0,5000	0,6000
x_{199}	0,3333	0,5000	0,6000
x_{200}	0,3333	0,5000	0,6000

Рис. 6.5.2. Итерации при значениях параметра роста $r = 1{,}5, 2{,}0$ и $2{,}5$

При	$r = 3{,}1$	$r = 3{,}25$	$r = 3{,}5$
x_1	0,5000	0,5000	0,5000
x_2	0,7750	0,8125	0,8750
x_3	0,5406	0,4951	0,3828
x_4	0,7699	0,8124	0,8269
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_{1001}	0,5580	0,4953	0,5009
x_{1002}	0,7646	0,8124	0,8750
x_{1003}	0,5580	0,4953	0,3828
x_{1004}	0,7646	0,8124	0,8269
x_{1005}	0,5580	0,4953	0,5009
x_{1006}	0,7646	0,8124	0,8750
x_{1007}	0,5580	0,4953	0,3828
x_{1008}	0,7646	0,8124	0,8269

Рис. 6.5.3. Циклы с периодом 2 при $r = 3{,}1$ и $r = 3{,}25$; цикл с периодом 4 при $r = 3{,}5$.

в этом.) Вместо того чтобы стабилизироваться около единственной предельной численности популяции, дробная часть численности популяции колеблется между двумя различными дробями (дробными частями численности популяции) по мере того, как месяцы сменяются (здесь мы считаем, что месяц равен нашей единице времени). Например, при $r = 3{,}25$ мы видим, что

$$x_{1001} = x_{1003} = x_{1005} = \cdots \approx 0{,}4953,$$

хотя

$$x_{1002} = x_{1004} = x_{1006} = \cdots \approx 0{,}8124.$$

Таким образом, мы имеем не одну предельную численность популяции, а скорее "предельный цикл", состоящий из двух различных численностей популяции (как показано графически на рис. 6.5.4). Кроме того, когда скорость роста увеличивается до $r = 3{,}5$, *период* цикла удваивается, и теперь мы имеем предельный цикл с периодом 4; циклы популяции повторяются: каждый их них состоит из четырех различных значений — $0{,}5009$, $0{,}8750$, $0{,}3828$ и $0{,}8269$ (рис. 6.5.5).

Упражнение 2. Попробуйте взять значения параметра скорость роста в диапазоне $2{,}9 < r < 3{,}1$, чтобы возможно точнее определить, при каком значении параметра одна предельная численность популяции (при увеличении r) превращается в цикл периода 2. Случается ли это тогда, когда r превышает 3?

Результаты, показанные на рис. 6.5.6, указывают, что цикл с периодом 8 получается тогда, когда значение параметра скорость роста достигает $r = 3{,}55$. События теперь происходят весьма быстро.

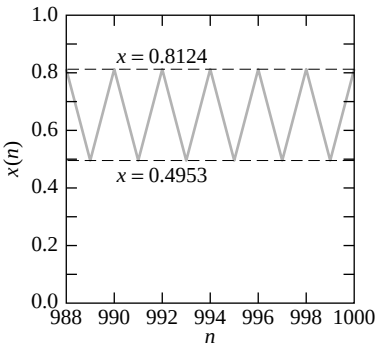


Рис. 6.5.4. На графике $x(n) = x_n$ виден период 2 итерационного цикла, который получается при $r = 3{,}25$

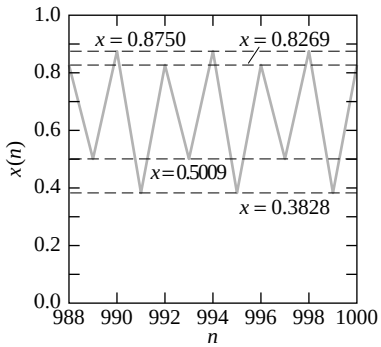


Рис. 6.5.5. На графике $x(n) = x_n$ виден период 4 итерационного цикла, который получается при $r = 3{,}5$

Упражнение 3. Проверьте, что цикл с периодом 16 получается при значении параметра скорость роста $r = 3{,}565$.

Упражнение 4. Сможете ли вы найти цикл периода 32 при значении параметра где-нибудь между $r = 3{,}565$ и $r = 3{,}570$?

Именно благодаря этому явлению **удвоения периода** столь безвредно выглядящая итерация $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ стала широко известной в последние годы. Когда значение параметра скорости роста увеличивается и превосходит $r = 3{,}56$, удвоение периода происходит настолько быстро, что кажется, что где-нибудь в окрестности $r = 3{,}57$ вспыхивает чрезвычайный хаос. Таким образом, график, показанный на рис. 6.5.7, указывает, что при $r = 3{,}57$ периодичность, которая наблюдалась ранее, кажется, исчезает. Не видно никакого периодического цикла и численность популяции, кажется, изменяется (от одного месяца к следующему) некоторым чрезвычайно случайным способом. Действительно, детерминированный прирост популяции, который соблюдался при меньших значениях параметра,

n	x_n
1001	0,5060
1002	0,8874
1003	0,3548
1004	0,8127
1005	0,5405
1006	0,8817
1007	0,3703
1008	0,8278
1009	0,5060
1010	0,8874
1011	0,3548
1012	0,8127
1013	0,5405
1014	0,8817
1015	0,3703
1016	0,8278

Рис. 6.5.6. Период 8 цикла получается при $r = 3{,}55$

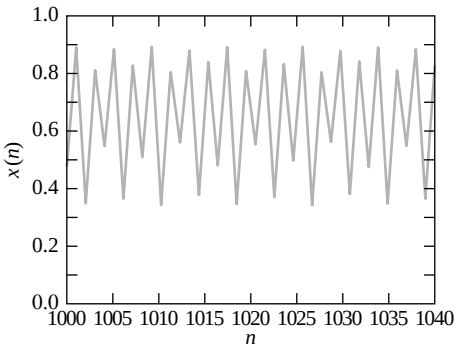


Рис. 6.5.7. При $r = 3{,}57$: Хаос!

кажется, теперь окончательно дегенерировал и превратился в недетерминированный процесс с очевидно случайным изменениями.

Программа, названная нами PICHFORK, генерирует визуальное представление зависимости поведения наших итераций от значения параметра роста r. (Версии программы PICHFORK легко написать для пакетов MATLAB, *Mathematica* и др.) Для каждого значения r во входном интервале $a \leqq r \leqq b$ (горизонтальная ось в полученной диаграмме) сначала выполняется 1000 итераций, чтобы достичь "устойчивости". Затем следующие 250 значений x, полученных в результате итераций, наносятся на график по вертикальной оси — т. е. "включается" пиксель экрана в точке (r, x). Полученный график описывает ситуацию визуально и называется "диаграммой ветвления", взглянув на которую, можно сразу сказать, чему соответствует данное значение r — циклу (с конечным периодом) или хаосу. Если разрешение изображения достаточно для того, чтобы на диаграмме было отчетливо видно, что только конечное множество значений x находится выше данного значения r, то диаграмма сразу покажет, что итерация "в конечном счете становится периодической" для данной конкретной величины параметра скорости роста.

На рис. 6.5.8 показана диаграмма ветвления для интервала $2{,}8 \leqq r \leqq 4{,}0$. Просматривая ее слева направо, мы видим единственное значение предельной численности популяции до $r \approx 3$, затем цикл с периодом 2 до $r \approx 3{,}45$, затем цикл периода 4, а затем цикл периода 8 и т. д., а дальше картина быстро приближается к темноте хаоса. Но заметьте вертикальные полосы "незаполненного пространства", которые появляются в диаграмме между $r = 3{,}6$ и $r = 3{,}7$, между $r = 3{,}7$ и $r = 3{,}8$, снова между $r = 3{,}8$ и $r = 3{,}9$. Они представляют области, куда [периодический] порядок возвращается из предыдущего хаоса.

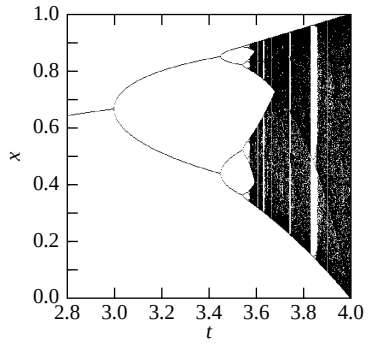


Рис. 6.5.8. Диаграмма ветвления при $2{,}8 \leqq 4 \leqq 4{,}0,\ 0 \leqq x \leqq 1$

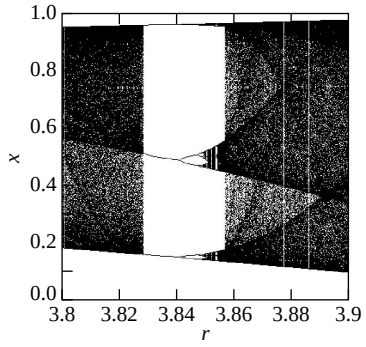


Рис. 6.5.9. Диаграмма ветвления при $3{,}8 \leqq r \leqq 3{,}9,\ 0 \leqq x \leqq 1$

Например, на рис. 6.5.9 показан интервал $3{,}8 \leqq r \leqq 3{,}9$, где мы видим цикл периода 3, который появляется внезапно из хаоса в окрестности $r = 3{,}83$ и затем разбивается последовательно на циклы с периодами 6, 12, 24, ... (рис. 6.5.10 и 6.5.11). Это удвоение периода, которое начинается с цикла периода 3, особенно существенно — ему в 1975 году была посвящена фундаментальная статья Джеймса Йорка (James Yorke) и Т. Ли (T.-Y. Li) в знаменитом американском математическом ежемесячнике *American Mathematical Monthly* под названием “Period Three Implies Chaos” (Из периода три возникает хаос). Согласно этой статье, существование цикла периода 3 (для соответствующей итерации) подразумевает существование циклов любого другого [конечного] периода, а также хаотических “циклов” без периода вообще.

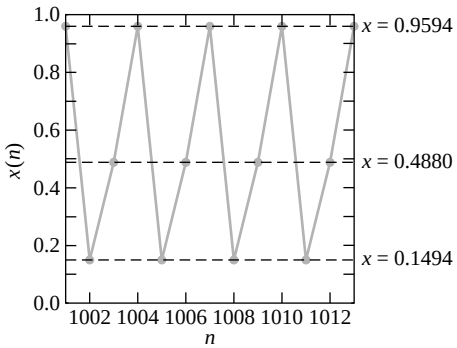


Рис. 6.5.10. На графике $x(n) = x_n$ виден период 3 итерационного цикла, который получается при $r = 3{,}84$

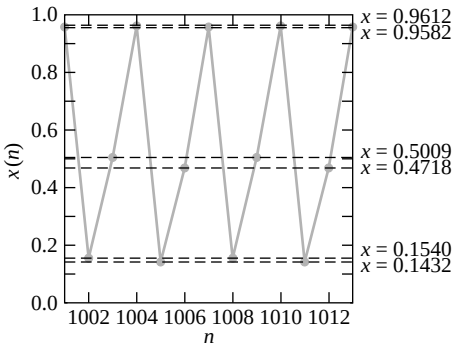


Рис. 6.5.11. На графике $x(n) = x_n$ виден период 6 итерационного цикла, который получается при $r = 3{,}845$

Проект 1. С помощью программы PICHFORK найдите другие интересные циклы и проверьте их очевидные периоды соответствующими итерационными вычислениями. Например, вы должны найти цикл с периодом 10 между $r = 3{,}60$ и $r = 3{,}61$ и цикл с периодом 14 между $r = 3{,}59$ и $r = 3{,}60$. Можете ли вы найти циклы с периодом 5 и 7? Если да, ищите последующее удвоение периода. Выполнение программы PICHFORK требует нескольких

сотен тысяч итераций, так что эту программу лучше выполнять на быстродействующем компьютере (или же накануне вечером запустить программу на ночной прогон).

Просматривая диаграмму ветвления (рис. 6.5.8) слева направо, мы определяем последовательные значения r_1, r_2, r_3, ... параметра скорость роста, при которых происходит *бифуркация* (раздвоение или качественное изменение) итерационного процесса $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ при дальнейшем увеличении значения r. Это такие дискретные значения r, для которых любое достаточно малое увеличение параметра роста удваивает период итерации. В 1970-х годах физик из Лос-Аламоса Митчелл Фейгенбаум (Mitchell Feigenbaum) обнаружил, что в основе этого удвоения периода на пути к хаосу лежит некоторый порядок (закон):

$$\lim_{k\to\infty} \frac{r_k - r_{k-1}}{r_{k+1} - r_k} = 4{,}66920160981\ldots. \tag{11}$$

Дробь слева в уравнении (11) — отношение длин последовательных "окон" постоянного периода в диаграмме ветвления. Именно тот факт, что указанное отношение приближается к пределу при $k \to +\infty$, а не конкретная величина этого предела, демонстрирует тип (вид) порядка, который может лежать в основе явления удвоения периода, наблюдаемого для итераций конкретного вида $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$. С другой стороны, теперь известно, что точно та же самая *константа Фейгенбаума* $4{,}66920160981\ldots$ играет точно ту же самую роль для широкого разнообразия явлений удвоения периода, возникающих во многих самых разнообразных областях науки.

Проект 2. Чтобы выполнить вычисления, приведшие к открытию его знаменитой константы, Фейгенбаум использовал карманный калькулятор HP-65, а не мощный компьютер! Возможно, вы захотите выполнить итерационные вычисления с помощью программы PICHFORK, чтобы с достаточной точностью изолировать несколько первых значений $r_1, r_2, r_3, \ldots$, при которых происходит удвоение, и затем проверить, что предел (11) действительно приблизительно равен $4{,}67$. Вы можете заглянуть на страницы 124–126 книги Т. Грея (T. Gray) и Дж. Глина (J. Glynn) *Exploring Mathematics with Mathematica*, посвященной исследованию Математики с помощью пакета *Mathematica*. (Эта книга была издана издательством Addison-Wesley в 1991 году.) Такой подход действительно заслуживает внимания знатока[7].

Удвоение периода в механических системах

В разделе 6.4 мы ввели дифференциальное уравнение второго порядка

$$mx'' + cx' + kx + \beta x^3 = 0, \tag{12}$$

которое моделирует свободные затухающие колебания материальной точки заданной массы на нелинейной пружине, при которых затухание определяется скоростью. Вспомните, что член kx в уравнении (12) представляет силу, приложенную к материальной точке заданной массы *линейной* пружиной, тогда как член βx^3 представляет фактическую нелинейность пружины.

[7] На русском языке также имеется книга, в которой рассматривается применение пакета Mathematica для решения подобных задач: Я.К. Шмидский, *Mathematica 5. Самоучитель* (Диалектика, 2004). В главе 11 этого самоучителя можно найти много полезных коротких программ на входном языке пакета *Mathematica* для изучения поведения простых динамических систем, в том числе и нашей рекуррентной последовательности. — *Примеч. ред.*

Мы хотим теперь обсудить *вынужденные колебания*, которые происходят тогда, когда на материальную точку заданной массы действует внешняя сила $F(t) = F_0 \cos \omega t$. Если такая сила действует на систему, свободные колебания которой описываются уравнением (12), то для смещения $x(t)$ материальной точки заданной массы от ее положения равновесия мы получим **уравнение Дуффинга в случае вынужденных колебаний**

$$mx'' + cx' + kx + \beta x^3 = F_0 \cos \omega t. \tag{13}$$

Для большинства значений параметров решить уравнение (13) явно относительно $x(t)$ невозможно. Однако качественно его решения описать можно — для этого достаточно изобразить его траектории на фазовой плоскости (это подобно тому, как в разделе 6.4 мы имели обыкновение описывать свободные колебания нелинейных механических систем). Конечно, сами траектории при этом придется вычислить численно с помощью методов приближенных вычислений.

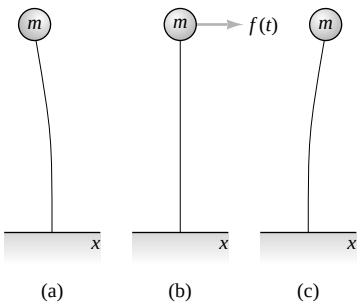


Рис. 6.5.12. Положения равновесия материальной точки заданной массы на нити: (a) — устойчивое равновесие при $x < 0$; (b) — неустойчивое равновесие в точке $x = 0$; (c) — устойчивое равновесие при $x > 0$

Константа Гука k положительна для типичной пружины, которая сопротивляется смещению от положения равновесия. Но существуют простые механические системы, которые подражают пружине, имеющей отрицательную константу Гука. Например, на рис. 6.5.12 показана материальная точка массы m наверху вертикальной металлической нити. Мы предполагаем, что тонкая металлическая нить может колебаться только в вертикальной плоскости и ведет себя подобно гибкому сжатому стержню, который деформируется (сгибается), когда материальная точка заданной массы помещена на такой вертикальный стержень. В этом случае существует одна точка устойчивого равновесия слева ($x < 0$), а другая — справа ($x > 0$), но вертикальное положение равновесия ($x = 0$) неустойчиво. Когда материальная точка заданной массы немного сместится от этого положения неустойчивого равновесия, внутренняя сила, действующая на данную материальную точку, является *отталкивающей*, а не притягивающей; это соответствует отрицательному значению k в уравнении (13). Если периодическая сила приложена к массе [например] осциллирующим электромагнитным полем, причем колебания в данной системе заглушает сопротивление воздуха, то уравнение (13) при $k < 0$, но с $c > 0$ и $\beta > 0$ является вполне приемлемой разумной математической моделью для функции, выражающей горизонтальное смещение $x(t)$ материальной точки в такой модели.

При отсутствии демпфирования и внешней силы траектории свободных колебаний материальной точки заданной массы на фазовой плоскости похожи на показанные на рис. 6.4.12 (см. задачу 14 в разделе 6.4). Материальная точка заданной массы ведет себя так, как будто она отталкивается неустойчивой точкой равновесия при $x = 0$, но притягивается каждой из двух устойчивых точек равновесия, симметрично расположенных по обе стороны от начала координат.

В разделе 3.6 мы видели, что в *линейном* случае периодическая внешняя сила $F(t) = F_0 \cos \omega t$ вызывает (вынужденные) установившиеся периодические колебания $x(t) = C \cos(\omega t - \alpha)$ с *той же самой* частотой ω. Амплитуда C установившихся периодических колебаний пропорциональна амплитуде F_0 внешней силы. Например, если амплитуда периодической внешней силы удвоится, то единственное изменение колебаний будет состоять в том, что их амплитуда также удвоится.

Чтобы проиллюстрировать весьма отличное поведение нелинейной системы, мы полагаем $k = -1$ и $m = c = \beta = \omega = 1$ в уравнении (13), так что дифференциальное уравнение принимает вид

$$x'' + x' - x + x^3 = F_0 \cos t. \tag{14}$$

В качестве упражнения проверьте, что две устойчивых точки равновесия имеют координаты $(-1, 0)$ и $(1, 0)$. Мы хотим исследовать зависимость (возможно установившихся периодических) колебаний $x(t)$ от амплитуды F_0 периодической внешней силы с периодом $2\pi/\omega = 2\pi$.

На рис. 6.5.13–6.5.16 показаны решения уравнения (14), полученные при последовательных значениях $F_0 = 0{,}60$, $0{,}70$, $0{,}75$ и $0{,}80$ амплитуды внешней силы. В каждом случае система была решена численно при начальных условиях $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$, причем для полученного решения был вычерчен график в интервале $100 \leqq t \leqq 200$ (чтобы показать устойчивый периодический ответ, остающийся после того, как затухла начальная переходная составляющая). Часть (a) каждого рисунка показывает траекторию на фазовой плоскости $x = x(t)$, $y = x'(t)$, а часть (b) показывает фактическую интегральную кривую $x = x(t)$ на плоскости tx. Часть (a) показывает качественный характер решения более ярко, но часть (b) позволяет определить период и частоту решения.

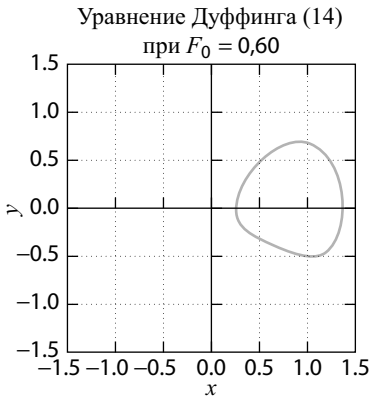


Рис. 6.5.13, a. Период 2π ответных колебаний при $F_0 = 0{,}60$: траектория на фазовой плоскости

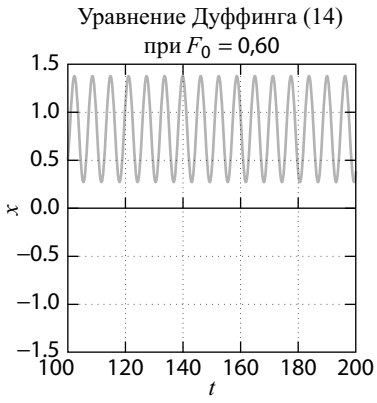


Рис. 6.5.13, b. Период 2π ответных колебаний при $F_0 = 0{,}60$: решение $x(t)$

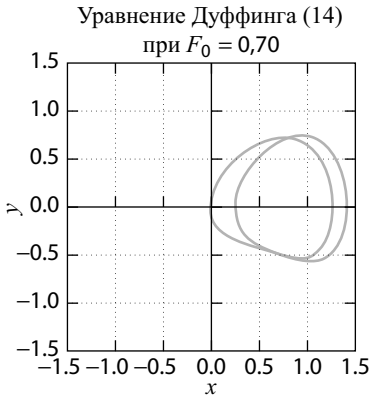


Рис. 6.5.14, a. Период 4π ответных колебаний при $F_0 = 0{,}70$: траектория на фазовой плоскости

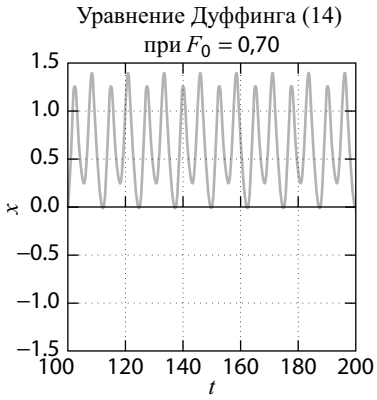


Рис. 6.5.14, b. Период 4π ответных колебаний при $F_0 = 0{,}70$: решение $x(t)$

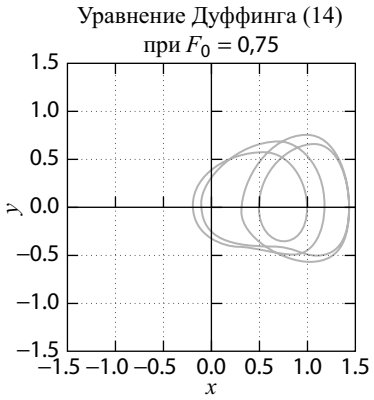


Рис. 6.5.15, a. Период 8π ответных колебаний при $F_0 = 0{,}75$: траектория на фазовой плоскости

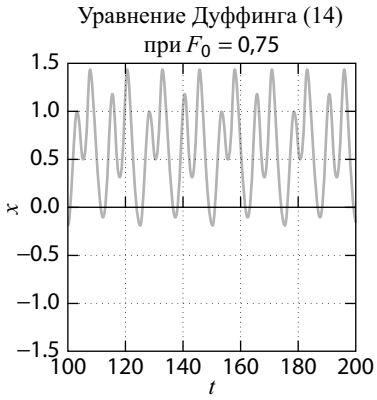


Рис. 6.5.15, b. Период 8π ответных колебаний при $F_0 = 0{,}75$: решение $x(t)$

На рис. 6.5.13 показано простое колебание материальной точки заданной массы вокруг правой точки равновесия, причем период равен 2π. На следующей последовательности рисунков мы видим последовательное *удвоение периода* и, наконец, *хаос* при увеличении амплитуды внешней силы в интервале от $F_0 = 0{,}6$ до $F_0 = 0{,}8$. Этот переход от *удвоения периода к хаосу* — общий (обычный) характер поведения *нелинейной* механической системы в ответ на увеличение или уменьшение соответствующего физического параметра (например m, c, k, β, F_0 или ω в уравнении (13)). Никакого подобного явления не происходит в линейных системах.

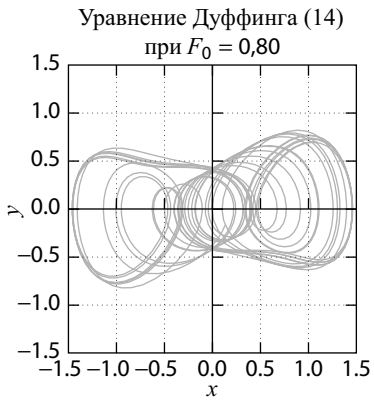


Рис. 6.5.16, a. Хаотический ответ при $F_0 = 0{,}80$: траектория на фазовой плоскости

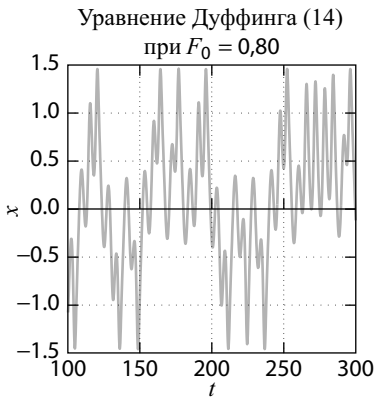


Рис. 6.5.16, b. Хаотический ответ при $F_0 = 0{,}80$: решение $x(t)$

Проект 3. Используйте утилиту построения графиков решений обыкновенных дифференциальных уравнений, чтобы убедиться, что вы можете воспроизвести рис. 6.5.13–6.5.16. Затем исследуйте значения параметра в интервале $1{,}00 \leqq F_0 \leqq 1{,}10$ в случае постоянной силы в уравнении (14). При $F_0 = 1{,}00$ вы должны увидеть период 6π для той траектории на фазовой плоскости, внутри которой находятся *обе* устойчивые точки равновесия (а также неустойчивая). Удвоение периода начинается примерно при $F_0 = 1{,}07$, а хаос наступает примерно при $F_0 = 1{,}10$. Можете ли вы увидеть второе удвоение периода где-нибудь между $F_0 = 1{,}07$ и $F_0 = 1{,}10$? Начертите траектории на фазовой плоскости и интегральные кривые на плоскости tx, с помощью которых вы сможете измерить периоды.

Предупреждение. Вы не должны ожидать, что ваши аппаратные средства и программное обеспечение для решения обыкновенных дифференциальных уравнений смогут создать точную во всех деталях копию "хаотической путаницы", показанной на рис. 6.5.16. Чтобы объяснять почему, давайте расмотрим уравнение Дуффинга в случае вынужденных колебаний (т. е. уравнение (14)) при $F_0 = 0{,}80$ как *систему с входом и выходом*, на вход которой подается начальная точка $(x(0), x'(0))$, а на выходе получается соответствующее решение $x(t)$. Эта система с входом и выходом является *хаотической* в том смысле, что очень маленькие изменения на входе могут стать причиной очень больших изменений на выходе. Например, данные, показанные в таблице на рис. 6.5.17, были сгенерированы с помощью сложной программы `ode45` для численного решения дифференциальных уравнений, входящей в пакет MATLAB, причем вычисления велись для двух близлежащих начальных точек и двух различных значений настроек (в качестве настройки был выбран параметр допустимая погрешность). Повторное численное решение той же самой задачи Коши (задачи с начальными условиями) при различных значениях допустимой погрешности может обеспечить некоторый признак надежности результатов; существенные же расхождения, несомненно, свидетельствуют о небольшой надежности. При начальных условиях $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$ вполне вероятно (хотя едва ли на такое решение можно полагаться), что $x(100) \approx -1{,}1$ и $x(200) \approx -0{,}6$, но значение $x(300)$ кажется весьма сомнительным. Ну а вот при начальных условиях $x(0) = 1{,}000001$, $x'(0) = 0$ кажется вполне возможным, что $x(200) \approx -0{,}3$. Но если так, то налицо существенное изменение решения при изменении начальных условий

t	$x(t)$ при ErrTol $= 10^{-8}$	$x(t)$ при ErrTol $= 10^{-12}$	$x(t)$ при ErrTol $= 10^{-8}$	$x(t)$ при ErrTol $= 10^{-12}$
0	1	1	1,000001	1,000001
100	-1,1125	-1,1125	-1,1125	-1,1125
200	-0,5823	-0,5828	-0,2925	-0,2816
300	-1,2850	-0,1357	-0,0723	-0,1633

Рис. 6.5.17. MATLAB пытается найти приближенное решение уравнения Дуффинга в случае вынужденных колебаний $x'' + x' - x + x^3 = (0{,}80)\cos t$ на интервале $0 \leqq t \leqq 300$ при $x'(0) = 0$ и два различных значения $x(0)$ при двух различных допустимых погрешностях (ErrTol обозначает значение, используемое и для абсолютной, и для допустимой относительной погрешности в программе `ode45`)

не более чем можно было бы ожидать за счет накопления ошибок округления в процессе численной аппроксимации, в ходе которой действия выполняются по правилам машинной арифметики. В этом случае любое решение, полученное численным методом, вероятно, может заметно отличаться от точного решения на длинном временном интервале. Следовательно, мы не можем быть уверены в том, что касается тонкой структуры траектории, вычисленной с помощью численного метода. Так что мы не можем быть уверены в том, что, например, траектория, подобная приведенной на рис. 6.5.16, отображает все детали точной траектории. В исследованиях, подобных проведенному нами, устанавливается, например, только то, что фактическое решение на длинном интервале с начальными условиями $x(0) = 1, x'(0) = 0$ не является периодическим, а вместо этого "блуждает" назад и вперед по-видимому непредсказуемым или хаотическим способом. Таким образом, качественная картина решения, показанного на рис. 6.5.16, помогает дать приблизительное представление о поведении решения в действительности, но ни в коем случае не может рассматриваться как абсолютно точное изображение всех деталей точной траектории. Это поведение решений уравнения Дуффинга в случае вынужденных колебаний еще не понято полностью и продолжает оставаться актуальной темой научных исследований, ведущихся в настоящее время. Интересное описание и дальнейшие ссылок можно найти в главе 15 книги Дэна Шуолба (Dan Schwalbe) и Стэна Уогона (Stan Wagon) *VisualDSolve*, изданной в Нью-Йорке издательством Springer-Verlag в 1997 году.

Странный аттрактор Лоренца

Подстановка $x_1 = x, x_2 = x'$ в уравнение Дуффинга в случае вынужденных колебаний (13) приводит к двумерной нелинейной системе дифференциальных уравнений первого порядка, а явление удвоения периода характерно для таких систем. Но в более высоких измерениях происходят даже еще более экзотические явления; в настоящее время в этой области ведутся обширные активные исследования. Все эти исследования в конечном счете берут начало от первоначального исследования экстраординарной трехмерной нелинейной системы, которую рассматривал специалист по математическим методам в метеорологии Э. Н. Лоренц (E. N. Lorenz), который позже описал свое открытие следующим образом.

К середине 1950-х годов, несмотря на довольно низкое качество получаемых результатов, вошло в моду "численное предсказание погоды", т. е. прогноз на основании численного интегрирования доступных для обработки приближений к уравнениям, описывающим состояние атмосферы. Маленькая, но решительно настроенная группа ученых поддерживала статистические методы предсказания (. . .). Я скептически относился к этой идее и решил проверить ее, применив статистический метод к множеству искусственных данных, полученных при численном решении некоторой системы уравнений (. . .). Первая задача состояла в том, чтобы найти подходящую систему уравнений, которую можно было бы решить (. . .). Требовалось, чтобы она была достаточно простой . . . и имела непериодическое общее решение, так как при выявлении периодичности статистическое предсказание периодического ряда стало бы тривиальным делом (. . .). [Во время бесед с доктором Барри Зальцманом (Dr. Barry Saltzman)] он показал мне одну работу по тепловой конвекции, где им использована система из семи обыкновенных дифференциальных уравнений. Большинство полученных им численных решений быстро приобретало периодический характер, но одно решение отказывалось устанавливаться. Кроме того, оказалось, что в этом решении четыре переменных приближаются к нулю. Можно было предположить, что уравнения, которые управляют остальными тремя неизвестными, после исключения из них членов, содержащих первые четыре переменные, также будут иметь непериодические решения. По возвращении я решил эти три уравнения на нашем компьютере и подтвердил непериодичность, на которую указывал Зальцман. В конце концов дело пошло. [Цитируется по книге E. Hairer, S. P. Norsett, G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I*[8]. (Книга издана в Нью-Йорке издательством Springer-Verlag в 1987 году)[9].]

[8] Внимательный читатель (склонный к математической логике) здесь, конечно, заметит (и, надеюсь, простит) небольшую прямолинейность перевода. Следовало бы говорить, конечно, не о том, что это цитата из указаной книги (на английском языке!), а о том, что это *перевод цитаты*, взятой из указанной книги. Вот библиографическая ссылка на работу Лоренца, из которой взята цитата: *E. N. Lorenz. On The prevalence of aperiodicity in symple systems, Global Analysis, Calgary 1978, M. Grmela and J. E. Marsden (eds.), Lecture Notes in Mathematics, vol. 755, p. 53–75, 1979. — Примеч. ред.*

[9] А в 1990 году издательство "Мир" выпустило ее перевод: Э. Хайрер, С. Нерсетт, Г. Ваннер. *Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи*. Пер. с англ. (М.: Мир, 1990). В связи с этим для читателей, склонных к математической логике и разбирающихся во всех тонкостях искусства перевода, замечу, что было бы совершенно легкомысленно перевести предыдущее предложение из основного текста так: Цитируется по книге *Э. Хайрер, С. Нерсетт, Г. Ваннер. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. Пер. с англ., М.: Мир, 1990*. Все дело в том, что я переводил цитату в том виде, в котором она приведена в оригинале переводимой книги, а там она приведена с купюрами! Купюры есть и в переводе, выполненном изд-вом "Мир", но расстановка купюр совпадает лишь частично! Как переводчик я добросовестно выполнил перевод, а как редактор проверил его! Но раз уж разговор пошел о достоверных исторических фактах, я не могу оставить читателя в неведении относительно того, какие именно мнения или факты были при этом опущены, тем более что это позволяет проследить, что занимало мысли в те далекие (уже!) 1950-е годы, а теперь кому-то может показаться очевидным. Так вот, когда говорится о том, что "группа ученых поддерживала статистические методы предсказания", указывается возможная причина такой приверженности: "вероятно, вследствие неправильного истолкования одной статьи Винера". Далее, когда Э. Н. Лоренц говорит о поиске подходящей (достаточно простой имеющей непериодическое общее решение) системы уравнений, которую можно было бы решить, он считает важным отметить, что "Возможность соединения этих условий была далеко не очевидной (. . .)". Ну и последний опущенный факт: д-р Барри Зальцман к 1978 году перешел работать в Йельский университет. — *Примеч. ред.*

Знаменитая система дифференциальных уравнений *Лоренца* имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -sx + sy, \\ \frac{dy}{dt} &= -xz + rx - y, \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz. \end{aligned} \tag{15}$$

Интегральная кривая в пространстве xyz лучше всего визуализируется, если смотреть на ее проекцию на некоторую плоскость, обычно на одну из трех координатных плоскостей. На рис. 6.5.18 показана проекция решения на плоскость xz, полученная численным интегрированием при значениях параметров $b = \frac{8}{3}$, $s = 10$, $r = 28$ и начальных значениях $x(0) = -8$, $y(0) = 8$ и $z(0) = 27$.

Если за созданием проекции, изображенной на рис. 6.5.18, проследить в "реальном времени", то может показаться, что точка $P(x(t), y(t), z(t))$, двигающаяся по решению, совершает случайное число колебаний справа, после чего следует случайное число колебаний слева, затем случайное число колебаний справа, после чего опять следует случайное число колебаний слева и т. д. Учитывая метеорологическое происхождение системы Лоренца, естественно подумать о случайном числе ясных дней, после которых следует случайное число дождливых дней, затем случайное число ясных дней, после которых опять наступает случайное число дождливых дней и т. д.

Более подробное рассмотрение таких проекций траекторий Лоренца показывает, что точка *не просто* колеблется назад и вперед вокруг пары точек равновесия (как можно первоначально предположить, глядя на рис. 6.5.18). Вместо этого, при $t \to +\infty$, точка решения $P(t)$ на траектории блуждает назад и вперед в пространстве, приближаясь все ближе и ближе к некоторому сложному множеству точек, детальная структура которого полностью все еще не понята. Это неуловимое множество, которое, кажется, каким-то загадочным способом "притягивает" точку решения как раз и есть знаменитый *странный аттрактор Лоренца.*

Проект 4. Сначала используйте утилиту для построения графиков решений обыкновенных дифференциальных уравнений, чтобы воспроизвести xz-проекцию траектории Лоренца, показанную на рис. 6.5.18. Используйте значения параметра и начальные условия, указанные сразу после уравнения (15), и численным методом проинтегрируйте систему Лоренца на интервале $0 \leqq t \leqq 50$. Начертите также xy- и yz-проекции этого же самого решения. Затем поэкспериментируйте с различными значениями параметра и начальными условиями. Например, сможете ли вы найти периодическое решение при $r = 70$ (и $b = \frac{8}{3}$, $s = 10$ как прежде) и начальных значениях $x_0 = -4$ и $z_0 = 64$. Чтобы получить траекторию, которая почти повторяет себя, потребуется испробовать различные значения y_0 в диапазоне $0 \leqq y_0 \leqq 10$ и рассмотреть xz-проекции, подобные приведенной на рис. 6.5.18.

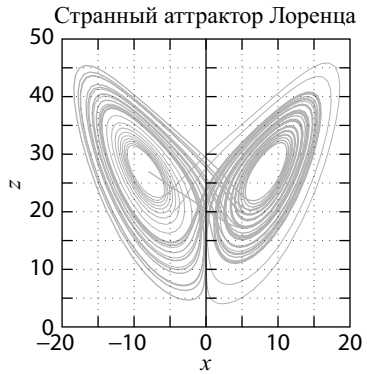


Рис. 6.5.18. Проекция траектории Лоренца на плоскость xz при $-20 \leqq x \leqq 20, 0 \leqq z \leqq 50$

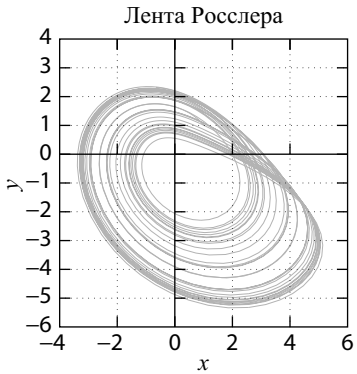


Рис. 6.5.19. Проекция ленты Росслера на плоскость xy

Проект 5. Есть еще одна очень интенсивно изучаемая нелинейная трехмерная система — система Росслера

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y - z, \\ \frac{dy}{dt} &= x + ay, \\ \frac{dz}{dt} &= b + z(x - c). \end{aligned} \tag{16}$$

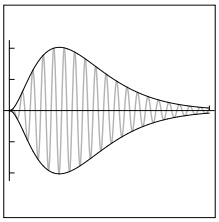
На рис. 6.5.19 показана проекция на плоскость xy *ленты Росслера.* Этот хаотический аттрактор получается при значениях параметров $a = 0{,}398, b = 2$ и $c = 4$ в системе уравнений (16). В плоскости xy лента Росслера выглядит как петля, но в пространстве она оказывается перекручена подобно ленте Мебиуса. Исследуйте удвоение периода при приближении к хаосу, который происходит в системе Росслера при увеличении параметра a, причем для начала положите $a = 0{,}3$, $a = 0{,}35$ и $a = 0{,}375$ (возьмите $b = 2$ и $c = 4$ во всех случаях).

В этом разделе мы дали только почувствовать вкус идей, которые являются фокусом современных приложений нелинейных систем. Чтобы увидеть, как эти идеи работают в полную силу, прочтите обсуждение системы Лоренца на страницах 117–123 книги E. Hairer, S. P. Norsett, G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I*[10].] (Мы упоминали эту книгу раньше, когда описывали открытие Э. Н. Лоренцем его экстраординарной трехмерной нелинейной системы.) Там вы найдете описание траектории Лоренца, визуально представленное изображением, которое очень походит на диаграмму ветвления, показанную на рис. 6.5.9, вместе с той же самой константой Фейгенбаума $4{,}6692\ldots$!

Те, кто заинтересовался историческими фактами, относящимися к данному заключительному разделу главы 6, могут обратиться к книге Джеймса Глейка (James Gleick) *Chaos: Making a New Science* (Хаос: создание новой науки), изданной в Нью-Йорке в 1987 году издательством Viking Press. Более детально уравнение Дуффинга в случае вынужден-

[10] Как я уже упоминал, есть перевод на русский язык: Э. Хайрер, С. Нерсетт, Г. Ваннер. *Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи*. Пер. с англ. (М.: Мир, 1990). — *Примеч. ред.*

ных колебаний, а также уравнения Лоренца и Росслера обсуждаются в книге Томпсона (J. M. T. Thompson) и Стюарта (H. B. Stewart) *Nonlinear Dynamics and Chaos*, посвященной нелинейной динамике и хаосу (эта книга была издана в Нью-Йорке в 1986 году издательством John Wiley).



ГЛАВА 7

Методы преобразования Лапласа

7.1. Преобразования Лапласа и оригиналы функций (обратные преобразования)

В главе 3 мы видели, что линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами имеют многочисленные приложения и могут быть решены систематическими методами. Однако есть общие ситуации, в которых предпочтительны альтернативные методы, рассматриваемые в данной главе. Возьмем, например, дифференциальные уравнения

$$mx'' + cx' + kx = F(t) \quad \text{и} \quad LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E'(t),$$

которые соответственно описывают систему, состоящую из материальной точки заданной массы, закрепленной на пружине, с демпфером, и последовательную RLC-цепь, состоящую из сопротивления, индуктивности и конденсатора. На практике часто случается, что свободный член, $F(t)$ или $E'(t)$, имеет разрывы, например, когда напряжение, прилагаемое к электрической цепи, периодически выключается и включается. В этом случае методы главы 3 могут быть весьма неуклюжими, а метод преобразования Лапласа удобнее.

Дифференциальный оператор D может рассматриваться как преобразование, в результате применения которого к функции $f(t)$ получается новая функция $D\{f(t)\} = f'(t)$. Преобразование Лапласа L содержит операцию интегрирования и приводит к новой функции $\mathrm{L}\{f(t)\} = F(s)$ от новой независимой переменной s. Схематически такое преобразование изображено на рис. 7.1.1. После того как в этом разделе мы научимся вычислять преобразование Лапласа (изображение по Лапласу) $F(s)$ функции $f(t)$, в разделе 7.2 мы увидим, что преобразование Лапласа преобразовывает *дифференциальное* уравнение с неизвестной функцией $f(t)$ в *алгебраическое* уравнение относительно $F(s)$. Поскольку, вообще говоря, поиск решений алгебраических уравнений проще, чем поиск решений дифференциальных уравнений, этот метод упрощает задачу нахождения решения $f(t)$.

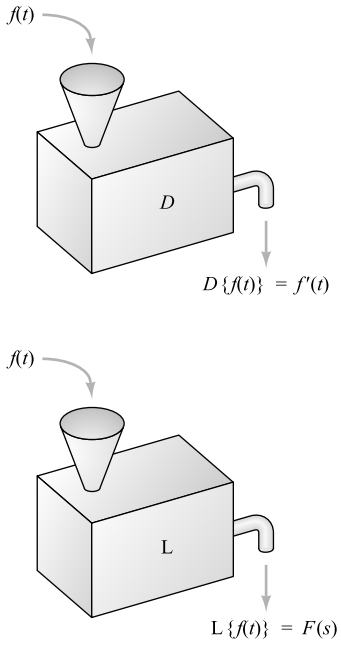


Рис. 7.1.1. Преобразование функции: L действует аналогично D

Определение. Преобразование Лапласа (изображение функции по Лапласу)

Пусть функция $f(t)$ определена для всех $t \geqq 0$. Тогда *преобразование Лапласа (изображение по Лапласу)* функции f представляет собой функцию F, определенную следующим образом:

➤
$$F(s) = \mathrm{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \tag{1}$$

для всех значений s, для которых несобственный интеграл сходится.

Вспомните, что **несобственный интеграл** по бесконечному интервалу определен как предел интегралов по ограниченным интервалам; иными словами,

$$\int_a^\infty g(t)\, dt = \lim_{b\to\infty} \int_a^b g(t)\, dt. \tag{2}$$

Если предел в (2) существует, то мы говорим, что несобственный интеграл **сходится**; в противном случае говорят, что он **расходится** или не существует. Обратите внимание, что подынтегральное выражение несобственного интеграла в (1) содержит параметр s в дополнение к переменной интегрирования t. Поэтому когда интеграл в (1) сходится, он сходится не просто к какому-нибудь числу, а к *функции* F от s. Как и в следующих примерах, несоб-

ственный интеграл в определении $\mathrm{L}\{f(t)\}$ сходится для некоторых значений s и расходится для других.

Пример 1 При $f(t)\equiv 1$ для $t \geqq 0$ по определению преобразования Лапласа (1) имеем

$$\mathrm{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}\,dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-bs} + \frac{1}{s}\right],$$

и поэтому

$$\mathrm{L}\{1\} = \frac{1}{s} \quad \text{для} \quad s > 0. \tag{3}$$

Как показано в (3), рекомендуется указывать область определения преобразования Лапласа — как в задачах, так и в примерах. Кроме того, в этом вычислении мы использовали обычное сокращение

$$\Big[g(t)\Big]_a^\infty = \lim_{b\to\infty}\Big[g(t)\Big]_a^b. \tag{4}$$

■

Замечание. Предел, который мы вычислили в примере 1, не существует, если $s < 0$, поскольку тогда $(1/s)e^{-bs}$ было бы неограниченным при $b \to +\infty$. Следовательно, $\mathrm{L}\{1\}$ определен только для $s > 0$. Это типично для преобразований Лапласа (изображений по Лапласу); область определения преобразования имеет обычно форму $s > a$ для некоторого числа a. ■

Пример 2 При $f(t) = e^{at}$ для $t \geqq 0$ мы получаем

$$\mathrm{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\,dt = \left[-\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\right]_{t=0}^\infty.$$

Если $s - a > 0$, то $e^{-(s-a)t} \to 0$ при $t \to +\infty$, поэтому

➤
$$\mathrm{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \quad \text{для} \quad s > a. \tag{5}$$

Обратите внимание, что несобственный интеграл, дающий $\mathrm{L}\{e^{at}\}$, расходится при $s \leqq a$. Стоит также отметить, что формула (5) справедлива, если a — комплексное число. Для $a = \alpha + i\beta$,

$$e^{-(s-a)t} = e^{i\beta t}e^{-(s-\alpha)t} \to 0$$

при $t \to +\infty$ при условии, что $s > \alpha = \mathrm{Re}(a)$; ведь $e^{i\beta t} = \cos\beta t + i\sin\beta t$. ■

Преобразование Лапласа (изображение по Лапласу) $\mathrm{L}\{t^a\}$ степенной функции наиболее удобно выразить через **гамма-функцию** $\Gamma(x)$, которая определена для $x > 0$ формулой

➤
$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt. \tag{6}$$

Элементарные сведения о $\Gamma(x)$ приведены в том подразделе раздела 8.5, который посвящен гамма-функции; там показано, что

$$\Gamma(1) = 1 \tag{7}$$

и что

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{8}$$

для $x > 0$. Из этого следует, что при положительном целом n

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = \\ &= n\cdot(n-1)\Gamma(n-1) = \\ &= n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\Gamma(n-2) = \\ &\vdots = \\ &= n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot\Gamma(2) = \\ &= n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1\cdot\Gamma(1);\end{aligned}$$

таким образом,

➤
$$\Gamma(n+1) = n!, \tag{9}$$

если n — положительное целое число. Поэтому функция $\Gamma(x+1)$ определена и непрерывна для всех $x > -1$, причем ее значения на натуральных значениях аргумента $x = n$ равны факториалам целых чисел.

Пример 3 Предположим, что $f(t) = t^a$, где a вещественно, причем $a > -1$. Тогда

$$\mathrm{L}\{t^a\} = \int_0^\infty e^{-st}t^a\,dt.$$

Если в этом интеграле подставить $u = st$, $t = u/s$ и $dt = du/s$, мы получим

$$\mathrm{L}\{t^a\} = \frac{1}{s^{a+1}}\int_0^\infty e^{-u}u^a\,du = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}} \tag{10}$$

для всех $s > 0$ (так что $u = st > 0$). Поскольку $\Gamma(n+1) = n!$, если n — неотрицательное целое число, то

➤
$$\mathrm{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \text{для} \quad s > 0. \tag{11}$$

Например,

$$\mathrm{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}, \quad \mathrm{L}\{t^2\} = \frac{2}{s^3} \quad \text{и} \quad \mathrm{L}\{t^3\} = \frac{6}{s^4}.$$

Как и в задачах 1 и 2, эти формулы могут быть получены непосредственно из определения, без использования гамма-функции. ■

Линейность преобразований

Нет необходимости очень углубляться в вычисления преобразований Лапласа (изображений по Лапласу), исходя непосредственно из определения. Как только мы знаем преобразования Лапласа (изображения по Лапласу) нескольких функций, мы можем комбинировать их, чтобы получить преобразования других функций. Причина состоит в том, что преобразование Лапласа является *линейной* операцией.

Теорема 1 Линейность преобразования Лапласа

Если a и b — константы, то

$$\mathrm{L}\{af(t)+bg(t)\}=a\mathrm{L}\{f(t)\}+b\mathrm{L}\{g(t)\} \tag{12}$$

для всех s, таких что существуют оба преобразования Лапласа (изображения по Лапласу) функций f и g. ▲

Доказательство теоремы 1 следует немедленно из линейности операций взятия пределов и интегрирования:

$$\begin{aligned}\mathrm{L}\{af(t)+bg(t)\}&=\int_0^\infty e^{-st}\left[af(t)+bg(t)\right]\,dt=\\&=\lim_{c\to\infty}\int_0^c e^{-st}\left[af(t)+bg(t)\right]\,dt=\\&=a\left(\lim_{c\to\infty}\int_0^c e^{-st}f(t)\,dt\right)+b\left(\lim_{c\to\infty}\int_0^c e^{-st}g(t)\,dt\right)=\\&=a\mathrm{L}\{f(t)\}+b\mathrm{L}\{g(t)\}.\end{aligned}$$

Пример 4 Вычисление $\mathrm{L}\{t^{n/2}\}$ базируется на известном частном значении

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi} \tag{13}$$

гамма-функции. Например, из этого следует, что

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{\pi},$$

поскольку формула $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ в (9) сначала применяется при $x=\frac{3}{2}$, а затем при $x=\frac{1}{2}$. Теперь формулы (10)–(12) дают

$$\mathrm{L}\{3t^2+4t^{3/2}\}=3\cdot\frac{2!}{s^3}+\frac{4\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{s^{5/2}}=\frac{6}{s^3}+3\sqrt{\frac{\pi}{s^5}}.$$ ■

Пример 5 Известно, что $\cosh kt = (e^{kt}+e^{-kt})/2$. Если $k > 0$, то теорема 1 и пример 2 вместе дают

$$\mathrm{L}\{\cosh kt\} = \frac{1}{2}\mathrm{L}\{e^{kt}\} + \frac{1}{2}\mathrm{L}\{e^{-kt}\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-k} + \frac{1}{s+k}\right);$$

иными словами,

$$\mathrm{L}\{\cosh kt\} = \frac{s}{s^2-k^2} \quad \text{для } s > k > 0. \tag{14}$$

Точно так же

$$\mathrm{L}\{\sinh kt\} = \frac{k}{s^2-k^2} \quad \text{для } s > k > 0. \tag{15}$$

Поскольку $\cos kt = (e^{ikt} + e^{-ikt})/2$, формула (5) (при $a = ik$) приводит к

$$\mathrm{L}\{\cos kt\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-ik} + \frac{1}{s+ik}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2s}{s^2-(ik)^2}$$

и, таким образом,

$$\mathrm{L}\{\cos kt\} = \frac{s}{s^2+k^2} \quad \text{для } s > 0. \tag{16}$$

(Область определения следует из условия $s > \mathrm{Re}(ik) = 0$.) Точно так же

$$\mathrm{L}\{\sin kt\} = \frac{k}{s^2+k^2} \quad \text{для } s > 0. \tag{17}$$

■

Пример 6 Применяя линейность, формулу (16) и знакомое тригонометрическое тождество, получаем

$$\begin{aligned}\mathrm{L}\{3e^{2t} + 2\sin^2 3t\} &= \mathrm{L}\{3e^{2t} + 1 - \cos 6t\} = \\ &= \frac{3}{s-2} + \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+36} = \\ &= \frac{3s^3+144s-72}{s(s-2)(s^2+36)} \quad \text{для } s > 0.\end{aligned}$$

■

Оригиналы функций (обратные преобразования)

Согласно теореме 3 из этого раздела, никакие две различные непрерывные для всех $t \geqq 0$ функции не могут иметь то же самое преобразование Лапласа (изображение по Лапласу). Таким образом, если $F(s)$ — преобразование некоторой непрерывной функции $f(t)$, то $f(t)$ определена однозначно. Это наблюдение позволяет нам дать следующее определение: если $F(s) = \mathrm{L}\{f(t)\}$, то функцию $f(t)$ мы называем **обратным преобразованием Лапласа функции (оригиналом функции)** $F(s)$ и пишем

➤
$$f(t) = \mathrm{L}^{-1}\{F(s)\}. \tag{18}$$

Пример 7 $\mathrm{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^3}\right\} = \dfrac{1}{2}t^2, \quad \mathrm{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s+2}\right\} = e^{-2t}, \quad \mathrm{L}^{-1}\left\{\dfrac{2}{s^2+9}\right\} = \dfrac{2}{3}\sin 3t,$

и т. д. ■

Система обозначений: функции и их преобразования (образы, изображения). Всюду в этой главе мы обозначаем функции от t буквами нижнего регистра. Преобразование (образ, изображение) функции будет всегда обозначаться тем же самым символом верхнего регистра (т. е. той же самой, но не строчной, а прописной буквой). Таким образом $F(s)$ — преобразование Лапласа (изображение по Лапласу) функции $f(t)$, а $x(t)$ — обратное преобразование Лапласа (оригинал) функции $X(s)$.

$f(t)$	$F(s)$	
1	$\dfrac{1}{s}$	$(s>0)$
t	$\dfrac{1}{s^2}$	$(s>0)$
$t^n \ \ (n \geqq 0)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	$(s>0)$
$t^a \ \ (a>-1)$	$\dfrac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	$(s>0)$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$	$(s>0)$
$\cos kt$	$\dfrac{s}{s^2+k^2}$	$(s>0)$
$\sin kt$	$\dfrac{k}{s^2+k^2}$	$(s>0)$
$\cosh kt$	$\dfrac{s}{s^2-k^2}$	$(s>\lvert k\rvert)$
$\sinh kt$	$\dfrac{k}{s^2-k^2}$	$(s>\lvert k\rvert)$
$u(t-a)$	$\dfrac{e^{-as}}{s}$	$(s>0)$

Рис. 7.1.2. Краткая таблица преобразований Лапласа (изображений по Лапласу)

Таблица преобразований Лапласа (изображений по Лапласу) используется подобно таблице интегралов. В таблице на рис. 7.1.2 перечислены преобразования (образы, изображения), полученные в этом разделе; много дополнительных преобразований (образов, изображений) можно получить из этих немногих, если использовать различные общие свойства преобразования Лапласа (которые мы обсудим в последующих разделах).

Кусочно-непрерывные функции

Как мы заметили в начале этого раздела, мы должны научиться обращаться с некоторыми типами разрывных функций. Функция $f(t)$ называется **кусочно-непрерывной** на ограниченном интервале $a \leqq t \leqq b$ при условии, что интервал $[a, b]$ может быть разбит на конечное число примыкающих подынтервалов таким способом, что

1. f непрерывна в каждом из этих подынтервалов;
2. $f(t)$ имеет конечный предел, когда t изнутри приближается к каждой конечной точке каждого подынтервала.

Мы говорим, что функция f кусочно непрерывна для $t \geqq 0$, если она кусочно непрерывна на каждом ограниченном подынтервале $[0, +\infty)$. Таким образом, кусочно-непрерывная функция имеет только простые разрывы (если она их вообще имеет) и только в изолированных точках. В таких точках значение функции испытывает конечный скачок, как показано на рис. 7.1.3. **Скачок** функции $f(t)$ **в точке** c по определению равен $f(c+) - f(c-)$, где

$$f(c+) = \lim_{\epsilon \to 0^+} f(c + \epsilon) \quad \text{и} \quad f(c-) = \lim_{\epsilon \to 0^+} f(c - \epsilon).$$

Вероятно, наиболее простой кусочно-непрерывной (но разрывной) функцией является **единичная ступенчатая функция (функция Хевисайда)**, график которой приведен на рис. 7.1.4. Она определяется следующим образом:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{для } t < 0, \\ 1 & \text{для } t \geqq 0. \end{cases} \tag{19}$$

Поскольку $u(t) = 1$ для $t \geqq 0$ и поскольку преобразование Лапласа (изображение по Лапласу) содержит только значения функции для $t \geqq 0$, мы немедленно получаем, что

$$\mathrm{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s} \quad (s > 0). \tag{20}$$

График единичной ступенчатой функции (функции Хевисайда) $u_a(t) = u(t - a)$ приведен на рис. 7.1.5. Она терпит разрыв (скачок) при $t = a$, а не при $t = 0$; вот эквивалентное

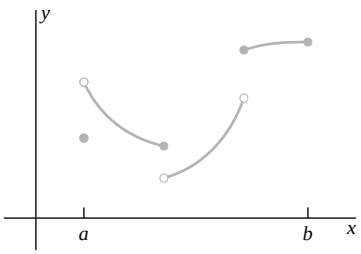


Рис. 7.1.3. График кусочно-непрерывной функции; жирные точки указывают значения функции в точках разрывов

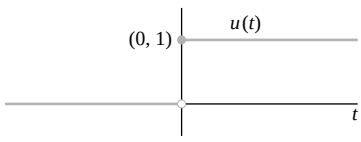


Рис. 7.1.4. График единичной ступенчатой функции (функции Хевисайда)

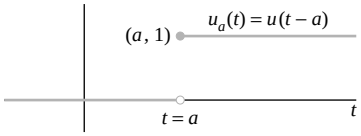


Рис. 7.1.5. Единичная ступенчатая функция (функция Хевисайда) $u_a(t)$ имеет скачок в точке $t = a$.

определение:

$$u_a(t) = u(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{для } t < a, \\ 1 & \text{для } t \geqq a. \end{cases} \tag{21}$$

Пример 8 Найдем $\mathrm{L}\{u_a(t)\}$, если $a > 0$.

Решение Мы начинаем с определения преобразования Лапласа (изображения по Лапласу). Мы получаем

$$\mathrm{L}\{u_a(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} u_a(t)\, dt = \int_a^\infty e^{-st}\, dt = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_{t=a}^{b};$$

следовательно,

$$\mathrm{L}\{u_a(t)\} = \frac{e^{-as}}{s} \quad (s > 0,\ a > 0). \tag{22}$$

■

Общие свойства преобразований

Из курса анализа (дифференциального и интегрального исчисления) хорошо известно, что интеграл

$$\int_a^b g(t)\, dt$$

существует, если функция g кусочно непрерывна на ограниченном интервале $[a, b]$. Следовательно, если f кусочно непрерывна для $t \geqq 0$, то интеграл

$$\int_0^b e^{-st} f(t)\, dt$$

существует для всех $b < +\infty$. Но чтобы существовал $F(s)$ — предел этого последнего интеграла при $b \to +\infty$, — необходимо наложить некоторое дополнительное условие, ограничивающее скорость роста $f(t)$ при $t \to +\infty$. Говорят, что функция f имеет **экспоненциальный порядок** при $t \to +\infty$, если существуют неотрицательные константы M, c и T, такие что

$$|f(t)| \leqq Me^{ct} \quad \text{для } t \geqq T. \tag{23}$$

Таким образом, функция имеет экспоненциальный порядок при условии, что она растет (при $t \to +\infty$) не быстрее, чем некоторая экспоненциальная функция с линейным показателем степени, умноженная на некоторое постоянное число. Конкретные значения констант M, c и T не важны. Что действительно важно, так это существование некоторых таких значений, чтобы удовлетворялось условие (23).

Каждый многочлен $p(t)$ имеет экспоненциальный порядок, причем в (23) можно положить $M = c = 1$; это следует из того факта, что $p(t)/e^t \to 0$ при $t \to +\infty$. Функция $g(t) = e^{t^2}$ — пример функции, которая *не имеет* экспоненциального порядка, потому что

$$\lim_{t\to\infty} \frac{e^{t^2}}{e^{ct}} = \lim_{t\to\infty} e^{t^2-ct} = +\infty,$$

условие (23) не может быть выполнено ни для какого [конечного] значения M. Условие (23) просто означает, что $f(t)/e^{ct}$ *ограничена* для достаточно больших t. В частности, любая ограниченная функция, например $\cos kt$ или $\sin kt$, имеет экспоненциальный порядок.

Теорема 2 Существование преобразований Лапласа (изображений по Лапласу)

Если функция f кусочно непрерывна для $t \geqq 0$ и имеет экспоненциальный порядок при $t \to +\infty$, то ее преобразование Лапласа (изображение по Лапласу) $F(s) = \mathrm{L}\{f(t)\}$ существует. Более точно, если f кусочно непрерывна и удовлетворяет условию (23), то $F(s)$ существует для всех $s > c$.

Доказательство. Сначала заметим, что мы можем взять $T = 0$ в (23). Поскольку наша функция кусочно непрерывна, ее модуль $|f(t)|$ ограничен на $[0, T]$. Поэтому, увеличивая M в (23) в случае необходимости, мы можем предположить, что $|f(t)| \leqq M$, если $0 \leqq t \leqq T$. Поскольку $e^{ct} \geqq 1$ для $t \geqq 0$, то $|f(t)| \leqq Me^{ct}$ для всех $t \geqq 0$.

Из стандартной теоремы о сходимости несобственных интегралов, которая гласит, что абсолютная сходимость подразумевает сходимость, следует, что достаточно доказать, что интеграл

$$\int_0^\infty |e^{-st} f(t)|\, dt$$

существует для $s > c$. Чтобы сделать это, достаточно, в свою очередь, показать, что значение интеграла

$$\int_0^b |e^{-st} f(t)|\, dt$$

остается ограниченным при $b \to +\infty$. Но поскольку $|f(t)| \leqq Me^{ct}$ для всех $t \geqq 0$, то

$$\int_0^b |e^{-st} f(t)|\, dt \leqq \int_0^b |e^{-st} M e^{ct}|\, dt = M \int_0^b e^{-(s-c)t}\, dt \leqq$$

$$\leqq M \int_0^\infty e^{-(s-c)t}\, dt = \frac{M}{s-c},$$

если $s > c$. Это доказывает теорему 2. ▲

Мы показали, кроме того, что

$$|F(s)| \leqq \int_0^\infty |e^{-st} f(t)|\, dt \leqq \frac{M}{s-c} \tag{24}$$

если $s > c$. Если перейти к пределу при $s \to +\infty$, мы получим следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ *F*(*s*) для больших *s*

Если $f(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, то

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0. \tag{25}$$

▲

Условие (25) сильно ограничивает класс функций, которые могут быть изображениями по Лапласу. Например, функция $G(s) = s/(s+1)$ не может быть изображением по Лапласу любой "разумной" функции, потому что ее предел при $s \to +\infty$ равен 1, а не 0. Вот более общее утверждение: рациональная функция — частное двух многочленов — может быть (и, как мы увидим, является) изображением по Лапласу, только если степень ее числителя меньше, чем степень ее знаменателя.

С другой стороны, условия теоремы 2 являются достаточными, но не необходимыми условиями существования преобразования Лапласа (изображения по Лапласу) функции $f(t)$. Например, функция $f(t) = 1/\sqrt{t}$ не является кусочно-непрерывной (в точке $t = 0$), однако (пример 3 при $a = -\frac{1}{2} > -1$) ее преобразование Лапласа (изображение по Лапласу)

$$\mathrm{L}\{t^{-1/2}\} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{1/2}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

существует, причем нарушено условие (24), которое подразумевает, что $sF(s)$ остается ограниченной при $s \to +\infty$.

Остаток этой главы в значительной степени посвящен специальным методам поиска решений дифференциальных уравнений. Эти методы состоят в том, чтобы сначала найти преобразование Лапласа (изображение по Лапласу) решения такого уравнения. Поэтому для нас жизненно знать, что преобразование Лапласа (изображение по Лапласу) единственным образом определяет решение дифференциального уравнения; т. е. найденная функция s имеет только один оригинал, который может быть искомым решением. Иными словами, важно установить, что обратное преобразование Лапласа однозначно. Следующая теорема доказана в главе 6 книги Черчилля (Churchill) *Operational Mathematics,* посвященной операционным методам в математике (3-е издание издано в Нью-Йорке в 1972 году издательством McGraw-Hill).

Теорема 3 Единственность оригинала функции (однозначность обратного преобразования Лапласа)

Предположим, что функции $f(t)$ и $g(t)$ удовлетворяют условиям теоремы 2, так что изображения обеих функций по Лапласу $F(s)$ и $G(s)$ существуют. Если $F(s) = G(s)$ для всех $s > c$ (для некоторого c), то $f(t) = g(t)$ во всех точках непрерывности f и g на интервале $[0, +\infty)$. ▲

Таким образом, две кусочно-непрерывные функции экспоненциального порядка с тем же самым изображением по Лапласу могут отличаться только в их изолированных точках разрыва. Это не имеет никакого значения в самих практических приложениях, так что мы можем рассматривать обратное преобразование Лапласа по существу как однозначное, т. е. мы можем считать, что изображение функции по Лапласу однозначно орпределяет оригинал функции. В частности, любые два решения дифференциального уравнения должны быть непрерывны и, следовательно, должны быть одним и тем же самым решением, если они имеют то же самое преобразование Лапласа (изображение по Лапласу).

Историческое замечание. Преобразования Лапласа (изображения по Лапласу) имеют интересную историю. Интеграл в определении преобразования Лапласа (изображения по Лапласу), вероятно, впервые появился в одной из работ Л. Эйлера. Однако в математике общепринято называть методику или теорему именем того математика, который открыл ее после Эйлера (в противном случае существовало бы несколько сотен различных теорем Эйлера). В данном случае следующим после Эйлера был французский математик Пьер Симон де Лаплас (Pierre Simon de Laplace, 1749–1827). Именно он использовал такие интегралы в его работе по теории вероятностей. Так называемые "операционные методы" для нахождения решений дифференциальных уравнений, основанные на преобразованиях Лапласа (изображениях по Лапласу), самим Лапласом не применялись. В действительности они были обнаружены и популяризировались инженерами-практиками, особенно английским инженером-электриком Оливером Хевисайдом (1850–1925). Эти методы успешно и широко применялись задолго до того, как была строго доказана их справедливость, и даже в начале XX столетия их законность была в значительной мере под сомнением и по этой теме велись ожесточенные дебаты.

7.1. Задачи

В задачах 1–10 непосредственно с помощью определения (1) найдите преобразования Лапласа (изображения по Лапласу) заданных ниже (формулой или графиком) функций.

1. $f(t) = t$

2. $f(t) = t^2$

3. $f(t) = e^{3t+1}$

4. $f(t) = \cos t$

5. $f(t) = \sinh t$

6. $f(t) = \sin^2 t$

7.

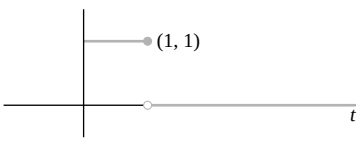


Рис. 7.1.6

8.

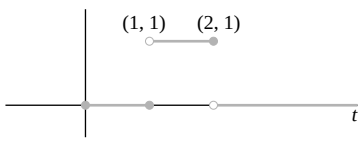


Рис. 7.1.7

9.

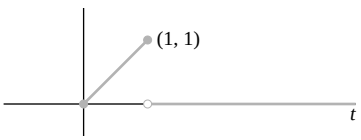


Рис. 7.1.8

10.

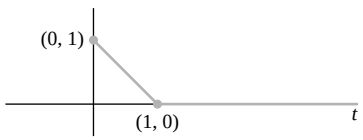


Рис. 7.1.9

В задачах 11–22 с помощью преобразований, приведенных на рис. 7.1.2, найдите преобразования Лапласа (изображения по Лапласу) указанных функций. Иногда может понадобиться предварительное интегрирование по частям.

11. $f(t) = \sqrt{t} + 3t$
12. $f(t) = 3t^{5/2} - 4t^3$
13. $f(t) = t - 2e^{3t}$
14. $f(t) = t^{3/2} - e^{-10t}$
15. $f(t) = 1 + \cosh 5t$
16. $f(t) = \sin 2t + \cos 2t$
17. $f(t) = \cos^2 2t$
18. $f(t) = \sin 3t \cos 3t$
19. $f(t) = (1+t)^3$
20. $f(t) = te^t$
21. $f(t) = t \cos 2t$
22. $f(t) = \sinh^2 3t$

Применяя преобразования, приведенные в таблице на рис. 7.1.2, найдите оригиналы (обратные преобразования Лапласа) функций в задачах 23–32.

23. $F(s) = \dfrac{3}{s^4}$
24. $F(s) = s^{-3/2}$
25. $F(s) = \dfrac{1}{s} - \dfrac{2}{s^{5/2}}$
26. $F(s) = \dfrac{1}{s+5}$
27. $F(s) = \dfrac{3}{s-4}$
28. $F(s) = \dfrac{3s+1}{s^2+4}$
29. $F(s) = \dfrac{5-3s}{s^2+9}$
30. $F(s) = \dfrac{9+s}{4-s^2}$
31. $F(s) = \dfrac{10s-3}{25-s^2}$
32. $F(s) = 2s^{-1}e^{-3s}$

33. Найдите преобразование Лапласа функции $f(t) = \sin kt$ методом, использованным в тексте для вывода формулы (16).

34. Найдите преобразование Лапласа функции $f(t) = \sinh kt$ методом, использованным в тексте для вывода формулы (14).

35. Используя табличный интеграл

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \cos bx + b \sin bx) + C,$$

найдите $\mathrm{L}\{\cos kt\}$ непосредственно по определению преобразования Лапласа (изображения по Лапласу).

36. Покажите, что функция $f(t) = \sin(e^{t^2})$ имеет экспоненциальный порядок при $t \to +\infty$, а ее производная не имеет экспоненциального порядка.

37. Пусть известно, что $a > 0$ и $f(t) = 1$, если $0 \leqq t < a$, и $f(t) = 0$, если $t \geqq a$. Сначала сделайте набросок графика функции f, выяснив ее значение при $t = a$. Затем выразите f через единичные ступенчатые функции и покажите, что $\mathrm{L}\{f(t)\} = s^{-1}(1 - e^{-as})$.

38. Принимая, что $0 < a < b$, положите $f(t) = 1$, если $a \leqq t < b$, $f(t) = 0$, если $t < a$ или $t \geqq b$. Сначала сделайте набросок графика функции f, выяснив ее значение при $t = a$ и $t = b$. Затем выразите f через единичные ступенчатые функции и покажите, что $\mathrm{L}\{f(t)\} = s^{-1}(e^{-as} - e^{-bs})$.

39. *Единичная ступенчатая функция* определена следующим образом:

$$f(t) = n, \quad \text{если} \quad n-1 \leqq t < n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

(a) Сделайте набросок графика f, чтобы увидеть, почему ей дали такое название (имя). **(b)** Покажите, что

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u(t-n)$$

для всех $t \geqq 0$. **(c)** Предположите, что преобразование Лапласа (изображение по Лапласу) бесконечного ряда в части (b) может быть вычислено почленно (это действительно так). Применяя формулу для суммы бесконечной геометрической прогрессии, получите в результате

$$\mathrm{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s(1-e^{-s})}.$$

40. **(a)** График функции f приведен на рис. 7.1.10. Покажите, что f может быть записана в форме

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u(t-n).$$

(b) Используя метод задачи 39, покажите, что

$$\mathrm{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s(1+e^{-s})}.$$

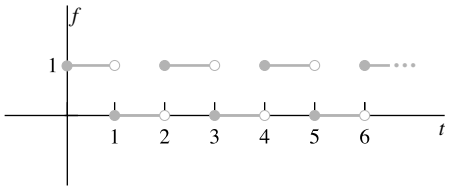


Рис. 7.1.10. График функции из задачи 40

41. График функции *прямоугольного колебания (меандра)* g (t) показан на рис. 7.1.11. Выразите g через функцию f из задачи 40 и отсюда выведите, что

$$\mathrm{L}\{g(t)\} = \frac{1-e^{-s}}{s(1+e^{-s})} = \frac{1}{s}\tanh\frac{s}{2}.$$

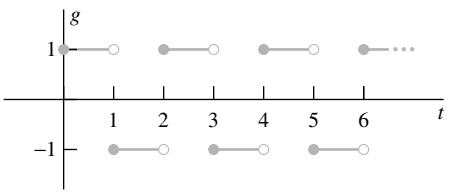


Рис. 7.1.11. График функции из задачи 41

42. Для заданных констант a и b определите $h(t)$ для $t \geqq 0$ формулой

$$h(t) = \begin{cases} a, & \text{если } n-1 \leqq t < n \text{ и } n \text{ нечетное;} \\ b, & \text{если } n-1 \leqq t < n \text{ и } n \text{ четное.} \end{cases}$$

Сделайте набросок графика h и примените одну из предыдущих задач, чтобы показать, что

$$\mathrm{L}\{h(t)\} = \frac{a+be^{-s}}{s(1+e^{-s})}.$$

7.1. Приложение. Преобразования Лапласа в системах компьютерной алгебры и оригиналы функций (обратные преобразования)

Если $f(t) = t\cos 3t$, то определение преобразования Лапласа (изображения по Лапласу) дает несобственный интеграл

$$F(s) = \mathrm{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty te^{-st}\cos 3t\,dt,$$

вычисление которого, казалось бы, требует утомительного интегрирования по частям. Следовательно, для быстрого вычисления преобразований может быть весьма полезна система компьютерной алгебры, имеющая средства для вычислений изображений по Лапласу. *Maple* содержит пакет интегральных преобразований `inttrans`, а *Mathematica* содержит пакет `Calculus:LaplaceTransform`. Команды системы *Maple*

```
with(inttrans):
f := t*cos(3*t):
F := laplace(f, t, s);
F := simplify(expand( F ));
```

и команды системы *Mathematica*

```
Needs["Calculus`LaplaceTransform`"]
f = t*Cos[3*t];
F = LaplaceTransform[f, t, s]
Simplify[Expand[ F ]]
```

позволяют немедленно вычислить преобразование Лапласа (изображение по Лапласу) $F(s) = (s^2 - 9)/(s^2 + 9)^2$.

Если вы выполните эти команды, вы увидите, почему обычно полезно раскрыть скобки (команда `expand`) и упростить результат (команда `simplify`) при вычислении преобразования Лапласа (изображения по Лапласу). Мы можем получить оригинал $f(t)$ с помощью команды системы *Maple*

```
invlaplace(F, s, t);
```

или команды системы *Mathematica*

```
InverseLaplaceTransform[F, s, t]
```

(и снова при необходимости можем раскрыть скобки и упростить результат перед его тщательным анализом).

Замечание. Обратите внимание (это очень важно!) на порядок переменных s и t в предыдущих командах — сначала t, затем s при преобразовании; сначала s, затем t при обратном преобразовании (вычислении оригинала функции). ■

Вы можете использовать эти команды системы компьютерной алгебры, чтобы проверить ответы к задачам 11–32 из этого раздела, а также можете решить несколько интересных задач по вашему собственному выбору.

7.2. Применение преобразования Лапласа к задачам Коши (задачам с начальными условиями)

Мы теперь обсудим приложение преобразований Лапласа (изображений по Лапласу) к поиску решений линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами вида

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = f(t) \tag{1}$$

с данными начальными условиями $x(0) = x_0$ и $x'(0) = x'_0$. Пользуясь линейностью преобразования Лапласа, мы можем преобразовать уравнение (1), выполняя преобразование Лапласа отдельно для каждого члена уравнения, т. е. взяв изображение по Лапласу каждого члена уравнения. Преобразованное уравнение примет вид

$$a\mathrm{L}\{x''(t)\} + b\mathrm{L}\{x'(t)\} + c\mathrm{L}\{x(t)\} = \mathrm{L}\{f(t)\}; \tag{2}$$

оно содержит преобразования производных x' и x'' неизвестной функции $x(t)$. Ключ к методу открывает теорема 1, которая позволяет выразить преобразование *производной* функции через преобразования самой функции.

Теорема 1 Преобразования производных

Предположим, что функция $f(t)$ непрерывна и кусочно гладка для $t \geqq 0$ и имеет экспоненциальный порядок при $t \to +\infty$, так что существуют неотрицательные константы M, c и T, такие что

$$|f(t)| \leqq Me^{ct} \quad \text{для } t \geqq T. \tag{3}$$

Тогда $\mathrm{L}\{f'(t)\}$ существует для $s > c$, и

$$\mathrm{L}\{f'(t)\} = s\mathrm{L}\{f(t)\} - f(0) = sF(s) - f(0). \tag{4}$$

▲

Функцию f называют **кусочно-гладкой** на ограниченном интервале $[a, b]$, если она кусочно непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема, кроме, быть может, конечного числа точек, причем $f'(t)$ кусочно непрерывна на $[a, b]$. Мы можем назначить произвольные значения $f(t)$ в изолированных точках, в которых f не дифференцируема. Мы говорим, что f кусочно гладка для $t \geqq 0$, если она кусочно гладка на каждом ограниченном подынтервале интервала $[0, +\infty)$. На рис. 7.2.1 показано, что "углы" на графике f соответствуют разрывам ее производной f'.

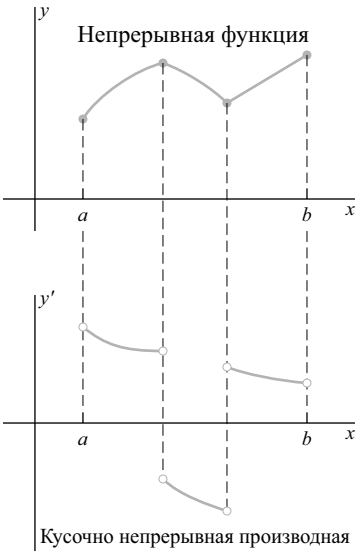


Рис. 7.2.1. Разрывы f' соответствуют "углам" на графике f

Главная идея доказательства теоремы 1 демонстрируется лучше всего случаем, в котором $f'(t)$ является непрерывной (а не просто кусочно-непрерывной) для $t \geqq 0$. Тогда, начиная с определения $\mathrm{L}\{f'(t)\}$ и интегрирования по частям, мы получаем

$$\mathrm{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt = \Big[e^{-st} f(t)\Big]_{t=0}^{\infty} + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt.$$

Учитывая условие (3), мы видим, что интегрируемый член $e^{-st}f(t)$ стремится к нулю (когда $s > c$) при $t \to +\infty$, и его значение в нижнем пределе $t = 0$ вносит вклад $-f(0)$ в значение предыдущего выражения. Интеграл, который остается, — это просто $\mathrm{L}\{f(t)\}$; по теореме 2 из раздела 7.1 этот интеграл сходятся при $s > c$. Тогда отсюда следует, что $\mathrm{L}\{f'(t)\}$ существует при $s > c$, и его значение можно вычислить по формуле (4). Рассмотрение случая, в котором $f'(t)$ имеет изолированные разрывы, мы отложим до конца этого раздела.

Решение задач Коши (задач с начальными условиями)

Чтобы преобразовать уравнение (1), мы должны также преобразовать вторую производную. Если предположить, что $g(t) = f'(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, то из этой теоремы будет следовать, что

$$\begin{aligned}\mathrm{L}\{f''(t)\} = \mathrm{L}\{g'(t)\} &= s\mathrm{L}\{g(t)\} - g(0) = \\ &= s\mathrm{L}\{f'(t)\} - f'(0) = \\ &= s\,[s\mathrm{L}\{f(t)\} - f(0)] - f'(0),\end{aligned}$$

и, таким образом,

➤
$$\mathrm{L}\{f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0). \tag{5}$$

Повторение этого вычисления дает

$$\mathrm{L}\{f'''(t)\} = s\mathrm{L}\{f''(t)\} - f''(0) = s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0). \tag{6}$$

После конечного числа таких шагов мы получаем следующее обощение теоремы 1.

СЛЕДСТВИЕ Преобразования производных высших порядков

Предположим, что функции f, f', f'', $\ldots$, $f^{(n-1)}$ непрерывны и кусочно гладки для $t \geqq 0$ и что каждая из этих функций удовлетворяет условиям вида (3) с теми же самыми значениями M и c. Тогда $\mathrm{L}\{f^{(n)}(t)\}$ существует при $s > c$ и

$$\begin{aligned}\mathrm{L}\{f^{(n)}(t)\} &= s^n\mathrm{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0) = \\ &= s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).\end{aligned} \tag{7}$$

▲

Пример 1 Решим задачу Коши (задачу с начальными условиями)

$$x'' - x' - 6x = 0; \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = -1.$$

Решение При заданных начальных значениях равенства (4) и (5) дают

$$\mathrm{L}\{x'(t)\} = s\mathrm{L}\{x(t)\} - x(0) = sX(s) - 2$$

и

$$\mathrm{L}\{x''(t)\} = s^2\mathrm{L}\{x(t)\} - sx(0) - x'(0) = s^2X(s) - 2s + 1,$$

где (согласно нашему соглашению о системе обозначений) $X(s)$ обозначает преобразование Лапласа (изображение по Лапласу) (неизвестной) функции $x(t)$. Следовательно, преобразованное уравнение имеет вид

$$\left[s^2X(s) - 2s + 1\right] - \left[sX(s) - 2\right] - 6\left[X(s)\right] = 0.$$

Это уравнение легко упрощается:

$$(s^2 - s - 6)X(s) - 2s + 3 = 0.$$

Таким образом,

$$X(s) = \frac{2s - 3}{s^2 - s - 6} = \frac{2s - 3}{(s - 3)(s + 2)}.$$

В соответствии с методом элементарных дробей (из интегрального исчисления) существуют константы A и B, такие что

$$\frac{2s - 3}{(s - 3)(s + 2)} = \frac{A}{s - 3} + \frac{B}{s + 2},$$

а умножение обеих частей этого уравнения на $(s-3)(s+2)$ приводит к уравнению

$$2s - 3 = A(s+2) + B(s-3).$$

Подставив $s = 3$, найдем $A = \frac{3}{5}$; подставив же $s = -2$, найдем $B = \frac{7}{5}$. Следовательно,

$$X(s) = \mathrm{L}\{x(t)\} = \frac{\frac{3}{5}}{s-3} + \frac{\frac{7}{5}}{s+2}.$$

Поскольку $\mathrm{L}^{-1}\{1/(s-a)\} = e^{at}$, то

$$x(t) = \tfrac{3}{5}e^{3t} + \tfrac{7}{5}e^{-2t}$$

— решение первоначальной задачи Коши (задачи с начальными условиями). Обратите внимание, что мы сначала не находили общее решение дифференциального уравнения. Метод преобразования Лапласа непосредственно приводит к искомому частному решению, автоматически учитывая — это следует из теоремы 1 и ее заключения — заданные начальные условия. ■

Пример 2 Решим задачу Коши (задачу с начальными условиями)

$$x'' + 4x = \sin 3t; \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

Такая задача описывает движение системы, состоящей из материальной точки заданной массы, закрепленной на пружине, к которой приложена внешняя сила, как показано на рис. 7.2.2.

Решение Поскольку оба начальных значения равны нулю, уравнение (5) дает $\mathrm{L}\{x''(t)\} = s^2X(s)$. Мы находим преобразование $\sin 3t$ в таблице на рис. 7.1.2 (раздел 7.1) и таким образом получаем преобразованное уравнение

$$s^2X(s) + 4X(s) = \frac{3}{s^2+9}.$$

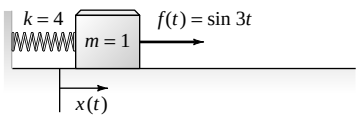


Рис. 7.2.2. Система, состоящая из материальной точки заданной массы, закрепленной на пружине, удовлетворяет задачу Коши (задачу с начальными условиями) из примера 2. Материальная точка заданной массы первоначально находится в покое в положении ее равновесия

Поэтому

$$X(s) = \frac{3}{(s^2+4)(s^2+9)}.$$

Метод элементарных дробей приводит к уравнению

$$\frac{3}{(s^2+4)(s^2+9)} = \frac{As+B}{s^2+4} + \frac{Cs+D}{s^2+9}.$$

Поскольку в левой части нет слагаемых нечетной степени, мы полагаем $A = C = 0$, потому что отличные от нуля значения для A или C привели бы к появлению слагаемых нечетной степени, — но никаких таких слагаемых в числителе слева нет. Так что мы заменяем A и C нулем, а затем умножаем обе части на $(s^2+4)(s^2+9)$. В результате получаем тождество

$$3 = B(s^2+9) + D(s^2+4) = (B+D)s^2 + (9B+4D).$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях s, мы получим линейные уравнения

$$\begin{aligned} B + D &= 0, \\ 9B + 4D &= 3, \end{aligned}$$

из которых легко найти $B = \frac{3}{5}$ и $D = -\frac{3}{5}$. Следовательно,

$$X(s) = \mathrm{L}\{x(t)\} = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{s^2+4} - \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{s^2+9}.$$

Поскольку $\mathrm{L}\{\sin 2t\} = 2/(s^2+4)$ и $\mathrm{L}\{\sin 3t\} = 3/(s^2+9)$, то

$$x(t) = \tfrac{3}{10}\sin 2t - \tfrac{1}{5}\sin 3t.$$

На рис. 7.2.3 показан график этой периодической (период равен 2π) функции, дающей положение материальной точки заданной массы. Обратите внимание, что метод преобразования Лапласа снова дает решение непосредственно, без потребности сначала найти общее решение однородного уравнения и частное решение первоначального неоднородного дифференциального уравнения. Таким образом, поиск решений неоднородных уравнений выполняется точно так же, как и однородных уравнений. ■

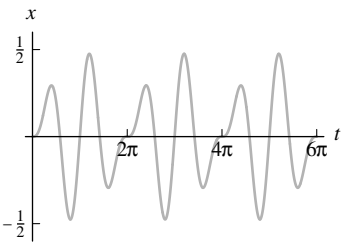


Рис. 7.2.3. Функция, дающая положение $x(t)$ из примера 2

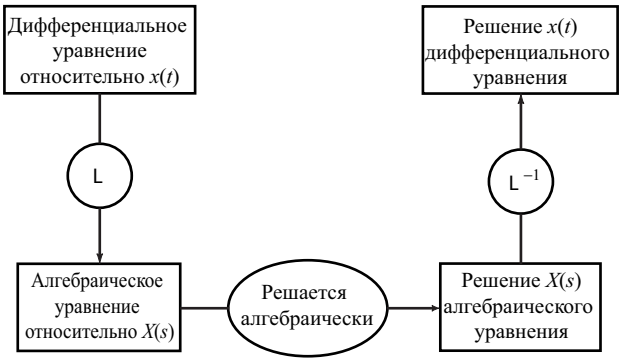


Рис. 7.2.4. Использование преобразования Лапласа (изображения по Лапласу) для нахождения решения задачи Коши (задачи с начальными условиями)

Примеры 1 и 2 иллюстрируют процедуру решения, которая схематически изображена на рис. 7.2.4.

Линейные системы

Преобразования Лапласа (изображения по Лапласу) часто используются в тех технических задачах, где требуется решить линейные системы, в которых все коэффициенты являются константами. Когда определены начальные условия, преобразование Лапласа (замена функций их изображениями по Лапласу) приводит такую линейную систему дифференциальных уравнений к линейной системе алгебраических уравнений, в которых неизвестные являются преобразованиями функций-решений. Как иллюстрирует пример 3, методика для системы по существу та же самая, что и для одного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Пример 3 Решим систему

$$\begin{aligned} 2x'' &= -6x + 2y, \\ y'' &= 2x - 2y + 40\sin 3t \end{aligned} \tag{8}$$

с начальными условиями

$$x(0) = x'(0) = y(0) = y'(0) = 0. \tag{9}$$

Таким образом, сила $f(t) = 40\sin 3t$ внезапно прилагается ко второй материальной точке заданной массы (рис. 7.2.5) в момент времени $t = 0$, когда система находится в покое в ее положении равновесия.

Решение Мы пишем $X(s) = \mathrm{L}\{x(t)\}$ и $Y(s) = \mathrm{L}\{y(t)\}$. Тогда из начальных условий (9) следует, что

$$\mathrm{L}\{x''(t)\} = s^2X(s) \quad \text{и} \quad \mathrm{L}\{y''(t)\} = s^2Y(s).$$

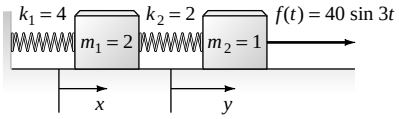


Рис. 7.2.5. Система тел заданных масс, закрепленных на пружинах, удовлетворяет задаче Коши (задаче с начальными условиями) из примера 3. Обе материальные точки заданных масс первоначально находятся в покое в их положениях равновесия

Поскольку $\mathrm{L}\{\sin 3t\} = 3/(s^2+9)$, преобразования уравнений (8) приводят к уравнениям

$$\begin{aligned} 2s^2X(s) &= -6X(s) + 2Y(s), \\ s^2Y(s) &= 2X(s) - 2Y(s) + \frac{120}{s^2+9}. \end{aligned}$$

Таким образом, преобразованная система принимает вид

$$\begin{aligned} (s^2+3)X(s) \qquad\quad - Y(s) &= 0, \\ -2X(s) + (s^2+2)Y(s) &= \frac{120}{s^2+9}. \end{aligned} \tag{10}$$

Детерминант этой пары линейных уравнений относительно $X(s)$ и $Y(s)$ равен

$$\begin{vmatrix} s^2+3 & -1 \\ -2 & s^2+2 \end{vmatrix} = (s^2+3)(s^2+2) - 2 = (s^2+1)(s^2+4),$$

и мы легко (например с помощью правила Крамера) находим решение системы (10). Оказывается, что

$$X(s) = \frac{120}{(s^2+1)(s^2+4)(s^2+9)} = \frac{5}{s^2+1} - \frac{8}{s^2+4} + \frac{3}{s^2+9} \tag{11a}$$

и

$$Y(s) = \frac{120(s^2+3)}{(s^2+1)(s^2+4)(s^2+9)} = \frac{10}{s^2+1} + \frac{8}{s^2+4} - \frac{18}{s^2+9}. \tag{11b}$$

Разложения на элементарные дроби в (11a) и (11b) легко находятся с помощью метода из примера 2. Например, замечая, что множители знаменателя являются линейными относительно s^2, мы можем написать

$$\frac{120}{(s^2+1)(s^2+4)(s^2+9)} = \frac{A}{s^2+1} + \frac{B}{s^2+4} + \frac{C}{s^2+9},$$

а из этого следует, что

$$120 = A(s^2+4)(s^2+9) + B(s^2+1)(s^2+9) + C(s^2+1)(s^2+4). \quad (12)$$

Подстановка $s^2 = -1$ (т. е. $s = i$) обнуляет множитель $s^2 + 1$) в уравнении (12) и дает $120 = A \cdot 3 \cdot 8$, так что $A = 5$. Точно так же замена $s^2 = -4$ в уравнении (12) дает $B = -8$, а замена $s^2 = -9$ дает $C = 3$. Таким образом мы получаем разложение на простые дроби, данное в равенстве (11a).

Во всяком случае, обратные преобразования по Лапласу выражений в уравнениях (11a) и (11b) дают решение

$$\begin{aligned} x(t) &= \ \ 5\sin t - 4\sin 2t + \ \ \sin 3t, \\ y(t) &= 10\sin t + 4\sin 2t - 6\sin 3t. \end{aligned}$$

На рис. 7.2.6 показаны графики этих двух периодических (периоды равны 2π) функций, дающих положения этих двух материальных точек заданных масс. ■

Методика использования преобразования Лапласа

Давайте рассматривать общее уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами как уравнение движения

$$mx'' + cx' + kx = f(t)$$

знакомой системы, состоящей из материальной точки заданной массы, закрепленной на пружине, с поршнем (рис. 7.2.7). Тогда преобразованное уравнение будет иметь вид

$$m\left[s^2X(s) - sx(0) - x'(0)\right] + c\left[sX(s) - x(0)\right] + kX(s) = F(s). \quad (13)$$

Заметьте, что уравнение (13) — *алгебраическое* уравнение — в действительности даже линейное уравнение — относительно "неизвестного" $X(s)$. Это и есть источник могущества метода преобразования Лапласа (метода замены оригиналов их изображениями по Лапласу):

> Линейные ***дифференциальные*** уравнения преобразуются
> в легко решаемые ***алгебраические*** уравнения.

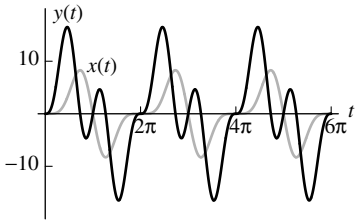


Рис. 7.2.6. Функции, дающие положения $x(t)$ и $y(t)$ в примере 3

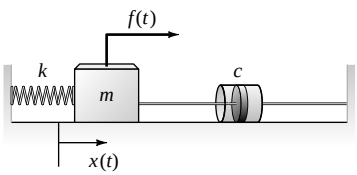


Рис. 7.2.7. Система, состоящая из материальной точки заданной массы, закрепленной на пружине, с поршнем, на которую действует внешняя сила $f(t)$

Решив уравнение (13) относительно $X(s)$, получим

$$X(s) = \frac{F(s)}{Z(s)} + \frac{I(s)}{Z(s)}, \tag{14}$$

где

$$Z(s) = ms^2 + cs + k \quad \text{и} \quad I(s) = mx(0)s + mx'(0) + cx(0).$$

Обратите внимание, что $Z(s)$ зависит только от самой физической системы. Таким образом, в равенстве (14) $X(s) = \mathrm{L}\{x(t)\}$ представлено как сумма слагаемого, зависящего только от внешней силы и слагаемого, зависящего только от начальных условий. В случае системы со слабым затуханием эти два слагаемых соответственно являются преобразованиями Лапласа

$$\mathrm{L}\{x_{\mathrm{sp}}(t)\} = \frac{F(s)}{Z(s)} \quad \text{и} \quad \mathrm{L}\{x_{\mathrm{tr}}(t)\} = \frac{I(s)}{Z(s)}$$

устойчивого периодического решения и переходного решения. Единственная потенциальная трудность в нахождении этих решений кроется в нахождении обратного преобразования Лапласа правой части уравнения (14). Большая часть остатка этой главы посвящена нахождению преобразований Лапласа (изображений по Лапласу) и обратных преобразований. В частности, мы ищем те методы, которые являются достаточно мощными, чтобы дать возможность решить задачи, которые — в отличие от задач в примерах 1 и 2 — не могут быть легко решены методами главы 3.

Дополнительные методы преобразования Лапласа

Пример 4 Покажем, что

$$\mathrm{L}\{te^{at}\} = \frac{1}{(s-a)^2}.$$

Решение Если $f(t) = te^{at}$, то $f(0) = 0$ и $f'(t) = e^{at} + ate^{at}$. Следовательно, теорема 1 дает

$$\mathrm{L}\{e^{at} + ate^{at}\} = \mathrm{L}\{f'(t)\} = s\mathrm{L}\{f(t)\} = s\mathrm{L}\{te^{at}\}.$$

Из линейности преобразования следует, что

$$\mathrm{L}\{e^{at}\} + a\mathrm{L}\{te^{at}\} = s\mathrm{L}\{te^{at}\}.$$

Следовательно,

$$\mathrm{L}\{te^{at}\} = \frac{\mathrm{L}\{e^{at}\}}{s-a} = \frac{1}{(s-a)^2}, \tag{15}$$

потому что $\mathrm{L}\{e^{at}\} = 1/(s-a)$. ■

Пример 5 Найдем $\mathrm{L}\{t \sin kt\}$.

Решение Пусть $f(t) = t\sin kt$. Тогда $f(0) = 0$ и

$$f'(t) = \sin kt + kt\cos kt.$$

Производная содержит новую функцию $t\cos kt$, так что мы обращаем внимание, что $f'(0) = 0$ и дифференцируем снова. Результат:

$$f''(t) = 2k\cos kt - k^2 t\sin kt.$$

Но $\mathrm{L}\{f''(t)\} = s^2\mathrm{L}\{f(t)\}$ по формуле (5) для преобразования второй производной и $\mathrm{L}\{\cos kt\} = s/(s^2+k^2)$, так что мы имеем

$$\frac{2ks}{s^2+k^2} - k^2\mathrm{L}\{t\sin kt\} = s^2\mathrm{L}\{t\sin kt\}.$$

Наконец, мы решаем это уравнение относительно

$$\mathrm{L}\{t\sin kt\} = \frac{2ks}{(s^2+k^2)^2}. \tag{16}$$

Это значительно проще, чем вычислять интеграл

$$\mathrm{L}\{t\sin kt\} = \int_0^\infty te^{-st}\sin kt\,dt. \qquad \blacksquare$$

Примеры 4 и 5 эксплуатируют тот факт, что если $f(0) = 0$, то дифференцирование f соответствует умножению результата ее преобразования на s. Разумно ожидать, что обратная операция интегрирования (антидифференцирование) соответствует делению результата преобразования на s.

Теорема 2 Преобразования интегралов

Пусть $f(t)$ — кусочно непрерывная функция для $t \geqq 0$, которая удовлетворяет условию экспоненциального порядка $|f(t)| \leqq Me^{ct}$ для $t \geqq T$. Тогда

$$\mathrm{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{1}{s}\mathrm{L}\{f(t)\} = \frac{F(s)}{s} \tag{17}$$

для $s > c$. Эквивалентно,

$$\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(\tau)\,d\tau. \tag{18}$$

Доказательство. Поскольку f кусочно непрерывна, согласно фундаментальной теореме анализа (дифференциального и интегрального исчисления) функция

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$$

непрерывна и $g'(t) = f(t)$ там, где f непрерывна; таким образом, g непрерывна и кусочно гладка при $t \geqq 0$. Кроме того,

$$|g(t)| \leqq \int_0^t |f(\tau)|\, d\tau \leqq M \int_0^t e^{c\tau}\, d\tau = \frac{M}{c}(e^{ct} - 1) < \frac{M}{c} e^{ct},$$

так что $g(t)$ имеет экспоненциальный порядок при $t \to +\infty$. Следовательно, мы можем применить теорему 1 к g; это дает

$$\mathrm{L}\{f(t)\} = \mathrm{L}\{g'(t)\} = s\mathrm{L}\{g(t)\} - g(0).$$

Теперь $g(0) = 0$, так что деление на s приводит к

$$\mathrm{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\, d\tau\right\} \;=\; \mathrm{L}\{g(t)\} = \frac{\mathrm{L}\{f(t)\}}{s},$$

что и завершает доказательство. ▲

Пример 6 Найдем обратное преобразование Лапласа (изображение по Лапласу)

$$G(s) \;=\; \frac{1}{s^2(s-a)}.$$

Решение В действительности равенство (18) означает, что мы можем удалить множитель s из знаменателя, найти оригинал функции полученного более простого выражения и, наконец, проинтегрировать его от 0 до t (чтобы "исправить" отсутствие множителя s). Таким образом,

$$\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-a)}\right\} = \int_0^t \mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\} d\tau = \int_0^t e^{a\tau}\, d\tau = \frac{1}{a}(e^{at} - 1).$$

Мы теперь повторно применяем этот метод и получаем

$$\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-a)}\right\} = \int_0^t \mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-a)}\right\} d\tau = \int_0^t \frac{1}{a}(e^{a\tau} - 1)\, d\tau =$$

$$= \left[\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}e^{a\tau} - \tau\right)\right]_0^t = \frac{1}{a^2}(e^{at} - at - 1).$$

При нахождении оригинала функции, представляющей собой дробь вида $P(s)/[s^n Q(s)]$, этот метод часто удобнее, чем метод разложения на элементарные дроби. ■

Доказательство теоремы 1. Мы завершаем этот раздел доказательством теоремы 1 в общем случае, в котором f' является просто кусочно непрерывной. Мы должны доказать, что предел

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} f'(t)\, dt$$

существует и, кроме того, должны найти его значение. При фиксированном b обозначим через $t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}$ внутренние точки интервала $[0, b]$, в которых f' разрывна. Пусть $t_0 = 0$ и $t_k = b$. Тогда мы можем интегрировать по частям на каждом интервале (t_{n-1}, t_n), где f' непрерывна. В результате получим равенство

$$\begin{aligned}\int_0^b e^{-st} f'(t)\,dt &= \sum_{n=1}^{k} \int_{t_{n-1}}^{t_n} e^{-st} f'(t)\,dt = \\ &= \sum_{n=1}^{k} \left(\Big[e^{-st} f(t) \Big]_{t_{n-1}}^{t_n} + s \int_{t_{n-1}}^{t_n} e^{-st} f(t)\,dt \right) = \\ &= -f(0) - \sum_{n=1}^{k-1} e^{-st_n} j_f(t_n) + e^{-sb} f(b) + s \int_0^b e^{-st} f(t)\,dt, \end{aligned} \tag{19}$$

где

$$j_f(t_n) = f(t_n+) - f(t_n-) \tag{20}$$

является скачком функции $f(t)$ в точке $t = t_n$. Но поскольку f непрерывна, каждый скачок равен нулю: $j_f(t_n) = 0$ для всех n. Кроме того, если $b > c$, то $e^{-sb} f(b) \to 0$ при $b \to +\infty$. Поэтому, переходя к пределу в (19) при $b \to +\infty$, мы получаем искомый результат:

$$\mathrm{L}\{f'(t)\} = s\mathrm{L}\{f(t)\} - f(0). \qquad \blacktriangle$$

Обобщение теоремы 1

Предположим, что оригинал $f(t)$ сам по себе только кусочно непрерывен (а не непрерывен), причем его точки разрыва (в которых он терпит конечные скачки) обозначим через t_1, t_2, t_3, ... Предполагая, что $\mathrm{L}\{f'(t)\}$ существует, в (19) мы переходим к пределу при $b \to +\infty$ и получаем

$$\mathrm{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0) - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-st_n} j_f(t_n). \tag{21}$$

$\blacktriangle$

Пример 7 Пусть $f(t) = 1 + [\![t]\!]$ будет единичной ступенчатой функцией; ее график показан на рис. 7.2.8. Тогда $f(0) = 1$, $f'(t) \equiv 0$ и $j_f(n) = 1$ для каждого целого числа $n = 1, 2, 3, \ldots$. Следовательно, из равенства (21) имеем

$$0 = sF(s) - 1 - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-ns},$$

так что преобразование Лапласа (изображение по Лапласу) функции $f(t)$ имеет вид

$$F(s) = \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-ns} = \frac{1}{s(1 - e^{-s})}.$$

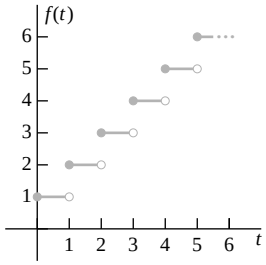


Рис. 7.2.8. График единичной ступенчатой функции из примера 7

На последнем шаге мы использовали формулу суммы бесконечной геометрической прогрессии (геометрического ряда)

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

при $x = e^{-s} < 1$. ■

7.2. Задачи

В задачах 1–16 с помощью преобразования Лапласа (т. е. заменой оригиналов их изображениями по Лапласу) решите данные задачи Коши (задачи с начальными условиями).

1. $x'' + 4x = 0;\ x(0) = 5,\ x'(0) = 0$
2. $x'' + 9x = 0;\ x(0) = 3,\ x'(0) = 4$
3. $x'' - x' - 2x = 0;\ x(0) = 0,\ x'(0) = 2$
4. $x'' + 8x' + 15x = 0;\ x(0) = 2,\ x'(0) = -3$
5. $x'' + x = \sin 2t;\ x(0) = 0 = x'(0)$
6. $x'' + 4x = \cos t;\ x(0) = 0 = x'(0)$
7. $x'' + x = \cos 3t;\ x(0) = 1,\ x'(0) = 0$
8. $x'' + 9x = 1;\ x(0) = 0 = x'(0)$
9. $x'' + 4x' + 3x = 1;\ x(0) = 0 = x'(0)$
10. $x'' + 3x' + 2x = t;\ x(0) = 0,\ x'(0) = 2$
11. $x' = 2x + y,\ y' = 6x + 3y;\ x(0) = 1,\ y(0) = -2$
12. $x' = x + 2y,\ y' = x + e^{-t};\ x(0) = y(0) = 0$
13. $x' + 2y' + x = 0,\ x' - y' + y = 0;\ x(0) = 0,\ y(0) = 1$
14. $x'' + 2x + 4y = 0,\ y'' + x + 2y = 0;\ x(0) = y(0) = 0,\ x'(0) = y'(0) = -1$
15. $x'' + x' + y' + 2x - y = 0,\ y'' + x' + y' + 4x - 2y = 0;\ x(0) = y(0) = 1,\ x'(0) = y'(0) = 0$
16. $x' = x + z,\ y' = x + y,\ z' = -2x - z;\ x(0) = 1,\ y(0) = 0,\ z(0) = 0$

В задачах 17–24 с помощью теоремы 2 найдите обратные преобразования Лапласа данных функций.

17. $F(s) = \dfrac{1}{s(s-3)}$
18. $F(s) = \dfrac{3}{s(s+5)}$
19. $F(s) = \dfrac{1}{s(s^2+4)}$
20. $F(s) = \dfrac{2s+1}{s(s^2+9)}$
21. $F(s) = \dfrac{1}{s^2(s^2+1)}$
22. $F(s) = \dfrac{1}{s(s^2-9)}$

23. $F(s) = \dfrac{1}{s^2(s^2-1)}$ **24.** $F(s) = \dfrac{1}{s(s+1)(s+2)}$

25. Примените теорему 1 и найдите $\mathrm{L}\{\sin kt\}$ с помощью формулы для $\mathrm{L}\{\cos kt\}$.

26. Примените теорему 1 и найдите $\mathrm{L}\{\cosh kt\}$ с помощью формулы для $\mathrm{L}\{\sinh kt\}$.

27. **(a)** Примените теорему 1 и покажите, что

$$\mathrm{L}\{t^n e^{at}\} = \frac{n}{s-a}\mathrm{L}\{t^{n-1}e^{at}\}.$$

(b) Выведите, что $\mathrm{L}\{t^n e^{at}\} = n!/(s-a)^{n+1}$ для $n = 1, 2, 3, \ldots$.

В задачах 28–30 примените теорему 1, как в примере 5, и получите преобразования Лапласа (изображения по Лапласу).

28. $\mathrm{L}\{t\cos kt\} = \dfrac{s^2-k^2}{(s^2+k^2)^2}$ **29.** $\mathrm{L}\{t\sinh kt\} = \dfrac{2ks}{(s^2-k^2)^2}$

30. $\mathrm{L}\{t\cosh kt\} = \dfrac{s^2+k^2}{(s^2-k^2)^2}$

31. Примените результаты, полученные в примере 5 и задаче 28, и покажите, что

$$\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+k^2)^2}\right\} = \frac{1}{2k^3}(\sin kt - kt\cos kt).$$

В задачах 32–37 с помощью обобщения теоремы 1, выраженного равенством (21), найдите преобразования Лапласа (изображения по Лапласу).

32. $\mathrm{L}\{u(t-a)\} = s^{-1}e^{-as}$ для $a > 0$.

33. Пусть $f(t) = 1$ на интервале $[a, b]$ (где $0 < a < b$) и $f(t) = 0$ во всех других точках. Тогда

$$\mathrm{L}\{f(t)\} = \frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s}.$$

34. Пусть $f(t) = (-1)^{[\![t]\!]}$ — функция прямоугольного колебания (меандра), график которой показан на рис. 7.2.9. Тогда

$$\mathrm{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s}\tanh\frac{s}{2}.$$

(*Указание*. Используйте бесконечную геометрическую прогрессию.)

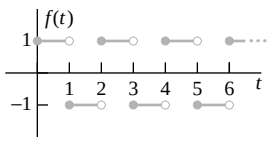


Рис. 7.2.9. График функции прямоугольного колебания (меандра) из задачи 34

35. Пусть $f(t)$ — *единичная релейная функция*, график которой показан на рис. 7.2.10. Тогда

$$\mathrm{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s(1+e^{-s})}.$$

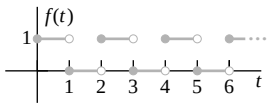


Рис. 7.2.10. График релейной функции из задачи 35

36. Пусть $g(t)$ — *треугольная волновая функция*, график которой показан на рис. 7.2.11. Тогда

$$\mathrm{L}\{g(t)\} = \frac{1}{s^2}\tanh\frac{s}{2}.$$

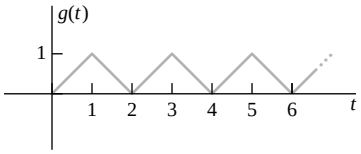


Рис. 7.2.11. График треугольной волновой функции из задачи 36

37. Пусть $f(t)$ — *пилообразная функция*, график которой показан на рис. 7.2.12. Тогда

$$\mathrm{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}.$$

(*Указание*. Обратите внимание, что $f'(t) \equiv 1$ там, где производная определена.)

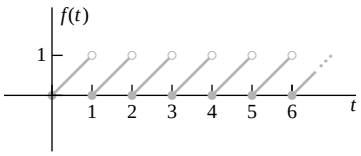


Рис. 7.2.12. График пилообразной функции из задачи 37

7.2. Приложение. Преобразования задач Коши (задач с начальными условиями)

Типичная система компьютерной алгебры знает теорему 1 и ее следствие и, следовательно, может преобразовывать не только функции (как в проекте раздела 7.1), но и полностью задачи Коши (задачи с начальными условиями). Здесь мы иллюстрируем эту методику с помощью системы *Mathematica*, а в приложении к разделу 7.3 — с помощью *Maple*. Рассмотрим задачу Коши (задачу с начальными условиями)

$$x'' + 4x = \sin 3t, \quad x(0) = x'(0) = 0$$

из примера 2. Сначала мы определяем дифференциальное уравнение с его начальными условиями, а затем загружаем пакет преобразования Лапласа (для нахождения изображений по Лапласу).

```
de = x''[t] + 4*x[t] == Sin[3*t]
inits = {x[0] -> 0, x'[0] -> 0}
Needs["Calculus`LaplaceTransform`"]
```

Преобразование Лапласа (изображение по Лапласу) дифференциального уравнения получается так:

```
DE = LaplaceTransform[ de, t, s ]
```

Результат этой команды, который мы не приводим здесь явно, — линейное (алгебраическое) уравнение относительно пока еще неизвестного выражения `LaplaceTransform[x[t], t,s]`. Мы продолжаем решать задачу и пытаемся найти преобразование $X(s)$ этой неизвестной функции $x(t)$ и подставляем начальные условия.

```
X = Solve[DE, LaplaceTransform[x[t],t,s]]
X = X // Last // Last // Last
X = X /. inits
```

$$\frac{3}{(s^2+4)(s^2+9)}$$

Наконец, нам остается только вычислить оригинал функции, чтобы найти $x(t)$.

```
x = InverseLaplaceTransform[X,s,t] // Expand
```

$$\frac{3}{10}\sin(2t) - \frac{1}{5}\sin(3t)$$

Конечно, мы могли (вероятно) получить этот результат немедленно с помощью `DSolve`, но показанный здесь промежуточный вывод, сгенерированный по шагам, может быть весьма поучителен. Вы можете попробовать сами решить задачи Коши (задачи с начальными условиями), данные в задачах 1–16.

7.3. Сдвиг и элементарные дроби

Как показано в примерах 1 и 2 из раздела 7.2, поиск решения линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами может часто сводиться к вопросу нахождения обратного преобразования Лапласа рациональной функции вида

$$R(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}, \tag{1}$$

где степень многочлена $P(s)$ меньше степени многочлена $Q(s)$. Методика вычисления $\mathrm{L}^{-1}\{R(s)\}$ базируется на том же самом методе **разложения на элементарные дроби**, которым мы пользуемся в элементарном анализе (интегральном исчислении) при интегрировании рациональных функций. Следующие два правила помогают разложить на элементарные дроби $R(s)$, если известно разложение знаменателя $Q(s)$ на линейные множители, которым соответствуют вещественные нули многочлена $Q(s)$, и на неприводимые квадратичные множители, которым соответствуют комплексные (но не являющиеся вещественными!) нули многочлена $Q(s)$.

Правило 1 Элементарные дроби, соответствующие линейным множителям

Часть разложения на простые дроби $R(s)$, соответствующая линейному множителю $s-a$ кратности n, представляет собой сумму n элементарных дробей вида

$$\frac{A_1}{s-a}+\frac{A_2}{(s-a)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(s-a)^n}, \tag{2}$$

где $A_1, A_2, \ldots$ и A_n — константы. ▲

Правило 2 Элементарные дроби, соответствующие квадратичным множителям

Часть разложения на простые дроби, соответствующая неприводимому квадратичному множителю $(s-a)^2+b^2$ кратности n, представляет собой сумму n элементарных дробей вида

$$\frac{A_1 s+B_1}{(s-a)^2+b^2}+\frac{A_2 s+B_2}{[(s-a)^2+b^2]^2}+\cdots+\frac{A_n s+B_n}{[(s-a)^2+b^2]^n}, \tag{3}$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots$ и B_n — константы. ▲

Вычисление $\mathrm{L}^{-1}\{R(s)\}$ состоит из двух шагов. Сначала мы должны найти разложение на простые дроби $R(s)$, а затем мы должны найти обратное преобразование Лапласа (изображение по Лапласу) каждой из полученных элементарных дробей типов, которые появляются в (2) и (3). Последний шаг базируется на следующем элементарном свойстве преобразований Лапласа (изображений по Лапласу).

Теорема 1 Сдвиг по оси *s*

Если $F(s)=\mathrm{L}\{f(t)\}$ существует для $s>c$, то $\mathrm{L}\{e^{at}f(t)\}$ существует для $s>a+c$ и

➤ $$\mathrm{L}\{e^{at}f(t)\}=F(s-a). \tag{4}$$

Эквивалентно,

➤ $$\mathrm{L}^{-1}\{F(s-a)\}=e^{at}f(t). \tag{5}$$

Таким образом, сдвиг $s\to s-a$ в преобразовании соответствует умножению оригинала от t на e^{at}.

Доказательство. Если мы просто заменим s на $s-a$ в определении $F(s)=\mathrm{L}\{f(t)\}$, мы получим

$$F(s-a)=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)\,dt=\int_0^\infty e^{-st}\left[e^{at}f(t)\right]dt=\mathrm{L}\{e^{at}f(t)\}.$$

Это и есть равенство (4) и ясно, что равенство (5) ему эквивалентно. ▲

Если мы применим теорему о сдвиге к формулам для преобразований Лапласа (изображений по Лапласу) уже знакомых нам функций t^n, $\cos kt$ и $\sin kt$, умножив каждую из этих функций на e^{at}, и заменим s на $s-a$ в преобразованиях, мы получим следующие добавления к таблице на рис. 7.1.2.

$f(t)$	$F(s)$		
$e^{at}t^n$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$(s>a)$	(6)
$e^{at}\cos kt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$	$(s>a)$	(7)
$e^{at}\sin kt$	$\dfrac{k}{(s-a)^2+k^2}$	$(s>a)$	(8)

Пример 1 Рассмотрим систему, состоящую из тела заданной массы, закрепленного на пружине, причем пусть $m=\frac{1}{2}$, $k=17$ и $c=3$ в единицах системы МКС (система метр-килограмм-секунда) (рис. 7.3.1). Как обычно, пусть $x(t)$ обозначет смещение материальной точки заданной массы m от ее положения равновесия. Предположим, что материальная точка заданной массы приведена в движение при $x(0)=3$ и $x'(0)=1$. Найдем $x(t)$ для полученных затухающих свободных колебаний.

Решение Дифференциальное уравнение примет вид $\frac{1}{2}x''+3x'+17x=0$, так что мы должны решить задачу Коши (задачу с начальными условиями)

$$x''+6x'+34x=0; \quad x(0)=3, \quad x'(0)=1.$$

Мы берем преобразование Лапласа (изображение по Лапласу) каждого члена дифференциального уравнения. Поскольку [очевидно] $\mathrm{L}\{0\}\equiv 0$, мы получаем уравнение

$$\left[s^2X(s)-3s-1\right]+6\left[sX(s)-3\right]+34X(s)=0,$$

которое мы решаем относительно $X(s)$, и получаем

$$X(s)=\frac{3s+19}{s^2+6s+34}=3\cdot\frac{s+3}{(s+3)^2+25}+2\cdot\frac{5}{(s+3)^2+25}.$$

Применяя формулы (7) и (8) при $a=-3$ и $k=5$, мы находим, что

$$x(t)=e^{-3t}\left(3\cos 5t+2\sin 5t\right).$$

На рис. 7.3.2 показан график этого быстро затухающего колебания. ■

Пример 2 иллюстрирует полезную методику нахождения коэффициентов элементарной дроби в случае простых линейных множителей.

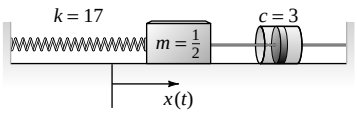


Рис. 7.3.1. Система, состоящая из тела заданной массы, закрепленного на пружине, с демпфером из примера 1

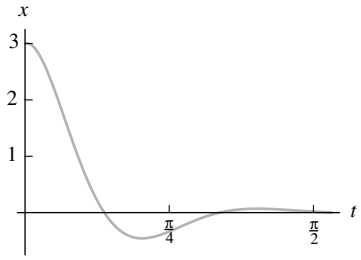


Рис. 7.3.2. Функция, дающая положение $x(t)$ из примера 1

Пример 2 Найдем обратное преобразование Лапласа (изображение по Лапласу) функции

$$R(s) = \frac{s^2+1}{s^3-2s^2-8s}.$$

Решение Обратите внимание, что знаменатель $R(s)$ раскладывается на множители так: $Q(s) = s(s+2)(s-4)$. Следовательно,

$$\frac{s^2+1}{s^3-2s^2-8s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s-4}.$$

Умножение каждого члена этого уравнения на $Q(s)$ приводит к

$$s^2+1 = A(s+2)(s-4) + Bs(s-4) + Cs(s+2).$$

Когда в это уравнение мы последовательно подставляем три нуля $s = 0$, $s = -2$ и $s = 4$ знаменателя $Q(s)$, мы получаем в результате

$$-8A = 1, \quad 12B = 5 \quad \text{и} \quad 24C = 17.$$

Таким образом, $A = -\frac{1}{8}$, $B = \frac{5}{12}$ и $C = \frac{17}{24}$, так что

$$\frac{s^2+1}{s^3-2s^2-8s} = -\frac{\frac{1}{8}}{s} + \frac{\frac{5}{12}}{s+2} + \frac{\frac{17}{24}}{s-4},$$

и поэтому

$$\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+1}{s^3-2s^2-8s}\right\} = -\frac{1}{8} + \frac{5}{12}e^{-2t} + \frac{17}{24}e^{4t}. \quad \blacksquare$$

Пример 3 иллюстрирует методику дифференцирования, которая позволяет найти коэффициенты элементарной дроби в случае кратных линейных множителей.

Пример 3 Решим задачу Коши (задачу с начальными условиями)

$$y'' + 4y' + 4y = t^2; \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Решение Преобразованное уравнение имеет вид

$$s^2Y(s) + 4sY(s) + 4Y(s) = \frac{2}{s^3}.$$

Таким образом,

$$Y(s) = \frac{2}{s^3(s+2)^2} = \frac{A}{s^3} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s} + \frac{D}{(s+2)^2} + \frac{E}{s+2}. \qquad (9)$$

Чтобы найти A, B и C, мы умножаем обе части на s^3 и получаем

$$\frac{2}{(s+2)^2} = A + Bs + Cs^2 + s^3F(s), \qquad (10)$$

где $F(s) = D(s+2)^{-2} + E(s+2)^{-1}$ — сумма этих двух элементарных дробей, соответствующих $(s+2)^2$. Подставляя $s = 0$ в уравнение (10), получаем $A = \frac{1}{2}$. Чтобы найти B и C, мы дважды дифференцируем уравнение (10) и получаем

$$\frac{-4}{(s+2)^3} = B + 2Cs + 3s^2F(s) + s^3F'(s) \qquad (11)$$

и

$$\frac{12}{(s+2)^4} = 2C + 6sF(s) + 6s^2F'(s) + s^3F''(s). \qquad (12)$$

Теперь подстановка $s = 0$ в уравнение (11) дает $B = -\frac{1}{2}$, а подстановка $s = 0$ в уравнение (12) дает $C = \frac{3}{8}$.

Чтобы найти D и E, мы умножаем каждую часть уравнения (9) на $(s+2)^2$ и получаем

$$\frac{2}{s^3} = D + E(s+2) + (s+2)^2G(s), \qquad (13)$$

где $G(s) = As^{-3} + Bs^{-2} + Cs^{-1}$, и затем дифференцируем, в результате чего получается

$$-\frac{6}{s^4} = E + 2(s+2)G(s) + (s+2)^2G'(s). \qquad (14)$$

Подстановка $s = -2$ в уравнения (13) и (14) теперь дает $D = -\frac{1}{4}$ и $E = -\frac{3}{8}$. Таким образом,

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{2}}{s^3} - \frac{\frac{1}{2}}{s^2} + \frac{\frac{3}{8}}{s} - \frac{\frac{1}{4}}{(s+2)^2} - \frac{\frac{3}{8}}{s+2},$$

так что решение данной задачи Коши (задачи с начальными условиями) имеет вид

$$y(t) = \tfrac{1}{4}t^2 - \tfrac{1}{2}t + \tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{4}te^{-2t} - \tfrac{3}{8}e^{-2t}. \qquad \blacksquare$$

Примеры 4, 5 и 6 иллюстрируют методы обращения с квадратичными множителями в разложениях на простые дроби.

Пример 4 Рассмотрим систему, состоящую из материальной точки заданной массы, закрепленной на пружине, с поршнем как в примере 1, но с начальными условиями $x(0) = x'(0) = 0$, причем на этот раз к системе приложена внешняя сила $F(t) = 15 \sin 2t$. Найдем полученное движение в переходном режиме и установившееся периодическое движение материальной точки заданной массы.

Решение Задача Коши (задача с начальными условиями), которую мы должны решить, принимает вид

$$x'' + 6x' + 34x = 30 \sin 2t; \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

Преобразованное уравнение имеет вид

$$s^2X(s) + 6sX(s) + 34X(s) = \frac{60}{s^2 + 4}.$$

Следовательно,

$$X(s) = \frac{60}{(s^2 + 4)[(s + 3)^2 + 25]} = \frac{As + B}{s^2 + 4} + \frac{Cs + D}{(s + 3)^2 + 25}.$$

Умножив обе части на знаменатель дроби, мы получим

$$60 = (As + B)[(s + 3)^2 + 25] + (Cs + D)(s^2 + 4). \tag{15}$$

Чтобы найти A и B, мы подставляем нуль $s = 2i$ квадратичного множителя $s^2 + 4$ в уравнение (15); в результате имеем

$$60 = (2iA + B)[(2i + 3)^2 + 25],$$

что мы упрощаем и получаем

$$60 = (-24A + 30B) + (60A + 12B)i.$$

Теперь мы приравниваем вещественные и мнимые части в каждой части этого уравнения и получаем два линейных уравнения

$$-24A + 30B = 60 \quad \text{и} \quad 60A + 12B = 0,$$

которые легко решаются относительно A и B, и мы получаем $A = -\frac{10}{29}$ и $B = \frac{50}{29}$.

Чтобы найти C и D, мы подставляем нуль $s = -3 + 5i$ квадратичного множителя $(s + 3)^2 + 25$ в уравнение (15) и получаем

$$60 = [C(-3 + 5i) + D][(-3 + 5i)^2 + 4],$$

что мы упрощаем и получаем

$$60 = (186C - 12D) + (30C - 30D)i.$$

Снова приравниваем вещественные части и мнимые части; это приводит к двум линейным уравнениям

$$186C - 12D = 60 \quad \text{и} \quad 30C - 30D = 0,$$

и мы легко находим, что их решение будет $C = D = \frac{10}{29}$.

Подставляя полученные значения коэффициентов A, B, C и D, находим разложение $X(s)$ на элементарные дроби:

$$X(s) = \frac{1}{29}\left(\frac{-10s + 50}{s^2 + 4} + \frac{10s + 10}{(s+3)^2 + 25}\right) =$$

$$= \frac{1}{29}\left(\frac{-10s + 25 \cdot 2}{s^2 + 4} + \frac{10(s+3) - 4 \cdot 5}{(s+3)^2 + 25}\right).$$

После вычисления обратного преобразования Лапласа мы получаем функцию, дающую положение

$$x(t) = \tfrac{5}{29}(-2\cos 2t + 5\sin 2t) + \tfrac{2}{29}e^{-3t}(5\cos 5t - 2\sin 5t).$$

Слагаемые с круговой частотой 2 составляют установившееся периодическое вынужденное колебание материальной точки заданной массы, тогда как затухающие по экспоненциальному закону слагаемые круговой частоты 5 составляют ее переходное движение, которое исчезает очень быстро (рис. 7.3.3). Обратите внимание, что переходное движение отлично от нуля даже при том, что оба начальных условия являются нулевыми. ■



Рис. 7.3.3. Периодическое вынужденное колебание $x_{\text{sp}}(t)$, затухающее переходное движение $x_{\text{tr}}(t)$ и решение $x(t) = x_{\text{sp}}(t) + x_{\text{tr}}(t)$ в примере 4

Резонанс и кратные квадратичные множители

Следующие два обратных изображения по Лапласу полезны при обращении элементарных дробей, которые соответствуют случаю кратных квадратичных множителей:

$$\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+k^2)^2}\right\} = \frac{1}{2k}t\sin kt, \tag{16}$$

$$\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+k^2)^2}\right\} = \frac{1}{2k^3}(\sin kt - kt\cos kt). \tag{17}$$

Они следуют из решения примера 5 и задачи 31 из раздела 7.2 соответственно. Из-за присутствия в уравнениях (16) и (17) слагаемых $t\sin kt$ и $t\cos kt$, кратный квадратичный множитель обычно сигнализирует о явлении резонанса в недемпфированной механической или электрической системе.

Пример 5 С помощью преобразования Лапласа (изображения по Лапласу) решим задачу Коши (задачу с начальными условиями)

$$x'' + \omega_0^2 x = F_0 \sin\omega t; \quad x(0) = 0 = x'(0),$$

которая определяет недемпфированные вынужденные колебания материальной точки заданной массы на пружине.

Решение Преобразовав дифференциальное уравнение, мы получим уравнение

$$s^2X(s) + \omega_0^2 X(s) = \frac{F_0\omega}{s^2+\omega^2}, \text{ так же } X(s) = \frac{F_0\omega}{(s^2+\omega^2)(s^2+\omega_0^2)}.$$

Если $\omega \neq \omega_0$, мы без труда находим

$$X(s) = \frac{F_0\omega}{\omega^2-\omega_0^2}\left(\frac{1}{s^2+\omega_0^2} - \frac{1}{s^2+\omega^2}\right),$$

а из этого следует, что

$$x(t) = \frac{F_0\omega}{\omega^2-\omega_0^2}\left(\frac{1}{\omega_0}\sin\omega_0 t - \frac{1}{\omega}\sin\omega t\right).$$

Но если $\omega = \omega_0$, мы имеем

$$X(s) = \frac{F_0\omega_0}{(s^2+\omega_0^2)^2},$$

так что уравнение (17) дает резонансное решение

$$x(t) = \frac{F_0}{2\omega_0^2}(\sin\omega_0 t - \omega_0 t\cos\omega_0 t). \tag{18}$$

■

Замечание. Интегральная кривая, определенная уравнением (18), скачет вверх и вниз (рис. 7.3.4) между огибающими $x = \pm C(t)$, которые получаются, если записать (18) в виде

$$x(t) = A(t)\cos\omega_0 t + B(t)\sin\omega_0 t$$

и затем определить обычную "амплитуду" $C = \sqrt{A^2 + B^2}$. В этом случае мы находим, что

$$C(t) = \frac{F_0}{2\omega_0^2}\sqrt{\omega_0^2 t^2 + 1}.$$

Эта методика позволяет находить огибающие резонансных решений; она иллюстрируется в приложении к этому разделу. ■

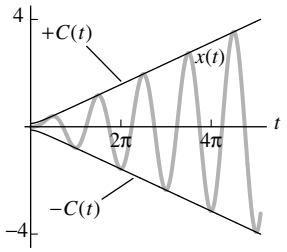


Рис. 7.3.4. Резонансное решение (18) при $\omega_0 = \frac{1}{2}$ и $F_0 = 1$ вместе с его огибающими $x = \pm C(t)$.

Пример 6 Решим задачу Коши (задачу с начальными условиями)

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 4te^t; \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = y^{(3)}(0) = 0.$$

Решение Сначала мы замечаем, что

$$\mathrm{L}\{y''(t)\} = s^2Y(s), \quad \mathrm{L}\{y^{(4)}(t)\} = s^4Y(s) \quad \text{и} \quad \mathrm{L}\{te^t\} = \frac{1}{(s-1)^2}.$$

Следовательно, преобразованное уравнение имеет вид

$$(s^4 + 2s^2 + 1)Y(s) = \frac{4}{(s-1)^2}.$$

Таким образом, наша задача состоит в том, чтобы найти оригинал функции

$$Y(s) = \frac{4}{(s-1)^2(s^2+1)^2} =$$

$$= \frac{A}{(s-1)^2} + \frac{B}{s-1} + \frac{Cs+D}{(s^2+1)^2} + \frac{Es+F}{s^2+1}. \qquad (19)$$

Умножив на $(s-1)^2(s^2+1)^2$ (это знаменатель нашей дроби), получим уравнение

$$A(s^2+1)^2 + B(s-1)(s^2+1)^2 + Cs(s-1)^2 + D(s-1)^2 + Es(s-1)^2(s^2+1) + F(s-1)^2(s^2+1) = 4. \quad (20)$$

После подстановки $s=1$ находим $A=1$.

Равенство (20) — тождество, которое справедливо для всех значений s. Чтобы найти значения остальных коэффициентов, мы последовательно подставляем значения $s=0$, $s=-1$, $s=2$, $s=-2$ и $s=3$ в уравнение (20). Это приводит к системе

$$\begin{aligned} -B &+ D &+ F &= 3,\\ -8B - 4C + 4D - 8E + 8F &= 0,\\ 25B + 2C + D + 10E + 5F &= -21,\\ -75B - 18C + 9D - 90E + 45F &= -21,\\ 200B + 12C + 4D + 120E + 40F &= -96 \end{aligned} \quad (21)$$

пяти линейных уравнений относительно B, C, D, E и F. С помощью программируемого калькулятора решаем линейную систему и находим $B=-2, C=2, D=0, E=2$ и $F=1$.

Теперь подставляем в уравнение (18) найденные коэффициенты и таким образом получаем

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{2}{s-1} + \frac{2s}{(s^2+1)^2} + \frac{2s+1}{s^2+1}.$$

Вспоминая равенство (16), свойство сдвига и знакомые преобразования функций $\cos t$ и $\sin t$, мы видим, наконец, что решение данной задачи Коши (задачи с начальными условиями) имеет вид

$$y(t) = (t-2)e^t + (t+1)\sin t + 2\cos t. \qquad \blacksquare$$

7.3. Задачи

В задачах 1–4 примените теорему о сдвиге и найдите преобразования Лапласа (изображения по Лапласу) заданных функций.

1. $f(t) = t^4 e^{\pi t}$

2. $f(t) = t^{3/2} e^{-4t}$

3. $f(t) = e^{-2t}\sin 3\pi t$

4. $f(t) = e^{-t/2}\cos 2\left(t - \frac{1}{8}\pi\right)$

В задачах 5–10 примените теорему о сдвиге и найдите обратные изображения по Лапласу заданных функций.

5. $F(s) = \dfrac{3}{2s-4}$

6. $F(s) = \dfrac{s-1}{(s+1)^3}$

7. $F(s) = \dfrac{1}{s^2+4s+4}$

8. $F(s) = \dfrac{s+2}{s^2+4s+5}$

9. $F(s) = \dfrac{3s+5}{s^2-6s+25}$ **10.** $F(s) = \dfrac{2s-3}{9s^2-12s+20}$

В задачах 11–22 с помощью элементарных дробей найдите обратные изображения по Лапласу заданных функций.

11. $F(s) = \dfrac{1}{s^2-4}$ **12.** $F(s) = \dfrac{5s-6}{s^2-3s}$

13. $F(s) = \dfrac{5-2s}{s^2+7s+10}$ **14.** $F(s) = \dfrac{5s-4}{s^3-s^2-2s}$

15. $F(s) = \dfrac{1}{s^3-5s^2}$ **16.** $F(s) = \dfrac{1}{(s^2+s-6)^2}$

17. $F(s) = \dfrac{1}{s^4-16}$ **18.** $F(s) = \dfrac{s^3}{(s-4)^4}$

19. $F(s) = \dfrac{s^2-2s}{s^4+5s^2+4}$ **20.** $F(s) = \dfrac{1}{s^4-8s^2+16}$

21. $F(s) = \dfrac{s^2+3}{(s^2+2s+2)^2}$ **22.** $F(s) = \dfrac{2s^3-s^2}{(4s^2-4s+5)^2}$

В задачах 23–26 с помощью разложения на множители

$$s^4 + 4a^4 = (s^2 - 2as + 2a^2)(s^2 + 2as + 2a^2)$$

получите указанные обратные изображения по Лапласу.

23. $\mathrm{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^3}{s^4+4a^4}\right\} = \cosh at \cos at$ **24.** $\mathrm{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^4+4a^4}\right\} = \dfrac{1}{2a^2}\sinh at \sin at$

25. $\mathrm{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^2}{s^4+4a^4}\right\} = \dfrac{1}{2a}(\cosh at \sin at + \sinh at \cos at)$

26. $\mathrm{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^4+4a^4}\right\} = \dfrac{1}{4a^3}(\cosh at \sin at - \sinh at \cos at)$

В задачах 27–38 с помощью преобразования Лапласа (изображения по Лапласу) решите указанные задачи Коши (задачи с начальными условиями).

27. $x'' + 6x' + 25x = 0;\ x(0) = 2, x'(0) = 3$ **28.** $x'' - 6x' + 8x = 2;\ x(0) = x'(0) = 0$

29. $x'' - 4x = 3t;\ x(0) = x'(0) = 0$ **30.** $x'' + 4x' + 8x = e^{-t};\ x(0) = x'(0) = 0$

31. $x^{(3)} + x'' - 6x' = 0;\ x(0) = 0,\ x'(0) = x''(0) = 1$

32. $x^{(4)} - x = 0;\ x(0) = 1,\ x'(0) = x''(0) = x^{(3)}(0) = 0$

33. $x^{(4)} + x = 0;\ x(0) = x'(0) = x''(0) = 0,\ x^{(3)}(0) = 1$

34. $x^{(4)} + 13x'' + 36x = 0;\ x(0) = x''(0) = 0,\ x'(0) = 2,\ x^{(3)}(0) = -13$

35. $x^{(4)} + 8x'' + 16x = 0;\ x(0) = x'(0) = x''(0) = 0,\ x^{(3)}(0) = 1$

36. $x^{(4)} + 2x'' + x = e^{2t};\ x(0) = x'(0) = x''(0) = x^{(3)}(0) = 0$

37. $x'' + 4x' + 13x = te^{-t};\ x(0) = 0,\ x'(0) = 2$

38. $x'' + 6x' + 18x = \cos 2t;\ x(0) = 1,\ x'(0) = -1$

Задачи 39 и 40 иллюстрируют два типа резонанса в системе, состоящей из материальной точки заданной массы, закрепленной на пружине, с демпфером при заданной внешней силе $f(t)$ и начальных условиях $x(0) = x'(0) = 0$.

39. Предположим, что $m = 1$, $k = 9$, $c = 0$ и $f(t) = 6\cos 3t$. Зная оригинал функции, данный в равенстве (16), получите решение $x(t) = t\sin 3t$. Создайте рисунок, который иллюстрирует резонанс, который происходит в системе.

40. Предположим, что $m = 1$, $k = 9{,}04$, $c = 0{,}4$ и $f(t) = 6e^{-t/5}\cos 3t$. Найдите решение

$$x(t) = te^{-t/5}\sin 3t.$$

Покажите, что максимальное значение амплитудной функции $A(t) = te^{-t/5}$ равно $A(5) = 5/e$. Таким образом, как показано на рис. 7.3.5, в течение первых 5 секунд амплитуда колебаний материальной точки заданной массы увеличивается и лишь потом она будет заглушена при $t \to +\infty$.

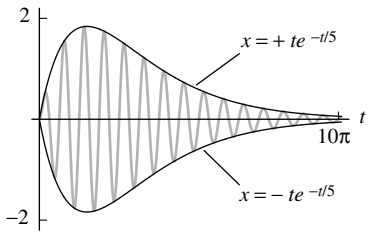


Рис. 7.3.5. График затухающего колебания в задаче 40

7.3. Приложение. Исследование явлений затухания и резонанса

Здесь мы опишем применение системы *Maple* для исследования поведения системы, состоящей из материальной точки заданной массы, закрепленной на пружине, с поршнем

$$mx'' + cx' + kx = F(t), \quad x(0) = x'(0) = 0 \tag{1}$$

для значений параметров

```
m := 25;     c := 10;     k := 226;
```

в ответ на разнообразные возможные внешние силы.

1. $F(t) \equiv 0$.

Это случай свободных затухающих колебаний, подобных показанным на рис. 3.4.12.

2. $F(t) = 901\cos 3t$.

С этой периодической внешней силой должно получиться устойчивое периодическое колебание с затухающим по экспоненциальному закону переходным движением (как показано на рис. 3.6.13).

3. $F(t) = 900e^{-t/5}\cos 3t$.

Теперь периодическая внешняя сила затухает по экспоненциальному закону и преобразование $X(s)$ содержит кратный квадратичный множитель, который сигнализирует о наличии

резонансного явления. Ответ $x(t)$ — постоянное число, умноженное на колебание, которое показано на рис. 7.3.5.

4. $F(t) = 900te^{-t/5}\cos 3t$.

Мы вставили множитель t, чтобы сделать эту задачу немного более интересной. Решение в этом случае приведено ниже.

5. $F(t) = 162t^3e^{-t/5}\cos 3t$.

В этом случае преобразование $X(s)$ содержит *пятую* степень квадратичного множителя и найти оригинал функции вручную было бы невероятно утомительно.

Чтобы проиллюстрировать применение пакета *Maple*, мы сначала задаем дифференциальное уравнение, соответствующее случаю 4.

```
F := 900*t*exp(-t/5)*cos(3*t);
de := m*diff(x(t),t$2) + c*diff(x(t),t) + k*x(t) = F;
```

Затем мы применяем преобразование Лапласа (изображение по Лапласу) и подставляем начальные условия.

```
with(inttrans):
DE := laplace(de, t, s):
X(s) := solve(DE, laplace(x(t), t, s)):
X(s) := simplify(subs(x(0)=0, D(x)(0)=0, X(s)));
```

Теперь с помощью команды `factor(denom(X(s)))` разложим знаменатель на множители и тем самым убедимся, что

$$X(s) = \frac{22500(25s^2 + 10s - 224)}{(25s^2 + 10s + 226)^3}.$$

Возведенный в куб квадратичный множитель было трудно обработать вручную, но команда

```
x(t) := invlaplace(X(s), s, t);
```

выполняется очень быстро и дает

$$x(t) = e^{-t/5}\left(t\cos 3t + \left(3t^2 - \tfrac{1}{3}\right)\sin 3t\right).$$

Амплитудная функция этих затухающих колебаний определена равенством

```
C(t) := exp(-t/5)*sqrt(t^2 + (3*t^2 - 1/3)^2);
```

и, наконец, команда

```
plot({x(t), C(t), -C(t)}, t=0..40);
```

создает чертеж, показанный на рис. 7.3.6. Резонанс, получающийся из-за кратного квадратичного множителя, проявляется во временном нарастании колебаний перед затуханием.

Для каждого из случаев 1–5 вы можете ввести соответствующую внешнюю силу и снова выполнить указанные ранее команды. Чтобы увидеть преимущество использования преобразований Лапласа (изображений по Лапласу), задайте дифференциальное уравнение `de` в случае 5 и исследуйте результат выполнения команды

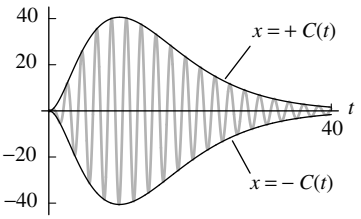


Рис. 7.3.6. Резонансное решение и его огибающие в случае 4

```
dsolve({de, x(0)=0, D(x)(0)=0}, x(t));
```

Конечно, вместо используемых здесь вы можете подставить ваши собственные любимые параметры системы, состоящей из материальной точки заданной массы, закрепленной на пружине с поршнем. Но вычисления упростятся, если вы выберете m, c и k так, что

$$mr^2 + cr + k = (pr + a)^2 + b^2, \tag{2}$$

где p, a и b — целые числа. Один из способов состоит в том, чтобы сначала выбрать эти последние целые числа, а затем использовать уравнение (2), чтобы определить m, c и k.

7.4. Производные, интегралы и произведения преобразований

Иногда заранее известно, что преобразование Лапласа (изображение по Лапласу) первоначально неизвестного решения дифференциального уравнения является произведением преобразований двух *известных* функций. Например, когда мы преобразуем задачу Коши (задачу с начальными условиями)

$$x'' + x = \cos t; \quad x(0) = x'(0) = 0,$$

мы получаем

$$X(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2} = \frac{s}{s^2+1} \cdot \frac{1}{s^2+1} = \mathrm{L}\{\cos t\} \cdot \mathrm{L}\{\sin t\}.$$

Это убедительно подсказывает, что должен быть способ объединить две функции $\sin t$ и $\cos t$, чтобы получить функцию $x(t)$, чье преобразование равно *произведению их* преобразований. Но очевидно, что $x(t)$ — *не просто* произведение $\cos t$ и $\sin t$, потому что

$$\mathrm{L}\{\cos t \sin t\} = \mathrm{L}\left\{\tfrac{1}{2}\sin 2t\right\} = \frac{1}{s^2+4} \neq \frac{s}{(s^2+1)^2}.$$

Таким образом, $\mathrm{L}\{\cos t \sin t\} \neq \mathrm{L}\{\cos t\} \cdot \mathrm{L}\{\sin t\}$.

Согласно теореме 1 из этого раздела функция

$$h(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau \tag{1}$$

имеет нужное свойство:

$$\mathrm{L}\{h(t)\} = H(s) = F(s) \cdot G(s). \tag{2}$$

Новая функция от t, определенная как интеграл в (1), зависит только от f и g и называется *сверткой* функций f и g. Она обозначается $f * g$, идея состоит в том, что она является новым типом произведения f и g, подобранным так, что преобразование этого произведения равно произведению преобразований f и g.

Определение. Свертка двух функций

Свертка $f * g$ кусочно непрерывных функций f и g определена для $t \geqq 0$ следующим образом:

➤
$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau)\, d\tau. \tag{3}$$

Мы также пишем $f(t) * g(t)$, если это удобно. В терминах произведения-свертки теорема 1 из этого раздела может быть записана в виде равенства

➤
$$\mathrm{L}\{f * g\} = \mathrm{L}\{f\} \cdot \mathrm{L}\{g\}.$$

Если мы подставим $u = t - \tau$ в интеграл в (3), то получим

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau)\, d\tau = \int_t^0 f(t - u) g(u)(-du) =$$

$$= \int_0^t g(u) f(t - u)\, du = g(t) * f(t).$$

Таким образом, свертка *коммутативна*: $f * g = g * f$.

Пример 1 Свертка функций $\cos t$ и $\sin t$ равна

$$(\cos t) * (\sin t) = \int_0^t \cos\tau \sin(t - \tau)\, d\tau.$$

Мы применяем тригонометрическое тождество

$$\cos A \sin B = \tfrac{1}{2} [\sin(A + B) - \sin(A - B)]$$

и получаем

$$(\cos t) * (\sin t) = \int_0^t \tfrac{1}{2} [\sin t - \sin(2\tau - t)]\, d\tau =$$

$$= \tfrac{1}{2} \Big[\tau \sin t + \tfrac{1}{2} \cos(2\tau - t) \Big]_{\tau=0}^{t};$$

иными словами,

$$(\cos t) * (\sin t) = \tfrac{1}{2} t \sin t.$$

А из примера 5 из раздела 7.2 мы знаем, что преобразование Лапласа (изображение по Лапласу) функции $\frac{1}{2} t \sin t$ действительно равно $s/(s^2+1)^2$. ■

Теорема 1 будет доказана в конце этого раздела.

Теорема 1 Свойство свертки

Предположим, что функции $f(t)$ и $g(t)$ кусочно непрерывны при $t \geqq 0$ и что их модули $|f(t)|$ и $|g(t)|$ ограничены выражением Me^{ct} при $t \to +\infty$. Тогда преобразование Лапласа (изображение по Лапласу) свертки $f(t) * g(t)$ существует для $s > c$ и, кроме того,

$$\mathrm{L}\{f(t) * g(t)\} = \mathrm{L}\{f(t)\} \cdot \mathrm{L}\{g(t)\}, \tag{4}$$

причем

$$\mathrm{L}^{-1}\{F(s) \cdot G(s)\} = f(t) * g(t). \tag{5}$$

▲

Таким образом, мы можем найти оригинал функции-произведения $F(s) \cdot G(s)$, если сможем вычислить интеграл

$$\mathrm{L}^{-1}\{F(s) \cdot G(s)\} = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau. \tag{5'}$$

Пример 2 иллюстрирует, что свертка часто дает удобную альтернативу разложению на элементарные дроби при нахождении оригиналов функций (обратных преобразований).

Пример 2 Полагая $f(t) = \sin 2t$ и $g(t) = e^t$ и воспользовавшись сверткой, получаем равенство

$$\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)(s^2+4)}\right\} = (\sin 2t) * e^t = \int_0^t e^{t-\tau} \sin 2\tau\, d\tau =$$

$$= e^t \int_0^t e^{-\tau} \sin 2\tau\, d\tau = e^t \left[\frac{e^{-\tau}}{5}(-\sin 2\tau - 2\cos 2\tau)\right]_0^t,$$

так что

$$\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)(s^2+4)}\right\} = \frac{2}{5}e^t - \frac{1}{5}\sin 2t - \frac{2}{5}\cos 2t. \quad ■$$

Дифференцирование преобразований

Согласно теореме 1 из раздела 7.2, если $f(0) = 0$, то дифференцирование функции $f(t)$ соответствует умножению ее преобразования на s. Теорема 2, доказанная в конце этого раздела, утверждает, что дифференцирование преобразования $F(s)$ соответствует умножению оригинала $f(t)$ на $-t$.

Теорема 2 Дифференцирование преобразований

Если $f(t)$ кусочно непрерывна при $t \geqq 0$ и $|f(t)| \leqq Me^{ct}$ при $t \to +\infty$, то

$$\mathrm{L}\{-tf(t)\} = F'(s) \tag{6}$$

для $s > c$. Эквивалентно,

➤
$$f(t) = \mathrm{L}^{-1}\{F(s)\} = -\frac{1}{t}\mathrm{L}^{-1}\{F'(s)\}. \tag{7}$$

Повторное применение равенства (6) дает

$$\mathrm{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s) \tag{8}$$

для $n = 1, 2, 3, \ldots$. ▲

Пример 3 Найдем $\mathrm{L}\{t^2 \sin kt\}$.

Решение Уравнение (8) дает

$$\mathrm{L}\{t^2 \sin kt\} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{k}{s^2+k^2}\right) =$$

$$= \frac{d}{ds}\left[\frac{-2ks}{(s^2+k^2)^2}\right] = \frac{6ks^2 - 2k^3}{(s^2+k^2)^3}. \tag{9}$$

■

Равенство (7), выражающее свойство дифференцирования, часто полезно при вычислении оригинала функции, когда проще работать с *производной* преобразования, чем с самим преобразованием.

Пример 4 Найдем $\mathrm{L}^{-1}\{\mathrm{arctg}(1/s)\}$.

Решение Производная функции $\mathrm{arctg}(1/s)$ — простая рациональная функция, так что мы применяем уравнение (7):

$$\mathrm{L}^{-1}\left\{\mathrm{arctg}\,\frac{1}{s}\right\} = -\frac{1}{t}\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{s}\right\} = -\frac{1}{t}\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{-1/s^2}{1+(1/s)^2}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{t}\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{s^2+1}\right\} = -\frac{1}{t}(-\sin t).$$

Поэтому

$$\mathrm{L}^{-1}\left\{\mathrm{arctg}\,\frac{1}{s}\right\} = \frac{\sin t}{t}.$$

■

С помощью равенства (8) можно преобразовать линейное дифференциальное уравнение, коэффициенты которого являются многочленами, а не константами. В результате получится дифференциальное уравнение относительно преобразования; приводит ли эта процедура к успеху, зависит, конечно, от того, будет ли решить новое уравнение легче, чем старое.

Пример 5 Пусть $x(t)$ будет решением уравнения Бесселя нулевого порядка:

$$tx'' + x' + tx = 0,$$

таким что $x(0) = 1$ и $x'(0) = 0$. Это решение уравнения Бесселя обычно обозначается через $J_0(t)$. Поскольку

$$\mathrm{L}\{x'(t)\} = sX(s) - 1 \quad \text{и} \quad \mathrm{L}\{x''(t)\} = s^2X(s) - s,$$

и поскольку x и x'' умножаются на t, то, применив формулу (8), получим преобразованное уравнение

$$-\frac{d}{ds}\left[s^2X(s) - s\right] + \left[sX(s) - 1\right] - \frac{d}{ds}\left[X(s)\right] = 0.$$

В результате дифференцирования и упрощения получится дифференциальное уравнение

$$(s^2 + 1)X'(s) + sX(s) = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{X'(s)}{X(s)} = -\frac{s}{s^2 + 1};$$

его общее решение имеет вид

$$X(s) = \frac{C}{\sqrt{s^2 + 1}}.$$

В задаче 39 мы выделяем значение параметра $C = 1$. Поскольку $X(s) = \mathrm{L}\{J_0(t)\}$, из этого следует, что

$$\mathrm{L}\{J_0(t)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}}. \tag{10}$$

■

Интегрирование преобразований

Дифференцирование изображения $F(s)$ соответствует умножению $f(t)$ на t (вместе с изменением знака). Поэтому естественно ожидать, что интегрирование изображения $F(s)$ будет соответствовать делению $f(t)$ на t. Теорема 3, доказанная в конце этого раздела, подтверждает это при условии, что полученное частное $f(t)/t$ будет хорошо себя вести при $t \to 0$ справа; т. е. при условии, что предел

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(t)}{t} \quad \text{существует и конечен.} \tag{11}$$

Теорема 3 Интегрирование преобразований

Предположим, что $f(t)$ кусочно непрерывна при $t \geqq 0$ и $f(t)$ удовлетворяет условию $|f(t)| \leqq Me^{ct}$ при $t \to +\infty$. Тогда

$$\mathrm{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(\sigma)\, d\sigma \tag{12}$$

для $s > c$. Эквивалентно,

$$f(t) = \mathrm{L}^{-1}\{F(s)\} = t\mathrm{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty F(\sigma)\, d\sigma\right\}. \tag{13}$$

▲

Пример 6 Найдем $\mathrm{L}\{(\sinh t)/t\}$.

Решение Сначала, воспользовавшись правилом Лопиталя, убедимся, что выполняется условие (11):

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sinh t}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{e^t - e^{-t}}{2t} = \lim_{t\to 0}\frac{e^t + e^{-t}}{2} = 1.$$

Затем, полагая в равенстве (12) $f(t) = \sinh t$, получим

$$\mathrm{L}\left\{\frac{\sinh t}{t}\right\} = \int_s^\infty \mathrm{L}\{\sinh t\}\, d\sigma = \int_s^\infty \frac{d\sigma}{\sigma^2 - 1} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_s^\infty \left(\frac{1}{\sigma - 1} - \frac{1}{\sigma + 1}\right) d\sigma = \frac{1}{2}\left[\ln\frac{\sigma - 1}{\sigma + 1}\right]_s^\infty.$$

Поэтому

$$\mathrm{L}\left\{\frac{\sinh t}{t}\right\} = \frac{1}{2}\ln\frac{s+1}{s-1},$$

потому что $\ln 1 = 0$. ■

Свойство интегрирования, выраженное в равенстве (13), часто полезно при вычислении оригинала функции, когда проще работать с *неопределенным* интегралом преобразования, чем с самим преобразованием.

Пример 7 Найдем $\mathrm{L}^{-1}\{2s/(s^2 - 1)^2\}$.

Решение Можно использовать разложение на элементарные дроби, но намного проще применить формулу (13). Она дает

$$\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{(s^2-1)^2}\right\} = t\mathrm{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty \frac{2\sigma}{(\sigma^2-1)^2}\, d\sigma\right\} =$$

$$= t\mathrm{L}^{-1}\left\{\left[\frac{-1}{\sigma^2 - 1}\right]_s^\infty\right\} = t\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-1}\right\},$$

и поэтому

$$\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{(s^2-1)^2}\right\} = t\sinh t. \qquad \blacksquare$$

*Доказательства теорем

Доказательство теоремы 1. По теореме 2 из раздела 7.1, преобразования $F(s)$ и $G(s)$ существуют при $s > c$. Определение преобразования Лапласа (изображения по Лапласу) дает формула

$$G(s) = \int_0^\infty e^{-su} g(u)\,du = \int_{-\tau}^\infty e^{-s(t-\tau)} g(t-\tau)\,dt \quad (u = t-\tau),$$

и поэтому

$$G(s) = e^{s\tau}\int_0^\infty e^{-st} g(t-\tau)\,dt,$$

потому что мы можем так *определить* $f(t)$ и $g(t)$, чтобы они были нулевыми при $t < 0$. Тогда

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= G(s)\int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)\,d\tau = \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)G(s)\,d\tau = \\ &= \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)\left(e^{s\tau}\int_0^\infty e^{-st} g(t-\tau)\,dt\right)d\tau = \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-st} f(\tau) g(t-\tau)\,dt\right)d\tau. \end{aligned}$$

Теперь из условий, налагаемых на f и g, следует, что порядок интегрирования можно изменить. (Доказательство этого требует обсуждения равномерной сходимости несобственных интегралов и может быть найдено в главе 2 книги Черчилля (Churchill) *Operational Mathematics*, посвященной операционным методам в математике (3-е издание выпущено в Нью-Йорке в 1972 году издательством McGraw-Hill). Поэтому

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-st} f(\tau) g(t-\tau)\,d\tau\right)dt = \\ &= \int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\,d\tau\right)dt = \\ &= \int_0^\infty e^{-st}\left[f(t) * g(t)\right]\,dt \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$F(s)G(s) = \mathrm{L}\{f(t) * g(t)\}.$$

Мы заменяем верхний предел внутреннего интеграла на t, потому что $g(t-\tau) = 0$ всякий раз, когда $\tau > t$. Это завершает доказательство теоремы 1. ▲

Доказательство теоремы 2. Поскольку

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt,$$

дифференцирование под знаком интеграла приводит к

$$F'(s) = \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt =$$

$$= \int_0^\infty \frac{d}{ds} \left[e^{-st} f(t) \right]\, dt = \int_0^\infty e^{-st} \left[-t f(t) \right]\, dt;$$

таким образом,

$$F'(s) = \mathrm{L}\{-t f(t)\},$$

что совпадает с равенством (6). Мы получаем равенство (7), применяя L^{-1} и затем выполняя деление на $-t$. Законность дифференцирования под знаком интеграла гарантируется равномерной сходимостью полученного интеграла; это обсуждается в главе 2 книги Черчилля (Churchill) *Operational Mathematics*, посвященной операционным методам в математике (3-е издание выпущено в Нью-Йорке в 1972 году издательством McGraw-Hill). ▲

Доказательство теоремы 3. По определению

$$F(\sigma) = \int_0^\infty e^{-\sigma t} f(t)\, dt.$$

Так что интегрирование $F(\sigma)$ от s до $+\infty$ приводит к равенству

$$\int_s^\infty F(\sigma)\, d\sigma = \int_s^\infty \left(\int_0^\infty e^{-\sigma t} f(t)\, dt \right) d\sigma.$$

Согласно условию теоремы, можно изменить порядок интегрирования (снова см. книгу Черчилля); отсюда следует, что

$$\int_s^\infty F(\sigma)\, d\sigma = \int_0^\infty \left(\int_s^\infty e^{-\sigma t} f(t)\, d\sigma \right) dt =$$

$$= \int_0^\infty \left[\frac{e^{-\sigma t}}{-t} \right]_{\sigma=s}^\infty f(t)\, dt =$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} \frac{f(t)}{t}\, dt = \mathrm{L}\left\{ \frac{f(t)}{t} \right\}.$$

Это подтверждает равенство (12), а равенство (13) следует после того, как сначала применим L^{-1}, а затем умножим на t. ▲

7.4. Задачи

В задачах 1–6 найдите свертку $f(t) * g(t)$.

1. $f(t) = t$, $g(t) \equiv 1$

2. $f(t) = t$, $g(t) = e^{at}$

3. $f(t) = g(t) = \sin t$

4. $f(t) = t^2,\ g(t) = \cos t$

5. $f(t) = g(t) = e^{at}$

6. $f(t) = e^{at},\ g(t) = e^{bt} \quad (a \neq b)$

В задачах 7–14 примените теорему о свертке и найдите обратные изображения по Лапласу заданных функций.

7. $F(s) = \dfrac{1}{s(s-3)}$

8. $F(s) = \dfrac{1}{s(s^2+4)}$

9. $F(s) = \dfrac{1}{(s^2+9)^2}$

10. $F(s) = \dfrac{1}{s^2(s^2+k^2)}$

11. $F(s) = \dfrac{s^2}{(s^2+4)^2}$

12. $F(s) = \dfrac{1}{s(s^2+4s+5)}$

13. $F(s) = \dfrac{s}{(s-3)(s^2+1)}$

14. $F(s) = \dfrac{s}{s^4+5s^2+4}$

В задачах 15–22 примените теорему 2 или теорему 3 и найдите преобразование Лапласа (изображение по Лапласу) функции $f(t)$.

15. $f(t) = t\sin 3t$

16. $f(t) = t^2\cos 2t$

17. $f(t) = te^{2t}\cos 3t$

18. $f(t) = te^{-t}\sin^2 t$

19. $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$

20. $f(t) = \dfrac{1-\cos 2t}{t}$

21. $f(t) = \dfrac{e^{3t}-1}{t}$

22. $f(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{t}$

В задачах 23–28 найдите оригиналы (обратные преобразования) заданных функций.

23. $F(s) = \ln\dfrac{s-2}{s+2}$

24. $F(s) = \ln\dfrac{s^2+1}{s^2+4}$

25. $F(s) = \ln\dfrac{s^2+1}{(s+2)(s-3)}$

26. $F(s) = \operatorname{arctg}\dfrac{3}{s+2}$

27. $F(s) = \ln\left(1+\dfrac{1}{s^2}\right)$

28. $F(s) = \dfrac{s}{(s^2+1)^3}$

В задачах 29–34 преобразуйте данное дифференциальное уравнение и найдите нетривиальное решение, такое что $x(0) = 0$.

29. $tx'' + (t-2)x' + x = 0$

30. $tx'' + (3t-1)x' + 3x = 0$

31. $tx'' - (4t+1)x' + 2(2t+1)x = 0$

32. $tx'' + 2(t-1)x' - 2x = 0$

33. $tx'' - 2x' + tx = 0$

34. $tx'' + (4t-2)x' + (13t-4)x = 0$

35. Примените теорему о свертке и покажите, что

$$\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)\sqrt{s}}\right\} = \frac{2e^t}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2}\,du = e^t\mathrm{erf}\sqrt{t}.$$

(*Указание*. Подставьте $u = \sqrt{t}$.)

В задачах 36–38 примените теорему о свертке и найдите указанное решение $x(t)$ данного дифференциального уравнения с начальными условиями $x(0) = x'(0) = 0$.

36. $x'' + 4x = f(t);\ x(t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t f(t-\tau)\sin 2\tau\,d\tau$

37. $x'' + 2x' + x = f(t);\ x(t) = \int_0^t \tau e^{-\tau} f(t-\tau)\, d\tau$

38. $x'' + 4x' + 13x = f(t);\ x(t) = \frac{1}{3}\int_0^t f(t-\tau) e^{-2\tau} \sin 3\tau\, d\tau$

Оригинал функции и почленное обращение ряда

В главе 2 книги Черчилля Operational Mathematics*, посвященной операционным методам в математике (3-е издание выпущено в Нью-Йорке в 1972 году издательством McGraw-Hill), доказана следующая теорема. Предположим, что $f(t)$ непрерывна при $t \geqq 0$, $f(t)$ имеет экспоненциальный порядок при $t \to +\infty$ и что*

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{s^{n+k+1}},$$

где $0 \leqq k < 1$, и ряд сходится абсолютно для $s > c$. Тогда

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n t^{n+k}}{\Gamma(n+k+1)}.$$

Примените этот результат в задачах 39–41.

39. В примере 5 показано, что

$$\mathrm{L}\{J_0(t)\} = \frac{C}{\sqrt{s^2+1}} = \frac{C}{s}\left(1 + \frac{1}{s^2}\right)^{-1/2}.$$

Воспользовавшись биномиальным рядом, разложите в ряд, а затем вычислите член за членом обратное преобразование и получите

$$J_0(t) = C\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Наконец, обратите внимание, что из $J_0(0) = 1$ следует, что $C = 1$.

40. Разложите функцию $F(s) = s^{-1/2}e^{-1/s}$ в ряд по степеням s^{-1} и покажите, что

$$\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}} e^{-1/s}\right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cos 2\sqrt{t}.$$

41. Покажите, что

$$\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} e^{-1/s}\right\} = J_0\left(2\sqrt{t}\right).$$

7.5. Периодические и кусочно-непрерывные входные функции

Математические модели механических или электрических систем часто содержат функции с разрывами, соответствующими внешним силам, которые внезапно включаются или отключаются. Один такой простой пример релейной функции — **единичная ступенчатая функция (функция Хевисайда)** со ступенькой в точке $t = a$; она определяется формулой

$$u_a(t) = u(t-a) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < a, \\ 1, & \text{если } t \geqq a, \end{cases} \tag{1}$$

а ее график приведен на рис. 7.5.1.

В примере 8 из раздела 7.1 мы видели, что если $a \geqq 0$, то

$$\mathrm{L}\{u(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}. \tag{2}$$

Поскольку $\mathrm{L}\{u(t)\} = 1/s$, из равенства (2) следует, что умножение преобразования функции $u(t)$ на e^{-as} соответствует сдвигу $t \to t-a$ по первоначальной независимой переменной. Согласно теореме 1, этот факт, если он должным образом интерпретируется, является общим свойством преобразования Лапласа.

Теорема 1 Сдвиг вдоль оси *t*

Если $\mathrm{L}\{f(t)\}$ существует для $s > c$, то

$$\mathrm{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s) \tag{3a}$$

и

$$\mathrm{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = u(t-a)f(t-a) \tag{3b}$$

для $s > c + a$. ▲

Обратите внимание, что

$$u(t-a)f(t-a) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < a, \\ f(t-a), & \text{если } t \geqq a. \end{cases} \tag{4}$$

Таким образом, из теоремы 1 следует, что $\mathrm{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}$ является функцией, график которой для $t \geqq a$ получается сдвигом на a единиц вправо из графика $f(t)$. Обратите внимание, что часть графика $f(t)$ слева от $t = 0$ отрезана и не сдвигается (рис. 7.5.2).

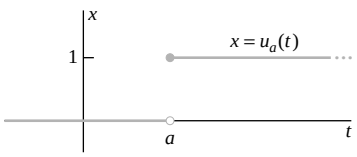


Рис. 7.5.1. График единичной ступенчатой функции (функции Хевисайда) со ступенькой в точке $t = a$

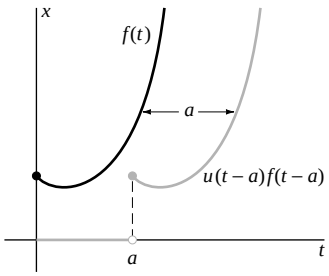


Рис. 7.5.2. Сдвиг $f(t)$ на a единиц вправо

Доказательство теоремы 1. По определению $\mathrm{L}\{f(t)\}$ мы имеем

$$e^{-as}F(s) = e^{-as}\int_0^\infty e^{-s\tau}f(\tau)\,d\tau = \int_0^\infty e^{-s(\tau+a)}f(\tau)\,d\tau.$$

Подстановка $t = \tau + a$ в этом случае дает

$$e^{-as}F(s) = \int_a^\infty e^{-st} f(t-a)\,dt.$$

Из равенства (4) мы видим, что это то же самое, что и

$$e^{-as}F(s) = \int_0^\infty e^{-st} u(t-a)f(t-a)\,dt = \mathrm{L}\{u(t-a)f(t-a)\},$$

потому что $u(t-a)f(t-a) = 0$ для $t < a$. Это завершает доказательство теоремы 1. ▲

Пример 1 Для $f(t) = \frac{1}{2}t^2$ по теореме 1

$$\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s^3}\right\} = u(t-a)\frac{1}{2}(t-a)^2 =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } t < a, \\ \frac{1}{2}(t-a)^2, & \text{если } t \geqq a \end{cases} \qquad \text{(рис. 7.5.3).} \quad ■$$

Пример 2 Найдем $\mathrm{L}\{g(t)\}$, если

$$g(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 3, \\ t^2, & \text{если } t \geqq 3 \end{cases} \qquad \text{(рис. 7.5.4).}$$

Решение Чтобы применить теорему 1, мы должны сначала записать $g(t)$ в форме $u(t-3)f(t-3)$. Функция $f(t)$, из которой в результате сдвига на 3 единицы вправо получается (для $t \geqq 3$) функция $g(t) = t^2$, равна $f(t) = (t+3)^2$, потому что $f(t-3) = t^2$. Но тогда

$$F(s) = \mathrm{L}\{t^2 + 6t + 9\} = \frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} + \frac{9}{s},$$

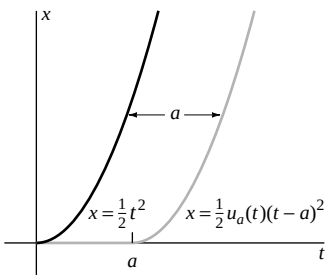


Рис. 7.5.3. График оригинала функции из примера 1

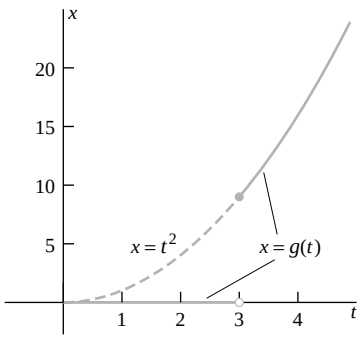


Рис. 7.5.4. График функции $g(t)$ из примера 2

так что теперь по теореме 1

$$\mathrm{L}\{g(t)\} = \mathrm{L}\{u(t-3)f(t-3)\} = e^{-3s}F(s) = e^{-3s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} + \frac{9}{s}\right). \quad \blacksquare$$

Пример 3 Найдем $\mathrm{L}\{f(t)\}$, если

$$f(t) = \begin{cases} \cos 2t, & \text{если } 0 \leqq t < 2\pi, \\ 0, & \text{если } t \geqq 2\pi \end{cases} \qquad \text{(рис. 7.5.5).}$$

Решение Сначала мы обращаем внимание, что

$$f(t) = [1 - u(t-2\pi)]\cos 2t = \cos 2t - u(t-2\pi)\cos 2(t-2\pi)$$

из-за периодичности функции косинус. Следовательно, по теореме 1

$$\mathrm{L}\{f(t)\} = \mathrm{L}\{\cos 2t\} - e^{-2\pi s}\mathrm{L}\{\cos 2t\} = \frac{s(1-e^{-2\pi s})}{s^2+4}. \quad \blacksquare$$

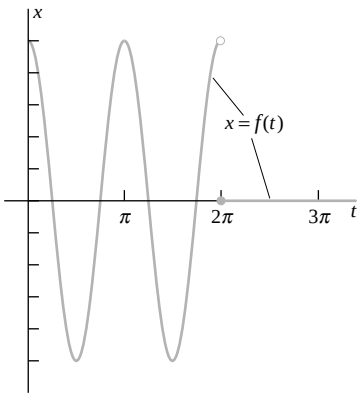


Рис. 7.5.5. Функция $f(t)$ из примеров 3 и 4

Пример 4 Материальная точка заданной массы, которая весит 32 фунта (масса $m = 1$ слаг (единица массы в системе фунт–сила)), закреплена на свободном конце длинной легкой пружины, которая растянута на 1 фут силой 4 фунта, причем $k = 4$ фунта/фут. Материальная точка заданной массы первоначально находится в покое в ее положении равновесия. Начиная с момента времени $t = 0$ (секунды), внешняя сила $f(t) = \cos 2t$ прикладывается к материальной точке заданной массы, но в момент времени $t = 2\pi$ эта сила отключается (резко отсоединяется), и материальная точка заданной массы продолжает свое беспрепятственное движение. Найдем функцию, дающую положение $x(t)$ материальной точки заданной массы.

Решение Мы должны решить задачу Коши (задачу с начальными условиями)

$$x'' + 4x = f(t); \quad x(0) = x'(0) = 0,$$

где $f(t)$ — функция из примера 3. Преобразованное уравнение имеет вид

$$(s^2 + 4)X(s) = F(s) = \frac{s(1 - e^{-2\pi s})}{s^2 + 4},$$

так что

$$X(s) = \frac{s}{(s^2 + 4)^2} - e^{-2\pi s}\frac{s}{(s^2 + 4)^2}.$$

Поскольку

$$\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2 + 4)^2}\right\} = \tfrac{1}{4}t \sin 2t,$$

с учетом равенства (16) из раздела 7.3 из теоремы 1 следует, что

$$x(t) = \tfrac{1}{4}t \sin 2t - u(t - 2\pi) \cdot \tfrac{1}{4}(t - 2\pi)\sin 2(t - 2\pi) =$$

$$= \tfrac{1}{4}\left[t - u(t - 2\pi) \cdot (t - 2\pi)\right]\sin 2t.$$

Если мы отдельно рассмотрим случаи $t < 2\pi$ и $t \geqq 2\pi$, мы найдем, что функция, позволяющая вычислить положение, может быть записана в форме

$$x(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}t \sin 2t, & \text{если } t < 2\pi, \\ \frac{1}{2}\pi \sin 2t, & \text{если } t \geqq 2\pi. \end{cases}$$

Как видно из графика $x(t)$, приведенного на рис. 7.5.6, материальная точка заданной массы колеблется с круговой частотой $\omega = 2$ и с линейно увеличивающейся амплитудой, пока сила не отключается в момент времени $t = 2\pi$. После этого материальная точка заданной массы продолжает колебаться с той же самой частотой, но с постоянной амплитудой $\pi/2$. Сила $F(t) = \cos 2t$ вызвала бы чистый резонанс, если бы продолжала

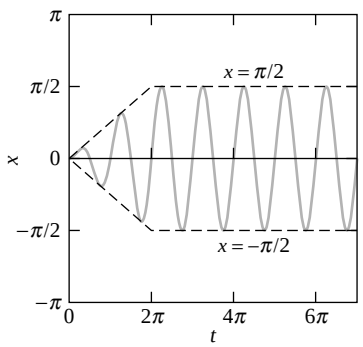


Рис. 7.5.6. График функции $x(t)$ из примера 4

действовать неопределенно долго, но мы видим, что ее действие прекращается и явление резонанса исчезает немедленно в момент времени ее отключения. ■

Если бы мы должны были решить пример 4 методами главы 3, мы должны решить одну задачу для интервала $0 \leqq t < 2\pi$, а затем решить новую задачу с другими начальными условиями для интервала $t \geqq 2\pi$. В этой ситуации метод преобразования Лапласа отличается тем преимуществом, что он не требует решения различных задач на различных интервалах.

Пример 5 Рассмотрим цепь RLC, состоящую из сопротивления, индуктивности и емкости. Эта цепь показана на рис. 7.5.7, ее параметры $R = 110\ \Omega$, $L = 1$ генри, $C = 0{,}001$ фарады, причем она подключена к батарее с $E_0 = 90$ В. Первоначально в цепи никакого тока нет и заряд на конденсаторе отсутствует. В момент времени $t = 0$ выключатель замыкают и оставляют замкнутым в течение 1 секунды. В момент времени $t = 1$ его размыкают и оставляют разомкнутым после этого. Найдите полученный ток в цепи.

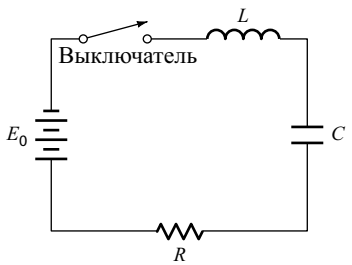


Рис. 7.5.7. Последовательная цепь RLC, состоящая из сопротивления, индуктивности и емкости из примера 5

Решение Как мы помним из раздела 3.7, основное уравнение последовательной цепи имеет вид

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q = e(t); \tag{5}$$

мы используем буквы нижнего регистра для обозначения тока, заряда и напряжения и резервируем прописные буквы для их преобразований (образов). Для схемы с данными элементами уравнение (5) принимает вид

$$\frac{di}{dt} + 110i + 1000q = e(t), \tag{6}$$

где $e(t) = 90[1 - u(t-1)]$ соответствует размыканию и замыканию выключателя.

В разделе 3.7 наша стратегия состояла в том, чтобы продифференцировать обе части уравнения (5), а затем применить соотношение

$$i = \frac{dq}{dt} \tag{7}$$

для того, чтобы получить уравнение второго порядка

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = e'(t).$$

Здесь мы не используем этот метод, потому что $e'(t) = 0$, кроме момента $t = 1$, тогда как скачок от $e(t) = 90$, когда $t < 1$ к $e(t) = 0$, когда $t > 1$ казалось бы, требовал бы, чтобы $e'(1) = -\infty$. Таким образом, $e'(t)$ имеет бесконечный разрыв при $t = 1$. Это явление будет обсуждаться в разделе 7.6. Пока же мы просто обратим внимание, что это странная ситуация и обойдем ее и не будем даже пытаться рассмотреть ее.

Чтобы избежать возможной проблемы при $t = 1$, мы замечаем, что начальное значение $q(0) = 0$ и уравнение (7) после интегрирования дает

$$q(t) = \int_0^t i(\tau)\, d\tau. \tag{8}$$

Мы подставляем равенство (8) в уравнение (5) и получаем

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\, d\tau = e(t). \tag{9}$$

Это — **интегродифференциальное уравнение** последовательной цепи RLC, состоящей из сопротивления, индуктивности и емкости; оно содержит и интеграл, и производную неизвестной функции $i(t)$. Для такого уравнения метод преобразования Лапласа работает великолепно.

В настоящем примере уравнение (9) принимает вид

$$\frac{di}{dt} + 110i + 1000\int_0^t i(\tau)\, d\tau = 90\left[1 - u(t-1)\right]. \tag{10}$$

Поскольку

$$\mathrm{L}\left\{\int_0^t i(\tau)\, d\tau\right\} = \frac{I(s)}{s},$$

по теореме 2 из раздела 7.2 о преобразовании интегралов, преобразованное уравнение имеет вид

$$sI(s) + 110I(s) + 1000\frac{I(s)}{s} = \frac{90}{s}(1 - e^{-s}).$$

Мы решаем это уравнение относительно $I(s)$ и получаем

$$I(s) = \frac{90(1 - e^{-s})}{s^2 + 110s + 1000}.$$

Но

$$\frac{90}{s^2+110s+1000} = \frac{1}{s+10} - \frac{1}{s+100},$$

так что мы имеем

$$I(s) = \frac{1}{s+10} - \frac{1}{s+100} - e^{-s}\left(\frac{1}{s+10} - \frac{1}{s+100}\right).$$

Мы теперь применяем теорему 1 для $f(t) = e^{-10t} - e^{-100t}$; таким образом, оригинал функции имеет вид

$$i(t) = e^{-10t} - e^{-100t} - u(t-1)\left[e^{-10(t-1)} - e^{-100(t-1)}\right].$$

После того как мы отдельно рассмотрим случаи $t < 1$ и $t \geqq 1$, мы найдем, что ток в цепи можно определить по формуле

$$i(t) = \begin{cases} e^{-10t} - e^{-100t}, & \text{если } t < 1, \\ e^{-10t} - e^{-10(t-1)} - e^{-100t} + e^{-100(t-1)}, & \text{если } t \geqq 1. \end{cases}$$

Выражение $e^{-10t} - e^{-100t}$ в решении описывало бы ток в том случае, если бы выключатель был замкнут все время (для всех t) и не был бы разомкнут при $t \geqq 1$. ■

Преобразования периодических функций

Периодические вынуждающие функции в практических механических или электрических системах часто более сложны, чем чистые синусы или косинусы. Функция $f(t)$, отличная от постоянной и определенная для $t \geqq 0$, называется **периодической**, если существует число $p > 0$, такое что

$$f(t+p) = f(t) \tag{11}$$

для всех $t \geqq 0$. Наименьшее положительное значение p (если такое существует), для которого выполняется равенство (11), называют **периодом** функции f. Такая функция показана на рис. 7.5.8. Теорема 2 упрощает вычисление преобразования Лапласа (изображения по Лапласу) периодической функции.

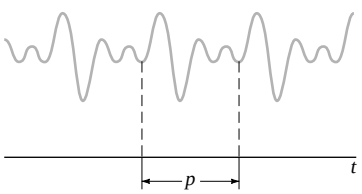


Рис. 7.5.8. График функции, период которой равен p

Теорема 2 Преобразования периодических функций

Пусть $f(t)$ — периодическая (с периодом p) кусочно непрерывная функция для $t \geqq 0$. Тогда преобразование $F(s) = \mathrm{L}\{f(t)\}$ существует для $s > 0$ и дается формулой

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f(t)\, dt. \tag{12}$$

Доказательство. В соответствии с определением преобразования Лапласа (изображения по Лапласу)

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{np}^{(n+1)p} e^{-st} f(t)\, dt.$$

Подставляя $t = \tau + np$ в интеграл номер n после знака суммы, получаем

$$\int_{np}^{(n+1)p} e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^p e^{-s(\tau+np)} f(\tau + np)\, d\tau = e^{-nps} \int_0^p e^{-s\tau} f(\tau)\, d\tau,$$

потому что $f(\tau + np) = f(\tau)$ из-за периодичности. Таким образом,

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-nps} \int_0^p e^{-s\tau} f(\tau)\, d\tau \right) =$$

$$= \left(1 + e^{-ps} + e^{-2ps} + \cdots\right) \int_0^p e^{-s\tau} f(\tau)\, d\tau.$$

Следовательно,

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-ps}} \int_0^p e^{-s\tau} f(\tau)\, d\tau.$$

Мы используем бесконечную геометрическую прогрессию

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

при $x = e^{-ps} < 1$ (для $s > 0$), чтобы просуммировать ряд на заключительном этапе. Так мы доказали равенство (12). ▲

Основное преимущество теоремы 2 состоит в том, что она дает возможность нам найти преобразование Лапласа (изображение по Лапласу) периодической функции без потребности явного вычисления несобственного интеграла.

Пример 6 На рис. 7.5.9 показан график функции прямоугольного колебания (меандра) $f(t) = (-1)^{[\![t/a]\!]}$, причем период колебания равен $p = 2a$; $[\![x]\!]$ обозначает самое большое целое число, не превышающее x. По теореме 2 преобразование Лапласа (изображение по Лапласу) функции $f(t)$

имеет вид

$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-2as}} \int_0^{2a} e^{-st} f(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2as}} \left(\int_0^a e^{-st}\, dt + \int_a^{2a} (-1) e^{-st}\, dt \right) =$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2as}} \left(\left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^a - \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_a^{2a} \right) =$$

$$= \frac{(1-e^{-as})^2}{s(1-e^{-2as})} = \frac{1-e^{-as}}{s(1+e^{-as})}.$$

Поэтому

$$F(s) = \frac{1-e^{-as}}{s(1+e^{-as})} = \tag{13a}$$

$$= \frac{e^{as/2} - e^{-as/2}}{s(e^{as/2} + e^{-as/2})} = \frac{1}{s} \tanh \frac{as}{2}. \tag{13b}$$

■

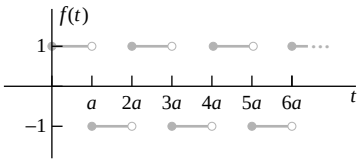


Рис. 7.5.9. График функции прямоугольного колебания (меандра) из примера 6

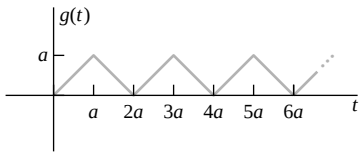


Рис. 7.5.10. График треугольной волновой функции из примера 7

Пример 7 На рис. 7.5.10 показан график треугольной волновой функции $g(t)$, период которой равен $p = 2a$. Поскольку производная $g'(t)$ является функцией прямоугольного колебания (меандром) из примера 6, из формулы (13b) и теоремы 2 из раздела 7.2 следует, что преобразование этой треугольной волновой функции имеет вид

$$G(s) = \frac{F(s)}{s} = \frac{1}{s^2} \tanh \frac{as}{2}. \tag{14}$$

■

Пример 8 Рассмотрим систему, состоящую из материальной точки заданной массы, закрепленной на пружине, с поршнем при $m = 1$, $c = 4$ и $k = 20$

в соответствующих единицах. Предположим, что первоначально система находится в покое в положении равновесия $x(0) = x'(0) = 0$) и что на материальную точки заданной массы в начале в момент времени $t = 0$ действует внешняя сила $f(t)$, график которой показан на рис. 7.5.11: прямоугольное колебание (меандр) с амплитудой 20, период которого равен 2π. Найдем функцию, позволяющую вычислить положение $f(t)$ системы в момент времени t.

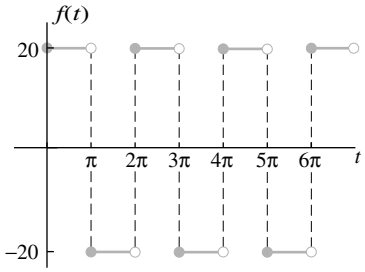


Рис. 7.5.11. График внешней силовой функции из примера 8

Решение Задача Коши (задача с начальными условиями) в данном случае имеет вид

$$x'' + 4x' + 20x = f(t); \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

Преобразованное уравнение имеет вид

$$s^2X(s) + 4sX(s) + 20X(s) = F(s). \tag{15}$$

Из примера 6 при $a = \pi$ следует, что преобразование функции $f(t)$ имеет вид

$$F(s) = \frac{20}{s} \cdot \frac{1 - e^{-\pi s}}{1 + e^{-\pi s}} =$$

$$= \frac{20}{s}\left(1 - e^{-\pi s}\right)\left(1 - e^{-\pi s} + e^{-2\pi s} - e^{-3\pi s} + \cdots\right) =$$

$$= \frac{20}{s}\left(1 - 2e^{-\pi s} + 2e^{-2\pi s} - 2e^{-3\pi s} + \cdots\right),$$

так что

$$F(s) = \frac{20}{s} + \frac{40}{s}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-n\pi s}. \tag{16}$$

Подставляя (16) в равенство (15), получаем

$$X(s) = \frac{F(s)}{s^2 + 4s + 20} =$$

$$= \frac{20}{s[(s+2)^2 + 16]} + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{20e^{-n\pi s}}{s[(s+2)^2 + 16]}. \qquad (17)$$

Применяя преобразование, указанное в равенстве (8) из раздела 7.3, получаем

$$\mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{20}{(s+2)^2 + 16}\right\} = 5e^{-2t}\sin 4t,$$

так что по теореме 2 из раздела 7.2, мы получаем

$$g(t) = \mathrm{L}^{-1}\left\{\frac{20}{s[(s+2)^2 + 16]}\right\} = \int_0^t 5e^{-2\tau}\sin 4\tau\, d\tau.$$

Применяя табличную формулу для $\int e^{at}\sin bt\, dt$, имеем

$$g(t) = 1 - e^{-2t}\left(\cos 4t + \tfrac{1}{2}\sin 4t\right) = 1 - h(t), \qquad (18)$$

где

$$h(t) = e^{-2t}\left(\cos 4t + \tfrac{1}{2}\sin 4t\right). \qquad (19)$$

Теперь мы применяем теорему 1, чтобы найти оригинал функции в правой части уравнения (17). В результате получаем

$$x(t) = g(t) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u(t - n\pi)g(t - n\pi), \qquad (20)$$

и мы обращаем внимание, что для любого фиксированного значения t сумма в равенстве (20) конечна. Кроме того,

$$g(t - n\pi) = 1 - e^{-2(t-n\pi)}\left[\cos 4(t - n\pi) + \tfrac{1}{2}\sin 4(t - n\pi)\right] =$$

$$= 1 - e^{2n\pi}e^{-2t}\left(\cos 4t + \tfrac{1}{2}\sin 4t\right).$$

Поэтому

$$g(t - n\pi) = 1 - e^{2n\pi}h(t). \qquad (21)$$

Следовательно, если $0 < t < \pi$, то

$$x(t) = 1 - h(t).$$

Если $\pi < t < 2\pi$, то

$$x(t) = [1 - h(t)] - 2\left[1 - e^{2\pi}h(t)\right] = -1 + h(t) - 2h(t)\left[1 - e^{2\pi}\right].$$

Если $2\pi < t < 3\pi$, то

$$x(t) = [1 - h(t)] - 2\left[1 - e^{2\pi}h(t)\right] + 2\left[1 - e^{4\pi}h(t)\right] = \\ = 1 + h(t) - 2h(t)\left[1 - e^{2\pi} + e^{4\pi}\right].$$

Общее выражение для $n\pi < t < (n+1)\pi$ имеет вид

$$x(t) = h(t) + (-1)^n - 2h(t)\left[1 - e^{2\pi} + \cdots + (-1)^n e^{2n\pi}\right] = \\ = h(t) + (-1)^n - 2h(t)\frac{1 + (-1)^n e^{2(n+1)\pi}}{1 + e^{2\pi}}, \tag{22}$$

который мы получили с помощью знакомой формулы для суммы конечной геометрической прогрессии. Перегруппировка слагаемых в равенстве (22) с учетом равенства (19), наконец, приводит к

$$x(t) = \frac{e^{2\pi} - 1}{e^{2\pi} + 1}e^{-2t}\left(\cos 4t + \tfrac{1}{2}\sin 4t\right) + (-1)^n - \\ - \frac{2 \cdot (-1)^n e^{2\pi}}{e^{2\pi} + 1}e^{-2(t - n\pi)}\left(\cos 4t + \tfrac{1}{2}\sin 4t\right) \tag{23}$$

для $n\pi < t < (n+1)\pi$. Первый член в уравнении (23) представляет собой переходную составляющую решения (дифференциального уравнения)

$$x_{\text{tr}}(t) \approx (0{,}9963)e^{-2t}\left(\cos 4t + \tfrac{1}{2}\sin 4t\right) \approx \\ \approx (1{,}1139)e^{-2t}\cos(4t - 0{,}4636). \tag{24}$$

Последние два члена в уравнении (23) дают устойчивое периодическое решение x_{sp}. Чтобы исследовать его, мы пишем $\tau = t - n\pi$ для t в интервале $n\pi < t < (n+1)\pi$. Тогда

$$x_{\text{sp}}(t) = (-1)^n\left[1 - \frac{2e^{2\pi}}{e^{2\pi} + 1}e^{-2\tau}\left(\cos 4\tau + \tfrac{1}{2}\sin 4\tau\right)\right] \approx \\ \approx (-1)^n\left[1 - (2{,}2319)e^{-2\tau}\cos(4\tau - 0{,}4636)\right]. \tag{25}$$

На рис. 7.5.12 показан график $x_{\text{sp}}(t)$. Его самая интересная особенность состоит в появлении периодических затухающих колебаний с частотой в *четыре раза* большей, чем частота приложенной силы $f(t)$. В главе 9 (посвященной рядам Фурье) мы узнаем, почему периодическая внешняя сила иногда вызывает колебания более высокой частоты, чем приложенная частота. ■

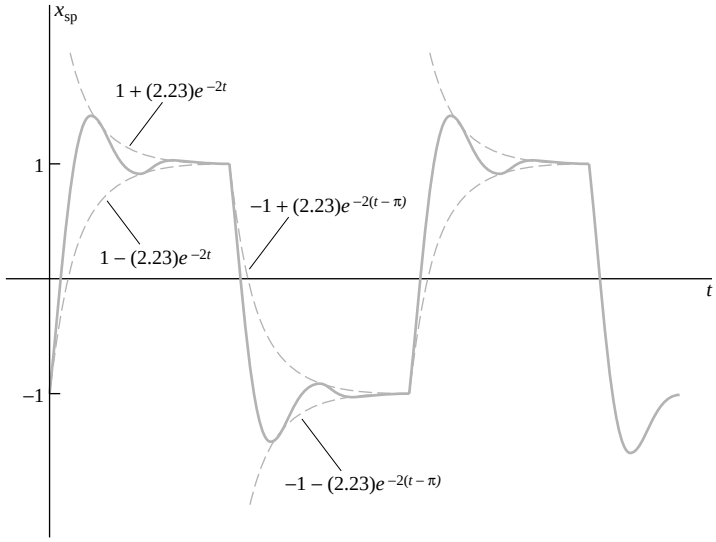


Рис. 7.5.12. График устойчивого периодического решения для примера 8; обратите внимание на периодически затухающие колебания с частотой в четыре раза большей, чем частота приложенной силы

7.5. Задачи

В задачах 1–10 найдите обратное преобразование Лапласа (изображение по Лапласу) каждой заданной функции $f(t)$. Затем сделайте набросок графика f.

1. $F(s) = \dfrac{e^{-3s}}{s^2}$

2. $F(s) = \dfrac{e^{-s} - e^{-3s}}{s^2}$

3. $F(s) = \dfrac{e^{-s}}{s+2}$

4. $F(s) = \dfrac{e^{-s} - e^{2-2s}}{s-1}$

5. $F(s) = \dfrac{e^{-\pi s}}{s^2+1}$

6. $F(s) = \dfrac{se^{-s}}{s^2+\pi^2}$

7. $F(s) = \dfrac{1-e^{-2\pi s}}{s^2+1}$

8. $F(s) = \dfrac{s(1-e^{-2s})}{s^2+\pi^2}$

9. $F(s) = \dfrac{s(1+e^{-3s})}{s^2+\pi^2}$

10. $F(s) = \dfrac{2s(e^{-\pi s} - e^{-2\pi s})}{s^2+4}$

В задачах 11–22 найдите преобразования Лапласа (изображения по Лапласу) данных функций.

11. $f(t) = 2$, если $0 \leqq t < 3$; $f(t) = 0$, если $t \geqq 3$

12. $f(t) = 1$, если $1 \leqq t \leqq 4$; $f(t) = 0$, если $t < 1$ или если $t > 4$

13. $f(t) = \sin t$, если $0 \leqq t \leqq 2\pi$; $f(t) = 0$, если $t > 2\pi$

14. $f(t) = \cos \pi t$, если $0 \leqq t \leqq 2$; $f(t) = 0$, если $t > 2$

15. $f(t) = \sin t$, если $0 \leqq t \leqq 3\pi$; $f(t) = 0$, если $t > 3\pi$

16. $f(t) = \sin 2t$, если $\pi \leqq t \leqq 2\pi$; $f(t) = 0$, если $t < \pi$ или если $t > 2\pi$

17. $f(t) = \sin \pi t$, если $2 \leqq t \leqq 3$; $f(t) = 0$, если $t < 2$ или если $t > 3$

18. $f(t) = \cos \frac{1}{2}\pi t$, если $3 \leqq t \leqq 5$; $f(t) = 0$, если $t < 3$ или если $t > 5$

19. $f(t) = 0$, если $t < 1$; $f(t) = t$, если $t \geqq 1$

20. $f(t) = t$, если $t \leqq 1$; $f(t) = 1$ если $t > 1$

21. $f(t) = t$, если $t \leqq 1$; $f(t) = 2 - t$, если $1 \leqq t \leqq 2$; $f(t) = 0$, если $t > 2$

22. $f(t) = t^3$, если $1 \leqq t \leqq 2$; $f(t) = 0$, если $t < 1$ или если $t > 2$

23. Примените теорему 2 при $p = 1$ и проверьте, что $\mathrm{L}\{1\} = 1/s$.

24. Примените теорему 2 и проверьте, что $\mathrm{L}\{\cos kt\} = s/(s^2 + k^2)$.

25. Примените теорему 2 и покажите, что преобразование Лапласа (изображение по Лапласу) функции прямоугольного колебания (меандра), изображенного на рис. 7.5.13, имеет вид

$$\mathrm{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s(1 + e^{-as})}.$$

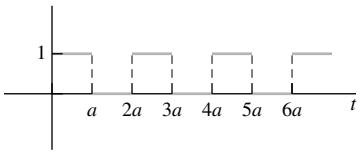


Рис. 7.5.13. График функции прямоугольного колебания (меандра) из задачи 25

26. Примените теорему 2 и покажите, что преобразование Лапласа (изображение по Лапласу) пилообразной функции $f(t)$, показанной на рис. 7.5.14, имеет вид

$$F(s) = \frac{1}{as^2} - \frac{e^{-as}}{s(1 - e^{-as})}.$$

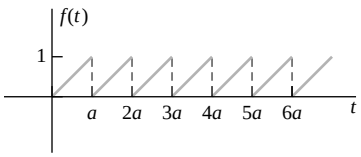


Рис. 7.5.14. График пилообразной функции из задачи 26

27. Пусть $g(t)$ — ступенчатая функция, изображенная на рис. 7.5.15. Покажите, что $g(t) = (t/a) - f(t)$, где f — пилообразная функция, изображенная на рис. 7.5.14, и отсюда выведите, что

$$\mathrm{L}\{g(t)\} = \frac{e^{-as}}{s(1 - e^{-as})}.$$

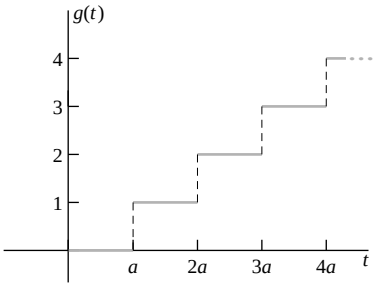


Рис. 7.5.15. График ступенчатой функции из задачи 27

28. Предположим, что $f(t)$ — периодическая функция, период которой равен $2a$, причем $f(t) = t$, если $0 \leqq t < a$, и $f(t) = 0$, если $a \leqq t < 2a$. Найдите $\mathrm{L}\{f(t)\}$.

29. Предположим, что $f(t)$ — однополупериодное выпрямление $\sin kt$, показанное на рис. 7.5.16. Покажите, что

$$\mathrm{L}\{f(t)\} = \frac{k}{(s^2 + k^2)(1 - e^{-\pi s/k})}.$$

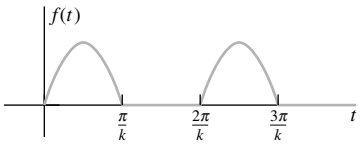


Рис. 7.5.16. Однополупериодное выпрямление $\sin kt$

30. Пусть $g(t) = u(t - \pi/k)f(t - \pi/k)$, где $f(t)$ — функция из задачи 29 и $k > 0$. Обратите внимание, что $h(t) = f(t) + g(t)$ — двухполупериодное выпрямление $\sin kt$, показанное на рис. 7.5.17. Пользуясь этим, выведите из задачи 29, что

$$\mathrm{L}\{h(t)\} = \frac{k}{s^2 + k^2} \coth \frac{\pi s}{2k}.$$

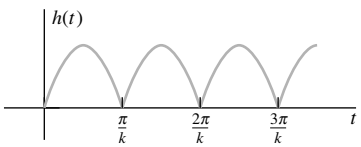


Рис. 7.5.17. Двухполупериодное выпрямление $\sin kt$

В задачах 31–35 для системы, состоящей из материальной точки заданной массы, закрепленной на пружине с поршнем, даются значения массы m, жесткости пружины k и сопротивления поршня c. Кроме того, задана также внешняя вынуждающая силовая функция $f(t)$. Решите задачу Коши (задачу с начальными условиями)

$$mx'' + cx' + kx = f(t), \quad x(0) = x'(0) = 0$$

и начертите график функции, дающей положение $x(t)$.

31. $m = 1$, $k = 4$, $c = 0$; $f(t) = 1$, если $0 \leqq t < \pi$, $f(t) = 0$, если $t \geqq \pi$

32. $m = 1$, $k = 4$, $c = 5$; $f(t) = 1$, если $0 \leqq t < 2$, $f(t) = 0$, если $t \geqq 2$
33. $m = 1$, $k = 9$, $c = 0$; $f(t) = \sin t$, если $0 \leqq t \leqq 2\pi$, $f(t) = 0$, если $t > 2\pi$
34. $m = 1$, $k = 1$, $c = 0$; $f(t) = t$, если $0 \leqq t < 1$, $f(t) = 0$, если $t \geqq 1$
35. $m = 1$, $k = 4$, $c = 4$; $f(t) = t$, если $0 \leqq t \leqq 2$, $f(t) = 0$, если $t > 2$

В задачах 36–40 даются значения элементов цепи RLC. Решите задачу Коши (задачу с начальными условиями)

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau = e(t); \quad i(0) = 0$$

для заданного приложенного напряжения $e(t)$.

36. $L = 0$, $R = 100$, $C = 10^{-3}$; $e(t) = 100$, если $0 \leqq t < 1$; $e(t) = 0$, если $t \geqq 1$
37. $L = 1$, $R = 0$, $C = 10^{-4}$; $e(t) = 100$, если $0 \leqq t < 2\pi$; $e(t) = 0$, если $t \geqq 2\pi$
38. $L = 1$, $R = 0$, $C = 10^{-4}$; $e(t) = 100 \sin 10t$, если $0 \leqq t < \pi$; $e(t) = 0$, если $t \geqq \pi$
39. $L = 1$, $R = 150$, $C = 2 \times 10^{-4}$; $e(t) = 100t$, если $0 \leqq t < 1$; $e(t) = 0$, если $t \geqq 1$
40. $L = 1$, $R = 100$, $C = 4 \times 10^{-4}$; $e(t) = 50t$, если $0 \leqq t < 1$; $e(t) = 0$, если $t \geqq 1$

В задачах 41 и 42 задана система, состоящая из материальной точки заданной массы, закрепленной на пружине с поршнем, причем к материальной точке приложена внешняя сила $f(t)$. *Согласно предположению,* $x(0) = x'(0) = 0$. *Используйте метод примера 8, чтобы найти переходный процесс и установившееся периодическое движение материальной точки заданной массы. Затем нарисуйте график функции, дающей положение* $x(t)$. *Если вы захотите проверить ваш график с помощью программы для численного решения дифференциальных уравнений, может быть полезно обратить внимание, что функция*

$$f(t) = A[2u((t-\pi)(t-2\pi)(t-3\pi)\cdot (t-4\pi)(t-5\pi)(t-6\pi)) - 1]$$

имеет значение $+A$ *при* $0 < t < \pi$, *и значение* $-A$, *если* $\pi < t < 2\pi$ *и т. д. и, следовательно, на интервале* $[0, 6\pi]$ *совпадает с функцией прямоугольного колебания (меандром), которая имеет амплитуду* A *и период* 2π. *(См. также определение функции прямоугольного колебания (меандра) через пилообразные и треугольные волновые функции в приложении к этому разделу.)*

41. $m = 1$, $k = 4$, $c = 0$; $f(t)$ — функция прямоугольного колебания (меандра) с амплитудой 4 и периодом 2π.
42. $m = 1$, $k = 10$, $c = 2$; $f(t)$ — функция прямоугольного колебания (меандра) с амплитудой 10 и периодом 2π.

7.5. Приложение. Конструирование функций

В технических приложениях периодические кусочно-линейные функции часто встречаются в качестве входных функций. Из-за этого периодические кусочно-линейные функции иногда называют **инженерными функциями**. Вычисления с такими функциями легко выполняются в системах компьютерной алгебры. В системе *Mathematica,* например, мы можем определить пилообразную функцию, треугольную функцию и меандр:

```
SawTooth[t_] := 2 t - 2 Floor[t] - 1
TriangularWave[t_] := Abs[2 SawTooth[(2 t - 1)/4]] - 1
SquareWave[t_] := Sign[ TriangularWave[t] ]
```

Начертите каждую из функций, чтобы проверить, что она имеет период 2 и что ее название (имя) выбрано так, что оно точно соответствует ее виду. Например, чертеж, получаемый в результате выполнения команды

```
Plot[ SquareWave[t], {t, 0, 6}];
```

должен напоминать рис. 7.5.9. Если $f(t)$ — одна из этих технических функций и $p > 0$, то функция $f(2t/p)$ будет иметь период p. Чтобы проиллюстрировать это, попробуйте выполнить соответствующий чертеж с помощью команды

```
Plot[ TriangularWave[ 2 t/p ], {t, 0, 3 p}];
```

при различных значениях p.

Теперь давайте рассмотрим уравнение системы, состоящей из материальной точки заданной массы, закрепленной на пружине, с поршнем

```
diffEq = m x''[t] + c x'[t] + k x[t] == input
```

для следующих выбранных значений параметра и входной вынуждающей функцией с периодом p и амплитудой F_0.

```
m = 4; c = 8; k = 5; p = 1; F0 = 4;
input = F0 SquareWave[2 t/p];
```

Вы можете начертить эту входную функцию, чтобы проверить, что она имеет период 1:

```
Plot[ input, {t, 0, 10}];
```

Наконец, давайте предположим, что материальная точка заданной массы первоначально находится в покое в ее положении равновесия и решим численным методом полученную задачу Коши (задачу с начальными условиями).

```
response = NDSolve[ {diffEq, x[0] == 0, x'[0] == 0},
            x, {t, 0, 10}, MaxSteps -> 1000 ]
Plot[ x[t] /. response, {t, 0, 10}];
```

На полученном рис. 7.5.18 мы видим, что после того, как начальный переходный процесс затух, функция-ответ $x(t)$ успокаивается (как и ожидается?) и устанавливается периодическое колебание с тем же самым периодом, что и на входе.

Исследуйте эту задачу Коши (задачу с начальными условиями) для нескольких значений параметров системы, состоящей из материальной точки заданной массы, закрепленной на

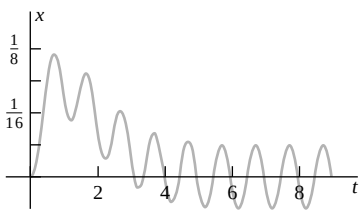


Рис. 7.5.18. Ответ $x(t)$ на входное прямоугольное колебание (меандр) периода 1

пружине, с поршнем — например, в качестве значений параметров выберите цифры номера вашего студенческого билета — и возьмите различные входные сконструированные вами функции, имеющие различные амплитуды и периоды.

7.6. Импульсы и дельта-функции

Рассмотрим силу $f(t)$, которая действует только в течение очень короткого временного интервала $a \leqq t \leqq b$, причем $f(t) = 0$ вне этого интервала. Типичным примером может быть *сила удара* биты, когда игрок ударяет битой по мячу — соударение с шаром можно считать почти мгновенным. Быстрый волнообразный всплеск напряжения (от удара молнии во время грозы, например) — аналогичное электрическое явление. В такой ситуации часто случается, что основной эффект силы зависит только от значения интеграла

$$p = \int_a^b f(t)\,dt \tag{1}$$

и не зависит от того, как именно $f(t)$ изменяется со временем t. Число p в уравнении (1) называют **импульсом** силы $f(t)$ на интервале $[a, b]$.

В случае силы $f(t)$, которая действует на частицу массы m, двигающейся по прямолинейной траектории, интегрирование закона Ньютона

$$f(t) = mv'(t) = \frac{d}{dt}\,[mv(t)]$$

приводит к

$$p = \int_a^b \frac{d}{dt}\,[mv(t)]\;dt = mv(b) - mv(a). \tag{2}$$

Таким образом, импульс силы равен изменению импульса частицы. Таким образом, если изменение импульса частицы — единственный рассматриваемый эффект, то необходимо знать только импульс силы; ни точный вид функции $f(t)$, ни даже точное значение временного интервала, в течение которого она действует, несущественны. Это действительно везение, потому что в ситуации, вроде удара по мячу, мы вряд ли можем иметь такую детальную информацию о силе удара, которая действует на мяч.

Наша стратегия в изучении такой ситуации состоит в том, чтобы найти разумную математическую модель, в которой неизвестная сила $f(t)$ заменяется простой и явной силой, которая имеет тот же самый импульс. Предположим для простоты, что $f(t)$ имеет импульс 1 и действует в течение некоторого краткого временного интервала, начинающегося в момент времени $t = a \geqq 0$. Тогда мы можем выбрать фиксированное число $\epsilon > 0$, которое приближает длину этого временного интервала, и заменить $f(t)$ конкретной функцией

$$d_{a,\epsilon}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\epsilon}, & \text{если } a \leqq t < a + \epsilon, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{3}$$

Это — функция от t, причем a и ϵ — параметры, которые определяют временной интервал $[a, a + \epsilon]$. Если $b \geqq a + \epsilon$, то мы видим (рис. 7.6.1), что импульс $d_{a,\epsilon}$ на $[a, b]$ равен

$$p = \int_a^b d_{a,\epsilon}(t)\,dt = \int_a^{a+\epsilon} \frac{1}{\epsilon}\,dt = 1.$$

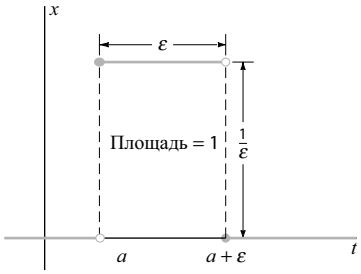


Рис. 7.6.1. График импульсной функции $d_{a,\epsilon}(t)$

Таким образом, $d_{a,\epsilon}$ есть *единичный импульс (дельта-импульс)*, независимо от величины числа ϵ. По сути, то же самое вычисление дает

$$\int_0^\infty d_{a,\epsilon}(t)\,dt = 1. \tag{4}$$

Поскольку точный временной интервал, в течение которого действует сила, оказывается несущественным, это позволяет говорить о *мгновенном импульсе*, который происходит точно в момент $t = a$. Мы могли бы попробовать смоделировать такой мгновенный единичный импульс (дельта-импульс), взяв предел при $\epsilon \to 0$, таким способом определяя

$$\delta_a(t) = \lim_{\epsilon \to 0} d_{a,\epsilon}(t), \tag{5}$$

где $a \geqq 0$. Если бы мы могли также взять предел под знаком интеграла в равенстве (4), то отсюда следовало бы, что

$$\int_0^\infty \delta_a(t)\,dt = 1. \tag{6}$$

Но предел в равенстве (5) равен

$$\delta_a(t) = \begin{cases} +\infty, & \text{если } t = a, \\ 0, & \text{если } t \neq a. \end{cases} \tag{7}$$

Очевидно, ни одна функция не может удовлетворить и (6), и (7); ведь если функция является нулевой, кроме единственной точки, то ее интеграл равен не 1, а нулю. Однако, символ $\delta_a(t)$ очень полезен. Как бы его ни интерпретировали, он называется **дельта-функцией (Дирака)** в честь английского ученого в области теоретической физики П. А. М. Дирака (1902–1984), который в начале 1930-х годов ввел "функцию", предположительно имеющую свойства, выраженные в равенствах (6) и (7).

Дельта-функции как операторы

Следующее вычисление мотивирует значение, которое мы приписываем $\delta_a(t)$. Если $g(t)$ — непрерывная функция, то из формулы Лагранжа для интегралов следует, что

$$\int_a^{a+\epsilon} g(t)\,dt = \epsilon g\left(\overline{t}\right)$$

для некоторой точки $\bar{t}$ в интервале $[a, a+\epsilon]$. Из этого следует, что

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_0^\infty g(t)d_{a,\epsilon}(t)\,dt = \lim_{\epsilon\to 0}\int_a^{a+\epsilon} g(t)\cdot\frac{1}{\epsilon}\,dt = \lim_{\epsilon\to 0} g\left(\bar{t}\right) = g(a) \tag{8}$$

по условию непрерывности g в точке $t = a$. Если бы $\delta_a(t)$ *была* функцией в строгом смысле определения и если бы мы могли изменить порядок перехода к пределу и интеграл в уравнении (8), мы могли бы заключить, что

$$\int_0^\infty g(t)\delta_a(t)\,dt = g(a). \tag{9}$$

Мы принимаем равенство (9) в качестве *определения* (!) символа $\delta_a(t)$. Хотя мы называем его дельта-функцией, это не подлинная функция; вместо этого это лишь определение *операции*

$$\int_0^\infty \cdots \delta_a(t)\,dt,$$

которая — когда применяется к непрерывной функции $g(t)$ — просто просеивает (или выбирает) значение $g(a)$ этой функции в точке $a \geqq 0$. Эта идея показана схематично на рис. 7.6.2. Обратите внимание, что символ $\delta_a(t)$ используется только в интегралах того типа, который указан в равенстве (9), или когда этот символ появится впоследствии в интеграле такого типа.

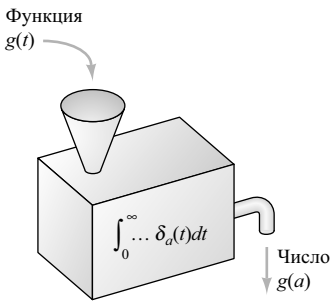


Рис. 7.6.2. Эта диаграмма, иллюстрирует, как дельта-функция "просеивает" значение $g(a)$

Например, если в равенстве (9) взять $g(t) = e^{-st}$, то в результате получим

$$\int_0^\infty e^{-st}\delta_a(t)\,dt = e^{-as}. \tag{10}$$

Мы поэтому *определяем* преобразование Лапласа (изображение по Лапласу) дельта-функции равенством

$$\mathrm{L}\{\delta_a(t)\} = e^{-as} \quad (a \geqq 0). \tag{11}$$

Если мы пишем

$$\delta(t) = \delta_0(t) \quad \text{и} \quad \delta(t-a) = \delta_a(t), \tag{12}$$

то равенство (11) при $a = 0$ дает

$$\mathrm{L}\{\delta(t)\} = 1. \tag{13}$$

Заметьте, что если бы $\delta(t)$ была настоящей функцией, то равенство (13) противоречило бы следствию теоремы 2 из раздела 7.1. Здесь нет никакого противоречия; $\delta(t)$ — это не функция, а равенство (13) — всего лишь наше *определение* выражения $\mathrm{L}\{\delta(t)\}$.

Дельта-функции на входе

Теперь, наконец, предположим, что у нас есть механическая система, ответ которой $x(t)$ на внешнюю силу $f(t)$ определен дифференциальным уравнением

$$Ax'' + Bx' + Cx = f(t). \tag{14}$$

Чтобы исследовать ответ этой системы на едичный импульс (дельта-импульс, дельта-функцию Дирака) в момент $t = a$, кажется разумным заменить $f(t)$ на $\delta_a(t)$ и начать с уравнения

$$Ax'' + Bx' + Cx = \delta_a(t). \tag{15}$$

Но что подразумевать под решением такого уравнения? Мы будем называть $x(t)$ решением уравнения (15), если

$$x(t) = \lim_{\epsilon \to 0} x_\epsilon(t), \tag{16}$$

где $x_\epsilon(t)$ — решение уравнения

$$Ax'' + Bx' + Cx = d_{a,\epsilon}(t). \tag{17}$$

Поскольку

$$d_{a,\epsilon}(t) = \frac{1}{\epsilon}\left[u_a(t) - u_{a+\epsilon}(t)\right] \tag{18}$$

представляет собой обычную функцию, уравнение (17) имеет смысл. Для простоты предположим, что начальные условия имеют вид $x(0) = x'(0) = 0$. Когда мы преобразуем уравнение (17), обозначая $X_\epsilon = \mathrm{L}\{x_\epsilon\}$, мы получим уравнение

$$(As^2 + Bs + C)X_\epsilon(s) = \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{e^{-as}}{s} - \frac{e^{-(a+\epsilon)s}}{s}\right) = \left(e^{-as}\right)\frac{1 - e^{-s\epsilon}}{s\epsilon}.$$

Если мы возьмем предел в последнем уравнении при $\epsilon \to 0$ и заметим, что

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1 - e^{-s\epsilon}}{s\epsilon} = 1$$

по правилу Лопиталя, мы получим уравнение

$$(As^2 + Bs + C)X(s) = e^{-as}, \tag{19}$$

если

$$X(s) = \lim_{\epsilon \to 0} X_\epsilon(x).$$

Обратите внимание, что это точно тот же самый результат, который мы получили бы, если бы преобразовали само уравнение (15), учитывая, что $\mathrm{L}\{\delta_a(t)\} = e^{-as}$.

На этом основании разумно решать дифференциальное уравнение, содержащее дельта-функцию, используя метод преобразования Лапласа точно так, как будто $\delta_a(t)$ является обыкновенной функцией. Важно проверить, что решение, полученное таким образом, совпадает с тем, которое определено в равенстве (16), но чтобы установить условия, при которых это верно, потребуется очень глубокий анализ техники применения используемых предельных переходов; мы считаем это выходящим за рамки настоящего обсуждения. Формальный метод имеет силу во всех примерах этого раздела и дает правильные результаты во всех последующих прикладных задачах.

Пример 1 Материальная точка заданной массы $m = 1$ закреплена на пружине с константой $k = 4$; демпфирования нет. Материальная точка заданной массы отпущена из состояния покоя при $x(0) = 3$. В момент $t = 2\pi$ по материальной точке заданной массы ударяет молоток, при этом импульс $p = 8$. Определим движение материальной точки заданной массы.

Решение Мы должны решить задачу Коши (задачу с начальными условиями)

$$x'' + 4x = 8\delta_{2\pi}(t); \quad x(0) = 3, \quad x'(0) = 0.$$

Мы применяем преобразование Лапласа (изображение по Лапласу) и получаем

$$s^2X(s) - 3s + 4X(s) = 8e^{-2\pi s},$$

так что

$$X(s) = \frac{3s}{s^2+4} + \frac{8e^{-2\pi s}}{s^2+4}.$$

Вспоминая преобразования синуса и косинуса, а также теорему о сдвигах по оси t (теорема 1 из раздела 7.5), мы видим, что оригинал функции имеет вид

$$\begin{aligned} x(t) &= 3\cos 2t + 4u(t-2\pi)\sin 2(t-2\pi) = \\ &= 3\cos 2t + 4u_{2\pi}(t)\sin 2t. \end{aligned}$$

Поскольку $3\cos 2t + 4\sin 2t = 5\cos(2t-\alpha)$ при $\alpha = \operatorname{arctg}(4/3) \approx 0{,}9273$, отдельное рассмотрение случаев $t < 2\pi$ и $t \geqq 2\pi$ дает

$$x(t) \approx \begin{cases} 3\cos 2t, & \text{если } t \leqq 2\pi, \\ 5\cos(2t - 0{,}9273), & \text{если } t \geqq 2\pi. \end{cases}$$

Полученное движение показано на рис. 7.6.3. Обратите внимание, что измение импульса при $t = 2\pi$ приводит к заметному разрыву в значении скорости при $t = 2\pi$, поскольку она скачкообразно (мгновенно) увеличивает амплитуду колебаний материальной точки заданной массы от 3 до 5. ■

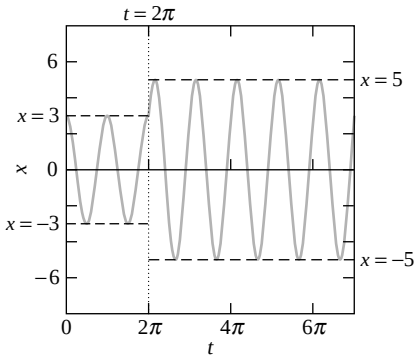


Рис. 7.6.3. Движение материальной точки заданной массы в примере 1

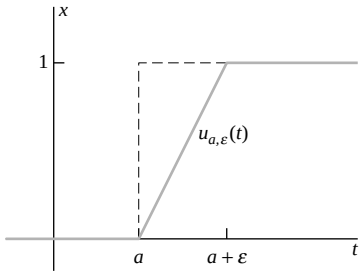


Рис. 7.6.4. Аппроксимация $u_a(t)$ с помощью $u_{a,\epsilon}(t)$

Дельта-функции и ступенчатые функции

И в самом деле полезно рассматривать дельта-функцию $\delta_a(t)$ как производную единичной ступенчатой функции (функции Хевисайда) $u_a(t)$. Чтобы увидеть, почему это действительно разумно, рассмотрим непрерывную аппроксимацию $u_{a,\epsilon}(t)$ к $u_a(t)$, показанную на рис. 7.6.4. Легко проверить, что

$$\frac{d}{dt}u_{a,\epsilon}(t) = d_{a,\epsilon}(t).$$

Поскольку

$$u_a(t) = \lim_{\epsilon\to 0} u_{a,\epsilon}(t) \quad \text{и} \quad \delta_a(t) = \lim_{\epsilon\to 0} d_{a,\epsilon}(t),$$

изменение порядка предельного перехода и взятия производной приводит к

$$\frac{d}{dt}u_a(t) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{d}{dt}u_{a,\epsilon}(t) = \lim_{\epsilon\to 0} d_{a,\epsilon}(t),$$

и поэтому

$$\frac{d}{dt}u_a(t) = \delta_a(t) = \delta(t-a). \tag{20}$$

Мы можем рассматривать это как *формальное определение* производной единичной ступенчатой функции (функции Хевисайда), хотя $u_a(t)$ не дифференцируема в обычном смысле в точке $t = a$.

Пример 2 Мы снова рассмотрим цепь RLC, состоящую из сопротивления, индуктивности и емкости. (Мы ее уже рассматривали в примере 5 из раздела 7.5.) Вот ее параметры: $R = 110\,\Omega$, $L = 1$ генри, $C = 0{,}001$ фарады; причем она подсоединена к батарее, у которой $e_0 = 90$ В. Предположим, что цепь первоначально пассивна — никакие токи в ней не текут, а заряд отсутствует. В момент времени $t = 0$ выключатель замыкают, а в момент времени $t = 1$ его размыкают и оставляют разомкнутым. Найдем полученный ток $i(t)$ в цепи.

Решение В разделе 7.5 мы обошли разрыв в напряжении, используя интегродифференциальную форму уравнения цепи. Теперь, когда доступны дельта-функции, мы можем начать с обыкновенного уравнения цепи

$$Li'' + Ri' + \frac{1}{C}i = e'(t).$$

В этом примере мы имеем

$$e(t) = 90 - 90u(t-1) = 90 - 90u_1(t),$$

так что $e'(t) = -90\delta(t-1)$ в соответствии с равенством (20). Следовательно, мы хотим решить задачу Коши (задачу с начальными условиями)

$$i'' + 110i' + 1000i = -90\delta(t-1); \quad i(0) = 0, \quad i'(0) = 90. \tag{21}$$

То, что $i'(0) = 90$, следует из подстановки $t = 0$ в уравнение

$$Li'(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}q(t) = e(t)$$

с числовыми значениями $i(0) = q(0) = 0$ и $e(0) = 90$.

Преобразовав задачу (21), получим уравнение

$$s^2I(s) - 90 + 110sI(s) + 1000I(s) = -90e^{-s}.$$

Следовательно,

$$I(s) = \frac{90(1 - e^{-s})}{s^2 + 110s + 1000}.$$

Это точно то же самое преобразование (образ) $I(s)$, которое мы нашли в примере 5 из раздела 7.5, так что обратное преобразование $I(s)$ даст то же самое решение $i(t)$, которое было получено прежде. ■

Пример 3 Рассмотрим материальную точку заданной массы на пружине, причем пусть $m = k = 1$ и $x(0) = x'(0) = 0$. В каждый из моментов $t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots, n\pi, \ldots$ по материальной точке заданной массы ударяют молотком, при этом импульс можно считать единичным (дельта-импульсом). Определим полученное движение.

Решение Мы должны решить задачу Коши (задачу с начальными условиями)

$$x'' + x = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n\pi}(t); \quad x(0) = 0 = x'(0).$$

Поскольку $\mathrm{L}\{\delta_{n\pi}(t)\} = e^{-n\pi s}$, преобразованное уравнение имеет вид

$$s^2X(s) + X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\pi s},$$

так что

$$X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n\pi s}}{s^2+1}.$$

Мы вычисляем обратное преобразования Лапласа (изображения по Лапласу) почленно; в результате получаем

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u(t-n\pi)\sin(t-n\pi).$$

Поскольку $\sin(t-n\pi) = (-1)^n \sin t$ и $u(t-n\pi) = 0$ для $t < n\pi$, мы видим, что если $n\pi < t < (n+1)\pi$, то

$$x(t) = \sin t - \sin t + \sin t - \cdots + (-1)^n \sin t;$$

иными словами,

$$x(t) = \begin{cases} \sin t, & \text{если } n \text{ четное,} \\ 0, & \text{если } n \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Следовательно, $x(t)$ — однополупериодное выпрямление $\sin t$, показанное на рис. 7.6.5. Физическое объяснение состоит в том, что после первого удара молотком (в момент времени $t = 0$) материальная точка заданной массы начинает двигаться вправо, а как только она возвращается в начало координат, второй удар молотком останавливает ее и она остается неподвижной, пока после третьего удара молотком она не начинает двигаться снова и т. д. Конечно, если удары молотком не абсолютно синхронизированы, то движение материальной точки заданной массы будет совершенно другим. ■

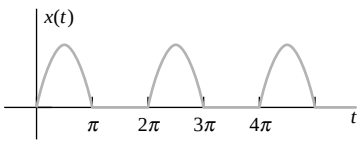


Рис. 7.6.5. Однополупериодное выпрямление $\sin t$

Системный анализ и принцип Дюамеля

Рассмотрим физическую систему, в которой *выходной сигнал*, или *ответ*, $x(t)$ на *входную* функцию $f(t)$ описывается дифференциальным уравнением

$$ax'' + bx' + cx = f(t), \tag{22}$$

где постоянные коэффициенты a, b и c определены физическими параметрами системы и не зависят от $f(t)$. Система, состоящая из материальной точки заданной массы, закрепленной на пружине, с поршнем и последовательная цепь RLC, состоящая из сопротивления, индуктивности и емкости, — знакомые нам примеры таких часто встречающихся систем.

Для простоты мы предположим, что система первоначально пассивна: $x(0) = x'(0) = 0$. Тогда преобразование уравнения (22) будет иметь вид

$$as^2X(s) + bsX(s) + cX(s) = F(s),$$

так что

$$X(s) = \frac{F(s)}{as^2 + bs + c} = W(s)F(s). \tag{23}$$

Функцию

$$W(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c} \tag{24}$$

называют **передаточной функцией** системы. Таким образом, преобразование ответа на вход $f(t)$ представляет собой произведение $W(s)$ и преобразования $F(s)$.

Функция

$$w(t) = \mathrm{L}^{-1}\{W(s)\} \tag{25}$$

называется **весовой функцией (функцией потерь)** системы. Из уравнения (24) с помощью свертки мы находим, что

$$x(t) = \int_0^t w(\tau)f(t-\tau)\,d\tau. \tag{26}$$

Эта формула выражает **принцип Дюамеля** для данной системы. Важно то, что весовая функция (функция потерь) $w(t)$ определена полностью параметрами системы. Если $w(t)$ определена, интеграл (26) дает ответ системы на произвольную входную функцию $f(t)$.

Пример 4 Рассмотрим систему, состоящую из материальной точки заданной массы, закрепленной на пружине, с поршнем. (Первоначально система пассивна.) Пусть ответ системы на внешнюю силу $f(t)$ определяется уравнением $x'' + 6x' + 10x = f(t)$. Тогда

$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 6s + 10} = \frac{1}{(s+3)^2 + 1},$$

так что весовая функция (функция потерь) имеет вид $w(t) = e^{-3t}\sin t$. Тогда из принципа Дюамеля следует, что ответ $x(t)$ на силу $f(t)$ имеет вид

$$x(t) = \int_0^t e^{-3\tau}(\sin\tau)f(t-\tau)\,d\tau. \qquad \blacksquare$$

Обратите внимание, что

$$W(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c} = \frac{\mathrm{L}\{\delta(t)\}}{as^2 + bs + c}.$$

Следовательно, из уравнения (23) следует, что весовая функция представляет собой просто ответ системы на входную дельта-функцию $\delta(t)$. По этой причине $w(t)$ иногда называется

ответом на единичный сигнал, ответом на единичный импульс, ответом на дельта-импульс, или ответом на дельта-функцию (Дирака). Однако практически обычно проще измерить ответ $h(t)$ на единичную ступенчатую функцию (функцию Хевисайда) $u(t)$; $h(t)$ — реакция на единичный скачок, т. е. на **единичную ступенчатую функцию** или на единичный перепад (единичную ступеньку). Поскольку $\mathrm{L}\{u(t)\} = 1/s$, из уравнения (23) мы видим, что преобразование $h(t)$ имеет вид

$$H(s) = \frac{W(s)}{s}.$$

Из формулы для преобразований интегралов следует, что

$$h(t) = \int_0^t w(\tau)\, d\tau, \quad \text{так что} \quad w(t) = h'(t). \tag{27}$$

Таким образом, весовая функция, или ответ на единичный сигнал (ответ на единичный импульс, ответ на дельта-импульс, или ответ на дельта-функцию (Дирака)), является производной реакции на единичный скачок, т. е. на единичную ступенчатую функцию или на единичный перепад (единичную ступеньку). Подставляя (27) в формулу, выражающую принцип Дюамеля, получаем

$$x(t) = \int_0^t h'(t) f(t-\tau)\, d\tau \tag{28}$$

в качестве ответа системы на вход $f(t)$.

Приложения. Чтобы описать типичное применение равенства (28), предположим, что мы имеем сложную последовательную цепь, содержащую много катушек индуктивности, резисторов и конденсаторов. Предположим, что уравнение этой цепи представляет собой линейное уравнение вида (22), но вместо x неизвестная обозначена через i. Что случится, если коэффициенты a, b и c неизвестны, например из-за того, что их слишком трудно вычислить? Мы все равно хотели бы знать ток $i(t)$, соответствующий произвольно заданному входному сигналу $f(t) = e'(t)$. Мы подключаем цепь к источнику линейно возрастающего напряжения $e(t) = t$, так что $f(t) = e'(t) = 1 = u(t)$, и измеряем ответ $h(t)$ амперметром. Мы затем вычисляем производную $h'(t)$, численными методами или графически. Тогда согласно уравнению (28), выходной ток $i(t)$, соответствующий входному напряжению $e(t)$, будет давать формула

$$i(t) = \int_0^t h'(\tau) e'(t-\tau)\, d\tau$$

(используем то, что $f(t) = e'(t)$).

Историческое замечание. В заключение мы отметим, что около 1950 года, уже после того, как инженеры и физики широко и плодотворно использовали дельта-функции в течение приблизительно 20 лет без строгого обоснования, французский математик Лоран Шварц (Laurent Schwartz) создал строгую математическую теорию *обобщенных функций*, которая восполнила логический недостаток и стала основой для применения методов, основанных на использовании дельта-функции. Каждая кусочно непрерывная обыкновенная функция является обобщенной функцией, но дельта-функция — пример обобщенной функции, которая не является обыкновенной функцией.

7.6. Задачи

В задачах 1–8 решите данные задачи Коши (задачи с начальными условиями) и начертите график каждой функции-решения $x(t)$.

1. $x'' + 4x = \delta(t)$; $x(0) = x'(0) = 0$

2. $x'' + 4x = \delta(t) + \delta(t - \pi)$; $x(0) = x'(0) = 0$

3. $x'' + 4x' + 4x = 1 + \delta(t - 2)$; $x(0) = x'(0) = 0$

4. $x'' + 2x' + x = t + \delta(t)$; $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$

5. $x'' + 2x' + 2x = 2\delta(t - \pi)$; $x(0) = x'(0) = 0$

6. $x'' + 9x = \delta(t - 3\pi) + \cos 3t$; $x(0) = x'(0) = 0$

7. $x'' + 4x' + 5x = \delta(t - \pi) + \delta(t - 2\pi)$; $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$

8. $x'' + 2x' + x = \delta(t) - \delta(t - 2)$; $x(0) = x'(0) = 2$

В задачах 9–12 примените принцип Дюамеля и напишите интегральную формулу для решения каждой данной задачи Коши (задачи с начальными условиями).

9. $x'' + 4x = f(t)$; $x(0) = x'(0) = 0$

10. $x'' + 6x' + 9x = f(t)$; $x(0) = x'(0) = 0$

11. $x'' + 6x' + 8x = f(t)$; $x(0) = x'(0) = 0$

12. $x'' + 4x' + 8x = f(t)$; $x(0) = x'(0) = 0$

13. В этой задаче рассматривается материальная точка массы m, первоначально находящаяся в покое в начале координат. В момент времени $t = 0$ она получает импульс p. **(a)** Найдите решение $x_\epsilon(t)$ задачи

$$mx'' = pd_{0,\epsilon}(t); \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

(b) Покажите, что $\lim\limits_{\epsilon \to 0} x_\epsilon(t)$ является решением задачи

$$mx'' = p\delta(t); \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

(c) Покажите, что $mv = p$ для $t > 0$ ($v = dx/dt$).

14. Решая задачу

$$x' = \delta(t - a); \quad x(0) = 0,$$

найдите ее решение $x(t) = u(t - a)$ и проверьте, что $u'(t - a) = \delta(t - a)$.

15. В этой задаче рассматривается материальная точка массы m на пружине (с константой k), которая получает импульс $p_0 = mv_0$ в момент времени $t = 0$. Покажите, что решения задач Коши (задач с начальными условиями)

$$mx'' + kx = 0; \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = v_0$$

и

$$mx'' + kx = p_0\delta(t); \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

совпадают. Таким образом, влияние $p_0\delta(t)$ действительно состоит в том, чтобы передать частице начальный импульс p_0.

16. Эта задача является обобщением задачи 15. Покажите, что решения задач

$$ax'' + bx' + cx = f(t); \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = v_0$$

и

$$ax'' + bx' + cx = f(t) + av_0\delta(t); \quad x(0) = x'(0) = 0$$

совпадают для $t > 0$. Таким образом, слагаемое $av_0\delta(t)$ выражает начальное условие $x'(0) = v_0$.

17. Рассмотрим первоначально пассивную цепь RC, состоящую из емкости и резистора (но без катушек индуктивности), которая подключена к батарее с напряжением e_0 вольт. **(a)** Выключатель батареи замыкают в момент времени $t = a$ и размыкают в момент времени $t = b > a$ (и оставляют разомкнутым после этого). Покажите, что ток в цепи является решением задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$Ri' + \frac{1}{C}i = e_0\delta(t-a) - e_0\delta(t-b); \quad i(0) = 0.$$

(b) Решите эту задачу, если $R = 100\ \Omega$, $C = 10^{-4}$ фарады, $e_0 = 100$ В, $a = 1$ (секунд), и $b = 2$ (секунд). Покажите, что $i(t) > 0$, если $1 < t < 2$ и что $i(t) < 0$, если $t > 2$.

18. Рассмотрим первоначально пассивную цепь LC, состоящую из емкости и индуктивности (но без резисторов), которая подключена к батарее с напряжением e_0 вольт. **(a)** Выключатель батареи замыкают в момент времени $t = 0$ и размыкают в момент времени $t = a > 0$. Покажите, что ток в цепи является решением задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$Li'' + \frac{1}{C}i = e_0\delta(t) - e_0\delta(t-a);$$

$$i(0) = i'(0) = 0.$$

(b) Пусть $L = 1$ генри, $C = 10^{-2}$ фарады, $e_0 = 10$ В и $a = \pi$ (секунд). Покажите, что

$$i(t) = \begin{cases} \sin 10t, & \text{если } t < \pi, \\ 0, & \text{если } t > \pi. \end{cases}$$

Таким образом, ток совершает пять циклов колебаний и затем резко останавливается, когда выключатель размыкают (рис. 7.6.6).

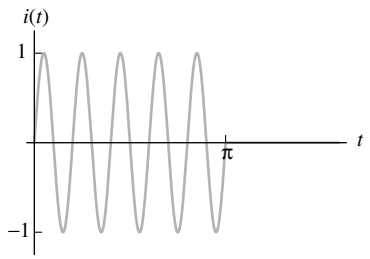


Рис. 7.6.6. Функция, дающая ток в задаче 18

19. Рассмотрим цепь цепь LC, состоящую из емкости и индуктивности из задачи 18 (b), но пусть теперь выключатель поочередно замыкают и размыкают в моменты времени $t = 0, \pi/10, 2\pi/10, \ldots$. **(a)** Покажите, что $i(t)$ является решением задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$i'' + 100i = 10\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\delta\Big(t - \frac{n\pi}{10}\Big); \quad i(0) = i'(0) = 0.$$

(b) Решите эту задачу Коши (задачу с начальными условиями) и покажите, что

$$i(t) = (n+1)\sin 10t, \quad \text{если} \quad \frac{n\pi}{10} < t < \frac{(n+1)\pi}{10}.$$

Таким образом, в этом случае наблюдается явление резонанса (рис. 7.6.7).

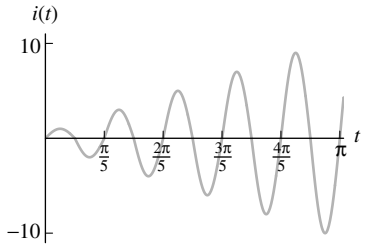


Рис. 7.6.7. Функция, дающая ток в задаче 19

20. Снова решите задачу 19, но пусть теперь выключатель поочередно замыкают и размыкают в моменты времени $t = 0,\ \pi/5,\ 2\pi/5,\ \ldots,\ n\pi/5,\ \ldots$. Покажите, что теперь, если

$$\frac{n\pi}{5} < t < \frac{(n+1)\pi}{5},$$

то

$$i(t) = \begin{cases} \sin 10t, & \text{если } n \text{ четное;} \\ 0, & \text{если } n \text{ нечетное.} \end{cases}$$

Таким образом, ток в чередующихся циклах длины $\pi/5$ сначала колеблется по синусоиде в течение одного цикла, затем отсутствует в течение следующего цикла и т. д. (рис. 7.6.8).

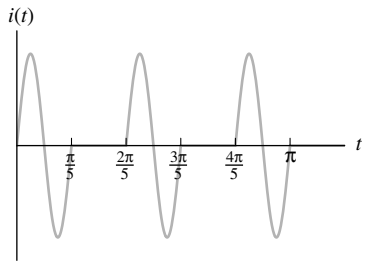


Рис. 7.6.8. Функция, дающая ток в задаче 20

21. Рассмотрим последовательную цепь RLC, состоящую из сопротивления, индуктивности и емкости. Ее параметры: $L = 1$ генри, $R = 60\ \Omega$, $C = 10^{-3}$ фарады. Эта цепь подключена к батарее, причем $e_0 = 10$ В. **(a)** Предположим, что выключатель поочередно замыкают и размыкают в моменты времени $t = 0,\ \pi/10,\ 2\pi/10,\ \ldots$. Покажите, что $i(t)$ является решением задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$i'' + 60i' + 1000i = 10\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \delta\Big(t - \frac{n\pi}{10}\Big);$$

$$i(0) = i'(0) = 0.$$

(b) Решите эту задачу и покажите, что если

$$\frac{n\pi}{10} < t < \frac{(n+1)\pi}{10},$$

то

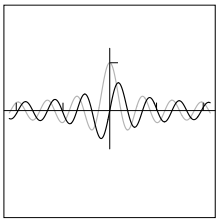
$$i(t) = \frac{e^{3n\pi+3\pi} - 1}{e^{3\pi} - 1} e^{-30t} \sin 10t.$$

Начертите график этой функции, дающей ток.

22. Рассмотрим систему, состоящую из материальной точки массы $m = 1$, закрепленной на пружине с константой $k = 1$, первоначально находящуюся в состоянии покоя. В каждый из моментов $t = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$ по материальной точке ударяют молотком. Предположим, что каждый удар молотком передает импульс $+1$. Покажите, что функция, позволяющая вычислить положение $x(t)$ материальной точки заданной массы, является решением задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$x'' + x = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - 2n\pi); \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

Решите эту задачу и покажите, что если $2n\pi < t < 2(n+1)\pi$, то $x(t) = (n+1)\sin t$. Таким образом, резонанс происходит, потому что по материальной точке заданной массы ударяют молотком каждый раз, когда она проходит через начало координат, двигаясь вправо — в отличие от примера 3, в котором материальную точку заданной массы ударяли молотком каждый раз, когда она возвращалась в начало координат. Наконец, начертите график этой функции, позволяющей определить положение.



ГЛАВА 8

Методы степенных рядов

8.1. Введение и обзор теории степенных рядов

В разделе 3.3 мы видели, что решение однородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами можно свести к алгебраической задаче вычисления корней его характеристического уравнения. Однако для того чтобы решить линейные дифференциальные уравнения с *переменными* коэффициентами, никакой подобной процедуры нет, по крайней мере нет достаточно простой процедуры, позволяющей найти решение за конечное число шагов. За исключением уравнений специальных типов и специально подобранных уравнений, которые можно решить подбором, линейные уравнения с переменными коэффициентами, вообще говоря, требуют применения методов степенных рядов, рассматриваемых в этой главе.

Эти методы вполне удовлетворительно подходят для решения многих неэлементарных дифференциальных уравнений, которые чаще всего появляются в приложениях. Возможно, наиболее важное из таких уравнений (из-за его приложений в таких областях, как акустика, распространение тепла и электромагнитные излучения) — **уравнение Бесселя** порядка n:

➤ $$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0.$$

Уравнение Лежандра порядка n также важно во многих приложениях. Оно имеет вид

➤ $$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0.$$

В этом разделе мы познакомимся с **методом степенных рядов** в его самой простой форме и, по пути, установим (без доказательства) несколько теорем, которые составляют обзор основных фактов о степенных рядах. Сначала напомним, что **степенной ряд** по [степеням] $x - a$ — это бесконечный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + \cdots + c_n(x - a)^n + \cdots . \qquad (1)$$

Если $a = 0$, это — степенной ряд по степеням x:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots . \tag{2}$$

Мы ограничим наш обзор главным образом степенными рядами по степеням x, но каждое общее свойство степенного ряда по степеням x может быть переформулировано как общее свойство степенных рядов по степеням $x - a$ заменой x на $x - a$.

Степенной ряд (2) **сходится** на интервале I при условии, что предел

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} c_n x^n \tag{3}$$

существует для всех x на интервале I. В этом случае сумма

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{4}$$

определена на интервале I, и мы называем ряд $\sum c_n x^n$ **представлением** функции f на интервале I **в виде степенного ряда**. Следующие представления элементарных функций в виде степенного ряда должны быть знакомы вам из вводного курса анализа:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots ; \tag{5}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots ; \tag{6}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots ; \tag{7}$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots ; \tag{8}$$

$$\sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots ; \tag{9}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots ; \tag{10}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots ; \tag{11}$$

и

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3}{3!} + \cdots . \tag{12}$$

В компактном обозначении со знаком суммы мы соблюдаем обычные соглашения о том, что $0! = 1$ и что $x^0 = 1$ для всех x, включая $x = 0$. Ряды (5)–(9) сходятся к указанным функциям для всех x. Напротив, ряды (10) и (11) сходятся лишь при $|x| < 1$, но расходятся при $|x| > 1$. (Что, если $|x| = 1$?) Ряд (11) — бесконечная **геометрическая прогрессия.** Ряд (12), где α — произвольное вещественное число, является **биномиальным рядом**. Если α является неотрицательным целым числом, то биномиальный ряд сходится для всех x. В противном случае он сходится, если $|x| < 1$, и расходится, если $|x| > 1$; его поведение для $|x| = 1$ зависит от значения α.

Замечание. Степенной ряд типа перечисленных в разложениях (5)–(12) часто получается как **ряд Тейлора**. Ряд Тейлора с **центром** $x = a$ функции f — это степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \tag{13}$$

по степеням $x - a$, в предположении, что f является бесконечно дифференцируемой в точке $x = a$ (так что все коэффициенты в уравнении (13) определены). Если $a = 0$, то ряд (13) — это **ряд Маклорена**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots . \tag{13'}$$

Например, предположим, что $f(x) = e^x$. Тогда $f^{(n)}(x) = e^x$, и, следовательно, $f^{(n)}(0) = 1$ для всех $n \geqq 0$. В этом случае равенство (13′) приводит к **экспоненциальному ряду** (5). ■

Операции над степенными рядами

Если ряд Тейлора функции f сходится к функции $f(x)$ для всех x в некотором открытом интервале, содержащем a, то мы говорим, что функция f является **аналитической** в точке $x = a$. Например, каждый многочлен является аналитическим всюду и каждая рациональная функция является аналитической везде, где ее знаменатель отличен от нуля. Верно даже более общее утверждение: если две функции f и g являются аналитическими в точке $x = a$, то аналитическими в точке $x = a$ являются и их сумма $f + g$, их произведение $f \cdot g$, а также их частное f/g, если $g(a) \neq 0$.

Например, функция $h(x) = \operatorname{tg} x = (\sin x)/(\cos x)$ является аналитической в точке $x = 0$, потому что $\cos 0 = 1 \neq 0$, а функции синус и косинус являются аналитическими (поскольку они имеют представления в виде сходящихся степенных рядов, данных в равенствах (6) и (7)). Довольно неуклюже выглядело бы вычисление ряда Тейлора для функции тангенс с помощью ряда (13) из-за возрастания сложности вычисления последовательных производных этой функции (попробуйте вычислить их!). К счастью, над степенными рядами можно выполнять алгебраические операции почти таким же способом, как над многочленами. Например, если

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{и} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \tag{14}$$

то

$$f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)x^n \tag{15}$$

и

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n =$$

$$= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \cdots , \tag{16}$$

где $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0$. Ряд (15) — результат **почленного сложения**, а ряд (16) — результат **формального умножения** — умножения каждого члена первого ряда на каждый член второго с последующим выполнением операции приведения подобных степеней x, при которой суммируются коэффициенты подобных членов. (Таким образом, эти действия сильно напоминают сложение и умножение обыкновенных многочленов.) Ряды (15) и (16) сходятся к $f(x) + g(x)$ и $f(x)g(x)$ соответственно, притом на любом открытом интервале, на котором сходятся оба ряда (14). Например,

$$\sin x \cos x = \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \cdots\right)\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \cdots\right) =$$

$$= x + \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right)x^3 + \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{12} + \frac{1}{120}\right)x^5 + \cdots =$$

$$= x - \frac{4}{6}x^3 + \frac{16}{120}x^5 - \cdots =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(2x) - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \cdots\right] = \frac{1}{2}\sin 2x$$

для всех x.

Точно так же частное двух степенных рядов может быть вычислено делением в столбик, как проиллюстрировано вычислением, показанным на рис. 8.1.1. Это деление ряда Тейлора для $\cos x$ на ряд для $\sin x$ приводит к первым немногим членам ряда

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots . \tag{17}$$

Деление степенных рядов более обманчиво, чем умножение; ряд, полученный таким методом для f/g, может не сходиться в некоторых точках, где сходятся оба ряда для f и g. Например, ряды для синуса и косинуса сходятся для всех x, но ряд для тангенса (17) сходится, только если $|x| < \pi/2$.

Метод степенных рядов

Метод степенных рядов поиска решений дифференциальных уравнений состоит в подстановке степенного ряда

➤
$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{18}$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2x^5}{15} + \dfrac{17x^7}{315} + \cdots \\
\cline{2-2}
1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} - \dfrac{x^6}{720} + \cdots & x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} - \dfrac{x^7}{5040} + \cdots \\
 & \underline{x - \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^5}{24} - \dfrac{x^7}{720} + \cdots} \\
 & \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{30} + \dfrac{x^7}{840} + \cdots \\
 & \underline{\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{6} + \dfrac{x^7}{72} - \cdots} \\
 & \dfrac{2x^5}{15} - \dfrac{4x^7}{315} + \cdots \\
 & \underline{\dfrac{2x^5}{15} - \dfrac{x^7}{15} + \cdots} \\
 & \dfrac{17x^7}{315} + \cdots \\
 & \vdots
\end{array}
$$

Рис. 8.1.1. Получение ряда для $\operatorname{tg} x$ делением рядов

в дифференциальное уравнение и последующей попытке определить значения коэффициентов $c_0, c_1, c_2, \ldots$ так, чтобы полученный степенной ряд удовлетворял дифференциальному уравнению. Это напоминает метод неопределенных коэффициентов, но теперь мы должны определить значения бесконечного множества коэффициентов. Этот метод не всегда приводит к успеху, но когда это так, мы получаем представление решения в виде бесконечного ряда, в отличие от решения в (конечном) аналитическом виде, к которому приводили наши предыдущие методы.

Прежде чем подставить степенной ряд (18) в дифференциальное уравнение, мы должны сначала знать, чем заменить производные y', y'', ... Следующая теорема (сформулированная без доказательства), говорит нам, что производная y' ряда $y = \sum c_n x^n$ получается простой процедурой: в качестве производной нужно записать сумму производных от членов ряда для y.

Теорема 1 Почленное дифференцирование степенного ряда

Если представление функции f в виде степенного ряда

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots \tag{19}$$

сходится на открытом интервале I, то f дифференцируема на интервале I, причем

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots \tag{20}$$

в каждой точке интервала I. ▲

Например, дифференцирование геометрического ряда (бесконечной геометрической прогрессии)

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \tag{11}$$

приводит к равенству

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots .$$

Суть процесса определения коэффициентов ряда $y = \sum c_n x^n$ состоит в том, чтобы полученный ряд удовлетворял данному дифференциальному уравнению. Однозначность определения коэффициентов гарантируется теоремой 2. Эта сформулированная (без доказательства) теорема гласит, что если два степенных ряда представляют ту же самую функцию, то они, по сути, представляют собой один и тот же самый ряд. В частности, ряд Тейлора (13) — единственный степенной ряд (по степеням $x - a$), который представляет функцию f.

Теорема 2 Принцип тождественности

Если

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

для каждой точки x в некотором открытом интервале I, то $a_n = b_n$ для всех $n \geqq 0$. ▲

В частности, если $\sum a_n x^n = 0$ для всех x в некотором открытом интервале, то из теоремы 2 следует, что $a_n = 0$ для всех $n \geqq 0$.

Пример 1 Решим уравнение $y' + 2y = 0$.

Решение Мы подставляем ряды

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{и} \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1};$$

в результате получаем равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0. \tag{21}$$

Чтобы приравнять здесь коэффициенты, нам нужно найти выражение общего члена в каждой сумме, т. е. выражение члена, содержащего x^n. Чтобы достичь этого, мы сдвигаем индекс суммирования в первой сумме. Чтобы увидеть, как это делается, обратите внимание, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n.$$

Таким образом, мы можем заменить n на $n+1$, если в то же самое время мы начнем отсчет на один индекс раньше; т. е. от $n = 0$, а не от $n = 1$. Это и есть сдвиг индекса суммирования на $+1$. Результат сдвига в равенстве (21) можно записать в виде тождества

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0;$$

иными словами,

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1) c_{n+1} + 2c_n] x^n = 0.$$

Если это равенство выполняется на некотором интервале, то из принципа тождественности следует, что $(n+1)c_{n+1} + 2c_n = 0$ для всех $n \geqq 0$; следовательно,

$$c_{n+1} = -\frac{2c_n}{n+1} \tag{22}$$

для всех $n \geqq 0$. Равенство (22) — **рекуррентная формула**, по которой мы можем последовательно вычислить $c_1, c_2, c_3, \ldots$, зная c_0; последний коэффициент оказался произвольной постоянной, которая, как и ожидалось, должна войти в общее решение дифференциального уравнения первого порядка.

При $n = 0$ из равенства (22) получаем

$$c_1 = -\frac{2c_0}{1}.$$

При $n = 1$ из равенства (22) получаем

$$c_2 = -\frac{2c_1}{2} = +\frac{2^2 c_0}{1 \cdot 2} = \frac{2^2 c_0}{2!}.$$

При $n = 2$ из равенства (22) получаем

$$c_3 = -\frac{2c_2}{3} = -\frac{2^3 c_0}{1 \cdot 2 \cdot 3} = -\frac{2^3 c_0}{3!}.$$

Теперь должно быть понятно, что после n таких шагов мы будем иметь

➤
$$c_n = (-1)^n \frac{2^n c_0}{n!}, \qquad n \geqq 1.$$

(Это просто доказать индукцией по n.) Следовательно, наше решение принимает вид

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n c_0}{n!} x^n = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2x)^n}{n!} = c_0 e^{-2x}.$$

В заключительном шаге мы использовали знакомый экспоненциальный ряд (равенство (5)), чтобы отождествить полученный нами степенной ряд с ранее найденным решением того же самого уравнения; как вы, возможно, помните, решение $y(x) = c_0 e^{-2x}$ мы получили методом разделения переменных. ■

Сдвиг индекса суммирования

В решении примера 1 мы написали

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n, \tag{23}$$

сдвигая индекс суммирования на $+1$ в ряде слева. Иными словами, мы одновременно *увеличили* индекс суммирования на 1 (заменяя n на $n+1$, $n \to n+1$) и *уменьшили* начало отсчета на 1, перейдя от $n = 1$ к $n = 0$, и таким образом получили ряд справа. Эта процедура допустима, потому что каждый бесконечный ряд (23) — просто компактная система обозначений для одного и того же ряда

$$c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \cdots. \tag{24}$$

Обобщая этот прием, мы можем сдвинуть индекс суммирования на k в бесконечном ряде, одновременно *увеличивая* индекс суммирования на k ($n \to n + k$) и *уменьшая* начальный индекс на k. Например, сдвиг на $+2$ ($n \to n + 2$) дает

$$\sum_{n=3}^{\infty} a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+2} x^{n+1}.$$

Если k отрицательно, мы интерпретируем "уменьшение на k" как увеличение на $-k = |k|$. Таким образом, сдвиг на -2 ($n \to n - 2$) в индексе суммирования дает

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = \sum_{n=3}^{\infty} (n-2) c_{n-2} x^{n-3};$$

мы *уменьшили* индекс суммирования на 2, но *увеличили* начальное значение индекса на 2, перейдя от $n = 1$ к $n = 3$. Вы должны проверить, что процесс суммирования справа является просто другим представлением ряда (24).

Мы знаем, что степенной ряд, полученный в примере 1, сходится для всех x, потому что это экспоненциальный ряд. В более общей ситуации решение в виде степенного ряда, как правило, не удается выразить через знакомые элементарные функции. Когда мы получаем незнакомое решение в виде степенного ряда, нам необходим способ найти множество, на котором он сходится. В конце концов, $y = \sum c_n x^n$ — просто *принятая* форма решения. Процедура, проиллюстрированная в примере 1 для нахождения коэффициентов $\{c_n\}$, — просто формальный процесс и потому может привести либо к успеху либо просто окажется формальным процессом, лишенным какого-либо смысла. Если эта процедура приводит к решению, то ее законность основывается на применении теоремы 1 для вычисления y' и применении теоремы 2, которая позволяет получить рекуррентную формулу для коэффициентов. Но действительно ли она дает осмысленное решение — это зависит от сходимости (а первоначально это как раз и *неизвестно*) ряда $y = \sum c_n x^n$. Следовательно, этот формальный процесс законен, только если в конце мы сможем показать, что полученный степенной ряд сходится на некотором открытом интервале. Если это действительно так, то тогда он представляет собой решение дифференциального уравнения на этом интервале. Следующая теорема (которую мы формулируем без доказательства) может использоваться для этой цели.

Теорема 3 Радиус сходимости

Пусть задан степенной ряд $\sum c_n x^n$ и предел

➤
$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \tag{25}$$

существует (ρ является конечным) или бесконечен (в этом случае мы пишем $\rho = \infty$). Тогда

(a) Если $\rho = 0$, то ряд расходится для всех $x \neq 0$.

(b) Если $0 < \rho < \infty$, то $\sum c_n x^n$ сходится, если $|x| < \rho$, и расходится, если $|x| > \rho$.

(c) Если $\rho = \infty$, то ряд сходится для всех x. ▲

Число ρ в (25) называется **радиусом сходимости** степенного ряда $\sum c_n x^n$. Например, для степенного ряда, полученного в примере 1, мы имеем

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n 2^n c_0/n!}{(-1)^{n+1} 2^{n+1} c_0/(n+1)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2} = \infty,$$

и, следовательно, полученный в примере 1 ряд сходится для всех x. Даже если предел (25) не существует, всегда найдется число ρ, такое что выполняется в точности одно из трех взаимно исключающих утверждений, указанных в теореме 3. Это число иногда трудно вычислить, но для степенных рядов, рассматриваемых в этой главе, равенства (25) будет вполне достаточно для вычисления радиуса сходимости.

Пример 2 Решим уравнение $(x - 3)y' + 2y = 0$.

Решение Как и прежде, мы подставляем

➤
$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{и} \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

и получаем

$$(x-3)\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0,$$

так что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n - 3\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

В первой сумме мы можем начать суммирование не с $n = 1$, а с $n = 0$; это не окажет никакого эффекта на сумму. Во второй сумме мы сдвигаем индекс суммирования на $+1$. Это приведет к равенству

$$\sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^n - 3\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0;$$

иными словами,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[n c_n - 3(n+1)c_{n+1} + 2c_n \right] x^n = 0.$$

Принцип тождественности тогда дает соотношение

$$n c_n - 3(n+1)c_{n+1} + 2c_n = 0,$$

и мы получаем рекуррентную формулу

➤
$$c_{n+1} = \frac{n+2}{3(n+1)} c_n \qquad \text{для} \quad n \geqq 0.$$

Мы по очереди применяем эту формулу при $n = 0$, $n = 1$ и $n = 2$ и находим, что

$$c_1 = \frac{2}{3} c_0, \quad c_2 = \frac{3}{3 \cdot 2} c_1 = \frac{3}{3^2} c_0 \quad \text{и} \quad c_3 = \frac{4}{3 \cdot 3} c_2 = \frac{4}{3^3} c_0.$$

Этого почти достаточно, чтобы угадать общую формулу и по индукции по n показать, что

➤
$$c_n = \frac{n+1}{3^n} c_0, \quad \text{если} \quad n \geqq 1.$$

Поэтому мы можем заключить, что представление решения в виде ряда имеет вид

$$y(x) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{3^n} x^n. \tag{26}$$

Его радиус сходимости

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{3n+3}{n+2} = 3.$$

Таким образом, ряд в (26) сходится, если $-3 < x < 3$, и расходится, если $|x| > 3$. В данном конкретном примере мы можем объяснить, почему это так. Элементарное решение (полученное разделением переменных) нашего дифференциального уравнения имеет вид $y = 1/(3-x)^2$. Если мы продифференцируем почленно бесконечную геометрическую прогрессию

$$\frac{1}{3-x} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{x}{3}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n},$$

мы получим ряд в (26), умноженный на некоторое постоянное число. Таким образом, этот ряд (с соответственно выбранной произвольной постоянной c_0) представляет решение

$$y(x) = \frac{1}{(3-x)^2}$$

на интервале $-3 < x < 3$, и особенность в точке $x = 3$ как раз и является причиной, по которой радиус сходимости решения в виде степенного ряда оказался равным $\rho = 3$. ■

Пример 3 Решим уравнение $x^2y' = y - x - 1$.

Решение Мы делаем обычные подстановки $y = \sum c_n x^n$ и $y' = \sum nc_n x^{n-1}$, которые приводят к равенству

$$x^2\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n-1} = -1 - x + \sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n,$$

так что

$$\sum_{n=1}^{\infty}nc_nx^{n+1} = -1 - x + \sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n.$$

Из-за присутствия в правой части двух слагаемых -1 и $-x$, мы должны разбить первые два члена $c_0 + c_1x$ ряда справа для того, чтобы иметь возможность почленного сравнения рядов. Если мы также сдвинем индекс суммирования слева на -1 (заменим $n = 1$ на $n = 2$ и n на $n-1$), мы получим

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)c_{n-1}x^n = -1 - x + c_0 + c_1x + \sum_{n=2}^{\infty}c_nx^n.$$

Поскольку левая часть не содержит ни постоянного члена, ни члена, содержащего x в первой степени, принцип тождественности теперь приводит

к соотношениям $c_0 = 1$, $c_1 = 1$ и $c_n = (n-1)c_{n-1}$ для $n \geqq 2$. Из этого следует, что

$$c_2 = 1 \cdot c_1 = 1!, \quad c_3 = 2 \cdot c_2 = 2!, \quad c_4 = 3 \cdot c_3 = 3!,$$

и, вообще, что

$$c_n = (n-1)! \quad \text{для} \quad n \geqq 2.$$

Таким образом, мы получаем степенной ряд

$$y(x) = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)!\, x^n.$$

Но радиус сходимости этого ряда

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

так что ряд сходится только для $x = 0$. Что это означает? Просто то, что данное дифференциальное уравнение не имеет решения в виде [сходящегося] степенного ряда в форме $y = \sum c_n x^n$. Этот пример служит предупреждением, что простая запись $y = \sum c_n x^n$ содержит предположение, которое может быть ложным. ■

Пример 4 Решим уравнение $y'' + y = 0$.

Решение Если мы ищем решение вида

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

мы найдем, что

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \qquad \text{и} \qquad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}.$$

Замена для y и y'' в дифференциальном уравнении тогда приведет к равенству

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

Мы сдвигаем индекс суммирования в первой сумме на $+2$ (замените $n = 2$ на $n = 0$ и n на $n + 2$). Это дает

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

Теперь из принципа тождественности следует тождество $(n+2)(n+1)c_{n+2}+c_n=0$; таким образом, мы получили рекуррентную формулу

$$c_{n+2}=-\frac{c_n}{(n+1)(n+2)} \tag{27}$$

для $n \geqq 0$. Очевидно, что эта формула определяет коэффициенты c_n с четными индексами через c_0 и коэффициенты с нечетными индексами через c_1; c_0 и c_1 не предопределены и, таким образом, будут теми двумя произвольными постоянными, которые, как мы ожидаем, должны входить в общее решение уравнения второго порядка.

Когда мы поочередно применим рекуррентную формулу (27) для $n=0$, 2 и 4, мы получим

$$c_2=-\frac{c_0}{2!}, \quad c_4=\frac{c_0}{4!} \quad \text{и} \quad c_6=-\frac{c_0}{6!}.$$

Взяв по очереди $n=1$, 3 и 5, мы найдем, что

$$c_3=-\frac{c_1}{3!}, \quad c_5=\frac{c_1}{5!} \quad \text{и} \quad c_7=-\frac{c_1}{7!}.$$

Снова нам ясен образец; и мы просим вас показать (индукцией), что для $k \geqq 1$

$$c_{2k}=\frac{(-1)^k c_0}{(2k)!} \quad \text{и} \quad c_{2k+1}=\frac{(-1)^k c_1}{(2k+1)!}.$$

Таким образом, мы получаем решение в виде степенного ряда

$$y(x)=c_0\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots\right)+c_1\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\right);$$

иными словами, $y(x)=c_0\cos x+c_1\sin x$. Обратите внимание, что здесь мы не имеем никакой проблемы с радиусом сходимости; ведь ряд Тейлора для функций синус и косинус сходится для всех x. ■

Решение примера 4 весьма поучительно и его стоит прокомментировать. Предположим, что мы никогда не слышали о функциях синус и косинус, уже не говоря об их ряде Тейлора. Мы тогда обнаружили бы два решения в виде степенных рядов

$$C(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots \tag{28}$$

и

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots \tag{29}$$

дифференциального уравнения $y'' + y = 0$. Ясно, что $C(0) = 1$ и что $S(0) = 0$. После проверки, что два ряда в (28) и (29) сходятся для всех x, мы можем продифференцировать их почленно и найти, что

$$C'(x) = -S(x) \quad \text{и} \quad S'(x) = C(x). \tag{30}$$

Следовательно, $C'(0) = 0$ и $S'(0) = 1$. Таким образом, с помощью метода степенных рядов (все еще ничего не зная о функциях синус и косинус) мы обнаружили, что $y = C(x)$ — единственное решение уравнения

$$y'' + y = 0,$$

которое удовлетворяет начальным условиям $y(0) = 1$ и $y'(0) = 0$ и что $y = S(x)$ является единственным решением, которое удовлетворяет начальным условиям $y(0) = 0$ и $y'(0) = 1$. Из этого следует, что $C(x)$ и $S(x)$ линейно независимы, и — в признание важности дифференциального уравнения $y'' + y = 0$ — мы можем условиться называть C функцией *косинус*, а S — функцией *синус*. Действительно, все обычные свойства этих двух функций могут быть установлены исходя только из их начальных значений (в точке $x = 0$) и производных в равенствах (30); нет никакой потребности обращаться к треугольникам или даже к углам. (Сможете ли вы, используя только ряды в равенствах (28) и (29), показать, что $[C(x)]^2 + [S(x)]^2 = 1$ для всех x?) Это демонстрирует, что функции косинус и синус полностью определены дифференциальным уравнением $y'' + y = 0$, для которого они являются естественными линейно независимыми решениями. На рис. 8.1.2 и 8.1.3 показан вид графиков $\cos x$ и $\sin x$ и показаны графики полиномиальных приближений ряда Тейлора, которые мы получаем, усекая бесконечный ряд в равенствах (28) и (29).

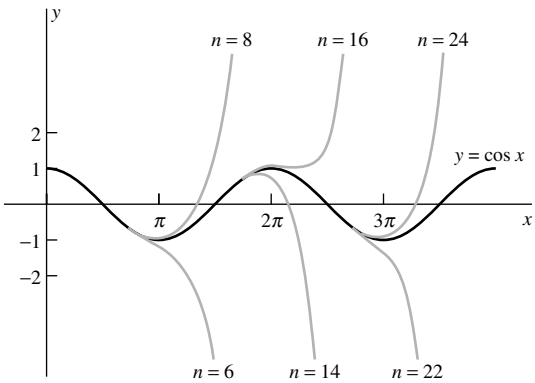


Рис. 8.1.2. Полиномиальные приближения ряда Тейлора для $\cos x$

Эта ситуация ни в коем случае не является какой-либо необыкновенной или исключительной. Многие важные специальные функции в математике появляются прежде всего как решения дифференциальных уравнений в виде степенного ряда и, таким образом, практически *определяются* посредством этого степенного ряда. В остальных разделах этой главы мы увидим многочисленные примеры таких функций.

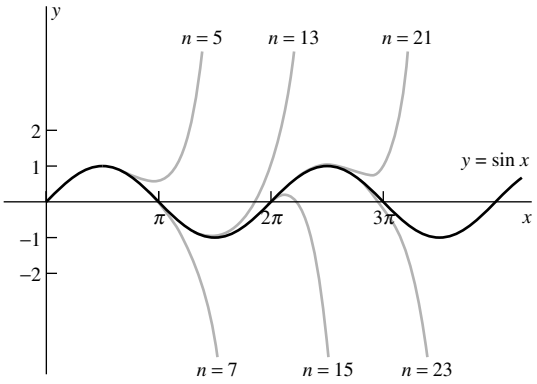


Рис. 8.1.3. Полиномиальные приближения ряда Тейлора для $\sin x$

8.1. Задачи

В задачах 1–10 найдите решение данного дифференциального уравнения в виде степенного ряда. Определите радиус сходимости полученного ряда и используйте ряды в равенствах (5)–(12), чтобы выразить решение, полученное в виде ряда, через знакомые элементарные функции. (Конечно, никто не может запретить вам проверить полученное вами решение с помощью методов решения уравнений из более ранних глав!)

1. $y' = y$
2. $y' = 4y$
3. $2y' + 3y = 0$
4. $y' + 2xy = 0$
5. $y' = x^2 y$
6. $(x - 2)y' + y = 0$
7. $(2x - 1)y' + 2y = 0$
8. $2(x + 1)y' = y$
9. $(x - 1)y' + 2y = 0$
10. $2(x - 1)y' = 3y$

В задачах 11–14 с помощью метода, использованного в примере 4, найдите два линейно независимых решения данного дифференциального уравнения в виде степенного ряда. Определите радиус сходимости каждого ряда и выразите общее решение, полученное в виде ряда, через знакомые элементарные функции.

11. $y'' = y$
12. $y'' = 4y$
13. $y'' + 9y = 0$
14. $y'' + y = x$

Покажите (как в примере 3), что метод степенных рядов не позволяет найти решение в виде степенного ряда вида $y = \sum c_n x^n$ для дифференциальных уравнений, данных в задачах 15–18.

15. $xy' + y = 0$
16. $2xy' = y$
17. $x^2 y' + y = 0$
18. $x^3 y' = 2y$

В задачах 19–22 сначала получите рекуррентную формулу, дающую выражения c_n для $n \geqq 2$ через c_0 или c_1 (или оба эти значения). Затем примените данные начальные условия, чтобы найти значения c_0 и c_1. Затем определите c_n (через n, как в тексте) и, наконец, выразите частное решение через знакомые элементарные функции.

19. $y'' + 4y = 0;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 3$
20. $y'' - 4y = 0;\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0$

21. $y'' - 2y' + y = 0;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ **22.** $y'' + y' - 2y = 0;\ y(0) = 1,\ y'(0) = -2$

23. Покажите, что уравнение

$$x^2y'' + x^2y' + y = 0$$

не имеет ни одного решения в виде степенного ряда вида $y = \sum c_n x^n$.

24. Установите справедливость разложения в биномиальный ряд в равенстве (12). Для этого выполните действия, указанные в следующих шагах. **(a)** Покажите, что $y = (1 + x)^\alpha$ является решением задачи Коши (задачи с начальными условиями) $(1 + x)y' = \alpha y$, $y(0) = 1$. **(b)** Покажите, что с помощью метода степенных рядов биномиальный ряд (12) получается в качестве решения задачи Коши (задачи с начальными условиями), указанной в части (a), и что этот ряд сходится, если $|x| < 1$. **(c)** Объясните, почему справедливость разложения в биномиальный ряд (12), следует из частей (a) и (b).

25. Для задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$y'' = y' + y, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

получите решение в виде степенного ряда

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{n!} x^n,$$

где $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... *чисел Фибоначчи*, определенных равенствами $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$ для $n > 1$.

26. **(a)** Покажите, что решение задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0$$

имеет вид $y(x) = \operatorname{tg} x$. **(b)** Поскольку $y(x) = \operatorname{tg} x$ — нечетная функция, причем $y'(0) = 1$, ее ряд Тейлора имеет вид

$$y = x + c_3x^3 + c_5x^5 + c_7x^7 + \cdots.$$

Подставьте этот ряд в $y' = 1 + y^2$ и приравняйте коэффициенты при одинаковых степенях x. Это позволит получить следующие соотношения:

$$\begin{aligned} 3c_3 &= 1, & 5c_5 &= 2c_3, \\ 7c_7 &= 2c_5 + (c_3)^2, & 9c_9 &= 2c_7 + 2c_3c_5, \\ 11c_{11} &= 2c_9 + 2c_3c_7 + (c_5)^2. \end{aligned}$$

(c) Выведите, что

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \frac{1382}{155925}x^{11} + \cdots.$$

27. Этот раздел показывает применение бесконечных рядов для решения дифференциальных уравнений. Но и наоборот, дифференциальные уравнения могут иногда применяться для суммирования бесконечных рядов. Рассмотрите, например, бесконечный ряд

$$1 + \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots;$$

обратите внимание, что последовательность знаков $+ + - + + - \cdots$ наложена на слагаемые ряда для числа e. Мы сможем вычислить этот ряд, если сумеем получить формулу для функции

$$f(x) = 1 + x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{5!}x^5 + \cdots,$$

потому что сумма рассматриваемого числового ряда просто равна $f(1)$. **(a)** Можно показать, что данный здесь степенной ряд сходится для всех x и что его можно почленно дифференцировать. Учитывая эти факты, покажите, что $f(x)$ является решением задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$y^{(3)} = y; \quad y(0) = y'(0) = 1, \quad y''(0) = -1.$$

(b) Решите эту задачу Коши (задачу с начальными условиями), чтобы показать, что

$$f(x) = \frac{1}{3}e^x + \frac{2}{3}e^{-x/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \sqrt{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

Подсказка содержится в задаче 48 из раздела 3.3. **(c)** Вычислите $f(1)$, чтобы найти сумму данного здесь числового ряда.

8.2. Решения в виде ряда в окрестностях обыкновенных точек

Метод степенных рядов, представленный в разделе 8.1, может быть применен к линейным уравнениям любого порядка, но его самые важные приложения относятся к однородным линейным дифференциальным уравнениям второго порядка вида

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0, \tag{1}$$

где коэффициенты A, B и C — аналитические функции x. В действительности в большинстве приложений эти коэффициенты-функции представляют собой просто многочлены.

В примере 3 из раздела 8.1 мы видели, что метод рядов не всегда приводит к решению в виде ряда. Чтобы узнать, когда это действительно так, мы перепишем уравнение (1) в форме

➤
$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{2}$$

с ведущим коэффициентом 1, с $P = B/A$ и $Q = C/A$. Обратите внимание, что $P(x)$ и $Q(x)$, вообще говоря, не обязаны быть аналитическими в точках, где $A(x)$ обращается в нуль. Рассмотрим, например, уравнение

$$xy'' + y' + xy = 0. \tag{3}$$

Коэффициентные функции в (3) непрерывны всюду. Но в виде (2) это уравнение выглядит так:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0, \tag{4}$$

причем $P(x) = 1/x$ не аналитична в точке $x = 0$.

Точку $x = a$ называют **обыкновенной точкой** уравнения (2) (и эквивалентного уравнения (1)) при условии, что обе функции $P(x)$ и $Q(x)$ аналитичны в точке $x = a$. В противном случае $x = a$ называется **особой точкой**. Таким образом, единственная особая точка уравнений (3) и (4) — это $x = 0$. Вспомните, что частное аналитических функций является аналитическим везде, где знаменатель отличен от нуля. Из этого следует, что если $A(a) \neq 0$ в уравнении (1) с аналитическими коэффициентами, то $x = a$ — обыкновенная точка. Если $A(x)$, $B(x)$ и $C(x)$ — *многочлены* без общих множителей, то $x = a$ — обыкновенная точка тогда и только тогда, когда $A(a) \neq 0$.

Пример 1 Точка $x = 0$ — обыкновенная точка уравнения

$$xy'' + (\sin x)y' + x^2 y = 0,$$

несмотря на что, что $A(x) = x$ обращается в нуль в точке $x = 0$. Причина состоит в том, что

$$P(x) = \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots$$

является тем не менее аналитической функцией в точке $x = 0$, потому что деление на x приводит к сходящемуся степенному ряду. ■

Пример 2 Точка $x = 0$ *не является* обыкновенной точкой уравнения

$$y'' + x^2 y' + x^{1/2} y = 0.$$

Причина состоит в том, что хотя $P(x) = x^2$ является аналитической функцией в начале координат, $Q(x) = x^{1/2}$ таковой не является. Причина этого заключается в том, что функция $Q(x)$ не дифференцируема в точке $x = 0$ и, следовательно, в этой точке не является аналитической. (Из теоремы 1 из раздела 8.1 следует, что аналитическая функция дифференцируема.) ■

Пример 3 Точка $x = 0$ — обыкновенная точка уравнения

$$(1 - x^3)y'' + (7x^2 + 3x^5)y' + (5x - 13x^4)y = 0,$$

потому что коэффициентные функции $A(x)$, $B(x)$ и $C(x)$ представляют собой многочлены, причем $A(0) \neq 0$. ■

Из теоремы 2 из раздела 3.1 следует, что уравнение (2) имеет два линейно независимых решения на любом открытом интервале, где непрерывны коэффициентные функции $P(x)$ и $Q(x)$. Основной факт для достижения нашей цели состоит в том, что в окрестности *обыкновенной* точки a эти решения будут степенными рядами по степеням $x - a$. Доказательство следующей теоремы может быть найдено в главе 3 книги Коддингтона (Coddington) *An Introduction to Ordinary Differential Equations* (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1961), посвященной введению в обыкновенные дифференциальные уравнения.

Теорема 1 Решения в окрестности обыкновенной точки

Предположим, что a — обыкновенная точка уравнения

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0; \tag{1}$$

т. е. функции $P = B/A$ и $Q = C/A$ являются аналитическими в точке $x = a$. Тогда уравнение (1) имеет два линейно независимых решения, причем каждое имеет вид

➤
$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n. \tag{5}$$

Радиус сходимости любого такого решения в виде ряда не меньше расстояния от a до самой близкой (вещественной или комплексной) особой точки уравнения (1). Коэффициенты в ряде (5) могут быть определены его подстановкой в уравнение (1). ▲

Пример 4 Определим нижнюю границу радиуса сходимости решения уравнения

$$(x^2 + 9)y'' + xy' + x^2y = 0 \tag{6}$$

в виде ряда по степеням x, гарантируемую теоремой 1. То же самое сделаем для ряда по степеням $x - 4$.

Решение Этот пример показывает, что необходимо принимать во внимание не только вещественные особые точки, но и комплексные. Поскольку

$$P(x) = \frac{x}{x^2 + 9} \quad \text{и} \quad Q(x) = \frac{x^2}{x^2 + 9},$$

особыми точками уравнения (6) будут только $\pm 3i$. Расстояние (на комплексной плоскости) каждой из них от точки 0 равно 3, так что решение в виде ряда вида $\sum c_n x^n$ имеет радиус сходимости по крайней мере не меньше, чем 3. Расстояние каждой особой точки от точки 4 равно 5, так что решение в виде ряда вида $\sum c_n (x - 4)^n$ имеет радиус сходимости по крайней мере не меньше, чем 5 (рис. 8.2.1). ■

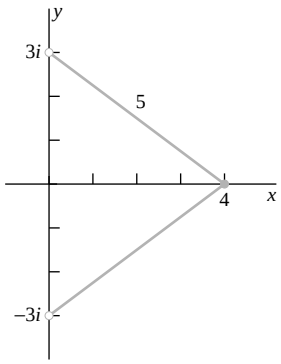


Рис. 8.2.1. Радиус сходимости как расстояние до ближайшей особой точки

Пример 5 Найдем общее решение уравнения

$$(x^2 - 4)y'' + 3xy' + y = 0 \tag{7}$$

в виде ряда по степеням x. Затем найдем частное решение при $y(0) = 4$, $y'(0) = 1$.

Решение Особыми точками уравнения (7) являются только ± 2, так что ряд будет иметь радиус сходимости по крайней мере не меньший, чем 2. Подстановка

➤
$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \quad \text{и} \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

в уравнение (7) приводит к равенству

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^n - 4 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} + 3 \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

Мы можем начать первую и третью сумму также с $n = 0$, потому что никакие отличные от нуля слагаемые таким образом не добавятся. Мы сдвигаем индекс суммирования во второй сумме на $+2$, заменяя n на $n + 2$ и используя начальное значение $n = 0$. Это дает

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) c_n x^n - 4 \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n + 3 \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

После суммирования коэффициентов (в результате приведения подобных) c_n и c_{n+2} мы получаем равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n^2 + 2n + 1) c_n - 4(n+2)(n+1) c_{n+2} \right] x^n = 0.$$

Принцип тождественности дает соотношение

$$(n+1)^2 c_n - 4(n+2)(n+1) c_{n+2} = 0,$$

что приводит к рекуррентной формуле

➤
$$c_{n+2} = \frac{(n+1) c_n}{4(n+2)} \tag{8}$$

для $n \geqq 0$. При $n = 0, 2$ и 4 мы поочередно получаем

$$c_2 = \frac{c_0}{4 \cdot 2}, \quad c_4 = \frac{3c_2}{4 \cdot 4} = \frac{3c_0}{4^2 \cdot 2 \cdot 4} \quad \text{и} \quad c_6 = \frac{5c_4}{4 \cdot 6} = \frac{3 \cdot 5 c_0}{4^3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6}.$$

Продолжая этим способом, мы очевидно нашли бы, что

$$c_{2n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{4^n \cdot 2 \cdot 4 \cdots (2n)} c_0.$$

Используя обычное обозначение

$$(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n \cdot n!}$$

и наблюдение, что $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) = 2^n \cdot n!$, мы, наконец, получаем

$$c_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{2^{3n} \cdot n!} c_0. \tag{9}$$

(Мы также использовали то, что $4^n \cdot 2^n = 2^{3n}$.)

При $n = 1, 3$ и 5 из уравнения (8) мы получаем

$$c_3 = \frac{2c_1}{4 \cdot 3}, \quad c_5 = \frac{4c_3}{4 \cdot 5} = \frac{2 \cdot 4c_1}{4^2 \cdot 3 \cdot 5} \quad \text{и} \quad c_7 = \frac{6c_5}{4 \cdot 7} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6c_1}{4^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}.$$

Очевидно, что общая формула имеет вид

$$c_{2n+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{4^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} c_1 = \frac{n!}{2^n \cdot (2n+1)!!} c_1. \tag{10}$$

Формула (9) выражает коэффициенты с четными индексами через c_0; формула (10) выражает коэффициенты с нечетными индексами через c_1. После того как мы отдельно соберем члены ряда при четных и нечетных степенях, мы получим общее решение

$$y(x) = c_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^{3n} \cdot n!} x^{2n}\right) + c_1 \left(x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n \cdot (2n+1)!!} x^{2n+1}\right). \tag{11}$$

Иными словами,

$$y(x) = c_0 \left(1 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{128}x^4 + \frac{5}{1024}x^6 + \cdots\right) + \\ + c_1 \left(x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{30}x^5 + \frac{1}{140}x^7 + \cdots\right). \tag{11′}$$

Поскольку $y(0) = c_0$ и $y'(0) = c_1$, данные начальные условия выполняются, лишь если $c_0 = 4$ и $c_1 = 1$. Подставляя эти значения в уравнение (11′), получим первые несколько членов частного решения, удовлетворяющего условиям $y(0) = 4$ и $y'(0) = 1$:

$$y(x) = 4 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{32}x^4 + \frac{1}{30}x^5 + \cdots. \tag{12}$$

■

Замечание. Как и в примере 5, подстановка $y = \sum c_n x^n$ в линейное уравнение второго порядка, для которого $x = 0$ является обыкновенной точкой, обычно приводит к рекуррентной формуле, которая может использоваться для того, чтобы последовательно выразить каждый из коэффициентов $c_2, c_3, c_4, \ldots$ через первые два, c_0 и c_1. В этом случае два линейно независимых решения получаются следующим образом. Пусть $y_0(x)$ — решение, полученное при $c_0 = 1$ и $c_1 = 0$, а $y_1(x)$ — решение, полученное при $c_0 = 0$ и $c_1 = 1$. Тогда

$$y_0(0) = 1, \quad y_0'(0) = 0 \quad \text{и} \quad y_1(0) = 0, \quad y_1'(0) = 1,$$

так что ясно, что y_0 и y_1 являются линейно независимыми. В примере 5 $y_0(x)$ и $y_1(x)$ определены двумя рядами, которые появляются в правой части равенства (11), которое выражает общее решение в виде $y = c_0 y_0 + c_1 y_1$. ■

Решения в виде ряда Тейлора

Если бы в примере 5 мы искали частное решение с данными начальными значениями $y(a)$ и $y'(a)$, нам понадобилось бы общее решение в виде

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n; \tag{13}$$

т. е. ряд по степеням $x - a$, а не по степеням x. Дело в том, что только для решений вида (13) начальные условия

$$y(a) = c_0 \quad \text{и} \quad y'(a) = c_1$$

определяют произвольные постоянные c_0 и c_1 через начальные значения y и y'. Следовательно, чтобы решить задачу Коши (задачу с начальными условиями), нужно найти разложение в ряд общего решения, причем центр ряда должен быть в той точке, в которой заданы начальные условия.

Пример 6 Решим задачу Коши (задачу с начальными условиями)

$$(t^2 - 2t - 3)\frac{d^2y}{dt^2} + 3(t-1)\frac{dy}{dt} + y = 0; \quad y(1) = 4, \quad y'(1) = -1. \tag{14}$$

Решение Нам нужно найти общее решение в виде $\sum c_n (t-1)^n$. Но вместо того чтобы подставлять этот ряд в (14) и затем определять коэффициенты, мы упростим вычисления, если сначала подставим $x = t - 1$, чтобы в конце концов искать ряд вида $\sum c_n x^n$. Чтобы преобразовать уравнение (14) в уравнение с новой независимой переменной x, мы обращаем внимание на то, что

$$t^2 - 2t - 3 = (x+1)^2 - 2(x+1) - 3 = x^2 - 4,$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx} = y'$$

и

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dx}(y') = y'',$$

где штрихи обозначают дифференцирование по x. Следовательно, мы преобразуем уравнение (14) к виду

$$(x^2 - 4)y'' + 3xy' + y = 0$$

с начальными условиями $y = 4$ и $y' = 1$ в точке $x = 0$ (соответствующей $t = 1$). Это — задача Коши (задача с начальными условиями), которую мы решили в примере 5, так что нам уже известно частное решение (12). Мы подставляем $t - 1$ вместо x в уравнение (12) и таким образом получаем

искомое частное решение

$$y(t) = 4 + (t-1) + \frac{1}{2}(t-1)^2 + \frac{1}{6}(t-1)^3 + \\ + \frac{3}{32}(t-1)^4 + \frac{1}{30}(t-1)^5 + \cdots .$$

Этот ряд сходится, если $-1 < t < 3$. (Почему?) Ряд такого вида может использоваться для вычисления числовых значений решения. Например,

$$y(0{,}8) = 4 + (-0{,}2) + \frac{1}{2}(-0{,}2)^2 + \frac{1}{6}(-0{,}2)^3 + \\ + \frac{3}{32}(-0{,}2)^4 + \frac{1}{30}(-0{,}2)^5 + \cdots ,$$

так что $y(0{,}8) \approx 3{,}8188$. ■

Последнее вычисление в примере 6 иллюстрирует факт, что решения дифференциальных уравнений в виде ряда полезны не только для того, чтобы установить общие свойства решения, но также и для числовых вычислений, когда неизвестно выражение решения через элементарные функции.

Типы рекуррентных соотношений и формул

Формула (равенство) (8) представляет собой пример рекуррентной формулы с **двумя членами**; она выражает каждый коэффициент ряда через *один* из предыдущих коэффициентов. Рекуррентная формула **со многими** членами выражает каждый коэффициент ряда через два или больше предыдущих коэффициентов. В случае рекуррентной формулы со многими членами, обычно неудобно или даже вообще невозможно найти формулу, которая выражает общий коэффициент c_n через n. Следующий пример показывает, что мы иногда можем сделать с рекуррентной формулой с тремя членами.

Пример 7 Найдем два линейно независимых решения уравнения

$$y'' - xy' - x^2 y = 0. \tag{15}$$

Решение Как обычно, мы поставляем степенной ряд $y = \sum c_n x^n$. Это приводит к уравнению

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} = 0.$$

Мы можем начать вторую сумму с $n = 0$, ничего другого не изменяя вообще. Чтобы каждый член, содержащий x^n, вошел в общий член ряда, мы сдвигаем индекс суммирования в первой сумме на $+2$ (заменяем n на $n+2$), а также сдвигаем индекс на -2 в третьей сумме (заменяем n на $n-2$). Эти сдвиги приводят к равенству

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^n = 0.$$

Общий диапазон этих трех сумм — $n \geqq 2$, так что мы должны отделить слагаемые, соответствующие $n = 0$ и $n = 1$ в первых двух суммах перед суммированием коэффициентов (приведении подобных) при x^n. Это дает равенство

$$2c_2 + 6c_3x - c_1x + \sum_{n=2}^{\infty} [(n+2)(n+1)c_{n+2} - nc_n - c_{n-2}]\, x^n = 0.$$

Из принципа тождественности теперь следует, что $2c_2 = 0$, что $c_3 = \frac{1}{6}c_1$, и рекуррентная формула с тремя слагаемыми:

➤
$$c_{n+2} = \frac{nc_n + c_{n-2}}{(n+2)(n+1)} \tag{16}$$

для $n \geqq 2$. В частности,

$$\begin{aligned} c_4 &= \frac{2c_2 + c_0}{12}, \quad c_5 = \frac{3c_3 + c_1}{20}, \quad c_6 = \frac{4c_4 + c_2}{30}, \\ c_7 &= \frac{5c_5 + c_3}{42}, \quad c_8 = \frac{6c_6 + c_4}{56}. \end{aligned} \tag{17}$$

Таким образом, все значения c_n для $n \geqq 4$ выражаются через произвольные постоянные c_0 и c_1, потому что $c_2 = 0$ и $c_3 = \frac{1}{6}c_1$.

Чтобы получить наше первое решение y_1 уравнения (15), мы выбираем $c_0 = 1$ и $c_1 = 0$, так что $c_2 = c_3 = 0$. Тогда из формулы (17) находим

$$c_4 = \frac{1}{12}, \quad c_5 = 0, \quad c_6 = \frac{1}{90}, \quad c_7 = 0, \quad c_8 = \frac{3}{1120};$$

таким образом,

$$y_1(x) = 1 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{90}x^6 + \frac{3}{1120}x^8 + \cdots. \tag{18}$$

Поскольку $c_1 = c_3 = 0$, из уравнения (16) видно, что этот ряд содержит только члены при четных степенях.

Чтобы получить второе линейно независимое решение y_2 уравнения (15), мы полагаем $c_0 = 0$ и $c_1 = 1$, так что $c_2 = 0$ и $c_3 = \frac{1}{6}$. Тогда из формулы (17) находим

$$c_4 = 0, \quad c_5 = \frac{3}{40}, \quad c_6 = 0, \quad c_7 = \frac{13}{1008},$$

так что

$$y_2(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{13}{1008}x^7 + \cdots. \tag{19}$$

Поскольку $c_0 = c_2 = 0$, из уравнения (16) видно, что этот ряд содержит только члены при нечетных степенях. Решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы, потому что $y_1(0) = 1$ и $y_1'(0) = 0$, тогда как $y_2(0) = 0$ и $y_2'(0) = 1$. Общее решение уравнения (15) представляет собой линейную комбинацию степенных рядов в (18) и (19). Уравнение (15) не имеет никаких особых точек, так что степенные ряды, представляющие $y_1(x)$ и $y_2(x)$, сходятся для всех x. ■

Уравнение Лежандра

Уравнение Лежандра порядка α представляет собой линейное дифференциальное уравнение второго порядка; оно имеет вид

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0, \tag{20}$$

где вещественное число α удовлетворяет неравенству $\alpha > -1$. Это дифференциальное уравнение имеет обширные приложения, начиная от формул численного интегрирования (типа гауссовой квадратуры) и до задачи определения установившейся температуры в твердом сферическом теле, когда известно распределение температур в точках его границы. Единственные особые точки уравнения Лежандра — это $+1$ и -1, так что оно имеет два линейно независимых решения, которые могут быть выражены как степенные ряды по степеням x с радиусом сходимости по крайней мере не меньшим, чем 1. Подстановка $y = \sum c_m x^m$ в уравнение (20) приводит (см. задачу 31) к рекуррентной формуле

$$c_{m+2} = -\frac{(\alpha-m)(\alpha+m+1)}{(m+1)(m+2)}c_m \tag{21}$$

для $m \geqq 0$. Мы обозначаем через m индекс суммирования, потому что для n мы отводим другую роль.

Считая произвольные постоянные c_0 и c_1 заданными, из равенства (21) находим

$$c_2 = -\frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}c_0,$$

$$c_3 = -\frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{3!}c_1,$$

$$c_4 = \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha+1)(\alpha+3)}{4!}c_0,$$

$$c_5 = \frac{(\alpha-1)(\alpha-3)(\alpha+2)(\alpha+4)}{5!}c_1.$$

Мы можем легко показать, что для $m > 0$,

$$c_{2m} = (-1)^m \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-4)\cdots(\alpha-2m+2)(\alpha+1)(\alpha+3)\cdots(\alpha+2m-1)}{(2m)!}c_0 \tag{22}$$

и

$$c_{2m+1} = (-1)^m \frac{(\alpha-1)(\alpha-3)\cdots(\alpha-2m+1)(\alpha+2)(\alpha+4)\cdots(\alpha+2m)}{(2m+1)!}c_1. \tag{23}$$

Иными словами,

$$c_{2m} = (-1)^m a_{2m} c_0 \quad \text{и} \quad c_{2m+1} = (-1)^m a_{2m+1} c_1,$$

где a_{2m} и a_{2m+1} обозначают дроби в уравнениях (22) и (23) соответственно. Используя эти обозначения, для уравнения Лежандра порядка α мы получаем два линейно независимых решения в виде рядов

$$y_1(x) = c_0 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m a_{2m} x^{2m} \quad \text{и} \quad y_2(x) = c_1 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m a_{2m+1} x^{2m+1}. \tag{24}$$

Теперь предположим, что α есть неотрицательное *целое число*: $\alpha = n$. Если число $\alpha = n$ является четным, то из уравнения (22) следует, что $a_{2m} = 0$, когда $2m > n$. В этом случае $y_1(x)$ — *многочлен* степени n и y_2 — бесконечный (действительно бесконечный!) ряд. Если $\alpha = n$ — нечетное положительное целое число, то из уравнения (23) мы видим, что $a_{2m+1} = 0$, когда $2m + 1 > n$. В этом случае $y_2(x)$ — *многочлен* степени n и y_1 — бесконечный (действительно бесконечный!) ряд. Таким образом, в любом случае одно из этих двух решений в (24) представляет собой многочлен, а другое — бесконечный ряд.

При соответствующем выборе (сделанном отдельно для каждого n) произвольных постоянных c_0 (при четном n) или c_1 (при n нечетном), решение уравнения Лежандра

$$(1 - x)^2 y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0, \tag{25}$$

порядка n в виде многочлена степени n обозначается через $P_n(x)$ и называется **многочленом Лежандра** степени n. Общепринято (по причине, указанной в задаче 32) выбирать произвольную постоянную так, чтобы коэффициент при x^n в $P_n(x)$ был равен $(2n)!/\left[2^n(n!)^2\right]$. Тогда оказывается, что

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k (2n - 2k)!}{2^n k!\,(n - k)!\,(n - 2k)!} x^{n-2k}, \tag{26}$$

где $N = [n/2]$ — целая часть $n/2$. Вот первые шесть многочленов Лежандра:

$$P_0(x) \equiv 1, \qquad P_1(x) = x,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \qquad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \qquad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x);$$

их графики показаны на рис. 8.2.2.

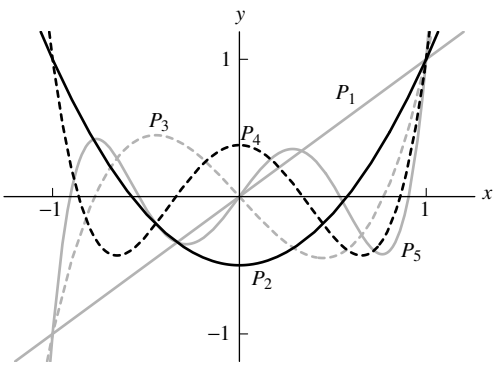


Рис. 8.2.2. Графики $y = P_n(x)$ многочленов Лежандра для $n = 1, 2, 3, 4$ и 5. Графики отличает то, что все n нулей многочлена $P_n(x)$ лежат в интервале $-1 < x < 1$

8.2. Задачи

В задачах 1–15 найдите общие решения (в виде ряда по степеням x) данных дифференциальных уравнений. Выведите рекуррентную формулу и найдите гарантируемый радиус сходимости в каждом случае.

1. $(x^2-1)y''+4xy'+2y=0$
2. $(x^2+2)y''+4xy'+2y=0$
3. $y''+xy'+y=0$
4. $(x^2+1)y''+6xy'+4y=0$
5. $(x^2-3)y''+2xy'=0$
6. $(x^2-1)y''-6xy'+12y=0$
7. $(x^2+3)y''-7xy'+16y=0$
8. $(2-x^2)y''-xy'+16y=0$
9. $(x^2-1)y''+8xy'+12y=0$
10. $3y''+xy'-4y=0$
11. $5y''-2xy'+10y=0$
12. $y''-x^2y'-3xy=0$
13. $y''+x^2y'+2xy=0$
14. $y''+xy=0$ (*уравнение Эйри*)
15. $y''+x^2y=0$

В задачах 16 и 17 с помощью степенных рядов найдите решения задачи Коши (задачи с начальными условиями).

16. $(1+x^2)y''+2xy'-2y=0$; $y(0)=0$, $y'(0)=1$
17. $y''+xy'-2y=0$; $y(0)=1$, $y'(0)=0$

В задачах 18–22 найдите решения данных задач Коши (задач с начальными условиями). Сначала сделайте подстановку вида $t=x-a$, а затем найдите решение $\sum c_n t^n$ преобразованного дифференциального уравнения. Найдите интервал значений x, для которого теорема 1 из этого раздела гарантирует сходимость.

18. $y''+(x-1)y'+y=0$; $y(1)=2$, $y'(1)=0$
19. $(2x-x^2)y''-6(x-1)y'-4y=0$; $y(1)=0$, $y'(1)=1$
20. $(x^2-6x+10)y''-4(x-3)y'+6y=0$; $y(3)=2$, $y'(3)=0$
21. $(4x^2+16x+17)y''=8y$; $y(-2)=1$, $y'(-2)=0$
22. $(x^2+6x)y''+(3x+9)y'-3y=0$; $y(-3)=0$, $y'(-3)=2$

В задачах 23–26 найдите рекуррентную формулу с тремя членами для решений вида $y=\sum c_n x^n$. Затем найдите первые три отличных от нуля члена в каждом из двух линейно независимых решений.

23. $y''+(1+x)y=0$
24. $(x^2-1)y''+2xy'+2xy=0$
25. $y''+x^2y'+x^2y=0$
26. $(1+x^3)y''+x^4y=0$
27. Решите задачу Коши (задачу с начальными условиями)

$$y''+xy'+(2x^2+1)y=0;\quad y(0)=1, y'(0)=-1.$$

Найдите достаточно много членов для того, чтобы вычислить $y(1/2)$ с точностью до четырех десятичных знаков.

В задачах 28–30 найдите первые три отличных от нуля члена в каждом из двух линейно независимых решений вида $y=\sum c_n x^n$. Подставьте известные ряды Тейлора аналитических функций и сохраните достаточно много членов для того, чтобы вычислить необходимые коэффициенты.

28. $y''+e^{-x}y=0$
29. $(\cos x)y''+y=0$
30. $xy''+(\sin x)y'+xy=0$

31. Выведите рекуррентную формулу (21) для уравнения Лежандра.

32. Следуя шагам, кратко намеченным в этой задаче, установите **формулу Родрига**

$$P_n(x) = \frac{1}{n!\,2^n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

для многочлена Лежандра степени n. **(a)** Покажите, что $v = (x^2-1)^n$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1-x^2)v' + 2nxv = 0.$$

Продифференцируйте каждую часть этого уравнения и получите

$$(1-x^2)v'' + 2(n-1)xv' + 2nv = 0.$$

(b) Последовательно n раз продифференцируйте каждую часть последнего уравнения и получите

$$(1-x^2)v^{(n+2)} - 2xv^{(n+1)} + n(n+1)v^{(n)} = 0.$$

Таким образом, функция $u = v^{(n)} = D^n(x^2-1)^n$ удовлетворяет уравнению Лежандра порядка n. **(c)** Покажите, что коэффициент при x^n в u равен $(2n)!/n!$; затем установите, почему это доказывает формулу Родрига. (Обратите внимание, что коэффициент при x^n в $P_n(x)$ равен $(2n)!/\left[2^n(n!)^2\right]$.)

33. **Уравнение Эрмита** порядка α имеет вид

$$y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0.$$

(a) Найдите два решения в виде степенного ряда

$$y_1 = 1 + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{2^m\alpha(\alpha-2)\cdots(\alpha-2m+2)}{(2m)!}x^{2m}$$

и

$$y_2 = x + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m\frac{2^m(\alpha-1)(\alpha-3)\cdots(\alpha-2m+1)}{(2m+1)!}x^{2m+1}.$$

Покажите, что y_1 — многочлен, если α — четное целое число, тогда как y_2 — многочлен, если α является нечетным целым числом. **(b) Многочлен Эрмита** степени n обозначается через $H_n(x)$. Это — решение в виде многочлена степени n уравнения Эрмита, умноженное на подходящую константу (такую, что коэффициент при x^n равен 2^n). Покажите, что первые шесть многочленов Эрмита имеют вид

$$H_0(x) \equiv 1, \qquad H_1(x) = 2x,$$
$$H_2(x) = 4x^2 - 2, \qquad H_3(x) = 8x^3 - 12x,$$
$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12, \qquad H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x.$$

Общая формула для многочленов Эрмита имеет вид

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right).$$

Проверьте, что эта формула действительно фактически дает многочлен степени n. Весьма интересно с помощью системы компьютерной алгебры проверить догадку о том, что (для каждого n) нули многочленов Эрмита $H_n(x)$ и H_{n+1} "разделяют друг друга", — т. е. что n нулей многочлена H_n лежат в n ограниченных открытых интервалах, конечные точки которых представляют собой пары последовательных нулей многочлена H_{n+1}.

34. После примера 4 в разделе 8.1 обсуждалось предположение, что дифференциальное уравнение $y'' + y = 0$ может использоваться для того, чтобы ввести и определить знакомые функции синус и косинус. Подобным способом *уравнение Эйри*

$$y'' = xy$$

служит для того, чтобы ввести две новые специальные функции, которые часто появляются в приложениях — от вычисления распространения радиоволн до молекулярных колебаний. Получите первые три или четыре члена двух различных решений уравнения Эйри в виде степенного ряда. Затем проверьте, что ваши результаты совпадают с формулами

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (3k-2)}{(3k)!}\, x^{3k}$$

и

$$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (3k-1)}{(3k+1)!}\, x^{3k+1}$$

для решений, которые удовлетворяют начальным условиям $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$ и $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$ соответственно. Специальные комбинации

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{y_1(x)}{3^{2/3}\Gamma(\frac{2}{3})} - \frac{y_2(x)}{3^{1/3}\Gamma(\frac{1}{3})}$$

и

$$\mathrm{Bi}(x) = \frac{y_1(x)}{3^{1/6}\Gamma(\frac{2}{3})} + \frac{y_2(x)}{3^{-1/6}\Gamma(\frac{1}{3})}$$

определяют стандартные *функции Эйри,* которые появляются в математических таблицах и системах компьютерной алгебры. Их графики, показанные на рис. 8.2.3, при $x < 0$, демонстрируют колебательное поведение, подобное тому, которое задается тригонометрическими функциями, однако при $x \to +\infty$ функция $\mathrm{Ai}(x)$ уменьшается экспоненциально, а функция $\mathrm{Bi}(x)$ экспоненциально увеличивается. Весьма интересно с помощью системы компьютерной алгебры исследовать, сколько членов нужно сохранить в рядах для y_1 и y_2, чтобы вычертить рисунок, который визуально неотличим от рис. 8.2.3 (для вычерчивания этого рисунка использовались аппроксимацияи высокой точности к функциям Эйри).

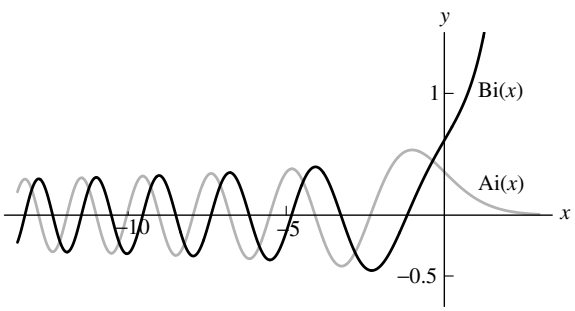


Рис. 8.2.3. Графики функций Эйри $y = \mathrm{Ai}(x)$ и $y = \mathrm{Bi}(x)$

8.2. Приложение. Автоматическое вычисление коэффициентов ряда

Повторное применение рекуррентной формулы для того, чтобы последовательно вычислять коэффициенты, особенно в случае рекуррентной формулы с тремя или большим числом членов, — утомительный и даже мучительный процесс, связанный с методами вычисления сумм бесконечных рядов. Здесь мы иллюстрируем использование системы компьютерной алгебры для решения этой задачи. В примере 7 мы видели, что коэффициенты решения дифференциального уравнения $y'' - xy' - x^2y = 0$ в виде ряда $y = \sum c_n x^n$ выражаются через два произвольных коэффициента c_0 и c_1 по формулам

$$c_2 = 0, \quad c_3 = \frac{c_1}{6} \quad \text{и} \quad c_{n+2} = \frac{nc_n + c_{n-2}}{(n+2)(n+1)} \quad \text{для} \quad n \geqq 2. \tag{1}$$

Казалось бы, нет ничего сложного в том, чтобы использовать такую рекуррентную формулу, ведь вычисления по ней можно провести по самой рутинной программе. Но неожиданный подвох возникает из-за того, что типичный массив в компьютерной системе индексируется индексами 1, 2, 3, ..., а не индексами 0, 1, 2, ... которые равны показателям степени в последовательных членах степенного ряда, который начинается с постоянного члена. По этой причине мы сначала перепишем наше предложенное решение в виде степенного ряда вида

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n-1}, \tag{2}$$

где $b_n = c_{n-1}$ для каждого $n \geqq 1$. Тогда из первых двух условий в (1) следует, что $b_3 = 0$ и $b_4 = \frac{1}{6}b_2$; кроме того, рекуррентная формула (с n, замененным на $n-1$) приводит к новой рекуррентной формуле

$$b_{n+2} = c_{n+1} = \frac{(n-1)c_{n-1} + c_{n-3}}{(n+1)n} = \frac{(n-1)b_n + b_{n-2}}{n(n+1)}. \tag{3}$$

Теперь мы готовы начать. Предположим, что мы хотим вычислить члены до 10-й степени в (2) при начальных условиях $b_1 = b_2 = 1$. Тогда команды системы компьютерной алгебры *Maple*

```
k := 11:            # k членов
b :=                # массив
array(1..k):
b[1] := 1:          # произвольно
b[2] := 1:          # произвольно
b[3] := 0:
b[4] := b[2]/6:
for n from 3 by 1 to k - 2 do # для n = 3 шаг 1 до k - 2 выполнить
   b[n+2] := ((n-1)*b[n] + b[n-2])/(n*(n+1));
   od;
```

или команды системы компьютерной алгебры *Mathematica*

```
k = 11;             (* k членов *)
b = Table[0, {n,1,k}]; (* таблица *)
b[[1]] = 1;         (* произвольно *)
b[[2]] = 1;         (* произвольно *)
b[[3]] = 0;
b[[4]] = b[[2]]/6;
For[n=3, n<=k-2,  (* для n = 3 шаг 1 до k - 2 выполнить *)
   b[[n+2]]=((n-1)*b[[n]] + b[[n-2]])/(n*(n+1)); n=n+1];
```

позволят быстро вычислить коэффициенты $\{b_n\}$ в решении

$$y(x) = 1 + x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{3x^5}{40} + \frac{x^6}{90} + \frac{13x^7}{1008} + \frac{3x^8}{1120} + \frac{119x^9}{51840} + \frac{41x^{10}}{113400} + \cdots . \qquad (4)$$

Вы могли обратить внимание, что члены с четными и нечетными степенями здесь совпадают с указанными в уравнениях (18) и (19) соответственно (пример 7).

Команды пакета MATLAB

```
k = 11;             % k членов
b = 0*(1:k);        % массив
b(1) = 1;           % произвольно
b(2) = 1;           % произвольно
b(3) = 0;
b(4) = b(2)/6;
for n = 3:k-2       % для n = 3 шаг 1 до k - 2 выполнить
   b(n+2) = ((n-1)*b(n) + b(n-2))/(n*(n+1));
   end                 % конец
format rat, b       % форматирование
```

дадут те же самые результаты, *за исключением того*, что коэффициент b_{10} при x^9 будет отображаться как $73/31801$, вместо правильного значения $119/51840$, приведенного в уравнении (4). Это случается потому, что

$$\frac{73}{31801} \approx 0{,}0022955253 \quad \text{в то время как} \quad \frac{119}{51840} \approx 0{,}0022955247,$$

так что эти две рациональные дроби совпадают после округления до девяти десятичных знаков. Объясняется это тем, что (в отличие от систем *Mathematica* и *Maple*) вычисления внутри пакета MATLAB ведутся в десятичной, а не в точной арифметике. Но в конце этого алгоритма команда форматирования `format rat` конвертирует (преобразовывает) правильную аппроксимацию с 14 знаками для b_{10} в неправильную, приближая ее рациональной дробью, которая “хороша, но не совсем”.

Вы можете подставить $b_1 = 1$, $b_2 = 0$ и $b_1 = 0$, $b_2 = 1$ отдельно (а не $b_1 = b_2 = 1$) в командах, показанных здесь, чтобы получить частичные суммы двух линейно независимых решений, указанных в уравнениях (18) и (19) из примера 7. Эта методика может быть применена к любому примеру и любой задаче в этом разделе.

8.3. Регулярные особые точки

Мы теперь приступим к исследованию решения однородного уравнения второго порядка

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0 \tag{1}$$

в окрестности особой точки. Как вы помните, если функции A, B и C представляют собой многочлены, не имеющие никаких общих множителей, то особые точки уравнения (1) — это просто те точки, где $A(x) = 0$. Например, $x = 0$ — единственная особая точка уравнения Бесселя порядка n

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0,$$

тогда как уравнение Лежандра порядка n

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$$

имеет следующие две особые точки: $x = -1$ и $x = 1$. Оказывается, что некоторые из особенностей решений таких уравнений очень важны для приложений и в значительной степени определяются их поведением в окрестности их особых точек.

Мы ограничим наше внимание случаем, в котором $x = 0$ является особой точкой уравнения (1). Дифференциальное уравнение, имеющее $x = a$ в качестве особой точки, легко преобразуется заменой $t = x - a$ в такое, у которого соответствующая особая точка находится в 0. Например, давайте подставим $t = x - 1$ в уравнение Лежандра порядка n. Поскольку

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt},$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]\frac{dt}{dx} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

и $1 - x^2 = 1 - (t + 1)^2 = -2t - t^2$, мы получаем уравнение

$$-t(t + 2)\frac{d^2y}{dt^2} - 2(t + 1)\frac{dy}{dt} + n(n + 1)y = 0.$$

Это новое уравнение имеет особую точку $t = 0$, соответствующую $x = 1$ в первоначальном уравнении; оно имеет также особую точку $t = -2$, соответствующую $x = -1$.

Типы особых точек

Дифференциальное уравнение, для которого 0 является особой точкой, обычно *не будет* иметь решений в виде степенного ряда вида $y(x) = \sum c_n x^n$, так что прямой метод раздела 8.2 терпит неудачу в этом случае. Чтобы исследовать форму, которую, возможно, имеет решение такого уравнения, мы предполагаем, что уравнение (1) имеет аналитические коэффициентные функции и переписываем его в стандартной форме

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \tag{2}$$

где $P = B/A$ и $Q = C/A$. Вспомните, что $x = 0$ — обыкновенная точка (в противоположность особой точке) уравнения (2), если функции $P(x)$ и $Q(x)$ являются аналитическими

в точке $x = 0$; т. е. если $P(x)$ и $Q(x)$ имеют сходящиеся разложения в степенной ряд по степеням x на некотором открытом интервале, содержащем $x = 0$. Теперь может быть доказано, что *каждая* из функций $P(x)$ и $Q(x)$ либо является аналитической, *либо* приближается к $\pm\infty$ при $x \to 0$. Следовательно, $x = 0$ — особая точка уравнения (2) при условии, что $P(x)$ или $Q(x)$ (или обе) приближаются к $\pm\infty$ при $x \to 0$. Например, если мы перепишем уравнение Бесселя порядка n в форме

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0,$$

мы увидим, что обе функции $P(x) = 1/x$ и $Q(x) = 1 - (n/x)^2$ стремятся к бесконечности при $x \to 0$.

Мы увидим теперь, что метод степенных рядов может быть обобщен так, чтобы он будет применимым в окрестности особой точки $x = 0$ уравнения (2) при условии, что $P(x)$ стремится к бесконечности не более быстро, чем $1/x$, и $Q(x)$ — не более быстро, чем $1/x^2$ при $x \to 0$. Это означает, что $P(x)$ и $Q(x)$ имеют только "слабые" особенности в точке $x = 0$. Чтобы установить это более точно, мы перепишем уравнение (2) в форме

$$y'' + \frac{p(x)}{x}y' + \frac{q(x)}{x^2}y = 0, \tag{3}$$

где

$$p(x) = xP(x) \quad \text{и} \quad q(x) = x^2Q(x). \tag{4}$$

Определение. Регулярная особая точка

Особая точка $x = 0$ уравнения (3) называется **регулярной особой точкой**, если обе функции $p(x)$ и $q(x)$ являются аналитическими в точке $x = 0$. В противном случае особая точка называется **иррегулярной (нерегулярной) особой точкой**.

В частности, особая точка $x = 0$ будет *регулярной* особой точкой, если обе функции $p(x)$ и $q(x)$ являются многочленами. Например, мы увидим, что $x = 0$ — регулярная особая точка уравнения Бесселя порядка n, если запишем это уравнение в форме

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{x^2 - n^2}{x^2}y = 0$$

и заметим, что оба коэффициента $p(x) \equiv 1$ и $q(x) = x^2 - n^2$ — многочлены от x.

В отличие от этого, рассмотрим уравнение

$$2x^3y'' + (1 + x)y' + 3xy = 0,$$

которое имеет особую точку $x = 0$. Если мы запишем это уравнение в форме (3), мы получим уравнение

$$y'' + \frac{(1 + x)/(2x^2)}{x}y' + \frac{\frac{3}{2}}{x^2}y = 0.$$

Поскольку

$$p(x) = \frac{1 + x}{2x^2} = \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x} \to \infty$$

при $x \to 0$, мы видим, что $x = 0$ — иррегулярная (нерегулярная) особая точка, хотя $q(x) \equiv \frac{3}{2}$ представляет собой многочлен. Мы не будем обсуждать решение дифференциальных уравнений в окрестности иррегулярных (нерегулярных) особых точек; это значительно более сложная тема, чем поиск решений дифференциальных уравнений в окрестности регулярных особых точек.

Пример 1 Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x^2(1+x)y'' + x(4-x^2)y' + (2+3x)y = 0.$$

В стандартной форме $y'' + Py' + Qy = 0$ оно имеет вид

$$y'' + \frac{4-x^2}{x(1+x)}y' + \frac{2+3x}{x^2(1+x)}y = 0.$$

Поскольку оба коэффициента

$$P(x) = \frac{4-x^2}{x(1+x)} \quad \text{и} \quad Q(x) = \frac{2+3x}{x^2(1+x)}$$

стремятся к ∞ при $x \to 0$, мы видим, что $x = 0$ — особая точка. Чтобы определить характер (природу) этой особой точки, мы запишем это дифференциальное уравнение в форме уравнения (3):

$$y'' + \frac{(4-x^2)/(1+x)}{x}y' + \frac{(2+3x)/(1+x)}{x^2}y = 0.$$

Таким образом,

$$p(x) = \frac{4-x^2}{1+x} \quad \text{и} \quad q(x) = \frac{2+3x}{1+x}.$$

Поскольку частное многочленов представляет собой аналитическую функцию везде, где знаменатель отличен от нуля, мы видим, что оба коэффициента $p(x)$ и $q(x)$ являются аналитическими функциями в точке $x = 0$. Следовательно, $x = 0$ — *регулярная* особая точка данного дифференциального уравнения. ■

Может случиться так, что после того, как дифференциальное уравнение, первоначально заданное в общей форме уравнения (1), мы перепишем в форме (3), функции $p(x)$ и $q(x)$, определенные равенствами (4), окажутся не определенными в точке $x = 0$. В этом случае ситуация определяется пределами

$$p_0 = p(0) = \lim_{x\to 0} p(x) = \lim_{x\to 0} xP(x) \tag{5}$$

и

$$q_0 = q(0) = \lim_{x\to 0} q(x) = \lim_{x\to 0} x^2Q(x). \tag{6}$$

Если $p_0 = 0 = q_0$, то точка $x = 0$ может оказаться обыкновенной точкой. Если же это не так, но пределы в (5) и (6) все же существуют и *конечны*, то $x = 0$ — регулярная особая точка. Если

же хотя бы один из этих пределов не существует или бесконечен, то $x = 0$ — иррегулярная (нерегулярная) особая точка.

Замечание. В приложениях, если дифференциальное уравнение записано в форме

$$y'' + \frac{p(x)}{x}y' + \frac{q(x)}{x^2}y = 0, \tag{3}$$

то в большинстве случаев функции $p(x)$ и $q(x)$ являются *многочленами*. В этом случае $p_0 = p(0)$ и $q_0 = q(0)$ — просто постоянные слагаемые, являющиеся свободными членами этих многочленов, так что нет никакой потребности вычислять пределы в равенствах (5) и (6). ■

Пример 2 Чтобы исследовать характер (природу) точки $x = 0$ для дифференциального уравнения

$$x^4y'' + (x^2 \sin x)y' + (1 - \cos x)y = 0,$$

мы сначала запишем его в форме (3):

$$y'' + \frac{(\sin x)/x}{x}y' + \frac{(1 - \cos x)/x^2}{x^2}y = 0.$$

Тогда правило Лопиталя дает значения

$$p_0 = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

и

$$q_0 = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}$$

для пределов (5) и (6). Поскольку оба предела не равны нулю, мы видим, что $x = 0$ — регулярная особая точка, потому что каждый предел конечен. Иными словами, мы могли написать

$$p(x) = \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots$$

и

$$q(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{x^2}\left[1 - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} - \cdots.$$

Эти (сходящиеся) ряды явно показывают, что $p(x)$ и $q(x)$ являются аналитическими функциями, и, более того, что $p_0 = p(0) = 1$ и $q_0 = q(0) = \frac{1}{2}$. ■

Метод Фробениуса

Мы теперь приближаемся к задаче фактического нахождения решений линейного дифференциального уравнения второго порядка в окрестности регулярной особой точки $x = 0$. Самое простое такое уравнение представляет собой *равноразмерное* уравнение с постоянными коэффициентами

$$x^2y'' + p_0xy' + q_0y = 0, \tag{7}$$

к которому сводится уравнение (3) тогда, когда $p(x) \equiv p_0$ и $q(x) \equiv q_0$ — константы. В этом случае мы можем прямой подстановкой проверить, что простая степенная функция $y(x) = x^r$ является решением уравнения (7) тогда и только тогда, когда r — корень квадратного уравнения[1]

$$r(r-1) + p_0r + q_0 = 0. \tag{8}$$

В общем случае, в котором $p(x)$ и $q(x)$ являются степенными рядами, а не константами, разумно предположить, что наше дифференциальное уравнение могло бы иметь решение вида

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = c_0x^r + c_1x^{r+1} + c_2x^{r+2} + \cdots \tag{9}$$

— произведение x^r и степенного ряда. Это, оказывается, очень плодотворная догадка; согласно теореме 1 (которая скоро будет сформулирована формально), каждое уравнение вида (1), имеющее регулярную особую точку $x = 0$, действительно имеет по крайней мере одно такое решение. Этот факт служит основанием для **метода Фробениуса**, названного по имени немецкого математика Георга Фробениуса (1848–1917), который открыл этот метод в 1870-х годах.

Бесконечный ряд вида (9) называют **обобщенным степенным рядом**[2]. Обратите внимание, что обобщенный степенной ряд, вообще говоря, *не является* степенным рядом. Например, при $r = -\frac{1}{2}$ ряд (9) принимает вид

$$y = c_0x^{-1/2} + c_1x^{1/2} + c_2x^{3/2} + c_3x^{5/2} + \cdots;$$

это вовсе не ряд по *целым* степеням x.

Чтобы исследовать возможное существование решений в виде обобщенного степенного ряда, мы начинаем с уравнения

$$x^2y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0, \tag{10}$$

которое получается умножением уравнения (3) на x^2. Если $x = 0$ — регулярная особая точка, то функции $p(x)$ и $q(x)$ являются аналитическими в точке $x = 0$, так что

$$\begin{aligned} p(x) &= p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + \cdots, \\ q(x) &= q_0 + q_1x + q_2x^2 + q_3x^3 + \cdots. \end{aligned} \tag{11}$$

[1] Это уравнение называется *определяющим уравнением* (в особой точке $x = 0$). Часто это уравнение называется также *характеристическим уравнением*. — *Примеч. ред.*

[2] В оригинале *Frobenius series — рядом Фробениуса*. — *Примеч. ред.*

Предположим, что уравнение (10) имеет решение в виде обобщенного степенного ряда

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}. \tag{12}$$

Мы можем (и всегда это делаем) предполагать, что $c_0 \neq 0$, потому что хотим, чтобы первый член ряда был отличным от нуля. Почленное дифференцирование уравнении (12) приводит к

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r) x^{n+r-1} \tag{13}$$

и

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2}. \tag{14}$$

Подстановка рядов из равенств (11)–(14) в уравнение (10) теперь приводит к равенству

$$\begin{aligned} &[r(r-1)c_0 x^r + (r+1)rc_1 x^{r+1} + \cdots] + \\ &\quad + [p_0 x + p_1 x^2 + \cdots] \cdot [rc_0 x^{r-1} + (r+1)c_1 x^r + \cdots] + \\ &\quad + [q_0 + q_1 x + \cdots] \cdot [c_0 x^r + c_1 x^{r+1} + \cdots] = 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Самая низкая степень x, которая появляется в равенстве (15), — это x^r. Если равенство (15) удовлетворяется тождественно, то коэффициент $r(r-1)c_0 + p_0 rc_0 + q_0 c_0$ при x^r должен обратиться в нуль. Поскольку $c_0 \neq 0$, из этого следует, что r должно удовлетворять квадратному уравнению

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0 \tag{16}$$

точно того же самого вида, что и полученное с помощью равноразмерного уравнения (7). Уравнение (16) называют **определяющим уравнением**[3] дифференциального уравнения (10), а его два корня (возможно равных) — **показателями** степени[4] дифференциального уравнения (в регулярной особой точке $x = 0$).

Наш вывод уравнения (16) показывает, что *если* обобщенный степенной ряд

$$y = x^r \sum c_n x^n$$

является решением дифференциального уравнения (10), *то* показатель степени r должен быть одним из корней r_1 и r_2 определяющего уравнения (16). Если $r_1 \neq r_2$, то из этого следует, что может существовать два возможных решения в виде обобщенного степенного ряда, тогда как если $r_1 = r_2$ то существует только одно решение в виде обобщенного степенного ряда; второе решение не может быть обобщенным степенным рядом. Показатели степени r_1 и r_2 в возможных решениях в виде обобщенного степенного ряда определяются

[3] Это уравнение зависит, конечно, от особой точки, в которой оно получено. Поэтому это уравнение при желании подчеркнуть эту зависимость называется *определяющим уравнением* ***в особой точке*** $x = 0$. Кроме того, как уже указывалось, часто это уравнение называется также *характеристическим уравнением*. — *Примеч. ред.*

[4] А также *характеристическими показателями*. — *Примеч. ред.*

(из определяющего уравнения) по значениям $p_0 = p(0)$ и $q_0 = q(0)$ так, как мы только что обсудили. Практически, особенно когда коэффициенты дифференциального уравнения в первоначальной форме (1) представляют собой многочлены, самый простой способ найти p_0 и q_0 часто состоит в том, чтобы записать уравнение в форме

$$y'' + \frac{p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots}{x} y' + \frac{q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \cdots}{x^2} y = 0. \tag{17}$$

Тогда простой взгляд на ряды, которые стоят в этих двух числителях, позволяет определить константы p_0 и q_0.

Пример 3 Найдем возможные показатели степени в решениях уравнения

$$2x^2(1+x)y'' + 3x(1+x)^3 y' - (1-x^2)y = 0$$

в виде обобщенных степенных рядов.

Решение Сначала мы делим каждый член на $2x^2(1+x)$. Это позволяет представить дифференциальное уравнение в форме

$$y'' + \frac{\frac{3}{2}(1+2x+x^2)}{x} y' + \frac{-\frac{1}{2}(1-x)}{x^2} y = 0$$

и таким образом определить, что $p_0 = \frac{3}{2}$ и $q_0 = -\frac{1}{2}$. Следовательно, определяющее уравнение имеет вид

$$r(r-1) + \tfrac{3}{2}r - \tfrac{1}{2} = r^2 + \tfrac{1}{2}r - \tfrac{1}{2} = (r+1)(r-\tfrac{1}{2}) = 0;$$

его корни $r_1 = \frac{1}{2}$ и $r_2 = -1$. Два возможных решения в виде обобщенного степенного ряда имеют тогда вид

$$y_1(x) = x^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{и} \quad y_2(x) = x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n. \qquad \blacksquare$$

Решения в виде обобщенных степенных рядов

Как только известны показатели степени r_1 и r_2, коэффициенты решения в виде обобщенного степенного ряда определяются подстановкой рядов из равенств (12)–(14) в дифференциальное уравнение, по сути, этот же самый метод использовался для определения коэффициентов в решениях в виде степенного ряда в разделе 8.2. Если показатели степени r_1 и r_2 комплексно сопряженные, то всегда существуют два линейно независимых решения в виде обобщенных степенных рядов. Здесь мы ограничим наше внимание случаем, в котором оба числа r_1 и r_2 являются вещественными. Мы также будем искать решения только для $x > 0$. Как только такое решение будет найдено, нужно будет только заменить x^{r_1} на $|x|^{r_1}$, чтобы получить решение для $x < 0$. Следующая теорема доказана в главе 4 книги Коддингтона (Coddington) *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, посвященной введению в обыкновенные дифференциальные уравнения.

Теорема 1 Решения в виде обобщенного степенного ряда

Предположим, что $x = 0$ — регулярная особая точка уравнения

$$x^2y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0. \tag{10}$$

Пусть $\rho > 0$ обозначает наименьший из радиусов сходимости степенных рядов

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \quad \text{и} \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n.$$

Пусть r_1 и r_2 — корни определяющего уравнения $r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$, причем $r_1 \geqq r_2$. Тогда

(a) для $x > 0$ существует решение уравнения (10) вида

$$y_1(x) = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (a_0 \neq 0), \tag{18}$$

соответствующее большему корню r_1;

(b) если $r_1 - r_2$ не равно ни нулю, ни положительному целому числу, то для $x > 0$ существует второе линейно независимое решение вида

$$y_2(x) = x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \qquad (b_0 \neq 0), \tag{19}$$

соответствующее меньшему корню r_2.

Радиус сходимости каждого степенного ряда в уравнениях (18) и (19) по крайней мере не меньше, чем ρ. Коэффициенты этих рядов можно определить, подставляя ряды в дифференциальное уравнение

$$x^2y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0. \qquad \blacktriangle$$

Мы уже видели, что если $r_1 = r_2$, то может существовать только одно решение в виде обобщенного степенного ряда. Оказывается, что если $r_1 - r_2$ — положительное целое число, то второе решение, соответствующее меньшему корню r_2, в виде обобщенного степенного ряда вида, указанного в равенстве (19), может существовать, а может, и не существовать. Эти исключительные случаи обсуждаются в разделе 8.4. Примеры 4–6 иллюстрируют процесс определения коэффициентов в таких решениях в виде обобщенного степенного ряда, существование которых гарантируется теоремой 1.

Пример 4 Найдем решения в виде обобщенного степенного ряда для уравнения

$$2x^2y'' + 3xy' - (x^2 + 1)y = 0. \tag{20}$$

Решение Сначала мы делим каждый член на $2x^2$. Это позволяет придать уравнению форму равенства (17):

$$y'' + \frac{\frac{3}{2}}{x}y' + \frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2}{x^2}y = 0. \tag{21}$$

Мы теперь видим, что $x = 0$ — регулярная особая точка и что $p_0 = \frac{3}{2}$ и $q_0 = -\frac{1}{2}$. Поскольку $p(x) \equiv \frac{3}{2}$ и $q(x) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2$ — многочлены, полученный обобщенный степенной ряд будет сходиться для всех $x > 0$. Определяющее уравнение имеет вид

$$r(r-1) + \tfrac{3}{2}r - \tfrac{1}{2} = \left(r - \tfrac{1}{2}\right)(r+1) = 0,$$

так что показатели степени равны $r_1 = \frac{1}{2}$ и $r_2 = -1$. Их разность не равна целому числу, так что теорема 1 гарантирует существование двух линейно независимых решений в виде обобщенных степенных рядов. Вместо того чтобы по отдельности подставлять

$$y_1 = x^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{и} \quad y_2 = x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

в уравнение (20), более эффективно начать с подстановки $y = x^r \sum c_n x^n$. Мы тогда получим рекуррентную формулу, которая зависит от r. При значении $r_1 = \frac{1}{2}$ она становится рекуррентной формулой для ряда для y_1, тогда как при $r_2 = -1$ она становится рекуррентной формулой для ряда для y_2.

Когда мы подставляем

➤
$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}, \quad y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r-1}$$

и

➤
$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2}$$

в уравнение (20) — первоначальное дифференциальное уравнение, а не в уравнение (21), — мы получаем

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r} + 3\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r} - \\ - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+2} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0. \tag{22}$$

На этом этапе продолжить поиск решения можно несколькими способами. Хорошая стандартная практика состоит в том, чтобы сдвинуть индексы так, чтобы показатель степени в каждом ряде был один и тот же самый, причем он должен равняться наименьшему имеющемуся в наличии. В этом примере мы сдвигаем индекс суммирования в третьей сумме на -2, чтобы уменьшить ее показатель степени от $n + r + 2$ до $n + r$. Это

дает

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r} + 3\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r} - \\ - \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2}x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0. \tag{23}$$

Общий диапазон суммирования — $n \geqq 2$, так что мы должны учесть случаи $n = 0$ и $n = 1$ отдельно. Если следовать нашей стандартной практике, члены при $n = 0$ всегда дадут определяющее уравнение

$$[2r(r-1) + 3r - 1]c_0 = 2\left(r^2 + \tfrac{1}{2}r - \tfrac{1}{2}\right)c_0 = 0.$$

Члены, соответствующие $n = 1$, дают

$$[2(r+1)r + 3(r+1) - 1]c_1 = (2r^2 + 5r + 2)c_1 = 0.$$

Поскольку коэффициент $2r^2 + 5r + 2$ при c_1 отличен от нуля при $r = \frac{1}{2}$ и $r = -1$, в любом случае

$$c_1 = 0. \tag{24}$$

Коэффициент при x^{n+r} в уравнении (23) равен

$$2(n+r)(n+r-1)c_n + 3(n+r)c_n - c_{n-2} - c_n = 0.$$

Мы решаем это уравнение относительно c_n и упрощаем результат; таким образом мы получаем рекуррентную формулу

➤
$$c_n = \frac{c_{n-2}}{2(n+r)^2 + (n+r) - 1} \qquad \text{для } n \geqq 2. \tag{25}$$

Случай 1: $r_1 = \frac{1}{2}$. Мы теперь пишем a_n вместо c_n и подставляем $r = \frac{1}{2}$ в уравнение (25). Это дает рекуррентную формулу

➤
$$a_n = \frac{a_{n-2}}{2n^2 + 3n} \qquad \text{для } n \geqq 2. \tag{26}$$

С помощью этой формулы мы можем определить коэффициенты в первом решении y_1 в виде обобщенного степенного ряда. Из уравнения (24) мы видим, что $a_n = 0$ для нечетных n. Полагая $n = 2, 4$ и 6 в уравнении (26), мы получаем

$$a_2 = \frac{a_0}{14}, \quad a_4 = \frac{a_2}{44} = \frac{a_0}{616} \quad \text{и} \quad a_6 = \frac{a_4}{90} = \frac{a_0}{55440}.$$

Следовательно, первое решение в виде обобщенного степенного ряда имеет вид

$$y_1(x) = a_0 x^{1/2}\left(1 + \frac{x^2}{14} + \frac{x^4}{616} + \frac{x^6}{55440} + \cdots\right).$$

Случай 2: $r_2 = -1$. Мы теперь пишем b_n вместо c_n и подставляем $r = -1$ в уравнение (25). Это дает рекуррентную формулу

$$b_n = \frac{b_{n-2}}{2b^2 - 3n} \qquad \text{для } n \geqq 2. \tag{27}$$

И снова, из уравнения (24) следует, что $b_n = 0$ для нечетных n. Полагая $n = 2, 4$ и 6 в (27), мы получаем

$$b_2 = \frac{b_0}{2}, \quad b_4 = \frac{b_2}{20} = \frac{b_0}{40} \quad \text{и} \quad b_6 = \frac{b_4}{54} = \frac{b_0}{2160}.$$

Следовательно, второе решение в виде обобщенного степенного ряда имеет вид

$$y_2(x) = b_0 x^{-1}\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{40} + \frac{x^6}{2160} + \cdots\right). \qquad \blacksquare$$

Пример 5 Найдем решение в виде обобщенного степенного ряда уравнения Бесселя нулевого порядка

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0. \tag{28}$$

Решение В форме (17) уравнение (28) принимает вид

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{x^2}{x^2}y = 0.$$

Следовательно, $x = 0$ — регулярная особая точка, причем $p(x) \equiv 1$ и $q(x) = x^2$, так что наш ряд будет сходиться для всех $x > 0$. Поскольку $p_0 = 1$ и $q_0 = 0$, определяющее уравнение имеет вид

$$r(r-1) + r = r^2 = 0.$$

Таким образом, мы получаем только один единственный показатель степени $r = 0$, и поэтому есть только одно решение в виде обобщенного степенного ряда

$$y(x) = x^0 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

уравнения (28); фактически оно представляет собой степенной ряд.

Таким образом, мы подставляем $y = \sum c_n x^n$ в (28); в результате получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} nc_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} = 0.$$

Мы объединяем первые две суммы и сдвигаем индекс суммирования в третьей на -2 и в результате получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 c_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^n = 0.$$

Член, содержащий x^0, дает $0 = 0$: никакой новой информации. Член, содержащий x^1, дает $c_1 = 0$, а член для x^n приводит к рекуррентной формуле

$$c_n = -\frac{c_{n-2}}{n^2} \qquad \text{для } n \geqq 2. \tag{29}$$

Поскольку $c_1 = 0$, мы видим, что $c_n = 0$ для нечетных индексов n. Подставляя $n = 2, 4$ и 6 в уравнение (29), мы получаем

$$c_2 = -\frac{c_0}{2^2}, \quad c_4 = -\frac{c_2}{4^2} = \frac{c_0}{2^2 \cdot 4^2} \quad \text{и} \quad c_6 = -\frac{c_4}{6^2} = -\frac{c_0}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}.$$

Очевидно, общий член равен

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n c_0}{2^2 \cdot 4^2 \cdots (2n)^2} = \frac{(-1)^n c_0}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Выбор $c_0 = 1$ дает нам одну из самых важных специальных функций в математике, **функцию Бесселя нулевого порядка первого рода**, обозначаемую $J_0(x)$. Таким образом,

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} + \cdots. \tag{30}$$

В этом примере мы не смогли найти второе линейно независимое решение уравнения Бесселя нулевого порядка. Мы получим такое решение в разделе 8.4; это будет не обобщенный степенной ряд. ■

Случай, когда $r_1 - r_2$ — целое число

Как вы помните, если $r_1 - r_2$ — положительное целое число, то теорема 1 гарантирует существование только того решения в виде обобщенного степенного ряда, которое соответствует большему показателю степени r_1. Пример 6 иллюстрирует счастливый случай, в котором метод рядов тем не менее приводит ко второму решению в виде обобщенного степенного ряда. Случай, в котором второе решение не является обобщенным степенным рядом, будет обсуждаться в разделе 8.4.

Пример 6 Найдем решение в виде обобщенного степенного ряда для уравнения

$$xy'' + 2y' + xy = 0. \tag{31}$$

Решение В стандартной форме уравнение принимает вид

$$y'' + \frac{2}{x}y' + \frac{x^2}{x^2}y = 0,$$

так что мы сразу видим, что $x = 0$ — регулярная особая точка, причем $p_0 = 2$ и $q_0 = 0$. Определяющее уравнение

$$r(r-1) + 2r = r(r+1) = 0$$

имеет корни $r_1 = 0$ и $r_2 = -1$, разность которых равна целому числу. В этом случае, когда $r_1 - r_2$ — целое число, лучше отступить от стандартной процедуры примера 4 и начать работу с *меньшего* показателя степени. Как вы увидите, рекуррентная формула в этом случае подскажет, действительно ли существует второе решение в виде обобщенного степенного ряда. Если оно действительно существует, наши вычисления одновременно приведут к *обоим* решениям в виде обобщенного степенного ряда. Если второе решение не существует, мы снова начнем с большего показателя степени $r = r_1$ и получим одно решение в виде обобщенного степенного ряда, наличие которого гарантируется теоремой 1.

Следовательно, мы начинаем с подстановки

$$y = x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n-1}$$

в уравнение (31). Она приводит к равенству

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)(n-2)c_n x^{n-2} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

Мы комбинируем первые две суммы и сдвигаем индекс на -2 в третьей, в результате чего получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^{n-2} = 0. \tag{32}$$

Случаи $n = 0$ и $n = 1$ приводят к равенствам

$$0 \cdot c_0 = 0 \quad \text{и} \quad 0 \cdot c_1 = 0.$$

Следовательно, мы имеем *две* произвольные постоянные c_0 и c_1 и поэтому можем ожидать найти общее решение, содержащее два линейно независимых решения в виде обобщенных степенных рядов. Если бы для $n = 1$ мы получили уравнение вроде $0 \cdot c_1 = 3$, которое *не удовлетворяется* ни при каком значении c_1, это подсказало бы нам, что второе решение в виде обобщенного степенного ряда существовать не могло бы.

Теперь же, зная, что все хорошо, из (32) мы получаем рекуррентную формулу

➤
$$c_n = -\frac{c_{n-2}}{n(n-1)} \qquad \text{для } n \geqq 2. \tag{33}$$

Первые несколько значений n дают

$$c_2 = -\frac{1}{2\cdot 1}c_0, \qquad c_3 = -\frac{1}{3\cdot 2}c_1,$$

$$c_4 = -\frac{1}{4\cdot 3}c_2 \quad = \frac{c_0}{4!}, \qquad c_5 = -\frac{1}{5\cdot 4}c_3 = \frac{c_1}{5!},$$

$$c_6 = -\frac{1}{6\cdot 5}c_4 = -\frac{c_0}{6!}, \qquad c_7 = -\frac{1}{7\cdot 6}c_6 = -\frac{c_1}{7!};$$

очевидно, что общий член равен

➤
$$c_{2n} = \frac{(-1)^n c_0}{(2n)!}, \qquad c_{2n+1} = \frac{(-1)^n c_1}{(2n+1)!}$$

для $n \geqq 1$. Поэтому общее решение уравнения (31) имеет вид

$$y(x) = x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n =$$

$$= \frac{c_0}{x}\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) + \frac{c_1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right) =$$

$$= \frac{c_0}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \frac{c_1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Таким образом,

$$y(x) = \frac{1}{x}(c_0 \cos x + c_1 \sin x).$$

Этим способом мы нашли общее решение, выраженное линейной комбинацией двух решений в виде обобщенных степенных рядов

$$y_1(x) = \frac{\cos x}{x} \quad \text{и} \quad y_2(x) = \frac{\sin x}{x}. \tag{34}$$

Как показано на рис. 8.3.1, одно из этих решений в виде обобщенного степенного ряда ограничено, а другое неограничено в окрестности регулярной особой точки $x = 0$; это обычное явление в случае показателей степени, отличающихся на целое число. ■

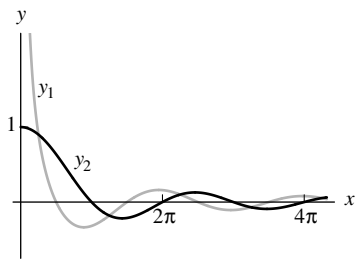


Рис. 8.3.1. Решения $y_1(x) = \dfrac{\cos x}{x}$ и $y_2(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ в примере 6

Резюме

Когда мы сталкиваемся с линейным дифференциальным уравнением второго порядка

➤
$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0$$

с аналитическими коэффициентными функциями, то, чтобы исследовать возможное существование решений в виде ряда, мы сначала записываем уравнение в стандартной форме:

➤
$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0.$$

Если $P(x)$ и $Q(x)$ являются и аналитическими в точке $x = 0$, то $x = 0$ — обыкновенная точка и уравнение имеет два линейно независимых решения в виде степенного ряда.

В противном случае $x = 0$ является особой точкой, и мы в этом случае записываем дифференциальное уравнение в форме

➤
$$y'' + \frac{p(x)}{x}y' + \frac{q(x)}{x^2}y = 0.$$

Если обе функции $p(x)$ и $q(x)$ являются аналитическими в точке $x = 0$, то $x = 0$ — регулярная особая точка. В этом случае мы находим два показателя степени r_1 и r_2 (предполагая, что они вещественны, причем $r_1 \geqq r_2$), решая определяющее уравнение

➤
$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0,$$

где $p_0 = p(0)$ и $q_0 = q(0)$. Всегда существует решение в виде обобщенного степенного ряда $y = x^{r_1} \sum a_n x^n$, соответствующее большему показателю степени r_1, причем, если $r_1 - r_2$ не равно целому числу, то также гарантируется существование второго решения в виде обобщенного степенного ряда $y_2 = x^{r_2} \sum b_n x^n$.

8.3. Задачи

В задачах 1–8 определите, является ли $x = 0$ обыкновенной точкой, регулярной особой точкой или иррегулярной (нерегулярной) особой точкой. Если это регулярная особая точка, найдите показатели степени дифференциального уравнения в точке $x = 0$.

1. $xy'' + (x - x^3)y' + (\sin x)y = 0$
2. $xy'' + x^2y' + (e^x - 1)y = 0$
3. $x^2y'' + (\cos x)y' + xy = 0$
4. $3x^3y'' + 2x^2y' + (1 - x^2)y = 0$
5. $x(1 + x)y'' + 2y' + 3xy = 0$
6. $x^2(1 - x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$
7. $x^2y'' + (6 \sin x)y' + 6y = 0$
8. $(6x + 2x^3)y'' + 21xy' + 9(x^2 - 1)y = 0$

Если $x = a \neq 0$ — особая точка линейного дифференциального уравнения второго порядка, то подстановка $t = x - a$ преобразует это дифференциальное уравнение в дифференциальное уравнение, имеющее $t = 0$ в качестве особой точки. Затем мы считаем, что первоначальное уравнение в точке $x = a$ имеет такое же поведение, что и новое уравнение в точке $t = 0$. Классифицируйте (как регулярные или иррегулярные (нерегулярные)) особые точки дифференциальных уравнений, данных в задачах 9–16.

9. $(1 - x)y'' + xy' + x^2y = 0$
10. $(1 - x)^2y'' + (2x - 2)y' + y = 0$
11. $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0$
12. $(x - 2)^3y'' + 3(x - 2)^2y' + x^3y = 0$
13. $(x^2 - 4)y'' + (x - 2)y' + (x + 2)y = 0$
14. $(x^2 - 9)^2y'' + (x^2 + 9)y' + (x^2 + 4)y = 0$
15. $(x - 2)^2y'' - (x^2 - 4)y' + (x + 2)y = 0$
16. $x^3(1 - x)y'' + (3x + 2)y' + xy = 0$

В задачах 17–26 найдите два линейно независимых решения в виде обобщенного степенного ряда (для $x > 0$) каждого из данных дифференциальных уравнений.

17. $4xy'' + 2y' + y = 0$
18. $2xy'' + 3y' - y = 0$
19. $2xy'' - y' - y = 0$
20. $3xy'' + 2y' + 2y = 0$
21. $2x^2y'' + xy' - (1 + 2x^2)y = 0$
22. $2x^2y'' + xy' - (3 - 2x^2)y = 0$
23. $6x^2y'' + 7xy' - (x^2 + 2)y = 0$
24. $3x^2y'' + 2xy' + x^2y = 0$
25. $2xy'' + (1 + x)y' + y = 0$
26. $2xy'' + (1 - 2x^2)y' - 4xy = 0$

В задачах 27–31 примените метод примера 6 и найдите два линейно независимых решения в виде обобщенного степенного ряда данных дифференциальных уравнений. Затем начертите их графики для $x > 0$.

27. $xy'' + 2y' + 9xy = 0$
28. $xy'' + 2y' - 4xy = 0$
29. $4xy'' + 8y' + xy = 0$
30. $xy'' - y' + 4x^3y = 0$
31. $4x^2y'' - 4xy' + (3 - 4x^2)y = 0$

В задачах 32–34 найдите первые три отличных от нуля члена каждого из двух линейно независимых решений в виде обобщенного степенного ряда.

32. $2x^2y'' + x(x + 1)y' - (2x + 1)y = 0$
33. $(2x^2 + 5x^3)y'' + (3x - x^2)y' - (1 + x)y = 0$
34. $2x^2y'' + (\sin x)y' - (\cos x)y = 0$

35. Обратите внимание, что $x = 0$ — иррегулярная (нерегулярная) точка уравнения

$$x^2y'' + (3x - 1)y' + y = 0.$$

(a) Покажите, что $y = x^r \sum c_n x^n$ может удовлетворять этому уравнению, только если $r = 0$. **(b)** Подставьте $y = \sum c_n x^n$ и получите "формальное" решение $y = \sum n! x^n$. Каков радиус сходимости этого ряда?

36. **(a)** Предположим, что A и B — отличные от нуля константы. Покажите, что уравнение $x^2y'' + Ay' + By = 0$ имеет самое большее одно решение вида $y = x^r \sum c_n x^n$. **(b)** Повторите действия, выполненные в части (a) для уравнения $x^3y'' + Axy' + By = 0$. **(c)** Покажите, что уравнение $x^3y'' + Ax^2y' + By = 0$ не имеет ни одного решения в виде обобщенного степенного ряда. (*Указание*. В каждом случае подставьте $y = x^r \sum c_n x^n$ в данное уравнение и определите возможные значения r.)

37. **(a)** Используйте метод Фробениуса и получите решение $y_1 = x$ уравнения $x^3y'' - xy' + y = 0$. **(b)** Проверьте подстановкой второе решение $y_2 = xe^{-1/x}$. Можно ли y_2 представить в виде обобщенного степенного ряда?

38. Примените метод Фробениуса к уравнению Бесселя порядка $\frac{1}{2}$

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \tfrac{1}{4}\right)y = 0$$

и получите его общее решение для $x > 0$,

$$y(x) = c_0 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + c_1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}.$$

На рис. 8.3.2 показаны графики двух указанных там решений.

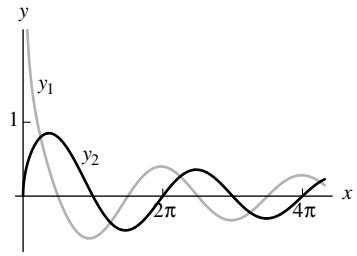


Рис. 8.3.2. Решения $y_1(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$ и $y_2(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$ в задаче 38

39. **(a)** Покажите, что уравнение Бесселя порядка 1

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0,$$

имеет показатели степени $r_1 = 1$ и $r_2 = -1$ в точке $x = 0$ и что обобщенный степенной ряд, соответствующий $r_1 = 1$, представляет собой

$$J_1(x) = \frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!\,(n+1)!\,2^{2n}}.$$

(b) Покажите, что нет ни одного решения в виде обобщенного степенного ряда, соответствующего меньшему показателю степени $r_2 = -1$; иными словами, покажите, что для ряда

$$y_2(x) = x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

невозможно определить коэффициенты.

40. Рассмотрим уравнение $x^2y'' + xy' + (1 - x)y = 0$. **(a)** Покажите, что его показатели степени равны $\pm i$, так что оно имеет комплекснозначные решения в виде обобщенных степенных рядов

$$y_+ = x^i\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \quad \text{и} \quad y_- = x^{-i}\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n,$$

причем $p_0 = q_0 = 1$. **(b)** Покажите, что рекуррентная формула имеет вид

$$c_n = \frac{c_{n-1}}{n^2 + 2rn}.$$

Примените эту формулу при $r = i$ и получите равенство $p_n = c_n$, а затем примените ее при $r = -i$ и получите $q_n = c_n$. Заключите, что p_n и q_n комплексно сопряженные: $p_n = a_n + ib_n$ и $q_n = a_n - ib_n$, где числа $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ вещественны. **(c)** Выведите из части (b), что дифференциальное уравнение, данное в этой задаче, имеет действительные решения вида

$$y_1(x) = A(x)\cos(\ln x) - B(x)\sin(\ln x),$$
$$y_2(x) = A(x)\sin(\ln x) + B(x)\cos(\ln x),$$

где $A(x) = \sum a_n x^n$ и $B(x) = \sum b_n x^n$.

41. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x(x-1)(x+1)^2y'' + 2x(x-3)(x+1)y' - 2(x-1)y = 0,$$

которое появилось в рекламе программы символической алгебры в мартовском выпуске (1984 года) американского математического ежемесячника *American Mathematical Monthly*. **(a)** Покажите, что $x = 0$ — регулярная особая точка с показателями степени $r_1 = 1$ и $r_2 = 0$. **(b)** Из теоремы 1 следует, что это дифференциальное уравнение имеет решение в виде степенного ряда вида

$$y_1(x) = x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots .$$

Подставьте этот ряд (при $c_1 = 1$) в дифференциальное уравнение, чтобы показать, что $c_2 = -2$, $c_3 = 3$, и

$$c_{n+2} = \frac{(n^2-n)c_{n-1} + (n^2-5n-2)c_n - (n^2+7n+4)c_{n+1}}{(n+1)(n+2)}$$

для $n \geqq 2$. **(c)** Используйте рекуррентную формулу из части (b), чтобы доказать индукцией, что $c_n = (-1)^{n+1}n$ для $n \geqq 1$ (!). Как следствие выведите (используя бесконечную геометрическую прогрессию), что

$$y_1(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$$

для $0 < x < 1$.

42. Эта задача представляет собой краткое введение в изучение **гипергеометрического уравнения** Гаусса

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]y' - \alpha\beta y = 0, \tag{35}$$

где α, β и γ — константы. Это знаменитое уравнение имеет всесторонние приложения в математике и физике. **(a)** Покажите, что $x = 0$ — регулярная особая точка уравнения (35), причем показатели степени равны 0 и $1 - \gamma$. **(b)** Если γ отлично от нуля и не равно отрицательному целому числу, то, следовательно (почему?), уравнение (35) имеет решение в виде степенного ряда

$$y(x) = x^0 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

причем $c_0 \neq 0$. Покажите, что рекуррентная формула для этого ряда имеет вид

$$c_{n+1} = \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(\gamma+n)(1+n)}c_n$$

для $n \geqq 0$. **(c)** Выведите, что при $c_0 = 1$ ряд из части (b) принимает вид

$$y(x) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n\beta_n}{n!\,\gamma_n}x^n, \tag{36}$$

где $\alpha_n = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1)$ для $n \geqq 1$, а β_n и γ_n определены аналогично. **(d)** Ряд (36) называется **гипергеометрическим рядом** и обычно обозначается $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$. Покажите, что

(i) $F(1,1,1,x) = \dfrac{1}{1-x}$ (бесконечная геометрическая прогрессия);

(ii) $xF(1,1,2,-x) = \ln(1+x)$;

(iii) $xF\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, -x^2\right) = \operatorname{arctg} x$;

(iv) $F(-k,1,1,-x) = (1+x)^k$ (биномиальный ряд).

8.3. Приложение. Автоматизация метода обобщенных степенных рядов

Здесь мы проиллюстрируем использование системы компьютерной алгебры (такой как *Maple*) для автоматизации вычислений, выполняемых по методу Фробениуса. Конечно, автоматизировать вычисления, выполняемые по методу Фробениуса, можно не только с помощью таких приложений, как *Maple*, *Mathematica* и MATLAB; по образцу приведенных здесь программ можно написать много других, своих собственных, притом на многих других языках. В этом разделе мы рассматриваем дифференциальное уравнение

$$2x^2y'' + 3xy' - (x^2+1)y = 0 \tag{1}$$

из примера 4, где мы нашли два корня определяющего уравнения $r_1 = \frac{1}{2}$ и $r_2 = -1$.

Начиная с корня определяющего уравнения $r_1 = \frac{1}{2}$, мы сначала запишем начальные семь членов предложенного решения в виде обобщенного степенного ряда:

```
a := array(0..6):
y := x^(1/2)*sum( a[n]*x^(n), n = 0..6);
```

$$y := \sqrt{x}\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6\right)$$

Затем мы подставляем этот ряд (фактически частичную сумму) в левую часть уравнения (1).

```
deq1 := 2*x^2*diff(y,x$2) + 3*x*diff(y,x) - (x^2 + 1)*y:
```

Очевидно, общий множитель $x^{3/2}$ будет вынесен за скобки после упрощения, так что мы умножаем на $x^{-3/2}$ и затем суммируем коэффициенты при одинаковых степенях x, иными словами, приводим подобные:

```
deq2 := collect( x^(-3/2)*simplify(deq1), x);
# привести подобные и упростить
```

$$deq2 := -x^7a_6 - x^6a_5 + (90a_6 - a_4)x^5 + (-a_3 + 65a_5)x^4 + (-a_2 + 44a_4)x^3 + (-a_1 + 27a_3)x^2 + (14a_2 - a_0)x + 5a_1$$

Мы видим здесь уравнения, которым должна удовлетворять последовательность коэффициентов. Мы можем вычислить их автоматически. Для этого сначала определим массив, а затем заполним элементы этого массива, приравнивая нулю (по очереди) каждый коэффициент ряда:

```
eqs := array(0..5):       # уравнения: = массив (0..5)
for n from 0 to 5 do      # для n от 0 до 5 выполнить
   eqs[n] := coeff(deq1,x,n) = 0: od:
   # уравнения[n]: = коэффициент
coeffEqs := convert(eqs, set);
```

$$coeffEqs := \{5a_1 = 0,\ -a_2 + 44a_4 = 0,\ -a_3 + 65a_5 = 0,\ 90a_6 - a_4 = 0,\ 14a_2 - a_0 = 0,\ -a_1 + 27a_3 = 0\}$$

Мы теперь имеем совокупность шести линейных уравнений, связывающих эти семь коэффициентов (от a_0 до a_6). Следовательно, мы можем продолжить решение для того, чтобы найти последовательность коэффициентов, выразив их через a_0:

```
succCoeffs := convert([seq(a[n], n=1..6)], set);
ourCoeffs := solve(coeffEqs, succCoeffs);     # решить
```

$$ourCoeffs := \left\{ a_1 = 0,\ a_6 = \frac{1}{55440}a_0,\ a_4 = \frac{1}{616}a_0,\ a_2 = \frac{1}{14}a_0,\ a_5 = 0,\ a_3 = 0 \right\}$$

Таким способом мы получили первое частное решение

$$y_1(x) = a_0 x^{1/2}\left(1 + \frac{x^2}{14} + \frac{x^4}{616} + \frac{x^6}{55440} + \cdots\right),$$

найденное в примере 4. Вы можете теперь повторить этот процесс, начиная с корня определяющего уравнения $r_2 = -1$, и подобным способом получить второе частное решение.

В следующих задачах используйте данный метод и получите решения в виде обобщенного степенного ряда, которые могут быть проверены с помощью данных известных общих решений:

1. $xy'' - y' + 4x^3y = 0,\ \ y(x) = A\cos x^2 + B\sin x^2$

2. $xy'' - 2y' + 9x^5y = 0,\ \ y(x) = A\cos x^3 + B\sin x^3$

3. $4xy'' - 2y' + y = 0,\ \ y(x) = A\cos\sqrt{x} + B\sin\sqrt{x}$

4. $xy'' + 2y' + xy = 0,\ \ y(x) = \dfrac{1}{x}(A\cos x + B\sin x)$

5. $4xy'' + 6y' + y = 0,\ \ y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}(A\cos\sqrt{x} + B\sin\sqrt{x})$

6. $x^2y'' + xy' + (4x^4 - 1)y = 0,\ \ y(x) = \dfrac{1}{x}(A\cos x^2 + B\sin x^2)$

7. $xy'' + 3y' + 4x^3y = 0,\ \ y(x) = \dfrac{1}{x^2}(A\cos x^2 + B\sin x^2)$

8. $x^2y'' + x^2y' - 2y = 0,\ \ y(x) = \dfrac{1}{x}[A(2-x) + B(2+x)e^{-x}]$

В задачах 9–11 используется ряд для арктангенса

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots.$$

9. $(x + x^3)y'' + (2 + 4x^2)y' + 2xy = 0,\ \ y(x) = \dfrac{1}{x}(A + B\operatorname{arctg} x)$

10. $(2x + 2x^2)y'' + (3 + 5x)y' + y = 0,\ \ y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}(A + B\operatorname{arctg}\sqrt{x})$

11. $(x + x^5)y'' + (3 + 7x^4)y' + 8x^3y = 0,\ \ y(x) = \dfrac{1}{x^2}(A + B\operatorname{arctg} x^2)$

8.4. Метод Фробениуса. Исключительные случаи

Мы продолжаем наше обсуждение уравнения

$$y'' + \frac{p(x)}{x}y' + \frac{q(x)}{x^2}y = 0 \tag{1}$$

где $p(x)$ и $q(x)$ — аналитические функции в точке $x = 0$, причем $x = 0$ — регулярная особая точка. Если корни r_1 и r_2 определяющего уравнения

$$\phi(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0 \tag{2}$$

не отличаются на целое число (т. е. их разность отлична от целого числа), то теорема 1 из раздела 8.3 гарантирует, что уравнение (1) имеет два линейно независимых решения в виде обобщенного степенного ряда. Мы рассматриваем теперь более сложный случай, в котором $r_1 - r_2$ — целое число. Если $r_1 = r_2$, есть только один допустимый показатель степени, и, таким образом, может существовать только одно решение в виде обобщенного степенного ряда. Но в примере 6 из раздела 8.3 мы видели, что если $r_1 = r_2 + N$, причем N — положительное целое число, то, возможно, что существует и второе решение в виде обобщенного степенного ряда. Мы также увидим, что возможен еще и случай, когда такое решение не существует. На самом деле, когда второе решение не является обобщенным степенным рядом, оно содержит $\ln x$. Как вы увидите в примерах 3 и 4, эти исключительные случаи встречаются при решении уравнения Бесселя. Для приложений это самое важное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами.

Нелогарифмический случай при $\mathbf{r_1 = r_2 + N}$

В разделе 8.3 мы получили определяющее уравнение, подставляя степенные ряды $p(x) = \sum p_n x^n$ и $q(x) = \sum q_n x^n$ и обобщенный степенной ряд

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \qquad (c_0 \neq 0) \tag{3}$$

в дифференциальное уравнение вида

$$x^2 y'' + x p(x) y' + q(x) y = 0. \tag{4}$$

В результате этой подстановки, после суммирования коэффициентов (приведения подобных) при одинаковых степенях x, получилось уравнение вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n(r) x^{n+r} = 0, \tag{5}$$

в котором коэффициенты зависят от r. Оказалось, что коэффициент при x^r равен

$$F_0(r) = [r(r-1) + p_0 r + q_0]c_0 = \phi(r)c_0, \tag{6}$$

что дает определяющее уравнение, потому что $c_0 \neq 0$ в соответствии с предположением; кроме того, для $n \geqq 1$ коэффициент при x^{n+r} имеет вид

$$F_n(r) = \phi(r+n)c_n + L_n(r; c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}). \tag{7}$$

Здесь L_n — некоторая линейная комбинация $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$. Хотя точная формула нисколько не необходима для наших целей, мы выпишем ее:

$$L_n = \sum_{k=0}^{n-1} [(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}]c_k. \tag{8}$$

Поскольку все коэффициенты в равенстве (5) должны обратиться в нуль для обобщенного степенного ряда, являющегося решением уравнения (4), то показатель степени r и коэффициенты $c_0, c_1, \ldots, c_n$ должны удовлетворять уравнению

$$\phi(r+n)c_n + L_n(r; c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}) = 0. \tag{9}$$

Это и есть *рекуррентная формула* для коэффициента c_n, выражающая его через $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$.

Теперь предположим, что $r_1 = r_2 + N$, причем N — положительное целое число. Если мы подставим больший показатель степени r_1 в уравнение (9), то коэффициент $\phi(r_1 + n)$ при c_n будет отличен от нуля для каждого $n \geqq 1$, потому что $\phi(r) = 0$ только тогда, когда $r = r_1$ и когда $r = r_2 < r_1$. Как только определены c_0, c_1, $\ldots$, c_{n-1}, мы можем решить уравнение (9) относительно c_n и продолжить вычислять последовательные коэффициенты в решении в виде обобщенного степенного ряда, соответствующего показателю степени r_1.

Но когда мы подставим меньший показатель степени r_2, при вычислении c_N может возникнуть затруднение. Поскольку в этом случае $\phi(r_2 + N) = 0$, уравнение (9) принимает вид

$$0 \cdot c_N + L_N(r_2; c_0, c_1, \ldots, c_{N-1}) = 0. \tag{10}$$

На этом этапе $c_0, c_1, \ldots, c_{N-1}$ уже определены. Если окажется, что

$$L_N(r_2; c_0, c_1, \ldots, c_{N-1}) = 0,$$

тогда мы сможем выбрать c_N произвольно и продолжить определять остальные коэффициенты во втором решении в виде обобщенного степенного ряда. Но если окажется, что

$$L_N(r_2; c_0, c_1, \ldots, c_{N-1}) \neq 0,$$

тогда уравнение (10) не удовлетворяется ни при каком выборе c_N; в этом случае не может существовать второе решение в виде обобщенного степенного ряда, соответствующее меньшему показателю степени r_2. Примеры 1 и 2 иллюстрируют эти две возможности.

Пример 1 Рассмотрим уравнение

$$x^2y'' + (6x + x^2)y' + xy = 0. \tag{11}$$

Здесь $p_0 = 6$ и $q_0 = 0$, так что определяющее уравнение имеет вид

$$\phi(r) = r(r-1) + 6r = r^2 + 5r = 0, \tag{12}$$

а его корни равны $r_1 = 0$ и $r_2 = -5$; корни отличаются на целое число $N = 5$. Мы подставляем обобщенный степенной ряд $y = \sum c_n x^{n+r}$

и получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r} + 6\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r+1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+1} = 0.$$

Когда мы объединим первые две, а также последние две суммы и в последней сдвинем индекс на -1, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+r)^2 + 5(n+r)]c_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+r)c_{n-1}x^{n+r} = 0.$$

Члены, соответствующие $n = 0$, дают определяющее уравнение (12), тогда как при $n \geqq 1$ мы получаем уравнение

$$[(n+r)^2 + 5(n+r)]c_n + (n+r)c_{n-1} = 0, \tag{13}$$

которое в данном примере соответствует общему уравнению (9). Заметьте, что коэффициент при c_n равен $\phi(n+r)$.

Мы теперь следуем рекомендации в разделе 8.3 для случая $r_1 = r_2 + N$: мы начинаем с меньшего корня $r_2 = -5$. При $r_2 = -5$ уравнение (13) приводится к

$$n(n-5)c_n + (n-5)c_{n-1} = 0. \tag{14}$$

Если $n \neq 5$, мы можем решить это уравнение относительно c_n и получить рекуррентную формулу

$$c_n = -\frac{c_{n-1}}{n} \qquad \text{для } n \neq 5. \tag{15}$$

Это приводит к равенствам

$$\begin{aligned} c_1 &= -c_0, & c_2 &= -\frac{c_1}{2} = \frac{c_0}{2}, \\ c_3 &= -\frac{c_2}{3} = -\frac{c_0}{6} \qquad \text{и} & c_4 &= -\frac{c_3}{4} = \frac{c_0}{24}. \end{aligned} \tag{16}$$

В случае $r_1 = r_2 + N$ всегда именно коэффициент c_N требует специального рассмотрения. Здесь $N = 5$, и при $n = 5$ уравнение (14) принимает форму $0 \cdot c_5 + 0 = 0$. Следовательно, c_5 — вторая произвольная постоянная и мы можем вычислить дополнительные коэффициенты, все еще используя рекуррентную формулу (15):

$$c_6 = -\frac{c_5}{6}, \quad c_7 = -\frac{c_6}{7} = \frac{c_5}{6\cdot 7}, \quad c_8 = -\frac{c_7}{8} = -\frac{c_5}{6\cdot 7\cdot 8} \tag{17}$$

и так далее.

Объединив результаты, выраженные в равенствах (16) и (17), мы получим формулу

$$\begin{aligned} y = x^{-5}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \\ = c_0 x^{-5}\left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) + \\ + c_5 x^{-5}\left(x^5 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{6\cdot 7} - \frac{x^8}{6\cdot 7\cdot 8} + \cdots\right), \end{aligned}$$

куда входят две произвольные постоянные c_0 и c_5. Таким образом, мы нашли два решения уравнения (11) в виде обобщенных степенных рядов

$$y_1(x) = x^{-5}\left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right)$$

и

$$y_2(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{6\cdot 7\cdots(n+5)} = 1 + 120\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n+5)!}. \quad \blacksquare$$

Пример 2 Определим, действительно ли уравнение

$$x^2 y'' - xy' + (x^2 - 8)y = 0 \tag{18}$$

имеет два линейно независимых решения в виде обобщенных степенных рядов.

Решение Здесь $p_0 = -1$ и $q_0 = -8$, так что определяющее уравнение

$$\phi(r) = r(r-1) - r - 8 = r^2 - 2r - 8 = 0$$

имеет корни $r_1 = 4$ и $r_2 = -2$, отличающиеся на $N = 6$. После подстановки $y = \sum c_n x^{n+r}$ в уравнение (18), мы получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+2} - 8\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0. \end{aligned}$$

Если мы сдвинем индекс на -2 в третьей сумме и объединим другие три суммы, мы получим

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+r)^2 - 2(n+r) - 8]c_n x^{n+r} + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^{n+r} = 0.$$

Коэффициент при x^r дает определяющее уравнение, а коэффициент при x^{r+1} дает равенство

$$\left[(r+1)^2 - 2(r+1) - 8\right] c_1 = 0.$$

Поскольку коэффициент c_1 отличен от нуля и для $r = 4$, и для $r = -2$, то $c_1 = 0$ в каждом из этих случаев. Для $n \geqq 2$ мы получаем уравнение

$$\left[(n+r)^2 - 2(n+r) - 8\right] c_n + c_{n-2} = 0, \tag{19}$$

которое в данном примере соответствует общему решению (9); заметьте, что коэффициент при c_n равен $\phi(n+r)$.

Мы работаем сначала с меньшим корнем $r = r_2 = -2$. Тогда уравнение (19) принимает вид

$$n(n-6)c_n + c_{n-2} = 0 \tag{20}$$

для $n \geqq 2$. Для $n \neq 6$ мы можем решить это уравнение и найти рекуррентную формулу

$$c_n = -\frac{c_{n-2}}{n(n-6)} \qquad (n \geqq 2,\ n \neq 6). \tag{21}$$

Поскольку $c_1 = 0$, эта формула дает

$$c_2 = \frac{c_0}{8}, \qquad c_3 = 0,$$

$$c_4 = \frac{c_2}{8} = \frac{c_0}{64} \qquad \text{и} \qquad c_5 = 0.$$

Теперь уравнение (20) при $n = 6$ приводит к равенству

$$0 \cdot c_6 + \frac{c_0}{64} = 0.$$

Но $c_0 \neq 0$ в соответствии с предположением, и, следовательно, невозможно выбрать c_6 так, чтобы выполнялось это равенство. Таким образом, *нет ни одного* решения в виде обобщенного степенного ряда, соответствующего меньшему корню $r_2 = -2$.

Чтобы найти единственное решение в виде обобщенного степенного ряда, соответствующее большему корню $r_1 = 4$, мы подставляем $r = 4$ в уравнение (19) и получаем рекуррентную формулу

$$c_n = -\frac{c_{n-2}}{n(n+6)} \qquad (n \geqq 2). \tag{22}$$

Это дает

$$c_2 = -\frac{c_0}{2 \cdot 8}, \quad c_4 = -\frac{c_2}{4 \cdot 10} = \frac{c_0}{2 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 10}.$$

Общий вид:

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n c_0}{2 \cdot 4 \cdots (2n) \cdot 8 \cdot 10 \cdots (2n+6)} = \frac{(-1)^n 6 c_0}{2^{2n} n!\,(n+3)!}.$$

Это приводит к решению уравнения (18) в виде обобщенного степенного ряда

$$y_1(x) = x^4 \left(1 + 6 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} n!\,(n+3)!} \right). \qquad \blacksquare$$

Понижение порядка

Когда существует только одно решение в виде обобщенного степенного ряда, нужен дополнительный метод. Здесь мы обсудим метод **понижения порядка**, который дает возможность использовать одно известное решение y_1 однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка для того, чтобы найти второе линейно независимое решение y_2. Рассмотрим уравнение второго порядка

$$\blacktriangleright \qquad y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{23}$$

на открытом интервале I, на котором функции P и Q непрерывны. Предположим, что мы знаем одно решение y_1 уравнения (23). В соответствии с теоремой 2 из раздела 3.1, существуют второе линейно независимое решение y_2; наша задача состоит в том, чтобы найти y_2. Эта задача эквивалентна следующей: найти частное

$$v(x) = \frac{y_2(x)}{y_1(x)}. \tag{24}$$

Зная $v(x)$, получим y_2 в виде

$$y_2(x) = v(x)y_1(x). \tag{25}$$

Мы начинаем с подстановки выражения (25) в уравнение (23), используя производные

$$y_2' = vy_1' + v'y_1 \quad \text{и} \quad y_2'' = vy_1'' + 2v'y_1' + v''y_1.$$

Мы получаем

$$[vy_1'' + 2v'y_1' + v''y_1] + P\,[vy_1' + v'y_1] + Qvy_1 = 0,$$

и перегруппировка дает

$$v\,[y_1'' + Py_1' + Qy_1] + v''y_1 + 2v'y_1' + Pv'y_1 = 0.$$

Но заключенное в скобки выражение в этом последнем уравнении обращается в нуль, потому что y_1 — решение уравнения (23). Учитывая это, получаем уравнение

$$v''y_1 + (2y_1' + Py_1)v' = 0. \tag{26}$$

Ключ к успеху этого метода состоит в том, что уравнение (26) *линейно* относительно v'. Таким образом, замена в (25) понизила порядок уравнения второго порядка (23) и оно свелось к линейному уравнению (26) первого порядка (относительно v'). Если обозначить $u = v'$ и предположить, что $y_1(x)$ никогда не обращается в нуль на интервале I, то из уравнения (26) получим уравнение

$$u' + \left(2\frac{y_1'}{y_1} + P(x) \right) u = 0. \tag{27}$$

Интегрирующий множитель для уравнения (27) имеет вид

$$\rho = \exp\left(\int \left(2\frac{y_1'}{y_1} + P(x)\right) dx\right) = \exp\left(2\ln|y_1| + \int P(x)\,dx\right),$$

так что

$$\rho(x) = y_1^2 \exp\left(\int P(x)\,dx\right).$$

Мы теперь интегрируем уравнение (27) и получаем

$$uy_1^2 \exp\left(\int P(x)\,dx\right) = C, \quad \text{так что} \quad v' = u = \frac{C}{y_1^2}\exp\left(-\int P(x)\,dx\right).$$

Еще одно интегрирование теперь приводит к равенству

$$\frac{y_2}{y_1} = v = C\int \frac{\exp\left(-\int P(x)\,dx\right)}{y_1^2}\,dx + K.$$

Выбирая конкретные значения констант $C = 1$ и $K = 0$, получаем

➤
$$y_2 = y_1 \int \frac{\exp\left(-\int P(x)\,dx\right)}{y_1^2}\,dx. \tag{28}$$

Эта формула дает второе решение $y_2(x)$ уравнения (23) на любом интервале, где $y_1(x)$ не обращается в нуль. Обратите внимание, что поскольку экспоненциальная функция никогда не обращается в нуль, $y_2(x)$ представляет собой (непостоянную) функцию, умноженную на $y_1(x)$, так что y_1 и y_2 — линейно независимые решения.

Логарифмические случаи

Мы теперь исследуем общую форму второго решения уравнения

➤
$$y'' + \frac{p(x)}{x}y' + \frac{q(x)}{x^2}y = 0 \tag{1}$$

в предположении, что показатели степени r_1 и $r_2 = r_1 - N$ этого уравнения отличаются на целое число $N \geqq 0$. Мы предполагаем, что мы уже нашли решение в виде обобщенного степенного ряда

➤
$$y_1(x) = x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (a_0 \neq 0) \tag{29}$$

для $x > 0$, соответствующее большему показателю степени r_1. Давайте писать $P(x)$ вместо $p(x)/x$ и $Q(x)$ вместо $q(x)/x^2$. Таким образом, мы можем переписать уравнение (1) в форме $y'' + Py' + Qy = 0$, что совпадает с уравнением (23).

Поскольку определяющее уравнение имеет корни r_1 и $r_2 = r_1 - N$, его можно легко разложить на множители:

$$r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = (r - r_1)(r - r_1 + N) = \\ = r^2 + (N - 2r_1)r + (r_1^2 - r_1 N) = 0,$$

откуда мы видим, что

$$p_0 - 1 = N - 2r_1;$$

иными словами,

$$-p_0 - 2r_1 = -1 - N. \tag{30}$$

Готовясь к использованию формулы понижения порядка (28), мы пишем

$$P(x) = \frac{p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots}{x} = \frac{p_0}{x} + p_1 + p_2 x + \cdots .$$

Тогда

$$\begin{aligned}\exp\left(-\int P(x)\,dx\right) &= \exp\left(-\int\left[\frac{p_0}{x} + p_1 + p_2 x + \cdots\right]dx\right) = \\ &= \exp\left(-p_0 \ln x - p_1 x - \tfrac{1}{2}p_2 x^2 - \cdots\right) = \\ &= x^{-p_0}\exp\left(-p_1 x - \tfrac{1}{2}p_2 x^2 - \cdots\right),\end{aligned}$$

так что

$$\exp\left(-\int P(x)\,dx\right) = x^{-p_0}\left(1 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots\right). \tag{31}$$

На последнем шаге мы использовали тот факт, что композиция аналитических функций является аналитической функцией и поэтому имеет представление в виде степенного ряда; начальный коэффициент этого ряда в (31) равен 1, потому что $e^0 = 1$.

Мы теперь подставляем (29) и (31) в (28); полагая $a_0 = 1$ в (29), получим

$$y_2 = y_1 \int \frac{x^{-p_0}\left(1 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots\right)}{x^{2r_1}\left(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right)^2}\,dx.$$

Теперь раскрываем скобки в знаменателе и упрощаем:

$$\begin{aligned}y_2 &= y_1 \int \frac{x^{-p_0-2r_1}\left(1 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots\right)}{1 + B_1 x + B_2 x^2 + \cdots}\,dx = \\ &= y_1 \int x^{-1-N}\left(1 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots\right)\,dx.\end{aligned} \tag{32}$$

(На последнем шаге мы как бы выполнили деление в столбик, т. е. записали результат (частное) в том виде, в каком он получился бы в том случае, если бы мы выполнили такую же процедуру, каую мы выполняем при делении на бумаге, когда выполняем деление с выписыванием всех промежуточных шагов, и, кроме того, воспользовались равенством (30).) Мы теперь рассмотрим отдельно случаи $N = 0$ и $N > 0$. Мы хотим установить общую форму y_2, не следя за видом коэффициентов.

Случай 1: равные показатели степени ($r_1 = r_2$). При $N = 0$ из равенства (32) получаем

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 \int \left(\frac{1}{x} + C_1 + C_2 x^2 + \cdots \right) dx = \\ &= y_1 \ln x + y_1 \left(C_1 x + \tfrac{1}{2} C_2 x^2 + \cdots \right) = \\ &= y_1 \ln x + x^{r_1} \left(1 + a_1 x + \cdots \right) \left(C_1 x + \tfrac{1}{2} C_2 x^2 + \cdots \right) = \\ &= y_1 \ln x + x^{r_1} \left(b_0 x + b_1 x^2 + b_2 x^3 + \cdots \right). \end{aligned}$$

Следовательно, в случае равных показателей степени общая форма решения y_2 имеет вид

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + x^{1+r_1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n. \tag{33}$$

Обратите внимание на логарифмический член; он присутствует обязательно, если $r_1 = r_2$.

Случай 2: положительная целая разность ($r_1 = r_2 + N$). При $N > 0$ из равенства (32) имеем

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 \int x^{-1-N} \left(1 + C_1 x + C_2 x^2 + \cdots + C_N x^N + \cdots \right) dx = \\ &= y_1 \int \left(\frac{C_N}{x} + \frac{1}{x^{N+1}} + \frac{C_1}{x^N} + \cdots \right) dx = \\ &= C_N y_1 \ln x + y_1 \left(\frac{x^{-N}}{-N} + \frac{C_1 x^{-N+1}}{-N+1} + \cdots \right) = \\ &= C_N y_1 \ln x + x^{r_2+N} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) x^{-N} \left(-\frac{1}{N} + \frac{C_1 x}{-N+1} + \cdots \right), \end{aligned}$$

так что

$$y_2(x) = C_N y_1(x) \ln x + x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \tag{34}$$

где $b_0 = -a_0/N \neq 0$. Это дает общую форму y_2 в случае показателей степени, отличающихся на положительное целое число. Обратите внимание на коэффициент C_N, который появляется в (34), но не в (33). Если окажется, что $C_N = 0$, то логарифмического члена не будет; если это так, то уравнение (1) имеет второе решение в виде обобщенного степенного ряда (как в примере 1).

В нашем выводе равенств (33) и (34), — он показывает общую форму второго решения в случаях $r_1 = r_2$ и $r_1 - r_2 = N > 0$ соответственно, — мы не сказали ничего о радиусах сходимости различных степенных рядов, которые встречались по ходу этого вывода. Теорема 1 (следует ниже) представляет собой резюме предыдущего обсуждения и, кроме того, устанавливает, где сходятся ряды в равенствах (33) и (34). Как и в теореме 1 из раздела 8.3, мы ограничиваем наше внимание решениями для $x > 0$.

Теорема 1 Исключительные случаи

Предположим, что $x = 0$ — регулярная особая точка уравнения

$$x^2y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0. \tag{4}$$

Пусть $\rho > 0$ обозначает наименьший из радиусов сходимости степенных рядов

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \quad \text{и} \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n.$$

Пусть r_1 и r_2 — корни (причем $r_1 \geqq r_2$) определяющего уравнения

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0.$$

(a) Если $r_1 = r_2$, то уравнение (4) имеет два решения y_1 и y_2 вида

➤
$$y_1(x) = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (a_0 \neq 0) \tag{35a}$$

и

➤
$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + x^{r_1+1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n. \tag{35b}$$

(b) Если $r_1 - r_2 = N$ — положительное целое число, то уравнение (4) имеет два решения y_1 и y_2 вида

➤
$$y_1(x) = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (a_0 \neq 0) \tag{36a}$$

и

➤
$$y_2(x) = Cy_1(x) \ln x + x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n. \tag{36b}$$

В уравнении (36b) $b_0 \neq 0$, но C может быть нулем или отличным от нуля, так что в этом случае фактически логарифмический член может присутствовать или отсутствовать. Радиусы сходимости всех степенных рядов в этой теореме по крайней мере не меньше, чем ρ. Коэффициенты в этих рядах (и константа C в уравнении (36b)) могут быть определены прямой подстановкой ряда в дифференциальное уравнение (4). ▲

Пример 3 Чтобы проиллюстрировать случай $r_1 = r_2$, мы найдем второе решение уравнения Бесселя нулевого порядка

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0, \tag{37}$$

для которого $r_1 = r_2 = 0$. В примере 5 из раздела 8.3 мы нашли первое решение

$$y_1(x) = J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}. \tag{38}$$

Согласно уравнению (35b) второе решение будет иметь вид

$$y_2 = y_1 \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n. \tag{39}$$

Первые две производные функции y_2 имеют вид

$$y_2' = y_1' \ln x + \frac{y_1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^{n-1}$$

и

$$y_2'' = y_1'' \ln x + \frac{2y_1'}{x} - \frac{y_1}{x^2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) b_n x^{n-2}.$$

Мы подставляем их в уравнение (37) и используем то, что $J_0(x)$ также удовлетворяет этому уравнению, в результате чего получаем

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 y_2'' + x y_2' + x^2 y_2 = \\ &= \left[x^2 y_1'' + x y_1' + x^2 y_1\right] \ln x + 2x y_1' + \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) b_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+2}, \end{aligned}$$

из этого следует, что

$$0 = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} + b_1 x + 2^2 b_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (n^2 b_n + b_{n-2}) x^n. \tag{40}$$

Единственный член в равенстве (40), содержащий x, есть $b_1 x$, так что $b_1 = 0$. Но $n^2 b_n + b_{n-2} = 0$, если n нечетное, и из этого следует, что все коэффициенты с нечетными индексами в y_2 обращаются в нуль.

Теперь мы исследуем коэффициенты с четными индексами в равенстве (40). Сначала мы заметим, что

$$b_2 = -2 \cdot \frac{(-1)(2)}{2^2 \cdot 2^2 \cdot (1!)^2} = \frac{1}{4}. \tag{41}$$

Для $n \geqq 2$ из равенства (40) мы получаем рекуррентную формулу

$$(2n)^2 b_{2n} + b_{2n-2} = -\frac{(2)(-1)^n (2n)}{2^{2n}(n!)^2}. \tag{42}$$

Неоднородные рекуррентные формулы типа (42) типичны для исключительных случаев метода Фробениуса, и их решение часто требует маленькой изобретательности. Обычно стратегия зависит от обнаружения самой заметной зависимости b_{2n} от n. Мы обращаем внимание на присутствие $2^{2n}(n!)^2$ в правой части равенства (42); учитывая также коэффициент $(2n)^2$ в левой части, все это заставляет нас думать о b_{2n} как о *чем-то*,

разделенном на $2^{2n}(n!)^2$. Отмечая также чередование знаков, мы делаем подстановку

$$b_{2n} = \frac{(-1)^{n+1}c_{2n}}{2^{2n}(n!)^2}. \tag{43}$$

Мы просто ожидаем, что в результате этого рекуррентная формула для c_{2n} будет более простой, чем рекуррентная формула для b_{2n}. Мы выбрали $(-1)^{n+1}$, а не $(-1)^n$, потому что $b_2 = \frac{1}{4} > 0$; при $n = 1$ в (43) мы получаем $c_2 = 1$. Подстановка (43) в (42) дает

$$(2n)^2\frac{(-1)^{n+1}c_{2n}}{2^{2n}(n!)^2} + \frac{(-1)^n c_{2n-2}}{2^{2n-2}[(n-1)!]^2} = \frac{(-2)(-2)^n(2n)}{2^{2n}(n!)^2},$$

что сводится к чрезвычайно простой рекуррентной формуле

$$c_{2n} = c_{2n-2} + \frac{1}{n}.$$

Таким образом,

$$c_4 = c_2 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2},$$

$$c_6 = c_4 + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3},$$

$$c_8 = c_6 + \frac{1}{4} \;=\; 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4},$$

и так далее. Очевидно,

$$c_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = H_n, \tag{44}$$

где через H_n мы обозначаем n-ю частичную сумму гармонического ряда $\sum(1/n)$.

Наконец, имея в виду, что все коэффициенты с нечетными индексами равны нулю, мы подставляем (43) и (44) в (39) и получаем второе решение

$$y_2(x) = J_0(x)\ln x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}H_n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} =$$

$$= J_0(x)\ln x + \frac{x^2}{4} - \frac{3x^4}{128} + \frac{11x^6}{13824} - \cdots \tag{45}$$

уравнения Бесселя нулевого порядка. Степенной ряд в (45) сходится для всех x. Что касается других линейно независимых [от $J_0(x)$] решений, то из них чаще всего используется то, которое имеет вид

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}(\gamma - \ln 2)y_1 + \frac{2}{\pi}y_2;$$

иными словами,

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[\left(\gamma + \ln\frac{x}{2}\right)J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}H_n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}\right], \qquad (46)$$

где γ обозначает *константу Эйлера*:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}(H_n - \ln n) \approx 0{,}57722. \qquad (47)$$

Эта конкретная комбинация $Y_0(x)$ выбрана из-за ее хорошего поведения при $x \to +\infty$; ее называют **функцией Бесселя нулевого порядка второго рода**. ■

Пример 4 Метод, альтернативный к методу подстановки, мы проиллюстрируем в случае $r_1 - r_2 = N$, используя метод понижения порядка для получения второго решения уравнения Бесселя порядка 1:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0, \qquad (48)$$

соответствующее определяющее уравнение которого имеет корни $r_1 = 1$ и $r_2 = -1$. Согласно задаче 39 из раздела 8.3, одно решение уравнения (48) имеет вид

$$y_1(x) = J_1(x) = \frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}n!\,(n+1)!} = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{16} + \frac{x^5}{384} - \frac{x^7}{18432} + \cdots. \qquad (49)$$

При $P(x) = 1/x$ с учетом равенства (48) формула понижения порядка (28) дает

$$\begin{aligned}
y_2 &= y_1\int\frac{1}{xy_1^2}\,dx = \\
&= y_1\int\frac{1}{x(x/2 - x^3/16 + x^5/384 - x^7/18432 + \cdots)^2}\,dx = \\
&= y_1\int\frac{4}{x^3(1 - x^2/8 + x^4/192 - x^6/9216 + \cdots)^2}\,dx = \\
&= 4y_1\int\frac{1}{x^3(1 - x^2/4 + 5x^4/192 - 7x^6/4608 + \cdots)}\,dx = \\
&= 4y_1\int\frac{1}{x^3}\left(1 + \frac{x^2}{4} + \frac{7x^4}{192} + \frac{19x^6}{4608} + \cdots\right)dx = \\
&= 4y_1\int\left(\frac{1}{4x} + \frac{1}{x^3} + \frac{7x}{192} + \frac{19x^3}{4608} + \cdots\right)dx = \\
&= y_1\ln x + 4y_1\left(-\frac{1}{2x^2} + \frac{7x^2}{384} + \frac{19x^4}{18432} + \cdots\right).
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x - \frac{1}{x} + \frac{x}{8} + \frac{x^3}{32} - \frac{11x^5}{4608} + \cdots . \tag{50}$$

Заметьте, что метод понижения порядка позволяет легко вычислить первые несколько членов ряда, но не позволяет получить рекуррентную формулу, которая может использоваться для вычисления общего члена ряда.

При выполнении вычислений, подобных проведенным в примере 3 (но более сложных — см. задачу 21), метод подстановки помогает получить решение

$$y_3(x) = y_1(x)\ln x - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (H_n + H_{n-1}) x^{2n-1}}{2^{2n} n!\,(n-1)!}, \tag{51}$$

где H_n определено в (44) для $n \geqq 1$; $H_0 = 0$. Читатель может проверить, что члены, выписанные в равенстве (50), совпадают с теми, которые получились бы из разложения в ряд

$$y_2(x) = \frac{3}{4} J_1(x) + y_3(x). \tag{52}$$

Чаще всего используется линейно независимая [от J_1] следующая комбинация решений уравнения Бесселя порядка 1:

$$\begin{aligned} Y_1(x) &= \frac{2}{\pi}(\gamma - \ln 2) y_1(x) + \frac{2}{\pi} y_3(x) \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\left(\gamma + \ln\frac{x}{2}\right) J_1(x) - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (H_n + H_{n-1}) x^{2n-1}}{2^{2n} n!\,(n-1)!}\right]. \end{aligned} \tag{53}$$

■

Примеры 3 и 4 иллюстрируют два метода нахождения решений в логарифмических случаях — прямой подстановкой и понижением порядка. Третий альтернативный метод кратко очерчен в задаче 19.

8.4. Задачи

В задачах 1–8 примените метод из примера 1 и найдите два линейно независимых решения в виде обобщенного степенного ряда или найдите одно такое решение и покажите (как в примере 2), что больше решений такого типа не существует.

1. $xy'' + (3 - x)y' - y = 0$
2. $xy'' + (5 - x)y' - y = 0$
3. $xy'' + (5 + 3x)y' + 3y = 0$
4. $5xy'' + (30 + 3x)y' + 3y = 0$
5. $xy'' - (4 + x)y' + 3y = 0$
6. $2xy'' - (6 + 2x)y' + y = 0$
7. $x^2y'' + (2x + 3x^2)y' - 2y = 0$
8. $x(1 - x)y'' - 3y' + 2y = 0$

В задачах 9–14 сначала найдите первые четыре отличных от нуля члена решения данного дифференциального уравнения в виде обобщенного степенного ряда. Затем используйте метод понижения порядка (как в примере 4) и найдите логарифмический член и первые три отличных от нуля члена второго линейно независимого решения.

9. $xy'' + y' - xy = 0$

10. $x^2y'' - xy' + (x^2+1)y = 0$

11. $x^2y'' + (x^2 - 3x)y' + 4y = 0$

12. $x^2y'' + x^2y' - 2y = 0$

13. $x^2y'' + (2x^2 - 3x)y' + 3y = 0$

14. $x^2y'' + x(1+x)y' - 4y = 0$

15. В этой задаче сначала воспользуйтесь тем, что

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} + \cdots .$$

Используя метод понижения порядка, получите второе линейно независимое решение

$$y_2(x) = J_0(x)\ln x + \frac{x^2}{4} - \frac{3x^4}{128} + \frac{11x^6}{13284} - \cdots$$

уравнения Бесселя нулевого порядка.

16. Найдите два линейно независимых решения уравнения Бесселя порядка $\frac{3}{2}$

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \tfrac{9}{4}\right)y = 0$$

в виде обобщенного степенного ряда.

17. **(a)** Проверьте, что $y_1(x) = xe^x$ — одно из решений уравнения

$$x^2y'' - x(1+x)y' + y = 0.$$

(b) Обратите внимание, что $r_1 = r_2 = 1$. Подставьте

$$y_2 = y_1 \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+1}$$

в дифференциальное уравнение и выведите, что $b_1 = -1$ и что

$$nb_n - b_{n-1} = -\frac{1}{n!} \quad \text{для } n \geqq 2.$$

(c) Подставьте $b_n = c_n/n!$ в эту рекуррентную формулу и на основании полученного равенства заключите, что $c_n = -H_n$. Таким образом, второе решение имеет вид

$$y_2(x) = xe^x \ln x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n x^{n+1}}{n!}.$$

18. Рассмотрим уравнение $xy'' - y = 0$, которое имеет показатели степени $r_1 = 1$ и $r_2 = 0$ в точке $x = 0$. **(a)** Получите решение в виде обобщенного степенного ряда

$$y_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!\,(n-1)!}.$$

(b) Подставьте

$$y_2 = Cy_1 \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

в уравнение $xy'' - y = 0$ и получите рекуррентную формулу

$$n(n+1)b_{n+1} - b_n = -\frac{2n+1}{(n+1)!\,n!}C.$$

На основании этого заключите, что второе решение имеет вид

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x + 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n + H_{n-1}}{n!\,(n-1)!}x^n.$$

19. Предположим, что дифференциальное уравнение

$$L[y] = x^2y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0 \tag{54}$$

имеет равные показатели степени $r_1 = r_2$ в регулярной особой точке $x = 0$, так что его определяющее уравнение имеет вид

$$\phi(r) = (r - r_1)^2 = 0.$$

Положите $c_0 = 1$ и определите $c_n(r)$ для $n \geqq 1$, используя уравнение (9); т. е.

$$c_n(r) = -\frac{L_n(r; c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})}{\phi(r+n)}. \tag{55}$$

Затем определите функцию $y(x, r)$ от x и r так:

$$y(x, r) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(r)x^{n+r}. \tag{56}$$

(a) Выведите из предыдущего обсуждения уравнения (9), что

$$L[y(x, r)] = x^r(r - r_1)^2. \tag{57}$$

Затем выведите, что

$$y_1 = y(x, r_1) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(r_1)x^{n+r_1} \tag{58}$$

— одно из решений уравнения (54). **(b)** Продифференцируйте уравнение (57) по r и покажите, что

$$L[y_r(x, r_1)] = \frac{\partial}{\partial r}\left[x^r(r - r_1)^2\right]\Big|_{r=r_1} = 0.$$

Выведите, что $y_2 = y_r(x, r_1)$ — второе решение уравнения (54). **(c)** Продифференцируйте уравнение (58) по r и покажите, что

$$y_2 = y_1 \ln x + x^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} c_n'(r_1)x^n. \tag{59}$$

20. Используя метод задачи 19, получите оба решения (38) и (45) уравнения Бесселя нулевого порядка. Следующие шаги намечают план этого вычисления. **(a)** Положите $c_0 = 1$; покажите, что уравнение (55) приводит в этом случае к равенствам

$$\begin{aligned} &(r+1)^2c_1(r) = 0 \quad \text{и} \\ &c_n(r) = -\frac{c_{n-2}(r)}{(n+r)^2} \quad \text{для } n \geqq 2. \end{aligned} \tag{60}$$

(b) Затем покажите, что $c_1(0) = c_1'(0) = 0$ и после этого выведите из (60), что $c_n(0) = c_n'(0) = 0$ для нечетных n. Следовательно, вы должны вычислить $c_n(0)$ и $c_n'(0)$ только для четных n. **(c)** Выведите из (60), что

$$c_{2n}(r) = \frac{(-1)^n}{(r+2)^2(r+4)^2\cdots(r+2n)^2}. \tag{61}$$

Положив $r = r_1 = 0$ в (58), получим $J_0(x)$. **(d)** Дифференцируя (61), покажите, что

$$c_{2n}'(0) = \frac{(-1)^{n+1}H_n}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Подстановка этого результата в (59) дает второе решение (45).

21. Получите логарифмическое решение (51) уравнения Бесселя порядка 1 методом подстановки. Следующие шаги намечают план этого вычисления. **(a)** Подставьте

$$y_2 = CJ_1(x)\ln x + x^{-1}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n\right)$$

в уравнение Бесселя и получите

$$-b_1 + x + \sum_{n=2}^{\infty}[(n^2-1)b_{n+1} + b_{n-1}]x^n + \\ + C\left[x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)x^{2n+1}}{2^{2n}(n+1)!\,n!}\right] = 0. \tag{62}$$

(b) Выведите из уравнения (62), что $C = -1$ и что $b_n = 0$ для нечетных n. **(c)** Затем выведите рекуррентную формулу

$$\left[(2n+1)^2 - 1\right]b_{2n+2} + b_{2n} = \frac{(-1)^n(2n+1)}{2^{2n}(n+1)!\,n!} \tag{63}$$

для $n \geqq 1$. Обратите внимание, что если выбрать произвольно b_2, то b_{2n} будет определено для всех $n > 1$. **(d)** Положите $b_2 = \frac{1}{4}$ и подставьте

$$b_{2n} = \frac{(-1)^n c_{2n}}{2^{2n}(n-1)!n!}$$

в уравнение (63) и получите

$$c_{2n+2} - c_{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}.$$

(e) Обратите внимание на то, что $c_2 = 1 = H_1 + H_0$ и выведите, что

$$c_{2n} = H_n + H_{n-1}.$$

8.4. Приложение. Понижение порядка в исключительном случае

Здесь мы иллюстрируем использование системы компьютерной алгебры, такой как *Mathematica*, для применения формулы понижения порядка уравнения (28) из этого раздела. Однако формула понижения порядка может быть полезна не только при применении таких приложений, как *Maple*, *Mathematica* и MATLAB, но и многих других. Чтобы проиллюстрировать метод, мы получим второе решение уравнения Бесселя нулевого порядка, начав с известного разложения решения

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2},$$

в степенной ряд, который мы вводим в систему вот так:

```
y1 = Sum[((-x^2/4)^n) / (n!)^2, {n, 0, 5}] + O[x]^12
```

Затем, полагая

```
P = 1/x;
```

остается только выполнить подстановку в интеграл в уравнении (28):

```
integral = Integrate[ Exp[ -Integrate[P,x]]/y1^2, x ]
```

$$\log(x) + \frac{x^2}{4} + \frac{5x^4}{128} + \frac{23x^6}{3456} + \frac{677x^8}{589824} + \frac{7313x^{10}}{36864000} + O(x^{12})$$

Затем отдельно умножаем `J0 = y1` и остальные члены ряда на логарифм, т. е. выполняем вычисление

```
y2 = J0*Log[x] + y1*(integral - Log[x])
```

что приводит нас к второму решению

$$J_0(x)\log(x) + \frac{x^2}{4} - \frac{3x^4}{128} + \frac{11x^6}{13824} - \frac{25x^8}{1769472} + \frac{137x^{10}}{884736000} + O(x^{12})$$

уравнения Бесселя нулевого порядка (мы выписали его в равенстве (45) в тексте).

После проверки (с помощью вашей системы компьютерной алгебры) представленного здесь вычисления вы можете начать со степенного ряда для $J_1(x)$ в уравнении (49) из этого раздела и получить подобным образом второе решение (50) уравнения Бесселя порядка 1. Этим способом можно также частично автоматизировать решение задач 9–14.

8.5. Уравнение Бесселя

Мы уже рассмотрели несколько случаев уравнения Бесселя порядка $p \geqq 0$,

➤
$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0. \tag{1}$$

Его решения теперь называются функциями Бесселя порядка p. Такие функции сначала появились в 1730-х годах в работе Даниила Бернулли и Леонарда Эйлера, посвященной колебаниям вертикально подвешенной цепи. Само уравнение появилось в 1764 году в статье Эйлера, посвященной колебаниям круглого диска (например из барабанной кожи), а Фурье использовал функции Бесселя в его классическом трактате, посвященном теплоте (1822). Но их общие свойства были сначала изучены систематически в 1824 году в статье немецкого астрономома и математика Фридриха Вильгельма Бесселя (1784–1846), который исследовал движение планет. Стандартный источник информации о функциях Бесселя — трактат Джона Невилла Ватсона, посвященный теории функций Бесселя, 2-е издание которого вышло в Кембридже в издательстве Кембриджского университета в 1944 году (G. N. Watson. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2nd ed. (Cambridge: Cambridge University Press, 1944))[5]. Его 36 страниц ссылок, которые охватывают только период до 1922 года, дают некоторое представление об обширной литературе по этой теме.

[5] Есть перевод: Теория бесселевых функций, ч. 1–2, М., 1949. — *Примеч. ред.*

Уравнение Бесселя (1) имеет определяющее уравнение $r^2 - p^2 = 0$, корни которого равны $r = \pm p$. Если подставить $y = \sum c_m x^{m+r}$ в уравнение (1), мы обычным способом найдем, что $c_1 = 0$ и что

$$\left[(m+r)^2 - p^2\right] c_m + c_{m-2} = 0 \tag{2}$$

для $m \geqq 2$. Проверку уравнения (2) оставляем читателю (задача 6).

Случай $\mathbf{r = p > 0}$

Если мы положим $r = p$ и напишем a_m вместо c_m, то уравнение (2) даст рекуррентную формулу

$$a_m = -\frac{a_{m-2}}{m(2p+m)}. \tag{3}$$

Поскольку $a_1 = 0$, из этого следует, что $a_m = 0$ для всех нечетных значений m. Вот первые несколько коэффициентов с четными индексами:

$$a_2 = -\frac{a_0}{2(2p+2)} = -\frac{a_0}{2^2(p+1)},$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4(2p+4)} = \frac{a_0}{2^4 \cdot 2(p+1)(p+2)},$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{6(2p+6)} = -\frac{a_0}{2^6 \cdot 2 \cdot 3(p+1)(p+2)(p+3)}.$$

Общая формула:

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} m!\,(p+1)(p+2)\cdots(p+m)},$$

так что для большего корня $r = p$ мы получаем решение

$$y_1(x) = a_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+p}}{2^{2m} m!\,(p+1)(p+2)\cdots(p+m)}. \tag{4}$$

Если $p = 0$, это будет единственное решение в виде обобщенного степенного ряда; при $a_0 = 1$, это функция $J_0(x)$, с которой мы уже немного знакомы.

Случай $\mathbf{r = -p < 0}$

Если подставить $r = -p$ и написать b_m вместо c_m, уравнение (2) примет вид

$$m(m-2p)b_m + b_{m-2} = 0 \tag{5}$$

для $m \geqq 2$, тогда как $b_1 = 0$. Мы видим, что есть потенциальная трудность, если окажется, что $2p$ — положительное целое число, т. е. если p является положительным целым числом или нечетным положительным кратным $\frac{1}{2}$. Тогда при $m = 2p$ уравнение (5) будет выглядеть просто вот так: $0 \cdot b_m + b_{m-2} = 0$. Таким образом, если $b_{m-2} \neq 0$, то никакое значение b_m не может удовлетворить это уравнение.

Но если p является нечетным положительным кратным $\frac{1}{2}$, мы можем обойти эту трудность. Предположим, что $p = k/2$, где k — положительное нечетное число. Тогда необходимо только выбрать $b_m = 0$ для всех нечетных значений m. Критическим шагом является k-й,

$$k(k-k)b_k + b_{k-2} = 0.$$

И это равенство будет выполняться потому, что $b_k = b_{k-2} = 0$.

Следовательно, если p *не равно* положительному целому числу, мы полагаем $b_m = 0$ для нечетных m и определяем коэффициенты с четными индексами через b_0 с помощью рекуррентной формулы

$$b_m = -\frac{b_{m-2}}{m(m-2p)}, \qquad m \geqq 2. \tag{6}$$

Сравнивая (6) с (3), мы видим, что (6) приведет к тому же самому результату, что и (4), если не считать того, что p нужно заменить на $-p$. Таким образом, в этом случае мы получаем второе решение

$$y_2(x) = b_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-p}}{2^{2m} m!\,(-p+1)(-p+2)\cdots(-p+m)}. \tag{7}$$

Ряды в равенствах (4) и (7) сходятся для всех $x > 0$, потому что $x = 0$ — единственная особая точка уравнения Бесселя. Если $p > 0$, то ведущий член в y_1 имеет вид $a_0 x^p$, тогда как ведущий член в y_2 принимает вид $b_0 x^{-p}$. Следовательно, $y_1(0) = 0$, но $y_2(x) \to \pm\infty$ при $x \to 0$, так что ясно, что y_1 и y_2 являются линейно независимыми решениями уравнения Бесселя порядка $p > 0$.

Гамма-функция

Формулы (4) и (7) можно упростить с помощью **гамма-функции** $\Gamma(x)$, которая определена для $x > 0$ равенством

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt. \tag{8}$$

Нетрудно показать, что этот несобственный интеграл сходится для каждого $x > 0$. Гамма-функция — обобщение для $x > 0$ функции факториал (факториального многочлена) $n!$, которая определена только если n — неотрицательное целое число. Чтобы понять, почему $\Gamma(x)$ является обобщением $n!$, сначала мы обратим внимание на то, что

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, dt = \lim_{b\to\infty} \Big[-e^{-t}\Big]_0^b = 1. \tag{9}$$

Затем мы интегрируем по частям (полагая $u = t^x$ и $dv = e^{-t}\, dt$):

$$\Gamma(x+1) = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-t} t^x\, dt = \lim_{b\to\infty} \left(\Big[-e^{-t}t^x\Big]_0^b + \int_0^b x e^{-t} t^{x-1}\, dt \right) =$$

$$= x \left(\lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-t} t^{x-1}\, dt \right);$$

иными словами,

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \tag{10}$$

Это самое важное свойство гамма-функции.

Если мы объединим равенства (9) и (10), мы увидим, что

$$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1!, \quad \Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2!, \quad \Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3!$$

и вообще что

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad \text{для любого целого числа } n \geqq 0. \tag{11}$$

Вот важное частное значение гамма-функции:

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-1/2}\, dt = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\, du = \sqrt{\pi}, \tag{12}$$

где мы подставили u^2 вместо t в первом интеграле; то, что

$$\int_0^\infty e^{-u^2}\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

хорошо известно, но совсем не очевидно.

Хотя $\Gamma(x)$ определена равенством (8) только для $x > 0$, с помощью рекуррентной формулы (10) можно определить $\Gamma(x)$ для всех x, отличных от нуля и отрицательных целых чисел. Если $-1 < x < 0$, то

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x};$$

правая часть определена потому, что $0 < x + 1 < 1$. Та же самая формула может использоваться, чтобы продолжить так определенную функцию $\Gamma(x)$ на открый интервал $(-2, -1)$, затем на открытый интервал $(-3, -2)$ и т. д. График гамма-функции, продленной таким образом, показан на рис. 8.5.1. Студент, который хотел бы продолжать исследовать эту очаровательную тему, должен обратиться за справкой к книге Артина (Artin) *The Gamma Function* (New York: Holt, Rinehart and Winston, 1964). Эта книга, изданная в Нью-Йорке в 1964 году издательством Holt, Rinehart and Winston, целиком посвящена гамма-функции. Только 39 страниц, но это одно из самых прекрасных описаний во всей литературе по математике.

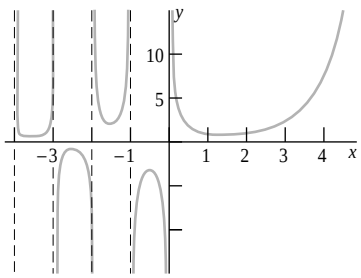


Рис. 8.5.1. График продолжения гамма-функции

Функции Бесселя первого рода

Если положить $a_0 = 1/[2^p\Gamma(p+1)]$ в (4), где $p > 0$, и обратить внимание, что

$$\Gamma(p+m+1) = (p+m)(p+m-1)\cdots(p+2)(p+1)\Gamma(p+1),$$

то повторным применением равенства (10) мы сможем записать **функцию Бесселя первого рода порядка** p очень кратко с помощью гамма-функции:

$$J_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(p+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p}. \tag{13}$$

Точно так же, если $p > 0$ не равно целому числу, мы полагаем $b_0 = 1/[2^{-p}\Gamma(-p+1)]$ в (7) и получаем линейно независимое второе решение

$$J_{-p}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(-p+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-p} \tag{14}$$

уравнения Бесселя порядка p. Если p не равно целому числу, мы имеем общее решение

$$y(x) = c_1 J_p(x) + c_2 J_{-p}(x) \tag{15}$$

для $x > 0$; причем x^p нужно заменить на $|x|^p$ в уравнениях (13)–(15), чтобы получить точные решения для $x < 0$.

Если $p = n$, неотрицательному целому числу, то из уравнения (13) имеем

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,(m+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n} \tag{16}$$

для функций Бесселя первого рода целого порядка. Таким образом,

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2} = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2\cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \cdots \tag{17}$$

и

$$J_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m 2^{2m+1}}{2^{2m+1} m!\,(m+1)!} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1}{2!\cdot 3!}\left(\frac{x}{2}\right)^5 - \cdots. \tag{18}$$

Графики функций $J_0(x)$ и $J_1(x)$ показаны на рис. 8.5.2. Общим видом они напоминают затухающие колебания по закону косинуса и синуса соответственно (см. задачу 27). И действительно, если исследовать ряд в (17), можно заметить (хотя бы частично) причину, по которой $J_0(x)$ и $\cos x$ *могли* бы быть подобны — нужны только незначительные изменения в знаменателях в формуле (17), чтобы получить ряд Тейлора для $\cos x$. Как и показано на рис. 8.5.2, нули функций $J_0(x)$ и $J_1(x)$ *разделены* — между любыми двумя последовательными нулями $J_0(x)$ есть точно один нуль $J_1(x)$ (задача 26) и наоборот. Первые четыре нуля $J_0(x)$ приблизительно равны $2{,}4048$, $5{,}5201$, $8{,}6537$ и $11{,}7915$. Для больших n n-й нуль функции $J_0(x)$ приблизительно равен $\left(n - \frac{1}{4}\right)\pi$; n-й нуль функции $J_1(x)$ приблизительно равен $\left(n + \frac{1}{4}\right)\pi$. Таким образом, интервал между последовательными нулями $J_0(x)$ или $J_1(x)$

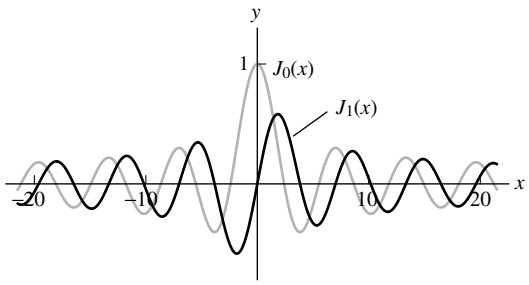


Рис. 8.5.2. Графики функций Бесселя $J_0(x)$ и $J_1(x)$

n	n-й нуль функции $J_0(x)$	$(n-\frac{1}{4})\,\pi$	n-й нуль функции $J_1(x)$	$(n+\frac{1}{4})\,\pi$
1	2,4048	2,3562	3,8317	3,9270
2	5,5201	5,4978	7,0156	7,0686
3	8,6537	8,6394	10,1735	10,2102
4	11,7915	11,7810	13,3237	13,3518
5	14,9309	14,9226	16,4706	16,4934

Рис. 8.5.3. Нули функций $J_0(x)$ и $J_1(x)$

приблизительно равен π — еще одно сходство с $\cos x$ и $\sin x$. Округляя данные в таблице на рис. 8.5.3 к двум десятичным знакам, можно заметить, как точность этих аппроксимаций увеличивается с увеличением n.

Оказывается, что $J_p(x)$ — элементарная функция, если порядок p равен половине нечетного целого числа. Например, после подстановки $p=\frac{1}{2}$ и $p=-\frac{1}{2}$ в уравнения (13) и (14) соответственно результаты могут быть идентифицированы (задача 2) с функциями

$$J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x \qquad \text{и} \qquad J_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x. \tag{19}$$

Функции Бесселя второго рода

Второе линейно независимое решение целого порядка можно найти с помощью методов раздела 8.4. Очень сложное обобщение примера 3 из упомянутого раздела дает формулу

$$Y_n(x)=\frac{2}{\pi}\left(\gamma+\ln\frac{x}{2}\right)J_n(x)-\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{2^{n-2m}(n-m-1)!}{m!\,x^{n-2m}}-$$
$$-\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(H_m+H_{m+n})}{m!\,(m+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m} \tag{20}$$

в используемой там системе обозначений. Если $n = 0$, то первая сумма в (20) полагается равной нулю. Здесь $Y_n(x)$ называют **функцией Бесселя второго рода целого порядка** $n \geqq 0$.

Общее решение уравнения Бесселя целого порядка n имеет вид

$$y(x) = c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x). \tag{21}$$

Важно обратить внимание на то, что $Y_n(x) \to -\infty$ при $x \to 0$ (рис. 8.5.4). Следовательно, $c_2 = 0$ в уравнении (21), если $y(x)$ непрерывна в точке $x = 0$. Таким образом, если $y(x)$ — *непрерывное* решение уравнения Бесселя порядка n, то

$$y(x) = cJ_n(x)$$

для некоторой константы c. Поскольку $J_0(0) = 1$, мы видим, кроме того, что если $n = 0$, то $c = y(0)$. В разделе 10.4 мы увидим, что этот отдельный факт о функциях Бесселя имеет многочисленные физические приложения.

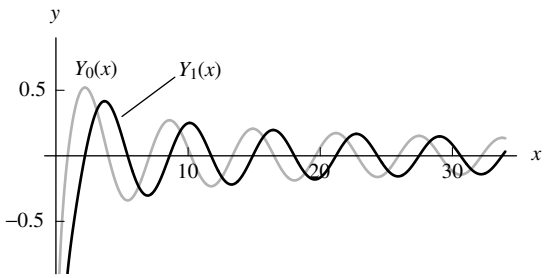


Рис. 8.5.4. Графики функций Бесселя $Y_0(x)$ и $Y_1(x)$

Из рис. 8.5.5 видно, что для $n > 1$ графики $J_n(x)$ и $Y_n(x)$ выглядят, вообще говоря, подобно графикам $J_1(x)$ и $Y_1(x)$. В частности, $J_n(0) = 0$ в то время, как $Y_n(x) \to -\infty$ при $x \to 0^+$, и графики обеих функций напоминают затухающие колебания при $x \to +\infty$.

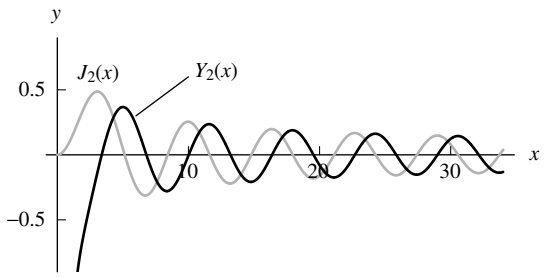


Рис. 8.5.5. Графики функций Бесселя $J_2(x)$ и $Y_2(x)$

Тождества для функций Бесселя

Функции Бесселя походят на тригонометрические функции в том, что они удовлетворяют большому количеству стандартных весьма часто используемых тождеств, особенно при

вычислении интегралов, содержащих функции Бесселя. Дифференцирование функции

$$J_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(p+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p} \tag{13}$$

при условии, что p равно неотрицательному целому числу, дает формулу

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[x^p J_p(x)\right] &= \frac{d}{dx}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+2p}}{2^{2m+p} m!\,(p+m)!} = \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+2p-1}}{2^{2m+p-1} m!\,(p+m-1)!} = \\ &= x^p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+p-1}}{2^{2m+p-1} m!\,(p+m-1)!},\end{aligned}$$

и, таким образом, мы показали, что

$$\frac{d}{dx}\left[x^p J_p(x)\right] = x^p J_{p-1}(x). \tag{22}$$

Точно так же можно доказать, что

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-p} J_p(x)\right] = -x^{-p} J_{p+1}(x). \tag{23}$$

Если мы выполним дифференцирование тождеств (22) и (23) и затем разделим полученные тождества на x^p и x^{-p} соответственно, мы получим (задача 8) тождества

$$J_p'(x) = J_{p-1}(x) - \frac{p}{x} J_p(x) \tag{24}$$

и

$$J_p'(x) = \frac{p}{x} J_p(x) - J_{p+1}(x). \tag{25}$$

Таким образом, мы можем выразить производные функций Бесселя опять же через функции Бесселя. Вычитание тождества (25) из тождества (24) дает рекуррентную формулу

$$J_{p+1}(x) = \frac{2p}{x} J_p(x) - J_{p-1}(x), \tag{26}$$

которая может использоваться для того, чтобы выразить функции Бесселя высоких порядков через функции Бесселя более низких порядков. Формула

$$J_{p-1}(x) = \frac{2p}{x} J_p(x) - J_{p+1}(x), \tag{27}$$

может использоваться для того, чтобы выразить функции Бесселя большого (по абсолютной величине) отрицательного порядка через функции Бесселя меньших (по абсолютной величине) отрицательных порядков.

Тождества (22)–(27) справедливы всегда, когда они имеют смысл, т. е. всегда, когда не появляются функции Бесселя отрицательного целого порядка. В частности, они справедливы для всех нецелых значений p.

Пример 1 Полагая $p = 0$ в тождестве (22), получаем

$$\int xJ_0(x)\,dx = xJ_1(x) + C.$$

Точно так же полагая $p = 0$ в тождестве (23), получим

$$\int J_1(x)\,dx = -J_0(x) + C.$$ ■

Пример 2 Полагая сначала $p = 2$, а затем $p = 1$ в тождестве (26), мы получаем

$$J_3(x) = \frac{4}{x}J_2(x) - J_1(x) = \frac{4}{x}\left[\frac{2}{x}J_1(x) - J_0(x)\right] - J_1(x),$$

так что

$$J_3(x) = -\frac{4}{x}J_0(x) + \left(\frac{8}{x^2} - 1\right)J_1(x).$$

С помощью подобных манипуляций каждая функция Бесселя положительного целого порядка может быть выражена через $J_0(x)$ и $J_1(x)$. ■

Пример 3 Чтобы проинтегрировать ("антидифференцировать", т. е. взять неопределенный интеграл) $xJ_2(x)$, мы сначала обращаем внимание на то, что

$$\int x^{-1}J_2(x)\,dx = -x^{-1}J_1(x) + C$$

согласно тождеству (23) при $p = 1$. Поэтому мы пишем

$$\int xJ_2(x)\,dx = \int x^2\left[x^{-1}J_2(x)\right]\,dx$$

и интегрируем по частям, полагая

$$u = x^2, \qquad dv = x^{-1}J_2(x)\,dx,$$
$$du = 2x\,dx \quad \text{и} \quad v = -x^{-1}J_1(x).$$

Это дает

$$\int xJ_2(x)\,dx = -xJ_1(x) + 2\int J_1(x)\,dx = -xJ_1(x) - 2J_0(x) + C,$$

с учетом второго результата примера 1. ■

Параметрическое уравнение Бесселя

Параметрическое уравнение Бесселя порядка n имеет вид

➤
$$x^2y'' + xy' + (\alpha^2x^2 - n^2)y = 0, \tag{28}$$

где α — положительный параметр. Как мы увидим в главе 10, это уравнение появляется в решении уравнения Лапласа в полярных координатах. Легко видеть (задача 9), что замена $t = \alpha x$ преобразует уравнение (28) в (стандартное) уравнение Бесселя

$$t^2 \frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + (t^2 - n^2)y = 0, \tag{29}$$

имеющее общее решение $y(t) = c_1 J_n(t) + c_2 Y_n(t)$. Следовательно, общее решение уравнения (28) имеет вид

➤
$$y(x) = c_1 J_n(\alpha x) + c_2 Y_n(\alpha x). \tag{30}$$

Теперь рассмотрим задачу на собственные значения

$$\begin{aligned} x^2 y'' + xy' + (\lambda x^2 - n^2) = 0, \\ y(L) = 0 \end{aligned} \tag{31}$$

на интервале $[0, L]$. Мы ищем *положительные* значения λ, для которых существует нетривиальное решение задачи (31), которое *непрерывно* на интервале $[0, L]$. Если мы обозначим $\lambda = \alpha^2$, то дифференциальное уравнение (31) примет вид уравнения (28), так что его общее решение дается равенством (30). Поскольку $Y_n(x) \to -\infty$ при $x \to 0$, но $J_n(0)$ конечно, из непрерывности $y(x)$ следует, что $c_2 = 0$. Таким образом, $y(x) = c_1 J_n(\alpha x)$. Из условия в конечной точке $y(L) = 0$ теперь следует, что $z = \alpha L$ должно быть (положительным) корнем уравнения

$$J_n(z) = 0. \tag{32}$$

При $n > 1$ $J_n(x)$ колеблется подобно тому, как это изображено для $J_1(x)$ на рис. 8.5.2 и, следовательно, имеет бесконечную последовательность положительных нулей $\gamma_{n1}, \gamma_{n2}, \gamma_{n3}, \ldots$ (рис. 8.5.6). Из этого следует, что k-е положительное собственное значение задачи (31) может быть выражено по формуле

$$\lambda_k = (\alpha_k)^2 = \frac{(\gamma_{nk})^2}{L^2} \tag{33}$$

и что соответствующая ему собственная функция равна

$$y_k(x) = J_n\left(\frac{\gamma_{nk}}{L}x\right). \tag{34}$$

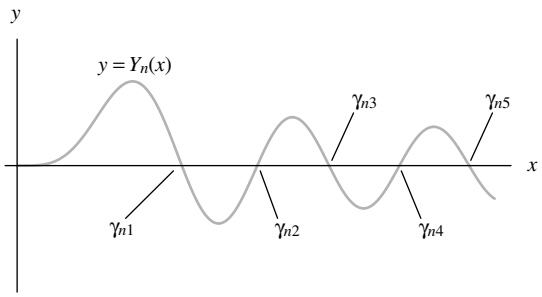


Рис. 8.5.6. Положительные нули $\gamma_{n1}, \gamma_{n2}, \gamma_{n3}, \ldots$ функции Бесселя $J_n(x)$

Корни γ_{nk} уравнения (32) для $n \leqq 8$ и $k \leqq 20$ приведены в таблице 9.5 известного справочника по специальным функциям М. Абрамовица и И. Стиган, изданного в Нью-Йорке в 1965 году (M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (New York: Dover, 1965)).

8.5. Задачи

1. Продифференцируйте почленно ряд для $J_0(x)$ и покажите непосредственно, что $J_0'(x) = -$ $-J_1(x)$ (еще одна аналогия с функциями косинус и синус).

2. **(a)** Выведите из равенств (10) и (12) формулу

$$\Gamma\left(n+\tfrac{1}{2}\right) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot (2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

(b) Используя результат части (a), проверьте формулы в равенстве (19) для $J_{1/2}(x)$ и $J_{-1/2}(x)$ и начертите графики этих функций.

3. **(a)** Пусть m — положительное целое число. Покажите, что

$$\Gamma\left(m+\tfrac{2}{3}\right) = \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3m-1)}{3^m}\Gamma\left(\tfrac{2}{3}\right).$$

(b) Выведите из части (a) и равенства (13), что

$$J_{-1/3}(x) = \frac{(x/2)^{-1/3}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m 3^m x^{2m}}{2^{2m}\, m!\cdot 2\cdot 5\cdots(3m-1)}\right).$$

4. Примените равенства (19), (26) и (27) и покажите, что

$$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x^3}}\,(\sin x - x\cos x)$$

и

$$J_{-3/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x^3}}\,(\cos x + x\sin x).$$

Начертите графики этих двух функций.

5. Выразите $J_4(x)$ через $J_0(x)$ и $J_1(x)$.

6. Получите рекуррентную формулу (2) для уравнения Бесселя.

7. Проверьте тождество (23) почленным дифференцированием.

8. Выведите тождества (24) и (25) из тождеств (22) и (23).

9. Проверьте, что подстановка $t = \alpha x$ преобразует параметрическое уравнение Бесселя (28) в уравнение (29).

10. Покажите, что

$$4J_p''(x) = J_{p-2}(x) - 2J_p(x) + J_{p+2}(x).$$

11. С помощью соотношения $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ выведите из равенств (13) и (14), что если p не равно отрицательному целому числу, то

$$J_p(x) = \frac{(x/2)^p}{\Gamma(p+1)}\left[1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m (x/2)^{2m}}{m!\,(p+1)(p+2)\cdots(p+m)}\right].$$

Эта формула более удобна для вычисления $J_p(x)$, потому что требуется только единственное значение $\Gamma(p+1)$ гамма-функции.

12. Используя ряд из задачи 11, найдите $y(0) = \lim_{x \to 0} y(x)$ при условии, что

$$y(x) = x^2 \left[\frac{J_{5/2}(x) + J_{-5/2}(x)}{J_{1/2}(x) + J_{-1/2}(x)} \right].$$

Используйте систему компьютерной алгебры, чтобы начертить график $y(x)$ для x в окрестности 0. Подтверждает ли график ваше значение $y(0)$?

Любой интеграл вида $\int x^m J_n(x)\,dx$ может быть выражен через функции Бесселя и неопределенный интеграл $\int J_0(x)\,dx$. Последний интеграл не может быть упрощен далее, но значения функции $\int_0^x J_0(t)\,dt$ приведены в таблице 11.1 справочника по специальным функциям М. Абрамовица и И. Стиган. Используйте тождества (22) и (23), чтобы найти интегралы в задачах 13–21.

13. $\int x^2 J_0(x)\,dx$

14. $\int x^3 J_0(x)\,dx$

15. $\int x^4 J_0(x)\,dx$

16. $\int x J_1(x)\,dx$

17. $\int x^2 J_1(x)\,dx$

18. $\int x^3 J_1(x)\,dx$

19. $\int x^4 J_1(x)\,dx$

20. $\int J_2(x)\,dx$

21. $\int J_3(x)\,dx$

22. Докажите, что

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin\theta)\,d\theta,$$

показав, что правая часть удовлетворяет уравнению Бесселя нулевого порядка и ее значение равно $J_0(0)$ при $x = 0$. Объясните, почему это и есть доказательство.

23. Докажите, что

$$J_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\theta - x \sin\theta)\,d\theta,$$

показав, что правая часть удовлетворяет уравнению Бесселя порядка 1 и что ее производная имеет значение $J_1'(0)$ при $x = 0$. Объясните, почему это и есть доказательство.

24. Можно показать, что

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta - x \sin\theta)\,d\theta.$$

Покажите, что при $n \geqq 2$ правая часть удовлетворяет уравнению Бесселя порядка n и ее значения также согласуются со значениями $J_n(0)$ и $J_n'(0)$. Объясните, почему этого *недостаточно*, чтобы доказать предыдущее утверждение.

25. Из результата задачи 22 выведите, что

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ix \sin\theta}\,d\theta.$$

(*Указание*. Сначала покажите, что

$$\int_0^{2\pi} e^{ix \sin\theta}\,d\theta = \int_0^\pi \left(e^{ix \sin\theta} + e^{-ix \sin\theta} \right) d\theta;$$

затем используйте формулу Эйлера.)

26. С помощью тождеств (22) и (23) и теоремы Ролля докажите, что между любыми двумя последовательными нулями $J_n(x)$ есть точно один нуль $J_{n+1}(x)$. Используйте систему компьютерной алгебры, чтобы создать рисунок, иллюстрирующий этот факт для $n = 10$ (например).

27. (a) Покажите, что подставив $y = x^{-1/2}z$ в уравнение Бесселя порядка p,

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0,$$

получим

$$z'' + \left(1 - \frac{p^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right) z = 0.$$

(b) Если x является настолько большим, что величина $\left(p^2 - \frac{1}{4}\right)/x^2$ столь незначительна, что ею можно пренебречь, то последнее уравнение можно упростить так: $z'' + z \approx 0$. Объясните (без доказательства), почему из этого можно предположить, что если $y(x)$ является решением уравнения Бесселя, то

$$\begin{aligned} y(x) &\approx x^{-1/2}(A\cos x + B\sin x) \\ &= Cx^{-1/2}\cos(x - \alpha) \end{aligned} \tag{35}$$

для некоторых констант C и α при больших x.

Асимптотические приближения

Известно, что если в (35) выбрать $C = \sqrt{2/\pi}$ и $\alpha = (2n+1)\pi/4$, то получится наилучшее приближение $J_n(x)$ для больших x:

$$J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \tfrac{1}{4}(2n+1)\pi\right). \tag{36}$$

Точно так же

$$Y_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \tfrac{1}{4}(2n+1)\pi\right). \tag{37}$$

В частности,

$$J_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \tfrac{1}{4}\pi\right)$$

и

$$Y_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \tfrac{1}{4}\pi\right),$$

если x является достаточно большим. Это действительно *асимптотические приближения* в том смысле, что отношение этих двух величин, стоящих в левой и правой части каждого приближения, стремится к единице при $x \to +\infty$.

8.6. Приложения функций Бесселя

Важность функций Бесселя обусловлена не только частым появлением уравнения Бесселя в приложениях, но также и тем, что решения многих других линейных дифференциальных уравнений второго порядка могут быть выражены через функции Бесселя. Чтобы увидеть, как они появляются, мы начнем с уравнения Бесселя порядка p в форме

$$z^2\frac{d^2w}{dz^2} + z\frac{dw}{dz} + (z^2 - p^2)w = 0 \tag{1}$$

и подставим сюда

$$w = x^{-\alpha}y, \qquad z = kx^{\beta}. \tag{2}$$

Тогда рутинное (но длинное) преобразование уравнения (1) дает

$$x^2y'' + (1-2\alpha)xy' + (\alpha^2 - \beta^2p^2 + \beta^2k^2x^{2\beta})y = 0;$$

иными словами,

➤
$$x^2y'' + Axy' + (B + Cx^q)y = 0, \tag{3}$$

где константы A, B, C и q определяются равенствами

$$A = 1-2\alpha, \quad B = \alpha^2 - \beta^2p^2, \quad C = \beta^2k^2 \quad \text{и} \quad q = 2\beta. \tag{4}$$

Решить уравнения (4) совсем несложно, из них мы найдем

➤
$$\alpha = \frac{1-A}{2}, \qquad \beta = \frac{q}{2},$$
$$k = \frac{2\sqrt{C}}{q} \qquad \text{и} \qquad p = \frac{\sqrt{(1-A)^2 - 4B}}{q}. \tag{5}$$

Если предположить, что квадратные корни в (5) вещественны, то из этого следует, что общее решение уравнения (3) имеет вид

$$y(x) = x^{\alpha}w(z) = x^{\alpha}w(kx^{\beta}),$$

где

$$w(z) = c_1J_p(z) + c_2Y_{-p}(z)$$

(в предположении, что p не равно целому числу) — общее решение уравнения Бесселя (1). Этим установлен следующий результат.

Теорема 1 Выражение решений через функции Бесселя

Если $C > 0$, $q \neq 0$ и $(1-A)^2 \geqq 4B$, то общее решение (для $x > 0$) уравнения (3) имеет вид

➤
$$y(x) = x^{\alpha}\left[c_1J_p(kx^{\beta}) + c_2J_{-p}(kx^{\beta})\right], \tag{6}$$

где α, β, k и p определяются равенствами (5). Если p — целое число, то J_{-p} нужно заменить на Y_p. ▲

Пример 1 Решим уравнение

$$4x^2y'' + 8xy' + (x^4 - 3)y = 0. \tag{7}$$

Решение Чтобы сравнить уравнение (7) с уравнением (3), мы перепишем последнее в виде

$$x^2y'' + 2xy' + \left(-\tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{4}x^4\right) y = 0;$$

теперь видно, что $A = 2$, $B = -\frac{3}{4}$, $C = \frac{1}{4}$ и $q = 4$. Тогда равенства (5) дают $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = 2$, $k = \frac{1}{4}$ и $p = \frac{1}{2}$. Таким образом, общее решение (6) уравнения (7) имеет вид

$$y(x) = x^{-1/2}\left[c_1 J_{1/2}\left(\tfrac{1}{4}x^2\right) + c_2 J_{-1/2}\left(\tfrac{1}{4}x^2\right)\right].$$

В соответствии с равенством (19) из раздела 8.5 имеем

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\sin z \quad \text{и} \quad J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\cos z,$$

откуда видно, что общее решение уравнения (7) может быть выражено через элементарные функции так:

$$y(x) = x^{-3/2}\left(A\cos\frac{x^2}{4} + B\sin\frac{x^2}{4}\right). \qquad \blacksquare$$

Пример 2 Решим уравнение Эйри

$$y'' + 9xy = 0. \tag{8}$$

Решение Сначала мы перепишем данное уравнение в форме

$$x^2y'' + 9x^3y = 0.$$

Это частный случай уравнения (3) при $A = B = 0$, $C = 9$ и $q = 3$. Из равенств (5) следует, что $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{3}{2}$, $k = 2$ и $p = \frac{1}{3}$. Таким образом, общее решение уравнения (8) имеет вид

$$y(x) = x^{1/2}\left[c_1 J_{1/3}(2x^{3/2}) + c_2 J_{-1/3}(2x^{3/2})\right]. \qquad \blacksquare$$

Продольный изгиб вертикальной колонны

Мы теперь рассмотрим задачу, важную для практических приложений. В этой задаче требуется определить, когда однородная вертикальная колонна согнется под ее собственным весом. Мы полагаем $x = 0$ в свободном верхнем конце колонны и $x = L > 0$ в ее основании; мы предполагаем, что основание жестко вставлено (т. е. закреплено неподвижно) в основу (в землю), возможно в бетон (рис. 8.6.1). Обозначим угловое отклонение колонны в точке x через $\theta(x)$. Из теории эластичности при данных условиях следует, что

$$EI\frac{d^2\theta}{dx^2} + g\rho x\theta = 0, \tag{9}$$

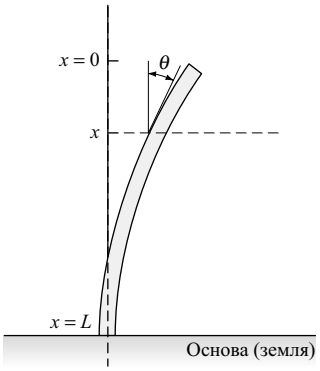


Рис. 8.6.1. Продольный изгиб колонны

где E — модуль Юнга материала колонны, I — момент инерции ее поперечного сечения, ρ — линейная плотность колонны и g — гравитационное ускорение. Граничные условия имеют вид

$$\theta'(0) = 0, \quad \theta(L) = 0. \tag{10}$$

Мы примем равенства (9) и (10) как правильную постановку задачи и будем пытаться решать эту задачу в такой форме. При

$$\lambda = \gamma^2 = \frac{g\rho}{EI} \tag{11}$$

мы имеем задачу на собственные значения

$$\theta'' + \gamma^2 x\theta = 0; \quad \theta'(0) = 0, \quad \theta(L) = 0. \tag{12}$$

Колонна может деформироваться, только если есть нетривиальное решение задачи (12); иначе колонна останется в неотклоненном от вертикали положении (т. е. физически не сможет отклониться от вертикали).

Дифференциальное уравнение (12) представляет собой уравнение Эйри, подобное уравнению в примере 2. Оно имеет форму уравнения (3) при $A = B = 0, C = \gamma^2$ и $q = 3$. Из равенств (5) получаем $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{3}{2}, k = \frac{2}{3}\gamma$ и $p = \frac{1}{3}$. Поэтому общее решение имеет вид

$$\theta(x) = x^{1/2}\left[c_1 J_{1/3}\left(\tfrac{2}{3}\gamma x^{3/2}\right) + c_2 J_{-1/3}\left(\tfrac{2}{3}\gamma x^{3/2}\right)\right]. \tag{13}$$

Чтобы применить начальные условия, мы подставляем $p = \pm\frac{1}{3}$ в

$$J_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(p+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p}$$

и после некоторых упрощений находим, что

$$\theta(x) = \frac{c_1\gamma^{1/3}}{3^{1/3}\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}\left(x - \frac{\gamma^2 x^4}{12} + \frac{\gamma^4 x^7}{504} - \cdots\right) +$$

$$+ \frac{c_2 3^{1/3}}{\gamma^{1/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\left(1 - \frac{\gamma^2 x^3}{6} + \frac{\gamma^4 x^6}{180} - \cdots\right).$$

Из этого видно, что из условия в конечной точке $\theta'(0) = 0$ следует, что $c_1 = 0$, так что

$$\theta(x) = c_2 x^{1/2} J_{-1/3}\left(\tfrac{2}{3}\gamma x^{3/2}\right). \tag{14}$$

Условие в конечной точке $\theta(L) = 0$ теперь приводит к равенству

$$J_{-1/3}\left(\tfrac{2}{3}\gamma L^{3/2}\right) = 0. \tag{15}$$

Таким образом, колонна деформируется только если $z = \frac{2}{3}\gamma L^{3/2}$ — корень уравнения $J_{-1/3}(z) = 0$. График функции

$$J_{-1/3}(z) = \frac{(z/2)^{-1/3}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m 3^m z^{2m}}{2^{2m}\, m! \cdot 2 \cdot 5 \cdot (3m-1)}\right) \tag{16}$$

(см. задачу 3 из раздела 8.5) показан на рис. 8.6.2, из которого видно, что наименьший положительный нуль z_1 немного меньше, чем 2. Многие технические вычислительные системы могут найти такие корни. Например, каждая из команд компьютерной системы

```
fsolve(BesselJ(-1/3,x)=0, x, 1..2)          (Maple)
FindRoot[BesselJ[-1/3,x]==0, {x,2}]         (Mathematica)
fzero('besselj(-1/3,x)', 2)                 (MATLAB)
```

выдаст значение $z_1 = 1{,}86635$ (округлено с точностью до пяти десятичных знаков).

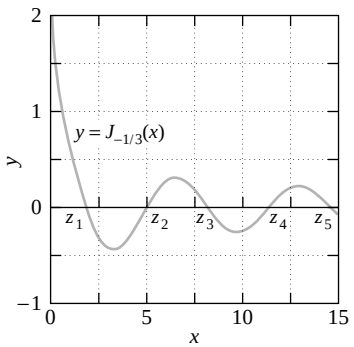


Рис. 8.6.2. График $J_{-1/3}(x)$

Самая короткая длина L_1, при которой колонна деформируется под ее собственным весом, равна

$$L_1 = \left(\frac{3z_1}{2\gamma}\right)^{2/3} = \left[\frac{3z_1}{2}\left(\frac{EI}{\rho g}\right)^{1/2}\right]^{2/3}.$$

Если мы подставим $z_1 \approx 1{,}86635$ и $\rho = \delta A$, где δ — объемная плотность материала колонны, а A — площадь ее поперечного сечения, мы, наконец, получим

$$L_1 \approx (1{,}986)\left(\frac{EI}{g\delta A}\right)^{1/3} \tag{17}$$

Поперечное сечение стержня	Самая короткая длина (при продольном изгибе) L_1
Круговое при $r = 0{,}5$ дюйма	30 футов 6 дюймов
Круговое при $r = 1{,}5$ дюйма	63 фута 5 дюймов
Кольцевое при $r_{\text{inner}} = 1{,}25$ дюйма и $r_{\text{outer}} = 1{,}5$ дюйма	75 футов 7 дюймов

Рис. 8.6.3.

для критической длины (при продольном изгибе) колонны. Например, для стальной колонны или стержня, для которого $E = 2{,}8\times10^7$ фунт/дюйм^2 и $g\delta = 0{,}28$ фунт/дюйм^3, формула (17) дает результаты, приведенные в таблице на рис. 8.6.3.

Мы использовали знакомые формулы $A = \pi r^2$ и $I = \frac{1}{4}\pi r^4$ для кругового диска. Данные в таблице показывают, почему флагштоки пустые внутри.

8.6. Задачи

В задачах 1–12 выразите общее решение данного дифференциального уравнения через функции Бесселя.

1. $x^2y'' - xy' + (1 + x^2)y = 0$
2. $xy'' + 3y' + xy = 0$
3. $xy'' - y' + 36x^3y = 0$
4. $x^2y'' - 5xy' + (8 + x)y = 0$
5. $36x^2y'' + 60xy' + (9x^3 - 5)y = 0$
6. $16x^2y'' + 24xy' + (1 + 144x^3)y = 0$
7. $x^2y'' + 3xy' + (1 + x^2)y = 0$
8. $4x^2y'' - 12xy' + (15 + 16x)y = 0$
9. $16x^2y'' - (5 - 144x^3)y = 0$
10. $2x^2y'' - 3xy' - 2(14 - x^5)y = 0$
11. $y'' + x^4y = 0$
12. $y'' + 4x^3y = 0$

13. Примените теорему 1 и покажите, что общее решение уравнения

$$xy'' + 2y' + xy = 0$$

имеет вид $y(x) = x^{-1}(A\cos x + B\sin x)$.

14. Проверьте, что подстановки (2) в уравнении Бесселя (уравнение (1)) приводят к уравнению (3).

15. **(a)** Покажите, что подстановка

$$y = -\frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

преобразует уравнение Риккати $dy/dx = x^2 + y^2$ в уравнение $u'' + x^2u = 0$. **(b)** Покажите, что общее решение уравнения $dy/dx = x^2 + y^2$ имеет вид

$$y(x) = x\frac{J_{3/4}\left(\frac{1}{2}x^2\right) - cJ_{-3/4}\left(\frac{1}{2}x^2\right)}{cJ_{1/4}\left(\frac{1}{2}x^2\right) + J_{-1/4}\left(\frac{1}{2}x^2\right)}.$$

(*Указание*. Примените тождества (22) и (23) из раздела 8.5.)

16. **(a)** Подставьте ряд из задачи 11 в разделе 8.5 в результат задачи 15 данного раздела и покажите, что решение задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2, \quad y(0) = 0$$

имеет вид

$$y(x) = x\frac{J_{3/4}\left(\frac{1}{2}x^2\right)}{J_{-1/4}\left(\frac{1}{2}x^2\right)}.$$

(b) Выведите подобным способом, что решение задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2, \quad y(0) = 1$$

имеет вид

$$y(x) = x\frac{2\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)J_{3/4}\left(\frac{1}{2}x^2\right) + \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)J_{-3/4}\left(\frac{1}{2}x^2\right)}{2\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)J_{-1/4}\left(\frac{1}{2}x^2\right) - \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)J_{1/4}\left(\frac{1}{2}x^2\right)}.$$

Некоторые интегральные кривые уравнения $dy/dx = x^2 + y^2$ показаны на рис. 8.6.4. Положение асимптот, где $y(x) \to +\infty$, может быть найдено методом Ньютона нахождения нулей знаменателей в формулах для приведенных здесь решений.

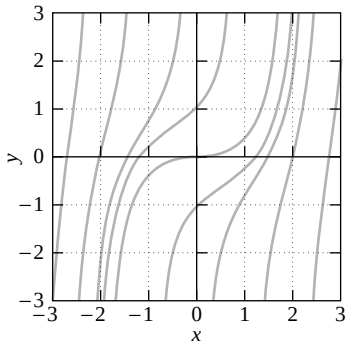


Рис. 8.6.4. Интегральные кривые уравнения $\dfrac{dy}{dx} = x^2 + y^2$

17. На рис. 8.6.5 показан линейно суживающийся стержень с круговым поперечным сечением, на который действует осевая сила P сжатия. Как и в разделе 3.8, он отклоняется, изгибаясь вдоль некоторой кривой (называемой кривой прогиба), которая удовлетворяет уравнению $y = y(x)$. Эта кривая прогиба является решением краевой задачи

$$EIy'' + Py = 0; \quad y(a) = y(b) = 0. \tag{18}$$

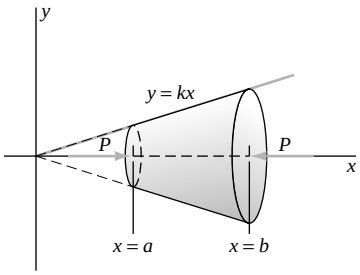


Рис. 8.6.5. Конический (суживающийся) стержень из задачи 17

Здесь, однако, момент инерции $I = I(x)$ поперечного сечения в точке x дается формулой

$$I(x) = \frac{1}{4}\pi(kx)^4 = I_0 \cdot \left(\frac{x}{b}\right)^4,$$

где $I_0 = I(b)$ представляет собой значение I в точке $x = b$. Замена $I(x)$ в дифференциальном уравнении (18) приводит к задаче на собственные значения

$$x^4 y'' + \lambda y = 0, \quad y(a) = y(b) = 0,$$

где $\lambda = \mu^2 = Pb^4/EI_0$. **(a)** С помощью теоремы 1 из этого раздела покажите, что общее решение уравнения $x^4 y'' + \mu^2 y = 0$ имеет вид

$$y(x) = x\left(A\cos\frac{\mu}{x} + B\sin\frac{\mu}{x}\right).$$

(b) Заключите из этого, что n-е собственное значение дает формула $\mu_n = n\pi ab/L$, где $L = b - a$ — длина стержня, и, следовательно, что n-я сила продольного изгиба равна

$$P_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}\left(\frac{a}{b}\right)^2 EI_0.$$

Заметьте, что если $a = b$, этот результат упрощается и имеет место равенство (28) из раздела 3.8.

18. Рассмотрим маятник переменной длины, показанный на рис. 8.6.6. Предположите, что его длина увеличивается линейно со временем: $L(t) = a + bt$. Можно показано, что колебания этого маятника удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$L\theta'' + 2L'\theta' + g\theta = 0$$

при обычном условии, что θ действительно так мало, что $\sin\theta$ очень хорошо приближается с помощью θ: $\theta \approx \sin\theta$. Подставьте $L = a + bt$ и получите общее решение

$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{L}}\left[AJ_1\left(\frac{2}{b}\sqrt{gL}\right) + BY_1\left(\frac{2}{b}\sqrt{gL}\right)\right].$$

Это решение может пригодиться при обсуждении равномерно снижающегося маятника. Вспомните маятник, у которого нижний край имел форму полумесяца из блестящей стали, приблизительно фут в длину от рожка до рожка; рожки были загнуты вверх, и край был острый, как у бритвы … и весь шипел, качаясь в воздухе … и опускался все ниже и ниже … Да, это написал классик жутких ужастиков Эдгар Аллан По в рассказе “The Pit and the Pendulum” (Яма и маятник). Так вот, обсуждению маятника переменной длины посвящена статья Борелли (Borrelli), Колемана (Coleman) и Гобсона (Hobson) в мартовском выпуске (за 1985 год) математического журнала *Mathematics Magazine*. (Эту статью вы найдете в томе 58 на стр. 78–83.)

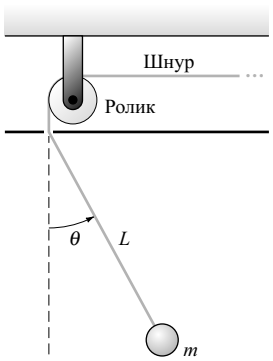


Рис. 8.6.6. Маятник переменной длины

8.6. Приложение. Уравнения Риккати и модифицированные функции Бесселя

Уравнение Риккати — одно из тех, что имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y^2 + B(x)y + C(x).$$

Решения многих уравнений Риккати, подобных перечисленным ниже, могут быть выражены явно через функции Бесселя.

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2; \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - y^2; \tag{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - x^2; \tag{3}$$

$$\frac{dy}{dx} = x + y^2; \tag{4}$$

$$\frac{dy}{dx} = x - y^2; \tag{5}$$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - x. \tag{6}$$

Например, из результата задачи 15 в этом разделе следует, что общее решение уравнения (1) дает формула

$$y(x) = x\frac{J_{3/4}\left(\frac{1}{2}x^2\right) - cJ_{-3/4}\left(\frac{1}{2}x^2\right)}{cJ_{1/4}\left(\frac{1}{2}x^2\right) + J_{-1/4}\left(\frac{1}{2}x^2\right)}. \tag{7}$$

Давайте посмотрим, что сможет сделать с таким уравнением команда решающей программы для решения дифференциальных уравнений с возможностью символической обработки данных, имеющаяся в вашей системе компьютерной алгебры. Проверьте, например, совпадает ли результат выполнения команды системы *Maple*

```
dsolve(diff(y(x),x) = x^2 + y(x)^2, y(x))
```

или команды системы *Mathematica*

```
DSolve[ y'[x] == x^2 + y[x]^2, y[x], x ]
```

с равенством (7). Если в результе есть другие функции Бесселя (кроме тех, которые появляются в равенстве (7)), вполне возможно, что нужно применить тождества (26) и (27) из раздела 8.5, чтобы преобразовать "ответ" компьютера в равенство (7). Затем проверьте, сможет ли ваша система взять предел при $x \to 0$ в равенстве (7) и показать, что произвольная постоянная c выражается через начальное значение $y(0)$ с помощью равенства

$$c = -\frac{y(0)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}. \tag{8}$$

Теперь вы должны уметь использовать встроенные функции Бесселя, чтобы вычертить типичные интегральные кривые, подобные показанным на рис. 8.6.4.

Затем исследуйте подобным образом одно из других уравнений (2)–(6). Каждое из них имеет общее решение того же самого общего вида, что и (7), т. е. представляет собой частное линейных комбинаций функций Бесселя. В дополнение к $J_p(x)$ и $Y_p(x)$ эти решения могут содержать *модифицированные функции Бесселя*

$$I_p(x) = i^{-p} J_p(ix)$$

и

$$K_p(x) = \frac{\pi}{2} i^{-p} \left[J_p(ix) + Y_p(ix) \right],$$

которые удовлетворяют *модифицированному уравнению Бесселя*

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + p^2) y = 0$$

порядка p. Например, общее решение уравнения (5) для $x > 0$ дает формула

$$y(x) = x^{1/2} \frac{I_{2/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right) - cI_{-2/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)}{I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right) - cI_{1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)}, \tag{9}$$

где

$$c = -\frac{y(0)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{3^{1/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}. \tag{10}$$

На рис. 8.6.7 показаны некоторые типичные интегральные кривые, а также парабола $y^2 = x$, которая, оказывается, имеет отношение к уравнению (6); интересно отметить, что мы видим нечто заливочной воронки (своеобразная сточная труба) около $y = +\sqrt{x}$ и струю-источник (нечто вроде фонтанчика с брызгами) около $y = -\sqrt{x}$.

Функции Бесселя с мнимым аргументом, которые появляются в определениях $I_p(x)$ и $K_p(x)$, могут выглядеть экзотически, но степенной ряд модифицированной функции $I_n(x)$ — это просто ряд обычной функции $J_n(x)$ за исключением того, что в нем нет чередующихся знаков "минус". Например,

$$I_0(x) = 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} + \frac{x^6}{2304} + \cdots$$

и

$$I_1(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^3}{16} + \frac{x^5}{384} + \frac{x^7}{18432} + \cdots.$$

Проверьте эти разложения в степенной ряд с помощью вашей системы компьютерной алгебры — поищите `BesselI` в справочной системе пакета *Maple* или *Mathematica* и сравните их разложения с равенствами (17) и (18) из раздела 8.5.

Дифференциальные уравнения второго порядка с теми же самыми правыми частями, что и в уравнениях (1)–(6), имеют интересные решения, которые, однако, не могут быть выражены через элементарные функции или "известные" специальные функции вроде функций Бесселя. Однако их можно исследовать с помощью программы, предназначенной для графического отображения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, на

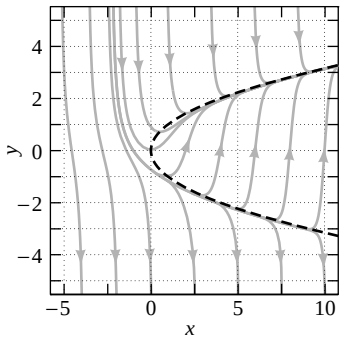


Рис. 8.6.7. Интегральные кривые уравнения $\dfrac{dy}{dx} = x - y^2$

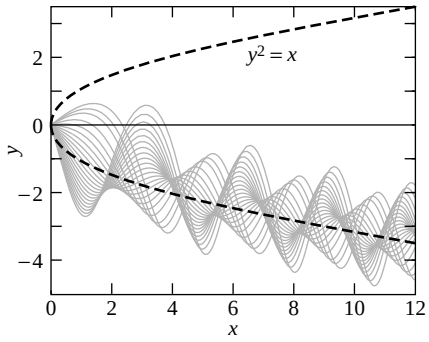


Рис. 8.6.8. Первые трансцендентные кривые Пенлеве $y'' = y^2 - x$, $y(0) = 0, y'(0) = -3{,}3, -3{,}1, \ldots, 0{,}7$

рис. 8.6.8 показан интересный образец поведения интегральных кривых уравнения второго порядка

$$y'' = y^2 - x \tag{11}$$

с одним и тем же самым начальным значением $y(0) = 0$, но с различными наклонами $y'(0) = -3{,}3, -3{,}1, \ldots, 0{,}7$. Уравнение (11) — форма *первого трансцендентного уравнения Пенлеве (Painlevé)*, которое вошло в историю благодаря попытке классификации нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в терминах их точек равновесия. (По этому поводу см. главу 14 классического учебника Айнса по обыкновенным дифференциальным уравнениям, переизданного в Нью-Йорке в 1956 году: E. L. Ince, *Ordinary Differential Equations*, New York: Dover Publications, 1956). Рис. 8.6.8 был предложен в статье Энн Нонбюрг (Anne Noonburg), содержащей подобный рисунок, в весеннем выпуске 1993 года информационного бюллетеня по обыкновенным дифференциальным уравнениям *C • ODE • E Newsletter*.

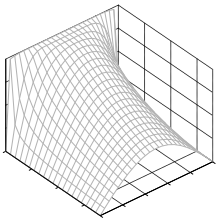
Наконец, мы приведем относящийся сюда пример, на который вдохновил нас демонстрационный пакет системы *Maple*. Команда `dsolve` системы *Maple* приводит к общему решению

$$\begin{aligned} y(x) &= x^{-1}\left(c_1 J_{10}(x) + c_2 Y_{10}(x)\right) + \\ &+ x^{-11}(1857945600 + 51609600x^2 + 806400x^4 + 9600x^6 + 100x^8 + x^{10}) \end{aligned} \tag{12}$$

неоднородного уравнения второго порядка

$$x^2 y'' + 3xy' + (x^2 - 99)y = x. \tag{13}$$

Покажите, что теорема 1 из этого раздела объясняет "бесселеву часть" предполагаемого решения в равенстве (12). Можете ли вы объяснить, откуда взялась часть, связанная с рациональной функцией, или по крайней мере проверить ее? Дальнейшие примеры этого сорта вы можете построить так: замените коэффициент 99 в уравнении (13) на $r^2 - 1$, где r — *четное* целое число, или замените (можете обе замены сделать одновременно) x в правой части на x^s, где s — *нечетное* целое число. (При других заменах могут появиться и более экзотические специальные функции.)



ГЛАВА 9

Методы рядов Фурье

9.1. Периодические функции и тригонометрические ряды

Как побуждение для изучения рядов Фурье, мы рассматриваем дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = f(t), \tag{1}$$

которое моделирует поведение системы, состоящей из материальной точки заданной массы, закрепленной на пружине, с собственной [круговой] частотой ω_0. (Движение эта система совершает под влиянием внешней силы величиной $f(t)$ на единицу массы.) Как мы видели в разделе 3.6, частное решение уравнения (1) легко найти методом неопределенных коэффициентов, если $f(t)$ — простая гармоническая функция, т. е. функция синус или косинус. Например, уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = A\cos\omega t \tag{2}$$

при $\omega^2 \neq \omega_0^2$ имеет частное решение

$$x_p(t) = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\omega t, \tag{3}$$

которое легко найти, если начать с пробного решения $x_p(t) = a\cos\omega t$.

Теперь сделаем более общие предположения. А именно, предположим, что силовая функция $f(t)$ в уравнении (1) является линейной комбинацией простых гармонических функций. Тогда, на основе уравнения (3) и аналогичной формулы с синусом вместо косинуса, мы

можем применить принцип суперпозиции, чтобы сконструировать частное решение уравнения (1). Рассмотрим, например, уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \sum_{n=1}^{N} A_n \cos \omega_n t, \tag{4}$$

в котором ω_0^2 не равно ни одному из чисел ω_n^2. Уравнение (4) имеет частное решение

$$x_p(t) = \sum_{n=1}^{N} \frac{A_n}{\omega_0^2 - \omega_n^2} \cos \omega_n t, \tag{5}$$

которое получается в результате суммирования решений, определенных равенством (3) для соответствующих N слагаемых в правой части в уравнении (4).

Механические (и электрические) системы часто содержат периодические вынуждающие функции, которые не являются [просто] конечными линейными комбинациями синусов и косинусов. Однако, как мы скоро увидим, любая разумно хорошая периодическая функция $f(t)$ имеет представление в виде *бесконечного ряда* тригонометрических членов. Этот факт открывает способ решения уравнения (1) сложением тригонометрических "стандартных блоков", в котором конечная сумма в уравнении (5) заменяется бесконечным рядом.

Определение. Периодическая функция

Функция $f(t)$, определенная для всех t, называется **периодической** при условии, что существует положительное число p, такое что

➤
$$f(t + p) = f(t) \tag{6}$$

для всех t. Число p в этом случае называется **периодом** функции f.

Обратите внимание, что период периодической функции не единственный; например, если p — период функции $f(t)$, то и числа $2p$, $3p$ и так далее также являются ее периодами. Действительно, каждое положительное число является периодом любой постоянной функции.

Если существует наименьшее положительное число P, такое что $f(t)$ является периодической с периодом P, то мы называем P *наименьшим положительным (главным, основным)* периодом функции f. Например, наименьший положительный период функций $g(t) = \cos nt$ и $h(t) = \sin nt$ (где n — положительное целое число) равен $2\pi/n$, потому что

$$\cos n\left(t + \frac{2\pi}{n}\right) = \cos(nt + 2\pi) = \cos nt$$

и (7)

$$\sin n\left(t + \frac{2\pi}{n}\right) = \sin(nt + 2\pi) = \sin nt.$$

Кроме того, 2π также является периодом функций $g(t)$ и $h(t)$. Обычно у нас не будет необходимости указывать именно наименьший положительный период функции $f(t)$ и мы будем просто говорить, что $f(t)$ имеет период p, если p — любой период функции $f(t)$.

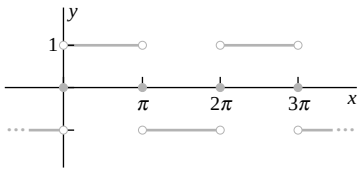


Рис. 9.1.1. Функция прямоугольного колебания (меандр)

В разделе 7.5 мы видели несколько примеров кусочно непрерывных периодических функций. Например, функция прямоугольного колебания (меандра), график которой показан на рис. 9.1.1, имеет период 2π.

Поскольку каждая из функций $g(t) = \cos nt$ и $h(t) = \sin nt$ имеет период 2π, любая линейная комбинация синусов и косинусов, кратных t, такая как

$$f(t) = 3 + \cos t - \sin t + 5\cos 2t + 17\sin 3t,$$

имеет период 2π. Но каждая такая линейная комбинация непрерывна, так что функция прямоугольного колебания (меандра) не может быть выражена в таком виде. В своем знаменитом трактате *Аналитическая теория тепла*[1] (1822), французский ученый Жозеф Фурье (1768–1830) сделал замечательное открытие: каждая функция $f(t)$ с периодом 2π может быть представлена *бесконечным* тригонометрическим рядом вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt). \tag{8}$$

Мы увидим в разделе 9.2, что при довольно умеренных ограничениях на функцию $f(t)$ это действительно так! Бесконечный ряд вида (8) называют *рядом Фурье*, а представление функций рядом Фурье — один из широко используемых методов в прикладной математике, особенно для решения дифференциальных уравнений в частных производных (см. разделы 9.5–9.7).

Ряд Фурье функции с периодом 2π

В этом разделе мы ограничим наше внимание функциями, период которых равен[2] 2π. Мы хотим определить значения коэффициентов ряда Фурье (8), если он сходится к заданной функции $f(t)$, период которой равен 2π. Для этой цели нам понадобятся значения следующих интегралов, в которых m и n обозначают положительные целые числа (задачи 27–29):

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mt \cos nt\, dt = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ \pi, & \text{если } m = n; \end{cases} \tag{9}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mt \sin nt\, dt = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ \pi, & \text{если } m = n; \end{cases} \tag{10}$$

[1] *Théorie analytique de la chaleur*. Для любителей копаться в Интернете авторы приводят ее английское название: *The Analytic Theory of Heat*. — *Примеч. ред.*

[2] Как уже говорили авторы, чаще всего это значит, что ***один из*** *периодов равен* 2π. — *Примеч. ред.*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mt \sin nt \, dt = 0 \quad \text{для всех } m \text{ и } n. \tag{11}$$

Эти формулы означают, что функции $\cos nt$ и $\sin nt$ для $n = 1, 2, 3, \ldots$ составляют *взаимно ортогональную* систему функций на интервале $[-\pi, \pi]$. Две действительные функции $u(t)$ и $v(t)$ называются **ортогональными** на интервале $[a, b]$, если

$$\int_a^b u(t)v(t) \, dt = 0. \tag{12}$$

Предположим теперь, что кусочно непрерывная функция $f(t)$, период которой равен 2π, имеет представление в виде ряда Фурье

➤
$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mt + b_m \sin mt), \tag{13}$$

в том смысле, что бесконечный ряд справа сходится к значению $f(t)$ для каждого t. Мы предполагаем кроме того, что если бесконечный ряд в равенстве (13) умножить на любую непрерывную функцию, то полученный ряд можно интегрировать почленно. Тогда результат почленного интегрирования равенства (13) от $t = -\pi$ до $t = \pi$ будет таким:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \, dt + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos mt \, dt \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \left(b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin mt \, dt \right) = \pi a_0,$$

потому что все интегралы от тригонометрических функций обратятся в нуль. Следовательно,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \, dt. \tag{14}$$

Если мы сначала умножим каждую часть равенства (13) на $\cos nt$ и затем проинтегрируем почленно, в результате получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nt \, dt + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos mt \, \cos nt \, dt \right) + \sum_{m=1}^{\infty} \left(b_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin mt \, \cos nt \, dt \right),$$

затем из равенства (11) следует, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt = \sum_{m=1}^{\infty} a_m \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos mt \, \cos nt \, dt \right). \tag{15}$$

Но изо всех интегралов (для $m = 1, 2, 3, \ldots$) в правой части равенства (15) отличным от нуля является только тот, для которого $m = n$. Таким образом, равенство (9) дает

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt = a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nt \, dt = \pi a_n,$$

так что значение коэффициента a_n равно

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt. \tag{16}$$

Заметьте, что при $n = 0$ формула (16) приводит к равенству (14); это объясняет, почему мы обозначаем постоянный член в первоначальном ряде Фурье через $\frac{1}{2}a_0$ (а не просто через a_0). Если мы умножим каждую часть равенства (13) на $\sin nt$ и затем проинтегрируем полученное равенство почленно, мы подобным способом найдем, что

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt. \tag{17}$$

Короче говоря, мы установили, что если ряд в (13) сходится к $f(t)$ и если допустимо выполнять интегрирование почленно в тех случаях, в которых мы это сделали, то значения коэффициентов ряда определяются равенствами (16) и (17). Это объясняет, почему ряд Фурье периодической функции *определяется* с помощью этих формул независимо от того, действительно ли полученный ряд сходится к функции (или даже сходится ли он вообще).

Определение. Ряд Фурье и коэффициенты Фурье

Пусть $f(t)$ является кусочно-непрерывной функцией, период которой равен 2π, причем эта функция определена для всех t. Тогда **ряд Фурье** функции $f(t)$ представляет собой ряд

➤
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt + b_n\sin nt), \tag{18}$$

где **коэффициенты Фурье** a_n и b_n определены с помощью формул

➤
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt \tag{16}$$

для $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ и

➤
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt \tag{17}$$

для $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Может случиться (и часто случается), что ряд Фурье заданной функции не сходится к функции в некоторых точках из области определения функции. Мы поэтому будем писать

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt + b_n\sin nt), \tag{19}$$

не ставя знака равенства между функцией и ее рядом Фурье, пока мы не обсудим сходимость ряда Фурье в разделе 9.2.

Предположим, что кусочно-непрерывная функция $f(t)$ первоначально определена только на интервале $[-\pi, \pi]$, и примем, что $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда, налагая условие периодичности на f, мы можем продолжить ее с помощью равенства $f(t + 2\pi) = f(t)$, потребовав, чтобы оно выполнялось для всех t, т. е. так, чтобы область определения продолжения содержала все вещественные числа. Мы продолжаем обозначать это продолжение первоначальной функции через f и обращаем внимание, что оно автоматически имеет период 2π. График продолжения выглядит так же на каждом интервале вида

$$(2n - 1)\pi \leqq t \leqq (2n + 1)\pi,$$

где n — целое число (рис. 9.1.2). Например, функция прямоугольного колебания (меандра) на рис. 9.1.1 может быть описана как функция периода 2π, такая что

$$f(t) = \begin{cases} -1, & \text{если } -\pi < t < 0; \\ +1, & \text{если } 0 < t < \pi; \\ 0, & \text{если } t = -\pi, 0 \text{ или } \pi. \end{cases} \tag{20}$$

Таким образом, функция прямоугольного колебания (меандра) представляет собой функцию периода 2π, определенную на одном полном периоде равенством (20).

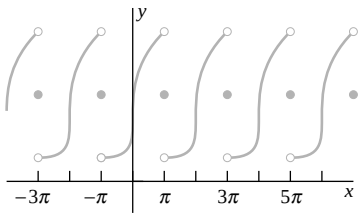


Рис. 9.1.2. Продолжение функции таким способом, чтобы получилась периодическая функция

Мы должны рассматривать ряды Фурье кусочно непрерывных функций, потому что многие функции, которые применяются в приложениях, являются только кусочно непрерывными, но не непрерывными. Обратите внимание, что интегралы в равенствах (16) и (17) существуют, если $f(t)$ кусочно непрерывна, так что каждая кусочно непрерывная функция имеет ряд Фурье.

Пример 1 Найдем ряд Фурье функции прямоугольного колебания (меандра), определенной равенством (20).

Решение Всегда стоит попытаться вычислить a_0 отдельно с помощью равенства (14). Таким образом, мы имеем

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (-1)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (+1)\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}(-\pi) + \frac{1}{\pi}(\pi) = 0.$$

Мы разбиваем первый интеграл на два интеграла, потому что $f(t)$ определена различными формулами на интервалах $(-\pi, 0)$ и $(0, \pi)$; значения функции $f(t)$ в конечных точках этих интервалов не влияют на значения интегралов.

Из равенства (16) при $n > 0$ получаем:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\cos nt)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos nt\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\sin nt\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}\sin nt\right]_{0}^{\pi} = 0.$$

А из равенства (17) получаем

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\sin nt)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin nt\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}\cos nt\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos nt\right]_{0}^{\pi} =$$

$$= \frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \frac{2}{n\pi}[1-(-1)^n].$$

Таким образом, $a_n = 0$ для всех $n \geqq 0$ и

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{4}{n\pi} & \text{для } n \text{ нечетных;} \\ 0 & \text{для } n \text{ четных.} \end{cases}$$

Последний результат следует из того, что $\cos(-n\pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n$. Зная эти значения коэффициентов Фурье, мы получаем ряд Фурье

$$f(t) \sim \frac{4}{\pi}\sum_{n \text{ нечетное}} \frac{\sin nt}{n} = \frac{4}{\pi}\left(\sin t + \frac{1}{3}\sin 3t + \frac{1}{5}\sin 5t + \cdots\right). \quad (21)$$

Здесь мы ввели полезное обозначение

$$\sum_{n \text{ нечетное}} \quad \text{для} \quad \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ нечетное}}}^{\infty}$$

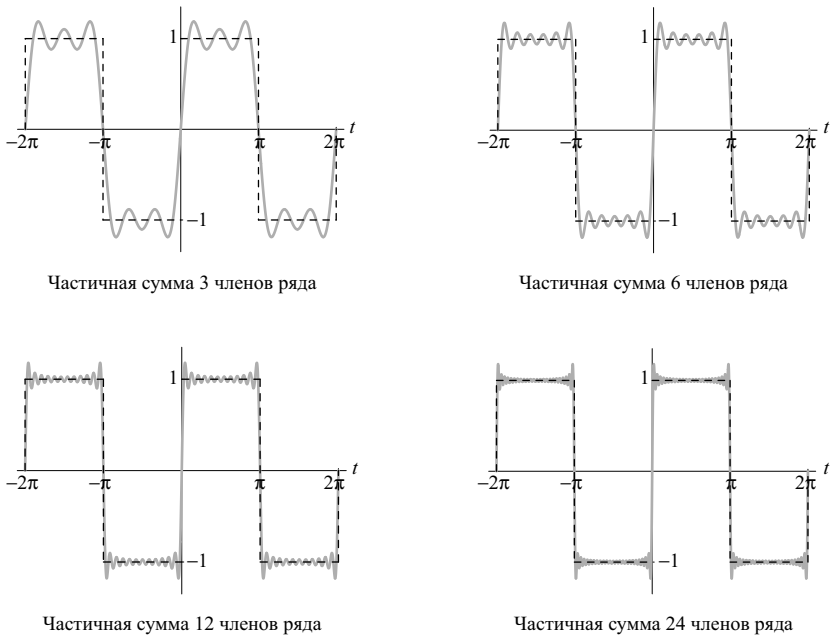
— например,

$$\sum_{n \text{ нечетное}} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots.$$

На рис. 9.1.3 показаны графики нескольких частичных сумм

$$S_N(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(2n-1)t}{2n-1}$$

ряда Фурье (21). Обратите внимание, что, когда t приближается к разрыву $f(t)$ с любой стороны, значение $S_n(t)$ имеет тенденцию промахиваться и немного превышает (по абсолютной величине) предельное значение $f(t) - +1$ или -1 в этом случае. Это поведение ряда Фурье в окрестности точки разрыва его функции типично и известно как **явление Гиббса**. ■



Частичная сумма 3 членов ряда | Частичная сумма 6 членов ряда

Частичная сумма 12 членов ряда | Частичная сумма 24 членов ряда

Рис. 9.1.3. Графики частичных сумм ряда Фурье функции прямоугольного колебания (меандра) (пример 1) с $N = 3, 6, 12$ и 24 членами

Следующие интегральные формулы, легко получаемые интегрированием по частям, полезны при вычислении рядов Фурье полиномиальных функций:

$$\int u \cos u \, du = \cos u + u \sin u + C; \tag{22}$$

$$\int u \sin u \, du = \sin u - u \cos u + C; \tag{23}$$

$$\int u^n \cos u \, du = u^n \sin u - n \int u^{n-1} \sin u \, du; \tag{24}$$

$$\int u^n \sin u \, du = -u^n \cos u + n \int u^{n-1} \cos u \, du. \tag{25}$$

Пример 2 Найдем ряд Фурье функции, период которой равен 2π и которая определена на одном периоде так:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi < t \leqq 0; \\ t, & \text{если } 0 \leqq t < \pi; \\ \dfrac{\pi}{2}, & \text{если } t = \pm\pi. \end{cases} \tag{26}$$

График функции f приведен на рис. 9.1.4.

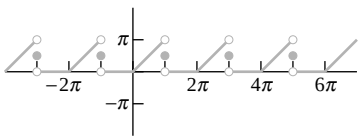


Рис. 9.1.4. Периодическая функция из примера 2

Решение Значения $f(\pm\pi)$ являются несущественными, потому что они не имеют никакого влияния на значения интегралов, по которым определяются коэффициенты Фурье. Поскольку $f(t) \equiv 0$ на интервале $(-\pi, 0)$, каждый интеграл от $t = -\pi$ до $t = \pi$ может быть заменен интегралом от $t = 0$ до $t = \pi$. Поэтому в соответствии с равенствами (14), (16) и (17) имеем

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi t\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi t\cos nt\,dt = \frac{1}{n^2\pi}\int_0^{n\pi} u\cos u\,du \qquad \left(u = nt,\ t = \frac{u}{n}\right) =$$

$$= \frac{1}{n^2\pi}\Big[\cos u + u\sin u\Big]_0^{n\pi} = \qquad \text{(по формуле (22))}$$

$$= \frac{1}{n^2\pi}[(-1)^n - 1].$$

Следовательно, $a_n = 0$ для четных $n \geqq 2$;

$$a_n = -\frac{2}{n^2\pi}, \quad \text{если } n \text{ нечетное.}$$

Далее,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi t\sin nt\,dt = \frac{1}{n^2\pi}\int_0^{n\pi} u\sin u\,du =$$

$$= \frac{1}{n^2\pi}\Big[\sin u - u\cos u\Big]_0^{n\pi} \qquad \text{(по формуле (20))} =$$

$$= -\frac{1}{n}\cos n\pi.$$

Так что

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \qquad \text{для всех } n \geqq 1.$$

Следовательно, ряд Фурье функции $f(t)$ имеет вид

$$f(t) \sim \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n \text{ нечетное}} \frac{\cos nt}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin nt}{n}. \tag{27}$$

■

Если период функции $f(t)$ равен 2π, то легко проверить (задача 30), что

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt = \int_{a}^{a+2\pi} f(t)\, dt \tag{28}$$

для всех a. Иными словами, интеграл от функции $f(t)$ по одному какому-нибудь интервалу длины 2π равен интегралу от этой функции по любому другому такому интервалу. В случае, если $f(t)$ задана явно на интервале $[0, 2\pi]$, а не на $[-\pi, \pi]$, может оказаться более удобным вычислить ее коэффициенты Фурье так:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt\, dt \tag{29a}$$

и

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt\, dt. \tag{29b}$$

9.1. Задачи

В задачах 1–10 сделайте набросок графика функции f, определенной для всех t заданной формулой, и определите, является ли эта функция периодической. Если это так, найдите ее наименьший период.

1. $f(t) = \sin 3t$

2. $f(t) = \cos 2\pi t$

3. $f(t) = \cos \dfrac{3t}{2}$

4. $f(t) = \sin \dfrac{\pi t}{3}$

5. $f(t) = \operatorname{tg} t$

6. $f(t) = \operatorname{ctg} 2\pi t$

7. $f(t) = \cosh 3t$

8. $f(t) = \sinh \pi t$

9. $f(t) = |\sin t|$

10. $f(t) = \cos^2 3t$

В задачах 11–26 даны значения функции $f(t)$ (период которой равен 2π) на одном полном периоде. Сделайте эскиз графика функции на нескольких периодах и найдите ряд Фурье этой функции.

11. $f(t) \equiv 1\,,\ -\pi \leqq t \leqq \pi$

12. $f(t) = \begin{cases} +3, & -\pi < t \leqq 0; \\ -3, & 0 < t \leqq \pi \end{cases}$

13. $f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi < t \leqq 0; \\ 1, & 0 < t \leqq \pi \end{cases}$

14. $f(t) = \begin{cases} 3, & -\pi < t \leqq 0; \\ -2, & 0 < t \leqq \pi \end{cases}$

15. $f(t) = t,\ -\pi < t \leqq \pi$

16. $f(t) = t,\ 0 < t < 2\pi$

17. $f(t) = |t|,\ -\pi \leqq t \leqq \pi$

18. $f(t) = \begin{cases} \pi + t, & -\pi < t \leqq 0; \\ \pi - t, & 0 < t \leqq \pi \end{cases}$

19. $f(t) = \begin{cases} \pi + t, & -\pi \leqq t < 0; \\ 0, & 0 \leqq t \leqq \pi \end{cases}$

20. $f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi \leqq t < -\pi/2; \\ 1, & -\pi/2 \leqq t \leqq \pi/2; \\ 0, & \pi/2 < t \leqq \pi \end{cases}$

21. $f(t) = t^2\ ,\ -\pi \leqq t \leqq \pi$

22. $f(t) = t^2\ ,\ 0 \leqq t < 2\pi$

23. $f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi \leqq t \leqq 0; \\ t^2, & 0 \leqq t < \pi \end{cases}$

24. $f(t) = |\sin t|\ ,\ -\pi \leqq t \leqq \pi$

25. $f(t) = \cos^2 2t\ ,\ -\pi \leqq t \leqq \pi$

26. $f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi \leqq t \leqq 0; \\ \sin t, & 0 \leqq t \leqq \pi \end{cases}$

27. Проверьте равенство (9). *Указание.* Примените тригонометрическое тождество

$$\cos A \cos B = \tfrac{1}{2}\left[\cos(A+B) + \cos(A-B)\right].$$

28. Проверьте равенство (10).

29. Проверьте равенство (11).

30. Пусть $f(t)$ — кусочно непрерывная функция с периодом P. **(a)** Предположим, что $0 \leqq a < P$. Подставьте $u = t - P$ и покажите, что

$$\int_P^{a+P} f(t)\,dt = \int_0^a f(t)\,dt.$$

Заключите из этого, что

$$\int_a^{a+P} f(t)\,dt = \int_0^P f(t)\,dt.$$

(b) Для данного A выберите n так, чтобы $A = nP + a$ для $0 \leqq a < P$. Затем подставьте $v = t - nP$ и покажите, что

$$\int_A^{A+P} f(t)\,dt = \int_a^{a+P} f(t)\,dt = \int_0^P f(t)\,dt.$$

31. Умножьте каждую часть равенства (13) на $\sin nt$ и затем проинтегрируйте почленно, чтобы получить равенство (17).

9.2. Ряд Фурье общего вида и сходимость

В разделе 9.1 мы определили ряд Фурье периодической функции, период которой равен 2π. Теперь пусть $f(t)$ обозначает функцию, которая является кусочно непрерывной для всех t и имеет произвольный период $P > 0$. Мы пишем

$$P = 2L, \tag{1}$$

так что L — **полупериод** функции f. Давайте теперь определим функцию g следующим образом:

$$g(u) = f\left(\frac{Lu}{\pi}\right) \tag{2}$$

для всех u. Тогда

$$g(u+2\pi) = f\left(\frac{Lu}{\pi} + 2L\right) = f\left(\frac{Lu}{\pi}\right) = g(u),$$

и, следовательно, $g(u)$ является также периодической и имеет период 2π. Следовательно, g имеет ряд Фурье

$$g(u) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nu + b_n \sin nu) \tag{3}$$

с коэффициентами Фурье

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(u)\cos nu\, du \tag{4a}$$

и

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(u)\sin nu\, du. \tag{4b}$$

Если мы теперь напишем

$$t = \frac{Lu}{\pi}, \quad u = \frac{\pi t}{L}, \quad f(t) = g(u), \tag{5}$$

то

$$f(t) = g\left(\frac{\pi t}{L}\right) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi t}{L} + b_n \frac{n\pi t}{L}\right), \tag{6}$$

и затем подстановка (5) в (4) приводит к равенствам

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(u)\cos nu\, du \qquad \left(u = \frac{\pi t}{L},\ du = \frac{\pi}{L}\, dt\right) =$$

$$= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} g\left(\frac{\pi t}{L}\right)\cos\frac{n\pi t}{L}\, dt.$$

Поэтому

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\, dt; \tag{7}$$

подобным образом

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}\, dt. \tag{8}$$

Это вычисление мотивирует определение ряда Фурье периодической функции с периодом $2L$.

Определение. Ряд Фурье и коэффициенты Фурье

Пусть $f(t)$ — кусочно-непрерывная функция, период которой равен $2L$, причем она определена для всех t. Тогда **ряд Фурье** функции $f(t)$ — это ряд

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + b_n \sin \frac{n\pi t}{L} \right), \tag{6}$$

где **коэффициенты Фурье** $\{a_n\}_0^\infty$ и $\{b_n\}_1^\infty$ определены так:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \cos \frac{n\pi t}{L}\, dt \tag{7}$$

и

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \sin \frac{n\pi t}{L}\, dt. \tag{8}$$

При $n = 0$ равенство (7) принимает очень простой вид

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t)\, dt, \tag{9}$$

из которого видно, что постоянный член $\frac{1}{2}a_0$ в ряде Фурье функции f представляет собой просто среднее значение функции $f(t)$ на интервале $[-L, L]$.

Как следствие задачи 30 из раздела 9.1, мы можем вычислить интегралы в равенствах (7) и (8) по любому другому интервалу длины $2L$. Например, если $f(t)$ задана единой формулой для $0 < t < 2L$, иногда более удобно вычислить интегралы

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{0}^{2L} f(t) \cos \frac{n\pi t}{L}\, dt \tag{10a}$$

и

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{0}^{2L} f(t) \sin \frac{n\pi t}{L}\, dt. \tag{10b}$$

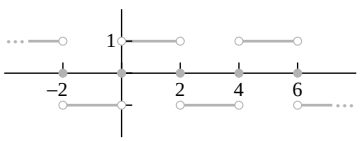


Рис. 9.2.1. Прямоугольное колебание (меандр) из примера 1

Пример 1 На рис. 9.2.1 показан график функции прямоугольного колебания (меандра) с периодом 4. Найдем ее ряд Фурье.

Решение Здесь $L = 2$. Кроме того, $f(t) = -1$, если $-2 < t < 0$, в то время как $f(t) = 1$, если $0 < t < 2$. Следовательно, из равенств (7), (8) и (9) имеем

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(-1)\,dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{2}(+1)\,dt = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(-1)\cos\frac{n\pi t}{2}\,dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{2}(+1)\cos\frac{n\pi t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi t}{2}\right]_{-2}^{0} + \frac{1}{2}\left[\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi t}{2}\right]_{0}^{2} = 0,$$

и

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(-1)\sin\frac{n\pi t}{2}\,dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{2}(+1)\sin\frac{n\pi t}{2}\,dt +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi t}{2}\right]_{-2}^{0} + \frac{1}{2}\left[-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi t}{2}\right]_{0}^{2} =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right] = \begin{cases} \dfrac{4}{n\pi}, & \text{если } n \text{ нечетное,} \\ 0, & \text{если } n \text{ четное.} \end{cases}$$

Таким образом, ряд Фурье функции

$$f(t) \sim \frac{4}{\pi}\sum_{n \text{ нечетное}} \frac{1}{n}\sin\frac{n\pi t}{2} = \tag{11a}$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi t}{2} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi t}{2} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi t}{2} + \cdots\right). \tag{11b}$$

■

Теорема сходимости

Мы хотим подчинить периодическую функцию f таким условиям, которых будет достаточно, чтобы гарантировать, что ее ряд Фурье фактически сходится к $f(t)$ по крайней мере для тех значений t, в которых f непрерывна. Вспомните, что функция f называется *кусочно непрерывной* на интервале $[a, b]$, если существует конечное разбиение интервала $[a, b]$ с конечными точками

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = b,$$

такое что выполнены следующие условия.

1. Функция f непрерывна на каждом открытом интервале $t_{i-1} < t < t_i$.
2. В каждой конечной точке t_i такого подынтервала существует и конечен предел $f(t)$ при t, стремящемся к t_i изнутри подынтервала.

Функцию f называют *кусочно непрерывной* для всех t, если она кусочно непрерывна на каждом ограниченном интервале. Из этого следует, что кусочно непрерывная функция непрерывна (кроме, возможно, изолированных точек) и в каждой такой точке разрыва существуют односторонние пределы

$$f(t+) = \lim_{u \to t^+} f(u) \quad \text{и} \quad f(t-) = \lim_{u \to t^-} f(u), \tag{12}$$

причем они конечны. Таким образом, кусочно непрерывная функция имеет только изолированные точки разрыва, в которых терпит конечные скачки, подобные тому, который показан на рис. 9.2.2.

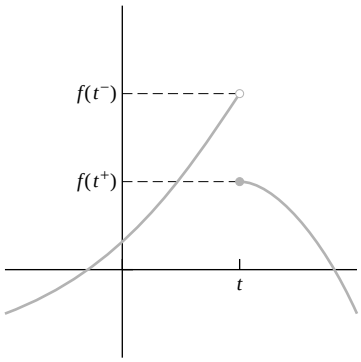


Рис. 9.2.2. Конечный скачок в (конечной) точке разрыва

Прямоугольное колебание (меандр) и пилообразные функции, с которыми мы познакомились в главе 7 — типичные примеры периодических кусочно непрерывных функций. Функция $f(t) = \operatorname{tg} t$ представляет собой пример периодической функции (период которой равен π), которая не является кусочно непрерывной, потому что она имеет бесконечные разрывы. Функция $g(t) = \sin(1/t)$ не является кусочно непрерывной на интервале $[-1, 1]$, потому что ее односторонние пределы в точке $t = 0$ не существуют. Функция

$$h(t) = \begin{cases} t, & \text{если } t = \dfrac{1}{n} \quad (n \text{ целое число}), \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

на интервале $[-1, 1]$ имеет односторонние пределы всюду, но не кусочно непрерывна, потому что ее точки разрыва не изолированы — точки разрыва этой функции образуют бесконечную последовательность $\{1/n\}_1^\infty$; кусочно непрерывная функция может иметь только конечное число разрывов на любом ограниченном интервале.

Обратите внимание, что кусочно непрерывная функция может быть не определена в ее изолированных точках разрыва. Иными словами, ее можно доопределить произвольно в таких точках. Например, функция прямоугольного колебания (меандра) f на рис. 9.2.1 кусочно непрерывна независимо от того, чем являются ее значения в точках $\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots$, в которых она разрывна. Ее производная f' также кусочно непрерывна; $f'(t) = 0$, если t не равно четному целому числу, если же t равно четному целому числу, то $f'(t)$ не определена.

Кусочно непрерывная функция f называется **кусочно гладкой**, если ее производная f' кусочно непрерывна. Согласно теореме 1 (формулировка следует ниже) ряд Фурье кусочно гладкой функции сходится всюду. Известны также более общие теоремы о сходимости рядов Фурье — при более слабых условиях на периодические функции f. Но условие, что f является кусочно гладкой, просто проверяется, и ему удовлетворяет большинство функций, с которыми приходится сталкиваться в практических приложениях. Доказательство следующей теоремы может быть найдено в книге Г. П. Толстова, посвященной рядам Фурье, изданной в Нью-Йорке в 1976 году). Вот ссылка: G. P. Tolstov, *Fourier Series* (New York: Dover, 1976).

Теорема 1 Сходимость ряда Фурье

Предположим, что периодическая функция f кусочно гладка. Тогда ее ряд Фурье (6) сходится

(a) к значению $f(t)$ в каждой точке, где f непрерывна, и

(b) к значению $\frac{1}{2}[f(t+) + f(t-)]$ в каждой точке, где f терпит разрыв. ▲

Обратите внимание, что $\frac{1}{2}[f(t+) + f(t-)]$ — *среднее* значение правого и левого пределов функции f в точке t. Если f непрерывна в t, то $f(t) = f(t+) = f(t-)$ и потому

➤
$$f(t) = \frac{f(t+) + f(t-)}{2}. \tag{13}$$

Следовательно, теорему 1 можно перефразировать следующим образом: ряд Фурье кусочно гладкой функции f сходится для *каждого* t к среднему значению (13). По этой причине общепринято писать

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + b_n \sin \frac{n\pi t}{L} \right) \tag{14}$$

с учетом того, что кусочно гладкую функцию f можно переопределить (в случае необходимости) в каждой ее точке разрыва так, чтобы удовлетворить условию среднего значения, выраженному равенством (13).

Пример 1

Продолжение

Из рис. 9.2.1 сразу видно, что если t_0 равно четному целому числу, то

$$\lim_{t \to t_0^+} f(t) = +1 \quad \text{и} \quad \lim_{t \to t_0^-} f(t) = -1.$$

Следовательно,

$$\frac{f(t_0+) + f(t_0-)}{2} = 0.$$

Обратите внимание, что, в соответствии с теоремой 1, ряд Фурье $f(t)$ в равенствах (11) явно сходится к нулю, если n равно четному целому числу (потому что $\sin n\pi = 0$). ■

Пример 2

Пусть период функции $f(t)$ равен 2, причем $f(t) = t^2$, если $0 < t < 2$. Мы определяем $f(t)$ при t равных четным целым числам из условия равенства

среднему значению (т. е. равенством (13)); следовательно, $f(t) = 2$, если t — четное целое число. График функции f приведен на рис. 9.2.3. Найдем ряд Фурье этой функции.

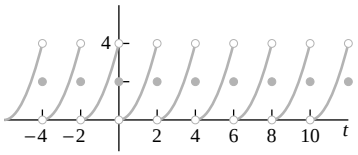


Рис. 9.2.3. Период функции из примера 2 равен 2

Решение Здесь $L = 1$, и наиболее удобно интегрировать от $t = 0$ до $t = 2$. Тогда

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_0^2 t^2\,dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^2 = \frac{8}{3}.$$

Применяя интегральные формулы, приведенные в равенствах (22)–(25) раздела 9.1, мы получаем

$$a_n = \int_0^2 t^2 \cos n\pi t\,dt =$$

$$= \frac{1}{n^3\pi^3}\int_0^{2n\pi} u^2 \cos u\,du \qquad \left(u = n\pi t,\ t = \frac{u}{n\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{n^3\pi^3}\Big[u^2 \sin u - 2\sin u + 2u\cos u\Big]_0^{2n\pi} = \frac{4}{n^2\pi^2};$$

$$b_n = \int_0^2 t^2 \sin n\pi t\,dt = \frac{1}{n^3\pi^3}\int_0^{2n\pi} u^2 \sin u\,du =$$

$$= \frac{1}{n^3\pi^3}\Big[-u^2\cos u + 2\cos u + 2u\sin u\Big]_0^{2n\pi} = -\frac{4}{n\pi}.$$

Следовательно, ряд Фурье функции f имеет вид

$$f(t) = \frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi t}{n^2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi t}{n}, \tag{15}$$

и по теореме 1 этот ряд сходится к $f(t)$ для всех t. ■

Мы можем вывести некоторые интересные следствия из ряда Фурье в (15). Если мы подставим $t = 0$ в каждую часть, мы найдем, что

$$f(0) = 2 = \frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Если решим это уравнение относительно ряда, мы получим замечательную сумму

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}, \tag{16}$$

значение которой было найдено Эйлером. Если мы подставим $t = 1$ в уравнение (15), мы получим

$$f(1) = 1 = \frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2},$$

а из этого равенства следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12}. \tag{17}$$

Если мы сложим ряды в равенствах (16) и (17) и затем разделим сумму на 2, то члены для четных n сократятся и в результате получим

$$\sum_{n \text{ нечетное}} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}. \tag{18}$$

9.2. Задачи

В задачах 1–14 даются значения периодической функции $f(t)$ на одном полном периоде; в каждой точке разрыва значение $f(t)$ определяется из условия среднего значения (равенство (13)). Сделайте набросок графика функции f и найдите ее ряд Фурье.

1. $f(t) = \begin{cases} -2, & -3 < t < 0; \\ 2, & 0 < t < 3 \end{cases}$

2. $f(t) = \begin{cases} 0, & -5 < t < 0; \\ 1, & 0 < t < 5 \end{cases}$

3. $f(t) = \begin{cases} 2, & -2\pi < t < 0; \\ -1, & 0 < t < 2\pi \end{cases}$

4. $f(t) = t, \ -2 < t < 2$

5. $f(t) = t, \ -2\pi < t < 2\pi$

6. $f(t) = t, \ 0 < t < 3$

7. $f(t) = |t|, \ -1 < t < 1$

8. $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 1; \\ 1, & 1 < t < 2; \\ 0, & 2 < t < 3 \end{cases}$

9. $f(t) = t^2, \ -1 < t < 1$

10. $f(t) = \begin{cases} 0, & -2 < t < 0; \\ t^2, & 0 < t < 2 \end{cases}$

11. $f(t) = \cos \dfrac{\pi t}{2}, \ -1 < t < 1$

12. $f(t) = \sin \pi t, \ 0 < t < 1$

13. $f(t) = \begin{cases} 0, & -1 < t < 0; \\ \sin \pi t, & 0 < t < 1 \end{cases}$

14. $f(t) = \begin{cases} 0, & -2\pi < t < 0; \\ \sin t, & 0 < t < 2\pi \end{cases}$

15. **(a)** Предположим, что период функции f равен 2π, причем $f(t) = t^2$ для $0 < t < 2\pi$. Покажите, что

$$f(t) = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{n^2} - 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n}$$

и сделайте набросок графика функции f, указывая значение в каждой точке разрыва. **(b)** Найдите суммы рядов в равенствах (16) и (17), зная сумму ряда Фурье в части (a).

16. **(a)** Предположим, что период функции f равен 2, причем $f(t) = 0$, если $-1 < t < 0$ и $f(t) = t$, если $0 < t < 1$. Покажите, что

$$f(t) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n \text{ нечетное}} \frac{\cos n\pi t}{n^2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin n\pi t}{n}$$

и сделайте набросок графика f, указывая значение в каждой точке разрыва. **(b)** Найдите сумму ряда в равенстве (18), зная сумму ряда Фурье в части (a).

17. **(a)** Предположим, что период функции f равен 2, причем $f(t) = t$ для $0 < t < 2$. Покажите, что

$$f(t) = 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi t}{n}$$

и сделайте набросок графика f, указывая значение в каждой точке разрыва. **(b)** Подставьте подходящее значение t, чтобы найти сумму **ряда Лейбница**.

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

В задачах 18–21 найдите ряд Фурье и постройте график функции с периодом 2π, к которой сходится каждый из рядов.

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{n} = \frac{\pi - t}{2} \quad (0 < t < 2\pi)$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \sin nt}{n} = \frac{t}{2} \quad (-\pi < t < \pi)$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{n^2} = \frac{3t^2 - 6\pi t + 2\pi^2}{12} \quad (0 < t < 2\pi)$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos nt}{n^2} = \frac{\pi^2 - 3t^2}{12} \quad (-\pi < t < \pi)$

22. Предположим, что $p(t)$ — многочлен степени n. Покажите повторным интегрированием по частям, что

$$\int p(t)g(t)\,dt = p(t)G_1(t) - p'(t)G_2(t) + p''(t)G_3(t) - \cdots + (-1)^n p^{(n)}(t)G_{n+1}(t),$$

где $G_k(t)$ обозначает k-ю повторную примитивную (первообразную) $G_k(t) = (D^{-1})^k g(t)$. Эта формула полезна при вычислении коэффициентов Фурье для многочленов.

23. Применяя интегральную формулу задачи 22, покажите, что

$$\int t^4 \cos t\,dt = t^4 \sin t + 4t^3 \cos t - 12t^2 \sin t - 24t \cos t + 24 \sin t + C$$

и что

$$\int t^4 \sin t\,dt = -t^4 \cos t + 4t^3 \sin t + 12t^2 \cos t - 24t \sin t - 24 \cos t + C.$$

24. **(a)** Покажите, что для $0 < t < 2\pi$,

$$t^4 = \frac{16\pi^4}{5} + 16\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2\pi^2}{n^2} - \frac{3}{n^4}\right)\cos nt + 16\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n^3} - \frac{\pi^2}{n}\right)\sin nt$$

и сделайте набросок графика f, указывая значение в каждой точке разрыва. **(b)** Зная сумму ряда Фурье в части (a), найдите суммы

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4} = \frac{7\pi^4}{720},$$

и

$$\sum_{n\ \text{нечетное}}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

25. **(a)** Найдите ряд Фурье функции f, период которой равен 2π, причем $f(t) = t^3$, если $-\pi < t < \pi$. **(b)** Используя ряд в части (a), найдите сумму

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots = \frac{\pi^3}{32}$$

и сделайте набросок графика функции f, указывая значение в каждой точке разрыва. **(c)** *Попытайтесь* найти значение суммы ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3} = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots$$

путем подстановки подходящего значения t в ряд Фурье из части (a). Успешна ли ваша попытка? Объясните.

9.2. Приложение. Вычисление коэффициентов Фурье с помощью компьютерной алгебры

Система компьютерной алгебры может очень облегчить вычисления коэффициентов Фурье заданной функции $f(t)$. В случае функции, которая определена "кусочно", мы должны позаботиться о том, чтобы "разбить" интеграл в соответствии с различными интервалами определения функции. Мы проиллюстрируем данный метод, вычислив ряд Фурье функции прямоугольного колебания (меандра), период которой равен 2π, которая была определена на интервале $(-\pi, \pi)$ равенством

$$f(t) = \begin{cases} -1, & \text{если } -\pi < t < 0, \\ +1, & \text{если } 0 < t < \pi. \end{cases} \tag{1}$$

В этом случае функция определена различными формулами на двух различных интервалах, так что каждый интеграл (коэффициент в ряде Фурье) от $-\pi$ до π должен быть представлен

в виде суммы двух интегралов:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nt\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(+1)\cos nt\,dt,$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\sin nt\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(+1)\sin nt\,dt. \qquad (2)$$

Мы можем определить коэффициенты в (2) как функции от n с помощью команд системы *Maple*

```
a := n -> (1/Pi)*(int(-cos(n*t), t=-Pi..0) +
                  int(+cos(n*t), t=0..Pi)):
b := n -> (1/Pi)*(int(-sin(n*t), t=-Pi..0) +
                  int(+sin(n*t), t=0..Pi)):
```

или с помощью команд системы *Mathematica*

```
a[n_] := (1/Pi)*(Integrate[-Cos[n*t], {t, -Pi, 0}] +
                 Integrate[+Cos[n*t], {t, 0, Pi}])
b[n_] := (1/Pi)*(Integrate[-Sin[n*t], {t, -Pi, 0}] +
                 Integrate[+Sin[n*t], {t, 0, Pi}])
```

Поскольку функция $f(t)$ в равенстве (1) нечетна, мы естественно находим, что $a_n \equiv 0$. Следовательно, команды системы *Maple*

```
fourierSum := sum(b(n)*sin(n*t), n=1..9);
plot(fourierSum, t=-2*Pi..4*Pi);
```

или команды системы *Mathematica*

```
fourierSum = Sum[b[n]*Sin[n*t], {n,1,9}]
Plot[fourierSum, {t, -2*Pi, 4*Pi}];
```

приводят к частичной сумме

$$\sum_{n=1}^{9} b_n \sin nt = \frac{4}{\pi}\left(\sin t + \frac{\sin 3t}{3} + \frac{\sin 5t}{5} + \frac{\sin 7t}{7} + \frac{\sin 9t}{9}\right)$$

и генерируют график, подобный одному из приведенных на рис. 9.1.3. Соответствующие команды пакета MATLAB полностью аналогичны.

Чтобы попрактиковаться в этом духе в вычислениях с рядами Фурье с помощью пакетов символических преобразований, вы можете начать с того, что проверите ряд Фурье, рассчитанный вручную в примерах 1 и 2 из этого раздела. Затем было бы полезно решить задачи 1–21. Наконец, треугольная волна и трапецеидальные волновые функции с периодом 2π, показанные на рис. 9.2.4 и 9.2.5, имеют особенно интересные ряды Фурье, которые мы приглашаем вас найти самостоятельно.

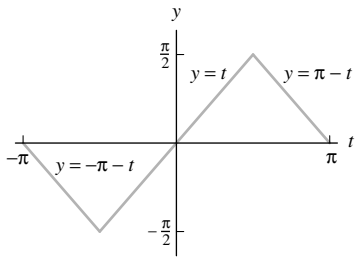


Рис. 9.2.4. Треугольная волна

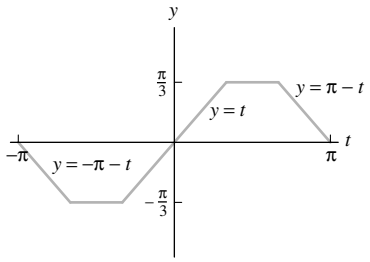


Рис. 9.2.5. Трапецеидальная волна

9.3. Ряды Фурье по синусам и косинусам

Некоторые свойства функций очень хорошо отражаются (и хорошо заметны) в их ряде Фурье. Функция f, определенная для всех t, называется **четной**, если

$$f(-t) = f(t) \tag{1}$$

для всех t; f называется **нечетной**, если

$$f(-t) = -f(t) \tag{2}$$

для всех t. Первое условие подразумевает, что график $y = f(t)$ симметричен относительно оси y, тогда как условие (2) подразумевает, что график нечетной функции симметричен относительно начала координат (рис. 9.3.1). Функции $f(t) = t^{2n}$ и $g(t) = \cos t$ — четные функции, тогда как функции $f(t) = t^{2n+1}$ и $g(t) = \sin t$ — нечетные. Мы увидим, что ряд Фурье четной периодической функции имеет только члены с косинусами и что ряд Фурье нечетной периодической функции имеет только члены с синусами.

Сложение и вычитание площадей, точнее, присваивание им знаков, как показано на рис. 9.3.2, напоминает нам о следующих основных свойствах интегралов четных и нечетных

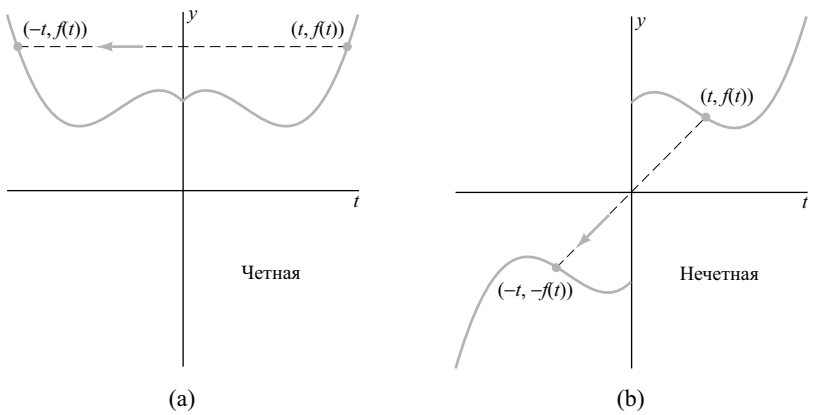


Рис. 9.3.1. Функция: a — четная; b — нечетная

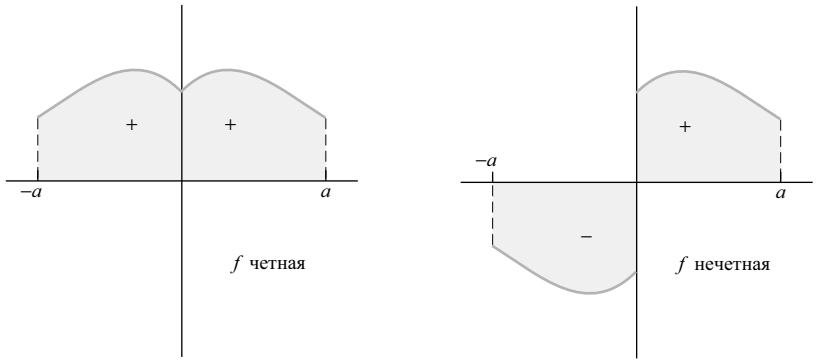


Рис. 9.3.2. Область под графиком четной (a) и нечетной (b) функции

функций по интервалу $[-a, a]$, который расположен симметрично относительно начала координат.

$$\text{Если } f \text{ четная:} \qquad \int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{a} f(t)\,dt. \tag{3}$$

$$\text{Если } f \text{ нечетная:} \quad \int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0. \tag{4}$$

Эти факты просто проверить аналитически (задача 17).

Из равенств (1) и (2) немедленно следует, что произведение двух четных функций является четной функцией, как и произведение двух нечетных функций; произведение же четной функции и нечетной функции является нечетной функцией. В частности, если $f(t)$ — *четная* периодическая функция, период которой равен $2L$, то $f(t)\cos(n\pi t/L)$ является четной функцией, тогда как $f(t)\sin(n\pi t/L)$ представляет собой нечетную функцию, потому что функция косинус является четной, а функция синус нечетна. Поэтому когда мы вычисляем коэффициенты Фурье функции f, мы получаем

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt \tag{5a}$$

и

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}\,dt = 0 \tag{5b}$$

с учетом равенств (3) и (4). Следовательно, ряд Фурье *четной* функции f, период которой равен $2L$, имеет только члены с *косинусами*:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi t}{L} \qquad (f \text{ четная}), \tag{6}$$

причем значения a_n определяются равенствами (5a). Если $f(t)$ *нечетная*, то $f(t)\cos(n\pi t/L)$ нечетная, а $f(t)\sin(n\pi t/L)$ — четная, так что

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt = 0 \tag{7a}$$

и

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}\,dt = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(t)\sin\frac{n\pi t}{L}\,dt. \tag{7b}$$

Следовательно, ряд Фурье *нечетной* функции f, период которой равен $2L$, имеет только члены с *синусами*:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi t}{L} \qquad (f \text{ нечетная}), \tag{8}$$

причем значения коэффициентов b_n определяются равенствами (7b).

Четные и нечетные продолжения

Все наши более ранние обсуждения и примеры мы начинали с рассмотрения периодической функции, определенной *для всех* t; ряд Фурье такой функции определен однозначно формулами для коэффициентов Фурье. Однако во многих практических приложениях встречаются функции f, первоначально определенные только на интервалах вида $0 < t < L$, и мы хотим представить значения таких функций на интервалах такого вида рядами Фурье для функций, периоды которых равны $2L$. Первый шаг: необходимо продолжить такую функцию f на интервал $-L < t < 0$. Имея такое продолжение, мы можем продолжить f на всю вещественную ось с условием соблюдения периодичности $f(t + 2L) = f(t)$ (и использовать свойство среднего значения, если возникнут какие-либо разрывы). Но то, *как* мы определяем f для $-L < t < 0$ зависит от нашего выбора, и представление ряда Фурье для $f(t)$ на $(0, L)$, которое мы получаем, будет зависеть от этого выбора. Несомненно, различные продолжения f на интервал $(-L, 0)$ будут иметь различные ряды Фурье, которые сходятся к той же самой функции $f(t)$ в первоначальном интервале $0 < t < L$, но сходятся к различным продолжениям f на интервале $-L < t < 0$.

На практике, если данная функция $f(t)$ определена для $0 < t < L$, мы вообще делаем один из двух естественных выборов — мы расширяем область определения (т. е. продлеваем f), притом так, чтобы получить или четную функцию, или нечетную функцию. **Четное продолжение с периодом** $2L$ функции f — это функция f_E, определенная равенством

$$f_E(t) = \begin{cases} f(t), & \text{если} \quad 0 < t < L; \\ f(-t), & \text{если} \; -L < t < 0, \end{cases} \tag{9}$$

а также равенством $f_E(t + 2L) = f_E(t)$ для всех t. Значения $f_E(t)$ для t, кратных L, несущественны, потому что они не могут повлиять на ее ряд Фурье f_E. Ряд Фурье четного продолжения f_E, определенный равенствами (5) и (6), будет содержать только члены с косинусами и называется *рядом Фурье по косинусам* первоначальной функции f.

Нечетное продолжение с периодом $2L$ функции f — это функция f_O, определенная равенством

$$f_O(t) = \begin{cases} f(t), & \text{если} \quad 0 < t < L; \\ -f(-t), & \text{если} \; -L < t < 0, \end{cases} \tag{10}$$

а также равенством $f_O(t + 2L) = f_O(t)$ для всех t. Ряд Фурье нечетного продолжения f_O, данный равенствами (7) и (8), будет содержать только члены с синусами и называется *рядом Фурье по синусам* первоначальной функции f.

Определение. Ряды Фурье по косинусам и синусам

Предположим, что функция $f(t)$ кусочно непрерывна на интервале $[0, L]$. Тогда **ряд Фурье функции** f **по косинусам** — это ряд

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L}, \tag{11}$$

причем

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} \, dt. \tag{12}$$

Ряд Фурье функции f **по синусам** — это ряд

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{L}, \tag{13}$$

причем

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \sin \frac{n\pi t}{L} \, dt. \tag{14}$$

Принимая предположение, что f является кусочно-гладкой и удовлетворяет условию среднего значения $f(t) = \frac{1}{2}[f(t+) + f(t-)]$ в каждой из ее изолированных точек разрыва, по теореме 1 из раздела 9.2 получаем, что каждый из двух рядов в (11) и (13) сходится к $f(t)$ для всех t в интервале $0 < t < L$. Вне этого интервала ряд по косинусам в (11) сходится к четному продолжению функции f с периодом $2L$, тогда как ряд по синусам в (13) сходится к нечетному продолжению функции f с периодом $2L$. Во многих важных случаях мы не имеем никакого беспокойства со значениями f вне первоначального интервала $(0, L)$, и поэтому выбор между (11) и (12) или (13) и (14) определен тем, предпочитаем ли мы представлять $f(t)$ в интервале $(0, L)$ рядом по косинусам или рядом по синусам. (Впрочем, в примере 2 ситуация диктует выбор между рядом Фурье по косинусам и рядом Фурье по синусам для представления заданной функции.)

Пример 1 Предположим, что $f(t) = t$ для $0 < t < L$. Найдем ряд Фурье по косинусам и ряд Фурье по синусам для функции f.

Решение По формуле (12) имеем

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L t\,dt = \frac{2}{L}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^L = L$$

и

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L t\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt = \frac{2L}{n^2\pi^2}\int_0^{n\pi} u\cos u\,du ==$$

$$= \frac{2L}{n^2\pi^2}\Big[u\sin u + \cos u\Big]_0^{n\pi} = \begin{cases} -\dfrac{4L}{n^2\pi^2} & \text{для нечетных } n; \\ 0 & \text{для четных } n. \end{cases}$$

Таким образом, ряд Фурье функции f по косинусам

$$t = \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi t}{L} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi t}{L} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi t}{L} + \cdots\right) \qquad (15)$$

для $0 < t < L$. Затем, по формуле (14) имеем

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L t\sin\frac{n\pi t}{L}\,dt = \frac{2L}{n^2\pi^2}\int_0^{n\pi} u\sin u\,du =$$

$$= \frac{2L}{n^2\pi^2}\Big[-u\cos u + \sin u\Big]_0^{n\pi} = \frac{2L}{n\pi}(-1)^{n+1}.$$

Таким образом, ряд Фурье функции f по синусам:

$$t = \frac{2L}{\pi}\left(\sin\frac{\pi t}{L} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi t}{L} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi t}{L} - \cdots\right) \qquad (16)$$

для $0 < t < L$. Ряд в равенстве (15) сходится к нечетному продолжению f с периодом $2L$, показанному на рис. 9.3.3; ряд в равенстве (16) сходится к четному продолжению f с периодом $2L$, показанному на рис. 9.3.4. ■

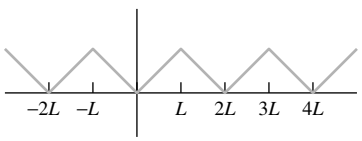


Рис. 9.3.3. Четное продолжение f с периодом $2L$

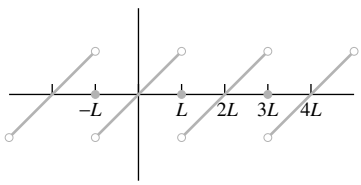


Рис. 9.3.4. Нечетное продолжение f с периодом $2L$

Почленное дифференцирование рядов Фурье

В этом и в последующих разделах мы хотим рассмотреть применение рядов Фурье к решению дифференциальных уравнений. Чтобы подставить ряд Фурье вместо неизвестной

зависимой переменной в дифференциальное уравнение и проверить, является ли он решением, мы сначала должны продифференцировать ряд и вычислить производные, которые входят в уравнение. Здесь требуется осторожность; почленное дифференцирование бесконечного ряда переменных членов[3] допустимо далеко не всегда. Теорема 1 дает достаточные условия для законности почленного дифференцирования ряда Фурье.

Теорема 1 Почленное дифференцирование рядов Фурье

Предположим, что функция f является непрерывной для всех t, периодической с периодом $2L$ и что ее производная f' является кусочно гладкой для всех t. Тогда ряд Фурье функции f' — это ряд

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{n\pi}{L} a_n \sin \frac{n\pi t}{L} + \frac{n\pi}{L} b_n \cos \frac{n\pi t}{L} \right), \tag{17}$$

полученный почленным дифференцированием ряда Фурье

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + b_n \sin \frac{n\pi t}{L} \right). \tag{18}$$

Доказательство. Основное утверждение теоремы состоит в том, что результат почленного дифференцирования — ряд в равенстве (17) — и в самом деле сходится к $f'(t)$ (с обычным условием о среднем значении). Но поскольку f' является периодической и кусочно гладкой, по теореме 1 из раздела 9.2, ряд Фурье f' сходится к $f'(t)$:

$$f'(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n \cos \frac{n\pi t}{L} + \beta_n \sin \frac{n\pi t}{L} \right). \tag{19}$$

Поэтому, чтобы доказать теорему 1, достаточно показать, что ряды в равенствах (17) и (19) идентичны. Мы докажем это при дополнительном предположении, что f' непрерывна всюду. Тогда

$$\alpha_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f'(t)\, dt = \frac{1}{L} \Big[f(t) \Big]_{-L}^{L} = 0,$$

потому что $f(L) = f(-L)$ по условию периодичности и

$$\alpha_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f'(t) \cos \frac{n\pi t}{L}\, dt =$$

$$= \frac{1}{L} \left[f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} \right]_{-L}^{L} + \frac{n\pi}{L} \cdot \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \sin \frac{n\pi t}{L}\, dt$$

— интегрирование по частям. Из этого следует, что

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{L} b_n.$$

[3] Напомню, что (бесконечный) ряд, члены которого представляют собой переменные величины, называется *функциональным рядом. — Примеч. ред.*

Подобным образом мы найдем

$$\beta_n = -\frac{n\pi}{L} a_n,$$

и потому ряды в (17) и (19) действительно идентичны. ▲

Принимая во внимание, что предположение о том, что производная f' является непрерывной — это просто удобство, доказательство теоремы 1 может быть усилено так, чтобы допустить наличие изолированных точек разрыва у функции f'. Однако важно обратить внимание, что заключение теоремы 1, вообще говоря, неверно, если сама функция f разрывна. Рассмотрим, например, ряд Фурье

$$t = \frac{2L}{\pi}\left(\sin\frac{\pi t}{L} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi t}{L} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi t}{L} - \cdots\right), \tag{16}$$

$-L < t < L$, разрывной пилообразной функции, график которой показан на рис. 9.3.4. Выполнены все условия теоремы 1, кроме непрерывности f, причем f имеет только изолированные точки разрыва в виде скачков скачков. Но ряд

$$2\left(\cos\frac{\pi t}{L} - \cos\frac{2\pi t}{L} + \cos\frac{3\pi t}{L} - \cdots\right), \tag{20}$$

полученный почленным дифференцированием ряда в равенстве (16), расходится (например, при $t = 0$ и при $t = L$) и поэтому почленное дифференцирование ряда в равенстве (16) недопустимо.

В противовес этому давайте рассмотрим [непрерывную] треугольную волновую функцию $f(t)$, график которой показан на рис. 9.3.3, причем $f(t) = |t|$ для $-L < t < L$. Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы 1, так что ее ряд Фурье

$$f(t) = \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi t}{L} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi t}{L} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi t}{L} + \cdots\right) \tag{15}$$

можно дифференцировать почленно. В результате получаем ряд

$$f'(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin\frac{\pi t}{L} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi t}{L} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi t}{L} + \cdots\right), \tag{21}$$

который является рядом Фурье функции, изображающей прямоугольное колебание (меандр), период которого равен $2L$. Этот ряд принимает значение -1 для $-L < t < 0$ и $+1$ для $0 < t < L$.

Решение дифференциальных уравнений с помощью рядов Фурье

В остальной части этой главы и в главе 10 нам часто придется решать задачи на граничные значения (т. е. задачи с граничными условиями (условиями в конечных точках)) общего вида

$$ax'' + bx' + cx = f(t) \quad (0 < t < L); \tag{22}$$

$$x(0) = x(L) = 0, \tag{23}$$

где задана функция $f(t)$. Мы могли бы попробовать применить методы главы 3, пытаясь найти решение этой задачи следующим способом.

1. Сначала найти общее решение $x_c = c_1x_1 + c_2x_2$ соответствующего однородного дифференциального уравнения.
2. Затем найти какое-нибудь частное решение x_p неоднородного уравнения (22).
3. Наконец, определить константы c_1 и c_2 так, чтобы $x = x_c + x_p$ удовлетворяло граничным условиям (23).

Во многих задачах более удобен и более полезен следующий метод рядов Фурье. Мы сначала подходящим способом продолжаем функцию $f(t)$ так, чтобы она была определена также на интервале $-L < t < 0$, а затем продолжаем ее на всю вещественную ось с помощью условия периодичности $f(t+2L) = f(t)$. Тогда, если функция f окажется кусочно гладкой, мы будем иметь ряд Фурье

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi t}{L} + B_n \sin \frac{n\pi t}{L} \right), \tag{24}$$

который имеет коэффициенты $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$; эти-то коэффициенты мы сможем вычислить и действительно вычислим. Затем мы предполагаем, что дифференциальное уравнение (22) имеет решение $x(t)$ с рядом Фурье

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + b_n \sin \frac{n\pi t}{L} \right), \tag{25}$$

который можно дважды продифференцировать почленно. Мы попытаемся определить коэффициенты в равенстве (25). Для этого мы сначала подставим ряды в равенствах (24) и (25) в дифференциальное уравнение (22) и затем приравняем коэффициенты при подобных членах. Если эту процедуру удастся выполнить таким способом, что полученный ряд в уравнении (25) также будет удовлетворять и граничным условиям (условиям в конечных точках) в (23), то мы получим "формальное решение в виде ряда Фурье" первоначальной задачи с граничными условиями (условиями в конечных точках); такое решение, разумеется, должно быть подвергнуто проверке на законность почленного дифференцирования. Пример 2 иллюстрирует этот процесс.

Пример 2 Найдем формальное решение в виде ряда Фурье задачи с граничными условиями (условиями в конечных точках)

$$x'' + 4x = 4t, \tag{26}$$

$$x(0) = x(1) = 0. \tag{27}$$

Решение Здесь $f(t) = 4t$ для $0 < t < 1$. Критическим является первый шаг — мы его не делали (в явном виде) в предыдущей схеме — нужно выбрать периодическое продолжение $f(t)$ так, чтобы каждый член ряда Фурье этой функции удовлетворял условиям в конечных точках (27). Для этой цели мы выбираем нечетное продолжение с периодом 2, потому что каждый член вида $\sin n\pi t$ удовлетворяет условиям (27). Тогда из ряда (16) при $L = 1$ мы получаем ряд Фурье

$$4t = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin n\pi t \tag{28}$$

для $0 < t < 1$. Мы поэтому ожидаем получить решение в виде ряда по синусам

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi t, \tag{29}$$

поскольку любой такой ряд удовлетворит условиям в конечных точках (27). Когда мы подставим ряды (28) и (29) в уравнение (26), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-n^2\pi^2 + 4)b_n \sin n\pi t = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin n\pi t. \tag{30}$$

Мы затем приравниваем коэффициенты при подобных членах в уравнении (30). Это приводит к равенству

$$b_n = \frac{8\cdot(-1)^{n+1}}{n\pi(4 - n^2\pi^2)},$$

так что формальное решение в виде ряда Фурье имеет вид

$$x(t) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin n\pi t}{n(4 - n^2\pi^2)}. \tag{31}$$

В задаче 16 мы просим вас найти точное решение

$$x(t) = t - \frac{\sin 2t}{\sin 2} \qquad (0 \leqq t \leqq 1) \tag{32}$$

и проверить, что (31) — ряд Фурье нечетного продолжения этого решения с периодом, равным 2.

Вычерченная штриховой линией кривая на рис. 9.3.5 является графиком суммы 10 членов ряда Фурье (31). Вычерченная сплошной линией кривая для $0 \leqq t \leqq 2$ — график точного решения (32). ■

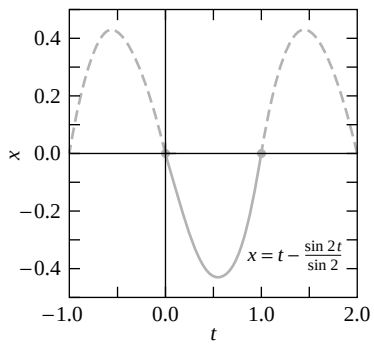


Рис. 9.3.5. График решения в примере 2

Почленное интегрирование ряда Фурье

Согласно теореме 2 ряд Фурье кусочно непрерывной периодической функции всегда можно интегрировать почленно, даже независимо от того, действительно ли он сходится! Доказательство намечено в задаче 25.

Теорема 2 Почленное интегрирование рядов Фурье

Предположим, что f — кусочно-непрерывная периодическая функция с периодом $2L$ и рядом Фурье

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + b_n \sin \frac{n\pi t}{L} \right), \tag{33}$$

который не обязательно сходится. Тогда

$$\int_0^t f(s)\, ds = \frac{a_0 t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{n\pi} \left[a_n \sin \frac{n\pi t}{L} - b_n \left(\cos \frac{n\pi t}{L} - 1 \right) \right], \tag{34}$$

причем ряд в правой части сходится для всех t. Обратите внимание, что ряд в уравнении (34) — результат почленного интегрирования ряда (33). ▲

Пример 3 Давайте попытаемся проверить заключение теоремы 2 в случае, когда функция $f(t)$ имеет период 2π, причем

$$f(t) = \begin{cases} -1, & -\pi < t < 0; \\ +1, & 0 < t < \pi. \end{cases} \tag{35}$$

В примере 1 из раздела 9.1 мы нашли ряд Фурье функции f:

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 5t + \cdots \right). \tag{36}$$

Из теоремы 2 тогда следует, что

$$\begin{aligned} F(t) = \int_0^t f(s)\, ds = \\ = \int_0^t \frac{4}{\pi} \left(\sin s + \frac{1}{3} \sin 3s + \frac{1}{5} \sin 5s + \cdots \right) ds = \\ = \frac{4}{\pi} \left[(1 - \cos t) + \frac{1}{3^2}(1 - \cos 3t) + \frac{1}{5^2}(1 - \cos 5t) + \cdots \right]. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} F(t) = \frac{4}{\pi} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots \right) - \\ - \frac{4}{\pi} \left(\cos t + \frac{1}{3^2} \cos 3t + \frac{1}{5^2} \cos 5t + \cdots \right). \end{aligned} \tag{37}$$

С другой стороны, непосредственное интегрирование функции (35) дает

$$F(t) = \int_0^t f(s)\,ds = |t| = \begin{cases} -t, & -\pi < t < 0, \\ t, & 0 < t < \pi. \end{cases}$$

В примере 1 данного раздела мы установили (при $L = \pi$), что

$$|t| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos t + \frac{1}{3^2}\cos 3t + \frac{1}{5^2}\cos 5t + \cdots\right). \tag{38}$$

В разделе 9.2 мы установили равенство (18), согласно которому

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8},$$

так что из этого следует, что ряды в равенствах (37) и (38) действительно идентичны. ■

9.3. Задачи

В задачах 1–10 задана функция $f(t)$, определенная на интервале $0 < t < L$. Найдите расположенные по косинусам и по синусам ряды Фурье функции f и сделайте набросок графиков двух продолжений функции f, к которым сходятся эти два ряда.

1. $f(t) = 1,\ 0 < t < \pi$

2. $f(t) = 1 - t,\ 0 < t < 1$

3. $f(t) = 1 - t,\ 0 < t < 2$

4. $f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t \leqq 1; \\ 2 - t, & 1 \leqq t < 2 \end{cases}$

5. $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 1; \\ 1, & 1 < t < 2; \\ 0, & 2 < t < 3 \end{cases}$

6. $f(t) = t^2,\ 0 < t < \pi$

7. $f(t) = t(\pi - t),\ 0 < t < \pi$

8. $f(t) = t - t^2,\ 0 < t < 1$

9. $f(t) = \sin t,\ 0 < t < \pi$

10. $f(t) = \begin{cases} \sin t, & 0 < t \leqq \pi \\ 0, & \pi \leqq t < 2\pi \end{cases}$

В задачах 11–14 найдите формальные решения в виде ряда Фурье задач, в которых значения заданы в конечных точках.

11. $x'' + 2x = 1,\ x(0) = x(\pi) = 0$

12. $x'' - 4x = 1,\ x(0) = x(\pi) = 0$

13. $x'' + x = t,\ x(0) = x(1) = 0$

14. $x'' + 2x = t,\ x(0) = x(2) = 0$

15. Найдите формальное решение в виде ряда Фурье задачи, в которой значения заданы в конечных точках

$$x'' + 2x = t, \quad x'(0) = x'(\pi) = 0.$$

(*Указание*. Ищите решение в виде ряда Фурье по косинусам, в котором каждый член удовлетворяет условиям в конечных точках.)

16. **(a)** Найдите решение $x(t) = t - (\sin 2t)/(\sin 2)$ задачи, в которой значения заданы в конечных точках

$$x'' + 4x = 4t, \quad x(0) = x(1) = 0.$$

(b) Покажите, что ряд в уравнении (31) представляет собой ряд Фурье по синусам решения из части (a).

17. **(a)** Предположим, что f — четная функция. Покажите, что

$$\int_{-a}^{0} f(t)\,dt = \int_{0}^{a} f(t)\,dt.$$

(b) Предположим, что f — нечетная функция. Покажите, что

$$\int_{-a}^{0} f(t)\,dt = -\int_{0}^{a} f(t)\,dt.$$

18. В примере 2 из раздела 9.2 был найден ряд Фурье функции f, период которой равен 2, причем $f(t) = t^2$ для $0 < t < 2$:

$$f(t) = \frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi t}{n^2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\pi t}{n}.$$

Покажите, что "почленная производная" этого ряда не сходится к $f'(t)$.

19. Начните с ряда Фурье

$$t = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nt, \quad -\pi < t < \pi,$$

и последовательно проинтегрируйте его почленно три раза, в результате чего получится ряд

$$\frac{1}{24}t^4 = \frac{\pi^2 t^2}{12} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}\cos nt + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}.$$

20. Подставьте $t = \pi/2$ и $t = \pi$ в ряд задачи 19 и вычислите суммы

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4} = \frac{7\pi^4}{720},$$

и

$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{96}.$$

21. (*Расположенный по синусам ряд нечетного продолжения функции, график которой симметричен относительно вертикальной оси, проходящей через абсциссу, равную половине полупериода.*) Пусть $f(t)$ задана для $0 < t < L$. Мы определим $F(t)$ для $0 < t < 2L$ следующим образом:

$$F(t) = \begin{cases} f(t), & 0 < t < L; \\ f(2L - t), & L < t < 2L. \end{cases}$$

Таким образом, график $F(t)$ симметричен относительно прямой $t = L$ (рис. 9.3.6). Тогда ряд Фурье по синусам функции F с периодом $4L$ имеет вид

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi t}{2L},$$

где

$$b_n = \frac{1}{L}\int_0^L f(t)\sin\frac{n\pi t}{2L}\,dt + \frac{1}{L}\int_L^{2L} f(2L - t)\sin\frac{n\pi t}{2L}\,dt.$$

Подставьте $s = 2L - t$ во второй интеграл и убедитесь, что для $0 < t < L$

$$f(t) = \sum_{n \text{ нечетное}} b_n \sin\frac{n\pi t}{2L},$$

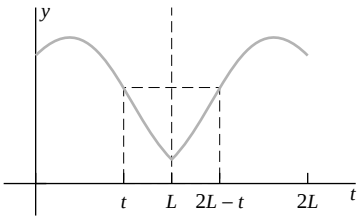


Рис. 9.3.6. Построение F на основе f в задаче 21

где

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\sin\frac{n\pi t}{2L}\,dt \quad (n \text{ нечетное}).$$

22. (*Расположенный по косинусам ряд нечетного продолжения функции, график которой симметричен относительно точки оси абсцисс, координата которой равна половине полупериода.*) Пусть $f(t)$ задана для $0 < t < L$, давайте определим $G(t)$ для $0 < t < 2L$ следующим образом:

$$G(t) = \begin{cases} f(t), & 0 < t < L; \\ -f(2L-t), & L < t < 2L. \end{cases}$$

Считая период равным $4L$, вычислите ряд Фурье функции $G(t)$ по косинусам. Зная его, получите (для $0 < t < L$)

$$f(t) = \sum_{n \text{ нечетное}} a_n \cos\frac{n\pi t}{2L},$$

где

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(t)\cos\frac{n\pi t}{2L}\,dt \qquad (n \text{ нечетное}).$$

23. Дано: $f(t) = t$, $0 < t < \pi$. Найдите расположенный по синусам ряд нечетного продолжения функции, график которой симметричен относительно вертикальной оси, проходящей через абсциссу, равную половине полупериода (задача 21):

$$f(t) = \frac{8}{\pi}\sum_{n \text{ нечетное}} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2}\sin\frac{nt}{2}.$$

24. Рассмотрим задачу с условием на значения в конечных точках

$$x'' - x = t, \quad x(0) = 0, \quad x'(\pi) = 0.$$

Обратите внимание, что любая функция, равная какому-нибудь постоянному числу, умноженному на $\sin(nt/2)$, (при нечетном n) удовлетворяет условиям в конечных точках. Следовательно, можно использовать расположенный по синусам ряд нечетного продолжения функции, график которой симметричен относительно вертикальной оси, проходящей через абсциссу, равную половине полупериода, полученный в задаче 23, чтобы получить формальное решение в виде ряда Фурье

$$x(t) = \frac{32}{\pi}\sum_{n \text{ нечетное}} \frac{(-1)^{(n+1)/2}}{n^2(n^2+4)}\sin\frac{nt}{2}.$$

25. В этой задаче мы намечаем доказательство теоремы 2. Предположим, что функция $f(t)$ кусочно непрерывна с периодом $2L$. Определим

$$F(t) = \int_0^t \left[f(s) - \tfrac{1}{2}a_0\right]\,ds,$$

где $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ обозначают коэффициенты Фурье функции $f(t)$. **(a)** Покажите непосредственно, что $F(t+2L) = F(t)$, так что функция F непрерывна с периодом $2L$ и поэтому имеет сходящийся ряд Фурье

$$F(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi t}{L} + B_n \sin \frac{n\pi t}{L} \right).$$

(b) Предположим, что $n \geqq 1$. Покажите прямым вычислением, что

$$A_n = -\frac{L}{n\pi} b_n \quad \text{и} \quad B_n = \frac{L}{n\pi} a_n.$$

(c) Таким образом,

$$\int_0^t f(s)\, ds = \frac{t}{2} a_0 + \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{n\pi} \left(a_n \sin \frac{n\pi t}{L} - b_n \cos \frac{n\pi t}{L} \right).$$

Наконец, подставьте $t = 0$ и убедитесь, что

$$\frac{1}{2} A_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{n\pi} b_n.$$

9.3. Приложение. Ряд Фурье кусочно-гладких функций

Большинство систем компьютерной алгебры разрешает использовать единичные ступенчатые функции для эффективного дифференцирования ряда Фурье "кусочно-определенных" функций. Здесь мы иллюстрируем использование *Maple* для этой цели. Без труда можно написать и версии этих программ для систем *Mathematica* и MATLAB — потребуется всего лишь рутинная адаптация приведенных ниже программ.

Пусть единичная функция $\mathrm{unit}(t, a, b)$ имеет значение 1 на интервале $a \leqq t < b$, а во всех остальных точках ее значение равно 0. Тогда мы можем определить данную кусочно-гладкую функцию $f(t)$ как "линейную комбинацию" различных единичных функций, соответствующих отдельным интервалам, на которых данная функция является гладкой, причем единичная функция для каждого интервала умножается на выражение (правую часть формулы), определяющее $f(t)$ на данном интервале. Рассмотрим, например, четную функцию с периодом 2π, график которой показан на рис. 9.3.7. Эта "трапецеидальная волновая функция" определена для $0 < t < \pi$ равенством

$$f(t) = \frac{\pi}{3} \mathrm{unit}\left(t, 0, \frac{\pi}{6}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - t\right) \mathrm{unit}\left(t, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right) + \left(-\frac{\pi}{3}\right) \mathrm{unit}\left(t, \frac{5\pi}{6}, \pi\right). \qquad (1)$$

Единичная ступенчатая функция (функция Хевисайда) (со значениями 0 для $t < 0$ и 1 для $t > 0$) имеется в пакете *Maple* и там она называется "Heaviside function" (функция Хевисайда). Например, $\mathrm{Heaviside}(-2) = 0$ и $\mathrm{Heaviside}(3) = 1$. Единичная функция на интервале $[a, b]$ может быть определена так:

```
unit := (t,a,b) -> Heaviside(t-a) - Heaviside(t-b):
```

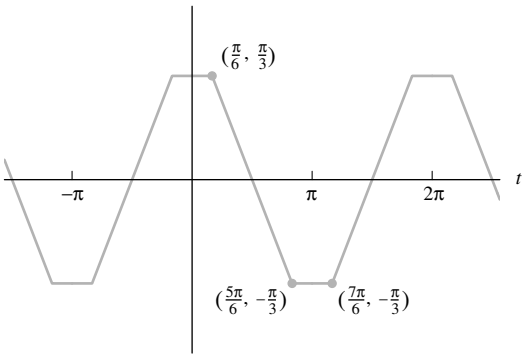


Рис. 9.3.7. Четная трапецеидальная волновая функция с периодом 2π

Тогда трапецеидальную волновую функцию в уравнении (1) можно определить для $0 \leqq t \leqq \pi$ равенством

```
f := t -> (Pi/3)*unit(t, 0, Pi/6) +
          (Pi/2 - t)*unit(t, Pi/6, 5*Pi/6) +
          (-Pi/3)*unit(t, 5*Pi/6, Pi):
```

Мы можем теперь вычислить коэффициенты Фурье в ряде по косинусам $f(t) = \frac{1}{2}a_0 + + \sum a_n \cos nt$.

```
a := n -> (2/Pi)*int(f(t)*cos(n*t), t=0..Pi);
```

Мы тогда найдем, что общий вид частичной сумма ряда может быть определен так:

```
fourierSum := a(0)/2 + sum(a(n)*cos(n*t), n=1..25);
```

$$fourierSum := 2\frac{\sqrt{3}\cos(t)}{\pi} - \frac{2}{25}\frac{\sqrt{3}\cos(5t)}{\pi} - \frac{2}{49}\frac{\sqrt{3}\cos(7t)}{\pi}$$
$$+ \frac{2}{121}\frac{\sqrt{3}\cos(11t)}{\pi} + \frac{2}{169}\frac{\sqrt{3}\cos(13t)}{\pi} - \frac{2}{289}\frac{\sqrt{3}\cos(17t)}{\pi}$$
$$- \frac{2}{361}\frac{\sqrt{3}\cos(19t)}{\pi} + \frac{2}{529}\frac{\sqrt{3}\cos(23t)}{\pi} + \frac{2}{625}\frac{\sqrt{3}\cos(25t)}{\pi}$$

Таким образом, мы находим замечательный ряд Фурье

$$f(t) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi}\sum \frac{(\pm)\cos nt}{n^2}, \tag{2}$$

в котором знаки чередуются по образцу $+--++--++$, а суммирование выполняется по всем нечетным положительным целым числам n, которые *не кратны* числу 3. Вы можете ввести команду

```
plot(fourierSum, t=-2*Pi..3*Pi);
```

и проверить, что этот ряд Фурье является рядом Фурье функции, график которой приведен на рис. 9.3.7.

Вы можете затем применить этот метод для нахождения рядов Фурье следующих функций, период которых равен 2π.

1. Четная функция прямоугольного колебания (меандра), график которой показан на рис. 9.3.8.
2. Четная и нечетная треугольные волновые функции, графики которых показаны на рис. 9.2.4 и 9.3.9.
3. Нечетная трапецеидальная волновая функция, график которой показан на рис. 9.2.5.

Затем найдите подобным способом ряд Фурье некоторых кусочно-гладких функций по вашему собственному выбору; возможно, некоторые из них будут иметь другие периоды (а не 2π) и не будут ни четными, ни нечетными.

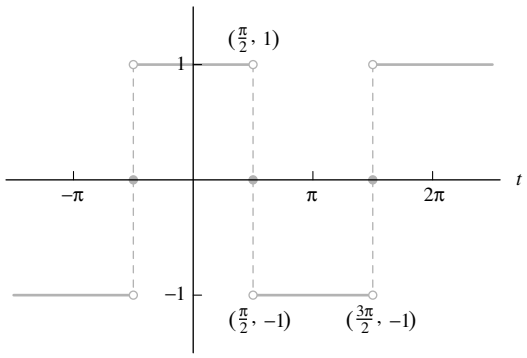


Рис. 9.3.8. Четная функция прямоугольного колебания (меандра) с периодом 2π

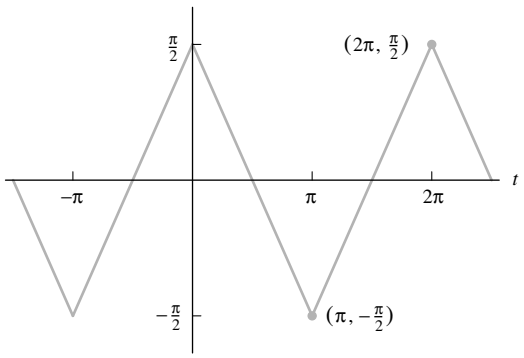


Рис. 9.3.9. Четная треугольная волновая функция с периодом 2π

9.4. Приложения рядов Фурье

Мы рассматриваем сначала движение материальной точки заданной массы m на пружине с константой Гука k под влиянием *периодической* внешней силы $F(t)$, как показано на рис. 9.4.1. Смещение $x(t)$ материальной точки от положения равновесия удовлетворяет знакомому уравнению

$$mx'' + kx = F(t). \tag{1}$$

Общее решение уравнения (1) имеет форму

$$x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + x_p(t), \tag{2}$$

где $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ — собственная частота системы, а $x_p(t)$ — частное решение уравнения (1). Значения c_1 и c_2 определяются начальными условиями. Здесь мы хотим использовать ряд Фурье, чтобы найти *периодическое* частное решение уравнения (1). Мы обозначим его через $x_{\text{sp}}(t)$ и называем **устойчивым периодическим решением**.

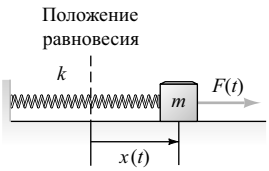


Рис. 9.4.1. Система, состоящая из тела заданной массы, закрепленного на пружине, на которую действует внешняя сила

Мы предполагаем для простоты, что $F(t)$ — нечетная функция с периодом $2L$, так что ее ряд Фурье имеет вид

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi t}{L}. \tag{3}$$

Если $n\pi/L$ не равно ω_0 ни для какого положительного целого числа n, мы можем найти устойчивое периодическое решение в виде

$$x_{\text{sp}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{L}, \tag{4}$$

подставляя ряды из равенств (3) и (4) в уравнение (1) — так мы найдем коэффициенты в равенстве (4). Пример 1 иллюстрирует эту процедуру.

Пример 1 Предположим, что $m = 2$ кг, $k = 32$ Н/м и что $F(t)$ является нечетной периодической силой с периодом 2 с, причем в одном периоде ее значение дается формулой

$$F(t) = \begin{cases} +10\,\text{Н}, & \text{если } 0 < t < 1; \\ -10\,\text{Н}, & \text{если } 1 < t < 2. \end{cases} \tag{5}$$

Найдем устойчивое периодическое движение $x_{\text{sp}}(t)$.

Решение График периодической вынуждающей функции $F(t)$ показан на рис. 9.4.2. По сути тем же самым вычислением, что и в примере 1 из раздела 9.1, мы найдем ряд Фурье функции $F(t)$

$$F(t) = \frac{40}{\pi} \sum_{n \text{ нечетное}} \frac{\sin n\pi t}{n}; \tag{6}$$

заметьте, что он содержит только члены, соответствующие нечетным n. Подставив этот ряд и

$$x_{\text{sp}}(t) = \sum_{n \text{ odd}} b_n \sin n\pi t \tag{7}$$

(пробное решение, аналогично содержащее только члены с нечетными номерами) в уравнение (1) при $m = 2$ и $k = 32$, мы получим

$$\sum_{n \text{ нечетное}} b_n(-2n^2\pi^2 + 32) \sin n\pi t = \frac{40}{\pi} \sum_{n \text{ нечетное}} \frac{\sin n\pi t}{n}.$$

Мы приравниваем коэффициенты при подобных членах и в результате получаем, что

$$b_n = \frac{20}{n\pi(16 - n^2\pi^2)} \qquad \text{для нечетных } n.$$

Следовательно,

$$x_{\text{sp}}(t) = \frac{20}{\pi} \sum_{n \text{ нечетное}} \frac{\sin n\pi t}{n(16 - n^2\pi^2)}. \tag{8}$$

Поскольку каждый член в уравнении (8) является симметричным относительно $t = \frac{1}{2}$, то $x_{\text{sp}}(t)$ максимально, когда $t = \frac{1}{2}$, как и показано на графике, приведенном на рис. 9.4.3. Принимая это, мы находим амплитуду устойчивого периодического движения

$$x_{\text{sp}}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{20}{\pi} \sum_{n \text{ нечетное}} \frac{1}{n(16 - n^2\pi^2)} \sin \frac{n\pi}{2}.$$

Первые 10 членов приводят к приближенному равенству $x\left(\frac{1}{2}\right) \approx 1{,}063$ м. ■

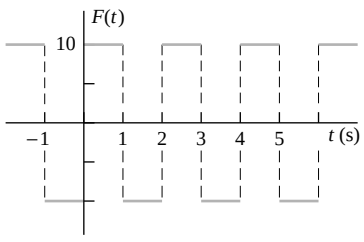


Рис. 9.4.2. График вынуждающей функции из примера 1

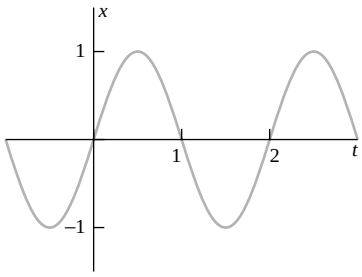


Рис. 9.4.3. График $x_{\text{sp}}(t)$

Если в ряде Фурье функции $F(t)$ есть отличный от нуля член $B_N \sin(N\pi t/L)$, для которого $N\pi/L = \omega_0$, то этот член вызывает **чистый резонанс**. Причина состоит в том, что уравнение

$$mx'' + kx = B_N \sin \omega_0 t$$

имеет резонансное решение

$$x(t) = -\frac{B_N}{2m\omega_0} t \cos \omega_0 t,$$

если $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Решение, соответствующее уравнению (4), в этом случае принимает вид

$$x(t) = -\frac{B_N}{2m\omega_0} t \cos \omega_0 t + \sum_{n \neq N} \frac{B_N}{m(\omega_0^2 - n^2\pi^2/L^2)} \sin \frac{n\pi t}{L}. \tag{9}$$

Пример 2 Предположим, что $m = 2$ кг и $k = 32$ Н/м, как в примере 1. Определим, произойдет ли чистый резонанс, если $F(t)$ — нечетная периодическая функция, определенная на одном периоде так:

(a) $F(t) = \begin{cases} +10, & 0 < t < \pi; \\ -10, & \pi < t < 2\pi. \end{cases}$

(b) $F(t) = 10t, \ -\pi < t < \pi.$

Решение (a) Собственная частота $\omega_0 = 4$, а ряд Фурье функции $F(t)$ имеет вид

$$F(t) = \frac{40}{\pi} \left(\sin t + \frac{1}{3} \sin 3t + \frac{1}{5} \sin 5t + \cdots \right).$$

Поскольку этот ряд не содержит члена $\sin 4t$, никакого резонанса не произойдет.

(b) В этом случае ряд Фурье имеет вид

$$F(t) = 20 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nt.$$

Чистый резонанс происходит из-за присутствия члена, содержащего множитель $\sin 4t$. ■

Пример 3 иллюстрирует явления в *окрестности резонанса*, который может произойти, когда один из членов в решении увеличивается, потому что его частота близка к собственной частоте ω_0.

Пример 3 Найдем устойчивое периодическое решение уравнения

$$x'' + 10x = F(t), \tag{10}$$

где $F(t)$ — функция с периодом 4, причем $F(t) = 5t$ для $-2 < t < 2$, и ряд Фурье

$$F(t) = \frac{20}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi t}{2}. \tag{11}$$

Решение Подставив равенство (11) и

$$x_{\text{sp}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{2}$$

в (10), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(-\frac{n^2\pi^2}{4} + 10 \right) \sin \frac{n\pi t}{2} = \frac{20}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi t}{2}.$$

Чтобы найти устойчивое периодическое решение, мы приравниваем коэффициенты при подобных членах и затем решаем полученное уравнение относительно b_n. В результате получится устойчивое периодическое решение

$$x_{\text{sp}}(t) = \frac{80}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(40 - n^2\pi^2)} \sin \frac{n\pi t}{2} \approx$$

$$\approx (0{,}8452) \sin \frac{\pi t}{2} - (24{,}4111) \sin \frac{2\pi t}{2} - (0{,}1738) \sin \frac{3\pi t}{2} + \cdots .$$

Очень большая величина второго члена обязана тому, что $\omega_0 = \sqrt{10} \approx \pi = 2\pi/2$. Таким образом, доминирующее движение пружины с дифференциальным уравнением в (10) было бы колебанием с частотой π радиан в секунду, периодом 2 с и амплитудой приблизительно равной 24, что видно на графике $x_{\text{sp}}(t)$, приведенном на рис. 9.4.4. ■

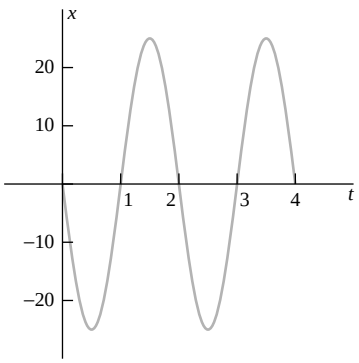


Рис. 9.4.4. График функции $x_{\text{sp}}(t)$

Затухающие вынужденные колебания

Теперь мы рассмотрим движение системы под влиянием *периодической* внешней силы $F(t)$ (рис. 9.4.5). Система в данном случае состоит из материальной точки заданной массы m, прикрепленной к пружине с константой Гука k и к поршню с константой демпфирования c.

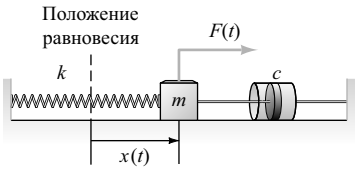


Рис. 9.4.5. Система, состоящая из материальной точки заданной массы, закрепленной на пружине, на которую воздействует внешняя сила, вызывающая затухающие колебания

Смещение $x(t)$ материальной точки заданной массы от положения равновесия удовлетворяет уравнению

$$mx'' + cx' + kx = F(t). \tag{12}$$

Мы вспоминаем задачу 25 из раздела 3.6 и находим, что установившееся периодическое решение уравнения (12) для $F(t) = F_0 \sin \omega t$ имеет вид

$$x(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \sin(\omega t - \alpha), \tag{13}$$

где

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{c\omega}{k - m\omega^2}, \quad 0 \leqq \alpha \leqq \pi. \tag{14}$$

Пусть $F(t)$ — нечетная функция с периодом $2L$, ряд Фурье которой имеет вид

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi t}{L}. \tag{15}$$

Тогда из предыдущей формулы по принципу суперпозиции следует, что установившееся периодическое решение имеет вид

$$x_{\text{sp}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n \sin(\omega_n t - \alpha_n)}{\sqrt{(k - m\omega_n^2)^2 + (c\omega_n)^2}}, \tag{16}$$

где $\omega_n = n\pi/L$ и угол α_n определяется равенством (14) при данном значении ω. Пример 4 иллюстрирует тот интересный факт, что преобладающая частота (частота колебаний с наибольшей амплитудой) установившегося периодического решения может быть *кратной* частоте силы $F(t)$.

Пример 4 Предположим, что $m = 3$ кг, $c = 0{,}02$ Н/м/с, $k = 27$ Н/м и $F(t)$ — нечетная функция с периодом 2π, причем $F(t) = \pi t - t^2$, если $0 < t < \pi$. Найдем установившееся периодическое движение $x_{\text{sp}}(t)$.

Решение Мы находим, что ряд Фурье функции $F(t)$ имеет вид

$$F(t) = \frac{8}{\pi}\left(\sin t + \frac{1}{3^3}\sin 3t + \frac{1}{5^3}\sin 5t + \cdots\right). \tag{17}$$

Таким образом, $B_n = 0$ для n четных, $B_n = 8/(\pi n^3)$ для нечетных n и $\omega_n = n$. Из равенства (16) получаем

$$x_{\text{sp}}(t) = \frac{8}{\pi}\sum_{n \text{ нечетное}} \frac{\sin(nt - \alpha_n)}{n^3\sqrt{(27 - 3n^2)^2 + (0{,}02n)^2}}, \tag{18}$$

где

$$\alpha_n = \operatorname{arctg}\frac{(0{,}02)n}{27 - 3n^2}, \quad 0 \leqq \alpha_n \leqq \pi. \tag{19}$$

С помощью программируемого калькулятора мы находим, что

$$\begin{aligned} x_{\text{sp}}(t) \approx{}& (0{,}1061)\sin(t - 0{,}0008) + (1{,}5719)\sin\left(3t - \tfrac{1}{2}\pi\right) + \\ &+ (0{,}0004)\sin(5t - 3{,}1437) + (0{,}0001)\sin(7t - 3{,}1428) + \cdots. \end{aligned} \tag{20}$$

Поскольку коэффициент, соответствующий $n = 3$, намного больше, чем другие, ответ этой системы представляет собой приблизительно синусоидальное движение с частотой *в три раза* большей, чем частота входной силы. На рис. 9.4.6 показано $x_{\text{sp}}(t)$ по сравнению с вычисленной силой $10F(t)/k$, для отображения которой выбрана подходящая единица расстояния.

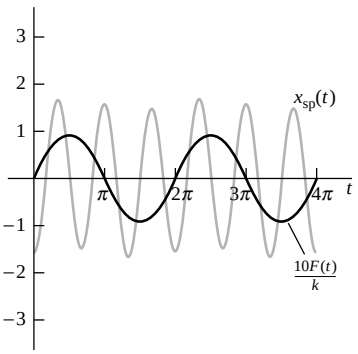


Рис. 9.4.6. Приложенная сила и полученное установившееся периодическое движение в примере 4

Вот что происходит: материальная точка массой $m = 3$ на пружине с $k = 27$ имеет (если мы игнорируем незначительное влияние поршня) собственную частоту $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 3$ радиан в секунду. Приложенная внешняя сила $F(t)$ имеет [наименьший] период 2π секунд и, следовательно, основную частоту (собственную частоту, частоту основной (первой)

гармоники или наинизшую собственную частоту) 1 радиан в секунду. Следовательно, член, соответствующий $n = 3$ в ряде Фурье функции $F(t)$ (в формуле (17)), имеет ту же самую частоту, что и собственная частота системы. Таким образом, колебания происходят около резонанса, причем, по сути, материальная точка заданной массы совершает *три* колебания для каждого отдельного колебания внешней силы. Это и есть физический эффект доминирующего (при $n = 3$) члена в правой части равенства (20). Например, вы можете раскачать качели (т. е. заставить их совершать колебания), притом они будут подниматься весьма высоко, даже если будете подталкивать их (т. е. увеличивать размах (амплитуду) колебаний) не каждый раз, а только при каждом *третьем* проходе (в соответствующем направлении) качелей мимо вас. Это также объясняет, почему некоторые трансформаторы "жужжат" на частоте намного более высокой, чем 60 Гц.

Это явление встречается довольно часто и потому оно должно быть принято во внимание при разработке механических систем. Чтобы избежать возникновения чрезвычайно больших и потенциально разрушительных колебаний вблизи резонанса, система должна быть разработана так, чтобы она не подвергалась воздействию какой-либо внешней периодической силы, основная частота (собственная частота, частота основной (первой) гармоники или наинизшая собственная частота) которой близка к собственной частоте вибрации или *кратна* ей. ■

9.4. Задачи

В задачах 1–6 найдите установившееся периодическое решение $x_{sp}(t)$ каждого из дифференциальных уравнений. С помощью системы компьютерной алгебры начертите график суммы такого числа членов ряда, чтобы "на глаз" был виден график $x_{sp}(t)$.

1. $x'' + 5x = F(t)$, где $F(t)$ — функция, период которой равен 2π, притом такая, что $F(t) = 3$, если $0 < t < \pi$, $F(t) = -3$, если $\pi < t < 2\pi$.

2. $x'' + 10x = F(t)$, где $F(t)$ — четная функция, период которой равен 4, притом такая, что $F(t) = 3$, если $0 < t < 1$, $F(t) = -3$, если $1 < t < 2$.

3. $x'' + 3x = F(t)$, где $F(t)$ — нечетная функция, период которой равен 2π, притом такая, что $F(t) = 2t$, если $0 < t < \pi$.

4. $x'' + 4x = F(t)$, где $F(t)$ — четная функция, период которой равен 4, притом такая, что $F(t) = 2t$, если $0 < t < 2$.

5. $x'' + 10x = F(t)$, где $F(t)$ — нечетная функция, период которой равен 2, притом такая, что $F(t) = t - t^2$, если $0 < t < 1$.

6. $x'' + 2x = F(t)$, где $F(t)$ — четная функция, период которой равен 2π, притом такая, что $F(t) = \sin t$, если $0 < t < \pi$.

В каждой из задач 7–12 заданы масса m и константа Гука k для системы, состоящей из материальной точки заданной массы, закрепленной на пружине. Определите, действительно ли произойдет чистый резонанс под влиянием данной внешней периодической силы $F(t)$.

7. $m = 1$, $k = 9$; $F(t)$ — нечетная функция, период которой равен 2π, притом такая, что $F(t) = 1$ для $0 < t < \pi$.

8. $m = 2$, $k = 10$; $F(t)$ — нечетная функция, период которой равен 2, притом такая, что $F(t) = 1$ для $0 < t < 1$.

9. $m = 3$, $k = 12$; $F(t)$ — нечетная функция, период которой равен 2π, притом такая, что $F(t) = 3$ для $0 < t < \pi$.

10. $m = 1$, $k = 4\pi^2$; $F(t)$ — нечетная функция, период которой равен 2, притом такая, что $F(t) = 2t$ для $0 < t < 1$.

11. $m = 3$, $k = 48$; $F(t)$ — четная функция, период которой равен 2π, притом такая, что $F(t) = t$ для $0 < t < \pi$.

12. $m = 2$, $k = 50$; $F(t)$ — нечетная функция, период которой равен 2π, притом такая, что $F(t) = \pi t - t^2$ для $0 < t < \pi$.

В каждой из задач 13–16 заданы значения m, c и k для заглушенной системы, состоящей из материальной точки заданной массы, закрепленной на пружине с демпфером. (Так что эта система совершает затухающие колебания.) Найдите установившееся периодическое движение (в форме уравнения (16)) материальной точки заданной массы под влиянием данной внешней силы $F(t)$. Вычислите коэффициенты и фазовые углы для первых трех отличных от нуля членов ряда для $x_{\text{sp}}(t)$.

13. $m = 1$, $c = 0{,}1$, $k = 4$; $F(t)$ — сила из задачи 1.

14. $m = 2$, $c = 0{,}1$, $k = 18$; $F(t)$ — сила из задачи 3.

15. $m = 3$, $c = 1$, $k = 30$; $F(t)$ — сила из задачи 5.

16. $m = 1$, $c = 0{,}01$, $k = 4$; $F(t)$ — сила из задачи 4.

17. Рассмотрим вынужденную заглушенную систему, состоящую из тела заданной массы, закрепленного на пружине с демпфером. Пусть $m = \frac{1}{4}$ слага (единица массы в системе фунт–сила), $c = 0{,}6$ фунтов на фут в секунду, $k = 36$ фунтов на фут. Сила $F(t)$ представляет собой функцию с периодом 2 (секунд), причем $F(t) = 15$, если $0 < t < 1$, $F(t) = -15$, если $1 < t < 2$.
(a) Найдите установившееся периодическое решение в форме

$$x_{\text{sp}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\pi t - \alpha_n).$$

(b) Найдите с точностью до десятых дюйма положение материальной точки заданной массы в момент времени $t = 5$ секунд.

18. Рассмотрим вынуждаемую заглушенную систему, состоящую из тела заданной массы, закрепленного на пружине с демпфером, совершающую вынужденные затухающие колебания. Пусть $m = 1$, $c = 0{,}01$ и $k = 25$. Сила $F(t)$ представляет собой нечетную функцию, период которой равен 2π, причем $F(t) = t$, если $0 < t < \pi/2$, $F(t) = \pi - t$, если $\pi/2 < t < \pi$. Найдите установившееся периодическое движение; вычислите достаточно много членов ряда, чтобы увидеть, что основная частота (собственная частота, частота основной (первой) гармоники или наинизшая собственная частота) движения в *пять* раз больше, чем частота внешней силы.

9.5. Теплопроводность и разделение переменных

Самые важные приложения ряда Фурье относятся к решению дифференциальных уравнений в частных производных методом разделения переменных, с которым мы познакомим вас в этом разделе. Напомним, что *дифференциальное уравнение в частных производных* — это уравнение, содержащее одну или несколько *частных* производных зависимой переменной,

которая является функцией по крайней мере двух независимых переменных. Вот пример: **одномерное уравнение теплопроводности**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

в котором зависимая переменная u является неизвестной функцией x и t, а k — заданная константа.

Нагретый стержень

Уравнение (1) моделирует изменение температуры u в нагретом стержне, расположенном вдоль оси x в зависимости от положения x и времени t. Мы предполагаем, что стержень имеет постоянное поперечное сечение (площадь его равна A) перпендикулярное к оси, причем стержень сделан из однородного материала. Мы предполагаем далее, что поперечное сечение стержня настолько маленькое, что u является постоянной во всем поперечном сечении и что боковая поверхность стержня изолирована так, что поток теплоты через нее отсутствует. Тогда u действительно будет функцией x и t, причем теплота будет течь по стержню только в направлении оси x. Вообще, мы предполагаем, что теплота может течь подобно жидкости от более теплых частей тела к более холодным.

Поток теплоты $\phi(x,\ t)$ в стержне — это расход теплоты в момент времени t на единицу площади поперечного сечения в точке x. Обычно единицами измерения для ϕ являются калории в секунду на квадратный сантиметр. Вывод уравнения (1) базируется на эмпирически установленном законе, согласно которому

$$\phi = -K\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{2}$$

где константу пропорциональности K называют **коэффициентом теплопроводности** материала стержня. Знак "минус" в уравнении (2) соответствует тому, что тепло распространяется в отрицательном направлении оси x, когда $u_x > 0$. Ну и, конечно же, ϕ является положительным, если тепло распространяется в положительном направлении оси x; короче говоря, тепло распространяется от горячего места к холодному месту, а не наоборот.

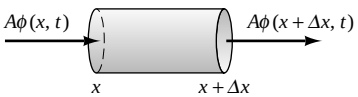


Рис. 9.5.1. Чистый приток теплоты в короткий отрезок стержня

Теперь рассмотрим маленький отрезок стержня, соответствующий интервалу $[x, x + \Delta x]$, как показано на рис. 9.5.1. Скорость притока R (в калориях в секунду) теплоты *в* этот отрезок через его два конца равна

$$R = A\phi(x,t) - A\phi(x+\Delta x,t) = KA[u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)]. \tag{3}$$

Полученная скорость изменения температуры u_t в единицу времени на отрезке зависит от его плотности δ (грамм в кубическом сантиметре) и удельной теплоемкости c (обе величины считаются константами). **Удельная теплоемкость** c — это количество теплоты (в калориях)

требуемое для того, чтобы повысить на 1° температуру 1 г материала. Следовательно, $c\delta u$ калорий теплоты нужно сообщить 1 см^3 материала стержня, чтобы повысить его температуру от нуля до температуры u. Короткая (тонкая) пластина стержня толщиной dx имеет объем $A\,dx$, так что требуется $c\delta u A\,dx$ калорий теплоты, чтобы повысить температуру этой пластины от 0 до u. **Теплосодержание** (энтальпия, или содержание теплоты)

$$Q(t) = \int_x^{x+\Delta x} c\delta A u(x,t)\,dx \tag{4}$$

пластинки $[x, x+\Delta x]$ стержня — это количество теплоты, необходимое для того, чтобы повысить температуру пластинки от нуля до данной температуры $u(x,t)$. Поскольку теплота вводится в пластинку и выводится из пластинки только через ее концы, из равенства (3) мы видим, что

$$Q'(t) = KA[u_x(x+\Delta x, t) - u_x(x,t)], \tag{5}$$

потому что $R = dQ/dt$. Таким образом, дифференцируя подынтегральное выражение в равенстве (4) и применяя теорему о среднем (формулу Лагранжа) для интегралов, мы видим, что

$$Q'(t) = \int_x^{x+\Delta x} c\delta A u_t(x,t)\,dx = c\delta A u_t(\overline{x}, t)\,\Delta x \tag{6}$$

для некоторого $\overline{x}$ из $(x, x+\Delta x)$. Приравнивая значения в равенствах (5) и (6), мы получаем

$$c\delta A u_t(\overline{x}, t)\,\Delta x = KA[u_x(x+\Delta x, t) - u_x(x,t)], \tag{7}$$

так что

$$u_t(\overline{x}, t) = k\frac{u_x(x+\Delta x, t) - u_x(x,t)}{\Delta x}, \tag{8}$$

где

$$k = \frac{K}{c\delta} \tag{9}$$

— способность материала к **тепловой (термической) диффузии**, или термодиффузии. Наконец, переходя к пределу в равенстве (8) при $\Delta x \to 0$ и $\overline{x} \to x$, мы получим одномерное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1}$$

Таким образом, температура $u(x,t)$ в тонком стержне с изолированной боковой поверхностью должна удовлетворять этому дифференциальному уравнению в частных производных.

Граничные (краевые) условия

Теперь предположим, что стержень имеет конечную длину L, простираясь от $x = 0$ до $x = L$. Функция $u(x,t)$, задающая распределение температур в нем, будет найдена среди всех возможных решений уравнения (1) из вспомогательных условий. Мы уже знаем, что

решение обыкновенного дифференциального уравнения содержит произвольные постоянные, но в отличие от этого решение дифференциального уравнения в частных производных обычно содержит произвольные *функции*. В случае нагретого стержня мы можем задать функцию $f(x)$, задающую распределение температур в нем в момент времени $t = 0$. Это дает *начальное условие*

$$u(x, 0) = f(x). \tag{10}$$

Мы можем также задать температуру на обоих концах стержня. Например, если бы каждый конец был зажат в большом куске льда, температура которого равна нулю, мы имели бы следующие *условия в конечных точках*:

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \qquad (\text{для всех } t). \tag{11}$$

Объединяя все это, мы получаем **граничную (краевую) задачу** (задачу, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (0 < x < L,\ \ t > 0); \tag{12a}$$

➤
$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \tag{12b}$$

$$u(x, 0) = f(x). \tag{12c}$$

Рис. 9.5.2 дает геометрическую интерпретацию граничной (краевой) задачи (задачи, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения) (12): мы должны найти функцию $u(x, t)$, которая непрерывна на неограниченной ленте (включая ее границу), заштрихованной в плоскости xt. Эта функция должна удовлетворять дифференциальному уравнению (12a) в каждой внутренней точке ленты, а на границе (на краях) ленты должна принимать значения, заданные *граничными условиями* в равенствах (12b) и (12c). Физическая интуиция подсказывает, что если функция $f(x)$ достаточно хорошая, то может существовать одна и только одна функция $u(x, t)$, являющаяся решением данной задачи.

Вместо того чтобы установить фиксированную температуру, можно изолировать оба конца стержня. В этом случае теплота не сможет протекать через какой-либо конец, так что

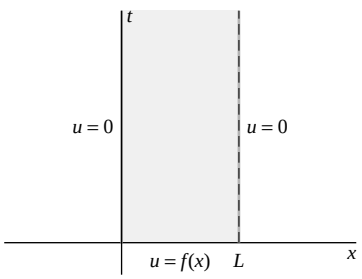


Рис. 9.5.2. Геометрическая интерпретация граничной (краевой) задачи (задачи, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения) в уравнениях (12a)–(12c)

в этом случае из равенства (2) мы видим, что условия в (12b) нужно заменить в граничной задаче условиями в конечных точках

$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0 \tag{13}$$

(для всех t). Можно задать и другие условия: можно изолировать один конец стержня и задать фиксированную температуру на другом. Эти и другие возможные условия в конечных точках обсуждаются в задачах.

Наложение, или суперпозиция решений

Обратите внимание, что уравнение теплопроводности (12a) *линейно*. Иными словами, любая линейная комбинация $u = c_1u_1 + c_2u_2$ двух решений уравнения (12a) также является решением уравнения (12a); это немедленно следует из линейности операции дифференцирования (взятия частной производной). Кроме того, если каждая из функций u_1 и u_2 удовлетворяет условиям (12b), то и любая линейная комбинация $u = c_1u_1 + c_2u_2$ также удовлетворяет этим условиям. Условия (12b) поэтому называют **однородными** краевыми (граничными) условиями (хотя более описательно было бы назвать их *линейными* граничными условиями, поскольку именно такое название лучше выражало бы их сущность). Ну а если граничное (краевое, предельное) условие (12c) не является однородным, оно оно называется **неоднородным** краевым (граничным) условием.

Наша глобальная стратегия решения граничной (краевой) задачи (задачи, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения) (12) будет состоять в том, чтобы найти функции $u_1, u_2, u_3, \ldots$, удовлетворяющие дифференциальному уравнению в частных производных (12a) и однородным граничным условиям (12b), а затем попытаться скомбинировать эти функции с помощью принципа наложения (суперпозиции) так, как будто бы они являются стандартными блоками. Именно на такой способ мы возлагаем надежду получить решение $u = c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots$, которое удовлетворяет также неоднородному условию (12c). Пример 1 иллюстрирует этот подход.

Пример 1 Прямой подстановкой просто проверить, что каждая из функций

$$u_1(x,t) = e^{-t}\sin x, \quad u_2(x,t) = e^{-4t}\sin 2x \quad \text{и} \quad u_3(x,t) = e^{-9t}\sin 3x$$

удовлетворяет уравнению $u_t = u_{xx}$. Используем эти функции, чтобы найти (сконструировать) решение граничной (краевой) задачи (задачи, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (0 < x < \pi,\ \ t > 0); \tag{14a}$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \tag{14b}$$

$$u(x,0) = 80\sin^3 x = 60\sin x - 20\sin 3x. \tag{14c}$$

Решение Любая линейная комбинация вида

$$\begin{aligned} u(x,t) &= c_1u_1(x,t) + c_2u_2(x,t) + c_3u_3(x,t) = \\ &= c_1e^{-t}\sin x + c_2e^{-4t}\sin 2x + c_3e^{-9t}\sin 3x \end{aligned}$$

удовлетворяет и дифференциальному уравнению (14a), и однородным условиям (14b). Поскольку

$$u(x,0) = c_1 \sin x + c_2 \sin 2x + c_3 \sin 3x,$$

мы видим, что мы можем просто удовлетворить также и неоднородным условиям (14c), полагая $c_1 = 60$, $c_2 = 0$ и $c_3 = -20$. Таким образом, решение данной граничной (краевой) задачи (задачи, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения) имеет вид

$$u(x,t) = 60e^{-t} \sin x - 20e^{-9t} \sin 3x. \qquad \blacksquare$$

Граничная (краевая) задача (задача, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения) в примере 1 исключительно проста, поскольку необходимо только конечное число однородных решений, чтобы с помощью их линейной комбинации удовлетворить неоднородное граничное (краевое, предельное) условие. Гораздо чаще для того, чтобы удовлетворить условиям (12a) и (12b), требуется бесконечная последовательность $u_1, u_2, u_3, \ldots$ функций. В этом случае мы записываем бесконечный ряд

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t) \tag{15}$$

и затем пытаемся определить коэффициенты $c_1, c_2, c_3, \ldots$ так, чтобы удовлетворить также условию (12c). Следующий принцип суммирует свойства этого бесконечного ряда, который подлежит проверке на предмет того, что он представляет собой решение граничной (краевой) задачи (задачи, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения) (12).

ПРИНЦИП Наложение, или суперпозиция решений

Предположим, что каждая из функций $u_1, u_2, u_3, \ldots$ удовлетворяет и дифференциальному уравнению (12a) (для $0 < x < L$ и $t > 0$), и однородным условиям (12b). Предположим также, что коэффициенты в уравнении (15) выбраны так, что выполняются следующие три условия.

1. Для $0 < x < L$ и $t > 0$ функция, определенная рядом (15), непрерывна, причем определяющий ее ряд можно почленно дифференцировать (однажды по t и дважды по x).
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,0) = f(x).$
3. Функция $u(x,t)$, определенная равенством (15) внутри полосы $0 \leqq x \leqq L$ и $t \geqq 0$, а также граничными условиями (12b) и (12c) на ее границе, является непрерывной.

Тогда $u(x,t)$ — решение граничной (краевой) задачи (задачи, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения) (12). ▲

В методе разделения переменных, описанном далее, мы концентрируем внимание на обнаружении решений $u_1, u_2, u_3, \ldots$, удовлетворяющих однородным условиям и на определении коэффициентов ряда, таких что ряд в равенстве (15) удовлетворяет неоднородным

условиям после подстановки $t = 0$. В этой точке мы имеем только *формальное* решение в виде ряда — ряда, который только формально можно считать решением граничной (краевой) задачи (задачи, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения). Этот ряд необходимо подвергнуть проверке на непрерывность и, кроме того, необходимо проверить условия дифференцируемости, выдвинутые в части (1) только что сформулированного здесь принципа суперпозиции. Если функция $f(x)$ в (12c) кусочно гладкая, то может быть доказано, что формальное решение в виде ряда всегда удовлетворяет данным здесь ограничениям и, кроме того, представляет собой единственное решение граничной (краевой) задачи (задачи, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения). Доказательство можно найти в главе 6 книги Р. Черчилля (R. V. Churchill) и Дж. Брауна (J. W. Brown), посвященной рядам Фурье и краевым (граничным) задачам. Ее 3-е издание вышло в Нью-Йорке в 1978 году. Вот полные выходные данные этого издания: R. V. Churchill and J. W. Brown, *Fourier Series and Boundary Value Problems*, 3rd ed. (New York: McGraw-Hill, 1978).

Разделение переменных

Этот метод решения граничной (краевой) задачи (задачи, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения) (12) для нагретого стержня был введен Фурье в его работе по изучению теплоты, процитированной в разделе 9.1. Мы сначала ищем функции (в дальнейшем они сыграют роль *кирпичиков*) u_1, u_2, u_3, ..., которые удовлетворяют дифференциальному уравнению $u_t = ku_{xx}$ и однородным условиям $u(0,t) = u(L,t) = 0$, причем каждая из этих функций должна иметь специальный вид:

➤
$$u(x,t) = X(x)T(t), \tag{16}$$

в котором "отделены" переменные x и t. Подстановка равенства (16) в $u_t = ku_{xx}$ приводит к уравнению $XT' = kX''T$, где для краткости мы пишем T' вместо $T'(t)$ и X'' вместо $X''(x)$. Деление обеих частей на kXT тогда дает

➤
$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT}. \tag{17}$$

Левая часть уравнения (17) представляет собой функцию только переменной x, а правая часть — функцию только переменной t. Если t сохраняет постоянное значение в правой части, то левая часть X''/X тоже должна оставаться постоянной, даже если x изменяется. Точно так же, если x сохраняет постоянное значение в левой части, то правая часть T'/kT тоже должна оставаться постоянной, даже если t изменяется. Следовательно, равенство может выполняться, только если каждое из этих двух выражений является постоянным, причем равным одной и той же самой *константе*, которую для удобства мы обозначаем через $-\lambda$. Таким образом, уравнение (17) принимает вид

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT} = -\lambda, \tag{18}$$

которому равносильна система из следующих двух уравнений:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{19}$$

$$T'(t) + \lambda kT(t) = 0. \tag{20}$$

Из этого следует, что функция-произведение $u(x,t) = X(x)T(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных $u_t = ku_{xx}$, если $X(x)$ и $T(t)$ (каждая по отдельности) удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям (19) и (20) для некоторого значения константы λ.

Мы сосредоточимся сначала на $X(x)$. Однородные условия в конечных точках имеют вид

$$u(x,0) = X(0)T(t) = 0, \qquad u(L,t) = X(L)T(t) = 0. \tag{21}$$

Если $T(t)$ является нетривиальной функцией от t, то (21) может выполняться, только если $X(0) = X(L) = 0$. Таким образом, $X(x)$ должна быть решением граничной (краевой) задачи (задачи, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения)

$$\begin{gathered} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = 0, \quad X(L) = 0. \end{gathered} \tag{22}$$

Фактически это задача на собственные значения того типа, который мы обсуждали в разделе 3.8. Действительно, в примере 3 того раздела мы видели, что задача (22) имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда λ равно одному из собственных значений

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{23}$$

и собственная функция, соответствующая λ_n, есть

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{24}$$

Вспомним теперь рассуждение, которое привело нас к равенствам (23) и (24). Если $\lambda = 0$, то из (22) очевидным образом следует, что $X(x) \equiv 0$. Если $\lambda = -\alpha^2 < 0$, то

$$X(x) = A\cosh\alpha x + B\sinh\alpha x,$$

и затем из условий $X(0) = 0 = X(L)$ следует, что $A = B = 0$. Следовательно, единственная возможность для нетривиальной собственной функции — это когда $\lambda = \alpha^2 > 0$. Тогда

$$X(x) = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x,$$

и из условий $X(0) = 0 = X(L)$ тогда следует, что $A = 0$ и что $\alpha = n\pi/L$ для некоторого положительного целого числа n. Всякий раз, когда разделение переменных приводит к незнакомой задаче на собственные значения, мы, вообще говоря, должны отдельно рассматривать случаи $\lambda = 0$, $\lambda = -\alpha^2 < 0$ и $\lambda = \alpha^2 > 0$.

Теперь мы обращаем наше внимание на уравнение (20), зная, что константа λ должна быть равна одному из собственных значений, указанных в (23). Для n-й из этих возможностей мы пишем уравнение (20) в виде

$$T_n' + \frac{n^2\pi^2 k}{L^2}T_n = 0, \tag{25}$$

причем ожидаем получить различные решения $T_n(t)$ для каждого положительного целого числа n. Нетривиальное решение этого уравнения имеет вид

$$T_n(t) = \exp\left(-n^2\pi^2 kt/L^2\right). \tag{26}$$

Мы опускаем произвольную постоянную интегрирования, потому что она (на самом деле) будет вставлена позже.

Теперь давайте подытожим наше продвижение в решении поставленной задачи. Мы обнаружили две соответствующие последовательности $\{X_n\}_1^\infty$ и $\{T_n\}_1^\infty$ функций, заданных равенствами (24) и (26). Вместе эти последовательности позволяют образовать последовательность функций-произведений

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \exp\left(-n^2\pi^2 kt/L^2\right)\sin\frac{n\pi x}{L}, \tag{27}$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$. Каждая из этих функций удовлетворяет и уравнению теплопроводности $u_t = ku_{xx}$, и однородным условиям $u(0,t) = u(L,t) = 0$. Теперь мы объединяем (строим линейную комбинацию) эти функции (т. е. применяем принцип наложения, или *суперпозиции*), чтобы попытаться удовлетворить также и неоднородное условие $u(x,0) = f(x)$. Для этого мы формируем бесконечный ряд

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-n^2\pi^2 kt/L^2\right)\sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{28}$$

Остается только определить постоянные коэффициенты $\{c_n\}_1^\infty$ так, чтобы

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{L} = f(x). \tag{29}$$

Но это будет расположенный по синусам ряд Фурье функции $f(x)$ на интервале $[0, L]$ при условии, что мы выберем

➤
$$c_n = b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \tag{30}$$

для каждого $n = 1, 2, 3, \ldots$. Таким образом, мы получили следующий результат.

Теорема 1 Нагретый стержень с нулевыми температурами в конечных точках

Граничная (краевая) задача (задача, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения) (12) для нагретого стержня с нулевыми температурами в конечных точках имеет формальное решение в виде ряда

➤
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left(-n^2\pi^2 kt/L^2\right)\sin\frac{n\pi x}{L}, \tag{31}$$

где $\{b_n\}$ — коэффициенты расположенного по синусам ряда Фурье функции $f(x) = u(x,0)$, задающей начальное распределение температур в стержне. Значения этих коэффициентов даются равенством (30). ▲

Замечание. Переходя к пределу (почленно) в (31) при $t \to \infty$, мы получаем $u(x,\infty) \equiv 0$, потому что на обоих концах стержня поддерживается нулевая температура. ■

Материал	k (см^2/с)
Серебро	1,70
Медь	1,15
Алюминий	0,85
Железо	0,15
Бетон	0,005

Рис. 9.5.3. Некоторые значения (константы) коэффициента температуропроводности

Решение в виде ряда, приведенного в равенстве (31), обычно сходится весьма быстро, если t не является слишком маленьким, поскольку в членах ряда присутствуют отрицательные множители в показателях степени. Поэтому этот ряд вполне пригоден на практике для числовых вычислений. В задачах и примерах используются значения (константы) коэффициента температуропроводности k для некоторых часто применяемых материалов, перечисленные в таблице на рис. 9.5.3.

Пример 2 Предположим, что стержень длиной $L = 50$ см погружают в пар до тех пор, пока температура во всех его точках не достигнет $u_0 = 100^\circ$C. В момент времени $t = 0$ его боковую поверхность теплоизолируют, а его оба конца вставляют в лед при 0°C. Вычислите температуру в середине стержня через полчаса, если стержень сделан из (a) железа; (b) бетона.

Решение Граничная (краевая) задача (задача, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения) для функции $u(x,t)$, задающей распределение температур этого стержня, имеет вид

$$\begin{aligned} &u_t = ku_{xx}, \\ &u(0,t) = u(L,t) = 0; \\ &u(x,0) = u_0. \end{aligned}$$

Вспомните ряд для прямоугольного импульса

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ нечетное}} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi t}{L} = \begin{cases} +1, & \text{если } 0 < t < L, \\ -1, & \text{если } -L < t < 0, \end{cases}$$

который мы получили в примере 1 из раздела 9.2. Следовательно, расположенный по синусам ряд Фурье функции $f(x) \equiv u_0$ имеет вид

$$f(x) = \frac{4u_0}{\pi} \sum_{n \text{ нечетное}} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

для $0 < x < L$. Следовательно, коэффициенты Фурье в уравнении (31) определяются по формуле

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{4u_0}{n\pi} & \text{для } n \text{ нечетных,} \\ 0 & \text{для } n \text{ четных,} \end{cases}$$

и поэтому функция, задающая распределение температур стержня, задается формулой

$$u(x,t) = \frac{4u_0}{\pi} \sum_{n \text{ нечетное}} \frac{1}{n} \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 kt}{L^2}\right) \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

На рис. 9.5.4 показан график $y = u(x,t)$ при $u_0 = 100$ и $L = 50$. Мы видим, что при увеличении t максимальная температура стержня (очевидно, в его середине) монотонно убывает. Температура в середине $x = 25$ через $t = 1800$ секунд равна указанным ниже значениям:

$$u(25,1800) = \frac{400}{\pi} \sum_{n \text{ нечетное}} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \exp\left(-\frac{18n^2\pi^2 k}{25}\right).$$

(a) При $k = 0{,}15$ для железа этот ряд дает

$$u(25,1800) \approx 43{,}8519 - 0{,}0029 + 0{,}0000 - \cdots \approx 43{,}85^\circ\text{C}.$$

(b) При $k = 0{,}005$ для бетона этот ряд дает

$$\begin{aligned} u(25,1800) \approx\ & 122{,}8795 - 30{,}8257 + 10{,}4754 - 3{,}1894 + \\ & + 0{,}7958 - 0{,}1572 + 0{,}0242 - 0{,}0029 + \\ & + 0{,}0003 - 0{,}0000 + \cdots \approx 100{,}00^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

Таким образом, бетон — очень эффективный (тепло)изолятор. ■

Условия изоляции в конечных точках

Мы теперь рассматриваем граничную (краевую) задачу (задачу, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (0 < x < L,\ \ t > 0); \tag{32a}$$

➤

$$u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0, \tag{32b}$$

$$u(x,0) = f(x), \tag{32c}$$

которая соответствует стержню длины L с начальной температурой $f(x)$, оба конца которого изолированы. Разделяя переменные, полагаем $u(x,t) = X(x)T(t)$ и продолжаем решать, как и в предыдущем случае. Так мы получим уравнения (16)–(20) без каких-либо изменений. Но из однородных условий (32b) в конечных точках следует, что $X'(0) = X'(L) = 0$.

Таким образом, функция $X(x)$ должна быть решением граничной (краевой) задачи (задачи, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения)

$$\begin{aligned} &X'' + \lambda X = 0; \\ &X'(0) = 0, \quad X'(L) = 0. \end{aligned} \tag{33}$$

Что касается собственных значений, то мы должны отдельно рассмотреть возможности $\lambda = 0$, $\lambda = -\alpha^2 < 0$ и $\lambda = \alpha^2 > 0$.

При $\lambda = 0$ общее решение уравнения $X'' = 0$ имеет вид $X(x) = Ax + B$, так что $X'(x) = A$. Следовательно, из условий в конечных точках (33) следует, что $A = 0$, но B может быть отличным от нуля. Поскольку функция, равная постоянной, умноженной на собственную функцию, сама является собственной функцией, для B мы можем выбрать любое удобное нам постоянное значение. Таким образом, при $B = 1$, мы имеем нулевое собственное значение и соответствующую собственную функцию

$$\lambda_0 = 0, \quad X_0(x) \equiv 1. \tag{34}$$

Полагая $\lambda = 0$ в уравнении (20), мы получаем $T'(t) = 0$, так что мы также можем положить $T_0(t) \equiv 1$.

При $\lambda = -\alpha^2 < 0$ общее решение уравнения $X'' - \alpha^2 X = 0$ имеет вид

$$X(x) = A\cosh \alpha x + B \sinh \alpha x,$$

и мы легко проверяем, что $X'(0) = X'(L) = 0$, только если $A = B = 0$. Таким образом, никаких отрицательных собственных значений нет.

При $\lambda = \alpha^2 > 0$ общее решение уравнения $X'' + \alpha^2 X = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned} X(x) &= A\cos \alpha x + B \sin \alpha x, \\ X'(x) &= -A\alpha \sin \alpha x + B\alpha \cos \alpha x. \end{aligned}$$

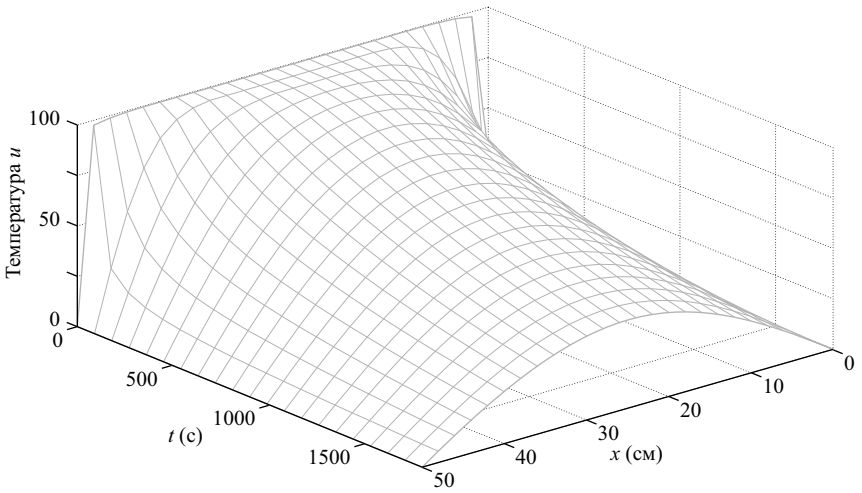


Рис. 9.5.4. График функции, задающей распределение температур $u(x, t)$ в примере 2

Следовательно, из $X'(0) = 0$ следует, что $B = 0$, а затем из равенств

$$X'(L) = -A\alpha \sin \alpha L = 0$$

следует, что αL должно быть (целым) кратным π, потому что $\alpha \neq 0$ и $A \neq 0$, если мы хотим иметь нетривиальное решение. Таким образом, мы имеем бесконечную последовательность собственных значений и соответствующих собственных функций

$$\lambda_n = \alpha_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad X_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{L} \tag{35}$$

для $n = 1, 2, 3, \ldots$. Так же как и прежде, решение уравнения (20) при $\lambda = n^2\pi^2/L^2$ имеет вид $T_n(t) = \exp\left(-n^2\pi^2 kt/L^2\right)$.

Поэтому функции-произведения, удовлетворяющие однородным условиям, имеют вид

$$u_0(x,t) \equiv 1; \quad u_n(x,t) = \exp\left(n^2\pi^2 kt/L^2\right) \cos \frac{n\pi x}{L} \tag{36}$$

для $n = 1, 2, 3, \ldots$. Следовательно, пробное решение имеет вид

$$u(x,t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-n^2\pi^2 kt/L^2\right) \cos \frac{n\pi x}{L}. \tag{37}$$

Чтобы удовлетворить неоднородному условию $u(x,0) = f(x)$, мы можем рассматривать равенство (37) при $t = 0$ как расположенный по косинусам ряд Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \tag{38}$$

где

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx \tag{39}$$

для $n = 0, 1, 2, \ldots$. Таким образом, мы установили следующий результат.

Теорема 2 Нагретый стержень с изолированными концами

Граничная (краевая) задача (задача, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения) (32) для нагретого стержня с изолированными концами имеет формальное решение в виде ряда

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left(-n^2\pi^2 kt/L^2\right) \cos \frac{n\pi x}{L}, \tag{40}$$

где $\{a_n\}$ — коэффициенты расположенного по косинусам ряда Фурье функции, задающей начальное распределение температур стержня $f(x) = u(x,0)$, причем их значения определяются по формуле (39). ▲

Замечание. Обратите внимание, что

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx, \tag{41}$$

— среднее начальной температуры. Значит, если боковая поверхность и концы стержня изолированы, теплота, первоначально содержащаяся в стержне, в конечном счете распределится равномерно по всему стержню. ■

Пример 3 Мы рассматриваем тот же самый стержень длиной 50 см, что и в примере 2, но теперь предполагаем, что его начальная температура задается "треугольной функцией", график которой приведен на рис. 9.5.5. В момент времени $t = 0$ боковая поверхность стержня и оба его конца изолированы. Тогда функция, задающая распределение температур $u(x,t)$ в нем, является решением граничной (краевой) задачи (задачи, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения)

$$\begin{aligned} &u_t = ku_{xx},\\ &u_x(0,t) = u_x(50,t) = 0,\\ &u(x,0) = f(x). \end{aligned}$$

Теперь, подставляя $L = 25$ в ряд четного продолжения треугольной волны, заданной уравнением (15) из раздела 9.3 (где длина интервала обозначена через $2L$), а затем умножая полученный результат на 4, приходим к расположенному по косинусам ряду Фурье

$$f(x) = 50 - \frac{400}{\pi^2}\sum_{n\ \text{нечетное}} \frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{25}$$

(для $0 < x < 50$) нашей функции, задающей начальное распределение температур. Но чтобы члены этого ряда соответствовали членам ряда (40)

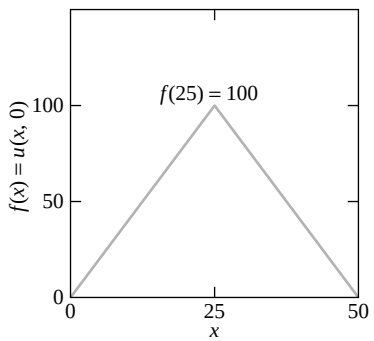


Рис. 9.5.5. График функции, задающей начальное распределение температур $u(x,0) = f(x)$ в примере 3

при $L = 50$, мы должны получить члены вида $\cos(n\pi x/50)$, а не члены вида $\cos(n\pi x/25)$. Следовательно, мы повсюду заменяем n на $n/2$ и таким образом переписываем ряд в форме

$$f(x) = 50 - \frac{1600}{\pi^2} \sum_{n=2,6,10,\ldots} \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{50};$$

обратите внимание, что индекс суммирования пробегает все положительные целые числа вида $4m - 2$. Тогда из теоремы 2 следует, что функция, задающая распределение температур в стержне, выражается формулой

$$u(x,t) = 50 - \frac{1600}{n^2} \sum_{n=2,6,10,\ldots} \frac{1}{n^2} \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 kt}{2500}\right) \cos \frac{n\pi x}{50}.$$

На рис. 9.5.6 показан график $u = u(x,t)$ для первых 1200 секунд, и мы видим, что распределение температур в стержне, начинаясь с крутого максимума в середине $x = 25$, быстро усредняется, поскольку теплота в стержне перераспределяется с увеличением t.

■

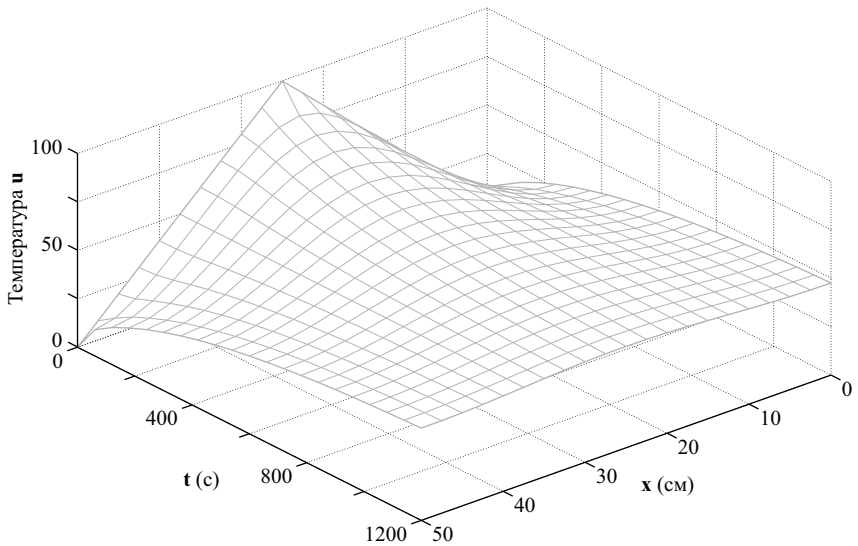


Рис. 9.5.6. График функции, задающей распределение температур $u(x,t)$ в примере 3

Наконец, мы отметим, что, хотя мы поставили граничные (краевые) задачи (задачи, в которых заданы граничные (предельные, или краевые) значения) (12) и (32) для стержня длиной L, они также моделируют температуру $u(x,t)$ в бесконечной плите $0 \leqq x \leqq L$ в трехмерном пространстве, если начальная температура $f(x)$ плиты зависит только от x, а ее две грани $x = 0$ и $x = L$ или обе изолированы, или на обеих поддерживается нулевая температура.

9.5. Задачи

В задачах 1–12 найдите решения граничных (краевых) задач (задач, в которых заданы граничные (предельные, или краевые) значения).

1. $u_t = 3u_{xx}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$; $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $u(x,0) = 4\sin 2x$

2. $u_t = 10u_{xx}$, $0 < x < 5$, $t > 0$; $u_x(0,t) = u_x(5,t) = 0$, $u(x,0) = 7$

3. $u_t = 2u_{xx}$, $0 < x < 1$, $t > 0$; $u(0,t) = u(1,t) = 0$, $u(x,0) = 5\sin \pi x - \frac{1}{5}\sin 3\pi x$

4. $u_t = u_{xx}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$; $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$, $u(x,0) = 4\sin 4x \cos 2x$

5. $u_t = 2u_{xx}$, $0 < x < 3$, $t > 0$; $u_x(0,t) = u_x(3,t) = 0$, $u(x,0) = 4\cos \frac{2}{3}\pi x - 2\cos \frac{4}{3}\pi x$

6. $2u_t = u_{xx}$, $0 < x < 1$, $t > 0$; $u(0,t) = u(1,t) = 0$, $u(x,0) = 4\sin \pi x \cos^3 \pi x$

7. $3u_t = u_{xx}$, $0 < x < 2$, $t > 0$; $u_x(0,t) = u_x(2,t) = 0$, $u(x,0) = \cos^2 2\pi x$

8. $u_t = u_{xx}$, $0 < x < 2$, $t > 0$; $u_x(0,t) = u_x(2,t) = 0$, $u(x,0) = 10\cos \pi x \cos 3\pi x$

9. $10u_t = u_{xx}$, $0 < x < 5$, $t > 0$; $u(0,t) = u(5,t) = 0$, $u(x,0) = 25$

10. $5u_t = u_{xx}$, $0 < x < 10$, $t > 0$; $u(0,t) = u(10,t) = 0$, $u(x,0) = 4x$

11. $5u_t = u_{xx}$, $0 < x < 10$, $t > 0$; $u_x(0,t) = u_x(10,t) = 0$, $u(x,0) = 4x$

12. $u_t = u_{xx}$, $0 < x < 100$, $t > 0$; $u(0,t) = u(100,t) = 0$, $u(x,0) = x(100 - x)$

13. Предположим, что стержень длиной 40 см с изолированной боковой поверхностью однородно нагрет до температуры 100°C, причем в момент времени $t = 0$ оба его конца вставлены в лед при 0°C. **(a)** Найдите формальное решение в виде ряда для температуры $u(x,t)$ стержня. **(b)** В случае, когда стержень сделан из меди, покажите что через 5 минут температура в его середине будет приблизительно равна 15°C. **(c)** В случае, когда стержень сделан из бетона, используйте первый член ряда, чтобы найти время, требуемое для того, чтобы температура его середины упала до 15°C.

14. Медный стержень длиной 50 см с изолированной боковой поверхностью имеет начальную температуру $u(x,0) = 2x$, а в момент времени $t = 0$ оба его конца изолируются. **(a)** Найдите $u(x,t)$. **(b)** Какой будет температура стержня в точке $x = 10$ через 1 минуту? **(c)** Приблизительно сколько потребуется времени, чтобы его температура в точке $x = 10$ стала равной 45°C?

15. На двух гранях плиты $0 \leqq x \leqq L$ поддерживается нулевая температура, причем начальная температура плиты дается формулой $u(x,0) = A$ (константа) для $0 < x < L/2$, $u(x,0) = 0$ для $L/2 < x < L$. Получите формальное решение в виде ряда

$$u(x,t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n\pi/4)}{n} \exp\left(-n^2\pi^2 kt/L^2\right) \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

16. Имеется две железные плиты каждая толщиной 25 см. Первоначально температура одной из них равна 100°C (по всей плите), а температура другой — 0°C. В момент времени $t = 0$ они прикладываются грань к грани, а на их внешних гранях поддерживается температура 0°C. **(a)** Используя результат задачи 15, проверьте, что через полчаса температура их общей грани будет приблизительно равна 22°C. **(b)** Предположим теперь, что эти две плиты сделаны из бетона, а не из железа. Сколько потребуется времени, чтобы температура их общей грани достигла 22°C?

17. (Установившееся и переходное распределение температур) Пусть в конечных точках изолированного с боковых сторон стержня с начальной температурой $u(x,0) = f(x)$ поддерживается температура $u(0,t) = A$ и $u(L,t) = B$. **(a)** Опытным путем удалось установить, что при $t \to +\infty$ $u(x,t)$ приближается к **установившейся температуре** $u_{\text{ss}}(x)$, которая получается как решение граничной (краевой) задачи (задачи, в которой заданы граничные (предельные, или

краевые) значения) при $u_t = 0$. Таким образом, $u_{\text{ss}}(x)$ представляет собой решение граничной (краевой) задачи (задачи, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения)

$$\frac{\partial^2 u_{\text{ss}}}{\partial x^2} = 0; \quad u_{\text{ss}}(0) = A, \quad u_{\text{ss}}(L) = B.$$

Найдите $u_{\text{ss}}(x)$. **(b)** Пусть теперь **температура в переходном процессе** $u_{\text{tr}}(x,t)$ задана формулой

$$u_{\text{tr}}(x,t) = u(x,t) - u_{\text{ss}}(x).$$

Покажите, что u_{tr} является решением граничной (краевой) задачи (задачи, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения)

$$\frac{\partial u_{\text{tr}}}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u_{\text{tr}}}{\partial x^2};$$
$$u_{\text{tr}}(0,t) = u_{\text{tr}}(L,t) = 0,$$
$$u_{\text{tr}}(x,0) = g(x) = f(x) - u_{\text{ss}}(x).$$

(c) Из формул (30) и (31) выведите, что

$$u(x,t) = u_{\text{ss}}(x) + u_{\text{tr}}(x,t) =$$
$$= u_{\text{ss}}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-n^2\pi^2 kt/L^2\right) \sin\frac{n\pi x}{L},$$

где

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L [f(x) - u_{\text{ss}}(x)] \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx.$$

18. Предположим, что изолированный с боковых сторон стержень длиной $L = 50$ и с коэффициентом температуропроводности $k = 1$ имеет начальную температуру $u(x,0) = 0$ и температуры в конечных точках $u(0,t) = 0$, $u(50,t) = 100$. Примените результат задачи 17, чтобы показать, что

$$u(x,t) = 2x - \frac{200}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \exp\left(-n^2\pi^2 kt/2500\right) \sin\frac{n\pi x}{50}.$$

19. Предположим, что теплота вводится в изолированный с боковых сторон стержень со скоростью $q(x,t)$ калорий в секунду на кубический сантиметр. Продолжите вывод уравнения теплопроводности, имеющийся в этом разделе, и получите уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{q(x,t)}{c\delta}.$$

20. Предположим, что ток, текущий через изолированный с боковых сторон стержень, генерирует теплоту с постоянной скоростью; в этих предположениях с помощью результата задачи 19 можно вывести уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C.$$

В качестве граничных условий возьмем $u(0,t) = u(L,t) = 0$ и $u(x,0) = f(x)$. **(a)** Найдите установившуюся температуру (температуру в установившемся режиме) $u_{\text{ss}}(x)$, определенную равенством

$$0 = k\frac{d^2 u_{\text{ss}}}{dx^2} + C, \quad u_{\text{ss}}(0) = u_{\text{ss}}(L) = 0.$$

(b) Покажите, что температура в переходном процессе (нестационарная (неустановившаяся) температура)

$$u_{\text{tr}}(x,t) = u(x,t) - u_{\text{ss}}(x)$$

является решением граничной (краевой) задачи (задачи, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения)

$$\frac{\partial u_{\text{tr}}}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u_{\text{tr}}}{\partial x^2};$$
$$u_{\text{tr}}(0,t) = u_{\text{tr}}(L,t) = 0,$$
$$u_{\text{tr}}(x,0) = g(x) = f(x) - u_{\text{ss}}(x).$$

Следовательно, отсюда и из формул (34) и (35) можно заключить,что

$$u(x,t) = u_{\text{ss}}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-n^2\pi^2 kt/L^2\right) \sin\frac{n\pi x}{L},$$

где

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L [f(x) - u_{\text{ss}}(x)] \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx.$$

21. Ответ на часть (a) задачи 20 дает формула $u_{\text{ss}}(x) = Cx(L-x)/2k$. Пусть $f(x) \equiv 0$ в задаче 20, т. е. первоначально стержень был нагрет до нулевой температуры. Из результата части (b) выведите, что

$$u(x,t) = \frac{Cx}{2k}(L-x) \quad - \frac{4CL^2}{k\pi^3} \sum_{n \text{ нечетное}} \frac{1}{n^3} \exp\left(-n^2\pi^2 kt/L^2\right) \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

22. Рассмотрим температуру $u(x,t)$ в голом тонком проводе, причем $u(0,t) = u(L,t) = 0$ и $u(x,0) = = f(x)$. Пусть его боковая поверхность не изолирована, потому провод теряет теплоту, которая рассеивается в окружающей среде (в которой поддерживается нулевая температура) со скоростью, пропорциональной к $u(x,t)$. **(a)** Выведите из результата задачи 19, что

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - hu,$$

где h — положительная константа. **(b)** Затем подставьте

$$u(x,t) = e^{-ht} v(x,t)$$

и покажите, что $v(x,t)$ является решением граничной (краевой) задачи (задачи, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения), решение которой дается формулами (30) и (31). Отсюда выведите, что

$$u(x,t) = e^{-ht} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-n^2\pi^2 kt/L^2\right) \sin\frac{n\pi x}{L},$$

где

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx.$$

23. Рассмотрим плиту с коэффициентом теплопроводности K, занимающую область $0 \leqq x \leqq L$. Предположим, что в соответствии с законом Ньютона для охлаждения каждая грань плиты теряет теплоту, рассеивая ее в окружающей среде (в которой поддерживается нулевая температура)

со скоростью Hu калорий в секунду на квадратный сантиметр. Выведите из уравнения (2), что температура $u(x,t)$ в плите удовлетворяет граничным условиям

$$hu(0,t) - u_x(0,t) = 0 = hu(L,t) + u_x(L,t),$$

где $h = H/K$.

24. Рассмотрим изолированный с боковых сторон стержень длиной L, имеющий коэффициент температуропроводности k, причем начальная температура равна $u(x,0) = f(x)$. Пусть его конец $x = L$ изолирован, а в точке $x = 0$ поддерживается нулевая температура. **(a)** Отделите переменные и покажите, что собственные функции имеют вид

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{2L}$$

для n *нечетных*. **(b)** С помощью ряда по синусам для нечетного продолжения из задачи 21 в разделе 9.3, получите решение

$$u(x,t) = \sum_{n \text{ нечетное}} c_n \exp\left(-n^2\pi^2 kt/4L^2\right) \sin\frac{n\pi x}{2L},$$

где

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{2L}\,dx.$$

9.5. Приложение. Исследование нагретого стержня

Сначала давайте исследуем численными методами функцию, задающую распределение температур

$$u(x,t) = \frac{4u_0}{\pi}\sum_{n \text{ нечетное}} \frac{1}{n}\exp\left(-\frac{n^2\pi^2 kt}{L^2}\right)\sin\frac{n\pi x}{L}$$

в нагретом стержне из примера 2. Его длина $L = 50$ см, начальная температура повсюду $u_0 = 100°\text{C}$, а коэффициент температуропроводности $k = 0{,}15$ (для железа). Следующая функция пакета MATLAB суммирует первые N отличных от нуля членов этого ряда.

```
function u = u(x,t)     % функция
k = 0.15;               % коэффициент диффузии для железа
L = 50;                 % длина стержня
u0 = 100;               % начальная температура
S = 0;                  % начальная сумма
N = 50;                 % число членов
for n = 1:2:2*N+1;      % цикл для
     S = S +(1/n)*exp(-n^2*pi^2*k*t/L^2).*sin(n*pi*x/L);
end                     % конец
u = 4*u0*S/pi;
```

С помощью этой функции были вычерчены рис. 9.5.7–9.5.10. Соответствующие функции совсем несложно написать и на входных языках систем *Maple* и *Mathematica*. На практике достаточно взять $N = 50$ членов, чтобы найти значение $u(x,t)$ за 10 секунд (или чуть больше) с точностью до двух десятичных знаков на всем интервале $0 \leqq x \leqq 50$. (Можете ли вы проверить это утверждение?)

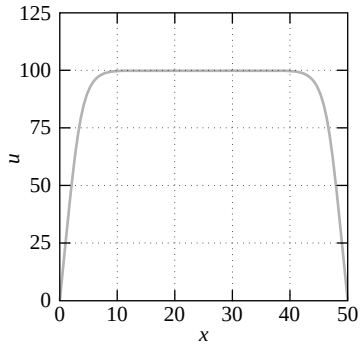


Рис. 9.5.7. График $u(x, 30)$ — распределение температур в стержне после 30 секунд

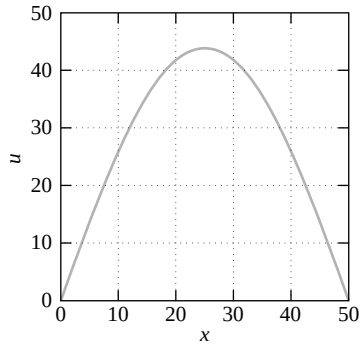


Рис. 9.5.8. График $u(x, 1800)$ — распределение температур в стержне после 30 минут

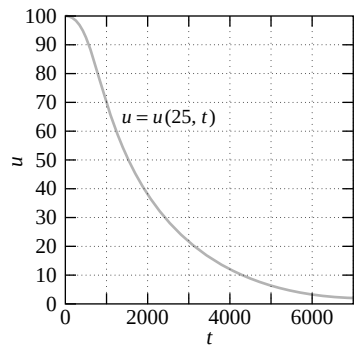


Рис. 9.5.9. График $u(25, t)$ — температура середины стержня

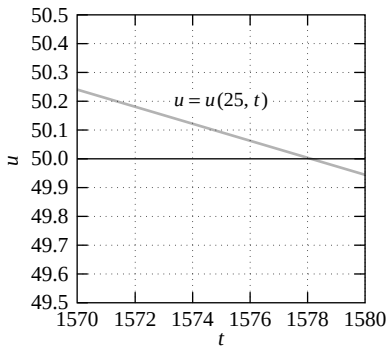


Рис. 9.5.10. Увеличение графика $u(25, t)$ — температура середины стержня

График $u(x, 30)$ на рис. 9.5.7 показывает, что после 30 секунд стержень охладился значительно только около обоих его концов и все еще имеет температуру около $100°$C для $10 \leqq x \leqq 40$. На рис. 9.5.8 показан график $u(x, 1800)$ после 30 минут; из него видно (?), что максимальная температура стержня всегда достигается в его середине, где $x = 25$.

График $u(25, t)$ для двухчасового периода показан на рис. 9.5.9; из него видно, что температура середины чуть больше чем за 1500 секунд (25 минут) падает до $50°$. На рис. 9.5.10 показан увеличенный график в окрестности его точки пересечения с горизонтальной линией $u = 50$; из него видно, что фактически для снижения температуры до $50°$ в середине стержня нужно приблизительно 1578 секунд (26 минут 18 секунд).

А теперь в этом же духе проведите исследование вашего собственного стержня с постоянной начальной температурой $f(x) = T_0 = 100$. Для этого положите

$$L = 100 + 10p \quad \text{и} \quad k = 1 + (0{,}1)q,$$

где p — наибольшая, а q — наименьшая отличная от нуля цифра номера вашего студенческого билета.

1. Пусть на обоих концах стержня поддерживается нулевая температура. Определите, сколько времени (с точностью до секунды) потребуется для того, чтобы температура середины стержня упадала до $50°$.
2. Пусть конец $x = L$ стержня изолирован, а на конце $x = 0$ поддерживается нулевая температура. Тогда функция, задающая распределение температур $u(x, t)$, разлагается в ряд Фурье из задачи 24 из этого раздела. Определите, сколько времени потребуется для того, чтобы максимальная температура, достигаемая в какой-нибудь точке стержня, стала равной $50°$.

9.6. Колебания струны и одномерное волновое уравнение

Хотя Фурье систематизировал метод разделения переменных, тригонометрические решения дифференциальных уравнений в частных производных в виде ряда появились еще до него в более ранних исследованиях колебаний струны, выполненных в XVIII столетии Леонардом Эйлером, Жаном Лероном Даламбером и Даниилом Бернулли. Чтобы получить дифференциальное уравнение в частных производных, которое моделирует колебания струны, мы начинаем изучение этого вопроса с рассмотрения гибкой однородной струны с линейной плотностью ρ (в граммах на сантиметр или в слагах (единица массы в системе фунт–сила) на фут), натянутой силой растяжения T (дины или фунты) между фиксированными точками $x = 0$ и $x = L$. Предположим, что, поскольку струна колеблется в плоскости xy около ее положения равновесия, каждая точка перемещается параллельно оси y, так что мы можем обозначить через $y(x, t)$ смещение в момент времени t точки x струны. Тогда для любого фиксированного значения t форма струны в момент времени t представляет собой кривую $y = y(x, t)$. Мы предполагаем также, что отклонение струны остается настолько небольшим, что аппроксимация $\sin\theta \approx \operatorname{tg}\theta = y_x(x, t)$ весьма точна (рис. 9.6.1). Наконец, мы предполагаем, что в дополнение к внутренним силам растяжения, действующим по касательной к струне, на нее действует внешняя вертикальная сила с линейной плотностью $F(x)$, выраженная в подходящих единицах, например в динах на сантиметр или фунтах на фут.

Мы хотим применить второй закон Ньютона $F = ma$ к короткому сегменту струны (массой $\rho\Delta x$), который соответствует интервалу $[x, x+\Delta x]$, причем вертикальное ускорение a его середины равно $y_{tt}(\overline{x}, t)$. Учитывая вертикальные компоненты сил, показанных на

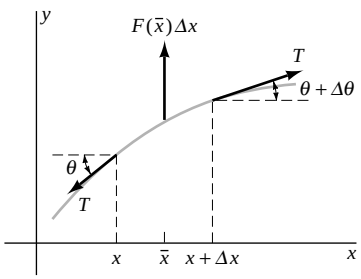


Рис. 9.6.1. Силы на коротком сегменте колеблющейся струны

рис. 9.6.1, мы получим

$$(\rho\,\Delta x)\cdot y_{tt}(\overline{x},t)\approx T\sin(\theta+\Delta\theta)-T\sin\theta+F(\overline{x})\,\Delta x\approx$$
$$\approx Ty_x(x+\Delta x,t)-Ty_x(x,t)+F(\overline{x})\,\Delta x,$$

так что деление на Δx дает

$$\rho y_{tt}(\overline{x},t)\approx T\frac{y_x(x+\Delta x,t)-y_x(x,t)}{\Delta x}+F(\overline{x}).$$

Если перейти к пределу при $\Delta x\to 0$ и $\overline{x}\to x$, мы получим дифференциальное уравнение в частных производных

➤
$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+F(x), \tag{1}$$

которое описывает вертикальные колебания гибкой струны с постоянной линейной плотностью ρ и растяжением T под влиянием внешней вертикальной силы с линейной плотностью $F(x)$.

Если положить

$$a^2=\frac{T}{\rho} \tag{2}$$

и $F(x)\equiv 0$ в уравнении (1), мы получим **одномерное волновое уравнение**

➤
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\;=\;a^2\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \tag{3}$$

которое моделирует *свободные* колебания однородной гибкой струны.

Если концы струны в точках $x=0$ и $x=L$ на оси x фиксированы, то соответствующие *условия в конечных точках* имеют вид

$$y(0,t)=y(L,t)=0. \tag{4}$$

Наша физическая интуиция в данной ситуации подсказывает, что движение струны будет определено, если мы определим как **функцию, задающую начальное положение струны**

$$y(x,0)=f(x)\qquad(0<x<L), \tag{5}$$

так и **функцию, выражающую начальную скорость струны**

$$y_t(x,0)=g(x)\qquad(0<x<L). \tag{6}$$

Объединяя уравнения (3)–(6), мы получаем граничную (краевую) задачу (задачу, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\qquad(0<x<L,\ t>0); \tag{7a}$$

➤
$$y(0,t)=y(L,t)=0, \tag{7b}$$
$$y(x,0)=f(x)\qquad(0<x<L), \tag{7c}$$
$$y_t(x,0)=g(x)\qquad(0<x<L) \tag{7d}$$

для функции, выражающей смещение $y(x,t)$ струны с фиксированными концами, совершающей свободные колебания, причем начальное положение выражено функцией $f(x)$, а начальная скорость — функцией $g(x)$.

Решение методом разделения переменных

Подобно уравнению теплопроводности, волновое уравнение (7a) линейно: любая линейная комбинация двух решений снова будет решением. Другое подобие состоит в том, что условия в конечных точках в (7b) являются однородными. К сожалению, условия (7c) и (7d) неоднородны; так что нам придется иметь дело с *двумя* неоднородными краевыми (граничными) условиями.

Как мы уже говорили в разделе 9.5, в методе разделения переменных используется линейная комбинация (суперпозиция, или наложение) решений, удовлетворяющих однородным условиям, для того, чтобы получить решение, которое также удовлетворяет единственному неоднородному граничному условию. Чтобы приспособить этот метод к сложившейся ситуации, мы руководствуемся стратегическим принципом "разделяй и властвуй" и разбиваем задачу (7) на следующие две отдельные граничные задачи, каждая из которых содержит только одно неоднородное граничное (краевое, предельное) условие:

Задача A	**Задача B**
$y_{tt} = a^2 y_{xx};$	$y_{tt} = a^2 y_{xx};$
$y(0,t) = y(L,t) = 0,$	$y(0,t) = y(L,t) = 0,$
$y(x,0) = f(x),$	$y(x,0) = 0,$
$y_t(x,0) = 0.$	$y_t(x,0) = g(x).$

Если мы сможем отдельно найти решение $y_A(x,t)$ задачи A и решение $y_B(x,t)$ задачи B, то их сумма $y(x,t) = y_A(x,t) + y_B(x,t)$ будет решением первоначальной задачи (7), потому что

$$y(x,0) = y_A(x,0) + y_B(x,0) = f(x) + 0 = f(x)$$

и

$$y_t(x,0) = \{y_A\}_t(x,0) + \{y_B\}_t(x,0) = 0 + g(x) = g(x).$$

Так что давайте будем решать задачу методом разделения переменных. Подстановка

$$y(x,t) = X(x)T(t) \tag{8}$$

в $y_{tt} = a^2 y_{xx}$ приводит к $XT'' = a^2 X''T$, где (как и прежде) мы пишем X'' вместо $X''(x)$ и T'' вместо $T''(t)$. Поэтому

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T}. \tag{9}$$

Функции X''/X переменной x и T''/a^2T переменной t могут быть равны для всех x и t, только если каждая из них равна одной и той же самой константе. Следовательно, мы можем заключить, что

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T} = -\lambda \tag{10}$$

для некоторой константы λ; знак "минус" вставлен здесь просто для того, чтобы облегчить распознание задачи на собственные значения (13). Таким образом, наше дифференциальное

уравнение в частных производных распадается на два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$X'' + \lambda X = 0, \tag{11}$$

$$T'' + \lambda a^2 T = 0. \tag{12}$$

Согласно условиям в конечных точках

$$y(0,t) = X(0)T(t) = 0, \quad y(L,t) = X(L)T(t) = 0$$

требуется, чтобы $X(0) = X(L) = 0$, если решение $T(t)$ нетривиально. Следовательно, теперь ясно, что функция $X(x)$ должна быть решением знакомой задачи на собственные значения

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(L) = 0. \tag{13}$$

Как в уравнениях (23) и (24) из раздела 9.5, собственными значениями этой задачи являются числа

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{14}$$

а собственная функция, соответствующая числу λ_n, имеет вид

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{15}$$

Теперь мы возвращаемся к уравнению (12). Из однородного начального условия

$$y_t(x,0) = X(x)T'(0) = 0$$

следует, что $T'(0) = 0$. Поэтому, решение $T_n(t)$ соответствующее собственному значению $\lambda_n = n^2\pi^2/L^2$, должно удовлетворять условиям

$$T_n'' + \frac{n^2\pi^2a^2}{L^2}T_n = 0, \quad T_n'(0) = 0. \tag{16}$$

Общее решение дифференциального уравнения (16) имеет вид

$$T_n(t) = A_n\cos\frac{n\pi at}{L} + B_n\sin\frac{n\pi at}{L}. \tag{17}$$

Его производная

$$T_n'(t) = \frac{n\pi a}{L}\left(-A_n\sin\frac{n\pi at}{L} + B_n\cos\frac{n\pi at}{L}\right)$$

удовлетворяет условию $T_n'(0) = 0$, если $B_n = 0$. Таким образом, нетривиальное решение уравнения (16) имеет вид

$$T_n(t) = \cos\frac{n\pi at}{L}. \tag{18}$$

Мы комбинируем (объединяем) результаты в равенствах (15) и (18) и получаем бесконечную последовательность функций-произведений

$$y_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \cos\frac{n\pi at}{L}\ \sin\frac{n\pi x}{L}, \tag{19}$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$. Каждая из этих функций-*кирпичиков* нашего решения удовлетворяет и волновому уравнению $y_{tt} = a^2 y_{xx}$, и однородным граничным условиям в задаче А. Сложением их (принцип суперпозиции!) мы получаем бесконечный ряд

$$y_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x)T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi at}{L}\ \sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{20}$$

Остается только выбрать коэффициенты $\{A_n\}$ так, чтобы удовлетворить неоднородному граничному условию

$$y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{L} = f(x) \tag{21}$$

для $0 < x < L$. Но этот ряд будет расположенным по синусам рядом Фурье функции $f(x)$ на интервале $[0, L]$ при условии, что мы положим

➤
$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx. \tag{22}$$

Таким образом, наконец мы видим, что формальное решение задачи А в виде ряда имеет вид

➤
$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi at}{L}\ \sin\frac{n\pi x}{L}, \tag{23}$$

причем коэффициенты $\{A_n\}_1^\infty$ вычисляются по формуле (22). Обратите внимание, что ряд (23) получен из расположенного по синусам ряда Фурье функции $f(x)$ просто вставкой множителя $\cos(n\pi at/L)$ в n-й член. Обратите внимание также, что этот член имеет [круговую] частоту $\omega_n = n\pi a/L$.

Пример 1 Из предыдущего немедленно следует, что решением граничной (краевой) задачи (задачи, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= 4\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (0 < x < \pi,\ \ t > 0);\\
y(0,t) &= y(\pi,t) = 0,\\
y(x,0) &= \tfrac{1}{10}\sin^3 x = \tfrac{3}{40}\sin x - \tfrac{1}{40}\sin 3x,\\
y_t(x,0) &= 0,
\end{aligned}$$

для которого $L = \pi$ и $a = 2$, является функция

$$y(x,t) = \tfrac{3}{40}\cos 2t\ \sin x - \tfrac{1}{40}\cos 6t\ \sin 3x.$$

Причина состоит в том, что расположенный по синусам ряд Фурье функции $f(x)$ имеет коэффициенты $A_1 = \frac{3}{40}$, $A_3 = -\frac{1}{40}$, а все остальные коэффициенты $A_n = 0$. ■

Пример 2 **Оттянутая струна** На рис. 9.6.2 показана функция, выражающая начальное положение $f(x)$ натянутой струны (длины L), которая приводится в движение в результате смещения (оттягивания) ее середины $x = L/2$ в сторону на расстояние $\frac{1}{2}bL$ и последующего отпускания ее из состояния покоя в момент времени $t = 0$. Соответствующая граничная (краевая) задача (задача, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения) имеет вид

$$\begin{aligned} y_{tt} &= a^2 y_{xx} \qquad (0 < x < L,\ \ t > 0);\\ y(0,t) &= y(L,t) = 0,\\ y(x,0) &= f(x),\\ y_t(x,0) &= 0, \end{aligned}$$

где $f(x) = bx$ для $0 \leqq x \leqq L/2$ и $f(x) = b(L-x)$ для $L/2 \leqq x \leqq L$. Найдем $y(x,t)$.

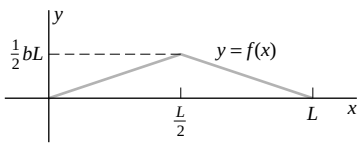


Рис. 9.6.2. Начальное положение оттянутой струны из примера 2

Решение Сначала вычислим n-й коэффициент расположенного по синусам ряда Фурье функции $f(x)$. Он имеет вид

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \\ &= \frac{2}{L}\int_0^{L/2} bx\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx + \frac{2}{L}\int_{L/2}^{L} b(L-x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx; \end{aligned}$$

из этого следует, что

$$A_n = \frac{4bL}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}.$$

Следовательно, уравнение (23) дает формальное решение в виде ряда

$$y(x,t) = \frac{4bL}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi at}{L}\sin\frac{n\pi x}{L} =$$

$$= \frac{4bL}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi at}{L}\sin\frac{\pi x}{L} - \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi at}{L}\sin\frac{3\pi x}{L} + \cdots\right). \quad (24)$$

■

Музыка

В многочисленных знакомых музыкальных инструментах для генерации звука используются колебания струны. Когда струна вибрирует с заданной частотой, колебания на этой частоте передаются через воздух в форме периодических изменений плотности воздуха — эти изменения как раз и называются **звуковыми волнами** — к уху слушателя. Например, среднее С — *тон* с частотой приблизительно равной 256 Гц. Когда несколько тонов звучат одновременно, комбинация воспринимается как гармоничная, если отношения их частот примерно равны отношению маленьких целых чисел; в противном случае многие люди считают такую комбинацию диссонантной (неприятной на слух).

Ряд в равенстве (23) представляет движение струны как наложение (суперпозицию) бесконечно многих колебаний с различными частотами. В этом ряде n-й член

$$A_n \cos\frac{n\pi at}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

представляет колебание с частотой

$$\nu_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{n\pi a/L}{2\pi} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}} \qquad \text{(Гц)}. \quad (25)$$

Наиболее низкая из этих частот

$$\nu_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad \text{(Гц)} \quad (26)$$

называется **основной частотой (частотой основной (первой) гармоники, (наинизшей) собственной частотой)**, и она обычно преобладает в звуке, который мы слышим. Частота $\nu_n = n\nu_1$ n-го **обертона**, или высшей **гармоники**, представляет собой (целое) кратное ν_1, и потому-то звук одного отдельного колебания струны является гармоничным, а не диссонантным (неприятным на слух).

Обратите внимание, что в уравнении (26) основная частота (частота основной (первой) гармоники, (наинизшая) собственная частота) ν_1 пропорциональна $\sqrt{T}$ и обратно пропорциональна L и $\sqrt{\rho}$. Таким образом, мы можем удвоить эту частоту — и, следовательно, получить основной тон на одну **октаву** выше — или делением на два длины L или учетверением растяжения T. Начальные условия *не влияют* на ν_1; вместо этого они определяют коэффициенты в (23) и, следовательно, степень, в которой более высокие гармоники вносят вклад в генерируемый звук. Поэтому начальные условия влияют на **тембр** или на всю смесь частот, а не на

основную частоту (частоту основной (первой) гармоники, (наинизшую) собственную частоту). (Технически это истинно только для относительно маленьких смещений струны; если вы ударяете по клавише фортепьяно довольно сильно, то вы сможете обнаружить небольшое и краткое начальное отклонение от обычной частоты ноты.)

Согласно одной (довольно упрощенной) теории слуха, громкость звука, генерируемого колебаниями струны, пропорциональна его общей [кинетической плюс потенциальной] энергии, которая выражается формулой

$$E = \frac{1}{2}\int_0^L \left[\rho\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right] dx. \tag{27}$$

В задаче 17 мы просим вас показать, что подстановка ряда (23) в формулу (27) дает

$$E = \frac{\pi^2 T}{4L}\sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n^2. \tag{28}$$

Отношение n-го члена $n^2A_n^2$ к сумме $\sum n^2A_n^2$ — это та часть всего звука, которая относится к n-й гармонике.

Мы иллюстрируем эту теорию с помощью ряда (24), который описывает движение оттянутой струны из примера 2. Обратите внимание, что четные гармоники отсутствуют и что $A_n = 4bL/(\pi^2n^2)$ для нечетных n. Следовательно, равенство (28) дает

$$E = \frac{\pi^2 T}{4L}\sum_{n\text{ нечетное}} n^2\frac{16b^2L^2}{\pi^4n^4} = \frac{4b^2LT}{\pi^2}\sum_{n\text{ нечетное}}\frac{1}{n^2},$$

так что часть (точнее, отношение части к целому) звука, соответствующего n-й гармонике (для n нечетного), равно

$$\frac{1/n^2}{\sum\limits_{n\text{ нечетное}} 1/n^2} = \frac{1/n^2}{\pi^2/8} = \frac{8}{\pi^2n^2}.$$

Подставляя $n = 1$ и $n = 3$, мы находим, что $81{,}06\%$ звука, генерируемого струной из примера 2, приходится на основной тон и только $9{,}01\%$ приходится на гармонику, соответствующую $n = 3$.

Решение Даламбера

В отличие от решений уравнения теплопроводности в виде рядов, формальные решения волнового уравнения в виде рядов обычно *не удовлетворяют* достаточным условиям почленной дифференцируемости, которые необходимы для проверки решения с помощью теоремы о суперпозиции (наложении), аналогичной той, которая была сформулирована в разделе 9.5. Например, почленное дифференцирование ряда в равенстве (24) привело бы к ряду

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{4b}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi at}{L}\sin\frac{n\pi x}{L},$$

который вообще не сходится, потому что коэффициент $1/n^2$ как раз был тем множителем, который обеспечивал сходимость, но он исчез после второго дифференцирования.

Есть, однако, альтернативный подход к проверке решения (23), и он позволяет получить ценную дополнительную информацию о решении. Если мы применим тригонометрическое тождество

$$2\sin A\,\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$$

для $A = n\pi x/L$ и $B = n\pi at/L$, то равенство (23) приведет к формуле

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{L}\,\cos\frac{n\pi at}{L} = \\ = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{L}(x+at) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi}{L}(x-at). \tag{29}$$

Но по определению коэффициентов

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{L} = F(x)$$

для всех x, где $F(x)$ представляет собой *нечетное* продолжение функции $f(x)$, дающей начальной положение, причем ее период считается равным $2L$. Следовательно, уравнение (29) означает, что

➤
$$y(x,t) = \tfrac{1}{2}\left[F(x+at) + F(x-at)\right]. \tag{30}$$

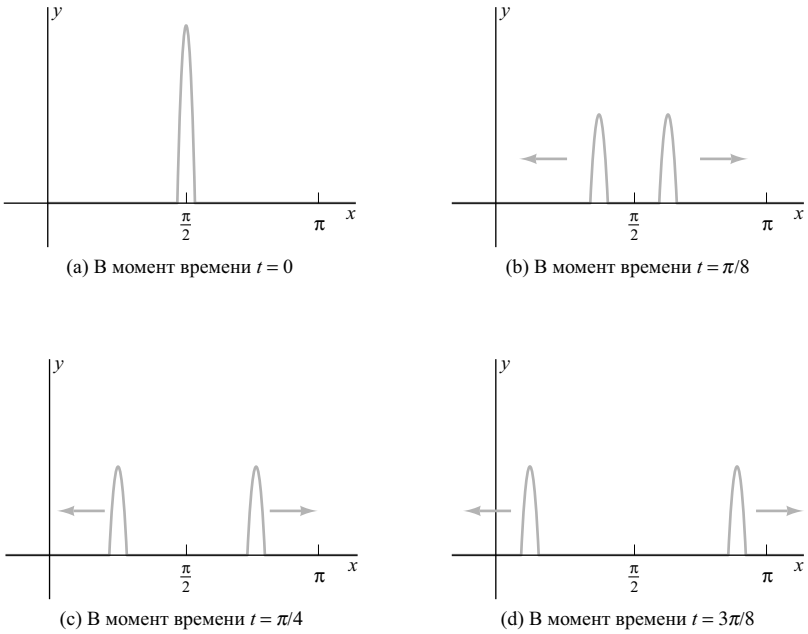
Поэтому ряд в (23) сходится к выражению в правой части равенства (30), которое известно как **форма Даламбера** решения задачи о колебании струны. Кроме того, используя цепное правило дифференцирования сложной функции, просто проверить (задачи 13 и 14), что функция $y(x,t)$, определенная равенством (30), действительно удовлетворяет уравнению $y_{tt} = a^2 y_{xx}$ (в предположении, что F является дважды дифференцируемой), так же как и граничным условиям $y(0,t) = y(L,t) = 0$ и $y(x,0) = f(x)$.

Для любой функции $F(x)$ функции $F(x+at)$ и $F(x-at)$ представляют "волны", перемещающиеся соответственно налево и направо по оси x со скоростью a. Это показано на рис. 9.6.3, на котором вычерчены графики этих двух функций для последовательных значений t в типичном случае, когда функция $F(x)$, дающая начальное положение, представляет собой импульсную функцию, причем импульс сосредоточен в середине $x = \pi/2$ струны длиной $L = \pi$, а $a = 1$ (так что основной период колебаний равен 2π). Таким образом, решение Даламбера (30) выражает $y(x,t)$ в виде суперпозиции (наложения) двух волн, двигающихся в противоположных направлениях со скоростью a. Вот почему уравнение $y_{tt} = a^2 y_{xx}$ называют *волновым* уравнением.

Струны с начальной скоростью

Решение методом разделения переменных задачи B с начальными условиями $y(x,0) = 0$ и $y_t(x,0) = g(x)$ до уравнения (16) выполняется точно так же, как и решение задачи A. Но потом из $y(x,0) = X(x)T(0) = 0$ выводится, что $T(0) = 0$, так что вместо (16) мы имеем

$$\frac{d^2T_n}{dt^2} + \frac{n^2\pi^2a^2}{L^2}T_n = 0, \quad T_n(0) = 0. \tag{31}$$



(a) В момент времени $t = 0$ (b) В момент времени $t = \pi/8$

(c) В момент времени $t = \pi/4$ (d) В момент времени $t = 3\pi/8$

Рис. 9.6.3. Импульс $F(x)$ производит две волны: одна перемещается налево, другая — направо

Из равенства (17) следует, что нетривиальное решение уравнения (31) должно иметь вид

$$T_n(t) = \sin \frac{n\pi at}{L}. \tag{32}$$

Поэтому получающееся решение в виде формального степенного ряда имеет вид

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi at}{L} \sin \frac{n\pi x}{L}, \tag{33}$$

так что мы хотим выбрать коэффициенты $\{B_n\}$ так, чтобы

$$y_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi a}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} = g(x). \tag{34}$$

Таким образом, мы хотим, чтобы $B_n \cdot n\pi a/L$ были коэффициентами b_n расположенного по синусам ряда Фурье функции $g(x)$ на интервале $[0, L]$:

$$B_n \frac{n\pi a}{L} = b_n = \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx.$$

Поэтому мы полагаем

$$B_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx, \tag{35}$$

чтобы $y(x,t)$ в (33) было формальным решением задачи B в виде ряда.

Пример 3 Рассмотрим струну в гитаре, лежащей сзади поперек пикапа, который в момент времени $t = 0$ с грохотом врезается в кирпичную стену со скоростью v_0. Тогда $g(x) \equiv v_0$, так что

$$B_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^L v_0 \sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2v_0L}{n^2\pi^2 a}\left[1-(-1)^n\right].$$

Следовательно, ряд в (33) принимает вид

$$y(x,t) = \frac{4v_0L}{\pi^2 a}\sum_{n\text{ нечетное}}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi at}{L}\,\sin\frac{n\pi x}{L}. \qquad \blacksquare$$

Если мы продифференцируем ряд в (33) почленно по t, мы получим

$$y_t(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\,\cos\frac{n\pi at}{L} = \tfrac{1}{2}\left[G(x+at)+G(x-at)\right], \tag{36}$$

где G — нечетное периода $2L$ продолжение функции $g(x)$, выражающей начальную скорость. (Здесь мы использовали тот же самый прием, что и при выводе уравнения (30).) В задаче 15 мы просим вас вывести формулу

$$y(x,t) = \frac{1}{2a}\left[H(x+at)+H(x-at)\right], \tag{37}$$

где функция $H(x)$ определена так:

$$H(x) = \int_0^x G(s)\,ds. \tag{38}$$

Пусть теперь, наконец, струна имеет отличные от нуля обе функции: функцию, дающую начальное положение $y(x,0) = f(x)$, и функцию, выражающую начальную (отличную от нуля!) скорость $y_t(x,0) = g(x)$. Тогда мы можем получить функцию, выражающую ее смещение, прибавляя решения Даламбера задач A и B, поставленных в уравнениях (30) и (37) соответственно. Следовательно, колебания этой струны с общими начальными условиями дает функция

$$y(x,t) = \frac{1}{2}\left[F(x+at)+F(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\left[H(x+at)+H(x-at)\right], \tag{39}$$

являющаяся суперпозицией (наложением) четырех волн, двигающихся вдоль оси x со скоростью a, причем две из них перемещаются налево и две — направо.

9.6. Задачи

В задачах 1–10 найдите решения граничных (краевых) задач (задач, в которых заданы граничные (предельные, или краевые) значения).

1. $y_{tt} = 4y_{xx}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$; $y(0,t) = y(\pi,t) = 0$, $y(x,0) = \frac{1}{10}\sin 2x$, $y_t(x,0) = 0$

2. $y_{tt} = y_{xx}$, $0 < x < 1$, $t > 0$; $y(0,t) = y(1,t) = 0$, $y(x,0) = \frac{1}{10}\sin \pi x - \frac{1}{20}\sin 3\pi x$, $y_t(x,0) = 0$

3. $4y_{tt} = y_{xx}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$; $y(0,t) = y(\pi,t) = 0$, $y(x,0) = y_t(x,0) = \frac{1}{10}\sin x$

4. $4y_{tt} = y_{xx}$, $0 < x < 2$, $t > 0$; $y(0,t) = y(2,t) = 0$, $y(x,0) = \frac{1}{5}\sin \pi x \cos \pi x$, $y_t(x,0) = 0$

5. $y_{tt} = 25y_{xx}$, $0 < x < 3$, $t > 0$; $y(0,t) = y(3,t) = 0$, $y(x,0) = \frac{1}{4}\sin \pi x$, $y_t(x,0) = 10\sin 2\pi x$

6. $y_{tt} = 100y_{xx}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$; $y(0,t) = y(\pi,t) = 0$, $y(x,0) = x(\pi - x)$, $y_t(x,0) = 0$

7. $y_{tt} = 100y_{xx}$, $0 < x < 1$, $t > 0$; $y(0,t) = y(1,t) = 0$, $y(x,0) = 0$, $y_t(x,0) = x$

8. $y_{tt} = 4y_{xx}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$; $y(0,t) = y(\pi,t) = 0$, $y(x,0) = \sin x$, $y_t(x,0) = 1$

9. $y_{tt} = 4y_{xx}$, $0 < x < 1$, $t > 0$; $y(0,t) = y(1,t) = 0$, $y(x,0) = 0$, $y_t(x,0) = x(1 - x)$

10. $y_{tt} = 25y_{xx}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$; $y(0,t) = y(\pi,t) = 0$, $y(x,0) = y_t(x,0) = \sin^2 x$

11. Предположим, что струна длиной 2 фута весит $\frac{1}{32}$ унции и растянута с силой 32 фунта. Найдите основную частоту (частоту основной (первой) гармоники, (наинизшую) собственную частоту), с которой она колеблется, и скорость, с которой волны колебаний бегут по ней.

12. Покажите, что амплитуда колебаний середины струны из примера 3 выражается формулой

$$y\left(\frac{L}{2}, \frac{L}{2a}\right) = \frac{4v_0 L}{\pi^2 a} \sum_{n \text{ нечетное}} \frac{1}{n^2} = \frac{v_0 L}{2a}.$$

Пусть теперь это струна из задачи 11, а прицельная скорость пикапа равна 60 миль в час. Покажите, что амплитуда в этом случае приблизительно равна 1 дюйму.

13. Предположим, что функция $F(x)$ дважды дифференцируема для всех x. Используя цепное правило дифференцирования сложной функции, проверьте, что функции

$$y(x,t) = F(x + at) \quad \text{и} \quad y(x,t) = F(x - at)$$

удовлетворяют уравнению $y_{tt} = a^2 y_{xx}$.

14. Пусть функция $F(x)$ дифференцируема, нечетная и имеет период $2L$. Покажите, что функция

$$y(x,t) = \tfrac{1}{2}\left[F(x + at) + F(x - at)\right]$$

удовлетворяет условиям $y(0,t) = y(L,t) = 0$, $y(x,0) = F(x)$ и $y_t(x,0) = 0$.

15. Если $y(x,0) = 0$, то из уравнения (36) следует (почему?), что

$$y(x,t) = \tfrac{1}{2}\int_0^t G(x + a\tau)\, d\tau + \tfrac{1}{2}\int_0^t G(x - a\tau)\, d\tau.$$

Сделайте соответствующие подстановки в этих интегралах, чтобы получить уравнения (37) и (38).

16. **(a)** Покажите, что подстановки $u = x + at$ и $v = x - at$ преобразуют уравнение $y_{tt} = a^2 y_{xx}$ в уравнение $y_{uv} = 0$. **(b)** Заключите отсюда, что каждое решение уравнения $y_{tt} = a^2 y_{xx}$ имеет форму

$$y(x,t) = F(x + at) + G(x - at),$$

которая представляет две волны, перемещающиеся в противоположных направлениях, каждая со скоростью a.

17. Предположим, что

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi at}{L} \sin\frac{n\pi x}{L}.$$

Возведите в квадрат производные y_t и y_x и затем проинтегрируйте почленно с учетом ортогональности функций синуса и косинуса и проверьте, что

$$E = \frac{1}{2}\int_0^L (\rho y_t^2 + T y_x^2)\, dx = \frac{\pi^2 T}{4L}\sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n^2.$$

18. Рассмотрим натянутую струну, первоначально находящуюся в покое; ее конец в точке $x = 0$ фиксирован, а ее конец в точке $x = L$ частично свободен — он может скользить без трения по вертикальной линии $x = L$. Соответствующая граничная (краевая) задача (задача, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения) имеет вид

$$\begin{aligned} y_{tt} &= a^2 y_{xx} \qquad (0 < x < L, \quad t > 0); \\ y(0,t) &= y_x(L,t) = 0, \\ y(x,0) &= f(x), \\ y_t(x,0) &= 0. \end{aligned}$$

Отделите переменные и используйте ряд по синусам для нечетного продолжения функции $f(x)$ (как в задаче 24 из раздела 9.5) и получите решение

$$y(x,t) = \sum_{n \text{ нечетное}} A_n \cos \frac{n\pi a t}{2L} \sin \frac{n\pi x}{2L},$$

где

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{2L}\, dx.$$

В задачах 19 и 20 рассматриваются колебания струны под влиянием убывающей силы $F(x) = -\rho g$ тяжести. Согласно уравнению (1), функция, выражающая смещение, удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - g \tag{40}$$

с условиями в конечных точках $y(0,t) = y(L,t) = 0$.

19. Предположим сначала, что струна висит в стационарном положении так, чтобы $y = y(x)$ и $y_{tt} = 0$, и, следовательно, дифференциальное уравнение ее движения имеет простую форму: $a^2 y'' = g$. Получите стационарное решение

$$y(x) = \phi(x) = \frac{gx}{2a^2}(x - L).$$

20. Теперь предположим, что струна отпущена из состояния покоя в равновесии; следовательно, начальные условия имеют вид $y(x,0) = 0$ и $y_t(x,0) = 0$. Определите

$$v(x,t) = y(x,t) - \phi(x),$$

где $\phi(x)$ — стационарное решение из задачи 19. Выведите из уравнения (40), что $v(x,t)$ является решением граничной (краевой) задачи (задачи, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения)

$$\begin{aligned} v_{tt} &= a^2 v_{xx}; \\ v(0,t) &= v(L,t) = 0, \\ v(x,0) &= -\phi(x), \\ v_t(x,0) &= 0. \end{aligned}$$

Выведите из уравнений (22) и (23) формулу

$$y(x,t) - \phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi a t}{L} \sin \frac{n\pi x}{L},$$

где коэффициенты $\{A_n\}$ — это коэффициенты расположенного по синусам ряда Фурье функции $f(x) = -\phi(x)$. Наконец, объясните, почему из этого следует, что струна колеблется между положениями $y = 0$ и $y = 2\phi(x)$.

21. Пусть струна вибрирует в воздухе, причем сопротивление струны пропорционально скорости. Тогда граничная (краевая) задача (задача, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения) примет вид

$$\begin{aligned} y_{tt} &= a^2 y_{xx} - 2hy_t; \\ y(0,t) &= y(L,t) = 0, \\ y(x,0) &= f(x), \\ y_t(x,0) &= 0. \end{aligned} \tag{41}$$

Предположим, что $0 < h < \pi a/L$. **(a)** Подставьте

$$y(x,t) = X(x)T(t)$$

в (41) и получите уравнения

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(L) = 0 \tag{42}$$

и

$$T'' + 2hT' + a^2\lambda T = 0, \quad T'(0) = 0. \tag{43}$$

(b) Собственные значения и собственные функции уравнения (42) имеют вид

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \quad \text{и} \quad X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}$$

(как обычно). Покажите, что при $\lambda = n^2\pi^2/L^2$ общее решение дифференциального уравнения в (43) имеет вид

$$T_n(t) = e^{-ht}\left(A_n\cos\omega_n t + B_n\sin\omega_n t\right),$$

где $\omega_n = \sqrt{(n^2\pi^2a^2/L^2) - h^2} < n\pi a/L$. **(c)** Покажите, что из $T_n'(0) = 0$ следует, что $B_n = hA_n/\omega_n$, и, следовательно, с точностью до постоянного множителя

$$T_n(t) = e^{-ht}\cos\left(\omega_n t - \alpha_n\right),$$

где $\alpha_n = \operatorname{arctg}(h/\omega_n)$. **(d)** Наконец, заключите, что

$$y(x,t) = e^{-ht}\sum_{n=1}^{\infty} c_n\cos\left(\omega_n t - \alpha_n\right)\sin\frac{n\pi x}{L},$$

где

$$c_n = \frac{2}{L\cos\alpha_n}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

Из этой формулы мы видим, что сопротивление воздуха имеет три главных эффекта: экспоненциальное затухание амплитуд, уменьшение частоты $\omega_n < n\pi a/L$ и введение углов задержки по фазе α_n.

22. Заново решите задачу 21 следующим образом. Сначала подставьте $y(x,t) = e^{-ht}v(x,t)$ в уравнение (41) и затем покажите, что граничная (краевая) задача (задача, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения) для $v(x,t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} v_{tt} &= a^2 v_{xx} + h^2 v; \\ v(0,t) &= v(L,t) = 0, \\ v(x,0) &= f(x), \\ v_t(x,0) &= hf(x). \end{aligned}$$

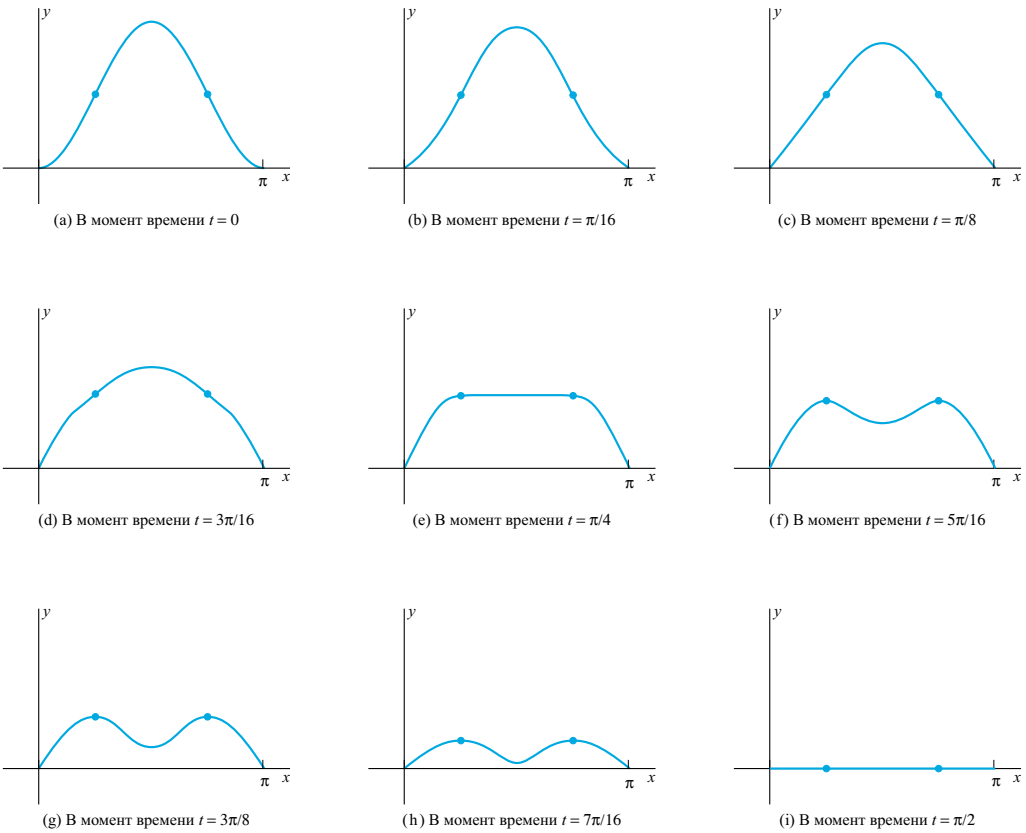
Затем покажите, что подстановка $v(x,t) = X(x)T(t)$ приводит к уравнениям

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(L) = 0,$$
$$T'' + (\lambda a^2 - h^2)T = 0.$$

Продолжая в этой манере, получите решение $y(x,t)$, данное в части (d) задачи 21.

Снимки струны на рис. 9.6.4 показывают последовательные положения колеблющейся струны длиной $L = \pi$ и $a = 1$ (так что период ее колебания равен 2π). Струна первоначально находится в покое, причем ее конечные точки фиксированы, а в момент времени $t = 0$ она приводится в движение, причем функция, дающая ее начальное положение, имеет вид

$$f(x) = 2\sin^2 x = 1 - \cos 2x. \tag{44}$$



(a) В момент времени $t = 0$ (b) В момент времени $t = \pi/16$ (c) В момент времени $t = \pi/8$

(d) В момент времени $t = 3\pi/16$ (e) В момент времени $t = \pi/4$ (f) В момент времени $t = 5\pi/16$

(g) В момент времени $t = 3\pi/8$ (h) В момент времени $t = 7\pi/16$ (i) В момент времени $t = \pi/2$

Рис. 9.6.4. Последовательные снимки колебаний струны в задачах 23 и 24

23. Самый интересный снимок — тот, что на рис. 9.6.4 (e), из которого видно, что струна имеет (пусть всего лишь на мгновение) плоский участок в момент $t = \pi/4$. И в самом деле, примените формулу Даламбера (30), чтобы доказать, что функция, дающая положение струны $y(x,t)$, удовлетворяет условию

$$y\left(x, \frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \text{для} \quad \frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{3\pi}{4}.$$

24. **(a)** Покажите, что функция $f(x)$, дающая положение и определенная равенством (44), имеет точки перегиба [$f''(x) = 0$] в точке $x = \pi/4$ и в точке $x = 3\pi/4$. **(b)** На снимках (a)–(e) на рис. 9.6.4 видно, что эти две точки перегиба могут оставаться фиксированными в течение некоторого начального периода времени колебаний струны. И действительно, с помощью формулы Даламбера покажите, что если $x = \pi/4$ или $x = 3\pi/4$, то $y(x, t) = 1$ для $0 \leqq t \leqq \pi/4$.

9.6. Приложение. Исследование колебаний струны

Здесь мы описываем применение системы *Mathematica* для исследования решения Даламбера

$$y(x,t) = \tfrac{1}{2}\left[F(x+at) + F(x-at)\right] \tag{1}$$

задачи о колебаниях струны. С помощью системы *Mathematica* мы построим графики движения при разнообразных начальных положениях струны. Несомненно, аналогичные исследования можно выполнить и с помощью других подобных пакетов, например таких как *Maple* и MATLAB.

Чтобы начертить снимки, показанные на рис. 9.6.4, мы начали с функции, дающей начальное положение

```
f[x_] := 2*Sin[x]^2
```

Чтобы определить нечетное периода 2π продолжение $F(x)$ функции $f(x)$, мы нуждаемся в функции $s(x)$, которая сдвигает точку x на (целое) кратное π так, чтобы она попала в интервал $[0, \pi]$.

```
s[x_] := Block[{k}, k = Floor[N[x/Pi]];
            If[EvenQ[k], (* Если k является четным *)
            (* то *) N[x - k*Pi],
            (* иначе *) N[x - k*Pi - Pi]]]
```

Тогда искомое нечетное продолжение определятся так:

```
F[x_] := If[s[x] > 0, (* то *) f[s[x]],
            (* иначе *)-f[-s[x]]]
```

Наконец, решение Даламбера в (1) принимает вид

```
G[x_, t_] := ( F[x + t] + F[x - t] )/2
```

Снимок положения струны в момент времени t определяется так:

```
stringAt[t_] := Plot[g[x,t], {x, 0, Pi} ];
```

Например, команда `stringAt[Pi/4]` вычертит снимок, соответствующий $t = \pi/4$ (этот снимок показан на рис. 9.6.4 (e)). На этом снимке отчетливо виден плоский участок, на который указывалось в задаче 23. Мы можем и сразу начертить всю последовательность снимков:

```
snapshots = Table[ stringAt[t], {t, 0, Pi, Pi/12}]
```

Эти снимки можно анимировать и тем самым показать колебание струны в движении, или же мы можем показать одновременно последовательные положения струны на одном рисунке (рис. 9.6.5) с помощью команды `Show[snapshots]` (Показать [снимки]).

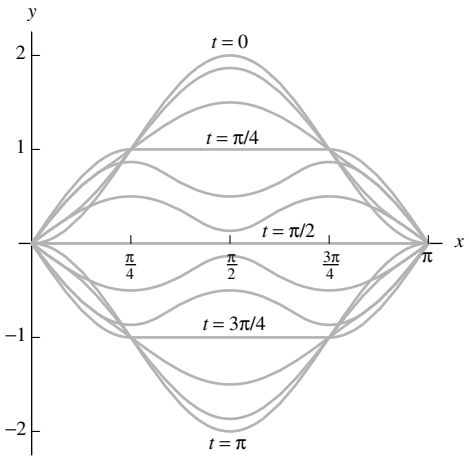


Рис. 9.6.5. Последовательные положения колеблющейся струны с начальным положением $f(x) = 2\sin^2 x$

Функция, выражающая начальное положение, задается так:

```
f[x_] := If[x < Pi/2, (* то *) x,
            (* иначе *) Pi - x] // N
```

(соответствует треугольной волновой функции на рис. 9.2.4). С ее помощью генерируется сложное изображение, показанное на рис. 9.6.6. Точно так же задается функция, выражающая начальное положение:

```
f[x_] := Which[ 0 <= x < Pi/3, x,
                Pi/3 <= x < 2*Pi/3, Pi/3,
                2*Pi/3 <= x <= Pi, Pi - x ] // N
```

(соответствует трапецеидальной волновой функции рис. 9.2.5). С ее помощью генерируется изображение, показанное на рис. 9.6.7.

Вы можете проверить свою реализацию метода Даламбера, пытаясь с ее помощью самостоятельно воспроизвести рис. 9.6.6 и 9.6.7. Начальное положение, задаваемое “буферной функцией”

$$f(x) = \sin^{200} x, \quad 0 \leqq x \leqq \pi,$$

генерирует бегущие волны, перемещающиеся (первоначально) в противоположных направлениях, как показано на рис. 9.6.3. Функция, задающая начальное положение

$$f(x) = \begin{cases} \sin^{200}\left(x + \frac{3}{2}\right) & \text{для } 0 < x < \pi/2, \\ 0 & \text{для } \pi/2 < x < \pi, \end{cases}$$

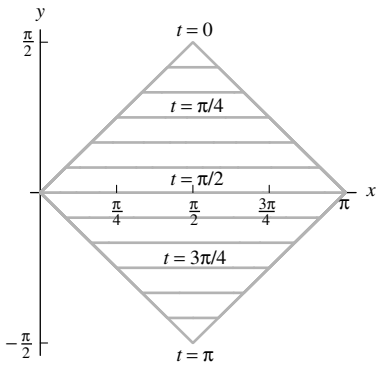


Рис. 9.6.6. Последовательные положения колеблющейся струны с треугольным начальным положением

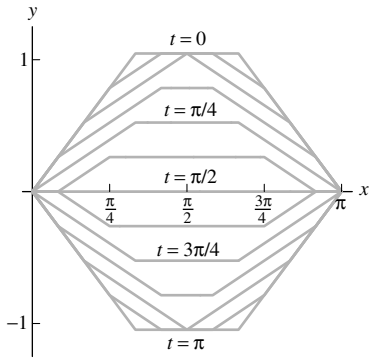


Рис. 9.6.7. Последовательные положения колеблющейся струны с трапецеидальным начальным положением

генерирует единственную (отдельную) волну, которая начинается в точке $x = 0$ и (первоначально) перемещается направо. (Представьте себе скакалку, привязанную к дереву, свободный конец которой внезапно испытывает резкое колебание в момент времени $t = 0$.)

После исследования некоторых только что указанных возможностей, попробуйте другие функции, задающие начальное положение, по вашему собственному выбору. Подойдет, например, любая непрерывная функция f, такая что $f(0) = f(\pi) = 0$. Чем более экзотическим получится колебание струны, тем лучше.

9.7. Установившаяся температура и уравнение Лапласа

Мы теперь рассматриваем распределение температур в двумерной пластине или тонком слое, который занимает область R (на плоскости xy), ограниченную кусочно гладкой кривой C, как показано на рис. 9.7.1. Мы предполагаем, что грани пластины изолированы и что она настолько тонкая, что ее температура не изменяется по перпендикуляру к плоскости xy. Мы хотим определить (при различных условиях) температуру $u(x, y, t)$ в точке (x, y) в момент времени t.

Пусть пластина сделана из материала, плотность которого равна δ (масса в единице объема), удельная теплоемкость равна c (на единицу массы), а коэффициент теплопроводности равен K, причем все эти величины считаются постоянными (константами) для всей пластины. При этих предположениях можно показать (обобщая вывод одномерного уравнения теплопроводности, сделанный в разделе 9.5), что функция $u(x, y, t)$, задающая распределение температур, удовлетворяет **двумерному уравнению теплопроводности**

➤
$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right). \tag{1}$$

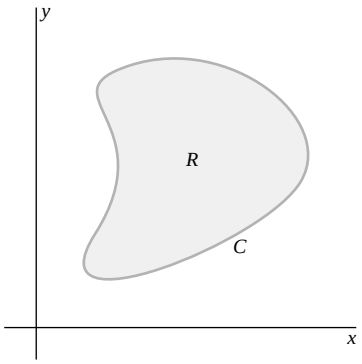


Рис. 9.7.1. Область плоскости R и ее граница — кривая C

Как и в разделе 9.5, k обозначает коэффициент температуропроводности материала пластины,

$$k = \frac{K}{c\delta}. \tag{2}$$

Сумма вторых производных в правой части (1) представляет собой **лапласиан** функции u, обычно обозначаемый

➤ $$\boldsymbol{\nabla}^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{3}$$

так что двумерное уравнение теплопроводности может быть записано в виде

➤ $$\frac{\partial u}{\partial t} = k\boldsymbol{\nabla}^2 u. \tag{1′}$$

Сравнивая уравнение (1′) с одномерным уравнением теплопроводности $u_t = ku_{xx}$, мы видим, что при переходе от одного до двух измерений вторая производная по переменной, выражающей пространственную координату, — u_{xx} — заменяется лапласианом $\boldsymbol{\nabla}^2 u$. Это не случайность, а общее правило. Например, если гибкая натянутая мембрана занимает в равновесии некоторую область в плоскости xy и колеблется в (перпендикулярном этой области) направлении оси z, то функция, дающая ее смещение $z = z(x, y, t)$, удовлетворяет **двумерному волновому уравнению**

➤ $$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) = a^2 \boldsymbol{\nabla}^2 z. \tag{4}$$

Это уравнение имеет такое же отношение к одномерному волновому уравнению $z_{tt} = a^2 z_{xx}$ (здесь через $z(x, y)$ обозначаем смещение струны), что и уравнение (1′) имеет к одномерному уравнению теплопроводности.

В этом разделе мы ограничим наше внимание установившимся процессом, в котором температура u не изменяется со временем и потому является функцией только x и y. Таким

образом, мы интересуемся *установившейся температурой* пластины. В этом случае $u_t = 0$, так что уравнение (1) становится **двумерным уравнением Лапласа**

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{5}$$

Это важное дифференциальное уравнение в частных производных также известно как **потенциальное уравнение**. Трехмерному уравнению Лапласа $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ удовлетворяют (в вакууме) электрические и гравитационные гармонические функции. Ему также удовлетворяет скоростная гармоническая функция устойчивого безвихревого потока несжимаемой и невязкой жидкости.

Задачи Дирихле

Частное решение уравнения Лапласа в ограниченной области плоскости R определяется соответствующими граничными условиями. Например, вполне вероятно по физическим соображениям считать, что установившаяся температура $u(x, y)$ в пластине определена, если известно, что $u(x, y)$ совпадает с заданной функцией $f(x, y)$ в каждой точке граничной кривой C пластины. Чтобы найти установившуюся температуру в пластине с заданными граничными (краевыми) значениями, мы должны решить граничную (краевую) задачу (задачу, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 && \text{(внутри } R\text{)}; \\ &u(x, y) = f(x, y) && \text{(если } (x, y) \text{ находится на } C\text{)}. \end{aligned} \tag{6}$$

Такую задачу нахождения решения уравнения Лапласа в области R с заданными граничными (краевыми) значениями называют **задачей Дирихле**. Известно, что если граничная кривая C и граничные (краевые) значения функции f ведут себя достаточно хорошо, то в такой области существует единственное решение задачи Дирихле (6).

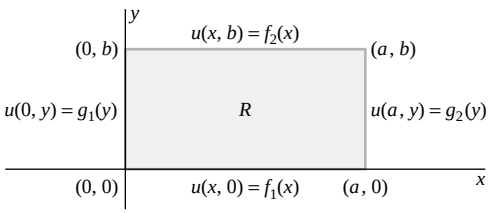


Рис. 9.7.2. Прямоугольная пластина с заданными граничными (краевыми) значениями

На рис. 9.7.2 показана прямоугольная пластина с заданными граничными (краевыми) значениями на ее четырех краях. Соответствующая задача Дирихле имеет вид

$$\begin{aligned} &u_{xx} + u_{yy} = 0 && && \text{(внутри } R\text{)}; \\ &u(x, 0) = f_1(x), && u(x, b) = f_2(x) && (0 < x < a), \\ &u(0, y) = g_1(y), && u(a, y) = g_2(y) && (0 < y < b). \end{aligned} \tag{7}$$

Поскольку есть четыре неоднородных условия (а не одно), эта граничная (краевая) задача (задача, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения) непосредственно не поддается решению методом разделения переменных. В разделе 9.6, когда мы уже сталкивались с этой трудностью, мы разбили задачу о колебаниях струны (в которой не только начальное положение было отлично от нуля, но и начальная скорость также была отлична от нуля) на две задачи, каждая из которых содержала только одно неоднородное условие. Подобным способом, граничная (краевая) задача (задача, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения) (7) может быть разбита на *четыре* задачи, каждая из которых содержит только одно неоднородное граничное (краевое, предельное) условие. Для каждой из этих задач функция $u(x, y)$ будет нулевой на трех сторонах прямоугольника и будет принимать заданные значения на четвертой. Решение каждой из этих четырех задач на граничные (краевые) значения может быть найдено методом разделения переменных, а сумма этих четырех решений как раз и будет решением первоначальной задачи (7). В следующем примере мы решим одну из этих четырех задач — ту, которая показана на рис. 9.7.3.

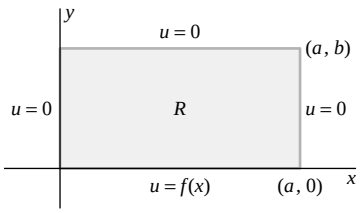


Рис. 9.7.3. Граничная (краевая) задача (задача, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения) из примера 1

Пример 1 Решим граничную (краевую) задачу (задачу, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения)

$$\begin{aligned} &u_{xx} + u_{yy} = 0; \\ &u(0, y) = u(a, y) = u(x, b) = 0, \\ &u(x, 0) = f(x) \end{aligned} \tag{8}$$

для прямоугольника на рис. 9.7.3.

Решение Подставив $u(x, y) = X(x)Y(y)$, получим $X''Y + XY'' = 0$, так что

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda \tag{9}$$

для некоторой константы λ. Таким образом, функция $X(x)$ должна удовлетворять знакомой задаче на собственные значения

$$\begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0, \\ X(0) = X(a) &= 0. \end{aligned}$$

Собственные значения и соответствующие собственные функции имеют вид

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2}, \quad X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{a} \tag{10}$$

для $n = 1, 2, 3, \ldots$. Из уравнения (9) при $\lambda = n^2\pi^2/a^2$ и остающихся однородных граничных условий в (8) мы получаем

$$Y_n'' - \frac{n^2\pi^2}{a^2}Y_n = 0, \quad Y_n(b) = 0. \tag{11}$$

Общее решение дифференциального уравнения в (11) имеет вид

$$Y_n(y) = A_n \cosh\frac{n\pi y}{a} + B_n \sinh\frac{n\pi y}{a},$$

а из условия

$$Y_n(b) = A_n \cosh\frac{n\pi b}{a} + B_n \sinh\frac{n\pi b}{a} = 0$$

следует, что $B_n = -[A_n \cosh(n\pi b/a)]/[\sinh(n\pi b/a)]$, так что

$$Y_n(y) = A_n \cosh\frac{n\pi y}{a} - \frac{A_n \cosh(n\pi b/a)}{\sinh(n\pi b/a)} \sinh\frac{n\pi y}{a} =$$

$$= \frac{A_n}{\sinh(n\pi b/a)}\left(\sinh\frac{n\pi b}{a}\cosh\frac{n\pi y}{a} - \cosh\frac{n\pi b}{a}\sinh\frac{n\pi y}{a}\right).$$

Поэтому

$$Y_n(y) = c_n \sinh\frac{n\pi(b-y)}{a}, \tag{12}$$

где $c_n = A_n/\sinh(n\pi b/a)$. Из (10) и (12) получаем формальное решение в виде ряда

➤
$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)Y_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{a}\sinh\frac{n\pi(b-y)}{a}. \tag{13}$$

Остается только выбирать коэффициенты $\{c_n\}$, так чтобы удовлетворить неоднородному условию

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n \sinh\frac{n\pi b}{a}\right)\sin\frac{n\pi x}{a} = f(x).$$

Для этой цели мы хотим, чтобы выполнялись равенства

$$c_n \sinh\frac{n\pi b}{a} = b_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\,dx,$$

откуда

$$c_n = \frac{2}{a \sinh(n\pi b/a)} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a}\, dx. \tag{14}$$

При этом выборе коэффициентов ряд в (13) представляет собой формальное решение в виде ряда задачи Дирихле (8). ■

Например, предположим, что

$$f(x) \equiv T_0 = \frac{4T_0}{\pi} \sum_{n \text{ нечетное}} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi x}{a},$$

если $0 < x < a$, так что $b_n = 4T_0/(\pi n)$ для нечетных n и $b_n = 0$ для n четных. Тогда формулы (13) и (14) дают

$$u(x, y) = \frac{4T_0}{\pi} \sum_{n \text{ нечетное}} \frac{\sin(n\pi x/a)\, \sinh(n\pi[b-y]/a)}{n \sinh(n\pi b/a)} \tag{15}$$

для установившейся температуры в прямоугольной пластине, основа которой поддерживается при температуре T_0, а другие три края — при нулевой температуре. В частности, предположим, что $T_0 = 100$ и что $a = b = 10$. Тогда из уравнения (15) мы находим, что температура в центре пластины равна

$$u(5,5) = \frac{400}{\pi} \sum_{n \text{ нечетное}} \frac{\sin(n\pi/2)\, \sinh(n\pi/2)}{n \sinh n\pi} \approx$$

$$\approx 25{,}3716 - 0{,}3812 + 0{,}0099 - 0{,}0003;$$

т. е. $u(5,5)$ приблизительно равно $25{,}00$.

Замечание 1. Можете ли вы привести аргументы (возможно, используя симметрию), которые доказывают (не используя решение в виде ряда), что $u(5,5)$ точно равно 25?

Замечание 2. На практике инженеры используют решения, подобные приведенному в уравнении (15), чтобы вычертить изменение температуры в пластине или части машины; они особенно интересуются любыми "горячими точками", которые могут там появиться. Такая информация часто выявляется с помощью вычерчивания *кривых уровня*, на которых функция, задающая распределение температур $u(x, y)$, является постоянной. На рис. 9.7.4 показан типичные кривые уровня для функции $u(x, y)$ в (15) при $a = b = 10$ и $T_0 = 100$. ■

Пример 2 Пусть R — полубесконечная лента, показанная на рис. 9.7.5. Решим граничную (краевую) задачу (задачу, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения)

$$\begin{aligned} &u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad (\text{в } R);\\ &u(x,0) = u(x,b) = 0 \qquad (0 < x < \infty),\\ &u(x,y) \text{ ограничена при } x \to +\infty,\\ &u(0,y) = g(y). \end{aligned} \tag{16}$$

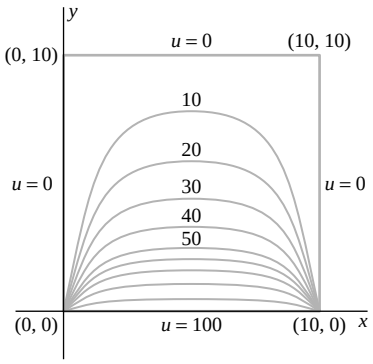


Рис. 9.7.4. Типичные кривые уровня функции $u(x, y)$ из уравнении (15)

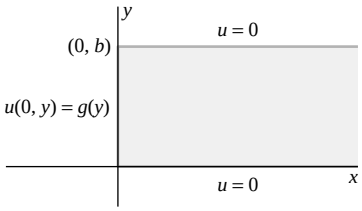


Рис. 9.7.5. Полубесконечная полоса из примера 2

Решение Условие, что $u(x, y)$ ограничена при $x \to +\infty$, играет роль однородного граничного условия, соответствующего отсутствующему правому краю "прямоугольника"; такое условие типично для задач Дирихле для неограниченных областей. При $u(x, y) = X(x)Y(y)$ фактические однородные условия дают $Y(0) = Y(b) = 0$. Следовательно, именно $Y(y)$ является решением задачи на собственные значения. Мы поэтому пишем результат разделения переменных в (9) в виде

$$\frac{Y''}{Y} = -\frac{X''}{X} = -\lambda, \tag{17}$$

изменяя знак λ, чтобы получить знакомую задачу на собственные значения

$$Y'' + \lambda Y = 0, \quad Y(0) = Y(b) = 0$$

с собственными значениями и соответствующими собственными функциями

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{b^2}, \quad Y_n(y) = \sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{18}$$

Общее решение уравнения

$$X_n'' - \frac{n^2\pi^2}{b^2}X_n = 0$$

имеет вид $X_n(x) = A_n \exp(n\pi x/b) + B_n \exp(-n\pi x/b)$. Мы пишем решение в экспоненциальной форме потому, что в этом случае условие, что $u(x, y)$ и, следовательно, $X(x)$ ограничено при $x \to +\infty$, немедленно подразумевает, что $A_n = 0$ для всех n. Учитывая это, опускаем константу и у нас остается только

$$X_n(x) = \exp\left(-\frac{n\pi x}{b}\right). \tag{19}$$

Из равенств (18) и (19) мы получаем формальное решение в виде ряда

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}b_nX_n(x)Y_n(y)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\exp\left(-\frac{n\pi x}{b}\right)\sin\frac{n\pi y}{b}, \qquad (20)$$

которое удовлетворяет однородным граничным условиям и условию ограниченности. Чтобы также удовлетворить неоднородному условию

$$u(0,y)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi y}{b}=g(y),$$

мы выбираем b_n так, чтобы они были коэффициентами расположенного по синусам ряда Фурье

$$b_n=\frac{2}{b}\int_0^b g(y)\sin\frac{n\pi y}{b}\,dy \qquad (21)$$

функции $g(y)$ на интервале $[0,\ b]$.

Например, если

$$g(y)=T_0=\frac{4T_0}{\pi}\sum_{n\text{ нечетное}}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

для $0<y<b$, то из равенств (20) и (21) следует, что

$$u(x,y)=\frac{4T_0}{\pi}\sum_{n\text{ нечетное}}\frac{1}{n}\exp\left(-\frac{n\pi x}{b}\right)\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

На рис. 9.7.6 показаны некоторые типичные кривые уровня функции, задающей распределение температур, определенной этой формулой при $b=10$ и $T_0=100$. ■

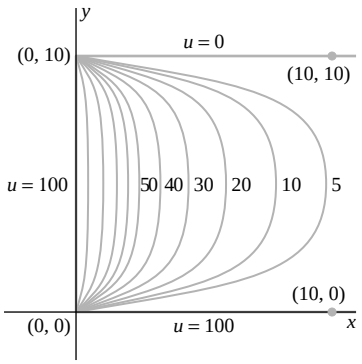


Рис. 9.7.6. Типичные кривые уровня функции $u(x,y)$ из примера 2

Задача Дирихле для кругового диска

Мы теперь исследуем установившуюся температуру (температуру в установившемся режиме) в круговом диске радиуса a с изолированными гранями и с заданным граничным распределением температур. Очевидно, мы должны использовать геометрию круга, выражая $u = u(r, \theta)$ через полярные координаты r и θ, с учетом соотношений $x = r\cos\theta$ и $y = r\sin\theta$. С помощью этих уравнений мы преобразуем лапласиан и в результате получим **уравнение Лапласа в полярных координатах**:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0. \tag{22}$$

Мы задаем граничные температуры (как показано на рис. 9.7.7), требуя, чтобы

$$u(a, \theta) = f(\theta), \tag{23}$$

причем функция $f(\theta)$, период которой равен 2π, задана. Кроме того, поскольку (r, θ) и $(r, \theta + 2\pi)$ — полярные координаты той же самой точки, мы налагаем на u условие периодичности

$$u(r, \theta) = u(r, \theta + 2\pi) \tag{24}$$

для $r < a$ всех θ; это условие играет роль однородного граничного условия.

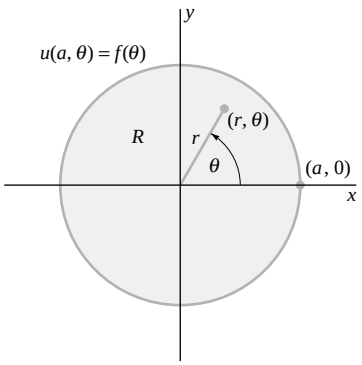


Рис. 9.7.7. Задача Дирихле для кругового диска

Чтобы решить граничную (краевую) задачу (задачу, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения), поставленную в уравнениях (22)–(24), мы подставляем $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ в уравнение (22); в результате получаем

$$R''\Theta + \frac{1}{r}R'\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta'' = 0.$$

Деление на $R\Theta/r^2$ дает

$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} + \frac{\Theta''}{\Theta} = 0.$$

А из этого следует, что

$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda$$

для некоторой константы λ. Это приводит к двум обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$r^2R'' + rR' - \lambda R = 0 \tag{25}$$

и

$$\Theta'' + \lambda\Theta = 0. \tag{26}$$

Общее решение уравнения (26) имеет вид

$$\Theta(\theta) = A\cos\alpha\theta + B\sin\alpha\theta, \quad \text{если } \lambda = \alpha^2 > 0, \tag{27a}$$

$$\Theta(\theta) = A + B\Theta, \quad \text{если } \lambda = 0, \tag{27b}$$

$$\Theta(\theta) = Ae^{\alpha\theta} + Be^{-\alpha\theta}, \quad \text{если } \lambda = -\alpha^2 < 0. \tag{27c}$$

Теперь мы применяем условие (24), из которого следует, что $\Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi)$; т. е. что $\Theta(\theta)$ имеет период 2π. В задачах 22 и 23 мы просим вас показать, что это так, только если $\lambda = n^2$ (n целое число) в (27a) или если $\lambda = 0$ и $B = 0$ в (27b). Таким образом, мы имеем собственные значения и соответствующие собственные функции

$$\lambda_0 = 0, \quad \Theta_0(\theta) = 1; \tag{28a}$$

$$\lambda_n = n^2, \quad \Theta_n(\theta) = A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta \tag{28b}$$

для $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Затем мы обращаем наше внимание на уравнение (25). При $\lambda_0 = 0$ оно сводится к уравнению $r^2R_0'' + rR_0' = 0$, общее решение которого имеет вид

$$R_0(r) = C_0 + D_0\ln r. \tag{29}$$

Конечно, мы хотим, чтобы функция $u(r, \theta)$ и, следовательно, $R(r)$, была непрерывна в $r = 0$; из этого следует, что $D_0 = 0$ в уравнении (29), так что $R_0(r) = C_0$. Тогда при $\lambda = \lambda_n = n^2$ уравнение (25) принимает вид

$$r^2R_n'' + rR_n' - n^2R_n = 0.$$

Подставляя пробное решение $R(r) = r^k$, мы находим, что $k = \pm n$, так что общее решение предыдущего уравнения имеет вид

$$R_n(r) = C_nr^n + \frac{D_n}{r^n}. \tag{30}$$

Из непрерывности в $r = 0$ тогда следует, что $D_n = 0$, так что $R_n(r) = C_nr^n$.

Наконец мы комбинируем (объединяем) результаты в уравнениях (28)–(30) и с учетом равенства $D_n \equiv 0$ получаем формальное решение в виде ряда вида

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(r)\Theta_n(\theta);$$

иными словами,

➤
$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta)r^n. \tag{31}$$

Чтобы удовлетворить граничному условию $u(a,\theta) = f(\theta)$, мы хотим, чтобы

$$u(a,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n a^n \cos n\theta + b_n a^n \sin n\theta)$$

был рядом Фурье функции $f(\theta)$ на интервале $[0, 2\pi]$. Следовательно, мы полагаем

➤
$$a_n = \frac{1}{\pi a^n}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta\, d\theta \qquad (n = 0, 1, 2, \dots) \tag{32a}$$

и

➤
$$b_n = \frac{1}{\pi a^n}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\theta\, d\theta \qquad (n = 1, 2, 3, \dots). \tag{32b}$$

Пример 3 Например, если $F(\theta) = T_0$ для $0 < \theta < \pi$ и $F(\theta) = -T_0$ для $\pi < \theta < 2\pi$, так что

$$F(\theta) = \frac{4T_0}{\pi}\sum_{n \text{ нечетное}} \frac{1}{n}\sin n\theta,$$

то $a_n = 0$ для всех $n \geqq 0$, $b_n = 0$ для n четных и $b_n = 4T_0/(\pi n a^n)$ для n нечетных. Так что из равенств (31) и (32) следует, что

$$u(r,\theta) = \frac{4T_0}{\pi}\sum_{n \text{ нечетное}} \frac{r^n}{na^n}\sin n\theta. \qquad \blacksquare$$

Предупреждение. В задачах Дирихле из этого раздела мы сконцентрировали внимание на температурных функциях с заданными граничными (краевыми) значениями. В случае пластины с *изолированным* краем, через который теплота течь не может, граничное (краевое, предельное) условие состоит в том, что производная функции $u(x, y)$ по нормали (по перпендикулярному направлению) к этому краю обращается в нуль. Рассмотрим, например, прямоугольную пластину на рис. 9.7.2. Если край $x = 0$ изолирован, то $u_x(0, y) \equiv 0$, тогда как если изолирован край $y = b$, то $u_y(x, b) \equiv 0$.

9.7. Задачи

В задачах 1–3 решите задачу Дирихле для прямоугольника $0 < x < a$, $0 < y < b$, состоящую из уравнения Лапласа $u_{xx} + u_{yy} = 0$ и данных условий на граничные (краевые) значения.

1. $u(x, 0) = u(x, b) = u(0, y) = 0$, $u(a, y) = g(y)$
2. $u(x, 0) = u(x, b) = u(a, y) = 0$, $u(0, y) = g(y)$
3. $u(x, 0) = u(0, y) = u(a, y) = 0$, $u(x, b) = f(x)$
4. Рассмотрим граничную (краевую) задачу (задачу, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения)

$$\begin{aligned} &u_{xx} + u_{yy} = 0;\\ &u_x(0, y) = u_x(a, y) = u(x, 0) = 0,\\ &u(x, b) = f(x), \end{aligned}$$

соответствующую прямоугольной пластине $0 < x < a$, $0 < y < b$ у которой изолированы стороны $x = 0$ и $x = a$. Получите решение

$$u(x, y) = \frac{a_0 y}{2b} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\cos \frac{n\pi x}{a}\right) \left(\frac{\sinh(n\pi y/a)}{\sinh(n\pi b/a)}\right),$$

где

$$a_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cos \frac{n\pi x}{a}\, dx \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \dots\ ).$$

(*Указание*. Сначала покажите, что λ_0 является собственным значением, причем $X_0(x) \equiv 1$ и $Y_0(y) = y$.)

В задачах 5 и 6 найдите то решение уравнения Лапласа $u_{xx} + u_{yy} = 0$ в прямоугольнике $0 < x < a$, $0 < y < b$, которое удовлетворяет заданным граничным условиям (см. задачу 4).

5. $u_y(x, 0) = u_y(x, b) = u(a, y) = 0$, $u(0, y) = g(y)$

6. $u_x(0, y) = u_x(a, y) = u_y(x, 0) = 0$, $u(x, b) = f(x)$

В задачах 7 и 8 найдите то решение уравнения Лапласа в полубесконечной ленте $0 < x < a$, $y > 0$, которое удовлетворяет данным граничным условиям и дополнительному условию: функция $u(x, y)$ ограничена при $y \to +\infty$.

7. $u(0, y) = u(a, y) = 0$, $u(x, 0) = f(x)$

8. $u_x(0, y) = u_x(a, y) = 0$, $u(x, 0) = f(x)$

9. Предположим, что $a = 10$ и $f(x) = 10x$ в задаче 8. Покажите, что

$$u(x, y) = 50 - \frac{400}{\pi^2} \sum_{n \text{ нечетное}} \frac{1}{n^2} e^{-n\pi y/10} \cos \frac{n\pi x}{10}.$$

Затем вычислите (с точностью до двух десятичных знаков) значения $u(0, 5)$, $u(5, 5)$ и $u(10, 5)$.

10. Край $x = a$ прямоугольной пластины $0 < x < a$, $0 < y < b$ изолирован, а на краях $x = 0$ и $y = 0$ поддерживается нулевая температура, причем $u(x, b) = f(x)$. Используйте расположенный по синусам ряд нечетного продолжения функции из задачи 21 из раздела 9.3 и получите решение в форме

$$u(x, y) = \sum_{n \text{ нечетное}} c_n \sin \frac{n\pi x}{2a} \sinh \frac{n\pi y}{2a}.$$

Затем найдите формулу для c_n.

11. Край $y = 0$ прямоугольной пластины $0 < x < a, 0 < y < b$ изолирован, а на краях $x = a$ и $y = b$ поддерживается нулевая температура, причем $u(0, y) = g(y)$. Используйте расположенный по косинусам ряд нечетного продолжения функции из задачи 22 из раздела 9.3 и найдите $u(x, y)$.

12. Вертикальное поперечное сечение длинной высокой стены толщиной 30 см имеет форму полубесконечной ленты $0 < x < 30$, $y > 0$. На краю $x = 0$ поддерживается нулевая температура, но край $x = 30$ изолирован. При условии $u(x, 0) = 25$, получите формулу

$$u(x, y) = \frac{100}{\pi} \sum_{n \text{ нечетное}} \frac{1}{n} e^{-n\pi y/60} \sin \frac{n\pi x}{60}$$

для установившейся температуры внутри стены.

В задачах 13–15 рассматривается полукруглая пластина радиуса a, показанная на рис. 9.7.8. Круговой край имеет заданную температуру $u(a, \theta) = f(\theta)$. В каждой задаче получите данный ряд для установившейся температуры $u(r, \theta)$, удовлетворяющей данным граничным условиям вдоль $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, и, кроме того, найдите формулу для коэффициентов c_n.

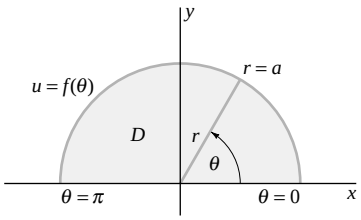


Рис. 9.7.8. Полукруглая пластина из задач 13–15

13. $u(r,0) = u(r,\pi) = 0$;

$$u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n \sin n\theta$$

14. $u_\theta(r,0) = u_\theta(r,\pi) = 0$;

$$u(r,\theta) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n \cos n\theta$$

15. $u(r,0) = u_\theta(r,\pi) = 0$;

$$u(r,\theta) = \sum_{n \text{ нечетное}} c_n r^{n/2} \sin \frac{n\theta}{2}$$

16. Рассмотрим задачу Дирихле для множества *внешних* точек круга $r = a$. Вам нужно найти решение уравнения

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0,$$

такое что $u(a,\theta) = f(\theta)$ и $u(r,\theta)$ ограничена при $r \to +\infty$. Получите ряд

$$u(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n}(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta),$$

и найдите формулы для коэффициентов $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$.

17. Скоростная гармоническая функция $u(r,\theta)$ для устойчивого потока идеальной жидкости вокруг цилиндра радиуса $r = a$ является решением граничной (краевой) задачи (задачи, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения)

$$\begin{aligned} &r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0 \qquad (r > a);\\ &u_r(a,\theta) = 0, \qquad u(r,\theta) = u(r,-\theta),\\ &\lim_{r\to\infty}[u(r,\theta) - U_0 r\cos\theta] = 0. \end{aligned}$$

(a) Разделяя переменные, получите решение

$$u(r,\theta) = \frac{U_0}{r}(r^2 + a^2)\cos\theta.$$

(b) Воспользовавшись полученным результатом, покажите, что компоненты скорости потока равны

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{U_0}{r^2}(r^2 - a^2\cos 2\theta)$$

и

$$u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{U_0}{r^2}a^2 \sin 2\theta.$$

Линии обтекания для этого потока жидкости вокруг цилиндра показаны на рис. 9.7.9.

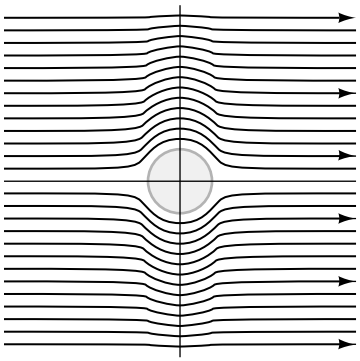


Рис. 9.7.9. Линии обтекания для потока идеальной жидкости вокруг цилиндра

Комментарий. *Линии тока на рис. 9.7.9 представляют собой кривые уровня функции $\psi(x, y)$, заданной в части (b) задачи 18. Неприятно писать компьютерную программу, которая позволяет вычертить такие кривые уровня. Гораздо проще вычертить некоторые решения дифференциального уравнения $dy/dx = u_y/u_x$. Мы сделали так для начальных условий $x_0 = -5$, $y_0 = -2{,}7$, $-2{,}5$, $-2{,}3$, $\ldots$, $2{,}5$, $2{,}7$. Решения были получены численными методами: мы использовали усовершенствованный метод Эйлера (раздел 2.5) с величиной шага* $0{,}02$.

18. **(a)** Покажите, что потенциал скорости в части (a) задачи 17 может быть записан в прямоугольных координатах в виде

$$u(x, y) = U_0 x \left(1 + \frac{a^2}{x^2 + y^2}\right).$$

(b) Функция тока для потока имеет вид

$$\psi(x, y) = U_0 y \left(\frac{a^2}{x^2 + y^2} - 1\right).$$

Покажите, что $\nabla u \cdot \nabla \psi \equiv 0$. Поскольку $\mathbf{v} = \nabla u$ представляет собой вектор скорости, из этого видно, что линии тока потока являются кривыми уровня функции $\psi(x, y)$.

В задачах 19–21 рассматривается твердый сферический шар радиуса $r = a$ повсюду нагретый до начальной температуры T_0. В момент времени $t = 0$ его упаковывают в лед, так что после этого температура на его поверхности при $r = a$ является нулевой. Его температура тогда зависит только от времени t и расстояния r от центра шара, так что мы пишем $u = u(r, t)$.

19. **(a)** Количество теплоты в сферической оболочке с внутренним радиусом r и внешним радиусом $r + \Delta r$ выражается формулой

$$Q(t) = \int_r^{r+\Delta r} c\delta u(x, t) \cdot 4\pi s^2 \, ds.$$

Покажите, что $Q'(t) = 4\pi c\delta r^2 u_t(\overline{r}, t)$ для некоторого $\overline{r}$ в интервале $(r, r + \Delta r)$. **(b)** Радиальный поток теплоты через ограничивающие сферические поверхности-оболочки, рассмотренные в части (a), равен $\phi = -Ku_r$. Выведите, что

$$Q'(t) = 4\pi K \left[(r + \Delta r)^2 u_r(r + \Delta r, t) - r^2 u_r(r, t)\right].$$

(c) Приравняйте значения $Q'(t)$ полученные в частях (a) и (b); затем возьмите предел при $\Delta r \to 0$ и получите уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right).$$

(d) Наконец, покажите, что это последнее уравнение эквивалентно

$$\frac{\partial}{\partial t}(ru) = k\,\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru).$$

20. Из части (d) задачи 19 следует, что $u(r,t)$ является решением граничной (краевой) задачи (задачи, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения)

$$\frac{\partial}{\partial t}(ru) = k\,\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru) \qquad (r < a);$$
$$u(a,t) = 0, \quad u(r,0) = T_0.$$

Покажите, что новая функция $v(r,t) = ru(r,t)$ является решением знакомой (рассмотренной в разделе 9.5) граничной (краевой) задачи (задачи, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения), и таким образом получите решение

$$u(r,t) = \frac{2aT_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{nr}\exp\left(-\frac{n^2\pi^2kt}{a^2}\right)\sin\frac{n\pi r}{a}.$$

21. **(a)** Рассмотрите решение задачи 20 и выведите из него, что температура в центре шара в момент времени t равна

$$u(0,t) = 2T_0\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\exp\left(-\frac{n^2\pi^2kt}{a^2}\right).$$

(b) Пусть $a = 30$ см и $T_0 = 100^\circ$C. Вычислите $u(0,t)$ через 15 минут, если шар сделан из железа, для которого $k = 0{,}15$ в единицах системы сантиметр–грамм–секунда (т. е. в системе СГС). (*Ответ*. Приблизительно 45°C.) **(c)** Если вы имеете доступ к программируемому калькулятору, повторно решите часть (b) для шара, сделанного из бетона, для которого $k = 0{,}005$ в единицах системы сантиметр–грамм–секунда (т. е. в системе СГС). Понадобится вычислить приблизительно 15 членов, чтобы показать, что $u = 100{,}00^\circ$C с точностью до двух десятичных знаков после запятой.

22. В этом разделе при обсуждении задачи Дирихле для кругового диска мы получили обыкновенное дифференциальное уравнение $\Theta'' + \lambda\Theta = 0$ с условием периодичности $\Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi)$. **(a)** Предположим, что $\lambda = \alpha^2 > 0$. Покажите, что общее решение

$$\Theta(\theta) = A\cos\alpha\theta + B\sin\alpha\theta$$

имеет период 2π, только если $\lambda = n^2$, где n — целое число. **(b)** В случае $\lambda = 0$ покажите, что общее решение

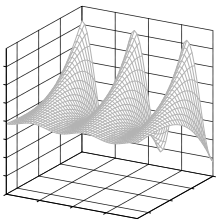
$$\Theta(\theta) = A\theta + B$$

является периодическим только если $A = 0$.

23. Если в задаче 22 $\lambda = -\alpha^2 < 0$, то общее решение дифференциального уравнения из этой задачи имеет вид

$$\Theta(\theta) = Ae^{\alpha\theta} + Be^{-\alpha\theta}.$$

Покажите, что эта функция не является периодической, если неверно, что $A = B = 0$.



ГЛАВА 10

Собственные значения и краевые (граничные) задачи

10.1. Задачи Штурма–Лиувилля и разложения по собственным функциям

В последних трех разделах главы 9 мы видели, что многочисленные различные граничные (краевые) задачи (задачи, в которых заданы граничные (предельные, или краевые) значения) всегда приводят — методом разделения переменных — к одному и тому же самому обыкновенному дифференциальному уравнению

➤ $$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \qquad (0 < x < L), \tag{1}$$

содержащему собственное значение λ, но с различными условиями в конечных точках, например

$$X(0) = X(L) = 0, \tag{2}$$

или

$$X'(0) = X'(L) = 0, \tag{3}$$

или

$$X(0) = X'(L) = 0 \tag{4}$$

в зависимости от первоначальных граничных условий.

Например, вспомните задачу (из раздела 9.5), в которой требовалось найти распределение температур $u(x,t)$ в стержне $0 \leqq x \leqq L$ при заданной начальной температуре $u(x,0) = f(x)$. Как граничная (краевая) задача (задача, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения), эта задача для стержня — та же самая, что и задача вычисления

температуры в большой плите, которая занимает область $0 \leqq x \leqq L$ в пространстве xyz. Если начальная температура стержня зависит только от x и не зависит от y и z, то, принимая условие $u(x,0) = f(x)$, мы знаем, что то же самое будет истинно и для температуры $u = u(x,t)$ стержня в момент времени t. Подставив

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

в уравнение теплопроводности

➤
$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

мы найдем, что $X(x)$ удовлетворяет условиям в конечных точках (2), если на сторонах $x = 0$ и $x = L$ плиты поддерживается нулевая температура, если же обе стороны изолированы, то выполняются условия (3), ну а если одна строна изолирована, а на другой поддерживается нулевая температура, то выполняются условия (4). Но если через каждую сторону теплота рассеивается в окружающую среду (в которой поддерживается нулевая температура), то в соответствии с законом охлаждения Ньютона (согласно задаче 23 из раздела 9.5) условия в конечных точках принимают форму

$$hX(0) - X'(0) = 0 = hX(L) + X'(L), \tag{5}$$

где h — неотрицательный коэффициент теплопередачи.

Дело в том, что, когда мы налагаем различные условия в конечных точках на решение уравнения (1), мы получаем различные задачи на собственные значения, и, следовательно, различные собственные значения $\{\lambda_n\}$ и различные собственные функции $\{X_n(x)\}$, которые используются в построении решения в виде формального степенного ряда

$$u(x,t) = \sum c_n X_n(x) T_n(t) \tag{6}$$

для граничной (краевой) задачи (задачи, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения). Заключительный шаг в этом построении состоит в том, чтобы выбрать коэффициент $\{c_n\}$ в уравнении (6) так, чтобы

$$u(x,0) = \sum c_n T_n(0) X_n(x) = f(x). \tag{7}$$

Таким образом, нам нужно, наконец, *разложить по собственным функциям* заданную функцию $f(x)$. Иными словами, нужно заданную функцию $f(x)$ выразить (в виде ряда) через собственные функций подходящей граничной (краевой) задачи (задачи, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения).

Задачи Штурма–Лиувилля

Чтобы унифицировать и обобщить метод разделения переменных, полезно сформулировать задачу на собственные значения общего вида, которая включает как частные случаи каждый из ранее упомянутых случаев. Уравнение (1) с y вместо X в качестве зависимой переменной может быть записано в форме

➤
$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] - q(x)y + \lambda r(x)y = 0, \tag{8}$$

где $p(x) = r(x) \equiv 1$ и $q(x) \equiv 0$. Действительно, в задаче 16 мы показываем, что по существу любое линейное дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y + \lambda D(x)y = 0$$

принимает вид (8) после умножения на подходящий множитель.

Пример 1 Если мы умножим параметрическое уравнение Бесселя

$$x^2y'' + xy' + (\lambda x^2 - n^2)y = 0 \qquad (x > 0)$$

порядка n на $1/x$, результат можно записать в виде уравнения

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dy}{dx}\right] - \frac{n^2}{x}y + \lambda xy = 0,$$

которое имеет форму (8) при $p(x) = r(x) = x$ и $q(x) = n^2/x$. ■

Теперь давайте на решения уравнения (8) в ограниченном открытом интервале (a, b) наложим однородные [линейные] условия в конечных точках в виде равенств

$$\alpha_1 y(a) - \alpha_2 y'(a) = 0, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \tag{9}$$

где коэффициенты α_1, α_2, β_1 и β_2 — константы. В дополнение к тому, что эти два условия однородны, они также *отделены* в том смысле, что одно из них содержит значения $y(x)$ и $y'(x)$ в одной конечной точке $x = a$, тогда как другое содержит значения в другой конечной точке $x = b$. Например, обратите внимание, что условия $y(a) = y'(b) = 0$ имеют форму (9) при $\alpha_1 = \beta_2 = 1$ и $\alpha_2 = \beta_1 = 0$.

Определение. Задача Штурма–Лиувилля

Задача Штурма–Лиувилля является задачей на значения в конечных точках вида

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] - q(x)y + \lambda r(x)y = 0 \qquad (a < x < b); \tag{8}$$

$$\alpha_1 y(a) - \alpha_2 y'(a) = 0, \qquad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \tag{9}$$

причем одновременно не могут быть нулями ни оба числа α_1 и α_2, ни оба числа β_1 и β_2, т. е. в каждой паре (α_1, α_2) и (β_1, β_2) хотя бы одно число должно быть отлично от нуля. Параметр λ в (8) как раз и есть "собственное значение", возможные (постоянные) значения которого разыскиваются.

Задачи Штурма–Лиувилля обобщают задачи на значения в конечных точках из раздела 3.8, решениями которых являются косинусы и синусы. Они названы по имени французских математиков Жака Шарля Франсуа Штурма (1803–1855) и Жозефа Лиувилля (1809–1882), которые исследовали такие задачи в 1830-х годах.

Пример 2 Мы получим различные задачи Штурма–Лиувилля, если для того же самого дифференциального уравнения

$$y'' + \lambda y = 0 \qquad (\text{для } 0 < x < L)$$

поставим различные однородные условия в конечных точках

- $y(0) = y(L) = 0$ (где $\alpha_1 = \beta_1 = 1$ и $\alpha_2 = \beta_2 = 0$),
- $y'(0) = y'(L) = 0$ (где $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ и $\alpha_2 = \beta_2 = 1$),
- $y(0) = y'(L) = 0$ (где $\alpha_1 = \beta_2 = 1$ и $\alpha_2 = \beta_1 = 0$). ■

Обратите внимание, что задача Штурма–Лиувилля в (8)–(9) всегда имеет нулевое решение $y(x) \equiv 0$. Мы ищем значения λ — **собственные значения**, — при которых эта задача имеет *нетривиальное* действительное решение (**собственную функцию**), и для каждого собственного значения — соответствующую ему собственную функцию (или собственные функции). Обратите внимание, что любая функция, равная произведению отличного от нуля числа на собственную функцию, также будет собственной функцией. Следующая теорема указывает достаточные условия, при выполнении которых задача (8)–(9) имеет бесконечную последовательность $\{\lambda_n\}_1^\infty$ неотрицательных собственных значений, причем для каждого собственного значения λ_n имеется (с точностью до постоянного числового множителя) точно одна соответствующая ему собственная функция $y_n(x)$. Доказательство этой теоремы приведено в главе 9 книги Г. П. Толстова, посвященной рядам Фурье (G. P. Tolstov, *Fourier Series* (New York: Dover, 1976))[1].

Теорема 1 Собственные значения задачи Штурма–Лиувилля

Предположим, что функции $p(x), p'(x), q(x)$ и $r(x)$ в уравнении (8) непрерывны на интервале $[a, b]$, причем $p(x) > 0$ и $r(x) > 0$ в каждой точке интервала $[a, b]$. Тогда собственные значения задачи Штурма–Лиувилля (8)–(9) составляют возрастающую последовательность

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots < \lambda_{n-1} < \lambda_n < \cdots \tag{10}$$

вещественных чисел, причем

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty. \tag{11}$$

С точностью до постоянного множителя только одна (т. е. единственная с точностью до постоянного множителя) собственная функция $y_n(x)$ связана с каждым собственным значением λ_n. Кроме того, если $q(x) \geqq 0$ на интервале $[a, b]$ и все коэффициенты α_1, α_2, β_1 и β_2 в (9) неотрицательны, то и все собственные значения неотрицательны. ▲

Предупреждение. Важно соблюдать знаки в (8) и (9) при проверке условий теоремы 1. Иногда задачу Штурма–Лиувилля в (8)–(9) называют **регулярной**, если она удовлетворяет условиям теоремы 1; в противном случае ее называют **особой (сингулярной)**. В этом разделе мы ограничим наше внимание регулярной задачей Штурма–Лиувилля. Особые (сингулярные) задачи Штурма–Лиувилля, связанные с уравнением Бесселя, появятся в разделе 10.4.

[1] Русский оригинал: Толстов Г. П. Ряды Фурье. 2-е изд., М., 1960. — *Примеч. ред.*

Пример 3 В примере 3 из раздела 3.8 мы видели, что задача Штурма–Лиувилля

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0 \qquad (0 < x < L); \\ y(0) &= 0, \qquad y(L) = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

имеет собственные значения $\lambda_n = n^2\pi^2/L^2$ и соответствующие собственные функции $y_n(x) = \sin(n\pi x/L)$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$. Там мы должны были отдельно рассмотреть случаи $\lambda = -\alpha^2 < 0$, $\lambda = 0$ и $\lambda = \alpha^2 > 0$. Здесь $p(x) = r(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 0$, $\alpha_1 = \beta_1 = 1$ и $\alpha_2 = \beta_2 = 0$, так что мы знаем из теоремы 1, что задача (12) имеет только неотрицательные собственные значения. Поэтому нам пришлось бы рассмотреть только два случая $\lambda = 0$ и $\lambda = \alpha^2 > 0$, если бы мы хотели решить эту задачу заново. ■

Мы также знакомы (из задач в разделе 9.5) с задачей Штурма–Лиувилля

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0 \qquad (0 < x < L); \\ y'(0) &= 0, \qquad y'(L) = 0, \end{aligned} \tag{13}$$

которая имеет собственные значения $\lambda_0 = 0$, $\lambda_n = n^2\pi^2/L^2$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ и соответствующие им собственные функции $y_0(x) \equiv 1$, $y_n(x) = \cos(n\pi x/L)$. Мы будем обычно писать $\lambda_0 = 0$, если 0 является собственным значением, а в противном случае наименьшее собственное значение обозначаем через λ_1; таким образом, λ_1 всегда обозначает наименьшее положительное собственное значение.

Пример 4 Найдем собственные значения и соответствующие им собственные функции задачи Штурма–Лиувилля

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0 \qquad (0 < x < L); \\ y'(0) &= 0, \qquad y(L) = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Решение Эта задача Штурма–Лиувилля удовлетворяет условиям теоремы 1 при $\alpha_1 = \beta_2 = 0$ и $\alpha_2 = \beta_1 = 1$, так что никаких отрицательных собственных значений нет. Если $\lambda = 0$, то $y(x) = Ax + B$, и, таким образом, $y'(0) = A = 0$ и $y(L) = B = 0$. Поэтому 0 не является собственным значением. Если $\lambda = \alpha^2$, то

$$y(x) = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x \quad \text{и} \quad y'(x) = -A\alpha\sin\alpha x + B\alpha\cos\alpha x.$$

Так что из $y'(0) = 0$ следует, что $B = 0$, а из этого следует, что $y(L) = A\cos\alpha L = 0$, а затем — что αL — *нечетное* кратное $\pi/2$: $\alpha L = (2n - 1)\pi/2$. Таким образом, мы нашли собственные значения и соответствующие собственные функции:

$$\lambda_n = \alpha_n^2 = \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4L^2} \quad \text{и} \quad y_n(x) = \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2L}$$

для $n = 1, 2, 3, \dots$. ■

Пример 5 Найдем собственные значения и соответствующие собственные функции задачи Штурма–Лиувилля

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0 \qquad (0 < x < L); \\ y(0) &= 0, \qquad hy(L) + y'(L) = 0 \quad (h > 0). \end{aligned} \tag{15}$$

Решение Эта задача удовлетворяет условиям теоремы 1 при $\alpha_1 = \beta_2 = 1$, $\alpha_2 = 0$ и $\beta_1 = h > 0$, так что никаких отрицательных собственных значений нет. Если $\lambda = 0$, то $y(x) = Ax + B$; таким образом, $y(0) = B = 0$. Тогда

$$hy(L) + y'(L) = h \cdot AL + A = A \cdot (hL + 1) = 0,$$

а из этого следует, что также и $A = 0$. Таким образом, 0 не является собственным значением.

Если $\lambda = \alpha^2$, то

$$y(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x.$$

Следовательно, $y(0) = A = 0$, так что

$$y(x) = B \sin \alpha x \quad \text{и} \quad y'(x) = B\alpha \cos \alpha x.$$

Поэтому

$$hy(L) + y'(L) = hB \sin \alpha L + B\alpha \cos \alpha L = 0.$$

Если $B \neq 0$, то

$$\operatorname{tg} \alpha L = -\frac{\alpha}{h} = -\frac{\alpha L}{hL}. \tag{16}$$

Таким образом, $\beta = \alpha L$ — [положительное] решение (корень) уравнения

$$\operatorname{tg} x = -\frac{x}{hL}. \tag{17}$$

Решения уравнения (17) — это точки пересечения графиков $y(x) = -\operatorname{tg} x$ и $y(x) = x/hL$, как показано на рис. 10.1.1. Из рисунка очевидно, что существует бесконечная последовательность положительных корней $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ и что при достаточно большом n β_n только немного больше, чем $(2n-1)\pi/2$. В таблице на рис. 10.1.2 приведены первые восемь решений уравнения (17) для случая $hL = 1$. Во всяком случае, собственные значения и соответствующие им собственные функции задачи (15) выражаются формулами

$$\lambda_n = \alpha_n^2 = \frac{\beta_n^2}{L^2}, \quad y_n(x) = \sin \alpha_n x = \sin \frac{\beta_n x}{L} \tag{18}$$

для $n = 1, 2, 3, \ldots$. Уравнение (17) появляется довольно часто в некоторых приложениях (механические колебания и задачи теплопроводности — только два из многих примеров), и его решения для различных значений hL сведены в таблицу 4.19 знаменитого справочника (издания 1965 года) по специальным функциям М. Абрамовица и И. Стиган (Abramowitz and Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (New York: Dover, 1965)). ■

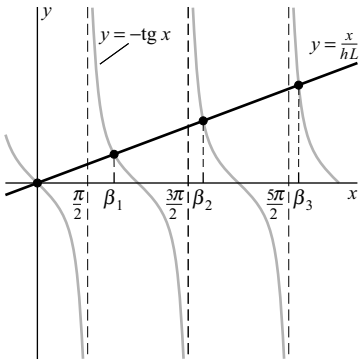


Рис. 10.1.1. Решение уравнения (17) геометрическими методами

n	x_n	$(2n-1)\pi/2$
1	2,0288	1,5708
2	4,9132	4,7124
3	7,9787	7,8540
4	11,0855	10,9956
5	14,2074	14,1372
6	17,3364	17,2788
7	20,4692	20,4204
8	23,6043	23,5619

Рис. 10.1.2. Приближенные значения первых восьми положительных решений уравнения $\operatorname{tg} x = -x$

Ортогональные собственные функции

В разделе 9.1 мы установили, что знакомые формулы для коэффициентов в ряде Фурье следуют из ортогональности функций косинус и синус. Точно так же разложение заданной функции в ряд по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля зависит от критически важного свойства ортогональности этих собственных функций. Функции $\phi(x)$ и $\psi(x)$ называются **ортогональными** на интервале $[a, b]$ относительно **весовой функции** $r(x)$, если

$$\int_a^b \phi(x)\psi(x)r(x)\,dx = 0. \tag{19}$$

Следующая теорема подразумевает, что любые две собственные функции регулярной задачи Штурма–Лиувилля, которые соответствуют различным собственным значениям, ортогональны относительно весовой функции $r(x)$ в уравнении (8).

Теорема 2 Ортогональность собственных функций

Предположим, что функции p, q и r в задаче Штурма–Лиувилля в равенствах (8)–(9) удовлетворяют условиям теоремы 1 и пусть $y_i(x)$ и $y_j(x)$ — собственные функции, соответсвующие различным собственным значениям λ_i и λ_j. Тогда

$$\int_a^b y_i(x)y_j(x)r(x)\,dx = 0. \tag{20}$$

Доказательство. Мы начинаем с уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_i}{dx}\right] - q(x)y_i + \lambda_i r(x)y_i = 0, \\ \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_j}{dx}\right] - q(x)y_j + \lambda_j r(x)y_j = 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Из этих уравнений следует, что λ_i, y_i и λ_j, y_j — пары, состоящие из собственного значения и собственной функции. Если мы умножим первое уравнение на y_j, а второе на y_i, а затем вычтем результаты, мы получим

$$y_j \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_i}{dx}\right] - y_i \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_j}{dx}\right] + (\lambda_i - \lambda_j) r(x) y_i y_j = 0.$$

Следовательно,

$$(\lambda_i - \lambda_j) y_i y_j r(x) = y_i \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_j}{dx}\right] - y_j \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_i}{dx}\right] =$$

$$= \frac{d}{dx}\left[p(x)\left(y_i \frac{dy_j}{dx} - y_j \frac{dy_i}{dx}\right)\right],$$

последнее из этих двух равенств поддается проверке прямым дифференцированием. Поэтому интегрирование от $x = a$ до $x = b$ дает

$$(\lambda_i - \lambda_j)\int_a^b y_i(x) y_j(x) r(x)\, dx = \Big[p(x)\left(y_i(x) y_j'(x) - y_j(x) y_i'(x)\right)\Big]_a^b. \tag{22}$$

Из условий в конечных точках (9) мы имеем

$$\alpha_1 y_i(a) - \alpha_2 y_i'(a) = 0 \quad \text{и} \quad \alpha_1 y_j(a) - \alpha_2 y_j'(a) = 0.$$

Поскольку α_1 и α_2 не являются оба нулевыми, т. е. хотя бы одно из них отлично от нуля, то из этого следует, что детерминант, составленный из коэффициентов, должен быть нулевым:

$$y_i(a) y_j'(a) - y_j(a) y_i'(a) = 0.$$

Точно так же из второго условия в конечных точках в (9) следует, что

$$y_i(b) y_j'(b) - y_j(b) y_i'(b) = 0.$$

Таким образом, правая часть в уравнении (22) обращается в нуль. Поскольку $\lambda_i \neq \lambda_j$, отсюда следует результат (20) и доказательство закончено. ▲

Разложения по собственным функциям

Теперь предположим, что функция $f(x)$ может быть представлена в интервале $[a, b]$ **рядом по собственным функциям**

➤
$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m y_m(x), \tag{23}$$

где функции $y_1, y_2, y_3, \ldots$ — собственные функции регулярной задачи Штурма–Лиувилля в уравнениях (8)–(9). Чтобы определить коэффициенты $c_1, c_2, c_3, \ldots$, мы обобщим метод, с помощью которого мы определили обыкновенные коэффициенты Фурье в разделе 9.1. Сначала мы умножаем каждую часть уравнения (23) на $y_n(x) r(x)$, а затем интегрируем от

$x = a$ до $x = b$. Согласно предположению о допустимости почленного интегрирования, мы получаем

$$\int_a^b f(x)y_n(x)r(x)\,dx = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \int_a^b y_m(x)y_n(x)r(x)\,dx. \tag{24}$$

Однако из-за ортогональности, выраженной равенством (20), в правой части в равенстве (24) остается только один отличный от нуля член — тот, для которого $m = n$. Таким образом, равенство (24) принимает вид

$$\int_a^b f(x)y_n(x)r(x)\,dx = c_n \int_a^b [y_n(x)]^2 r(x)\,dx,$$

и поэтому

➤
$$c_n = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)y_n(x)r(x)\,dx}{\displaystyle\int_a^b [y_n(x)]^2 r(x)\,dx}. \tag{25}$$

Мы поэтому *определяем* ряд по собственным функциям (23), выражающий $f(x)$ через собственные функции данной задачи Штурма–Лиувилля, выбирая коэффициенты так, как указано в равенстве (25).

Предположим, например, что задача Штурма–Лиувилля имеет знакомый вид

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0 \qquad (0 < x < \pi); \\ y(0) &= y(\pi) = 0, \end{aligned} \tag{26}$$

для которого $r(x) \equiv 1$, а собственные функции равны $y_n(x) = \sin nx$ для $n = 1, 2, 3, \ldots$. Тогда уравнение (25) дает

$$c_n = \frac{\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx}{\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2 nx\,dx} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,$$

потому что

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Это — знакомая формула для коэффициентов расположенного по синусам ряда Фурье, так что ряд по собственным функциям в (23) — это просто уже знакомый нам расположенный по синусам ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx$$

функции $f(x)$ на интервале $[0, \pi]$.

Следующая теорема, сформулированная без доказательства, обобщает теорему сходимости ряда Фурье из раздела 9.2.

Теорема 3 Сходимость ряда по собственным функциям

Пусть y_1, y_2, y_3, ... — собственные функции регулярной задачи Штурма–Лиувилля на интервале $[a, b]$. Если функция $f(x)$ кусочно гладка на интервале $[a, b]$, то ряд по собственным функциям в равенстве (23) сходится для $a < x < b$ к значению $f(x)$ везде, где f непрерывна, и к среднему арифметическому $\frac{1}{2}\,[f(x+) + f(x-)]$ правого и левого пределов в каждой точке разрыва. ▲

Пример 6 Для задачи Штурма–Лиувилля $y'' + \lambda y = 0\,(0 < x < L)$, $y'(0) = y(L) = 0$ из примера 4 мы нашли собственные функции $y_n(x) = \cos(2n - 1)\pi x/(2L)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Соответствующий ряд по собственным функциям для функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2L}, \tag{27}$$

причем

$$c_n = \frac{\displaystyle\int_0^L f(x) \cos\left([2n-1]\pi x/2L\right)\, dx}{\displaystyle\int_0^L \cos^2\left([2n-1]\pi x/2L\right)\, dx} =$$

$$= \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{(2n-1)\pi x}{2L}\, dx, \tag{28}$$

потому что

$$\int_0^L \cos^2 \frac{(2n-1)\pi x}{2L}\, dx = \frac{L}{2}.$$

Таким образом, ряд в равенстве (27) представляет собой расположенный по косинусам ряд нечетного продолжения функции, который был определен в задаче 22 из раздела 9.3. Точно так же задача Штурма–Лиувилля $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = y'(L) = 0$ приводит к расположенному по синусам ряду

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L}, \quad c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{(2n-1)\pi x}{2L}\, dx \tag{29}$$

нечетного продолжения функции (ряд такого типа был определен в задаче 21 из раздела 9.3). ■

Пример 7 Представим функцию $f(x) = A$ (константа) для $0 < x < 1$ в виде ряда по собственным функциям задачи Штурма–Лиувилля

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0 \qquad (0 < x < 1); \\ y(0) &= 0, \qquad y(1) + 2y'(1) = 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Решение Сравнивая (30) с (15), мы видим, что это задача Штурма–Лиувилля из примера 5 при $L = 1$ и $h = \frac{1}{2}$. Поэтому из (17) и (18) следует, что собственными функциями данной задачи являются функции $y_n(x) = \sin \beta_n x$, где $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} x = -2x$. Следовательно, коэффициенты в искомом ряде выражаются формулой

$$c_n = \frac{\int_0^1 A \sin \beta_n x \, dx}{\int_0^1 \sin^2 \beta_n x \, dx}. \tag{31}$$

Теперь $\int_0^1 A \sin \beta_n x \, dx = A(1 - \cos \beta_n)/\beta_n$ и

$$\int_0^1 \sin^2 \beta_n x \, dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(1 - \cos 2\beta_n x) \, dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2\beta_n} \sin 2\beta_n x\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sin \beta_n \cos \beta_n}{\beta_n}\right).$$

Следовательно,

$$\int_0^1 \sin^2 \beta_n x \, dx = \frac{1}{2}\left(1 + 2\cos^2 \beta_n\right).$$

На последнем шаге мы использовали то, что из уравнения (17) следует, что $(\sin \beta_n)/\beta_n = -2 \cos \beta_n$. Подставляя эти значения для интегралов в (31), мы получаем ряд по собственным функциям

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A(1 - \cos \beta_n)}{\beta_n(1 + 2\cos^2 \beta_n)} \sin \beta_n x. \tag{32}$$

■

Замечание. Основные этапы исследования ряда по собственным функциям в равенстве (32) численными методами выделены в вычислительном проекте для этого раздела. ■

Резюме

Согласно теоремам этого раздела каждая регулярная задача Штурма–Лиувилля имеет следующие три свойства.

- Она имеет бесконечную последовательность собственных значений, расходящихся к бесконечности (теорема 1).
- Собственные функции ортогональны при соответствующем выборе весовой функции (теорема 2).
- Любая кусочно гладкая функция может быть представлена рядом по собственным функциям (теорема 3).

В прикладной математике есть и другие типы задач на собственные значения, которые также обладают этими тремя важными свойствами. Некоторые изолированные примеры появятся в последующих разделах, хотя мы ограничим наше внимание в значительной степени именно приложениями задач Штурма–Лиувилля.

10.1. Задачи

В задачах к разделу 3.8 важную роль играют собственные значения и собственные функции и потому их можно использовать также и здесь. В задачах 1–5 проверьте, что собственные значения и собственные функции указанной задачи Штурма–Лиувилля равны указанным.

1. $y'' + \lambda y = 0$, $y'(0) = y'(L) = 0$; $\lambda_0 = 0$, $y_0(x) \equiv 1$ и $\lambda_n = n^2\pi^2/L^2$, $y_n(x) = \cos n\pi x/L$

2. $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = y'(L) = 0$; $\lambda_n = (2n-1)^2\pi^2/4L^2$, $y_n(x) = \sin(2n-1)\pi x/2L$, $n \geqq 1$

3. $y'' + \lambda y = 0$, $y'(0) = hy(L) + y'(L) = 0$ $(h > 0)$; $\lambda_n = \beta_n^2/L^2$, $y_n(x) = \cos \beta_n x/L$ $(n \geqq 1)$, где $\beta_n - n$-й положительный корень уравнения $\operatorname{tg} x = hL/x$. Вычертите эскизы графиков функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = hL/x$, чтобы оценить значение β_n для больших n.

4. $y'' + \lambda y = 0$, $hy(0) - y'(0) = y(L) = 0$ $(h > 0)$; $\lambda_n = \beta_n^2/L^2$, $y_n(x) = \beta_n \cos \beta_n x/L + hL \sin \beta_n x/L$ $(n \geqq 1)$, где $\beta_n - n$-й положительный корень уравнения $\operatorname{tg} x = -x/hL$.

5. $y'' + \lambda y = 0$, $hy(0) - y'(0) = hy(L) + y'(L) = 0$ $(h > 0)$; $\lambda_n = \beta_n^2/L^2$, $y_n(x) = \beta_n \cos \beta_n x/L + hL \sin \beta_n x/L$ $(n \geqq 1)$, где $\beta_n - n$-й положительный корень уравнения $\operatorname{tg} x = 2hLx/(x^2 - h^2L^2)$. Оцените β_n для больших n, сделав набросок графиков функции $y = 2hL \operatorname{ctg} x$ и гиперболы $y = (x^2 - h^2L^2)/x$.

6. Покажите, что задача Штурма–Лиувилля $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = y'(L) = 0$ приводит к расположенному по синусам ряду нечетного продолжения функции в уравнении (29) (см. задачу 2).

В задачах 7–10 представьте заданную функцию $f(x)$ в виде ряда по собственным функциям указанной задачи Штурма–Лиувилля.

7. $f(x) \equiv 1$; задача Штурма–Лиувилля из примера 5

8. $f(x) \equiv 1$; задача Штурма–Лиувилля из задачи 3

9. $f(x) = x$; задача Штурма–Лиувилля из примера 5 при $L = 1$

10. $f(x) = x$; задача Штурма–Лиувилля из задачи 3 при $L = 1$

В задачах 11–14 рассматривается регулярная задача Штурма–Лиувилля

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0 \qquad (0 < x < L); \\ y(0) &= 0, \qquad hy(L) - y'(L) = 0, \end{aligned} \tag{33}$$

где $h > 0$. Обратите внимание, что теорема 1 не исключает наличие отрицательных собственных значений.

11. Покажите, что $\lambda_0 = 0$ — собственное значение тогда и только тогда, когда $hL = 1$, причем в этом случае соответствующая собственная функция равна $y_0(x) = x$.

12. Покажите, что задача (33) имеет единственное отрицательное собственное значение λ_0 тогда и только тогда, когда $hL > 1$, причем в этом случае $\lambda_0 = -\beta_0^2/L^2$ и $y_0(x) = \sinh \beta_0 x/L$, где β_0 — положительный корень уравнения $\tanh x = x/hL$. (*Указание.* Сделайте набросок графиков функций $y = \tanh x$ и $y = x/hL$.)

13. Покажите, что положительные собственные значения и соответствующие собственные функции задачи (33) имеют вид $\lambda_n = \beta_n^2/L^2$ и $y_n(x) = \sin \beta_n x/L$ $(n \geqq 1)$, где $\beta_n - n$-й положительный корень уравнения $\operatorname{tg} x = x/hL$.

14. Предположим, что $hL = 1$ в (33) и что функция $f(x)$ является кусочно гладкой. Покажите, что

$$f(x) = c_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{\beta_n x}{L},$$

где $\{\beta_n\}_1^\infty$ — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} x = x$ и

$$c_0 = \frac{3}{L^3} \int_0^L x f(x)\, dx,$$
$$c_n = \frac{2}{L \sin^2 \beta_n} \int_0^L f(x) \sin \frac{\beta_n x}{L}\, dx.$$

15. Покажите, что собственные значения и собственные функции задачи Штурма–Лиувилля

$$y'' + \lambda y = 0 \qquad (0 < x < 1);$$
$$y(0) + y'(0) = 0, \qquad y(1) = 0$$

выражаются формулами $\lambda_0 = 0$, $y_0(x) = x - 1$ и

$$\lambda_n = \beta_n^2, \quad y_n(x) = \beta_n \cos \beta_n x - \sin \beta_n x$$

для $n \geqq 1$, где $\{\beta_n\}_1^\infty$ — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} x = x$.

16. Начав с уравнения

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y + \lambda D(x)y = 0,$$

сначала разделите обе его части на $A(x)$, а затем умножьте на

$$p(x) = \exp\left(\int \frac{B(x)}{A(x)}\, dx\right).$$

Покажите, что получившееся уравнение может быть написано в виде Штурма–Лиувилля

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] - q(x)y + \lambda r(x)y = 0,$$

где $q(x) = -p(x)C(x)/A(x)$ и

$$r(x) = p(x)D(x)/A(x).$$

Нагруженная однородная балка

Рассмотрим однородную балку с [направленной вниз] нагрузкой $w(x)$. Функция $y(x)$, выражающая отклонение такой балки, удовлетворяет уравнению четвертого порядка

$$EIy^{(4)} = w(x)$$

для $0 < x < L$ и следующим условиям в конечных точках:

- $y = y'' = 0$ *на подвешенном (свободно опертом или шарнирно закрепленном) конце;*
- $y = y' = 0$ *на фиксированном (встроенном, заделанном) конце;*
- $y'' = y^{(3)} = 0$ *на свободном конце.*

В случае, если каждый конец является подвешенным (свободно опертым или шарнирно закрепленным), решение $y(x)$ можно найти с помощью метода рядов Фурье, обсуждавшегося в разделе 9.4, т. е. подстановкой ряда Фурье

$$y(x) = \sum b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

в дифференциальное уравнение

$$EIy^{(4)} = w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} \tag{34}$$

(где c_n — n-й коэффициент расположенного по синусам ряда Фурье функции $w(x)$) для последующего определения коэффициентов $\{b_n\}$.

17. Предположим, что w постоянно в уравнении (34). Примените описанный здесь метод, чтобы получить функцию, выражающую отклонение

$$y(x) = \frac{4wL^4}{EI\pi^5} \sum_{n \text{ нечетное}} \frac{1}{n^5} \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

18. Предположим, что $w = bx$ в (34). Получите функцию, выражающую отклонение

$$y(x) = \frac{2bL^5}{EI\pi^5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^5} \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Метод, используемый в задачах 17 и 18, приводит к успеху потому, что функции $\sin(n\pi x/L)$ удовлетворяют условиям подвешенности (или шарнирного закрепления) на обоих концах $y(0) = y''(0) = y(L) = y''(L) = 0$, таким же условиям, которым должно удовлетворять и решение $y(x)$.

Если вместо этого оба конца балки фиксированы, то вместо синусоидальных функций мы можем использовать собственные функции задачи

$$\begin{aligned} y^{(4)} - \lambda y = 0 \qquad & (0 < x < L); \\ y(0) = y'(0) = 0, \qquad & y(L) = y'(L) = 0, \end{aligned} \tag{35}$$

потому что эти собственные функции удовлетворяют условиям закрепленности на обеих концах (т. е. в обоих конечных точках). Все собственные значения этой задачи положительны и, согласно задачи 22, соответствующие собственные функции ортогональны с весовой функцией $r(x) \equiv 1$. Следовательно, мы можем написать

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x), \quad c_n = \frac{\int_0^L w(x) y_n(x)\, dx}{\int_0^L [y_n(x)]^2\, dx}, \tag{36}$$

согласно аналогу теоремы 3, который справедлив для задачи (35). Если мы обозначим $\lambda = \alpha^4$, то $y_n(x)$ примет вид

$$y(x) = A \cosh \alpha x + B \sinh \alpha x + C \cos \alpha x + D \sin \alpha x, \tag{37}$$

где $\alpha = \alpha_n$, поэтому из этого следует, что $y_n^{(4)}(x) = \alpha_n^4 y_n(x)$. Когда мы подставляем ряд $y(x) = \sum b_n y_n(x)$ (который, очевидно, удовлетворяет условиям закрепленности на обоих концах (т. е. в обоих конечных точках) — условиям в (35)), мы получим

$$EI \sum_{n=1}^{\infty} b_n \alpha_n^4 y_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x).$$

Следовательно, $EIb_n\alpha_n^4 = c_n$, так что функция, выражающая отклонение балки, имеет вид

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{EI\alpha_n^4} y_n(x). \tag{38}$$

В следующих задачах рассматриваются собственные значения и собственные функции задачи (35) и подобных задач.

19. Начните с общего решения (37) уравнения $y^{(4)} - \alpha^4 y = 0$. Сначала обратите внимание, что из $y(0) = y'(0) = 0$ следует, что $C = -A$ и $D = -B$. Затем наложите условия $y(L) = y'(L) = 0$ и получите два однородных линейных уравнения, содержащие A и B. Следовательно, детерминант из коэффициентов A и B должен обратиться в нуль; выведите из этого, что $\cosh \alpha L \cos \alpha L = 1$. Заключите, что n-е собственное значение равно $\lambda_n = \beta_n^4/L^4$, где $\{\beta_n\}_1^\infty$ — положительные корни уравнения $\cosh x \cos x = 1$ (рис. 10.1.3). Наконец, покажите, что соответствующая собственная функция имеет вид

$$y_n(x) = (\sinh \beta_n - \sin \beta_n)\left(\cosh \frac{\beta_n x}{L} - \cos \frac{\beta_n x}{L}\right) -$$

$$- (\cosh \beta_n - \cos \beta_n)\left(\sinh \frac{\beta_n x}{L} - \sin \frac{\beta_n x}{L}\right).$$

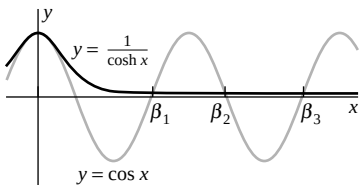


Рис. 10.1.3. Решения уравнения $\cosh x \cos x = 1$ (на графике масштаб по осям не соблюдается)

20. Для случая консоли (балка, один конец которой подвешен (или закреплен на шарнире), а второй свободен), мы должны решить задачу на собственные значения

$$y^{(4)} - \lambda y = 0 \qquad (0 < x < L);$$
$$y(0) = y'(0) = 0, \qquad y''(L) = y^{(3)}(L) = 0.$$

Приступая к решению, как и в задаче 19, покажите, что n-е собственное значение равно $\lambda_n = \beta_n^4/L^4$, где $\{\beta_n\}_1^\infty$ — положительные корни уравнения $\cosh x \cos x = -1$. Затем найдите соответствующую собственную функцию.

21. Рассмотрим задачу на собственные значения

$$y^{(4)} - \lambda y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 0 = y(L) = y''(L),$$

соответствующую балке, один конец которой закреплен (заделан), а второй лежит на шарнирной опоре. Покажите, что n-е собственное значение равно $\lambda_n = \beta_n^4/L^4$, где $\{\beta_n\}_1^\infty$ — положительные корни уравнения $\tanh x = \operatorname{tg} x$.

22. Предположим, что $y_m^{(4)} = \lambda_m y_m$ и $y_n^{(4)} = \lambda_n y_n$. Примените метод, который использовался при доказательстве теоремы 2, и дважды проинтегрируйте по частям, чтобы показать, что

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_0^L y_m(x)y_n(x)\,dx = \left[y_n(x)\frac{d^3y_m}{dx^3} - y_m(x)\frac{d^3y_n}{dx^3} - \frac{dy_n}{dx}\frac{d^2y_m}{dx^2} + \frac{dy_m}{dx}\frac{d^2y_n}{dx^2}\right]_0^L.$$

Отсюда выведите, что если каждое условие в конечной точке имеет вид $y = y' = 0$, $y = y'' = 0$ либо $y'' = y^{(3)} = 0$, то y_m и y_n ортогональны, если $\lambda_m \neq \lambda_n$.

10.1. Приложение. Численные методы разложения по собственным функциям

Мы с помощью пакета MATLAB демонстрируем основные численные методы исследования разложения в ряд по собственным функциям

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-\cos\beta_n)}{\beta_n(1+2\cos^2\beta_n)}\sin\beta_n x \tag{1}$$

для $0 < x < 1$. (Мы взяли $A = 1$ в равенстве (32) из этого раздела.) По приведенным здесь образцам совсем несложно составить аналогичные программы для *Maple* и *Mathematica*.

В решении примера 7 мы видели, что значения $\{\beta_n\}_1^\infty$ в уравнении (1) являются положительными решениями уравнения $\operatorname{tg} x = -2x$. Кроме того, как показано на рис. 10.1.1 (для подобного уравнения $\operatorname{tg} x = -x$), значение β_n (для большого n) только немного больше, чем $(2n-1)\pi/2$. Но из-за разрывов функции тангенс около этих решений для автоматического поиска корня лучше переписать наше уравнение для собственных значений в форме

$$\sin x + 2x\cos x = 0. \tag{2}$$

Тогда команда пакета MATLAB

```
b = fsolve('sin(x)+2*x.*cos(x)', pi/2+0.1+(0:pi:99*pi));
```

быстро находит первые 100 значений β_n (рис. 10.1.4). (Мы задали вектор

$$\mathrm{x}_0 = \frac{\pi}{2} + 0{,}1 + \begin{bmatrix} 0 & \pi & 2\pi & 3\pi & \dots & 99\pi \end{bmatrix}$$

100 начальных приближений.) Команды

```
x = 0 : 1/200 : 1;
for n = 1 : 4
  plot(x, sin(b(n)*x)
end
```

чертят график первых четырех собственных функций (рис. 10.1.5).

Вы можете найти разность между последующим и предыдущим корнями. Для этого достаточно применить команду `diff(b)` пакета MATLAB. Этим вы проверите, что $\beta_n - \beta_{n-1} \approx 3{,}1416$ для $n \geqq 65$. Таким образом, последовательные собственные значения, действительно отстоят одно от другого на π. Команда

n	β_n
1	1,8366
2	4,8158
3	7,9171
4	11,0408
5	14,1724
6	17,3076
7	20,4448
8	23,5831
9	26,7222
10	29,8619

Рис. 10.1.4. Первые десять положительных решений уравнения (2)

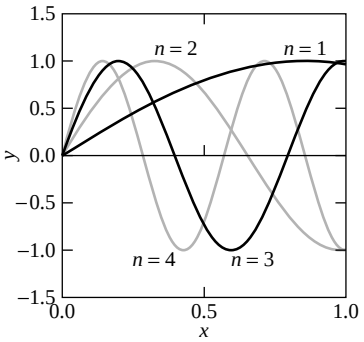


Рис. 10.1.5. Собственные функции $y_n(x) = \sin \beta_n x$ для $n = 1, 2, 3, 4$

```
c = 2*(1 - cos(b))./(b.*(1 + 2*cos(b).^2));
```

вычисляет первые 100 коэффициентов разложения в ряд по собственным функциям (1). Мы находим, что

$$f(x) \approx (1{,}2083)\sin\beta_1 x + (0{,}3646)\sin\beta_2 x + (0{,}2664)\sin\beta_3 x + \\ + (0{,}1722)\sin\beta_4 x + \cdots + (0{,}0066)\sin\beta_{97} x + (0{,}0065)\sin\beta_{98} x + \\ + (0{,}0065)\sin\beta_{99} x + (0{,}0064)\sin\beta_{100} x$$

с числовыми коэффициентами, очевидно, уменьшающими весьма медленно. Наконец, команды

```
x = 0 : 1/500 : 1;
y = zeros(size(x));
for n = 1 : 100
   y = y + c(n)*sin(b(n)*x);
end
plot(x,y)
```

чертят график этой частичной суммы (рис. 10.1.6). Обратите внимание на явление Гиббса, которое проявляется в точке $x = 0$.

Вы можете проверить, насколько хорошо вы научились использовать разложения по собственным функциям, еще раз самостоятельно решив пример 7, но теперь возьмите интервал $0 < x < L$ и условие в правой конечной точке (30) замените условием $y(L) + ky'(L) = 0$. Выберите ваши собственные значения $L > 1$ и $k > 2$. Затем вычислите новые значения β_n и постройте чертеж (график), подобный приведенным на рис. 10.1.5 и 10.1.6. На рис. 10.1.6 мы видим сходимость к $f(x) \equiv 1$ внутри интервала $0 < x < 1$, если пренебречь типичным явлением Гиббса в точке $x = 0$.

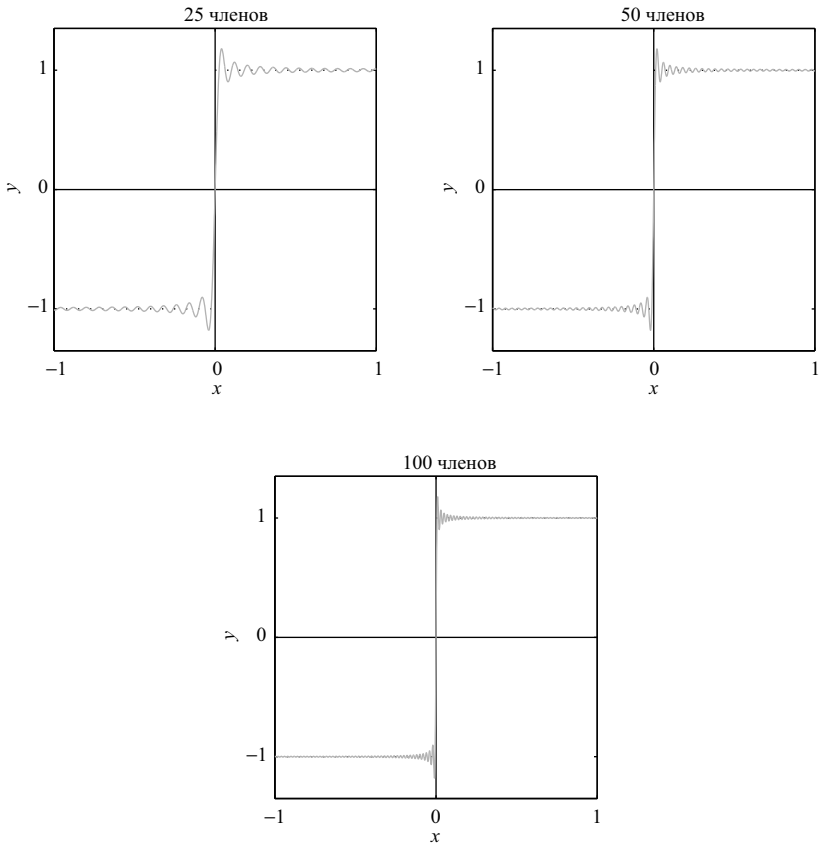


Рис. 10.1.6. Графики частичной суммы $\sum_{n=1}^{N} c_n \sin \beta_n x$ ряда по собственным функциям в уравнении (1) для $N = 25$, $N = 50$, $N = 100$

10.2. Приложения рядов по собственным функциям

Этот раздел посвящен трем примерам, которые иллюстрируют приложение разложения в ряд по собственным функциям (обсуждаемого в разделе 10.1) к задачам, в которых заданы граничные (краевые) значения. В каждом примере метод разделения переменных приводит к задаче Штурма–Лиувилля, в которой собственные функции используются как стандартные блоки, из которых строится решение, удовлетворяющее неоднородному граничному условию в первоначальной задаче.

Пример 1 Однородная плита из материала с коэффициентом температуропроводности k занимает пространственную область $0 \leqq x \leqq L$, первоначально температура всей плиты равна U_0. Начиная с момента времени $t = 0$, на стороне $x = 0$ поддерживается нулевая температура, а на стороне $x = L$ имеет место теплообмен с окружающей средой при нулевой температуре,

так что там $hu + u_x = 0$ (задача 23 из раздела 9.5; константа h — соответствующий коэффициент теплопередачи). Мы хотим найти температуру $u(x,t)$ плиты в точке x в момент времени t; $u(x,t)$ является решением граничной (краевой) задачи (задачи, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения)

$$u_t = ku_{xx} \qquad (0 < x < L,\ t > 0); \tag{1}$$

$$u(0,t) = 0, \tag{2}$$

$$hu(L,t) + u_x(L,t) = 0, \tag{3}$$

$$u(x,0) = U_0. \tag{4}$$

Решение Как и в разделе 9.5, мы начинаем с подстановки $u(x,t) = X(x)T(t)$ в уравнение (1) и таким образом, как обычно, получаем

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT} = -\lambda,$$

так что

$$X'' + \lambda X = T' + \lambda kT = 0. \tag{5}$$

Теперь уравнение (2) дает $X(0) = 0$, а уравнение (3) приводит к $hX(L)T(t) + X'(L)T(t) = 0$. Естественно, мы предполагаем, что $T(t)$ не является тождественно нулевой (потому что мы ищем ненулевое решение); из этого следует, что $X(x)$ и λ является решением задачи Штурма–Лиувилля

$$\begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0 \qquad (0 < x < L); \\ X(0) &= 0, \qquad hX(L) + X'(L) = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

В примере 3 из раздела 10.1 мы нашли, что собственные значения и соответствующие им собственные функции этой задачи равны

$$\lambda_n = \frac{\beta_n^2}{L^2}, \quad X_n(x) = \sin\frac{\beta_n x}{L} \tag{7}$$

для $n = 1, 2, 3, \ldots$, где β_n обозначает n-й положительный корень уравнения

$$\operatorname{tg} x = -\frac{x}{hL}. \tag{8}$$

Подставив $\lambda = \beta_n^2/L^2$ в правую часть уравнения (5), получим уравнение первого порядка

$$T_n' = -\frac{\beta_n^2 k}{L^2} T_n$$

решение которого (с точностью до мультипликативной константы) имеет вид

$$T_n(t) = \exp\left(-\frac{\beta_n^2 kt}{L^2}\right). \tag{9}$$

Следовательно, каждая функция

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \exp\left(-\frac{\beta_n^2 kt}{L^2}\right)\sin\frac{\beta_n x}{L}$$

удовлетворяет однородным условиям (1)–(3) граничной (краевой) задачи (задачи, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения). Нам остается только выбрать коэффициенты так, чтобы формальный ряд

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\frac{\beta_n^2 kt}{L^2}\right)\sin\frac{\beta_n x}{L} \tag{10}$$

также удовлетворял и неоднородному условию

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{\beta_n x}{L} = U_0. \tag{11}$$

Теперь $r(x) \equiv 1$ в задаче Штурма–Лиувилля (6), так что по теореме 3 в соответствии с равенством (25) из раздела 10.1 мы можем удовлетворить уравнению (11), выбирая

$$c_n = \frac{\displaystyle\int_0^L U_0 \sin\frac{\beta_n x}{L}\,dx}{\displaystyle\int_0^L \sin^2\frac{\beta_n x}{L}\,dx}.$$

Но

$$\int_0^L U_0 \sin\frac{\beta_n x}{L}\,dx = \frac{U_0 L}{\beta_n}\left(1-\cos\beta_n\right),$$

и, по сути, теми же самыми вычислениями, что и в примере 5 из раздела 10.1, мы находим, что

$$\int_0^L \sin^2\frac{\beta_n x}{L}\,dx = \frac{1}{2h}\left(hL+\cos^2\beta_n\right).$$

Следовательно,

$$c_n = \frac{2U_0 hL(1-\cos^2\beta_n)}{\beta_n(hL+\cos^2\beta_n)},$$

и подстановка этого значения в (10) дает формальное решение в виде ряда

$$u(x,t) = 2U_0 hL\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos\beta_n}{\beta_n(hL+\cos^2\beta_n)}\exp\left(-\frac{\beta_n^2 kt}{L^2}\right)\sin\frac{\beta_n x}{L}. \tag{12}$$

■

Замечание. Численное исследование разложения в ряд по собственным функциям (12) приведено в приложении к этому разделу, где рассказано, как провести все необходимые вычисления. ■

Продольные колебания стержня

Предположим, что однородный упругий стержень имеет длину L, площадь поперечного сечения A, плотность δ (масса на единицу объема) и занимает интервал $0 \leqq x \leqq L$, когда он нерастянут. Мы рассматриваем продольные колебания стержня, при которых каждое поперечное сечение (нормальное к оси x) перемещается только вдоль направления оси x. Мы можем в таком случае описать движение стержня в терминах смещения $u(x,t)$ в момент времени t поперечного сечения, которое в нерастянутом положении находится в точке с координатой x. Из закона Гука и определения модуля Юнга E материала стержня следует (см. задачу 13), что сила $F(x,t)$, действующая на поперечное сечение x и приложенная со стороны той части стержня, которая расположена *слева* от этого сечения, равна

$$F(x,t) = -AEu_x(x,t), \tag{13}$$

причем знак "минус" показывает, что F направлена влево, когда $u_x > 0$ (так что стержень тогда растянут в окрестности x, а не сжат) (рис. 10.2.1).

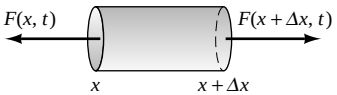


Рис. 10.2.1. Маленький сегмент стержня

Мы берем уравнение (13) в качестве отправной точки для нашего вывода дифференциального уравнения в частных производных, которому удовлетворяет функция $u(x,t)$, выражающая смещение, когда смещения являются настолько малыми, что может быть применен закон Гука. Применяя второй закон Ньютона движения к сегменту стержня между поперечным сечением x и поперечным сечением $x + \Delta x$, получаем

$$\begin{aligned}(\delta A\,\Delta x)u_{tt}(\overline{x},t) &\approx -F(x+\Delta x,t) + F(x,t) = \\ &= AE\left[u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)\right],\end{aligned} \tag{14}$$

где $\overline{x}$ обозначает середину интервала $[x, x+\Delta x]$, потому что этот сегмент имеет массу $\delta A \Delta x$, а его ускорение приблизительно равно $u_{tt}(\overline{x},t)$. Когда мы разделим это выражение в (14) на $\delta A\,\Delta x$ и затем перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$, в результате получим одномерное волновое уравнение

➤
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{15}$$

где

$$a^2 = \frac{E}{\delta}. \tag{16}$$

Поскольку уравнение (15) совпадает с уравнением колебаний струны, из нашего обсуждения решения Даламбера в разделе 9.6 следует, что [свободные] продольные колебания стержня с фиксированными концами могут представлены в виде волн вида $u(x,t) = F(x \pm at)$. Скорость $a = \sqrt{E/\delta}$, с которой осуществляется это перемещение волн, равна скорости звука

в материале стержня. Действительно, волновое уравнение (15) также описывает обыкновенные одномерные звуковые волны в газе, находящемся в трубе. В этом случае E в уравнении (16) обозначает модуль объемной деформации (модуль объемного сжатия, модуль объемной упругости) (дробь, показывающая увеличение плотности при увеличение давления на единицу давления) газа, а δ является его равновесной плотностью.

Пример 2 Длина стержня равна L, плотность — δ, площадь поперечного сечения — A, модуль Юнга — E, и полная масса — $M = \delta AL$. Конец $x = 0$ стержня фиксирован (закреплен, защемлен), а на его свободном конце закреплена материальная точка массы m (рис. 10.2.2). Стержень первоначально растягивается линейно, поскольку материальная точка массы m перемещается на расстояние $d = bL$ направо; в момент времени $t = 0$ система отпускается из состояния покоя. Чтобы определить последующие колебания стержня, мы должны решить граничную (краевую) задачу (задачу, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения)

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \qquad (0 < x < L,\ t > 0); \tag{17a}$$

➤

$$u(0,t) = 0, \tag{17b}$$

$$mu_{tt}(L,t) = -AEu_x(L,t), \tag{17c}$$

$$u(x,0) = bx, \qquad u_t(x,0) = 0. \tag{17d}$$

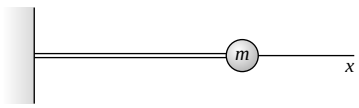


Рис. 10.2.2. Система, состоящая из материальной точки заданной массы на стержне из примера 2

Решение Условие в конечной точке $x = L$ следует из равенства $ma = mu_{tt}$ для массы, на которую в соответствии с равенством (13) действует сила $F = -AEu_x$, поскольку в этом случае на материальную точку заданной массы действует только стержень. Подстановка $u(x,t) = X(x)T(t)$ в $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ приводит, как обычно, к уравнениям

$$X'' + \lambda X = 0, \quad T'' + \lambda a^2 T = 0. \tag{18}$$

Из граничного (краевого, предельного) условия (17b) следует, что $u(0,t) = X(0)T(t) = 0$, так что одно условие в конечной точке имеет вид $X(0) = 0$. Поскольку $u_{tt} = XT''$ и $u_x = X'T$, уравнение (17c) приводит к

$$mX(L)T''(t) = -AEX'(L)T(t),$$

и мы получаем еще одно условие в конечной точке. Подстановка

$$T''(t) = -\lambda a^2 T(t) = -\frac{\lambda E}{\delta} T(t),$$

с последующим делением на $-ET(t)/\delta$, дает равенство $m\lambda X(L) = A\delta X'(L)$. Таким образом, задача на собственные значения для $X(x)$ имеет вид

$$\begin{gathered} X'' + \lambda X = 0; \\ X(0) = 0, \quad m\lambda X(L) = A\delta X'(L). \end{gathered} \tag{19}$$

Важно отметить, что поскольку в условии в правой конечной точке присутствует λ, это *не* задача Штурма–Лиувилля, так что теоремы 1–3 из раздела 10.1 не применимы. Однако все собственные значения задачи (19) положительны (задача 9). Мы поэтому пишем $\lambda = \alpha^2$, и заметьте, что $X(x) = \sin \alpha x$ удовлетворяет условию $X(0) = 0$. Условие в правой конечной точке в (19) тогда дает

$$m\alpha^2 \sin \alpha L = A\delta\alpha \cos \alpha L,$$

и, таким образом,

$$\operatorname{tg} \alpha L = \frac{A\delta}{m\alpha} = \frac{M/m}{\alpha L}, \tag{20}$$

где $M = A\delta L$. Мы полагаем $\beta = \alpha L$; из этого следует, что собственные значения задачи (19) и соответствующие им собственные функции

$$\lambda_n = \frac{\beta_n^2}{L^2}, \quad X_n(x) = \sin \frac{\beta_n x}{L} \tag{21}$$

для $n = 1, 2, 3, \ldots$, где $\{\beta_n\}_1^\infty$ — положительные корни уравнения

$$\operatorname{tg} x = \frac{M/m}{x}, \tag{22}$$

обозначенные точками на рис. 10.2.3.

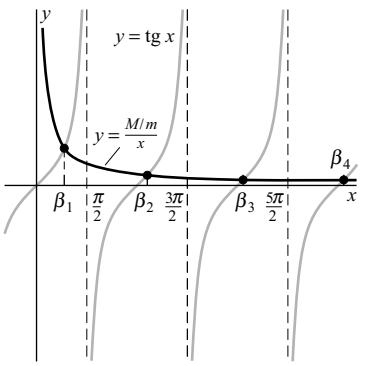


Рис. 10.2.3. Положительные корни $\{\beta_n\}_1^\infty$ уравнения (22)

Затем обычным способом из

$$T_n'' + \frac{\beta_n^2 a^2}{L^2} T_n = 0, \quad T_n'(0) = 0 \tag{23}$$

мы выводим, что $T_n(t) = \cos(\beta_n a t/L)$ с точностью до мультипликативной константы. Таким образом, остается только найти коэффициенты $\{c_n\}_1^\infty$ так, чтобы ряд

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{\beta_n a t}{L} \sin\frac{\beta_n x}{L} \tag{24}$$

удовлетворял неоднородному условию

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{\beta_n x}{L} = f(x) = bx. \tag{25}$$

Но требуется соблюдать осторожность, потому что (19) — вовсе не задача Штурма–Лиувилля. Действительно, в задачах 14 и 15 мы просим вас показать, что собственные функции $\{\sin(\beta_n x/L)\}_1^\infty$ *не ортогональны* на интервале $[0, L]$, так что формула для коэффициентов, выраженная равенством (25) раздела 10.1, здесь не применима.

Но в случае продольных колебаний обычно непосредственно сама функция $u(x,t)$, выражающая смещение, не так уж и необходима. Гораздо больший интерес представляет собой ответ на вопрос, как собственные частоты колебаний стержня зависят от массы m материальной точки, закрепленной на его свободном конце. Независимо от значений коэффициентов в равенстве (25), из уравнения (24) мы видим, что n-я круговая частота равна

$$\omega_n = \frac{\beta_n a}{L} = \frac{\beta_n}{L}\sqrt{\frac{E}{\delta}}, \tag{26}$$

где β_n — n-е положительное решение (корень) уравнения (22), которое может быть перезаписано в форме

$$\operatorname{ctg} x = \frac{mx}{M}. \tag{27}$$

Таким образом, собственные частоты определяются отношением массы m к полной массе M стержня. ■

Замечание. В случае *отсутствия* массы на свободном конце стержня естественно считать, что $m = 0$. Тогда уравнение (27) приводит к уравнению $\cos x = 0$, чье n-е положительное решение (корень) $\beta_n = (2n-1)\pi/2$. Тогда n-я круговая частота выражается формулой

$$\omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L}\sqrt{\frac{E}{\delta}}. \tag{28}$$

В задаче 8 мы просим вас получить этот результат непосредственно, начиная с граничной (краевой) задачи (задачи, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения) для стержня с одним фиксированным (закрепленным, защемленным) концом и другим полностью свободным концом. ■

Поперечные колебания стержней

Мы теперь обсудим колебания однородного упругого стержня, в котором движение каждой точки является не продольным, а перпендикулярным к оси x (ось стержня в его положении равновесия). Пусть $y(x,t)$ обозначает поперечное смещение поперечного сечения в точке x в момент времени t, как показано на рис. 10.2.4. Мы просто хотим наметить основные этапы вывода дифференциального уравнения в частных производных, которому удовлетворяет функция, выражающая отклонение $y(x,t)$. Вспомните сначала, что в разделе 3.8 мы вывели уравнение $EIy^{(4)} = F$ для статического отклонения стержня или балки под влиянием поперечной внешней силы F (действующей на единицу длины). Согласно общему динамическому принципу, мы можем преобразовать статическое уравнение $EIy^{(4)} = F$ в уравнение динамики (при отсутствии внешней силы), заменяя F противоположно направленной силой инерции $F = -\rho y_{tt}$, где ρ является линейной плотностью (масса/длина) стержня, и, кроме того, заменяя $y^{(4)}$ на y_{xxxx}. Это дает уравнение

➤
$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

которое может быть записано в форме

➤
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^4\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0, \tag{29}$$

где

$$a^4 = \frac{EI}{\rho}. \tag{30}$$

Следующий пример иллюстрирует решение этого дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка методом разделения переменных.

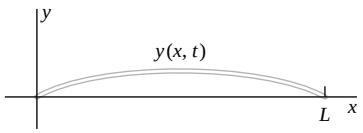


Рис. 10.2.4. Стержень, совершающий поперечные колебания

Пример 3 Однородный стержень с линейной плотностью ρ, модулем Юнга E и моментом инерции поперечного сечения I просто поддерживается (или закреплен шарнирно) в его двух концах $x = 0$ и $x = L$. Если стержень приведен в движение из состояния покоя с данным начальным положением $f(x)$, то функция, позволяющая вычислить его смещение $y(x,t)$, является решением граничной (краевой) задачи (задачи, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения)

$$y_{tt} + a^4 y_{xxxx} = 0 \qquad (0 < x < L,\ t > 0); \tag{31a}$$

➤
$$y(0,t) = y_{xx}(0,t) = y(L,t) = y_{xx}(L,t) = 0, \tag{31b}$$

$$y(x,0) = f(x), \qquad y_t(x,0) = 0. \tag{31c}$$

Найдем $y(x,t)$. Граничные условия (31b) — условия подвеса конца (или шарнирного закрепления), их вид мы принимаем без доказательства, а условия (31c) — начальные условия.

Решение Подстановка $y(x,t) = X(x)T(t)$ в дифференциальном уравнении приводит к уравнению $XT'' + a^4X^{(4)}T = 0$, так что

$$\frac{X^{(4)}}{X} = -\frac{T''}{a^4T} = \lambda. \tag{32}$$

Чтобы определить знак λ, мы замечаем, что уравнение

$$T'' + \lambda a^4 T = 0 \tag{33}$$

должно иметь тригонометрические, а не экспоненциальные решения. Причина состоит в том, что на основе практического опыта — например, с камертонами или ксилофонными стержнями, — каждый ожидает, что имеют место периодические колебания. Это не могло произойти, если бы λ были отрицательны и уравнение (33) имело экспоненциальные решения. Следовательно, λ должно быть положительным и удобно писать $\lambda = \alpha^4 > 0$. Тогда $X(t)$ должно удовлетворять уравнению

$$X^{(4)}(x) - \alpha^4 X(x) = 0, \tag{34}$$

которое имеет общее решение

$$X(x) = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x + C\cosh\alpha x + D\sinh\alpha x,$$

причем

$$X''(t) = \alpha^2(-A\cos\alpha x - B\sin\alpha x + C\cosh\alpha x + D\sinh\alpha x).$$

Условия в конечных точках в (31) дают равенства

$$X(0) = X''(0) = X(L) = X''(L) = 0. \tag{35}$$

Следовательно,

$$X(0) = A + C = 0 \quad \text{и} \quad X''(0) = -A + C = 0,$$

а из этих двух уравнений следует, что $A = C = 0$. Поэтому

$$X(L) = B\sin\alpha L + D\sinh\alpha L = 0$$

и

$$X''(L) = \alpha^2(-B\sin\alpha L + D\sinh\alpha L) = 0.$$

Из этого следует, что

$$B\sin\alpha L = 0 \quad \text{и} \quad D\sinh\alpha L = 0.$$

Но $\sinh \alpha L \neq 0$, потому что $\alpha \neq 0$; следовательно, $D = 0$. Следовательно, $B \neq 0$, если мы должны иметь нетривиальное решение, так что $\sin \alpha L = 0$. Таким образом, α должно быть (целым) кратным π/L. Поэтому собственные значения и соответствующие им собственные функции задачи, определенной уравнениями (34) и (35), имеют вид

$$\lambda_n = \alpha_n^4 = \frac{n^4\pi^4}{L^4}, \quad X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{L} \tag{36}$$

для $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Подставляя $\lambda = n^4\pi^4/L^4$ в (33), получаем уравнение

$$T_n'' + \frac{n^4\pi^4a^4}{L^4}T_n = 0. \tag{37}$$

Поскольку из начального условия $y_t(x, 0) = 0$ следует, что $T_n'(0) = 0$, мы полагаем

$$T_n(t) = \cos\frac{n^2\pi^2a^2t}{L^2}. \tag{38}$$

Объединяя результаты в (36) и (38), мы конструируем ряд

➤
$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n^2\pi^2a^2t}{L^2}\sin\frac{n\pi x}{L}, \tag{39}$$

который формально удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных в (31) и однородным граничным условиям. Неоднородное условие имеет вид

$$y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n\pi x}{L} = f(x),$$

так что мы вычисляем коэффициенты расположенного по синусам ряда Фурье по формулам

➤
$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx, \tag{40}$$

чтобы равенство (39) действительно давало формальное решение в виде ряда. ■

Обратите внимание, что круговая частота n-го члена в (39) равна

$$\omega_n = \frac{n^2\pi^2a^2}{L^2} = n^2\omega_1, \tag{41}$$

где основная частота (частота основной (первой) гармоники, (наинизшая) собственная частота) стержня равна

$$\omega_1 = \frac{\pi^2a^2}{L^2} = \frac{\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho}}. \tag{42}$$

Поскольку частота каждой более высокой гармоники кратна ω_1, звук вибрирующего стержня с просто подвешенными (или закрепленными на шарнире) концами является музыкальным. Поскольку более высокие частоты $\{n^2\omega_1\}_2^\infty$ более редки, чем более высокие частоты $\{n\omega_1\}_2^\infty$ колебаний струны, то тон колебаний стержня более чист, чем тон колебаний струны. Это частично объясняет шелковистость (вкрадчивость, плавность, бархатность) звука виброфона, на котором так любил играть Милт Джексон (Milt Jackson), бывший участник современного джазового квартета Modern Jazz Quartet.

10.2. Задачи

В задачах 1–6 найдите формальные решения граничных задач в виде ряда. Выразите каждый ответ в форме, данной в ответе к задаче 1.

1. $u_t = ku_{xx} \quad (0 < x < L, \quad t > 0)$; $u_x(0,t) = hu(L,t) + u_x(L,t) = 0$, $u(x,0) = f(x)$

Ответ.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\frac{\beta_n^2 kt}{L^2}\right) \cos\frac{\beta_n x}{L},$$

где $\{\beta_n\}_1^\infty$ — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} x = hL/x$ и

$$c_n = \frac{2h}{hL + \sin^2\beta_n} \int_0^L f(x) \cos\frac{\beta_n x}{L}\, dx.$$

2. $u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (0 < x < L,\ 0 < y < L)$; $u(0,y) = hu(L,y) + u_x(L,y) = 0, \quad u(x,L) = 0$, $u(x,0) = f(x)$

3. $u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (0 < x < L, \quad 0 < y < L)$; $u_y(x,0) = hu(x,L) + u_y(x,L) = 0$, $u(L,y) = 0$, $u(0,y) = g(y)$

4. $u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (0 < x < L, \quad y > 0)$; $u(0,y) = hu(L,y) + u_x(L,y) = 0$, $u(x,y)$ ограничена при $y \to +\infty$, $u(x,0) = f(x)$

5. $u_t = ku_{xx} \quad (0 < x < L, \quad t > 0)$; $hu(0,t) - u_x(0,t) = u(L,t) = 0$, $u(x,0) = f(x)$

6. $u_t = ku_{xx} \quad (0 < x < L, \quad t > 0)$; $hu(0,t) - u_x(0,t) = hu(L,t) + u_x(L,t) = 0$, $u(x,0) = f(x)$

7. Пусть $u(x,y)$ обозначает ограниченную установившуюся температуру (температуру в установившемся режиме) в бесконечно высокой стене с основой $y = 0$ и с торцами $x = 0$ и $x = 1$. Торец $x = 0$ изолирован, а в основе $y = 0$ поддерживается температура $100\,^\circ\mathrm{C}$, причем имеет место теплообмен при $h = 1$ в торце $x = 1$. Получите решение

$$u(x,y) = 200 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-\alpha_n y) \sin\alpha_n \cos\alpha_n x}{\alpha_n + \sin\alpha_n \cos\alpha_n},$$

где $\{\alpha_n\}_1^\infty$ — положительные корни уравнения $\operatorname{ctg} x = x$. Пусть $\alpha_1 = 0{,}860$, $\alpha_2 = 3{,}426$, $\alpha_3 = 6{,}437$ и $\alpha_4 = 9{,}529$. Вычислите температуру $u(1,1)$ с точностью до $0{,}1\,^\circ\mathrm{C}$.

8. Если к концу $x = L$ стержня в примере 2 масса *не прикреплена*, то уравнение (17c) заменяется условием свободного конца $u_x(L,t) = 0$. Отделите переменные в полученной граничной задаче и получите решение в виде ряда

$$u(x,t) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{(2n-1)\pi at}{2L} \;\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2L},$$

где

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L bx \sin\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\, dx = \frac{8bL(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2\pi^2}.$$

В частности, собственные частоты продольных колебаний стержня выражаются равенством (28).

9. **(a)** Покажите, что $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (19). **(b)** Покажите, что эта задача не имеет отрицательных собственных значений. (*Указание*. Сделайте набросок графиков $y = \tanh x$ и $y = -k/x$ при $k > 0$.)

10. Вычислите скорость (в милях в час) продольных звуковых волн в каждом из следующих случаев. **(a)** Сталь, с $\delta = 7{,}75$ г/см^3 и $E = 2 \times 10^{12}$ в единицах системы СГС (т. е. в единицах системы сантиметр–грамм–секунда). **(b)** Вода с $\delta = 1$ г/см^3 и объемный модуль $K = 2{,}25 \times \times 10^{10}$ в единицах системы СГС (т. е. в единицах системы сантиметр–грамм–секунда).

11. Рассмотрим массу $m = nm_0$ идеального газа молекулярного веса m_0, чье давление p и объем V удовлетворяют закону $pV = nRT_K$, где n — число молей газа, $R = 8314$ в единицах системы МКС (метр–килограмм–секунда) и $T_K = T_C + 273$, причем T_C — температура по Цельсию. Модуль объемного сжатия (модуль объемной упругости) газа равен $K = \gamma p$, где значение безразмерной константы γ равно $1{,}4$ для воздуха, имеющего молекулярный вес $m_0 = 29$. **(a)** Покажите, что скорость звука в этом газе равна

$$a = \sqrt{\frac{K}{\delta}} = \sqrt{\frac{\gamma R T_K}{m_0}}.$$

(b) С помощью этой формулы покажите, что скорость звука в воздухе при температуре T_C по Цельсию равна приблизительно $740 + (1{,}36)T_C$ миль в час.

12. Предположим, что к свободному концу стержня из примера 2 прикреплена пружина (а не материальная точка заданной массы), как показано на рис. 10.2.5. Условие в конечной точке тогда принимает вид $ku(L,t) + AEu_x(L,t) = 0$. (Почему?) Предположим, что $u(x,0) = f(x)$ и $u_t(x,0) = 0$. Получите решение в форме

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{\beta_n a t}{L} \sin\frac{\beta_n x}{L},$$

где $\{\beta_n\}_1^\infty$ — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} x = -AEx/kL$.



Рис. 10.2.5. Стержень из задачи 12

13. Если стержень имеет естественную длину L, площадь поперечного сечения A и модуль Юнга E, то (как следствие закона Гука) осевая сила на каждом конце, требуемая для того, чтобы растянуть этот стержень на маленькую длину ΔL, равна $F = (AE\,\Delta L)/L$. Примените этот результат к сегменту стержня естественной длины $L = \Delta x$ между поперечными сечениями в точках x и $x + \Delta x$, который растянут на расстояние $\Delta L = u(x + \Delta x, t) - u(x,t)$. Затем перейдите к пределу при $\Delta x \to 0$ и выведите уравнение (13).

14. Покажите, что собственные функции $\{X_n(x)\}_1^\infty$ задачи (19) не ортогональны. (*Указание*. Используйте равенство (22) из раздела 10.1 и покажите, что если $m \neq n$, то

$$\int_0^L X_m(x)X_n(x)\,dx = -\frac{m}{A\delta}X_m(L)X_n(L).)$$

15. Покажите, что собственные функции $\{\sin\beta_n x/L\}_1^\infty$ задачи (19) не ортогональны; для этого непосредственно вычислите значение интеграла

$$\int_0^L \sin\frac{\beta_m x}{L} \sin\frac{\beta_n x}{L}\,dx.$$

(*Указание*. Используйте тот факт, что $\{\beta_n\}_1^\infty$ — корни уравнения $x \operatorname{tg} x = M/m$.)

16. Согласно задаче 19 из раздела 9.7 температура $u(r,t)$ в однородном твердом сферическом шаре радиуса a удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных $(ru)_t = k(ru)_{rr}$. Предположим, что шар имеет начальную температуру $u(r,0) = f(r)$ и что его поверхность $r = a$ изолирована, так что $u_r(a,t) = 0$. Подставьте $v(r,t) = ru(r,t)$ и получите решение

$$u(r,t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{r} \exp\left(-\frac{\beta_n^2 kt}{a^2}\right) \sin\frac{\beta_n r}{a},$$

где $\{\beta_n\}_1^\infty$ — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} x = x$ и

$$c_0 = \frac{3}{a^3}\int_0^a r^2 f(r)\,dr,$$

$$c_n = \frac{2}{a\sin^2\beta_n}\int_0^a rf(r)\sin\frac{\beta_n r}{a}\,dr$$

(см. задачу 14 из раздела 10.1).

17. Задача о диффузии газа через мембрану приводит к граничной (краевой) задаче (задаче, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения)

$$\begin{aligned} &u_t = ku_{xx} \qquad (0 < x < L,\ t > 0);\\ &u(0,t) = u_t(L,t) + hku_x(L,t) = 0,\\ &u(x,0) = 1. \end{aligned}$$

Получите решение

$$u(x,t) = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos\beta_n}{2\beta_n - \sin 2\beta_n} \exp\left(-\frac{\beta_n^2 kt}{L^2}\right)\sin\frac{\beta_n x}{L},$$

где $\{\beta_n\}_1^\infty$ — положительные корни уравнения $x\operatorname{tg} x = hL$.

18. Предположим, что шарнирно опертый однородный стержень из примера 3 имеет, в отличие от примера 3, начальное положение $y(x,0) = 0$ и начальную скорость $y_t(x,0) = g(x)$. В этих предположениях получите решение

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\frac{n^2\pi^2 a^2 t}{L^2}\ \sin\frac{n\pi x}{L},$$

где

$$c_n = \frac{2L}{n^2\pi^2 a^2}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

19. Чтобы создать упрощенную модель влияния начального импульса P, приложенного в середине $x = L/2$ шарнирно опертого стержня, подставьте

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{P}{2\rho\epsilon}, & \text{если } \dfrac{L}{2} - \epsilon < x < \dfrac{L}{2} + \epsilon,\\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

в результат задачи 18. Затем положите $\epsilon \to 0$ и получите решение

$$y(x,t) = C\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\ \sin\frac{n^2\pi^2 a^2 t}{L^2}\ \sin\frac{n\pi x}{L},$$

где

$$C = \frac{2PL}{\pi^2\sqrt{EI\rho}}.$$

20. **(a)** Пусть $g(x) = v_0$ (константа) в задаче 18. Покажите, что

$$y(x,t) = \frac{4v_0L^2}{\pi^3a^2} \sum_{n \text{ нечетное}} \frac{1}{n^3} \sin \frac{n^2\pi^2a^2t}{L^2} \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Это равенство описывает колебания шарнирно опертого стержня, лежащего сзади поперек пикапа, который врезается в кирпичную стену со скоростью v_0 в момент времени $t = 0$. **(b)** Теперь предположите, что стержень сделан из стали ($E = 2 \times 10^{12}$ дин/см^2, $\delta = 7{,}75$ г/см^3), имеет квадратное поперечное сечение со стороной $a = 1$ дюйм (так что $I = \frac{1}{12}a^4$) и длину $L = 19$ дюймов. Какова его основная частота (частота основной (первой) гармоники, (наинизшая) собственная частота) (в герцах)?

10.2. Приложение. Численные методы исследования распространения тепла

Мы с помощью системы *Mathematica* продемонстрируем основные этапы числового исследования функции, задающей распределение температур

$$u(x,t) = 2u_0hL \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos\beta_n}{\beta_n(hL + \cos^2\beta_n)} \exp\left(-\frac{\beta_n^2kt}{L^2}\right) \sin\frac{\beta_nx}{L} \tag{1}$$

в горячей плите из примера 1 в этом разделе. Конечно же, версии такого исследования можно написать и для других аналогичных систем, например для *Maple* и MATLAB.

Мы предполагаем, что плита имеет толщину $L = 50$ см, постоянную начальную температуру $u_0 = 100°$, причем температура $0°$ поддерживается на левом крае плиты $x = 0$, коэффициент температуропроводности $k = 0{,}15$ (для железа) и коэффициент теплопередачи $h = 0{,}1$ на правом крае $x = L$. Согласно уравнению (8) этого раздела, собственные значения $\{\beta_n\}_1^\infty$ уравнения (1) — положительные решения уравнения $\operatorname{tg} x = -x/(hL)$. Как и на рис. 10.1.1, мы видим, что, если n является большим, то β_n лишь немного больше $(2n - 1)\pi/2$. Поэтому мы можем приблизить первые 20 этих собственных значений с помощью команд

```
L = 50;   h = 0.1;
roots = Table[ FindRoot[ Tan[x] == -x/(h*L),));
                                                (* корни = Таблица*)
            {x, (2*n - 1)*Pi/2 + 0.1}], {n,1,20}];
beta = x /. solutions  (* решения *)
```

Первые десять из этих собственных значений перечислены в таблице на рис. 10.2.6.

Следующая функция системы *Mathematica* теперь суммирует первые 20 отличных от нуля членов ряда (1).

```
b = beta;   u0 = 100;   k = 0.15;
c = (1 - Cos[b])/(b*(h*L + Cos[b]^2));   (* коэффициенты *)
u[x_, t_] := 2*u0*h*L*Apply[ Plus,
      c*Exp[-b*b*k*t/L^2]*Sin[b*x/L]] // N
```

На практике достаточно вычислять значение $u(x,t)$ через каждые 10 секунд (или больше) с точностью до двух десятичных знаков всюду на интервале $0 \leqq x \leqq 50$. (Как проверить это утверждение?) Команда

n	β_n
1	2,6537
2	5,4544
3	8,3913
4	11,4086
5	14,4699
6	17,5562
7	20,6578
8	23,7693
9	26,8874
10	30,0102

Рис. 10.2.6. Первые 10 положительных решений (корней) уравнения

$$\operatorname{tg} x = -\frac{x}{hL}$$

при $L = 50$ и $h = 0{,}1$. Корни этого уравнения являются собственными значениями

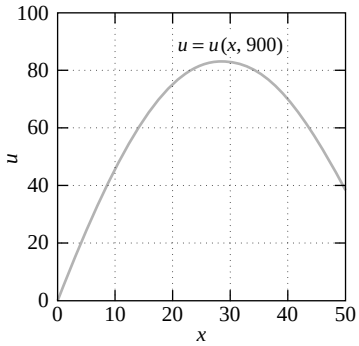


Рис. 10.2.7. Распределение температур в плите через 15 минут

```
Plot[u[x,900], {x, 0, 50}];
```

генерирует график $u = u(x, 900)$ для $0 \leqq x \leqq 50$, показанный на рис. 10.2.7. Мы видим, что через 15 минут правый край $x = 50$ плиты охладился ниже 40°, тогда как температуры внутри пластины в окрестности $x = 30$ остаются довольно высокими, они выше 80°. Команда

```
Plot[{u[50,t], 25}, {t, 0, 3600}];
```

генерирует график $u = u(50, t)$ для $0 \leqq t \leqq 3600$, показанный на рис. 10.2.8. Теперь мы видим, что температура плиты на правом крае падает до 25° немного меньше, чем за 2000 секунд. Вычисление

```
t1 = t /. FindRoot[u[50,t] == 25, {t, 2000}]
```

показывает, что это фактически происходит приблизительно через 1951 с; т. е. приблизительно через 32 минуты 31 секунду.

На рис. 10.2.9 видно, что температуры внутри плиты в момент времени t_1 все еще остаются довольно высокими, они превышают 50° в некоторых точках, причем максимум достигается где-то около $x = 30$. Мы можем найти это максимальное значение температуры $u(x,\, t_1)$, вычислив минимальное значение функции, равной температуре с противоположным знаком (таким образом, положительные температуры станут отрицательными), т. е. функции $-u(x,\, t_1)$. Команда

```
FindMinimum[-u[x,t1], {x, 30}]
```

приводит к результату, указывающему, что максимальное значение равно $u(29{,}36, t_1) \approx$ $\approx 53{,}80^\circ$.

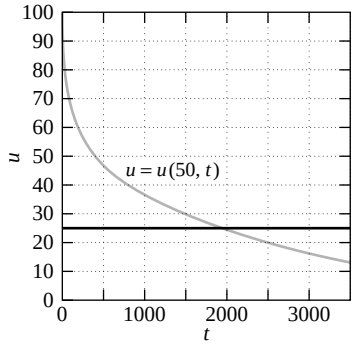


Рис. 10.2.8. Распределение температур на правом крае плиты

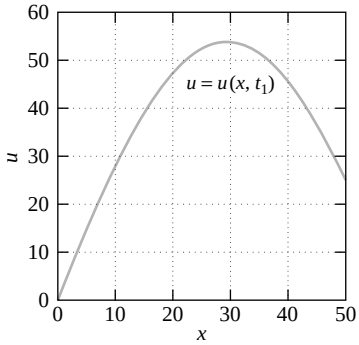


Рис. 10.2.9. Распределение внутренних температур при условии, что температура на правом крае равна 25°

Исследуйте в этой манере вашу собственную плиту с постоянной начальной температурой $u(x,0) = 100^\circ$. Пусть $h = 0{,}1$, $L = 50(10 + p)$ и $k = q/10$, где p — наибольшая, а q — наименьшая отличная от нуля цифра номера вашего студенческого билета. Выполните указанные здесь исследования и найдите

- когда температура на правом крае плиты будет равна 25°;
- максимальную температуру в пределах плиты в этот момент.

Конечно, корни и максимальные значения можно найти численными методами. Однако вы можете увеличить (масштабировать) графики около соответствующих точек на рисунках, подобных рис. 10.2.8 и 10.2.9.

10.3. Установившиеся периодические решения и собственные частоты

В разделе 9.6 мы получили решение

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi a t}{L} + B_n \sin \frac{n\pi a t}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos \left(\frac{n\pi a t}{L} - \gamma_n \right) \sin \frac{n\pi x}{L} \tag{1}$$

задачи о колебаниях струны

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad \left(a = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \right); \tag{2}$$

$$y(0,t) = y(L,t) = 0, \tag{3}$$

$$y(x,0) = f(x), \quad y_t(x,0) = g(x). \tag{4}$$

Решение в равенстве (1) описывает *свободные* колебания струны длиной L и линейной плотностью ρ под натяжением T; постоянные коэффициенты в уравнении (1) определены начальными условиями (4).

В частности, по виду членов ряда в равенстве (1), можно определить, что собственные [круговые] частоты (в радианах в секунду) колебаний струны определяются формулой

$$\omega_n = \frac{n\pi a}{L}, \tag{5}$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$. Они (и только они) являются значениями ω, при которых уравнение (2) имеет установившееся периодическое решение вида

$$y(x,t) = X(x)\cos(\omega t - \gamma), \tag{6}$$

которое удовлетворяет условиям в конечных точках (3). Чтобы убедиться в этом, достаточно подставить равенство (6) в (2) и сократить на множитель $\cos(\omega t - \gamma)$, после чего будет ясно, что $X(x)$ должно удовлетворять уравнению

$$a^2 X''(x) + \omega^2 X(x) = 0,$$

чье общее решение

$$X(x) = A\cos\frac{\omega x}{a} + B\sin\frac{\omega x}{a}$$

удовлетворяет условиям (3), только если $A = 0$ и $\omega = n\pi a/L$ для некоторого положительного целого числа n.

Вынужденные колебания и резонанс

Теперь предположим, что струна подвергается влиянию периодической внешней силы $F(t) = F_0\cos\omega t$ (сила на единицу массы), которая действует равномерно на струну по всей ее длине. Тогда, согласно уравнению (1) из раздела 9.6, смещение $y(x,t)$ струны удовлетворяет неоднородному дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + F_0\cos\omega t, \tag{7}$$

а также граничным условиям, таким как условия (3) и (4). Например, если первоначально струна находится в покое и в равновесии в тот момент, когда начинает действовать внешняя сила, то мы хотим найти решение уравнения (7), которое удовлетворяет условиям

$$y(0,t) = y(L,t) = y(x,0) = y_t(x,0) = 0. \tag{8}$$

Чтобы сделать это, сначала достаточно найти частное решение $y_p(x,t)$ уравнения (7), которое удовлетворяет условиям (3) (которые являются условиями для закрепленных концов в конечных точках), а потом найти решение $y_c(x,t)$ в виде равенства (1) для знакомой задачи (2)–(4) при

$$f(x) = -y_p(x,0) \quad \text{и} \quad g(x) = -D_t y_p(x,0).$$

Очевидно, тогда функция

$$y(x,t) = y_c(x,t) + y_p(x,t)$$

будет удовлетворять уравнениям (7) и (8).

Так что наша новая задача состоит в том, чтобы найти $y_p(x,t)$. Изучение отдельных слагаемых в уравнении (7) подсказывает, что сначала нужно попробовать функцию

$$y_p(x,t) = X(x)\cos\omega t. \tag{9}$$

Подставляя эту функцию в уравнение (7) и сокращая на общий множитель $\cos\omega t$, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$a^2X'' + \omega^2 X = -F_0$$

с общим решением

$$X(x) = A\cos\frac{\omega x}{a} + B\sin\frac{\omega x}{a} - \frac{F_0}{\omega^2}. \tag{10}$$

Из условия $x(0) = 0$ следует, что $A = F_0/\omega^2$, а затем из $X(L) = 0$ следует, что

$$X(L) = \frac{F_0}{\omega^2}\left(\cos\frac{\omega L}{a} - 1\right) + B\sin\frac{\omega L}{a} = 0. \tag{11}$$

Теперь предположим, что частота ω периодической внешней силы *не равна* ни одной из собственных частот $\omega_n = n\pi a/L$ струны. Тогда $\sin(\omega L/a) \neq 0$, так что мы можем решить уравнение (11) относительно B и затем подставить результат в уравнение (10); в результате получится

$$X(x) = \frac{F_0}{\omega^2}\left(\cos\frac{\omega x}{a} - 1\right) - \frac{F_0[\cos(\omega L/a) - 1]}{\omega^2\sin(\omega L/a)}\sin\frac{\omega x}{a}. \tag{12}$$

При этом выборе $X(x)$ с учетом равенства (9) получим искомое частное решение $y_p(x,t)$.

Обратите внимание, однако, что когда значение ω стремится к $\omega_n = n\pi a/L$ при нечетном n, коэффициент $\sin(\omega x/a)$ в уравнении (12) стремится к $\pm\infty$; таким образом, *резонанс* действительно происходит. Это объясняет тот факт, что, когда оттянута [только] одна из двух близлежащих идентичных струн, другая также начнет колебаться из-за того, что на нее действует (посредством воздуха) внешняя периодическая сила на ее основной частоте (частоте основной (первой) гармоники, (наинизшей) собственной частоте). Заметьте также, что если $\omega = \omega_n = n\pi a/L$ при четном n, то мы можем выбрать $B = 0$ в уравнении (11), так что в этом случае резонанс не происходит. Задача 20 объясняет, почему некоторые из возможностей резонанса не реализуются.

Колебания струн типичны для непрерывных систем, которые имеют бесконечную последовательность собственных частот вибрации. Когда периодическая внешняя сила действует на такую систему, могут произойти потенциально разрушительные резонансные колебания, если приложенная частота близка к одной из собственных частот системы. Следовательно, предотвращение таких резонансных колебаний — важный аспект надлежащего строительного проектирования.

Собственные частоты балок

На рис. 10.3.1 показана однородная балка длины L, зажатая в каждом конце. Ее линейная плотность равна ρ, а модуль Юнга — E. Для $0 < x < L$ и $t > 0$ функция, выражающая ее отклонение $y(x,\,t)$, удовлетворяет уравнению четвертого порядка

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^4\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \;=\; 0 \qquad \left(a^4 = \frac{EI}{\rho}\right), \tag{13}$$

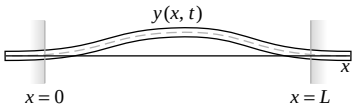


Рис. 10.3.1. Стержень, каждый конец которого зажат

которое мы обсуждали в разделе 10.2; I обозначает момент инерции поперечного сечения балки вокруг ее горизонтальной оси симметрии. Поскольку и смещение, и наклон равны нулю в каждом защемленном конце конструкции, условия в конечных точках имеют вид

$$y(0,t) = y_x(0,t) = 0 \tag{14}$$

и

$$y(L,t) = y_x(L,t) = 0. \tag{15}$$

Здесь мы хотим найти только собственные частоты колебаний балки, так что мы не будем заниматься начальными условиями. Собственные частоты — это значения ω, при которых уравнение (13) имеет нетривиальное решение вида

$$y(x,t) = X(x)\cos(\omega t - \gamma), \tag{16}$$

которое удовлетворяет условиям, выраженным в равенствах (14) и (15). Когда мы подставим $y(x,\, t)$ из (16) в (13) и затем сократим на общий множитель $\cos(\omega t - \gamma)$, мы получим обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка $-\omega^2 X + a^4 X^{(4)} = 0$; иными словами,

$$X^{(4)} - \frac{\omega^2}{a^4} X = 0. \tag{17}$$

Введя обозначение $\alpha^4 = \omega^2/a^4$, мы записываем общее решение уравнения (17) в виде

$$X(x) = A\cosh\alpha x + B\sinh\alpha x + C\cos\alpha x + D\sin\alpha x,$$

причем

$$X'(x) = \alpha(A\sinh\alpha x + B\cosh\alpha x - C\sin\alpha x + D\cos\alpha x).$$

Условия (14) дают уравнения

$$X(0) = A + C = 0 \quad \text{и} \quad X'(0) = \alpha(B + D) = 0,$$

из которых находим $C = -A$ и $D = -B$. Следовательно, из условий (15) получаем уравнения

$$X(L) = A(\cosh\alpha L - \cos\alpha L) + B(\sinh\alpha L - \sin\alpha L) = 0$$

и

$$\frac{1}{\alpha}X'(L) = A(\sinh\alpha L + \sin\alpha L) + B(\cosh\alpha L - \cos\alpha L) = 0.$$

Чтобы эти два линейных однородных уравнения относительно A и B имели нетривиальное решение, детерминант из коэффициентов должен быть нулевым:

$$(\cosh\alpha L - \cos\alpha L)^2 - (\sinh^2\alpha L - \sin^2\alpha L) = 0;$$
$$(\cosh^2\alpha L - \sinh^2\alpha L) + (\cos^2\alpha L + \sin^2\alpha L) - 2\cosh\alpha L\cos\alpha L = 0;$$
$$2 - 2\cosh\alpha L\cos\alpha L = 0.$$

Отсюда следует, что $\beta = \alpha L$ должно быть отличным от нуля корнем уравнения

$$\cosh x \cos x = 1. \tag{18}$$

Из рис. 10.3.2 мы видим, что это уравнение имеет возрастающую последовательность положительных корней $\{\beta_n\}_1^\infty$. Теперь $\omega = \alpha^2 a^2 = \beta^2 a^2/L^2$ и $a^2 = \sqrt{EI/\rho}$, так что из этого следует, что собственные [круговые] частоты колебаний балки с зажатыми концами выражаются формулой

$$\omega_n = \frac{\beta_n^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho}} \quad \text{(радиан в секунду)} \tag{19}$$

для $n = 1, 2, 3, \ldots$. Корни уравнения (18) равны $\beta_1 \approx 4{,}73004$, $\beta_2 \approx 7{,}85320$, $\beta_3 \approx 10{,}99561$ и $\beta_n \approx (2n+1)\pi/2$ для $n \geqq 4$ (как показано на рис. 10.3.2).

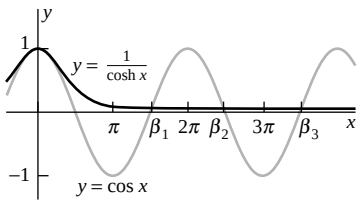


Рис. 10.3.2. Решения уравнения $\cosh x\ \cos x = 1$

Пример 1 Предположим, например, что основной элемент конструкции моста — стальная двухтавровая балка (балка двутаврового сечения) длиной 120 футов с поперечным сечением, показанным на рис. 10.3.3, имеет момент инерции $I = 9000\,\text{см}^4$. Если мы подставим значения

$$L = (120\,\text{футов})\left(30{,}48\,\frac{\text{см}}{\text{футов}}\right), \quad \rho = \left(7{,}75\,\frac{\text{г}}{\text{см}^3}\right)(40\,\text{см}^2),$$
$$E = 2\times 10^{12}\,\frac{\text{дин}}{\text{см}^2},$$

и значения β_1 и β_2 в уравнение (19), мы найдем, что две самые низкие собственные частоты балки

$$\omega_1 \approx 12{,}74\,\frac{\text{радиан}}{\text{секунда}} \quad \left(122\,\frac{\text{колебаний}}{\text{минута}}\right) \quad \text{и}$$
$$\omega_2 \approx 35{,}13\,\frac{\text{радиан}}{\text{секунда}} \quad \left(335\,\frac{\text{колебаний}}{\text{минута}}\right).$$

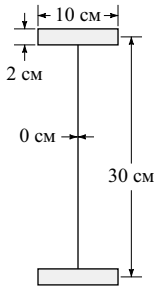


Рис. 10.3.3. Идеализированная двухтавровая балка (балка двутаврового сечения)

Если бы рота солдат, марширующих с частотой приблизительно 120 шагов в минуту, приближалась бы к этому мосту, им пришлось бы обязательно отдать приказ идти не в ногу перед переходом моста. Время от времени мосты разрушаются из-за резонансных колебаний. Вспомните катастрофу в гостинице города Канзас-Сити (Kansas City) в США 17 июля 1981 года, в результате которой разрушилась танцплощадка, заполненная танцорами. Газеты цитировали исследователей, которые размышляли о том, что ритмичное движение балерин вызвало разрушительные резонансные колебания в стальных двухтавровых балках (балках двутаврового сечения), которые поддерживали танцплощадку. ■

Подземные колебания температуры

Давайте предположим, что подземная температура в каком-нибудь конкретном месте является функцией $u(x,t)$ времени t и глубины x ниже поверхности грунта. Тогда u удовлетворяет уравнению теплопроводности $u_t = ku_{xx}$, где k — коэффициент температуропроводности грунта. Мы можем считать температуру $u(0,t)$ на поверхности $x = 0$ известной из отчетов о наблюдении погоды. И в самом деле, периодические сезонные колебания ежемесячных средних температур на поверхности, максимум которых приходится на разгар лета (июль в северном полушарии) и минимум на середину зимы (январь), очень близко напоминают колебания по закону косинуса или синуса. Поэтому мы предположим, что

$$u(0,t) = T_0 + A_0 \cos \omega t, \tag{20}$$

где мы полагаем $t = 0$ в разгар лета. Здесь T_0 — средняя годовая температура, A_0 — амплитуда сезонных колебаний температуры, а ω выбрано так, чтобы период $u(0,t)$ был равен точно одному году. (В единицах системы СГС (т. е. в единицах системы сантиметр–грамм–секунда), например, ω было бы равно частному от деления 2π на $31\,557\,341$ — число секунд в году.)

Разумно предположить, что температура на фиксированной глубине также изменяется периодически с изменением t. Для удобства мы обозначим $U(x,t) = u(x,t) - T_0$. Тогда мы интересуемся периодическими решениями уравнения теплопроводности вида

$$U(x,t) = A(x)\cos(\omega t - \gamma) = V(x)\cos \omega t + W(x)\sin \omega t \tag{21}$$

задачи

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad (x > 0,\ t > 0), \tag{22}$$

$$U(0,t) = A_0 \cos \omega t. \tag{23}$$

Чтобы решить эту задачу, давайте рассматривать $U(x,t)$ в равенстве (21) в качестве вещественной части комплекснозначной функции

$$\widetilde{U}(x,t) = X(x)e^{i\omega t}. \tag{24}$$

Тогда нужно, чтобы $\widetilde{U}(x,t)$ удовлетворяла условиям

$$\widetilde{U}_t = k\widetilde{U}_{xx}, \tag{22$'$}$$

$$\widetilde{U}(0,t) \ = \ A_0 e^{i\omega t}. \tag{23$'$}$$

Подставив равенство (24) в уравнение (22′), получим $i\omega X = kX''$; т. е.

$$X'' - \alpha^2 X = 0, \tag{25}$$

где

$$\alpha = \pm\sqrt{\frac{i\omega}{k}} = \pm(1+i)\sqrt{\frac{\omega}{2k}}, \tag{26}$$

потому что $\sqrt{i} = \pm(1+i)/\sqrt{2}$. Следовательно, общее решение уравнения (25) имеет вид

$$X(x) = A\exp\left(-(1+i)x\sqrt{\omega/2k}\right) + B\exp\left(+(1+i)x\sqrt{\omega/2k}\right). \tag{27}$$

Чтобы функция $\widetilde{U}(x,t)$ и, следовательно, функция $X(x)$, была ограничена при $x \to +\infty$, необходимо, чтобы $B = 0$. Кроме того, из уравнений (23′) и (24) мы видим, что $A = X(0) = A_0$. Так что

$$X(x) = A_0\exp\left(-(1+i)x\sqrt{\omega/2k}\right). \tag{28}$$

Наконец, решение нашей первоначальной задачи (22)–(23) имеет вид

$$\begin{aligned} U(x,t) &= \operatorname{Re}\widetilde{U}(x,t) = \operatorname{Re} X(x)e^{i\omega t} = \\ &= \operatorname{Re}\left\{(A_0\exp(i\omega t)\exp\left(-(1+i)x\sqrt{\omega/2k}\right)\right\} = \\ &= \operatorname{Re}\left\{A_0\exp\left(-x\sqrt{\omega/2k}\right)\exp\left(i(\omega t - x\sqrt{\omega/2k})\right)\right\}; \end{aligned}$$

следовательно,

$$U(x,t) = A_0\exp\left(-x\sqrt{\omega/2k}\right)\cos\left(\omega t - x\sqrt{\omega/2k}\right). \tag{29}$$

Таким образом, амплитуда $A(x)$ колебаний годовой температуры затухает по экспоненциальному закону — как функция глубины x она имеет вид

$$A(x) = A_0 \exp\left(-x\sqrt{\omega/2k}\right). \tag{30}$$

Кроме того, есть фазовая задержка $\gamma(x) = x\sqrt{\omega/2k}$ на глубине x.

Пример 2 При $k = 0{,}005$ (типичное значение для грунта в единицах системы СГС (т. е. в единицах системы сантиметр–грамм–секунда)) и ранее указанном значении ω мы находим, что $\sqrt{\omega/2k} \approx 0{,}00446$ см$^{-1}$. Например, из равенства (30) при наших предположениях мы видим, что амплитуда равна половине амплитуды на поверхности, $A(x) = \frac{1}{2}A_0$ при $(0{,}00446)x = \ln 2$; т. е. когда $x \approx 155{,}30$ см $\approx 5{,}10$ футов. Если $A_0 = 16°$, то на глубине приблизительно 20 футов амплитуда ежегодных колебаний температуры равна всего лишь $1°$. ■

Пример 3 Другое интересное следствие уравнения (29) — "инверсия времен года", которая происходит при $\gamma(x) = (0{,}00446)x = \pi$; т. е. на глубине $x \approx 704{,}39$ см, приблизительно 23,11 футов. На рис. 10.3.4 показан график $U = U(x,t)$ для $0 \leqq x \leqq X$, $0 \leqq t \leqq T$, где X равно 23 футам (но метки нанесены в сантиметрах) и T равно 2,5 года (хотя метки нанесены в секундах). Внимательно посмотрите на правый край графика. Видите ли

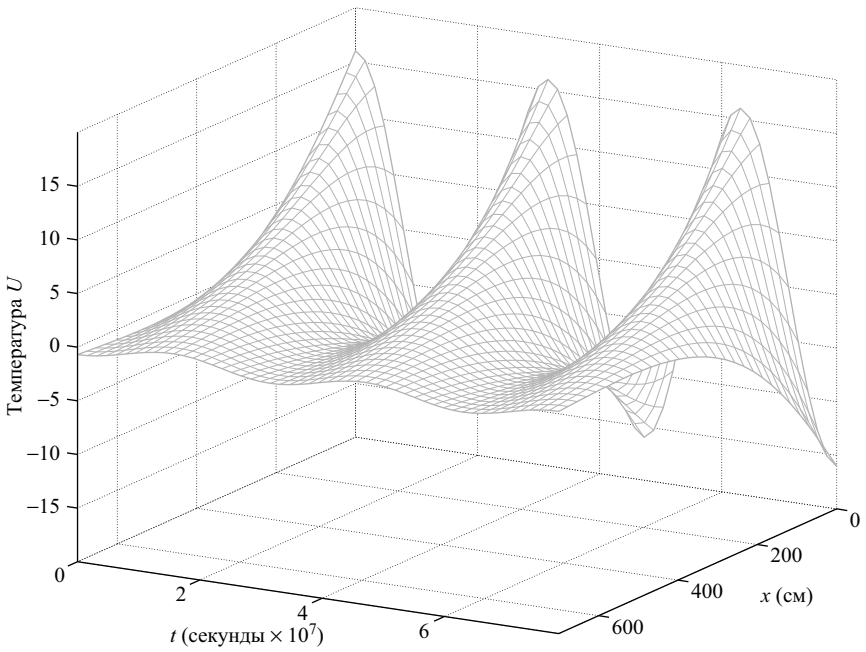


Рис. 10.3.4. График функции, задающей распределение температур $U(x,t)$ в уравнении (29)

вы, что температура на глубине 23 футов окажется максимальной тогда, когда поверхностная температура минимальна? ■

10.3. Задачи

Однородный стержень длины L сделан из материала, плотность которого равна δ, а модуль Юнга равен E. В задачах 1–6 подставьте $u(x,t) = X(x)\cos\omega t$ в $\delta u_{tt} = Eu_{xx}$ и найдите собственные частоты продольных колебаний стержня при двух заданных условиях на его концах $x = 0$ и $x = L$.

1. Оба конца фиксированы (защемлены).
2. Оба конца свободны.
3. Конец в точке $x = 0$ фиксирован (защемлен); конец в точке $x = L$ свободен.
4. Конец в точке $x = 0$ фиксирован (защемлен); к свободному концу в точке $x = L$ прикреплена масса m, как в примере 2 из раздела 10.2.
5. Каждый конец свободен, но к концу в точке $x = L$ прикреплена пружина с константой Гука k, как в задаче 12 из раздела 10.2.
6. К свободным концам прикреплены массы m_0 и m_1.
7. Предположим, что материальная точка заданной массы на свободном конце в точке $x = L$ в задаче 4 прикреплена также к пружине из задачи 5. Покажите, что собственные частоты можно вычислить по формуле $\omega_n = (\beta_n/L)\sqrt{E/\delta}$, где $\{\beta_n\}_1^\infty$ — положительные корни уравнения

$$(mEx^2 - k\delta L^2)\sin x \;=\; MEx\cos x.$$

(*Примечание*. Условие в точке $x = L$ имеет вид $mu_{tt} = -AEu_x - ku$.)

В задачах 8–14 рассматриваются поперечные колебания однородной балки из этого раздела, но с различными условиями на концах. В каждом из случаев покажите, что собственные частоты можно вычислить по формуле (19), где $\{\beta_n\}_1^\infty$ являются положительными корнями данного частотного уравнения. Вспомните, что $y = y' = 0$ в защемленном конце конструкции, $y = y'' = 0$ в подвешенном (или шарнирно закрепленном) конце и $y'' = y^{(3)} = 0$ в свободном конце (штрихи обозначают производные по x).

8. Оба конца в точках $x = 0$ и $x = L$ защемлены; частотное уравнение имеет вид $\sin x = 0$, так что $\beta_n = n\pi$.
9. Конец в точке $x = 0$ защемлен, а конец в точке $x = L$ подвешен (или закреплен на шарнире); частотное уравнение имеет вид $\tanh x = \operatorname{tg} x$.
10. Балка представляет собой консоль с защемленным концом в точке $x = 0$ и свободным концом в точке $x = L$; частотное уравнение имеет вид $\cosh x \cos x = -1$.
11. Конец в точке $x = 0$ защемлен, а конец в точке $x = L$ присоединен к вертикально скользящему зажиму, так что на этом конце $y' = y^{(3)} = 0$; частотное уравнение имеет вид $\tanh x + \operatorname{tg} x = 0$.
12. Консоль из задачи 10 имеет полную массу $M = \rho L$, причем к ее свободному концу прикрепили массу m; частотное уравнение имеет вид

$$M(1 + \cosh x\,\cos x) = mx(\cosh x\,\sin x - \sinh x\,\cos x).$$

Условия в точке $x = L$ имеют вид $y_{xx} = 0$ и $my_{tt} = EIy_{xxx}$.

13. Свободный конец в точке $x = L$ консоли из задачи 10 прикреплен (как на рис. 10.3.5) к пружине с константой Гука k; частотное уравнение имеет вид

$$EIx^3(1 + \cosh x\,\cos x) = kL^3(\sinh x\,\cos x - \cosh x\,\sin x).$$

Условия в точке $x = L$ имеют вид $y_{xx} = 0$ и $ky = EIy_{xxx}$.

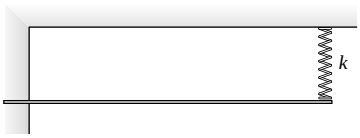


Рис. 10.3.5. Консоль из задачи 13

14. Предположим, что материальная точка массой m на свободном конце консоли из задачи 12 присоединена к пружине из задачи 13. Условия в точке $x = L$ имеют вид $y_{xx} = 0$ и $my_{tt} = = EIy_{xxx} - ky$. Получите частотное уравнение

$$MEIx^3(1 + \cosh x \cos x) = (kML^3 - mEIx^4)(\sinh x \cos x - \cosh x \sin x).$$

Обратите внимание, что частотные уравнения в задачах 12 и 13 являются частными случаями этого уравнения при $k = 0$ и $m = 0$ соответственно.

15. Предположим, что консоль из задачи 10 представляет собой трамплин для прыжков, сделанный из стали с плотностью $\delta = 7{,}75$ г/см^3. Трамплин для прыжков имеет длину 4 м, а его поперечное сечение представляет собой прямоугольник шириной $a = 30$ см и толщиной $b = 2$ см. Момент инерции этого прямоугольника вокруг его горизонтальной оси симметрии равен $I = \frac{1}{12}ab^3$. Учитывая, что наименьший положительный корень уравнения $\cosh x \cos x = -1$ равен $\beta_1 \approx 1{,}8751$, определите частоту (в герцах), с которой человек должен подпрыгивать вверх и вниз на конце трамплина для для максимального (резонансного) эффекта.

16. Если однородный стержень, подвешенный в каждом конце, подвергается осевой силе сжатия P, то его поперечные колебания удовлетворяют уравнению

$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0.$$

Покажите, что его собственные частоты выражаются формулой

$$\omega_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}\left(1 - \frac{PL^2}{n^2\pi^2 EI}\right)^{1/2}\sqrt{\frac{EI}{\rho}}$$

для $n = 1, 2, 3, \ldots$. Обратите внимание, что при $P = 0$ полученная формула приводит к результату в примере 3 из раздела 10.2 и что при $P > 0$ должно увеличиваться значение каждого из ω_n.

17. Балка, подвешенная в каждом конце достаточно толста, так что должна быть принята во внимание ее кинетическая энергия вращения. В этом случае дифференциальное уравнение ее поперечных колебаний имеет вид

$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{I}{A}\frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0.$$

Покажите, что ее собственные частоты можно вычислить по формуле

$$\omega_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}\left(1 + \frac{n^2\pi^2 I}{\rho AL^2}\right)^{-1/2}\sqrt{\frac{EI}{\rho}}$$

для $n = 1, 2, 3, \ldots$.

18. Предположим, что конец $x = 0$ однородного стержня с поперечным сечением площади A и модулем Юнга E защемлен, в то время как продольная сила $F(t) = F_0 \sin \omega t$ действует на

его конец $x = L$, так что $AEu_x(L,t) = F_0 \sin \omega t$. Выведите, что установившееся периодическое решение имеет вид

$$u(x,t) = \frac{F_0 a \sin(\omega x/a) \sin \omega t}{AE\omega \cos(\omega L/a)}.$$

19. Снова решите задачу 18, однако теперь поперечная сила $F(t) = F_0 \sin \omega t$ действует на свободный конец $x = L$, так что

$$y_{xx}(L,t) = EIy_{xxx}(L,t) + F_0 \sin \omega t = 0.$$

Найдите устойчивые периодические поперечные колебания консоли в виде $y(x,t) = X(x) \sin \omega t$.

20. На струну с защемленными концами действует периодическая сила $F(x,t) = F(x) \sin \omega t$ (на единицу массы), так что

$$y_{tt} = a^2 y_{xx} + F(x) \sin \omega t.$$

Подставьте

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \omega t$$

и

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

и получите формулу установившегося периодического решения

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n \sin(n\pi x/a) \sin \omega t}{\omega_n^2 - \omega^2},$$

где $\omega_n = n\pi a/L$. Следовательно резонанс не произойдет, если $\omega = \omega_n$, но $F_n = 0$.

21. Предположим, что на струну из задачи 20 действует также сила сопротивления воздуха, пропорциональная скорости струны, так что

$$y_{tt} = a^2 y_{xx} - cy_t + F(x) \sin \omega t.$$

Обобщите метод задачи 20, чтобы получить установившееся периодическое решение

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n F_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sin(\omega t - \alpha_n),$$

где

$$\rho_n = \left[(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 c^2\right]^{-1/2}$$

и

$$\alpha_n = \operatorname{arctg} \frac{\omega c}{\omega_n^2 - \omega^2}.$$

Обратите внимание на сходство с затухающим вынужденным движением материальной точки заданной массы на пружине.

22. **Телефонное уравнение** для напряжения $e(x,t)$ в длинной линии передачи в точке $x \geqq 0$ в момент времени t имеет вид

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} + (RC + LG)\frac{\partial e}{\partial t} + RGe,$$

где R, L, G и C обозначают сопротивление, индуктивность, проводимость и емкость (все на единицу длины линии) соответственно. Условие $e(0,t) = E_0 \cos \omega t$ представляет периодическое сигнальное напряжение в начале координат линии передачи в точке $x = 0$. Предположите,

что $e(x,t)$ ограничено при $x \to +\infty$. Подставьте $\widetilde{e}(x,t) = E(x)e^{i\omega t}$ и получите установившееся периодическое решение

$$e(x,t) = E_0 e^{-\alpha x}\cos(\omega t - \beta x),$$

где α и β — соответственно вещественная и мнимая части комплексного числа

$$\left[(RG - LC\omega^2) + i\omega(RC + LG)\right]^{1/2}.$$

23. В точке $x \geqq 0$ в момент времени t температура $u(x,t)$ воды, двигающейся со скоростью $\gamma \geqq 0$ в длинном канале удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Предположим, что $u(0,t) = A_0\cos\omega t$ и что $u(x,t)$ ограничена при $x \to +\infty$. Подставьте $\widetilde{u}(x,t) = X(x)e^{i\omega t}$ и получите установившееся периодическое решение

$$u(x,t) = A_0 e^{-\alpha x}\cos(\omega t - \beta x),$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2k}\left(\gamma^4 + 16k^2\omega^2\right)^{1/4}\cos\frac{\phi}{2} - \frac{\gamma}{2k},$$

$$\beta = \frac{1}{2k}\left(\gamma^4 + 16k^2\omega^2\right)^{1/4}\sin\frac{\phi}{2} \qquad \text{и}$$

$$\phi = \operatorname{arctg}\frac{4k}{\gamma^2}.$$

Покажите также, что при $\gamma = 0$ это решение приводит к решению, выраженному равенством (29).

10.3. Приложение. Колебания балок и трамплины для прыжков

В этом проекте вы должны продолжить исследование поперечных колебаний упругого стержня или балки длиной L, чья функция, выражающая положение $y(x,t)$, удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \qquad (0 < x < L)$$

и начальным условиям $y(x,0) = f(x)$, $y_t(x,0) = 0$.

Сначала отделите переменные (как в примере 3 из раздела 10.3), чтобы получить формальное решение в виде ряда

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\left(\cos\frac{\beta_n^2 a^2 t}{L^2}\right)X_n(x),$$

где $a^4 = EI/\rho$, $\{c_n\}$ — соответствующие коэффициенты разложения по собственным функциям начальной функции $f(x)$, выражающей положение, а $\{\beta_n\}_1^\infty$ и $X_n(x)$ определены

условиями на концах, наложенными на стержень. В данном случае мы хотим найти не только **частотное уравнение**, положительные корни которого равны $\{\beta_n\}_1^\infty$, но и собственные функции $\{X_n(x)\}$. В этом разделе мы видели, что частотное уравнение для случая, когда защемлены оба конца (при $y(0) = y'(0) = y(L) = y'(L) = 0$), имеет вид $\cosh x \cos x = 1$. Это уравнение можно решить с помощью методов, применяемых в компьютерных системах, — эти методы подобны проиллюстрированным в приложениях для разделов 10.1 и 10.2; в таблице на рис. 10.3.6 перечислены первые десять положительных решений (корней) $\{\beta_n\}_1^{10}$. Вычисления, предшествующие уравнению (18) в этом разделе, показывают, что n-я собственная функция в данном случае дается формулой

$$X_n(x) = A_n \left(\cosh \frac{\beta_n x}{L} - \cos \frac{\beta_n x}{L} \right) + B_n \left(\sinh \frac{\beta_n x}{L} - \sin \frac{\beta_n x}{L} \right),$$

где отношение A_n/B_n определяется из условия в конечной точке $X_n(L) = 0$. Графики первых трех из этих собственных функций приведены на рис. 10.3.7, который был вычерчен для 120-футовой стальной двухтавровой балки из этого раздела при условии, что каждый коэффициент $A_n = 1$ и $L = 3657{,}6$ см. То, что оказалось, что каждый график (как и должно быть), имеет нулевой наклон в обеих конечных точках, служит подтверждением вычислений, которые использовались для генерации рисунка.

Следующие случаи описывают другие модели колебаний балки, которые вы самостоятельно можете исследовать подобным способом.

n	β_n
1	4,7300
2	7,8532
3	10,9956
4	14,1372
5	17,2788
6	20,4204
7	23,5619
8	26,7035
9	29,8451
10	32,9867

Рис. 10.3.6. Первые 10 положительных корней уравнения собственных значений $\cosh x \cos x = 1$ для колеблющейся балки с фиксированными (защемленными) концами

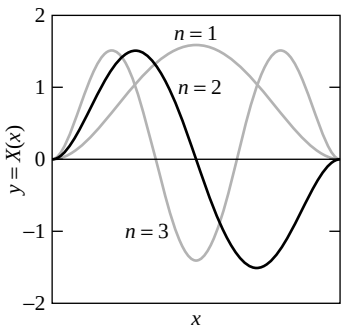


Рис. 10.3.7. Графики первых трех собственных функций $y = X_n(x)$ для двутавровой балки с фиксированными (защемленными) концами

Случай 1. Балка подвешена (или шарнирно закреплена) на каждом конце

Граничные условия имеют вид

$$y(0) = y''(0) = y(L) = y''(L) = 0.$$

Согласно задаче 8, частотное уравнение имеет вид $\sin x = 0$, так что $\beta_n = n\pi$ и $X_n(x) = \sin n\pi x$. Предположим, что стержень сделан из стали (с плотностью $\delta = 7{,}75$ г/см^3 и модулем Юнга $E = 2 \times 10^{12}$ дин/см^2), причем его длина равна 19 дюймам, а квадратное поперечное сечение имеет сторону $w = 1$ дюйм (так что его момент инерции равен $I = \frac{1}{12}w^4$). Определите первые несколько собственных частот его колебаний (в Гц). Как звучит этот стержень, когда он колеблется?

Случай 2. Каждый конец свободен

Граничные условия имеют вид

$$y''(0) = y^{(3)}(0) = y''(L) = y^{(3)}(L) = 0.$$

Этот случай моделирует, например, невесомый стержень, подвешенный в пространстве в орбитальном космическом корабле. Теперь покажите, что частотное уравнение имеет вид $\cosh x \cos x = 1$ (хотя собственные функции отличаются от собственных функций для случая защемленных обоих концов). Решите это уравнение (графически или численными методами, как показано в приложении к разделу 10.2), чтобы найти приближения для первых нескольких собственных частот колебаний того же самого стержня, который был рассмотрен в случае 1. Как этот стержень звучит теперь?

Случай 3. Конец в точке x = 0 защемлен, а конец в точке x = L свободен

Теперь граничные условия имеют вид

$$y(0) = y'(0) = y''(L) = y^{(3)}(L) = 0.$$

Это **консоль**, подобная трамплину для прыжков, показанному на рис. 10.3.8. Согласно задаче 15, частотное уравнение имеет вид $\cosh x \cos x = -1$. Найдите приближения для первых нескольких положительных решений (корней) этого уравнения и покажите графически, что $\beta_n \approx (2n-1)\pi/2$ для n больших. Таким образом определите первые несколько собственных

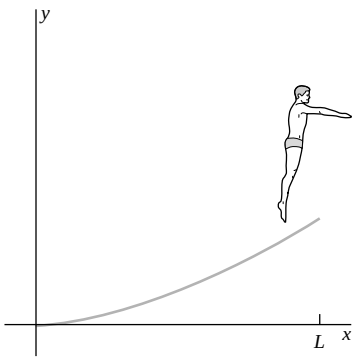


Рис. 10.3.8. Наиболее захватывающие прыжки в воду определены частотным уравнением для случая 3

частот (в Гц) колебаний трамплина для прыжков, описанного в задаче 15. Это те частоты, на которых ныряльщик на этом трамплине должен прыгать вверх и вниз на свободном конце для достижения максимального резонансного эффекта.

10.4. Задачи в цилиндрических координатах

Преобразовав лапласиан $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ функции $u = y(x, y, z)$ подстановкой $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, получим **выражение лапласиана в цилиндрических координатах**,

➤
$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{1}$$

В качестве типичного приложения рассмотрим очень длинный однородный твердый цилиндр радиуса c, ось которого совпадает с осью z. Предположим, что первоначально он нагрет, причем его начальная температура зависит только от расстояния r от оси z, а в момент времени $t = 0$ на его поверхности $r = c$ выполняется условие

$$(\beta_1 u + \beta_2 u_r)\Big|_{r=c} = 0. \tag{2}$$

Обратите внимание на следующие частные случаи для уравнения (2).

- Оно сводится к условию $u = 0$, если $\beta_1 = 1$ и $\beta_2 = 0$.
- Оно сводится к условию изоляции $u_r = 0$, если $\beta_1 = 0$ и $\beta_2 = 1$.
- Оно сводится к условию теплообмена $hu + u_r = 0$, если $\beta_1 = h$ и $\beta_2 = 1$.

Разумно ожидать, что температура u в пределах цилиндра в момент времени t зависит только от r, так что мы пишем $u = u(r, t)$. Тогда $u_{\theta\theta} = u_{zz} = 0$, так что подстановка (1) в уравнение теплопроводности $u_t = k\nabla^2 u$ приводит к граничной задаче

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) \qquad (r < c,\ t > 0); \tag{3}$$

➤
$$\beta_1 u(c, t) + \beta_2 u_r(c, t) = 0, \tag{4}$$

$$u(r, 0) = f(r) \qquad \text{(начальная температура)}. \tag{5}$$

Чтобы решить эту задачу методом разделения переменных, мы подставляем

$$u(r, t) = R(r)T(t)$$

в уравнение (3); таким способом мы получаем уравнение

$$RT' = k\left(R''T + \frac{1}{r}R'T\right). \tag{6}$$

Деление на kRT приводит к равенству

$$\frac{R'' + R'/r}{R} = \frac{T'}{kT} = -\lambda. \tag{7}$$

Следовательно, функция $R(r)$ должна удовлетворять уравнению

$$R'' + \frac{1}{r}R' + \lambda R = 0, \tag{8}$$

а также уравнению $\beta_1 R(c) + \beta_2 R'(c) = 0$, которое следует из уравнения (4). Кроме того, из уравнения

$$T' = -\lambda k T$$

следует, что $T(t) = e^{-\lambda k t}$ с точностью до постоянного числового множителя. Поскольку коэффициент диффузии k положителен, из этого следует, что λ должно быть неотрицательным, если $T(t)$ ограничено при $t \to +\infty$, как требуется в данной физической задаче, моделью которой являются уравнения (3)–(5). Мы поэтому пишем $\lambda = \alpha^2$, так что уравнение (8) принимает вид

$$r^2 R'' + rR' + \alpha^2 r^2 R = 0. \tag{8'}$$

Особая (сингулярная) задача Штурма–Лиувилля

Уравнение (8′) при $x = r$ и $y(x) = R(r)$ представляет собой параметрическое уравнение Бесселя

$$x^2 y'' + xy' + \alpha^2 x^2 y = 0 \tag{9}$$

нулевого порядка, которое мы обсуждали в разделе 8.5. Вспомните, что более общее параметрическое уравнение Бесселя

➤
$$x^2 y'' + xy' + (\alpha^2 x^2 - n^2) y = 0 \tag{10}$$

имеет общее решение

➤
$$y(x) = AJ_n(\alpha x) + BY_n(\alpha x), \tag{11}$$

если $\alpha > 0$. После деления на x уравнение Бесселя (10) принимает вид уравнения Штурма–Лиувилля

➤
$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) - \frac{n^2}{x}y + \lambda x y = 0 \tag{12}$$

для $p(x) = x$, $q(x) = n^2/x$, $r(x) = x$ и $\lambda = \alpha^2$. Мы хотим определить те неотрицательные значения λ, при которых существует решение уравнения (12) на интервале $(0, c)$, которое является *непрерывным* (вместе со своей производной dy/dx) на замкнутом интервале $[0, c]$ и удовлетворяет условию в конечной точке

$$\beta_1 y(c) + \beta_2 y'(c) = 0, \tag{13}$$

где хотя бы одно из чисел β_1 и β_2 отлично от нуля.

Задача Штурма–Лиувилля, связанная с уравнениями (12) и (13), является *особой (сингулярной)*, потому что $p(0) = r(0) = 0$ и $q(x) \to +\infty$ при $x \to 0^+$, тогда как в теореме 1 из раздела 10.1 считалось, что функции $p(x)$ и $r(x)$ положительны и $q(x)$ непрерывна на всем интервале. Эта задача также не соответствует шаблону из раздела 10.1, поскольку никакое условие, подобное (13), не наложено в левой конечной точке $x = 0$. Однако требование, что-

бы $y(x)$ была непрерывна на интервале $[0, c]$ как раз и играет роль такого условия. Поскольку $Y_n(x) \to -\infty$ при $x \to 0$, решение, выраженное равенством (11) для $\alpha > 0$, может быть непрерывным в точке $x = 0$, только если $B = 0$, так что

$$y(x) = J_n(\alpha x)$$

с точностью до постоянного числового множителя. Остается только наложить условие в точке $x = c$, выраженное в уравнении (13).

Удобно различать случаи $\beta_2 = 0$ и $\beta_2 \neq 0$. Если $\beta_2 = 0$, то уравнение (13) принимает простую форму

➤ $$y(c) = 0. \tag{13a}$$

Если $\beta_2 \neq 0$, мы умножаем каждую часть уравнения (13) на c/β_2 и затем полагаем $h = c\beta_1/\beta_2$; в результате этого получаем эквивалентное условие

➤ $$hy(c) + cy'(c) = 0. \tag{13b}$$

Мы принимаем после этого, что $h \geqq 0$.

Случай 1: $\lambda = 0$. Мы сначала рассматриваем возможность нулевого собственного значения $\lambda = 0$. Если $\lambda = 0$ и $n = 0$, то уравнение (12) приводит к уравнению $(xy')' = 0$ с общим решением

$$y(x) = A \ln x + B,$$

а из непрерывности на $[0, c]$ следует, что $A = 0$. Но тогда из уравнения (13a) следует, что также и $B = 0$; то же самое следует и из уравнения (13b), если только неверно, что $h = 0$, но в этом случае $\lambda = 0$ — собственное значение, которому соответствует собственная функция $y(x) \equiv 1$.

Если $\lambda = 0$, но $n > 0$, то уравнение (12) просто превращается в уравнение

$$x^2y'' + xy' - n^2y = 0$$

с общим решением (подставьте пробное решение $y = x^k$, как в разделе 9.7)

$$y(x) = Ax^n + Bx^{-n},$$

а из непрерывности на $[0, c]$ следует, что $B = 0$. Но просто проверить, что $y(x) = Ax^n$ не удовлетворяет ни уравнению (13a), ни уравнению (13b), если неверно, что $A = 0$. Таким образом, $\lambda = 0$ не является собственным значением, если $n > 0$. Мы поэтому показали, что $\lambda = 0$ *является собственным значением задачи* (12)–(13) *тогда и только тогда*, когда $n = h = 0$ *и условие в конечной точке* $x = c$ *имеет вид* $y'(c) = 0$, *а в этом случае соответствующая собственная функция имеет вид* $y(x) \equiv 1$. В этом случае мы пишем

$$\lambda_0 = 0 \quad \text{и} \quad y_0(x) \equiv 1.$$

Случай 2: $\lambda > 0$. Если $\lambda > 0$, то $\lambda = \alpha^2 > 0$, и в этом случае единственное решение уравнения (12), которое является непрерывным на $[0, c]$, с точностью до постоянного числового множителя имеет вид

$$y(x) = J_n(\alpha x).$$

Тогда из уравнения (13a) следует, что $J_n(\alpha c) = 0$; другими словами, αc должно быть положительным корнем уравнения

$$J_n(x) = 0. \tag{14a}$$

Вспомните из раздела 8.5, что графики $J_0(x)$ и $J_1(x)$ выглядят так, как показано на рис. 10.4.1. График $J_n(x)$ для $n > 1$ напоминает график $J_1(x)$, даже в той детали, что $J_n(0) = 0$. В частности, для каждого $n = 1, 2, 3, \ldots$, уравнение (14a) имеет возрастающую бесконечную последовательность $\{\gamma_{nk}\}_{k=1}^{\infty}$ положительных корней, такую что $\gamma_{nk} \to +\infty$ при $k \to +\infty$. Эти корни для $n \leqq 8$ и $k \leqq 20$ даются в таблице 9.5 справочника по специальным функциям М. Абрамовица и И. Стиган (Abramowitz and Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*).

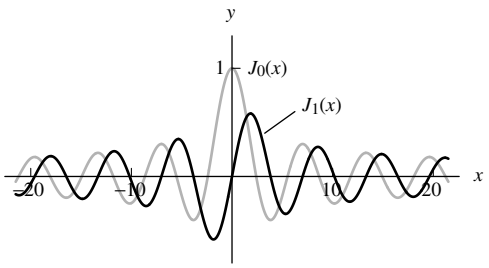


Рис. 10.4.1. Графики функций Бесселя $J_0(x)$ и $J_1(x)$

Если $y(x) = J_n(\alpha x)$, так что $dy/dx = \alpha J_n'(\alpha x)$, то из уравнения (13b) следует, что

$$hJ_n(\alpha c) + \alpha c J_n'(\alpha c) = 0,$$

т. е. что αc — положительный корень уравнения

$$hJ_n(x) + xJ_n'(x) = 0. \tag{14b}$$

Известно, что это уравнение также имеет возрастающую бесконечную последовательность $\{\gamma_{nk}\}_{k=1}^{\infty}$ положительных корней, расходящихся к $+\infty$. Если $h = 0$, то уравнение (14b) приводит к уравнению $J_n'(x) = 0$; корни этого уравнения приведены в таблице 9.5 справочника по специальным функциям М. Абрамовица и И. Стиган (Abramowitz and Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*). В важном случае $n = 0$ первые пять корней уравнения (14b) для различных значений h могут быть найдены в таблице 9.7 того же самого справочника.

Если выполняется какое-либо из граничных условий в равенствах (13a) или (13b), то k-е положительное собственное значение равно

$$\lambda_k = \frac{\gamma_k^2}{c^2},$$

где мы обозначаем через γ_k k-й положительный корень соответствующего уравнения (14a) или (14b); соответствующая собственная функция имеет вид

$$y_k(x) = J_n\left(\frac{\gamma_k x}{c}\right).$$

Условие в конечной точке	Собственные значения	Соответствующие собственные функции
Случай 1:		
$y(c) = 0$	$\lambda_k = \gamma_k^2/c^2$; $\{\gamma_k\}_1^\infty$ положительные корни уравнения $J_n(x) = 0$	$y_k(x) = J_n\left(\frac{\gamma_k x}{c}\right)$
Случай 2:		
$hy(c) + cy'(c) = 0$; хотя бы одно из чисел h или n отлично от нуля	$\lambda_k = \gamma_k^2/c^2$; $\{\gamma_k\}_1^\infty$ положительные корни уравнения $hJ_n(x) + xJ_n'(x) = 0$	$y_k(x) = J_n\left(\frac{\gamma_k x}{c}\right)$
Случай 3:		
$y'(c) = 0$, $n = 0$	$\lambda_0 = 0$, $\lambda_k = \gamma_k^2/c^2$; $\{\gamma_k\}_1^\infty$ положительные корни уравнения $J_0'(x) = 0$	$y_0(x) = 1$, $y_k(x) = J_0\left(\frac{\gamma_k x}{c}\right)$

Рис. 10.4.2. Собственные значения и собственные функции особой (сингулярной) задачи Штурма–Лиувилля

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dy}{dx}\right] - \frac{n^2}{x}y + \lambda xy = 0, \quad \beta_1 y(c) + \beta_2 y'(c) = 0 \quad \text{на интервале } [0, c]$$

В таблице на рис. 10.4.2 приведены итоги нашего исследования, они могут пригодиться для справки. Исключительный случай $n = h = 0$, соответствующий условию в конечной точке $y'(c) = 0$, рассмотрен отдельно. Мы обсудили только неотрицательные собственные значения, но может быть доказано, что задача (12)–(13) не имеет отрицательных собственных значений. (См. раздел 78 3-го издания книги Черчилла и Брауна, посвященной рядам Фурье и граничным (краевым) задачам. Эта книга была издана в Нью-Йорке в 1978 году: R. V. Churchill and J. W. Brown, *Fourier Series and Boundary Value Problems*, 3rd ed. (New York: McGraw-Hill, 1978).)

Ряды Фурье–Бесселя

Теперь, когда мы знаем, что особая (сингулярная) задача Штурма–Лиувилля (12)–(13) имеет бесконечную последовательность собственных значений и соответствующих им собственных функций, подобных таковым из регулярной задачи Штурма–Лиувилля, мы можем обсудить разложения по собственным функциям. В случае 1 и в случае 2 из рис. 10.4.2 мы ожидаем, что кусочно гладкая функция $f(x)$ на $[0, c]$ будет разлагаться в ряд по собственным функциям вида

➤
$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k y_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_n\left(\frac{\gamma_k x}{c}\right), \tag{15}$$

в то время как в исключительном случае 3 ряд будет также содержать постоянный член c_0, соответствующий $\lambda_0 = 0, y_0(x) \equiv 1$. Если справедливо заключение теоремы 2 из раздела 10.1

(несмотря на то, что ее условия не удовлетворяются), то собственные функции

$$J_n\left(\frac{\gamma_k x}{c}\right), \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

должны быть ортогональны на $[0, c]$ с весовой функцией $r(x) = x$. Действительно, если мы подставим $p(x) = r(x) = x$ и

$$y_k(x) = J_n\left(\frac{\gamma_k x}{c}\right), \quad y_k'(x) = \frac{\gamma_k}{c} J_n'\left(\frac{\gamma_k x}{c}\right)$$

в уравнение (22) раздела 10.1, в результате получим

$$(\lambda_i - \lambda_j)\int_0^c x J_n\left(\frac{\gamma_i x}{c}\right) J_n\left(\frac{\gamma_j x}{c}\right) dx =$$

$$= \left[x\left\{\frac{\gamma_j}{c} J_n\left(\frac{\gamma_i x}{c}\right) J_n'\left(\frac{\gamma_j x}{c}\right) - \frac{\gamma_i}{c} J_n\left(\frac{\gamma_j x}{c}\right) J_n'\left(\frac{\gamma_i x}{c}\right)\right\}\right]_0^c =$$

$$= \gamma_j J_n(\gamma_i) J_n'(\gamma_j) - \gamma_i J_n(\gamma_j) J_n'(\gamma_i). \tag{16}$$

Ясно, что величины, стоящие в равенстве (16), равны нулю, если γ_i и γ_j — корни уравнения (14a), $J_n(x) = 0$, но если они являются корнями уравнения (14b), это равенство сводится к

$$J_n(\gamma_i)\left[-hJ_n(\gamma_j)\right] - J_n(\gamma_j)\left[-hJ_n(\gamma_i)\right] = 0.$$

Таким образом, в любом случае мы видим, что если $i \neq j$, то

$$\int_0^c x J_n\left(\frac{\gamma_i x}{c}\right) J_n\left(\frac{\gamma_j x}{c}\right) dx = 0. \tag{17}$$

Это есть условие ортогональности с весовой функцией $r(x) = x$. Так что теперь мы должны определить коэффициенты в разложении в ряд по собственным функциям в равенстве (15). Если мы умножим каждый член в уравнении (15) на $xJ_n(\gamma_k x/c)$ и затем проинтегрируем почленно, мы получим

$$\int_0^c x f(x) J_n\left(\frac{\gamma_k x}{c}\right) dx = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \int_0^c x J_n\left(\frac{\gamma_j x}{c}\right) J_n\left(\frac{\gamma_k x}{c}\right) dx =$$

$$= c_k \int_0^c x\left[J_n\left(\frac{\gamma_k x}{c}\right)\right]^2 dx$$

с учетом равенства (17). Следовательно,

➤
$$c_k = \frac{\displaystyle\int_0^c x f(x) J_n(\gamma_k x/c)\, dx}{\displaystyle\int_0^c x\left[J_n(\gamma_k x/c)\right]^2 dx}. \tag{18}$$

Если коэффициенты вычисляются по этой формуле, ряды вида, данного в равенстве (15), часто называются рядами **Фурье–Бесселя**. Известно, что ряд Фурье–Бесселя для кусочно гладкой функции $f(x)$ удовлетворяет заключению о сходимости теоремы 3 из раздела 10.1. Иными словами, он сходится к среднему $\frac{1}{2}\left[f(x+) + f(x-)\right]$ в каждой точке $(0, c)$ и, следовательно, к значению $f(x)$ в каждой точке непрерывности внутри этого интервала.

Коэффициенты Фурье–Бесселя

Несмотря на свою устрашающую внешность, интегралы, стоящие в знаменателе в равенстве (18), вычислить совсем нетрудно. Предположим, что $y(x) = J_n(\alpha x)$, так что $y(x)$ удовлетворяет параметрическому уравнению Бесселя порядка n

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dy}{dx}\right] + \left(\alpha^2 x - \frac{n^2}{x}\right) y = 0. \tag{19}$$

Умножая это уравнение на $2xy'(x)$ и интегрируя по частям (задача 10), мы можем легко получить формулу

$$2\alpha^2 \int_0^c x\left[J_n(\alpha x)\right]^2 dx = \alpha^2 c^2 \left[J_n'(\alpha c)\right]^2 + \left(\alpha^2 c^2 - n^2\right)\left[J_n(\alpha c)\right]^2. \tag{20}$$

Теперь предположим, что $\alpha = \gamma_k/c$, где γ_k — корень уравнения $J_n(x) = 0$. Мы применяем равенство (20), а также рекуррентную формулу

$$xJ_n'(x) = nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x)$$

из раздела 8.5, и выводим, что $J_n'(\gamma_k) = -J_{n+1}(\gamma_k)$. В результате получаем

$$\int_0^c x\left[J_n\left(\frac{\gamma_k x}{c}\right)\right]^2 dx = \frac{c^2}{2}\left[J_n'(\gamma_k)\right]^2 = \frac{c^2}{2}\left[J_{n+1}(\gamma_k)\right]^2. \tag{21}$$

Другие строки в таблице на рис. 10.4.3 следуют подобным образом из равенства (20). Ряды Фурье–Бесселя при $n = 0$ самые общие (задача 9). Далее перечисляются формы, которые эти ряды принимают в рассмотреных нами трех случаях.

$\{\gamma_k\}_1^\infty$ **Положительные корни уравнения**	**Значение** $\int_0^c x\left[J_n\left(\frac{\gamma_k x}{c}\right)\right]^2 dx$
Случай 1:	
$J_n(x) = 0$	$\frac{c^2}{2}\left[J_{n+1}(\gamma_k)\right]^2$
Случай 2:	
$hJ_n(x) + xJ_n'(x) = 0$ (хотя бы одно из чисел n или h отлично от нуля)	$\frac{c^2(\gamma_k^2 - n^2 + h^2)}{2\gamma_k^2}\left[J_n(\gamma_k)\right]^2$
Случай 3:	
$J_0'(x) = 0$	$\frac{c^2}{2}\left[J_0(\gamma_k)\right]^2$

Рис. 10.4.3.

Случай 1 при $n = 0$. Если $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ — положительные корни уравнения $J_0(x) = 0$, то

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_0\left(\frac{\gamma_k x}{c}\right);$$

$$c_k = \frac{2}{c^2\left[J_1(\gamma_k)\right]^2}\int_0^c x f(x) J_0\left(\frac{\gamma_k x}{c}\right)\,dx. \tag{22}$$

Случай 2 при $n = 0$. Если $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ — положительные корни уравнения $hJ_0(x) + xJ_0'(x) = 0$, причем $h > 0$, то

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_0\left(\frac{\gamma_k x}{c}\right);$$

$$c_k = \frac{2\gamma_k^2}{c^2(\gamma_k^2 + h^2)\left[J_0(\gamma_k)\right]^2}\int_0^c x f(x) J_0\left(\frac{\gamma_k x}{c}\right)\,dx. \tag{23}$$

Случай 3. Если $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ — положительные корни уравнения $J_0'(x) = 0$, то (задача 10)

$$f(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_0\left(\frac{\gamma_k x}{c}\right); \tag{24a}$$

$$c_0 = \frac{2}{c^2}\int_0^c x f(x)\,dx, \tag{24b}$$

$$c_k = \frac{2}{c^2\left[J_0(\gamma_k)\right]^2}\int_0^c x f(x) J_0\left(\frac{\gamma_k x}{c}\right)\,dx. \tag{24c}$$

Приложения

Пример 1 Предположим, что длинный круговой цилиндр радиуса c имеет начальную температуру $u(r, 0) = u_0$ (константа). Найдем $u(r, t)$ в каждом из следующих трех случаев:

(a) $u(c, t) = 0$ (нулевая граничная температура);

(b) граница цилиндра изолирована, так что $u_r(c, t) = 0$;

(c) теплообмен происходит на поверхности цилиндра, так что

$$Hu(c, t) + Ku_r(c, t) = 0, \quad \text{где } H > 0, K > 0.$$

Решение Полагая $u(r, t) = R(r)T(t)$, мы раньше видели, что $\lambda = \alpha^2 > 0$ в уравнении (7), так что

$$r^2R'' + rR' + \alpha^2 r^2 R = 0 \tag{25}$$

и

$$T' = -\alpha^2 kT. \tag{26}$$

Уравнение (25) — параметрическое уравнение Бесселя нулевого порядка, его единственные непрерывные нетривиальные решения на $[0, c]$ имеют вид

$$R(r) = AJ_0(\alpha r), \tag{27}$$

но возможные значения α зависят от наложенных граничных условий.

Случай (а): нулевая граничная температура. Условие $u(c, t) = 0$ дает $R(c) = AJ_0(\alpha c) = 0$, так что αc должно быть одним из корней $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ уравнения $J_0(x) = 0$. Таким образом, собственные значения и собственные функции имеют вид

$$\lambda_n = \frac{\gamma_n^2}{c^2}, \quad R_n(r) = J_0\Big(\frac{\gamma_n r}{c}\Big) \tag{28}$$

для $n = 1, 2, 3, \ldots$. Тогда из уравнения

$$T_n' = -\left(\frac{\gamma_n^2}{c^2}\right) kT_n$$

следует, что

$$T_n(t) = \exp\left(-\frac{\gamma_n^2 kt}{c^2}\right)$$

с точностью до постоянного множителя. Следовательно, ряд

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\frac{\gamma_n^2 kt}{c^2}\right) J_0\Big(\frac{\gamma_n r}{c}\Big) \tag{29}$$

формально удовлетворяет уравнению теплопроводности и граничному (краевому, предельному) условию $u(c, t) = 0$. Поэтому остается выбрать коэффициенты так, чтобы

$$u(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0\left(\frac{\gamma_n r}{c}\right) = u_0.$$

Поскольку $J_0(\gamma_n) = 0$, уравнение (22) дает

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2u_0}{c^2\left[J_1(\gamma_n)\right]^2} \int_0^c r J_0\left(\frac{\gamma_n r}{c}\right) dr = \\ &= \frac{2u_0}{\gamma_n^2\left[J_1(\gamma_n)\right]^2} \int_0^{\gamma_n} x J_0(x)\, dx = \\ &= \frac{2u_0}{\gamma_n^2\left[J_1(\gamma_n)\right]^2} \Big[x J_1(x)\Big]_0^{\gamma_n} = \frac{2u_0}{\gamma_n J_1(\gamma_n)}. \end{aligned}$$

Здесь мы использовали интеграл

$$\int x J_0(x)\, dx = x J_1(x) + C.$$

Подставляя коэффициенты $\{c_n\}$ в уравнение (29), мы, наконец, получаем

$$u(r,t) = 2u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n J_1(\gamma_n)} \exp\left(\frac{-\gamma_n^2 kt}{c^2}\right) J_0\left(\frac{\gamma_n r}{c}\right). \qquad (30)$$

Благодаря присутствию экспоненциального множителя для числовых вычислений обычно необходимы только несколько членов ряда. Данные, требуемые для первых пяти членов, указаны на рис. 10.4.4. Например, предположим, что цилиндр имеет радиус $c = 10$ см, сделан из железа с коэффициентом температуропроводности $k = 0{,}15$, а начальная температура повсюду равна $u_0 = 100^\circ$C. Тогда, поскольку $J_0(0) = 1$, из уравнения (30) мы находим, что температура на его оси ($r = 0$) через две минуты ($t = 120$) будет равна

$$u(0,120) = 200 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n J_1(\gamma_n)} \exp(-[0{,}18]\gamma_n^2) \approx$$

$$\approx 200 \cdot (0{,}28283 - 0{,}00221 + 0{,}00000 - \cdots);$$

таким образом, $u(0,120)$ будет приблизительно равно $56{,}12^\circ$C.

n	γ_n	$J_1(\gamma_n)$
1	2,40483	+0,51915
2	5,52008	-0,34026
3	8,65373	+0,27145
4	11,79153	-0,23246
5	14,93092	+0,20655

Рис. 10.4.4. Корни уравнения $J_0(\gamma) = 0$

Случай (b): изолированная граница. В этом случае теплота никогда не рассеивается из горячего цилиндра, так что в конце концов мы должны найти, что его температура остается постоянной: $u(r,t) \equiv u_0$. Поскольку из $u_r(c,t) = 0$ следует, что $R'(c) = 0$, мы имеем $n = h = 0$ в уравнении (14b), и, следовательно, случай 3 на рис. 10.4.2. Поэтому $\lambda_0 = 0$ — собственное значение с соответствующей собственной функцией $R_0(r) \equiv 1$. Соответствующее решение уравнения (26) имеет вид $T_0(t) = 1$. Положительные собственные значения снова выражаются формулой (28), за исключением того, что теперь числа $\{\gamma_n\}_1^\infty$ — положительные корни уравнения $J_0'(x) = 0$. Поэтому решение имеет вид

$$u(r,t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\frac{\gamma_n^2 kt}{c^2}\right) J_0\left(\frac{\gamma_n r}{c}\right),$$

и мы хотим, чтобы

$$u(r,0) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0\left(\frac{\gamma_n r}{c}\right) = u_0.$$

Но теперь в случае 3 формулы для коэффициентов в (24) дают

$$c_0 = \frac{2}{c^2}\int_0^c r u_0\, dr = \frac{2u_0}{c^2}\left[\frac{1}{2}r^2\right]_0^c = u_0;$$

$$c_n = \frac{2u_0}{c^2\left[J_0(\gamma_n)\right]^2}\int_0^c r J_0\left(\frac{\gamma_n r}{c}\right)\, dr = \frac{2u_0}{\gamma_n^2\left[J_0(\gamma_n)\right]^2}\int_0^{\gamma_n} x J_0(x)\, dx =$$

$$= \frac{2u_0}{\gamma_n^2\left[J_0(\gamma_n)\right]^2}\left[x J_1(x)\right]_0^{\gamma_n} = \frac{2u_0 J_1(\gamma_n)}{\gamma_n\left[J_0(\gamma_n)\right]^2} = 0,$$

потому что $J_1(\gamma_n) = -J_0'(\gamma_n) = 0$. Таким образом, мы находим, что $u(r,t) \equiv u_0$, как и ожидалось.

Случай (c): теплообмен на границе. Подстановка $R(r) = J_0(\alpha r)$ в граничное (краевое, предельное) условие $HR(c) + KR'(c) = 0$ дает уравнение

$$HJ_0(\alpha c) + K\alpha J_0'(\alpha c) = 0,$$

которое принимает вид

$$hJ_0(\alpha c) + \alpha c J_0'(\alpha c) = 0 \tag{31}$$

при $h = cH/K > 0$. Сравнивая уравнение (31) с уравнением (14b), мы видим, что мы имеем случай 2 на рис. 10.4.2 при $n = 0$. Следовательно, собственные значения и соответствующие собственные функции выражаются формулами

$$\lambda_n = \frac{\gamma_n^2}{c^2}, \quad R_n(r) = J_0\left(\frac{\gamma_n r}{c}\right), \tag{32}$$

где $\{\gamma_n\}_1^\infty$ — положительные корни уравнения $hJ_0(x) + xJ_0'(x) = 0$. Теперь $T' = -\lambda k T$ как и прежде; следовательно, решение имеет вид

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\frac{\gamma_n^2 k t}{c^2}\right) J_0\left(\frac{\gamma_n r}{c}\right), \tag{33}$$

и уравнение (23) дает

$$c_n = \frac{2u_0\gamma_n^2}{c^2(\gamma_n^2 + h^2)\left[J_0(\gamma_n)\right]^2}\int_0^c r J_0\left(\frac{\gamma_n r}{c}\right)\, dr =$$

$$= \frac{2u_0}{(\gamma_n^2 + h^2)\left[J_0(\gamma_n)\right]^2}\int_0^{\gamma_n} x J_0(x)\, dx = \frac{2u_0\gamma_n J_1(\gamma_n)}{(\gamma_n^2 + h^2)\left[J_0(\gamma_n)\right]^2}.$$

Следовательно,

$$u(x,t) = 2u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n J_1(\gamma_n)}{(\gamma_n^2 + h^2)\left[J_0(\gamma_n)\right]^2} \exp\left(-\frac{\gamma_n^2 kt}{c^2}\right) J_0\left(\frac{\gamma_n r}{c}\right). \quad (34)$$

■

Пример 2 Предположим, что на гибкую круговую мембрану радиуса c, совершающую колебания, действует сила растяжения T таким способом, что ее [нормальное] смещение u зависит только от времени t и расстояния r от ее центра. (Так дело обстоит при *радиальных колебаниях*.) Тогда $u = u(r,t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 u = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right), \quad (35)$$

где $a^2 = T/\rho$ и $u(c,t) = 0$, если граница мембраны фиксирована. Найдем собственные частоты и нормальные моды радиальных колебаний мембраны.

Решение Мы применяем метод раздела 10.3. Подстановка функции $u(r,t) = R(r)\sin\omega t$ в уравнение (35) дает

$$-\omega^2 R \sin\omega t = a^2\left(R''\sin\omega t + \frac{1}{r}R'\sin\omega t\right).$$

Таким образом, ω и $R(r)$ должны удовлетворять уравнению

$$r^2R'' + rR' + \frac{\omega^2}{a^2}r^2R = 0, \quad (36)$$

а также условию $R(c) = 0$, которое следует из $u(c,t) = 0$. Уравнение (36) — параметрическое уравнение Бесселя нулевого порядка с параметром $\alpha = \omega/a$, и его единственное нетривиальное решение (с точностью до постоянного числового множителя) имеет вид

$$R(r) = J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right); \quad \text{следовательно,} \quad R(c) = J_0\left(\frac{\omega c}{a}\right) = 0,$$

а потому $\omega c/a$ должно быть одним из положительных корней $\{\gamma_n\}_1^\infty$ уравнения $J_0(x) = 0$. Таким образом, n-я собственная [круговая] частота и соответствующая собственная мода колебаний

$$\omega_n = \frac{\gamma_n a}{c}, \quad u_n(r,t) = J_0\left(\frac{\gamma_n r}{c}\right)\sin\frac{\gamma_n a t}{c}. \quad (37)$$

Просматривая таблицу значений $\{\gamma_n\}$ на рис. 10.4.4, мы видим, что высшие собственные частоты ω_n *не кратны* $\omega_1 = \gamma_1 a/c$; потому звук колеблющегося кругового барабанного диска не воспринимается как гармоничный. Колебания мембраны в n-м нормальном режиме в (37) показаны на

рис. 10.4.5, на котором показано вертикальное поперечное сечение, проведенное через центр барабанного диска. В дополнение к границе $r = c$, есть $n - 1$ фиксированных кругов, называемых *узловыми кругами*, с радиусами $r_i = \gamma_i c/\gamma_n$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$. Кольцевые области мембраны между последовательными парами узловых кругов двигаются поочередно вверх и вниз между поверхностями $u = \pm J_0(\gamma_n r/c)$. На рис. 10.4.6 показано, как выглядит поверхность $u = J_0(\gamma_n r/c)$ для $n = 1, 2, 3$ и 4. ■

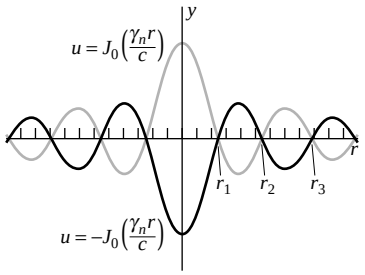


Рис. 10.4.5. Поперечное сечение колеблющейся круговой мембраны

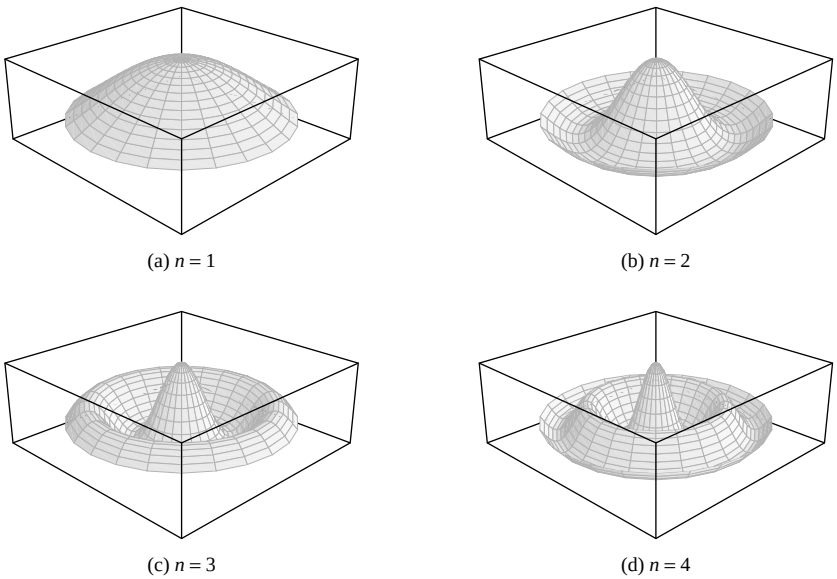


Рис. 10.4.6. Поверхность $u = J_0(\gamma_n r/c)$: (a) $n = 1$; (b) $n = 2$; (c) $n = 3$; (d) $n = 4$

10.4. Задачи

1. Предположим, что круговая мембрана из примера 2 имеет начальное положение $u(r,0)=f(r)$ и начальную скорость $u_t(r,0)=0$. Получите методом разделения переменных решение

$$u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0\Big(\frac{\gamma_n r}{c}\Big)\cos\frac{\gamma_n a t}{c},$$

где $\{\gamma_n\}_1^\infty$ — положительные корни уравнения $J_0(x)=0$ и

$$c_n=\frac{2}{c^2\left[J_1(\gamma_n)\right]^2}\int_0^c r f(r) J_0\Big(\frac{\gamma_n r}{c}\Big)\,dr.$$

2. Предположим, что круговая мембрана из примера 2 имеет начальное положение $u(r,0)=0$ и начальную скорость $u_t(r,0)=v_0$ (константа). Получите решение

$$u(r,t)=\frac{2cv_0}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\gamma_n r/c)\sin(\gamma_n at/c)}{\gamma_n^2 J_1(\gamma_n)},$$

где $\{\gamma_n\}_1^\infty$ — положительные корни уравнения $J_0(x)=0$.

3. **(a)** Найдите $u(r,t)$ в случае, если круговая мембрана из примера 2 имеет начальное положение $u(r,0)\equiv 0$ и начальную скорость

$$u_r(r,0)=\begin{cases}\dfrac{P_0}{\rho\pi\epsilon^2}, & \text{если } 0\leqq r\leqq\epsilon,\\[2ex] 0, & \text{если } \epsilon<r\leqq c.\end{cases}$$

(b) Используйте то, что $[J_1(x)]/x\to\frac{1}{2}$ при $x\to 0$ и найдите предельное значение выражения, полученного в результате решения части (a) при $\epsilon\to 0$. Вы должны получить

$$u(r,t)=\frac{aP_0}{\pi cT}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(\gamma_n r/c)\sin(\gamma_n at/c)}{\gamma_n\left[J_1(\gamma_n)\right]^2},$$

где $\{\gamma_n\}_1^\infty$ — положительные корни уравнения $J_0(x)=0$. Эта функция описывает движение барабанного диска после того, как он получил начальный (мгновенный) импульс P_0 в центре.

4. **(a)** Круговая пластина радиуса c имеет изолированные грани и теплоемкость s калорий на градус на квадратный сантиметр. Найдите $u(r,t)$, если известно, что $u(c,t)=0$ и

$$u(r,0)=\begin{cases}\dfrac{q_0}{s\pi\epsilon^2}, & \text{если } 0\leqq r\leqq\epsilon,\\[2ex] 0, & \text{если } \epsilon<r\leqq c.\end{cases}$$

(b) Найдите предел при $\epsilon\to 0$ выражения, полученного в результате решения части (a). У вас должно получиться значение

$$u(r,t)=\frac{q_0}{s\pi c^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left[J_1(\gamma_n)\right]^2}\exp\Big(-\frac{\gamma_n^2 kt}{c^2}\Big)J_0\Big(\frac{\gamma_n r}{c}\Big),$$

(здесь $\{\gamma_n\}_1^\infty$ — положительные корни уравнения $J_0(x)=0$) для температуры после того, как в центре пластины было введено q_0 калорий теплоты.

В задачах 5–7 рассматривается установившаяся температура $u = u(r, z)$ в твердом цилиндре радиуса $r = c$ с нижним основанием $z = 0$ и верхним основанием $z = L$, при условии, что u удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

5. Если $u(r, L) = u_0$ и на остальной части поверхности цилиндра поддерживается нулевая температура, то с помощью метода разделения переменных получите решение

$$u(r, z) = 2u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\gamma_n r/c)}{\gamma_n J_1(\gamma_n)} \cdot \frac{\sinh(\gamma_n z/c)}{\sinh(\gamma_n L/c)},$$

где $\{\gamma_n\}_1^\infty$ — положительные корни уравнения $J_0(x) = 0$.

6. **(a)** Пусть $u(r, L) = f(r)$, $u(r, 0) = 0$, и цилиндрическая поверхность $r = c$ изолирована. Получите решение в виде

$$u(r, z) = c_0 z + \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0\left(\frac{\gamma_n r}{c}\right) \sinh \frac{\gamma_n z}{c},$$

где $\{\gamma_n\}_1^\infty$ — положительные корни уравнения $J_0'(x) = 0$. **(b)** Предположим, что $f(r) = u_0$ (константа). Из результата части (a) выведите, что $u(r, z) = u_0 z/L$.

7. Предположим, что $c = 1$ и $L = +\infty$, так что цилиндр на самом деле полубесконечен. Пусть $u(r, 0) = u_0$, $hu(1, z) + u_r(1, z) = 0$ (теплообмен на цилиндрической поверхности) и $u(r, z)$ ограничено при $z \to +\infty$. Получите решение

$$u(r, z) \;=\; 2hu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-\gamma_n z) J_0(\gamma_n r)}{(\gamma_n^2 + h^2) J_0(\gamma_n)},$$

где $\{\gamma_n\}_1^\infty$ — положительные корни уравнения $hJ_0(x) = xJ_1(x)$.

8. Начните с параметрического уравнения Бесселя порядка n

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dy}{dx}\right] + \left(\alpha^2 x - \frac{n^2}{x}\right) y = 0. \tag{38}$$

Умножьте обе его части на $2x\, dy/dx$; затем запишите результат в виде

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dy}{dx}\right]^2 + (\alpha^2 x^2 - n^2)\frac{d}{dx}(y^2) = 0.$$

Проинтегрируйте почленно, используя формулу интегрирования по частям для второго члена, и получите

$$\left[\left(x\frac{dy}{dx}\right)^2 + (\alpha^2 x^2 - n^2) y^2\right]_0^c - 2\alpha^2 \int_0^c x y^2\, dx = 0.$$

Наконец, подставьте $y(x) = J_0(\alpha x)$, решение уравнения (38), чтобы получить формулу (20), приведенную в основном тексте.

9. В этой задаче нужно найти интегралы, входящие в формулы для коэффициентов рядов Фурье–Бесселя при $n = 0$. **(a)** Подставьте $n = 0$ в результат задачи 8 и получите интегральную формулу

$$\int_0^c x\,[J_0(\alpha x)]^2\, dx = \frac{c^2}{2}\left([J_0(\alpha c)]^2 + [J_1(\alpha c)]^2\right). \tag{39}$$

(b) Предположим, что $\alpha = \gamma_k/c$, где γ_k — корень уравнения $J_0(x) = 0$. Выведите, что

$$\int_0^c x\left[J_0\left(\frac{\gamma_k x}{c}\right)\right]^2 dx = \frac{c^2}{2}\left[J_1(\gamma_k)\right]^2.$$

(c) Предположим, что $\alpha = \gamma_k/c$, где γ_k — корень уравнения $J_0'(x) = 0$. Выведите, что

$$\int_0^c x\left[J_0\left(\frac{\gamma_k x}{c}\right)\right]^2 dx = \frac{c^2}{2}\left[J_0(\gamma_k)\right]^2.$$

(d) Предположим, что $\alpha = \gamma_k/c$, где γ_k — корень уравнения $hJ_0(x) + xJ_0'(x) = 0$. Выведите, что

$$\int_0^c x\left[J_0\left(\frac{\gamma_k x}{c}\right)\right]^2 dx = \frac{c^2(\gamma_k^2 + h^2)}{2\gamma_k^2}\left[J_0(\gamma_k)\right]^2.$$

10. Предположим, что $\{\gamma_m\}_1^\infty$ — положительные корни уравнения $J_0'(x) = 0$ и

$$f(x) = c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} c_m J_0\left(\frac{\gamma_m x}{c}\right). \tag{40}$$

(a) Умножьте каждую часть уравнения (40) на x и затем проинтегрируте почленно от $x = 0$ до $x = c$ и покажите, что

$$c_0 = \frac{2}{c^2}\int_0^c x f(x)\,dx.$$

(b) Умножьте каждую часть уравнения (40) на $xJ_0(\gamma_n x/c)$ и затем проинтегрируйте почленно, чтобы показать, что

$$c_m = \frac{2}{c^2\left[J_0(\gamma_m)\right]^2}\int_0^c x f(x) J_0\left(\frac{\gamma_m x}{c}\right) dx.$$

11. Если на единицу массы круговой мембраны с фиксированной границей действует периодическая сила $F_0 \sin \omega t$, равномерно распределенная по мембране, то функция, выражающая ее смещение $u(r, t)$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) + F_0 \sin \omega t.$$

Подставьте $u(r, t) = R(r) \sin \omega t$ и найдите установившееся периодическое решение.

12. Рассмотрим вертикально висящий кабель длины L и весом w на единицу длины, с фиксированным (закрепленным, защемленным) верхним концом в точке $x = L$ и свободным нижним концом в точке $x = 0$, как показано на рис. 10.4.7. Когда кабель совершает поперечные колебания, функция, выражающая его смещение $y(x, t)$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{w}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(wx\frac{\partial y}{\partial x}\right),$$

потому что натяжение равно $T(x) = wx$. Подставьте функцию $y(x, t) = X(x) \sin \omega t$, затем примените теорему раздела 8.6, чтобы решить полученное обыкновенное дифференциальное уравнение. Выведите из решения, что собственные частоты колебаний висящего кабеля можно вычислить по формуле

$$\omega_n = \frac{\gamma_n}{2}\sqrt{\frac{g}{L}} \quad \text{(радиан в секунду)},$$

где $\{\gamma_n\}_1^\infty$ — корни уравнения $J_0(x) = 0$. Исторически эта была первая задача, в которой появились функции Бесселя.

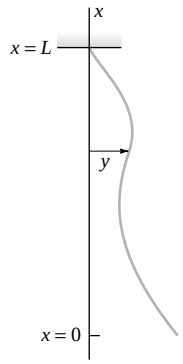


Рис. 10.4.7. Вертикально висящий кабель из задачи 12

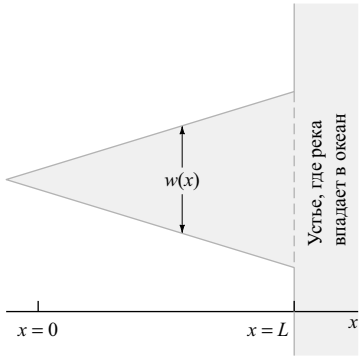


Рис. 10.4.8. Канал из задач 13–15

В задачах 13–15 рассматривается канал, начало которого удалено на расстояние L от океана (на рис. 10.4.8 приведен вид сверху). Его вертикальное поперечное сечение плоскостью, перпендикулярной оси x, является прямоугольником с шириной $w(x)$ и глубиной $h(x)$; последняя равна постоянной глубине воды в вертикальном сечении, проведенном через точку x. Рассмотрите периодический прилив в канале, такой что вертикальное смещение водной поверхности равно $y(x,t) = X(x)\cos\omega t$ в момент времени t. Тогда $y(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{w(x)}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[w(x)h(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right].$$

Пусть $y_0 = X(L)$ — амплитуда прилива в устье канала.

13. Предположим, что $w(x) = wx$ и $h(x) = h$ (константа). Покажите, что

$$y(x,t) = y_0\frac{J_0\left(wx/\sqrt{gh}\right)}{J_0\left(wL\sqrt{gh}\right)}\cos\omega t.$$

Примените теорему раздела 8.6.

14. Предположим, что $w(x) = w$ (константа) и что $h(x) = hx$. Покажите, что

$$y(x,t) = y_0\frac{J_0\left(2w\sqrt{x/gh}\right)}{J_0\left(2w\sqrt{L/gh}\right)}\cos\omega t.$$

15. Предположим, что $w(x) = wx$ и $h(x) = hx$, причем w и h — константы. Покажите, что

$$y(x,t) = y_0\sqrt{\frac{L}{x}}\frac{J_1\left(2w\sqrt{x/gh}\right)}{J_1\left(2w\sqrt{L/gh}\right)}\cos\omega t.$$

16. Если $0 < a < b$, то задача на собственные значения

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dy}{dx}\right] + \lambda xy = 0, \quad y(a) = y(b) = 0$$

для параметрического уравнения Бесселя нулевого порядка является регулярной задачей Штурма–Лиувилля. В соответствии с задачей 1 из раздела 10.1 по этой причине она имеет бесконечную последовательность неотрицательных собственных значений. **(a)** Докажите, что нуль

не является ее собственным значением. **(b)** Покажите, что n-е собственное значение равно $\lambda_n = \gamma_n^2$, где $\{\gamma_n\}_1^\infty$ — положительные корни уравнения

$$J_0(ax)Y_0(bx) - J_0(bx)Y_0(ax) = 0. \tag{41}$$

Первые пять корней уравнения (41) для различных значений a/b приведены в таблице 9.7 справочника по специальным функциям М. Абрамовица и И. Стиган (Abramowitz and Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*). **(c)** Покажите, что соответствующая собственная функция имеет вид

$$R_n(x) = Y_0(\gamma_n a)J_0(\gamma_n x) - J_0(\gamma_n a)Y_0(\gamma_n x). \tag{42}$$

17. Предположим, что кольцевая мембрана с постоянной плотностью ρ (на единицу площади) находится под постоянным растяжением T между кругами $r = a$ и $r = b > a$. Покажите, что ее n-я собственная [круговая] частота равна $\omega_n = \gamma_n\sqrt{T/\rho}$, где $\{\gamma_n\}_1^\infty$ — положительные корни уравнения (41).

18. Предположим, что бесконечная цилиндрическая оболочка $a \leqq r \leqq b$ имеет начальную температуру $u(r,0) = f(r)$, и после этого $u(a,t) = u(b,t) = 0$. Методом разделения переменных получите решение

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\gamma_n^2 kt\right) R_n(r),$$

где $R_n(r)$ — функция в равенстве (42) и

$$c_n \int_a^b r\,[R_n(r)]^2\,dr = \int_a^b r f(r) R_n(r)\,dr.$$

19. Рассмотрим полубесконечную цилиндрическую оболочку

$$0 < a \leqq r \leqq b, \quad z \geqq 0.$$

Пусть $u(a,z) = u(b,z) = 0$ и $u(r,0) = f(r)$. С помощью метода разделения переменных найдите установившуюся температуру (температуру в установившемся режиме)

$$u(r,z) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\gamma_n z\right) R_n(r),$$

где $\{c_n\}$ и $\{R_n\}$ определяются в задачах 18 и 16.

10.4. Приложение. Функции Бесселя и охлаждение цилиндра

Здесь мы выделяем основные этапы исследования численными методами с помощью пакета *Maple* функции, задающей распределение температур

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left(-\frac{\gamma_n^2 kt}{c^2}\right) J_0\Big(\frac{\gamma_n r}{c}\Big) \tag{1}$$

в горячем цилиндрическом стержне из примера 1 в этом разделе. Конечно же, аналогичное исследование можно выполнить с помощью и других систем, например *Mathematica* и MATLAB.

Мы предполагаем, что цилиндрический стержень имеет радиус $c = 10$ см, постоянную начальную температуру $u_0 = 100°$ и коэффициент температуропроводности $k = 0{,}15$ (для железа). Коэффициенты $\{a_n\}_1^\infty$ в равенстве (1) зависят от условия, наложенного на границе $r = c$ цилиндра. В случае нулевого граничного условия $u(c, t) = 0$ из уравнения (30) в этом разделе следует, что $a_n = 2u_0/(\gamma_n J_1(\gamma_n))$, где $\{\gamma_n\}_1^\infty$ — положительные решения уравнения $J_0(x) = 0$.

Зная, что $\gamma_1 \approx 2{,}4$ и что последовательные корни отличаются приблизительно на π, мы можем приближенно вычислить первые 20 значений γ_n с помощью следующих команд пакета *Maple*

```
g := array(1..20): # массив g для значений гамма
for n from 1 to 20 do # для n от 1 до 20 выполнить
    g[n] := fsolve(BesselJ(0,x)=0, x = 2.4 + (n-1)*Pi):
    od:
```

n	γ_n
1	2,4048
2	5,5201
3	8,6537
4	11,7915
5	14,9309
6	18,0711
7	21,2116
8	24,3525
9	27,4935
10	30,6346

Рис. 10.4.9. Первые 10 положительных нулей уравнения $J_0(x) = 0$

В таблице на рис. 10.4.9 перечислены первые десять значений γ_n. Тогда первые 20 коэффициентов в (1) можно рассчитать с помощью команд

```
a := array(1..20): # массив (1.. 20)
c := 10:    u0 := 100:    k := 0.15:
for n from 1 to 20 do # для n от 1 до 20 выполнить
    a[n] := 2*u0/(g[n]*BesselJ(1, g[n])):
    od:
```

Наконец, следующая функция системы *Maple* суммирует соответствующие члены ряда:

```
u := (r, t) -> sum(a[n]*exp(-g[n]^2*k*t/c^2)*
                   BesselJ(0, g[n]*r/c), n = 1..20);
```

График $u(r, 120)$ на рис. 10.4.10 показывает, как температура внутри стержня через две минуты изменяется с расстоянием r от центра цилиндра, и мы видим, что температура

средней линии уже упала ниже 60°. График $u(0,t)$ после истечения пятиминутного периода, показанный на рис. 10.4.11 указывает, что температура средней линии за время, немного большее чем 200 секунд, упадет до 25°. Действительно, вычисление с помощью команды

```
fsolve(u(0, t) = 25, t = 200..250);
```

показывает, что на это требуется приблизительно 214 секунд.

Теперь исследуйте в проиллюстрированной нами манере ваш собственный цилиндрический стержень с постоянной начальной температурой $u_0 = 100^\circ$. Для этого возьмите $c = 2p$ и $k = q/10$, где p — наибольшая, а q — наименьшая отличная от нуля цифра вашего номера студенческого билета.

Исследование A. Пусть цилиндрическая граница стержня поддерживается при нулевой температуре $u(c,t) = 0$. Начертите графики, подобные приведенным на рис. 10.4.10 и 10.4.11, а затем определите, сколько времени потребуется для того, чтобы температура средней линии стержня упала до 25°.

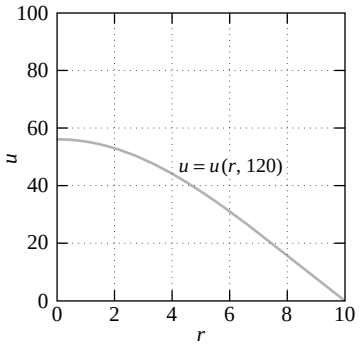


Рис. 10.4.10. Температура как функция расстояния r от средней линии стержня

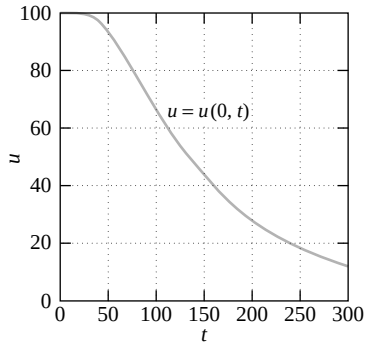


Рис. 10.4.11. Температура средней линии как функция времени t

Исследование B. Теперь предположите, что на цилиндрической границе стержня происходит теплообмен, так что коэффициенты в ряде (1) вычисляются по формулам (34) из текста. Предположите, что $h = 1$, так что $\{\gamma_n\}_1^\infty$ — теперь положительные корни уравнения

$$J_0(x) + xJ_0'(x) = J_0(x) - xJ_1(x) = 0 \tag{2}$$

(потому что $J_0'(x) = -J_1(x)$). На рис. 10.4.12 показан график левой части уравнения (2); из графика видно, что $\gamma_1 \approx 1{,}25$, а последующий корень отличается от предыдущего (как обычно) приблизительно на π. Определите, сколько времени в этом случае потребуется для того, чтобы температура средней линии упала до 25°, *и* сколько времени потребуется для того, чтобы температура на границе $r = c$ упала до 25°.

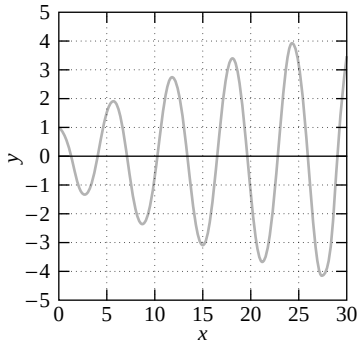


Рис. 10.4.12. График $y = J_0(x) - xJ_0'(x)$

10.5. Явления высших размерностей

В этом разделе мы обсуждаем приложение метода разделения переменных к тем задачам распространения тепла и теории колебаний, которые содержат две или больше пространственных переменных. Раздел в значительной степени состоит из иллюстративных примеров, задач и проектов, сгруппированных согласно тому, какие координаты — прямоугольные, цилиндрические или сферические — наиболее подходят для их решения.

Приложения прямоугольных координат и двумерный ряд Фурье

Как указано в разделе 9.7, лапласиан в двух измерениях принимает вид

$$\boldsymbol{\nabla}^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Например, рассмотрим тонкую пластину, лежащую в плоскости xy, причем ее две параллельные грани изолированы, так что распространение тепла в пределах пластины происходит только в направлениях осей x и y. Если $u(x, y, t)$ обозначает температуру в момент времени t в точке (x, y) в пределах пластины, то согласно стандартным предположениям из этого следует, что u удовлетворяет **двумерному уравнению теплопроводности**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\boldsymbol{\nabla}^2 u = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right). \tag{1}$$

Здесь k обозначает коэффициент температуропроводности материала, из которого сделана пластина. Если пластина является прямоугольной, а однородные граничные условия наложены по ее четырем сторонам, то непосредственно может быть применен метод разделения переменных.

Пример 1 Предположим, что тонкая прямоугольная пластина занимает область $0 \leqq x \leqq a, 0 \leqq y \leqq b$ плоскости, что ее верхняя грань и основание изолированы, причем на ее четырех боковых гранях поддерживается нулевая

температура. Пусть задана функция, выражающая начальное распределение температур в пластине: $u(x, y, 0) = f(x, y)$. Тогда функция, задающая распределение температур $u(x, y, t)$, является решением граничной (краевой) задачи (задачи, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения), состоящей из уравнения теплопроводности (1) и граничных условий

$$u(0, y, t) = u(a, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, b, t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y). \tag{3}$$

Найдем $u(x, y, t)$.

Решение Мы подставляем $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$ в уравнение (1). После деления на $kXYT$, мы получаем

$$\frac{T'}{kT} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y}.$$

Это соотношение может выполняться для всех x, y и t, только если каждый член является константой, так что мы пишем

$$\frac{X''}{X} = -\lambda, \quad \frac{Y''}{Y} = -\mu, \quad \frac{T'}{kT} = -(\lambda + \mu). \tag{4}$$

Принимая во внимание граничные условия (2), мы видим, что $X(x)$ и $Y(y)$ по отдельности являются решениями задачи Штурма–Лиувилля

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(a) = 0 \tag{5}$$

и

$$Y'' + \mu Y = 0, \quad Y(0) = Y(b) = 0. \tag{6}$$

Собственные значения и собственные функции знакомой задачи (5) имеют вид

$$\lambda_m = \frac{m^2\pi^2}{a^2}, \quad X_m(x) = \sin\frac{m\pi x}{a} \tag{7}$$

для $m = 1, 2, 3, \ldots$. Точно так же собственные значения и собственные функции задачи (6) имеют вид

$$\mu_n = \frac{n^2\pi^2}{b^2}, \quad Y_n(y) = \sin\frac{n\pi y}{b} \tag{8}$$

для $n = 1, 2, 3, \ldots$. Мы используем разные обозначения для индексов m и n в (7) и (8), поскольку эти две задачи в уравнениях (5) и (6) независимы (одна от другой).

Для каждой пары положительных целых чисел m, n мы должны решить третье уравнение (4)

$$T'_{mn} = -(\lambda_m + \mu_n)kT_{mn} = -\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\pi^2 kT_{mn}. \tag{9}$$

С точностью до мультипликативной константы решение уравнения (9) имеет вид

$$T_{mn}(t) = \exp\left(-\gamma_{mn}^2 kt\right), \tag{10}$$

где

$$\gamma_{mn} = \pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}. \tag{11}$$

Таким образом, мы нашли "дважды бесконечную" совокупность стандартных блоков, и из этого следует, что "дважды бесконечный" ряд

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \exp\left(-\gamma_{mn}^2 kt\right) \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \tag{12}$$

формально удовлетворяет уравнению теплопроводности (1) и однородным граничным условиям (2).

Остается только определить коэффициенты $\{c_{mn}\}$ так, чтобы ряд удовлетворял также неоднородному условию

$$u(x, y, 0) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} = f(x, y). \tag{13}$$

Чтобы сделать это, мы сначала сгруппируем члены в этом *двумерном ряде Фурье* так, чтобы выделить полный коэффициент при $\sin(n\pi y/b)$, и для этого пишем

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} c_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{14}$$

Мы хотим, чтобы для каждого фиксированного x ряд (14) был расположенным по синусам рядом Фурье функции $f(x, y)$ на интервале $0 \leqq y \leqq b$. Это будет истинно при условии, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} = \frac{2}{b}\int_0^b f(x, y) \sin\frac{n\pi y}{b}\, dy. \tag{15}$$

Правая часть равенства (15) есть функция $F_n(x)$ для каждого n; т. е.

$$F_n(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a}. \tag{16}$$

Это требует, чтобы c_{mn} был m-м коэффициентом расположенного по синусам ряда Фурье функции $F_n(x)$ на интервале $0 \leqq x \leqq a$; т. е. чтобы

$$c_{mn} = \frac{2}{a}\int_0^a F_n(x) \sin\frac{m\pi x}{a}\, dx. \tag{17}$$

Подставляя правую часть равенства (15) вместо $F_n(x)$ в уравнение (17), мы, наконец, получаем

$$c_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^a \int_0^b f(x,y)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\,dy\,dx \tag{18}$$

для m, $n = 1, 2, 3, \ldots$. При этих значениях коэффициентов ряд в (13) представляет собой **расположенный по синусам двойной ряд Фурье** функции $f(x,y)$ на прямоугольнике $0 \leqq x \leqq a$, $0 \leqq y \leqq b$, причем ряд в (12) формально является решением граничной (краевой) задачи (задачи, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения) (1)–(3). ■

ЗАДАЧА 1 Предположим, что $f(x,y) = u_0$ (константа). Вычислите коэффициенты в (18) и получите решение

$$u(x,y,t) = \frac{16u_0}{\pi^2}\sum_{m \text{ нечетное}}\sum_{n \text{ нечетное}}\frac{\exp\left(-\gamma_{mn}^2 kt\right)}{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

ЗАДАЧА 2 Заменим граничные условия (2) в примере 1 на

$$u(0,y,t) = u(x,0,t) = 0,$$
$$hu(a,y,t) + u_x(a,y,t) = hu(x,b,t) + u_y(x,b,t) = 0.$$

Таким образом, на гранях $x = 0$ и $y = 0$ все еще поддерживается нулевая температура, но теперь теплообмен имеет место на гранях $x = a$ и $y = b$. В этих условиях получите решение

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_{mn}\exp\left(-\gamma_{mn}^2 kt\right)\sin\frac{\alpha_m x}{a}\sin\frac{\beta_n y}{b},$$

где $\gamma_{mn}^2 = (\alpha_m/a)^2 + (\beta_n/b)^2$, $\{\alpha_m\}$ — положительные корни уравнения $ha\operatorname{tg} x = -x$, $\{\beta_n\}$ — положительные корни уравнения $hb\operatorname{tg} x = -x$ и

$$c_{mn} = \frac{4}{A_m B_n}\int_0^a\int_0^b f(x,y)\sin\frac{\alpha_m x}{a}\sin\frac{\beta_n y}{b}\,dy\,dx,$$

где $A_m = (ha + \cos^2\alpha_m)/h$ и $B_n = (hb + \cos^2\beta_n)/h$.

ПРОЕКТ А Предположим, что на трех краях $x = 0$, $y = 0$ и $y = b$ пластины из примера 1 поддерживается нулевая температура, но четвертый край $x = a$ изолирован, так что соответствующие граничные условия имеют вид

$$u(0,y,t) = u(x,0,t) = u(x,b,t) = u_x(a,y,t) = 0.$$

Пусть начальная температура пластины равна $u(x,y,0) = f(x,y)$. Покажите, что функция, задающая распределение температур в пластине, дается формулой

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_{mn}\exp\left(-\gamma_{mn}^2 kt\right)\sin\frac{(2m-1)\pi x}{2a}\sin\frac{n\pi y}{b}, \tag{19}$$

где

$$\left(\frac{\gamma_{mn}}{\pi}\right)^2 = \left(\frac{2m-1}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2$$

и

$$c_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^a \int_0^b f(x,y) \sin\frac{(2m-1)\pi x}{2a} \sin\frac{n\pi y}{b}\, dy\, dx.$$

Вам может быть полезен результат задачи 21 из раздела 9.3. Если $f(x,y) \equiv u_0$ (константа), покажите, что равенство (2) приводит к формуле

$$u(x,y,t) = \frac{16u_0}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n \text{ нечетное}} \frac{\exp\left(-\gamma_{mn}^2 kt\right)}{(2m-1)n} \sin\frac{(2m-1)\pi x}{2a} \sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{20}$$

Теперь численными методами исследуйте вашу личную пластину. Для этого возьмите $u_0 = 100$, $a = 10p$, $b = 10q$ и $k = r/10$, где p и q — две наибольшие цифры в номере вашего студенческого билета, а r — наименьшая отличная от нуля цифра в номере вашего студенческого билета. Начертите график функции $z = u(x,y,t)$ для типичных значений t и проверьте, что каждый такой график симметричен относительно средней линии $y = b/2$, так что (почему?) максимальная температура в пластине достигается в какой-то точке на этой средней линии. Затем определите (можете применить метод, использованный в проекте из раздела 10.2)

- сколько потребуется времени для того, чтобы максимальная температура на краю $x = a$ упала до $25°$;
- значение максимальной внутренней температуры в пластине в этот момент времени.

Колебания прямоугольных мембран

Теперь давайте рассмотрим двумерную гибкую мембрану, которая в положении равновесия занимает некоторую область в горизонтальной плоскости xy. Предположим, что эта мембрана колеблется вверх и вниз, а $u(x,y,t)$ обозначает вертикальное смещение точки (x,y) мембраны в момент времени t. Если T и ρ обозначают натяжение мембраны и плотность (на единицу площади) соответственно, то, согласно стандартным предположениям, из этого следует, что функция, выражающая смещение $u(x,y,t)$ мембраны, удовлетворяет **двумерному волновому уравнению**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{21}$$

где $c^2 = T/\rho$.

ЗАДАЧА 3 Предположим, что прямоугольная мембрана $0 \leqq x \leqq a$, $0 \leqq y \leqq b$ отпущена из состояния покоя с заданным начальным смещением $u(x,y,0) = f(x,y)$. Если четыре стороны мембраны считаются фиксированными после этого, причем их смещение равно нулю, то функция, выражающая смеще-

ние $u(x, y, t)$, является решением граничной (краевой) задачи (задачи, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения), состоящей из волнового уравнения (21) и граничных условий

$$\begin{aligned} u(0, y, t) = u(a, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, b, t) = 0, \\ u(x, y, 0) = f(x, y) \quad \text{(начальное положение)}, \\ u_t(x, y, 0) = 0 \qquad \text{(начальная скорость)}. \end{aligned} \tag{22}$$

Получите решение

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \cos \gamma_{mn} ct \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \tag{23}$$

где числа $\{\gamma_{mn}\}$ и коэффициенты $\{c_{mn}\}$ определяются формулами (11) и (18) соответственно.

Член ряда с номером mn в равенстве (23) определяет mn-ю *собственную моду колебаний* прямоугольной мембраны, причем функция, выражающая смещение, равна

$$u_{mn}(x, y, t) = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \cos \gamma_{mn} ct. \tag{24}$$

В этой моде мембрана перемещается вверх и вниз между (воображаемыми) поверхностями

$$u = \pm \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

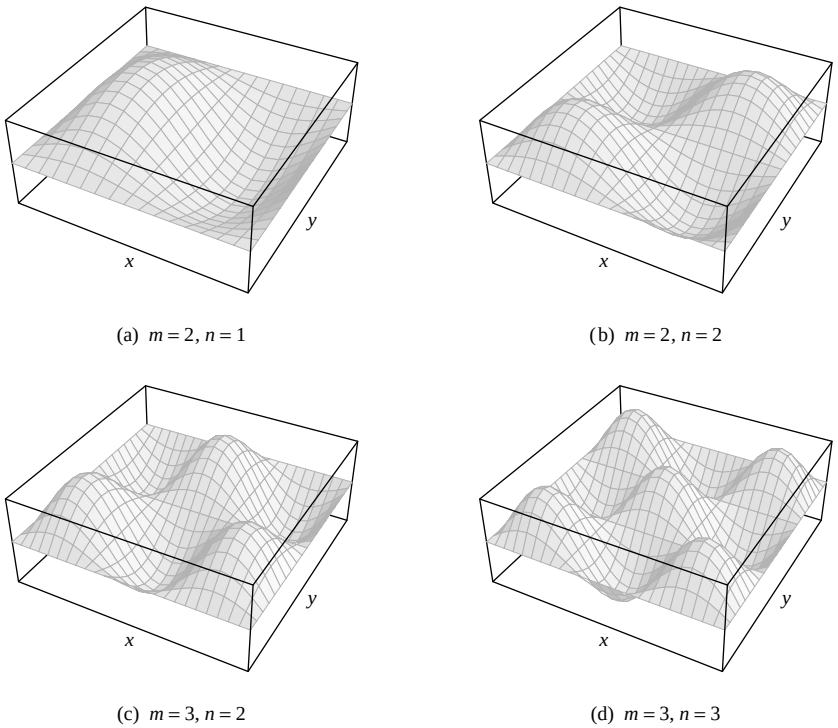
с круговой частотой $\omega_{mn} = \gamma_{mn} c$ колебаний. На рис. 10.5.1 показано, как эти поверхности выглядят при типичных маленьких значениях m и n. Если $c = 1$ и $a = b = \pi$ (например), тогда последовательные частоты

$$\begin{aligned} &\omega_{12} = \omega_{21} = \sqrt{5} \approx 2.24, && \omega_{22} = \sqrt{8} \approx 2.83, \\ &\omega_{13} = \omega_{31} = \sqrt{10} \approx 3.16, && \omega_{23} = \omega_{32} = \sqrt{13} \approx 3.61, \\ &\omega_{33} = \sqrt{18} \approx 4.24, && \ldots \end{aligned}$$

не кратны основной частоте (частоте основной (первой) гармоники, т. е. (наинизшей) собственной частоте) $\omega_{11} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$. Поэтому звук колеблющейся прямоугольной мембраны не гармоничен, и потому обычно воспринимается как шум, а не как музыка.

ЗАДАЧА 4 Предположим, что мембрана из задачи 3 представляет собой квадратный тамбурин (бубен), лежащий вертикально поперек пикапа, который врезается в кирпичную стену в момент времени $t = 0$. Тогда мембрана приведена в движение с нулевым начальным смещением и постоянной начальной скоростью, так что начальные условия имеют вид

$$u(x, y, 0) = 0, \quad u_t(x, y, 0) = v_0 \quad \text{(константа)}.$$



(a) $m = 2, n = 1$ (b) $m = 2, n = 2$

(c) $m = 3, n = 2$ (d) $m = 3, n = 3$

Рис. 10.5.1. Поверхности вида $u = \sin \dfrac{m\pi x}{a} \sin \dfrac{n\pi y}{b}$

В этом случае получите решение

$$u(x, y, t) = \frac{16v_0}{\pi^2 c} \sum_{m \text{ нечетное}} \sum_{n \text{ нечетное}} \frac{\sin \gamma_{mn} ct}{mn\gamma_{mn}} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

ПРОЕКТ В Предположим, что квадратная мембрана $0 \leqq x \leqq \pi$, $0 \leqq y \leqq \pi$ оттянута в ее центральной точке и приведена в движение из состояния покоя, причем функция, выражающая начальное положение, имеет вид

$$u(x, y, 0) = f(x, y) = \min\{x, y, \pi - x, \pi - y\}, \tag{25}$$

чей график в квадрате $0 \leqq x \leqq \pi$, $0 \leqq y \leqq \pi$ напоминает шатер (или палатку) с квадратом в основе или пирамиду с высотой $\pi/2$, проходящей через центр квадрата. Таким образом, функция-шатер $f(x, y)$ представляет собой двумерный аналог знакомой одномерной треугольной функции. Она может быть определена кусочно, как показано на рис. 10.5.2.

Используйте систему компьютерной алгебры типа *Maple* или *Mathematica* и покажите, что формула с двойным интегралом в (18) дает $c_{mn} = 0$,

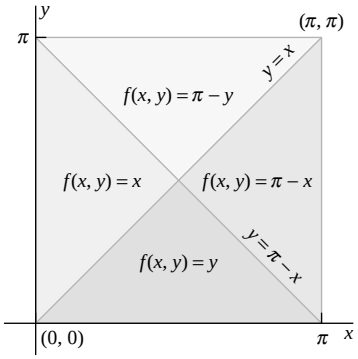


Рис. 10.5.2. Кусочное определение функции-шатра

если $m \neq n$ и

$$c_{nn} = \frac{2[1-(-1)^n]}{\pi n^2} = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi n^2} & \text{для } n \text{ нечетных,} \\ 0 & \text{для } n \text{ четных.} \end{cases}$$

Поэтому из (23) следует, что получаемая функция, выражающаея смещение мембраны, может быть вычислена по формуле

$$u(x,y,t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ нечетное}} \frac{\sin nx \, \sin ny \, \cos nt\sqrt{2}}{n^2}. \tag{26}$$

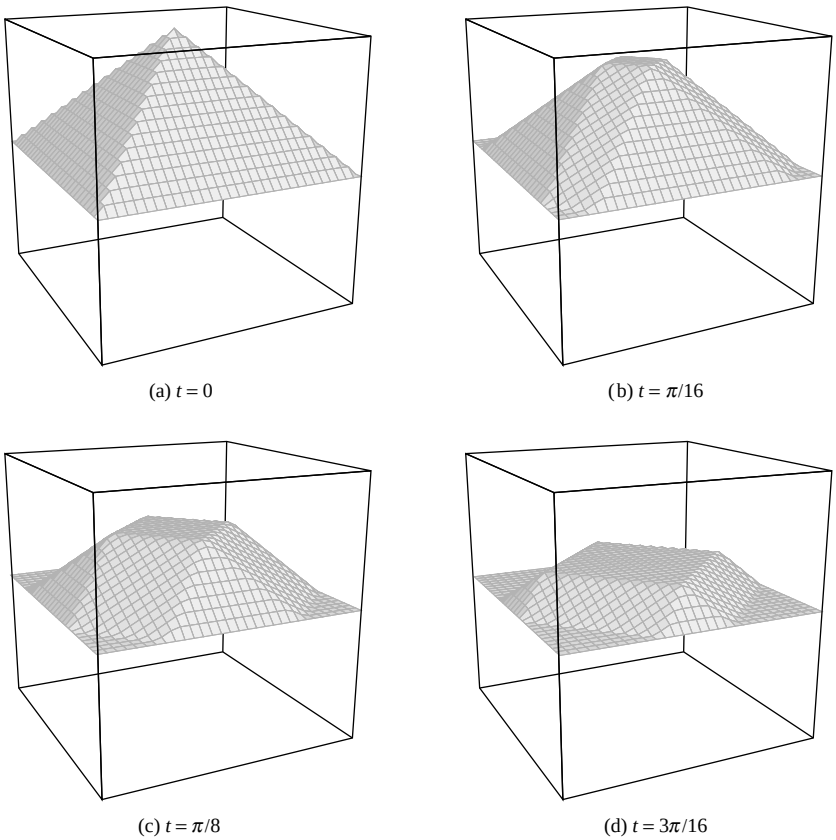
Понятно ли вам, что — поскольку сумма в (26) не содержит слагаемых (членов ряда) с $m \neq n$ — функция $u(x,y,t)$ является периодической (относительно t) с периодом $\pi\sqrt{2}$? На тот факт, что функция-шатер (25) описывает "музыкальные" колебания квадратной мембраны, впервые указал нам Джон Полкинг (John Polking). На рис. 10.5.3 показаны некоторые типичные снимки этих колебаний.

Приложения полярных координат

В задачах, в которых рассматриваются области с круговой симметрией относительно начала координат в плоскости (или относительно вертикальной оси z в пространстве), выгодно использовать полярные (или цилиндрические) координаты. В разделе 9.7 мы обсуждали выражение двумерного лапласиана в знакомых полярных координатах на плоскости $((r,\theta)$, для которых $x = r\cos\theta$ и $y = r\sin\theta$. Трехмерный лапласиан функции $u(r,\theta,z)$ в цилиндрических координатах выражается формулой

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{27}$$

Если u не зависит от θ или z, то соответствующая вторая производная отсутствует в правой части равенства (27).



(a) $t = 0$ (b) $t = \pi/16$

(c) $t = \pi/8$ (d) $t = 3\pi/16$

Рис. 10.5.3. Колебания квадратной мембраны с периодом $P = \pi\sqrt{2}$.

Пример 2 Предположим, что твердый цилиндр (цилиндрическое тело) $0 \leqq r \leqq c$, $0 \leqq z \leqq h$, изображенный на рис. 10.5.4, сделан из однородного материа-

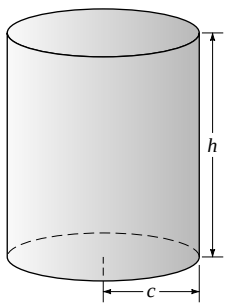


Рис. 10.5.4. Цилиндр (цилиндрическое тело) из примера 2

ла с коэффициентом температуропроводности k и имеет осесимметрическое начальное распределение температур $u(r, z, 0) = f(r, z)$, которое не зависит от θ. Если на границе цилиндра (а границей является вертикальная цилиндрическая поверхность $r = c$ и два круга — один вверху (верхнее основание) и второй внизу (нижнее основание)) после этого поддерживается нулевая температура (возможно, потому что цилиндр завернут в лед в момент времени $t = 0$), то получаемая осесимметричная функция, задающая распределение температур $u(r, z, t)$, является решением граничной (краевой) задачи (задачи, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\nabla^2 u = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \tag{28}$$

$$u(c, z, t) = u(r, 0, t) = u(r, h, t) = 0 \tag{29}$$
(нулевая температура на границе),

$$u(r, z, 0) = f(r, z) \tag{30}$$
(заданная начальная температура). ■

В следующих двух задачах рассматривается решение этой задачи распространения теплоты для случая постоянной начальной температуры.

ЗАДАЧА 5 Покажите, что подстановка

$$u(r, z, t) = R(r)Z(z)T(t)$$

в уравнение (28) приводит к разделению переменных

$$r^2R'' + rR' + \alpha^2 r^2 R = 0, \qquad R(c) = 0; \tag{31}$$

$$Z'' + \beta^2 Z = 0, \qquad Z(0) = Z(h) = 0; \tag{32}$$

$$T' = -(\alpha^2 + \beta^2)kT. \tag{33}$$

Заметьте, что дифференциальное уравнение (31) представляет собой параметрическое уравнение Бесселя нулевого порядка относительно $R(r)$ и потому (31) имеет собственные значения и собственные функции, данные для случая 1 в таблице на рис. 10.4.2. Конечно, дифференциальные уравнения (32) и (33) имеют знакомые тригонометрические и экспоненциальные решения. Отсюда получите формальное решение в виде ряда

$$u(r, z, t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \exp\left(-\lambda_{mn} kt\right) J_0\left(\frac{\gamma_m r}{c}\right) \sin\frac{n\pi z}{h}, \tag{34}$$

где $\{\gamma_m\}_1^\infty$ — положительные решения уравнения $J_0(x) = 0$ (которые указаны в приложении к разделу 10.4)

$$\lambda_{mn} = \frac{\gamma_m^2}{c^2} + \frac{n^2\pi^2}{h^2}, \tag{35}$$

а коэффициенты в равенстве (34) вычисляются по формуле

$$c_{mn} = \frac{4}{hc^2\left[J_1(\gamma_m)\right]^2}\int_0^c\int_0^h rf(r,z)J_0\left(\frac{\gamma_m r}{c}\right)\sin\frac{n\pi z}{h}\,dz\,dr. \qquad (36)$$

Вывод равенства (36) подобен выводу формулы для коэффициентов двойного ряда Фурье (18).

ЗАДАЧА 6 Пусть функция, задающая начальное распределение температур, постоянна: $f(r,z)\equiv u_0$. Выведите из уравнений (34) и (36) равенство

$$u(r,z,t) = \frac{8u_0}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n\ \text{нечетное}}\frac{\exp\left(-\lambda_{mn}kt\right)J_0\left(\frac{\gamma_m r}{c}\right)\sin\frac{n\pi z}{h}}{n\gamma_m J_1(\gamma_m)}, \qquad (37)$$

где λ_{mn} определяются равенством (35).

ПРОЕКТ С Исследуйте численными методами ваш собственный нагретый цилиндр. Положите $u_0 = 100$, $h = 10p$, $c = 5q$ и $k = r/10$, где p и q — две наибольшие цифры в номере вашего студенческого билета, а r — наименьшая отличная от нуля цифра в номере вашего студенческого билета. Примите нулевые граничные температуры как в задачах 5 и 6. Начертите поверхность $z = u(r,z,t)$ для типичных значений t и подтвердите физически вероятную догадку о том, что в любой момент времени t максимальная температура в пределах цилиндра наблюдается в его центральной точке, где $r = 0$ и $z = h/2$. Полезно начертить также графики следующих функций.

1. График u как функции r при $z = h/2$ и постоянном значении t.
2. График u как функции z при $r = 0$ и постоянном значении t.

Затем определите, сколько времени потребуется, чтобы для максимальная температура в пределах цилиндра упала до $25°$.

Повторите это исследование в том случае, если температура поддерживается равной нулю в основании цилиндра и на кривой (боковой) поверхности, но его верхнее основание теперь изолировано, так что граничные условия (29) теперь заменяются другими:

$$u(c,z,t) = u(r,0,t) = u_z(r,h,t) = 0.$$

Используя (как в Проекте А) результат задачи 21 из раздела 9.3, вы должны найти, что (37) заменяется формулой

$$u(r,z,t) = \frac{8u_0}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\exp\left(-\lambda_{mn}kt\right)J_0\left(\frac{\gamma_m r}{c}\right)\sin\frac{(2n-1)\pi z}{2h}}{(2n-1)\gamma_m J_1(\gamma_m)}, \qquad (38)$$

где

$$\lambda_{mn} = \frac{\gamma_m^2}{c^2} + \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4h^2}.$$

Кажется ли вероятным, что максимальная температура цилиндра теперь всегда достигается в центре его верхнего основания? Подтвердите эту догадку соответствующими графическими исследованиями. Также определите, сколько времени потребуется, чтобы эта максимальная температура упала до 25°.

ПРОЕКТ D В этом проекте рассматриваются колебания однородной круговой мембраны радиуса a. Если начальное смещение мембраны и скоростные функции зависят от обеих полярных координат r и θ, то волновое уравнение (19) в полярных координатах принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right). \tag{39}$$

Если мембрана отпущена из состояния покоя в момент времени $t = 0$ и после этого ее граница считается фиксированной (так что на окружности $r = a$ смещение u всегда равно нулю), то функция, выражающая смещение мембраны $u(r,\ \theta,\ t)$, удовлетворяет и уравнению (39), и граничным условиям

$$u(a, \theta, t) = 0 \qquad \text{(фиксированная граница)}, \tag{40}$$

$$u(r, \theta, 0) = f(r, \theta) \qquad \text{(заданное начальное смещение)}, \tag{41}$$

$$u_t(r, \theta, 0) = 0 \qquad \text{(нулевая начальная скорость)}. \tag{42}$$

Восполните все детали в следующей схеме решения. Сначала покажите, что подстановка

$$u(r, \theta, t) = R(t)\Theta(\theta)T(t)$$

в уравнение (39) приводит к разделению переменных

$$\frac{T''}{c^2 T} = \frac{R'' + \dfrac{1}{r}R'}{R} + \frac{\Theta''}{r^2\Theta} = -\alpha^2 \quad \text{(константа)}. \tag{43}$$

Тогда из

$$T'' + \alpha^2 c^2 T = 0, \quad T'(0) = 0 \tag{44}$$

следует, что, с точностью до постоянного числового множителя,

$$T(t) = \cos \alpha c t. \tag{45}$$

Затем правое равенство в (43) дает уравнение

$$\frac{r^2 R'' + rR'}{R} + \alpha^2 r^2 + \frac{\Theta''}{\Theta} = 0, \tag{46}$$

из которого следует, что

$$\frac{\Theta''}{\Theta} = -\beta^2 \quad \text{(константа)}. \tag{47}$$

Чтобы решение $\Theta(\theta)$ уравнения $\Theta'' + \beta^2\Theta = 0$ имело необходимый период (а период должен быть равен 2π), параметр β должен быть целым числом, так что мы имеем θ-решения

$$\Theta_n(\theta) = \begin{cases} \cos n\theta, \\ \sin n\theta \end{cases} \tag{48}$$

для $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Подстановка $\Theta''/\Theta = -n^2$ в (46) теперь дает параметрическое уравнение Бесселя

$$r^2R'' + rR' + (\alpha^2r^2 - n^2)R = 0 \tag{49}$$

порядка n, имеющее ограниченное решение $J_n(\alpha r)$. Поскольку нулевое граничное (краевое, предельное) условие в (40) дает $J_n(\alpha a) = 0$, случай 1 в таблице на рис. 10.4.2 приводит к зависящим от r собственным функциям

$$R_{mn}(r) = J_n\Big(\frac{\gamma_{mn}r}{a}\Big) \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots\,; n = 0, 1, 2, \ldots\,), \tag{50}$$

где γ_{mn} обозначает m-е положительное решение уравнения $J_n(x) = 0$. Чтобы найти приближенное числовое значение γ_{mn}, можно сначала оценить значение $r_1 \approx \gamma_{1n}$ первого корня, которое можно найти на графике $J_n(x)$, приведенном на рис. 10.5.5, и затем уточнить его с помощью соответствующей команды системы компьютерной алгебры. Например, можно использовать следующую команду системы компьютерной алгебры *Mathematica*

```
FindRoot[ BesselJ[n,x] == 0, {r, r1 + (m - 1)*Pi}]
```

Наконец, подстановка $\alpha_{mn} = (\gamma_{mn})/a$ дает зависящую от t функцию

$$T_{mn}(t) = \cos\frac{\gamma_{mn}ct}{a}. \tag{51}$$

Объединяя (48), (50) и (51), мы видим, что наша граничная (краевая) задача (задача, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения) для круговой мембраны, отпущенной из состояния покоя, имеет формальное решение в виде ряда

$$u(r, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} J_n\left(\frac{\gamma_{mn}r}{a}\right)(a_{mn}\cos n\theta + b_{mn}\sin n\theta)\cos\frac{\gamma_{mn}ct}{a}. \tag{52}$$

Таким образом, типичная собственная мода колебаний круговой мембраны с нулевой начальной скоростью имеет вид

$$u_{mn}(r, \theta, t) = J_n\left(\frac{\gamma_{mn}r}{a}\right)\cos n\theta\cos\frac{\gamma_{mn}ct}{a} \tag{53}$$

или аналогичный вид с $\sin n\theta$ вместо $\cos n\theta$. В этой моде мембрана колеблется с $m-1$ неподвижными *узловыми окружностями* (не считая ее границы $r = a$) с радиусами

$$r_{jn} = \frac{\gamma_{jn}a}{\gamma_{mn}} \qquad \text{для } j = 1, 2, \ldots, m-1.$$

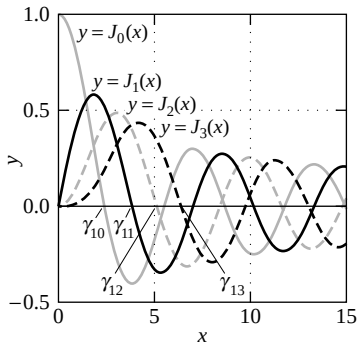


Рис. 10.5.5. Графики и начальные нули первых нескольких функций Бесселя

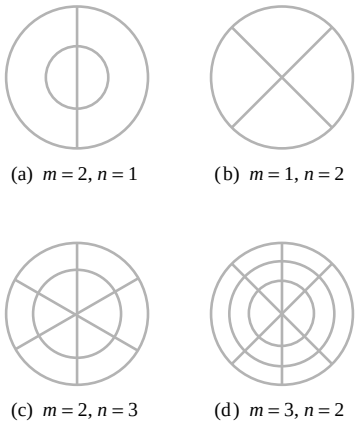


Рис. 10.5.6. Типичные узловые окружности и радиусы колебаний круговой мембраны

Она также имеет $2n$ неподвижных *узловых радиусов*, разделенных углами π/n, начиная с $\theta = \pi/(2n)$. На рис. 10.5.6 показаны некоторые типичные конфигурации этих узловых окружностей и радиусы, которые делят круг на кольцевые сектора, которые двигаются поочередно вверх и вниз в процессе колебаний мембраны.

Формулы для коэффициентов в (52) часто не требуются для практических приложений, в которых приходится иметь дело с колебаниями круговых мембран. Мы предлагаем вам исследовать различные возможности, которые могут представиться в процессе колебаний мембраны. Для этого начертите графики подходящих линейных комбинаций собственных функций, определенных равенством (53). Например, на рис. 10.5.7 показаны снимки колебания, определенного формулой

$$u(r,\theta,t) = J_1(\gamma_{21}r)\cos\theta\cos\gamma_{21}t + J_2(\gamma_{32}r)\cos 2\theta\cos\gamma_{32}t \qquad (54)$$

для круговой мембраны с $c = 1$ и радиусом $a = 1$. Если доступны аппаратные средства мультимедиа и соответствующее программное обеспечение, вы могли бы попробовать создать кинофильм, показывая такое колебание.

Приложения сферических координат

В задачах, в которых области обладают сферической симметрией относительно начала координат в пространстве, удобно использовать сферические координаты, изображенные на рис. 10.5.8. Трехмерный лапласиан функции $u(\rho,\phi,\theta)$ в сферических координатах выражается формулой

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho^2}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{\partial u}{\partial\phi}\sin\phi\right) + \frac{1}{\sin^2\phi}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\right]. \qquad (55)$$

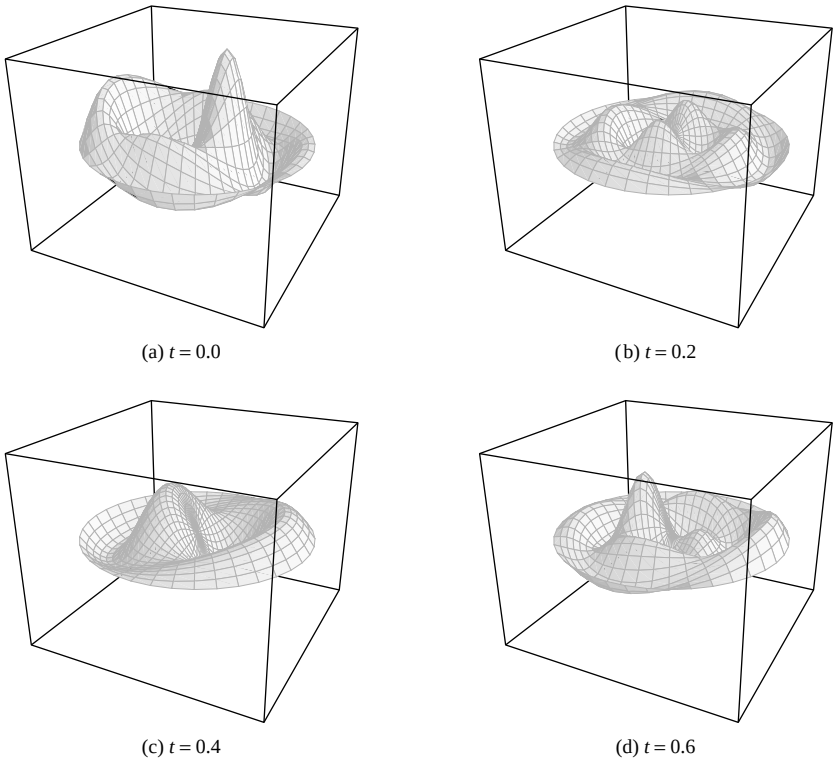


Рис. 10.5.7. Снимки колебаний круговой мембраны, определяемые уравнением (54)

Заметьте, что $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ обозначает расстояние точки P от начала координат O, ϕ — угол от положительной полуоси z до OP и θ — обыкновенный полярный координатный угол в плоскости xy (хотя в некоторых учебниках полностью изменены роли ϕ и θ). Заметьте также, что если u не зависит от ρ, ϕ или θ, то соответствующее слагаемое со второй производной отсутствует в правой части равенства (55).

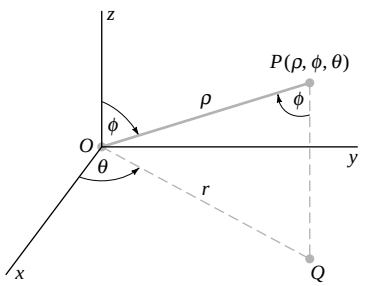


Рис. 10.5.8. Определение сферических координат точки P

Пример 3 Предположим, что данная осесимметричная функция $g(\phi)$, выражающая температуру, определена на граничной сфере $\rho = a$ твердого шара $0 \leqq \rho \leqq a$, и мы ищем получающуюся осесимметричную функцию, задающую установившееся распределение температур $u(\rho, \phi)$ внутри сферы. Поскольку u не зависит от θ, уравнение Лапласа $\boldsymbol{\nabla}^2 u = 0$ принимает (после умножения на ρ^2 уравнения (55)) вид

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{\partial u}{\partial \phi}\sin\phi\right) = 0, \tag{56}$$

и мы имеем единственное граничное (краевое, предельное) условие

$$u(a, \phi) = g(\phi) \qquad \text{(заданная температура на границе).} \tag{57}$$

■

В следующих задачах намечено решение этой граничной (краевой) задачи (задачи, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения) состоящее в том, чтобы найти функцию, задающую распределение температур $u(\rho, \phi)$.

ЗАДАЧА 7 Покажите, что подстановка $u(\rho, \phi) = R(\rho)\Phi(\phi)$ в уравнение (56) приводит к разделению переменных

$$\rho^2 R'' + 2\rho R' - \lambda R = 0, \tag{58}$$

$$[(\sin\phi)\Phi']' + \lambda(\sin\phi)\Phi = 0, \tag{59}$$

где λ является обычной постоянной разделения (переменных). Мы не можем наложить никаких однородных граничных условий (поскольку их нет), но мы действительно ищем *непрерывные* функции $R(\rho)$ для $0 \leqq \rho \leqq a$ и $\Phi(\phi)$ для $0 \leqq \phi \leqq \pi$. Для уравнения (58) в качестве пробного решения подходит функция $R(\rho) = \rho^k$, но уравнение (59) кажется полностью незнакомым.

ЗАДАЧА 8 Покажите, что подстановка

$$x = \cos\phi, \quad y(x) = \Phi(\arccos x) = \Phi(\phi) \qquad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

в уравнение (59) приводит к *уравнению Лежандра*

$$(1 - x^2)y'' - 2xy + \lambda y = 0,$$

которое мы обсуждали в разделе 8.2. Это уравнение имеет решение $y(x)$, которое является непрерывным для $-1 \leqq x \leqq 1$, только если $\lambda = n(n + + 1)$, где n — неотрицательное целое число. В этом случае $y(x)$ представляет собой функцию, равную произведению некоторого (постоянного) числа на n-й *многочлен Лежандра* $P_n(x)$. Таким образом, мы видим, что собственные значения и собственные функции уравнения (59) даются формулами

$$\lambda_n = n(n+1), \quad \Phi_n(\phi) = P_n(\cos\phi) \tag{60}$$

для $n = 1, 2, 3, \ldots$. Как вы помните из раздела 8.2, первые несколько многочленов Лежандра равны

$$P_0(x) \equiv 1, \qquad P_1(x) = x,$$
$$P_2(x) = \tfrac{1}{2}(3x^2 - 1), \qquad P_3(x) = \tfrac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$
$$P_4(x) = \tfrac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \qquad \ldots .$$

ЗАДАЧА 9 При $\lambda = n(n+1)$ уравнение (58) принимает вид

$$\rho^2 R'' + 2\rho R' - n(n+1)R = 0.$$

Покажите, что пробное решение $R(\rho) = \rho^k$ приводит к общему решению

$$R(\rho) = A\rho^n + \frac{B}{\rho^{n+1}}.$$

Но из непрерывности в $\rho = 0$ следует, что здесь $B = 0$, так что из этого следует, что собственная функция уравнения (58), соответствующая $\lambda_n = n(n+1)$, равна (постоянному) числу, умноженному на $R_n(\rho) = \rho^n$. Таким образом, мы нашли решения (играющие роль стандартных кирпичиков)

$$u_n(\rho, \phi) = \rho^n P_n(\cos\phi) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

уравнения Лапласа (56). И, как обычно, наш следующий шаг состоит в том, чтобы записать формальное решение в виде ряда

$$u(\rho, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \rho^n P_n(\cos\phi). \tag{61}$$

ЗАДАЧА 10 Остается только обсудить выбор коэффициентов в уравнении (61), чтобы удовлетворить неоднородному условию

$$u(a, \phi) = g(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n a^n P_n(\cos\phi).$$

При $x = \cos\phi$, $f(x) = g(\phi) = g(\cos^{-1} x)$ и $c_n = b_n a^n$ это равенство принимает вид *ряда Фурье–Лежандра*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x), \tag{62}$$

выражающего функцию $f(x)$ на интервале $[-1, 1]$ через многочлены Лежандра. Учитывая, что многочлены Лежандра $\{P_n(x)\}_0^\infty$ взаимно ортогональны на интервале $[-1, 1]$ с весовой функцией $r(x) \equiv 1$, примените формальный метод разложения в ряд по собственным функциям из раздела 10.1. Для этого

умножьте каждую часть уравнения (62) на $P_k(x)$ и почленно проинтегрируйте, чтобы получить *формулу для коэффициентов ряда Фурье–Лежандра*

$$c_n = \frac{\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\,dx}{\int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2\,dx}.$$

Но тогда, зная интеграл

$$\int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2\,dx = \frac{2}{2n+1},$$

получим

$$c_n = \frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_n(x)\,dx. \tag{63}$$

Покажите, наконец, что такой выбор значений коэффициентов приводит к формальному решению в виде ряда

$$u(\rho,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{\rho}{a}\right)^n P_n(\cos\phi) \tag{64}$$

граничной (краевой) задачи (задачи, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения), поставленной в уравнениях (56) и (57).

ЗАДАЧА 11 Введите обозначения

$$k!! = k(k-2)(k-4)\cdots 4\cdot 2$$

для k четных и

$$k!! = k(k-2)(k-4)\cdots 3\cdot 1$$

для k нечетных. Зная интеграл

$$\int_0^1 P_n(x)\,dx = \begin{cases} 1, & \text{если } n=0,\\ \frac{1}{2}, & \text{если } n=1,\\ 0, & \text{если } n=2,4,6,\ldots,\\ (-1)^{(n-1)/2}\dfrac{(n-2)!!}{(n+1)!!}, & \text{если } n=3,5,7,\ldots \end{cases} \tag{65}$$

получите ряд Фурье–Лежандра

$$s(x) = \tfrac{3}{2}P_1(x) - \tfrac{7}{8}P_3(x) + \tfrac{11}{16}P_5(x) - \tfrac{75}{128}P_7(x) + \cdots =$$

$$= \tfrac{3}{2}P_1(x) + \sum_{\substack{n \text{ нечетное}\\ n\geqq 3}} (-1)^{(n-1)/2}(2n+1)\frac{(n-2)!!}{(n+1)!!}P_n(x) \tag{66}$$

для функции прямоугольного колебания (меандра)

$$s(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } -1 < x < 0, \\ +1, & \text{если } 0 < x < 1. \end{cases}$$

На рис. 10.5.9 показан график частичной суммы 25 членов ряда в равенстве (66), на котором отчетливо видно явление Гибса в окрестности точки $x = 0$.

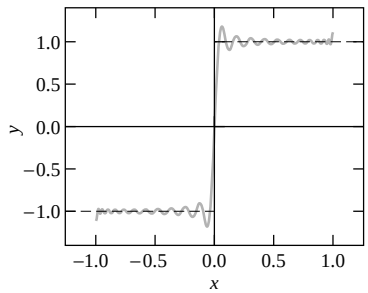


Рис. 10.5.9. График частичной суммы 25 членов ряда, представляющего прямоугольную волну с помощью равенства (66)

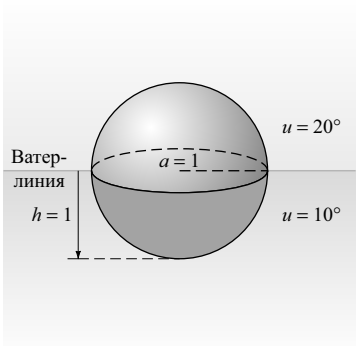


Рис. 10.5.10. Плавающий сферический бакен с удельным весом $\delta = 0{,}5$

ПРОЕКТ Е На рис. 10.5.10 показан твердый сферический бакен радиуса $a = 1$ метр, плавающий в воде. Если бакен имеет однородный удельный вес $\delta = 0{,}5$ (плотность материала бакена равна половине плотности воды), то он погружается на глубину $h = 1$ метр, как показано на рисунке. Предположим, что температура воды равна 10°, а температура воздуха равна 20°. При этих условиях мы хотим найти функцию, задающую распределение температур $u(\rho, \phi)$ внутри бакена, при граничном (краевом, предельном) условии

$$u(1, \phi) = g(\phi) = \begin{cases} 20, & \text{если } 0 < \phi < \pi/2, \\ 10, & \text{если } \pi/2 < \phi < \pi. \end{cases}$$

Тогда

$$f(x) = g(\arccos x) = \left\{ \begin{array}{ll} 10, & \text{если } -1 < x < 0 \\ 20, & \text{если } \quad 0 < x < 1 \end{array} \right\} = 15 + 5s(x),$$

если использовать обозначение ступенчатой функции $s(x)$ из задачи 11. Учитывая это, примените уравнения (64) и (66) и покажите, что

$$u(\rho, \phi) = 15 + \tfrac{15}{2}\rho P_1(\cos\phi) + \\ + \sum_{\substack{n \text{ нечетное} \\ n \geqq 3}} 5 \cdot (-1)^{(n-1)/2}(2n+1)\frac{(n-2)!!}{(n+1)!!}\rho^n P_n(\cos\phi). \quad (67)$$

Поскольку многочлены Лежандра нечетных степеней имеют только слагаемые нечетных степеней, то из уравнения (67) следует, что бакен имеет постоянную среднюю температуру 15° на уровне воды, т. е. во всем поперечном сечении на уровне ватерлинии (где $\phi = \pi/2$). Как первый шаг в использовании ряда (67), исследуйте распределение температур внутри бакена. Для этого просуммируйте достаточное количество членов для того, чтобы начертить график u как функции $u(z)$ высоты x ($-1 \leqq z \leqq 1$) на вертикальной оси симметрии бакена. Зная, что $u(0) = 15$, найдите числовые значения z, для которых $u = 12{,}5^\circ$ и $u = 17{,}5^\circ$.

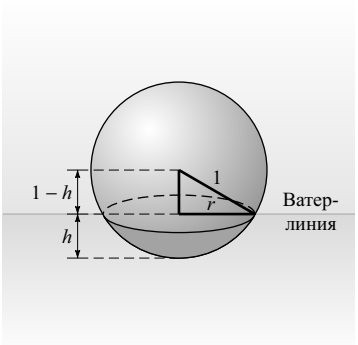


Рис. 10.5.11. Плавающий бакен с $\delta < 0{,}5$

Задача для бакена более интересна, если удельный вес бакена меньше, чем половина удельного веса воды, т. е. $0 < \delta < 0{,}5$. В этом случае бакен плавает в воде выше, т. е. так, как показано на рис. 10.5.11. Из закона Архимеда для плавающих тел следует, что бакен плавает так, что погружена только часть δ его полного объема $4\pi/3$. Следовательно, часть бакена, лежащая ниже ватерлинии, имеет объем $V = 4\pi\delta/3$. Но этот объем также выражается формулой объема сегмента сферы

$$V = \frac{\pi h}{6}(3r^2 + h^2).$$

Приравняйте эти два выражения для V и покажите, что глубина h, но которую погружается бакен в воду, представляет собой решение кубического уравнения

$$h^3 - 3h^2 + 4\delta = 0. \tag{68}$$

Теперь сами выберите δ — можно, например, положить его равным одной десятой наименьшей отличной от нуля цифры в вашем номере студенческого билета. При выбранном значении удельного веса бакена начертите график левой части этого уравнения, чтобы увидеть, что оно имеет единственный корень в интервале $0 < h < 1$. Найдите приближение к этому корню h с точностью не меньше двух десятичных знаков. Затем запишите граничное

(краевое, предельное) условие (температура воды равна $10°$, температура воздуха равна $20°$) в виде

$$f(x) = \begin{cases} 10, & \text{если } -1 < x < h-1, \\ 20, & \text{если } h-1 < x < +1, \end{cases}$$

так что равенство (63) дает формулу

$$c_n = \int_{-1}^{h-1} 10P_n(x)\,dx + \int_{h-1}^{1} 20P_n(x)\,dx \tag{69}$$

для коэффициентов $\{c_n\}_0^\infty$ ряда

$$u(\rho,\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \rho^n P_n(\cos\phi). \tag{70}$$

Теперь вопросы — о температуре на уровне ватерлинии внутри бакена и о том, где внутри бакена температура точно равна $12{,}5°$, $15°$ и $17{,}5°$ — становятся более интересными. Если $h \neq 0$, то необходимо применить численные методы интегрирования, чтобы оценить интегралы в (69). Например, для этой цели вполне может использоваться следующая команда системы *Mathematica*:

```
c[n] = ((2*n + 1)/2)*
    (10*NIntegrate[LegendreP[n,x], {x, -1, h - 1}] +
     20*NIntegrate[LegendreP[n,x], {x, h - 1, 1}])
```

Объясните, почему из равенства (70) следует, что температура $u(z)$ в точке $(0, 0, z)$ (на вертикальной оси симметрии бакена при $-1 \leqq z \leqq 1$) выражается формулой

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n. \tag{71}$$

Если δ выбрать так, чтобы $h = 0{,}5$, то частичная сумма ряда (71), состоящая из 50 слагаемых, может использоваться для того, чтобы начертить график $u(z)$, показанный на рис. 10.5.12. Из этого графика мы видим, что температура увеличивается нелинейно от $u(-1) = 10$ до $u(1) = 20$. Используя функцию `FindRoot` системы *Mathematica*, мы находим, что $u(-0{,}6335) \approx 12{,}5$, $u(-0{,}3473) \approx 15$ и $u(0) = 17{,}5$.

Теперь температура в центре поперечного сечения бакена на уровне ватерлинии равна $u(-0{,}5) \approx 13{,}6603$ (а не средней температуре $15°$, которую можно было бы ожидать по наивности). На рис. 10.5.13 мы видим, что

$$\rho = \sqrt{x^2 + 0{,}25} \quad \text{и} \quad \phi = \pi - \operatorname{arctg}|2x|$$

в точке, находящейся в поперечном сечении на уровне ватерлинии на расстоянии x от вертикальной оси бакена. График u (теперь как функции x) показан на рис. 10.5.14. Этот график был вычерчен следующим образом. Найденные выражения для ρ и ϕ подставлялись в частичную сумму 50 членов ряда (67). Можете ли вы (на интуитивном уровне) объяснить, почему при увеличении x

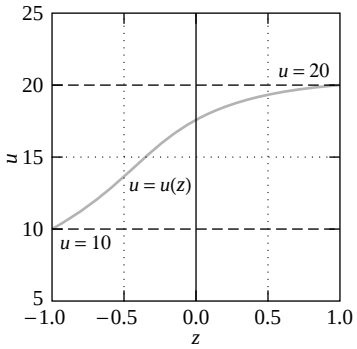


Рис. 10.5.12. Температура $u(z)$ в точке z на вертикальной оси бакена при $h = 0{,}5$

(начиная от нуля) температура $u(x)$ сначала уменьшается, а затем быстро повышается к $u = 15°$ на граничном круге, представляющем собой поперечное сечение на уровне ватерлинии?

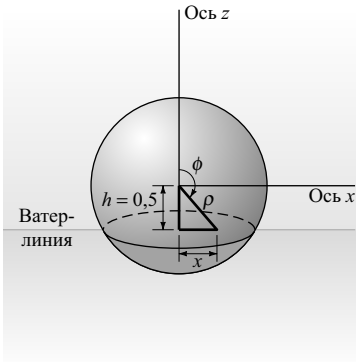


Рис. 10.5.13. Поперечное сечение на уровне ватерлинии при $z = -0{,}5, -\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq x \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$

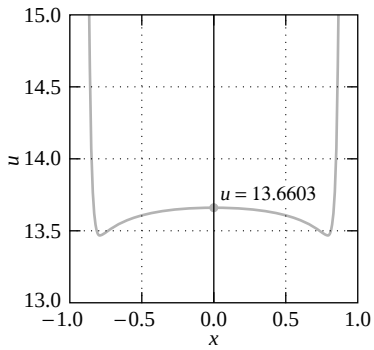


Рис. 10.5.14. Температура $u(x)$ в поперечном сечение на уровне ватерлинии бакена при $h = 0{,}5$

Сферические (шаровые) функции и обложка книги

Равенство (55) дает выражение трехмерного лапласиана в сферических координатах. Рассмотрим, например, радиальные колебания поверхности упругой сферической планеты радиуса c. Если $u(\phi, \theta, t)$ обозначает радиальное смещение в момент времени t точки (ϕ, θ) на поверхности $\rho = c$ планеты, то волновое уравнение $u_{tt} = a^2 \nabla^2 u$ (при $\rho = c$ и $u_\rho \equiv 0$) принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = b^2 \nabla^2_{\phi\theta} u, \tag{72}$$

где $b = a/c$ и

$$\nabla^2_{\phi\theta} u = \frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left((\sin\phi)\frac{\partial u}{\partial\phi}\right) + \frac{1}{\sin^2\phi}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}. \tag{73}$$

Ну а уравнение (72) моделирует колебания приливно-отливных волн на поверхности сферической планеты радиуса c. В этом случае $u(\phi, \theta, t)$ обозначает радиальное смещение (от положения равновесия) поверхности воды в точке (ϕ, θ) в момент времени t и $b^2 = gh/c^2$, где h—средняя глубина воды и g обозначает гравитационное ускорение на поверхности планеты.

Можно показать, что метод разделения переменных, который позволяет положить

$$u(\phi, \theta, t) = Y(\phi, \theta)T(t)$$

в уравнении (72), приводит к собственным функциям типичного вида

$$u_{mn}(\phi, \theta, t) = Y_{mn}(\phi, \theta)\cos\omega_n t \tag{74}$$

для $0 \leqq m \leqq n = 1, 2, 3, \ldots$. Частота этих колебаний $\omega_n = b\sqrt{n(n+1)}$ и Y_{mn} обозначает **шаровую гармоническую** функцию, определенную равенством

$$Y_{mn}(\phi, \theta) = P_n^m(\cos\phi)\cos m\theta \tag{75}$$

через так называемую **присоединенную функцию Лежандра**

$$P_n^m(x) = (1 - x^2)^{m/2} P_n^{(m)}(x), \tag{76}$$

где справа стоит m-я производная обыкновенного многочлена Лежандра.

Например, давайте рассмотрим волны на поверхности воды со (весьма нереалистичное предположение) средней глубиной хлюпания $h = 2$ на поверхности маленькой сферической планеты радиуса $c = 5$. На рис. 10.5.15 и 10.5.16 мы показываем несколько типичных форм поверхности воды вида $\rho = c + hY_{mn}(\phi, \theta)$. Для рисунка на обложке этой книги мы взяли $m = 3$ и $n = 9$.

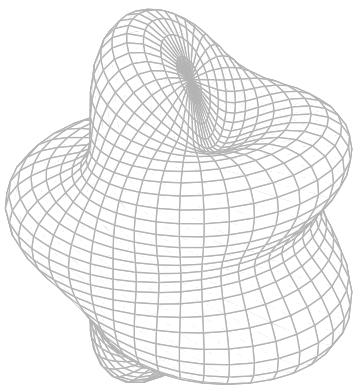


Рис. 10.5.15. Здесь $m = 1$ и $n = 5$

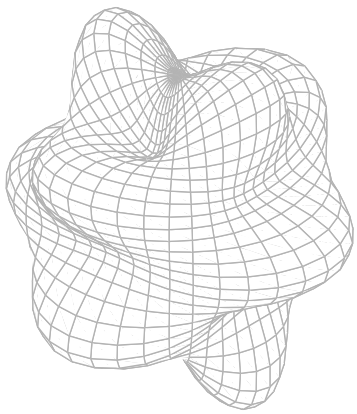


Рис. 10.5.16. Здесь $m = 2$ и $n = 6$

ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ ДАЛЬНЕЙШЕГО ИЗУЧЕНИЯ

Литература по теории и приложениям дифференциальных уравнений весьма обширна. Следующий список включает выбранные нами книги, которые могли бы быть полезны для читателей, желающих глубже изучить темы, представленные в этой книге.

1. ABRAMOWITZ, M. and I. A. STEGUN, *Handbook of Mathematical Functions* (New York: Dover, 1965). Всеобемлющее справочное руководство (написанное Абрамовицем и Стиганом) по математическим функциям, изданное в Нью-Йорке в 1965 году, содержит множество таблиц, на которые часто делаются ссылки в тексте. [Имеется перевод: Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. /Под ред. М. А. Абрамовица и И. Стигана. — М.: Наука, 1979.— 832 с.][2]
2. BIRKHOFF, G. and G.-C. ROTA, *Ordinary Differential Equations*, 2nd ed. (New York: John Wiley, 1969). Учебник среднего уровня по обыкновенным дифференциальным уравнениям, к написанию которого приложили руку знаменитый американский математик Гарретт Биркгоф и всемирно известный специалист по обыкновенным дифференциальным уравнениям Дж. Рота. В этом учебнике более тщательно рассматриваются теоремы существования и единственности, задачи Штурма–Лиувилля и разложения по собственным функциям. Второе издание вышло в Нью-Йорке в 1969 году.
3. BRAUN, M., *Differential Equations and Their Applications*, 3rd ed. (New York: Springer-Verlag, 1983). Вводный курс дифференциальных уравнений и их приложений. Написан известным специалистом Брауном на немного более высоком уровне, чем эта книга; в нем широкко используется методика обучения на иллюстрирующих примерах. Третье издание вышло в Нью-Йорке в 1983 году.
4. CHURCHILL, R. V., *Operational Mathematics*, 3rd ed. (New York: McGraw-Hill, 1972). Книга Черчиля по операционному исчислению представляет собой стандартный справочник по теории и приложениям преобразований Лапласа (изображений по Лапласу), начинающийся приблизительно на том же самом уровне, что и глава 7 этой книги. Третье издание вышло в Нью-Йорке в 1972 году.
5. CHURCHILL, R. V. and J. W. BROWN, *Fourier Series and Boundary Value Problems*, 3rd ed. (New York: McGraw-Hill, 1978). Учебник по рядам Фурье и граничным (краевым, предельным) задачам. Учебник написан Черчилем и Брауном приблизительно на том же самом уровне, что и главы 9 и 10 этой книги. Третье издание вышло в Нью-Йорке в 1978 году.
6. CODDINGTON, E. A., *An Introduction to Ordinary Differential Equations* (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, 1961). Введение в обыкновенные дифференциальные уравнения, напи-

[2] Комментарии к библиографическим ссылкам для удобства читателя дополнены редакторами русского перевода. В наиболее существенных случаях дополнения взяты в квадратные скобки. — *Примеч. ред.*

санное всемирно известным специалистом Э. Коддингтоном. Вводный курс промежуточного уровня; главы 3 и 4 содержат доказательства теорем о степенных рядах и решениях в виде рядов Фробениуса, рассмотренных в главе 8 этой книги.

7. CODDINGTON, E. A. and N. LEVINSON, *Theory of Ordinary Differential Equations* (New York: McGraw-Hill, 1955). Расширенный теоретический текст; в главе 5 обсуждаются решения в окрестности иррегулярной (нерегулярной) особой точки. [Есть перевод: Коддингтон Э., Левинсон Н., Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М., 1958.]
8. DORMAND, J. R., *Numerical Methods for Differential Equations* (Boca Raton: CRC Press, 1996). Пособие по численным методам решения дифференциальных уравнений, изданное в 1996 году. Более полный охват современных выслительных методов приближенного решения дифференциальных уравнений.
9. HABERMAN, R., *Elementary Applied Partial Differential Equations*, 3rd ed. (Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall, 1998). Пособие по основам приложений дифференциальных уравнений в частных производных. Следующий шаг после глав 9 и 10 этой книги, но изложение все еще весьма доступное. Третье издание вышло в 1998 году.
10. HUBBARD, J. H. and B. H. WEST, *Differential Equations: A Dynamical Systems Approach* (New York: Springer-Verlag, 1992 (part I) and 1995 (Higher-Dimensional Systems)). В книге Хаббарда и Веста рассматриваются дифференциальные уравнения и динамические системы. Детально изучаются качественные явления, сбалансированная комбинация вычислительных и теоретических точек зрения. Часть I вышла в 1992 году, а часть II, посвященная системам более высоких размерностей — в 1995.
11. INCE, E. L., *Ordinary Differential Equations* (New York: Dover, 1956). Учебник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Первоначально изданная в 1926 году, это классическая книга по данной теме. [Имеется перевод предыдущего издания: Айнс Э. Л., Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Харьков: Гостехиздат Украины, 1939. — 717 с.]
12. LEBEDEV, N. N., *Special Functions and Their Applications* (New York: Dover, 1972). Всесторонняя книга по функциям Бесселя и другим специальным функциям математической физики. [Лебедев Н. Н., Специальные функции и их приложения.]
13. LEBEDEV, N. N., I. P. SKALSKAYA, and Y. S. UFLYAND, *Worked Problems in Applied Mathematics* (New York: Dover, 1979). Большая коллекция прикладных примеров и задач, подобных рассмотренным в главе 10 этой книги. [Лебедев Н. Н., Скальская И. П., Уфлянд Ю. С., Сборник задач по математической физике. — М., ГИИТЛ, 1955.]
14. MCLACHLAN, N. W., *Bessel Functions for Engineers*, 2nd ed. (London: Oxford University Press, 1955). Справочник по функциям Бесселя для инженеров, изданный в Лондоне Оксфордским университетом в 1955 году (2-е издание). Включает многочисленные физические приложения функций Бесселя.
15. MCLACHLAN, N. W., *Ordinary Non-Linear Differential Equations in Engineering and Physical Sciences* (London: Oxford University Press, 1956). Пособие по применению обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений в инженерных и физических науках, изданное в Лондоне Оксфордским университетом в 1956 году. Введение в нелинейные явления в физических системах с конкретными примерами.
16. POLKING, J. C. and D. Arnold, *Ordinary Differential Equations Using* MATLAB, 2nd ed. (Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall, 1999). Книга, написанная Полкингом и Арнольдом

по применению пакета MATLAB в курсе обыкновенных дифференциальных уравнений. Фактически представляет собой справочник по MATLAB, который учит использовать этот пакет в элементарном курсе дифференциальных уравнений; базируется на программах `dfield` и `pplane` пакета MATLAB, которые используются и упомянуты в этом учебнике. Второе издание вышло в 1999 году.

17. PRESS, W. H., B. P. FLANNERY, S. A. TEUKOLSKY, and W. T. VETTERLING, *Numerical Recipes*: *The Art of Scientific Computing* (Cambridge: Cambridge University Press, 1986). Книга под названием, которое можно превести на русский язык, как *Числовые рецепты: искусство научных вычислений* издана в издательстве Кембриджского университета в 1986 году. В главе 15 обсуждаются современные методы численного решения дифференциальных уравнений. Это издание включает программы на языке FORTRAN; были изданы также издания с программами на языках Pascal и C.
18. RAINVILLE, E., *Intermediate Differential Equations*, 2nd ed. (New York: Macmillan, 1964). Курс дифференциальных уравнений среднего уровня, 2-е издание которого вышло в Нью-Йорке в 1964 году. Главы 3 и 4 содержат доказательства теорем о степенных рядах и решениях в виде ряда Фробениуса, рассмотренных в главе 8 этой книги.
19. SAGAN, H., *Boundary and Eigenvalue Problems in Mathematical Physics* (New York: John Wiley, 1961). Книга, посвященная рассмотрению граничных задач и задач на собственные значения в математической физике. Обсуждаются классические граничные (краевые) задачи (задачи, в которых заданы граничные (предельные, или краевые) значения) и вариационный подход к задачам Штурма–Лиувилля, собственным значениям и собственным функциям. Вышла в Нью-Йорке в 1961 году.
20. SIMMONS, G. F., *Differential Equations* (New York: McGraw-Hill, 1972). Вводный курс дифференциальных уравнений с интересными историческими примечаниями и очаровательными приложениями и к тому же с самым красноречивым предисловием изо всех книг по математике, выпущенных по настоящее время из печати. Вышла в Нью-Йорке в 1972 году. [Вот более полное название этой книги: *Differential equations with applications and historical notes*.]
21. TOLSTOV, G. P., *Fourier Series* (New York: Dover, 1976). Вводный учебник, включающий детальное обсуждение сходимости и приложений рядов Фурье. [Русский оригинал: Толстов Г. П., Ряды Фурье. 2-е изд. — М., 1960.]
22. THOMPSON, J. M. T. and H. B. STEWART, *Nonlinear Dynamics and Chaos* (New York: John Wiley, 1986). Книга известных специалистов Томпсона и Стюарта, посвященная нелинейной динамике и хаосу. Включает более детальные обсуждения уравнений Дуффинга в случае вынужденных колебаний, Лоренца и систем Росслера (среди других, в которых наблюдаются нелинейные хаотические явления). Книга вышла в Нью-Йорке в 1986 году.
23. WEINBERGER, H. F., *A First Course in Partial Differential Equations* (New York: Blaisdell, 1965). Вводный курс дифференциальных уравнений в частных производных, написанный известным специалистом Вейнбергом, включает разделение переменных, методы Штурма–Лиувилля и приложения методов преобразования Лапласа (изображения по Лапласу) к дифференциальным уравнениям в частных производных. Книга вышла в Нью-Йорке в 1965 году.
24. WEINSTOCK, R., *Calculus of Variations* (New York: Dover, 1974). Книга по вариационному исчислению, написанная известным специалистом Вейнстоком, включает вариацион-

ные методы вывода дифференциальных уравнений в частных производных колебаний струны, мембран, стержней и балок. Книга вышла в Нью-Йорке в 1974 году.

Литература, добавленная редактором русского перевода

Следующий ниже список включает некоторые книги, изданные на русском языке и имеющиеся переводы на русский язык. Конечно, этот список не претендует на полноту, уже хотя бы потому, что я стремился указать только классические монографии или учебники, которые в свое время были доступны, по крайней мере, в Москве и Ленинграде. Впрочем, в некоторых случаях я все же не удержался и включил в список работы, которые представляют исторический интерес.

1. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. *Теория колебаний*. — М.: Физматгиз, 1959.
2. Арнольд В. И. *Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений*. — М.: Наука, 1978. — 304 с.
3. Арнольд В. И. *Лекции об уравнениях с частными производными*.
4. Арнольд В. И. *Математические методы классической механики*. — М.: Наука, 1979.
5. Арнольд В. И. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. — М.: Наука, 1971. — 240 с. Довольно современный учебник, написанный Великим Мастером. Изложение вполне доступно для второкурсников.
6. Арушанян О. Б., Залеткин С. Ф. *Пакет прикладных программ решения типовых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений* // Вопросы конструирования библиотек программ. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1985.
7. Бабенко К. И. *Основы численного анализа*. — М.: Наука, 1986.
8. Бабушка И., Витасек Э., Прагер М. *Численные процессы решения дифференциальных уравнений*. — М.: Мир, 1979.
9. Барбашин Е. А. *Введение в теорию устойчивости*. — М.: Наука, 1971. — 223 с.
10. Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. *Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости*. — М.: Наука, 1976.
11. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. *Численные методы*. — М.: Наука, 1987.
12. Беллман Р. *Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений*. — М.: ИЛ, 1954.
13. Беллман Р., Кук К. Л. *Дифференциально-разностные уравнения*. — М.: Мир, 1967.
14. Березин И. С, Жидков Н. П. *Методы вычислений*. — Т. 2. — М.: Физматгиз, 1962.
15. Бибиков Ю. Н. *Курс обыкновенных дифференциальных уравнений*. Университетский учебник классического типа для математиков, написанный на основе курсов, которые автор читал в 1980-е годы в Ленинградском университете.
16. Бибиков Ю. Н. *Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений*. Университетский учебник традиционного типа для математиков, написанный на основе курсов, которые автор читал в 1970-е годы в Ленинградском университете.
17. Биркгоф Дж. Д. *Динамические системы*. — М.: ГОНТИ, 1941.
18. Бордовицина Т. В. *Современные численные методы в задачах небесной механики*. — М.: Наука, 1984, 136 с.

19. Брюно А. Д. *Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений*. — М.: Наука, 1979.
20. Бугров Я. С., Никольский С. М. *Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного*. — М.: Наука, 1981. — 448 с. Пос. для втузов.
21. Валле-Пуссен Ш. Ж. *Курс анализа бесконечно малых*. — М.: ИЛ., 1962.
22. Гантмахер Ф. Р. *Теория матриц*, 3-е изд. — М.: Наука, 1967.
23. Гельфанд И. М., Фомин С. В. *Вариационное исчисление*. — М.: Физматгиз, 1961.
24. Годунов С. К., Рябенький В. С. *Разностные схемы*. — М.: Наука, 1977.
25. Горбунов А. Д. *Разностные методы решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (тексты лекций)*. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1973.
26. Гудименко Ф. С. *Диференціальні рівняння*. — К:, Изд-во Киевского ун-та, 1958.
27. Гудименко Ф. С., Павлюк І. А., Волкова В. О. *Збірник задач з диференціальних рівнянь*. — К:, Вища школа, 1972.
28. Гутер Р. С., Янпольский А. Р. *Дифференциальные уравнения*. — М.: Физматгиз, 1962. — 246 с.
29. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. *Высшая математика в упражнениях и задачах*. — М.: Высш. школа, 1980. — 365 с.
30. Демидович Б. П. *Лекции по математической теории устойчивости*. — М.: Наука, 1967. — 472 с.
31. Деч Г. *Руководство к практическому применению преобразования Лапласа*. — М.: Наука, 1965. — 287 с.
32. Дьяченко В. Ф. *Основные понятия вычислительной математики*. — М.: Наука, 1977.
33. Еругин Н. П. *Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений*. — М.: Наука и техника, 1972. — 668 с.
34. Еругин Н. П. *Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений*. — Минск, 1963.
35. Еругин Н. П. *Неявные функции*. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1950.
36. Еругин Н. П. и др. *Курс обыкновенных дифференциальных уравнений*. — К.: Вища школа, 1974. — 472 с.
37. Жоголев Е. А. *Программа интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка методом Штермера* // Вычислительные методы и программирование. Вып. I. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1962.
38. Залеткин С. Ф. *О численном решении задачи Коши для обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений на больших отрезках интегрирования* // Вычислительные методы и программирование. Вып. XXVI. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1977.
39. Залеткин С. Ф. *Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений многошаговыми методами* // Конструирование библиотек программ. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986.
40. Зельдович Я. Б., Мышкис А. Д. *Элементы прикладной математики*. — М.: Наука, 1972. — 592 с.
41. Ишлинский А. Ю. *Инерциальное управление баллистическими ракетами*. — М.: Наука, 1968.

42. Калиткин Н. Н. *Численные методы*.

43. Камке Е. *Интеграл Лебега–Стильтьеса*. — М.: Физматгиз, 1959.

44. Камке Э. *Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка*. — М.: Наука, 1966.

45. Камке Э. *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*. — М.: Наука, 1971. — 576 с. Это всеобемлющий справочник для тех, кто увлекается классификацией дифференциальных уравнений или просто хочет найти готовые решения дифференциальных уравнений, не очень утруждая себя выкладками. Хотя изложение теории несколько конспективно, количество примеров с решениями просто поражает — больше полутора тысяч!

46. Карташев А. П., Рождественский Б. Л. *Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления*. — М.: Наука, 1980. — 288 с.

47. Келли Дж. Л. *Общая топология*. — М.: Наука, 1968. Это классический учебник по топологии — доступный и простой. Вероятно, по этой причине некоторые выдающиеся топологи считают, что он устарел еще до выхода, другие же полагают, что такой учебник не устареет никогда.

48. Киселев А. И., Краснов М. А., Макаренко Т. И. *Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям*. — М.: Высш. школа, 1965. — 307 с.

49. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. — М.: Наука, 1968. Классический учебник по функциональному анализу для мехматовских третьекурсников.

50. Кострикин А. И. *Введение в алгебру*. — М.: Наука, 1977.

51. Крыжановский С. Е. *Дифференциальные уравнения*. — Х.: ГОНТИ, 1938. — 398 с.

52. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И. *Начала теории вычислительных методов. Дифференциальные уравнения*. — Минск: Наука и техника, 1982. — 286 с.

53. Курант Р. *Уравнения с частными производными*.

54. Лагранж Ж. *Аналитическая механика*. Т. 1 и 2. — М.-Л.: Гостехиздат, 1950.

55. Ла-Салль Ж., Лефшец С. *Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова*. — М.: Мир, 1964.

56. Лефшец С. *Геометрическая теория дифференциальных уравнений*. — М.: ИЛ, 1961.

57. Лизоркин П. И. *Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа*. — М.: Наука, 1981. — 384 с.

58. Ляшко И. И. и др. *Дифференциальные уравнения*. — К.: Вища школа, 1981. — 504 с.

59. Массера Х., Шеффер Х. *Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства*. — М.: Мир, 1970.

60. Максвелл Д. К., Вышнеградский И. А., Стодола А. *Теория автоматического регулирования*. — М.: Гостехиздат, 1949.

61. Малкин И. Г. *Теория устойчивости движения*, 2-е изд. — М.: Наука, 1966.

62. Марсден Дж., Мак-Кракен М. *Бифуркация рождения цикла и ее приложения*. — М.: Мир, 1980.

63. Мартыненко В. С. *Операционное исчисление*. — К.: Изд-во Киев. ун-та, 1968. — 202 с.

64. Матвеев Н. М. *Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений*. — М.: Высшая школа, 1967. Обстоятельный учебник для мат-меха (так в Ленинградском (и ныне Санкт-Петербургском) университете называется мехмат). Выдержал несколько изданий (см. дальше), иногда существенно отличающихся в деталях.

65. Матвеев Н. М. *Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений*. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1965.

66. Матвеев Н. М. *Методы интегрирования обыкновенных уравнений*. — Минск: Вышэйш. школа, 1974. — 766 с.

67. Матвеев Н. М. *Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям*. — Минск: Вишэйш. школа, 1970. — 357 с.

68. Матвеев Н. М. *Дифференциальные уравнения*.

69. Матвеев Н. М. *Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений*.

70. Матвеев Н. М. *Сборник задач и упражнений по дифференциальным уравнениям*.

71. Милн В. Э. *Численное решение дифференциальных уравнений*. — М.: ИЛ, 1955.

72. Милнор Дж. *Теория Морса*. — М.: Мир, 1965.

73. Натансон И. П. *Теория функций вещественной переменной*. — М.: 1950.

74. Немыцкий В. В., Степанов В. В. *Качественная теория дифференциальных уравнений*, 2-е изд., М.-Л.: ГИТТЛ, 1949.

75. Ньютон Ис. *Математические начала натуральной философии*. — Перевод с латинского с примечаниями и пояснениями А. Н. Крылова //Собрание трудов академика А. Н. Крылова, т. VII. — М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1936.

76. Петровский И. Г. *Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений*. — М.: МГУ, 1984.

77. Плисс В. А. *Нелокальные проблемы теории колебаний*. — М.: Наука, 1964.

78. Понтрягин Л. С. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. — М.: Наука, 1965. История создания этого учебника весьма поучительна. Учебник был написан на основе курса лекций, который читал на мехмате МГУ сам Лев Семенович. Несомненно, созданный им курс для того времени был революционным. Этот курс с самого начала существенно отличался от обширных курсов, переполненных всевозможными пустяковыми деталями лишь потому, что старые профессора не в состоянии опустить все эти пустяки, так как ничем иным заполнить лекционное время они не могут. Разработанный Львом Семеновичем курс имел в своей основе совсем небольшое количество современных (для своего времени) основополагающих идей, которые должны были усвоить студенты не путем зубрежки, а путем активного примения их для решения действительно важных задач теории дифференциальных уравнений. Не удивительно, что весьма многочисленные консерваторы ополчились против курса. Прежде всего я думаю, это произошло потому, что этот курс был предельно кратким, четким и понятным для студентов. (О, как некоторые профессора любят рассуждать о том, чего не понимают сами!) Поскольку такой курс понравился студентам, это еще больше усилило неприязнь завистников к лектору. А тут еще лектор решил опубликовать **такой** учебник! Из-за этого начались самые безобразные партийно-административные козни: то рукопись найти не могут, то подписи нет, то типография занята, то желания нет, то опять утеряли, а потом забыли и т. д. Но Лев Семенович был тертый калач, закаленный в борьбе с партбюро, и все эти козни успешно,

хотя и не без труда, преодолевал. Казалось, все шло к победе, хотя и сильно изматывало лектора. И вот тогда-то из-за кулис появился главный консерватор — **администратор** (им оказался декан мехмата МГУ В. В. Степанов — автор не менее знаменитого учебника) и распорядился: не печатать, в библиотеку не принимать, студентам не давать! Но все же незадолго до экзамена учебник появился. И хотя курс завершился абсолютным триумфом (студенты отлично сдали экзамен), Лев Семенович устал до такой степени, что пришлось отказаться от чтения этого курса в следующем учебном году! (Никому из учеников Льва Семеновича продолжить чтение курса не разрешили.) Пиррова победа? Оказалось, что нет: учебник в уникально короткий срок (меньше года) был переведен на английский и пользовался огромным успехом у американских студентов. А потом выдержал пять официальных (последнее в 1982 году) изданий в СССР! Настоятельно советую хотя бы просмотреть эту книгу и сравнить, чем она отличается от учебника Степанова. Это поможет еще раз взглянуть на теорию обыкновенных дифференциальных уравнений с высоты птичьего полета и *самостоятельно* составить представление о том, рак развивалась теория обыкновенных дифференциальных уравнений в XIX веке и первой половине XX века.

79. Поттер Д. *Вычислительные методы в физике*.
80. Пуанкаре А. *О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями*. — М.-Л.: Гостехиздат, 1947.
81. Раус Э. Дж. *Динамика системы твердых тел*. — Т. I и II. — М.: Наука, 1983.
82. Риман Б. *Сочинения*. — М.—Л.: Гостехиздат, 1948, с. 225–261. О возможности представления функции посредством тригонометрического ряда.
83. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. *Лекции по функциональному анализу*. — М.: ИЛ, 1954.
84. Роуч П. *Вычислительная гидродинамика*.
85. Самарский А. А., Гулин А. В. *Численные методы*. — М.: Наука, 1989. — 432 с.
86. Самарский А. А. *Введение в численные методы*.
87. Сансоне Дж. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. — Т. 1 и 2. — М.: ИЛ, 1953–1954.
88. Соболев В. И. *Лекции по дополнительным главам математического анализа*. — М.: Наука, 1968.
89. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Под редакцией Дж. Холла и Дж. Уатта. — М.: Мир, 1979. — 312 с.
90. Степанов В. В. *Курс дифференциальных уравнений*. — М.: Гиз. физ.-мат. лит-ры, 1958. Мехматовский учебник, очень старый (основной уровень соответствует началу прошлого века), но из тех, что не стареют, — и потому многократно переиздавался. Л. С. Понтрягин в середине прошлого столетия создал свой более современный курс, на основе которого написал свой учебник, вследствие чего на мехмате МГУ разгорелись жаркие споры по вопросу том, допустимо ли опустить в курсе дифференциальных уравнений все то устаревшее, что так усердно зубрили предыдущие поколения. В МГУ во всяком случае победили консерваторы, и данный учебник использовался до семидесятых годов, а во многих университетах и много лет после.
91. Стокер Дж. *Нелинейные колебания в механических и электрических системах*. — М.: ИЛ, 1952.

92. Титчмарш Е. *Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка*. — Ч. I. — М.: ИЛ, 1960. — Ч. II. — М.: ИЛ, 1961.

93. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. *Дифференциальные уравнения*.

94. Трикоми Ф. *Дифференциальные уравнения*. — М.: ИЛ, 1962.

95. Фарлоу С. *Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров*.

96. Филиппов А. Ф. *Сборник задач по дифференциальным уравнениям*. — М.: Наука. — 128 с.

97. Фихтенгольц Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*. — М.: Наука, 1966. Многократно переиздававшийся весьма обстоятельный (трехтомный!) классический курс.

98. Хартман Ф. *Обыкновенные дифференциальные уравнения*. — М.: Мир, 1970. Нет сомнения, это превосходное учебное пособие, но начинающим оно может показаться перегруженным деталями. Насоятельно рекомендую его для старшекурсников.

99. Хейл Дж. *Колебания в нелинейных системах*. — М.: ИЛ, 1966.

100. Чезари Л. *Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений*. — М.: ИЛ, 1964.

101. Шилов Г. Е., Гуревич Б. Л. *Интеграл, мера и производная. Общая теория*. — М.: Наука, 1967.

102. Штеттер Х. *Анализ методов дискретизации для обыкновенных дифференциальных уравнений*. — М.: Мир, 1978. — 451 с.

103. Штокало И. З. *Операционное исчисление*. — К.: Наук. думка, 1972. — 303 с.

104. Эйлер Л. *Интегральное исчисление*. — Т. I. — М.: Гостехиздат, 1956. — 415 с.

105. Эйлер Л. *Интегральное исчисление*. — Т. II. — М.: Гостехиздат, 1957. — 368 с.

106. Эйлер Л. *Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума*. — М.-Л.: Гостехиздат, 1934. — 600 с.

107. Эльсгольц Л. Э. *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление*. — М.: Наука, 1969.

108. Эльсгольц Л. Э. *Дифференциальные уравнения*. — М.-Л., ГИТЛ, 1957. Университетский учебник для физиков.

109. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом*. — М.: Наука, 1971. — 296 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Существование и единственность решений

В главе 1 мы видели, что задача Коши (задача с начальными условиями) в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(a) = b \tag{1}$$

может не иметь единственного решения на данном интервале, содержащем точку $x = a$. Например, ответ на задачу 33 в разделе 1.3 говорит, что задача Коши (задача с начальными условиями)

$$x^2 \frac{dy}{dx} + y^2 = 0, \quad y(0) = b \tag{2}$$

не имеет никаких решений вообще, если не выполнено равенство $b = 0$; если же это равенство выполнено, то решений бесконечно много. Согласно задаче 31 из раздела 1.3, задача Коши (задача с начальными условиями)

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{1 - y^2}, \quad y(0) = 1 \tag{3}$$

имеет два различных решения $y_1(x) \equiv 1$ и $y_2(x) = \cos x$ на интервале $0 \leqq x \leqq \pi$. В этом приложении мы укажем достаточные условия (они будут относиться к функции $f(x, y)$), при выполнении которых можно гарантировать, что задача Коши (задача с начальными условиями) (1) имеет одно и только одно решение, а затем установим соответствующие версии теорем единственности и существования, которые были сформулированы без доказательства в разделах 1.3, 3.1, 3.2 и 4.1.

A.1. Существование решений

Подход, который мы используем — это **метод последовательных приближений**, который был развит французским математиком Эмилем Пикаром (1856–1941). Этот метод базируется на том факте, что функция $y(x)$ является решением задачи Коши (задачи с начальными условиями) (1) на открытом интервале I, содержащем точку $x = a$, тогда и только тогда, когда она удовлетворяет интегральному уравнению

$$y(x) = b + \int_a^x f(t, y(t))\, dt \tag{4}$$

для всех x в этом интервале I. В частности, если $y(x)$ удовлетворяет уравнению (4), то ясно, что $y(a) = b$, и дифференцирование обеих частей равенства (4) в соответствии с фундаментальной теоремой анализа приводит к дифференциальному уравнению $y'(x) = f(x, y(x))$.

Мы попытаемся решить уравнение (4), взяв в качестве начальной функции

$$y_0(x) \equiv b, \tag{5}$$

а затем определим рекуррентную последовательность функций $y_1, y_2, y_3, \ldots$, которая, как мы надеемся, будет сходиться к решению. По определению, мы полагаем

$$y_1(x) = b + \int_a^x f(t, y_0(t))\, dt \quad \text{и} \quad y_2(x) = b + \int_a^x f(t, y_1(t))\, dt. \tag{6}$$

Вообще, y_{n+1} получается подстановкой y_n вместо y в правую часть уравнения (4):

$$y_{n+1}(x) = b + \int_a^x f(t, y_n(t))\, dt. \tag{7}$$

Предположим, что мы знаем, что каждая из этих функций $\{y_n(x)\}_0^\infty$ определена на некотором открытом интервале (одном и том же для всех n), содержащем точку $x = a$, и что предел

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) \tag{8}$$

существует в каждой точке этого интервала. Тогда из этих предположений будет следовать, что

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_{n+1}(x) = \lim_{n\to\infty} \left[b + \int_a^x f(t, y_n(t))\, dt \right] =$$

$$= b + \lim_{n\to\infty} \int_a^x f(t, y_n(t))\, dt = \tag{9}$$

$$= b + \int_a^x f\left(t, \lim_{n\to\infty} y_n(t)\right) dt \tag{10}$$

и, следовательно,

$$y(x) = b + \int_a^x f(t, y(t))\, dt$$

при условии, что мы можем оправдать законность изменения поряка операций предельного перехода, которое использовалось при переходе от (9) к (10). Поэтому разумно ожидать, что, при благоприятных условиях, последовательность $\{y_n(x)\}$, определенная рекуррентными соотношениями (5) и (7), будет сходиться к решению $y(x)$ интегрального уравнения (4), и, следовательно, к решению первоначальной задачи Коши (задачи с начальными условиями) (1).

Пример 1 Чтобы применить метод последовательных приближений к задаче Коши (задаче с начальными условиями)

$$\frac{dy}{dx} = y, \quad y(0) = 1, \tag{11}$$

мы напишем уравнения (5) и (7) и таким способом получим

$$y_0(x) \equiv 1, \quad y_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x y_n(t)\,dt. \tag{12}$$

Итеративная формула (12) дает

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x 1\,dt = 1 + x,$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (1 + t)\,dt = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2,$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + t + \tfrac{1}{2}t^2\right) dt = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3$$

и

$$y_4(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + t + \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{6}t^3\right) dt =$$

$$= 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{24}x^4.$$

Ясно, что мы получили последовательность частичных сумм степенного ряда, являющегося решением; действительно, мы немедленно распознаем этот ряд как ряд функции $y(x) = e^x$. Совсем нетрудно показать, что экспоненциальная функция действительно является решением задачи Коши (задачи с начальными условиями) (11); кроме того, прилежный студент может проверить (используя доказательство методом индукции по n), что функция $y_n(x)$, полученная таким способом, действительно является n-й частичной суммой ряда Тейлора в точке $x = 0$ для функции $y(x) = e^x$. ■

Пример 2 Чтобы применить метод последовательных приближений к задаче Коши (задаче с начальными условиями)

$$\frac{dy}{dx} = 4xy, \qquad y(0) = 3, \tag{13}$$

мы, как и в примере 1, запишем равенства (5) и (7). Теперь мы получаем

$$y_0(x) \equiv 3, \quad y_{n+1}(x) = 3 + \int_0^x 4ty_n(t)\,dt. \tag{14}$$

Итеративная формула (14) приводит к равенствам

$$y_1(x) = 3 + \int_0^x (4t)(3)\,dt = 3 + 6x^2,$$

$$y_2(x) = 3 + \int_0^x (4t)(3 + 6t^2)\,dt = 3 + 6x^2 + 6x^4,$$

$$y_3(x) = 3 + \int_0^x (4t)(3 + 6t^2 + 6t^4)\,dt = 3 + 6x^2 + 6x^4 + 4x^6,$$

и

$$y_4(x) = 3 + \int_0^x (4t)(3 + 6t^2 + 6t^4 + 4t^6)\,dt =$$
$$= 3 + 6x^2 + 6x^4 + 4x^6 + 2x^8.$$

Снова ясно, что мы получили частичные суммы степенного ряда, являющегося решением. Совсем не очевидно, какая именно функция имеет такое представление в виде степенного ряда, но задача Коши (задача с начальными условиями) (13) легко решается разделением переменных:

$$y(x) = 3\exp\left(2x^2\right) = 3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x^2)^n}{n!} =$$
$$= 3 + 6x^2 + 6x^4 + 4x^6 + 2x^8 + \tfrac{4}{5}x^{10} + \cdots. \quad \blacksquare$$

В некоторых случаях необходимо вычислить намного большее количество членов для того, чтобы идентифицировать решение или использовать частичную сумму ряда, чтобы найти приближенное решение в точке x, находящейся в некоторой окрестности начального значения. К счастью, системы компьютерной алгебры типа *Maple* и *Mathematica* могут выполнить интегрирование в символическом виде (а не только численное интегрирование) выражений того сорта, что встретились нам в примерах 1 и 2. В случае необходимости, в примере 2 вы могли сгенерировать первую сотню членов всего лишь за несколько минут.

Конечно, в общем случае мы применяем метод Пикара именно потому, что мы не можем найти решение элементарными методами. Предположим, что мы вычислили большое количество членов того, что, как мы верим, является правильным разложением решения в степенной ряд. Мы должны иметь условия, при которых можно заранее *гарантировать*, что последовательность $\{y_n(x)\}$, вычисленная методом последовательных приближений, будет сходиться к решению. Эту проблему удобно обсудить в форме задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(a) = \mathbf{b} \tag{15}$$

для системы m уравнений первого порядка, где

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Оказывается, что с помощью этой векторной системы обозначений (мы ввели ее в разделе 5.1), большинство результатов, касающихся одного [скалярного] уравнения $x' = f(x, t)$, легко обобщить и в результате такого обобщения мы придем к аналогичным результатам для системы m уравнений первого порядка, сокращено записанных в виде векторного уравнения (15). Следовательно, усилия, направленные на использования векторной системы обозначений, в достаточной степени оправдываются общностью, которую обеспечивает такая система обозначений.

В соответствии с методом последовательных приближений для системы (15) необходимо вычислить последовательность $\{\mathbf{x}_n(t)\}_0^\infty$ векторнозначных функций от t,

$$\mathbf{x}_n(t) = \begin{bmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ x_{3n}(t) \\ \vdots \\ x_{mn}(t) \end{bmatrix},$$

определенных рекуррентными соотношениями

$$\mathbf{x}_0(a) \equiv \mathbf{b}, \quad \mathbf{x}_{n+1}(t) = \mathbf{b} + \int_a^t \mathbf{f}(\mathbf{x}_n(s), s)\, ds. \tag{16}$$

Вспомните, что векторнозначные функции интегрируются покомпонентно.

Пример 3 Рассмотрим m-мерную задачу Коши (задачу с начальными условиями)

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{b} \tag{17}$$

для однородной линейной системы с постоянной матрицей коэффициентов $\mathbf{A}$ размера $m \times m$. Равенства (16) примут вид

$$\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{b} + \int_0^x \mathbf{A}\mathbf{x}_n(s)\, ds. \tag{18}$$

Таким образом,

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{b} + \int_0^t \mathbf{A}\mathbf{b}\, ds = \mathbf{b} + \mathbf{A}\mathbf{b}t = (\mathbf{I} + \mathbf{A}t)\mathbf{b};$$

$$\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{b} + \int_0^t \mathbf{A}(\mathbf{b} + \mathbf{A}\mathbf{b}s)\, ds = \mathbf{b} + \mathbf{A}\mathbf{b}t + \tfrac{1}{2}\mathbf{A}^2\mathbf{b}t^2 = \\ = (\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \tfrac{1}{2}\mathbf{A}^2t^2)\mathbf{b}$$

и

$$\mathbf{x}_3(t) = \mathbf{b} + \int_0^t \mathbf{A}(\mathbf{b} + \mathbf{A}\mathbf{b}s + \tfrac{1}{2}\mathbf{A}^2\mathbf{b}s^2)\, ds = \\ = (\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \tfrac{1}{2}\mathbf{A}^2t^2 + \tfrac{1}{6}\mathbf{A}^3t^3)\mathbf{b}.$$

Таким способом мы получили несколько первых частичных сумм решения, являющегося экспоненциальным рядом

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{b} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}t)^n}{n!}\right)\mathbf{b}. \tag{19}$$

Этот ряд представляет собой решение задачи (17); оно было получено ранее в разделе 5.5. ■

Ключевая идея в установлении сходимости метода последовательных приближений состоит в том, чтобы найти соответствующее условие на скорость, с которой изменяется $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ при изменении $\mathbf{x}$ в предположении, что t считается фиксированным. Пусть R — область в $(m+1)$-мерном пространстве $(\mathbf{x}, t)$. Тогда функция $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ называется удовлетворяющей **условию Липшица (непрерывной по Липшицу)** на R, если существует константа $k > 0$, такая что

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}_1, t) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_2, t)| \leqq k|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| \tag{20}$$

для любых точек $(\mathbf{x}_1, t)$ и $(\mathbf{x}_2, t)$ из области R. Вспомните, что **норма** точки или вектора $\mathbf{x}$ в m-мерном пространстве определена как

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_m^2}. \tag{21}$$

Так что $|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$ — просто евклидово расстояние между точками $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$.

Пример 4 Пусть $f(x, t) = x^2 \exp\left(-t^2\right) \sin t$ и пусть R представляет собой ленту $0 \leqq x \leqq 2$ в плоскости xy. Если (x_1, t) и (x_2, t) — две точки в области R, то

$$|f(x_1, t) - f(x_2, t)| = |\exp\left(-t^2\right) \sin t| \cdot |x_1 + x_2| \cdot |x_1 - x_2| \leqq 4|x_1 - x_2|,$$

потому что $\left|\exp\left(-t^2\right) \sin t\right| \leqq 1$ для всех t и $|x_1 + x_2| \leqq 4$, если обе точки x_1 и x_2 лежат в интервале $[0, 2]$. Таким образом, f удовлетворяет условию Липшица (20) при $k = 4$ и поэтому является непрерывной по Липшицу на ленте R. ■

Пример 5 Пусть $f(x, t) = t\sqrt{x}$ на прямоугольнике R, который состоит из точек (x, t) плоскости xt, для которых $0 \leqq x \leqq 1$ и $0 \leqq t \leqq 1$. Тогда, взяв $x_1 = x$, $x_2 = 0$ и $t = 1$, мы находим, что

$$|f(x, 1) - f(0, 1)| = \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}|x - 0|.$$

Поскольку $x^{-1/2} \to +\infty$ при $x \to 0^+$, мы видим, что условие Липшица (20) не может быть удовлетворено ни при какой (конечной) константе $k > 0$. Таким образом функция f, хотя и (это очевидно!) непрерывна на R, *не удовлетворяет* условию Липшица (не является непрерывной по Липшицу) на R. ■

Предположим, однако, что функция $f(x, t)$ имеет непрерывную частную производную $f_x(x, t)$ на замкнутом прямоугольнике R в плоскости xt, и обозначим через k максимальное значение $|f_x(x, t)|$ на R. Тогда формула Лагранжа из дифференциального исчисления влечет

$$|f(x_1, t) - f(x_2, t)| = |f_x(\overline{x}, t) \cdot (x_1 - x_2)|$$

для некоторого $\overline{x}$ в (x_1, x_2), а из этого следует, что

$$|f(x_1, t) - f(x_2, t)| \leqq k|x_1 - x_2|,$$

потому что $|f_x(\overline{x}, t)| \leqq k$. Таким образом, определенная на замкнутом прямоугольнике непрерывно дифференцируемая функция $f(x, t)$ *удовлетворяет* условию Липшица (непрерывна по Липшицу) на этом прямоугольнике. Более того, с помощью известной из дифференциального исчисления функций многих переменных формулы Лагранжа для функций многих переменных можно подобным способом доказать более общее утверждение: *векторнозначная функция* $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ *с непрерывно дифференцируемыми компонентами (составляющими функциями) на замкнутой прямоугольной области* R *в пространстве* $(\mathbf{x}, t)$ *удовлетворяет условию Липшица (непрерывна по Липшицу) на* R.

Пример 6 Функция $f(x, t) = x^2$ удовлетворяет условию Липшица (непрерывна по Липшицу) на любой закрытой [ограниченной] области в плоскости xt. Но рассмотрим эту функцию на бесконечной ленте R, состоящей из точек (x, t), для которых $0 \leqq t \leqq 1$, а x является произвольным. Тогда

$$|f(x_1, t) - f(x_2, t)| = |x_1^2 - x_2^2| = |x_1 + x_2| \cdot |x_1 - x_2|.$$

Поскольку $|x_1 + x_2|$ можно сделать произвольно большим, из этого следует, что f *не удовлетворяет* условию Липшица (*не является* непрерывной по Липшицу) на бесконечной ленте R. ■

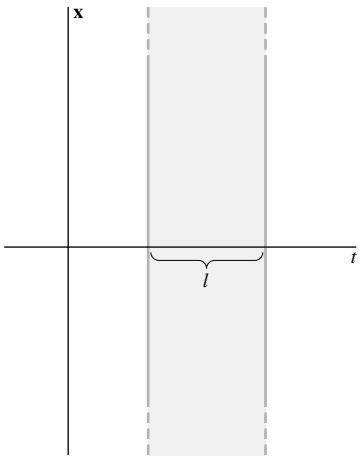


Рис. А.1. Бесконечная полоса в $(m + 1)$-мерном пространстве

Пусть I — интервал на оси t, тогда множество всех точек $(\mathbf{x}, t)$, для которых t принадлежит интервалу I, представляет собой бесконечную полосу, или брус в $(m+1)$-мерном пространстве (рис. А.1). Пример 6 показывает, что условие Липшица (непрерывность по Липшицу) $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ на такой бесконечной плите (бесконечном брусе) — очень сильное условие. Но если на функцию $\mathbf{f}$ наложить такое сильное условие, т. е. потребовать, чтобы функция $\mathbf{f}$ удовлетворяла условию Липшица (условию непрерывности по Липшицу) на таком брусе, то отсюда будет следовать существование решения задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(a) = \mathbf{b}. \tag{15}$$

Несмотря на столь стеснительное условие, существование решения этой задачи имеет огромное значение.

Теорема 1 Глобальное существование решений

Пусть $\mathbf{f}$ будет векторнозначной функцией (с m компонентами) от $m+1$ вещественной переменной и пусть I будет [ограниченным или неограниченным] открытым интервалом, содержащим точку $t = a$. Если $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица (20) для всех t из интервала I и для всех $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$, то задача Коши (задача с начальными условиями) (15) имеет решение на [всем] интервале I.

Доказательство. Мы хотим показать, что последовательность $\{\mathbf{x}_n(t)\}_0^\infty$ последовательных приближений, определенных рекуррентными соотношениями

$$\mathbf{x}_0(a) = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x}_{n+1}(t) = \mathbf{b} + \int_0^t \mathbf{f}(\mathbf{x}_n(s), s)\, ds, \tag{16}$$

сходится к решению $\mathbf{x}(t)$ задачи (15). Мы видим, что каждая из этих функций в свою очередь непрерывна на интервале I, поскольку каждая из них представляет собой [неопределенный] интеграл от непрерывной функции.

Мы можем предположить, что $a = 0$, потому что преобразование $t \to t + a$ превращает задачу (15) в эквивалентную задачу с начальной точкой $t = 0$. Кроме того, мы рассмотрим только часть $t \geqq 0$ интервала I; детали для случая $t \leqq 0$ очень подобны.

Главная часть доказательства состоит в том, чтобы показать, что если $[0, T]$ является замкнутым (и ограниченным) интервалом, содержащимся в I, то последовательность $\{\mathbf{x}_n(t)\}$ сходится *равномерно* на $[0, T]$ к предельной функции $\mathbf{x}(t)$. Это означает, что для заданного $\epsilon > 0$ существует целое число N, такое что

$$|\mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}(t)| < \epsilon \tag{22}$$

для всех $n \geqq N$ и всех t из $[0, T]$. Для обыкновенной (возможно неравномерной) сходимости целое число N, при котором (22) выполняется для всех $n \geqq N$, может зависеть от t, причем значение N, пригодное для всех t из I, может отсутствовать. Но если равномерная сходимость последовательности $\{\mathbf{x}_n(t)\}$ установлена, следующие заключения будут следовать из стандартных теорем анализа (см. с. 620–622 из учебника анализа Тейлора и Манна, 3-е издание которого вышло в Нью-Йорке в 1983 году (A. E. Taylor and W. R. Mann, *Advanced Calculus*, 3rd ed. (New York: John Wiley, 1983))).

1. Предельная функция $\mathbf{x}(t)$ непрерывна на $[0, T]$.
2. Если N выбрать так, что неравенство (22) выполняется при $n \geqq N$, то из того, что $\mathbf{f}$ удовлетворяет условию Липшица (непрерывна по Липшицу), следует, что

   $$|\mathbf{f}(\mathbf{x}_n(t), t) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t)| \leqq k|\mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}(t)| < k\epsilon$$

   для всех t из $[0, T]$ и $n \geqq N$, так что из этого следует, что последовательность $\{\mathbf{f}(\mathbf{x}_n(t), t)\}_0^\infty$ сходится равномерно к $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t)$ на $[0, T]$.
3. Но равномерно сходящуюся последовательность или ряд можно интегрировать почленно, а из этого следует, что при взятии пределов в рекуррентной формуле

в (16),

$$\mathbf{x}(t) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_{n+1}(t) = \mathbf{b} + \lim_{n\to\infty} \int_0^t \mathbf{f}(\mathbf{x}_n(s), s)\, ds =$$

$$= \mathbf{b} + \int_0^t \lim_{n\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_n(s), s)\, ds;$$

таким образом,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{b} + \int_0^t \mathbf{f}(\mathbf{x}(s), s)\, ds. \tag{23}$$

4. Поскольку функция $\mathbf{x}(t)$ непрерывна на $[0, T]$, интегральное уравнение (23) (аналогичное одномерному случаю в (4)) приводит к тому, что $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t)$ на $[0, T]$. Но если это истинно на каждом замкнутом подынтервале открытого интервала I, то это истинно и на всем интервале I.

Поэтому остается только доказать, что последовательность $\{\mathbf{x}_n(t)\}_0^\infty$ сходится равномерно на замкнутом интервале $[0, T]$. Пусть M — максимальное значение функции $|\mathbf{f}(\mathbf{b}, t)|$ для t из $[0, T]$. Тогда

$$|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_0(t)| = \left| \int_0^t \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(s), s)\, ds \right| \leqq \int_0^t |\mathbf{f}(\mathbf{b}, s)|\, ds \leqq Mt. \tag{24}$$

Далее,

$$|\mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t)| = \left| \int_0^t [\mathbf{f}(\mathbf{x}_1(s), s) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(s), s)]\, ds \right| \leqq k \int_0^t |\mathbf{x}_1(s) - \mathbf{x}_0(s)|\, ds,$$

и, следовательно,

$$|\mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t)| \leqq k \int_0^t Ms\, ds = \tfrac{1}{2} kMt^2. \tag{25}$$

Мы теперь переходим к шагу индукции. Примем, что

$$|\mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}_{n-1}(t)| \leqq \frac{M}{k} \cdot \frac{(kt)^n}{n!}. \tag{26}$$

Тогда из этого следует, что

$$|\mathbf{x}_{n+1}(t) - \mathbf{x}_n(t)| = \left| \int_0^t [\mathbf{f}(\mathbf{x}_n(s), s) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n-1}(s), s)]\, ds \right| \leqq$$

$$\leqq k \int_0^t |\mathbf{x}_n(s) - \mathbf{x}_{n-1}(s)|\, ds;$$

следовательно,

$$|\mathbf{x}_{n+1}(t) - \mathbf{x}_n(t)| \leqq k \int_0^t \frac{M}{k} \cdot \frac{(ks)^n}{n!}\, ds.$$

А после оценки этого интеграла следует, что

$$|\mathbf{x}_{n+1}(t) - \mathbf{x}_n(t)| \leqq \frac{M}{k} \cdot \frac{(kt)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Таким образом, (26) справедливо на интервале $[0, T]$ для всех $n \geqq 1$.

Следовательно, члены бесконечного ряда

$$\mathbf{x}_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} [\mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}_{n-1}(t)] \tag{27}$$

мажорируются (по величине на интервале $[0, T]$) членами сходящегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{k} \cdot \frac{(kT)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{M}{k}(e^{kT} - 1), \tag{28}$$

который является рядом положительных констант. Поэтому отсюда по признаку Вейерштрасса (см. с. 618–619 учебника Тейлора и Манна) следует, что ряд в (27) сходится равномерно на $[0, T]$. Но последовательность частичных сумм этого ряда как раз и есть наша первоначальная последовательность $\{\mathbf{x}_n(t)\}_0^{\infty}$ последовательных приближений, так что доказательство теоремы 1 наконец можно считать законченным. ▲

A.2. Линейные системы

Важным приложением только что доказанной глобальной теоремы существования является ее применение к задаче Коши (задаче с начальными условиями)

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \quad \mathbf{x}(a) = \mathbf{b} \tag{29}$$

для линейной системы, где $m \times m$-матричная функция $\mathbf{A}(t)$ и векторнозначная функция $\mathbf{g}(t)$ непрерывны на [ограниченном или неограниченном] открытом интервале I, содержащем точку $t = a$. Чтобы применить теорему 1 к линейной системе в (29), сначала мы обращаем внимание, что доказательство теоремы 1 требует только, чтобы для каждого закрытого ограниченного подынтервала J интервала I существовала константа k, для которой выполняется условие Липшица, т. е. такая, что

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}_1, t) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_2, t)| \leqq k|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| \tag{20}$$

для всех t из J (и всех $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$). Таким образом, нам не нужна единая константа, для которой выполняется условие Липшица для всего открытого интервала I.

Из (29) мы имеем $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}$, так что

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_1, t) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_2, t) = \mathbf{A}(t)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2). \tag{30}$$

Поэтому достаточно показать, что если $\mathbf{A}(t)$ непрерывна на замкнутом ограниченном интервале J, то существует константа k, такая что

$$|\mathbf{A}(t)\mathbf{x}| \leqq k|\mathbf{x}| \tag{31}$$

для всех t из J. Но это следует из того факта (задача 17), что

$$|\mathbf{Ax}| \leqq \|\mathbf{A}\| \cdot |\mathbf{x}|, \tag{32}$$

где **норма** $\|\mathbf{A}\|$ матрицы $\mathbf{A}$ определена как

$$\|\mathbf{A}\| = \left(\sum_{i,j=1}^{m} (a_{ij})^2 \right)^{1/2}. \tag{33}$$

Поскольку $\mathbf{A}(t)$ непрерывна на замкнутом ограниченном интервале J, норма этой матрицы $\|\mathbf{A}\|$ ограничена на J, так что справедливо равенство (31), что и требовалось. Таким образом, мы доказали следующую глобальную теорему существования для линейной задачи Коши (задачи с начальными условиями) (29).

Теорема 2 Существование решения для линейных систем

Пусть $m \times m$-матричная функция $\mathbf{A}(t)$ и векторнозначная функция $\mathbf{g}(t)$ непрерывны на [ограниченном или неограниченном] открытом интервале I, содержащем точку $t = a$. Тогда задача Коши (задача с начальными условиями)

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \quad \mathbf{x}(a) = \mathbf{b} \tag{29}$$

имеет решение на [всем] интервале I. ▲

Как мы видели в разделе 4.1, задача Коши (задача с начальными условиями) m-го порядка

$$\begin{aligned} &x^{(m)} + a_1(t)x^{(m-1)} + \cdots + a_{m-1}(t)x' + a_m(t)x = p(t), \\ &x(a) = b_0, \quad x'(a) = b_1, \quad \ldots, \quad x^{(m-1)}(a) = b_{m-1} \end{aligned} \tag{34}$$

может быть легко преобразована в эквивалентную систему размера $m \times m$, имеющую вид (29). Поэтому из теоремы 2 следует, что если все функции $a_1(t), a_2(t), \ldots, a_m(t)$ и $p(t)$ в (34) непрерывны на [ограниченном или неограниченном] открытом интервале I, содержащем точку $t = a$, то задача Коши (задача с начальными условиями) (34) имеет решение на [всем] интервале I.

A.3. Локальные теоремы существования

В случае *нелинейной* задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(a) = \mathbf{b}, \tag{35}$$

условие теоремы 1, заключающееся в том, что $\mathbf{f}$ удовлетворяет условию Липшица на брусе $(\mathbf{x}, t)$ (t из I, любые значения $\mathbf{x}$), нереалистично и редко выполняется на практике. Это легко проиллюстрировать следующим простым примером.

Пример 1 Рассмотрим задачу Коши (задачу с начальными условиями)

$$\frac{dy}{dx} = x^2, \quad x(0) = b > 0. \tag{36}$$

Как мы видели в примере 6, для уравнения $x' = x^2$ условие Липшица на ленте не выполняется. Решая уравнение (36) методом разделения переменных, находим его решение

$$x(t) = \frac{b}{1 - bt}. \tag{37}$$

Поскольку знаменатель обращается в нуль для $t = 1/b$, уравнение (37) дает решение задачи Коши (задачи с начальными условиями) (36) только для $t < 1/b$, несмотря на тот факт, что дифференциальное уравнение $x' = x^2$ выглядит вполне прилично на всей вещественной оси — ведь функция, появляющаяся в правой части уравнения, является непрерывной всюду. В частности, если b является большим, то мы имеем решение только на очень маленьком интервале справа от $t = 0$.

■

Хотя теорема 2 уверяет нас, что *линейные* уравнения имеют глобальные решения, пример 7 показывает, что, вообще говоря, даже "хорошее" нелинейное дифференциальное уравнение может иметь решение только на маленьком интервале в окрестности начальной точки $t = a$, причем длина этого интервала существования решения может зависеть от начального значения $\mathbf{x}(a) = \mathbf{b}$, так же как и от самого дифференциального уравнения. Причина состоит вот в чем: если $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ непрерывно дифференцируема в окрестности точки $(\mathbf{b}, a)$ в $(m+1)$-мерном пространстве, то, как указано при обсуждении предыдущего примера 6, мы можем заключить, что $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет условию Липшица на некоторой прямоугольной области R с центром в точке $(\mathbf{b}, a)$, причем область имеет вид

$$|t - a| < A, \quad |x_i - b_i| < B_i \tag{38}$$

$(i = 1, 2, \ldots, m)$. В доказательстве теоремы 1 мы должны воспользоваться условием Липшица на функцию $\mathbf{f}$ при анализе рекуррентной формулы

$$\mathbf{x}_{n+1}(t) = \mathbf{b} + \int_a^t \mathbf{f}(\mathbf{x}_n(s), s)\, ds. \tag{39}$$

Потенциальная трудность состоит в том, что если значения t не ограничены подходящим образом, то точка $(\mathbf{x}_n(t), t)$, появляющаяся в подынтегральном выражении в (39), может не лежать в области R, в которой $\mathbf{f}$ (по предположению) удовлетворяет условию Липшица. С другой стороны, можно показать, что на достаточно маленьком открытом интервале J, содержащем точку $t = a$, графики функций $\{\mathbf{x}_n(t)\}$, построенных с помощью рекуррентной формулы (39), остаются в пределах области R, так что доказательство сходимости может тогда быть проведено так, как доказательство теоремы 1. Доказательство следующей *локальной* теоремы существования может быть найдено в главе 6 2-го издания курса обыкновенных дифференциальных уравнений Биркгофа и Рота, вышедшем в Нью-Йорке в 1969 году (G. Birkhoff and G.-C. Rota, *Ordinary Differential Equations*, 2nd ed. (New York: John Wiley, 1969)).

Теорема 3 Локальное существование решений

Пусть $\mathbf{f}$ — векторнозначная функция (с m компонентами) от $m+1$ вещественного переменного $x_1, x_2, \ldots, x_m$ и t. Если все частные производные первого порядка функции $\mathbf{f}$ существуют и непрерывны в некоторой окрестности точки $\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $t = a$, то задача Коши (задача с начальными условиями)

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(a) = \mathbf{b}, \tag{35}$$

имеет решение на некотором открытом интервале, содержащем точку $t = a$. ▲

A.4. Единственность решений

Можно установить существование решений задачи Коши (задачи с начальными условиями) (35) при намного более слабом предположении: достаточно предположить, что функция $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ является просто непрерывной. Однако для доказательства этого факта требуются методы, отличные от используемых в этом разделе. Но условие Липшица, которое мы использовали в доказательстве теоремы 1, все же является ключевым в доказательстве *единственности* решений. В частности, решение, существование которого гарантирует теорема 3, единственно в окрестности точки $t = a$.

Теорема 4 Единственность решений

Предположим, что в некоторой области R, лежащей в $(m+1)$-мерном пространстве, функция $\mathbf{f}$ в (35) непрерывна и удовлетворяет условию Липшица

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}_1, t) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_2, t)| \leqq k \cdot |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|. \tag{20}$$

Если $\mathbf{x}_1(t)$ и $\mathbf{x}_2(t)$ — два решения начальной задачи (35) на некотором открытом интервале I, содержащем точку $x = a$, такие что обе интегральные кривые $(\mathbf{x}_1(t), t)$ и $(\mathbf{x}_2(t), t)$ лежат в R для всех t из I, то $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t)$ для всех t из I. ▲

Мы укажем основные этапы доказательства теоремы 4 для одномерного случая, в котором x является вещественной переменной. Обобщение этого доказательства на многомерный случай может быть найдено в главе 6 книги Биркгофа и Рота.

Давайте рассмотрим функцию

$$\phi(t) = [x_1(t) - x_2(t)]^2, \tag{40}$$

для которой $\phi(a) = 0$, потому что $x_1(a) = x_2(a) = b$. Мы хотим показать, что $\phi(t) \equiv 0$, так что $x_1(t) \equiv x_2(t)$. Мы рассмотрим только случай $t \geqq a$; все детали выглядят точно так же и для случая $t \leqq a$.

Если мы продифференцируем каждую часть равенства (40), мы получим

$$\begin{aligned} |\phi'(t)| &= |2[x_1(t) - x_2(t)] \cdot [x_1'(t) - x_2'(t)]| = \\ &= |2[x_1(t) - x_2(t)] \cdot [f(x_1(t), t) - f(x_2(t), t)]| \leqq \\ &\leqq 2k|x_1(t) - x_2(t)|^2 = 2k\phi(t) \end{aligned}$$

с учетом условия Липшица для f. Следовательно,

$$\phi'(t) \leqq 2k\phi(t). \tag{41}$$

Теперь временно проигнорируем тот факт, что $\phi(a) = 0$, и сравним $\phi(t)$ с решением дифференциального уравнения

$$\Phi'(t) = 2k\Phi(t), \tag{42}$$

таким что $\Phi(a) = \phi(a)$; ясно, что

$$\Phi(t) = \Phi(a)e^{2k(t-a)}. \tag{43}$$

Сравнивая (41) с (42), обнаруживаем, что

$$\phi(t) \leqq \Phi(t) \qquad \text{для } t \geqq a, \tag{44}$$

и это легко доказать (задача 18). Следовательно,

$$0 \leqq [x_1(t) - x_2(t)]^2 \leqq [x_1(a) - x_2(a)]^2 e^{2k(t-a)}.$$

Извлекая квадратные корни, получаем

$$0 \leqq |x_1(t) - x_2(t)| \leqq |x_1(a) - x_2(a)|e^{k(t-a)}. \tag{45}$$

Но $x_1(a) - x_2(a) = 0$, так что из (45) следует тождество $x_1(t) \equiv x_2(t)$.

Пример 1 Задача Коши (задача с начальными условиями)

$$\frac{dx}{dt} = 3x^{2/3}, \quad x(0) = 0 \tag{46}$$

имеет два решения: очевидное решение $x_1(t) \equiv 0$ и решение $x_2(t) = t^3$, которое легко найти методом разделения переменных. Следовательно, функция $f(x, t)$ *не удовлетворяет* условию Липшица в окрестности начала координат $(0, 0)$. Действительно, формула Лагранжа дает

$$|f(x, 0) - f(0, 0)| = |f_x(\overline{x}, 0)| \cdot |x - 0|$$

для некоторого $\overline{x}$ между 0 и x. Но функция $f_x(x, 0) = 2x^{-1/3}$ неограничена при $x \to 0$, так что условие Липшица действительно не может быть выполнено. ■

A.5. Корректно поставленные задачи и математические модели

Кроме единственности, другое следствие неравенства (45) состоит в том, что решения дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \tag{47}$$

зависят *непрерывно* от начального значения $x(a)$; иными словами, если $x_1(t)$ и $x_2(t)$ — два решения уравнения (47) на интервале $a \leqq t \leqq T$, такие что начальные значения $x_1(a)$ и $x_2(a)$ достаточно близки, то значения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ также остаются близкими. В частности, если $|x_1(a) - x_2(a)| \leqq \delta$, то из (45) следует, что

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leqq \delta e^{k(T-a)} = \epsilon \tag{48}$$

для всех t, таких что $a \leqq t \leqq T$. Очевидно, мы можем сделать ϵ очень маленьким, выбирая δ достаточно близким к нулю.

Эта непрерывность решений уравнения (47) относительно начальных значений важна в практических приложениях, где мы едва ли будем знать начальное значение $x_0 = x(a)$ с абсолютной точностью. Например, предположим, что задача Коши (задача с начальными условиями)

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t), \quad x(a) = x_0 \tag{49}$$

моделирует численность популяции, о которой мы знаем только то, что начальная численность популяции отклоняется не более чем на $\delta > 0$ от принятого значения x_0. Тогда, даже если функция $f(x,t)$ выражает точно численность популяции, решение $x(t)$ задачи (49) будет только аппроксимацией к фактической численности популяции. Но из (45) следует, что фактическая численность популяции в момент времени t будет отличаться не более чем на $\delta e^{k(T-a)}$ от приблизительной численности популяции $x(t)$. Таким образом, на данном замкнутом интервале $[a,T]$ значение $x(t)$ будет близкой аппроксимацией к фактической численности популяции при условии, что $\delta > 0$ является достаточно малым.

Задачу Коши (задачу с начальными условиями) обычно считают *корректно поставленной* в качестве математической модели для ситуации из реального мира, только если дифференциальное уравнение имеет единственные решения, которые являются непрерывными относительно начальных значений. Иначе маловероятно, что задача Коши (задача с начальными условиями) адекватно отражает ситуацию в реальном мире.

Часто желательна даже более сильная "непрерывная зависимость" решений. В дополнение к возможной погрешности в начальном значении функция $f(x,t)$ может неточно моделировать физическое явление. Например, она может содержать физические параметры (вроде коэффициентов сопротивления), чьи значения не могут быть измерены с абсолютной точностью. В книге Биркгофа и Рота обобщается доказательство теоремы 4 и устанавливается справедливость следующего результата.

Теорема 5 Непрерывная зависимость решений

Пусть $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{y}(t)$ — решения уравнений

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x},t) \quad \text{и} \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{g}(\mathbf{y},t) \tag{50}$$

на замкнутом интервале $[a,T]$. Пусть $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$ непрерывны для $a \leqq t \leqq T$ и для $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в общей области D n-мерного пространства; предположим, что $\mathbf{f}$ удовлетворяет условию Липшица (20) в области D. Если

$$|\mathbf{f}(\mathbf{z},t) - \mathbf{g}(\mathbf{z},t)| \leqq \mu \tag{51}$$

для всех t в интервале $[a, T]$ и всех $\mathbf{z}$ в D, то

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)| \leqq |\mathbf{x}(a) - \mathbf{y}(a)| \cdot e^{k(t-a)} + \frac{\mu}{k}\left[e^{k(t-a)} - 1\right] \tag{52}$$

на интервале $[a, T]$. ▲

Если $\mu > 0$ является малым, то из (51) следует, что функции $\mathbf{f}$ и $\mathbf{g}$, входящие в эти два дифференциальные уравнения, хотя и отличаются, являются "близкими". Если задано $\epsilon > 0$, то очевидно, что из (52) следует, что

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)| \leqq \epsilon \tag{53}$$

для всех t в $[a, T]$, если $|\mathbf{x}(a) - \mathbf{y}(a)|$ и μ являются достаточно маленькими. Таким образом, несколько упрощенно теорему 5 можно сформулировать так: если два начальных значения и два дифференциальных уравнения в (50) близки, то и решения этих двух задач остаются близкими для $a \leqq t \leqq T$.

Предположим, например, что на падающее тело действует постоянное гравитационное ускорение g, причем сопротивление пропорционально некоторой степени его скорости, так что (считая положительную ось направленной вниз) его скорость v удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dv}{dt} = g - cv^{\rho}. \tag{54}$$

Примем, однако, что известны только аппроксимация $\overline{c}$ к фактическому сопротивлению c и аппроксимация $\overline{\rho}$ к фактическому показателю степени ρ. Тогда наша математическая модель базируется на дифференциальном уравнении

$$\frac{du}{dt} = g - \overline{c}u^{\overline{\rho}}, \tag{55}$$

а не на фактическом уравнении (54). Таким образом, если мы решаем уравнение (55), мы получаем только аппроксимацию $u(t)$ к фактической скорости $v(t)$. Но если параметры $\overline{c}$ и $\overline{\rho}$ достаточно близки к фактическим значениям c и ρ, то правые части в (54) и (55) будут близкими. А если это так, то из теоремы 5 следует, что функция $v(t)$, выражающая фактическую скорость, и функция $u(t)$, выражающая приблизительную скорость, близки одна к другой. В этом случае аппроксимация в (55) будет хорошей моделью реального физического явления.

1.5. Задачи

В задачах 1–8 с помощью формулы для последовательных приближений вычислите $y_n(x)$ для $n \leqq 4$. Затем запишите экспоненциальный ряд, для которого эти аппроксимации являются частичными суммами (возможно, первый член или даже первые два будут отсутствовать; например,

$$e^x - 1 = x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{24}x^4 + \cdots).$$

1. $\dfrac{dy}{dx} = y,\ y(0) = 3$

2. $\dfrac{dy}{dx} = -2y,\ y(0) = 4$

3. $\dfrac{dy}{dx} = -2xy,\ y(0) = 1$

4. $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2y,\ y(0) = 2$

5. $\dfrac{dy}{dx} = 2y + 2,\ y(0) = 0$

6. $\dfrac{dy}{dx} = x + y,\ y(0) = 0$

7. $\dfrac{dy}{dx} = 2x(1 + y),\ y(0) = 0$

8. $\dfrac{dy}{dx} = 4x(y + 2x^2),\ y(0) = 0$

В задачах 9–12 вычислите последовательные приближения $y_n(x)$ для $n \leqq 3$; затем сравните их с соответствующими частичными суммами ряда Тейлора точного решения.

9. $\dfrac{dy}{dx} = x + y,\ y(0) = 1$

10. $\dfrac{dy}{dx} = y + e^x,\ y(0) = 0$

11. $\dfrac{dy}{dx} = y^2,\ y(0) = 1$

12. $\dfrac{dy}{dx} = \frac{1}{2}y^3,\ y(0) = 1$

13. С помощью итерационной формулы в (16) вычислите первые три последовательных приближения к решению задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$\frac{dx}{dt} = 2x - y, \qquad x(0) = 1;$$

$$\frac{dy}{dt} = 3x - 2y, \qquad y(0) = -1.$$

14. Применяя матричный экспоненциальный ряд в (19), найдите решение (в конечном виде) задачи Коши (задачи с начальными условиями)

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(*Указание*. Покажите сначала, что

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

для каждого положительного целого числа n.)

15. Покажите, что вторая аппроксимация Пикара для задачи Коши (задачи с начальными условиями) $dy/dx = 1 + y^3$, $y(1) = 1$ имеет вид

$$y_2(x) = 1 + 2(x - 1) + 3(x - 1)^2 + 4(x - 1)^3 + 2(x - 1)^4.$$

Затем вычислите $y_2(1{,}1)$ и $y_2(1{,}2)$. Метод Рунге–Кутта четвертого порядка при величине шага $h = 0{,}005$ дает $y(1{,}1) \approx 1{,}2391$ и $y(1{,}2) \approx 1{,}6269$.

16. Покажите, что третья аппроксимация Пикара для задачи Коши (задачи с начальными условиями) $dy/dx = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$ имеет вид

$$y_3(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7 + \frac{2}{2079}x^{11} + \frac{1}{59535}x^{15}.$$

Вычислите $y_3(1)$. Метод Рунге–Кутта четвертого порядка приводит к значению $y(1) \approx 0{,}350232$ и при величине шага $h = 0{,}05$, и при величине шага $h = 0{,}025$.

17. Докажите следующим образом неравенство $|\mathbf{Ax}| \leqq \|\mathbf{A}\| \cdot |\mathbf{x}|$, где $\mathbf{A}$ — матрица размера $m \times$ $\times\, m$ с векторами-строками $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_m$, а $\mathbf{x}$ — вектор в m-мерном пространстве. Сначала обратите внимание, что компоненты вектора $\mathbf{Ax}$ равны $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x}$, $\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{x}$, ..., $\mathbf{a}_m \cdot \mathbf{x}$, так что

$$|\mathbf{Ax}| = \left[\sum_{n=1}^{m} (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x})^2\right]^{1/2}.$$

Затем примените неравенство Коши–Шварца $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})^2 \leqq |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{x}|^2$ для скалярного произведения.

18. Предположим, что $\phi(t)$ — дифференцируемая функция, причем

$$\phi'(t) \leqq k\phi(t) \qquad (k > 0)$$

для $t \geqq a$. Умножьте обе части на e^{-kt}, затем перенесите (с обратным знаком) члены в левую часть и покажите, что

$$\frac{d}{dt}\left[\phi(t)e^{-kt}\right] \leqq 0$$

для $t \geqq a$. Затем примените формулу Лагранжа и выведите, что

$$\phi(t) \leqq \phi(a)e^{k(t-a)}$$

для $t \geqq a$.

Ответы к избранным задачам

Глава 1

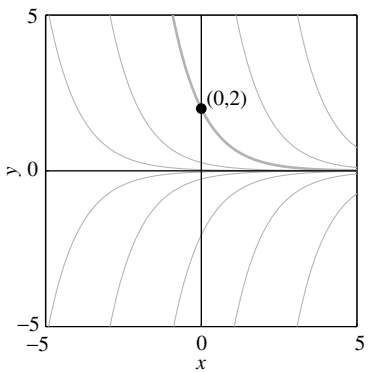
Раздел 1.1

11. Если $y = y_1 = x^{-2}$, то $y'(x) = -2x^{-3}$ и $y''(x) = 6x^{-4}$, так что $x^2y'' + 5xy' + 4y = x^2(6x^{-4}) + 5x(-2x^{-3}) + 4(x^{-2}) = 6x^{-2} - 10x^{-2} + 4x^{-2} = 0$. Если $y = y_2 = x^{-2}\ln x$, то $y'(x) = x^{-3} - 2x^{-3}\ln x$ и $y''(x) = -5x^{-4} + 6x^{-4}\ln x$, так что $x^2y'' + 5xy' + 4y = x^2(-5x^{-4} + 6x^{-4}\ln x) + 5x(x^{-3} - 2x^{-3}\ln x) + 4(x^{-2}\ln x) = 0$.

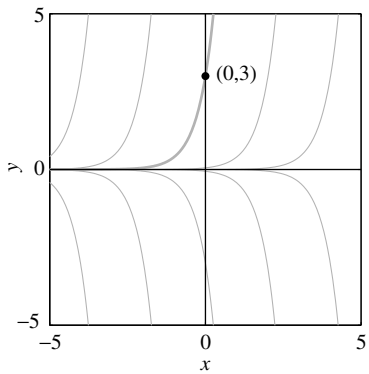
13. $r = \frac{2}{3}$ **14.** $r = \pm\frac{1}{2}$ **15.** $r = -2,\ 1$

16. $r = \frac{1}{6}(-3 \pm \sqrt{57})$

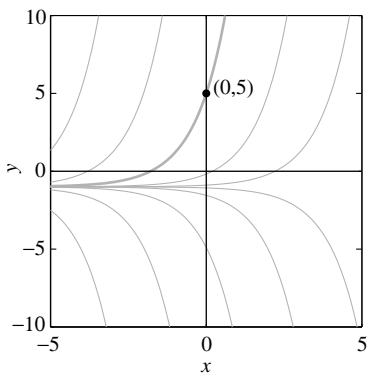
17. $C = 2$



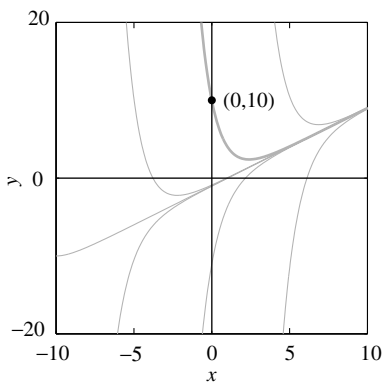
18. $C = 3$



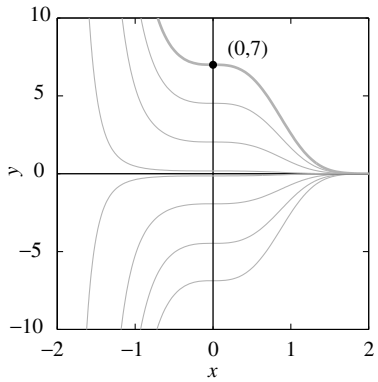
19. $C = 6$



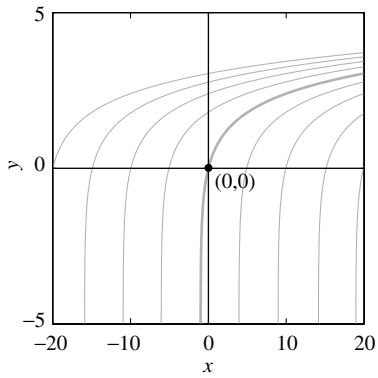
20. $C = 11$



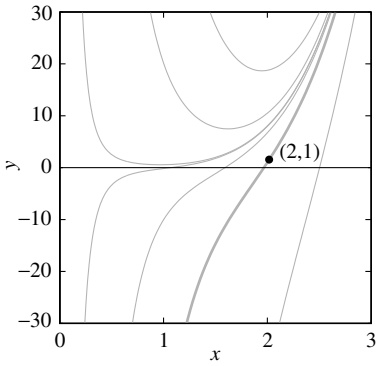
21. $C = 7$



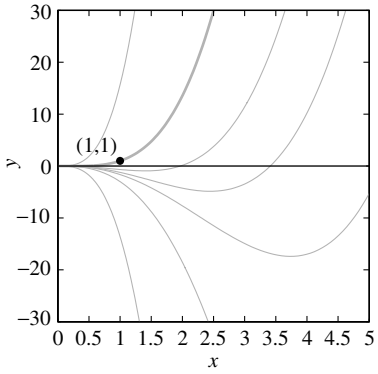
22. $C = 1$



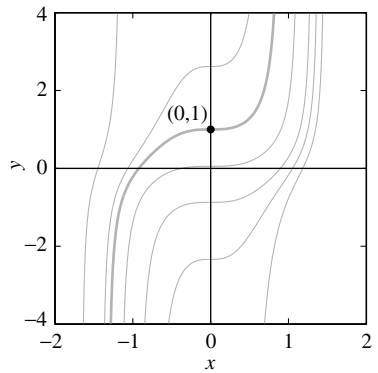
23. $C = -56$



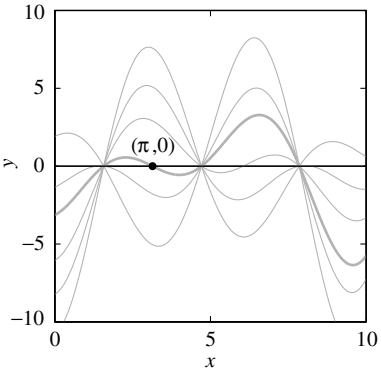
24. $C = 17$



25. $C = \pi/4$



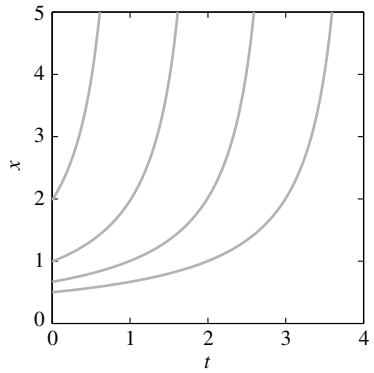
26. $C = -\pi$



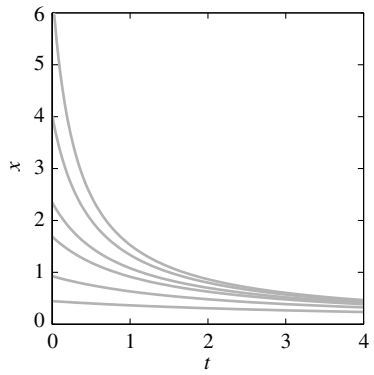
27. $y' = x + y$
28. $y' = 2y/x$
29. $y' = x/(1 - y)$
31. $y' = (y - x)/(y + x)$
32. $dP/dt = k\sqrt{P}$
33. $dv/dt = kv^2$
35. $dN/dt = k(P - N)$
37. $y \equiv 1$ or $y = x$
39. $y = x^2$
41. $y = \frac{1}{2}e^x$
42. $y = \cos x$ или $y = \sin x$

43. (b) Тождественно равная нулю функция $x(0) \equiv 0$

44. (a) Из графиков (см. рисунок ниже) типичных решений при $k = \frac{1}{2}$ видно, что (каждое) значение $x(t)$ увеличивается неограниченно при увеличении t.



(b) Из графиков (см. рисунок ниже) типичных решений при $k = -\frac{1}{2}$ видно, что теперь значение $x(t)$ приближается к 0 при неограниченном увеличении t.



45. $P(t) = 100/(50 - t)$; $P = 100$, когда $t = 49$, и $P = 1000$, когда $t = 49{,}9$. Таким образом, оказывается, что $P(t)$ возрастает неограниченно, когда t приближается к 50.

46. $v(t) = 50/(5 + 2t)$; $v = 1$, когда $t = 22{,}5$, и $v = \frac{1}{10}$, когда $t = 247{,}5$. Таким образом, оказывается, что $v(t)$ приближается к 0 при неограниченном увеличении t.

47. (a) $C = 10{,}1$; (b) Нет такого C, но постоянная функция $y(x) \equiv 0$ удовлетворяет условиям $y' = y^2$ и $y(0) = 0$.

Раздел 1.2

1. $y(x) = x^2 + x + 3$

2. $y(x) = \frac{1}{3}(x - 2)^3$

3. $y(x) = \frac{1}{3}(2x^{3/2} - 16)$

4. $y(x) = -1/x + 6$

5. $y(x) = 2\sqrt{x + 2} - 5$

6. $y(x) = \frac{1}{3}[(x^2 + 9)^{3/2} - 125]$

7. $y(x) = 10 \operatorname{arctg} x$

8. $y(x) = \frac{1}{2} \sin 2x + 1$

9. $y(x) = \sin^{-1} x$

10. $y(x) = -(x + 1)e^{-x} + 2$

11. $x(t) = 25t^2 + 10t + 20$

12. $x(t) = -10t^2 - 15t + 5$

13. $x(t) = \frac{1}{2}t^3 + 5t$

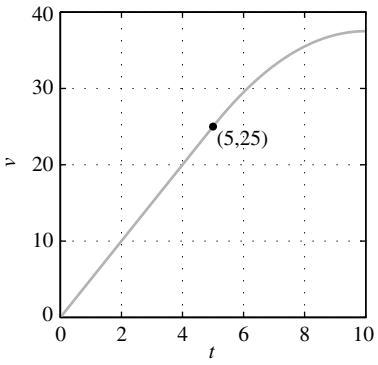
14. $x(t) = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t - 7t + 4$

15. $x(t) = \frac{1}{3}(t + 3)^4 - 37t - 26$

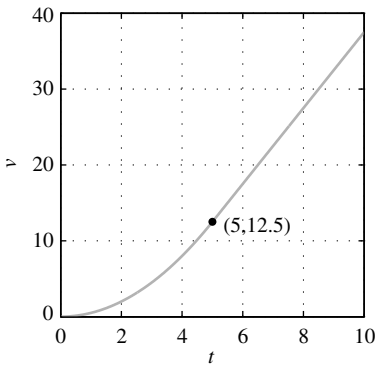
16. $x(t) = \frac{4}{3}(t + 4)^{3/2} - 5t - \frac{29}{3}$

17. $x(t) = \frac{1}{2}\left[(t + 1)^{-1} + t - 1\right]$

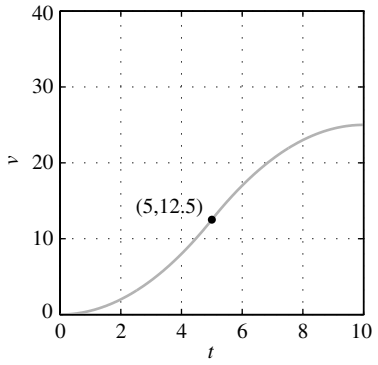
19. $x(t) = \begin{cases} 5t, & \text{если } 0 \le t \le 5, \\ 10t - \frac{1}{2}t^2 - \frac{25}{2}, & \text{если } 5 \le t \le 10. \end{cases}$



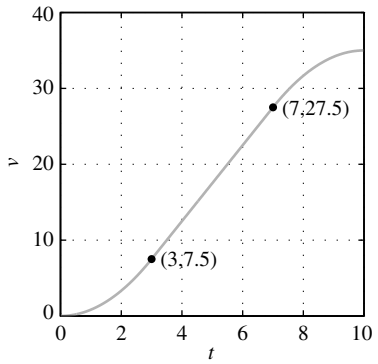
20. $x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2, & \text{если } 0 \le t \le 5, \\ 5t - \frac{25}{2}, & \text{если } 5 \le t \le 10. \end{cases}$



21. $x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2, & \text{если } 0 \le t \le 5, \\ 10t - \frac{1}{2}t^2 - 25, & \text{если } 5 \le t \le 10. \end{cases}$



22. $x(t) = \begin{cases} \frac{5}{6}t^2, & \text{если } 0 \le t \le 3, \\ 5t - \frac{15}{2}, & \text{если } 3 \le t \le 7, \\ \frac{1}{6}(-5t^2 + 100t - 290), & \text{если } 7 \le t \le 10. \end{cases}$



23. $v(t) = -(9{,}8)t + 49$, так что шар достигает максимальной высоты ($v = 0$) через $t = 5$ секунд. Его максимальная высота тогда равна $y(5) = 122{,}5$ (м).

24. $v(5) = -160$ футов в секунду.

25. Автомобиль останавливается, когда $t \approx 2{,}78$ (секунд), так что расстояние, пройденной до остановки, приблизительно равно $x(2{,}78) \approx 38{,}58$ (м).

26. (a) $y \approx 530$ м (b) $t \approx 20{,}41$ с (c) $t \approx 20{,}61$ с

27. $y_0 \approx 178{,}57$ м

28. $v(4{,}77) \approx -192{,}64$ футов в секунду

29. Через 10 секунд автомобиль проехал 200 футов и перемещался со скоростью 70 футов в секунду.

30. $a = 22$ фт/с^2; тормозит в течение 4 секунд

31. $v_0 = 10\sqrt{30}$ (м/с), приблизительно 197,18 км/час

32. 60 м

33. $20\sqrt{10} \approx 63{,}25$ (футов в секунду)

34. 460,8 футов

36. Приблизительно 13,6 футов

37. 25 (миль)

38. 1:10 пополудни

39. 6 миль в час

40. 2,4 мили

41. $\frac{544}{3} \approx 181{,}33$ фута в секунду

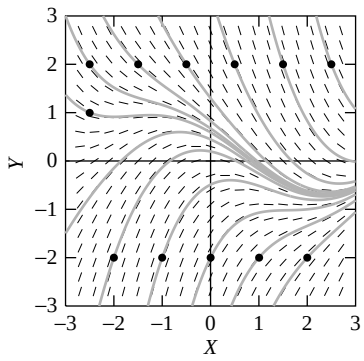
42. 25 миль

43. Время $6{,}12245 \times 10^9$ с ≈ 194 года; Расстояние: $1{,}8367 \times 10^{17}$ м $\approx 19{,}4$ светового года

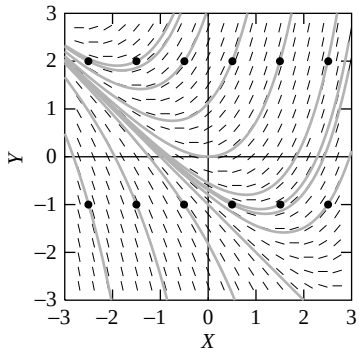
44. Приблизительно 54 мили в час

Раздел 1.3

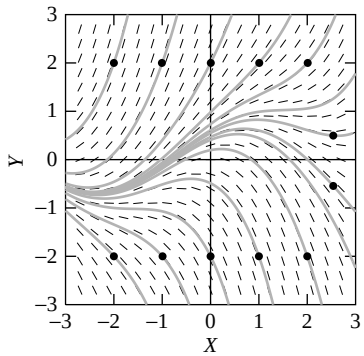
1.



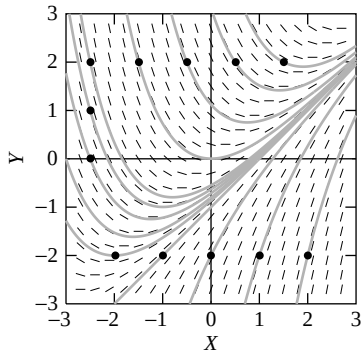
2.



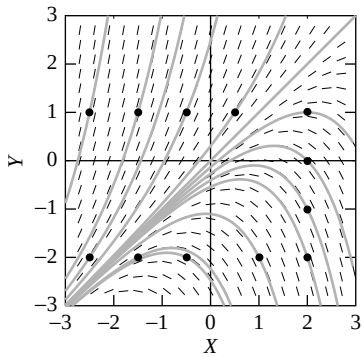
3.



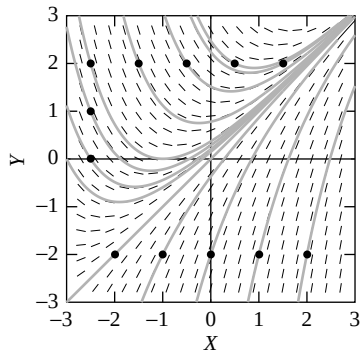
4.



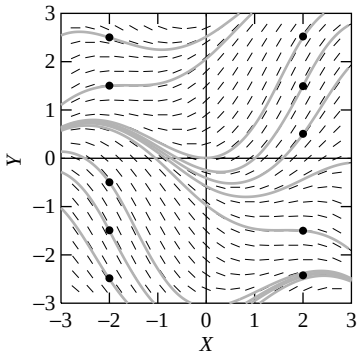
5.



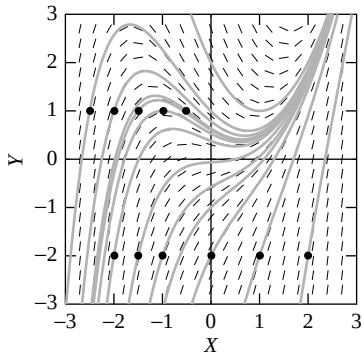
6.



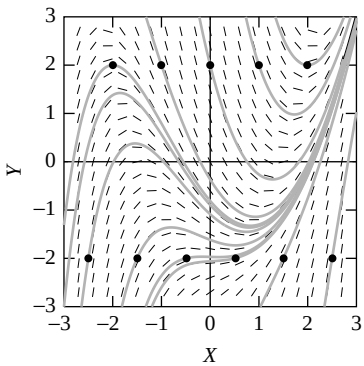
7.



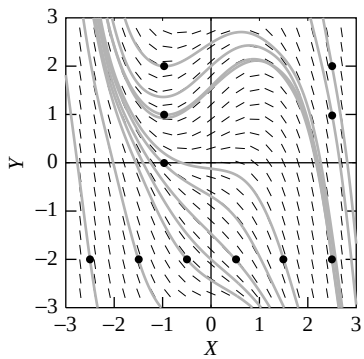
8.



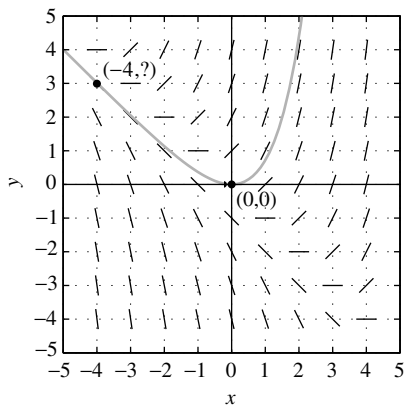
9.



10.

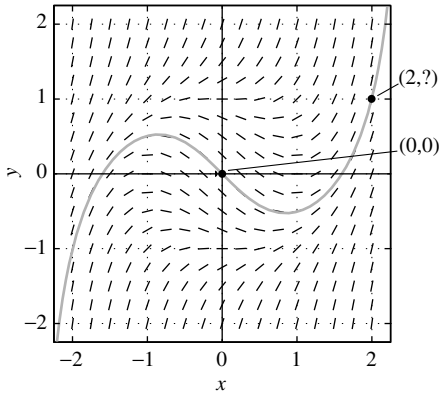


11. Единственное решение существует в некоторой окрестности точки $x = 1$.
12. Единственное решение существует в некоторой окрестности точки $x = 1$.
13. Единственное решение существует в некоторой окрестности точки $x = 0$.
14. Существование, но не единственность, гарантируется в некоторой окрестности точки $x = 0$.
15. Ни существование, ни единственность не гарантируются ни в какой окрестности точки $x = 2$.
16. Единственное решение существует в некоторой окрестности точки $x = 2$.
17. Единственное решение существует в некоторой окрестности точки $x = 0$.
18. Ни существование, ни единственность не гарантируются
19. Единственное решение существует в некоторой окрестности точки $x = 0$.
20. Единственное решение существует в некоторой окрестности точки $x = 0$.
21. Ваш рисунок должен показать, что $y(-4) \approx 3$; точное решение дифференциального уравнения дает значение $y(-4) = 3 + e^{-4} \approx 3{,}0183$.



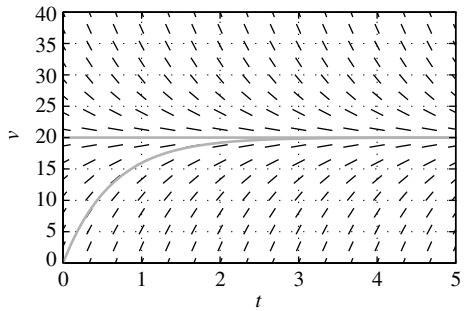
22. $y(-4) \approx -3$

23. Ваш рисунок должен показать, что $y(2) \approx 1$; фактическое значение ближе к 1,004.



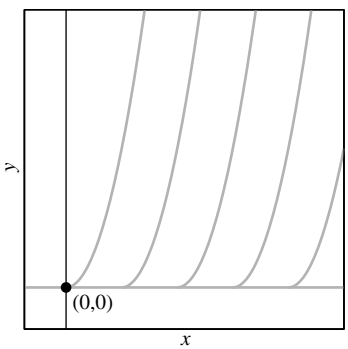
24. $y(2) \approx 1{,}5$

25. Ваш рисунок должен показать, что предел скорости приблизительно равен 20 футам в секунду (весьма высокая вероятность выживания) и что время, требуемое для достижения скорости 19 футов в секунду, немного меньше, чем 2 секунды. Точное решение дает значение $v(t) = 19$ при $t = \frac{5}{8} \ln 20 \approx 1{,}8723$.



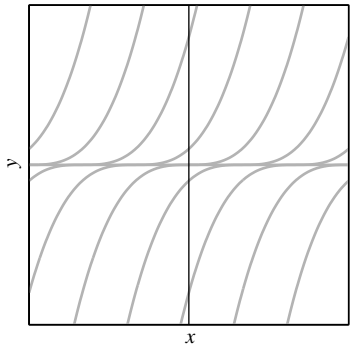
26. Рисунок показывает, что после 60 месяцев будет приблизительно 40 оленей; более точное значение приблизительно равно $t \approx 61{,}61$. Предельная численность популяции равна 75 оленям.

27. Задача Коши (задача с начальными условиями) $y' = 2\sqrt{y}$, $y(0) = b$ не имеет ни одного решения, если $b < 0$; единственное решение, если $b > 0$; бесконечно много решений, если $b = 0$.



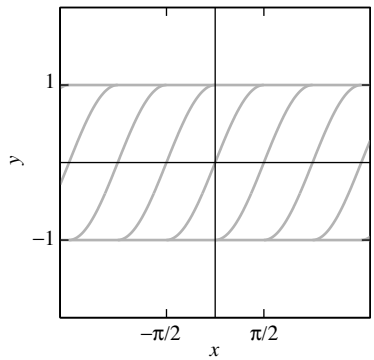
28. Задача Коши (задача с начальными условиями) $xy' = y$, $y(a) = b$ имеет единственное решение, если $a \neq 0$; бесконечно много решений, если $a = b = 0$; ни одного решения, если $a = 0$, но $b \neq 0$.

29. Задача Коши (задача с начальными условиями) $y' = 3y^{2/3}$, $y(a) = b$ всегда имеет бесконечно много решений, определенных для всех x. Однако, если $b \neq 0$, то она имеет единственное решение в окрестности $x = a$.



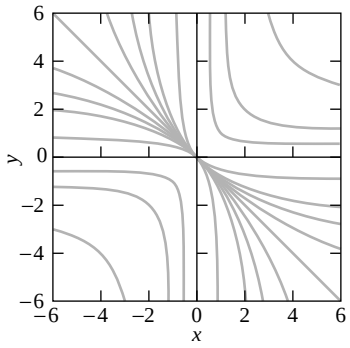
30. Задача Коши (задача с начальными условиями) $y' = -\sqrt{1-y^2}$, $y(a) = b$ имеет единственное решение, если $|b| < 1$; ни одного решения, если $|b| > 1$, и бесконечно много решений (определенных для всех x) если $b = \pm 1$.

31. Задача Коши (задача с начальными условиями) $y' = \sqrt{1-y^2}$, $y(a) = b$ имеет единственное решение, если $|b| < 1$; ни одного решения, если $|b| > 1$, и бесконечно много решений (определенных для всех x), если $b = \pm 1$.



32. Задача Коши (задача с начальными условиями) $y' = 4x\sqrt{y}$, $y(a) = b$ имеет бесконечно много решений (определенных для всех x), если $b \geqq 0$; ни одного решения, если $b < 0$. Однако, если $b > 0$, то она имеет единственное решение в окрестности $x = a$.

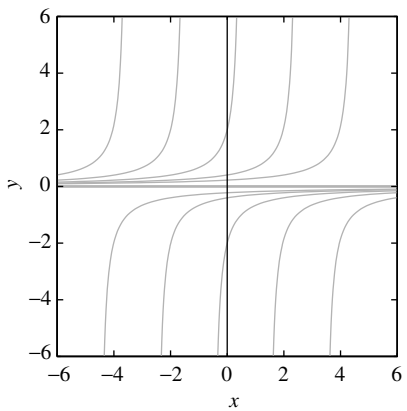
33. Задача Коши (задача с начальными условиями) $x^2y' + y^2 = 0$, $y(a) = b$ имеет единственное решение с начальной точкой (a, b), если $a \neq 0$; ни одного решения, если $a = 0$, но $b \neq 0$; бесконечно много решений, если $a = b = 0$.



Раздел 1.4

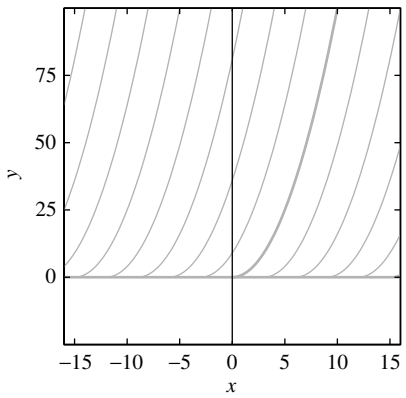
1. $y(x) = C\exp(-x^2)$
2. $y(x) = 1/(x^2 + C)$
3. $y(x) = C\exp(-\cos x)$
4. $y(x) = C(1 + x)^4$
5. $y(x) = \sin\left(C + \sqrt{x}\right)$
6. $y(x) = (x^{3/2} + C)^2$
7. $y(x) = (2x^{4/3} + C)^{3/2}$
8. $y(x) = \sin^{-1}(x^2 + C)$
9. $y(x) = C(1 + x)/(1 - x)$
10. $y(x) = (1 + x)/[1 + C(1 + x)]$
11. $y(x) = (C - x^2)^{-1/2}$
12. $y^2 + 1 = Ce^{x^2}$
13. $\ln(y^4 + 1) = C + 4\sin x$
14. $3y + 2y^{3/2} = 3x + 2x^{3/2} + C$
15. $1/(3y^3) - 2/y = 1/x + \ln|x| + C$
16. $y(x) = \sec^{-1}(C\sqrt{1 + x^2})$
17. $\ln|1 + y| = x + \frac{1}{2}x^2 + C$
18. $y(x) = \operatorname{tg}\left(C - \dfrac{1}{x} - x\right)$
19. $y(x) = 2\exp(e^x)$
20. $y(x) = \operatorname{tg}(x^3 + \pi/4)$
21. $y^2 = 1 + \sqrt{x^2 - 16}$
22. $y(x) = -3\exp(x^4 - x)$
23. $y(x) = \frac{1}{2}(1 + e^{2x-2})$
24. $y(x) = \frac{\pi}{2}\sin x$
25. $y(x) = x\exp(x^2 - 1)$
26. $y(x) = 1/(1 - x^2 - x^3)$
27. $y = \ln(3e^{2x} - 2)$
28. $y(x) = \operatorname{arctg}(\sqrt{x} - 1)$

29. (a) Общее решение $y(x) = -1/(x - C)$; (b) особое решение $y(x) \equiv 0$. (c) Из рисунка мы видим, что через каждую точку плоскости xy проходит единственное решение.



30. Общее решение $y(x) = (x - C)^2$; особое решение $y(x) \equiv 0$. (a) Ни одного решения, если $b < 0$. (b) Бесконечно много решений (для всех x), если $b \geqq 0$. (c) Два решения в окрестности (a, b), если $b < 0$.

31. Разделение переменных дает то же самое общее решение $y = (x - C)^2$, что и в задаче 30, но из условия $y' = 2\sqrt{y} \geqq 0$ следует, что только *правые половины* парабол можно рассматривать в качестве интегральных кривых. На рисунке ниже мы видим, что через точку (a, b): (a) не проходит ни одной интегральной кривой, если $Pb < 0$; (b) проходит единственная интегральная кривая, если $b > 0$; (c) проходит бесконечно много интегральных кривых, если $b = 0$.



32. Общее решение $y(x) = \pm\sec(x - C)$; особые решения $y(x) \equiv \pm 1$. (a) Ни одного решения, если $|b| < 1$; (b) единственное решение, если $|b| > 1$; (c) бесконечно много решений, если $b = \pm 1$.

33. Приблизительно 51840 человек

34. $t \approx 3{,}87$ часа

35. Приблизительно 14735 лет

36. Возраст приблизительно 686 лет

37. \$21103,48

38. \$44,52

39. 2585 мг

40. Приблизительно 35 лет

41. Приблизительно $4{,}86 \times 10^9$ лет назад

42. Приблизительно 1,25 миллиарда лет

43. Приблизительно через 63 минуты

44. Приблизительно 2,41 минуты

45. (a) 0,495 м; (b) $(8{,}32 \times 10^{-7})I_0$; (c) 3,29 м

46. (a) Приблизительно 9,60 дюйма; (b) Приблизительно 18 200 футов

47. Приблизительно через 46 дней

48. Приблизительно 6 миллиардов лет

49. Приблизительно через 66 минут 40 секунд

50. (a) $A(t) = 10 \cdot 3^{2t/15}$; (b) приблизительно 20,80 pu (единиц загрязнения) (c) Приблизительно 15,72 года

51. (a) $A(t) = 15 \cdot (\frac{2}{3})^{t/5}$; (b) приблизительно 7,84 su; (c) Приблизительно после 33,4 месяца

52. Приблизительно 120 тысяч лет назад

53. Приблизительно 74 тысячи лет назад

54. 3 часа

55. 972 секунд

56. В момент времени $t = 2048/1562 \approx 1{,}31$ (в часах)

58. В 13:20

59. (a) $y(t) = (8 - 7t)^{2/3}$; (b) В 13:08:34; (c) $r = \frac{1}{60}\sqrt{\frac{7}{12}} \approx 0{,}15$ (дюйма)

60. Приблизительно 6 минут 3 секунды

61. Приблизительно 14 минут 29 секунд

62. Резервуар будет пуст приблизительно через 14 секунд после 14:00

63. (a) 13:53:34; (b) $r \approx 0{,}04442$ фута $\approx 0{,}53$

64. $r = \frac{1}{720}\sqrt{3}$ фута, приблизительно $\frac{1}{35}$ дюйма

65. Приблизительно в 10:29

Раздел 1.5

1. $y(x) = 2(1 - e^{-x})$

2. $y(x) = (3x + C)e^{2x}$

3. $y(x) = e^{-3x}(x^2 + C)$

4. $y(x) = (x + C)e^{x^2}$

5. $y(x) = x + 4x^{-2}$

6. $y(x) = x^2 + 32/x^5$

7. $y(x) = 5x^{1/2} + Cx^{-1/2}$

8. $y(x) = 3x + Cx^{-1/3}$

9. $y(x) = x(7 + \ln x)$

10. $y(x) = 3x^3 + Cx^{3/2}$

11. $y(x) \equiv 0$

12. $y(x) = \frac{1}{4}x^5 + 56x^{-3}$

13. $y(x) = (e^x + e^{-x})/2$

14. $y(x) = x^3 \ln x + 10x^3$

15. $y(x) = [1 - 5\exp(-x^2)]/2$

16. $y(x) = 1 + e^{-\sin x}$

17. $y(x) = (1 + \sin x)/(1 + x)$

18. $y(x) = x^2(\sin x + C)$

19. $y(x) = \frac{1}{2}\sin x + C\csc x$

20. $y(x) = -1 + \exp\left(-x - \frac{1}{2}x^2\right)$

21. $y(x) = x^3 \sin x$

22. $y(x) = (x^3 + 5)e^{-x^2}$

23. $y(x) = x^3(2 + Ce^{-2x})$

24. $y(x) = \frac{1}{3}[1 + 16(x^2 + 4)^{-3/2}]$

25. $y(x) = \left[\exp\left(-\frac{3}{2}x^2\right)\right]\left[3(x^2 + 1)^{3/2} - 2\right]$

26. $x(y) = 1/2y^2 + C/y^4$

27. $x(y) = e^y\left(C + \frac{1}{2}y^2\right)$ **28.** $x(y) = \frac{1}{2}[y + (1+y^2)(\operatorname{arctg} y + C)]$
29. $y(x) = \left[\exp(x^2)\right]\left[C + \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\operatorname{erf}(x)\right]$ **30.** $y(x) = x^{1/2}\int_1^x t^{-1/2}\cos t\,dt$
32. (a) $y(x) = \sin x - \cos x$; (b) $y(x) = Ce^{-x} + \sin x - \cos x$; (c) $y(x) = 2e^{-x} + \sin x - \cos x$
33. Приблизительно после 7 минут 41 секунды **34.** Приблизительно 22,2 дня
35. Приблизительно 5,5452 года
36. (a) $x(t) = (60-t) - (60-t)^3/3600$; (b) приблизительно 23,09 фунта
37. 393,75 фунта
38. (a) $x(t) = 50e^{-t/20}$; (b) $y(t) = 150e^{-t/40} - 100e^{-t/20}$; 56,25 фунта
39. (b) $y_{\max} = 100e^{-1} \approx 36{,}79$ (гал) **41.** (b) Приблизительно \$1 308 283
43. $-50{,}0529$, $-28{,}0265$, $-6{,}0000$, $16{,}0265$, $38{,}0529$ **44.** 3,99982, 4,00005, 4,00027, 4,00050, 4,00073
45. $x(t) = 20(1 - e^{-t/10})$; $x = 10$ после $t = 10\ln 2 \approx 6{,}93$ месяца.
46. $x(t) = \frac{20}{101}(101 - 102e^{-t/10} + \cos t + 10\sin t)$; $x = 10$ через $t = 6{,}47$ месяца.

Раздел 1.6

1. $x^2 - 2xy - y^2 = C$
2. $y^2 = x^2(\ln x + C)$
3. $y(x) = x\,(C + \ln|x|)^2$
4. $2\arctg(y/x) - \ln(y^2/x^2 + 1) = 2\ln x + C$
5. $\ln|xy| = C + xy^{-1}$
6. $2y\ln y = x + Cy$
7. $y^3 = 3x^3\,(C + \ln|x|)$
8. $y = -x\ln(C - \ln x)$
9. $y(x) = x/\,(C - \ln|x|)$
10. $x^2 + 2y^2 = Cx^6$
11. $y = C(x^2 + y^2)$
12. $4x^2 + y^2 = x^2(\ln x + C)^2$
13. $y + \sqrt{x^2+y^2} = Cx^2$
14. $x - \sqrt{x^2+y^2} = C$
15. $x^2(2xy + y^2) = C$
16. $x = 2\sqrt{x+y+1} - 2\ln\left(1 + \sqrt{x+y+1}\right) + C$
17. $y(x) = -4x + 2\operatorname{tg}(2x + C)$
18. $y = \ln(x + y + 1) + C$
19. $y^2 = x/(2 + Cx^5)$
20. $y^3 = 3 + Ce^{-3x^2}$
21. $y^2 = 1/(Ce^{-2x} - 1)$
22. $y^3 = 7x/(7Cx^7 + 15)$
23. $y(x) = (x + Cx^2)^{-3}$
24. $y^2 = e^{2x}/(C + \ln x)$
25. $2x^3y^3 = 3\sqrt{1+x^4} + C$
26. $y^3 = e^{-x}(x + C)$
27. $y(x) = (x^4 + Cx)^{1/3}$
28. $y = \ln(Cx^2 + x^2e^{2x})$
29. $\sin^2 y = 4x^2 + Cx$
30. $x^2 - 2xe^y - e^{2y} = C$
31. $x^2 + 3xy + y^2 = C$
32. $x^2 - xy + 3y^2 = C$
33. $x^3 + 2xy^2 + 2y^3 = C$
34. $x^3 + x^2y^2 + y^4 = C$
35. $3x^4 + 4y^3 + 12y\ln x = C$
36. $x + e^{xy} + y^2 = C$
37. $\sin x + x\ln y + e^y = C$
38. $x^2 + 2x\operatorname{arctg} y + \ln(1+y^2) = C$
39. $5x^3y^3 + 5xy^4 + y^5 = C$
40. $e^x\sin y + x\operatorname{tg} y = C$
41. $x^2y^{-1} + y^2x^{-3} + 2y^{1/2} = C$
42. $xy^{-2/3} + x^{-3/2}y = C$
43. $y(x) = Ax^2 + B$
44. $x(y) = Ay^2 + B$
45. $y(x) = A\cos 2x + B\sin 2x$
46. $y(x) = x^2 + A\ln x + B$
47. $y(x) = A - \ln|x + B|$
48. $y(x) = \ln x + Ax^{-2} + B$
49. $y(x) = \pm(A + Be^x)^{1/2}$
50. $y(x) = \ln|\sec(x + A)| - \frac{1}{2}x^2 + B$
51. $x(y) = -\frac{1}{3}(y^3 + Ay + B)$
52. $Ay^2 - (Ax + B)^2 = 1$
53. $y(x) = A\operatorname{tg}(Ax + B)$
54. $Ay^2(B - x) = 1$
58. $y = \exp(x^2 + C/x^2)$
59. $x^2 - 2xy - y^2 - 2x - 6y = C$
60. $(x + 3y + 3)^5 = C(y - x - 5)$
61. $x = \operatorname{tg}(x - y) + \sec(x - y) + C$
64. $y(x) = x + e^{-x^2}\left[C + \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\operatorname{erf}(x)\right]^{-1}$
65. $y(x) = x + (C - x)^{-1}$
69. Приблизительно 3,68 мили

Обзорные задачи к главе 1

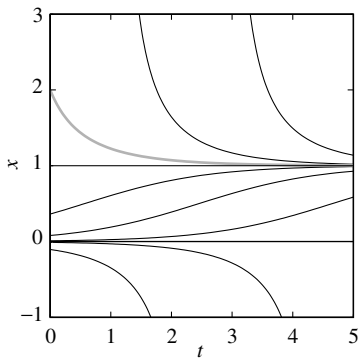
1. Линейное: $y(x) = x^3(C + \ln x)$
2. С разделяющимися переменными: $y(x) = x/(3 - Cx - x\ln x)$
3. Однородное: $y(x) = x/(C - \ln x)$
4. В точных дифференциалах: $x^2y^3 + e^x - \cos y = C$

5. С разделяющимися переменными: $y(x) = C\exp(x^{-3} - x^{-2})$
6. С разделяющимися переменными: $y(x) = x/(1 + Cx + 2x\ln x)$
7. Линейное: $y(x) = x^{-2}(C + \ln x)$
8. Однородное: $y(x) = 3Cx/(C - x^3) = 3x/(1 + Kx^3)$
9. Бернулли: $y(x) = (x^2 + Cx^{-1})^2$
10. С разделяющимися переменными: $y(x) = \operatorname{tg}\left(C + x + \frac{1}{3}x^3\right)$
11. Однородное: $y(x) = x/(C - 3\ln x)$
12. В точных дифференциалах: $3x^2y^3 + 2xy^4 = C$
13. С разделяющимися переменными: $y(x) = 1/(C + 2x^2 - x^5)$
14. Однородное: $y^2 = x^2/(C + 2\ln x)$
15. Линейное: $y(x) = (x^3 + C)e^{-3x}$
16. Подстановка: $v = y - x$; решение: $y - x - 1 = Ce^{2x}(y - x + 1)$
17. В точных дифференциалах: $e^x + e^y + e^{xy} = C$
18. Однородное: $y^2 = Cx^2(x^2 - y^2)$
19. С разделяющимися переменными: $y(x) = x^2/(x^5 + Cx^2 + 1)$
20. Линейное: $y(x) = 2x^{-3/2} + Cx^{-3}$
21. Линейное: $y(x) = [C + \ln(x - 1)]/(x + 1)$
22. Бернулли: $y(x) = (2x^4 + Cx^2)^3$
23. В точных дифференциалах: $xe^y + y\sin x = C$
24. С разделяющимися переменными: $y(x) = x^{1/2}/(6x^2 + Cx^{1/2} + 2)$
25. Линейное: $y(x) = (x + 1)^{-2}(x^3 + 3x^2 + 3x + C) = x + 1 + K(x + 1)^{-2}$
26. В точных дифференциалах: $3x^{3/2}y^{4/3} - 5x^{6/5}y^{3/2} = C$
27. Бернулли: $y(x) = x^{-1}(C + \ln x)^{-1/3}$
28. Линейное: $y(x) = x^{-1}(C + e^{2x})$
29. Линейное: $y(x) = (x^2 + x + C)(2x + 1)^{-1/2}$
30. Подстановка: $v = x + y$; решение: $x = 2(x + y)^{1/2} - 2\ln[1 + (x + y)^{1/2}] + C$
31. С разделяющимися переменными и линейное
32. С разделяющимися переменными и Бернулли
33. В точных дифференциалах и однородное
34. В точных дифференциалах и однородное
35. С разделяющимися переменными и линейное
36. С разделяющимися переменными и Бернулли

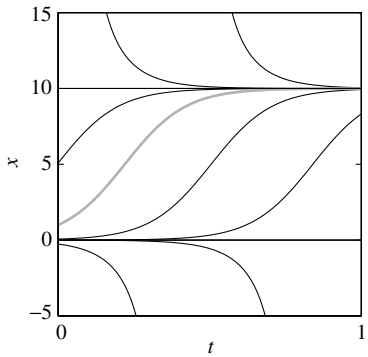
Глава 2

Раздел 2.1

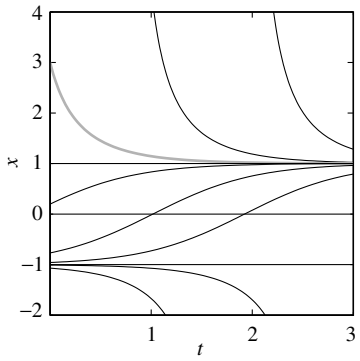
1. $x(t) = \dfrac{2}{2 - e^{-t}}$



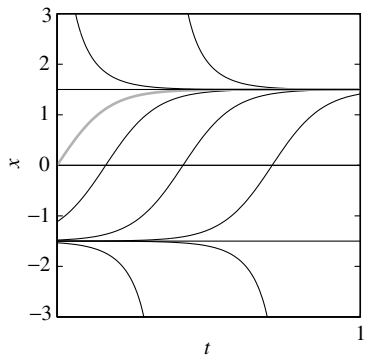
2. $x(t) = \dfrac{10}{1 + 9e^{-10t}}$



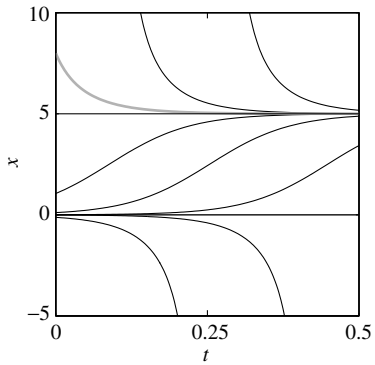
3. $x(t) = \dfrac{2 + e^{-2t}}{2 - e^{-2t}}$



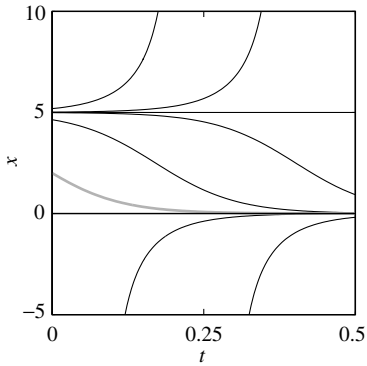
4. $x(t) = \dfrac{3(1 - e^{-12t})}{2(1 + e^{-12t})}$



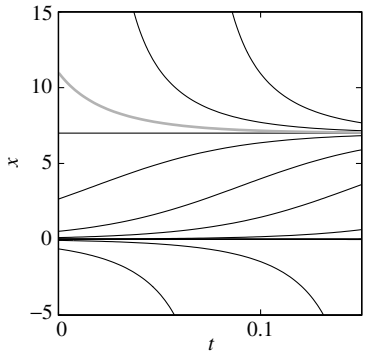
5. $x(t) = \dfrac{40}{8 - 3e^{-15t}}$



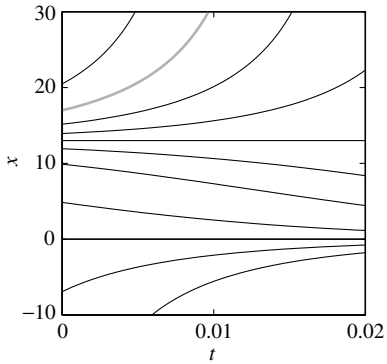
6. $x(t) = \dfrac{10}{2 + 3e^{15t}}$



7. $x(t) = \dfrac{77}{11 - 4e^{-28t}}$



8. $x(t) = \dfrac{221}{17 - 4e^{91t}}$



9. 484

10. 20 недель

11. (b) $P(t) = \left(\frac{1}{2}t + 10\right)^2$

12. $P(t) = \dfrac{240}{20 - t}$

13. $P(t) = \dfrac{180}{30 - t}$

14. $P(t) = \dfrac{P_0}{1 + kP_0 t}$

16. Приблизительно 27,69 месяца

17. Приблизительно 44,22 месяца

19. Приблизительно 24,41 месяца

20. Приблизительно 42,12 месяца

21. $\dfrac{200}{1 + e^{-6/5}} \approx 153{,}7$ миллиона

22. Приблизительно 34,66 дня

23. (a) $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = 200$ граммов (b) $\frac{5}{4} \ln 3 \approx 1{,}37$ секунды

24. Приблизительно 9,24 дня

25. (a) $M = 100$ и $k = 0{,}0002$; (b) В 2035 году

26. $50 \ln \frac{9}{8} \approx 5{,}89$ месяца

27. (a) $100 \ln \frac{9}{5} \approx 58{,}78$ месяца; (b) $100 \ln 2 \approx 69{,}31$ месяца

28. (a) Аллигаторы в конечном счете вымрут. (b) Судный День происходит приблизительно через 9 лет 2 месяца.

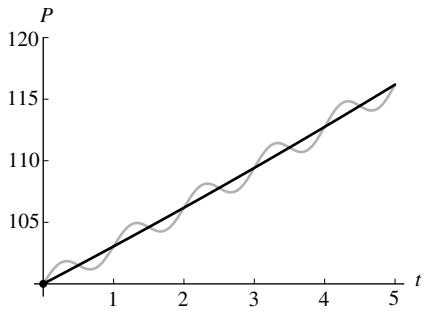
29. (a) $P(140) \approx 127{,}008$ миллиона; (b) Приблизительно 210,544 миллиона; (c) В 2000 году мы получаем $P \approx 196{,}169$, тогда как фактическая численность населения в 2000 году была равна приблизительно 281,422 миллиона.

31. $\alpha \approx 0{,}3915$; $2{,}15 \times 10^6$ клеток

37. $k \approx 0{,}0000668717$, $M \approx 338{,}027$

38. $k \approx 0{,}000146679$, $M \approx 208{,}250$

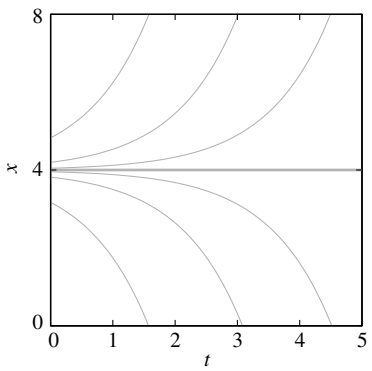
39. $P(t) = P_0 \exp\left(kt + \dfrac{b}{2\pi} \sin 2\pi t\right)$; волнистая кривая на рисунке ниже изображает график при $P_0 = 100$, $k = 0{,}03$ и $b = 0{,}06$. Она колеблется около другой изображенной там кривой, которая представляет естественный рост при $P_0 = 100$ и $k = 0{,}03$. Мы видим, что эти две кривые пересекаются в конце каждого полного года.



Раздел 2.2

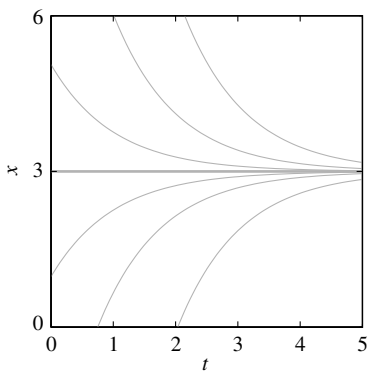
1. Неустойчивая точка равновесия: $x = 4$;

$x(t) = 4 + (x_0 - 4)e^t$



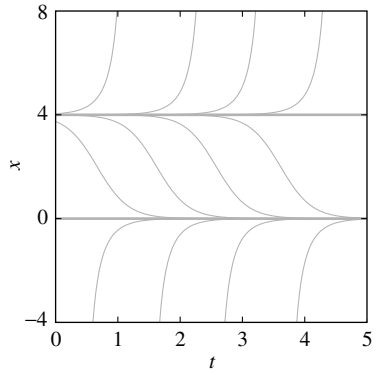
2. Устойчивая точка равновесия: $x = 3$;

$x(t) = 3 + (x_0 - 3)e^{-t}$



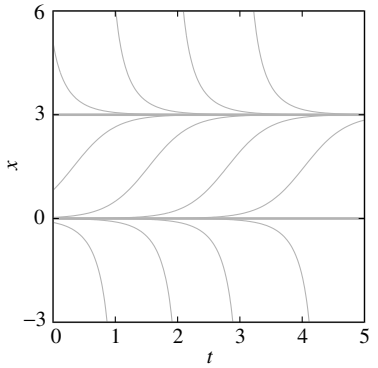
3. Устойчивая точка равновесия: $x = 0$; неустойчивая точка равновесия: $x = 4$;

$$x(t) = \frac{4x_0}{x_0 + (4 - x_0)e^{4t}}$$



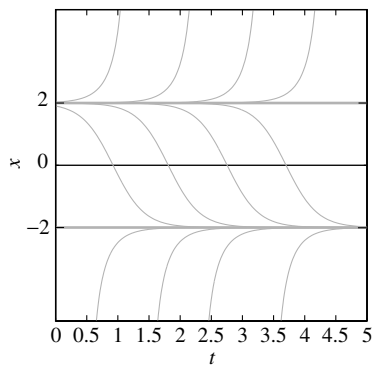
4. Устойчивая точка равновесия: $x = 3$; неустойчивая точка равновесия: $x = 0$;

$$x(t) = \frac{3x_0}{x_0 + (3 - x_0)e^{-3t}}$$



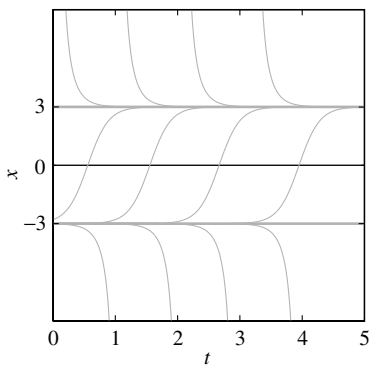
5. Устойчивая точка равновесия: $x = -2$; неустойчивая точка равновесия: $x = 2$;

$$x(t) = \frac{2[x_0 + 2 + (x_0 - 2)e^{4t}]}{x_0 + 2 - (x_0 - 2)e^{4t}}$$



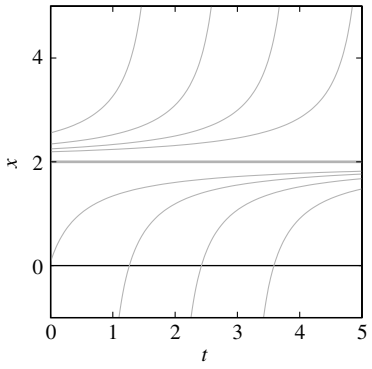
6. Устойчивая точка равновесия: $x = 3$; неустойчивая точка равновесия: $x = -3$;

$$x(t) = \frac{3[x_0 - 3 + (x_0 + 3)e^{6t}]}{3 - x_0 + (x_0 + 3)e^{6t}}$$



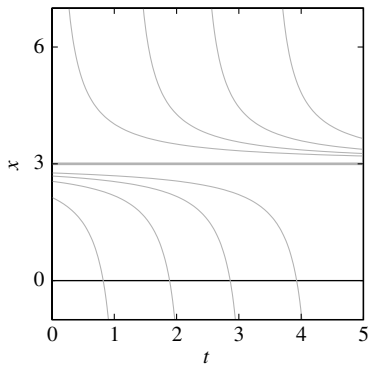
7. Полуустойчивая (см. задачу 18) точка равновесия: $x = 2$;

$$x(t) = \frac{(2t-1)x_0 - 4t}{tx_0 - 2t - 1}$$



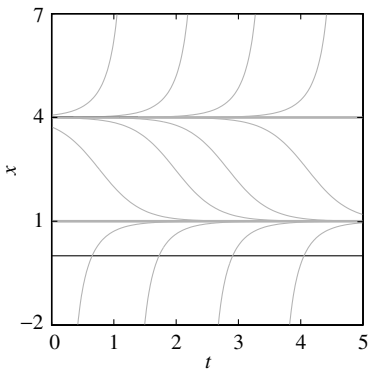
8. Полуустойчивая точка равновесия: $x = 3$;

$$x(t) = \frac{(3t+1)x_0 - 9t}{tx_0 - 3t + 1}$$



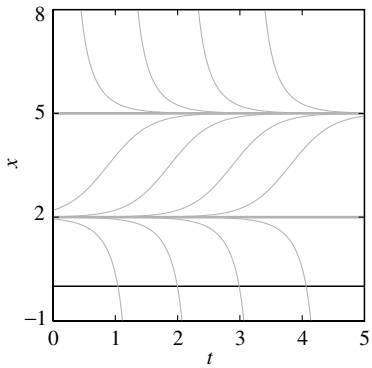
9. Устойчивая точка равновесия: $x = 1$; неустойчивая точка равновесия: $x = 4$;

$$x(t) = \frac{4(1-x_0) + (x_0-4)e^{3t}}{1 - x_0 + (x_0-4)e^{3t}}$$



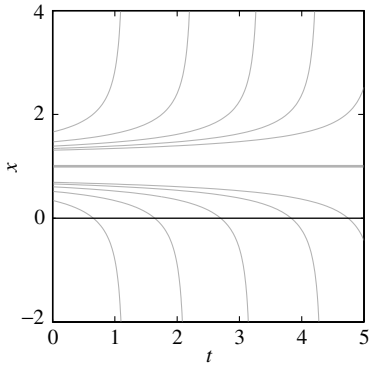
10. Устойчивая точка равновесия: $x = 5$; неустойчивая точка равновесия: $x = 2$;

$$x(t) = \frac{2(5-x_0) + 5(x_0-2)e^{3t}}{5 - x_0 + (x_0-2)e^{3t}}$$



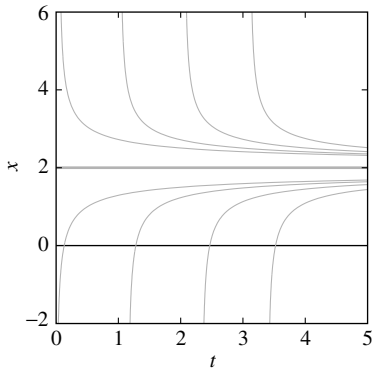
11. Неустойчивая точка равновесия: $x = 1$;

$$\frac{1}{(x(t)-1)^2} = \frac{1}{(x_0-1)^2} - 2t$$



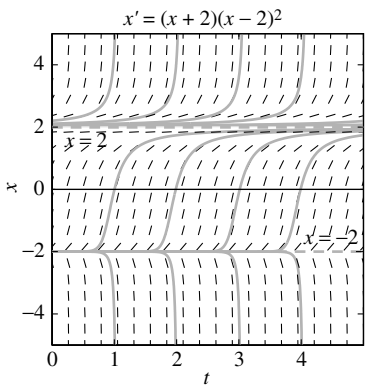
12. Устойчивая точка равновесия: $x = 2$;

$$\frac{1}{(2-x(t))^2} = \frac{1}{(2-x_0)^2} + 2t$$

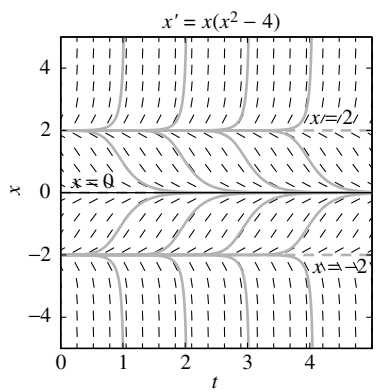


В каждой из задач 13–18 мы приводим чертеж поля направлений и типичных интегральных кривых. Стационарные решения данного дифференциального уравнения помечены, причем устойчивость или неустойчивость каждого из них должна быть видна из рисунка.

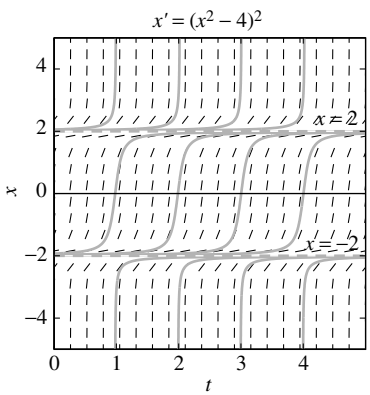
13.



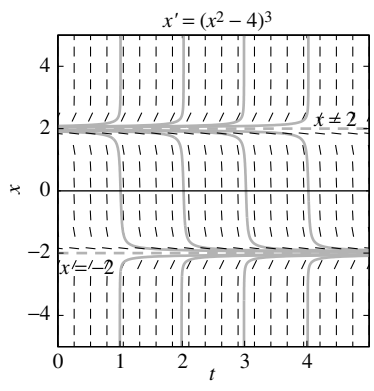
14.



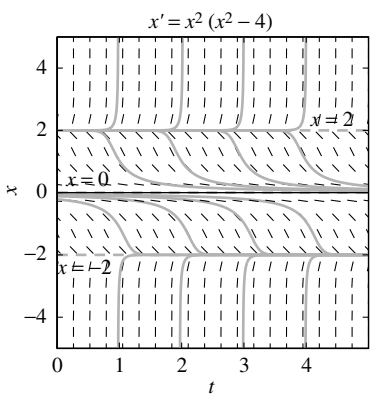
15.



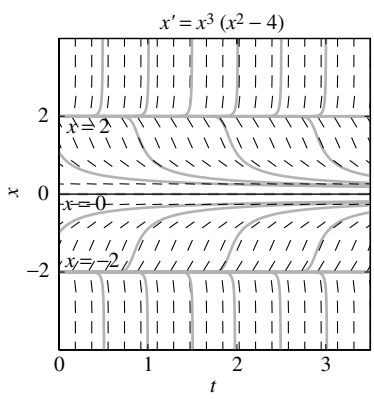
16.



17.



18.



19. Есть две точки равновесия при $h < 2\frac{1}{2}$, одна точка равновесия при $h = 2\frac{1}{2}$, но точек равновесия нет при $h > 2\frac{1}{2}$. Диаграмма бифуркации представляет собой параболу $(c-5)^2 = 25 - 10h$ в плоскости hc.

20. Есть две точки равновесия при $s < \frac{1}{16}$, одна точка равновесия при $s = \frac{1}{16}$, но точек равновесия нет при $s > \frac{1}{16}$. Диаграмма бифуркации представляет собой параболу $(2c-5)^2 = 25(1 - 16s)$ на плоскости sc.

Раздел 2.3

1. Приблизительно 31,5 секунды

3. $400/(\ln 2) \approx 577$ футов

5. $400 \ln 7 \approx 778$ футов

7. (a) 100 футов в секунду; (b) приблизительно 23 секунды и 1403 фута, чтобы достигнуть 90 футов в секунду

8. (a) 100 футов в секунду; (b) приблизительно 14,7 секунд и 830 футов, чтобы достичь 90 футов в секунду

9. 50 футов в секунду

10. Приблизительно 5 минут 47 секунд

11. Время падения: приблизительно 12,5 секунды

12. Приблизительно 648 футов

19. Приблизительно 30,46 фута в секунду; точно 40 футов в секунду

20. Приблизительно 277,26 ft

22. Приблизительно 20,67 фута в секунду; приблизительно 484,57 секунды

23. Приблизительно 259,304 секунды

24. (a) Приблизительно 0,88 сантиметра; (b) приблизительно 2,91 км

25. (b) Приблизительно 1,389 км в секунду; (c) $r_{\max} = 100R/19 \approx 5{,}26R$

26. Да

28. (b) После приблизительно 8,5 минуты столкнется с поверхностью приблизительно со скоростью 4,116 км/с.

29. Приблизительно 51,427 км

30. Приблизительно 11,11 км/с (а вторая космическая скорость на поверхности земли равна приблизительно 11,18 км/с).

Раздел 2.4

В задачах 1–10 мы округляем указанные значения к трем десятичным знакам.

1. Приближенные значения 1,125 и 1,181; истинное значение 1,213

2. Приближенные значения 1,125 и 1,244; истинное значение 1,359

3. Приближенные значения 2,125 и 2,221; истинное значение 2,297

4. Приближенные значения 0,625 и 0,681; истинное значение 0,713

5. Приближенные значения 0,938 и 0,889; истинное значение 0,851

6. Приближенные значения 1,750 и 1,627; истинное значение 1,558

7. Приближенные значения 2,859 и 2,737; истинное значение 2,647

8. Приближенные значения 0,445 и 0,420; истинное значение 0,405

9. Приближенные значения 1,267 и 1,278; истинное значение 1,287

10. Приближенные значения 1,125 и 1,231; истинное значение 1,333

В задачах 11–24 нужно составаить таблицы значений, которые занимают слишком много места; мы не можем привести их здесь. В задачах 11–16 мы даем сначала конечное значение x, а затем соответствующие приблизительные значения y, полученные при величине шага $h = 0{,}01$ и $h = 0{,}005$, и, наконец, затем конечное истинное значение y. (Все значения y округлены с точностью до четырех десятичных знаков.)

11. 1,0, −0,7048, −0,7115, −0,7183
12. 1,0, 2,9864, 2,9931, 3,0000
13. 2,0, 4,8890, 4,8940, 4,8990
14. 2,0, 3,2031, 3,2304, 3,2589
15. 3,0, 3,4422, 3,4433, 3,4444
16. 3,0, 8,8440, 8,8445, 8,8451

В задачах 17–24 мы даем сначала конечное значение x, а затем соответствующие приближенные значения y, полученные при величине шага $h = 0{,}1$, $h = 0{,}02$, $h = 0{,}004$ и $h = 0{,}0008$ соответственно. (Все значения y округлены с точностью до четырех десятичных знаков.)

17. 1,0, 0,2925, 0,3379, 0,3477, 0,3497
18. 2,0, 1,6680, 1,6771, 1,6790, 1,6794
19. 2,0, 6,1831, 6,3653, 6,4022, 6,4096
20. 2,0, −1,3792, −1,2843, −1,2649, −1,2610
21. 2,0, 2,8508, 2,8681, 2,8716, 2,8723
22. 2,0, 6,9879, 7,2601, 7,3154, 7,3264
23. 1,0, 1,2262, 1,2300, 1,2306, 1,2307
24. 1,0, 0,9585, 0,9918, 0,9984, 0,9997

25. При величине шага $h = 0{,}01$ и $h = 0{,}005$ приблизительная скорость после 1 секунды равна 16,0 футов в секунду (80% предельной скорости 20 футов в секунду); после 2 секунд она равна 19,2 фута в секунду (96% предельной скорости).

26. При величине шага $h = 1$ и $h = 0{,}5$ приближенная численность популяции через 5 лет равна 49 оленей (65% граничной численности популяции 75 оленей); через 10 лет она равна 66 оленей (88% граничной численности популяции).

27. Последовательно с величиной шага $h = 0{,}1, 0{,}01, 0{,}001, \ldots$ первые четыре аппроксимации к $y(2)$ получаются равными 0,7772, 0,9777, 1,0017 и 1,0042. Поэтому кажется вероятным, что $y(2) \approx 1{,}00$.

28. Последовательно с величиной шага $h = 0{,}1, 0{,}01, 0{,}001, \ldots$ первые четыре аппроксимации к $y(2)$ получаются равными 1,2900, 1,4435, 1,4613 и 1,4631. Поэтому кажется вероятным, что $y(2) \approx 1{,}46$.

29.

x	$h = 0{,}15$ y	$h = 0{,}03$ y	$h = 0{,}006$ y
−1,0	1,0000	1,0000	1,0000
−0,7	1,0472	1,0512	1,0521
−0,4	1,1213	1,1358	1,1390
−0,1	1,2826	1,3612	1,3835
0,2	0,8900	1,4711	0,8210
0,5	0,7460	1,2808	0,7192

30.

x	$h = 0{,}1$ y	$h = 0{,}01$ y
1,8	2,8200	4,3308
1,9	3,9393	7,9425
2,0	5,8521	28,3926

31.

x	$h = 0{,}1$ y	$h = 0{,}01$ y
0,7	4,3460	6,4643
0,8	5,8670	11,8425
0,9	8,3349	39,5010

Раздел 2.5

1.

x	По усовершенствованному методу Эйлера Euler y	Фактические y
0,1	1,8100	1,8097
0,2	1,6381	1,6375
0,3	1,4824	1,4816
0,4	1,3416	1,3406
0,5	1,2142	1,2131

Обратите внимание. В задачах 2–10 мы даем значение x, соответствующее значению y, вычисленное по усовершенствованному методу Эйлера, и истинное значение y.

2. 0,5, 1,3514, 1,3191
3. 0,5, 2,2949, 2,2974
4. 0,5, 0,7142, 0,7131
5. 0,5, 0,8526, 0,8513
6. 0,5, 1,5575, 1,5576
7. 0,5, 2,6405, 2,6475
8. 0,5, 0,4053, 0,4055
9. 0,5, 1,2873, 1,2874
10. 0,5, 1,3309, 1,3333

В задачах 11–16 мы даем конечное значение x, соответствующие значению y при $h = 0{,}01$ и при $h = 0{,}005$, и истинное значение y.

11. 1,0, −0,71824, −0,71827, −0,71828
12. 1,0, 2,99995, 2,99999, 3,00000
13. 2,0, 4,89901, 4,89899, 4,89898
14. 2,0, 3,25847, 3,25878, 3,25889
15. 3,0, 3,44445, 3,44445, 3,44444
16. 3,0, 8,84511, 8,84509, 8,84509

В задачах 17–24 мы даем конечное значение x и соответствующие значения y для $h = 0{,}1$, 0,02, 0,004 и 0,0008.

17. 1,0, 0,35183, 0,35030, 0,35023, 0,35023
18. 2,0, 1,68043, 1,67949, 1,67946, 1,67946
19. 2,0, 6,40834, 6,41134, 6,41147, 6,41147
20. 2,0, −1,26092, −1,26003, −1,25999, −1,25999
21. 2,0, 2,87204, 2,87245, 2,87247, 2,87247
22. 2,0, 7,31578, 7,32841, 7,32916, 7,32920
23. 1,0, 1,22967, 1,23069, 1,23073, 1,23073
24. 1,0, 1,00006, 1,00000, 1,00000, 1,00000

25. При величине шага $h = 0{,}01$ и $h = 0{,}005$ скорость через 1 секунду равна приблизительно 15,962 фута в секунду (80% предельной скорости 20 футов в секунду); после 2 секунд она равна 19,185 футов в секунду (96% предельной скорости).

26. При величине шага $h = 1$ и $h = 0{,}5$ численность популяции через 5 лет приблизительно равна 49,391 оленя (65% граничной численности популяции 75 оленей); после 10 секунд она равна 66,113 оленей (88% граничной численности популяции).

27. Последовательно полагая величину шага $h = 0{,}1, 0{,}01, 0{,}001, \ldots$ мы получаем первые три аппроксимации к $y(2)$: 1,0109, 1,0045 и 1,0045. Поэтому кажется вероятным, что $y(2) \approx 1{,}0045$.

28. Последовательно полагая величину шага $h = 0{,}1, 0{,}01, 0{,}001, \ldots$ мы получаем первые четыре аппроксимации к $y(2)$: 1,4662, 1,4634, 1,4633 и 1,4633. Поэтому кажется вероятным, что $y(2) \approx 1{,}4633$.

29. Скорость при ударе приблизительно равна 43,22 м/с

30. Скорость при ударе приблизительно равна 43,48 м/с

Раздел 2.6

1. $y(0{,}25) \approx 1{,}55762$; $y(0{,}25) = 1{,}55760$. $y(0{,}5) \approx 1{,}21309$; $y(0{,}5) = 1{,}21306$. *Решение*: $y = 2e^{-x}$

В задачах 2–10 мы даем аппроксимацию $y(0{,}5)$, его истинное значение и решение.

2. 1,35867, 1,35914; $y = \frac{1}{2}e^{2x}$
3. 2,29740, 2,29744; $y = 2e^{x} - 1$
4. 0,71309, 0,71306; $y = 2e^{-x} + x - 1$
5. 0,85130, 0,85128; $y = -e^{x} + x + 2$
6. 1,55759, 1,55760; $u = 2\exp\left(-x^2\right)$
7. 2,64745, 2,64749; $y = 3\exp\left(-x^3\right)$

8. 0,40547, 0,40547; $y = \ln(x+1)$

9. 1,28743, 1,28743; $y = \operatorname{tg} \frac{1}{4}(x+\pi)$

10. 1,33337, 1,33333; $y = (1-x^2)^{-1}$

11. *Решение*: $y(x) = 2 - e^x$.

x	$h = 0{,}2$ y	$h = 0{,}1$ y	Точное y
0,0	1,00000	1,00000	1,00000
0,2	0,77860	0,77860	0,77860
0,4	0,50818	0,50818	0,50818
0,6	0,17789	0,17788	0,17788
0,8	−0,22552	−0,22554	−0,22554
1,0	−0,71825	−0,71828	−0,71828

В задачах 12–16 мы даем конечное значение x, соответствующие аппроксимации Рунге–Кутта при $h = 0{,}2$ и при $h = 0{,}1$, точное значение y и решение.

12. 1,0, 2,99996, 3,00000, 3,00000; $y = 1 + 2/(2-x)$

13. 2,0, 4,89900, 4,89898, 4,89898; $y = \sqrt{8+x^4}$

14. 2,0, 3,25795, 3,25882, 3,25889; $y = 1/(1-\ln x)$

15. 3,0, 3,44445, 3,44444, 3,44444; $y = x + 4x^{-2}$

16. 3,0, 8,84515, 8,84509, 8,84509; $y = (x^6 - 37)^{1/3}$

В задачах 17–24 мы даем конечное значение x и соответствующие значения y при $h = 0{,}2$, 0,1, 0,05 и 0,025.

17. 1,0, 0,350258, 0,350234, 0,350232, 0,350232

18. 2,0, 1,679513, 1,679461, 1,679459, 1,679459

19. 2,0, 6,411464, 6,411474, 6,411474, 6,411474

20. 2,0, −1,259990, −1,259992, −1,259993, −1,259993

21. 2,0, 2,872467, 2,872468, 2,872468, 2,872468

22. 2,0, 7,326761, 7,328452, 7,328971, 7,329134

23. 1,0, 1,230735, 1,230731, 1,230731, 1,230731

24. 1,0, 1,000000, 1,000000, 1,000000, 1,000000

25. При величине шага $h = 0{,}1$ и $h = 0{,}05$ скорость через 1 секунду приблизительно равна 15,962 фута в секунду (80% предельной скорости 20 футов в секунду); после 2 секунд она равна 19,185 фута в секунду (96% предельной скорости).

26. При величине шага $h = 6$ и $h = 3$ численность популяции через 5 лет приблизительно равна 49,3915 оленей (65% граничной численности популяции 75 оленей); через 10 лет она равна 66,1136 оленей (88% граничной численности популяции).

27. Последовательно полагая величину шага $h = 1, 0{,}1, 0{,}01, \ldots$ мы получаем первые четыре аппроксимации к $y(2)$: 1,05722, 1,00447, 1,00445 и 1,00445. Таким образом, кажется вполне вероятным, что $y(2) \approx 1{,}00445$ с точностью до пяти десятичных знаков.

28. Последовательно полагая величину шага $h = 1, 0{,}1, 0{,}01, \ldots$ мы получаем первые четыре аппроксимации к $y(2)$: 1,48990, 1,46332, 1,46331 и 1,46331. Таким образом, кажется вполне вероятным, что $y(2) \approx 1{,}4633$ с точностью до пяти десятичных знаков.

29. Время движения вверх: приблизительно 9,41 секунды

30. Время движения вверх: приблизительно 9,41 секунды

Глава 3

Раздел 3.1

1. $y(x) = \frac{5}{2}e^x - \frac{5}{2}e^{-x}$

2. $y(x) = 2e^{3x} - 3e^{-3x}$

3. $y(x) = 3\cos 2x + 4\sin 2x$

4. $y(x) = 10\cos 5x - 2\sin 5x$

5. $y(x) = 2e^x - e^{2x}$

6. $y(x) = 4e^{2x} + 3e^{-3x}$

7. $y(x) = 6 - 8e^{-x}$

8. $y(x) = \frac{1}{3}(14 - 2e^{3x})$

9. $y(x) = 2e^{-x} + xe^{-x}$

10. $y(x) = 3e^{5x} - 2xe^{5x}$

11. $y(x) = 5e^x \sin x$
12. $y(x) = e^{-3x}(2\cos 2x + 3\sin 2x)$
13. $y(x) = 5x - 2x^2$
14. $y(x) = 3x^2 - 16/x^3$
15. $y(x) = 7x - 5x\ln x$
16. $y(x) = 2\cos(\ln x) + 3\sin(\ln x)$
21. Линейно независимы
22. Линейно независимы
23. Линейно независимы
24. Линейно зависимы
25. Линейно независимы
26. Линейно независимы
28. $y(x) = 1 - 2\cos x - \sin x$
29. Нет никакого противоречия, потому что если данное дифференциальное уравнение разделить на x^2, чтобы получить его представление в виде (8), то полученные коэффициентные функции $p(x) = -4/x$ и $q(x) = 6/x^2$ не будут непрерывны в точке $x = 0$.
33. $y(x) = c_1e^x + c_2e^{2x}$
34. $y(x) = c_1e^{-5x} + c_2e^{3x}$
35. $y(x) = c_1 + c_2e^{-5x}$
36. $y(x) = c_1 + c_2e^{-3x/2}$
37. $y(x) = c_1e^{-x/2} + c_2e^x$
38. $y(x) = c_1e^{-x/2} + c_2e^{-3x/2}$
39. $y(x) = (c_1 + c_2x)e^{-x/2}$
40. $y(x) = (c_1 + c_2x)e^{2x/3}$
41. $y(x) = c_1e^{-4x/3} + c_2e^{5x/2}$
42. $y(x) = c_1e^{-4x/7} + c_2e^{3x/5}$
43. $y'' + 10y' = 0$
44. $y'' - 100y = 0$
45. $y'' + 20y' + 100y = 0$
46. $y'' - 110y' + 1000y = 0$
47. $y'' = 0$
48. $y'' - 2y' - y = 0$
49. Вершина: $\left(\ln\frac{7}{4},\ \frac{16}{7}\right)$.
50. $(-\ln 2, -2)$
52. $y(x) = c_1x + c_2/x$
53. $y(x) = c_1x^{-4} + c_2x^3$
54. $y(x) = c_1x^{-3/2} + c_2x^{1/2}$
55. $y(x) = c_1 + c_2\ln x$
56. $y(x) = x^2(c_1 + c_2\ln x)$

Раздел 3.2

1. $15\cdot(2x) - 16\cdot(3x^2) - 6\cdot(5x - 8x^2) \equiv 0$
2. $(-4)(5) + (5)(2 - 3x^2) + (1)(10 + 15x^2) \equiv 0$
3. $1\cdot 0 + 0\cdot\sin x + 0\cdot e^x \equiv 0$
4. $(6)(17) + (-51)(2\sin^2 x) + (-34)(3\cos^2 x) \equiv 0$
5. $1\cdot 17 - 34\cdot\cos^2 x + 17\cdot\cos 2x \equiv 0$
6. $(-1)(e^x) + (1)(\cosh x) + (1)(\sinh x) \equiv 0$
13. $y(x) = \frac{4}{3}e^x - \frac{1}{3}e^{-2x}$
14. $y(x) = \frac{1}{2}(3e^x - 6e^{2x} + 3e^{3x})$
15. $y(x) = (2 - 2x + x^2)e^x$
16. $y(x) = -12e^x + 13e^{2x} - 10xe^{2x}$
17. $y(x) = \frac{1}{9}(29 - 2\cos 3x - 3\sin 3x)$
18. $y(x) = e^x(2 - \cos x - \sin x)$
19. $y(x) = x + 2x^2 + 3x^3$
20. $y(x) = 2x - x^{-2} + x^{-2}\ln x$
21. $y(x) = 2\cos x - 5\sin x + 3x$
22. $y(x) = 4e^{2x} - e^{-2x} - 3$
23. $y(x) = e^{-x} + 4e^{3x} - 2$
24. $y(x) = e^x(3\cos x + 4\sin x) + x + 1$
38. $y_2(x) = \dfrac{1}{x^3}$
39. $y_2(x) = xe^{x/2}$
40. $y_2(x) = xe^x$
41. $y_2(x) = x + 2$
42. $y_2(x) = 1 + x^2$

Раздел 3.3

1. $y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$
2. $y(x) = c_1 + c_2e^{3x/2}$
3. $y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-5x}$
4. $y(x) = c_1e^{x/2} + c_2e^{3x}$
5. $y(x) = c_1e^{-3x} + c_2xe^{-3x}$
6. $y(x) = e^{-5x/2}\left[c_1\exp\left(\frac{1}{2}x\sqrt{5}\right) + c_2\exp\left(-\frac{1}{2}x\sqrt{5}\right)\right]$
7. $y(x) = c_1e^{3x/2} + c_2xe^{3x/2}$
8. $y(x) = e^{3x}(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x)$
9. $y(x) = e^{-4x}(c_1\cos 3x + c_2\sin 3x)$
10. $y(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{-3x/5}$
11. $y(x) = c_1 + c_2x + c_3e^{4x} + c_4xe^{4x}$
12. $y(x) = c_1 + c_2e^x + c_3xe^x + c_4x^2e^x$
13. $y(x) = c_1 + c_2e^{-2x/3} + c_3xe^{-2x/3}$
14. $y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3\cos 2x + c_4\sin 2x$
15. $y(x) = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + c_3e^{-2x} + c_4xe^{-2x}$
16. $y(x) = (c_1 + c_2x)\cos 3x + (c_3 + c_4x)\sin 3x$
17. $y(x) = c_1\cos\left(x/\sqrt{2}\right) + c_2\sin\left(x/\sqrt{2}\right) + c_3\cos\left(2x/\sqrt{3}\right) + c_4\sin\left(2x/\sqrt{3}\right)$
18. $y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + c_3\cos 2x + c_4\sin 2x$
19. $y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3xe^{-x}$
20. $y(x) = e^{-x/2}\left[(c_1 + c_2x)\cos\left(\frac{1}{2}x\sqrt{3}\right) + (c_3 + c_3x)\sin\left(\frac{1}{2}x\sqrt{3}\right)\right]$
21. $y(x) = 5e^x + 2e^{3x}$

22. $y(x) = e^{-x/3}\left[3\cos\left(x/\sqrt{3}\right) + 5\sqrt{3}\sin\left(x/\sqrt{3}\right)\right]$

23. $y(x) = e^{3x}(3\cos 4x - 2\sin 4x)$

24. $y(x) = \frac{1}{2}(-7 + e^{2x} + 8e^{-x/2})$

25. $y(x) = \frac{1}{4}(-13 + 6x + 9e^{-2x/3})$

26. $y(x) = \frac{1}{5}(24 - 9e^{-5x} - 25xe^{-5x})$

27. $y(x) = c_1e^x + c_2e^{-2x} + c_3xe^{-2x}$

28. $y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-x} + c_3e^{-x/2}$

29. $y(x) = c_1e^{-3x} + e^{3x/2}\left[c_2\cos\left(\frac{3}{2}x\sqrt{3}\right) + c_3\sin\left(\frac{3}{2}x\sqrt{3}\right)\right]$

30. $y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{2x} + c_3\cos(x\sqrt{3}) + c_4\sin(x\sqrt{3})$

31. $y(x) = c_1e^x + e^{-2x}(c_2\cos 2x + c_3\sin 2x)$

32. $y(x) = c_1e^{2x} + (c_2 + c_3x + c_4x^2)e^{-x}$

33. $y(x) = c_1e^{3x} + e^{-3x}(c_2\cos 3x + c_3\sin 3x)$

34. $y(x) = c_1e^{2x/3} + c_2\cos 2x + c_3\sin 2x$

35. $y(x) = c_1e^{-x/2} + c_2e^{-x/3} + c_3\cos 2x + c_4\sin 2x$

36. $y(x) = c_1e^{7x/9} + e^{-x}(c_2\cos x + c_3\sin x)$

37. $y(x) = 11 + 5x + 3x^2 + 7e^x$

38. $y(x) = 2e^{5x} - 2\cos 10x$

39. $y^{(3)} - 6y'' + 12y' - 8y = 0$

40. $y^{(3)} - 2y'' + 4y' - 8y = 0$

41. $y^{(4)} - 16y = 0$

42. $y^{(6)} + 12y^{(4)} + 48y'' + 64y = 0$

44. (a) $x = i, -2i$ (b) $x = -i, 3i$

45. $y(x) = c_1e^{-ix} + c_2e^{3ix}$

46. $y(x) = c_1e^{3ix} + c_2e^{-2ix}$

47. $y(x) = c_1\exp\left(\left[1 + i\sqrt{3}\right]x\right) + c_2\exp\left(-\left[1 + i\sqrt{3}\right]x\right)$

48. $y(x) = \frac{1}{3}\left(e^x + \exp\left[\frac{1}{2}\left(-1 + i\sqrt{3}\right)x\right] + \exp\left[\frac{1}{2}\left(-1 - i\sqrt{3}\right)x\right]\right)$

49. $y(x) = 2e^{2x} - 5e^{-x} + 3\cos x - 9\sin x$

52. $y(x) = c_1\cos(3\ln x) + c_2\sin(3\ln x)$

53. $y(x) = x^{-3}[c_1\cos(4\ln x) + c_2\sin(4\ln x)]$

54. $y(x) = c_1 + c_2\ln x + c_3x^{-3}$

55. $y(x) = c_1 + x^2(c_2 + c_3\ln x)$

56. $y(x) = c_1 + c_2\ln x + c_3(\ln x)^2$

57. $y(x) = c_1 + x^3\left(c_2x^{-\sqrt{3}} + c_3x^{+\sqrt{3}}\right)$

58. $y(x) = x^{-1}[c_1 + c_2\ln x + c_3(\ln x)^2]$

Раздел 3.4

1. Частота: 2 радиан в секунду ($1/\pi$ Гц); период: π секунд

2. Частота: 8 радиан в секунду $4/\pi$ Гц); период: $\pi/4$ секунд

3. Амплитуда: 2 м; частота: 5 радиан в секунду; период: $2\pi/5$ секунд

4. (a) $x(t) = \frac{13}{12}\cos(12t - \alpha)$ при $\alpha = 2\pi - \operatorname{arctg}(5/12) \approx 5{,}8884$; (b) Амплитуда: $\frac{13}{12}$ м; период: $\pi/6$ секунды

6. Приблизительно 7,33 мили

7. Приблизительно 10450 футов

8. 29,59 дюйма

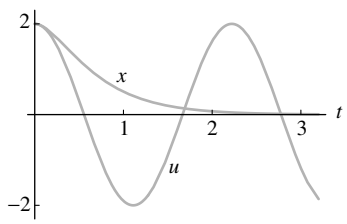
10. Амплитуда: 100 см; период: приблизительно 2,01 секунды

11. Приблизительно 3,8 дюйма

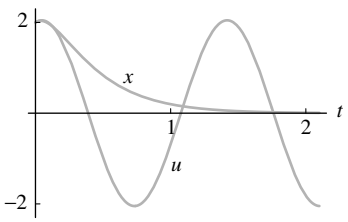
13. (a) $x(t) = 50(e^{-2t/5} - e^{-t/2})$; (b) 4,096 точно

14. (a) $x(t) = 25e^{-t/5}\cos(3t - \alpha)$ при $\alpha = \operatorname{arctg}(3/4) \approx 0{,}6435$; (b) огибающие $x = \pm 25e^{-t/5}$; псевдопериод $2\pi/3$

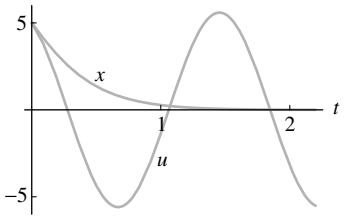
15. $x(t) = 4e^{-2t} - 2e^{-4t}$,
сверхзатухание $u(t) = 2\cos(2\sqrt{2}\,t)$



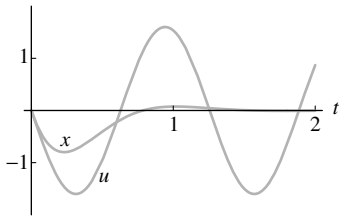
16. $x(t) = 4e^{-3t} - 2e^{-7t}$,
сверхзатухание $u(t) \approx 2\sqrt{\frac{22}{21}}\cos(\sqrt{21}\,t - 0{,}2149)$



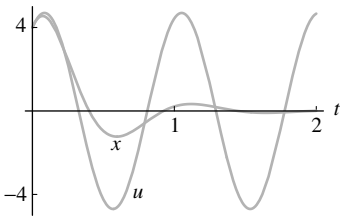
17. $x(t) = 5e^{-4t}(2t+1)$, критическое затухание; $u(t) \approx \frac{5}{2}\sqrt{5}\cos(4t - 5{,}8195)$



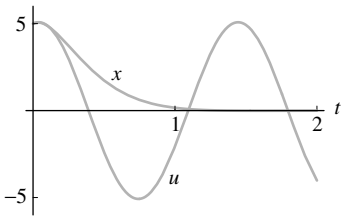
18. $x(t) = 2e^{-3t}\cos\left(4t - \frac{3\pi}{2}\right)$, затухание; $u(t) = \frac{8}{5}\cos\left(5t - \frac{3\pi}{2}\right)$



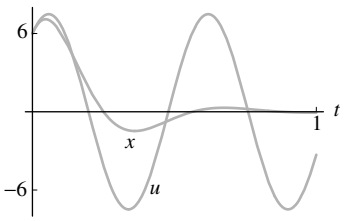
19. $x(t) \approx \frac{1}{3}\sqrt{313}\,e^{-5t/2}\cos(6t - 0{,}8254)$, затухание; $u(t) \approx \frac{4}{13}\sqrt{233}\,\cos\left(\frac{13}{2}t - 0{,}5517\right)$



20. $x(t) \approx 13e^{-4t}\cos(2t - 1{,}1760)$, затухание; $u(t) \approx \sqrt{\frac{129}{5}}\,\cos(2\sqrt{5}\,t - 0{,}1770)$



21. $x(t) \approx 10e^{-5t}\cos(10t - 0{,}9273)$, затухание; $u(t) \approx 2\sqrt{14}\,\cos(5\sqrt{5}\,t - 0{,}6405)$



22. (b) Амплитуда, зависящая от времени, равна $\frac{2}{3}\sqrt{3}$, частота равна $4\sqrt{3}$ радиан в секунду, а фазовый угол равен $\pi/6$.

23. (a) $k \approx 7018$ фунтов на фут; (b) Приблизительно после 2,47 секунды

34. Коэффициент затухания: $c \approx 11{,}51$ фунт/фут/секунда; жесткость пружины: $k \approx 189{,}68$ фунтов на фут

Раздел 3.5

1. $y_p(x) = \frac{1}{25}e^{3x}$

2. $y_p(x) = -\frac{1}{4}(5 + 6x)$

3. $y_p(x) = \frac{1}{39}(\cos 3x - 5\sin 3x)$

4. $y_p(x) = \frac{1}{9}(-4e^x + 3xe^x)$

5. $y_p(x) = \frac{1}{26}(13 + 3\cos 2x - 2\sin 2x)$

6. $y_p(x) = \frac{1}{343}(4 - 56x + 49x^2)$

7. $y_p(x) = -\frac{1}{6}(e^x - e^{-x}) = -\frac{1}{3}\sinh x$

8. $y_p(x) = \frac{1}{4}x\sinh 2x$

9. $y_p(x) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{16}(2x^2 - x)e^x$

10. $y_p(x) = \frac{1}{6}(2x\sin 3x - 3x\cos 3x)$

11. $y_p(x) = \frac{1}{8}(3x^2 - 2x)$

12. $y_p(x) = 2x + \frac{1}{2}x\sin x$

13. $y_p(x) = \frac{1}{65}e^x(7\sin x - 4\cos x)$

14. $y_p(x) = \frac{1}{24}(-3x^2e^x + x^3e^x)$

15. $y_p(x) \equiv -17$

16. $y_p(x) = \frac{1}{81}(45 + e^{3x} - 6xe^{3x} + 9x^2e^{3x})$

17. $y_p(x) = \frac{1}{4}(x^2\sin x - x\cos x)$

18. $y_p(x) = -\frac{1}{144}(24xe^x - 19xe^{2x} + 6x^2e^{2x})$

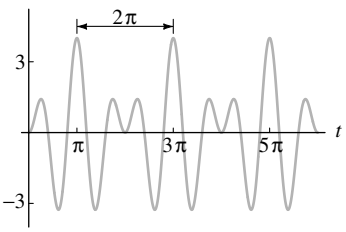
19. $y_p(x) = \frac{1}{8}(10x^2 - 4x^3 + x^4)$

20. $y_p(x) = -7 + \frac{1}{3}xe^x$

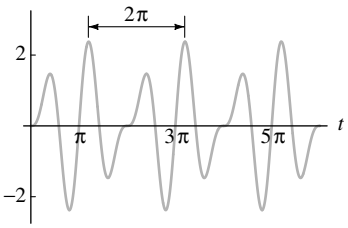
21. $y_p(x) = xe^x(A\cos x + B\sin x)$ **22.** $y_p(x) = Ax^3 + Bx^4 + Cx^5 + Dxe^x$
23. $y_p(x) = Ax\cos 2x + Bx\sin 2x + Cx^2\cos 2x + Dx^2\sin 2x$
24. $y_p(x) = Ax + Bx^2 + (Cx + Dx^2)e^{-3x}$
25. $y_p(x) = Axe^{-x} + Bx^2e^{-x} + Cxe^{-2x} + Dx^2e^{-2x}$
26. $y_p(x) = (Ax + Bx^2)e^{3x}\cos 2x + (Cx + Dx^2)e^{3x}\sin 2x$
27. $y_p(x) = Ax\cos x + Bx\sin x + Cx\cos 2x + Dx\sin 2x$
28. $y_p(x) = (Ax + Bx^2 + Cx^3)\cos 3x + (Dx + Ex^2 + Fx^3)\sin 3x$
29. $y_p(x) = Ax^3e^x + Bx^4e^x + Cxe^{2x} + Dxe^{-2x}$
30. $y_p(x) = (A + Bx + Cx^2)\cos x + (D + Ex + Fx^2)\sin x$
31. $y(x) = \cos 2x + \frac{3}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x$ **32.** $y(x) = \frac{1}{6}(15e^{-x} - 16e^{-2x} + e^x)$
33. $y(x) = \cos 3x - \frac{2}{15}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 2x$ **34.** $y(x) = \cos x - \sin x + \frac{1}{2}x\sin x$
35. $y(x) = e^x(2\cos x - \frac{5}{2}\sin x) + \frac{1}{2}x + 1$
36. $y(x) = \frac{1}{192}(234 + 240x - 9e^{-2x} - 33e^{2x} - 12x^2 - 4x^4)$
37. $y(x) = 4 - 4e^x + 3xe^x + x - \frac{1}{2}x^2e^x + \frac{1}{6}x^3e^x$
38. $y(x) = \frac{1}{85}[e^{-x}(176\cos x + 197\sin x) - (6\cos 3x + 7\sin 3x)]$
39. $y(x) = -3 + 3x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + 4e^{-x} + xe^{-x}$ **40.** $y(x) = \frac{1}{4}(5e^{-x} + 5e^x + 10\cos x - 20)$
41. $y_p(x) = 255 - 450x + 30x^2 + 20x^3 + 10x^4 - 4x^5$
42. $y(x) = 10e^{-x} + 35e^{2x} + 210\cos x + 390\sin x + y_p(x)$, где $y_p(x)$ — частное решение задачи 41.
43. (b) $y(x) = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{20}\cos 3x$
44. $y(x) = e^{-x/2}\left[c_1\cos\left(\frac{1}{2}x\sqrt{3}\right) + c_2\sin\left(\frac{1}{2}x\sqrt{3}\right)\right] + \frac{1}{26}(-3\cos 2x + 2\sin 2x) + \frac{1}{482}(-15\cos 4x + 4\sin 4x)$
45. $y(x) = c_1\cos 3x + c_2\sin 3x + \frac{1}{24} - \frac{1}{10}\cos 2x - \frac{1}{56}\cos 4x$
46. $y(x) = c_1\cos x + c_2\sin x + \frac{1}{16}(3x\cos x + 3x^2\sin x) + \frac{1}{128}(3\sin 3x - 4x\cos 3x)$
47. $y_p(x) = \frac{2}{3}e^x$ **48.** $y_p(x) = -\frac{1}{12}(6x + 1)e^{-2x}$
49. $y_p(x) = x^2e^{2x}$
50. $y_p(x) = \frac{1}{16}(4x\cosh 2x - \sinh 2x)$
51. $y_p(x) = -\frac{1}{4}(\cos 2x\cos x - \sin 2x\sin x) + \frac{1}{20}(\cos 5x\cos 2x + \sin 5x\sin 2x) = -\frac{1}{5}\cos 3x$ (!)
52. $y_p(x) = -\frac{1}{6}x\cos 3x$ **53.** $y_p(x) = \frac{2}{3}x\sin 3x + \frac{2}{9}(\cos 3x)\ln|\cos 3x|$
54. $y_p(x) = -1 - (\cos x)\ln|\csc x - \cot x|$ **55.** $y_p(x) = \frac{1}{8}(1 - x\sin 2x)$
56. $y_p(x) = -\frac{1}{9}e^x(3x + 2)$ **58.** $y_p(x) = x^3(\ln x - 1)$
59. $y_p(x) = \frac{1}{4}x^4$ **60.** $y_p(x) = -\frac{72}{5}x^{4/3}$
61. $y_p(x) = \ln x$
62. $y_p(x) = -x^2 + x\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| + \dfrac{1}{2}(1 + x^2)\ln|1 - x^2|$

Раздел 3.6

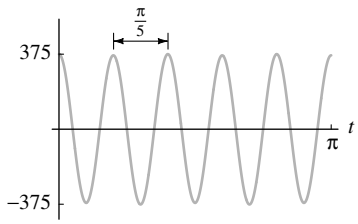
1. $x(t) = 2\cos 2t - 2\cos 3t$



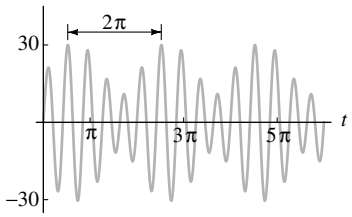
2. $x(t) = \frac{3}{2}\sin 2t - \sin 3t$



3. $x(t) = \sqrt{138388}\,\cos(10t - \alpha) + 5\cos(5t - \beta)$, где $\alpha = 2\pi - \operatorname{arctg}(1/186) \approx 6{,}2778$ и $\beta = \operatorname{arctg}(4/3) \approx 0{,}9273$.

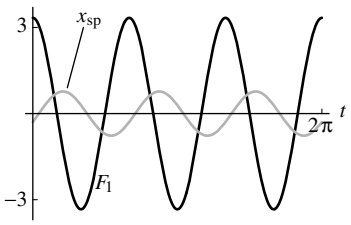


4. $x(t) = 2\sqrt{106}\,\cos(5t - \alpha) + 10\cos 4t$, где $\alpha = \pi - \operatorname{arctg}(9/5) \approx 2{,}0779$

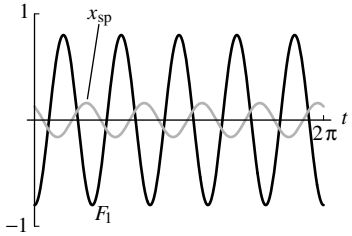


5. $x(t) = (x_0 - C)\cos\omega_0 t + C\cos\omega t$, где $C = F_0/(k - m\omega^2)$

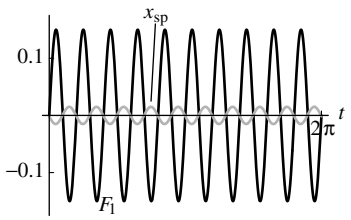
7. $x_{\text{sp}}(t) = \frac{10}{13}\cos(3t - \alpha)$, где $\alpha = \pi - \operatorname{arctg}(12/5) \approx 1{,}9656$



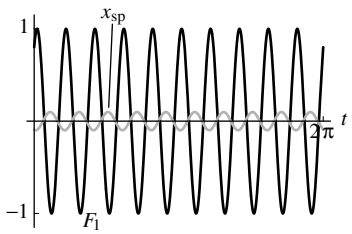
8. $x_{\text{sp}}(t) = \frac{4}{25}\cos(5t - \alpha)$, где $\alpha = 2\pi - \operatorname{arctg}(3/4) \approx 5{,}6397$



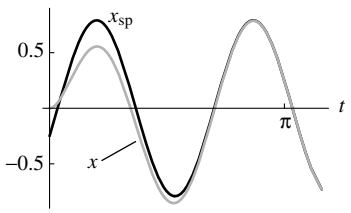
9. $x_{\text{sp}}(t) = \frac{3}{\sqrt{40001}}\cos(10t - \alpha)$, где $\alpha = \pi + \operatorname{arctg}(199/20) \approx 4{,}6122$



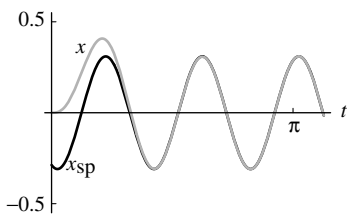
10. $x_{\text{sp}}(t) = \frac{10}{793}\sqrt{61}\,\cos(10t - \alpha)$, где $\alpha = \pi + \operatorname{arctg}(171/478) \approx 3{,}4851$



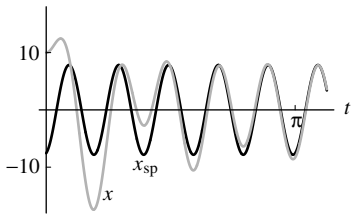
11. $x_{\text{sp}}(t) = \frac{\sqrt{10}}{4}\cos(3t - \alpha)$, где $\alpha = \pi - \operatorname{arctg}(3) \approx 1{,}8925$
$x_{\text{tr}}(t) = \frac{5}{4}\sqrt{2}\,e^{-2t}\cos(t - \beta)$, где $\beta = 2\pi - \operatorname{arctg}(7) \approx 4{,}8543$



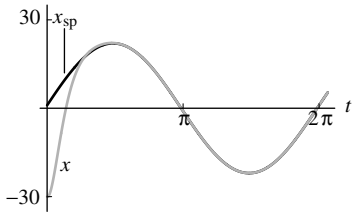
12. $x_{\text{sp}}(t) = \frac{5}{3\sqrt{29}}\cos(3t - \alpha)$, где $\alpha = \pi + \operatorname{arctg}(2/5) \approx 3{,}5221$
$x_{\text{tr}}(t) = \frac{25}{6\sqrt{29}}e^{-3t}\cos(2t - \beta)$, где $\beta = \operatorname{arctg}(5/2) \approx 1{,}1903$



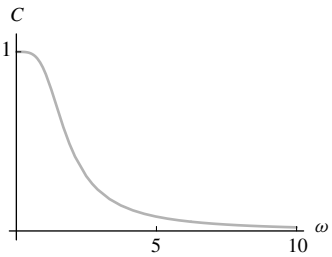
13. $x_{\text{sp}}(t) = \frac{300}{\sqrt{1469}}\cos(10t - \alpha)$,
где $\alpha = \pi - \operatorname{arctg}(10/37) \approx 2{,}9320$
$x_{\text{tr}}(t) = 2\sqrt{\frac{113314}{1469}}\, e^{-t}\cos(5t - \beta)$,
где $\beta = 2\pi - \operatorname{arctg}(421/12895) \approx 6{,}2505$



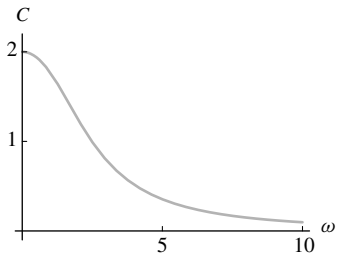
14. $x_{\text{sp}}(t) = \sqrt{485}\,\cos(t - \alpha)$,
где $\alpha = \operatorname{arctg}(22) \approx 1{,}5254$
$x_{\text{tr}}(t) = \sqrt{3665}\, e^{-4t}\cos(3t - \beta)$,
где $\beta = \pi + \operatorname{arctg}(52/31) \approx 4{,}1748$



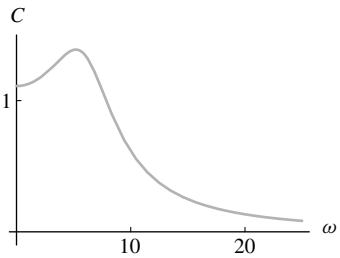
15. $C(\omega) = 2/\sqrt{4 + \omega^4}$;
практически резонансной частоты нет.



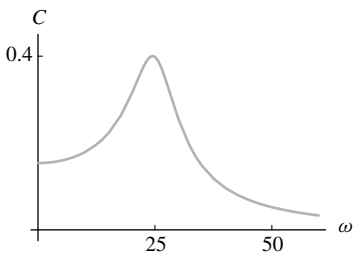
16. $C(\omega) = 10/\sqrt{25 + 6\omega^2 + \omega^4}$;
практически резонансной частоты нет.



17. $C(\omega) = 50/\sqrt{2025 - 54\omega^2 + \omega^4}$;
практически резонанс наблюдается на частоте $\omega = 3\sqrt{3}$.



18. $C(\omega) = 100/\sqrt{422500 - 1200\omega^2 + \omega^4}$;
практически резонанс наблюдается на частоте $\omega = 10\sqrt{6}$.



19. $\omega = \sqrt{384}$ радиан в секунду (приблизительно 3,12 Гц)
20. $\omega \approx 44{,}27$ радиан в секунду (приблизительно 7,05 Гц)
21. $\omega_0 = \sqrt{(g/L) + (k/m)}$
22. $\omega_0 = \sqrt{k/(m + I/a^2)}$
23. (a) Собственная частота: $\sqrt{10}$ радиан в секунду (приблизительно 0,50 Гц); (b) амплитуда: приблизительно 10,625 дюйма

Раздел 3.7

1. $I(t) = 4e^{-5t}$
2. $I(t) = 4(1 - e^{-5t})$
3. $I(t) = \frac{4}{145}(\cos 60t + 12\sin 60t - e^{-5t})$
4. $I(t) = 5(e^{-10t} - e^{-20t})$; $I_{\max} = I(\frac{1}{10}\ln 2) = 5/4$.
5. $I(t) = \frac{5}{6}e^{-10t}\sin 60t$

6. $I_{\text{sp}}(t) = \frac{1}{37}(-21\cos 60t + 22\sin 60t) = (5/\sqrt{37})\cos(60t - \alpha)$, где $\alpha = \pi - \operatorname{arctg}(22/21) \approx 2{,}3329$.

7. (a) $Q(t) = E_0C(1 - e^{-t/RC})$; $I(t) = (E_0/R)e^{-t/RC}$

8. (a) $Q(t) = 10te^{-5t}$; $I(t) = 10(1 - 5t)e^{-5t}$; (b) $Q_{\max} = Q(1/5) = 2e^{-1}$.

9. (a) $Q(t) = (\cos 120t + 6\sin 120t - e^{-20t})/1480$ $I(t) = (36\cos 120t - 6\sin 120t + e^{-20t})/74$ (b) $I_{\text{sp}} = \frac{6}{74}(6\cos 120t - \sin 120t) = \frac{3}{\sqrt{37}}\cos(120t - \alpha)$, где $\alpha = 2\pi - \operatorname{arctg}\frac{1}{6}$.

11. $I_{\text{sp}}(t) = \frac{10}{\sqrt{37}}\sin(2t - \delta)$, где $\delta = 2\pi - \operatorname{arctg}(1/6) \approx 6{,}1180$

12. $I_{\text{sp}}(t) = \frac{2}{\sqrt{17}}\sin(10t - \delta)$, где $\delta = 2\pi - \operatorname{arctg}(1/4) \approx 6{,}0382$

13. $I_{\text{sp}}(t) = \frac{20}{\sqrt{13}}\sin(5t - \delta)$, где $\delta = 2\pi - \operatorname{arctg}(2/3) \approx 5{,}6952$

14. $I_{\text{sp}}(t) \approx 0{,}9990\sin(100t - 0{,}8272)$

15. $I_{\text{sp}}(t) \approx 0{,}1591\sin(60\pi t - 4{,}8576)$

16. $I_{\text{sp}}(t) \approx 1{,}6125\sin(377t - 1{,}2282)$

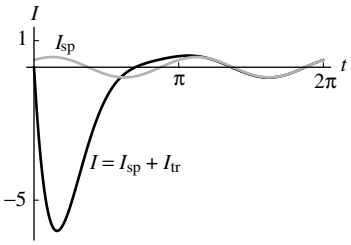
17. $I(t) = -25e^{-4t}\sin 3t$

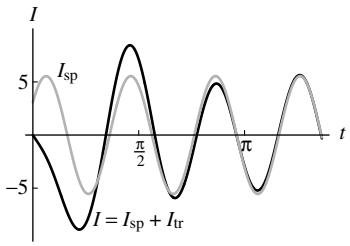
18. $I(t) = \frac{50}{171}(19e^{-10t} - 18e^{-20t} - e^{-t})$

19. $I(t) = 10e^{-20t} - 10e^{-10t} - 50te^{-10t}$

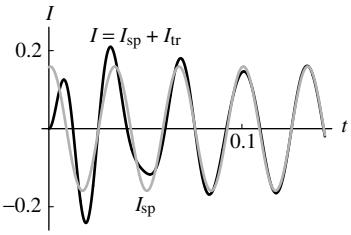
20. $I(t) = -\frac{10}{37\sqrt{11}}e^{-3t/2}(\sqrt{11}\cos t\sqrt{11}/2 + 27\sin t\sqrt{11}/2) + \frac{10}{37}(\cos 2t + 6\sin 2t)$

21. $I(t) = -\frac{10}{39}e^{-t}(12\cos 3t + 47\sin 3t) + \frac{20}{13}(2\cos 5t + 3\sin 5t)$





22. $I(t) \approx -e^{-25t}(0{,}1574\cos 25t\sqrt{159} + 0{,}0262\sin 25t\sqrt{159}) + (0{,}1574\cos 60\pi t + 0{,}0230\sin 60\pi t)$



Раздел 3.8

1. Только положительные собственные значения $\{n^2\pi^2/4\}$ и соответствующие собственные функции $\{\cos(n\pi x/2)\}$ для $n = 1, 3, 5, \ldots$.

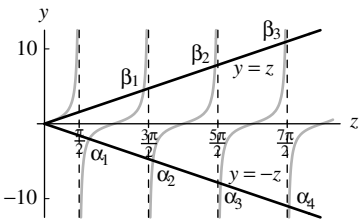
2. Собственное значение $\lambda_0 = 0$ с собственной функцией $y_0(x) \equiv 1$ и положительные собственные значения $\{n^2\}$ с соответствующими собственными функциями $\{\cos nx\}$ для $n = 1, 2, 3, \ldots$.

3. Только положительные собственные значения $\{n^2/4\}$ для $n = 1, 2, 3, \ldots$; n-я собственная функция $y_n(x)$ равна $\cos(nx/2)$, если n нечетное, $\sin(nx/2)$, если n четное.

4. Собственное значение $\lambda_0 = 0$ с собственной функцией $y_0(x) \equiv 1$ и положительные собственные значения $\{n^2/4\}$ для $n = 1, 2, 3, \ldots$; n-я собственная функция $y_n(x)$ равна $\sin(nx/2)$, если n нечетное, $\cos(nx/2)$, если n четное.

5. Только положительные собственные значения $\{n^2\pi^2/64\}$ для $n = 1, 2, 3, \ldots$; n-я собственная функция $y_n(x)$ равна $\cos(n\pi x/8) + \sin(n\pi x/8)$, если n нечетное, $\cos(n\pi x/8) - \sin(n\pi x/8)$, если n четное.

7–8. На приведенном ниже рисунке точки пересечения кривой $y = \operatorname{tg} z$ с линиями $y = \pm z$ помечены их координатами z. Мы видим, что α_n находится чуть правее от вертикальной прямой $z = (2n-1)\pi/2$, в то время как β_n находится чуть левее от прямой $z = (2n+1)\pi/2$.



Глава 4

Раздел 4.1

1. $x_1' = x_2,\ x_2' = -7x_1 - 3x_2 + t^2$

2. $x_1' = x_2,\ x_2' = x_3,\ x_3' = x_4,\ x_4' = -x_1 + 3x_2 - 6x_3 + \cos 3t$

3. $x_1' = x_2,\ t^2 x_2' = (1-t^2)x_1 - tx_2$

4. $x_1' = x_2,\ x_2' = x_3,\ t^3 x_3' = -5x_1 - 3tx_2 + 2t^2 x_3 + \ln t$

5. $x_1' = x_2,\ x_2' = x_3,\ x_3' = x_2^2 + \cos x_1$

6. $x_1' = x_2,\ x_2' = 5x_1 - 4y_1,\ y_1' = y_2,\ y_2' = -4x_1 + 5y_1$

7. $x_1' = x_2,\ y_1' = y_2,\ x_2' = -kx_1 \cdot (x_1^2 + y_1^2)^{-3/2},\ y_2' = -ky_1 \cdot (x_1^2 + y_1^2)^{-3/2}$

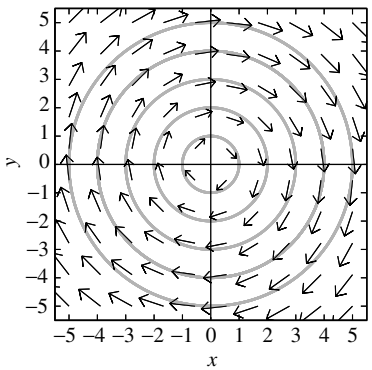
8. $x_1' = x_2,\ x_2' = -4x_1 + 2y_1 - 3x_2\ \ y_1' = y_2,\ y_2' = 3x_1 - y_1 - 2y_2 + \cos t$

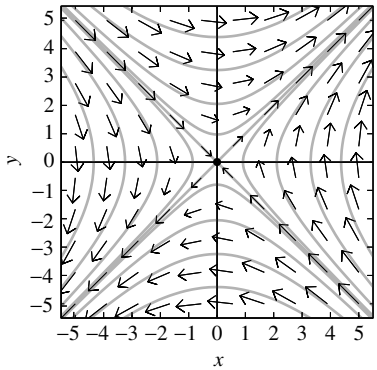
9. $x_1' = x_2,\ y_1' = y_2,\ z_1' = z_2,\ x_2' = 3x_1 - y_1 + 2z_1,\ y_2' = x_1 + y_1 - 4z_1,\ z_2' = 5x_1 - y_1 - z_1$

10. $x_1' = x_2,\ x_2' = x_1(1-y_1)\ \ y_1' = y_2,\ y_2' = y_1(1-x_1)$

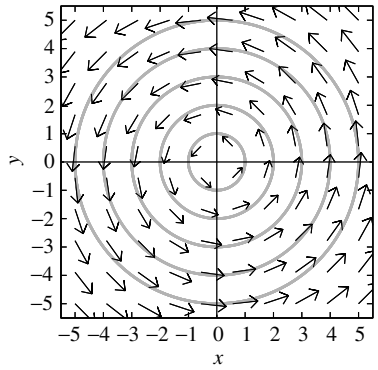
11. $x(t) = A\cos t + B\sin t,\ y(t) = B\cos t - A\sin t$

12. $x(t) = Ae^t + Be^{-t},\ y(t) = Ae^t - Be^{-t}$

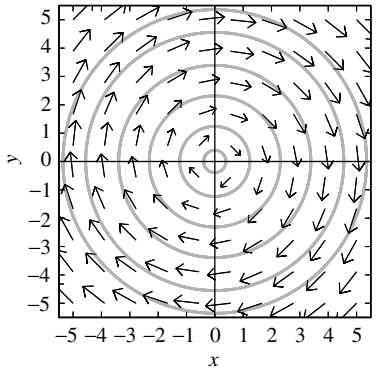




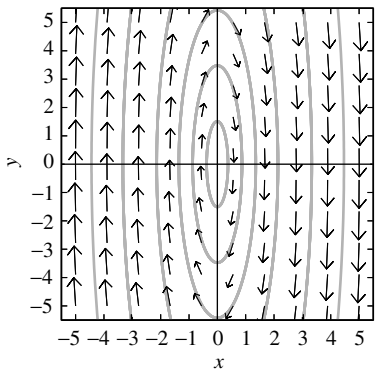
13. $x(t) = A\cos 2t + B\sin 2t$,
$y(t) = -B\cos 2t + A\sin 2t$;
$x(t) = \cos 2t$, $y(t) = \sin 2t$



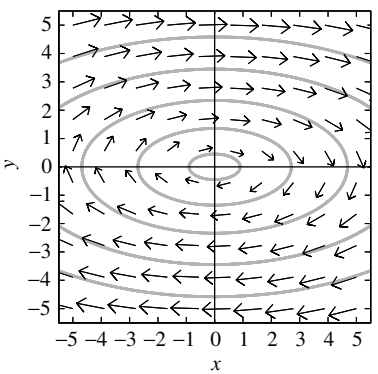
14. $x(t) = A\cos 10t + B\sin 10t$,
$y(t) = B\cos 10t - A\sin 10t$;
$x(t) = 3\cos 10t + 4\sin 10t$,
$y(t) = 4\cos 10t - 3\sin 10t$



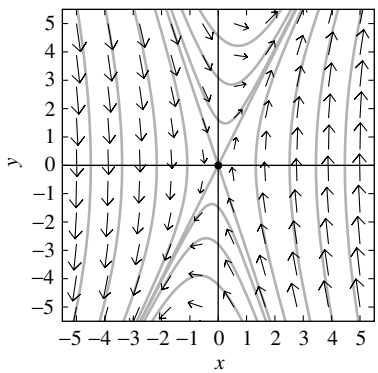
15. $x(t) = A\cos 2t + B\sin 2t$,
$y(t) = 4B\cos 2t - 4A\sin 2t$



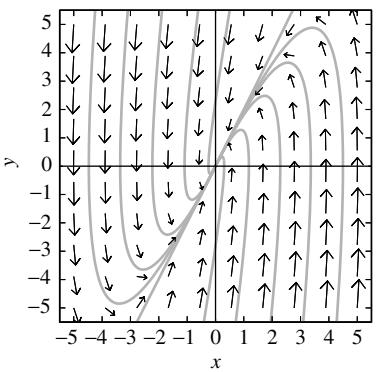
16. $x(t) = A\cos 4t + B\sin 4t$,
$y(t) = \frac{1}{2}B\cos 4t - \frac{1}{2}A\sin 4t$



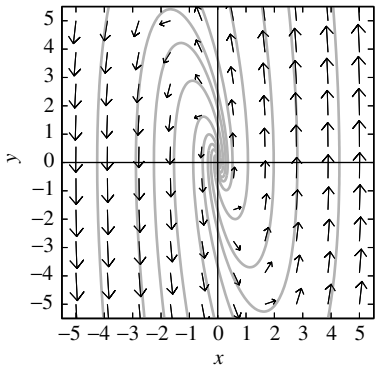
17. $x(t) = Ae^{-3t} + Be^{2t}$,
$y(t) = -3Ae^{-3t} + 2Be^{2t}$;
$x(t) = e^{2t}$, $y(t) = 2e^{2t}$



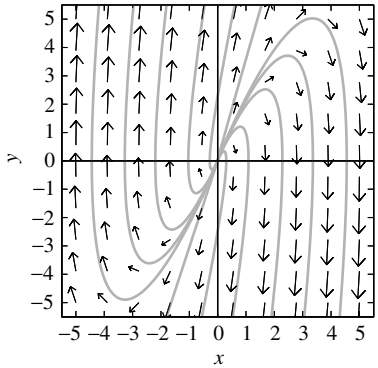
18. $x(t) = Ae^{-2t} + Be^{-5t}$,
$y(t) = 2Ae^{-2t} + 5Be^{-5t}$; $A = \frac{17}{3}$
и $B = -\frac{11}{3}$ в частном решении.



19. $x(t) = -e^{-2t}\sin 3t$,
$y(t) = e^{-2t}(3\cos 3t + 2\sin 3t)$



20. $x(t) = (A + Bt)e^{3t}$,
$y(t) = (3A + B + 3Bt)e^{3t}$

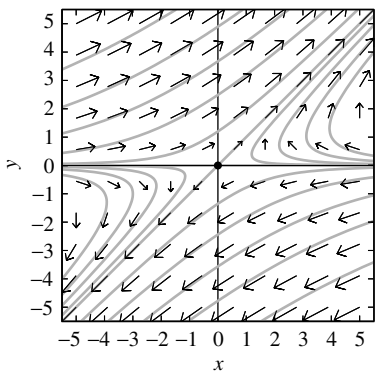


27. $2(I_1' - I_2') + 50I_1 = 100\sin 60t$, $2(I_2' - I_1') + 25I_2 = 0$

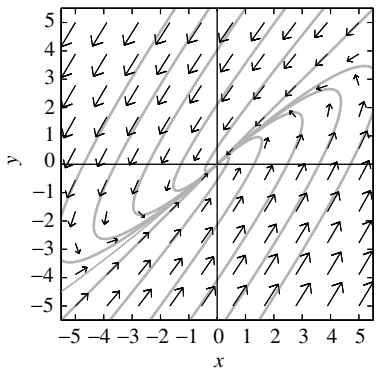
28. $I_1' = -20(I_1 - I_2)$, $I_2' = 40(I_1 - I_2)$

Раздел 4.2

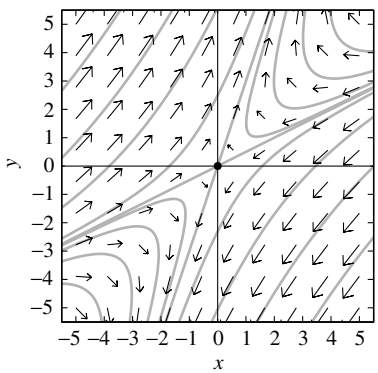
1. $x(t) = a_1e^{-t} + a_2e^{2t}$, $y(t) = a_2e^{2t}$



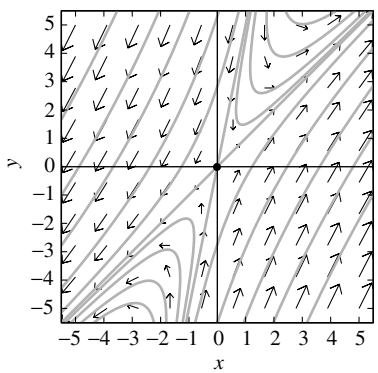
2. $x(t) = (c_1 + c_2t)e^{-t}$, $y(t) = (c_1 - \frac{1}{2}c_2 + c_2t)e^{-t}$



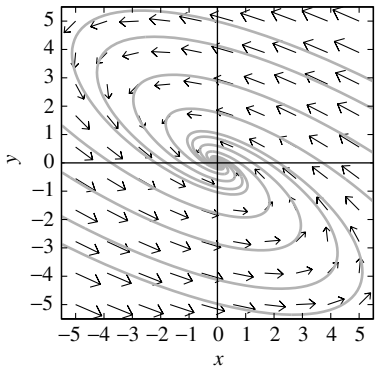
3. $x(t) = \frac{4}{5}(e^{3t} - e^{-2t})$, $y(t) = \frac{2}{5}(6e^{3t} - e^{-2t})$



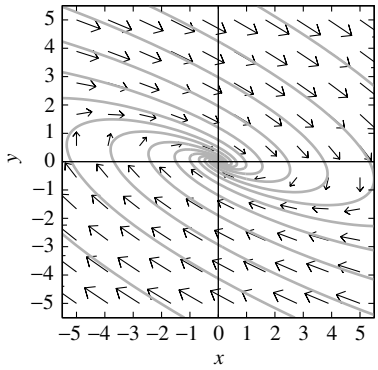
4. $x(t) = \frac{1}{2}(3e^{2t} - e^{-2t})$, $y(t) = \frac{1}{2}(3e^{2t} - 5e^{-2t})$



5. $x(t) = e^{-t}(a_1 \cos 2t + a_2 \sin 2t)$, $y(t) = -$
$-\frac{1}{2}e^{-t}\left[(a_1 + a_2)\cos 2t + (a_2 - a_1)\sin 2t\right]$



6. $x(t) = e^{-2t}(3\cos 3t + 9\sin 3t)$,
$y(t) = e^{-2t}(2\cos 3t - 4\sin 3t)$



7. $x(t) = a_1 e^{2t} + a_2 e^{3t} - \frac{1}{3}t + \frac{1}{18}$, $y(t) = -2a_1 e^{2t} - a_2 e^{3t} - \frac{2}{3}t - \frac{5}{9}$

8. $x(t) = c_1 e^t + c_2 e^{3t} + e^{2t}$, $y(t) = -c_1 e^t + c_2 e^{3t}$

9. $x(t) = 3a_1 e^t + a_2 e^{-t} - \frac{1}{5}(7\cos 2t + 4\sin 2t)$, $y(t) = a_1 e^t + a_2 e^{-t} - \frac{1}{5}(2\cos 2t + 4\sin 2t)$

10. $x(t) = e^t$, $y(t) = -e^t$

11. $x(t) = a_1 \cos 3t + a_2 \sin 3t - \frac{11}{20}e^t - \frac{1}{4}e^{-t}$, $y(t) = \frac{1}{3}\left[(a_1 - a_2)\cos 3t + (a_1 + a_2)\sin 3t\right] + \frac{1}{10}e^t$

12. $x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} + c_3 e^{3t} + c_4 e^{-3t}$, $y(t) = -c_1 e^{2t} - c_2 e^{-2t} + \frac{3}{2}c_3 e^{3t} + \frac{3}{2}c_4 e^{-3t}$

13. $x(t) = a_1 \cos 2t + a_2 \sin 2t + b_1 \cos 3t + b_2 \sin 3t$, $y(t) = \frac{1}{2}(a_1 \cos 2t + a_2 \sin 2t) - 2(b_1 \cos 3t + b_2 \sin 3t)$

14. $x(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + \frac{1}{3}\sin t$, $y(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + c_3 \cos 2t\sqrt{2} + \ c_4 \sin 2t\sqrt{2} + \frac{4}{21}\sin t$

15. $x(t) = a_1 \cos t + a_2 \sin t + b_1 \cos 2t + b_2 \sin 2t$, $y(t) = a_2 \cos t - a_1 \sin t + b_2 \cos 2t - b_1 \sin 2t$

17. $x(t) = a_1 \cos t + a_2 \sin t + b_1 e^{2t} + b_2 e^{-2t}$, $y(t) = 3a_2 \cos t - 3a_1 \sin t + b_1 e^{2t} - b_2 e^{-2t}$

18. $x(t) = \frac{1}{6}(4c_1 e^{3t} - 3c_2 e^{-4t})$, $y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-4t}$, $z(t) = \frac{1}{6}(-4c_1 e^{3t} + 3c_2 e^{-4t})$

19. $x(t) = a_1 + a_2 e^{4t} + a_3 e^{8t}$, $y(t) = 2a_1 - 2a_3 e^{8t}$, $z(t) = 2a_1 - 2a_2 e^{4t} + 2a_3 e^{8t}$

20. $x(t) = a_1 e^{2t} + a_2 e^{-t} + \frac{2}{3}te^{-t}$, $y(t) = a_1 e^{2t} + b_2 e^{-t} - \frac{1}{3}te^{-t}$, $z(t) = a_1 e^{2t} - \left(a_2 + b_2 + \frac{1}{3}\right)e^{-t} - \frac{1}{3}te^{-t}$

23. Бесконечно много решений

24. Ни одного решения

25. Бесконечно много решений

26. Две произвольные постоянные

27. Нет произвольных постоянных

28. Ни одного решения

29. Четыре произвольные постоянные

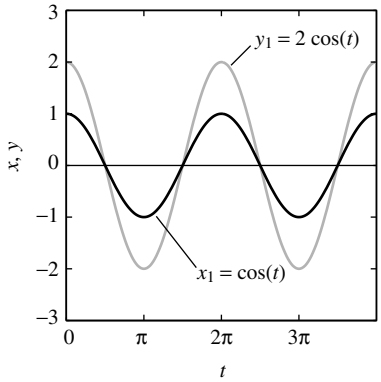
31. $I_1(t) = 2 + e^{-5t}\left[-2\cos\left(10t/\sqrt{6}\right) + 4\sqrt{6}\sin\left(10t/\sqrt{6}\right)\right]$, $I_2(t) = \left(20/\sqrt{6}\right)e^{-5t}\sin\left(10t/\sqrt{6}\right)$

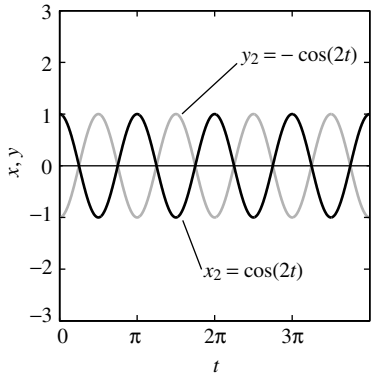
32. $I_1(t) = \frac{1}{1321}(120e^{-25t/3} - 120\cos 60t + 1778\sin 60t)$, $I_2(t) = \frac{1}{1321}(-240e^{-25t/3} + 240\cos 60t + + 1728\sin 60t)$

33. $I_1(t) = \frac{2}{3}(2 + e^{-60t})$, $I_2(t) = \frac{4}{3}(1 - e^{-60t})$

37. (a) $x(t) = a_1 \cos 5t + a_2 \sin 5t + b_1 \cos 5t\sqrt{3} + b_2 \sin 5t\sqrt{3}$, $y(t) = 2a_1 \cos 5t + 2a_2 \sin 5t - 2b_1 \cos 5t\sqrt{3} - - 2b_2 \sin 5t\sqrt{3}$; (b) В собственной моде с частотой $\omega_1 = 5$ массы двигаются в том же самом направлении, тогда как в собственной моде с частотой $\omega_2 = 5\sqrt{3}$ они двигаются в противоположных направлениях. В каждом случае амплитуда движения тела массой m_2 вдвое больше амплитуды тела массой m_1.

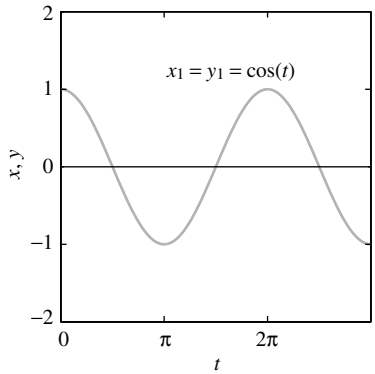
39. $x(t) = a_1 \cos t + a_2 \sin t + b_1 \cos 2t + b_2 \sin 2t$,
$y(t) = 2a_1 \cos t + 2a_2 \sin t - b_1 \cos 2t - b_2 \sin 2t$.
В собственной моде с частотой $\omega_1 = 1$ массы двигаются в том же самом направлении, причем амплитуда движения второй материальной точки вдвое больше амплитуды первой материальной точки. В собственной моде с частотой $\omega_2 = 2$ они двигаются в противоположных направлениях с той же самой амплитудой движения.

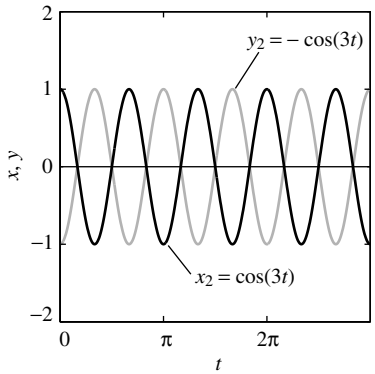




40. $x(t) = a_1 \cos 5t + a_2 \sin 5t + b_1 \cos 10t + b_2 \sin 10t$,
$y(t) = 2a_1 \cos 5t + 2a_2 \sin 5t - b_1 \cos 10t - b_2 \sin 10t$.

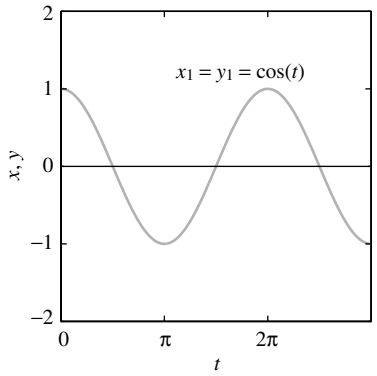
41. $x(t) = a_1 \cos t + a_2 \sin t + b_1 \cos 3t + b_2 \sin 3t$, $y(t) = a_1 \cos t + a_2 \sin t - b_1 \cos 3t - b_2 \sin 3t$.
В собственной моде с частотой $\omega_1 = 1$ массы двигаются в том же самом направлении, в то время как в собственной моде с частотой $\omega_2 = 3$ они двигаются в противоположных направлениях. В каждом случае амплитуды движения этих двух масс равны.

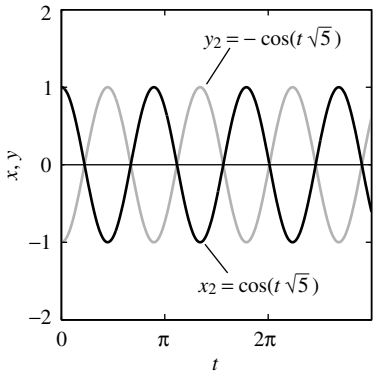




42. $x(t) = a_1 \cos t + a_2 \sin t + b_1 \cos 2t + b_2 \sin 2t$,
$y(t) = a_1 \cos t + a_2 \sin t - \frac{1}{2} b_1 \cos 2t - \frac{1}{2} b_2 \sin 2t$.

43. $x(t) = a_1 \cos t + a_2 \sin t + b_1 \cos t\sqrt{5} + b_2 \sin t\sqrt{5}$,
$y(t) = a_1 \cos t + a_2 \sin t - b_1 \cos t\sqrt{5} - b_2 \sin t\sqrt{5}$.
В собственной моде с частотой $\omega_1 = 1$ массы двигаются в том же самом направлении, в то время как в собственной моде с частотой $\omega_2 = \sqrt{5}$ они двигаются в противоположных направлениях. В каждом случае амплитуды движения этих двух масс равны.

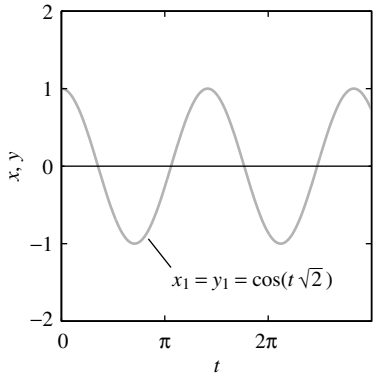


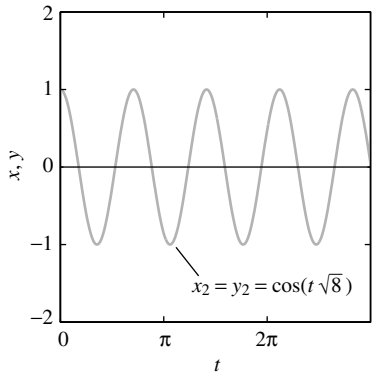


44. $x(t) = a_1 \cos t\sqrt{2} + a_2 \sin t\sqrt{2} + b_1 \cos 2t + b_2 \sin 2t$,
$y(t) = a_1 \cos t\sqrt{2} + a_2 \sin t\sqrt{2} - b_1 \cos 2t - b_2 \sin 2t$.

45. $x(t) = a_1 \cos t\sqrt{2} + a_2 \sin t\sqrt{2} + b_1 \cos t\sqrt{8} + b_2 \sin t\sqrt{8}$,
$y(t) = a_1 \cos t\sqrt{2} + a_2 \sin t\sqrt{2} - \frac{1}{2}b_1 \cos t\sqrt{8} - \frac{1}{2}b_2 \sin t\sqrt{8}$.

В собственной моде с частотой $\omega_1 = \sqrt{2}$ эти две материальные точки заданных масс двигаются в том же самом направлении с равными амплитудами колебания. В собственной моде с частотой $\omega_2 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ эти две материальные точки заданных масс двигаются в противоположных направлениях, причем амплитудаm_2 равна половине амплитуды m_1.





46. $x(t) = a_1 \cos 2t + a_2 \sin 2t + b_1 \cos 4t + b_2 \sin 4t$,
$y(t) = a_1 \cos 2t + a_2 \sin 2t - b_1 \cos 4t - b_2 \sin 4t$.

Раздел 4.3

Формат для первых восьми ответов следующий: $(x(t), y(t))$ в точке $t = 0{,}2$, причем для вычисления применяется метод Эйлера, усовершенствованный метод Эйлера, метод Рунге–Кутта, а в самом конце приводятся фактические значения.

1. $(0{,}8800, 2{,}5000)$, $(0{,}9600, 2{,}6000)$, $(1{,}0027, 2{,}6401)$, $(1{,}0034, 2{,}6408)$
2. $(0{,}8100, -0{,}8100)$, $(0{,}8200, -0{,}8200)$, $(0{,}8187, -0{,}8187)$, $(0{,}8187, -0{,}8187)$
3. $(2{,}8100, 2{,}3100)$, $(3{,}2200, 2{,}6200)$, $(3{,}6481, 2{,}9407)$, $(3{,}6775, 2{,}9628)$
4. $(3{,}3100, -1{,}6200)$, $(3{,}8200, -2{,}0400)$, $(4{,}2274, -2{,}4060)$, $(4{,}2427, -2{,}4205)$
5. $(-0{,}5200, 2{,}9200)$, $(-0{,}8400, 2{,}4400)$, $(-0{,}5712, 2{,}4485)$, $(-0{,}5793, 2{,}4488)$
6. $(-1{,}7600, 4{,}6800)$, $(-1{,}9200, 4{,}5600)$, $(-1{,}9029, 4{,}4995)$, $(-1{,}9025, 4{,}4999)$
7. $(3{,}1200, 1{,}6800)$, $(3{,}2400, 1{,}7600)$, $(3{,}2816, 1{,}7899)$, $(3{,}2820, 1{,}7902)$
8. $(2{,}1600, -0{,}6300)$, $(2{,}5200, -0{,}4600)$, $(2{,}5320, -0{,}3867)$, $(2{,}5270, -0{,}3889)$
9. При $t = 1$ мы получаем $(x, y) = (3{,}99261, 6{,}21770)$ $(h = 0{,}1)$ и $(3{,}99234, 6{,}21768)$ $(h = 0{,}05)$; фактическое значение равно $(3{,}99232, 6{,}21768)$.

10. При $t = 1$ мы получаем $(x, y) = (1{,}31498, 1{,}02537)$ ($h = 0{,}1$) и $(1{,}31501, 1{,}02538)$ ($h = 0{,}05$); фактическое значение равно $(1{,}31501, 1{,}02538)$.

11. При $t = 1$ мы получаем $(x, y) = (-0{,}05832, 0{,}56664)$ ($h = 0{,}1$) и $(-0{,}05832, 0{,}56665)$ ($h = 0{,}05$); фактическое значение равно $(-0{,}05832, 0{,}56665)$.

12. Мы решили уравнение $x' = y$, $y' = -x + \sin t$, $x(0) = y(0) = 0$. При $h = 0{,}1$ и также при $h = 0{,}05$ мы получаем фактическое значение $x(1{,}0) \approx 0{,}15058$.

13. Рунге–Кутта, $h = 0{,}1$: приблизительно 1050 футов приблизительно за 7,7 секунды

14. Рунге–Кутта, $h = 0{,}1$: приблизительно 1044 фута приблизительно за 7,8 секунды

15. Рунге–Кутта, $h = 1{,}0$: приблизительно 83,83 мили приблизительно за 168 секунд

16. При $40°$: 5,0 с, 352,9 фута; при $45°$: 5,4 с, 347,2 фута; при $50°$: 5,8 с, 334,2 фута (все значения приближенные)

17. При $39{,}0°$ дальность полета приблизительно равна 352,7 фута. При $39{,}5°$ она составляет 352,8; при $40° - 352{,}9$; при $40{,}5° - 352{,}6$; при $41{,}0° - 352{,}1$.

18. Чуть меньше $57{,}5°$

19. Приблизительно 253 футов в секунду

20. Максимальная высота: приблизительно 1005 футов, достигается приблизительно за 5,6 с; дальность полета: приблизительно 1880 футов; время движения вверх: приблизительно 11,6 с

21. Метод Рунге–Кутта при $h = 0{,}1$ дает следующие результаты: (a) 21400 футов, 46 с, 518 футов в секунду; (b) 8970 футов, 17,5 с; (c) 368 футов в секунду (при $t \approx 23$).

Глава 5

Раздел 5.1

1. (a) $\begin{bmatrix} 13 & -18 \\ 23 & 17 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 19 \end{bmatrix}$; (c) $\begin{bmatrix} -9 & -11 \\ 47 & -9 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} -10 & -37 \\ 14 & -8 \end{bmatrix}$

2. $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) = \begin{bmatrix} -33 & -7 \\ -27 & 103 \end{bmatrix}$; $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC} = \begin{bmatrix} -18 & -4 \\ 68 & -8 \end{bmatrix}$

3. $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 46 & -1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 11 & -12 & 14 \\ -14 & 0 & 7 \\ 0 & 8 & -13 \end{bmatrix}$

4. $\mathbf{Ay} = \begin{bmatrix} 2t^2 - \cos t \\ 3t^2 - 4\sin t + 5\cos t \end{bmatrix}$, $\mathbf{Bx} = \begin{bmatrix} 2t + 3e^{-t} \\ -14t \\ 6t - 2e^{-t} \end{bmatrix}$

5. (a) $\begin{bmatrix} 21 & 2 & 1 \\ 4 & 44 & 9 \\ -27 & 34 & 45 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 9 & 21 & -13 \\ -5 & -8 & 24 \\ -25 & -19 & 26 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 10 & 31 & -15 \\ 16 & 58 & -23 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} -10 & -8 & 5 \\ 18 & 12 & -10 \\ 11 & 22 & 6 \end{bmatrix}$;

(e) $\begin{bmatrix} 3-t & 2 & -1 \\ 0 & 4-t & 3 \\ -5 & 2 & 7-t \end{bmatrix}$

7. $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B}) = 0$

8. $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{BA}) = 144$

9. $(\mathbf{AB})' = \begin{bmatrix} 1 - 8t + 18t^2 & 1 + 2t - 12t^2 + 32t^3 \\ 3 + 3t^2 - 4t^3 & 8t + 3t^2 + 4t^3 \end{bmatrix}$

11. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

13. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{f}\,(t) = \begin{bmatrix} 3e^t \\ -t^2 \end{bmatrix}$

15. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

17. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}$

19. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

21. $W(t) = e^{3t}$; $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 2c_1e^t + c_2e^{2t} \\ -3c_1e^t - c_2e^{2t} \end{bmatrix}$

22. $W(t) = -5e^{3t}$; $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} c_1e^{3t} + 2c_2e^{-2t} \\ 3c_1e^{3t} + c_2e^{-2t} \end{bmatrix}$

23. $W(t) \equiv 4$; $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} \\ c_1e^{2t} + 5c_2e^{-2t} \end{bmatrix}$

24. $W(t) = e^{5t}$; $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} c_1e^{3t} + c_2e^{2t} \\ -c_1e^{3t} - 2c_2e^{2t} \end{bmatrix}$

25. $W(t) = 7e^{-3t}$; $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 3c_1e^{2t} + c_2e^{-5t} \\ 2c_1e^{2t} + 3c_2e^{-5t} \end{bmatrix}$

26. $W(t) = 16e^{9t}$; $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 2c_1e^t - 2c_2e^{3t} + 2c_3e^{5t} \\ 2c_1e^t - 2c_3e^{5t} \\ c_1e^t + c_2e^{3t} + c_3e^{5t} \end{bmatrix}$

27. $W(t) \equiv 3$; $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} c_1e^{2t} + c_2e^{-t} \\ c_1e^{2t} + c_3e^{-t} \\ c_1e^{2t} - (c_2 + c_3)e^{-t} \end{bmatrix}$

28. $W(t) = -84e^{7t}$; $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} c_1 + 2c_2e^{3t} - c_3e^{4t} \\ 6c_1 + 3c_2e^{3t} + 2c_3e^{4t} \\ -13c_1 - 2c_2e^{3t} + c_3e^{4t} \end{bmatrix}$

29. $W(t) = e^{2t}$; $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 3c_1e^{-2t} + c_2e^t + c_3e^{3t} \\ -2c_1e^{-2t} - c_2e^t - c_3e^{3t} \\ 2c_1e^{-2t} + c_2e^t \end{bmatrix}$

30. $W(t) = 1$; $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} c_1e^{-t} + c_4e^t \\ c_3e^t \\ c_2e^{-t} + 3c_4e^t \\ c_1e^{-t} - 2c_3e^t \end{bmatrix}$

31. $\mathbf{x} = 2\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$

32. $\mathbf{x} = 7\mathbf{x}_1 - 2\mathbf{x}_2$

33. $\mathbf{x} = 15\mathbf{x}_1 - 4\mathbf{x}_2$

34. $\mathbf{x} = \frac{8}{7}(3\mathbf{x}_1 - 2\mathbf{x}_2)$

35. $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3$

36. $\mathbf{x} = 7\mathbf{x}_1 + 3\mathbf{x}_2 + 5\mathbf{x}_3$

37. $\mathbf{x} = 3\mathbf{x}_1 - 3\mathbf{x}_2 - 5\mathbf{x}_3$

38. $\mathbf{x} = -2\mathbf{x}_1 + 15\mathbf{x}_2 - 4\mathbf{x}_3$

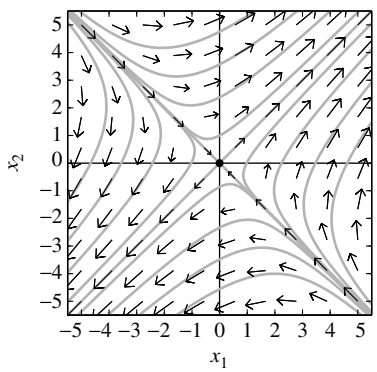
39. $\mathbf{x} = 3\mathbf{x}_1 + 7\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 - 2\mathbf{x}_4$

40. $\mathbf{x} = 13\mathbf{x}_1 + 41\mathbf{x}_2 + 3\mathbf{x}_3 - 12\mathbf{x}_4$

41. (a) $\mathbf{x}_2 = t\mathbf{x}_1$, так что ни одно не равно постоянному числу, умноженному на другое. (b) $W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \equiv 0$, тогда как из теоремы 2 следовало бы что $W \neq 0$, если бы $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ были независимыми решениями системы указанного вида.

Раздел 5.2

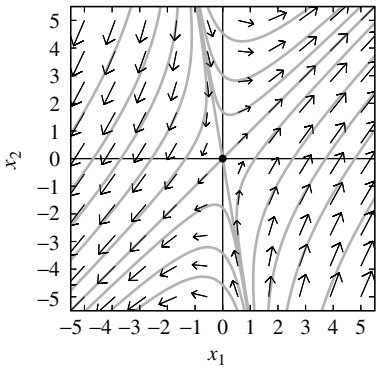
1. $x_1(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{3t}$, $x_2(t) = -c_1e^{-t} + c_2e^{3t}$



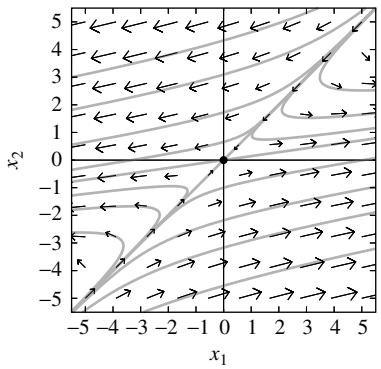
2. $x_1(t) = c_1e^{-t} + 3c_2e^{4t}$, $x_2(t) = -c_1e^{-t} + 2c_2e^{4t}$

3. Общее решение $x_1(t) = c_1e^{-t} + 4c_2e^{6t}$, $x_2(t) = -c_1e^{-t} + 3c_2e^{6t}$
Частное решение $x_1(t) = \frac{1}{7}(-e^{-t} + 8e^{6t})$, $x_2(t) = \frac{1}{7}(e^{-t} + 6e^{6t})$.

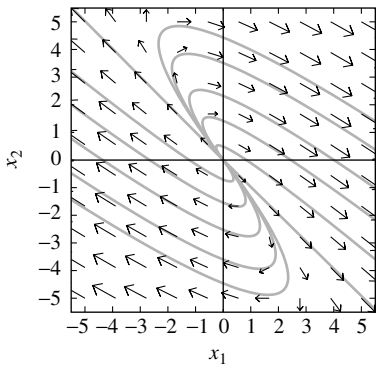
4. $x_1(t) = c_1e^{-2t} + c_2e^{5t}$,
$x_2(t) = -6c_1e^{-2t} + c_2e^{5t}$



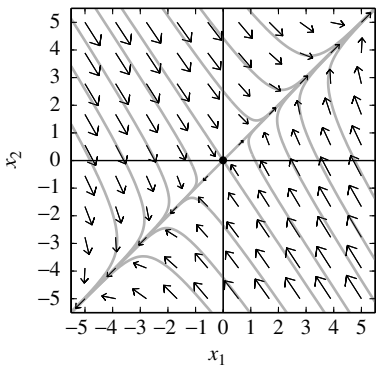
5. $x_1(t) = c_1e^{-t} + 7c_2e^{5t}$,
$x_2(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{5t}$



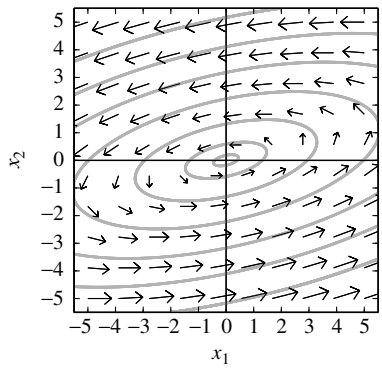
6. Общее решение $x_1(t) = 5c_1e^{3t} + c_2e^{4t}$,
$x_2(t) = -6c_1e^{3t} - c_2e^{4t}$
Частное решение $x_1(t) = -5e^{3t} + 6e^{4t}$,
$x_2(t) = 6e^{3t} - 6e^{4t}$.



7. $x_1(t) = c_1e^{t} + 2c_2e^{-9t}$,
$x_2(t) = c_1e^{t} - 3c_2e^{-9t}$



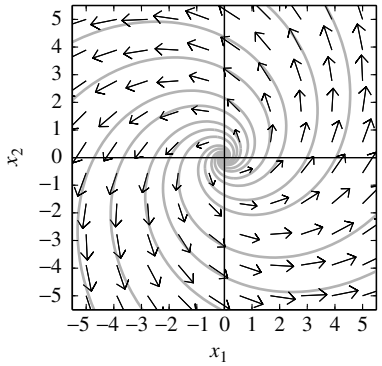
8. $x_1(t) = 5c_1\cos 2t + 5c_2\sin 2t$, $x_2(t) = (c_1 - 2c_2)\cos 2t + (2c_1 + c_2)\sin 2t$



9. Общее решение $x_1(t) = 5c_1\cos 4t + 5c_2\sin 4t$, $x_2(t) = c_1(2\cos 4t + 4\sin 4t) + c_2(2\sin 4t - 4\cos 4t)$.
Частное решение $x_1(t) = 2\cos 4t - \frac{11}{4}\sin 4t$, $x_2(t) = 3\cos 4t + \frac{1}{2}\sin 4t$

10. $x_1(t) = -2c_1 \cos 3t - 2c_2 \sin 3t$, $x_2(t) = (3c_1 + 3c_2)\cos 3t + (3c_2 - 3c_1)\sin 3t$

11. Общее решение $x_1(t) = e^t(c_1 \cos 2t - c_2 \sin 2t)$, $x_2(t) = e^t(c_1 \sin 2t + c_2 \cos 2t)$
Частное решение $x_1(t) = -4e^t \sin 2t$, $x_2(t) = 4e^t \cos 2t$



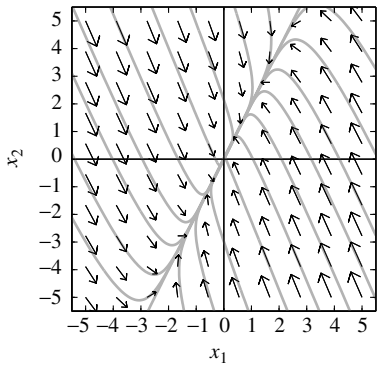
12. $x_1(t) = e^{2t}(-5c_1 \cos 2t - 5c_2 \sin 2t)$, $x_2(t) = e^{2t}[(c_1 + 2c_2)\cos 2t + (-2c_1 + c_2)\sin 2t]$

13. $x_1(t) = 3e^{2t}(c_1 \cos 3t - c_2 \sin 3t)$, $x_2(t) = e^{2t}[(c_1 + c_2)\cos 3t + (c_1 - c_2)\sin 3t]$

14. $x_1(t) = e^{3t}(c_1 \cos 4t + c_2 \sin 4t)$, $x_2(t) = e^{3t}(c_1 \sin 4t - c_2 \cos 4t)$

15. $x_1(t) = 5e^{5t}(c_1 \cos 4t - c_2 \sin 4t)$, $x_2(t) = e^{5t}[(2c_1 + 4c_2)\cos 4t + (4c_1 - 2c_2)\sin 4t]$

16. $x_1(t) = c_1 e^{-10t} + 2c_2 e^{-100t}$, $x_2(t) = 2c_1 e^{-10t} - 5c_2 e^{-100t}$



17. $x_1(t) = c_1 e^{9t} + c_2 e^{6t} + c_3$,
$x_2(t) = c_1 e^{9t} - 2c_2 e^{6t}$,
$x_3(t) = c_1 e^{9t} + c_2 e^{6t} - c_3$

18. $x_1(t) = c_1 e^{9t} + 4c_3$,
$x_2(t) = 2c_1 e^{9t} + c_2 e^{6t} - c_3$,
$x_3(t) = 2c_1 e^{9t} - c_2 e^{6t} - c_3$

19. $x_1(t) = c_1 e^{6t} + c_2 e^{3t} + c_3 e^{3t}$,
$x_2(t) = c_1 e^{6t} - 2c_2 e^{3t}$,
$x_3(t) = c_1 e^{6t} + c_2 e^{3t} - c_3 e^{3t}$

20. $x_1(t) = c_1 e^{9t} + c_2 e^{6t} + c_3 e^{2t}$,
$x_2(t) = c_1 e^{9t} - 2c_2 e^{6t}$,
$x_3(t) = c_1 e^{9t} + c_2 e^{6t} - c_3 e^{2t}$

21. $x_1(t) = 6c_1 + 3c_2 e^t + 2c_3 e^{-t}$,
$x_2(t) = 2c_1 + c_2 e^t + c_3 e^{-t}$,
$x_3(t) = 5c_1 + 2c_2 e^t + 2c_3 e^{-t}$

22. $x_1(t) = c_2 e^t + c_3 e^{3t}$,
$x_2(t) = c_1 e^{-2t} - c_2 e^t - c_3 e^{3t}$,
$x_3(t) = -c_1 e^{-2t} + c_3 e^{3t}$

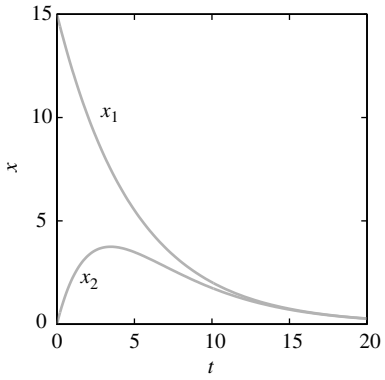
23. $x_1(t) = c_1 e^{2t} + c_3 e^{3t}$,
$x_2(t) = -c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} - c_3 e^{3t}$,
$x_3(t) = -c_2 e^{-2t} + c_3 e^{3t}$

24. $x_1(t) = c_1 e^t + c_2(2\cos 2t - \sin 2t) + c_3(\cos 2t + 2\sin 2t)$
$x_2(t) = -c_1 e^t - c_2(3\cos 2t + \sin 2t) + c_3(\cos 2t - 3\sin 2t)$
$x_3(t) = c_2(3\cos 2t + \sin 2t) + c_3(3\sin 2t - \cos 2t)$

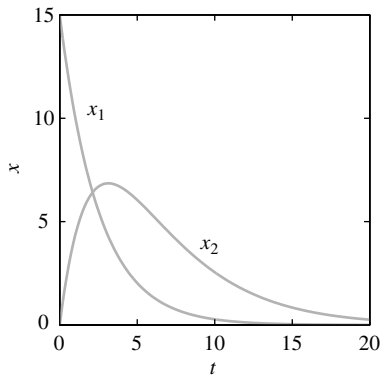
25. $x_1(t) = c_1 + e^{2t}[(c_2 + c_3)\cos 3t + (-c_2 + c_3)\sin 3t]$,
$x_2(t) = -c_1 + 2e^{2t}(-c_2 \cos 3t - c_3 \sin 3t)$,
$x_3(t) = 2e^{2t}(c_2 \cos 3t + c_3 \sin 3t)$

26. $x_1(t) = 4e^{3t} - e^{-t}(4\cos t - \sin t)$,
$x_2(t) = 9e^{3t} - e^{-t}(9\cos t + 2\sin t)$,
$x_3(t) = 17e^{-t}\cos t$

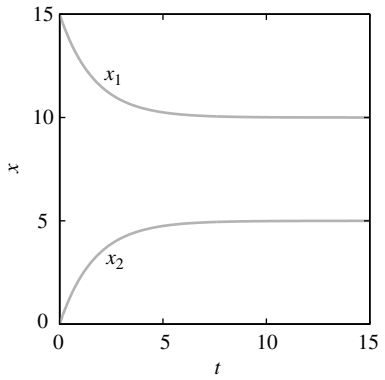
27. $x_1(t) = 15e^{-0,2t}$, $x_2(t) = 15(e^{-0,2t} - e^{-0,4t})$. Максимальное количество в резервуаре 2 равно $x_2(5\ln 2) = 3,75$ фунта.



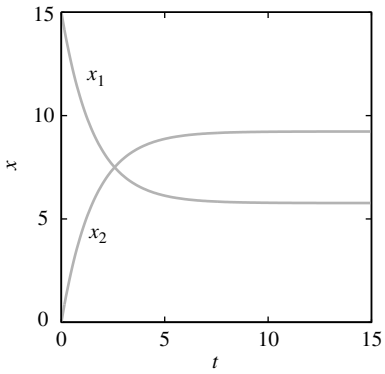
28. $x_1(t) = 15e^{-0,4t}$,
$x_2(t) = 40(-e^{-0,4t} + e^{-0,25t})$.
Максимальное количество в резервуаре 2 приблизительно равно 6,85 фунта.



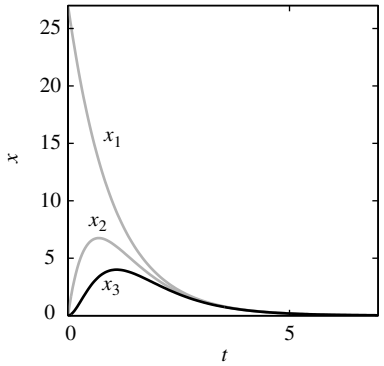
29. $x_1(t) = 10 + 5e^{-0,6t}$,
$x_2(t) = 5 - 5e^{-0,6t}$



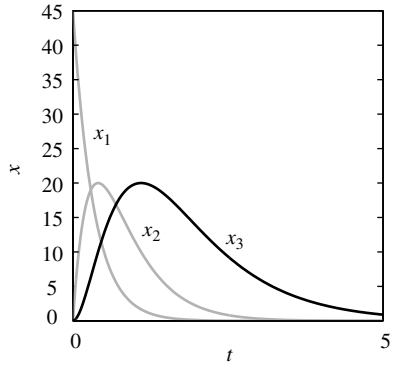
30. $x_1(t) = 5c_1 + c_2e^{-0,65t}$,
$x_2(t) = 8c_1 - c_2e^{-0,65t}$.



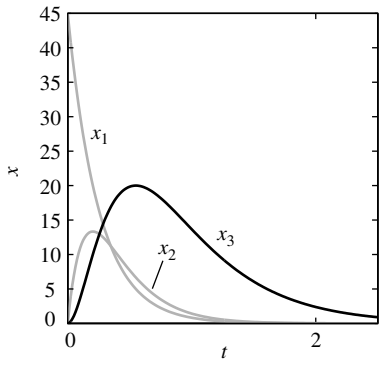
31. $x_1(t) = 27e^{-t}$,
$x_2(t) = 27e^{-t} - 27e^{-2t}$,
$x_3(t) = 27e^{-t} - 54e^{-2t} + 27e^{-3t}$.
Максимальное количество соли в резервуаре 3 равно $x_3(\ln 3) = 4$ фунта.



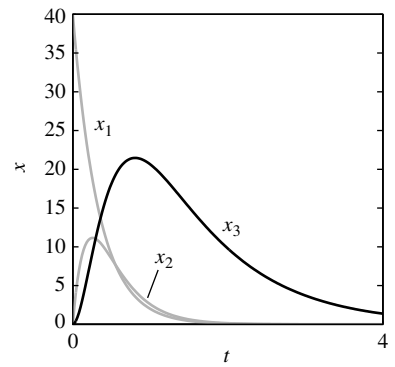
32. $x_1(t) = 45e^{-3t}$,
$x_2(t) = -135e^{-3t} + 135e^{-2t}$,
$x_3(t) = 135e^{-3t} - 270e^{-2t} + 135e^{-t}$.
Максимальное количество соли в резервуаре 3 равно $x_3(\ln 3) = 20$ фунтов.



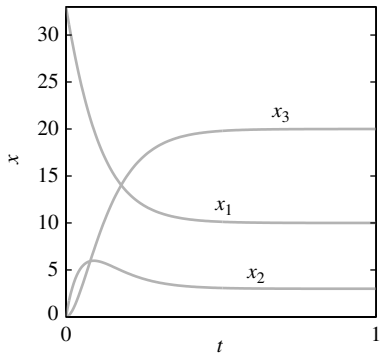
33. $x_1(t) = 45e^{-4t}$,
$x_2(t) = 90e^{-4t} - 90e^{-6t}$,
$x_3(t) = -270e^{-4t} + 135e^{-6t} + 135e^{-2t}$.
Максимальное количество соли в резервуаре 3 равно $x_3\left(\frac{1}{2}\ln 3\right) = 20$ фунтов.



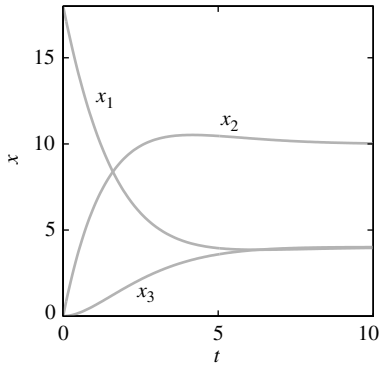
34. $x_1(t) = 40e^{-3t}$,
$x_2(t) = 60e^{-3t} - 60e^{-5t}$,
$x_3(t) = -150e^{-3t} + 75e^{-5t} + 75e^{-t}$.
Максимальное количество соли в резервуаре 3 равно $x_3(\frac{1}{2}\ln 5) \approx 21{,}4663$ фунта.



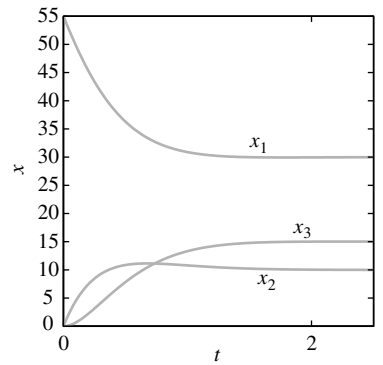
35. $x_1(t) = 10 - \frac{1}{7}\left(55e^{-18t} - 216e^{-11t}\right)$,
$x_2(t) = 3 - \frac{1}{7}\left(165e^{-18t} - 144e^{-11t}\right)$,
$x_3(t) = 20 + \frac{1}{7}\left(220e^{-18t} - 360e^{-11t}\right)$.
Предельные количества соли в резервуарах 1, 2 и 3 соответственно равны 10 фунтов, 3 фунта и 20 фунтов.



36. $x_1(t) = 4 + e^{-3t/5}[14\cos(3t/10) - 2\sin(3t/10)]$,
$x_2(t) = 10 - e^{-3t/5}[10\cos(3t/10) - 10\sin(3t/10)]$,
$x_3(t) = 4 - e^{-3t/5}[4\cos(3t/10) + 8\sin(3t/10)]$.
Предельные количества соли в резервуарах 1, 2 и 3 соответственно равны 4 фунта, 10 фунтов и 4 фунта.



37. $x_1(t) = 30 + e^{-3t}[25\cos(t\sqrt{2}) + 10\sqrt{2}\sin(t\sqrt{2})]$,
$x_2(t) = 10 - e^{-3t}[10\cos(t\sqrt{2}) - \frac{25}{2}\sqrt{2}\sin(t\sqrt{2})]$,
$x_3(t) = 15 - e^{-3t}[15\cos(t\sqrt{2}) + \frac{45}{2}\sqrt{2}\sin(t\sqrt{2})]$.
Предельные количества соли в резервуарах 1, 2 и 3 соответственно равны 30 фунтов, 10 фунтов и 15 фунтов.



38. $x_1(t) = c_1e^t$,
$x_2(t) = -2c_1e^t + c_2e^{2t}$,
$x_3(t) = 3c_1e^t - 3c_2e^{2t} + c_3e^{3t}$,
$x_4(t) = -4c_1e^t + 6c_2e^{2t} - 4c_3e^{3t} + c_4e^{4t}$

39. $x_1(t) = 3c_1e^t + c_4e^{-2t}$,
$x_2(t) = -2c_1e^t + c_3e^{2t} - c_4e^{-2t}$,
$x_3(t) = 4c_1e^t + c_2e^{-t}$,
$x_4(t) = c_1e^t$

40. $x_1(t) = c_1 e^{2t}$,
$x_2(t) = -3c_1 e^{2t} + 3c_2 e^{-2t} - c_4 e^{-5t}$,
$x_3(t) = c_3 e^{5t}$,
$x_4(t) = -c_2 e^{-2t} - 3c_3 e^{5t}$

41. $x_1(t) = 2e^{10t} + e^{15t} = x_4(t)$, $x_2(t) = -e^{10t} + 2e^{15t} = x_3(t)$

42. $\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t}$

43. $\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{8t}$

44. $\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} e^{6t} + c_3 \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix} e^{12t}$

45. $\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_4 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} e^{6t}$

46. $\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-4t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{4t} + c_4 \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} e^{8t}$

47. $\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{6t} + c_4 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} e^{9t}$

48. $\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{16t} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{32t} + c_3 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{48t} + c_4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} e^{64t}$

49. $\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{6t} + c_5 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{9t}$

50. $\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-7t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-4t} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + c_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{5t} + c_5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{9t} + c_6 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{11t}$

Раздел 5.3

1. Собственные частоты $\omega_0 = 0$ и $\omega_1 = 2$. В выродившейся собственной моде с "частотой" $\omega_0 = 0$ эти две материальные точки заданных масс двигаются прямолинейно, причем $x_1(t) = x_2(t) = a_0 + b_0 t$. При частоте $\omega_1 = 2$ они колеблются в противоположных направлениях с равными амплитудами.

2. Собственные частоты $\omega_1 = 1$ и $\omega_2 = 3$. В собственной моде с частотой ω_1 эти две материальные точки заданных масс m_1 и m_2 двигаются в том же самом направлении с равными амплитудами колебаний. В собственной моде с частотой ω_2 они двигаются в противоположных направлениях с равными амплитудами.

3. Собственные частоты $\omega_1 = 1$ и $\omega_2 = 2$. В собственной моде с частотой ω_1 эти две материальные точки заданных масс m_1 и m_2 двигаются в том же самом направлении с равными амплитудами колебания. При частоте ω_2 они перемещаются в противоположных направлениях, причем амплитуда колебаний материальной точки массы m_1 вдвое больше, чем амплитуда колебаний материальной точки массы m_2.

4. Собственные частоты $\omega_1 = 1$ и $\omega_2 = \sqrt{5}$. В собственной моде с частотой ω_1 эти две материальные точки заданных масс m_1 и m_2 двигаются в том же самом направлении с равными амплитудами колебаний. В частоте ω_2 они двигаются в противоположных направлениях с равными амплитудами.

5. Собственные частоты $\omega_1 = \sqrt{2}$ и $\omega_2 = 2$. В собственной моде с частотой ω_1 эти две материальные точки заданных масс m_1 и m_2 двигаются в том же самом направлении с равными амплитудами колебания. В частоте ω_2 они двигаются в противоположных направлениях с равными амплитудами.

6. Собственные частоты $\omega_1 = \sqrt{2}$ и $\omega_2 = \sqrt{8}$. В собственной моде с частотой ω_1 эти две материальные точки заданных масс m_1 и m_2 двигаются в том же самом направлении с равными амплитудами колебания. В собственной моде с частотой ω_2 они перемещаются в противоположных направлениях, причем амплитуда колебаний материальной точки массы m_1 вдвое больше, чем амплитуда колебаний материальной точки массы m_2.

7. Собственные частоты $\omega_1 = 2$ и $\omega_2 = 4$. В собственной моде с частотой ω_1 эти две материальные точки заданных масс m_1 и m_2 двигаются в том же самом направлении с равными амплитудами колебания. В частоте ω_2 они двигаются в противоположных направлениях с равными амплитудами.

8. $x_1(t) = 2\cos t + 3\cos 3t - 5\cos 5t$, $x_2(t) = 2\cos t - 3\cos 3t + \cos 5t$. Мы имеем наложение трех колебаний, в которых данные две материальные точки перемещаются (1) в том же самом направлении с частотой $\omega_1 = 1$ и равными амплитудами; (2) в противоположных направлениях с частотой $\omega_2 = 3$ и равными амплитудами; (3) в противоположных направлениях с частотой $\omega_3 = 5$, причем амплитуда колебаний материальной точки массой m_1 в 5 раз больше, чем амплитуда колебаний материальной точки массой m_2.

9. $x_1(t) = 5\cos t - 8\cos 2t + 3\cos 3t$, $x_2(t) = 5\cos t + 4\cos 2t - 9\cos 3t$. Мы имеем наложение трех колебаний, в которых данные две материальные точки перемещаются (1) в том же самом направлении с частотой $\omega_1 = 1$ и равными амплитудами; (2) в противоположных направлениях с частотой $\omega_2 = 2$, причем амплитуда колебаний материальной точки массой m_1 вдвое больше, чем амплитуда колебаний материальной точки массой m_2; (3) в противоположных направлениях с частотой $\omega_3 = 3$, причем амплитуда колебаний материальной точки массой m_2 в 3 раза больше, чем амплитуда колебаний материальной точки массой m_1.

10. $x_1(t) = \cos 2t - 15\cos 4t + 14\cos t$, $x_2(t) = \cos 2t + 15\cos 4t + 16\cos t$. Мы имеем наложение трех колебаний, в которых данные две материальные точки перемещаются (1) в том же самом направлении с частотой $\omega_1 = 1$, причем амплитуда колебаний материальной точки массой m_2 в $8/7$ раза больше, чем амплитуда колебаний материальной точки массой m_1; (2) в том же самом направлении с частотой $\omega_2 = 2$ и равными амплитудами; (3) в противоположных направлениях с частотой $\omega_3 = 4$ и равными амплитудами.

11. (a) Собственные частоты $\omega_1 = 6$ и $\omega_2 = 8$. В моде 1 эти две материальные точки заданных масс колеблются в том же самом направлении с частотой $\omega_1 = 6$, причем амплитуда колебаний материальной точки массой m_1 вдвое больше, чем амплитуда колебаний материальной точки массой m_2. В моде 2 эти две материальные точки заданных масс колеблются в противоположных направлениях с частотой $\omega_2 = 8$, причем амплитуда колебаний материальной точки массой m_2 в 3 раза больше, чем амплитуда колебаний материальной точки массой m_1. (b) $x(t) = 2\sin 6t + 19\cos 7t$, $y(t) = \sin 6t + 3\cos 7t$
Мы имеем наложение (только двух) колебаний, в которых эти две материальные точки заданных масс перемещаются (1) в том же самом направлении с частотой $\omega_1 = 6$, причем амплитуда колебаний материальной точки массой m_1 вдвое больше, чем амплитуда колебаний материальной точки массой m_2; (2) в том же самом направлении с частотой $\omega_3 = 7$ причем амплитуда колебаний материальной точки массой m_1 в $19/3$ раза больше, чем амплитуда колебаний материальной точки массой m_2.

12. Три собственных моды системы колебания имеют (1) собственную частоту $\omega_1 = \sqrt{2}$ с отношением амплитуд $1:0:-1$; (2) собственную частоту $\omega_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ с отношением амплитуд $1:-\sqrt{2}:1$;
(3) собственную частоту $\omega_3 = \sqrt{2-\sqrt{2}}$ с отношением амплитуд
$1:\sqrt{2}:1$.

13. Три собственных моды системы колебания имеют (1) собственную частоту $\omega_1 = 2$ с отношением амплитуд $1:0:-1$; (2) собственную частоту $\omega_2 = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$ с отношением амплитуд $1:-\sqrt{2}:1$; (3) собственную частоту $\omega_3 = \sqrt{4-2\sqrt{2}}$ с отношением амплитуд $1:\sqrt{2}:1$.

15. $x_1(t) = \frac{2}{3}\cos 5t - 2\cos 5\sqrt{3}\,t + \frac{4}{3}\cos 10t$, $x_2(t) = \frac{4}{3}\cos 5t + 4\cos 5\sqrt{3}\,t + \frac{16}{3}\cos 10t$. Мы имеем наложение двух колебаний с собственными частотами $\omega_1 = 5$ и $\omega_2 = 5\sqrt{3}$ и вынужденное колебание с частотой $\omega = 10$. В каждом из двух собственных колебаний амплитуда колебаний материальной точки массой m_2 вдвое больше, чем амплитуда колебаний материальной точки массой m_1, в то время как в вынужденном колебании амплитуда колебаний материальной точки массой m_2 в четыре раза больше, чем колебаний материальной точки массой m_1.

21. (a) $\omega_1 \approx 1{,}0293$ Гц; $\omega_2 \approx 1{,}7971$ Гц. (b) $v_1 \approx 28$ миль в час; $v_2 \approx 49$ миль в час

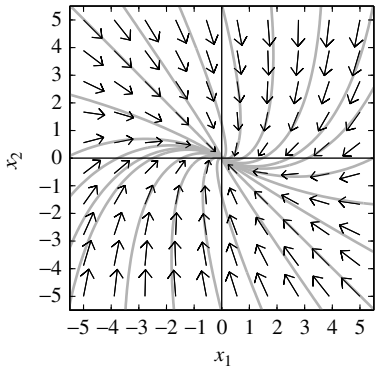
23. $\omega_1 = 2\sqrt{10}$, $v_1 \approx 40{,}26$ (фута в секунду (приблизительно 27 миль в час), $\omega_2 = 5\sqrt{5}$, $v_2 \approx 71{,}18$ фута в секунду (приблизительно 49 миль в час)

24. $\omega_1 \approx 6{,}1311$, $v_1 \approx 39{,}03$ фута в секунду (приблизительно 27 миль в час) $\omega_2 \approx 10{,}3155$, $v_2 \approx 65{,}67$ фута в секунду (приблизительно 45 миль в час)

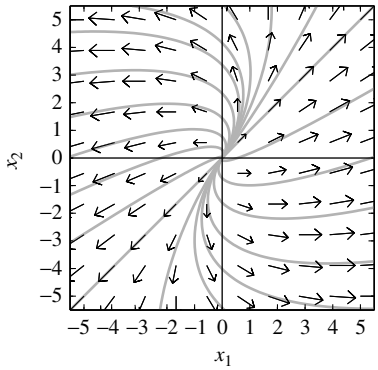
25. $\omega_1 \approx 5{,}0424$, $v_1 \approx 32{,}10$ фута в секунду (приблизительно 22 мили в час), $\omega_2 \approx 9{,}9158$, $v_2 \approx 63{,}13$ фута в секунду (приблизительно 43 мили в час)

Раздел 5.4

1. Кратное собственное значение $\lambda = -3$, собственный вектор $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$; $x_1(t) = (c_1 + c_2 + c_2 t)e^{-3t}$, $x_2(t) = (-c_1 - c_2 t)e^{-3t}$



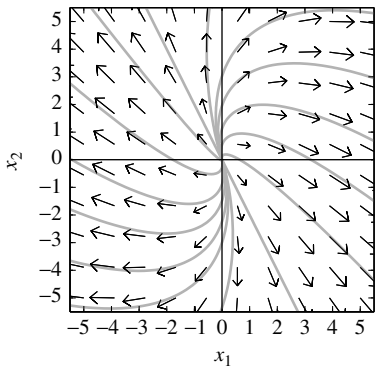
2. Кратное собственное значение $\lambda = 2$, единственный собственный вектор $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$; $x_1(t) = (c_1 + c_2 + c_2 t)e^{2t}$, $x_2(t) = (c_1 + c_2 t)e^{2t}$



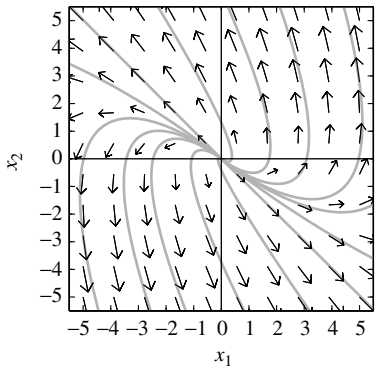
3. Кратное собственное значение $\lambda = 3$, собственный вектор $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \end{bmatrix}^T$; $x_1(t) = (-2c_1 + c_2 - 2c_2 t)e^{3t}$, $x_2(t) = (2c_1 + 2c_2 t)e^{3t}$

4. Кратное собственное значение $\lambda = 4$, единственный собственный вектор $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T$; $x_1(t) = (-c_1 + c_2 - c_2 t)e^{4t}$, $x_2(t) = (c_1 + c_2 t)e^{4t}$

5. Кратное собственное значение $\lambda = 5$, собственный вектор $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \end{bmatrix}^T$; $x_1(t) = (2c_1 + c_2 + 2c_2 t)e^{5t}$, $x_2(t) = (-4c_1 - 4c_2 t)e^{5t}$



6. Кратное собственное значение $\lambda = 5$, единственный собственный вектор $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -4 & 4 \end{bmatrix}^T$; $x_1(t) = (-4c_1 + c_2 - 4c_2 t)e^{5t}$, $x_2(t) = (4c_1 + 4c_2 t)e^{5t}$



7. Собственные значения $\lambda = 2, 2, 9$ с тремя линейно независимыми собственными векторами; $x_1(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{2t}$, $x_2(t) = c_1 e^{2t} + c_3 e^{9t}$, $x_3(t) = c_2 e^{2t}$

8. Собственные значения $\lambda = 7, 13, 13$ с тремя линейно независимыми собственными векторами; $x_1(t) = 2c_1 e^{7t} - c_3 e^{13t}$, $x_2(t) = -3c_1 e^{7t} + c_3 e^{13t}$, $x_3(t) = c_1 e^{7t} + c_2 e^{13t}$

9. Собственные значения $\lambda = 5, 5, 9$ с тремя линейно независимыми собственными векторами; $x_1(t) = c_1 e^{5t} + 7c_2 e^{5t} + 3c_3 e^{9t}$, $x_2(t) = 2c_1 e^{5t}$, $x_3(t) = 2c_2 e^{5t} + c_3 e^{9t}$

10. Собственные значения $\lambda = 3, 3, 7$ с тремя линейно независимыми собственными векторами; $x_1(t) = 5c_1 e^{3t} - 3c_2 e^{3t} + 2c_3 e^{7t}$, $x_2(t) = 2c_1 e^{3t} + c_3 e^{7t}$, $x_3(t) = c_2 e^{3t}$

11. Тройное собственное значение $\lambda = -1$ дефекта 2;
$x_1(t) = (-2c_2 + c_3 - 2c_3t)e^{-t}$,
$x_2(t) = (c_1 - c_2 + c_2t - c_3t + \frac{1}{2}c_3t^2)e^{-t}$,
$x_3(t) = (c_2 + c_3t)e^{-t}$

12. Тройное собственное значение $\lambda = -1$ дефекта 2;
$x_1(t) = e^{-t}(c_1 + c_3 + c_2t + \frac{1}{2}c_3t^2)$
$x_2(t) = e^{-t}(c_1 + c_2t + \frac{1}{2}c_3t^2)$,
$x_3(t) = e^{-t}(c_2 + c_3t)$

13. Тройное собственное значение $\lambda = -1$ дефекта 2; $x_1(t) = (c_1 + c_2t + \frac{1}{2}c_3t^2)e^{-t}$,
$x_2(t) = (2c_2 + c_3 + 2c_3t)e^{-t}$,
$x_3(t) = (c_2 + c_2t)e^{-t}$

14. Тройное собственное значение $\lambda = -1$ дефекта 2;
$x_1(t) = e^{-t}(5c_1 + c_2 + c_3 + 5c_2t + c_3t + \frac{5}{2}c_3t^2)$,
$x_2(t) = e^{-t}(-25c_1 - 5c_2 - 25c_2t - 5c_3t - \frac{25}{2}c_3t^2)$,
$x_3(t) = e^{-t}(-5c_1 + 4c_2 - 5c_2t + 4c_3t - \frac{5}{2}c_3t^2)$

15. Тройное собственное значение $\lambda = 1$ дефекта 1;
$x_1(t) = (3c_1 + c_3 - 3c_3t)e^{t}$,
$x_2(t) = (-c_1 + c_3t)e^{t}$, $x_3(t) = (c_2 + c_3t)e^{t}$

16. Тройное собственное значение $\lambda = 1$ дефекта 1;
$x_1(t) = e^{t}(3c_1 + 3c_2 + c_3)$
$x_2(t) = e^{t}(-2c_1 - 2c_3t)$,
$x_3(t) = e^{t}(-2c_2 + 2c_3t)$

17. Тройное собственное значение $\lambda = 1$ дефекта 1;
$x_1(t) = (2c_1 + c_2)e^{t}$,
$x_2(t) = (-3c_2 + c_3 + 6c_3t)e^{t}$,
$x_3(t) = -9(c_1 + c_3t)e^{t}$

18. Тройное собственное значение $\lambda = 1$ дефекта 1;
$x_1(t) = e^{t}(-c_1 - 2c_2 + c_3)$,
$x_2(t) = e^{t}(c_2 + c_3t)$,
$x_3(t) = e^{t}(c_1 - 2c_3t)$

19. Двойные собственные значения $\lambda = -1$ и $\lambda = 1$, каждое с дефектом 1;
$x_1(t) = c_1e^{-t} + c_4e^{t}$,
$x_2(t) = c_3e^{t}$,
$x_3(t) = c_2e^{-t} + 3c_4e^{t}$,
$x_4(t) = c_1e^{-t} - 2c_3e^{t}$

20. Собственное значение $\lambda = 2$ с кратностью 4 и дефектом 3;
$x_1(t) = (c_1 + c_3 + c_2t + c_4t + \frac{1}{2}c_3t^2 + \frac{1}{6}c_4t^3)e^{2t}$,
$x_2(t) = (c_2 + c_3t + \frac{1}{2}c_4t^2)e^{2t}$,
$x_3(t) = (c_3 + c_4t)e^{2t}$, $x_4(t) = c_4e^{2t}$

21. Собственное значение $\lambda = 1$ с кратностью 4 и дефектом 2; $x_1(t) = (-2c_2 + c_3 - 2c_3t)e^{t}$, $x_2(t) = (c_2 + + c_3t)e^{t}$, $x_3(t) = (c_2 + c_4 + c_3t)e^{t}$, $x_4(t) = (c_1 + c_2t + \frac{1}{2}c_3t^2)e^{t}$

22. Собственное значение $\lambda = 1$ с кратностью 4 и дефектом 2; $x_1(t) = (c_1 + 3c_2 + c_4 + c_2t + 3c_3t + \frac{1}{2}c_3t^2)e^{t}$,
$x_2(t) = -(2c_2 - c_3 + 2c_3t)e^{t}$, $x_3(t) = (c_2 + c_3t)e^{t}$, $x_4(t) = -(2c_1 + 6c_2 + 2c_2t + 6c_3t + c_3t^2)e^{t}$

23. $\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{v}_1e^{-t} + (c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3)e^{3t}$, причем
$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$,
$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 9 \end{bmatrix}^T$,
$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T$

24. $\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{v}_1e^{-t} + (c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3)e^{3t}$, причем
$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -3 \end{bmatrix}^T$,
$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$,
$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$

25. $\mathbf{x}(t) = \left[c_1\mathbf{v}_1 + c_2(\mathbf{v}_1t + \mathbf{v}_2) + c_3\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}_1t^2 + \mathbf{v}_2t + \mathbf{v}_3\right)\right]e^{2t}$, причем
$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$,
$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$,
$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$

26. $\mathbf{x}(t) = \left[c_1\mathbf{v}_1 + c_2(\mathbf{v}_1t + \mathbf{v}_2) + c_3\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}_1t^2 + \mathbf{v}_2t + \mathbf{v}_3\right)\right]e^{3t}$, причем
$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T$,
$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}^T$
$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$

27. $\mathbf{x}(t) = [c_1\mathbf{v}_1 + c_2(\mathbf{v}_1t + \mathbf{v}_2) + c_3\mathbf{v}_3]e^{2t}$, причем
$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 8 \end{bmatrix}^T$,
$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$,
$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$

28. $\mathbf{x}(t) = \left[c_1\mathbf{v}_1 + c_2(\mathbf{v}_1t + \mathbf{v}_2) + c_3\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}_1t^2 + \mathbf{v}_2t + \mathbf{v}_3\right)\right]e^{2t}$, причем
$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 119 & -289 & 0 \end{bmatrix}^T$,
$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -17 & 34 & 17 \end{bmatrix}^T$
$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$

29. $\mathbf{x}(t) = [c_1\mathbf{v}_1 + c_2(\mathbf{v}_1t + \mathbf{v}_2)]e^{-t} + [c_3\mathbf{v}_3 + c_4(\mathbf{v}_3t + \mathbf{v}_4)]e^{2t}$, причем
$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & -2 \end{bmatrix}^T$,

$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$,
$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$,
$\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T$

30. $\mathbf{x}(t) = [c_1\mathbf{v}_1 + c_2(\mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2)]e^{-t} + [c_3\mathbf{v}_3 + c_4(\mathbf{v}_3 t + \mathbf{v}_4)]e^{2t}$, причем
$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}^T$,
$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$,
$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$,
$\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}^T$

31. $\mathbf{x}(t) = \left[c_1\mathbf{v}_1 + c_2(\mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2) + c_3\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}_1 t^2 + \mathbf{v}_2 t + \mathbf{v}_3\right) + c_4\mathbf{v}_4\right] e^t$, причем
$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 42 & 7 & -21 & -42 \end{bmatrix}^T$,
$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 34 & 22 & -10 & -27 \end{bmatrix}^T$,
$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$,
$\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}^T$

32. $\mathbf{x}(t) = (c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2)e^{2t} + (c_3\mathbf{v}_3 + c_4\mathbf{v}_4 + c_5\mathbf{v}_5)e^{3t}$, причем
$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$,
$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^T$,
$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$,
$\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}^T$,
$\mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^T$

33. $\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} \cos 4t & \sin 4t & 0 & 0 \end{bmatrix}^T e^{3t}$,
$\mathbf{x}_2(t) = \begin{bmatrix} -\sin 4t & \cos 4t & 0 & 0 \end{bmatrix}^T e^{3t}$,
$\mathbf{x}_3(t) = \begin{bmatrix} t\cos 4t & t\sin 4t & \cos 4t & \sin 4t \end{bmatrix}^T e^{3t}$,
$\mathbf{x}_4(t) = \begin{bmatrix} -t\sin 4t & t\cos 4t & -\sin 4t & \cos 4t \end{bmatrix}^T e^{3t}$

34. $\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} \sin 3t \\ 3\cos 3t - 3\sin 3t \\ 0 \\ \sin 3t \end{bmatrix} e^{2t}$,

$\mathbf{x}_2(t) = \begin{bmatrix} -\cos 3t \\ 3\sin 3t + 3\cos 3t \\ 0 \\ -\cos 3t \end{bmatrix} e^{2t}$,

$\mathbf{x}_3(t) = \begin{bmatrix} 3\cos 3t + t\sin 3t \\ (3t-10)\cos 3t - (3t+9)\sin 3t \\ \sin 3t \\ t\sin 3t \end{bmatrix} e^{2t}$,

$\mathbf{x}_4(t) = \begin{bmatrix} -t\cos 3t + 3\sin 3t \\ (3t+9)\cos 3t + (3t-10)\sin 3t \\ -\cos 3t \\ -t\cos 3t \end{bmatrix} e^{2t}$

35. $x_1(t) = x_2(t) = v_0(1 - e^{-t})$; $\lim\limits_{t\to\infty} x_1(t) = \lim\limits_{t\to\infty} x_2(t) = v_0$

36. $x_1(t) = v_0(2 - 2e^{-t} - te^{-t})$, $x_2(t) = v_0(2 - 2e^{-t} - te^{-t} - \frac{1}{2}t^2e^{-t})$; $\lim\limits_{t\to\infty} x_1(t) = \lim\limits_{t\to\infty} x_2(t) = 2v_0$

Раздел 5.5

1. $\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^t & e^{3t} \\ -e^t & e^{3t} \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5e^t + e^{3t} \\ -5e^t + e^{3t} \end{bmatrix}$

2. $\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} 1 & e^{4t} \\ 2 & -2e^{4t} \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 + 5e^{4t} \\ 6 - 10e^{4t} \end{bmatrix}$

3. $\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} 5\cos 4t & -5\sin 4t \\ 2\cos 4t + 4\sin 4t & 4\cos 4t - 2\sin 4t \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -5\sin 4t \\ 4\cos 4t - 2\sin 4t \end{bmatrix}$

4. $\mathbf{\Phi}(t) = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 & 1+t \\ 1 & t \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}(t) = e^{2t}\begin{bmatrix} 1+t \\ t \end{bmatrix}$

5. $\mathbf{\Phi}(t)=\begin{bmatrix} 2\cos 3t & -2\sin 3t \\ -3\cos 3t+3\sin 3t & 3\cos 3t+3\sin 3t \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}(t)=\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3\cos 3t-\sin 3t \\ -3\cos 3t+6\sin 3t \end{bmatrix}$

6. $\mathbf{\Phi}(t)=e^{5t}\begin{bmatrix} \cos 4t-2\sin 4t & 2\cos 4t+2\sin 4t \\ 2\cos 4t & 2\sin 4t \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}(t)=2e^{5t}\begin{bmatrix} \cos 4t+\sin 4t \\ \sin 4t \end{bmatrix}$

7. $\mathbf{\Phi}(t)=\begin{bmatrix} 6 & 3e^{t} & 2e^{-t} \\ 2 & e^{t} & e^{-t} \\ 5 & 2e^{t} & 2e^{-t} \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix} -12+12e^{t}+2e^{-t} \\ -4+4e^{t}+e^{-t} \\ -10+8e^{t}+2e^{-t} \end{bmatrix}$

8. $\mathbf{\Phi}(t)=\begin{bmatrix} 0 & e^{t} & e^{3t} \\ e^{-2t} & -e^{t} & -e^{3t} \\ -e^{-2t} & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix} e^{t} \\ -e^{t}+e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix}$

9. $e^{\mathbf{A}t}=\begin{bmatrix} 2e^{3t}-e^{t} & -2e^{3t}+2e^{t} \\ e^{3t}-e^{t} & -e^{3t}+2e^{t} \end{bmatrix}$

10. $e^{\mathbf{A}t}=\begin{bmatrix} -2+3e^{2t} & 3-3e^{2t} \\ -2+2e^{2t} & 3-2e^{2t} \end{bmatrix}$

11. $e^{\mathbf{A}t}=\begin{bmatrix} 3e^{3t}-2e^{2t} & -3e^{3t}+3e^{2t} \\ 2e^{3t}-2e^{2t} & -2e^{3t}+3e^{2t} \end{bmatrix}$

12. $e^{\mathbf{A}t}=\begin{bmatrix} -3e^{t}+4e^{2t} & 4e^{t}-4e^{2t} \\ -3e^{t}+3e^{2t} & 4e^{t}-3e^{2t} \end{bmatrix}$

13. $e^{\mathbf{A}t}=\begin{bmatrix} 4e^{3t}-3e^{t} & -4e^{3t}+4e^{t} \\ 3e^{3t}-3e^{t} & -3e^{3t}+4e^{t} \end{bmatrix}$

14. $e^{\mathbf{A}t}=\begin{bmatrix} -8e^{t}+9e^{2t} & 6e^{t}-6e^{2t} \\ -12e^{t}+12e^{2t} & 9e^{t}-8e^{2t} \end{bmatrix}$

15. $e^{\mathbf{A}t}=\begin{bmatrix} 5e^{2t}-4e^{t} & -10e^{2t}+10e^{t} \\ 2e^{2t}-2e^{t} & -4e^{2t}+5e^{t} \end{bmatrix}$

16. $e^{\mathbf{A}t}=\begin{bmatrix} -9e^{t}+10e^{2t} & 15e^{t}-15e^{2t} \\ -6e^{t}+6e^{2t} & 10e^{t}-9e^{2t} \end{bmatrix}$

17. $e^{\mathbf{A}t}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{4t}+e^{2t} & e^{4t}-e^{2t} \\ e^{4t}-e^{2t} & e^{4t}+e^{2t} \end{bmatrix}$

18. $e^{\mathbf{A}t}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{2t}+e^{6t} & -e^{2t}+e^{6t} \\ -e^{2t}+e^{6t} & e^{2t}+e^{6t} \end{bmatrix}$

19. $e^{\mathbf{A}t}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4e^{10t}+e^{5t} & 2e^{10t}-2e^{5t} \\ 2e^{10t}-2e^{5t} & e^{10t}+4e^{5t} \end{bmatrix}$

20. $e^{\mathbf{A}t}=\dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} e^{5t}+4e^{15t} & -2e^{5t}+2e^{15t} \\ -2e^{5t}+2e^{15t} & 4e^{5t}+e^{15t} \end{bmatrix}$

21. $e^{\mathbf{A}t}=\begin{bmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{bmatrix}$

22. $e^{\mathbf{A}t}=\begin{bmatrix} 1+6t & 4t \\ -9t & 1-6t \end{bmatrix}$

23. $e^{\mathbf{A}t}=\begin{bmatrix} 1+t & -t & -t-t^{2} \\ t & 1-t & t-t^{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

24. $e^{\mathbf{A}t}=\begin{bmatrix} 1+3t & 0 & -3t \\ 5t+18t^{2} & 1 & 7t-18t^{2} \\ 3t & 0 & 1-3t \end{bmatrix}$

25. $e^{\mathbf{A}t}=\begin{bmatrix} e^{2t} & 5te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}(t)=e^{\mathbf{A}t}\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$

26. $e^{\mathbf{A}t}=\begin{bmatrix} e^{7t} & 0 \\ 11te^{7t} & e^{7t} \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}(t)=e^{\mathbf{A}t}\begin{bmatrix} 5 \\ -10 \end{bmatrix}$

27. $e^{\mathbf{A}t}=\begin{bmatrix} e^{t} & 2te^{t} & (3t+2t^{2})e^{t} \\ 0 & e^{t} & 2te^{t} \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}(t)=e^{\mathbf{A}t}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

28. $e^{\mathbf{A}t}=\begin{bmatrix} e^{5t} & 0 & 0 \\ 10te^{5t} & e^{5t} & 0 \\ (20t+150t^{2})e^{5t} & 30te^{5t} & e^{5t} \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}(t)=e^{\mathbf{A}t}\begin{bmatrix} 40 \\ 50 \\ 60 \end{bmatrix}$

29. $e^{\mathbf{A}t}=\begin{bmatrix} 1 & 2t & 3t+6t^{2} & 4t+6t^{2}+4t^{3} \\ 0 & 1 & 6t & 3t+6t^{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}e^{t}$, $\mathbf{x}(t)=e^{\mathbf{A}t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

30. $e^{\mathbf{A}t}=e^{3t}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6t & 1 & 0 & 0 \\ 9t+18t^{2} & 6t & 1 & 0 \\ 12t+54t^{2}+36t^{3} & 9t+18t^{2} & 6t & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}(t)=e^{\mathbf{A}t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

33. $\mathbf{x}(t)=\begin{bmatrix} c_1\cosh t+c_2\sinh t \\ c_1\sinh t+c_2\cosh t \end{bmatrix}$

35. $e^{\mathbf{A}t}=\begin{bmatrix} e^{3t} & 4te^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$

36. $e^{\mathbf{A}t}=e^{t}\begin{bmatrix} 1 & 2t & 3t+4t^{2} \\ 0 & 1 & 4t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

37. $e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 3e^{2t} - 3e^{t} & 13e^{2t} - (13 + 9t)e^{t} \\ 0 & e^{t} & 3te^{t} \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix}$

38. $e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{5t} & 4e^{10t} - 4e^{5t} & 16e^{10t} - (16 + 50t)e^{5t} \\ 0 & e^{10t} & 4e^{10t} - 4e^{5t} \\ 0 & 0 & e^{5t} \end{bmatrix}$

39. $e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{t} & 3te^{t} & 12e^{2t} - (12 + 9t)e^{t} & (51 + 18t)e^{t} - (51 - 36t)e^{2t} \\ 0 & e^{t} & 3e^{2t} - 3e^{t} & 6e^{t} - (6 - 9t)e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} & 4e^{3t} - 4e^{2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$

40. $e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 4te^{2t} & (4t + 8t^2)e^{2t} & 100e^{3t} - (100 + 96t + 32t^2)e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & 4te^{2t} & 20e^{3t} - (20 + 16t)e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} & 4e^{3t} - 4e^{2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$

Раздел 5.6

1. $x(t) = \frac{7}{3}$, $y(t) = -\frac{8}{3}$

2. $x(t) = \frac{1}{8}(1 + 12t)$, $y(t) = -\frac{1}{4}(5 + 4t)$

3. $x(t) = \frac{1}{756}(864e^{-t} + 4e^{6t} - 868 + 840t - 504t^2)$,
$y(t) = \frac{1}{756}(-864e^{-t} + 3e^{6t} + 861 - 882t + 378t^2)$

4. $x(t) = \frac{1}{84}(99e^{5t} - 8e^{-2t} - 7e^{t})$,
$y(t) = \frac{1}{84}(99e^{5t} + 48e^{-2t} - 63e^{t})$

5. $x(t) = \frac{1}{3}(-12 - e^{-t} - 7te^{-t})$,
$y(t) = \frac{1}{3}(-6 - 7te^{-t})$

6. $x(t) = -\frac{1}{256}(91 + 16t)e^{t}$,
$y(t) = \frac{1}{32}(25 + 16t)e^{t}$

7. $x(t) = \frac{1}{410}(369e^{t} + 166e^{-9t} - 125\cos t - 105\sin t)$, $y(t) = \frac{1}{410}(369e^{t} - 249e^{-9t} - 120\cos t - 150\sin t)$

8. $x(t) = \frac{1}{3}(17\cos t + 2\sin t)$,
$y(t) = \frac{1}{3}(3\cos t + 5\sin t)$

9. $x(t) = \frac{1}{4}(\sin 2t + 2t\cos 2t + t\sin 2t)$,
$y(t) = \frac{1}{4}t\sin 2t$

10. $x(t) = \frac{1}{13}e^{t}(4\cos t - 6\sin t)$,
$y(t) = \frac{1}{13}e^{t}(3\cos t + 2\sin t)$

11. $x(t) = \frac{1}{2}(1 - 4t + e^{4t})$,
$y(t) = \frac{1}{4}(-5 + 4t + e^{4t})$

12. $x(t) = t^2$,
$y(t) = -t^2$

13. $x(t) = \frac{1}{2}(1 + 5t)e^{t}$,
$y(t) = -\frac{5}{2}te^{t}$

14. $x(t) = \frac{1}{8}(-2 + 4t - e^{4t} + 2te^{4t})$, $y(t) = \frac{1}{2}t(-2 + e^{4t})$

15. (a) $x_1(t) = 200(1 - e^{-t/10})$, $x_2(t) = 400(1 + e^{-t/10} - 2e^{-t/20})$
(b) $x_1(t) \to 200$ и $x_2(t) \to 400$ при $t \to +\infty$
(c) Резервуар 1: приблизительно 6 минут 56 секунд; резервуар 2: приблизительно 24 минуты 34 секунды

16. (a) $x_1(t) = 600(1 - e^{-t/20})$, $x_2(t) = 300(1 + e^{-t/10} - 2e^{-t/20})$
(b) $x_1(t) \to 600$ и $x_2(t) \to 300$ при $t \to \infty$
(c) Резервуар 1: приблизительно 8 минут 7 секунд; резервуар 2: приблизительно 17 минут 13 секунд

17. $x_1(t) = 102 - 95e^{-t} - 7e^{5t}$,
$x_2(t) = 96 - 95e^{-t} - e^{5t}$

18. $x_1(t) = 68 - 110t - 75e^{-t} + 7e^{5t}$,
$x_2(t) = 74 - 80t - 75e^{-t} + e^{5t}$

19. $x_1(t) = -70 - 60t + 16e^{-3t} + 54e^{2t}$,
$x_2(t) = 5 - 60t - 32e^{-3t} + 27e^{2t}$

20. $x_1(t) = 3e^{2t} + 60te^{2t} - 3e^{-3t}$,
$x_2(t) = -6e^{2t} + 30te^{2t} + 6e^{-3t}$

21. $x_1(t) = -e^{-t} - 14e^{2t} + 15e^{3t}$,
$x_2(t) = -5e^{-t} - 10e^{2t} + 15e^{3t}$

22. $x_1(t) = -10e^{-t} - 7te^{-t} + 10e^{3t} - 5te^{3t}$,
$x_2(t) = -15e^{-t} - 35te^{-t} + 15e^{3t} - 5te^{3t}$

23. $x_1(t) = 3 + 11t + 8t^2$,
$x_2(t) = 5 + 17t + 24t^2$

24. $x_1(t) = 2 + t + \ln t$,
$x_2(t) = 5 + 3t - \dfrac{1}{t} + 3\ln t$

25. $x_1(t) = -1 + 8t + \cos t - 8\sin t$,
$x_2(t) = -2 + 4t + 2\cos t - 3\sin t$

26. $x_1(t) = 3\cos t - 32\sin t + 17t\cos t + 4t\sin t$,
$x_2(t) = 5\cos t - 13\sin t + 6t\cos t + 5t\sin t$

27. $x_1(t) = 8t^3 + 6t^4$,
$x_2(t) = 3t^2 - 2t^3 + 3t^4$

28. $x_1(t) = -7 + 14t - 6t^2 + 4t^2\ln t$,
$x_2(t) = -7 + 9t - 3t^2 + \ln t - 2t\ln t + 2t^2\ln t$

29. $x_1(t) = t\cos t - (\ln\cos t)(\sin t)$,
$x_2(t) = t\sin t + (\ln\cos t)(\cos t)$

30. $x_1(t) = \frac{1}{2}t^2\cos 2t$,
$x_2(t) = \frac{1}{2}t^2\sin 2t$

31. $x_1(t) = (9t^2 + 4t^3)e^{t}$,
$x_2(t) = 6t^2e^{t}$,
$x_3(t) = 6te^{t}$

32. $x_1(t) = (44 + 18t)e^{t} + (-44 + 26t)e^{2t}$,
$x_2(t) = 6e^{t} + (-6 + 6t)e^{2t}$,
$x_3(t) = 2te^{2t}$

33. $x_1(t) = 15t^2 + 60t^3 + 95t^4 + 12t^5$,
$x_2(t) = 15t^2 + 55t^3 + 15t^4$,
$x_3(t) = 15t^2 + 20t^3$,
$x_4(t) = 15t^2$

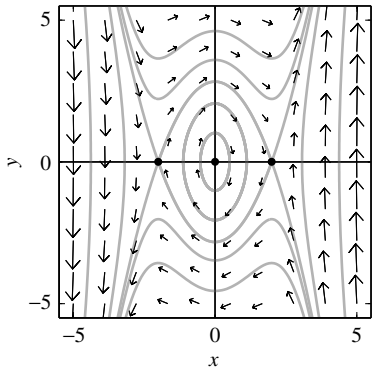
34. $x_1(t) = 4t^3 + (4 + 16t + 8t^2)e^{2t}$,
$x_2(t) = 3t^2 + (2 + 4t)e^{2t}$,
$x_3(t) = (2 + 4t + 2t^2)e^{2t}$,
$x_4(t) = (1 + t)e^{2t}$

Глава 6

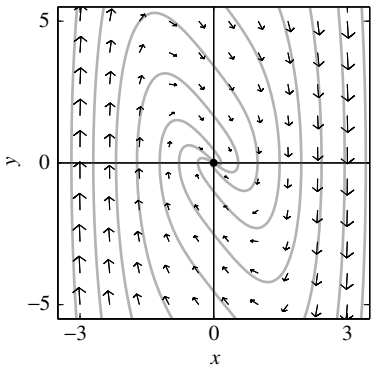
Раздел 6.1

1. 6.1.13 **2.** 6.1.15 **3.** 6.1.18 **4.** 6.1.12
5. 6.1.11 **6.** 6.1.17 **7.** 6.1.14 **8.** 6.1.16

9. Равновесные решения $x(t) \equiv 0, \pm 2$. Точка равновесия $(0, 0)$ в фазовой плоскости напоминает центр, тогда как точки $(\pm 2, 0)$ напоминают седловые точки.

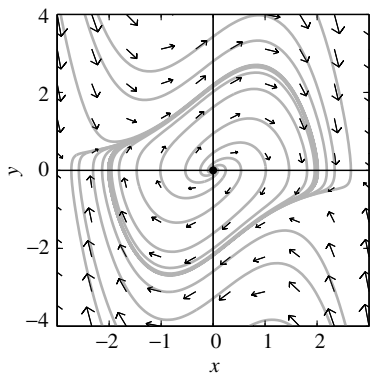


10. Равновесное решение $x(t) \equiv 0$. Точка равновесия $(0, 0)$ в фазовой плоскости напоминает спиральный сток (устойчивый фокус).



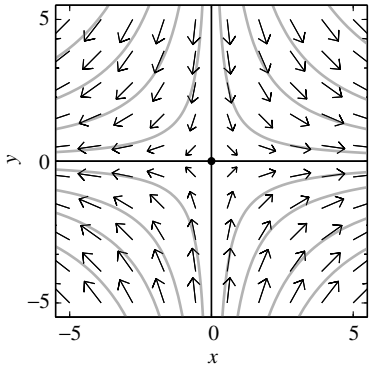
11. Равновесные решения $x(t) \equiv \ldots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots$. Фазовый портрет показывает, что точка равновесия $(n\pi, 0)$ в фазовой плоскости представляет собой спиральный сток (устойчивый фокус), если n является четным, но является седловой точкой, если n нечетно.

12. Равновесное решение $x(t) \equiv 0$. Точка равновесия $(0, 0)$ в фазовой плоскости напоминает спиральный источник (неустойчивый фокус), с интегральными кривыми, происходящими от этого источника, причем спирали направлены наружу к траектории замкнутой кривой.

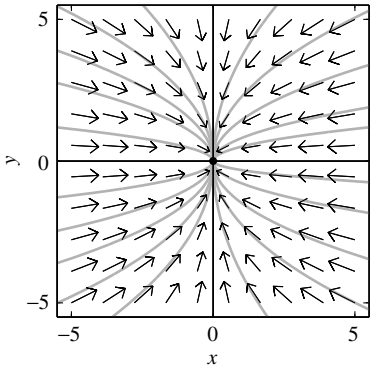


13. Решение $x(t) = x_0 e^{-2t}$, $y(t) = y_0 e^{-2t}$. Начало координат представляет собой устойчивый дикритический узел, подобный показанному на рис. 6.1.4.

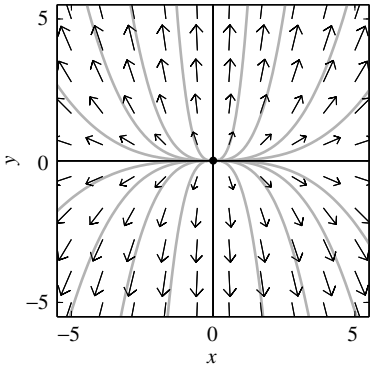
14. Решение $x(t) = x_0e^{2t}$, $y(t) = y_0e^{-2t}$. Начало координат представляет собой неустойчивую седловую точку.



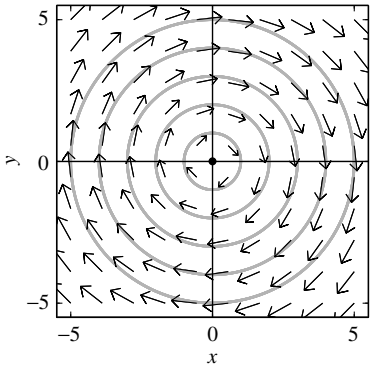
15. Решение $x(t) = x_0e^{-2t}$, $y(t) = y_0e^{-t}$. Начало координат представляет собой устойчивый узел.



16. Решение $x(t) = x_0e^{t}$, $y(t) = y_0e^{3t}$. Начало координат представляет собой неустойчивый вырожденный узел.



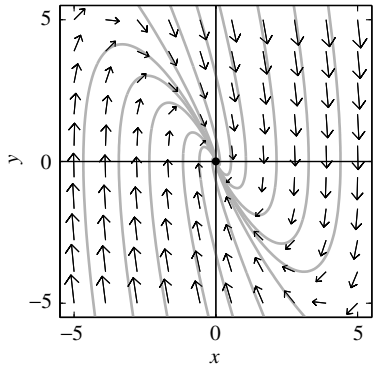
17. Решение $x(t) = A\cos t + B\sin t$, $y(t) = B\cos t - A\sin t$. Начало координат представляет собой устойчивый центр.



18. Решение $x(t) = A\cos 2t + B\sin 2t$, $y(t) = -2B\cos 2t + 2A\sin 2t$. Начало координат представляет собой устойчивый центр.

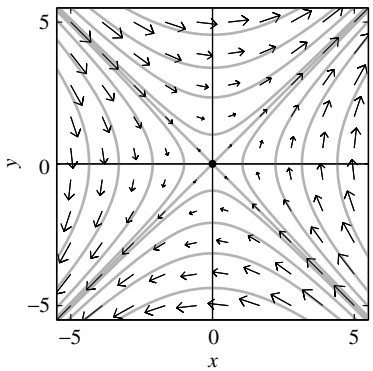
19. Решение $x(t) = A\cos 2t + B\sin 2t$, $y(t) = B\cos 2t - A\sin 2t$. Начало координат представляет собой устойчивый центр.

20. Решение $x(t) = e^{-2t}(A\cos t + B\sin t)$, $y(t) = e^{-2t}[(-2A+B)\cos t - (A+2B)\sin t]$. Начало координат представляет собой устойчивый фокус.

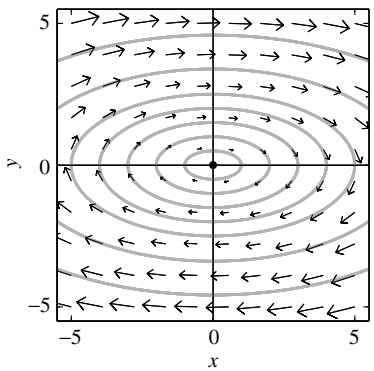


23. Начало координат и окружности $x^2 + y^2 = C > 0$; начало координат представляет собой устойчивый центр.

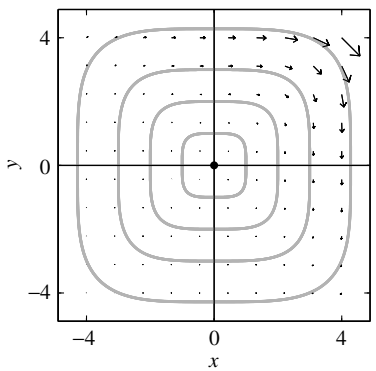
24. Начало координат и гиперболы $y^2 - x^2 = C$; начало координат представляет собой неустойчивую седловую точку.



25. Начало координат и эллипсы $x^2 + 4y^2 = C > 0$; начало координат представляет собой устойчивый центр.

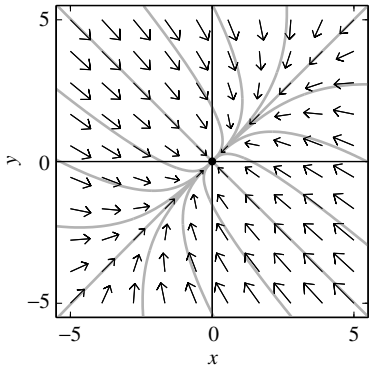


26. Начало координат и овалы формы $x^4 + y^4 = C > 0$; начало координат представляет собой устойчивый центр.



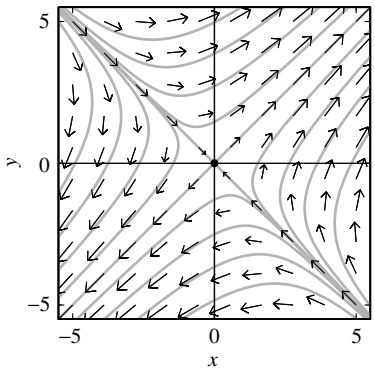
Раздел 6.2

1. Асимптотически устойчивый узел



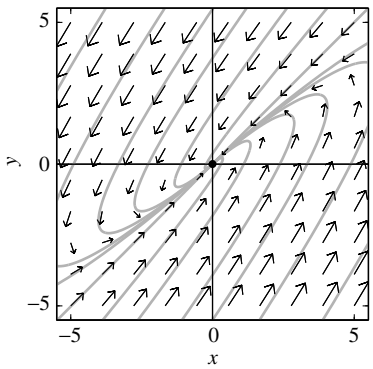
2. Неустойчивый вырожденный узел

3. Неустойчивая седловая точка



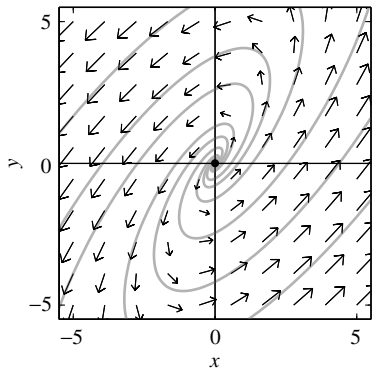
4. Неустойчивая седловая точка

5. Асимптотически устойчивый узел



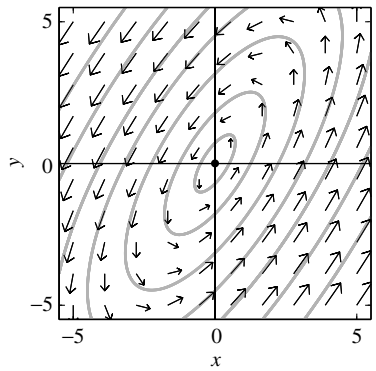
6. Неустойчивый узел

7. Неустойчивый фокус



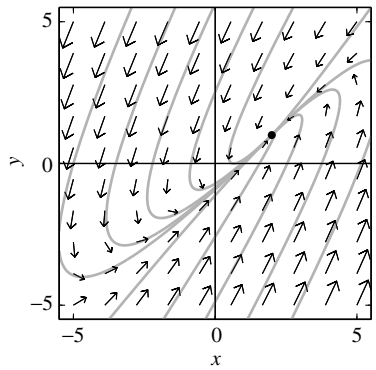
8. Асимптотически устойчивый фокус

9. Устойчивый, но не асимптотически устойчивый, центр



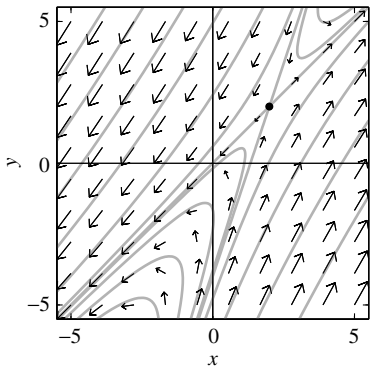
10. Устойчивый, но не асимптотически устойчивый, центр

11. Асимптотически устойчивый узел: $(2, 1)$



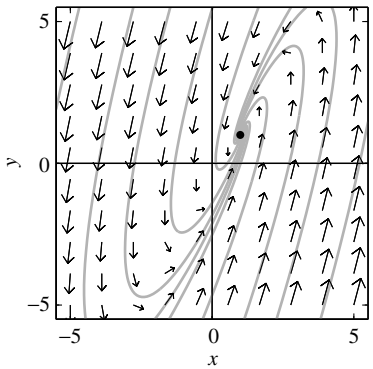
12. Неустойчивый вырожденный узел: $(2, -3)$

13. Неустойчивая седловая точка: $(2, 2)$



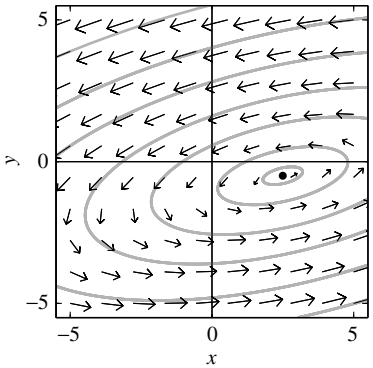
14. Неустойчивая седловая точка: $(3, 4)$

15. Асимптотически устойчивый фокус: $(1, 1)$



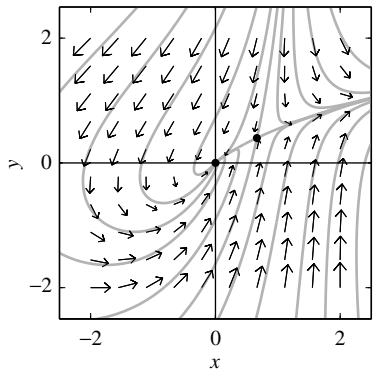
16. Неустойчивый фокус: $(3, 2)$

17. Устойчивый центр: $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

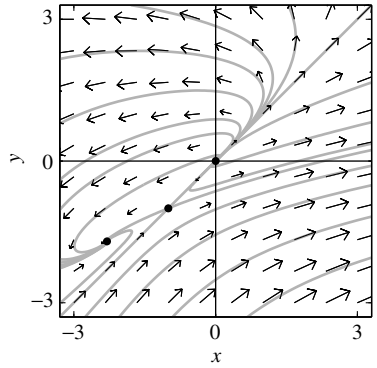


18. Устойчивый, но не асимптотически устойчивый, центр: $(-2, -1)$

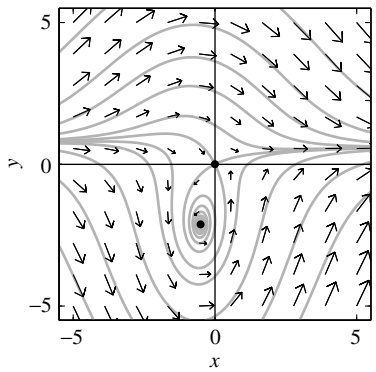
19. Начало координат $(0, 0)$ представляет собой устойчивый узел. Кроме того, седловая точка в $(0{,}67, 0{,}40)$.



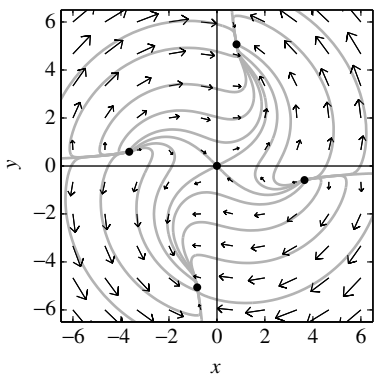
20. Начало координат $(0, 0)$ представляет собой неустойчивый узел. Кроме того, седловая точка в $(-1, -1)$ и спиральный сток (устойчивый фокус) в $(-2{,}30, -1{,}70)$.



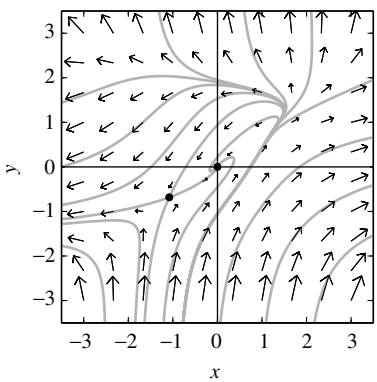
21. $(0, 0)$ представляет собой неустойчивую седловую точку. Кроме того, спиральный сток (устойчивый фокус) в $(-0{,}51, -2{,}12)$.



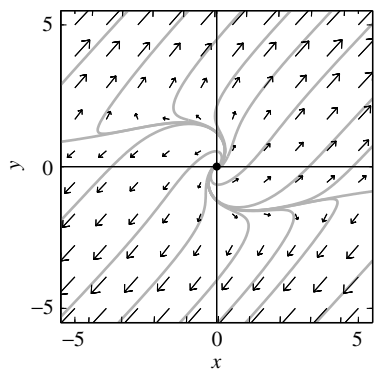
22. $(0, 0)$ представляет собой неустойчивую седловую точку. Кроме того, узлы-стоки в $(\pm 0{,}82, \pm \pm 5{,}06)$ и узлы-источники в $(\pm 3{,}65, \mp 0{,}59)$.



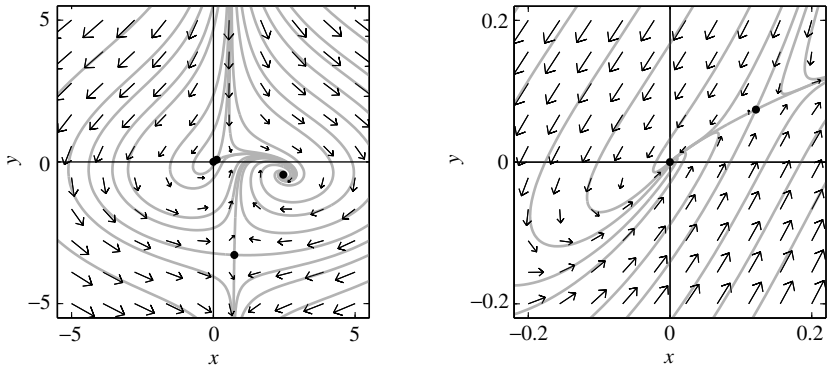
23. Начало координат $(0, 0)$ представляет собой спиральный сток (устойчивый фокус). Кроме того, седловая точка в $(-1{,}08, -0{,}68)$.



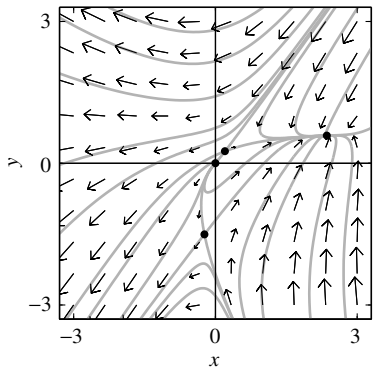
24. Начало координат $(0, 0)$ представляет собой спиральный источник (неустойчивый фокус). Никаких других точек равновесия не видно.



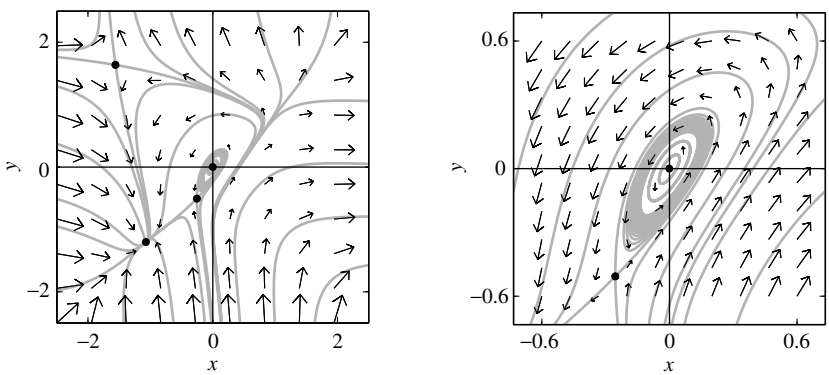
25. Из теоремы 2 следует только то, что начало координат $(0, 0)$ представляет собой устойчивый сток — либо узел, либо фокус. Фазовый портрет для $-5 \le x, y \le 5$ показывает, что есть также седловая точка $(0{,}74, -3{,}28)$ и спиральный сток (устойчивый фокус) $(2{,}47, -0{,}46)$. Начало координат напоминает узел-сток во втором фазовом портрете для $-0{,}2 \le x, y \le 0{,}2$, на котором также видно вторую седловую точку $(0{,}12, 0{,}07)$.



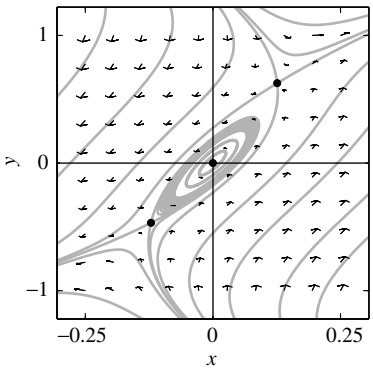
26. Из теоремы 2 следует только то, что начало координат $(0, 0)$ представляет собой неустойчивый источник. Кроме того, на фазовом портрете для $-3 \le x, y \le 3$ видны также седловые точки $(0{,}20, 0{,}25)$ и $(-0{,}23, -1{,}50)$ и узел-сток $(2{,}36, 0{,}58)$.



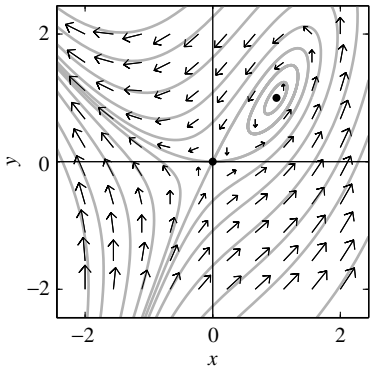
27. Из теоремы 2 следует только то, что начало координат $(0, 0)$ представляет собой центр или фокус, но заключение об устойчивости или неустойчивости сделать нельзя. На фазовом портрете для $-2 \le x, y \le 2$ видны также седловые точки $(-0{,}25, -0{,}51)$ и $(-1{,}56, 1{,}64)$, а также узел-сток $(-1{,}07, -1{,}20)$. Начало координат выглядит как центр на втором фазовом портрете для $-0{,}6 \le x, y \le 0{,}6$.



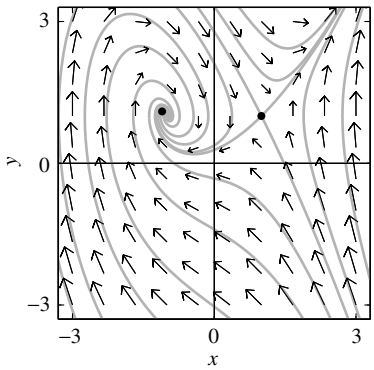
28. Из теоремы 2 следует только то, что начало координат $(0, 0)$ представляет собой центр или фокус, но не устанавливается его устойчивость (хотя на фазовом портрете оно напоминает вероятный центр). На фазовом портрете для $-0{,}25 \le x \le 0{,}25$, $-1 \le y \le 1$ показаны также седловые точки $(0{,}13, 0{,}63)$ и $(-0{,}12, -0{,}47)$.



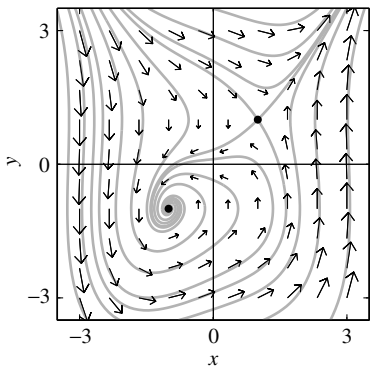
29. Есть седловая точка в начале координат $(0, 0)$. Характер другой точки равновесия $(1, 1)$ неопределен, но она напоминает центр на фазовом портрете.



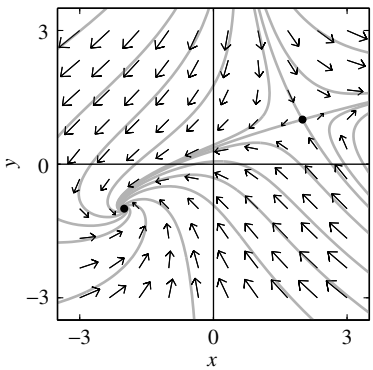
30. Есть седловая точка $(1, 1)$ и спиральный сток (устойчивый фокус) $(-1, 1)$.



31. Есть седловая точка $(1, 1)$ и спиральный сток (устойчивый фокус) $(-1, -1)$.



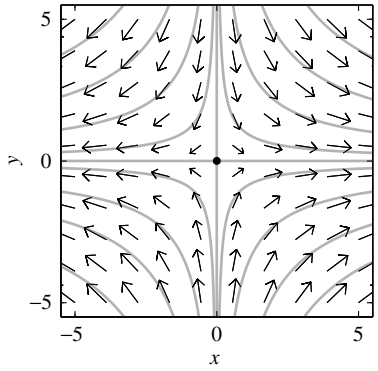
32. Есть седловая точка в $(2, 1)$ и спиральный сток (устойчивый фокус) $(-2, -1)$.



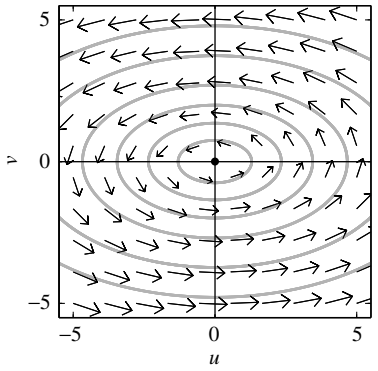
37. Обратите внимание, что дифференциальное уравнение однородно.

Раздел 6.3

1. Линеаризация в начале координат $(0, 0)$: $x' = 200x$, $y' = -150y$; фазовый портрет:

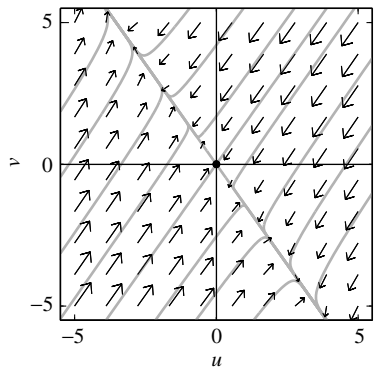


Линеаризация в $(75, 50)$: $u' = -300v$, $v' = 100u$; фазовый портрет:

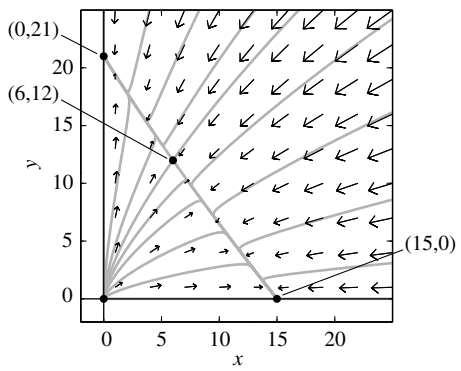


5. Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 + 45\lambda + 126 = 0$.

7. Характеристическое уравнение имеет вид $(-24 - \lambda)^2 - 2 \cdot (18)^2 = 0$. Фазовый портрет:

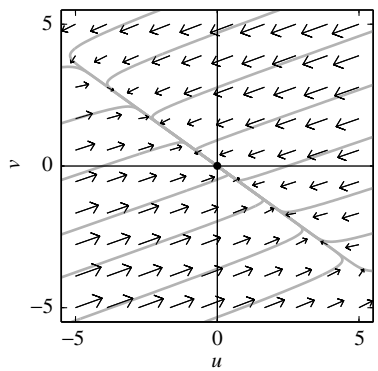


Фазовый портрет для нелинейной системы в задачах 4–7:

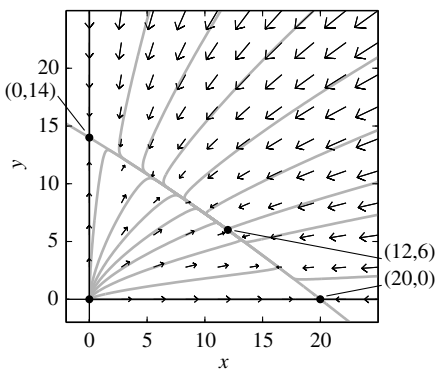


9. Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 + 58\lambda - 120 = 0$.

10. Характеристическое уравнение имеет вид $(\lambda + 36)(\lambda + 18) - 576 = 0$. Фазовый портрет:

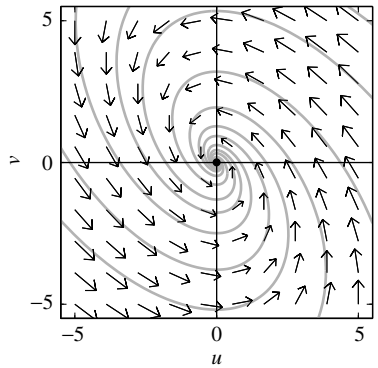


Фазовый портрет для нелинейной системы в задачах 8–10:



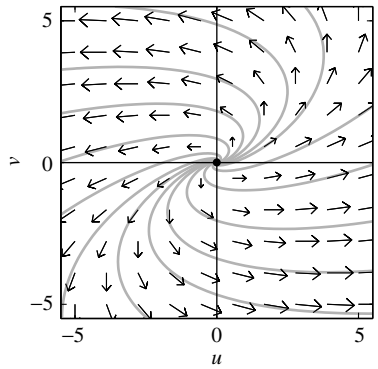
12. Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 + 2\lambda - 15 = 0$.

13. Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 + 2\lambda + 6 = 0$. Фазовый портрет:

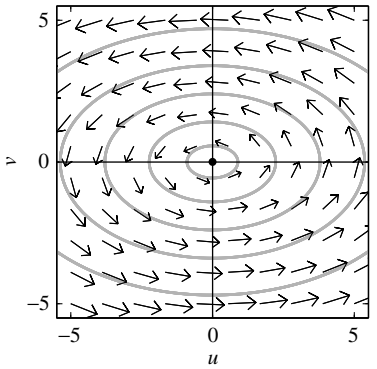


15. Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 + 2\lambda - 24 = 0$.

17. Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 - 4\lambda + 6 = 0$. Фазовый портрет:

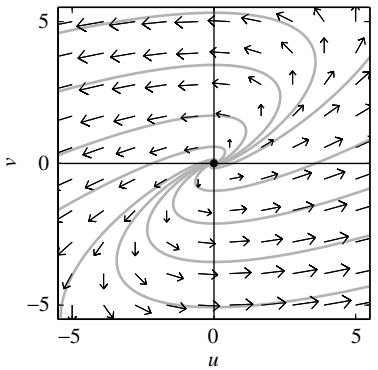


19. Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 + 10 = 0$. Фазовый портрет:



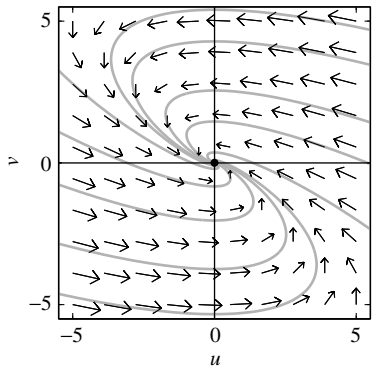
21. Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$.

22. Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 - 5\lambda + 10 = 0$. Фазовый портрет:



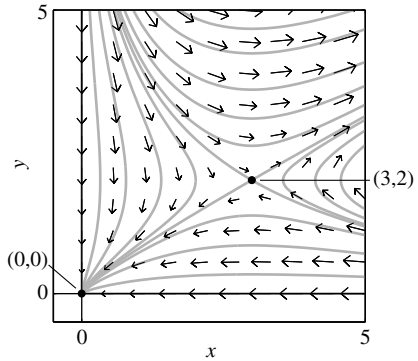
24. Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 + 5\lambda - 14 = 0$.

25. Характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2 + 5\lambda + 10 = 0$. Фазовый портрет:

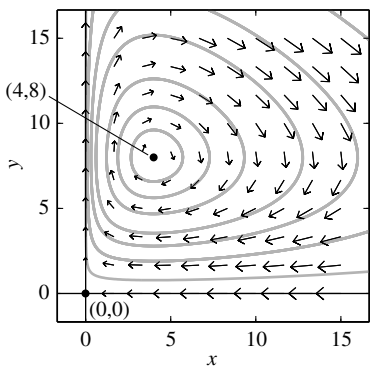


26. Естественный прирост конкурирующих популяций.
Точки равновесия: узел-источник $(0, 0)$ и седловая точка $(3, 2)$
Отличные от нуля численности сосуществующих популяций $x(t) \equiv 3$, $y(t) \equiv 2$

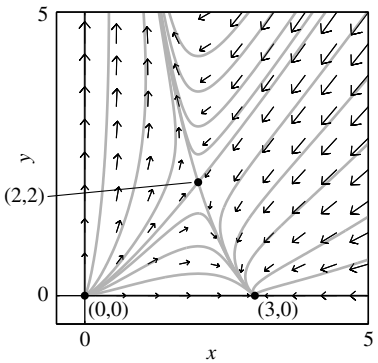
27. Естественно уменьшающиеся сотрудничающие популяции.
Точки равновесия: узел-сток $(0, 0)$ и седловая точка $(3, 2)$
Отличные от нуля численности сосуществующих популяций $x(t) \equiv 3$, $y(t) \equiv 2$



28. Естественно уменьшающаяся популяция хищника, естественно возрастающая численность популяции жертвы (добычи).
Точки равновесия: седловая точка $(0, 0)$ и очевидный устойчивый центр $(4, 8)$.
Отличные от нуля численности сосуществующих популяций $x(t) \equiv 4$, $y(t) \equiv 8$

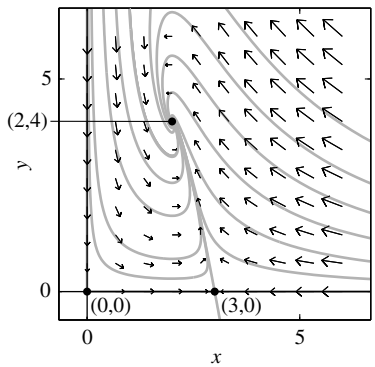


29. Логистическая и естественно растущая конкурирующие популяции.
Точки равновесия: узел-источник $(0, 0)$, узел-сток $(3, 0)$ и седловая точка $(2, 2)$
Отличные от нуля численности сосуществующих популяций $x(t) \equiv 2$, $y(t) \equiv 2$



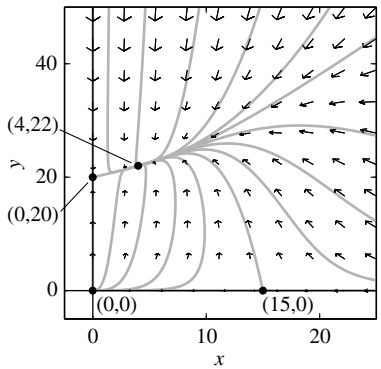
30. Логистическая и естественно уменьшающаяся популяции в сотрудничестве.
Точки равновесия: седловая точка $(0, 0)$, узел-сток $(3, 0)$ и седловая точка $(5, 4)$
Отличные от нуля численности сосуществующих популяций $x(t) \equiv 5$, $y(t) \equiv 4$

31. Логистическая популяция добычи, естественно уменьшающаяся численность популяции хищника.
Точки равновесия: седловые точки $(0, 0)$ и $(3, 0)$, спиральный сток (устойчивый фокус) $(2, 4)$
Отличные от нуля численности сосуществующих популяций $x(t) \equiv 2$, $y(t) \equiv 4$



32. Логистические популяции в сотрудничестве.
Точки равновесия: узел-источник $(0, 0)$, седловые точки $(10, 0)$ и $(0, 20)$, узел-сток $(30, 60)$
Отличные от нуля численности сосуществующих популяций $x(t) \equiv 30$, $y(t) \equiv 60$

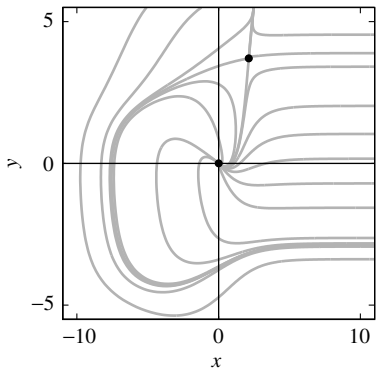
33. Логистические популяции жертвы (добычи) и хищника.
Точки равновесия: узел-источник $(0, 0)$, седловые точки $(30, 0)$ и $(0, 20)$, узел-сток $(4, 22)$
Отличные от нуля численности сосуществующих популяций $x(t) \equiv 4$, $y(t) \equiv 22$



34. Логистические популяции жертвы (добычи) и хищника.
Точки равновесия: узел-источник $(0, 0)$, седловые точки $(15, 0)$ и $(0, 5)$, спиральный сток (устойчивый фокус) $(10, 10)$
Отличные от нуля численности сосуществующих популяций $x(t) \equiv 10$, $y(t) \equiv 10$

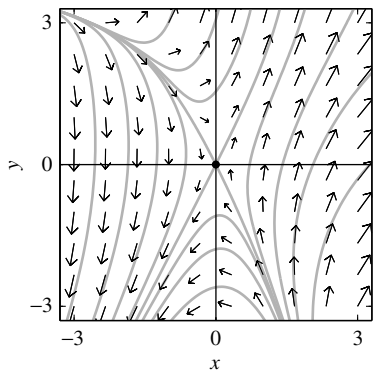
Раздел 6.4

1. Собственные значения: -2, -3; устойчивый узел

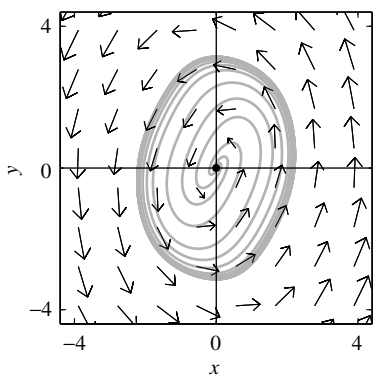


2. Собственные значения: 1, 3; неустойчивый узел

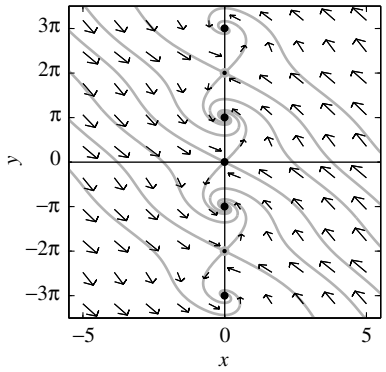
3. Собственные значения: -3, 5; неустойчивая седловая точка



4. Собственные значения: $-1 \pm 2i$; устойчивый фокус

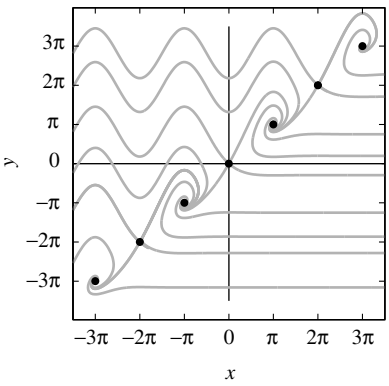


5. Точки равновесия: $(0, n\pi)$, где n — целое число; неустойчивая седловая точка, если n является четным, устойчивый фокус, если n нечетное



6. Точки равновесия: $(n, 0)$, где n — целое число; неустойчивая седловая точка, если n является четным, устойчивый фокус, если n нечетное

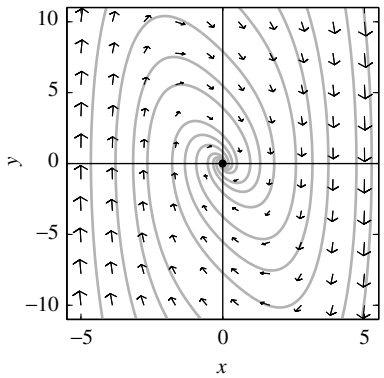
7. Точки равновесия: $(n\pi, n\pi)$, где n — целое число; неустойчивая седловая точка, если n является четным, устойчивый фокус, если n нечетное



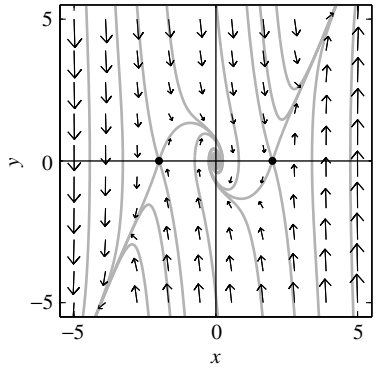
8. Точки равновесия: $(n\pi, 0)$, где n — целое число; неустойчивый узел, если n является четным, неустойчивая седловая точка, если n нечетное

9. Если n нечетное, то $(n\pi, 0)$ представляет собой неустойчивую седловую точку.
10. Если n нечетное, то $(n\pi, 0)$ — устойчивый узел.
11. $(n\pi, 0)$ представляет собой устойчивый фокус.
12. Неустойчивые седловые точки $(2, 0)$ и $(-2, 0)$, устойчивый центр в начале координат $(0, 0)$
13. Неустойчивые седловые точки $(2, 0)$ и $(-2, 0)$, устойчивый фокус в начале координат $(0, 0)$
14. Устойчивые центры $(2, 0)$ и $(-2, 0)$, неустойчивая седловая точка в начале координат $(0, 0)$
15. Устойчивый центр в начале координат $(0, 0)$ и неустойчивая седловая точка $(4, 0)$
16. Устойчивые центры $(2, 0)$, $(0, 0)$ и $(-2, 0)$, неустойчивые седловые точки $(1, 0)$ и $(-1, 0)$

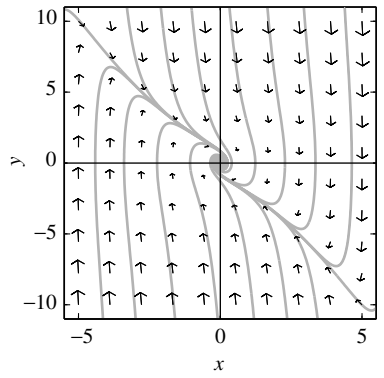
17. $(0, 0)$ — спиральный сток (устойчивый фокус).



18. $(0, 0)$ — спиральный сток (устойчивый фокус); точки $(\pm 2, 0)$ — седловые точки.



19. $(0, 0)$ — спиральный сток (устойчивый фокус).



20. $(n\pi, 0)$ — спиральный сток (устойчивый фокус), если n является четным, седловая точка, если n нечетное.

Глава 7

Раздел 7.1

1. $1/s^2,\ s > 0$
2. $2/s^3,\ s > 0$
3. $e/(s-3),\ s > 3$
4. $s/(s^2+1),\ s > 0$
5. $1/(s^2-1),\ s > 1$
6. $\frac{1}{2}[1/s - s/(s^2+4)],\ s > 0$
7. $(1-e^{-s})/s,\ s > 0$
8. $(e^{-s} - e^{-2s})/s,\ s > 0$
9. $(1 - e^{-s} - se^{-s})/s^2,\ s > 0$
10. $(s - 1 + e^{-s})/s^2,\ s > 0$
11. $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}s^{-3/2} + 3s^{-2},\ s > 0$
12. $(45\pi - 192s^{3/2})/(8s^{7/2}),\ s > 0$
13. $s^{-2} - 2(s-3)^{-1},\ s > 3$
14. $3\sqrt{\pi}/(4s^{5/2}) + 1/(s+10),\ s > 0$
15. $s^{-1} + s(s^2-25)^{-1},\ s > 5$
16. $(s+2)/(s^2+4),\ s > 0$
17. $\cos^2 2t = \frac{1}{2}(1+\cos 4t);\ \ \frac{1}{2}\left[s^{-1} + s/(s^2+16)\right],\ s > 0$
18. $3/(s^2+36),\ s > 0$
19. $s^{-1} + 3s^{-2} + 6s^{-3} + 6s^{-4},\ s > 0$
20. $1/(s-1)^2,\ s > 1$
21. $(s^2-4)/(s^2+4)^2,\ s > 0$
22. $\frac{1}{2}\left[s/(s^2-36) - s^{-1}\right]$
23. $\frac{1}{2}t^3$
24. $2\sqrt{t/\pi}$
25. $1 - \frac{8}{3}t^{3/2}\pi^{-1/2}$
26. e^{-5t}
27. $3e^{4t}$
28. $3\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t$
29. $\frac{5}{3}\sin 3t - 3\cos 3t$

30. $-\cosh 2t - \frac{9}{2}\sinh 2t$
31. $\frac{3}{5}\sinh 5t - 10\cosh 5t$
32. $2u(t-3)$
37. $f(t) = 1 - u(t-a)$. Ваш рисунок должен показать, что график f проходит через точку $(a, 0)$, но не через точку $(a, 1)$.
38. $f(t) = u(t-a) - u(t-b)$. Ваш рисунок должен показать, что график f проходит через точки $(a, 1)$ и $(b, 0)$, но не через точки $(a, 0)$ и $(b, 1)$.
39. На рис. 7.2.8 показан график единичной ступенчатой функции.

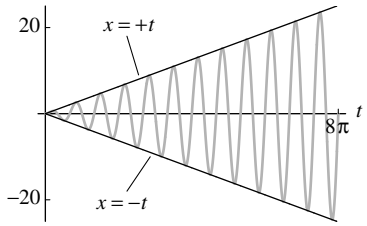
Раздел 7.2

1. $x(t) = 5\cos 2t$
2. $x(t) = 3\cos 3t + \frac{4}{3}\sin 3t$
3. $x(t) = \frac{2}{3}(e^{2t} - e^{-t})$
4. $x(t) = \frac{1}{2}(7e^{-3t} - 3e^{-5t})$
5. $x(t) = \frac{1}{3}(2\sin t - \sin 2t)$
6. $x(t) = \frac{1}{3}(\cos t - \cos 2t)$
7. $x(t) = \frac{1}{8}(9\cos t - \cos 3t)$
8. $x(t) = \frac{1}{9}(1 - \cos 3t)$
9. $x(t) = \frac{1}{6}(2 - 3e^{-t} + e^{-3t})$
10. $x(t) = \frac{1}{4}(2t - 3 + 12e^{-t} - 9e^{-2t})$
11. $x(t) = 1$, $y(t) = -2$
12. $x(t) = \frac{2}{9}(e^{2t} - e^{-t} - 3te^{-t})$, $y(t) = \frac{1}{9}(e^{2t} - e^{-t} + 6te^{-t})$
13. $x(t) = -\left(2/\sqrt{3}\right)\sinh\left(t/\sqrt{3}\right)$, $y(t) = \cosh\left(t/\sqrt{3}\right) + \left(1/\sqrt{3}\right)\sinh\left(t/\sqrt{3}\right)$
14. $x(t) = \frac{1}{4}(2t - 3\sin 2t)$, $y(t) = -\frac{1}{8}(2t + 3\sin 2t)$
15. $x(t) = \frac{1}{3}\left(2 + e^{-3t/2}\left[\cos(rt/2) + r\sin(rt/2)\right]\right)$, $y(t) = \frac{1}{21}\left(28 - 9e^{t} + 2e^{-3t/2}\left[\cos(rt/2) + 4r\sin(rt/2)\right]\right)$, где $r = \sqrt{3}$
16. $x(t) = \cos t + \sin t$, $y(t) = e^t - \cos t$, $z(t) = -2\sin t$
17. $f(t) = \frac{1}{3}(e^{3t} - 1)$
18. $f(t) = \frac{3}{5}(1 - e^{-5t})$
19. $f(t) = \frac{1}{4}(1 - \cos 2t) = \frac{1}{2}\sin^2 t$
20. $f(t) = \frac{1}{9}(6\sin 3t - \cos 3t + 1)$
21. $f(t) = t - \sin t$
22. $f(t) = \frac{1}{9}(-1 + \cosh 3t)$
23. $f(t) = -t + \sinh t$
24. $f(t) = \frac{1}{2}(e^{-2t} - 2e^{-t} + 1)$

Раздел 7.3

1. $24/(s-\pi)^5$
2. $\frac{3}{4}\sqrt{\pi}\,(s+4)^{-5/2}$
3. $3\pi/[(s+2)^2 + 9\pi^2]$
4. $\sqrt{2}\,(2s+5)/(4s^2 + 4s + 17)$
5. $\frac{3}{2}e^{2t}$
6. $(t - t^2)e^{-t}$
7. te^{-2t}
8. $e^{-2t}\cos t$
9. $e^{3t}\left(3\cos 4t + \frac{7}{2}\sin 4t\right)$
10. $\frac{1}{36}e^{2t/3}\left(8\cos\frac{4}{3}t - 5\sin\frac{4}{3}t\right)$
11. $\frac{1}{2}\sinh 2t$
12. $2 + 3e^{3t}$
13. $3e^{-2t} - 5e^{-5t}$
14. $2 + e^{2t} - 3e^{-t}$
15. $\frac{1}{25}(e^{5t} - 1 - 5t)$
16. $\frac{1}{125}[e^{2t}(5t-2) + e^{-3t}(5t+2)\,]$
17. $\frac{1}{16}(\sinh 2t - \sin 2t)$
18. $e^{4t}\left(1 + 12t + 24t^2 + \frac{32}{3}t^3\right)$
19. $\frac{1}{3}(2\cos 2t + 2\sin 2t - 2\cos t - \sin t)$
20. $\frac{1}{32}[e^{2t}(2t-1) + e^{-2t}(2t+1)\,]$
21. $\frac{1}{2}e^{-t}(5\sin t - 3t\cos t - 2t\sin t)$
22. $\frac{1}{64}e^{t/2}[(4t+8)\cos t + (4-3t)\sin t]$
27. $\frac{1}{4}e^{-3t}(8\cos 4t + 9\sin 4t)$
28. $\frac{1}{4}(1 - 2e^{2t} + e^{4t})$
29. $\frac{1}{8}(-6t + 3\sinh 2t)$
30. $\frac{1}{10}[2e^{-t} - e^{-2t}(2\cos 2t + \sin 2t)]$
31. $\frac{1}{15}(6e^{2t} - 5 - e^{-3t})$
32. $\frac{1}{2}(\cosh t + \cos t)$
33. $x(t) = r(\cosh rt\sin rt - \sinh rt\cos rt)$, где $r = 1/\sqrt{2}$
34. $\frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin 3t$
35. $\frac{1}{16}(\sin 2t - 2t\cos 2t)$
36. $\frac{1}{50}[2e^{2t} + (10t-2)\cos t - (5t+14)\sin t]$
37. $\frac{1}{50}[(5t-1)e^{-t} + e^{-2t}(\cos 3t + 32\sin 3t)]$
38. $\frac{1}{510}e^{-3t}(489\cos 3t + 307\sin 3t) + \frac{1}{170}(7\cos 2t + 6\sin 2t)$

39.



Раздел 7.4

1. $\frac{1}{2}t^2$

2. $(e^{at} - at - 1)/a^2$

3. $\frac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$

4. $2(t - \sin t)$

5. te^{at}

6. $(e^{at} - e^{bt})/(a - b)$

7. $\frac{1}{3}(e^{3t} - 1)$

8. $\frac{1}{4}(1 - \cos 2t)$

9. $\frac{1}{54}(\sin 3t - 3t\cos 3t)$

10. $(kt - \sin kt)/k^3$

11. $\frac{1}{4}(\sin 2t + 2t\cos 2t)$

12. $\frac{1}{5}[1 - e^{-2t}(\cos t + 2\sin t)]$

13. $\frac{1}{10}(3e^{3t} - 3\cos t + \sin t)$

14. $\frac{1}{3}(\cos t - \cos 2t)$

15. $6s/(s^2 + 9)^2,\ s > 0$

16. $(2s^3 - 24s)/(s^2 + 4)^3,\ s > 0$

17. $(s^2 - 4s - 5)/(s^2 - 4s + 13)^2,\ s > 0$

18. $\dfrac{2(3s^2 + 6s + 7)}{(s + 1)^2(s^2 + 2s + 5)^2},\ s > 0$

19. $\frac{1}{2}\pi - \operatorname{arctg} s = \operatorname{arctg}(1/s),\ s > 0$

20. $\frac{1}{2}\ln(s^2 + 4) - \ln s,\ s > 0$

21. $\ln s - \ln(s - 3),\ s > 3$

22. $\ln(s + 1) - \ln(s - 1),\ s > 1$

23. $-(2\sinh 2t)/t$

24. $2(\cos 2t - \cos t)/t$

25. $(e^{-2t} + e^{3t} - 2\cos t)/t$

26. $(e^{-2t}\sin 3t)/t$

27. $2(1 - \cos t)/t$

28. $\frac{1}{8}(t\sin t - t^2\cos t)$

29. $(s + 1)X'(s) + 4X(s) = 0;\ x(t) = Ct^3e^{-t},\ C \neq 0$

30. $X(s) = A/(s + 3)^3;\ x(t) = Ct^2e^{-3t},\ C \neq 0$

31. $(s - 2)X'(s) + 3X(s) = 0;\ x(t) = Ct^2e^{2t},\ C \neq 0$

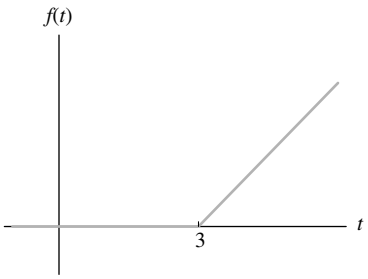
32. $(s^2 + 2s)X'(s) + (4s + 4)X(s) = 0;\ x(t) = C(1 - t - e^{-2t} - te^{-2t}),\ C \neq 0$

33. $(s^2 + 1)X'(s) + 4sX(s) = 0;\ x(t) = C(\sin t - t\cos t),\ C \neq 0$

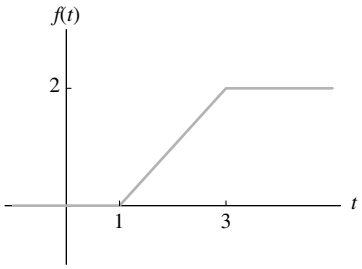
34. $x(t) = Ce^{-2t}(\sin 3t - 3t\cos 3t),\ C \neq 0$

Раздел 7.5

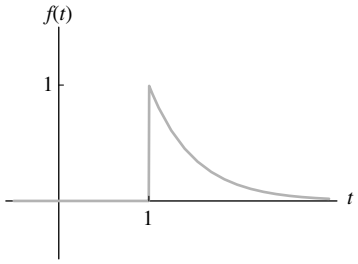
1. $f(t) = u(t - 3)\cdot(t - 3)$



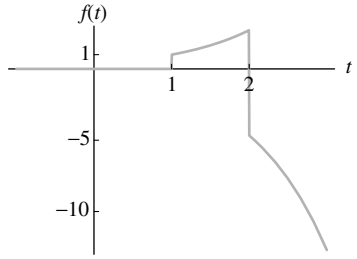
2. $f(t) = (t - 1)u(t - 1) - (t - 3)u(t - 3)$



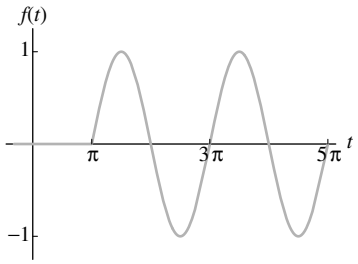
3. $f(t) = u(t-1) \cdot e^{-2(t-1)}$



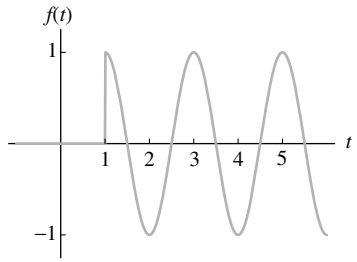
4. $f(t) = e^{t-1}u(t-1) - e^2e^{t-2}u(t-2)$



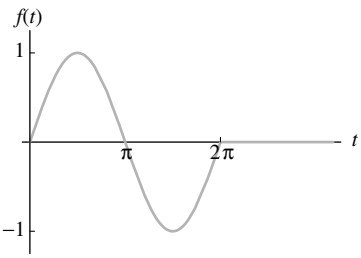
5. $f(t) = u(t-\pi) \cdot \sin(t-\pi) = -u(t-\pi)\sin t$



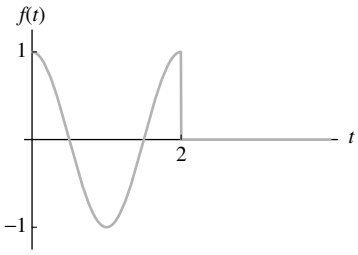
6. $f(t) = u(t-1) \cdot \cos\pi(t-1) = -u(t-1)\cos\pi t$



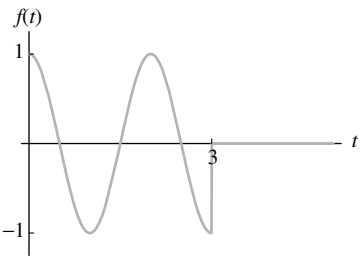
7. $f(t) = \sin t - u(t-2\pi)\sin(t-2\pi) = [1-u(t-2\pi)]\sin t$



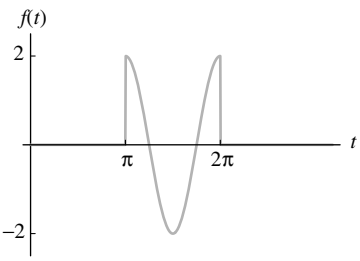
8. $f(t) = \cos\pi t - u(t-2)\cos\pi(t-2) = [1-u(t-2)]\cos\pi t$



9. $f(t) = \cos\pi t + u(t-3)\cos\pi(t-3) = [1-u(t-3)]\cos\pi t$



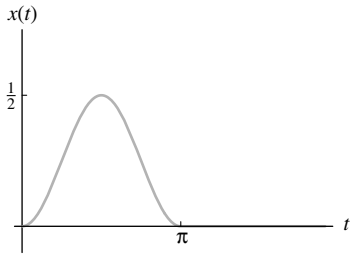
10. $f(t) = 2u(t-\pi)\cos 2(t-\pi) - 2u(t-2\pi)\cos 2(t-2\pi) = 2[u(t-\pi) - u(t-2\pi)]\cos 2t$

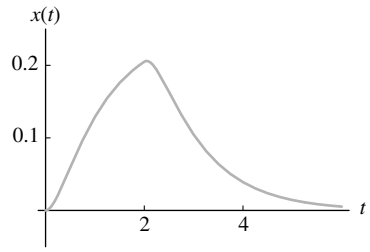


11. $f(t) = 2[1-u_3(t)]$; $F(s) = 2(1-e^{-3s})/s$

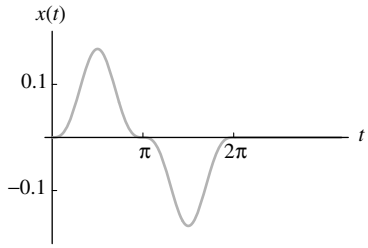
12. $F(s) = (e^{-s} - e^{-4s})/s$

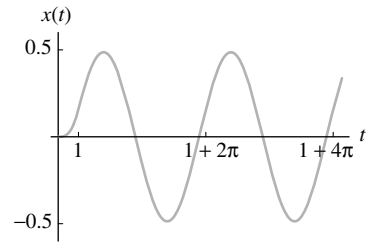
13. $F(s) = (1 - e^{-2\pi s})/(s^2 + 1)$
14. $F(s) = s(1 - e^{-2s})/(s^2 + \pi^2)$
15. $F(s) = (1 + e^{-3\pi s})/(s^2 + 1)$
16. $F(s) = 2(e^{-\pi s} - e^{-2\pi s})/(s^2 + 4)$
17. $F(s) = \pi(e^{-2s} + e^{-3s})/(s^2 + \pi^2)$
18. $F(s) = 2\pi(e^{-3s} + e^{-5s})/(4s^2 + \pi^2)$
19. $F(s) = e^{-s}(s^{-1} + s^{-2})$
20. $F(s) = (1 - e^{-s})/s^2$
21. $F(s) = (1 - 2e^{-s} + e^{-2s})/s^2$
28. $F(s) = (1 - e^{-as} - ase^{-as})/[s^2(1 - e^{-2as})]$
31. $x(t) = \frac{1}{2}\,[1 - u(t - \pi)]\sin^2 t$
32. $x(t) = g(t) - u(t-2)g(t-2)$, где $g(t) = \frac{1}{12}(3 - 4e^{-t} + e^{-4t})$.



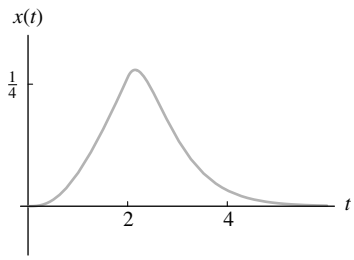


33. $x(t) = \frac{1}{8}\,[1 - u(t - 2\pi)]\left(\sin t - \frac{1}{3}\sin 3t\right)$
34. $x(t) = g(t) - u(t-1)[g(t-1) + h(t-1)]$, где $g(t) = t - \sin t$ и $h(t) = 1 - \cos t$.



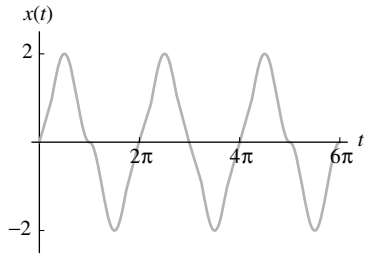


35. $x(t) = \frac{1}{4}\left\{-1 + t + (t+1)e^{-2t} + u(t-2)\left[1 - t + (3t-5)e^{-2(t-2)}\right]\right\}$

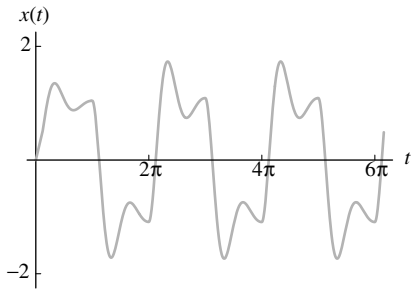


36. $i(t) = e^{-10t} - u(t-1)e^{-10(t-1)}$
37. $i(t) = [1 - u(t - 2\pi)]\sin 100t$
38. $i(t) = \frac{10}{99}[1 - (u - \pi)](\cos 10t - \cos 100t)$
39. $i(t) = \frac{1}{50}\left[(1 - e^{-50t})^2 - u(t-1)(1 + 98e^{-50(t-1)} - 99e^{-100(t-1)}\right]$
40. $i(t) = \frac{1}{50}\left[(1 - e^{-50t} - 50te^{-50t}) - u(t-1)(1 - e^{-50(t-1)} + 2450te^{-50(t-1)})\right]$

41. $x(t) = 2|\sin t|\sin t$

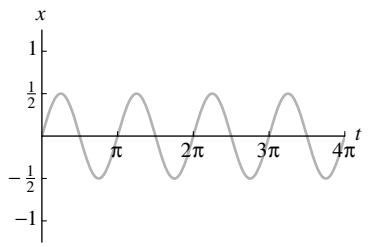


42. $x(t) = g(t) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u(t-n\pi)g(t-n\pi)$, где $g(t) = 1 - \frac{1}{3}e^{-t}(3\cos 3t + \sin 3t)$

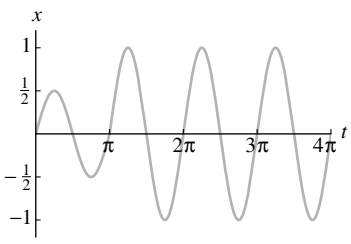


Раздел 7.6

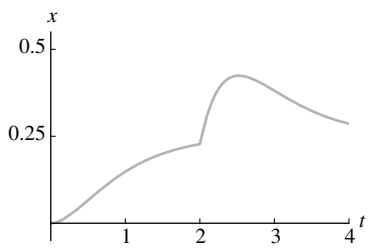
1. $x(t) = \frac{1}{2}\sin 2t$



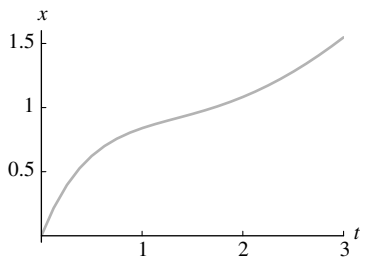
2. $x(t) = \frac{1}{2}[1 + u(t-\pi)]\sin 2t$



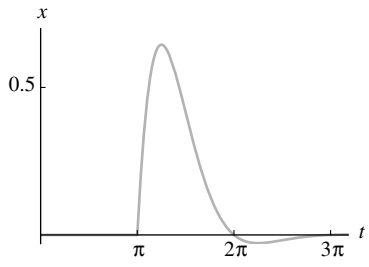
3. $x(t) = \frac{1}{4}[1 - e^{-2t} - 2te^{-2t}] + u(t-2)(t-2)e^{-2(t-2)}$



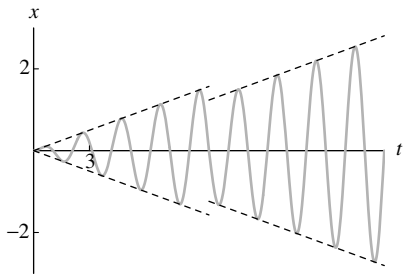
4. $x(t) = -2 + t + 2e^{-t} + 3te^{-t}$



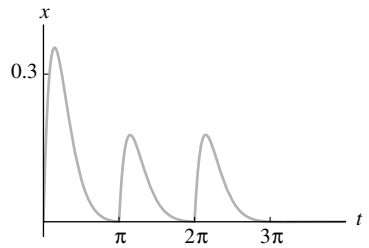
5. $x(t) = 2u(t-\pi)e^{-(t-\pi)}\sin(t-\pi)$



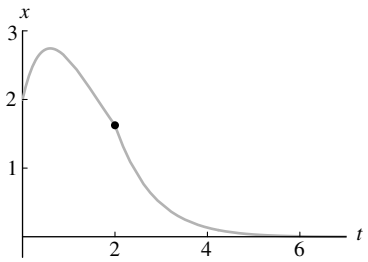
6. $x(t) = \frac{1}{6}(t - 2u(t-3\pi))\sin 3t$



7. $x(t) = \left[2 - e^{2\pi}u(t-\pi) + \right.$
$\left. + e^{4\pi}u(t-2\pi)\right] e^{-2t}\sin t$



8. $x(t) = (2+5t)e^{-t} - u(t-2)(t-2)e^{-(t-2)}$



9. $x(t) = \int_0^t \frac{1}{2}(\sin 2\tau) f(t-\tau)\,d\tau$

10. $x(t) = \int_0^t \tau e^{-3\tau} f(t-\tau)\,d\tau$

11. $x(t) = \int_0^t (e^{-3\tau}\sinh\tau) f(t-\tau)\,d\tau$

12. $x(t) = \int_0^t (e^{-2\tau}\sin 2\tau) f(t-\tau)\,d\tau$

13. (a) $mx_\epsilon(t) = p[t^2 - u_\epsilon(t)(t-\epsilon)^2]/(2\epsilon)$; (b) Если $t > \epsilon$, то $mx_\epsilon(t) = p(2\epsilon t - \epsilon^2)/(2\epsilon)$, и, следовательно, $mx_\epsilon(t) \to pt$ при $\epsilon \to 0$; (c) $mv = (mx)' = (pt)' = 0$.

15. Преобразование каждой из двух данных задач Коши (задач с начальными условиями) приводит к $(ms^2 + + k)X(s) = mv_0 = p_0$.

17. (b) $i(t) = e^{-100(t-1)}u_1(t) - e^{-100(t-2)}u_2(t)$. Если $t > 2$, то $i(t) = -(e^{100}-1)e^{100(1-t)} < 0$.

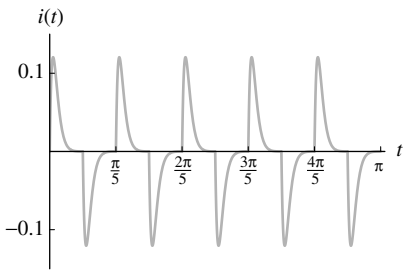
18. $i(t) = [1 - u(t-\pi)]\sin 10t$

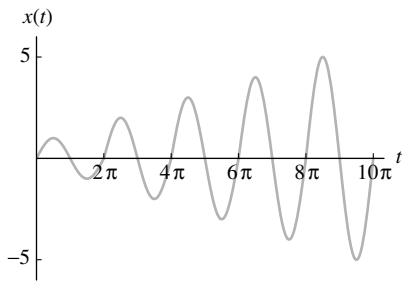
19. $i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u(t - n\pi/10)\sin 10t$

20. $i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u(t - n\pi/5)\sin 10t$

21. $i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u(t - n\pi/10)e^{3n\pi}e^{-30t}\sin t$

22. $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u(t - 2n\pi)\sin t$





Глава 8

Раздел 8.1

1. $y(x) = c_0\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots\right) = c_0 e^x;\ \rho = +\infty$

2. $y(x) = c_0\left(1 + \dfrac{4x}{1!} + \dfrac{4^2x^2}{2!} + \dfrac{4^3x^3}{3!} + \dfrac{4^4x^4}{4!} + \cdots\right) = c_0 e^{4x};\ \rho = \infty$

3. $y(x) = c_0\left(1 - \dfrac{3x}{2} + \dfrac{(3x)^2}{2!2^2} - \dfrac{(3x)^3}{3!2^3} + \dfrac{(3x)^4}{4!2^4} - \cdots\right) = c_0 e^{-3x/2};\ \rho = +\infty$

4. $y(x) = c_0\left(1 - \dfrac{x^2}{1!} + \dfrac{x^4}{2!} - \dfrac{x^6}{3!} + \cdots\right) = c_0 e^{-x^2};\ \rho = \infty$

5. $y(x) = c_0\left(1 + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^6}{2!3^2} + \dfrac{x^9}{3!3^3} + \cdots\right) = c_0 \exp\left(\frac{1}{3}x^3\right);\ \rho = +\infty$

6. $y(x) = c_0\left(1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^3}{8} + \dfrac{x^4}{16} + \cdots\right) = \dfrac{2c_0}{2-x};\ \rho = 2$

7. $y(x) = c_0(1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \cdots) = \dfrac{c_0}{1-2x};\ \rho = \frac{1}{2}$

8. $y(x) = c_0\left(1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^3}{16} - \dfrac{5x^4}{128} + \cdots\right) = c_0\sqrt{1+x};\ \rho = 1$

9. $y(x) = c_0(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots) = \dfrac{c_0}{(1-x)^2};\ \rho = 1$

10. $y(x) = c_0\left(1 - \dfrac{3x}{2} + \dfrac{3x^2}{8} + \dfrac{x^3}{16} + \dfrac{3x^4}{128} + \cdots\right) = c_0(1-x)^{3/2};\ \rho = 1$

11. $y(x) = c_0\left(1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + \cdots\right) + c_1\left(x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^7}{7!} + \cdots\right) = c_0\cosh x + c_1\sinh x;$
$\rho = +\infty$

12. $y(x) = c_0\left(1 + \dfrac{(2x)^2}{2!} + \dfrac{(2x)^4}{4!} + \dfrac{(2x)^6}{6!} + \cdots\right) +$
$+ \dfrac{c_1}{2}\left((2x) + \dfrac{(2x)^3}{3!} + \dfrac{(2x)^5}{5!} + \dfrac{(2x)^7}{7!} + \cdots\right) = c_0\cosh 2x + \dfrac{c_1}{2}\sinh 2x;\ \rho = \infty$

13. $y(x) = c_0\left(1 - \dfrac{(3x)^2}{2!} + \dfrac{(3x)^4}{4!} - \dfrac{(3x)^6}{6!} + \cdots\right) +$
$+ \dfrac{c_1}{3}\left(3x - \dfrac{(3x)^3}{3!} + \dfrac{(3x)^5}{5!} - \dfrac{(3x)^7}{7!} + \cdots\right) = c_0\cos 3x + \frac{1}{3}c_1\sin 3x;\ \rho = +\infty$

14. $y(x) = x + c_0\left(1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots\right) + (c_1 - 1)\left(x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots\right) = x + c_0\cos x +$
$+ (c_1 - 1)\sin x;\ \rho = \infty$

15. $(n+1)c_n = 0$ для всех $n \geqq 0$, так что $c_n = 0$ для всех $n \geqq 0$.

16. $2nc_n = c_n$ для всех $n \geqq 0$, так что $c_n = 0$ для всех $n \geqq 0$.

17. $c_0 = c_1 = 0$ и $c_{n+1} = -nc_n$ для $n \geqq 1$, поэтому $c_n = 0$ для всех $n \geqq 0$.

18. $c_n = 0$ для всех $n \geqq 0$

19. $(n+1)(n+2)c_{n+2} = -4c_n;\ y(x) = \dfrac{3}{2}\left[(2x) - \dfrac{(2x)^3}{3!} + \dfrac{(2x)^5}{5!} - \dfrac{(2x)^7}{7!} + \cdots\right] = \dfrac{3}{2}\sin 2x$

20. $(n+1)(n+2)c_{n+2} = 4c_n;\ y(x) = 2\left[1 + \dfrac{(2x)^2}{2!} + \dfrac{(2x)^4}{4!} + \dfrac{(2x)^6}{6!} + \cdots\right] = 2\cosh 2x$

21. $n(n+1)c_{n+1} = 2nc_n - c_{n-1};\ y(x) = x + x^2 + \dfrac{x^3}{2!} + \dfrac{x^4}{3!} + \dfrac{x^5}{4!} + \cdots = xe^x$

22. $n(n+1)c_{n+1} = -nc_n + 2c_{n-1};\ y = e^{-2x}$

23. Поскольку $c_0 = c_1 = 0$ и $(n^2 - n + 1)c_n + (n-1)c_{n-1} = 0$ для $n \geqq 2$, $c_n = 0$ для всех $n \geqq 0$

Раздел 8.2

1. $c_{n+2}=c_n$; $y(x)=c_0\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{2n}+c_1\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{2n+1}=\dfrac{c_0+c_1x}{1-x^2}$; $\rho=1$

2. $c_{n+2}=-\frac{1}{2}c_n$; $\rho=2$; $y(x)=c_0\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^nx^{2n}}{2^n}+c_1\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^nx^{2n+1}}{2^n}$

3. $(n+2)c_{n+2}=-c_n$; $y(x)=c_0\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^nx^{2n}}{n!2^n}+c_1\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^nx^{2n+1}}{(2n+1)!!}$; $\rho=+\infty$

4. $(n+2)c_{n+2}=-(n+4)c_n$; $\rho=1$; $y(x)=c_0\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^{2n}+\frac{1}{3}c_1\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+3)x^{2n+1}$

5. $3(n+2)c_{n+2}=nc_n$; $\rho=\sqrt{3}$; $y(x)=c_0+c_1\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)3^n}$

6. $(n+1)(n+2)c_{n+2}=(n-3)(n-4)c_n$; $\rho=\infty$; $y(x)=c_0(1+6x^2+x^4)+c_1(x+x^3)$

7. $3(n+1)(n+2)c_{n+2}=(n-4)^2c_n$;
$y(x)=c_0\left(1-\dfrac{8x^2}{3}+\dfrac{8x^4}{27}\right)+c_1\left(x-\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{x^5}{120}+9\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2n-5)!!x^{2n+1}}{(2n+1)!3^n}\right)$

8. $2(n+1)(n+2)c_{n+2}=(n-4)(n+4)c_n$;
$y(x)=c_0(1-4x^2+2x^4)+c_1\left(x-\dfrac{5x^3}{4}+\dfrac{7x^5}{32}+\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{(2n-5)!!(2n+3)!!x^{2n+1}}{(2n+1)!2^n}\right)$

9. $(n+1)(n+2)c_{n+2}=(n+3)(n+4)c_n$; $\rho=1$;
$y(x)=c_0\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(2n+1)x^{2n}+\dfrac{c_1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(2n+3)x^{2n+1}$

10. $3(n+1)(n+2)c_{n+2}=-(n-4)c_n$;
$y(x)=c_0\left(1+\dfrac{2x^2}{3}+\dfrac{x^4}{27}\right)+c_1\left(x+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{360}+3\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(2n-5)!!x^{2n+1}}{(2n+1)!3^n}\right)$

11. $5(n+1)(n+2)c_{n+2}=2(n-5)c_n$;
$y(x)=c_1\left(x-\dfrac{4x^3}{15}+\dfrac{4x^5}{375}\right)+c_0\left(1-x^2+\dfrac{x^4}{10}+\dfrac{x^6}{750}+15\sum\limits_{n=4}^{\infty}\dfrac{(2n-7)!!\,2^nx^{2n}}{(2n)!5^n}\right)$

12. $c_2=0$; $(n+2)c_{n+3}=c_n$; $y(x)=c_0\left(1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{3n}}{2\cdot5\cdots(3n-1)}\right)+c_1\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{3n+1}}{n!3^n}$

13. $c_2=0$; $(n+3)c_{n+3}=-c_n$; $y(x)=c_0\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^nx^{3n}}{n!3^n}+c_1\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^nx^{3n+1}}{1\cdot4\cdots(3n+1)}$

14. $c_2=0$; $(n+2)(n+3)c_{n+3}=-c_n$;
$y(x)=c_0\left(1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^nx^{3n}}{3^n\cdot n!\cdot2\cdot5\cdots(3n-1)}\right)+c_1\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^nx^{3n+1}}{3^n\cdot n!\cdot1\cdot4\cdots(3n+1)}$

15. $c_2=c_3=0$; $(n+3)(n+4)c_{n+4}=-c_n$;
$y(x)=c_0\left(1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^nx^{4n}}{4^n\cdot n!\cdot3\cdot7\cdots(4n-1)}\right)+c_1\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^nx^{4n+1}}{4^n\cdot n!\cdot5\cdot9\cdots(4n+1)}$

16. $y(x)=x$

17. $y(x)=1+x^2$

18. $y(x)=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n(x-1)^{2n}}{n!\,2^n}$; сходится для всех x

19. $y(x)=\frac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2n+3)(x-1)^{2n+1}$; сходится, если $0<x<2$

20. $y(x) = 2 - 6(x-3)^2$; сходится для всех x

21. $y(x) = 1 + 4(x+2)^2$; сходится для всех x

22. $y(x) = 2x + 6$

23. $2c_2 + c_0 = 0$; $(n+1)(n+2)c_{n+2} + c_n + c_{n-1} = 0$ для $n \geqq 1$; $y_1(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} + \cdots$; $y_2(x) = x - \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^4}{12} + \cdots$

24. $y_1(x) = 1 + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^6}{45} + \cdots$; $y_2(x) = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{6} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots$

25. $c_2 = c_3 = 0$, $(n+3)(n+4)c_{n+4} + (n+1)c_{n+1} + c_n = 0$ для $n \geqq 0$; $y_1(x) = 1 - \dfrac{x^4}{12} + \dfrac{x^7}{126} + \cdots$; $y_2(x) = x - \dfrac{x^4}{12} - \dfrac{x^5}{20} + \cdots$

26. $y(x) = c_0\left(1 - \dfrac{x^6}{30} + \dfrac{x^9}{72} + \cdots\right) + c_1\left(x - \dfrac{x^7}{42} + \dfrac{x^{10}}{90} + \cdots\right)$

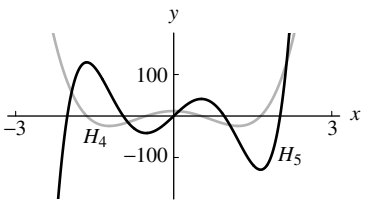
27. $y(x) = 1 - x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^5}{30} + \dfrac{29x^6}{720} + \dfrac{13x^7}{630} - \dfrac{143x^8}{40320} + \cdots$; $y(0{,}5) \approx 0{,}4156$

28. $y(x) = c_0\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \cdots\right) + c_1\left(x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{12} + \cdots\right)$

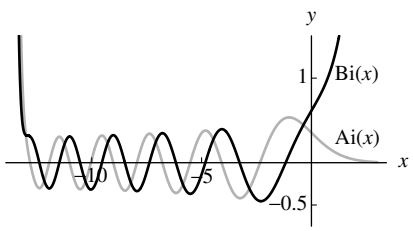
29. $y_1(x) = 1 - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{720}x^6 + \cdots$; $y_2(x) = x - \dfrac{1}{6}x^3 - \dfrac{1}{60}x^5 + \cdots$

30. $y(x) = c_0\left(1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \cdots\right) + c_1\left(x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{18} + \cdots\right)$

33. На следующем рисунке показаны отделенные нули 4-го и 5-го многочленов Эрмита.



34. Чтобы получить приведенный ниже рисунок, мы использовали $n = 40$ членов в каждой сумме. Но при $n = 50$ мы получаем то же самое изображение, что и на рис. 8.2.3 в тексте.



Раздел 8.3

1. Обыкновенная точка

2. Обыкновенная точка

3. Иррегулярная (нерегулярная) особая точка

4. Иррегулярная (нерегулярная) особая точка

5. Регулярная особая точка; $r_1 = 0$, $r_2 = -1$

6. Регулярная особая точка; $r_1 = 1$, $r_2 = -2$

7. Регулярная особая точка; $r = -3, -3$

8. Регулярная особая точка; $r = \frac{1}{2}, -3$

9. Регулярная особая точка $x = 1$

10. Регулярная особая точка $x = 1$

11. Регулярные особые точки $x = 1, -1$

12. Иррегулярная (нерегулярная) особая точка $x = 2$

13. Регулярные особые точки $x = 2, -2$

14. Иррегулярная (нерегулярная) особая точкаs $x = 3, -3$

15. Регулярная особая точка $x = 2$

16. Иррегулярная (нерегулярная) особая точка $x = 0$, регулярная особая точка $x = 1$

17. $y_1(x) = \cos\sqrt{x}$,
$y_2(x) = \sin\sqrt{x}$

18. $y_1(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!(2n+1)!!}$,
$y_2(x) = x^{-1/2} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!\,(2n-1)!!}$

19. $y_1(x) = x^{3/2}\left(1 + 3\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!\,(2n+3)!!}\right)$,
$y_2(x) = 1 - x - \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!\,(2n-3)!!}$

20. $y_1(x) = x^{1/3} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^n}{n!\cdot 4\cdot 7\cdots(3n+1)}$,
$y_2(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^n}{n!\cdot 2\cdot 5\cdots(3n-1)}$

21. $y_1(x) = x\left(1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!\cdot 7\cdot 11\cdots(4n+3)}\right)$,
$y_2(x) = x^{-1/2}\left(1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!\cdot 1\cdot 5\cdots(4n-3)}\right)$

22. $y_1(x) = x^{3/2}\left(1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!\cdot 9\cdot 13\cdots(4n+5)}\right)$
$y_2(x) = x^{-1}\left(1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n!\cdot 3\cdot 7\cdots(4n-1)}\right)$

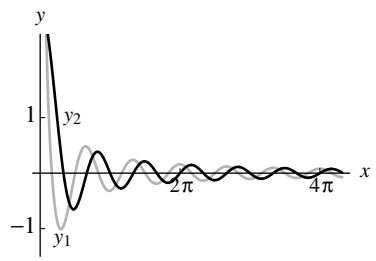
23. $y_1(x) = x^{1/2}\left(1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n\cdot n!\cdot 19\cdot 31\cdots(12n+7)}\right)$,
$y_2(x) = x^{-2/3}\left(1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n\cdot n!\cdot 5\cdot 17\cdots(12n-7)}\right)$

24. $y_1(x) = x^{1/3}\left(1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n\cdot n!\cdot 7\cdot 13\cdots(6n+1)}\right)$,
$y_2(x) = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n\cdot n!\cdot 5\cdot 11\cdots(6n-1)}$

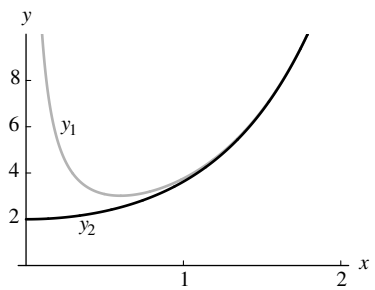
25. $y_1(x) = x^{1/2} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!\cdot 2^n} = x^{1/2} e^{-x/2}$,
$y_2(x) = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n-1)!!}$

26. $y_1(x) = x^{1/2} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!\cdot 2^n} = x^{1/2} \exp\left(\tfrac{1}{2}x^2\right)$,
$y_2(x) = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^{2n}}{3\cdot 7\cdots(4n-1)}$

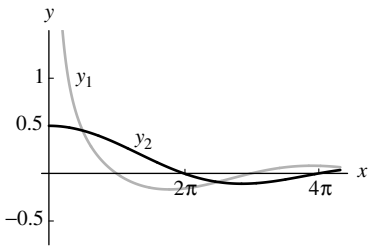
27. $y_1(x) = \dfrac{1}{x}\cos 3x$, $y_2(x) = \dfrac{1}{x}\sin 3x$



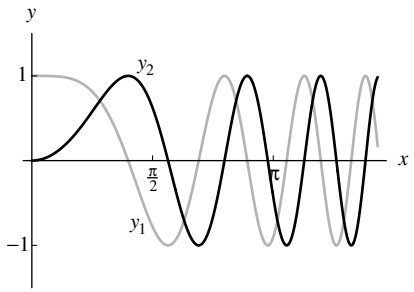
28. $y_1(x) = \dfrac{1}{x}\cosh 2x$, $y_2(x) = \dfrac{1}{x}\sinh 2x$



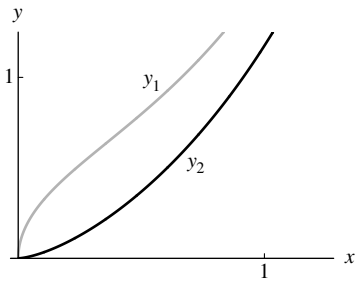
29. $y_1(x) = \dfrac{1}{x}\cos\dfrac{x}{2}$, $y_2(x) = \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{x}{2}$



30. $y_1(x) = \cos x^2$, $y_2(x) = \sin x^2$



31. $y_1(x) = x^{1/2}\cosh x$, $y_2(x) = x^{1/2}\sinh x$



32. $y_1(x) = x + \dfrac{x^2}{5}$, $y_2(x) = x^{-1/2}\left(1 - \dfrac{5x}{2} - \dfrac{15x^2}{8} - \dfrac{5x^3}{48} + \cdots\right)$

33. $y_1(x) = x^{-1}\left(1 + 10x + 5x^2 + \dfrac{10x^3}{9} + \cdots\right)$, $y_2(x) = x^{1/2}\left(1 + \dfrac{11x}{20} - \dfrac{11x^2}{224} + \dfrac{671x^3}{24192} + \cdots\right)$

34. $y_1(x) = x\left(1 - \dfrac{x^2}{42} + \dfrac{x^4}{1320} + \cdots\right)$, $y_2(x) = x^{-1/2}\left(1 - \dfrac{7x^2}{24} + \dfrac{19x^4}{3200} + \cdots\right)$

Раздел 8.4

1. $y_1(x) = \dfrac{1+x}{x^2}$, $y_2(x) = 1 + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+2)!}$

2. $y_1(x) = \dfrac{1}{x^2}\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}\right)$, $y_2(x) = 1 + 24\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+4)!}$

3. $y_1(x) = \dfrac{1}{x^4}\left(1 - 3x + \dfrac{9x^2}{2} - \dfrac{9x^3}{2}\right)$, $y_2(x) = 1 + 24\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n x^n}{(n+4)!}$

4. $y_1(x) = \dfrac{1}{x^5}\left(1 - \dfrac{3x}{5} + \dfrac{9x^2}{50} - \dfrac{9x^3}{250} + \dfrac{27x^4}{5000}\right)$, $y_2(x) = 1 + 120\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n x^n}{(n5)!\cdot 5^n}$

5. $y_1(x) = 1 + \dfrac{3x}{4} + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^3}{24}$, $y_2(x) = x^5\left(1 + 120\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{(n+5)!}\right)$

6. $y_1(x) = x^4\left(1 + \dfrac{8}{5}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+5)!!x^n}{n!\,(n+4)!2^n}\right)$

7. $y_1(x) = \dfrac{1}{x^2}(2 - 6x + 9x^2)$, $y_2(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}3^n x^n}{(n+2)!}$

8. $y_1(x) = 3 + 2x + x^2$, $y_2(x) = \dfrac{x^4}{(1-x)^2}$

9. $y_1(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \dfrac{x^6}{x^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots$,
$y_2(x) = y_1(x) \cdot \left(\ln x - \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{5x^4}{128} - \dfrac{23x^6}{3456} + \cdots \right)$

10. $y_1(x) = x \left(1 - \dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \dfrac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots \right)$,
$y_2(x) = y_1(x) \cdot \left(\ln x + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{5x^4}{128} + \dfrac{23x^6}{3456} + \cdots \right)$

11. $y_1(x) = x^2 \left(1 - 2x + \dfrac{3x^2}{2} - \dfrac{2x^3}{3} + \cdots \right)$,
$y_2(x) = y_1(x) \cdot \left(\ln x + 3x + \dfrac{11x^2}{4} + \dfrac{49x^3}{18} + \cdots \right)$

12. $y_1(x) = x^2 \left(1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{3x^2}{20} - \dfrac{x^3}{30} + \dfrac{x^4}{168} - \cdots \right)$,
$y_2(x) = y_1(x) \cdot \left(-\dfrac{1}{3x^3} + \dfrac{1}{20x} + \dfrac{x}{700} + \cdots \right)$

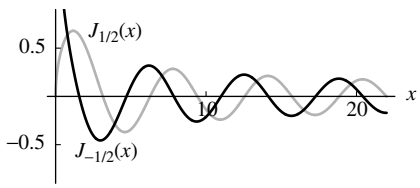
13. $y_1(x) = x^3 \left(1 - 2x + 2x^2 - \dfrac{4x^3}{3} + \cdots \right)$,
$y_2(x) = y_1(x) \cdot \left(2 \ln x - \dfrac{1}{2x^2} - \dfrac{2}{x} + \dfrac{4x}{3} + \cdots \right)$

14. $y_1(x) = x^2 \left(1 - \dfrac{2x}{5} + \dfrac{x^2}{10} - \dfrac{2x^3}{105} + \dfrac{x^4}{336} - \cdots \right)$,
$y_2(x) = y_1(x) \cdot \left(-\dfrac{1}{4x^4} + \dfrac{1}{15x^3} + \dfrac{1}{100x^2} - \dfrac{13}{1750x} + \cdots \right)$;
$y_2(x)$ не содержит логарифмического члена.

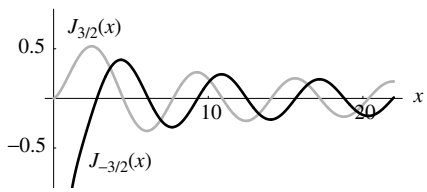
16. $y_1(x) = x^{3/2} \left(1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{2^n \cdot n! \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+3)} \right)$,
$y_2(x) = x^{-3/2} \left(1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{2^n \cdot n! \cdot (-1) \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2n-3)} \right)$

Раздел 8.5

2.

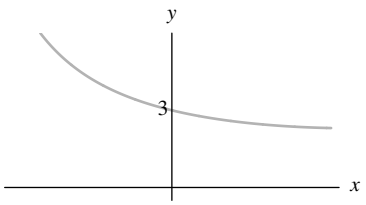


4.



5. $J_4(x) = \dfrac{1}{x^2}(x^2 - 24)J_0(x) + \dfrac{8}{x^3}(6 - x^2)J_1(x)$

12. Следующий рисунок подтверждает расчетное значение $y(0) = 3$.



13. $x^2 J_1(x) + x J_1(x) - \displaystyle\int J_0(x)\,dx + C$

14. $(x^3 - 4x)J_1(x) + 2x^2 J_0(x) + C$

15. $(x^4 - 9x^2)J_1(x) + (3x^3 - 9x)J_0(x) + 9\int J_0(x)\,dx + C$

16. $-xJ_1(x) + \int J_0(x)\,dx + C$

17. $2xJ_1(x) - x^2J_0(x) + C$

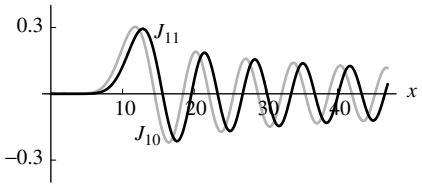
18. $3x^2J_1(x) + (3x - x^3)J_0(x) - 3\int J_0(x)\,dx + C$

19. $(4x^3 - 16x)J_1(x) + (8x^2 - x^4)J_0(x) + C$

20. $-2J_1(x) + \int J_0(x)\,dx + C$

21. $J_0(x) - \dfrac{4}{x}J_1(x) + C$

26.



Раздел 8.6

1. $y(x) = x\left[c_1J_0(x) + C_2Y_0(x)\right]$

2. $y(x) = \dfrac{1}{x}\left[c_1J_1(x) + c_2Y_1(x)\right]$

3. $y(x) = x\left[c_1J_{1/2}(3x^2) + c_2J_{-1/2}(3x^2)\right]$

4. $y(x) = x^3\left[c_1J_2(2x^{1/2}) + c_2Y_2(2x^{1/2})\right]$

5. $y(x) = x^{-1/3}\left[c_1J_{1/3}\left(\frac{1}{3}x^{3/2}\right) + c_2J_{-1/3}\left(\frac{1}{3}x^{3/2}\right)\right]$

6. $y(x) = x^{-1/4}\left[c_1J_0(2x^{3/2}) + c_2Y_0(2x^{3/2})\right]$

7. $y(x) = x^{-1}\left[c_1J_0(x) + c_2Y_0(x)\right]$

8. $y(x) = x^2\left[c_1J_1(4x^{1/2}) + c_2Y_1(4x^{1/2})\right]$

9. $y(x) = x^{1/2}\left[c_1J_{1/2}(2x^{3/2}) + c_2J_{-1/2}(2x^{3/2})\right]$

10. $y(x) = x^{-1/4}\left[c_1J_{3/2}\left(\frac{2}{5}x^{5/2}\right) + c_2J_{-3/2}\left(\frac{2}{5}x^{5/2}\right)\right]$

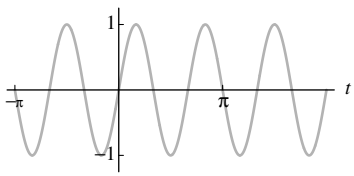
11. $y(x) = x^{1/2}\left[c_1J_{1/6}\left(\frac{1}{3}x^3\right) + c_2J_{-1/6}\left(\frac{1}{3}x^3\right)\right]$

12. $y(x) = x^{1/2}\left[c_1J_{1/5}\left(\frac{4}{5}x^{5/2}\right) + c_2J_{-1/5}\left(\frac{4}{5}x^{5/2}\right)\right]$

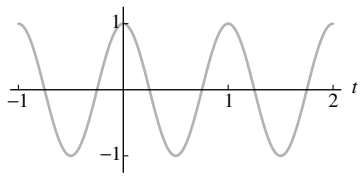
Глава 9

Раздел 9.1

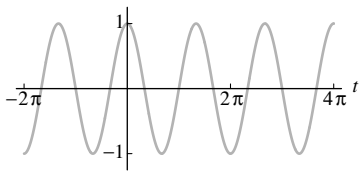
1. $\frac{2}{3}\pi$



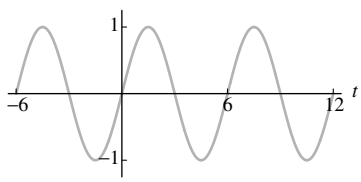
2. 1



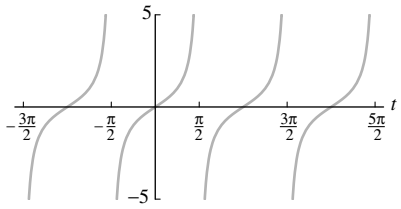
3. $\frac{4}{3}\pi$



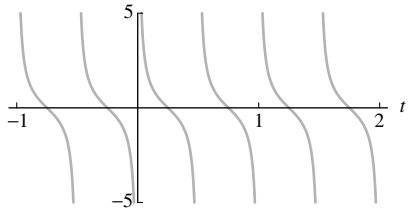
4. 6



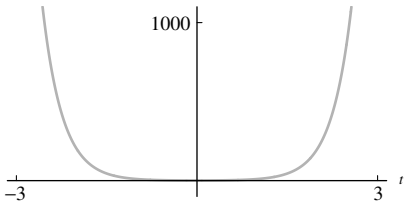
5. π



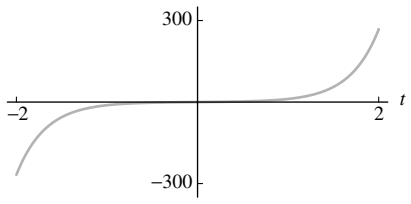
6. $\frac{1}{2}$



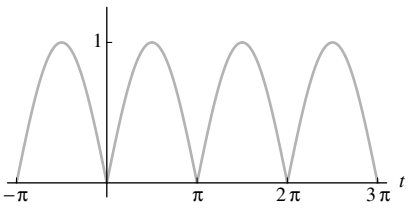
7. Не периодическая



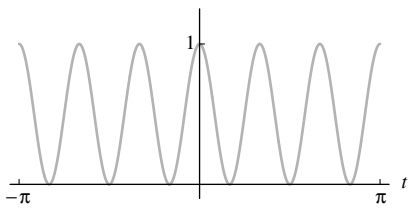
8. Не периодическая



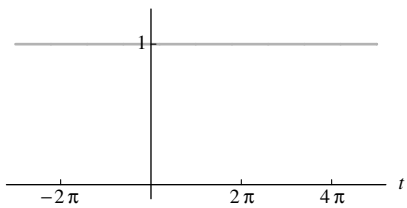
9. π



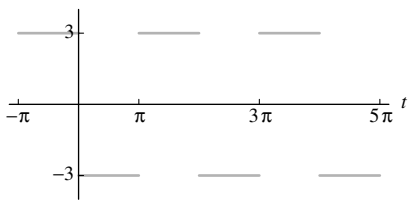
10. $\frac{1}{3}\pi$



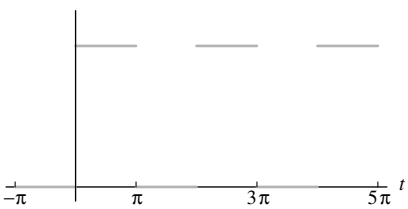
11. $a_0 = 2$; $a_n = b_n = 0$ для $n \geqq 1$



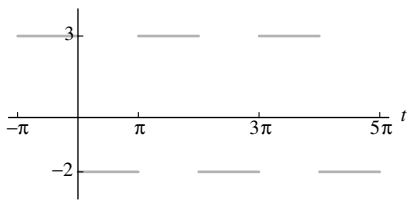
12. $-\dfrac{12}{\pi}\left(\sin t + \dfrac{1}{3}\sin 3t + \dfrac{1}{5}\sin 5t + \cdots\right)$



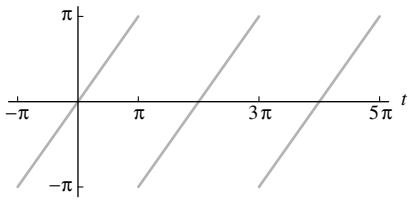
13. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\left(\sin t + \dfrac{1}{3}\sin 3t + \dfrac{1}{5}\sin 5t + \cdots\right)$



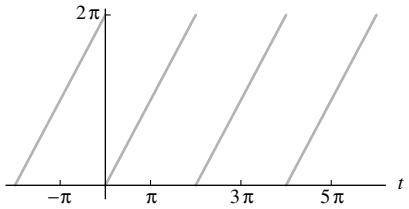
14. $\dfrac{1}{2} - \dfrac{10}{\pi}\left(\sin t + \dfrac{1}{3}\sin 3t + \dfrac{1}{5}\sin 5t + \cdots\right)$



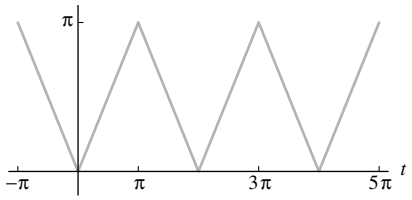
15. $2\left(\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin 3t - \cdots\right)$



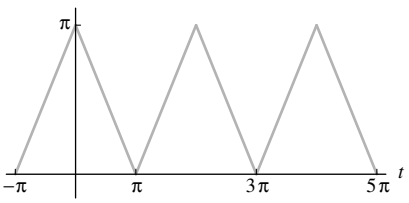
16. $\pi - 2\left(\sin t + \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin 3t + \cdots\right)$



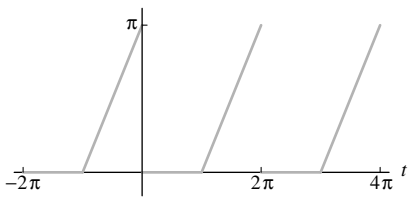
17. $\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos t + \frac{1}{9}\cos 3t + \frac{1}{25}\cos 5t + \cdots\right)$



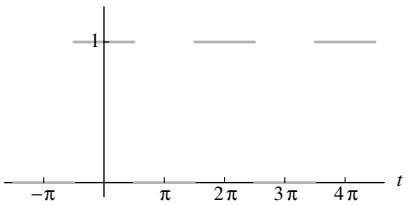
18. $\frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left(\cos t + \frac{1}{9}\cos 3t + \frac{1}{25}\cos 5t + \cdots\right)$



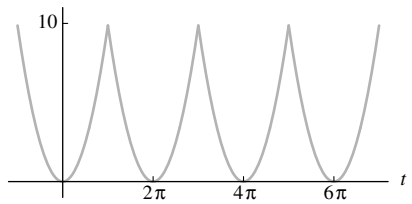
19. $a_0 = \frac{\pi}{4}$; $a_n = \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}$ для $n \geqq 1$;
$b_n = -\frac{1}{n}$ для $n \geqq 1$.



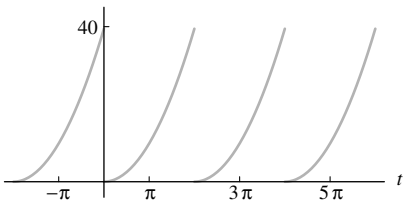
20. $\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\cos t - \frac{1}{3}\cos 3t + \frac{1}{5}\cos 5t - \cdots\right)$



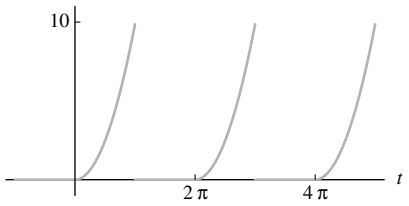
21. $\frac{1}{3}\pi^2 - 4\left(\cos t - \frac{1}{4}\cos 2t + \frac{1}{9}\cos 3t - \cdots\right)$



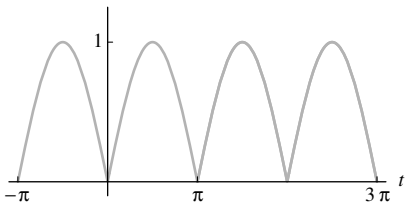
22. $a_0 = \frac{8}{3}\pi^2$; $a_n = \frac{4}{n}$ для $n \geqq 1$;
$b_n = -\frac{4\pi}{n}$ для $n \geqq 1$.



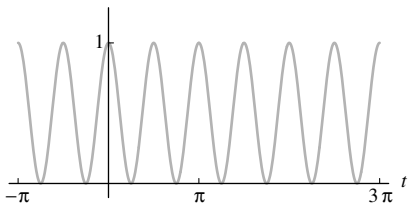
23. $a_0 = \dfrac{1}{3}\pi^2$; $a_n = \dfrac{2\cdot(-1)^n}{n^2}$ для $n \geqq 1$;
$b_n = 2\cdot\dfrac{(-1)^n - 1}{\pi n^3} - \pi\cdot\dfrac{(-1)^n}{n}$ для $n \geqq 1$



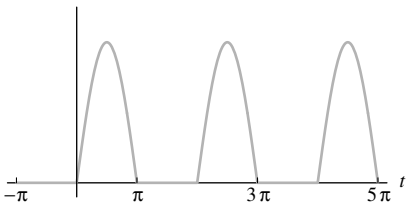
24. $b_n = 0$ для $n \geqq 1$; $a_n = 0$, если n нечетное;
$a_n = -\dfrac{4}{\pi(n^2-1)}$ для $n = 0, 2, 4, \ldots$.



25. $a_0 = 1$, $a_4 = \dfrac{1}{2}$, а все другие коэффициенты являются нулевыми.

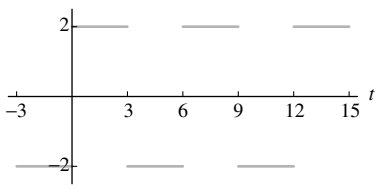


26. $\dfrac{1}{2}\sin t + \dfrac{1}{\pi} - \dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{1}{1\cdot 3}\cos 2t + \right.$
$\left. + \dfrac{1}{3\cdot 5}\cos 4t + \dfrac{1}{5\cdot 7}\cos 6t + \cdots\right)$

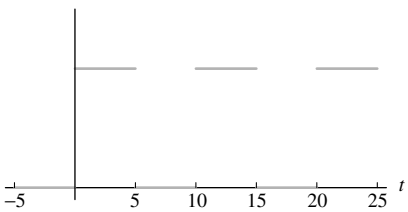


Раздел 9.2

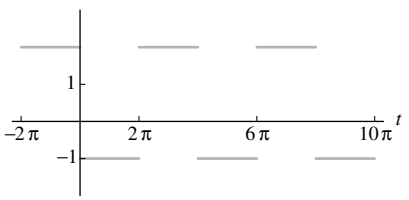
1. $\dfrac{8}{\pi}\left(\sin\dfrac{\pi t}{3} + \dfrac{1}{3}\sin\dfrac{3\pi t}{3} + \dfrac{1}{5}\sin\dfrac{5\pi t}{3} + \cdots\right)$



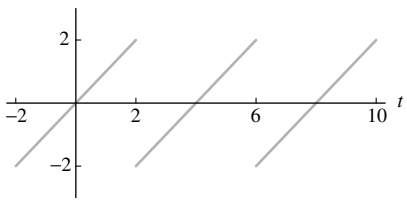
2. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\left(\sin\dfrac{\pi t}{5} + \dfrac{1}{3}\sin\dfrac{3\pi t}{5} + \dfrac{1}{5}\sin\dfrac{5\pi t}{5} + \cdots\right)$



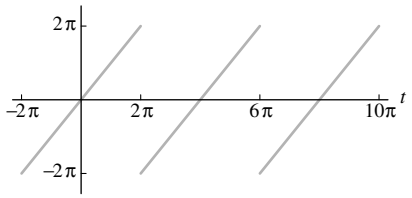
3. $\dfrac{1}{2} - \dfrac{6}{\pi}\left(\sin\dfrac{t}{2} + \dfrac{1}{3}\sin\dfrac{3t}{2} + \dfrac{1}{5}\sin\dfrac{5t}{2} + \cdots\right)$



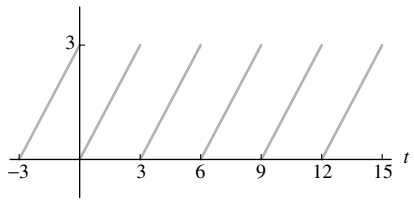
4. $\dfrac{4}{\pi}\left(\sin\dfrac{\pi t}{2} - \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{2\pi t}{2} + \dfrac{1}{3}\sin\dfrac{3\pi t}{2} - \cdots\right)$



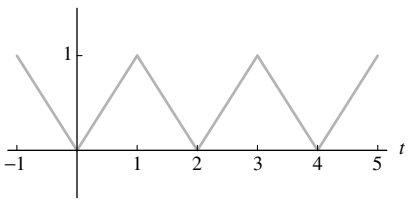
5. $4\left(\sin\dfrac{t}{2}-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{2t}{2}+\dfrac{1}{3}\sin\dfrac{3t}{2}-\cdots\right)$



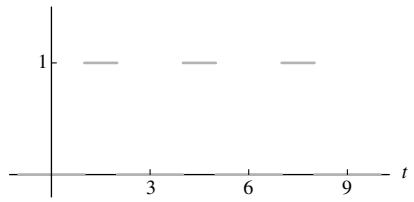
6. $\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{\pi}\left(\sin\dfrac{2\pi t}{3}+\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{4\pi t}{3}+\dfrac{1}{3}\sin\dfrac{6\pi t}{3}+\cdots\right)$



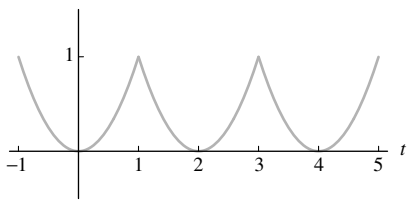
7. $\dfrac{1}{2}-\dfrac{4}{\pi^2}\left(\cos\pi t+\dfrac{1}{9}\cos 3\pi t+\dfrac{1}{25}\cos 5\pi t+\cdots\right)$



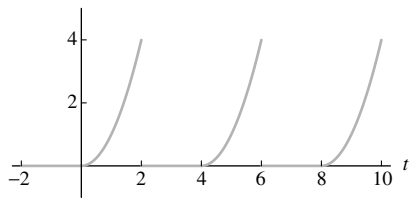
8. $\dfrac{1}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{\pi}\left(\cos\dfrac{2\pi t}{3}-\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{4\pi t}{3}+\dfrac{1}{4}\cos\dfrac{8\pi t}{3}-\dfrac{1}{5}\cos\dfrac{10\pi t}{3}+\cdots\right)$



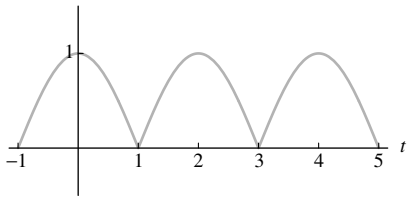
9. $\dfrac{1}{3}-\dfrac{4}{\pi^2}\left(\cos\pi t-\frac{1}{4}\cos 2\pi t+\frac{1}{9}\cos 3\pi t-\cdots\right)$



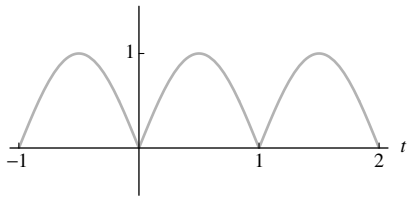
10. $\dfrac{2}{3}-\dfrac{8}{\pi^2}\left(\cos\dfrac{\pi t}{2}-\dfrac{1}{4}\cos\dfrac{2\pi t}{2}+\dfrac{1}{9}\cos\dfrac{3\pi t}{2}-\cdots\right)+\dfrac{4}{\pi}\left(\sin\dfrac{\pi t}{2}-\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{2\pi t}{2}+\dfrac{1}{3}\sin\dfrac{3\pi t}{2}-\cdots\right)-\dfrac{16}{\pi^3}\left(\sin\dfrac{\pi t}{2}+\dfrac{1}{27}\sin\dfrac{3\pi t}{2}+\dfrac{1}{125}\sin\dfrac{5\pi t}{2}+\cdots\right)$



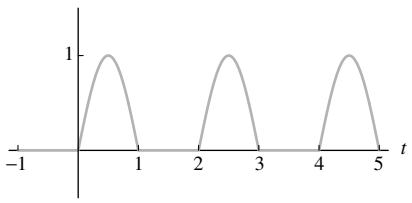
11. $a_0 = \dfrac{4}{\pi}$; $a_n = \dfrac{4 \cdot (-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)}$; $b_n = 0$ для всех $n \geqq 1$.



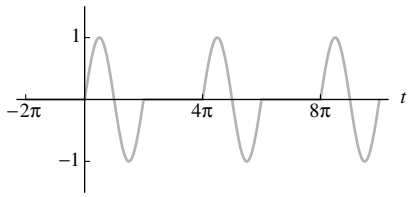
12. $L = \dfrac{1}{2}$; $a_0 = \dfrac{4}{\pi}$; $a_n = -\dfrac{4}{\pi(4n^2-1)}$ для $n \geqq 1$; $b_n = 0$ для всех $n \geqq 1$.



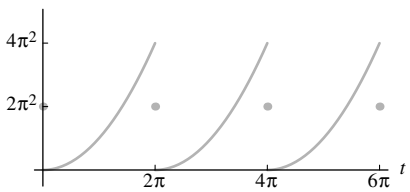
13. $a_0 = \dfrac{2}{\pi}$; $a_1 = 0$; $a_n = -\dfrac{1+(-1)^n}{\pi(n^2-1)}$ для $n \geqq 2$; $b_1 = \frac{1}{2}$; $b_n = 0$ if $n \geqq 2$.



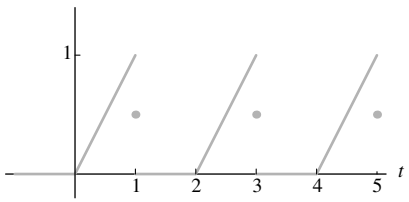
14. $\dfrac{1}{2}\sin t + \dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{1}{3}\cos\dfrac{t}{2} - \dfrac{1}{5}\cos\dfrac{3t}{2} - \dfrac{1}{21}\cos\dfrac{5t}{2} - \cdots\right)$



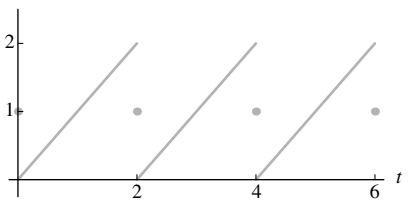
15.



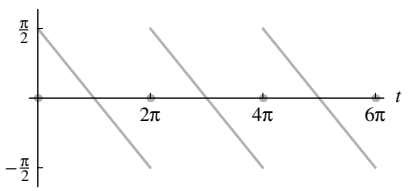
16.



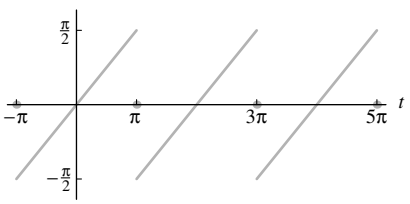
17.



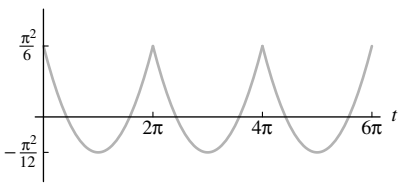
18.



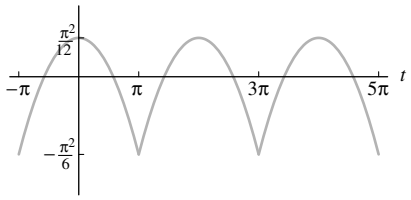
19.



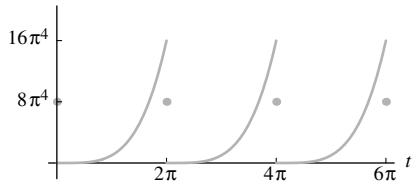
20.



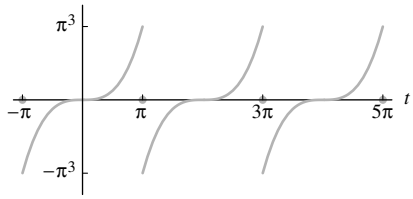
21.



24.

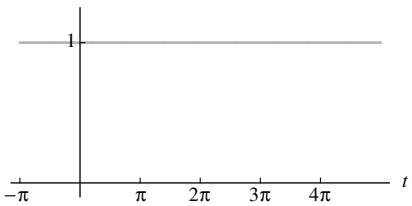


25.

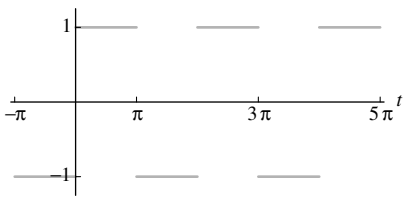


Раздел 9.3

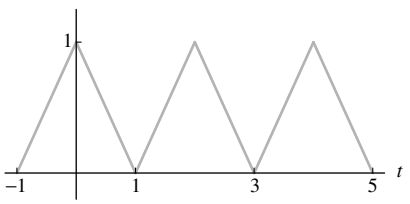
1. Ряд по косинусам: $f(t) = 1$



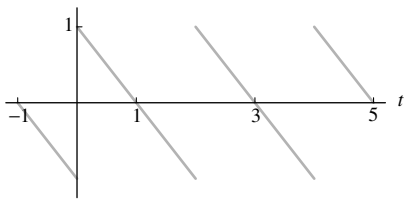
Ряд по синусам: $f(t) = \dfrac{4}{\pi}\left(\sin t + \dfrac{1}{3}\sin 3t + \dfrac{1}{5}\sin 5t + \dfrac{1}{7}\sin 7t + \cdots\right)$



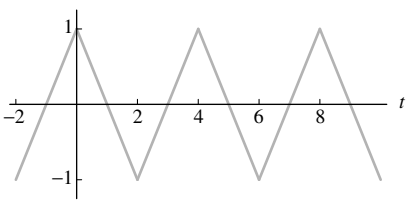
2. Ряд по косинусам: $f(t) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{\pi^2}\left(\cos \pi t + \dfrac{\cos 3\pi t}{3^2} + \dfrac{\cos 5\pi t}{5^2} + \dfrac{\cos 7\pi t}{7^2} + \cdots\right)$



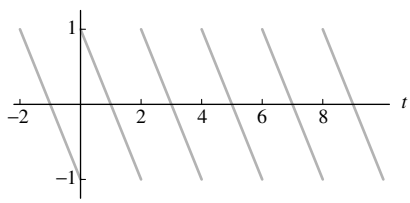
Ряд по синусам: $f(t) = \dfrac{2}{\pi}\left(\sin \pi t + \dfrac{\sin 2\pi t}{2} + \dfrac{\sin 3\pi t}{3} + \dfrac{\sin 4\pi t}{4} + \cdots\right)$



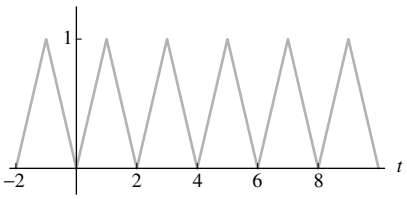
3. Ряд по косинусам: $f(t) = \dfrac{8}{\pi^2}\left(\cos \dfrac{\pi t}{2} + \dfrac{1}{3^2}\cos \dfrac{3\pi t}{2} + \dfrac{1}{5^2}\cos \dfrac{5\pi t}{2} + \dfrac{1}{7^2}\cos \dfrac{7\pi t}{2} + \cdots\right)$



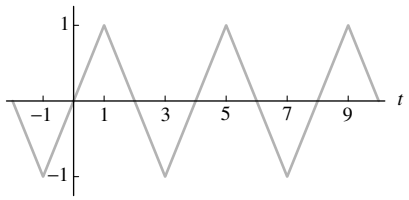
Ряд по синусам: $f(t) = \dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{\sin \pi t}{2} + \dfrac{\sin 2\pi t}{4} + \dfrac{\sin 3\pi t}{6} + \dfrac{\sin 4\pi t}{8} + \cdots\right)$



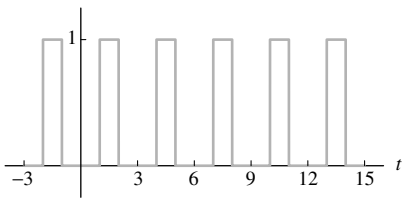
4. Ряд по косинусам: $f(t) = 1 - \dfrac{16}{\pi^2}\left(\dfrac{\cos \pi t}{2^2} + \dfrac{\cos 3\pi t}{6^2} + \dfrac{\cos 5\pi t}{10^2} + \dfrac{\cos 7\pi t}{14^2} + \cdots\right)$



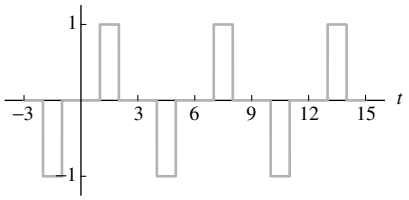
Ряд по синусам: $f(t) = \dfrac{8}{\pi^2}\left(\sin \dfrac{\pi t}{2} - \dfrac{1}{3^2}\sin \dfrac{3\pi t}{2} + \dfrac{1}{5^2}\sin \dfrac{5\pi t}{2} - \dfrac{1}{7^2}\sin \dfrac{7\pi t}{2} + \cdots\right)$



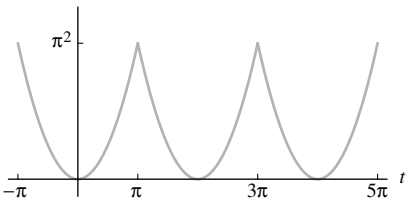
5. Ряд по косинусам: $f(t) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{2\sqrt{3}}{\pi}\left(\dfrac{1}{2}\cos \dfrac{2\pi t}{3} - \dfrac{1}{4}\cos \dfrac{4\pi t}{3} + \dfrac{1}{8}\cos \dfrac{8\pi t}{3} - \dfrac{1}{10}\cos \dfrac{10\pi t}{3} + \cdots\right)$



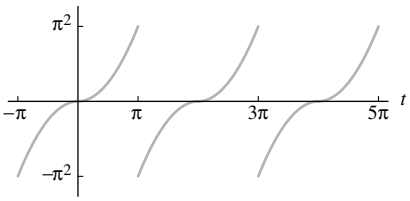
Ряд по синусам: $f(t) = \dfrac{2}{\pi}\left(\sin \dfrac{\pi t}{3} - \dfrac{2}{3}\sin \dfrac{3\pi t}{3} + \dfrac{1}{5}\sin \dfrac{5\pi t}{3} + \dfrac{1}{7}\sin \dfrac{7\pi t}{3} - \dfrac{2}{9}\sin \dfrac{9\pi t}{3} + \dfrac{1}{11}\sin \dfrac{11\pi t}{3} + \cdots\right)$



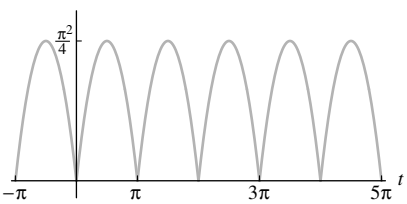
6. Ряд по косинусам: $f(t) = \dfrac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos t - \dfrac{1}{2^2}\cos 2t + \dfrac{1}{3^2}\cos 3t + \dfrac{1}{4^2}\cos 4t + \cdots\right)$



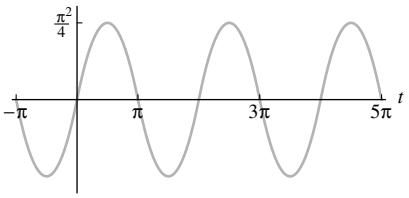
Ряд по синусам: $f(t) = 2\pi\left(\sin t - \dfrac{1}{2}\sin 2t + \dfrac{1}{3}\sin 3t - \dfrac{1}{4}\sin 4t + \cdots\right) - \dfrac{8}{\pi}\left(\sin t + \dfrac{1}{3^2}\sin 3t + \dfrac{1}{5^3}\sin 5t + \dfrac{1}{7^3}\sin 7t + \cdots\right)$



7. Ряд по косинусам: $f(t) = \dfrac{\pi^2}{6} - 4\left(\dfrac{\cos 2t}{2^2} + \dfrac{\cos 4t}{4^2} + \dfrac{\cos 6t}{6^2} + \dfrac{\cos 8t}{8^2} + \cdots\right)$



Ряд по синусам: $f(t) = \dfrac{8}{\pi}\left(\sin t + \dfrac{\sin 3t}{3^3} + \dfrac{\sin 5t}{5^3} + \dfrac{\sin 7t}{7^3} + \cdots\right)$



8. Ряд по косинусам: $f(t) = \dfrac{1}{6} - \dfrac{4}{\pi^2}\left(\dfrac{\cos 2\pi t}{2^2} + \dfrac{\cos 4\pi t}{4^2} + \dfrac{\cos 6\pi t}{6^2} + \dfrac{\cos 8\pi t}{8^2} + \cdots\right)$

Ряд по синусам: $f(t) = \dfrac{8}{\pi^3}\left(\sin \pi t + \dfrac{\sin 3\pi t}{3^3} + \dfrac{\sin 5\pi t}{5^3} + \dfrac{\sin 7\pi t}{7^3} + \cdots\right)$

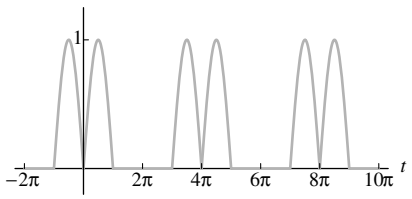
Графики этих двух рядов выглядят точно так же, как и графики в задаче 7, но здесь шкала от -1 до 5 (а не от $-\pi$ до 5π) на оси t, а дуги имеют высоты 1/4 (а не $\pi^2/4$).

9. Ряд по косинусам: $f(t) = \dfrac{2}{\pi} - \dfrac{4}{\pi^2}\left(\dfrac{\cos 2t}{3} + \dfrac{\cos 4t}{15} + \dfrac{\cos 6t}{35} + \dfrac{\cos 8t}{63} + \cdots\right)$

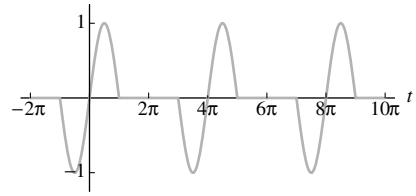
Ряд по синусам: $f(t) = \sin t$

Графики этих двух рядов выглядят точно так же, как и графики в задаче 7, но вместо дуг синусоиды мы видим дуги в виде квадратных арок.

10. Ряд по косинусам: $f(t) = \dfrac{1}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\left(-\dfrac{1}{3}\cos\dfrac{t}{2} + \dfrac{1}{5}\cos\dfrac{3t}{2} + \dfrac{2}{12}\cos\dfrac{4t}{2} + \dfrac{1}{21}\cos\dfrac{5t}{2} + \dfrac{1}{45}\cos\dfrac{7t}{2} + \dfrac{2}{60}\cos\dfrac{8t}{2} + \cdots\right)$



Ряд по синусам: $f(t) = \dfrac{1}{2}\sin t - \dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{1}{3}\sin\dfrac{t}{2} + \dfrac{1}{5}\sin\dfrac{3t}{2} - \dfrac{1}{21}\sin\dfrac{5t}{2} + \dfrac{1}{45}\sin\dfrac{7t}{2} - \dfrac{1}{77}\sin\dfrac{9t}{2} + \cdots\right)$



11. $x(t) = \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n\text{ нечетное}} \dfrac{\sin nt}{n(2-n^2)} = \dfrac{4}{\pi}\left(\sin t - \dfrac{\sin 3t}{21} - \dfrac{\sin 5t}{115} - \dfrac{\sin 7t}{329} - \cdots\right)$

12. $x(t) = -\dfrac{4}{\pi}\left[\dfrac{\sin t}{5} + \dfrac{\sin 3t}{39} + \dfrac{\sin 5t}{145} + \dfrac{\sin 7t}{371} + \cdots\right]$

13. $x(t) = \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \sin n\pi t}{n(n^2\pi^2 - 1)}$

14. $x(t) = \dfrac{16}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \sin(n\pi t/2)}{n(n^2\pi^2 - 8)}$

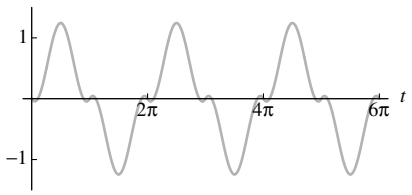
15. $x(t) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{n\text{ нечетное}} \dfrac{\cos nt}{n^2(n^2-2)} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{4}{\pi}\left(-\cos t + \dfrac{\cos 3t}{63} + \dfrac{\cos 5t}{575} + \dfrac{\cos 7t}{2303} + \cdots\right)$

17. *Указание.* Подставьте $u = -t$ в интеграле слева.

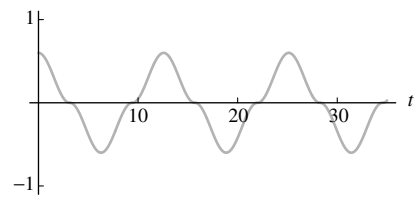
Раздел 9.4

1. $x_{\text{sp}}(t) = \dfrac{12}{\pi}\sum\limits_{n\text{ нечетное}} \dfrac{\sin nt}{n(5-n^2)}$

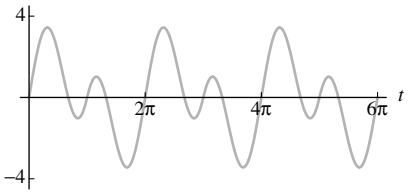
$= \dfrac{12}{\pi}\left(\dfrac{\sin t}{4} - \dfrac{\sin 3t}{12} - \dfrac{\sin 5t}{100} - \dfrac{\sin 7t}{308} - \cdots\right)$



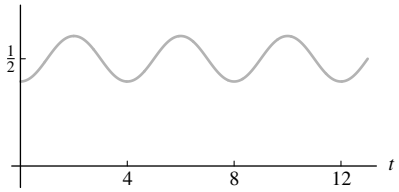
2. $x_{\text{sp}}(t) = \dfrac{48}{\pi}\sum\limits_{n\text{ нечетное}} \dfrac{(-1)^{(n-1)/2}}{n(40-\pi^2 n^2)}\cos\dfrac{n\pi t}{2}.$



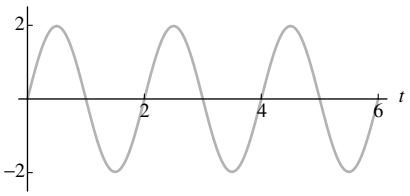
3. $x_{\text{sp}}(t) = 4\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}\sin nt}{n(3-n^2)}$
$= 4\left(\dfrac{\sin t}{2} + \dfrac{\sin 2t}{2} - \dfrac{\sin 3t}{18} + \dfrac{\sin 4t}{52} - \cdots\right)$.



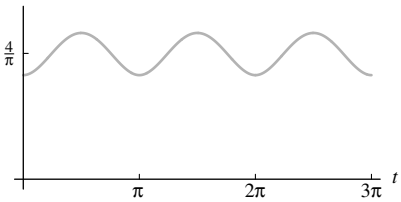
4. $x_{\text{sp}} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{64}{\pi^2}\sum_{n \text{ нечетное}} \dfrac{\cos n\pi t/2}{\pi^2 n^2(16-\pi^2 n^2)}$.



5. $x_{\text{sp}}(t) = \dfrac{8}{\pi^3}\sum_{n \text{ нечетное}} \dfrac{\sin n\pi t}{n^3(10-n^2\pi^2)}$



6. $x_{\text{sp}} = \dfrac{4}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\sum_{n \text{ even}} \dfrac{\cos nt}{(n^2-1)(n^2-2)}$
$= \dfrac{4}{\pi}\left(1 - \dfrac{\cos 2t}{6} - \dfrac{\cos 4t}{210} - \dfrac{\cos 6t}{1190} - \cdots\right)$.



7. Ряд Фурье $F(t) = \dfrac{4}{\pi}\sum_{n \text{ нечетное}} \dfrac{\sin nt}{n}$ содержит член $\sin 3t$, так что явление резонанса действительно имеет место.

8. Резонанс не происходит.

9. Ряд Фурье $F(t) = \dfrac{4}{\pi}\sum_{n \text{ нечетное}} \dfrac{\sin nt}{n}$ не содержит члена $\sin 2t$, так что резонанс не происходит.

10. Резонанс действительно происходит.

11. Ряд Фурье $F(t) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\sum_{n \text{ нечетное}} \dfrac{\cos nt}{n^2}$ не содержит члена с $\cos 4t$, так что резонанс не происходит.

12. Резонанс действительно происходит.

13. $x_{\text{sp}}(t) \approx (1{,}2725)\sin(t - 0{,}0333) + (0{,}2542)\sin(3t - 3{,}0817) + (0{,}0364)\sin(5t - 3{,}1178) + \cdots$

14. $x_{\text{sp}}(t) \approx (0{,}2500)\sin(t - 0{,}0063) - (0{,}2000)\sin(2t - 0{,}0200) + (4{,}444)\sin(3t - 1{,}5708) - (0{,}0714)\sin(4t - 3{,}1130) + \cdots$

15. $x_{\text{sp}}(t) \approx (0{,}08150)\sin(\pi t - 1{,}44692) + (0{,}00004)\sin(3\pi t - 3{,}10176) + \cdots$

16. $x_{\text{sp}}(t) \approx 0{,}5000 + 1{,}0577\cos(\pi t/2 - 0{,}0103) - 0{,}0099\cos(3\pi t/2 - 3{,}1390) - 0{,}0011\cos(5\pi t/2 - 3{,}1402)\cdots$

17. (a) $x_{\text{sp}}(t) \approx (0{,}5687)\sin(\pi t - 0{,}0562) + (0{,}4721)\sin(3\pi t - 0{,}3891) + (0{,}01396)\sin(5\pi t - 2{,}7899) + (0{,}0318)\sin(7\pi t - 2{,}9874) + \cdots$

18. $x_{\text{sp}}(t) \approx 0{,}0531\sin(t - 0{,}0004) - 0{,}0088\sin(3t - 0{,}0019) + 1{,}0186\sin(5t - 1{,}5708) - 0{,}0011\sin(7t - 3{,}1387) + \cdots$

Раздел 9.5

1. $u(x,t) = 4e^{-12t}\sin 2x$

2. $u(x,t) \equiv 7$

3. $u(x,y) = 5\exp(-2\pi^2 t)\sin \pi x - \frac{1}{5}\exp(-18\pi^2 t)\sin 3\pi x$

4. $u(x,t) = 2e^{-4t}\sin 2x + 2e^{-36t}\sin 6x$

5. $u(x,t) = 4\exp\left(-\dfrac{8\pi^2 t}{9}\right)\cos\left(\dfrac{2\pi x}{3}\right) - 2\exp\left(-\dfrac{32\pi^2 t}{9}\right)\cos\left(\dfrac{4\pi x}{3}\right)$

6. $u(x,t) = \exp(-2\pi^2 t)\sin 2\pi x + \frac{1}{2}\exp(-8\pi^2 t)\sin 4\pi x$

7. $u(x,t) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\exp\left(-\dfrac{16\pi^2 t}{3}\right)\cos 4\pi x$

8. $u(x,t) = 5\exp(-4\pi^2 t)\cos 2\pi x + 5\exp(-16\pi^2 t)\cos 4\pi x$

9. $u(x,t) = \dfrac{100}{\pi}\displaystyle\sum_{n\text{ нечетное}} \dfrac{1}{n}\exp\left(-\dfrac{n^2\pi^2 t}{250}\right)\sin\dfrac{n\pi x}{5}$

10. $u(x,t) = \dfrac{80}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\exp\left(-\dfrac{n^2\pi^2 t}{500}\right)\sin\dfrac{n\pi x}{10}$

11. $u(x,t) = 20 - \dfrac{160}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n\text{ нечетное}} \dfrac{1}{n^2}\exp\left(-\dfrac{n^2\pi^2 t}{500}\right)\cos\dfrac{n\pi x}{10}$

12. $u(x,t) = \dfrac{80000}{\pi^3}\displaystyle\sum_{n\text{ нечетное}} \dfrac{1}{n^3}\exp\left(-\dfrac{n^2\pi^2 t}{10000}\right)\sin\dfrac{n\pi x}{100}$

13. (a) $u(x,t) = \dfrac{400}{\pi}\displaystyle\sum_{n\text{ odd}} \dfrac{1}{n}\exp\left(-\dfrac{n^2\pi^2 kt}{1600}\right)\sin\dfrac{n\pi x}{40}$; (b) При $k = 1{,}15$, $u(20,300) \approx 15{,}16°\text{C}$; (c) приблизительно 19 часов 16 минут

14. (b) $u(10,60) \approx 25{,}15°\text{C}$; (c) 6 минут 54,3 сек

16. (b) 15 часов

Раздел 9.6

1. $y(x,t) = \frac{1}{10}\cos 4t \sin 2x$

2. $y(x,t) = \frac{1}{10}\cos \pi t \sin \pi x - \frac{1}{20}\cos 3\pi t \sin 3\pi x$

3. $y(x,t) = \dfrac{1}{10}\left(\cos\dfrac{t}{2} + 2\sin\dfrac{t}{2}\right)\sin x$

4. $y(x,y) = \frac{1}{10}\cos \pi t \sin 2\pi x$

5. $y(x,t) = \dfrac{1}{4}\cos 5\pi t \sin \pi x + \dfrac{1}{\pi}\sin 10\pi t \sin 2\pi x$

6. $y(x,t) = \displaystyle\sum_{n\text{ нечетное}} \dfrac{8}{\pi n^3}\cos 10nt \sin nx$

7. $y(x,t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{5\pi^2 n^2}\sin 10n\pi t \sin n\pi x$

8. $y(x,t) = \cos 2t \sin x + \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n\text{ нечетное}} \dfrac{\sin 2nt \sin nx}{n}$.

9. $y(x,t) = \dfrac{4}{\pi^4}\displaystyle\sum_{n\text{ нечетное}} \dfrac{\sin 2n\pi t \sin n\pi x}{n^4}$.

10. $y(x,t) = \dfrac{8}{5\pi}\displaystyle\sum_{n\text{ нечетное}} \dfrac{(5n\cos 5nt + \sin 5nt)}{n^2(4-n^2)}$.

11. Основная частота (частота основной (первой) гармоники, (наинизшая) собственная частота): 256 Гц; скорость: 1024 фута в секунду

Раздел 9.7

1. $u(x,y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh\dfrac{n\pi x}{b}\sin\dfrac{n\pi y}{b}$, где $c_n = \dfrac{2}{b\sinh(n\pi a/b)}\displaystyle\int_0^b g(y)\sin\dfrac{n\pi y}{b}\,dy$

2. $u(x,y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sinh\dfrac{n\pi(a-x)}{b}\sin\dfrac{n\pi y}{b}$, где $c_n = \dfrac{2}{b\sinh(n\pi a/b)}\displaystyle\int_0^b g(y)\sin\dfrac{n\pi y}{b}\,dy$

3. $u(x,y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\dfrac{n\pi x}{a}\sinh\dfrac{n\pi y}{a}$, где $c_n = \dfrac{2}{a\sinh(n\pi b/a)}\displaystyle\int_0^a f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{a}\,dx$

4. $u(x,y) = b_0 y + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos\dfrac{n\pi x}{a}\sinh\dfrac{n\pi y}{a}$, где $b_0 = a_0/2b$, $b_n = a_n/(\sinh n\pi b/a)$ и $\{a_n\}_0^\infty$ – коэффициенты расположенного по косинусам ряда Фурье функции $f(x)$ на интервале $0 \leqq x \leqq a$.

5. $u(x,y) = \dfrac{a_0}{2a}(a-x) + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \dfrac{\sinh(n\pi[a-x]/b)}{\sinh(n\pi a/b)}\cos\dfrac{n\pi y}{b}$, где $a_n = \dfrac{2}{b}\displaystyle\int_0^b g(y)\cos\dfrac{n\pi y}{b}\,dy$

6. $u(x,y) = A_0 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\dfrac{n\pi x}{a}\cosh\dfrac{n\pi y}{a}$, где $A_0 = a_0/2$, $A_n = a_n/(\cosh n\pi b/a)$ и $\{a_n\}_0^\infty$ – коэффициенты расположенного по косинусам ряда Фурье функции $f(x)$ на интервале $0 \leqq x \leqq a$.

7. $u(x,y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left(-\dfrac{n\pi y}{a}\right)\sin\dfrac{n\pi x}{a}$, где $b_n=\dfrac{2}{a}\displaystyle\int_0^a f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{a}\,dx$

8. $u(x,y)=\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n\pi y/a}\cos\dfrac{n\pi x}{a}$, где $\{a_n\}_0^\infty$ — коэффициенты расположенного по косинусам ряда Фурье функции $f(x)$ на интервале $0 \leqq x \leqq a$.

9. $u(0,5)\approx 41{,}53$; $u(5,5)=50$; $u(10,5)\approx 58{,}47$

11. $u(x,y)=\displaystyle\sum_{n\text{нечетное}} c_n \sinh\dfrac{n\pi(a-x)}{2b}\cos\dfrac{n\pi y}{2b}$, где $c_n=\dfrac{2}{b\sinh(n\pi a/(2b))}\displaystyle\int_0^b g(y)\cos\dfrac{n\pi y}{2b}\,dy$

13. $c_n=\dfrac{2}{\pi a^n}\displaystyle\int_0^\pi f(\theta)\sin n\theta\,d\theta$

14. $c_n=\dfrac{2}{\pi a^n}\displaystyle\int_0^\pi f(\theta)\cos n\theta\,d\theta$

15. $c_n=\dfrac{2}{\pi a^{n/2}}\displaystyle\int_0^\pi f(\theta)\sin\dfrac{n\theta}{2}\,d\theta$

Глава 10

Раздел 10.1

7. $1=2hL\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1-\cos\beta_n}{\beta_n(hL+\cos^2\beta_n)}\sin\dfrac{\beta_n}{L},\ 0<x<L$

8. $1=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{4\sin\beta_n}{2\beta_n+\sin 2\beta_n}\cos\dfrac{\beta_n x}{L},\ 0<x<L$

9. $x=2h(1+h)\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\beta_n\sin\beta_n x}{\beta_n^2(h+\cos^2\beta_n)},\ 0<x<1$

10. $x=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{4(\beta_n\sin\beta_n+\cos\beta_n-1)}{\beta_n(2\beta_n+\sin 2\beta_n)}\cos\beta_n x,\ 0<x<1$

Раздел 10.2

2. $u(x,y)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n\sin\dfrac{\beta_n x}{L}\sinh\dfrac{\beta_n(L-y)}{L}$, где $\{\beta_n\}_1^\infty$ — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} x=-x/hL$ и $c_n=\dfrac{4\beta_n}{L(\sin\beta_n)(2\beta_n-\sin 2\beta_n)}\displaystyle\int_0^L f(x)\cos\dfrac{\beta_n x}{L}\,dx$.

3. $u(x,y)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n\sinh\dfrac{\beta_n(L-x)}{L}\cos\dfrac{\beta_n y}{L}$, где $\{\beta_n\}_1^\infty$ — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} x=x/hL$ и $c_n=\dfrac{2h}{(\sinh\beta_n)(hL+\sin^2\beta_n)}\displaystyle\int_0^L g(y)\cos\dfrac{\beta_n y}{L}\,dy$.

4. $u(x,y)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n\sin\dfrac{\beta_n x}{L}\exp\left(-\dfrac{\beta_n y}{L}\right)$, где $\{\beta_n\}_1^\infty$ — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} x=-x/hL$ и $c_n=\dfrac{4\beta_n}{L(2\beta_n-\sin 2\beta_n)}\displaystyle\int_0^L f(x)\cos\dfrac{\beta_n x}{L}\,dx$.

5. $u(x,t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n\exp\left(-\dfrac{\beta_n^2 kt}{L^2}\right)X_n(x)$, где $X_n(x)=\beta_n\cos\dfrac{\beta_n x}{L}+hL\sin\dfrac{\beta_n x}{L}$, $\{\beta_n\}_1^\infty$ — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} x=-x/hL$ и $c_n=\left(\displaystyle\int_0^L f(x)X_n(x)\,dx\right)\Big/\int_0^L X_n(x)^2\,dx$.

6. $u(x,t)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n\exp\left(-\dfrac{\beta_n^2 kt}{L^2}\right)_n X_n(x)$, где $X_n(x)=\beta_n\cos\dfrac{\beta_n x}{L}+hL\sin\dfrac{\beta_n x}{L}$, $\{\beta_n\}_1^\infty$ — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} x=2hLx/(x^2-h^2L^2)$ и $c_n=\left(\displaystyle\int_0^L f(x)X_n(x)\,dx\right)\Big/\int_0^L X_n(x)^2\,dx$.

7. $u(1,1) \approx 30{,}8755 + 0{,}4737 + 0{,}0074 + 0{,}0002 + 0{,}0000 + \cdots \approx 31{,}4^\circ$

10. (a) $a \approx 5{,}08 \times 10^5$ см/с ≈ 11364 мили в час. (b) $a \approx 1{,}50 \times 10^5$ см/с ≈ 3355 миль в час.

15. $\displaystyle\int_0^L \sin\frac{\beta_m x}{L} \sin\frac{\beta_n x}{L}\, dx = -\frac{LM\cos\beta_m \cos\beta_n}{m\beta_m\beta_n} \neq 0$

20. (b) $\omega_1 \approx 1578$ радиан в секунду ≈ 251 колебаний в секунду. Таким образом мы слышим (приблизительно) среднюю ноту до (C).

Раздел 10.3

В задачах 1–6 ω_n обозначает n-ю собственную частоту колебаний.

1. $\omega_n = \dfrac{n\pi}{L}\sqrt{\dfrac{E}{\delta}}$

2. $\omega_n = \dfrac{n\pi}{L}\sqrt{\dfrac{E}{\delta}}$

3. $\omega_n = \dfrac{(2n-1)\pi}{2L}\sqrt{\dfrac{E}{\delta}}$

4. $\omega_n = \dfrac{\beta_n}{L}\sqrt{\dfrac{E}{\delta}}$, где β_n — n-й положительный корень уравнения $\operatorname{tg} x = \dfrac{M/m}{x}$.

5. $\omega_n = \dfrac{\beta_n}{L}\sqrt{\dfrac{E}{\delta}}$, где β_n — n-й положительный корень уравнения $AE\beta \operatorname{tg}\beta = kL$.

6. $\omega_n = \dfrac{\beta_n}{L}\sqrt{\dfrac{E}{\delta}}$, где β_n — n-й положительный корень уравнения $(m_0 m_1 z^2 - M^2)\sin z = M(m_0 + m_1)z\cos z$.

15. 1,03 Гц

Раздел 10.4

3. (a) $\displaystyle u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0\left(\frac{\gamma_n r}{c}\right)\sin\frac{\gamma_n a t}{c}$, где $\displaystyle c_n = \frac{2aP_0}{\pi c\rho a^2 \gamma_n J_1(\gamma_n)^2}\cdot\frac{J_1(\gamma_n\epsilon/c)}{\gamma_n\epsilon/c}$. (b) Откуда вы знаете, что $J_1(x)/x \to 1/2$ при $x \to 0$?

4. (a) $\displaystyle u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\frac{\gamma_n^2 kt}{c^2}\right) J_0\left(\frac{\gamma_n r}{c}\right)$, где $\displaystyle c_n = \frac{2q_0}{s\pi c^2 J_1(\gamma_n)^2}\cdot\frac{J_1(\gamma_n\epsilon/c)}{\gamma_n\epsilon/c}$.

11. $\displaystyle u(r,t) = \frac{F_0}{\omega^2 J_0(\omega b/a)}\left[J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right) - J_0\left(\frac{\omega b}{a}\right)\right]\sin\omega t$, где b — радиус круговой мембраны.

Приложение

1. $y_0 = 3$, $y_1 = 3 + 3x$, $y_2 = 3 + 3x + \frac{3}{2}x^2$,
$y_3 = 3 + 3x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3$,
$y_4 = 3 + 3x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{8}x^4$;
$y(x) = 3e^x$

3. $y_0 = 1$, $y_1 = 1 - x^2$, $y_2 = 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4$,
$y_3 = 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^6$,
$y_4 = 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{24}x^8$;
$y(x) = \exp\left(-x^2\right)$

5. $y_0 = 0$, $y_1 = 2x$, $y_2 = 2x + 2x^2$,
$y_3 = 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3$,
$y_4 = 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4$;
$y(x) = e^{2x} - 1$

7. $y_0 = 0$, $y_1 = x^2$, $y_2 = x^2 + \frac{1}{2}x^4$,
$y_3 = x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6$,
$y_4 = x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{24}x^8$;
$y(x) = \exp(x^2) - 1$

9. $y_0 = 1$, $y_1 = (1+x) + \frac{1}{2}x^2$, $y_2 = (1 + x + x^2) + \frac{1}{6}x^3$, $y_3 = \left(1 + x + x^2 + \frac{1}{3}x^3\right) + \frac{1}{24}x^4$; $y(x) = 2e^x - 1 - x = 1 + x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$

11. $y_0 = 1$, $y_1 = 1 + x$, $y_2 = (1 + x + x^2) + \frac{1}{3}x^3$, $y_3 = (1 + x + x^2 + x^3) + \frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{3}x^5 + \frac{1}{9}x^6 + \frac{1}{63}x^7$;
$y(x) = \dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots$

12. $y_0 = 1$, $y_1 = 1 + \frac{1}{2}x$, $y_2 = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^3 + \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{64}x^4$, $y_3 = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \frac{13}{64}x^4 + \cdots$;
$y(x) = (1-x)^{-1/2}$

13. $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3t \\ -1+3t \end{bmatrix},$
$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3t+\frac{1}{2}t^2 \\ -1+5t-\frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix},$
$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3t+\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3 \\ -1+5t-\frac{1}{2}t^2+\frac{5}{6}t^3 \end{bmatrix}$

14. $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^t + te^t \\ e^t \end{bmatrix}$

16. $y_3(1) \approx 0{,}350185$

Предметный указатель

P

Principia Mathematica, *157*; *364*

A

Автомобиль
  колебания, *317*
  с двумя осями, *458*
Автономная система, *509*
  линеаризованная, *529*
Автономное дифференциальное уравнение, *146*
  неустойчивая точка равновесия, *147*
  равновесное решение, *146*
  точка равновесия, *146*
  устойчивая точка равновесия, *147*
Айнс, Е. Л., *373*; *783*
Американское население, *132*; *133*; *140*; *141*; *144*
Ампер (единица тока), *321*
Амплитуда, *272*
Амплитуда, зависящая от времени, *277*
Анализ подсистем, *429*
Аналитическая функция, *695*
Аналогия между механическими и электрическими величинами, *323*
Аналоговые компьютеры, *323*
Аппроксимация Стирлинга, *97*
Арбалет, *156*; *159*; *162*; *199*; *213*; *394*
Аргумент (комплексного числа), *262*
Арнольд, Дэвид, *60*
Артин, Эмиль, *764*
Асимптотическая устойчивость, *518*; *537*; *539*
Асимптотические приближения, *773*

Б

Безвоздушное пространство, *172*
Бернулли, Даниил (1700–1782), *761*; *849*
Бесконечная геометрическая прогрессия, *695*; *741*
Бессель, Фридрих В. (1784–1846), *761*
Биения, *306*
Биномиальный ряд, *695*; *708*; *741*
Бифуркация, *152*; *543*; *566*; *599*
  диаграмма, *153*
  точка, *152*
  Хопфа, *545*
Большой взрыв, *79*
Браун, *835*
Буй, *282*
Буферная функция, *865*

B

Ван-дер-Поль, Балтазар (1889–1959), *589*
Вариация параметров, *296*; *299*
  для неоднородных систем, *503*
Ватсон, Дж. Н. (1886–1965), *761*
Вектор, *403*
  скалярное произведение, *403*
Вектор-столбец, *403*
Вектор-строка, *403*
Величина шага, *173*; *191*; *390*
Верн, Жюль (1828–1905), *169*
Вертикальное движение с гравитационным ускорением, *40*
  с сопротивлением воздуха, *156*
Вещественная часть, *259*
Виолончель, *328*
Внешняя сила, *269*
  вектор, *453*
Водные часы, *80*
Волновое уравнение
  двумерное, *867*
  одномерное, *850*
  решение Даламбера, *856*
Вольтерра, Вито (1860–1940), *549*
Вращение струны, *337*
Вронскиан, *227*; *242*; *245*
  векторнозначных функций, *412*
Вронский, Юзеф Мария (1778–1853), *243*
Второй закон движения, *37*; *40*; *156*; *269*; *303*; *309*; *337*; *349*; *444*; *849*
Второй закон Ньютона для движения, *37*; *40*; *156*; *170*; *269*; *303*; *309*; *337*; *349*; *444*; *849*

Выживание отдельного вида, *555*
Вынужденные колебания, *221*; *269*
  затухающие, *311*
  незатухающие, *304*
  резонанс, *453*
Вырожденный узел, *534*
Вязкость, *285*

Г

Гамма-функция, *763*
Гармоника, *855*
Гармоническое колебание, *272*
Генри (единица индуктивности), *321*
Гипергеометрическое уравнение Гаусса, *741*
Гипергеометрическое уравнение, ряд, *741*
Гипоциклоида, *379*
Глейк, Джеймс, *607*
Градина, *97*
Граничная
  (краевая) задача (задача, в которой заданы граничные (предельные, или краевые) значения), *331*; *332*; *832*
  скорость, *50*
  численность популяции, *51*
Граничные решения, *151*

Д

Даламбер, Жан Лерон (1717–1783), *849*
Движение вверх, *160*
Движение ракеты, *170*
Двумерные системы, *355*
Декремент затухания, *285*
Демографический взрыв, *128*; *137*
Детерминант Вандермонда, *251*
Дефект (собственного значения), *466*
Диаграмма ветвления, *597*
Дикритический узел, *533*
Дифференциальное уравнение в частных производных, *30*; *787*
  граничные условия, *831*; *833*
Добыча, *549*
Докритическое затухание, *277*

Е

Естественный рост и распад, *69*

Ж

Железнодорожные вагоны, *448*; *457*; *474*
Жертва убийства, *81*
Жесткая пружина, *572*
  колебания, *572*
Жесткость пружины, *268*

З

Задача
  Коши (задача с начальными условиями), *30*; *223*
    для линейных систем, *414*
    и элементарные операции над строками, *414*
    порядка n, *239*
  о брахистохроне, *81*
  о сквозном отверстии в Земле, *282*
  пловца, *41*
  снегоочистителя, *81*
Задачи на смеси, *91*
Задержка во времени, *273*
Закон
  всемирного тяготения Ньютона, *162*; *364*; *391*
  Гука, *268*; *570*
  Ньютона охлаждения, *22*; *74*; *99*; *145*; *846*
  сопротивления Стокса, *285*
  Торричелли, *23*; *75*
Законы Кирхгофа, *322*; *351*
Зальцман, Барри, *605*
Замена переменных (методы), *101*
Замкнутая траектория, *520*
Запаздывание во времени, *325*
Затухающие вынужденные колебания, *825*
Затухающие колебания, *269*
  нелинейные, *575*
Затухающие колебания маятника, *583*
Звуковые волны, *855*
  гармоника, *855*
  обертон, *855*
  основная частота (частота основной (первой) гармоники, (наинизшая) собственная частота), *855*
Землетрясение в Мехико, *308*
Знаменитые числа, *187*; *201*; *214*

И

Изолированная точка равновесия, *527*
Импеданс, *324*
Интегральная кривая, *45*; *356*
Интегральный синус (функция), *90*
Интегрирующий множитель, *85*
Иррегулярная (нерегулярная) особая точка, *725*
Источник, *147*; *514*

Й

Йорк, Джеймс, *598*

К

Каскад, *96*
Катушка индуктивности, *321*
Кеплер, Иоганн (1571–1630), *364*
  законы движения планет, *364*; *398*
Кинетическая энергия, *309*
Кларк, Артур, *45*
Клепсидра, *80*
Колебания температуры
  внутри помещения, *99*
Колебания численности популяции, *552*
Колебания, вызванные землетрясением, *459*
Комета Галлея, *399*
Комплексное решение, *433*
Комплекснозначная функция, *259*
Комплексные собственные значения, *433*
Конденсатор, *321*
Конкуренция, мера, *554*
Конкурирующие виды, *553*
Консоль, *340*
Константа Фейгенбаума, *599*; *607*
Коэффициент
  затухания, *268*
  рождаемости, *127*
  температуропроводности, *831*
  теплопроводности, *830*
  усиления, *307*
Коэффициенты Фурье, *789*; *793*
Кратность собственного значения, *462*
Критерий точности, *112*
Критическая скорость (вращения струны), *338*
Критическое
  демпфирование, *275*
  усилие при продольном изгибе, *344*
Круговая частота, *272*; *277*
  затухающих гармонических колебаний, *277*
Кулон, *321*
Кусочно-гладкая функция, *800*
Кутта, Вильгельм (1867–1944), *203*

Л

Лапласиан, *867*
Лента Росслера, *607*
Линеаризация, *530*
Линеаризованная система, *529*
Линейная зависимость, независимость, *226*; *241*
  векторнозначных функций, *411*
Линейная система, *360*
  верхняя треугольная форма, *415*
  метод собственных значений, *424*
  неоднородная, *360*; *417*; *498*
  общее решение, *413*
  однородная, *360*
  первого порядка, *409*
  почти линейная, *530*
  решение, *360*; *409*; *417*
  соответствующее однородное уравнение, *410*
Линейное дифференциальное уравнение, *85*; *219*
Линейный дифференциальный оператор, *370*
Листы Декарта, *546*
Логистическая модель, *140*; *142*
Логистические популяции, взаимодействие, *561*
Логистическое уравнение, *50*; *83*; *129*; *201*; *592*
  в конечных разностях, *593*
  конкуренция (соревнование), *135*
  ограниченные ресурсы среды, *134*
  пропорциональность произведению, *135*
  со сбором урожая, *150*; *202*
Локальная ошибка, *178*
Лоренц, Э. Н., *604*
Лунный посадочный модуль, *38*; *163*; *385*

М

Математическая модель, *25*
Математический маятник, *270*
Математическое моделирование, *25*
Матрица, *401*
  вычитание, *402*
  главная диагональ, *406*
  детерминант, *406*
  единичная, *405*; *414*
  жесткости, *444*
  коэффициентов, *409*
  масс, *444*
  несингулярная, *406*
  нильпотентная, *488*
  нулевая, *402*
  обратная, *406*
  порядок, *405*
  равенство, *402*
  расширенная, *415*
  сингулярная, *406*
  сложение, *402*
  сопротивления, *475*
  столбцы, *401*
  строки, *401*
  транспонирование, *403*
  умножение, *403*

фундаментальная, *482*
экзотическая, *482*
экспоненциальная функция, *486*
элементарные операции над строками, *415*
элементы, *401*
Якоби, *530*
Матричная функция, *408*
дифференцируемая, *408*
непрерывная, *408*
Матричное дифференциальное уравнение, *482*
Маховик на телеге, *303*
Маятник, *270*; *282*; *316*; *780*
нелинейный, *578*
переменной длины, *780*
Метод
исключения, *368*
Ньютона, *255*; *336*; *779*
неопределенных коэффициентов, *287*
для неоднородных систем, *498*
Рунге–Кутта, *203*
для систем, *383*
методы с переменной величиной шага, *390*
ошибка, *204*
степенных рядов, *696*
Фробениуса, *728*
исключительные случаи, *753*
логарифмический случай, *750*
нелогарифмический случай, *744*
Методы предсказания и поправки, *192*
Механические колебания, *374*
Мирное сосуществование двух видов, *559*
Мировое население, *144*
Мнимая часть, *259*
Многочлен
Лежандра, *718*
Эрмита, *720*
Многоэтажное здание, *459*
Модель одноколесного автомобиля (велосипеда), *310*
Модуль
(комплексного числа), *262*
Юнга, *342*; *776*
Мягкое приземление, *38*; *45*

H

Нагретый стержень, *830*
с изолированными концами, *841*
с нулевыми температурами в конечных точках, *837*
Накопленная ошибка, *178*
Население мира, *72*
Начальная скорость, *37*
Начальное
положение, *37*
условие, *24*; *30*
Недемпфированное движение, *269*
Недемпфированные вынужденные колебания, *304*
Незакаленная (мягкая) пружина, *573*
колебания, *573*
Нелинейная пружина, *570*; *571*
Нелинейный маятник, *578*
период колебаний, *582*; *587*
Неоднородная система, *360*; *417*
Неоднородное
граничное (краевое, предельное) условие, *833*
уравнение, *220*; *247*
Неопределенные коэффициенты, *287*; *290*; *294*; *499*
Несингулярная матрица, *406*
Неустойчивая точка равновесия, *147*; *516*
Нечетная функция, *806*
Нечетное продолжение периода $2L$, *809*
Неэлементарная функция, *172*
Неявное решение, *65*; *67*
Нильпотентная матрица, *488*
Нонбюрг, Энн, *783*
Ньютон, сэр Исаак (1642–1727), *157*; *364*

O

Обертон, *855*
Обобщенный
собственный вектор, *469*
степенной ряд, *728*; *731*
Обратная матрица, *406*
Общее
решение, *34*; *67*; *227*; *228*
неоднородного уравнения, *248*
однородного уравнения, *246*; *248*; *417*
уравнение численности популяции, *128*
Обыкновенная точка, *709*
Обыкновенное дифференциальное уравнение, *30*
Однородное уравнение, *103*; *220*
Однородные граничные условия, *833*
Околорезонансные явления, *824*
Октава, *855*
Ом (единица сопротивления), *321*
Оператор, *247*
линейный дифференциальный, *370*
Определитель-оператор, *371*

Определяющее уравнение, *729*
Ортогональные функции, *788*
Основная
  теорема алгебры, *255*; *425*
  частота (частота основной (первой) гармоники, (наинизшая) собственная частота), *855*
Особая точка, *709*
  иррегулярная (нерегулярная), *725*
  регулярная, *725*
Особенная матрица, *406*
Особое решение, *68*
От Земли до Луны, *166*; *169*
Отсутствие независимой переменной, *116*
Оттянутая струна, *854*

П

Падение напряжения, *322*
Параметрическое уравнение Бесселя, *769*
Параметры, вариация, *296*; *299*
Парашутист, *208*; *216*
Парашют, *159*; *167*; *184*; *198*; *208*; *212*
Пенлеве, трансцендентное уравнение, *783*
Переменная величина шага, *390*
Переменное гравитационное ускорение, *162*
Переходная составляющая решения (дифференциального уравнения), *50*; *455*
Переходный ток, *324*
Период, *272*; *786*
  полураспада, *73*
Периодическая функция, *786*
Периодический сбор урожая и пополнение запасов, *202*
Петляющий автобусный маршрут (орбита), *393*
Пилообразная функция, *799*
Плоскость детерминант-след, *547*
По, Эдгар Аллан (1809–1849), *780*
Подавление, мера, *554*
Показатели степени (для дифференциального уравнения), *729*
Показатель смертности, *127*
Поле направлений, *46*; *511*
Полином от оператора, *256*
Полкинг, Джон, *60*; *526*; *547*
Полупериод функции, *795*
Понижение порядка, *252*; *749*
Популяция с жертвой (добычей) и хищником, *549*
Пороговая численность популяции, *136*
Пороговое решение, *151*
Порядок дифференциального уравнения, *28*
Посадка космического корабля, *397*
Постоянная
  распада, *71*
  тяга, *171*
Постоянное ускорение, *37*
Потенциальная
  емкость экологической системы, *132*
  энергия, *309*
Потенциальное уравнение, *868*
Поток теплоты, *830*
Почленное
  дифференцирование ряда, *698*; *811*
  интегрирование ряда Фурье, *815*
Почти линейная система, *530*; *538*
  устойчивость, *538*
Практический резонанс, *312*
Предельная
  скорость, *158*
  численность популяции, *131*
Предельный цикл, *545*
Представление в виде степенного ряда, *693*
Пример струны гитары, *857*; *859*
Принцип
  наложения, *221*; *238*
    для дифференциальных уравнений в частных производных, *833*; *834*
    для неоднородных уравнений, *294*
    для систем, *411*
  суперпозиции, *221*; *238*
    для дифференциальных уравнений в частных производных, *833*; *834*
    для неоднородных уравнений, *294*
    для систем, *411*
  тождественности, *698*
Прирост популяции, *69*
  и удвоение периода, *592*
Продольный изгиб вертикальной колонны, *775*
Произведение матриц, *403*; *404*

Р

Радиоактивный распад, *70*
Радиочастота, *328*
Радиус сходимости, *701*
Разделение переменных в дифференциальных уравнениях в частных производных, *835*; *851*
Ранга r обобщенный собственный вектор, *469*
Расширенная матрица коэффициентов, *415*
Реактивное сопротивление, *325*
Регулярная особая точка, *725*
Резистор, *321*

Резонанс, *307*; *454*
  околорезонансные явления, *824*
  практический, *312*
  чистый, *307*; *824*
  электрический, *328*
Рекуррентная формула, *699*
  с двумя членами, *715*
  со многими членами, *715*
Решение
  Даламбера, *856*; *857*; *864*
  дифференциального уравнения, *22*; *29*
  линейного уравнения первого порядка, *90*
  на интервале, *28*
  неявное, *65*
  общее, *34*; *67*
  однопараметрическое семейство, *27*
  особое, *68*
  системы, *349*
  существование, единственность, *52*; *89*; *223*; *238*
Решения в виде
  ряда Тейлора, *714*
  экспоненциальной функции от матрицы, *489*
    общие, *491*
Рунге, Карл (1856–1927), *203*
Рэлей, Лорд (Джон Уильям Стратт, 1842–1919), *588*
Ряд
  биномиальный, *695*; *708*; *741*
  геометрический, *695*; *741*
  гипергеометрический, *741*
  Лейбница, *803*
  Маклорена, *695*
  почленное дифференцирование, *698*
  почленное сложение, *696*
  принцип тождественности, *698*
  радиус сходимости, *701*
  сдвиг индекса, *700*
  степенной, *693*
  сходящийся, *694*
  Тейлора, *695*
  тригонометрических функций, *705*
  Фурье
    и решение дифференциальных уравнений, *812*
    почленное дифференцирование, *811*
    почленное интегрирование, *815*
    ряд по косинусам, *809*
    ряд по синусам, *809*
    сходимость, *800*
    функции периода 2π, *789*
    функции периода $2L$, *797*
  формальное умножение, *696*
  экспоненциальный, *695*

C

Сбор урожая в логистической популяции, *150*; *202*
Сверхзатухание, *275*
Свободное движение, *269*
  затухающее, *274*
  незатухающее, *271*
Свободные колебания, *221*; *375*; *448*
Сдвиг индекса суммирования, *700*
Седловая точка, *515*; *533*
Семейства языков, *79*
Сепаратриса, *558*; *573*
Система
  второго порядка, *445*; *446*
  первого порядка, *353*; *409*
  с конкуренцией (соревнованием), *554*
  хищник–жертва, *550*
Система, состоящая из материальной точки заданной массы, закрепленной на пружине, с поршнем, *220*
Скорость, *37*
  граничная, *50*
Сложение (матриц), *402*
Сложный процент, *70*
Собственная
  мода колебания, *376*; *448*
  частота, *304*; *376*; *448*
Содержание теплоты, *831*
Соответствующее однородное уравнение, *220*; *247*; *287*; *289*; *410*; *418*
Сопротивление
  воздуха, *157*
    пропорциональное квадрату скорости, *160*
    пропорциональное скорости, *49*; *157*
  пропорциональное квадрату скорости, *160*
  пропорциональное скорости, *157*
Соревнование и сотрудничество, *562*
Сотрудничество и конкуренция (соревнование), *562*
Сохранение механической энергии, *270*; *309*
Спиральный
  источник, *520*
  сток, *520*
Статическое
  положение равновесия, *269*
  смещение, *307*
Степенной ряд, *693*

Сток, *147*; *514*
Стоунхедж, *73*
Странный аттрактор Лоренца, *604*; *606*
Стянутый стержень, *343*
Сходимость
  ряда Фурье, *800*
  степенного ряда, *694*

Т

Телега с маховиком, *303*
Тембр, *855*
Толстов, Г. П., *800*
Точка равновесия
  (автономного уравнения), *146*
  (системы), *510*
    изолированная, *527*
    седловая точка, *515*
    спиральный источник, *520*
    спиральный сток, *520*
    устойчивость, *516*
    центр, *517*
Точка равновесия (системы), *513*
  асимптотическая устойчивость, *518*
  классификация, *539*
  системы хищник–жертва, *550*
  узел, *513*
  фокус, *520*
Траектория, *355*; *509*
  замкнутая, *520*
  полета, *109*
Трапецеидальная волновая функция, *805*; *821*; *865*
Треугольная волновая функция, *805*; *821*; *865*
Тригонометрических функций ряд, *705*
Трубочка кларнета, *588*

У

Углерод 14, *71*
Удар по бейсбольному мячу, *387*; *395*
Удвоение периода, *596*
  в механических системах, *602*
Удельная теплоемкость, *830*
Узел, *513*
  вырожденный, *514*; *532*; *534*
  дикритический, *514*; *533*
Узел-источник, *532*
Узел-сток, *532*
Уравнение
  Бернулли, *106*
  Бесселя, *252*; *693*; *734*; *756*; *761*; *772*
    модифицированное, *782*
    параметрическое, *769*
  Ван-дер-Поля, *590*
  Дуффинга в случае вынужденных колебаний, *600*
  естественного роста, *72*
  Клеро, *120*
  Лапласа, *868*
    в полярных координатах, *874*
  Лежандра, *693*; *717*; *724*
  первого порядка, *30*
  Риккати, *119*; *778*
  Рэлея, *588*
  с разделяющимися переменными, *63*
  теплопроводности
    двумерное, *866*
    одномерное, *830*
  численности популяции, *128*
  Эйри, *721*; *775*
  Эрмита, *720*
Ускорение, *38*
Условный период затухающих гармонических колебаний, *277*
Усовершенствованный метод Эйлера, *192*
  ошибка, *192*
Установившееся периодическое решение, *455*
Установившийся периодический ток, *324*
Устойчивая точка равновесия, *147*
Устойчивость
  линейных систем, *537*
  почти линейных систем, *538*
Устойчивый центр, *536*

Ф

Фаза, *272*
Фазовая
  диаграмма, *145*
Фазовая плоскость, *509*
  скорость и положение, *571*
Фазовый портрет, *355*; *511*
Фарада (единица емкости), *321*
Фейгенбаум, Митчелл, *599*
Ферхюльст, Пьер-Франуа (1804–1849), *132*; *140*
Физические единицы, *39*
Флагшток, *778*
Фокус, *535*
Формальное умножение рядов, *696*
Формула
  Абеля, *235*; *251*
  Родрига, *720*
Фробениус, Георг (1848–1919), *728*
Фундаментальная матрица, *482*

Фундаментальные матричные решения, *483*
Функция
  Бесселя
    асимптотические приближения, *773*
    модифицированная, *782*
    нулевого порядка, второго рода, *756*
    нулевого порядка, первого рода, *735*
    порядка $\frac{3}{2}$, *758*
    порядка n, второго рода, *767*
    порядка p, первого рода, *765*
    порядка 1, второго рода, *756*; *760*
    порядка 1, первого рода, *740*
    порядка 1/2, *739*
    тождества, *767*
  в виде прямоугольного колебания (меандр), *787*; *821*
  Хевисайда, *819*
  Эйри, *721*
Функция, дающая положение, *37*
Фурье Жан Батист Жозеф, (1768–1830), *761*; *787*; *835*

X

Хаос, *592*
  и удвоение периода, *599*
Характеристическое уравнение, *231*; *255*
  комплексные корни, *260*; *262*
  кратные корни, *232*; *257*; *262*
  матрицы, *425*
  различные вещественные корни, *231*; *255*
Хищник, *549*
Хищничество, *562*

Ц

Центр, *517*
  степенного ряда, *695*
  устойчивый, *517*; *536*
Цепная линия, *83*
Цепочка (собственных векторов), *469*; *473*
Цепь RLC, состоящая из сопротивления, индуктивности и емкости, *321*
  задачи Коши (задачи с начальными условиями), *326*
Циклоида, *378*

Ч

Частное решение, *34*
Частота, *272*
  резонанс, *328*
Черная дыра, *168*
Черчилль, Р., *835*
Численность популяции аллигаторов, *137*; *138*
Число Фибоначчи, *708*
Чистый резонанс, *307*; *824*

Я

Явление Гиббса, *792*
Яма и маятник, рассказ, *780*

Научно-популярное издание

Чарльз Генри Эдвардс, Дэвид Э. Пенни

Дифференциальные уравнения и краевые задачи: моделирование и вычисление с помощью Mathematica, Maple и MATLAB. 3-е издание

Литературный редактор *Л.Н. Важенина*
Верстка *А.Н. Полинчик*
Художественный редактор *С.А. Чернокозинский*
Корректор *Л.А. Гордиенко*

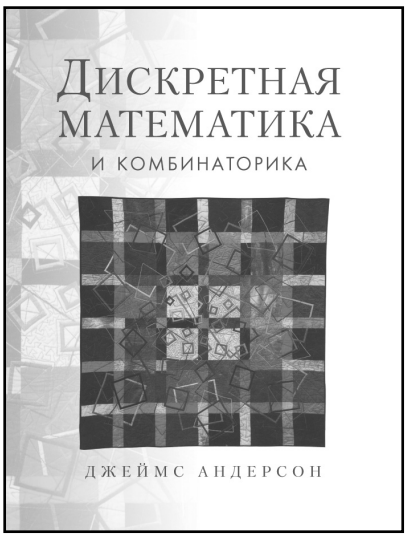
Издательский дом "Вильямс"
127055, г. Москва, ул. Лесная, д. 43, стр. 1

Подписано в печать 17.10.2007. Формат 70×100/16.
Гарнитура Times. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 89,01. Уч.-изд. л. 72,4.
Тираж 1000 экз. Заказ № 0000.

Отпечатано по технологии CtP
в ОАО "Печатный двор" им. А. М. Горького
197110, Санкт-Петербург, Чкаловский пр., 15.

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА С КОМБИНАТОРИКОЙ

Джеймс Андерсон



www.williamspublishing.com

Данная книга содержит доступное для начинающего читателя и достаточно полное изложение основных разделов дискретной математики. Особое внимание в ней уделено математической логике. Автор считает это важным как для развития техники доказательств, так и в более широком аспекте развития логического мышления. Кроме оснований математической логики, в книге изложены основы теории множеств, теории графов, теории алгоритмов, комбинаторики, элементы теории вероятностей. Она содержит обширные сведения по алгебре и теории чисел. Книга планировалась автором как основа односеместрового или двусеместрового курса по дискретной математике. Чтение книги требует некоторой математической культуры, хотя для изучения основных глав достаточно будет знаний по математике в объеме средней школы. Джеймс Андерсон, профессор университета штата Южная Каролина, США, сопроводил основной текст многочисленными примерами, а в конце каждого разделе дано большое количество упражнений. Книгу можно рекомендовать в качестве пособия по дискретной математике. В первую очередь она адресована преподавателям и студентам. Книга окажется весьма полезной тем, кто интересуется дискретной математикой и желает изучить ее самостоятельно.

Плановая дата выхода
3 кв. 2003 г.

ОПЦИОНЫ, ФЬЮЧЕРСЫ И ДРУГИЕ ПРОИЗВОДНЫЕ ФИНАНСОВЫЕ ИНСТРУМЕНТЫ
шестое издание

Джон К. Халл



Книга посвящена производным рынкам и управлению рисками. Благодаря исключительно широкому охвату материала и продуманному стилю изложения она стала настольной книгой трейдеров и самым популярным учебником для колледжей. Сбалансированное сочетание строгости и доступности не требует от читателя никаких априорных знаний об опционах, фьючерсных контрактах, свопах и других производных инструментах. Для успешного освоения студентам достаточно первичных знаний по финансам, теории вероятностей и математической статистике. Книга будет полезной преподавателям, студентам, научным сотрудникам, биржевым аналитикам, финансистам и всем тем, кто работает на финансовом рынке.

www.williamspublishing.com

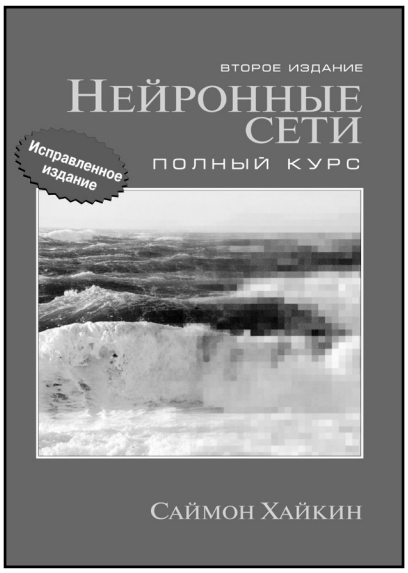
ISBN 978-5-8459-1205-3

в продаже

НЕЙРОННЫЕ СЕТИ ПОЛНЫЙ КУРС

2-Е ИЗДАНИЕ

Саймон Хайкин



www.williamspublishing.com

В книге рассматриваются основные парадигмы искусственных нейронных сетей. Представленный материал содержит строгое математическое обоснование всех нейросетевых парадигм, иллюстрируется примерами, описанием компьютерных экспериментов, содержит множество практических задач, а также обширную библиографию.

В книге также анализируется роль нейронных сетей при решении задач распознавания образов, управления и обработки сигналов. Структура книги очень удобна для разработки курсов обучения нейронным сетям и интеллектуальным вычислениям.

Книга будет полезна для инженеров, специалистов в области информатики, физиков и специалистов в других областях, а также для всех тех, кто интересуется искусственными нейронными сетями.

ISBN 5-8459-0890-6

в продаже

ПРИКЛАДНОЙ РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ

Н. Дрейпер, Г. Смит



www.dialektika.com

Полное классическое введение в фундаментальные основы регрессионного анализа. В книге описываются методы подбора и исследования линейных и нелинейных регрессионных моделей различной степени сложности, а также рассматриваются практические аспекты их применения, в том числе с использованием специальных компьютерных программ. Помимо стандартного набора тем, составляющих ядро курса регрессионного анализа, в это издание включены отдельные главы, посвященные мультиколлинеарности, обобщенным линейным моделям, геометрическим свойствам регрессии, робастной регрессии и процедурам тиражирования выборки (бутстрепа). Содержит множество примеров и упражнений (с полными или частичными решениями), а также вопросы для самоконтроля. Предназначена для аналитиков, экспериментаторов и студентов высших учебных заведений.

ISBN 5-8459-0963-5

в продаже

ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ СОВРЕМЕННЫЙ ПОДХОД

ВТОРОЕ ИЗДАНИЕ

С. Рассел
П. Норвиг



www.williamspublishing.com

В книге представлены все современные достижения и изложены идеи, которые были сформулированы в исследованиях, проводившихся в течение последних пятидесяти лет, а также собраны на протяжении двух тысячелетий в областях знаний, ставших стимулом к развитию искусственного интеллекта как науки проектирования рациональных агентов. Теоретическое описание иллюстрируется многочисленными алгоритмами, реализации которых в виде готовых программ на нескольких языках программирования находятся на сопровождающем Web-узле. Книга предназначена для использования в базовом университетском курсе или в последовательности курсов по специальности. Применима в качестве основного справочника для аспирантов, специализирующихся в области искусственного интеллекта, а также будет небезынтересна профессионалам, желающим выйти за пределы избранной ими специальности.

ISBN 5-8459-0887-6

в продаже

ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ: СТРУКТУРЫ И СТРАТЕГИИ РЕШЕНИЙ СЛОЖНЫХ ПРОБЛЕМ, 4-Е ИЗДАНИЕ

Джордж Люгер



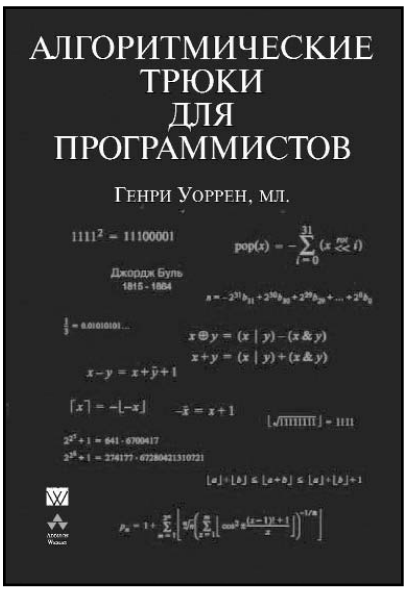
www.williamspublishing.com

в продаже

Данная книга посвящена одной из наиболее перспективных и привлекательных областей развития научного знания — методологии искусственного интеллекта (ИИ). В ней детально описываются как теоретические основы искусственного интеллекта, так и примеры построения конкретных прикладных систем. Книга дает полное представление о современном состоянии развития этой области науки. Подробно рассматриваются вопросы представления знаний при решении задач ИИ, логика решения этих задач, алгоритмы поиска, продукционные системы и машинное обучение. Эти вопросы остаются центральными в области искусственного интеллекта. В книге также представлены результаты новейших исследований, связанных с вопросами понимания естественного языка, обучения с подкреплением, рассуждения в условиях неопределенности, эмерджентных вычислений, автоматического доказательства теорем и решения задач ИИ на основе моделей. Большое внимание уделяется описанию реальных прикладных систем, построенных на принципах ИИ, и современных областей приложения этой области знаний. Помимо математических основ искусственного интеллекта в книге затронуты его философские аспекты. В последней части книги рассматриваются технологии программирования задач из области искусственного интеллекта на языках LISP и PROLOG. Книга будет полезна как опытным специалистам в области искусственного интеллекта, так и студентам и начинающим ученым.

АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ТРЮКИ ДЛЯ ПРОГРАММИСТОВ

Генри С. Уоррен, мл.



www.williamspublishing.com

в продаже

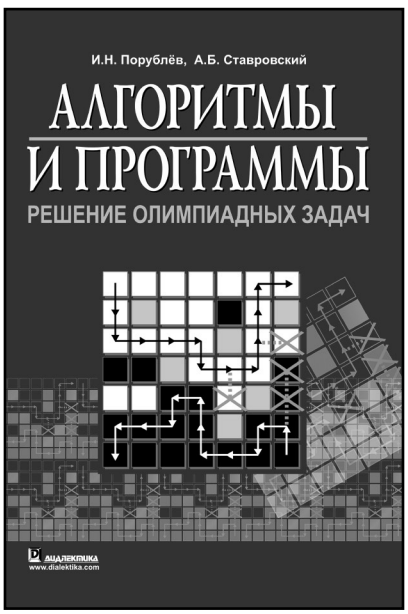
Эта книга, несмотря на ее название в оригинале — *Hacker's Delight* — не имеет никакого отношения к подбору паролей или взлому сетей. Здесь слову "хакер" возвращено его первозданное значение — человека увлеченного, талантливого программиста, способного к созданию чрезвычайно эффективного и элегантного кода. В любой области человеческой деятельности эффективность эстетична, и программирование не является исключением.

В этой книге вы познакомитесь с приемами работы с целочисленной арифметикой, которые доставят вам массу чисто эстетического наслаждения — при этом попутно повысив вашу квалификацию.

В книге воплощен сорокалетний стаж ее автора в области разработки компиляторов и архитектуры компьютеров. Здесь вы найдете множество приемов для работы с отдельными битами, байтами, вычисления различных целочисленных функций — причем большей части материала сопутствует строгое математическое обоснование. Каким бы высоким не был ваш профессионализм — вы все равно найдете в этой книге что-то новое для себя или по крайней мере книга заставит вас посмотреть на уже знакомые вещи с другой стороны. Не в меньшей степени эта книга пригодна и для начинающего программиста, который может просто воспользоваться готовыми советами из книги, применяя их в своей повседневной практике.

АЛГОРИТМЫ И ПРОГРАММЫ
РЕШЕНИЕ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ

И.Н. Порублев
А.Б. Ставровский



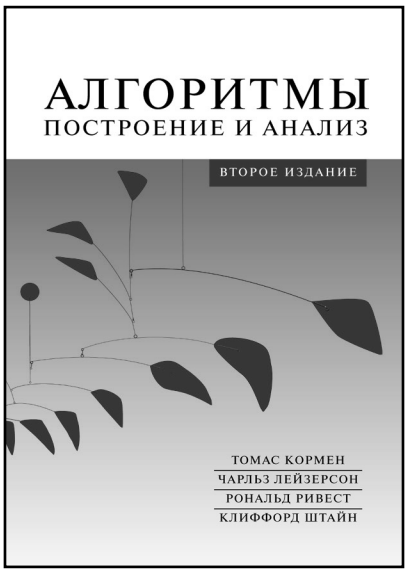
www.dialektika.com

Данная книга ориентирована на старшеклассников и студентов младших курсов, желающих подготовиться к олимпиадам или экзаменам по программированию. Ее могут использовать и учителя информатики, и все те, кого интересует решение нестандартных алгоритмических задач. В книге обсуждаются методы решения различных задач по программированию, знание которых будет полезно во многих ситуациях. Затронуты также технические вопросы: структурное кодирование и использование подпрограмм, элементы стиля, отладки и тестирования, использование режимов компиляции, организация ввода данных. Особое внимание уделено анализу сложности алгоритмов. Книга будет полезна всем, кто учится программировать — именно учится программировать, а не изучает языки программирования.

ISBN 978-5-8459-1244-2 **в продаже**

АЛГОРИТМЫ
ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ
ВТОРОЕ ИЗДАНИЕ

Томас Кормен
Чарльз Лейзерсон
Рональд Ривест
Клиффорд Штайн



www.williamspublishing.com

Фундаментальный труд известных специалистов в области кибернетики достоин занять место на полке любого человека, чья деятельность так или иначе связана с информатикой и алгоритмами. Для профессионала эта книга может служить настольным справочником, для преподавателя — пособием для подготовки к лекциям и источником интересных нетривиальных задач, для студентов и аспирантов — отличным учебником. Описание алгоритмов на естественном языке дополняется псевдокодом, который позволяет любому имеющему хотя бы начальные знания и опыт программирования, реализовать алгоритм на используемом им языке программирования. Строгий математический анализ и обилие теорем сопровождаются большим количеством иллюстраций, элементарными рассуждениями и простыми приближенными оценками. Широта охвата материала и степень строгости его изложения дают основания считать эту книгу одной из лучших книг, посвященных разработке и анализу алгоритмов.

ISBN 5-8459-0857-4

в продаже