Андрей Багманов
Александра Солдатова

Экзамен по математике без репетитора

Практикум абитуриента

Санкт-Петербург
«БХВ-Петербург»
2004

УДК 51(076.1)
ББК 22.1я729
Б14

Багманов А., Солдатова А.

Б14 Экзамен по математике без репетитора. Практикум абитуриента. — СПб.: БХВ-Петербург, 2004. — 352 с.: ил.

ISBN 5-94157-432-0

Пособие по математике для самостоятельной подготовки к поступлению в технические вузы. Ориентировано на тестовую систему вступительных экзаменов; содержит занятия по всем разделам математики программы средней общеобразовательной школы и тренировочные тесты. Составлено с учетом затруднений и распространенных ошибок абитуриентов.

Для абитуриентов и преподавателей

УДК 51(076.1)
ББК 22.1я729

Группа подготовки издания:

Главный редактор	*Екатерина Кондукова*
Зам. главного редактора	*Людмила Еремеевская*
Зав. редакцией	*Григорий Добин*
Редактор	*Анна Кузьмина*
Компьютерная верстка	*Натальи Караваевой*
Корректор	*Виктория Пиотровская*
Дизайн обложки	*Игоря Цырульникова*
Зав. производством	*Николай Тверских*

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 22.06.04.
Формат $60\times90^1/_{16}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 22.
Тираж 3000 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 190005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29.

Гигиеническое заключение на продукцию, товар № 77.99.02.953.Д.001537.03.02 от 13.03.2002 г. выдано Департаментом ГСЭН Минздрава России.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12

ISBN 5-94157-432-0

Содержание

Предисловие

Пособие создано на базе устоявшегося экспресс-курса, предлагаемого авторами выпускникам средних учебных заведений на завершающем этапе обучения элементарной математике. В предлагаемом виде ориентировано на самостоятельные занятия абитуриента.

В последние годы широкое распространение получила тестовая система контроля знаний; она применяется и в средних учебных заведениях, и в высшей школе. В такой же форме проводятся, как правило, выпускные и/или вступительные экзамены. На эту систему проведения испытаний рассчитана и наша книга.

Пособие состоит из 22 глав, условно именуемых занятиями, и тестов. Каждое занятие посвящено одной или двум связанным между собой темам и состоит из следующих подразделов: задачи, определяющие тему; ответы; указания; подробные решения; комментарии; задачи для самостоятельного решения и ответы к ним. Такая структура пособия, как мы надеемся, будет удобной читателю. Она отражает испытанный нами подход к организации обучения абитуриентов и учитывает специфические особенности самостоятельной работы. Задачи внутри каждого занятия значительно различаются по сложности. Одно занятие предполагает несколько часов работы. Поясним подробнее роль каждого подраздела.

- *Вводные задачи* определяют тему занятия. Как правило, расположены в порядке возрастания сложности. Решая эти задачи, учащийся может объективно оценить начальный уровень знаний по текущей теме.

- *Ответы* (к вводным задачам) предназначены для поверхностной проверки. Если все сошлось, можно переходить к последнему пункту. В принципе, не вредно заглянуть в *разд. "Решения"* и *"Комментарии"*.
- *Указания* нужны в случае, если самостоятельно отыскать решение той или иной задачи не удалось. Приводятся не ко всем задачам.
- *Решения* имеются практически везде, кроме самых простых случаев.
- *Комментарии* призваны продемонстрировать уровень общности разнообразных задач. Иногда приводятся альтернативные варианты решений.
- *Задачи для самостоятельного решения* аналогичны или похожи на определяющие тему, но зачастую значительно расширяют последнюю.

Что полезно держать под рукой при работе с пособием (помимо тетради)? Справочник (см. список литературы). Чертежные принадлежности.

Что ни в коем случае не стоит использовать (при решении задач) электронные вычислительные средства (калькулятор, компьютер и т. д.).

Материалы пособия создавались на протяжении ряда лет в процессе работы с абитуриентами и старшеклассниками. Авторы выражают благодарность за содействие в создании пособия: доценту кафедры "Высшая математика" СПбГПУ С. П. Преображенскому, доценту той же кафедры А. Н. Васильеву, другим преподавателям кафедры "Высшая математика" СПбГПУ, а также Подготовительных курсов СПбГПУ. Авторы также выражают признательность администрации средней школы № 110 Выборгского района Санкт-Петербурга в лице Т. Г. Петровой и В. Г. Самсоновой.

За все возможные ошибки и недочеты ответственность несут исключительно авторы.

Занятие 1

Вещественные числа

Натуральные числа. Пересчет элементов конечных множеств. Целые числа. Простые и составные натуральные числа, разложение составного числа на простые множители. Рациональные и иррациональные вещественные числа. Запись вещественного числа в различных формах. Изображение вещественных чисел точками числовой прямой. Сравнение вещественных чисел. Смежные вопросы.

Вводные задачи

1. Из чисел $912 \cdot 918$, $913 \cdot 917$, 915^2 выбрать наименьшее.

2. Из чисел $\dfrac{237}{238}, \dfrac{537}{538}, \dfrac{937}{938}$ выбрать наибольшее.

3. Найти натуральное число n, если $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{72}$.

4. Решить уравнение $x^2 + x = 2450$.

5. Что больше: 6^{12} или 12^6?

6. Найти значение $\sqrt{32} \cdot \sqrt{128}$.

7. Найти значение $\sqrt[3]{373248}$.

8. Верно ли, что число $\dfrac{0,(16)}{0,(8)}$ меньше 2?

9. Сколько членов насчитывает арифметическая прогрессия 10, 12, ..., 100?

10. Сколько членов насчитывает арифметическая прогрессия $\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\frac{3}{\sqrt{2}}$, ..., $\frac{29}{\sqrt{2}}$?

11. На сколько промежутков разбивают числовую ось решения уравнения

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-55)=0\,?$$

12. Сколькими точками изображаются на единичной окружности решения уравнения $\sin 4x = 0$? $\sin\frac{x}{4} = 0$?

13. Что больше: $\log_2 50$ или $\frac{11}{2}$?

14. Что больше: $\lg 15$ или $\log_2 3$?

15. Найти наименьшее целое положительное решение неравенства $x^3 - \frac{5}{x} \geq 1$.

Ответы

1. Первое. **2.** Последнее. **3.** 8. **4.** 49; −50. **5.** Первое. **6.** 64. **7.** 72. **8.** Да. **9.** 46. **10.** 15. **11.** На шесть. **12.** 8; изобразить нельзя. **13.** Первое. **14.** Второе. **15.** 2.

Указания

1. Если обозначить $915 = a$, то наши числа-произведения примут вид

$$(a-3)\cdot(a+3),\ (a-2)\cdot(a+2),\ a^2.$$

2. Вместо упомянутых чисел можно сравнивать разности единицы и этих чисел.

3. $72 = 8 \cdot 9$; $\frac{1}{72} = \frac{1}{8} - \frac{1}{9}$.

4. $x^2+x=x\cdot(x+1)$; $2450=50\cdot 50-50=49\cdot 50=-50\cdot(-49)$.

5. $6^{12}=(?)^6$.

6. Оба подкоренных числа — степени двойки. Воспользуйтесь мультипликативным свойством корня.

7. Разложите на множители подкоренное число.

8. Обратите дроби в обыкновенные. В частности, для этого можно представить периодическую дробь в виде суммы бесконечной геометрической прогрессии. Кроме того, ответить на поставленный вопрос можно и без прямых вычислений, пользуясь грубыми оценками.

9. Можно, например, исходить из формулы n-го члена арифметической прогрессии.

10. Вместо данной можно рассмотреть прогрессию из нечетных натуральных чисел 1, 3, 5, ..., 29.

11. Промежутков на один больше, чем самих точек разбиения (1, 2, 3, 4, 55).

12. Решения идут с периодом $\frac{\pi}{2}$. Угловая величина полной окружности равна 2π. Дуг столько же, сколько точек разбиения. Во втором случае период структуры решений длиннее самой окружности (4π по сравнению с 2π).

13. Вместо данных чисел ($a=\log_2 50$, $b=\frac{11}{2}$) можно сравнить (натуральные) числа 2^{2a} и 2^{2b}.

14. Воспользуйтесь "методом увеличительного стекла": умножьте каждое из сравниваемых чисел на 2 и найдите целые части получившихся значений.

15. Решать неравенство не нужно.

Решения

1. Пусть $915=a$; $\Rightarrow$ $912\cdot 918=(a-3)\cdot(a+3)=a^2-9$;

$913\cdot 917=(a-2)\cdot(a+2)=a^2-4$; $915^2=a^2$;

$a^2>a^2-4>a^2-9$.

2. $\frac{237}{238}=1-\frac{1}{238}$; $\frac{537}{538}=1-\frac{1}{538}$; $\frac{937}{938}=1-\frac{1}{938}$.

Чем больше знаменатель, тем дроби меньше, а разности больше.

3. Поскольку $n\in\mathbb{N}$, уравнение равносильно такому: $n\cdot(n+1)=8\cdot(8+1)$. Очевидно, $n = 8$ — один из корней уравнения. Других корней быть не может, т. к. при $n > 8$ будем получать больше 72, а при $n < 8$ — меньше 8.

4. $x\cdot(x+1)=49\cdot(49+1)=-50\cdot(-50+1)$. Очевидны корни $x_1=49$, $x_2=-50$. Больше двух корней у квадратного уравнения не может быть.

5. Приводим оба числовых выражения к степени 6: $6^{12}=6^{2\cdot 6}=36^6>12^6$.

6. Мультипликативное свойство корня:

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab};$$

имеем:

$$\sqrt{2^5}\cdot\sqrt{2^7}=\sqrt{2^{12}}=2^6=64.$$

7. Разложим подкоренное число на простые множители:

$$373\ 248=2\cdot 186\ 624=2^2\cdot 93\ 312=2^3\cdot 46\ 656=2^4\cdot 23\ 328=$$

$$=2^5\cdot 11\ 664=2^6\cdot 5832=2^7\cdot 2916=2^8\cdot 1458=2^9\cdot 729=$$

$$=2^9\cdot 3\cdot 243=2^9\cdot 3^2\cdot 81=2^9\cdot 3^6$$

Таким образом, искомое значение
$\sqrt[3]{2^9\cdot 3^6}=2^3\cdot 3^2=8\cdot 9=72$.

8. $0,(8)=0,888\ \ldots=0,8+0,08+0,008+\ldots=\frac{0,8}{1-0,1}=\frac{8}{9}$;

$$0,(16)=0,161616\ldots=0,16+0,0016+0,000016+\ldots=\frac{0,16}{1-0,01}=\frac{16}{99};$$

$$\frac{(16/99)}{(8/9)}=\frac{2}{11}<2.$$

Или: $0,(16) = 0,1616\ \ldots < 0,2$;

$$0,(8) = 0,888\ \ldots > 0,8\ ; \Rightarrow \frac{0,(16)}{0,(8)} < \frac{0,2}{0,8} = \frac{1}{4} < 2\ .$$

9. Количество "запятых" в записи 10, 12, ..., 100 равно

$$\frac{\langle\text{большее}\rangle - \langle\text{меньшее}\rangle}{\langle\text{длина промежутка}\rangle} = \frac{100 - 10}{2} = 45\ .$$

Количество самих чисел на 1 больше, т. е. 46.

10. Каждый член прогрессии — это число вида $\frac{2k-1}{\sqrt{2}}$, $k = 1, 2, ..., 15$.

Пятнадцать значений k определяют пятнадцать членов прогрессии.

11. Произведение нескольких множителей равно 0 тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен 0, а другие при этом не теряют смысла. Приравнивая к нулю по отдельности каждую скобку, получаем пять решений: 1, 2, 3, 4, 55. Эти точки разбивают числовую ось на 6 промежутков (рис. 1.1).

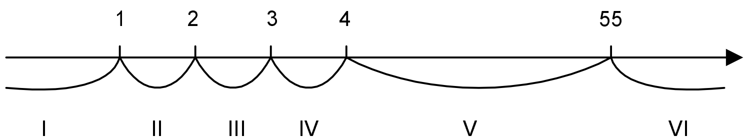

Рис. 1.1. Пять различных точек разбивают числовую ось на 6 промежутков

12. $\sin t = 0 \Leftrightarrow t = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; $\sin 4x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi k}{4},\ k \in \mathbb{Z}$. При $k = 0$ получаем $x = 0$; при $k = \pm 1$, $x = \pm\frac{\pi}{4}$; при $k = 2$, $x = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ и т. д. Точки идут строго с периодом $\frac{\pi}{4}$. На полной окружности (угловая мера 2π) поместятся 8 различных серий накладывающихся друг на друга точек. Во втором случае решениями будут точки $x = 4\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, т. е.

$\{..., -4\pi, 0, +4\pi, +8\pi, ...\}$. При попытке изобразить эти числа мы получим "мигающую" точку в правой части окружности, которая будет "включаться" через раз (рис. 1.2). Более естественно изобразить эту точку не на единичной окружности, а на "единичной восьмерке" (рис. 1.3), а точка, отмеченная крестиком, — "фальшивая". Вообще же тригонометрическую окружность можно представить себе как спираль, которую мы видим "с торца" (рис. 1.4).

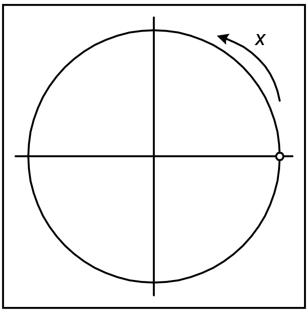

Рис. 1.2. Серии $x = 4\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. Изображающая точка на окружности "включается" через раз

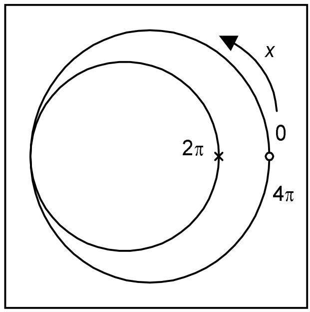

Рис. 1.3. "Двойная" окружность, "восьмерка"

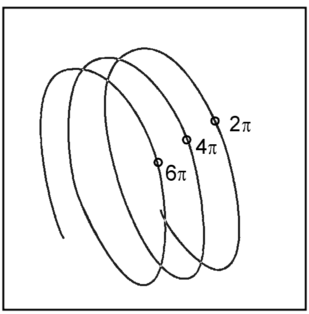

Рис. 1.4. Тригонометрическую окружность можно представить себе как спираль

13. Обозначим символом $*$ неизвестный нам знак неравенства между числами a и b: $a * b$. Этот знак заведомо не изменится на противоположный и не превратится в знак равенства, если числа удвоить: $2a * 2b$, или $2\log_2 50 * 11$, или

$\log_2 2500 * 11$. Чтобы избавиться от "неудобного" логарифма, выполним операцию, которая при решении уравнения может быть названа *потенцированием*: $2^{2a} * 2^{2b}$, или $2500 * 2^{11}$. Но поскольку $2^{10} > 1024$, то $2500 > 2048 = 2^{11}$, и $a > b$.

14. $\lg 15 * \log_2 3 \;\to\; 2\lg 15 * 2\log_2 3 \;\to\; \lg 225 * \log_2 9$.

Так как

$$\lg 225 \in \left(\underbrace{\lg 100}_{2}, \underbrace{\lg 1000}_{3}\right), \quad \log_2 9 \in \left(\underbrace{\log_2 8}_{3}, \underbrace{\log_2 16}_{4}\right),$$

то между данными числами "влезет" 3.

15. Число, о котором идет речь, должно быть минимальным, удовлетворяющим двум условиям:

а) оно целое положительное;

б) оно удовлетворяет неравенству $x^3 - \dfrac{5}{x} \ge 1$.

Начнем с условия (а). Наименьшее целое положительное число — это 1. Единица не есть решение (т. к. $1^3 - \dfrac{5}{1} = -4 < 1$), т. е. не удовлетворяет условию (б). Следующей после 1 будет 2. Нетрудно видеть, это число уже подходит. Оно и будет ответом на вопрос задачи.

Комментарии

1. Алгебраический подход к решению данного арифметического примера оказался удобным. Так бывает довольно часто.

2. Последовательность

$$x_n = \frac{1}{n}, \text{ т. е. } 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

монотонно убывает (каждое следующее число строго меньше предыдущего) и ограничена снизу (например, нулем, т. к. все эти числа положительны.) Та последовательность, три члена которой упоминаются в условии, образуется из добавок данных чисел до 1. Эта последовательность — строго возрастающая, но все ее члены меньше 1.

3. Разумеется, данное уравнение легко сводится к квадратному. Стоит ли? Вообще, полезно запомнить, что

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{1}{N+1}=\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1},$$

пригодится в дальнейшем. Мы еще столкнемся со случаями, когда не нужно приводить дроби к общему знаменателю, а, наоборот, как бы развести их по разным знаменателям.

4. Если выигрыш от данного рассуждения (имеется в виду и решение задачи 3) кажется пустяковым, рассмотрите уравнение $\sqrt{x}+\sqrt[3]{3(x+5)}=5$. Идея проста: монотонно возрастающая функция принимает каждое вещественное значение не более одного раза. То же относится и к монотонно убывающей функции. Невелика доблесть алгебраически вывести очевидное решение, попутно отмахиваясь от наседающих со всех сторон неравносильностей, посторонних корней и т. п.

5. Иногда удобнее привести их к одному основанию.

6. Можно было бы перенести множитель от одного корня другому:

$$\sqrt{32}\cdot\sqrt{128}=\sqrt{32\cdot 2}\cdot\sqrt{\frac{128}{2}}=\sqrt{64}\cdot\sqrt{64}\,.$$

7. Если подкоренное выражение "хорошо" раскладывается на простые (или не очень простые) множители, то можно действовать в том же духе. Если нет уверенности, что корень "должен извлекаться", а получить его в какой-то обозримой форме необходимо, то можно применить приближенные методы.

8. Есть еще один простой (хотя и не очень честный с формальной точки зрения) способ обращать периодические дроби в обыкновенные — через составление уравнения. Пусть $0,(8)=0,888\ldots=x$. Тогда $10x=8,888\ldots=8+0,888\ldots=8+x$, откуда $9x=8$, $x=8/9$. Для получения значения $0,(16)$ в виде обыкновенной дроби умножать придется на 100.

9. Следует иметь в виду "Правило забора". Количество перекладин на 1 меньше количества столбов (рис. 1.5).

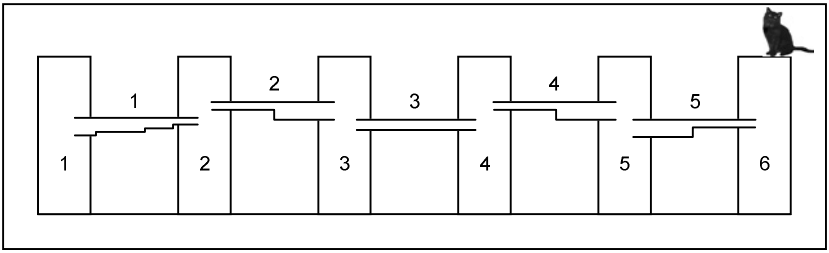

Рис. 1.5. "Правило забора"

Если же забор замкнутой формы, то количество столбов и перекладин совпадает. Например, если "столбы" — вершины правильного n-угольника, то они разобьют описанную окружность на n дуг угловой величины $\frac{2\pi}{n}$ каждая.

10. Прогрессия, о которой идет речь, задается параметрами $a_1 = \sqrt{1/2}$, $d = \sqrt{2}$ (количество членов теперь не считаем существенным параметром). Все ли ее члены — иррациональные числа? Да, все, т. к. если предположить, что $\frac{2k-1}{\sqrt{2}}$ рационально, т. е. равно $\frac{m}{n}$ ($m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$), то

$$\frac{2k-1}{\sqrt{2}} = \frac{m}{n} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{(2k-1)n}{m} \in \mathbb{Q},$$

т. е. $\sqrt{2}$ — рациональное число, что неверно. Деление на m законно. (Почему?)

12. Полезно иметь в виду, что количество "изображающих точек" на единичной окружности для тригонометрической серии

$$x = \alpha + \frac{\pi k}{n},\ k \in \mathbb{Z}$$

при натуральном n будет всегда равно $2\pi/(\pi/n) = 2\pi$. Например, серия

$$x = \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}$$

задает вершины правильного четырехугольника, вписанного в единичную окружность (т. е. квадрата). Серия

$$x = -\frac{\pi k}{6} + \frac{2\pi}{3} \cdot k\,,\ \ k \in \mathbb{Z}$$

определяет треугольник, а серия

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k\,,\ \ k \in \mathbb{Z}$$

представляет собой две точки (как и раньше, за каждой точкой окружности скрывается бесконечное множество точек спирали). Эти три случая отображены на рис. 1.6.

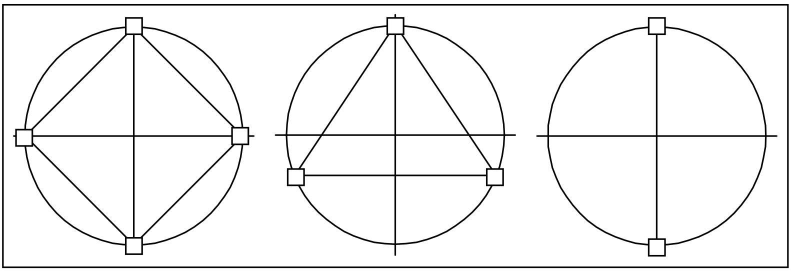

Рис. 1.6. Различные случаи изображения периодических серий решений

13. Приведенная запись процедуры сравнения вещественных чисел во многих случаях предпочтительнее любой другой. Пример: сравнить числа $\sqrt{2}+\sqrt{7}$ и $\sqrt{3}+\sqrt{6}$ (справа приведены пояснения).

$\sqrt{2}+\sqrt{7} \;*\; \sqrt{3}+\sqrt{6}$	оба числа > 0
$\left(\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)^2 * \left(\sqrt{3}+\sqrt{6}\right)^2$	возводим в квадрат
$2+2\sqrt{14}+7 * 3+6+2\sqrt{18}$	"убираем лишнее"
$\sqrt{14} * \sqrt{18}$	очевидно, $\sqrt{14}$ меньше

и потому $\sqrt{2}+\sqrt{7} < \sqrt{3}+\sqrt{6}$.

Важно, чтобы при каждом переходе от одной пары чисел к другой знак не мог измениться (этого всегда можно достичь).

14. Это совершенно иная ситуация. Аналитическими преобразованиями оба логарифма сразу убрать нельзя. В той или иной форме неопределенность останется, что бы мы с ними ни делали. Именно поэтому возникает необходимость "живой" оценки. Надо сказать, что различные оценки часто приходится выполнять в высшей математике.

15. Отметим, что в условии нет требования решить неравенство, т. е. найти все решения или доказать их отсутствие. Мы сделали ровно то, что требовалось.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти остаток от деления $568 \cdot 570 \cdot 573$ на 7.

2. Указать наименьшее пятизначное натуральное число, при делении на 18 дающее в остатке 3.

3. Из чисел $\frac{29}{59}$, $\frac{39}{79}$, $\frac{49}{99}$ выбрать наиболее близкое к $\frac{1}{2}$.

4. Сократить дробь $\frac{841}{899}$.

5. Найти наибольший общий делитель (НОД) и наименьшее общее кратное (НОК) чисел

а) 36 и 84;

б) 624 и 625;

в) p^n и p^m, $p = 2, 3, \ldots;$ $m > n$.

6. Найти такие числа A, B, что $\frac{A}{x} + \frac{B}{x+4} = \frac{4}{x^2+4x}$ для всех положительных x.

Решить уравнение (7—8):

7. $x^3 + 3x = 1030$.

8. $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2+2} = 1\frac{1}{3}$.

9. Что больше: $(3/2)^{20}$ или $(4/3)^{30}$?

10. Найти целое значение $\sqrt[4]{\sqrt[4]{128}\cdot\sqrt[4]{256}\cdot\sqrt[4]{2}}$.

11. Найти значение $\sqrt{30}\cdot\sqrt{110}\cdot\sqrt{132}$.

12. Верно ли, что число $7,(3)\cdot 6,(81)$ — целое?

13. Сколько положительных членов насчитывает арифметическая прогрессия 430, 421, 412, ...?

14. Указать количество нечетных четырехзначных натуральных чисел, являющихся полными квадратами.

15. Сколько решений имеет уравнение $\cos x = 1$ на промежутке $[-9\pi;\ 12\pi]$? На промежутке $[-10;\ 20]$?

16. На сколько промежутков разбивают числовую ось решения уравнения

$(2x-1)\cdot(3x-2)\cdot(4x-2)\cdot(3x-1)=0$?

17. Скольким точками изображаются на единичной окружности решения уравнения $\sin 8x = -1$?

Сравнить числа (18—20):

18. $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ и $\sqrt[4]{6}$.

19. $\lg 5$ и 0,7.

20. $\sqrt[5]{1+\sqrt{2}}$ и $\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{3}}$.

21. Числа $a = 2{,}5$; $b = \sqrt{5}$; $c = 5\cdot\sin\dfrac{\pi}{5}$ расположить в порядке возрастания.

22. Найти наибольшее целое решение неравенства $x^2 - 25x > 100$ из промежутка $[-10;\ -3]$.

23. При каком значении a уравнение $(x-1)\left(x^2+x-2\right)(x-a)=0$ имеет ровно два различных решения?

24. При каком значении a уравнение

$$\frac{(x+6)\cdot(x-2)}{x^2-a^2}=0$$

имеет ровно два различных решения?

25. Для каких $p \in \mathbb{R}$ наименьшее целочисленное решение неравенства $\dfrac{x-p}{x-4} < 0$ есть $x = 2$?

26. Является ли простым число $4^{14} - 441$?

27. Сколько различных натуральных делителей имеет число 2310?

28. Что больше: $1{,}034 \cdot 0{,}983^2$ или $1{,}012^2 \cdot 0{,}976$?

29. Найти число, обратное к половине отношения суммы наибольшего простого двузначного числа и числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке, к наибольшему двузначному числу, кратному сумме своих цифр.

30. Выполнить действия:

$$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}+2}{\sqrt{3}+1} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}+2}{\sqrt{3}-1}.$$

31. Показать, что

$$A = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}} \in \mathbb{Q}.$$

Записать значение A в стандартном виде ($A = \dfrac{n}{m}$, $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$).

32. При каких $n \in \mathbb{Z}$ число $\sin\dfrac{60\pi}{2^n}$ не является целым?

33. Сравнить числа $\sqrt{74} - \sqrt{73}$ и $\dfrac{1}{2\sqrt{73}}$.

Указание: $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = 1$.

34. При каких $n \in \mathbb{Z}$ число $\dfrac{2^n}{n+1}$ будет целым?

35. Определить знак числа $4\cos\dfrac{\pi}{6} + 5\sin\dfrac{\pi}{4} - 7$.

Определение

Целой частью вещественного числа называется наибольшее целое число, не превосходящее данного. Обозначение: $[x]$. Например, $[2{,}5] = 2$, $[-2{,}5] = -3$, $[\sqrt{2}\,] = 1$.

36. Найти целую часть числа $\sqrt{24} - \sqrt{98}$.

37. Найти целую часть числа $\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{9}$.

Указание: ближайшее к данному целое число — это 4. Привести к противоречию неравенство $\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{9} > 4$. Для этого обе его части умножить на положительное числовое выражение $\sqrt[3]{49} - \sqrt[3]{63} + \sqrt[3]{81}$. Учесть, что $\sqrt[3]{49} - \sqrt[3]{63} + \sqrt[3]{81} = \left(\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{9}\right)^2 - 3\sqrt[3]{63}$.

Ответы

1. 4. (*Указание:* $568 = n = \underbrace{81}_{k} \cdot 7 + 1 = 7k + 1$.) **2.** 10011. (*Указание:* предварительно разделить 10 000 на 18 с остатком.) **3.** Последнее. **4.** $\frac{29}{31}$. (*Указание:* $\frac{841}{899} = 1 - \frac{58}{899} = 1 - \frac{2 \cdot 29}{899}$.) **5.** а) 12, 252; б) 1, 390 000; в) p^n, p^m. **6.** $A = 1$, $B = -1$. **7.** 10. **8.** ± 1. **9.** Второе. **10.** 2. **11.** 660. **12.** Да. Это число равно 50. **13.** 48. **14.** 34. **15.** 11; 5. **16.** На четыре. **17.** Для изображения потребуется восемь точек. **18—20.** Первое меньше. **21.** b, a, c. (*Указание:* $\sin\frac{\pi}{5} > \sin\frac{\pi}{6}$.) **22.** -4. **23.** $a \in \{-2; 1\}$. **24.** $a \neq \pm 2$, $a \neq \pm 6$. **25.** $p \in [1; 2)$. **26.** Нет. (*Указание:* $4^{14} = \left(2^{14}\right)^2$; $441 = 21^2$.) **27.** 32. **28.** Второе. (*Указание:* введите обозначения $0{,}017 = p$, $0{,}012 = q$.) **29.** $\frac{45}{44}$. **30.** 1. **31.** $A = -\frac{1}{2}$. **32.** $n = 4, 5, \ldots$. **33.** Первое меньше. **34.** $\left\{2^{m-1} - 1,\ m \in \mathbb{N}\right\}$. **35.** Минус. **36.** -6. **37.** 3.

Занятие 2

Формулы сокращенного умножения

Разность квадратов. Разность кубов. Связь формул сокращенного умножения с задачей суммирования геометрической прогрессии. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Бесконечная периодическая дробь как сумма прогрессии. Квадрат суммы. Простейшие приближенные формулы. Геометрический смысл формул сокращенного умножения. Обобщения формул сокращенного умножения.

Вводные задачи

1. Упростить выражения: $(1-t)\cdot(1+t)$; $(1-t)\cdot\left(1+t+t^2\right)$;

$(1-t)\cdot\left(1+t+t^2+\ldots+t^{1000}\right)$.

2. Вычислить $\left(1-\sqrt[3]{5}\right)\cdot\left(1+\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}\right)$.

3. Вычислить $(1-0{,}1)\cdot\left(1+0{,}1+(0{,}1)^2+(0{,}1)^3+\ldots+(0{,}1)^n\right)$. Как будет вести себя данное выражение при $n \to \propto$?

4. Найти сумму $1+\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3+\ldots+\varepsilon^n$. Исследовать случай $-1 < \varepsilon < +1$, $n \to \propto$.

5. Получить значение выражения $a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5$ в компактной форме ($a > b > 0$).

6. Разложить на множители $2x^2-xy-y^2$.

7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 2, \\ 2x + y = 3. \end{cases}$$

8. Решить уравнение $9x^4 + 12x^2y^2 + 16y^4 = 0$.

9. Вывести приближенную формулу $(1+\varepsilon)^2 \approx 1 + 2\varepsilon$ для "малого" числа ε. Оценить значение $1{,}015^2$ и сравнить с точным.

10. Вывести приближенную формулу $\dfrac{1}{1+\varepsilon} \approx 1 - \varepsilon$. Оценить значение $\dfrac{1}{1{,}01}$ и сравнить с вычисленным непосредственным делением.

11. Вывести формулы квадрата суммы трех чисел и квадрата суммы *n* чисел.

12. Каков коэффициент при x^7 у многочлена $\left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5\right)^2$?

Ответы

1. $1 - t^2$; $1 - t^3$; $1 - t^{1001}$. **2.** -4. **3.** $1 - (0{,}1)^{n+1}$; стремится к 1. **4.** $\dfrac{1-\varepsilon^{n+1}}{1-\varepsilon}$ или $\dfrac{\varepsilon^{n+1}-1}{\varepsilon-1}$ при $\varepsilon \neq 1$; $n + 1$ при $\varepsilon = 1$; при $-1 < \varepsilon < +1$, $n \to \infty$ получаем $\dfrac{1}{1-\varepsilon}$. **5.** $\dfrac{a^6 - b^6}{a-b}$. **6.** $(2x + y)\cdot(x - y)$. **7.** (5/3; −1/3); (4/3; 1/3). **8.** (0; 0). **9.** $1{,}015^2 \approx 1{,}03$; $1{,}015^2 = 1{,}030225$.

10. $\dfrac{1}{1{,}01} \approx 0{,}99$; 0.9900990099... .

11. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc + 2ac + 2ab$; $(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n)^2 =$
$= a_1{}^2 + a_2{}^2 + \ldots + a_{n-1}{}^2 + a_n{}^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \ldots + 2a_1a_n + 2a_2a_3 + \ldots + 2a_{n-1}a_n$.

12. 4.

Указания

1. Все три формулы можно получить непосредственным перемножением.
2. Частный случай предыдущего.
3. Значение выражения получается непосредственным умножением; $(0,1)^{n+1}$ с ростом n быстро стремится к 0.
4. Если $\varepsilon = 1$, получаем сумму $1 + 1 + ... + 1$ из n слагаемых; в противном случае все выражение домножаем и делим на $1 - \varepsilon$.
5. Вынести a^5 или b^5.
6. Вынести y^2; получится квадратичное выражение относительно $\frac{x}{y}$.
7. Разложить на множители левую часть первого уравнения. Через эти множители просто выражается левая часть второго уравнения.
8. При $y \neq 0$ выполнить деление на y^4.
9. Сравнить поведение $2y$ и $y^2 = y \cdot y$ при малых y.
10. Рассмотреть разность $\frac{1}{1+\varepsilon} - (1-\varepsilon)$; показать ее малое значение при малых ε.
11. Формула квадрата суммы трех чисел (четырех, пяти) получается непосредственным перемножением; для случая n слагаемых можно воспользоваться методом математической индукции.
12. Выяснить, какие слагаемые в скобках "порождают" член x^7.

Решения

1. Приводим решение третьего примера.

$$(1-t)\cdot\left(1+t+t^2+...+t^{1000}\right)=$$

$$=(1-t)+\left(t-t^2\right)+\left(t^2-t^3\right)+...+\left(t^{1000}-t^{1001}\right)=$$

$$= 1 \underbrace{-t + t}_{0} \underbrace{-t^2 + t^2}_{0} \underbrace{-t^3 + \ldots + t^{1000}}_{0+0+\ldots+0} - t^{1001} = 1 - t^{1001}$$

Остаются лишь непарные слагаемые: первое и последнее

2. $\left(1-\sqrt[3]{5}\right)\cdot\left(1+\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}\right)=1-\left(\sqrt[3]{5}\right)^3=1-5=-4.$

3. Сокращая слагаемые после умножения, получим выражение, содержащее лишь крайние члены: $1-(0,1)^{n+1}$. При большом количестве слагаемых в скобке это выражение сколь угодно мало отличается от 1, например, при $n = 1$ получаем $1-(0,1)^{n+1}=1-(0,1)^{1+1}=0,99$, а при $n = 5$ уже $1-(0,1)^{5+1}=0,999\,999$.

4. $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \ldots + \varepsilon^n =$

$$\frac{(1-\varepsilon)\cdot\left(1+\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3+\ldots+\varepsilon^n\right)}{1-\varepsilon}=\frac{1-\varepsilon^{n+1}}{1-\varepsilon}.$$

По сути, это вывод формулы суммы геометрической прогрессии. Если ε — "мал", т. е. $-1 < \varepsilon < +1$, то $\varepsilon^{n+1} \to 0$ (стремится к нулю), и вся дробь превращается в $\dfrac{1}{1-\varepsilon}$ — формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

5. $a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5 =$

$$= b^5 \cdot \left(\underbrace{\frac{a^5}{b^5}+\frac{a^4}{b^4}+\frac{a^3}{b^3}+\frac{a^2}{b^2}+\frac{a}{b}+1}_{\text{Сумма геометрич. прогрессии, как в п. 4}} \right) = b^5 \cdot \frac{\dfrac{a^6}{b^6}-1}{\dfrac{a}{b}-1} = \frac{a^6-b^6}{a-b}$$

или же можно выполнить умножение и деление на $a - b$.

Отметим, что каждый член указанного выражения имеет одну и ту же суммарную (по совокупности переменных a и b) степень, а именно 5. Выражения такого типа называются *однородными*.

6. Если $y \neq 0$, то

$$2x^2 - xy - y^2 = y^2 \cdot \left(2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} - 1 \right).$$

Пусть отношение $\frac{x}{y} = t$; тогда выражение в скобках есть $2t^2 - t - 1$. Это квадратный трехчлен с корнями $t_1 = -1/2$, $t_2 = 1$. Используя формулу разложения квадратного трехчлена на множители $a\,t^2 + b\,t + c = a(t - t_1)(t - t_2)$ для $a \neq 0$, $D > 0$, получаем

$$2t^2 - t - 1 = 2(t + 1/2)\,(t - 1) = (2t + 1)(t - 1),$$

т. е.

$$2x^2 - xy - y^2 = y^2 \cdot \left(2 \cdot \frac{x}{y} + 1 \right)\left(\frac{x}{y} - 1 \right) = (2x + y)(x - y).$$

Отметим, что если все же $y = 0$, то и тогда такое разложение на множители остается справедливым.

7. Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} (x - y) \cdot (x + 2y) = 2, \\ (x - y) + (x + 2y) = 3. \end{cases}$$

Последнее возможно, если

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ x + 2y = 2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x - y = 2, \\ x + 2y = 1. \end{cases}$$

Это линейные системы.

Решение первой есть $x = 4/3$; $y = 1/3$, а второй $x = 5/3$; $y = -1/3$.

8. Если предположить, что $y = 0$, то

$$9x^4 + 12x^2 \cdot 0 + 16 \cdot 0^4 = 0,$$

и тогда $x = 0$. Если же $y \neq 0$, то можно делить на y^4. Получаем

$$9 \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^4 + 12\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 16 = 0,$$

биквадратное относительно x/y уравнение. Заменяя $(x/y)^2$ на t, имеем $9t^2+12t+16=0$, квадратное уравнение с отрицательным дискриминантом. Следовательно, новых возможностей для дополнительных решений не появляется.

9. Чтобы получить данную приближенную формулу, достаточно раскрыть скобки и пренебречь членом ε^2: $(1+\varepsilon)^2=1+2\varepsilon+\varepsilon^2\approx 1+2\varepsilon$. Смысл формулы в том, что при малых (близких к нулю с любой стороны) значениях ε малыми оказываются и 2ε, и ε^2, но $\varepsilon^2=\varepsilon\cdot\varepsilon\ll 2\varepsilon$ (много меньше). Такого рода формулы очень полезны для приближенных числовых (и алгебраических) оценок. Например, $1{,}015^2\approx 1+2\cdot 0{,}015=1{,}03$ — хорошее приближение к точному значению 1,030225. Относительное отклонение от истинного результата здесь примерно $2\%\%=\dfrac{2}{10\,000}$. Существует множество приближенных формул. Они часто применяются как внутри самой математики, так и в приложениях.

10. Рассмотрим разность между левой и правой частями:

$$\frac{1}{1+\varepsilon}-(1-\varepsilon)=\frac{1-(1+\varepsilon)\cdot(1-\varepsilon)}{1+\varepsilon}=\frac{1-\left(1-\varepsilon^2\right)}{1+\varepsilon}=\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon}.$$

На интуитивном уровне очевидно, что при $\varepsilon\to 0$ роль ε в знаменателе ничтожна, и вся дробь близка к ε^2. Это выражение стремится к 0 быстрее, чем сама поправка $-\varepsilon$ в выражении $1-\varepsilon$. Для более строгого рассуждения запишем

$$\frac{1}{1+\varepsilon}=1-\varepsilon+\frac{\varepsilon^2}{1+\varepsilon}=1-\varepsilon\left(1-\underbrace{\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}}_{\to 0\ \text{при}\ \varepsilon\to 0}\right).$$

В этом выражении скобка — коэффициент при ε — стремится к 1, когда $\varepsilon\to 0$. Отметим еще, что при замене ε на $-\varepsilon$ можно получить приближенную формулу

$$\frac{1}{1-\varepsilon}\approx 1+\varepsilon.$$

Она связана с формулой суммы бесконечной геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1-\varepsilon} = 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots,$$

действующей даже при не очень маленьких ε — лишь бы $-1 < \varepsilon < +1$. Если в правой части взять только два слагаемых, получим, как и выше,

$$\frac{1}{1-\varepsilon} = 1 + \varepsilon$$

с точностью, как говорят, "до квадратичных по ε поправок".

11. $(a+b+c)^2 = (a+b+c)\cdot(a+b+c) =$

$= aa + ab + ac + ba + bb + bc + ca + cb + cc =$

$= \underbrace{a^2 + b^2 + c^2}_{\text{Все квадраты}} + \underbrace{2bc + 2ac + 2ab}_{\text{Все удвоенные произведения}};$

$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\cdot(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) =$

$= a_1a_1 + a_1a_2 + \ldots + a_1a_n + a_2a_1 + a_2a_2 +$

$+ \ldots + a_2a_n + \ldots + a_na_1 + a_na_2 + \ldots + a_na_n =$

$= \underbrace{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}_{\text{Все квадраты}} + \underbrace{2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \ldots + 2a_{n-1}a_n}_{\text{Все удвоенные произведения}}.$

Заметим, что с помощью знака суммирования $\sum$ последняя формула записывается компактнее, а именно:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\cdot \sum_{1\le k<m\le n} a_k a_m .$$

Об использовании знака суммирования $\sum$ *см. в разд. "Комментарии" далее в этом занятии.*

12. При развертывании квадрата суммы $\left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5\right)^2$ нечетная седьмая степень может получиться только через удвоенные произведения, но не через квадраты. Седьмую степень дадут произведения x^2x^5, x^3x^4. С учетом удвоения смешанных произведений получаем итоговый коэффициент 4.

Комментарии

1. Данный пример демонстрирует прямую связь между формулами сокращенного умножения (разность квадратов, разность кубов) и суммой геометрической прогрессии. В последующих примерах эта связь еще теснее.

2. В связи с данным примером полезно рассмотреть следующее числовое преобразование. Иногда требуется видоизменить дробь, содержащую иррациональность в знаменателе, таким образом, чтобы этой иррациональности не было (пусть даже ценой усложнения числителя). Выражение $\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ можно привести к рациональному знаменателю, просто домножив числитель и знаменатель на $\sqrt{2}$. Получим $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Дробь $\frac{1}{\sqrt{2}+1}$ для той же цели потребует домножения на т. н. "сопряженное выражение" $\sqrt{2}-1$. Получится
$$\frac{\sqrt{2}-1}{\underbrace{\left(\sqrt{2}+1\right)\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)}_{\text{Разность квадратов}}}=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}=\sqrt{2}-1\,.$$
(Это, кстати, не что иное, как $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$.) А для того чтобы избавиться от иррациональности в знаменателе дроби $\frac{4}{\sqrt[3]{5}-1}$, как нетрудно догадаться, следует использовать множитель $\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{5}+1$.

3. Здесь использован "принцип домино". Множитель $1-0{,}1$ (именно в таком виде, а не в виде 0,9) инициирует процесс падения "костяшек" — степенных слагаемых, которые сокращаются все, кроме первого и последнего. Именно так "сворачивается" сумма геометрической прогрессии. Предельный

переход при $n \to \infty$ использован для пояснения связи между суммами конечной и бесконечной прогрессий. Фактически же выполнено перемножение 0,9 и $1,(1) = 1,111...$

4. Хочется надеяться, что с учетом решения предыдущего примера данное преобразование (суммирование геометрической прогрессии) не будет восприниматься как нечто искусственное.

5. Это случай "размерных" величин a и b. Можно считать, например, что a и b — это длины отрезков. Данная формула окажется в одном ряду с такими, как

- $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ (формула оперирует величинами, имеющими значения площади, недаром в ее графическом доказательстве присутствуют площади прямоугольников);
- $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ (размерность объема; при наличии известного воображения легко построить соответствующее 3d-нагромождение из параллелепипедов).

Учет "размерностей" часто помогает контролировать ход решения задачи. Многие ошибки, с которыми приходится встречаться на практике, "режут глаза", если только взглянуть на решение с точки зрения контроля размерности.

6. Тоже "размерная" конструкция. "Площадь" $2x^2 - xy - y^2$ трансформируется в произведение "длин" $(2x + y) \cdot (x - y)$.

7. Разумеется, можно просто "выразить x из одного и подставить в другое". Здесь просто показана еще одна возможность.

8. Данное уравнение могло быть решено несколько иначе, а именно через выделение полного квадрата:

$$9x^4 + 12x^2y^2 + 16y^4 = \left(3x^2 + 2y^2\right)^2 + 12y^4.$$

Последнее выражение может принимать только неотрицательные значения, причем нулю оно будет равно лишь при условии, если оба слагаемых нули, т. е.

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 = 0, \\ y^4 = 0. \end{cases}$$

Отсюда $x = y = 0$. Выражение $9x^4 + 12x^2y^2 + 16y^4$, стоящее в левой части уравнения и зависящее от переменных x и y, может пониматься как функция двух этих переменных: $z = f(x, y) = 9x^4 + 12x^2y^2 + 16y^4$. Например, $f(1,0) = 9 \cdot 1^4 + 12 \cdot 1^2 \cdot 0^2 + 16 \cdot 0^4 = 9$. Данная функция принимает только неотрицательные значения. График данной функции — криволинейная поверхность (рис. 2.1), располагается в четырех верхних октантах пространства. Каждой точке плоскости (x, y) соответствует определенная "высота" z. В точке (0, 0, 0) график касается координатной плоскости (xOy),

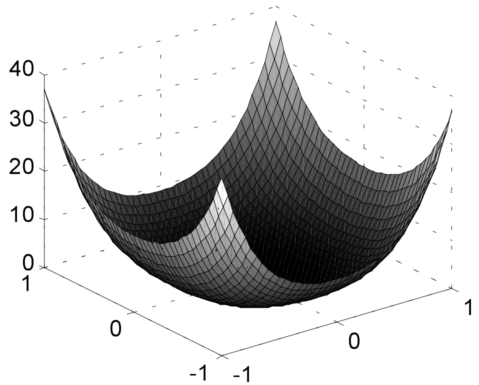

Рис. 2.1. График функции $f(x, y) = 9x^4 + 12x^2y^2 + 16y^4$

а для самой функции $z = f(x, y)$ это точка минимума. Значение $z = 0$ для данной функции — экстремально малое. Поэтому неудивительно, что исходное уравнение имеет лишь одно решение.

9. Рассмотрим данное приближенное равенство в несколько ином виде. Пусть $x = 1 + \varepsilon$ — число, близкое к 1. Тогда имеем $x^2 \approx 1 + 2(x-1) = 2x - 1$. Если построить в одной координатной системе графики функций $y = x^2$ и $y = 2x - 1$, можно догадаться, что вторая из них определяет касательную к параболе, задаваемой первой (рис. 2.2) Используя, например, общее уравнение касательной, нетрудно убедиться, что так оно и есть. Таким образом, упрощенное выражение учитывает значение функции в точке касания и скорость роста в этой точке. Поэтому оно хорошо описывает поведение функции вблизи этой точки и почти ничего не говорит об этом поведении вдали от нее.

10. См. рис. 2.3. Здесь показаны графики функций $y = \dfrac{1}{1+x}$ и $y = 1 - x$.

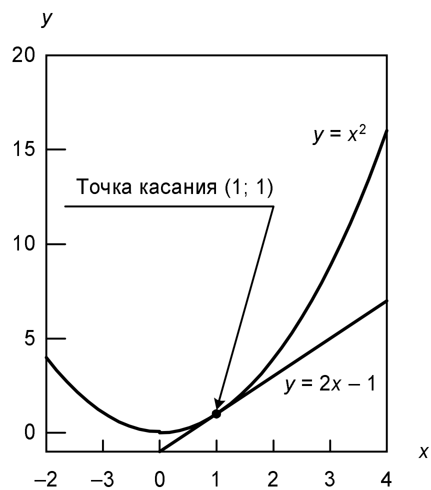

Рис. 2.2. Графики функций $y = x^2$ и $y = 2x - 1$

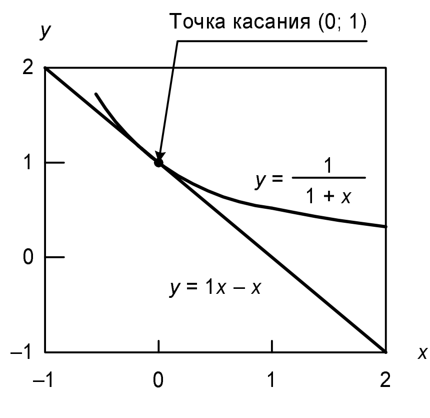

Рис. 2.3. Графики функций $y = \dfrac{1}{1+x}$ и $y = 1 - x$

11. В случаях, когда требуется записать сумму, содержащую большое (или даже бесконечное) количество слагаемых, можно использовать многоточие или знак суммирования $\sum$ (сигма). Запись

$$\sum_{k=1}^{n} a_k$$

обозначает сумму однотипных слагаемых вида a_k, где целочисленный индекс k принимает все возможные значения от 1 до n:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n .$$

Например, сумма четырнадцати равных слагаемых:

$$\sum_{k=1}^{14} 5 = \underbrace{5}_{k=1} + \underbrace{5}_{k=2} + \ldots + \underbrace{5}_{k=14} = 5 \cdot 14 = 70 ;$$

сумма арифметической прогрессии из первых n натуральных чисел:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2} .$$

Суммирование может осуществляться и по другим значениям индекса, например, сумма геометрической прогрессии из степеней двойки:

$$\sum_{k=0}^{9} 2^k = 2^0 + 2^1 + \ldots + 2^9 = 1023 ;$$

сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом 1 и знаменателем q:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1 .$$

Свойства

Знак суммирования $\sum$ для конечных сумм обладает рядом простых свойств:

- независимость от индекса суммирования:

$$\sum_{k} a_k = \sum_{t} a_t ;$$

- постоянный множитель можно выносить за знак суммы:

$$\sum_k C \cdot a_k = C \cdot \sum_k a_k \;;$$

- изменение порядка суммирования:

$$\sum_k (a_k + b_k) = \sum_k a_k + \sum_k b_k \;;$$

$$\sum_m \sum_k a_{mk} = \sum_k \sum_m a_{mk}$$

(здесь a_{mk} зависит уже от двух индексов);

- аддитивное свойство: если $m < l < p$, то

$$\sum_{k=m}^{l} a_k + \sum_{k=l+1}^{p} a_k = \sum_{k=m}^{p} a_k \;.$$

Замечание

Значок суммирования $\sum$ широко используется в высшей математике и других науках. Это связано с тем, что его применение делает многие формулы более обозримыми и легче читаемыми.

Замечание

Кроме значка $\sum$ применяется знак произведения Π (греческая прописная буква пи). Условности те же, что и для $\sum$.

12. Зачастую при перемножении "длинных" многочленов бывает удобно не выписывать все слагаемые в один ряд, а с самого начала "навести порядок": определить свободный член, затем линейное слагаемое и т. д.

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить (1—3):

1. $\left(\sqrt{15} - 4\right) \cdot \sqrt{31 + 8\sqrt{15}}$.

2. $\dfrac{\sqrt{\left(\sqrt{3}-5\right)^2\cdot\left(28+10\sqrt{3}\right)}}{2}$.

3. $\left(\sqrt[8]{2}-1\right)\cdot\left(\sqrt[8]{2}+1\right)\cdot\left(\sqrt[4]{2}+1\right)\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)$.

4. Найти целое число, равное $\sqrt{\dfrac{10}{\sqrt{6}-2}+\dfrac{15}{3+\sqrt{6}}}$.

Дана бесконечно убывающая геометрическая прогрессия 1/2; 1/4; 1/8; ...

Найти (5—10):

5. Сумму первых десяти членов.

6. Сумму членов с сотого по сто девяносто девятый включительно; оценить эту сумму.

7. Сумму данной в условии бесконечной прогрессии. Какую долю от нее составляет результат задачи 5?

8. Сумму членов с четными номерами.

9. Сумму членов с нечетными номерами.

10. Сумму результатов задач 7 и 8; совпадает ли эта сумма с суммой прогрессии?

11. Записать в кратком виде значение выражения

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{m=0}^{n} s^k t^m =$$

$$= 1 + \underbrace{s+t}_{\text{Все первые степени}} + \underbrace{s^2+st+t^2}_{\text{Все вторые степени}} + \underbrace{s^3+}_{\text{Все 3-е степени}} \ldots + \underbrace{s^n+s^{n-1}t+\ldots+t^n}_{\text{Все n-е степени}}.$$

Как будет вести себя данное выражение при $n\to\infty$, если $t=s=1/2$?

Указание: разложить данное выражение на множители. Эти множители будут многочленами от t первый и от s второй соответственно.

12. Найти произведение $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt[4]{\alpha}\cdot\sqrt[8]{\alpha}\cdot\sqrt[16]{\alpha}\cdot\ldots\cdot\sqrt[2^n]{\alpha}$. Как поведет себя данное выражение при $\alpha>0$, $n\to\infty$?

13. Записать выражение $a^5 - a^4 b + a^3 b^2 - a^2 b^3 + ab^4 - b^5$, $a, b > 0$ в компактном виде.

14. Разложить на множители $3p^4 - 2p^2 q^4 - 8q^8$.

Указание: данное выражение является однородным относительно p^2, q^4.

15. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 4xy - 5y^2 = 0, \\ x - y^2 = 0. \end{cases}$$

16. Решить уравнение $x^6 - 2x^3 y^3 + y^6 = 0$.

17. Вывести приближенные формулы для значений выражений $(1+\varepsilon)^3$, $(1+\varepsilon)^n$, $n \in \mathbb{N}$ для "малого" числа ε.

18. Пользуясь приближенной формулой $\sqrt{1+\varepsilon} \approx 1 + \frac{1}{2}\varepsilon$, оценить значения $\sqrt{1,021}$, $5\sqrt{2} = \sqrt{50}$.

Указание: $\sqrt{50} = \sqrt{49+1} = 7\sqrt{1+\frac{1}{49}}$. Сравнить с точными значениями $\sqrt{1,021}$=1,010445446325530... и $\sqrt{50}$=7,071067811865475...

19. Доказать правило возведения в квадрат натурального числа, оканчивающегося цифрой 5:

$$\left(\overline{\underbrace{ab...z}_{N}5}\right)^2 = \left(\overline{N5}\right)^2 = \overline{M25},\ M = N \cdot (N+1),$$

т. е. отбрасывается оконечная пятерка, оставшаяся часть, как единое число, умножается на следующее натуральное число, и в конце приписывается 25, например:

$$\underbrace{2}_{N}5^2 = \underbrace{6}_{2\cdot 3}25\ (N=2),\ \underbrace{6}_{N}5^2 = \underbrace{42}_{6\cdot 7}25\ (N=6),\ (1,95)^2 = 3,8025,$$

т. к. $19 \cdot 20 = 380$.

Указание: $\overline{N5} = 10 \cdot N + 5$. Верхняя черта нужна для того, чтобы не путать такие записи с произведениями.

20. Каков коэффициент при x^6 у многочлена $\left(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5\right)^2$?

21. Упростить выражение

$$\frac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{1+\sin\alpha\cdot\cos\alpha}.$$

22. Упростить выражение

$$\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{(x+y)^2+(x-y)^2},$$

если $x=r\cdot\cos\alpha$, $y=r\cdot\sin\alpha$ $(r>0)$.

23. Пусть $p=x\cdot\cos\alpha-y\cdot\sin\alpha$, $q=x\cdot\sin\alpha+y\cdot\cos\alpha$. Найти значение

$$\frac{p^2+q^2}{x^2+y^2}.$$

24. При каких значениях параметров α и β квадратный трехчлен $f(t)=(\sin\alpha+t\cdot\cos\beta)^2+(\cos\alpha+t\cdot\sin\beta)^2$ является полным квадратом?

25. Что больше:

$S_1=3+9+27+\ldots+3^{43}$ или $S_2=2+4+8+\ldots+2^{64}$?

Ответы

1. -1. **2.** 11. **3.** 1. **4.** 5. **5.** $1-\frac{1}{2^{10}}=\frac{1023}{1024}=0,9990234375$.

6. $S=2^{-99}\cdot\left(1-2^{-100}\right)\approx 2^{-99}=2\cdot 2^{-100}=2\cdot\left(\frac{1}{1024}\right)^{10}<2\cdot\left(\frac{1}{1000}\right)^{10}=2\cdot 10^{-30}$.

"Точное" значение $1,578\cdot 10^{-30}$. **7.** 1; 1023/1024. **8.** $\frac{1}{3}$. **9.** $\frac{2}{3}$. **10.** 1.

11. $\frac{1-s^{n+1}}{1-s}\cdot\frac{1-t^{n+1}}{1-t}$; стремится к 4. **12.** $\alpha^{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}$; стремится к α.

13. $\dfrac{a^6-b^6}{a+b}$. **14.** $\left(3p^2+4q^4\right)\cdot\left(p-\sqrt{2}\,q^2\right)\cdot\left(p+\sqrt{2}\,q^2\right)$. **15.** $x_1=0$, $y_1=0$; $x_2=25$, $y_2=5$; $x_3=1$, $y_3=-1$. **16.** $x=y=t$, $t\in\mathbb{R}$.

17. $(1+\varepsilon)^3\approx 1+3\varepsilon$; $(1+\varepsilon)^n\approx 1+n\varepsilon$.

18. $\sqrt{1,021}\approx 1,0105$; $\sqrt{50}=7\cdot\sqrt{1+\dfrac{1}{49}}\approx 7\cdot\left(1+\dfrac{1}{98}\right)\approx$

$$\approx 7\cdot\left(1+0,01\cdot\frac{1}{\underbrace{0,98}_{\approx 1,02}}\right)\approx 7\cdot(1+0,0102)=7,0714.$$

19. $\left(\overline{N5}\right)^2=(10\cdot N+5)^2=\underbrace{100\cdot N^2+100\cdot N}_{N(N+1)\text{ сотен}}+\underbrace{25}_{\text{единиц}}$. **20.** 5.

21. $\cos\alpha-\sin\alpha$. **22.** $\sin 2\alpha$. **23.** 1. **24.** $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. **25.** $S_1>S_2$.

Занятие 3

Квадратные уравнения и теорема Виета

Решение квадратных уравнений по общим формулам. Выделение полного квадрата в квадратном трехчлене. Теорема Виета, ее использование при вычислении значений симметричных алгебраических выражений от корней квадратного уравнения. Задачи с параметрами, связанные с квадратными уравнениями. Касание параболы и прямой. Уравнения, сводящиеся к квадратным.

Вводные задачи

Решить уравнения (1—4):

1. $23x^2 + 17 = 40x$.

2. $a^2x^2 - 3ax + 2 = 0$.

3. $2x^2 - 2^\beta \cdot x - 4^\beta = 0$ ($\beta \in \mathbb{R}$).

4. $2x^2 - \sqrt{8}\sin 63^\circ \cdot x + \sin 36^\circ = 0$.

5. Вычислить $\lg x_1 + \lg x_2$, где x_1, x_2 — корни уравнения $x^2 + 10 = 15x$.

6. Найти α и β, если $x_1 = 1$ и $x_2 = 2$ — корни уравнения $3x^2 - \alpha x + 6\beta = 0$.

7. Каково наименьшее значение выражения $x^2 - 4x + y^2$?

8. Найти x и y, если $\cos x + y^2 + 1 = 0$.

9. Найти наименьшее значение функции $f(x) = x^5 + x^{10}$.

10. При каком значении k прямая $y = k(x-1) - 1$ касается параболы $y = x^2$?

11. Написать уравнение горизонтальной касательной к графику функции $y = \sqrt{6 + 5x - x^2}$.

12. Написать уравнение касательной к окружности $x^2 + y^2 = 2x$, проходящей через точку (2; 3/2).

13. Найти пару вещественных чисел (x, y), для которых $x + y = p$ ($p > 0$), а величина $x^2 + y^2$ принимает наименьшее возможное значение.

Решить уравнения (14—16):

14. $2\left(\cos x + \sin^2 x\right) = 1 + \sqrt{2}$.

15. $|x + 3| + x^2 + 6x + 7 = 0$.

16. $\left(\sqrt{2} - 1\right)^x + \left(3 - \sqrt{8}\right)^x + 7\sqrt{8} = 20$.

Ответы

1. $1; \frac{17}{23}$. **2.** $\varnothing$, $a = 0$; $\frac{1}{a}$, $\frac{2}{a}$, $a \neq 0$. **3.** $x_1 = 2^{\beta}$, $x_2 = -2^{\beta-1}$. **4.** $x_1 = \sin 18°$, $x_1 = \cos 18°$. **5.** 1. **6.** $\alpha = 9$, $\beta = 1$. **7.** -4. **8.** $x = \pi(2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$; $y = 0$. **9.** $-0{,}25$. **10.** $2 \pm 2\sqrt{2}$. **11.** $y = 3{,}5$. **12.** $x = 2$, $y = \frac{5}{12}x + \frac{2}{3}$. **13.** $x = y = p/2$ (ближайшая к началу координат точка прямой). **14.** $\pm\arccos\frac{2-\sqrt{2}}{2} + 2\pi k$; $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **15.** $x_1 = -4$, $x_2 = -2$. **16.** $x = 2$.

Указания

1—4. Все уравнения, кроме (2), являются квадратными и могут быть решены, например, по общим формулам. Уравнение (2) не является квадратным при $a = 0$. Этот случай должен рассматриваться особо.

5. Можно воспользоваться теоремой Виета.

6. При подстановке сначала $x = x_1$, а затем $x = x_2$ получим систему уравнений относительно переменных α и β.

7. Выделить полный квадрат.

8. Учесть возможные значения косинуса и квадратичного выражения $y^2 + 1$.

9. Выделить полный квадрат.

10. Касание данных кривых возможно лишь при наличии единственной точки пересечения, которая может оказаться точкой касания.

11. Можно исходить из того факта, что указанное уравнение задает полуокружность.

12. Написать общее уравнение всех прямых, проходящих через точку (2; 3/2), и потребовать нужного (касательного) расположения относительно окружности.

13. Выразить y из уравнения $x + y = p$ и подставить в выражение $x^2 + y^2$.

14. Замена переменной $\cos x = q$.

15. Замена переменной $|x + 3| = m$.

16. Замена переменной $\left(\sqrt{2} - 1\right)^x = s$.

Решения

1. Очевиден корень $x_1 = 1$. Второй корень можно найти, исходя из теоремы Виета:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

В данном случае $a = 23$, $b = -40$, $c = 17$, поэтому, в частности,

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{17}{23}, \text{ откуда } x_2 = \frac{17}{23}.$$

2. Если $a = 0$, уравнение примет вид "2 = 0". Это ложное равенство означает, что решений нет. При $a \neq 0$ данное уравнение является квадратным; можно вычислить дискриминант: $D = (-3a)^2 - 4 \cdot a^2 \cdot 2 = a^2$.

Корни найдутся по общим формулам:

$$x_{1,2} = \frac{-(-3a) \pm \sqrt{a^2}}{2a^2} = \left[\begin{array}{l} 1/a \\ 2/a \end{array}\right. .$$

3. $D = \left(-2^{\beta}\right)^2 - 4 \cdot 2 \cdot \left(-4^{\beta}\right) = 9 \cdot 4^{\beta} = \left(3 \cdot 2^{\beta}\right)^2 > 0$;

$$x_{1,\,2} = \frac{2^{\beta} \pm 3 \cdot 2^{\beta}}{4} = \left[\begin{array}{l} -2^{\beta}/2, \\ 2^{\beta}. \end{array}\right.$$

4. Преобразуем дискриминант данного квадратного уравнения к удобному виду (справа приведены пояснения):

$D = 8\sin^2 63° - 8\sin 36° =$

$= 4 \cdot (1 - \cos 126°) - 8\sin 36° =$

$= 4 \cdot (1 + \sin 36°) - 8\sin 36° =$

для $\sin^2 63°$ использовалась формула понижения степени: $\sin^2 \alpha = \dfrac{1 - \cos 2\alpha}{2}$

$= 4 \cdot (1 - \sin 36°) =$

$= 4 \cdot \left(\cos^2 18° - 2\sin 18° \cos 18° + \right.$

$\left. + \sin^2 18°\right) = \left(2 \cdot (\cos 18° - \sin 18°)\right)^2$.

выражения вида $1 - \sin 36°$ допускают запись в виде полного квадрата

Корни уравнения

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{8}\sin 63° \pm 2\left(\underbrace{\cos 18°}_{=\sin 72°} - \sin 18°\right)}{4} =$$

$$\frac{\sqrt{2}\sin 63° \pm \underbrace{(\sin 72° - \sin 18°)}_{\text{Разность синусов}}}{2} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\sin 63° \pm 2\sin\dfrac{72° - 18°}{2}\cos\dfrac{72° + 18°}{2}}{2} =$$

$$\frac{\sqrt{2}\sin 63^\circ \pm 2\sin 27^\circ \cos 45^\circ}{2} = \frac{\sqrt{2}\left(\sin 63^\circ \pm \sin 27^\circ\right)}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \sin\frac{63^\circ \pm 27^\circ}{2} \cos\frac{63^\circ \mp 27^\circ}{2}.$$

Это числа $x_1 = \sqrt{2}\sin 18^\circ \cos 45^\circ = \sin 18^\circ$;

$x_2 = \sqrt{2}\sin 45^\circ \cos 18^\circ = \cos 18^\circ$.

5. Дискриминант данного уравнения $D = 15^2 - 40 > 0$, а оба корня положительны, т. к. в силу теоремы Виета $x_1 + x_2 = 15 > 0$ и $x_1 \cdot x_2 = 10 > 0$. Поэтому $\lg x_1 + \lg x_2 = \lg\left(x_1 x_2\right) = \lg 10 = 1$.

6. Подставляя значения корней вместо переменной, имеем $3 \cdot 1^2 - \alpha \cdot 1 + 6\beta = 0$; $3 \cdot 2^2 - \alpha \cdot 2 + 6\beta = 0$, или

$$\begin{cases} \alpha - 6\beta = 3, \\ \alpha - 3\beta = 6. \end{cases}$$

Вычитая из второго уравнения первое, получим $3\beta = 3$, $\beta = 1$. Следовательно, $\alpha = 3\beta + 6 = 9$.

Кроме того, можно было бы воспользоваться теоремой Виета.

7. $x^2 - 4x + y^2 = x^2 - 4x \underbrace{+4 \quad -4}_{\text{Добавили и вычли 4}} + y^2 =$

$$= \underbrace{(x-2)^2}_{[0;+\infty)} + \underbrace{y^2}_{[0;+\infty)} - 4 \in [-4; +\infty).$$

8. Наименьшее значение косинуса равно -1; наименьшее значение выражения $y^2 + 1$ равно 1. Таким образом, наименьшее значение левой части при всевозможных x и y равно 0. Но правая часть уравнения также 0. Значит, равенство возможно лишь в крайнем случае: если $\cos x = -1$ и одновременно $y = 0$. Поэтому $x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

9. Выделяя полный квадрат, преобразуем данную функцию к виду

$$f(x) = \left(x^5 + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

Выражение x^5 принимает любые вещественные значения; то же можно сказать и о $x^5 + \frac{1}{2}$. Квадрат этого выражения принимает любые неотрицательные значения. Следовательно, множество значений функции $[-1/4; +\infty)$.

10. Касание прямой и параболы возможно, если они имеют одну общую точку. Следовательно, квадратное уравнение $x^2 = k(x-1) - 1$ должно иметь единственное решение. Требуя равенства нулю дискриминанта, получаем условие для искомого значения параметра k:

$$x^2 - kx + (k+1) = 0;$$

$$0 = D = k^2 - 4(k+1) = k^2 - 4k + 4 - 8;$$

$$(k-2)^2 = 8; \ k - 2 = \pm\sqrt{8}; \ k = 2 \pm \sqrt{8}.$$

Обе касательные проходят через одну точку (+1; −1) — рис. 3.1.

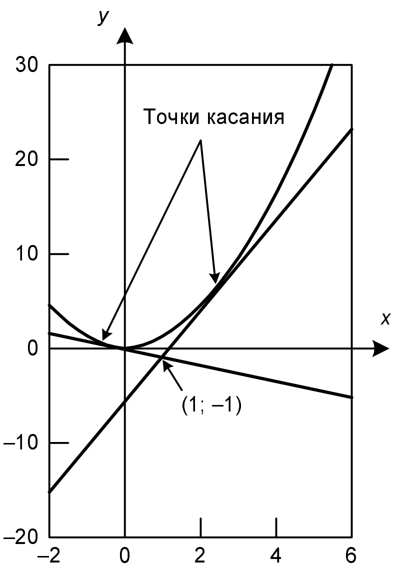

Рис. 3.1. Графики функций $y = x^2$ и $y = k(x-1) - 1$ для $k = 2 \pm \sqrt{8}$

11. Не забывая о том, что по условию значение переменной y неотрицательно, возведем обе части равенства в квадрат: $y^2 = 6 + 5x - x^2$, а затем осуществим выделение полного квадрата:

$$x^2 - 5x + y^2 = 6;$$

$$x^2 - 2 \cdot \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = 6;$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{49}{4}.$$

Полученное уравнение задает окружность с центром в точке (5/2; 0) радиуса $R = 7/2$. Графиком исходной функции будет верхняя полуокружность (рис. 3.2). Ее вертикальная ось симметрии имеет уравнение $x = 2{,}5$, а уравнение касательной $y = 3{,}5$.

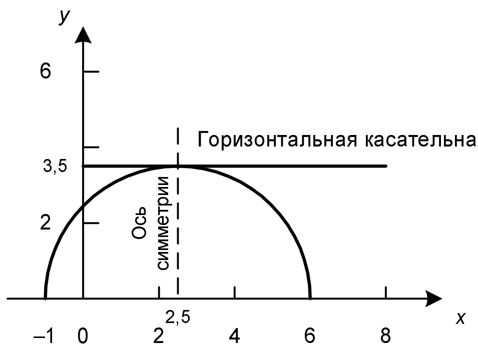

Рис. 3.2. Графики функций $y^2 = 6 + 5x - x^2$ и $y = 3{,}5$

12. Запишем уравнение окружности в виде $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Центр окружности — точка (1; 0), радиус равен 1. Для такой пары геометрических объектов, как прямая и окружность, касание равносильно наличию единственной общей точки. Все возможные наклонные касательные, будучи прямыми, описываются уравнением $y = kx + b$, где параметры k, b определяют положение прямой на плоскости. Чтобы учесть условие прохождения прямой через данную точку (2; 3/2), подставим ее координаты в уравнение прямой:

$$\frac{3}{2} = 2k + b; \quad \Rightarrow \quad b = \frac{3}{2} - 2k .$$

Таким образом, искомая касательная будет иметь уравнение

$$y = kx + \frac{3}{2} - 2k .$$

Это уравнение содержит только один параметр k. Условие касания — существование единственного корня уравнения

$$(x-1)^2 + \left(kx + \frac{3}{2} - 2k\right)^2 = 1 ,$$

получаемого подстановкой в уравнение окружности. Перепишем это квадратное уравнение в виде

$$\left(k^2+1\right)x^2 + \left(2k\left(\frac{3}{2} - 2k\right) - 2\right)x + \left(\frac{3}{2} - 2k\right)^2 = 0 ,$$

или

$$\left(k^2+1\right)x^2 + \left(-4k^2 + 3k - 2\right)x + \left(\frac{3}{2} - 2k\right)^2 = 0 .$$

Приравнивая дискриминант к нулю, получаем

$$0 = D = \left(-4k^2 + 3k - 2\right)^2 - 4\left(k^2+1\right)\left(\frac{3}{2} - 2k\right)^2 = 12k - 5$$

(опущены подробности действий с многочленами), откуда $k = 5/12$, $b = 2/3$. Кроме наклонной, существует и вертикальная касательная $x = 2$ (рис. 3.3).

13. По условию $y = p - x$, $x \in \mathbb{R}$;

$$x^2 + y^2 = x^2 + (p-x)^2 = 2x^2 - 2px + p^2 = 2\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + \frac{p^2}{2} .$$

Значение данного выражения минимально, если первое — неотрицательное — слагаемое в точности равно нулю. Это произойдет при $x = \dfrac{p}{2}$. Соответственно,

$$y = p - \frac{p}{2} = \frac{p}{2} .$$

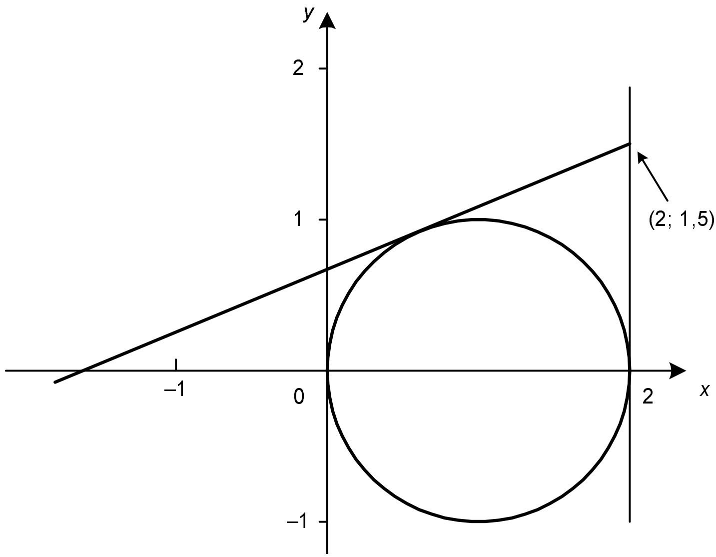

Рис. 3.3. Графики зависимостей $x^2 + y^2 = 2x$ и $y = \frac{5}{12}x + \frac{2}{3}$

14. Обозначим $\cos x = q$. Тогда

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - q^2;$$

$$2\left(q + 1 - q^2\right) = 1 + \sqrt{2}\,;\;\; 2q^2 - 2q + \sqrt{2} - 1 = 0\,;$$

$$D = 4 - 8\left(\sqrt{2} - 1\right) = 4\left(3 - 2\sqrt{2}\right) = 4\left(\sqrt{2} - 1\right)^2;$$

$$q_{1,\,2} = \frac{2 \pm 2\left(\sqrt{2} - 1\right)}{4} = \frac{1 \pm \left(\sqrt{2} - 1\right)}{2} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \dfrac{2 - \sqrt{2}}{2}. \end{array}\right.$$

Очевидно, оба найденных значения лежат в допустимых пределах [−1; +1]. Решая простейшие тригонометрические уравнения

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2},\;\; \cos x = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$$

по общим формулам, получаем

$$x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\,;\ \ x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q},\ \ x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

15. $|x+3| + (x^2 + 6x + 9) - 2 = 0$.

Причем $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$.

$|x+3| = m \ge 0$;

$m^2 + m - 2 = 0$; $m = -2$ (посторонний корень), $m = 1$ (подходит).

$|x| = 1,\ x = \pm 1$. Здесь использован тот простейший факт, что $|a|^2 = a^2,\ \forall a \in \mathbb{R}$.

16. Пусть $\left(\sqrt{2} - 1\right)^x = s$; тогда

$$\left(3 - \sqrt{8}\right)^x = \left(\left(\sqrt{2} - 1\right)^2\right)^x = \left(\left(\sqrt{2} - 1\right)^x\right)^2 = s^2.$$

Уравнение сведется к квадратному вида $s^2 + s + 7\sqrt{8} - 20 = 0$.

$$D = 81 - 28\sqrt{8} = 49 + 32 - 28\sqrt{8} = \left(7 - 2\sqrt{8}\right)^2 = \left(7 - 4\sqrt{2}\right)^2;$$

$$s_{1,\,2} = \frac{-1 \pm \left(7 - 4\sqrt{2}\right)}{2} = \left\{-4 + 2\sqrt{2};\ 3 - 2\sqrt{2}\right\}.$$

Число $-4 + 2\sqrt{2} < 0$ не будет значением показательного выражения $\left(\sqrt{2} - 1\right)^x$ ни при каком x; $3 - 2\sqrt{2}$ получим для $x = 2$.

Комментарии

Любое квадратное уравнение, т. е. уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, $a \ne 0$, может быть решено универсальным подходом, связанным с выделением полного квадрата. Прежде всего, выполним деление на a:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \text{ или } x^2 + px + q = 0,$$

если обозначить $b/a = p$, $c/a = q$. Полученное уравнение называется *приведенным* (старший коэффициент равен 1, чего всегда можно достичь делением.) Выделяя полный квадрат, получаем

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q\ .$$

Уравнение сводится к виду

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q\ .$$

Для того чтобы "добраться" до x, остается лишь "извлечь корень" из обеих частей. Мыслимы три случая.

- Если
$$\frac{p^2}{4} - q > 0\ ,$$
то
$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q},\ \ x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}\ ,$$
т. е. два корня.
- Если
$$\frac{p^2}{4} - q = 0\ ,\ \text{т. е.}\quad q = \frac{p^2}{4}\ ,$$
то $x + \frac{p}{2} = 0$, откуда просто $x = -\frac{p}{2}$, т. е. единственный корень.
- Если
$$\frac{p^2}{4} - q < 0\ ,$$
то корней нет.

Именно так можно получить общие формулы для решения квадратного уравнения (если $a \neq 1$, то остается еще вернуться к старым переменным):

$$x_{1,\,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\ .$$

Однако весьма полезно уметь решать квадратные уравнения и прямым выделением полного квадрата.

Отметим, что величину $D = \sqrt{b^2 - 4ac}$ — *дискриминант* квадратного уравнения, важнейшую комбинацию его параметров, во многих случаях *имеет смысл вычислять отдельно*, до нахождения самих решений, а иногда только он и бывает нужен. Критичность дискриминанта — равенство его нулю — часто соответствует различным особенным случаям в поведении математических (и не только) структур, так или иначе содержащих квадратичные зависимости.

Для корней

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \; x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

квадратного уравнения верна *теорема Виета*:

$$x_1 + x_2 = \frac{b}{a}; \; x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Эта теорема верна, если $D > 0$. (А если это не так, то она все равно верна. Просто корни при $D < 0$ не существуют как вещественные числа, но существуют как объекты более широкого класса — компле́ксные числа, опять же удовлетворяя в смысле тамошних, комплексных, действий теореме Виета. При $D = 0$ можно считать, что вместо одного корня мы имеем пару совпадающих.) Доказательство этого свойства корней прямыми алгебраическими преобразованиями — само по себе хорошее упражнение. Отметим, что с помощью теоремы Виета иногда бывает легко разглядеть корни уравнения. Например, это относится к уравнению

$$x^2 - \left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right) \cdot x + \sqrt{6} = 0.$$

Однако в действительности теорема Виета ничего не дает для формального решения квадратного уравнения — если из первого уравнения системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \ldots, \\ x_1 \cdot x_2 = \ldots \end{cases}$$

выразить x_2 и подставить во второе, то относительно x_1 мы получим в точности то квадратное уравнение, что и было в начале. А если не получим, значит, ошиблись.

Теорема Виета имеет довольно естественное обобщение на случай алгебраического уравнения произвольной степени.

1. Если один из корней "лежит на поверхности", то определить второй корень наиболее естественно с помощью теоремы Виета. Именно такова ситуация в разобранном примере.

2. Это одна из простейших задач с параметром. Правда, параметр здесь входит в уравнение полуформально.

В действительности заменой переменной $ax = y$ уравнение моментально "очищается" от параметра: $y^2 - 3y + 2 = 0$. Иногда одной лишь замены подобного рода достаточно, чтобы избавиться от параметра.

3. Если в исходном уравнении (оно является однородным относительно x и 2^β) выполнить почленное деление на 4^β, получим квадратное относительно $2^{-\beta} \cdot x$ уравнение: $2r^2 - r - 1 = 0$. Это несколько иной путь решения.

4. Другой вариант получения "квадратного" дискриминанта:

$$4 \cdot (1 - \sin 36°) = 4 \cdot (1 - \cos 54°) = 8 \cdot \frac{1 - \cos 54°}{2} = 8 \sin^2 27° .$$

5. Многие из задач, которые "принято" решать через теорему Виета, допускают и совершенно "спокойное" прямое решение. В данном случае

$$x_{1,2} = \frac{-15 \pm \sqrt{185}}{2} > 0;$$

$$\lg \frac{-15 - \sqrt{185}}{2} + \lg \frac{-15 + \sqrt{185}}{2} =$$

$$= \lg \left(\frac{-15 - \sqrt{185}}{2} \cdot \frac{-15 + \sqrt{185}}{2} \right) = \quad \text{разность квадратов}$$

$$= \lg \frac{225 - 185}{4} = \lg 10 = 1.$$

6. С помощью теоремы Виета можно получить

$$x_1 + x_2 = 1 + 2 = \frac{\alpha}{3}; \quad x_1 \cdot x_2 = 1 \cdot 2 = \frac{6\beta}{3}.$$

Отсюда $\alpha = 9$, $\beta = 1$.

7. Выделение полного квадрата позволяет элементарным путем (без использования производной) находить крайние (экстремальные) значения многих выражений.

8. Вот еще одна задача того же типа.

Решить уравнение $2^{|x|} = \sin^3 y$. Здесь левая часть не меньше 1, а правая не больше 1. Соответствующие значения переменных $x = 0$, $y = \frac{\pi}{2}(4k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$.

9. Найти наименьшее значение функции $f(x) = x^5 + x^{10}$.

Не сто́ит использовать производную для исследования простейших функций на монотонность — экстремумы — наибольшие и наименьшие значения. Производная — мощное аналитическое средство, и применение его должно быть оправдано. Следующие примеры призваны подтвердить эту мысль.

Исследовать на монотонность и экстремумы функции

а) $y = x - \dfrac{1}{x}$;

б) $y = x + \dfrac{1}{x}$.

Обе функции определены всюду, кроме точки $x = 0$. Пусть $x_1 < x_2$.

Тогда в случае (а)

$$y(x_2) - y(x_1) = \left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right) - \left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right) =$$

$$= (x_2 - x_1) + \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) = (x_2 - x_1)\left(1 + \frac{1}{x_2 \cdot x_1}\right).$$

Если оба числа x_1, x_2 положительны или отрицательны, то "большая" скобка положительна. Следовательно, $y(x_2) - y(x_1) > 0$, а это означает, что функция возрастает на каждом из промежутков $(-\infty; 0)$, $(0; +\infty)$.

Замечание

Из того, что функция возрастает на каждом из данных промежутков, не следует, что она возрастает на их объединении. То, что верно для частей, может оказаться неверным для целого!

Если, например, взять $x_1 = -1/2$, $x_2 = +1$, то получим $y(x_1) = y(-1/2) = 1{,}5$, $y(x_2) = y(1) = 0 < y(x_1)$. В данном случае все дело в том, что в точке $x = 0$ возраставшая до того функция резко "ныряет" из $+\infty$ в $-\infty$, и возрастание начинается снова, но уже из $-\infty$ (рис. 3.4).

В случае (б) рекомендуется показать самостоятельно, что при $x \in (0; 1]$ функция убывает, а при $x \in [1; +\infty)$ возрастает (рис. 3.5). В точке $x = 1$ находится минимум, равный 2. Дополнить картину поведения функции при отрицательных x можно, исходя из нечетности.

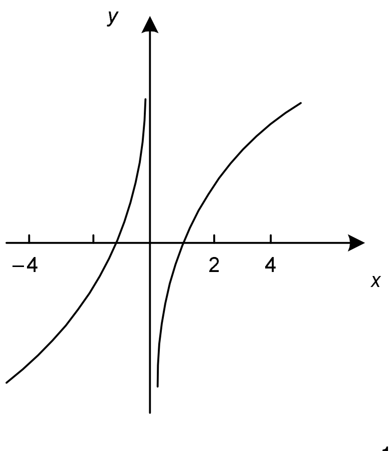

Рис. 3.4. График функции $y = x - \dfrac{1}{x}$

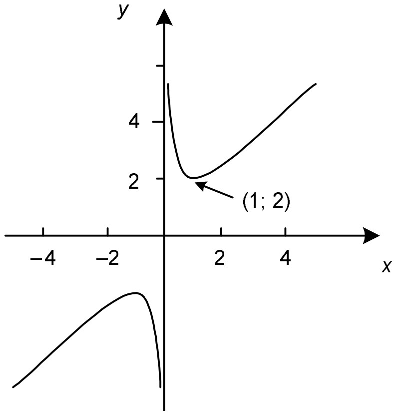

Рис. 3.5. График функции $y = x + \dfrac{1}{x}$

10. Подход, связанный с производной. В точке касания, кроме значений функций, должны совпадать значения производных. Приравнивая производные, получаем уравнение $k = 2x$, следовательно, $x = k/2$ — точка касания. Учитывая найденную связь в равенстве функций, находим последовательно

$$x^2 = k(x-1) - 1;\ \left(\frac{k}{2}\right)^2 = k\left(\frac{k}{2} - 1\right) - 1;$$

$$\frac{k^2}{4} = \frac{k^2}{2} - k - 1;\ k^2 - 4k - 4 = 0.$$

Откуда $k = 2 \pm \sqrt{8}$.

11. Или: в точке касания производная равна нулю; отсюда находим точку касания:

$$y' = \frac{5-2x}{2\sqrt{6+5x-x^2}} = 0;\ \Rightarrow\ x = \frac{5}{2},\ y = \frac{7}{2},$$

а уравнение горизонтальной касательной $y = 7/2$.

12. Идея приведенного решения заключается в постепенном сокращении числа неопределенных параметров в уравнении касательной прямой. В данном случае таких параметров два. Можно считать, что положение касательной, как и положение всякой прямой на плоскости, определяется двумя числами: одно из них ответственно за "поступательную" степень свободы, а другое соответствует вращению. Если мы "начинаем не с точки, а с окружности", т. е. прежде учитываем касание, то решение несколько более громоздко. Учитывать условия лучше в порядке возрастания степени их "косвенности".

13. Данная задача имеет простой геометрический смысл: требуется найти точку на прямой $x + y = p$, ближайшую к началу координат. Дело в том, что расстояние от произвольной точки $(x; y)$ плоскости до начала координат определяется по формуле $d = \sqrt{x^2 + y^2}$. Очевидно, искомая точка "равнорасположена" по отношению к координатным осям. Рекомендуется сделать соответствующий рисунок.

14—16. Существует огромное количество уравнений, более или менее просто сводящихся к квадратным. Многие из них приводятся к виду

$$a \cdot (f(x))^2 + b \cdot f(x) + c = 0$$

и далее через замену $t = f(x)$ сводятся к квадратным. Разумеется, каждое конкретное уравнение этого широкого класса может решаться и как-то иначе, с применением более специальных подходов.

Задачи для самостоятельного решения

Решить уравнения (1, 2):

1. $\frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{6}x = \frac{3}{2}$.

2. $6x^2 \cdot \sin^2 a - 5x \cdot \sin a + 1 = 0$.

Вычислить (3, 4):

3. $\frac{x_1}{1 - x_2} + \frac{x_2}{1 - x_1}$.

4. $\sin \pi x_1 \cos \pi x_2 + \sin \pi x_2 \cos \pi x_1$, где x_1, x_2 — корни уравнения $x^2 - 5x + 5 = 0$.

Определения

Если a и b — положительные вещественные числа, то их *средним арифметическим* называется число $\dfrac{a+b}{2}$; *средним геометрическим* — число $\sqrt{ab}$; *средним квадратичным* — $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$; *средним гармоническим* — обратное к среднему арифметическому обратных.

Для того же (задачи 3, 4) квадратного уравнения найти (5—8):

5. Среднее арифметическое корней.

6. Среднее геометрическое корней.

7. Среднее квадратичное корней.

8. Среднее гармоническое корней.

9. Найти наибольшее значение функции $y = 4 - x^2 - 3x^4$.

10. Найти касательную к параболе $y = \pm\sqrt{x}$, проходящую через точку $M(-2;\ 0)$.

Решить уравнения (11—18):

11. $\log_2 8x + 3\log_2^2 x = 5$.

12. $\lg(x+2) + 30 = \lg^2(x+2)$.

13. $3(\cos 2x + 3) = 13\cos x$.

Указание: положить $t = \cos x$; тогда $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2t^2 - 1$.

14. $\cos\dfrac{x}{48} + \cos\dfrac{x}{24} + 1 = 0$.

15. $\lg^2 x = \lg 100x$.

16. $\arcsin x + \arccos^2 x = \dfrac{\pi}{18}(2\pi + 3)$.

17. $3 \cdot \sqrt[4]{\dfrac{1+x}{x}} = 2 \cdot \sqrt{1+\dfrac{1}{x}} + 1$.

18. $2^{\sin x} + 2^{2\sin x} = 6$.

Ответы

1. $\left\{-\dfrac{9}{4};\ 1\right\}$. **2.** Если $a = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, то $\varnothing$; если $a \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то $x \in \left\{\dfrac{1}{2\sin\alpha};\ \dfrac{1}{3\sin\alpha}\right\}$. **3.** -10. **4.** 0. **5.** $\dfrac{5}{2}$. **6.** $\sqrt{5}$. **7.** $\dfrac{\sqrt{30}}{2}$. **8.** 2. **9.** 4. **10.** $y = \pm\dfrac{x+2}{\sqrt{8}}$. **11.** $x_1 = 1/2$; $x_2 = \sqrt[3]{4}$. **12.** $\{-1{,}99999;\ 999\ 998\}$. **13.** $\left\{\pm\arccos\dfrac{2}{3} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. (*Указание:* замена переменной $\lg(x+2) = l$.) **14.** $\{48\pi n + 24\pi;\ 96\pi k \pm 32\pi \mid n, k \in \mathbb{Z}\}$. **15.** 0,1; 100. **16.** $\dfrac{1}{2}$. **17.** $\left\{-\dfrac{16}{15}\right\}$. **18.** $\left\{\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Занятие 4

Многочлены и алгебраические дроби

Многочлены. Приведение многочленов к стандартному виду. Нахождение корней многочленов. Разложение многочленов на множители. Алгебраические дроби. Действия с алгебраическими дробями. Рациональные уравнения и неравенства. Метод интервалов.

Вводные задачи

Разложить на множители многочлены (1—4):

1. $x^5 - 3x^4 + 2x^3$.

2. $x^6 - 64$.

3. $x^4 + x^2 + 1$.

4. $x^4 + 4$.

Решить уравнения (5, 6):

5. $x^4 + x^3 - 6x^2 - 14x - 12 = 0$;

6. $$\frac{\log_2\left(x^3 + 4x + 17\right)}{x^3 - 3x - 83} = \frac{\log_2\left(x^3 + 4x + 17\right)}{x^2 + x - 107}.$$

7. Найти общие корни многочленов $p(x)$ и $q(x)$, если

$p(x) = x^5 + x^3 + 2x^2 + 2$;

$q(x) = x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 4$.

8. При каком значении a наибольший корень уравнения $x^2+\left(1-a^2\right)\cdot x-2a^2=2$ принимает наименьшее значение?

9. Пусть $f(x)=8x^4-8x^2+x+1$. Найти $f\left(\cos\frac{\pi}{5}\right)$.

10. Найти коэффициенты α, β, γ многочлена $f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$, если $f(1)+f(2)=-2$; $f(1)+f(-2)=-14$; $f(2)+f(-2)=-8$.

11. Выполнить действия с алгебраическими дробями:

$$\frac{x^4+x^2+1}{2}\cdot\left(\frac{1-x}{1-x+x^2}+\frac{x+1}{x^2+x+1}\right).$$

12. Найти значение выражения

$$\left(\frac{2}{x+x^{-1}}\right)^2+\left(\frac{x-x^{-1}}{x+x^{-1}}\right)^2,$$

если $x=10-3\sqrt{11}$.

13. Найти α, β, γ из условия, что

$$\frac{6}{x^3-5x^2+6x}=\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{x-2}+\frac{\gamma}{x-3}$$

для всех $x\notin\{0;\ 2;\ 3\}$.

Решить неравенства (14—16):

14. $\dfrac{x\cdot(x-1)}{x+2}\geq 0$.

15. $\dfrac{(x-a)^2}{x-a-1}>0$.

16. $x^6-6x^5+9x^4\leq 0$.

Ответы

1. $x^3\cdot(x-1)\cdot(x-2)$. **2.** $(x-2)\cdot(x+2)\cdot\left(x^2+2x+4\right)\cdot\left(x^2-2x+4\right)$.

3. $\left(x^2-x+1\right)\cdot\left(x^2+x+1\right)$. **4.** $\left(x^2-2x+2\right)\cdot\left(x^2+2x+2\right)$. **5.** $\{-2;\ 3\}$.

6. $\{-2\}$. **7.** $\left\{-\sqrt[3]{2}\right\}$. **8.** $a = 0$. **9.** 0. **10.** $\alpha = 0$, $\beta = -1$, $\gamma = -4$. **11.** 1. **12.** 1. **13.** $\alpha = 1$, $\beta = -3$, $\gamma = 2$. **14.** $(-2; 0] \cup [1; +\infty)$. **15.** $(a + 1; +\infty)$. **16.** $\{0; 3\}$. (Две точки.)

Указания

1. Вынести за скобки общий множитель.

2. Использовать формулы разности квадратов и суммы/разности кубов.

3, 4. Достроить до полного квадрата.

5. Воспользоваться утверждением из алгебры многочленов.

Утверждение

Если $x = a$ есть корень многочлена $f(x)$, то данный многочлен допускает представление $f(x) = (x - a) \cdot g(x)$, где $g(x)$ — многочлен.

6. Условие равенства данных дробей на ОДЗ: либо числители — нули, либо равны знаменатели.

7. Если $x = x_0$ — общий корень, то он есть и корень разности.

8. Отделить корень, не зависящий от a (такой в данном случае существует).

9. Применить формулу понижения.

10. Сначала найти $f(-2)$, $f(1)$, $f(2)$. Затем подставить $x = -2$, 1, 2 в выражение для многочлена $f(x)$ с неопределенными коэффициентами α, β, γ.

11. При решении по действиям использовать формулы суммы и разности кубов и результаты *задачи 3*.

12. Пример решается как через предварительное упрощение исходного выражения, так и прямой подстановкой $x = 10 - 3\sqrt{11}$.

13. Можно привести дроби к общему знаменателю и потребовать совпадения числителей. Получатся условия на коэффициенты при равных степенях x.

14. Воспользуйтесь методом интервалов.

15. Здесь также можно воспользоваться методом интервалов либо решить пример логически, проанализировав возможности для знаков числителя и знаменателя дроби.

16. Привести неравенство к виду $\left(x^2 \cdot (x-3)\right)^2 \le 0$.

Решения

1. $x^5 - 3x^4 + 2x^3 = x^3 \cdot \left(x^2 - 3x + 2\right) = x^3 (x-1) \cdot (x-2)$.

2. Разность/сумма кубов равна произведению разности/суммы на неполный квадрат суммы/разности:

$$\underbrace{a^3 \pm b^3 \;=\; (a \pm b)}_{\substack{\text{Мнемоническое правило:}\\ \text{"В короткой скобке знак тот же..."}}} \quad \times \quad \underbrace{\left(a^2 \mp ab + b^2\right)}_{\text{... а в длинной - другой}} \quad ;$$

поэтому

$$x^6 - 64 = \left(x^3 - 8\right) \cdot \left(x^3 + 8\right) =$$
$$(x-2) \cdot \left(x^2 + 2x + 4\right) \cdot (x+2) \cdot \left(x^2 - 2x + 4\right).$$

3. $x^4 + x^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 =$

$$= \underbrace{\left(x^2 + 1\right)^2 - x^2}_{\text{Разность квадратов}} = \left(x^2 - x + 1\right) \cdot \left(x^2 + x + 1\right).$$

4. $x^4 + 4 = x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^2 =$

$$= \left(x^2 + 2\right)^2 - 4x^2 = \left(x^2 - 2x + 2\right) \cdot \left(x^2 + 2x + 2\right).$$

5. Задача нахождения корней многочлена тесно связана с задачей разложения многочлена на множители. Известно, что если многочлен $f(x)$ имеет целые коэффициенты (в данном случае это числа 1, 1, −6, −14, −12), то возможные целые корни содержатся среди делителей свободного члена (можно доказать самостоятельно в качестве несложного упражнения). Свободный член равен -12; его делители: ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12, всего двенадцать чисел. Поочередно испытывая "кандидатов в корни", находим $x_1 = -2$. Можно продолжить этот процесс и далее или воспользоваться упомянутым выше утверждением: т. к. $x = x_1 = -2$ есть корень уравнения, то должно быть $f(x) = (x+2)\cdot g(x)$ для некоторого многочлена $g(x)$. Многочлен $g(x)$ может быть найден делением, которое проще всего оформить "углом". Это действие во многом аналогично делению многозначных чисел. На каждом шаге деления очередное слагаемое частного получается взятием отношения старших степеней. Отсутствие ненулевого остатка подтверждает правильность вычислений.

$$
\begin{array}{l|l}
x^4 + x^3 - 6x^2 - 14x - 12 & \quad x + 2 \\ \cline{2-2}
x^4 + 2x^3 & x^3 - x^2 - 4x - 6 \\ \cline{1-1}
\quad - x^3 - 6x^2 - 14x - 12 & \\
\quad -x^3 - 2x^2 & \\ \cline{1-1}
\qquad - 4x^2 - 14x - 12 & \\
\qquad - 4x^2 - 8x & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad - 6x - 12 & \\
\qquad\qquad - 6x - 12 & \\ \cline{1-1}
\end{array}
$$

Таким образом, $x^4 + x^3 - 6x^2 - 14x - 12 = (x+2)\cdot\left(x^3 - x^2 - 4x - 6\right)$.

Полученный многочлен — частное $x^3 - x^2 - 4x - 6$ уже не имеет $x = -2$ корнем; но у него есть целый корень $x = x_2 = 3$. Следовательно, он делится на $x - 3$. Выполняя процедуру, аналогичную описанной выше, получаем

$$x^3 - x^2 - 4x - 6 = (x-3)\cdot\left(x^2 + 2x + 2\right).$$

При некотором навыке такие преобразования вполне можно выполнять полуписьменно, "в строчку".

Многочлен $f(x)$ запишется в виде произведения

$$x^4 + x^3 - 6x^2 - 14x - 12 = (x+2)\cdot(x-3)\cdot\left(x^2 + 2x + 2\right).$$

Квадратичный многочлен $x^2 + 2x + 2$ вещественных корней не имеет, разложение на множители завершено. Очевидно, найденными значениями x множество корней $f(x)$ исчерпывается. Подчеркнем, что речь идет о *вещественных* корнях.

6. Область определения данного уравнения описывается условиями

$$x^3 + 4x + 17 > 0;$$

$$x^3 - 3x - 83 \neq 0;$$

$$x^2 + x - 107 \neq 0.$$

Разрешать фактически данные неравенства не нужно; они выполняют роль фильтра для решений более простых уравнений, к которым сведется исходное. Очевидно, что если совпадающие логарифмы в числителях обнулятся, то уравнение может быть удовлетворено. Это произойдет, когда $x^3 + 4x + 17 = 1$, т. е. $x^3 + 4x + 16 = 0$. Данное уравнение — кубическое; среди делителей свободного члена — числа +16 — содержится его корень $x_1 = -2$. Выполняя деление на $x + 2$, получаем

$$x^3 + 4x + 16 = (x+2)\cdot\left(x^2 - 2x + 8\right).$$

Так как квадратный трехчлен $x^2 - 2x + 8$ вещественных корней не имеет, то других решений здесь нет. При $x = -2$ знаменатели в нуль не обращаются. Следовательно, это и есть корень исходного уравнения. Если теперь предположить, что логарифмы-числители не нули, можно разделить обе части уравнения на них. Получим:

$$\frac{1}{x^3 - 3x - 83} = \frac{1}{x^2 + x - 107},$$

$x^3 - 3x - 83 = x^2 + x - 107$. Следовательно, $x^3 - x^2 - 4x + 24 = 0$. Последнее уравнение имеет один вещественный корень $x = -3$.

Этот корень сделал бы выражение под знаком логарифма отрицательным и потому должен быть отброшен.

7. Если $x = x_0$ — общий корень, то $p(x_0) = 0$; $q(x_0) = 0$. Следовательно, $p(x_0) - q(x_0) = 0$. С учетом конкретного вида многочленов p и q напишем

$$p(x) - q(x) = \left(x^5 + x^3 + 2x^2 + 2\right) - \left(x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 4\right) = 3x^3 + 6.$$

Стало быть, для предполагаемого корня x_0 должно выполниться равенство

$$3x_0{}^3 + 6 = 0, \text{ т. е. } x_0 = -\sqrt[3]{2}.$$

На этом решение не заканчивается; следует проверить, что действительно $p\left(-\sqrt[3]{2}\right) = 0$. Вычисления дают

$$p\left(-\sqrt[3]{2}\right) = \left(-\sqrt[3]{2}\right)^5 + \left(-\sqrt[3]{2}\right)^3 + 2\left(-\sqrt[3]{2}\right)^2 + 2 =$$

$$= -2 \cdot \sqrt[3]{4} - 2 + 2 \cdot \sqrt[3]{4} + 2 = 0.$$

8. Раскладывая на множители левую часть, получаем

$$x^2 + \left(1 - a^2\right) \cdot x - 2a^2 - 2 = x^2 + x - 2 - a^2 \cdot (x + 2) =$$

$$= (x - 1) \cdot (x + 2) - a^2 \cdot (x + 2) = \left(x - a^2 - 1\right) \cdot (x + 2);$$

$$x_1 = a^2 + 1; \ x_2 = -2.$$

При любом a первый корень, будучи положительным, больше второго; его наименьшее значение достигается при $a = 0$.

9. $$f\left(\cos\frac{\pi}{5}\right) = 8\cos^4\frac{\pi}{5} - 8\cos^2\frac{\pi}{5} + \cos\frac{\pi}{5} + 1 =$$

$$= 8\cos^2\frac{\pi}{5} \cdot \left(\cos^2\frac{\pi}{5} - 1\right) + \cos\frac{\pi}{5} + 1 =$$

$$= 4\left(1 + \cos\frac{2\pi}{5}\right) \cdot \left(\frac{1 + \cos\dfrac{2\pi}{5}}{2} - 1\right) + \cos\frac{\pi}{5} + 1 =$$

$$= 2\left(\cos\frac{2\pi}{5} - 1\right)\cdot\left(\cos\frac{2\pi}{5} - 1\right) + \cos\frac{\pi}{5} + 1 =$$

$$= 2\left(\cos^2\frac{2\pi}{5} - 1\right) + \cos\frac{\pi}{5} + 1 =$$

$$= 2\left(\frac{1 + \cos\frac{4\pi}{5}}{2} - 1\right) + \cos\frac{\pi}{5} + 1 = 0\,,$$

т. к. $\cos\frac{4\pi}{5} = -\cos\frac{\pi}{5}$.

Разложим данный многочлен на множители. Известно, что если многочлен $f(x)$ имеет целые коэффициенты (в данном случае это числа 8, 0, −8, 1, 1), то *возможные рациональные* корни содержатся среди чисел вида:

$$\frac{\text{Делители свободного члена}}{\text{Делители старшего коэффициента}}$$

(это более общее, чем приведенное выше, утверждение тоже несложно доказать самостоятельно). В данном случае это числа ±1, ±1/2, ±1/4, ±1/8. Очевидно, можно взять $x_1 = -1$. Тогда

$$f(x) = 8x^4 - 8x^2 + x + 1 = (x+1)\cdot\left(8x^3 - 8x^2 + 1\right).$$

В свою очередь, $8x^3 - 8x^2 + 1$ имеет корнем $x_2 = 1/2$. На этот раз удобнее разделить не на $x - 1/2$, а на пропорциональный ему двучлен $2x - 1$:

$$8x^3 - 8x^2 + 1 = (2x - 1)\cdot\left(4x^2 - 2x - 1\right).$$

Корни полученного квадратного трехчлена

$$x_{3,\,4} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

Из четырех корней $-1, \frac{1}{2}, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$ один будет значением $\cos\frac{\pi}{5}$.

Это не -1 и не $\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$, т. к. данные числа отрицательны; 1/2 тоже не годится, поскольку

$$\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}<\cos\frac{\pi}{5}.$$

Следовательно,

$$\cos\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{5}+1}{4},$$

т. е. попутно получено значение тригонометрической функции угла 36°.

10. Сложим все три равенства:

$$2\cdot\left(f(1)+f(2)+f(-2)\right)=-24;\ f(1)+f(2)+f(-2)=-12.$$

Зная, что $f(1)+f(2)=-2$, из этого равенства можно найти $f(-2)=-10$; аналогично $f(1)=-4$, $f(2)=2$. Подставляя вместо x значения -2, 1, 2, получим систему уравнений

$$\begin{cases}-8+4\alpha-2\beta+\gamma=-10,\\ 1+\alpha+\beta+\gamma=-4,\\ 8+4\alpha+2\beta+\gamma=2.\end{cases}$$

или

$$\begin{cases}4\alpha-2\beta+\gamma=-2,\\ \alpha+\beta+\gamma=-5,\\ 4\alpha+2\beta+\gamma=-6.\end{cases}$$

Это линейная система трех уравнений с тремя неизвестными, "линейная система 3 × 3". Ее можно решить либо методом подстановки, либо методом алгебраического сложения. Например, вычитая из последнего уравнения первое, получим $4\beta=-4$, $\beta=-1$. Затем можно найденное значение β подставить в два любых уравнения системы и получить подсистему 2 × 2, т. е. систему из двух уравнений относительно двух оставшихся переменных α и γ.

11. Приведем решение "по действиям":

- $$\frac{1-x}{1-x+x^2}+\frac{x+1}{x^2+x+1}=$$

$$=\frac{(1-x)\cdot\left(1+x+x^2\right)+(1+x)\cdot\left(1-x+x^2\right)}{\left(1-x+x^2\right)\cdot\left(1+x+x^2\right)}=$$

$$=\frac{1-x^3+1+x^3}{1+x^2+x^4}=\frac{2}{1+x^2+x^4};$$

- $$\frac{x^4+x^2+1}{2}\cdot\frac{2}{1+x^2+x^4}=1.$$

12. 1 способ. Упростим данное выражение (справа приведено пояснение):

$$\left(\frac{2}{x+x^{-1}}\right)^2+\left(\frac{x-x^{-1}}{x+x^{-1}}\right)^2=$$

Числители и знаменатели одновременно умножаем на x

$$=\frac{(2x)^2}{\left(x^2+1\right)^2}+\frac{\left(x^2-1\right)^2}{\left(x^2+1\right)^2}=$$

$$=\frac{4x^2+x^4-2x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{x^4+2x^2+1}{x^4+2x^2+1}=1.$$

Для завершения решения необходимо указать, что упомянутое значение $x=10-3\sqrt{11}$ не "вылезает" из области определения (все ненулевые x).

2 способ. Прямое решение через подстановку.

$$x^{-1}=\frac{1}{10-3\sqrt{11}}=\frac{10+3\sqrt{11}}{\underbrace{\left(10-3\sqrt{11}\right)\cdot\left(10+3\sqrt{11}\right)}_{\text{Разность квадратов}}}=$$

$$=\frac{10+3\sqrt{11}}{\underbrace{10^2-\left(3\sqrt{11}\right)^2}_{100-99}}=10+3\sqrt{11};$$

поэтому $x + x^{-1} = 20$; $x - x^{-1} = -6\sqrt{11}$. Дальнейшие вычисления совершенно просты.

13. Приводя дроби в правой части равенства к общему знаменателю, имеем

$$\frac{\alpha(x-2)(x-3)+\beta x(x-3)+\gamma x(x-2)}{x(x-2)(x-3)} =$$

$$= \frac{\alpha\left(x^2-5x+6\right)+\beta\left(x^2-3x\right)+\gamma\left(x^2-2x\right)}{x^3-5x^2+6x} =$$

$$= \frac{x^2(\alpha+\beta+\gamma)+x(-5\alpha-3\beta-2\gamma)+(6\alpha)}{x^3-5x^2+6x}.$$

Числитель должен быть равен 6 при всех допустимых x. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях переменной, получим систему

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0, \\ -5\alpha - 3\beta - 2\gamma = 0, \\ 6\alpha = 6. \end{cases}$$

Решение системы — тройка чисел $\alpha = 1$, $\beta = -3$, $\gamma = 2$.

14. Используем для решения данного рационального неравенства классический метод интервалов. При изменении x от $-\infty$ до $+\infty$ (или наоборот) дробь может поменять знак при условии, что числитель и/или знаменатель обратятся в нуль. Это происходит при $x = -2$, $x = 0$, $x = +1$. Отметим на числовой оси указанные точки (рис. 4.1).

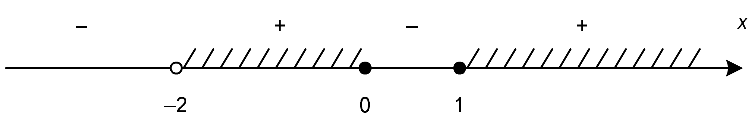

Рис. 4.1. Реализация метода интервалов для задачи 14

При всех x, больших 1, дробь положительна. При переходе через точку $x = +1$ знак неравенства изменится на противоположный, отрицательный. То же относится и к двум другим точкам. При этом числа $x = 0$, $x = +1$ будут решениями неравенства, а число $x = -2$ нет. Отсюда и получаем в качестве множества решений неравенства объединение двух промежутков, указанных в ответе.

15. На схеме метода интервалов (рис. 4.2) выделяем две точки $x = a$ и $x = a + 1$. При всяком a первая из упомянутых точек расположена левее. Если $x > a + 1$, дробь положительна. Если $a < x < a + 1$, т. е. переменная принадлежит центральному промежутку, то знаменатель отрицателен, числитель положителен и вся дробь отрицательна. При переходе через точку $x = a$ знаки не изменяются, дробь по-прежнему отрицательна. Следовательно, решениями будут все $x > a + 1$, и только такие x.

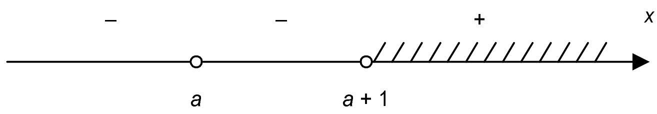

Рис. 4.2. Схема метода интервалов для задачи 15

16. $x^6 - 6x^5 + 9x^4 \le 0 \;\Leftrightarrow\; x^4 \cdot \left(x^2 - 6x + 9\right) \le 0 \;\Leftrightarrow\; \left(x^2 \cdot (x - 3)\right)^2 \le 0$.

Так как левая часть неравенства теперь явно представлена в виде полного квадрата некоторого выражения, то отрицательной она быть не может: нулю она будет равна, если $x^2 = 0$ или $(x - 3)^2 = 0$, т. е. при $x \in \{0; 3\}$.

Комментарии

1—4. В высшей алгебре доказывается, что каждый вещественный многочлен можно представить в виде произведения нескольких линейных и/или квадратичных множителей (последние имеют отрицательный дискриминант). Отсюда следует, что *любой* многочлен степени выше 2 в принципе может быть разложен на множители.

5. Для разложения на множители иногда используется т. н. *схема Горнера.* Это формальный алгоритм, внешне оформляемый в виде таблицы, на основе которого легко составить компьютерную программу деления. Схема Горнера позволяет делить любой многочлен на линейный двучлен, в том числе с остатком, но не дает возможность делить *на* многочлены более высоких степеней (тогда как "углом" разделить можно на любой многочлен). При делении по схеме Горнера приходится выполнять *в точности те же* арифметические действия, что и при делении "углом". Вычислительная актуальность использования схемы Горнера ушла в прошлое вместе с микросхемами оперативной памяти на 256 байтов.

6. Решение примеров, подобных разобранному, часто начинают с нахождения области определения. Отметим, что указать ее в явном виде далеко не всегда просто, а часто практически невозможно. Тем более не сто́ит пытаться все без исключения примеры решать исключительно равносильными преобразованиями.

7. Проверить условие $p(x_0)=0$ действительно необходимо, т. к. равенству $p(x_0)-q(x_0)=0$ не противоречит, например, и вариант $p(x_0)=5$.

8. Корни можно определить и через дискриминант.

9. Полезно вывести данное уравнение для $x=\cos\frac{\pi}{5}$, следуя логической схеме

$$x=\cos\frac{\pi}{5} \quad\to\quad \underbrace{\cos\frac{2\pi}{5}}_{\text{Косинус двойного аргумента}} \quad\to$$

$$\to\quad \underbrace{\cos\frac{4\pi}{5}}_{\text{Косинус двойного аргумента}} \quad\to\quad \underbrace{\cos\frac{\pi}{5}}_{\text{Формула приведения}} = x\,,$$

приводящей к нужному результату.

10. Можно было бы действовать в обратном порядке, а именно: сначала подставить вместо x значения -2, 1, 2, а затем решить полученную систему относительно α, β, γ.

13. Указанное преобразование называется *разложением рациональной дроби на простейшие* и является очень важным. Его можно понимать как действие, обратное приведению дробей к общему знаменателю. Одно из важнейших применений — подготовка дроби к интегрированию:

$$\int \frac{6}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx = \int \frac{1}{x} dx - 3 \cdot \int \frac{1}{x-2} dx + 2 \cdot \int \frac{1}{x-3} dx =$$
$$= \ln|x| - 3 \cdot \ln|x-2| + 2 \cdot \ln|x-3| + C .$$

(Тема "Первообразная и интеграл" до недавнего прошлого являлась частью стандартной школьной программы.)

14—16. Здесь метод интервалов применен к решению рациональных неравенств. В действительности в основе данного метода лежит очень простая и общая идея, а именно: непрерывная функция сохраняет знак на промежутке, где она не имеет нулей (соответствующая теорема имеется в курсах математического анализа). К сожалению, в рамках обычной школьной программы невозможно дать строгое определение непрерывности. Такое определение присутствует в курсах математического анализа и является там одним из очень важных. Обычно в подобных случаях строгое определение непрерывности функции на промежутке подменяют расплывчатой фразой: "*непрерывная функция* — это такая функция, график которой можно нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги". Для рациональных неравенств метод интервалов во многих случаях может быть реализован по следующему алгоритму:

- перенести все слагаемые в левую часть неравенства;
- привести все дроби к общему знаменателю;
- числитель и знаменатель разложить на линейные и/или квадратичные множители;
- отметить на числовой оси нули числителя и знаменателя (если, конечно, они имеются);
- на каждом из образовавшихся промежутков выбрать по одной произвольной точке и выяснить знак дроби для этой точки;
- если знак соответствует требованию неравенства, взять вместе с точкой целиком весь промежуток.

Следует отметить, что иногда предлагается заучить "правило знаков" — когда именно знак неравенства изменяется на противоположный, а когда нет. С точки зрения авторов, это достаточно бессмысленно по следующим причинам.

- Учащиеся все время путаются в этих правилах (разумеется, существуют различные варианты "правила знаков").
- Необходимость постоянного контроля хода решения не отпадает даже при использовании стандартных приемов, и точки подставлять все-таки надо.
- И, наконец, самый убедительный довод: метод интервалов легко обобщается на случаи произвольных элементарных неравенств: иррациональных, логарифмических, тригонометрических и т. д. Наиболее выигрышно он "смотрится" в случае применения к неравенствам смешанного типа, в которых присутствуют функции разной природы — от модуля до арккосинуса. И понятие кратности корней, которым пользуются авторы этих правил, для неравенства, скажем, $\sqrt{2-x} \le 2-\sqrt{x}$, если и может рассматриваться, то в очень обобщенном виде.

Конечно, не все элементарные неравенства "хорошо" решаются применением метода интервалов.

Задачи для самостоятельного решения

Разложить на множители (1—3):

1. $2-2x-x^2+x^3$.

2. x^4+y^4.

3. $x^5+2x^4+5x^3+10x^2+4x+8$.

4. Решить уравнение $\dfrac{x^3+7x^2+8x}{\sqrt{-x}} = \dfrac{16}{\sqrt{-x}}$.

5. Найти значения коэффициентов ρ, σ, τ уравнения $x^3+\rho x^2+\sigma x+\tau=0$, если известно, что числа x_1, x_2, x_3 являются его корнями (теорема Виета для кубического уравнения).

Указание: рассмотреть произведение $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.

6. Найти значение $\cos\frac{2\pi}{5}$.

7. Упростить выражение

$$\frac{4x^4+1}{2x^3-x-1}+\frac{1}{1-x}$$

и указать его числовое значение, если $x=2^{-99}$.

8. Сравнить значение выражения

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}} \text{ при } x=\sqrt{2}$$

с числом $\operatorname{tg} 3630^\circ$.

9. Катеты a и b прямоугольного треугольника имеют длины

$$a=\frac{2x}{x^2+1},\ \ b=\frac{1-x^2}{x^2+1},$$

где x — некоторое число между 0 и 1. Найти радиус описанной окружности.

10. Переменные x, y, z, t связаны соотношениями

$$x=\frac{1}{1-y},\ \ y=\frac{1}{1-z},\ \ z=\frac{1}{1-t}.$$

Найти связь между x и t.

Решить уравнения (11, 12):

11. $\frac{x^2-8}{x-4}+2\frac{x-4}{x^2-8}+3=0$.

12. $\frac{x^2-12x+35}{x-7}=2$.

13. Найти ближайший к нулю корень уравнения $x+\frac{1}{x}+2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=11$.

Решить неравенства (14—23):

14. $x^4>0$.

15. $9 - x^2 < 0$.

16. $(x-2)\cdot\left(x^2-4\right)\cdot\left(x^4-16\right)\geq 0$.

17. $\dfrac{7x-22}{\pi - x} < 0$.

18. $5(x-1)^2 \leq x-1$.

19. $\left(\dfrac{x^2+x-1}{x^2-x-1}\right)^2 \leq 1$.

20. $\dfrac{1}{x+2} - \dfrac{1}{x+3} < \dfrac{1}{x-5} - \dfrac{1}{x-4}$.

21. $\left(x - \sin\dfrac{\pi}{5}\right)\cdot(2x-1) < 0$.

22. $\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}} \leq 0$.

23. $f\left(\dfrac{1}{x}\right) < \dfrac{1}{f(x)}$, где $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$.

24. При каких a множеством решений неравенства $\left(x-a^2\right)\cdot(x-a-2)\leq 0$ является промежуток длины 1?

Решить системы уравнений (25—31):

25. $\begin{cases} x + 2y = 30, \\ x^2 + y^2 = 185. \end{cases}$

26. $\begin{cases} x + y = 10xy, \\ x^2 + y^2 = 58x^2y^2. \end{cases}$

27. $\begin{cases} 3x + 7y = 10, \\ x^2 + y^2 = 2. \end{cases}$

28. $\begin{cases} (x-3)^2\cdot(y+5)^2 = 4, \\ x + y = 1. \end{cases}$

29. $\begin{cases} x^2 + y^2 + 1 = 2y, \\ x^3 + y^3 + 2 = 3y. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x + \dfrac{3}{x+y} + y = \sqrt{12}, \\ x + \dfrac{5}{x-y} - y = \sqrt{20}. \end{cases}$

31. $x^2 + y^2 = x^4 + y^4 = 1$.

32. Пусть многочлен $p(x)$ таков, что $p(1-x) = x^2 + x + 1$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Найти многочлен $q(x) = p(1+x) - p(1-x)$.

33. Пусть $p(x)$ — многочлен 6-й степени. Какова степень многочлена $p(1 - p(1-x))$?

Ответы

1. $(x-1)\cdot\left(x-\sqrt{2}\right)\cdot\left(x+\sqrt{2}\right)$. **2.** $\left(x^2 - \sqrt{2}\cdot xy + y^2\right)\cdot\left(x^2 + \sqrt{2}\cdot xy + y^2\right)$. (*Указание:* добавить и вычесть $2x^2y^2$.) **3.** $(x+2)\cdot\left(x^2+1\right)\cdot\left(x^2+4\right)$. **4.** -4. (*Указание:* учесть ОДЗ.) **5.** $\rho = -(x_1 + x_2 + x_3)$, $\sigma = x_2x_3 + x_1x_2 + x_1x_2$, $\tau = -x_1x_2x_3$. **6.** $\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$. **7.** $2x$; 2^{-98}. **8.** $2-\sqrt{2}$ больше, чем tg 3630°. (*Указание:* $\operatorname{tg} 3630^\circ = \operatorname{tg}(10\cdot 360^\circ + 30^\circ)$. **9.** $R = 1/2$. (*Указание:* предварительно найти $c^2 = a^2 + b^2$ — квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника.) **10.** Эти переменные равны: $x = t$ ($t \ne 0$, $t \ne 1$). **11.** $x \in \left\{-1-\sqrt{17};\ -4;\ 3;\ \sqrt{17}-1\right\}$. (*Указание:* одну из дробей считать новой переменной.) **12.** $x \in \varnothing$. (*Указание:* учесть ОДЗ.) **13.** $\dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}$ (*Указание:* замена $r = x + \dfrac{1}{x}$.) **14.** $\mathbb{R}\setminus\{0\} = (-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$. **15.** $(-\infty; -3)\cup(3; +\infty)$. **16.** $\{-2\}\cup[2; +\infty)$. **17.** $(-\infty; \pi)\cup\left(\dfrac{22}{7}; +\infty\right)$.

18. $\left[1;\ \frac{6}{5}\right]$. **19.** $[-\infty;\ -1] \cup [0;\ 1]$. (*Указание:* $A^2 \le 1 \Leftrightarrow (A-1)\cdot(A+1) \le 1$.)

20. $(-3;\ -2)\cup(1;\ 4)\cup(5;\ +\infty)$. **21.** $\left(\frac{1}{2};\ \sin\frac{\pi}{5}\right)$. (*Указание:* $2x-1 = 2\left(x-\sin\frac{\pi}{6}\right)$; функция синус возрастает в первой четверти.)

22. $(-1;\ 0)\cup(0;\ 1]$. (*Указание:* $x \ne 0$ по условию; при этом ограничении домножить на x числитель и знаменатель дроби.) **23.** $x < -1$, $x > 0$.

24. $a \in \left\{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$. **25.** $x_1 = 8,\ y_1 = 11$; $x_2 = 4,\ y_2 = 13$.

26. $\left\{\left(\frac{1}{3},\frac{1}{7}\right);\ \left(\frac{1}{7},\frac{1}{3}\right)\right\}$. (*Указание:* возвести в квадрат обе части первого уравнения и вычесть второе.) **27.** $\left\{(1,1);\ \left(\frac{1}{29},\frac{41}{29}\right)\right\}$.

28. $\left\{(4,\ -3);(5,\ -4);\ \left(\frac{9+\sqrt{17}}{2},\ -\frac{7+\sqrt{17}}{2}\right);\ \left(\frac{9-\sqrt{17}}{2},\ \frac{\sqrt{17}-7}{2}\right)\right\}$.

(*Указание:* первое уравнение предполагает две возможности: $(x-3)\cdot(y+5) = \pm 2$. Рассмотреть соответствующие системы уравнений.) **29.** $x = 0,\ y = 1$. (*Указание:* в первом уравнении собрать сумму квадратов.) **30.** $x = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}$, $y = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2}$. (*Указание:* замена $x + y = p$, $x - y = q$.) **31.** $\{(+1,\ 0);\ (0,\ +1);\ (-1,\ 0);\ (0,\ -1)\}$. (*Указание:* $x^4 + y^4 = \Big(\underbrace{x^2+y^2}_{1}\Big)^2 - 2x^2y^2$.) **32.** $q(x) = -2x$. **33.** Эта степень равна 36.

(*Указание:* найти в явном виде многочлен $p(t)$, положив $t = 1 - x$.)

Занятие 5

Иррациональные уравнения и неравенства

Распространенные типы иррациональных уравнений, методы их решения. Использование метода интервалов при решении иррациональных неравенств. Системы. Комбинированные задачи. Задачи с параметрами.

Вводные задачи

Решить уравнения (1—8):

1. $\sqrt{x} = 64$.

2. $\sqrt[4]{\dfrac{7x+4}{2x-6}} = 1{,}5$.

3. $\sqrt{x-3} = a+1$ при каждом $a \in \mathbb{R}$.

4. $\sqrt{\dfrac{2}{4-x}} = \sin b$ при каждом $b \in \mathbb{R}$.

5. $\sqrt{29+x} = 1-x$.

6. $\sqrt{x+2} + \sqrt{x+5} = \sqrt{x+3} + \sqrt{x+4}$.

7. $\sqrt{5^x - 21} = 2 \cdot 5^x - 48$.

8. $\sqrt{\dfrac{1-x}{2}} = 2x^2 - 1$.

9. Решить уравнение $\sqrt{ax} = ax - 30$ для всех вещественных a.

Решить неравенства (10, 11):

10. $\sqrt{x+8} < \sqrt{4-3x}$.

11. $\sqrt{x+1} \geq a\sqrt{x}$.

12. Найти наименьшее целочисленное решение неравенства $\dfrac{7}{\sqrt{x+15}} + 48 < x$.

13. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{1+\dfrac{y}{x}} + \sqrt{\dfrac{x}{y+x}} = \dfrac{37}{6}, \\ 40x = 10 + y. \end{cases}$$

14. Четыре числа $\sqrt{6\xi+21}$, $\eta + 1$, $2\xi + 15$, $\eta + \xi + 11$ (названия букв: ξ — "кси", η — "ита") в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию. Найти эти четыре числа.

15. Доказать, что числовое значение разности

$$A = \sqrt{2x+1+\sqrt{4x^2+4x-8}} - \sqrt{2x+1-\sqrt{4x^2+4x-8}}$$

при $x = 157\dfrac{1}{4}$ — число целое. Найти значение этой разности в явном виде.

Решить неравенства (16, 17):

16. $\sqrt{4-x} < x-2$.

17. $\left(\sqrt{27x-45} - 2x\right) \cdot \left(x^2-4\right) \leq 0$.

Ответы

1. 4096. **2.** 11. **3.** Если $a < -1$, то $\varnothing$; если $a = -1$, то $\{3\}$; если $a > -1$, то $\left\{a^2+2a+4\right\}$. **4.** Если $b \in \left\{\left[(2k-1)\pi; 2\pi k\right], k \in \mathbb{Z}\right\}$, то $\varnothing$; если $b = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$, то $\{2\}$; если $2\pi t < b < 2\pi t + \dfrac{\pi}{2}$ или $2\pi t + \dfrac{\pi}{2} < b < 2\pi t + \pi,\quad t \in \mathbb{Z}$, то $x = 4 - \dfrac{2}{\sin^2 b}$. **5.** $x = -4$. **6.** $\varnothing$. **7.** $x = 2$.

8. $x_1 = -1$; $x_2 = \cos\frac{\pi}{5}$. **9.** Если $a = 0$, то $x \in \varnothing$; иначе $x = \frac{36}{a}$. **10.** $[-8; -1)$.

11. Если $a \le 1$, то $x \in [0; +\infty)$; при $a > 1$, $x \in \left[0; \frac{1}{a^2-1}\right]$. **12.** 49.

13. $\left\{(2;70); \left(\frac{72}{295}; -\frac{14}{59}\right)\right\}$. **14.** 3, 7, 11, 15. **15.** 25. **16.** $(3; 4]$.

17. $[2; 3] \cup [15/4; +\infty)$.

Указания

1—4. Уравнения $\sqrt[n]{f(x)} = \alpha$ и $f(x) = \alpha^n$, $n = 2, 3, \ldots$ при $\alpha \ge 0$ равносильны. При $\alpha < 0$ следует учитывать четность показателя n.

5. Например, годится замена переменной $\sqrt{29 + x} = y$. Можно решать через возведение в квадрат, но тогда возможно появление т. н. посторонних корней.

6. Возвести обе части уравнения в квадрат.

7. Замена $\sqrt{5^x - 21} = z$.

8. Подстановка $x = \cos\xi$, $0 \le \xi \le +\pi$.

9. С учетом особенности вхождения параметра в уравнение разумно ввести новую переменную $ax = t$. Случай $a = 0$ — отдельный.

10. На области определения обе части неотрицательны; при возведении в квадрат получаем равносильное неравенство.

11. При решении по классической схеме (последовательное прохождение всех ветвей логической структуры задачи) имеет смысл начать с ограничений со стороны области определения. Затем можно рассмотреть случаи нулевого, положительного и отрицательного a. После получения линейного неравенства появится еще одна логическая развилка, связанная с "делением на ноль".

12. Решать неравенство не нужно.

13. Замена $\sqrt{1 + \frac{y}{x}} = \sqrt{\frac{x+y}{x}} = r$.

14. Предварительно выяснить, при каком условии числа α, β, γ, δ образуют арифметическую прогрессию.

15. Выражения, стоящие под знаками "больших" радикалов, представить в виде квадратов некоторых других выражений.

16. Найти область определения. Затем рассмотреть случаи, когда правая часть неотрицательна и когда она отрицательна.

17. Данное неравенство можно решить с использованием метода интервалов. Для этого следует:

- найти область определения;
- найти нули функции, стоящей в левой части неравенства;
- на каждом из промежутков, на которые нули функции разбивают область определения, выяснить знак левой части и проверить соответствие этого знака знаку неравенства.

Решения

1. $\sqrt{x} = 64 \Leftrightarrow x = 64^2 = 4096$.

2. $\sqrt[4]{\dfrac{7x+4}{2x-6}} = 1{,}5 \Leftrightarrow \dfrac{7x+4}{2x-6} = (1{,}5)^4 = \left(\dfrac{3}{2}\right)^4 = \dfrac{81}{16}$;

в соответствии с основным свойством пропорции (произведение крайних членов пропорции равно произведению средних членов) $16 \cdot (7x+4) = 81 \cdot (2x-6)$, $x = 11$.

3. Если правая часть отрицательна (при $a < -1$), то множество решений пусто, т. к. корень квадратный отрицательным быть не может. Если $a = -1$, то уравнение имеет вид $\sqrt{x-3} = 0$; последнее возможно, только если $x = 3$. Если $a > -1$, правая часть положительна, и "можно возводить в квадрат". Тогда $x = 3 + (a+1)^2$.

4. Если $\sin b < 0$, т. е. $-\pi + 2\pi k < b < 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то уравнение не может быть удовлетворено хотя бы из-за разных знаков левой и правой частей; случаи $\sin b = 0$, $\sin b = 1$ приводят к простым уравнениям

$$\sqrt{\frac{2}{4-x}} = 0, \quad \sqrt{\frac{2}{4-x}} = 1.$$

Эти уравнения имеют в качестве множеств решений соответственно $\varnothing$ и $x = 2$. Самый громоздкий и вместе с тем самый тривиальный случай — $0 < \sin b < 1$, т. е. когда угол, связанный с параметром b, принадлежит строго первой или строго второй четверти. Тогда уравнение решается формальным выражением x через b:

$$\sqrt{\frac{2}{4-x}} = \sin b \quad \Rightarrow \frac{2}{4-x} = \sin^2 b \quad \Rightarrow 2 = (4-x)\sin^2 b$$

$$\Rightarrow\ x = 4 - \frac{2}{\sin^2 b}.$$

5. Если два числа равны, то равны их квадраты. Следствием (но только следствием) данного уравнения является

$$29 + x = (1-x)^2.$$

Решая данное квадратное уравнение, имеем

$$x^2 - 3x - 28 = 0;\ x_1 = -4,\ x_2 = +7.$$

Подставляя найденные значения x в исходное иррациональное уравнение, убеждаемся, что значение $x = x_1 = -4$ есть решение:

$$\underbrace{\sqrt{29 + (-4)}}_{5} = \underbrace{1 - (-4)}_{5},$$

тогда как $x = x_2 = 7$ решением не является:

$$\underbrace{\sqrt{29+7}}_{+6} = \underbrace{1-7}_{-6}.$$

Это значение x появилось при возведении в квадрат и должно быть отброшено (т. н. *посторонний корень*).

6. Возводя обе части уравнения в квадрат и, тем самым, переходя к уравнению-следствию, получим

$$\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+5}\right)^2 = \left(\sqrt{x+3} + \sqrt{x+4}\right)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x + 7 + 2\sqrt{x+2}\sqrt{x+5} = 2x + 7 + 2\sqrt{x+3}\sqrt{x+4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+2)(x+5) = (x+3)(x+4) \quad \Rightarrow\ 10 = 7.$$

Последнее равенство не выполняется ни при каком x. Это значит, что решений нет и у исходного уравнения, следствием которого является данное ложное равенство.

7. Выполняя замену переменной $z = \sqrt{5^x - 21}$, сведем данное уравнение к квадратному:

$$2 \cdot 5^x - 48 = 2 \cdot \left(5^x - 24\right) = 2 \cdot \left(z^2 - 3\right);$$

$$z = 2 \cdot \left(z^2 - 3\right).$$

Корни данного квадратного уравнения — это числа $z_1 = -3/2$, $z_2 = 2$. По определению, переменная z не может быть отрицательным числом. Отсюда находим

$$z = \sqrt{5^x - 21} = 2,$$

откуда

$$5^x - 21 = 4 \;\Rightarrow\; x = 2.$$

8. Для начала построим графики функций

$$y_1 = \sqrt{\frac{1-x}{2}} \text{ и } y_2 = 2x^2 - 1$$

в одной системе координат. Второй график — парабола. Что касается первого графика, то, выражая x через y, получим $x = 1 - 2y^2$, или $-x = 2y^2 - 1$. Легко догадаться, что графиком будет часть параболы, "полупарабола" (рис. 5.1). Соответствующая полная парабола была бы осесимметрична первой относительно прямой $y = -x$. Графики пересекаются в двух точках, причем одна из них лежит на оси симметрии. Ее координаты (−1; 1). Фактически задача сводится к нахождению абсциссы второй точки пересечения. Это число между нулем и единицей.

Если, возводя обе части уравнения в квадрат, перейти к уравнению-следствию

$$1 - x = 2\left(2x^2 - 1\right)^2$$

и записать последнее в виде $8x^4 - 8x^2 + x + 1 = 0$, получим уже встречавшееся ранее уравнение 4-й степени. Однако здесь будет продемонстрирован еще один подход к решению.

Пусть $x = \cos\delta$. Так как заведомо $0 < x < 1$, то можно считать, что $0 < \delta < \pi/2$, т. е. δ — угол 1-й четверти. Исходное уравнение преобразуется к виду

$$\sqrt{\frac{1-\cos\delta}{2}} = 2\cos^2\delta - 1,$$

или, с учетом формулы двойного угла,

$$\sqrt{\frac{1-\cos\delta}{2}} = \cos 2\delta .$$

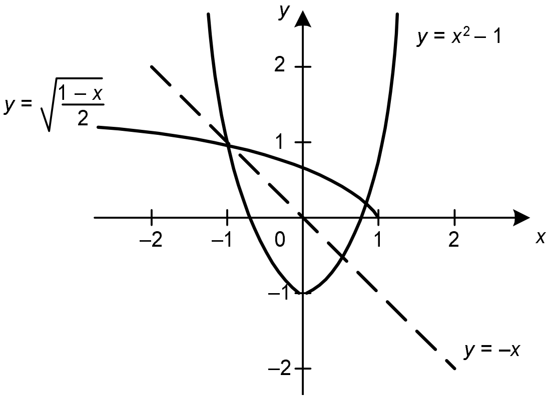

Рис. 5.1. Графики зависимостей $y = 2x^2 - 1$, $-x = 2y^2 - 1$ и $y = -x$

Отсюда получаем уравнение-следствие $-\cos\delta = 2\cdot\cos^2 2\delta - 1$, или $-\cos\delta = \cos 4\delta$. Пользуясь формулой преобразования суммы в произведение, имеем

$$\cos\delta + \cos 4\delta = 0\,,\ \cos\frac{3\delta}{2}\cdot\cos\frac{5\delta}{2} = 0\,,\ \left[\begin{array}{l}\cos\dfrac{3\delta}{2} = 0,\\ \cos\dfrac{5\delta}{2} = 0.\end{array}\right.$$

Тогда

$$\left[\begin{array}{l}\dfrac{3\delta}{2} = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z},\\ \dfrac{5\delta}{2} = \dfrac{\pi}{2} + \pi m,\ m \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

И окончательно

$$\left[\begin{aligned} \delta &= \frac{\pi + 2\pi k}{3},\ k \in \mathbb{Z}, \\ \delta &= \frac{\pi + 2\pi m}{5},\ m \in \mathbb{Z}. \end{aligned}\right.$$

Из двух полученных бесконечных серий в промежуток $(0; \pi/2)$ попадают лишь два числа: $\delta_1 = \pi/5$ и $\delta_2 = \pi/3$. Соответствующее значение искомой переменной $x = \cos(\pi/5)$. Что касается значения $x = \cos(\pi/3)$, то для него $\cos 2\delta = -1/2 < 0$.

9. Это пример иррационального уравнения с "просто" входящим в него параметром. Если $a = 0$, получаем ложное равенство $0 = -30$, уравнение решений не имеет. Если же $a \neq 0$, выполним замену $ax = t$. Полученное уравнение $\sqrt{t} = t - 30$ легко решается описанными ранее методами и имеет единственный корень $t = 36$. Каждому ненулевому значению параметра теперь соответствует определенное значение переменной $x = 36/a$.

10. Здесь мы имеем дело с неравенством, для решения которого достаточно тривиальной операции возведения обеих частей в квадрат с учетом т. н. ОДЗ (Области допустимых значений неравенства). Подкоренные выражения должны быть неотрицательными:

$$\begin{cases} x + 8 \geq 0, \\ 4 - 3x \geq 0. \end{cases}$$

Это значит, что в качестве ОДЗ выступает промежуток $[-8; 4/3]$. При таких x обе части неравенства существуют и неотрицательны. Значит, на ОДЗ исходное неравенство равносильно неравенству $x + 8 < 4 - 3x$, откуда $x < -1$. С учетом ОДЗ получаем $x \in [-8; -1)$.

11. Приведем пример "кустарного", т. е. очень необщего, решения (существует много более широких методов решения задач с параметрами такого рода). ОДЗ: $x \geq 0$. (В данном случае независимо от a, что бывает далеко не всегда. Если ОДЗ разная для различных a, решение такого типа может оказаться неуклюжим, логически запутанным, и тогда нужны более мощные технологии, например, графические.) Итак, если a — число отрицательное или нуль, то правая часть $a\sqrt{x} \le 0$ на ОДЗ. В то же время левая часть $\sqrt{x+1}$ строго положительна (даже не меньше единицы). Неравенство выполнено.

Если $0 < a \le 1$, то и в этом случае неравенство выполнено автоматически на всей ОДЗ, потому что при умножении правой части верного неравенства $\sqrt{x+1} \ge \sqrt{x}$ на положительное число, не превосходящее единицы, мы получим снова верное неравенство.

Когда $a > 1$, можно возвести обе части в квадрат: $x+1 \ge a^2 \cdot x$. Отсюда $a^2 \cdot x - x \le 1$, или $x \cdot \left(a^2 - 1\right) \le 1$. Выражение в скобках положительно, делим на него:

$$x \le \frac{1}{a^2 - 1}.$$

Стало быть, при указанных a

$$0 \le x \le \frac{1}{a^2 - 1}.$$

Все варианты исчерпаны, задача решена.

12. Оба слагаемых в левой части неравенства положительны при всех x из ОДЗ ($x > -15$). Следовательно, переменная x в правой части должна быть больше 48. Наименьшее целое число, удовлетворяющее этому условию, есть 49. При этом неравенство имеет вид

$$\frac{7}{\sqrt{49+15}} + 48 < 49$$

и является верным.

13. Поскольку

$$1 + \frac{y}{x} = \frac{x+y}{x},$$

имеет смысл выполнить замену

$$\sqrt{\frac{x+y}{x}} = r,$$

тогда

$$\sqrt{\frac{x}{x+y}} = \frac{1}{r}.$$

Вместо первого уравнения получим

$$r + \frac{1}{r} = \frac{37}{6} = 6 + \frac{1}{6},$$

откуда $r = 6$ или $r = 1/6$. В первом случае

$$\frac{x+y}{x} = 6^2 = 36,\ x + y = 36x,\ y = 35x.$$

В соответствии со вторым вариантом

$$\frac{x+y}{x} = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36},$$

$$36(x+y) = x,$$

$$y = -\frac{35}{36}x.$$

Используя второе уравнение, приходим к совокупности двух систем

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 35x, \\ 40x = 10 + y. \end{cases} \\ \begin{cases} y = -\dfrac{35}{36}x, \\ 40x = 10 + y. \end{cases} \end{array}\right.$$

Обе системы — линейные. Решая их, получаем: для первой системы $x = 2$, $y = 70$; для второй $x = \frac{72}{295}$, $y = -\frac{14}{59}$.

14. *Арифметической прогрессией* называется числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, является суммой предыдущего члена и некоторого фиксированного числа d (соответственно называемого разностью прогрессии). Поэтому словесное условие задачи допускает следующую простую формализацию: найти числа α, β, γ, δ, для которых $\beta - \alpha = \gamma - \beta = \delta - \gamma$. Вместе с тем для членов арифметической прогрессии, и только для них, справедливо т. н. *характеристическое свойство*: любой член (кроме крайних) есть полусумма своих соседей. Поэтому более удобной системой требований на числа α, β, γ, δ будет

$$\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}; \quad \gamma = \frac{\beta + \delta}{2},$$

или, для данного случая,

$$\begin{cases} \eta + 1 = \dfrac{\sqrt{6\xi + 21} + (2\xi + 15)}{2}, \\ 2\xi + 15 = \dfrac{(\eta + 1) + (\eta + \xi + 11)}{2}. \end{cases}$$

Второе уравнение системы — линейное. Выражая любую из переменных, например, η, получаем $\eta = \dfrac{3\xi}{2} + 9$. Подставляя это выражение в первое, иррациональное, уравнение, найдем последовательно

$$\frac{3\xi}{2} + 9 + 1 = \frac{\sqrt{6\xi + 21} + (2\xi + 15)}{2}; \quad \sqrt{6\xi + 21} = \xi + 5.$$

Последнее уравнение относится к рассмотренному выше типу. Его корень $\xi = -2$. Отсюда $\eta = 6$. В ответе следует указать значения членов прогрессии. Это числа 3, 7, 11, 13.

15. Так как

$$4x^2 + 4x - 8 = 4\left(x^2 + x - 2\right) = 4(x + 2)(x - 1),$$

а $2x + 1 = (x + 2) + (x - 1)$, то "длинные" подкоренные выражения при $x = 157\dfrac{1}{4} > 1$ можно записать так:

$$2x + 1 \pm \sqrt{4x^2 + 4x - 8} =$$

$$= (x+2) \pm 2\sqrt{(x+2)(x-1)} + (x-1) = \left(\sqrt{x+2} \pm \sqrt{x-1}\right)^2.$$

Таким образом, в исходном выражении корни "извлекаются":

$$A = \sqrt{\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}\right)^2} - \sqrt{\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}\right)^2} =$$

$$= \left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1}\right) - \left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}\right) = 2\sqrt{x-1}.$$

Наше преобразование справедливо, в частности, для $x = 157\frac{1}{4}$, следовательно,

$$2\sqrt{x-1} = 2\sqrt{157\frac{1}{4}-1} = 25.$$

16. ОДЗ находим из условия $4 - x \geq 0$ (подкоренное выражение должно быть неотрицательным): $x \in (-\infty; 4]$. Правая часть неравенства меняет знак при переходе x через точку $x = 2$. Эта точка принадлежит области определения. Если x < 2, то правая часть отрицательна, а левая строго положительна, неравенство не выполняется. Пусть теперь $x \in [2; 4]$. Тогда обе части неравенства неотрицательны, и можно возводить их в квадрат. Получаем равносильное неравенство $4 - x < (x-2)^2$. Это обычное квадратное неравенство. В стандартном виде оно запишется как $x^2 - 3x > 0$. На всей числовой оси его решением является объединение двух промежутков $(-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$. Но так как $x \in [2; 4]$, то окончательно имеем $x \in (3; 4]$.

Другое решение можно построить на замене переменной $t = \sqrt{4-x}$, $t \geq 0$, $x = 4 - t^2$. Неравенство относительно новой переменной имеет вид $t < \left(4 - t^2\right) - 2$, или $t^2 + t - 2 < 0$. Его решением для произвольного вещественного t является промежуток $-2 < t < +1$; левая часть двойного неравенства для неотрицательной по своей природе переменной t неактуальна. Возвращаясь к старой переменной, имеем $\sqrt{4-x} < 1$. С учетом неотрицательности подкоренного выражения $0 \leq 4 - x < 1$, откуда $x \in (3; 4]$.

Возможно также графическое решение.

17. Область определения находим из условия неотрицательности подкоренного выражения: $27x - 45 \ge 0$, т. е. $x \ge 5/3$. Приравнивая поочередно скобки к нулю, находим нули функции в левой части неравенства. Это числа 2, 3, 15/4. Они разбивают всю область определения на 4 промежутка, из которых в точности два соответствуют решениям: $[2; 3]$ и $(15/4; +\infty)$. (Для выяснения, является ли данный промежуток частью решения, достаточно подставить какую-либо точку из этого промежутка и проверить выполнение неравенства. В данном случае можно взять, например, значения $x = 5/3$, $x = 5/2$, $x = 7/2$, $x = 20$.)

Комментарии

1—4. В уравнении $\sqrt[n]{f(x)} = \alpha$ или $\sqrt[n]{f(x)} = \varphi(\alpha)$ в случае нечетного n радикал (корень) устраняется простым возведением в степень. Если n четно (например, корень квадратный), то надо различать случай отрицательного α, когда решений нет, и случай $\alpha \ge 0$, когда можно возводить в степень. Отметим, что, по крайней мере, на этапе устранения радикала, *ОДЗ не нужно учитывать в принципе.* То же самое можно сказать и о многих других иррациональных уравнениях (для неравенств это обычно не так).

5. Приведем решение, основанное на противоположном характере монотонности функций $y_1 = \sqrt{29 + x}$ и $y_2 = 1 - x$. Так как $y_1(-4) = 5 = y_2(-4)$, то число -4 является корнем данного уравнения. Поскольку y_1 — возрастающая функция, а y_2 — убывающая, то количество корней не может быть больше 1. Но один корень уже найден, следовательно, им и ограничивается множество решений.

Эффективность такого подхода можно продемонстрировать на примере уравнения

$$49^{x-2} = 7 - 3x.$$

Его корень $x = 2$ легко угадывается, в то же время других корней быть не может — экспонента $y = 49^{x-2}$ возрастает на всей оси, а линейная функция $y = 7 - 3x$ на всей оси убывает. При совпадающем характере монотонности ничего определенного о количестве решений сказать нельзя, но здесь иногда помогают "подготовительные" алгебраические преобразования или использование соображений, связанных с более тонким поведением функций. Например, это могут быть выпуклость/вогнутость, разного рода симметрии графиков и т. п.

Несколько слов по поводу требования равносильности используемых преобразований. Имеется в виду решение

$$\sqrt{29+x}=1-x \Leftrightarrow \begin{cases}1-x\geq 0\\ 29+x=(1-x)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\leq 1\\ \left[\begin{array}{l}x=-4\\ x=7\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow x=-4.$$

Безусловно, оно является правильным. Но с логической точки зрения решение с переходом к уравнению-следствию, решение через замену переменной или решение, основанное на функциональном подходе (использование монотонности) также безупречны. Требование же решать непременно через равносильные преобразования может обосновываться как угодно.

Но оно не имеет отношения к математике.

7. В данном случае возведение обеих частей уравнения в квадрат приводит к уравнению

$$4\cdot\left(5^x\right)^2-193\cdot 5^x+2325=0,$$

квадратному относительно 5^x. В то же время, как мы видели, замена переменной позволяет избежать громоздких коэффициентов. Это общая тенденция; впрочем, и в нашем примере в обоих случаях дискриминант $D = 49$.

8. Уравнения такого типа отнюдь не являются изобретением авторов. В основе этого уравнения (во всяком случае, так к этому можно относиться) лежит математическое преобразование, возможное в тригонометрии, но не в общей алгебре — понижение степени без "побочных эффектов".

9. Более сложные задачи с параметром, в том числе иррациональные уравнения, входят в *Занятие 13*.

10. В этом простейшем неравенстве с неотрицательными левой и правой частями оказалось достаточным учесть ОДЗ. Вообще, учет ОДЗ даже в уравнении (тем более, в неравенстве) не гарантирует равносильности выполняемых преобразований.

11. Общий подход к решению будет доступен после изучения материала *Занятия 13*.

12. Попытка решить неравенство, т. е. найти все решения, приводит к неоправданному усложнению решения. Следует внимательно читать условие задачи; не всегда общий подход к решению является оптимальным.

13. Во многих случаях, вырезав с помощью замены переменной повторяющиеся фрагменты, можно свести уравнение (неравенство, систему уравнений и т. д.) к более простой задаче.

14. В некоторых задачах требуется найти значение одного или нескольких параметров, для которых три числа α, β, γ образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. В силу упомянутого в решении характеристического свойства членов арифметической прогрессии это требование можно оформить в виде равенства $2\beta = \alpha + \gamma$.

15. Возможны иные подходы к решению. Например, из условия ясно, что разность A положительна; возводя эту разность в квадрат, имеем

$$A^2 = \left(\sqrt{2x+1+\sqrt{4x^2+4x-8}} - \sqrt{2x+1-\sqrt{4x^2+4x-8}}\right)^2 =$$

$$= 2x+1+\sqrt{4x^2+4x-8} + 2x+1-\sqrt{4x^2+4x-8} -$$

$$-2\cdot\sqrt{\left(2x+1-\sqrt{4x^2+4x-8}\right)\cdot\left(2x+1-\sqrt{4x^2+4x-8}\right)} =$$

$$= 4x+2-2\cdot\underbrace{\sqrt{\left(4x^2+4x+1\right)-\left(4x^2+4x-8\right)}}_{3} = 4x-4;$$

для $x = 157\frac{1}{4}$ получаем $A^2 = 4\cdot 157\frac{1}{4} - 4 = 625;\ A = 25$.

Еще один способ решения основан на формуле преобразования сложных радикалов (двойных корней): для допустимых A и B имеют место равенства

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}.$$

Доказательство данного тождества — само по себе неплохое упражнение.

17. Метод интервалов, как легко догадаться хотя бы из рассмотрения решения данного примера, может быть применен к решению огромного количества неравенств самого разного вида.

Общее

Возможно, главное, что нужно понять на первом этапе изучения темы "Иррациональные уравнения и неравенства", что произвольное иррациональное уравнение (неравенства) не может быть решено по какому-то общему, раз и навсегда заданному алгоритму. Во многих случаях приходится придумывать какие-то специальные схемы и методы решения. Выход один — тренироваться *(см. список литературы).*

Задачи для самостоятельного решения

Решить уравнения (1—8):

1. $\sqrt{5x^2 - 11x + 10} = 2$.

2. $\sqrt{51 - \sqrt[3]{6 + \sqrt[4]{x}}} = 7$.

3. $\sqrt{x + 18} + \sqrt{80 - x} = 14$.

4. $\sqrt[3]{x + 6} - \sqrt[3]{x - 13} = 1$.

5. $\sqrt[3]{\frac{2}{x}} + \sqrt[3]{\frac{x}{2}} = \frac{5}{2}$.

6. $\frac{4x - 9}{2\sqrt{x} + 3} = -5$.

7. $5 \cdot \sqrt[6]{x} + \sqrt[3]{x} = 14$.

8. $\sqrt{52+x}-\sqrt{3x-11}=3$.

9. Найти больший корень уравнения $\sqrt{x}=5-x$.

10. При каких значениях параметра a уравнение $2\sqrt{x}+1=4^{a^2-2a}$ имеет ровно одно решение?

11. Для каких $\alpha\in\mathbb{R}$ множество решений уравнения

$$\sqrt{x^2+2x\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha}=x-\cos\alpha$$

не является пустым?

12. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2-2}}{2}}-\sqrt{\frac{x-\sqrt{x^2-2}}{2}}=\sqrt{x-\sqrt{2}}\,.$$

Решить неравенства (13—18):

13. $\sqrt{x+2}>-9$.

14. $x^2+\sqrt{x}+25\le 10x$.

15. $\dfrac{4}{\sqrt{x-6}+2}\ge x-4$.

16. $\sqrt{x}\le x$.

17. $\sqrt{x+17}<25-x$.

18. $\sqrt[3]{4-x}>\sqrt{4-x}$.

19. Найти наименьшее и наибольшее из целых решений неравенства $\sqrt{x+4}+\sqrt{x+20}>8$.

20. Указать количество целых решений неравенства

$$\frac{1}{\sqrt{x}-8}\le\frac{1}{x-8}.$$

Решить неравенства (21—26):

21. $x\cdot\sqrt{x^2-36}\le\sqrt{x-6}$.

22. $(x-2)\cdot\sqrt{x+1}<(x+1)\cdot\sqrt{x-2}$.

23. $\dfrac{\sqrt{2x-1}}{x^2-3} \le \dfrac{\sqrt{2x-1}}{x^2+1}$.

24. $|x-3| \cdot \sqrt{x} \le 3-x$.

25. $\sqrt{x+1} \ge |x-1|$.

26. $\sqrt{2-x} \ge \dfrac{1}{x}$.

27. При каких вещественных a уравнение $\sqrt{x^2+x+3} = a$ имеет хотя бы одно решение?

28. Найти значения параметра a, при которых уравнение $\sqrt{x^2-2x+a} = b$ имеет решение для всякого неотрицательного b.

Решить системы уравнений (29, 30):

29. $\begin{cases} \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = 12, \\ x + y = 25. \end{cases}$

30. $\begin{cases} 3x - 4y = \sqrt{2xy}, \\ x^7 + 7y^7 = 135. \end{cases}$

Ответы

1. $\{1;\ 6/5\}$. (*Указание:* при возведении в квадрат полученное уравнение будет равносильно исходному.) **2.** $\{16\}$. **3.** $\{31\}$. (*Указание:* если ввести обозначения $u = \sqrt{x+18}$, $v = \sqrt{80-x}$, то можно получить систему уравнений $\begin{cases} u + v = 14, \\ u^2 + v^2 = 98. \end{cases}$ **4.** $\{-14;\ 21\}$. (*Указание:* можно использовать прием, аналогичный решению предыдущей задачи.) **5.** $\{1/4;\ 16\}$. (*Указание:* одну из дробей принять за новую переменную.) **6.** $\varnothing$. (*Указание:* применить к числителю формулу разности квадратов.) **7.** $\{64\}$. (*Указание:* принять $t = \sqrt[6]{x}$, $\sqrt[3]{x} = t^2$.) **8.** $\{12\}$. **9.** $\dfrac{11-\sqrt{21}}{2}$ (он же — единственный). **10.** $a \in (-\infty;\ 0] \cup [2;\ +\infty)$. (*Указание:* функция $\varphi(x) = 2\sqrt{x}+1$ возрастает на всей области определения, и больше одного решения указанное уравнение вообще иметь не может; фактически задача сводится к решению неравенства $4^{a^2-2a}-1\ge 0$.) **12.** $[\sqrt{2};+\infty)$. (*Указание:* данное уравнение в действительности является тождеством на своей ОДЗ; надо лишь следить за равносильностью выполняемых в процессе доказательства тождества преобразований.) **13.** $[-2; +\infty)$. **14.** $\varnothing$. (*Указание:* перенести слагаемое из правой части неравенства в левую и собрать полный квадрат.) **15.** $\{6\}$. (*Указание:* возможные значения дроби не больше 2, а возможные значения правой части не меньше 2.) **16.** $\{0\}\cup[1; +\infty)$. (*Указание:* неравенства 16—18, а также 20—26 удобно решать с использованием графических иллюстраций либо по схеме метода интервалов.) **17.** $[-17; 19)$. **18.** $(3; 4)$. **19.** Наименьшее целое решение $x = 6$; наибольшее не существует. **20.** 57. **21.** $\{6\}$. **22.** $(2; +\infty)$. **23.** $[1/2; \sqrt{3})$. **24.** $[0; 1]\cup\{3\}$. **25.** $[0; 3]$. **26.** $(-\infty; 0)\cup[1;\frac{\sqrt{5}+1}{2}]$. **27.** При $a\ge\frac{\sqrt{11}}{2}$. (*Указание:* построить график функции $f(x)=\sqrt{x^2+x+3}\equiv\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}}$. **28.** $a\le 1$. **29.** $x_1=9$, $y_1=16$; $x_2=16$, $y_2=9$. **30.** $x = 2$, $y = 1$. (*Указание:* из рассмотрения первого уравнения можно сделать вывод, что переменные x и y одного знака. Но тогда в силу второго уравнения этот знак — плюс. Выполняя в первом уравнении деление на $y > 0$, получим уравнение относительно новой переменной $t=\frac{x}{y}$.

Занятие 6

Планиметрия. Многоугольники

Треугольник. Метрические соотношения в треугольнике. Теорема синусов. Теорема косинусов. Медиана, биссектриса, высота. Периметр и площадь треугольника. Квадрат, прямоугольник, ромб, трапеция.

Решение задач этого занятия требует знания тригонометрических формул лишь в минимальном объеме.

Вводные задачи

1. Определить тип треугольника (прямо-, остро- или тупоугольным он является), если длины его сторон:

а) $a = 2;\ b = 3;\ c = 4$;

б) $a = \sqrt{6};\ b = \sqrt{11};\ c = \sqrt{5}$;

в) $a = x^2 - 1;\ b = 2x;\ c = x^2 + 1$ $(x > 1)$;

г) $a = 3,4;\ b = 6,1;\ c = 2,6$.

2. Найти периметры и площади треугольников из предыдущей задачи.

3. Найти площадь треугольника, длины сторон которого $a = \sin 25°;\ \ b = \sin 70°;\ \ c = \sin 85°$.

4. Высота, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, разбила ее на отрезки длиной 4 и 9 см. Найти площадь треугольника.

5. В треугольнике ABC известны длины двух сторон $CA = 5$, $CB = 4$ и синус угла между ними $\sin\gamma = 0,6$. Найти длину третьей стороны AB.

6. На сторонах BC, AC и AB треугольника ABC отмечены точки P, Q и R соответственно, причем $BP : PC = CQ : QA = AR : RB = 5$. Каково отношение площадей треугольников PQR и ABC?

7. Пусть EF — средняя линия треугольника ABC, соединяющая стороны AC и BC, соответственно, CT — биссектриса, причем эти линии пересекаются в точке K. Найти отношение площадей треугольников EFC и EKC, если $AC = \sqrt{45}$, $BC = \sqrt{20}$.

8. $ABCD$ — произвольный выпуклый четырехугольник, O — точка пересечения его диагоналей. Точки P, Q, R, S таковы, что верны равенства между векторами $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BQ}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CR}$, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{DS}$. Во сколько раз площадь четырехугольника $PQRS$ превышает площадь четырехугольника $ABCD$?

9. Известны основания трапеции — $a = 35$ и $b = 63$, а также ее высота $h = 15$. Одна из боковых сторон на 8 короче другой. Найдите периметр трапеции.

10. Дан квадрат $ABCD$ с длиной стороны 1. Пусть P, Q, R, S — середины сторон AB, BC, CD, AD соответственно. Пусть, далее, $M = DP \cap SR$, $N = BR \cap QP$. Найти длину отрезка MN.

11. Четырехугольник со сторонами 2, 5, 2, b (указаны длины последовательных сторон) является трапецией. Каковы возможные значения b?

Ответы

1. а) тупоугольный; б) прямоугольный; в) прямоугольный; г) такого треугольника нет. **2.** $P = 9$, $S = \frac{3\sqrt{15}}{4}$; $P = \sqrt{6} + \sqrt{11} + \sqrt{5}$, $S = \frac{\sqrt{30}}{2}$; $P = 2x(x+1)$, $S = x\left(x^2 - 1\right)$. **3.** $S = \sin 25° \cdot \sin 70° \cdot \sin 85° / 2$. **4.** 39 см^2.
5. 3; $\sqrt{73}$. **6.** $7 : 12$. **7.** $5 : 3$. **8.** В 4 раза. **9.** 140. **10.** На шесть. **11.** $b \in (1;\ 5) \cup (5;\ 9)$.

Указания

1. Расположить числа a, b, c в порядке возрастания: $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ ($\tilde{a} \le \tilde{b} \le \tilde{c}$). Сравнить величину $\tilde{c}^2 - \left(\tilde{a}^2 + \tilde{b}^2\right)$ с нулем.

2. Можно использовать *формулу Герона* для нахождения площадей:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где a, b, c — длины сторон треугольника, $p = P/2 = (a+b+c)/2$ — полупериметр. Эта формула пригодна для произвольного треугольника.

- Если треугольник прямоугольный с катетами $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$, то его площадь

$$S = \frac{1}{2}\tilde{a} \cdot \tilde{b};$$

- если треугольник равносторонний со стороной $\tilde{a}$, то его площадь

$$S = \frac{\tilde{a}^2\sqrt{3}}{4}$$

и т. д.

Периметр треугольника — сумма длин его сторон: $P = a + b + c$. Для произвольного n-угольника (длины сторон a_1, a_2, ..., a_n)

$$P = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

3. Использовать *теорему синусов.*

Теорема синусов

Если стороны треугольника a, b, c соответственно противолежат углам α, β, γ, то имеет место пропорциональная зависимость

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R,$$

где R — радиус описанной окружности.

Учесть также, что треугольник — жесткая фигура, т. е. длинами сторон он задается вполне.

4. Высота, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, является средним геометрическим отрезков, на которые она разбивает гипотенузу. Среднее геометрическое чисел x, y вычисляется по формуле $\sqrt{xy}$.

5. Найти $\cos\gamma$. Затем использовать теорему косинусов.

6. Воспользовавшись теоремой синусов, найти отношения

$$\frac{S_{ARQ}}{S_{ABC}},\ \frac{S_{BPR}}{S_{ABC}},\ \frac{S_{CQP}}{S_{ABC}}.$$

При этом $S_{PQR} = S_{ABC} - \left(S_{ARQ} + S_{BPR} + S_{CQP}\right)$.

7. Использовать свойство биссектрисы произвольного треугольника: отрезки, на которые биссектриса разбивает противоположную сторону, пропорциональны боковым сторонам.

8. Использовать следующее общее утверждение, относящееся к подобию: отношение площадей подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия.

9. Задача решается через рассмотрение прямоугольных треугольников, образованных боковыми сторонами трапеции, высотами, опущенными из вершин, и отрезками одного из оснований. Пользуясь теоремой Пифагора, несложно составить уравнение (уравнения) для определения боковой стороны трапеции.

10. Удобнее всего решать данную задачу с использованием *координатного метода*. Ввести прямоугольную систему координат так, чтобы ее началом являлась точка A; координатные оси направить вдоль сторон AD и AB квадрата. Затем получить уравнения прямых DP, SR, BR, QP. Решив соответствующие системы уравнений, получить координаты точек M и N. Далее найти длину отрезка MN через координаты его концов.

11. Упомянутая в условии трапеция должна быть равнобедренной, т. к. основаниями всегда будут стороны с длинами 5 и b. Далее следует учесть два ограничения на возможные длины сторон: во-первых, сумма длин звеньев конечной ломаной должна превышать длину отрезка, соединяющего ее концы; во-вторых, трапеция не должна вырождаться в прямоугольник.

Решения

1. Приведем решения по отдельности.

а) Наибольший угол γ лежит против большей стороны c;

$$c^2-\left(a^2+b^2\right)=4^2-\left(2^2+3^2\right)=3>0\ .$$

Отсюда следует, что γ — тупой угол.

(Для прямоугольного треугольника:

$$\gamma=90°,\ c^2-\left(a^2+b^2\right)=0\ ;$$

для остроугольного треугольника:

$$c^2-\left(a^2+b^2\right)<0\ .)$$

б) Так как

$$b^2=\left(\sqrt{11}\right)^2=\left(\sqrt{6}\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2=a^2+c^2\ ,$$

то данный треугольник — прямоугольный с катетами a и c и гипотенузой b.

в) $a^2+b^2=\left(x^2-1\right)^2+(2x)^2=$

$$=\left(x^4-2x^2+1\right)+(4x)^2=x^4+2x^2+1=\left(x^2+1\right)^2=c^2\ .$$

Данный треугольник — прямоугольный.

г) Так как $a+c=3{,}4+2{,}6=6<6{,}1=b$, то числа a, b, c не могут быть длинами сторон треугольника (в силу т. н. треугольника должно быть

$$\begin{cases}0<a<b+c,\\0<b<a+c,\\0<c<a+b.\end{cases}$$

2. Периметры треугольников:

а) $P=2+3+4=9$;

б) $P=\sqrt{6}+\sqrt{11}+\sqrt{5}$;

в) $P=\left(x^2-1\right)+2x+\left(x^2+1\right)=2x^2+2x\ .$

Площади треугольников:

а) по формуле Герона

$$P = \frac{1}{2}P = \frac{9}{2};\ \ p - a = \frac{5}{2};\ \ p - b = \frac{3}{2};\ \ p - c = \frac{1}{2};$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{9}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{3\sqrt{15}}{4};$$

б) $S = \dfrac{1}{2}ac = \dfrac{\sqrt{30}}{2}$;

в) $S = \dfrac{1}{2}a \cdot b = \dfrac{1}{2}\left(x^2 - 1\right)\cdot 2x = x^3 - x$.

3. Известно, что треугольник длинами сторон определяется вполне, т. е. существует лишь один треугольник с длинами сторон a, b, c. По теореме синусов

$$\frac{\sin 25^\circ}{\sin\alpha} = \frac{\sin 70^\circ}{\sin\beta} = \frac{\sin 85^\circ}{\sin\gamma} = 2R.$$

Очевидно, что треугольник с углами 25°, 70°, 85° ($25^\circ + 70^\circ + 85^\circ = 180^\circ$) и соответственно противолежащими сторонами $\sin 25^\circ$, $\sin 70^\circ$, $\sin 85^\circ$ удовлетворяет указанному соотношению. Но в силу сказанного ранее он единственный. Отсюда $2R = 1$. Для нахождения площади воспользуемся известной формулой:

$$S = \frac{abc}{4R};$$

тогда

$$S = \frac{1}{2}\sin 25^\circ \sin 70^\circ \sin 85^\circ.$$

4. $h = \sqrt{AH \cdot BH} = \sqrt{4 \cdot 9} = 6$; $a = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}$ (см); $b = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$ (см); $S = \dfrac{1}{2}a \cdot b = \dfrac{1}{2}\cdot 3\sqrt{13}\cdot 2\sqrt{13} = 39$ (см^2) или $S = \dfrac{1}{2}AB \cdot CH = \dfrac{1}{2}(4 + 9)\cdot 6 = 39$ (см^2).

5. Согласно основному тригонометрическому тождеству

$$\sin\gamma = 0,6 \Rightarrow \cos^2\gamma = 1 - \sin^2\gamma = 0,64\ ;\ \cos\gamma = \pm 0,8\ .$$

Два значения $\cos\gamma$ соответствуют двум возможным типам треугольников: остроугольному ($\cos\gamma = 0,8$) и тупоугольному ($\cos\gamma = -0,8,\ \gamma > 90°$). Длину третьей стороны можно определить через теорему косинусов:

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2AC\cdot CB\cdot\cos\gamma = 41 \pm 32\ ,$$

$$AB = 3\ (\text{см})\ \text{или}\ AB = \sqrt{73}\ (\text{см}).$$

6. $$\frac{S_{ARQ}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}AR\cdot AQ\cdot\sin\alpha}{\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\alpha} = \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{5}{36} = \frac{S_{BPC}}{S_{ABC}} = \frac{S_{CQP}}{S_{ABC}}\ ;$$

$$\frac{S_{ARQ} + S_{BPC} + S_{CQP}}{S_{ABC}} = 3\cdot\frac{5}{36} = \frac{5}{12}\ ;$$

$$S_{RQP} = S_{ABC} - \left(S_{ARQ} + S_{BPC} + S_{CQP}\right);\ \frac{S_{ARQ}}{S_{ABC}} = 7:12\ .$$

7. Чертеж представлен на рис. 6.1.

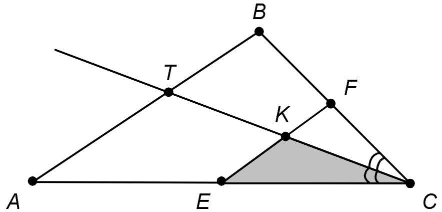

Рис. 6.1. Треугольник *ABC*

Так как EF — средняя линия, то

$$FC = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{20} = \sqrt{5}\ ;\ EC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{45}\ .$$

Пусть $\widehat{KCE} = \widehat{KCF} = \alpha$. Тогда

$$\frac{S_{ARQ}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} EC \cdot KC \cdot \sin\alpha}{\frac{1}{2} FC \cdot KC \cdot \sin\alpha} = \frac{EC}{FC} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{45}}{\sqrt{5}} = \frac{3}{2};$$

но $S_{EFC} = S_{EKC} + S_{FKC}$; $\Rightarrow \dfrac{S_{EFC}}{S_{EKC}} = \dfrac{5}{3}$.

8. По условию точки *P*, *A*, *O*, *C*, *R* лежат на одной прямой. То же можно сказать и о точках *Q*, *B*, *O*, *D*, *S*. Кроме того,

$$OA = \frac{1}{2} OP;\ OB = \frac{1}{2} OQ;\ OC = \frac{1}{2} OR;\ OD = \frac{1}{2} OS.$$

Треугольники AOB и POQ подобны по двум пропорциональным сторонам и общему углу между ними. Следовательно,

$$S_{POQ} = 4 \cdot S_{AOB}.$$

Аналогично

$$S_{QOR} = 4 \cdot S_{BOC};\ S_{ROS} = 4 \cdot S_{COD};\ S_{SOP} = 4 \cdot S_{DOA}.$$

Таким образом, искомое отношение площадей также равно 4 (рис. 6.2).

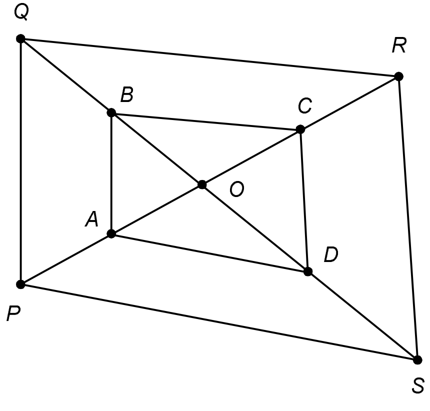

Рис. 6.2. Четырехугольники *ABCD* и *PQRS*

9. Пусть основание трапеции $AD = b = 63$, $BC = a = 35$, а боковые стороны $CD = c$, $AB = c + 8$, BH и CT — высоты трапеции (рис. 6.3). Тогда

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2}\,,$$

$$TD = \sqrt{CD^2 - CT^2}\,;$$

$$AD = AH + HT + TD = AH + BC + TD\,.$$

Имеем уравнение:

$$\sqrt{(c+8)^2 - 15^2} + 35 + \sqrt{c^2 - 15^2} = 63\,,$$

или

$$\sqrt{(c+8)^2 - 15^2} = 28 - \sqrt{c^2 - 15^2}\,.$$

Это уравнение имеет лишь одно положительное решение $c = 17$. Поэтому $P = 63 + 17 + 35 + 25 = 140$. Рассмотрение случаев с тупыми углами при большем основании трапеции (здесь все выкладки аналогичны) не приводит к новым вариантам ответов.

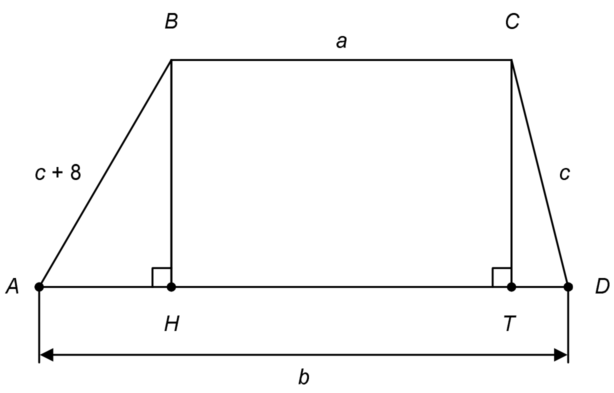

Рис. 6.3. Трапеция

10. Введем систему координат, как показано на рис. 6.4. Координаты точек: $A(0;\,0)$; $B(1;\,0)$; $C(1;\,1)$; $D(0;\,1)$; $P(1/2;\,0)$; $Q(1;\,1/2)$; $R(1/2;\,1)$; $S(0;\,1/2)$. Точки M и N — это точки пересечения прямых DP и SR, BR и QP (по условию).

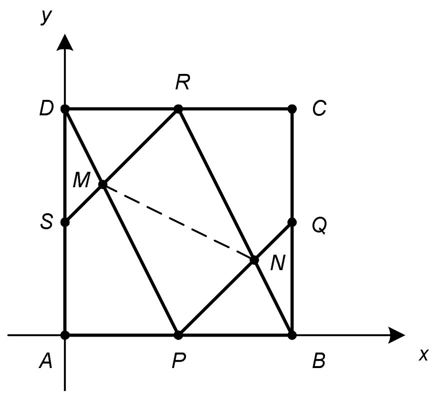

Рис. 6.4. Квадрат *ABCD*

Получим уравнения этих прямых. Например, пусть уравнение SR есть $y = kx + b$, где k и b — неопределенные пока параметры. Подставляя в это уравнение координаты точек S и R, имеем систему

$$\begin{cases} k \cdot 0 + b = \dfrac{1}{2}, \\ k \cdot \dfrac{1}{2} + b = 1. \end{cases}$$

Ее решение $k = 1$, $b = 1/2$. Таким образом, уравнение SR суть $y = x + 1/2$. Действуя в том же ключе, находим уравнения прямых DP: $y = -2x + 1$; BR: $y = -2x + 2$; QP: $y = x - 1/2$. Тогда, решая совместно уравнения прямых SR и DP, находим координаты точки их пересечения M:

$$\begin{cases} y = x + \dfrac{1}{2}, \\ y = -2x + 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{6}, \\ y = \dfrac{2}{3}. \end{cases}$$

Аналогично можно получить координаты точки $N(5/6;\ 1/3)$. Тогда длина отрезка

$$MN = \sqrt{\left(x_M - x_N\right)^2 + \left(y_M - y_N\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{6} - \frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

11. Каждая из сторон трапеции должна быть меньше, чем сумма длин других сторон, поэтому $5 - 2 \cdot 2 < b < 2 \cdot 2 + 5$; $b \neq 5$ ($b = 5$ отвечает прямоугольнику). Других ограничений на значение b не существует. Отсюда $b \in (1; 5) \cup (5; 9)$.

Комментарии

1. Данная задача связана с одной из важнейших теорем о треугольнике — *теоремой косинусов* (a, b, c — стороны; α, β, γ — противолежащие углы).

Теорема косинусов

Если a, b, c — стороны; α, β, γ — противолежащие углы, то (написание "относительно стороны")

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

или ("относительно угла")

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Очевидно, $\cos\gamma = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2$ (прямоугольный треугольник; теорема косинусов превращается в теорему Пифагора); $\cos\gamma > 0$ соответствует случаю

$$a^2 + b^2 > c^2$$

("короткая" сторона c; остроугольный треугольник); $\cos\gamma < 0$ — тупоугольный треугольник, "длинная" сторона c: $a^2 + b^2 < c^2$. В *задаче 1, в*: формулами

$$a = x^2 - y^2,\ b = 2xy,\ c = x^2 + y^2\ \ (x,\ y \in \mathbb{N},\ x > y)$$

задаются всевозможные прямоугольные треугольники с целочисленными сторонами.

2. Если известны три стороны треугольника, то его площадь S всегда можно найти по формуле Герона:

$$S = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{a+c-b}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2}}.$$

Другие формулы для площади:

$$S = \frac{1}{2}ah,$$

где a — основание, h — высота; "по двум сторонам и углу между ними":

$$S = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\gamma;$$

если кроме сторон известен радиус описанной окружности:

$$S = \frac{abc}{4R};$$

через радиус вписанной окружности и полупериметр: $S = rp$.

Последние две формулы чаще используются не для нахождения площади, а для составления уравнений, завязывания "логических узлов". Чрезвычайно полезное упражнение: проанализировать действие каждой из этих формул в некоторых предельных случаях:

- равносторонний треугольник: $b = c = a$;
- прямоугольный равнобедренный треугольник: $b = a$; $c = a\sqrt{2}$;
- равнобедренный треугольник: ($b = a$) с "очень большим" (почти π) или "очень маленьким" (почти 0) углом при вершине. В частности, для равностороннего треугольника (все стороны равны a, все углы равны $\pi/3$):

$$P = 3a;\ p = \frac{3}{2}a;\ S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4};\ h = \frac{2S}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{2};\ R = \frac{a^3}{4S} = \frac{a}{\sqrt{3}};$$

$$r = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

3. Известно, что треугольник вполне определяется двумя сторонами и углом между ними; стороной и двумя прилежащими к ней углами. Можно, с учетом вышесказанного, задать двумя сторонами и площадью, но в этом случае мы получим два треугольника (остро- и тупоугольный). Такого рода ситуацию (когда условию задачи соответствует единственное построение или конечное количество построений) можно назвать *жесткой.* В "жесткой" задаче, в принципе, можно найти все: длины отрезков, углы, площади и т. д. Поэтому если требуется решить задачу такого типа, то можно действовать последовательно, вычисляя один за другим нужные элементы (линейные, угловые). Есть задачи несколько иного плана, где однозначно определяются не все величины, а только та, о которой спрашивается (либо еще некоторые, но не все). Таковы, например, *задачи 6—8.* Желательно с самого начала определить, с задачей какого именно типа мы имеем дело. В задачах второго типа часто бывает полезно ввести какую-либо переменную, например, обозначить через x длину некоторого отрезка; вполне возможно, что в конце решения эта величина сократится.

5. Отметим, что, хотя длина третьей стороны однозначно не определяется, площадь треугольника

$$S = \frac{1}{2} CA \cdot CB \cdot \sin\gamma = 6$$

в обоих случаях одинакова.

10. Координатный метод удобен при решении многих задач планиметрии (и стереометрии). В случае если ввести прямоугольную систему координат удобным образом невозможно, иногда помогает векторный метод.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти периметр равнобедренного треугольника, если его площадь равна

$$S = 3\sqrt{3},$$

а радиус описанной окружности равен 2.

2. В треугольнике OCD точка B — середина OD, точка A расположена на OC таким образом, что $OA : OC = 2{:}1$. Найти отношение площадей четырехугольника $ACDB$ и треугольника OAB.

3. В прямоугольный треугольник вписана окружность. Еще одна окружность касается гипотенузы треугольника, одного из катетов и первой окружности внешним образом. Отношение радиусов этих окружностей равно 2:1 (соответственно). Найти острые углы треугольника.

4. В равнобедренной трапеции $ABCD$ ($AB \parallel CD$) биссектрисы углов C и D пересекаются в точке M, принадлежащей основанию AB. Найти отношение большего основания к меньшему, если острый угол трапеции равен $30°$.

5. Дан четырехугольник $ABCD$, прямые AC и BD пересекаются в точке O, причем $OA = 5$, $OB = OC = 2$, $OD = 3$. Найти расстояние между серединами сторон AB и CD.

6. В прямоугольный треугольник вписан квадрат с диагональю $\sqrt{8}$ таким образом, что две его стороны лежат на катетах, а одна из вершин на гипотенузе. Эта вершина делит гипотенузу в отношении $2:1$. Найти площадь круга, описанного около треугольника.

7. Дан равносторонний треугольник ABC с длиной стороны 3. Точка F расположена таким образом, что $BF = FC = 2$. Найти AF.

Ответы

1. $P = 6\sqrt{3}$. **2.** 2. **3.** $\operatorname{arctg}\sqrt{8}$. **4.** $4 + 2\sqrt{3}$. **5.** $\dfrac{\sqrt{74}}{2}$; $\dfrac{\sqrt{34}}{2}$; $\dfrac{\sqrt{50}}{2}$.

6. $S_{\text{кр}} = \dfrac{45\pi}{4}$. **7.** $\dfrac{\sqrt{27} \pm \sqrt{7}}{2}$. (*Указание:* точка F может быть расположена вне или внутри треугольника, рис. 6.5.)

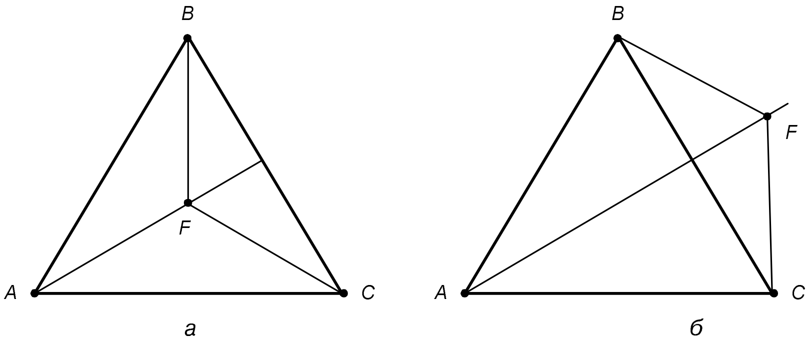

Рис. 6.5. Треугольник *ABC*: *а* — точка *F* расположена внутри треугольника; *б* — точка *F* расположена вне треугольника

Занятие 7

Тригонометрические функции: определения, вычисление значений

Единичная окружность. Радианная и градусная меры углов. Определения основных тригонометрических функций. Значения тригонометрических функций углов 1-й четверти. Формулы приведения. Связь между тригонометрическими функциями одного аргумента.

Используемые общие тригонометрические формулы: двойного аргумента, понижения.

Вводные задачи

1. Сравнить величины углов $\alpha = 34°$ и $\beta = \frac{\pi}{5}$.

2. Выразить величины углов правильных треугольника, шестиугольника, восьмиугольника и квадрата в радианной и градусной мерах.

3. Что больше: $\cos\frac{\pi}{7}$ или $\cos 25°$?

4. Известно, что $\cos\beta = 0,6$, причем угол β принадлежит первой четверти. Найти значения следующих функций: $\sin\beta$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{ctg}\beta$, $\sec\beta$, $\sin 2\beta$, $\cos 4\beta$, $\sin(\beta/2)$.

5. Сравнить $\sin 48°$ и $\cos 42°$; $\operatorname{tg}(\pi/12)$ и $\operatorname{ctg}(5\pi/12)$.

6. Получить значения $\sin 15^\circ$, $\cos 15^\circ$, $\operatorname{tg} 15^\circ$ в алгебраической форме (через радикалы). Убедиться, что $\operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{ctg} 15^\circ$ — целое число.

7. То же для $\sin(\pi/8)$, $\cos(\pi/8)$, $\operatorname{tg}(\pi/8)$. Убедиться, что $A = \operatorname{tg}(\pi/8) - \operatorname{ctg}(\pi/8)$ — целое число. В ответе записать это целое число.

8. Вычислить:

а) $\dfrac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ \cos 20^\circ}$;

б) $\operatorname{tg} 50^\circ \cdot (\operatorname{ctg} 25^\circ - \operatorname{tg} 25^\circ)$;

в) $\dfrac{\sin^2 10^\circ}{1 - \sin 70^\circ}$.

9. Показать, что значение выражения $\log_2 \sin 7{,}5^\circ + \log_2 \cos 7{,}5^\circ + \log_2 \cos 15^\circ$ — целое число. В ответе записать это целое значение.

Упростить выражения (10—12):

10. $\dfrac{\sin(-330^\circ) \cdot \cos 200^\circ \cdot \sin 378^\circ}{\cos 792^\circ \cdot \cos 380^\circ \cdot \operatorname{tg} 405^\circ}$.

11. $\sin \arccos \dfrac{3}{5}$.

12. $\arcsin \sin 0$; $\arcsin \sin \dfrac{\pi}{2}$; $\arcsin \sin \pi$.

Ответы

1. $\alpha < \beta$. **2.** $60^\circ = \dfrac{\pi}{3}$; $120^\circ = \dfrac{2\pi}{3}$; $135^\circ = \dfrac{3\pi}{4}$; $90^\circ = \dfrac{\pi}{2}$. **3.** $\cos 25^\circ$.

4. 0,8; $\dfrac{4}{3}$; $\dfrac{3}{4}$; $\dfrac{5}{3}$; 0,96; $-\dfrac{527}{625} = -0{,}8432$; $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **5.** $\cos 42^\circ = \sin 48^\circ$; $\operatorname{tg}(\pi/12) = \operatorname{ctg}(5\pi/12)$. **6.** $\sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$;

$\cos 15° = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; $\operatorname{tg} 15° = 2-\sqrt{3}$; $\operatorname{ctg} 15° = 2+\sqrt{3}$;

$\operatorname{tg} 15° + \operatorname{ctg} 15° = \left(2-\sqrt{3}\right)+\left(2+\sqrt{3}\right) = 4 \in \mathbb{Z}$. **7.** $\sin\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$;

$\cos\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$; $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$; $\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{2}+1$; $A = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8} - \operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{8} = -2$.

8. 2; 2; 0,5. **9.** -3. **10.** $-0{,}5$. **11.** $\dfrac{4}{5}$. **12.** 0; $\dfrac{\pi}{2}$; 0.

Указания

1. Величину угла α выразить в радианах, либо величину угла β выразить в градусах.

2. Учесть, что сумма углов правильного n-угольника равна $2d\left(n-1\right)$, где $d = 90°$.

3. Функции $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\sec\alpha$ возрастают в 1-й четверти. Функции $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$ убывают в 1-й четверти.

4. Учесть связи между тригонометрическими функциями *одного аргумента*:

- $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ (основное тригонометрическое тождество);
- $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ (определение функции тангенс);
- $1+\operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ и $1+\operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ (эти формулы — простые следствия основного тригонометрического тождества — получаются из последнего почленным делением на $\cos^2\alpha$ и $\sin^2\alpha$ соответственно).

Формулы двойного угла:

- $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
- $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$
- $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

5. Воспользоваться формулами приведения.

6. Удобно исходить из связи $\cos 30° = 1 - 2\sin^2 15° = 2\cos^2 15° - 1$. Можно также принять во внимание тот факт, что $15° = 45° - 30°$.

7. Учесть равенство $\frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{\pi}{8}$.

8. а) Для числителя применить формулу двойного угла.

б) $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$.

в) В числителе выполнить понижение степени:

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \quad \left(\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}\right).$$

9. Аддитивное свойство логарифма $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$ $(a > 0,\ a \neq 1;\ x,\ y > 0)$ позволяет привести данное выражение к логарифму одного числа.

10. Прежде всего, необходимо с помощью формул приведения преобразовать все функции к функциям углов 1-й четверти.

11, 12. Из определения обратных тригонометрических функций арксинус, арккосинус, арктангенс следует, что

$$\sin\arcsin a = a \quad (|a| \leq 1);$$

$$\cos\arccos b = b \quad (|b| \leq 1);$$

$$\operatorname{tg}\operatorname{arctg} t = t \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Из этого же определения имеем:

$$\arcsin\sin\alpha = \alpha \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\arccos\cos\alpha = \alpha \quad (0 \leq \alpha \leq \pi);$$

$$\operatorname{arctg}\operatorname{tg}\alpha = \alpha \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right).$$

Если же угол α покидает пределы указанного в скобках диапазона, равенство невозможно. В этом случае для вычисления значений можно пользоваться свойствами прямых и обратных тригонометрических функций. Например,

$$\arcsin\sin\frac{8\pi}{7} = \arcsin\sin\left(\pi + \frac{\pi}{7}\right) =$$

$$= \arcsin\left(-\sin\frac{\pi}{7}\right) = -\arcsin\sin\frac{\pi}{7} = -\frac{\pi}{7}.$$

Решения

1. Выразим величины углов в одних и тех же единицах, например, в градусах:

$$\alpha = 34°;\ \beta = \frac{\pi}{5} = \frac{180°}{5} = 36°.$$

Очевидно, $\alpha < \beta$.

2. Сумма величин углов выпуклого n-угольника: $180° \cdot (n-2) = \pi \cdot (n-2)$. Величина одного угла правильного n-угольника в n раз меньше и равна

$$180° \cdot \frac{n-2}{n} = \pi \cdot \frac{n-2}{n}.$$

- Для треугольника: $\alpha = 60° = \frac{\pi}{3}$.
- Для шестиугольника: $\alpha = 120° = \frac{2\pi}{3}$.
- Для восьмиугольника: $\alpha = 135° = \frac{3\pi}{4}$.
- Для квадрата: $\alpha = 90° = \frac{\pi}{2}$.

3. $\cos\frac{\pi}{7} = \cos\frac{180°}{7} = \cos\left(25\frac{5°}{7}\right) < \cos 25°$.

4. В 1-й четверти синус является положительной функцией, поэтому

$$\sin\beta = +\sqrt{1-\cos^2\beta} = 0,8;$$

тангенс есть отношение синуса к косинусу, а котангенс — обратное отношение:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{0,8}{0,6} = \frac{4}{3};$$

$$\operatorname{ctg}\beta = \frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{3}{4};$$

секанс — число, обратное косинусу:

$$\sec\beta = \frac{1}{\cos\beta} = \frac{1}{0,6} = \frac{5}{3}.$$

Формула синуса двойного угла дает следующий результат:

$$\sin 2\beta = 2\sin\beta\cdot\cos\beta = 2\cdot 0,8\cdot 0,6 = 0,96 = \frac{24}{25}.$$

Косинус четырехкратного угла получим, подставляя угол 2β в выражение для двойного аргумента:

$$\cos 4\beta = \cos(2\cdot 2\beta) = 1 - 2\sin^2 2\beta = 1 - 2\cdot\left(\frac{24}{25}\right)^2 = 1 - \frac{1152}{625} = -0,8432.$$

Далее в условии задачи требуется определить значение $\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)$. Угол $\frac{\beta}{2}$, будучи равным половине угла 1-й четверти, очевидно, также принадлежит первой четверти, поэтому в *формуле синуса половинного угла*

$$\sin\frac{\beta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}}$$

следует взять знак "+":

$$\sin\frac{\beta}{2} = +\sqrt{\frac{1-0,6}{2}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 0,4472.$$

5. $\cos 42° = \cos(90° - 48°) = \sin 48°$;

$\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

6. $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30° = \cos(2\cdot 15°) = 2\cos^2 15° - 1 = 1 - 2\sin^2 15°$;

$$\cos^2 15^\circ = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{4};$$

$\cos 15^\circ = +\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ (знак "+" перед радикалом объясняется положительностью всех основных тригонометрических функций углов 1-й четверти, в том числе $\cos 15^\circ$). Аналогично

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

Другой способ вычисления основан на формулах синуса и косинуса суммы/разности:

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4};$$

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Равенство полученных значений для $\sin 15^\circ$ (и для $\cos 15^\circ$) можно проверить, подсчитав их квадраты. Далее,

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \frac{\sin 15^\circ}{\cos 15^\circ} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}} = 2-\sqrt{3};$$

$$\operatorname{ctg} 15^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = 2+\sqrt{3};$$

$$\operatorname{tg} 15^\circ + \operatorname{ctg} 15^\circ = \left(2-\sqrt{3}\right) + \left(2+\sqrt{3}\right) = 4 \in \mathbb{Z}.$$

7. $\sin\dfrac{\pi}{8} = +\sqrt{\dfrac{1-\cos\dfrac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\dfrac{1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2};$

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=\frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}}=\sqrt{2}-1.$$

Аналогично $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}+1$. При этом

$$A=\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}=\left(\sqrt{2}-1\right)-\left(\sqrt{2}+1\right)=-2\in\mathbb{Z}.$$

8. а) $\dfrac{\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ\cos 20^\circ}=\dfrac{2\sin 20^\circ\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ\cos 20^\circ}=2.$

б) $\operatorname{tg}50^\circ\cdot\left(\operatorname{ctg}25^\circ-\operatorname{tg}25^\circ\right)=\dfrac{2\operatorname{tg}25^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 25^\circ}\cdot\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg}25^\circ}-\operatorname{tg}25^\circ\right)=$

$$=\frac{2\operatorname{tg}25^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 25^\circ}\cdot\frac{1-\operatorname{tg}^2 25^\circ}{\operatorname{tg}25^\circ}=2.$$

в) $\dfrac{\sin^2 10^\circ}{1-\sin 70^\circ}=\dfrac{1-\cos 20^\circ}{2}\cdot\dfrac{1}{1-\cos 20^\circ}=\dfrac{1}{2}.$

9. $\log_2\sin 7,5^\circ+\log_2\cos 7,5^\circ+\log_2\cos 15^\circ=$

$$=\log_2\left(\sin 7,5^\circ\cdot\cos 7,5^\circ\cdot\cos 15^\circ\right)=$$

$$=\log_2\frac{\left(2\sin 7,5^\circ\cdot\cos 7,5^\circ\right)\cdot\cos 15^\circ}{2}=$$

$$=\log_2\frac{2\sin 15^\circ\cos 15^\circ}{4}=\log_2\frac{\sin 30^\circ}{4}=\log_2\frac{1}{8}=-3\in\mathbb{Z}.$$

10. $\dfrac{\sin\left(-330^\circ\right)\cdot\cos 200^\circ\cdot\sin 378^\circ}{\cos 792^\circ\cdot\cos 380^\circ\cdot\operatorname{tg}405^\circ}=$

$$=\frac{\sin\left(-330^\circ+30^\circ\right)\cdot\cos\left(180^\circ+20^\circ\right)\cdot\sin\left(360^\circ+18^\circ\right)}{\cos\left(810^\circ-18^\circ\right)\cdot\cos\left(360^\circ+20^\circ\right)\cdot\operatorname{tg}\left(360^\circ+45^\circ\right)}=$$

$=\dfrac{\sin 30^\circ\cdot\left(-\cos 20^\circ\right)\cdot\sin 18^\circ}{\sin 18^\circ\cdot\cos 20^\circ\cdot\operatorname{tg}45^\circ}=-\dfrac{1}{2}$, т. к. $\sin 30^\circ=\dfrac{1}{2}$ и $\operatorname{tg}45^\circ=1$.

11. Угол $\alpha = \arccos\frac{3}{5}$ принадлежит 1-й четверти, поэтому

$$\sin\alpha = +\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}.$$

12. $\arcsin\sin 0 = 0$, т. к. $0 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; $\arcsin\sin\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$, т. к. $\frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$; но $\arcsin\sin\pi = \arcsin 0 = 0$ $(\neq \pi)$.

Комментарии

1—3. Радианная мера углов является естественной мерой (в отличие от градусной).

Определение

Угол в 1 радиан — это такой угол, для которого стягиваемая им дуга окружности по длине равна радиусу.

Если угол α выражен в радианах, то именно в этом случае формула длины дуги приобретает особенно простой вид: αR, где R — радиус дуги. Когда $R = 1$, угловая и линейная величины дуги просто совпадают и численно равны α. Как известно, величина прямого угла в радианной мере равна $\pi/2$ (радиан), развернутого — π радиан, полного угла (вся окружность) — 2π, а в градусной — $90°$, $180°$, $360°$ соответственно. Поэтому π радиан соответствуют $180°$, а 1 радиан равен $(180/\pi)° \approx 57°18'$ $(1° = 60')$. Таким образом, угол величиной в 1 радиан немного меньше угла равностороннего треугольника ($60°$, или $\pi/3$ радиан), т. е. является "большим" углом, в отличие от "маленького" градуса. Если угол α выражен в радианах и "очень мал", то имеет место приближенное равенство $\sin\alpha = \alpha$, тем более точное, чем ближе α к нулю.

4. Синус и косинус одного аргумента связаны простым соотношением

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Но эта связь, вообще говоря, неоднозначна. Зная синус угла, легко определить его же косинус с точностью до знака. Знак же нельзя определить в принципе. Получить его можно, лишь обладая некоторой дополнительной информацией, например, если известна четверть, в которой расположен угол, или другая функция этого угла.

5. Здесь мы встречаемся с одной из *формул приведения*, относящейся к наиболее часто встречающемуся типу, а именно:

$$f\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=cof\,(\alpha),$$

где в символической форме "f" представляет любую из шести основных тригонометрических функций (sin, cos, tg, ctg, sec, cosec), а "cof" — соответствующую "кофункцию". Например, $\operatorname{tg}70^\circ=\operatorname{ctg}20^\circ$; $\sec\frac{\pi}{6}=\operatorname{cosec}\frac{\pi}{3}$; $\operatorname{tg}45^\circ=\operatorname{ctg}45^\circ$ и т. д. Полезно осмыслить этот переход в геометрическом плане, рассматривая прямоугольный треугольник с катетами a, b (противолежащие углы α и β соответственно; $\alpha=\beta=\pi/2$) и гипотенузой $c=1$.

6. Для перехода от выражения $\sin 15^\circ$ в виде $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ к его выражению в виде $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ можно использовать преобразование

$$\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}-2\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Данное преобразование, связанное с представлением подкоренного выражения в виде квадрата разности, выглядит несколько искусственным. Проще применить уже встречавшуюся выше формулу преобразования сложных радикалов (двойных корней):

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}-\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}.$$

Для $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ имеем $A = 2$, $B = 3$. Следовательно,

$$\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2^2-3}}{2}} - \sqrt{\frac{2-\sqrt{2^2-3}}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

7. Другой способ вычисления той же величины: пусть

$$A = \operatorname{tg}\frac{\pi}{8} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}.$$

Очевидно, $A < 0$. Тогда квадрат этого выражения

$$A^2 = \left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}\right)^2 = \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8} + \operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{8} - 2\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{8} =$$

$$= \frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}} + \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{1-\cos\frac{\pi}{4}} - 2 = \frac{\left(3-2\sqrt{2}\right)+\left(3+2\sqrt{2}\right)}{2-1} - 1 = 4;\ \ A = -2.$$

8. Эти три задачи роднит следующее обстоятельство: в каждой из них функции-компоненты по отдельности "не вычисляются", и можно сразу решать их на общем уровне: в первой задаче считать $20° = \alpha$, $40° = 2\alpha$; во второй $25° = x$, $50° = 2x$ и т. д. Тот же способ решения относится ко многим гораздо более сложным задачам.

11, 12. Приведем определения функций.

Определение

Число x называется *арксинусом* числа a ($|a| \le 1$), если

$$\begin{cases} x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \\ \sin x = a. \end{cases}$$

Обозначение $x = \arcsin a$.

Определение

Число x называется *арккосинусом* числа b ($|b| \le 1$), если

$$\begin{cases} x \in [0; \pi], \\ \cos x = b. \end{cases}$$

Обозначение $x = \arccos b$.

Определение

Число x называется *арктангенсом* числа t ($t \in \mathbb{R}$), если

$$\begin{cases} x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right), \\ \operatorname{tg} x = t. \end{cases}$$

Обозначение $x = \operatorname{arctg} t$.

Решением тригонометрического уравнения $\sin x = a$ ($|a \le 1|$) на промежутке $[-\pi/2; \pi/2]$ является единственное число, равное $\arcsin a$. Все другие решения данного уравнения (если $x \in \mathbb{R}$) выражаются через это решение. Аналогично для функций арккосинус и арктангенс.

Задачи для самостоятельного решения

1. Какой из углов больше: $\alpha = 2$ или $\beta = 120°$?

2. Сравнить $x = \cos\alpha$ и $y = \cos\beta$, где α и β — углы из задачи 1.

3. Что меньше: $\sin\frac{\pi}{11}$ или $\operatorname{tg}\frac{\pi}{10}$?

4. Пусть $\operatorname{tg}\varphi = t$. Найти значения $\sin 2\varphi$; $\cos 2\varphi$; $\operatorname{tg} 2\varphi$. Проверить выполнение равенства $\sin^2 2\varphi + \cos^2 2\varphi = 1$ при всех t. Доказать, что если $t \in \mathbb{Q}$, то и указанные значения тоже будут рациональными числами (отсюда следует, что и $\sin n\varphi$, $\cos n\varphi$, $\operatorname{tg} n\varphi$, $n \in \mathbb{N}$ — рациональны).

5. Дано: $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}$, $\cos(\alpha + \beta) = 0$. Найти α и β, если известно, что это углы 1-й четверти.

6. Найти n, при котором

$$\frac{32 \cdot \sin^{2n} 20°}{(1 - \cos 40°)^n} = \sqrt{2}.$$

Вычислить (7—9):

7. $\operatorname{tg}\arcsin\frac{5}{13}$.

8. $3\cos 2\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}$.

9. $\left(6+\sqrt{24}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\operatorname{arctg}\sqrt{2}\right)$.

10. Найти меньшее из возможных значений выражения $\operatorname{tg}\frac{\pi n}{3}\cdot\operatorname{tg}\frac{2\pi n}{3}$ ($n\in\mathbb{Z}$).

11. $\cos\pi n^2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi n^3\right)$, $n\in\mathbb{Z}$.

12. Какие значения может принимать выражение $\cos\frac{\left(x-x^3\right)\pi}{6}$, если $x\in\mathbb{Z}$?

Вычислить (13—16):

13. $\arcsin\sin\frac{\pi(2k-1)}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$.

14. $\sin 30°\cdot\cos 16°+\cos^2 82°$.

15. $\dfrac{\arccos\cos\frac{11\pi}{7}}{\pi}$.

16. $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{5}{12}$.

17. Что больше: $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}$ или $2\operatorname{arctg}\frac{1}{4}$?

Ответы

1. β. **2.** $x>y$. **3.** $\sin\frac{\pi}{11}$. **4.** $\sin 2\varphi=\frac{2t}{1+t^2}$; $\cos 2\varphi=\frac{1-t^2}{1+t^2}$; $\operatorname{tg} 2\varphi=\frac{2t}{1-t^2}$.

(*Указание:* $\sin 2\varphi=2\sin\varphi\cdot\cos\varphi=2\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cdot\cos^2\varphi=2\operatorname{tg}\varphi\cdot\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}$.)

5. $\alpha = \pi/3$, $\beta = \pi/6$. **6.** $n = 4{,}5$. (*Указание:* $\sin^2 20^\circ = \frac{1}{2}(1 - \cos 40^\circ)$.) **7.** 5/12. (*Указание:* если обозначить $\alpha = \arcsin\frac{5}{13}$, то $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$; $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \frac{12}{13}$ и т. д.) **8.** -1. **9.** 1. **10.** -3. (*Указание:* рассмотреть случаи $n = 3k$, $n = 3k + 1$, $n = 3k + 2$, $k \in \mathbb{Z}$.) **11.** 1. **12.** ± 1. (*Указание:* одно из двух последовательных целых чисел делится на 2. Одно из трех последовательных целых чисел делится на 3.) **13.** $(-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{2}$. **14.** 1/2. **15.** 3/7. (*Указание:* $\cos\frac{11\pi}{7} = \cos\left(\pi + \frac{4\pi}{7}\right)$; $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.) **16.** $\pi/4$. (*Указание:* найти тангенс данного угла или угла, вдвое большего.) **17.** Первое число больше.

Занятие 8

Преобразование тригонометрических выражений

Упрощение выражений, содержащих тригонометрические функции. Доказательство тождеств. Представление тригонометрических выражений в различных формах, удобных для выполнения других математических операций.

Формулы: использованные в *Занятии 7*, половинного аргумента, синуса и косинуса суммы и разности, переходов "сумма — произведение" и "произведение — сумма", а также некоторые другие.

Вводные задачи

Упростить выражения (1—3):

1. $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\beta}\cdot\dfrac{1-\cos\beta}{1+\sin\alpha}\cdot\dfrac{1+\cos\beta}{1-\sin\alpha}$.

2. $\dfrac{\sin^2\dfrac{\gamma}{12}}{1-\cos\dfrac{\gamma}{6}}$.

3. $\dfrac{(\sin 2\delta\cos\delta+\cos 2\delta\sin\delta)\cdot(\cos 2\delta\cos\delta-\sin 2\delta\sin\delta)}{\sin 6\delta}$.

Замечание

Решение *задач 1—3* кроме общеалгебраических преобразований требует лишь однократного применения какой-либо из простейших формул (в основном это логическая связка "двойной аргумент — понижение — половинный аргумент").

4. Упростить $\dfrac{\sin x + \sin 2x}{\sin 1{,}5x \cdot \cos 0{,}5x}$.

5. Вычислить значение выражения $4\cos 3x \cdot (\cos 2x - \cos 4x) + 2\cos 7x$ при $x = 12,\ x = \dfrac{\pi}{15}$.

Замечание

Решения *задач 4* и *5* могут быть основаны на применении формул преобразования суммы в произведение и произведения в сумму.

6. Вычислить $\dfrac{\cos 20^\circ}{8} + \left(\sin 30^\circ - \cos^2 40^\circ\right)^2$.

7. Преобразовать выражение

$$\frac{8 \cdot \left(\sin^2 \dfrac{\alpha}{4} - \sin^4 \dfrac{\alpha}{4}\right) - 1}{\operatorname{tg} \dfrac{3\pi}{4} \cdot (1 - \cos\alpha) \cdot \left(\sin \dfrac{5\pi}{2} \cdot \cos\alpha + \cos^4 11\pi\right)} \cdot \sin\alpha$$

к простейшей форме.

Доказать тождества (8—10):

8. $\cos 0^\circ + \cos 2^\circ + \cos 4^\circ + \cos 6^\circ = 4 \cdot \cos 1^\circ \cdot \cos 2^\circ \cdot \cos 3^\circ$.

9. $1 + \dfrac{\cos\beta + \cos(\beta + 2\alpha)}{\sin 2\alpha \cdot \sin\beta} = \operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta$.

10. $\sqrt{\dfrac{1 + \sqrt[6]{3} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{3}}{4} \cdot \sin 20^\circ - \dfrac{1}{8}}}{2}} = \cos 35^\circ$.

Замечание

Каждая из *задач 6—10* требует для своего решения использования сразу нескольких формул разных типов. *Задача 10* является довольно сложной.

11. Показать, что значение выражения

$$\frac{(7+\cos 3^\circ)\cdot\cos 1^\circ 30'}{\sin^6 89^\circ 15' - \sin^6 45'}$$

есть число целое. Указать это целое число в явном виде.

12. Найти наименьшее возможное значение функции $y=\sqrt{3}\cdot\cos x-\sin x$.

Ответы

1. $\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}$. **2.** $\frac{1}{2}(\gamma\neq 12\pi k,\ k\in\mathbb{Z})$. **3.** $\frac{1}{2}\left(\delta\neq\frac{\pi n}{6},\ n\in\mathbb{Z}\right)$.[1] **4.** 2. **5.** 1. **6.** 1/8. **7.** $\operatorname{ctg}\alpha$. **11.** 8. **12.** −2.

Указания

1. Следует воспользоваться основным тригонометрическим тождеством.

2. Применить формулу понижения степени по отношению к $\sin^2\frac{\gamma}{12}$ или формулу двойного аргумента к $\cos\frac{\gamma}{6}$.

3. Преобразовать числитель, имея в виду формулы синуса и косинуса суммы и разности.

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta.$$

Эти формулы иногда называют формулами сложения. (Такое название — ошибочное, т. к. сложению здесь подлежат не функции, а их аргументы. Тем не менее, это название прижилось.) Потребуется также формула синуса двойного угла.

---

[1] Далее в ответах к примерам данного занятия ограничения на переменные не приводятся.

4. Либо сумму в числителе преобразовать в произведение, либо произведение в знаменателе преобразовать в сумму. *Переход "сумма — произведение"* осуществляется в соответствии с формулами, представленными ниже.

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2};$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Для обратного *перехода "произведение — сумма"* требуются формулы:

$$2\cos\alpha\cdot\cos\beta = \cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta);$$

$$2\sin\alpha\cdot\cos\beta = \sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta);$$

$$2\sin\alpha\cdot\sin\beta = \cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta).$$

Эти последние, впрочем, легко могут быть выведены из формул серии "сумма — произведение" и потому (в принципе) запоминания не требуют.

5. Раскрыть скобки и преобразовать полученные произведения в суммы.

6. Выполнить понижение для $\cos^2 40°$. В дальнейшем придется выполнить понижение еще раз.

7. Прежде всего, заменить фрагменты

$$\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4},\ \sin\frac{5\pi}{2},\ \cos^4 11\pi$$

их значениями. Затем в числителе выделить

$$8\sin^2\frac{\alpha}{4}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{4} = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

После этого потребуются преобразования, уже встречавшиеся ранее.

8. В левой части доказываемого тождества перейти от сумм к произведениям, надлежащим образом сгруппировав слагаемые.

9. Выполнить сложение косинусов в числителе дроби. "Развернуть" синус двойного угла в знаменателе. После этого дробь сократится, а ее знаменатель будет совпадать со знаменателем правой части ($\sin\alpha\cdot\sin\beta$). Затем можно избавиться от знаменателей в обеих частях тождества.

10. Данный пример построен на *формуле тройного аргумента*:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha .$$

Можно использовать *формулу понижения* (третьей) *степени*

$$\sin^3\alpha = \frac{3\sin\alpha - \sin 3\alpha}{4}.$$

Сами эти формулы могут быть получены через формулы сложения и двойного аргумента.

11. Принять величину угла $45' = \alpha$ и выразить через это значение другие углы. Затем преобразовать полученное тригонометрическое выражение таким образом, чтобы в нем остались функции лишь одного какого-либо угла, например, α.

12. $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sin\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{1}{2} = \cos\dfrac{\pi}{3}$.

Решения

1. $$\frac{\cos\alpha}{\sin\beta}\cdot\frac{1-\cos\beta}{1+\sin\alpha}\cdot\frac{1+\cos\beta}{1-\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha\cdot\left(1-\cos^2\beta\right)}{\sin\beta\cdot\left(1-\sin^2\alpha\right)} =$$

$$= \frac{\cos\alpha\cdot\sin^2\beta}{\sin\beta\cdot\cos^2\alpha} = \frac{\sin\beta}{\cos\alpha}.$$

2. $$\frac{\sin^2\dfrac{\gamma}{12}}{1-\cos\dfrac{\gamma}{6}} = \left(\frac{1-\cos 2\cdot\dfrac{\gamma}{12}}{2}\right)\bigg/\left(1-\cos\frac{\gamma}{6}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos\dfrac{\gamma}{6}}{1-\cos\dfrac{\gamma}{6}} = \frac{1}{2}.$$

3. $$\frac{(\sin 2\delta\cos\delta + \cos 2\delta\sin\delta)\cdot(\cos 2\delta\cos\delta - \sin 2\delta\sin\delta)}{\sin 6\delta} =$$

$$= \frac{\sin(2\delta+\delta)\cdot\cos(2\delta+\delta)}{2\sin 3\delta\cdot\cos 3\delta} = \frac{\sin 3\delta\cdot\cos 3\delta}{2\sin 3\delta\cdot\cos 3\delta} = \frac{1}{2}.$$

4. $$\frac{\sin x+\sin 2x}{\sin 1{,}5x\cdot\cos 0{,}5x} = \frac{2\sin\cancel{\frac{x+2x}{2}}\cdot\cos\cancel{\frac{x-2x}{2}}}{\cancel{\sin 1{,}5x}\cdot\cancel{\cos 0{,}5x}} = 2.$$

При решении этого примера была учтена четность функции косинус: $\cos(-x)=\cos x$ ($\forall x\in\mathbb{R}$).

5. $4\cos 3x\cdot(\cos 2x-\cos 4x)+2\cos 7x=$

$=2\cdot(2\cos 3x\cdot\cos 2x-2\cos 3x\cdot\cos 4x)+$

$+2\cos 7x = 2\cdot((\cos x+\cos 5x)-(\cos x+\cos 7x))+2\cos 7x=$

$2\cos 5x = 2\underbrace{\cos 60^\circ}_{1/2} = 1.$

6. $\sin 30^\circ-\cos^2 40^\circ = \dfrac{1}{2}-\dfrac{1+\cos 80^\circ}{2} = -\dfrac{\cos 80^\circ}{2}$;

$(\sin 30^\circ-\cos^2 40^\circ)^2 = \dfrac{1}{4}\cdot\cos^2 80^\circ = \dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1+\cos 160^\circ}{2} = \dfrac{1-\cos 20^\circ}{8}$;

$\dfrac{\cos 20^\circ}{8}+(\sin 30^\circ-\cos^2 40^\circ)^2 = \dfrac{\cos 20^\circ}{8}+\dfrac{1-\cos 20^\circ}{8} = \dfrac{1}{8}.$

7. Прежде всего, учтем, что

$$\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}=-1,\ \sin\frac{5\pi}{2}=1,\ \cos^4 11\pi=1.$$

Тогда исходное выражение (обозначим его через A) примет вид

$$A=-\frac{8\cdot\left(\sin^2\frac{\alpha}{4}-\sin^4\frac{\alpha}{4}\right)-1}{(1-\cos\alpha)\cdot(\cos\alpha+1)}\cdot\sin\alpha.$$

Далее, совершая естественные действия в направлении упрощения данного выражения, последовательно получаем:

$$A=-\frac{8\cdot\left(\sin^2\frac{\alpha}{4}-\sin^4\frac{\alpha}{4}\right)-1}{(1-\cos\alpha)\cdot(\cos\alpha+1)}\cdot\sin\alpha = \frac{1-8\sin^2\frac{\alpha}{4}\cdot\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{4}\right)}{(1-\cos\alpha)\cdot(1+\cos\alpha)}\cdot\sin\alpha =$$

$$= \frac{1 - 8\sin^2\frac{\alpha}{4}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{4}}{1-\cos^2\alpha}\cdot\sin\alpha = \frac{1-2\cdot\left(2\sin\frac{\alpha}{4}\cdot\cos\frac{\alpha}{4}\right)^2}{\sin^2\alpha}\cdot\sin\alpha =$$

$$= \frac{1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha.$$

8. $\underbrace{\cos 0^\circ}_{1} + \cos 2^\circ + \cos 4^\circ + \cos 6^\circ = \left(1+\cos 6^\circ\right) + \left(\cos 2^\circ + \cos 4^\circ\right) =$

$= 2\cos^2 3^\circ + 2\cos 3^\circ\cdot\cos 1^\circ = 2\cos 3^\circ\cdot\left(\cos 3^\circ + \cos 1^\circ\right) =$

$= 4\cdot\cos 1^\circ\cdot\cos 2^\circ\cdot\cos 3^\circ.$

9. Начнем с преобразования дроби.

$$\frac{\cos\beta+\cos(\beta+2\alpha)}{\sin 2\alpha\cdot\sin\beta} = \frac{\cancel{2}\cos(\beta+\alpha)\cdot\cancel{\cos\alpha}}{\cancel{2}\sin\alpha\cdot\cancel{\cos\alpha}\cdot\sin\beta} = \frac{\cos(\beta+\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}.$$

Добавляя к этой дроби единицу, имеем

$$1+\frac{\cos(\beta+\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta} = \frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta + \left(\cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha\right)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta} =$$

$$= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\beta} = \operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta.$$

10. Чтобы решение не выглядело слишком громоздким, выполним тождественные преобразования левой и правой частей данного равенства, приведя его таким образом к очевидному:

$$\sqrt{\frac{1+\sqrt[6]{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\sin 20^\circ - \frac{1}{8}}}{2}} = \cos 35^\circ \iff$$

$$\iff \frac{1+\sqrt[6]{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\sin 20^\circ - \frac{1}{8}}}{2} = \cos^2 35^\circ \iff$$

$$\iff \sqrt[6]{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\sin 20^\circ - \frac{1}{8}} = 2\cos^2 35^\circ - 1 \iff$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{\frac{3}{4}\cdot\sin 20^\circ-\frac{\sqrt{3}}{8}}=\cos 70^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{4}\cdot\sin 20^\circ-\frac{\sqrt{3}}{8}=\cos^3 70^\circ \Leftrightarrow \frac{3}{4}\cdot\sin 20^\circ-\frac{\sqrt{3}}{8}=\sin^3 20^\circ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\sin 20^\circ-4\sin^3 20^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(3\cdot 20^\circ\right)=\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(60^\circ\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Последнее равенство является верным. Следовательно, доказываемое тождество имеет место. Конечно, можно было бы предъявить "однолинейное" решение, непосредственно приводящее левую часть тождества к правой. Однако в этом случае решение выглядело бы менее естественно.

11. $$\frac{\left(7+\cos 3^\circ\right)\cdot\cos 1^\circ 30'}{\sin^6 89^\circ 15'-\sin^6 45'}=\frac{\left(7+\cos 4\alpha\right)\cdot\cos 2\alpha}{\sin^6\left(90^\circ-\alpha\right)-\sin^6\alpha}=$$

$$=\frac{\left(7+\left(2\cos^2 2\alpha-1\right)\right)\cos 2\alpha}{\cos^6\alpha-\sin^6\alpha}=$$

$$=\frac{\left(6+2\cos^2 2\alpha\right)\cdot\cos 2\alpha}{\left(\cos^2\alpha\right)^3-\left(\sin^2\alpha\right)^3}=$$

$$=\frac{\left(6+2\cos^2 2\alpha\right)\cdot\cancel{\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)}}{\cancel{\left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)}\cdot\left(\cos^4\alpha+\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\sin^4\alpha\right)}=$$

$$=\frac{6+2\cdot\left(1-2\sin^2\alpha\right)^2}{\underbrace{\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)^2}_{1}-\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{6+2\cdot\left(1-4\sin^2\alpha+4\sin^4 a\right)}{1-\sin^2\alpha\cdot\left(1-\sin^2\alpha\right)}=\frac{8-8\sin^2\alpha+8\sin^4 a}{1-\sin^2\alpha+\sin^4\alpha}=8.$$

Комментарии

1, 2. Связь между синусом и косинусом одного аргумента обеспечивается т. н. *основным тригонометрическим тождеством*:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

Данная формула проста, хотя каждая из функций зависит от другой неоднозначно и отнюдь не линейно. Решение задачи 1 основано на формулах

$$\cos^2\alpha = (1-\sin\alpha)\cdot(1+\sin\alpha),$$

$$\sin^2\alpha = (1-\cos\alpha)\cdot(1+\cos\alpha).$$

Выражения $1\pm\sin\alpha$, $1\pm\cos\alpha$, при перемножении дающие

$$1-\sin^2\alpha = \cos^2\alpha,$$

$$1-\cos^2\alpha = \sin^2\alpha,$$

т. е. квадраты других выражений, сами по себе могут быть представлены в виде квадратов некоторых других функций:

$$1+\cos\alpha = \left(\sqrt{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2;\ 1-\cos\alpha = \left(\sqrt{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

(это почти то же, что формулы понижения);

$$1\pm\sin\alpha = \sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} \pm 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2} = \left(\sin\frac{\alpha}{2}\pm\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2.$$

Такого рода переходы часто бывают полезными при решении тригонометрических уравнений и неравенств. Имея в виду эти соображения, попробуйте вывести формулу тангенса половинного аргумента:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

а также родственные этой формулы (их можно подобрать самостоятельно).

Отметим еще, что косинус двойного аргумента $\cos 2\alpha$ гораздо чаще бывает удобно записать в виде $1-2\sin^2\alpha$ или $2\cos^2\alpha - 1$, а не как $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$. Последнее представление полезно при решении тригонометрических уравнений или неравенств, т. к. имеет алгебраическую структуру разности квадратов и легко раскладывается на множители. Но зато два первых выражают $\cos 2\alpha$ лишь через одну функцию, а не через две.

3. Следует понимать, что если тригонометрическая формула оперирует углами, например, α и 2α, то она будет справедлива и для углов, равных, соответственно, 2α и 4α, $\alpha/2$ и α и т. д. В данном примере синус двойного угла

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

был "развернут" для $\alpha = 2\alpha$.

4. При решении уравнений и неравенств часто приходится переходить от сумм к произведениям, несколько реже — наоборот. В высшей математике преобразование произведения в сумму применяется, например, при вычислении интегралов.

5. Если вместо раскрытия скобок заменить разность $\cos 2x - \cos 4x$ равным ей произведением $2\sin x\cos 3x$, то получится уже произведение трех множителей $\sin x\cdot\cos^2 3x$, которое не очень удобно для дальнейшей обработки.

6. *Формулы понижения*

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2},$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

относятся к разряду очень важных. Полезно их помнить, а не выводить каждый раз заново из формул двойного аргумента.

8. Если приходится упрощать выражение или решать уравнение, содержащее, например, $\sin 5x + \sin 7x + \sin 9x$, то, скорее всего, в первую очередь будет удобнее сложить крайние с концов слагаемые:

$$\sin 5x + \sin 7x + \sin 9x = 2\sin 7x\cos x + \sin 7x = \sin 7x\cdot\left(2\cos x + 1\right).$$

Мы поступили аналогично.

9. До правильного решения (во всяком случае, до первого его шага) гораздо легче додуматься, если иметь в виду часто встречающуюся *формулу "половинного угла"*

$$\left|\cos\frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\,.$$

Эта формула — звено той же цепи, что и двойной аргумент — понижение (см. ранее).

10. При внимательном рассмотрении условия легко догадаться, что значения тригонометрических функций углов $45'$, $1°30'$ и других не могут быть настолько "хорошими", чтобы ответ оказался очевидным. Это значит, что существенными являются лишь связи между величинами входящих в выражение углов, но никак не сами углы. Этим мы и воспользовались, введя переменную. Примеров такого типа великое множество. Более того, это характерно не только для тригонометрии.

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить (1—4):

1. $2\cos^2 15° - 1$.

2. $\left(1 - 2\sin^2\frac{\pi}{8}\right)^2$.

3. $\sin\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{4}$.

4. $\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{8} + \operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}\right)^2$.

Упростить(5—8):

5. $\left(\dfrac{\left(\cos\frac{\alpha}{10} - 1\right)\cdot\left(\cos\frac{\alpha}{10} + 1\right)}{\cos\frac{\alpha}{5} - 1}\right)^{\cos\pi}$.

6. $\dfrac{\sqrt[4]{\cos 2\beta - 4\cos\beta + 3}}{\left|\sin\frac{\beta}{2}\right|}$.

7. $\dfrac{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{12}+\alpha\right)-\cos^2\left(\dfrac{\pi}{12}-\alpha\right)}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$.

8. $\dfrac{3\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^3 x}{1-3\operatorname{tg}^2 x}$.

9. Показать, что значение выражения

$$\left(\frac{\sqrt{3}+2\cos 12^\circ+2\sin 42^\circ}{1+2\cos 78^\circ+2\sin 48^\circ}\right)^2$$

является целым числом. Найти это число.

10. Получить формулу понижения для $\sin^3\alpha$.

11. Показать, что

$$\frac{\cos\alpha}{\sqrt[3]{3\cos\alpha+\cos 3\alpha}}$$

не зависит от α на области определения. Найти значение этого выражения.

Найти наибольшие возможные значения выражений (12—16):

12. $f(x)=\cos x+\cos 2x$.

13. $f(x)=A\cos x+B\sin x$ ($A^2+B^2>0$).

14. $f(x)=\cos x-\cos 2x$.

15. $f(x)=\sin\dfrac{\pi}{x^2+4}$.

16. $f(x)=\cos\dfrac{\pi}{x^2+1}$.

Ответы

1. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **2.** $\dfrac{1}{2}$. **3.** $\dfrac{1}{8}$. **4.** 8. **5.** 2. **6.** $\sqrt[4]{8}$. **7.** −1. **8.** $\operatorname{tg}3x$. **9.** 3. **10.** $\sin^3\alpha=\dfrac{3\sin\alpha-\sin 3\alpha}{4}$. **11.** Значение этого выражения не зависит от α и равно $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$. **12.** 2. **13.** $\sqrt{A^2+B^2}$. **14.** $\dfrac{9}{8}$. **15.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **16.** Не существует.

Занятие 9

Тригонометрические уравнения и неравенства

Простейшие тригонометрические уравнения. Уравнения, сводящиеся путем алгебраических преобразований к простейшим. Уравнения, требующие "существенно тригонометрических" преобразований. Специальные приемы решения уравнений нестандартных типов. Неравенства. Системы. Задачи с параметрами.

Вводные задачи

Решить уравнения (1—17):

1. $\sin x = 1$.

2. $\sin x = \dfrac{\sqrt{10}-1}{2}$.

3. $3\cos x = 2$.

4. $4\cos^2 x - 1 = 0$

5. $(\sin x - 1)\cos x = 0$.

6. $\left(25\sin^2 x - 16\right)\cdot\left(25\cos^2 x - 9\right) = 0$.

7. $\cos\dfrac{8x}{3} + 1 = 0$.

8. $\operatorname{tg} x = \pm 1$.

9. $\operatorname{tg} x \cdot \cos x = 1$.

10. $6\sin^2 x + 10 = 19\sin x$.

11. $4 = 5\cos x + 2\sin^2 x$.

12. $\sqrt{2-\operatorname{tg} x}\cdot \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{4}$.

13. $\sin 19x = -\sin 15x$.

14. $\cos x \cdot \cos 2x = \cos 3x \cdot \cos 4x$.

15. $\cos\left(\pi\sqrt{2x-x^2}\right) = 1$.

16. $\cos(x - \arcsin 0{,}6) = \sin(x - \operatorname{arctg} 0{,}75)$.

17. $\sin x = \cos 2$.

18. Найти решение уравнения $4\cos^2\left(\pi x^2\right) = 1$, ближайшее к точке $x = 1$.

19. Найти значение $\arcsin(\sin 6)$.

Решить неравенства (20, 21):

20. $2\sin^2 x \ge 1$.

21. $(2\cos x - 1)(3\cos x - 1) \le 0$.

Ответы

1. $\left\{\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. **2.** $\varnothing$. **3.** $\left\{\pm\arccos\dfrac{2}{3} + 2\pi l \mid l \in \mathbb{Z}\right\}$.

4. $\left\{\pm\dfrac{\pi}{3} + \pi t \mid t \in \mathbb{Z}\right\}$. **5.** $\left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi n \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$. **6.** $\left\{\pm\arcsin\dfrac{4}{5} + \pi m \mid m \in \mathbb{Z}\right\}$.

7. $\left\{\pm\dfrac{3\pi}{8}(2n-1) \mid n \in \mathbb{N}\right\}$. **8.** $\left\{\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. **9.** $\varnothing$.

10. $(-1)^m \cdot \arcsin(2/3) + \pi m,\ m \in \mathbb{Z}$. **11.** $x = \dfrac{\pi}{3}(6k \pm 1),\ k \in \mathbb{Z}$.

12. $\dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. **13.** $\left\{\dfrac{\pi k}{17};\ \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. **14.** $\left\{\dfrac{\pi k}{3}; \dfrac{\pi m}{4} \mid k,\ m \in \mathbb{Z}\right\}$.

15. $\{0;\ 2\}$. **16.** $\{\operatorname{arctg} 7 + \pi k \mid k \in \mathbb{Z}\}$. **17.** $\left\{2\pi k + \dfrac{\pi}{2} \pm 2 \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. **18.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

19. $6-2\pi$.

20. $\left\{\left[\frac{\pi}{4}+\pi k;\ \frac{3\pi}{4}+\pi k\right] \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

21. $\left\{\left[\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \arccos\frac{1}{3}+2\pi k\right] \mid k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\left[2\pi k-\arccos\frac{1}{3};\ 2\pi k-\frac{\pi}{3}\right] \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Указания

1—8. Уравнения $\sin x = a$ ($|a|<1$), $\cos x = b$ ($|b|<1$), $\operatorname{tg} x = t$ ($t\in\mathbb{R}$) могут быть решены по общим формулам:

$$x=(-1)^k \arcsin a+\pi k,\ k\in\mathbb{Z};$$

$$x=\pm\arccos x+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};$$

$$x=\operatorname{arctg} t+\pi l,\ l\in\mathbb{Z},$$

соответственно. Однако уравнения частного вида $\sin x=\pm1$, $\sin x=0$, $\cos x=\pm1$, $\cos x=0$ и т. п. проще решить, изобразив соответствующие точки на единичной окружности. Например, уравнение $\sin x=0$ имеет решения $x = 0, \pm\pi, \pm2\pi, \ldots$, т. е. $x\in\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}$.

Кроме того, в *задаче 5* множества решений уравнений $\sin x-1=0$ и $\cos x=0$ имеют непустое пересечение. В такого рода случаях использовать модель единичной окружности особенно удобно (обычно требуется, чтобы каждое решение упоминалось в ответе ровно один раз).

9. Учесть область определения.

10. Замена переменной $t=\sin x$ ($|t|\le 1$).

11. $\sin^2 x=1-\cos^2 x$; ввести новую переменную $y=\cos x$ ($|y|\le1$).

12. Замена переменной $p=\operatorname{tg} x$ приводит данное уравнение к простому иррациональному.

13. Следует воспользоваться *формулой суммы синусов*:

$$\sin\alpha\pm\sin\beta=2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}.$$

14. Преобразовать произведение в сумму. Необходима формула

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta).$$

15. Учесть множество значений функции $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$ (оно представляет собой промежуток [0; 1]).

16. "Раскрыть" косинус разности слева и синус разности справа. При этом если

$$\alpha = \arcsin 0{,}6\,,$$

то

$$\alpha \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right);\ \sin\alpha = 0{,}6\,;\ \cos\alpha = +\sqrt{1-\sin^2\alpha} = 0{,}8\,,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0{,}75$$

и т. д.

17. $\cos 2 = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}-2\right).$

18. Найти положительные решения данного уравнения и выбрать из них ближайшее к 1.

19. Необходимо воспользоваться определением функции арксинус:

$$x = \arcsin(\sin 6) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \sin 6, \\ x \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

20. С помощью формулы понижения данное неравенство приводится к простейшему относительно угла $2x$.

21. Нужно применить аналог метода интервалов для тригонометрической окружности. Сначала следует отметить точки на окружности, в которых $\cos x = 1/2$ или $\cos x = 1/3$. Эти точки разбивают всю окружность на несколько дуг, часть из которых будет соответствовать решениям. Затем для отбора нужных дуг можно выбирать по одной точке на каждой дуге и проверять справедливость неравенства для этой точки. При записи ответа необходимо учесть периодичность тригонометрической функции косинус.

Решения

1. На единичной окружности решение представится самой "верхней" точкой. Ей соответствует решение

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

2. $\sqrt{10} > \sqrt{9} = 3$; $\Rightarrow$ $\dfrac{\sqrt{10}-1}{2} > 1$. Следовательно, $\sin x$ не может принимать данное значение ни при каком $x \in \mathbb{R}$. Решений нет.

3. $\cos x = \dfrac{2}{3}$; по общей формуле $x = \pm \arccos x + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

4. $4\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow 4 \cdot \dfrac{1-\cos 2x}{2} = 1 \Leftrightarrow \cos 2x = -\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{3}(3k \pm 1),\ k \in \mathbb{Z}$.

5. $(\sin x - 1)\cdot \cos x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ \cos x = 0 \end{array}\right.$.

Если $\sin x = 1$, то $\cos x = 0$. Поэтому данное уравнение и данная совокупность равносильны уравнению $\cos x = 0$.

6. Приравнивая каждую скобку-множитель к нулю, получим

$$\left[\begin{array}{l} \sin^2 x = \dfrac{16}{25} \\ \cos^2 x = \dfrac{9}{25} \end{array}\right..$$

Так как $\cos^2 x \equiv 1 - \sin^2 x$ ($\forall x \in \mathbb{R}$), то эта совокупность равносильна уравнению

$$\sin^2 x = \frac{16}{25}.$$

Отсюда

$$\sin x = \pm\frac{4}{5},\ x = \pm \arcsin\frac{4}{5} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

7. $\cos\frac{8x}{3}+1=0 \Leftrightarrow \cos\frac{8x}{3}=-1 \Leftrightarrow \frac{8x}{3}=\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{8}(2k+1),\ k\in\mathbb{Z}$.

8. На одном экземпляре единичной окружности ($x\in[-\pi;\pi]$) решениям данного уравнения соответствуют точки $\pm\pi/4$ и диаметрально противоположные им. Поэтому ответ можно записать в форме

$$x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Если же учесть, что точки следуют друг за другом с периодом $\pi/2$, можно записать ответ как

$$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$$

9. $\operatorname{tg}x\cdot\cos x=1 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x}\cdot\cos x=1 \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x=1,\\ \cos x\neq 0.\end{cases}$

Но если $\sin x=1$, то $\cos x=\pm\sqrt{1-\sin^2 x}=0$. Поэтому данная система, а вместе с ней и исходное уравнение, решений не имеют.

10. Полагая $t=\sin x$, имеем квадратное уравнение $6t^2+10=19t$, или $6t^2-19t+10=0$. Его корни:

$$t_1=\frac{2}{3},\ t_2=\frac{5}{2}.$$

При этом лишь первый может быть равен $\sin x$. Отсюда

$$x=(-1)^m\cdot\arcsin\frac{2}{3}+\pi m,\ m\in\mathbb{Z}.$$

11. Если $y=\cos x$, то $\sin^2 x=1-y^2$; уравнение принимает вид $4=5y+2\left(1-y^2\right)$ или $2y^2-5y+2=0$, откуда $y=1/2$. Тогда

$$\cos x=\frac{1}{2};\ x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

12. Пусть $p = \operatorname{tg} x$, тогда $\operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{p}$. Уравнение относительно новой переменной p будет выглядеть так:

$$\sqrt{2-p} \cdot \frac{1}{p} = 1,$$

в котором учтено, что

$$\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4} = \operatorname{tg}\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1.$$

В уравнении можно дважды перейти к следствию, умножая на p и затем возводя обе части уравнения в квадрат: $2 - p = p^2$. Последнее уравнение — квадратное с корнями $p_1 = -2$, $p_2 = 1$. При этом число -2 не удовлетворяет иррациональному уравнению относительно p (оно появилось при возведении в квадрат как постороннее значение). Число $p = 1$ есть корень. Таким образом, исходное уравнение равносильно уравнению $\operatorname{tg} x = 1$, и поэтому

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

13. Запишем уравнение в виде $\sin 19x + \sin 15x = 0$ и перейдем от суммы к произведению:

$$2\sin 17x \cdot \cos 2x = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin 17x = 0, \\ \cos 2x = 0. \end{array}\right.$$

Данные уравнения — простейшие. Имеем

$$\left[\begin{array}{l} 17x = \pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}, \\ 2x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Отсюда и получается ответ.

14. Преобразуем оба произведения к суммам:

$$\frac{1}{2}(\cos x + \cos 3x) = \frac{1}{2}(\cos x + \cos 7x),$$

или $\cos x - \cos 7x = 0$. Отсюда $2\sin 3x \sin 4x = 0$, $\sin 3x = 0$ или $\sin 4x = 0$; $3x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ или $4x = \pi m,\ m \in \mathbb{Z}$.

15. Для функции косинус число 1 — максимально возможное значение, причем достигается это значение "в самой правой" точке единичной окружности: $\cos\varphi = 1 \Leftrightarrow \varphi = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. Следовательно, данное уравнение может иметь в качестве решений лишь такие x, для которых $\sqrt{2x - x^2}$ — четное целое число. Однако данное выражение определено при $x \in [0;\ 2]$ и на границах промежутка обращается в 0. Наибольшее возможное значение для него — это 1 (достигается при $x = 1$). Поэтому $\sqrt{2x - x^2} \in [0;\ 1]$. Таким образом, кроме 0, другие четные целые значения недостижимы.

16. Примем $\arcsin 0,6 = \alpha$, $\operatorname{arctg} 0,75 = \beta$. Тогда α, β — углы первой четверти, причем $\sin\alpha = 0,6$ и $\operatorname{tg}\beta = 0,75$. По ходу решения потребуются и другие функции этих углов. Выражение в левой части уравнения может быть записано в виде (используется *формула косинуса разности*)

$$\cos x \cos\alpha + \sin x \sin\alpha = 0,8\cos x + 0,6\sin x .$$

Здесь учтено, что

$$\cos\alpha = +\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - (0,6)^2} = 0,8 .$$

Выражение в правой части аналогичным образом представимо как

$$\sin x \cos\beta - \cos x \sin\beta = 0,8\sin x - 0,6\cos x .$$

Тогда уравнение примет вид:

$$0,8\cos x + 0,6\sin x = 0,8\sin x - 0,6\cos x ,$$

т. е.

$$\sin x = 7\cos x .$$

Деля обе части на $\cos x$, получаем простейшее уравнение $\operatorname{tg} x = 7$, откуда

$$x = \operatorname{arctg} 7 + \pi k ,\ k \in \mathbb{Z} .$$

17. $\sin x = \cos 2 \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\right) \Leftrightarrow \sin x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\right) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{x - \left(\frac{\pi}{2} - 2\right)}{2}\cos\frac{x + \left(\frac{\pi}{2} - 2\right)}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x - \left(\frac{\pi}{2} - 2\right)}{2} = \pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}, \\ \dfrac{x + \left(\frac{\pi}{2} - 2\right)}{2} = \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}, \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\pi k + \dfrac{\pi}{2} - 2,\ \ k \in \mathbb{Z}, \\ x = 2\pi n + \dfrac{\pi}{2} + 2,\ \ n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

18. Из условия немедленно получаем, что

$$\cos\left(\pi x^2\right) = \pm\frac{1}{2}.$$

Решения уравнения

$$\cos z = \pm\frac{1}{2}$$

суть точки

$$z = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}\ ;\ \ z = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}\,.$$

Так как величина πx^2 в принципе неотрицательна, получим

$$x^2 = 2k \pm \frac{1}{3},\ \ x^2 = 2n \pm \frac{2}{3},$$

где $k, n \in \mathbb{N}$ или

$$x^2 = \frac{1}{3},\ \ x^2 = \frac{2}{3}.$$

Решение, ближайшее к точке 1, — это

$$x = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

19. Пусть $x = \arcsin(\sin 6)$. Это значит, что $\sin x = \sin 6$ и $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (по определению арксинуса). Решая данное уравнение, получаем последовательно

$$\sin x - \sin 6 = 0;$$

$$2\sin\frac{x-6}{2}\cos\frac{x+6}{2} = 0;$$

$$\frac{x-6}{2} = \pi n$$

или

$$\frac{x+6}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k; \;\; k, n \in \mathbb{N}.$$

Получаем две серии решений $x = 2\pi n + 6,\ n \in \mathbb{Z}$; $x = \pi + 2\pi k - 6,\ k \in \mathbb{Z}$. Из этих двух серий в промежуток попадает лишь одно решение $x = 6 - 2\pi$ (из первой серии при $n = -1$). Это и есть искомое значение $\arcsin(\sin 6)$.

20. $2\sin^2 x \ge 1 \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x \le 0 \Leftrightarrow \cos 2x \le 0$. Косинус является отрицательным во второй и третьей четвертях, т. е.

$$2x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Следовательно,

$$x \in \left[\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{3\pi}{4} + \pi k\right], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

21. Решениям соответствуют те дуги, для которых

$$\frac{1}{3} \le \cos x \le \frac{1}{2}.$$

Комментарии

5, 6. В этих задачах достаточно очевидно, что множество решений уравнений, полученных после "раскалывания" исходного уравнения, пересекаются. Менее очевидно это в случае уравнения

$$(5\sin x - 2)(25\cos 2x - 17) = 0 .$$

Тем не менее, если требование однократного упоминания корней в ответе является принципиальным, отслеживать пересечения необходимо. Это важно, например, в том случае, когда требуется указать количество различных решений на каком-либо промежутке.

10—12. В тригонометрии, так же как и в других разделах элементарной математики, метод замены переменной является чрезвычайно важным и полезным.

19. Существует еще, по крайней мере, два способа решения таких задач. Один из них основан на свойствах функции синус (косинус, тангенс и т. д.):

$$\arcsin(\sin 6) = \arcsin\left(\sin(6 - 2\pi)\right) = 6 - 2\pi ;$$

другой использует графические представления: осевые симметрии и периодичность тригонометрических функций.

Задачи для самостоятельного решения

Решить уравнения (1—13):

1. $\sin\dfrac{x}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

2. $\sin\dfrac{5x}{4}\cos\dfrac{5x}{4} + 0,25 = 0$.

3. $\sin 2x \cdot \sin 3x \cdot \sin 6x = 0$.

4. $\left(4\sin^2 x - 1\right)\cdot\left(4\cos^2 x - 3\right) = 0$.

5. $\cos\dfrac{8x}{3} + \cos\dfrac{22x}{3} = 0$.

6. $\cos\left(\sqrt{x} - \dfrac{\pi}{12}\right) - \sin\left(\dfrac{7\pi}{12} - \sqrt{x}\right) = 0$.

7. $\operatorname{ctg} x \cdot \sin x = 1$.

8. $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$.

9. $\sin\dfrac{\pi}{x} = 0$, найти наибольшее решение.

10. $\sqrt{2 - \sin x} + \sqrt{12 - \sin x} = 5$.

11. $\sin 7x + \sin 4x + \sin 10x = 0$.

12. $\cos x \cdot \cos 2x = \cos 3x \cdot \cos 4x$.

13. $\cos(mx) = \cos(nx)$ $(m, n \in \mathbb{N})$.

Ответы

1. $(-1)^n \dfrac{\sqrt{2}\pi}{4} + \pi n\sqrt{2},\ \ n \in \mathbb{Z}$. **2.** $(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{15} + \dfrac{2\pi n}{5},\ \ n \in \mathbb{Z}$. **3.** $\dfrac{\pi k}{5},\ \ k \in \mathbb{Z}$.
4. $\pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$. **5.** $\left\{\dfrac{\pi}{20}(1 + 2n);\ \dfrac{3\pi}{28}(1 + 2k) \mid n, k \in \mathbb{Z}\right\}$. **6.** $x \geq 0$. **7.** $\varnothing$.
8. $\left\{\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n;\ 2\pi k \mid n, k \in \mathbb{Z}\right\}$. **9.** 1. **10.** $(-1)^{n+1}\arcsin\dfrac{1}{4} + \pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$.
11. $\left\{\dfrac{\pi k}{7};\ \pm\dfrac{2\pi}{9} + \dfrac{2\pi n}{3} \mid n, k \in \mathbb{Z}\right\}$. **12.** $\left\{\dfrac{\pi k}{5};\ \dfrac{\pi m}{2} \mid k, m \in \mathbb{Z}\right\}$. **13.** Если $m = n$, то $x \in \mathbb{R}$, если $m \neq n$, то $\left\{\dfrac{2\pi k}{m + n};\ \dfrac{2\pi k}{m - n} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Занятие 10

Показательная функция и логарифм

Логарифм числа. Показательная функция. Логарифмическая функция. Вычисление значений выражений, содержащих логарифмы. Упрощение выражений, содержащих логарифмические функции.

Вводные задачи

Вычислить (1—6):

1. $4^{1,5}$; $\left(\sqrt{2}-1\right)^{-1}$; $9^{18}-27^{12}$.

2. $\lg 1\,000\,000$; $\log_{\sqrt{3}} 243$.

3. $\log_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{18}} \operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{18}$.

4. $\log_{2-\sqrt{3}}\left(2+\sqrt{3}\right)$.

5. $\log_2 3 \cdot \log_3 32$.

6. $5^{\lg 7} : 7^{\lg 5}$.

7. Показать, что функция $F(x)=f(x)\cdot f(2-x)$, где $f(x)=a^x$ $(a>1)$, постоянная. Указать значение этой постоянной.

8. Дана показательная функция

$$y=f(x)=2^x.$$

Проверить, что

$$f(x+y)=f(x)\cdot f(y);$$

$$f(x-y)=\frac{f(x)}{f(y)};$$

$$f(nx)=\left[f(x)\right]^n;$$

$$f(x)\cdot f(-x)=1$$

для всех $x,\ y\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{Z}$.

9. Показать, что если три числа p, q, r в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию с разностью d, то числа a^p, a^q, a^r $(a>1)$ соответственно образуют геометрическую прогрессию. Найти также знаменатель этой прогрессии.

При каких значениях $a\in\mathbb{R}$ уравнения (10, 11) имеют решения:

10. $5^x=a$?

11. $5^x=\dfrac{a^2-3a+2}{a^2-5a+6}$?

12. Показать, что функция

$$f(x)=\log_2\frac{16\sqrt{2}}{x}+\log_2 x$$

является постоянной на области определения. Найти значение этой постоянной.

13. Пусть числа b_1, b_2, ..., b_n (все $b_k>0$, $k=1,\ ...,\ n$) в указанном порядке образуют геометрическую прогрессию со знаменателем q. Показать, что тогда числа $\lg b_1$, $\lg b_2$, ..., $\lg b_n$ образуют арифметическую прогрессию. В ответе указать разность этой прогрессии и ее сумму. Как связаны между собой сумма этой прогрессии и произведение членов исходной геометрической прогрессии? Рассмотреть частный случай $b_1=10^{-3}$, $b_2=0{,}01$, ..., $b_7=1000$.

14. Дана логарифмическая функция $f(x) = \log_a x$ ($a > 1$). Проверить свойства этой функции ($x > 0$, n, $m \in \mathbb{N}$):

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \equiv 0;$$

$$f\left(x^n\right) + f\left(x^m\right) = f\left(x^{m+n}\right);$$

$$f\left(x^n\right) - f\left(x^m\right) = f\left(x^{n-m}\right).$$

При каких значениях a уравнения (15, 16) имеют ровно одно решение:

15. $\log_3 x = a$?

16. $\log_3\left(x^2 + 9\right) = a$?

17. При каких значениях α функция

$$f(x) = \log_{3\alpha - 2\alpha^2} x$$

убывает на всей области определения?

Ответы

1. 8; $\sqrt{2} + 1$; 0. **2.** 6; 10. **3.** –1. **4.** –1. **5.** 5. **6.** 1. **7.** $F(x) \equiv a^2$. **9.** Знаменатель геометрической прогрессии равен a^d. **10.** $a > 0$. **11.** $(-\infty;\ 1) \cup (3;\ +\infty)$. **12.** $f(x) \equiv 4{,}5$ ($x > 0$). **13.** Разность прогрессии $\lg q$; сумма прогрессии $S_n = \dfrac{2\lg b_1 + (n-1)\lg q}{2} \cdot n$; произведение членов геометрической прогрессии $\Pi_n = b_1{}^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}$. В указанном частном случае $S_n = 0$; разность прогрессии 1; $\Pi_n = 1$. **15.** $a \in \mathbb{R}$. **16.** $a = 2$. **17.** $\alpha \in \left(0;\ \dfrac{1}{2}\right) \cup \left(1;\ \dfrac{3}{2}\right)$.

Указания

3. Учесть тождество $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$.

4. $\left(2 + \sqrt{3}\right) \cdot \left(2 - \sqrt{3}\right) = 1$.

5. Воспользоваться формулой перехода к новому основанию

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

или аналогичным тождеством $\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c$.

6. Предварительно найти значение десятичного логарифма указанного выражения.

7. Учесть свойство степеней $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ ($n, m \in \mathbb{R}$).

9. Числа p и q представить в форме $p + d$, $p + 2d$, соответственно (d — разность прогрессии).

10. Принять во внимание множество значений показательной функции.

11. Учесть результат предыдущей задачи.

13. Записать данные в условии числа в виде b_1, $b_1 q$, $b_1 q^2$, ..., $b_1 q^{n-1}$.

15. При всяком $a \in \mathbb{R}$ имеет место равносильность $\log_3 x = a \Leftrightarrow x = 3^a$.

16. Учесть результат предыдущей задачи. Выяснить, когда уравнение $x^2 = b$ имеет единственное решение.

17. Принять $3\alpha - 2\alpha^2 = a$.

Решения

1. $4^{1,5} = 4^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{4}\right)^3 = 8$;

$$\left(\sqrt{2} - 1\right)^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\left(\sqrt{2} - 1\right)\left(\sqrt{2} + 1\right)} = \sqrt{2} + 1;$$

$$9^{18} - 27^{12} = 3^{36} - 3^{36} = 0.$$

2. $\lg 1\,000\,000 = \log_{10} 10^6 = 6$;

$$\log_{\sqrt{3}} 243 = \log_{3^{\frac{1}{2}}} \left(3^5\right) = 5 : \frac{1}{2} = 10.$$

3. $\log_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{18}} \operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{18} = \log_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{18}} \left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{18}\right)^{-1} = -1$.

4. Так как $\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)=1$, то данный логарифм равен

$$\log_{2-\sqrt{3}}\left(2-\sqrt{3}\right)^{-1} = -1.$$

5. $\log_2 3 \cdot \log_3 32 = \log_2 32 = 5$.

6. Если принять $5^{\lg 7} : 7^{\lg 5} = a > 0$, то

$$\lg a = \lg 5^{\lg 7} - \lg 7^{\lg 5} = \lg 7 \cdot \lg 5 - \lg 5 \cdot \lg 7 = 0 \;\Rightarrow\; a = 1.$$

7. $F(x) = a^x \cdot a^{x+(2-x)} = a^2$.

8. $f(x+y) = 2^{x+y} = 2^x \cdot 2^y = f(x)\cdot f(y)$;

$$f(x-y) = 2^{x-y} = 2^x : 2^y = \frac{f(x)}{f(y)};$$

$$f(nx) = 2^{nx} = \left(2^x\right)^n = \left[f(x)\right]^n;$$

$$f(x)\cdot f(-x) = 2^x \cdot 2^{-x} = 2^{x-x} = 2^0 = f(0).$$

9. По условию члены исходной арифметической прогрессии равны p; $p+d$; $p+2d$. Тогда числа a^p; $a^q = a^{p+d}$; $a^r = a^{p+2d}$ действительно образуют геометрическую прогрессию: каждое последующее получается из предыдущего путем умножения на a^d — это и есть знаменатель геометрической прогрессии.

10. Показательная функция $f(x) = 5^x$ ($x \in \mathbb{R}$) принимает все положительные значения, и только такие значения. Уравнение

$$5^x = a,$$

таким образом, разрешимо в вещественных числах при $a \in (0; +\infty)$.

11. Задача сводится к решению рационального неравенства

$$\frac{a^2 - 3a + 2}{a^2 - 5a + 6} > 0.$$

Имеем:

$$\frac{(a-1)(a-2)}{(a-2)(a-3)} > 0;$$

$$\begin{cases} a \neq 2, \\ \dfrac{a-1}{a-3} > 0. \end{cases}$$

Отсюда $a \in (-\infty;\ 1) \cup (3;\ +\infty)$.

12. $f(x) = \log_2\left(\frac{16\sqrt{2}}{x} \cdot x\right) = \log_2 2^{\left(4\frac{1}{2}\right)} = 4{,}5 \ (x > 0)$.

13. Указанные в условии числа b_1, b_2, ..., b_n можно записать в виде b_1, b_1q, b_1q^2, ..., b_1q^{n-1}. Десятичные логарифмы этих чисел $\lg b_1$, $\lg b_1 + \lg q$, $\lg b_1 + 2\lg q$, ..., $\lg b_1 + (n-1)\lg q$ образуют арифметическую прогрессию с первым членом $\lg b_1$ и разностью $\lg q$ (каждое последующее число в этой последовательности получается из предыдущего добавлением фиксированного слагаемого $\lg q$). Сумма арифметической прогрессии из n членов будет равна

$$S_n = \frac{2\lg b_1 + (n-1)\, gq}{2} \cdot n.$$

Произведение членов исходной последовательности

$$\Pi_n = b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n = b_1 \cdot (b_1q) \cdot \left(b_1q^2\right) \cdot \ldots \cdot \left(b_1q^{n-1}\right) = b_1^n \cdot q^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Связь между S_n и Π_n: $S_n = \lg \Pi_n$ (суммирование членов арифметической прогрессии отвечает перемножению членов геометрической прогрессии). В указанном частном случае логарифмы членов исходной арифметической прогрессии равны, соответственно, −3, –2, ..., 3 и образуют арифметическую прогрессию с разностью +1. Произведение членов исходной прогрессии $10^{-3} \cdot 10^{-2} \cdot 10^{-1} \cdot 10^{0} \cdot 10^{1} \cdot 10^{2} \cdot 10^{3} = 1$, его логарифм — число 0 — совпадает с суммой членов арифметической прогрессии $((-3) + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3)$.

14. $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\log_a x+\log_a \frac{1}{x}=\log_a\left(x\cdot\frac{1}{x}\right)=\log_a 1=0$;

$f\left(x^n\right)+f\left(x^m\right)=\log_a x^n+\log_a x^m=$

$=\log_a\left(x^n\cdot x^m\right)=\log_a x^{n+m}=f\left(x^{n+m}\right)$;

$f\left(x^n\right)-f\left(x^m\right)=\log_a x^n-\log_a x^m=$

$=\log_a\left(x^n : x^m\right)=\log_a x^{n-m}=f\left(x^{n-m}\right)$.

15. Функция $f(x)=\log_3 x$ определена на $(0; +\infty)$, возрастает на этом множестве и ровно один раз принимает каждое из вещественных значений a. Указанное уравнение имеет ровно одно решение $x=3^a$ для всякого $a\in\mathbb{R}$.

16. $\log_3\left(x^2+9\right)=a \Leftrightarrow x^2+9=3^a \Leftrightarrow x^2=3^a-9$.

Функция $\varphi(x)=x^2$ принимает все положительные значения по два раза; нулевое значение один раз в нуле и не принимает отрицательных значений. Поэтому условию задачи соответствует возможность $3^a-9=0$, откуда $a=2$.

17. Пусть $3\alpha-2\alpha^2=a$; тогда $f(x)=\log_a x$. Данная функция убывает при $a\in(0; 1)$. Фактически параметр α должен удовлетворять двойному неравенству $0<3\alpha-2\alpha^2<1$. Решением этого неравенства являются два промежутка $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ и $\left(1; \frac{3}{2}\right)$.

Комментарии

5. Формула "перехода к новому основанию"

$$\log_b c=\frac{\log_a c}{\log_a b},$$

возможно, легче запоминается в виде $\log_a b\cdot\log_b c=\log_a c$. Здесь уместна аналогия с правилом сложения векторов: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

6. Полезно запомнить тождество $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$ (x, $y > 0$, a — допустимое основание: $a > 0$, $a \neq 1$).

7, 8. Важнейшее свойство показательной функции состоит в том, что она "из суммы делает произведение":

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y,$$

а "из разности делает частное":

$$a^{x-y} = a^x : a^y.$$

9. То же самое относится, конечно же, и к прогрессиям из n чисел ($n \in \mathbb{N}$).

11. Здесь продемонстрирован подход к решению, связанный с "разделением" переменной и параметра.

13. Описанная в этой задаче ситуация — в некотором смысле, обратная к описанной в *задаче 9*: логарифмы членов положительной геометрической прогрессии образуют арифметическую прогрессию; при этом логарифм произведения членов геометрической прогрессии равен сумме членов арифметической прогрессии.

15, 16. Довольно распространенные типы задач с параметрами: "при каких значениях параметра a уравнение

$$f(x) = a \quad (f(x) = \varphi(a))$$

имеет единственное (хотя бы одно, ровно два и т. д.) решения?" Такие задачи могут быть сведены к исследованию функции $y = f(x)$. Хорошую помощь может оказать график. Функция $f(x) = \log_3 x$ в этом смысле "устроена" очень просто: она принимает все вещественные значения, причем каждое в точности по одному разу. Что касается функции

$$g(x) = \log_3\left(x^2 + 9\right),$$

то здесь на $(-\infty; 0]$ происходит убывание выражения $x^2 + 9$, а вместе с ним и всего логарифма; далее ($x \in [0; +\infty)$) $g(x)$ возрастает. "Наинизшая" точка $g(0) = 2$. Функция $g(x)$ не принимает значений, меньших 2. Значение 2 достижимо лишь в нуле, а каждое из больших значений достигается дважды: на промежутке убывания и на промежутке возрастания ($x_{1,2} = \pm\sqrt{3^y - 9},\ y > 2$). Таким образом, важное отличие данного случая — отсутствие монотонности на (всей) области определения.

17. В этой задаче, как и в некоторых других задачах с параметрами, просматривается идея "сложного параметра". Фактически поведение функции определяется не значением α, а значением $a = 3\alpha - 2\alpha^2$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти $f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$; $f\left(\sin\frac{9\pi}{4}\right)$; $f(0{,}03125)$, если $f(x) = \log_4 x$.

2. Что больше: $f(2)$ или $f(3)$, если $f(x) = \log_{\sqrt{11}-\sqrt{6}} x$?

3. Найти промежутки убывания функции $f(x) = 8\log_{0,3}\left(x^3 + 1\right)$.

4. Десятичные логарифмы чисел $a = 2$, b и $c = 1/32$ образуют арифметическую прогрессию. Найти число b.

5. Упростить выражение

$$F(x) = f(3x)\cdot f(2-x)\cdot f(-2x),$$

если $f(x) = 3^x$.

6. Упростить выражение

$$G(x) = g\left(x^2\right) + g\left(\sqrt{\frac{8}{x}}\right) - g\left(x^{\frac{3}{2}}\right),$$

если $g(x) = \log_2 x$.

7. При каких значениях параметра p уравнение $6^x = 3 - \sqrt{p+1}$ имеет решения?

8. Для каких $b \in \mathbb{R}$ функция

$$f(x) = \log_{\cos b} x$$

убывает на области определения?

9. Для каких $q \in \mathbb{R}$ функция

$$g(x) = \left(\frac{q+1}{2q-1}\right)^x$$

является неубывающей на $\mathbb{R}$?

10. Сколько целых чисел содержит область определения функции

$$\varphi(x) = \log_{5-x^2}\left(x^3 + x + 1\right)?$$

11. Найти функцию $x = x(y)$, обратную к функции

$$y(x) = 4^x + 3 \cdot 2^{x+1} - 5$$

на области определения последней.

12. Найти функцию $x = x(y)$, обратную к функции

$$y(x) = \log_2\left(x^2 - 4x + 9\right)$$

на промежутке $(-\infty; -2]$.

Ответы

1. $-\frac{1}{6}$; $-0{,}25$; $-2{,}5$. **2.** $f(2)$. **3.** $(-\infty; -1)$. (*Указание:* учесть область определения логарифмической функции и монотонность функции $\tilde{f}(x) = x^3 + 1$.) **4.** $b = +1/4$. **5.** $F(x) \equiv 9$. **6.** $G(x) \equiv \frac{3}{2}$. **7.** $p \in [-1; 8)$. **8.** $b \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; 2\pi k\right) \cup \left(2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \cup | k \in \mathbb{Z}$. **9.** $q \in (1/2; 2]$. (*Указание:* показательная функция определена для основания $a > 1$ (или $0 < a < 1$). При $a = 1$ $g(x) = a^x \equiv 1$ ($x \in \mathbb{R}$).) **10.** Два. (*Указание:* по условию $5 - x^2 > 0$, $5 - x^2 \neq 1$. Целые числа, удовлетворяющие данным условиям, суть $\pm 1, 0$. Из этих чисел надо выбрать те, для которых еще справедливо $x^3 + x + 1 > 0$.) **11.** $x(y) = \log_2\left(-3 + \sqrt{14 + y}\right)$. (*Указание:* замена $2^x = t$ ($t > 0$). Выразить t через y, x через t и затем x через y.) **12.** $x(y) = 2 - \sqrt{2^y - 5}$. (*Указание:* выделить полный квадрат в выражении под знаком логарифма. Найти множество значений переменной y. Учесть условие $x \le 2$.)

Занятие 11

Показательные и логарифмические уравнения, неравенства и системы

Задачи, содержащие показательные и логарифмические функции. Стандартные приемы решения показательных логарифмических уравнений, неравенств и систем. Метод интервалов для неравенств. Использование монотонности функций. Простейшие задачи с параметрами.

Вводные задачи

Решить уравнения (1—5):

1. $\log_2(-x) = 5$.

2. $\lg(x+6) + \lg(x+8) = \lg 15$.

3. $\log_3\left(-x^3+8\right) - \log_3(2-x) = \log_3\left(x^2+2x+4\right)$.

4. $\log_{x-1}(x+11) = 2$.

5. $4^{x-1} + 5 \cdot 2^x = 56$.

Решить неравенства (6, 7):

6. $\log_4\left(\dfrac{25}{4} - x^3\right) > -1$.

7. $(x-2)\log_{2x-1}(x+1) \le 0$.

8. Найти все нецелые значения x, y, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} \log_{\sqrt[3]{xy}} 36 = 6, \\ 16^x = 8^y \cdot \sin\dfrac{5\pi}{6}. \end{cases}$$

9. При каких значениях параметра a уравнение

$$\lg\left(x + \frac{8}{x}\right) = a$$

имеет хотя бы одно решение?

Ответы

1. $\{-32\}$. **2.** $\{-3\}$. **3.** $(-\infty;\ 2)$. **4.** $\{5\}$. **5.** $\{3\}$. **6.** $(-\infty;\ \sqrt[3]{6})$. **7.** $(1;\ 2]$. **8.** $x = -\dfrac{9}{4}$, $y = -\dfrac{8}{3}$. **9.** $a \in \left[\dfrac{5}{2}\lg 2;\ +\infty\right)$.

Указания

1. По определению логарифма, $\log_a f(x) = n \iff f(x) = a^n$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $n \in \mathbb{R}$). Область определения можно не учитывать!

2. Использовать *аддитивное свойство логарифма* (сумма логарифмов есть логарифм произведения):

$$\log_a x + \log_a y \stackrel{\frown}{=} \log_a (xy).$$

3. Данное уравнение в действительности является тождеством. Учесть область определения.

4. Следствием исходного уравнения является квадратное уравнение

$$(x-1)^2 = x + 11.$$

5. Выполнить замену переменной $2^{x-1} = t$ (или $2^x = p$).

6. Если $a > 1$, то неравенство $\log_a f(x) > n$ равносильно неравенству $f(x) > a^n$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $n \in \mathbb{R}$). Если $0 < a < 1$, то неравенство $\log_a f(x) > n$ равносильно системе $0 < f(x) = a^n$ (в этом случае приходится учитывать ОДЗ). Похожим образом можно "избавиться от логарифма" в неравенстве $\log_a f(x) < n$ при $a > 1$ и при $0 < a < 1$.

7. Использовать метод интервалов; предварительно найти ОДЗ неравенства.

8. В первом уравнении, воспользовавшись определением логарифма, найти произведение $x \cdot y$; во втором уравнении привести обе части к основанию 2.

9. При каждом $a \in \mathbb{R}$ это уравнение равносильно рациональному уравнению

$$x + \frac{8}{x} = 10^a .$$

Можно найти множество значений функции

$$f(x) = x + \frac{8}{x} .$$

Удобно также перейти к записи

$$\frac{x}{\sqrt{8}} + \frac{\sqrt{8}}{x} = \frac{10^a}{\sqrt{8}} .$$

Тогда в левой части образуется сумма двух взаимно обратных величин. Эта сумма не меньше 2.

Решения

1. По определению логарифма $\log_2(-x) = 5 \Leftrightarrow -x = 2^5 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = -32$.

2. В соответствии с аддитивным свойством логарифма имеем:

$$\lg(x+6) + \lg(x+8) = \lg 15 \Rightarrow \lg((x+6)\cdot(x+8)) = \lg 15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+6)\cdot(x+8) = 15 \Rightarrow x = -11$$

или $x = -3$. Исходному уравнению удовлетворяет только значение $x = -3$.

3. Следствием данного уравнения будет

$$\frac{-x^3+8}{2-x} = x^2+2x+4.$$

Так как имеет место алгебраическое тождество

$$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right),$$

то это уравнение выполняется при всех $x \neq 2$. Значит, задача сводится к поиску ОДЗ исходного уравнения. Имеем систему неравенств

$$-x^3+8>0,\ 2-x>0,\ x^2+2x+4>0.$$

Первые два из этих неравенств имеют одно и то же решение: $x < 2$. Третье выполнено для всех $x \in \mathbb{R}$, т. к. дискриминант квадратного трехчлена x^2+2x+4 $D<0$. Следовательно, исходному уравнению удовлетворяют все значения $x < 2$.

4. ОДЗ данного уравнения задается условиями $x + 11 > 0$, $x - 1 > 0$, $x - 1 \neq 1$, т. е. $x \in (1;\ 2)\cup(2;\ +\infty)$. На ОДЗ уравнение равносильно квадратному

$$(x-1)^2 = x+11.$$

Решения этого квадратного уравнения — числа $x_1=-2$, $x_2=5$. ОДЗ уравнения удовлетворяет только $x = 5$.

5. Уместна замена переменной $2^{x-1}=t$; тогда $2^x=2t$; $4^{x-1}=t^2$. Уравнение относительно новой переменной имеет вид

$$t^2+10t=56;$$

его корни — числа $t_1=4$ и $t_2=-14$. Только одно из них, $t = 4$, может быть значением показательной функции: $2^{x-1}=4$; $x-1=2$; $x = 3$.

6. Основание логарифма $4 > 1$; поэтому неравенство равносильно кубическому

$$\frac{25}{4}-x^3>4^{-1},$$

или $x^3<6$. Отсюда $x<\sqrt[3]{6}$.

7. Это неравенство удобно решать *методом интервалов*. ОДЗ неравенства определяется условиями $2x - 1 > 0$, $2x - 1 \neq 0$, $x + 1 > 0$; данной системе ограничений удовлетворяют $x \in (1/2;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$. Теперь найдем нули функции

$$\varphi(x) = (x - 2) \cdot \log_{2x-1}(x + 1).$$

Так как φ имеет структуру произведения, то нулю должен быть равен хотя бы один из множителей $\varphi_1(x) = x - 2$, $\varphi_2(x) = \log_{2x-1}(x+1)$. Очевидно, $\varphi_1(x) = 0$ при $x = 2$, а $\varphi_2(x) \neq 0$ ни при каком $x \in \mathbb{R}$. Дальнейшее ясно из рис. 11.1 (для определения знаков $\varphi(x)$ достаточно подставить вместо x какое-либо число из каждого промежутка). Полезно помнить о том, что $\log_a b$ положителен, если a и b расположены по одну сторону от 1, и отрицателен, если a и b расположены по разные стороны от 1.

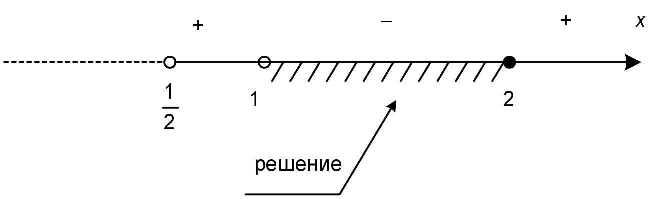

Рис. 11.1. Пунктирной линией изображен промежуток, не входящий в ОДЗ неравенства

8. Из первого уравнения системы получаем

$$\left(\sqrt[3]{xy}\right)^6 = 36\ (xy > 0),$$

откуда $x \cdot y = 6$. Учитывая, что

$$\sin\frac{5\pi}{6} = 2^{-1},$$

запишем второе уравнение в виде $2^{4x} = 2^{3y-1}$. Это равносильно линейной связи между переменными: $4x = 3y - 1$. Решениями системы уравнений $x \cdot y = 6$, $4x = 3y - 1$ являются две пары чисел (2; 3) и (−9/4; −8/3). Так как по условию x и y должны быть нецелыми, в ответе следует записать вторую пару.

9. Имеем равносильность

$$\lg\left(x+\frac{8}{x}\right)=a \Leftrightarrow x+\frac{8}{x}=10^a \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{8}}+\frac{\sqrt{8}}{x}=\frac{10^a}{\sqrt{8}}.$$

Левая часть уравнения представляет собой сумму двух взаимно обратных (положительных) величин. Наименьшее возможное значение такой суммы равно 2; все большие значения также достижимы. Отсюда

$$\frac{10^a}{\sqrt{8}}\ge 2;\ 10^a \ge 2^{\frac{5}{2}};\ a\ge\frac{5}{2}\lg 2.$$

Комментарии

1, 2. Уравнение $\log_a f(x)=n$ ($a>0$, $a\ne 1$, $n\in\mathbb{R}$) для своего решения не требует нахождения ОДЗ. Скажем, если $a = 2$, $f(x)=x^3+x+1$, $n = 0$, имеем уравнение

$$\log_2\left(x^3+x+1\right)=0,$$

равносильное уравнению

$$x^3+x+1=2^0,$$

или

$$x\left(x^2+1\right)=0,$$

откуда $x = 0$. Найти же ОДЗ, определяемую неравенством

$$x^3+x+1>0,$$

непросто (пришлось бы решить кубическое уравнение $x^3+x+1=0$; это уравнение имеет один вещественный корень, являющийся иррациональным числом). Вообще при решении многих логарифмических уравнений достаточно совершать переходы к следствиям, с последующим контролем полученных значений переменной. При решении уравнений, похожих на уравнение 2, не следует забывать, что соединение слагаемых логарифмов в логарифм произведения может привести к "расширению" ОДЗ.

3. Идея данного примера весьма широка: тождество, "замаскированное" под уравнение, может встретиться и в других разделах элементарной математики. Допустим, тригонометрическое "уравнение"

$$\operatorname{arctg}\frac{x}{x+1}=\operatorname{arcctg}\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

на поверку также оказывается тождеством на некотором промежутке. Правда, одной лишь областью определения здесь уже не обойтись: например, числа $x_1=-1/2$ и $x_2=1$ входят в ОДЗ, но лишь одно из них — второе — принадлежит множеству решений:

$$\operatorname{arctg}\frac{x_1}{x_1+1}=\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4};$$

$$\operatorname{arcctg}\left(1+\frac{1}{x_1}\right)=\operatorname{arcctg}(-1)=\frac{3\pi}{4};$$

$$\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_2+1}=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}=\operatorname{arcctg}2=\operatorname{arcctg}\left(1+\frac{1}{x_2}\right).$$

5. В действительности данное уравнение можно решить гораздо проще. Целый корень $x_0=3$ легко угадать; если $x>3$, то левая часть больше 56; если $x<3$, то левая часть меньше 56. Поэтому x_0 — единственный корень. Использование монотонного свойства функций, входящих в уравнение, часто помогает решить уравнение быстрее. Примеры такого рода имеются и в других разделах практикума.

7. Этот, чисто демонстрационный пример показывает удобство и логическую простоту метода интервалов. Заметим, что метод интервалов может быть использован и для решения неравенств более общего вида. Неравенство вида $f(x)<0$ (>0, ≤ 0, ≥ 0) во многих случаях может быть решено по следующей схеме:

- сначала определяется ОДЗ;

- затем находят нули функции f — для этого следует решить уравнение $f(x)=0$;
- наконец, применяется собственно метод интервалов: нули функции разбивают ОДЗ на некоторое количество промежутков, на каждом из которых неравенство проверяется на истинность подстановкой произвольной точки, а далее остается лишь записать ответ.

Конечно, не любое неравенство удобно решать по такой схеме. Неравенство

$$4^x + 4^{-x} \le \frac{2}{x^4+1}$$

для своего решения требует иного подхода (достаточно оценить выражения в обеих частях неравенства).

Задачи для самостоятельного решения

Решить уравнения (1—7):

1. $x^2 + \lg x = x + \lg x + 12$.

2. $\log_{\frac{2}{3}}\left(2-x^5\right) + \log_{\frac{3}{2}}(2-x) = 0$.

3. $\log_{\sqrt{2}} x = 3 \cdot \left(\log_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}} \sqrt{3} + \log_8^2 x \right)$.

4. $\dfrac{\log_8 x}{\log_4 x} = \dfrac{\log_{27} x}{\log_9 x}$.

5. $\sqrt{\log_5 x + 10} = 3\log_5 x - 14$.

6. $9^{x+5} = 8 + 3^{2x+8}$.

7. $25^{2x-8} + 5^{x-3} = 6$.

Решить неравенства (8—11):

8. $0,25 \cdot 6^x + 3 \le 3^x + 3 \cdot 2^{x-2}$.

9. $(x+3)^2 \cdot \lg(2-x) \le 0$.

10. $\log_{\frac{x+1}{x+2}} 5 > 0$.

11. $x-1 > \log_3\left(9^{x-1}-6\right)$.

12. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^{\lg y} = 1, \\ y^{\lg x} = 1. \end{cases}$$

13. Найти все целочисленные пары (x; y), удовлетворяющие уравнению

$$3\log_2 x + \log_2(y-2) = 3 + \log_2 3.$$

14. Найти значения параметра a, при которых уравнение

$$\log_4\left(\frac{x^3}{a} - a^2\right) = 3\cos\frac{\pi a^2}{8}$$

имеет единственное решение.

15. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = -1{,}5, \\ (2{,}25)^{x-4y} = 1{,}5. \end{cases}$$

16. Найти наибольшее решение неравенства $\log_{1-x}\left(3x - x^2\right) \ge 2$.

17. Найти все значения параметра p, при которых неравенство

$$\left(2^{px}-8\right)\cdot\left(4^x-1\right) \le 0$$

имеет ровно семнадцать целых решений.

Ответы

1. $\{4\}$. (*Указание:* учесть ОДЗ.) **2.** $\{\pm 1;\ 0\}$. **3.** $\{8\}$. **4.** $(0;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$. (*Указание:* на области определения данное равенство является тождеством. Упростить выражения в обеих частях уравнения, пользуясь свойствами логарифмов.) **5.** $x = 5^6 = 15\,625$. (*Указание:* выполнить замену переменной

$\sqrt{\log_5 x + 10} = t,\ \ t \geq 0$.) **6.** $\{-4\}$. (*Указание:* привести степени к одному основанию.) **7.** $\{4\}$. (*Указание:* замена переменной $z = 5^{x-4}$, $z > 0$. Кроме того, можно воспользоваться монотонностью функции $f(x) = 25^{2x-8} + 5^{x-3}$.) **8.** $[1;\ 2]$. **9.** $\{-3\} \cup [1;\ 2)$. (*Указание:* воспользоваться методом интервалов.) **10.** $(-\infty;\ -2)$. **11.** $\left(1 + \frac{1}{2}\log_3 6;\ 2\right)$. **12.** $\{(x;\ 1),\ x > 0;\ (1;\ y),\ y > 0\}$, т. е. решениями системы являются любые пары положительных чисел, в которых хотя бы одно число равно единице. **13.** $x_1 = 2$, $y_1 = 5$; $x_2 = 1$, $y_2 = 26$. **14.** $a \in (-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$. (*Указание:* выполняя цепочку *равносильных* преобразований, несложно получить явное однозначное выражение для переменной x.) **15.** $x = 1$, $y = 1/8$. **16.** $x_{\max} = \dfrac{5 - \sqrt{17}}{4}$. **17.** $p \in \left(\dfrac{3}{17};\ \dfrac{3}{16}\right]$.

Занятие 12

Планиметрия. Окружность. Вписанные и описанные многоугольники

Касание окружностей. Правильные многоугольники, периметр и площадь правильного n-угольника.

Вводные задачи

1. Каково расстояние между центрами касающихся окружностей, если их радиусы $R_1 = 1$ и $R_2 = 4$?

2. Найти площадь правильного шестиугольника с длиной стороны $a = \dfrac{\sqrt[4]{12}}{3}$.

3. В окружность вписаны правильные треугольник и шестиугольник таким образом, что некоторые их вершины совпадают. Найти отношение площади треугольника к площади шестиугольника.

4. Около круга описана прямоугольная трапеция с острым углом $60°$. Найти площадь трапеции, если площадь круга

$$S = \left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right)\pi .$$

5. В окружность вписан квадрат с длиной стороны $\sqrt{2}/2$. Еще одна окружность касается данной окружности и двух сторон квадрата. Найти ее радиус.

6. Дана окружность радиусом $R = 1$. Получить выражения для площадей и периметров правильного описанного и правильного вписанного n-угольников. В частности, рассмотреть случаи $n = 3$ (треугольник) и $n = 4$ (квадрат).

7. Окружность радиусом R касается каждой из n окружностей одного радиуса r внешним образом, причем каждая из указанных n окружностей касается двух других (рис. 12.1). Найти зависимость r от R и n. Рассмотреть частные случаи: $n = 3$, $n = 4$, $n = 6$. Как будет вести себя выражение r/R, если $n \to \infty$?

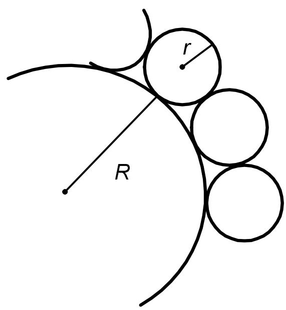

Рис. 12.1. Касающиеся окружности

8. В ромб вписана окружность. Точка касания этой окружности со стороной ромба разбивает сторону на отрезки длиной 18 и 32 см. Найти периметр ромба и его площадь.

Ответы

1. 3 или 5. **2.** 1. **3.** 1:2. **4.** 1. **5.** $\sqrt{2} - 1$. **6.** Вписанный n-угольник: площадь $S = \dfrac{n \cdot R^2}{2} \cdot \sin\dfrac{360°}{n}$; периметр $P = 2nR \cdot \sin\dfrac{180°}{n}$. При $n = 3$: $S = \dfrac{3\sqrt{3}}{4} \cdot R^2$, $P = 3\sqrt{3} \cdot R$; при $n = 4$: $S = 2R^2$, $P = 4\sqrt{2} \cdot R$. Описанный n-угольник: площадь $S = \dfrac{n \cdot R^2}{2} \cdot \mathrm{tg}\dfrac{180°}{n}$; периметр $P = 2nR \cdot \mathrm{tg}\dfrac{180°}{n}$. При $n = 3$: $S = 3\sqrt{3} \cdot R^2$, $P = 6\sqrt{3} \cdot R$; при $n = 4$:

$S = 4R^2$, $P = 8R$. **7.** $r = \dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{1-\sin\frac{\pi}{n}} \cdot R$, или $r = \dfrac{R}{\operatorname{cosec}\frac{\pi}{n} - 1}$. Частные случаи: при $n = 3$: $r = \left(2\sqrt{3}+3\right)R \approx 6{,}5R$; при $n = 4$: $r = \left(\sqrt{2}+1\right)R$; при $n = 6$: $r = R$ ("соты"). Если $n \to \infty$, то $\dfrac{r}{R} \to 0$. **8.** $P = 2$ м; $S = 24$ дм^2.

Указания

1. Касание окружностей может осуществляться как внешним, так и внутренним образом.
2. Провести большие диагонали; они разобьют шестиугольник на шесть правильных треугольников.
3. Из условия следует, что все вершины треугольника совпадают с вершинами шестиугольника, взятыми через одну.
4. Выразить площадь круга и площадь трапеции через радиус окружности R.
5. Точка касания окружностей совпадает с одной из вершин квадрата. Эта точка, противоположная вершина квадрата и центры обеих окружностей принадлежат одной прямой.
6. Провести радиальные лучи к вершинам многоугольников и к серединам их сторон. Рассмотреть образовавшиеся треугольники.
7. Рассмотреть треугольники, сложенные из радиусов.

Решения

1. На рис. 12.2 изображены два возможных случая. В первом случае (слева) искомое расстояние $d = R_1 + R_2 = 1 + 4 = 5$, во втором (справа) $d = R_2 - R_1 = 4 - 1 = 3$.

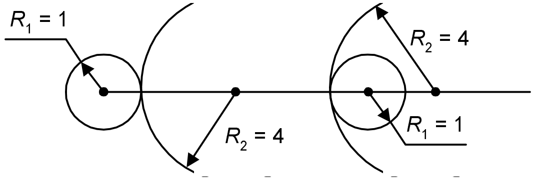

Рис. 12.2. Два варианта касающихся окружностей

2. В шестиугольнике $ABCDEF$ диагонали AD, BE, CF пересекаются в одной точке M (т. к. он правильный). При этом

$$\angle AMB = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ;$$

$\angle MAB$ и $\angle MBA$ имеют такую же величину. Треугольник AMB — равносторонний. Его площадь можно определить по общей формуле

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{\sqrt[4]{12}}{4}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{6};$$

но тогда $S_{ABCDEF} = 6 \cdot S_{ABM} = 1$ (рис. 12.3).

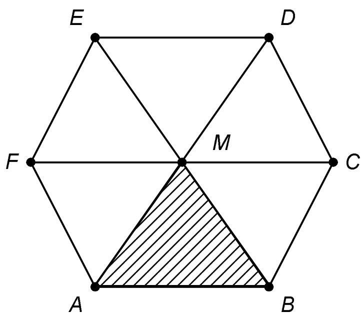

Рис. 12.3. Шестиугольник *ABCDEF*

3. По рис. 12.4 несложно заключить, что

$$S_{OA_1A_2} = S_{B_1A_1A_2},$$

т. е.

$$S_{OA_1A_2} = \frac{1}{2} S_{OA_1B_1A_2},$$

но

$$S_{A_1A_2A_3} = S_{OA_1A_2} + S_{OA_2A_3} + S_{OA_3A_1};$$

$$S_{A_1B_1A_2B_2A_3B_3} = S_{OA_1B_1A_2} + S_{OA_2B_2A_3} + S_{OA_3B_3A_1}.$$

Очевидно,

$$S_{A_1A_2A_3} = \frac{1}{2} S_{A_1B_1A_2B_2A_3B_3}.$$

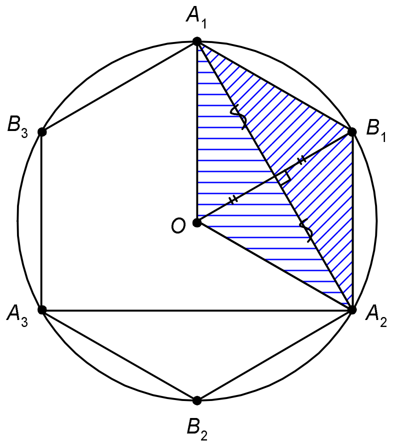

Рис. 12.4. Треугольник и шестиугольник, вписанные в окружность

4. Чертеж к данной задаче представлен на рис. 12.5. Здесь $\angle A$ и $\angle D$ — прямые углы трапеции, $\angle B = 60°$, $\angle C = 180° - \angle B = 120°$, H_1 и H_3 — точки касания окружности с основаниями.

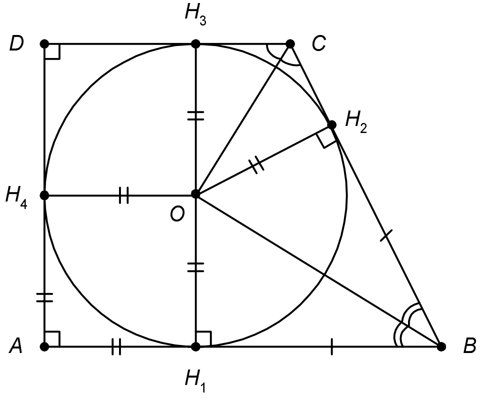

Рис. 12.5. Круг и описанная прямоугольная трапеция

При этом $OH_1 \perp AB$ и $OH_3 \perp CD$ (радиус перпендикулярен касательной). Отсюда легко следует, что точки O, H_1 и H_3

лежат на одной прямой, перпендикулярной к обоим основаниям трапеции.

$$\angle OBH_1 = \frac{1}{2}\angle H_1BH_2 = 30^\circ ,$$

аналогично

$$\angle OCH_3 = \frac{1}{2}\angle H_2CH_3 = 60^\circ$$

(луч BO, соединяющий вершину угла с центром вписанной в этот угол окружности, делит $\angle H_1BH_2$ пополам). Несложно доказать, что $AH_1 = DH_3 = R$. Имея в виду указанные обстоятельства, получим выражение для площади трапеции:

$$S_{\text{тр}} = \frac{AB + CD}{2}\cdot H_1H_3 = \frac{\left(R + R\sqrt{3}\right) + \left(R + \frac{1}{\sqrt{3}}R\right)}{2}\cdot 2R =$$

$$= \left(2 + \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)R^2 = \frac{2\sqrt{3} + 4}{\sqrt{3}}R^2 .$$

При этом площадь круга

$$S_{\text{кр}} = \pi R^2 = \left(\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right)\pi ,$$

откуда

$$R^2 = \frac{2\sqrt{3} - 3}{2} .$$

Подставляя это значение R^2 в выражение для площади трапеции, получаем

$$S_{\text{тр}} = \frac{6 + 3\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{2\sqrt{3} - 3}{2} = 1 .$$

5. Чертеж представлен на рис. 12.6. Отрезок BD — диагональ квадрата — является диаметром окружности ($\angle BAD$ (прямой) опирается на диаметр). Докажем, что точка K (центр второй окружности) также расположена на BD. Отрезки KM и KN — радиусы, проведенные к точкам касания со сторонами квадрата — перпендикулярны этим сторонам (соответственно

$KM \perp AD$ и $KN \perp CD$). Треугольники KMD и KND равны как прямоугольные с общей гипотенузой KD и парой равных катетов $KM = KN$ (два радиуса одной окружности). Но тогда DK — биссектриса $\angle ADC$. Однако тем же свойством обладает BD — диагональ квадрата. Стало быть, точки D, K, B действительно принадлежат одной прямой. Если обозначить искомый радиус $KB = \rho$, то, очевидно,

$$KN = \rho; \quad DK = \rho\sqrt{2}.$$

При этом

$$DB = AB \cdot \sqrt{2} = 1 \Rightarrow 1 = DK + KB = \rho\sqrt{2} + \rho \Rightarrow \rho = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1.$$

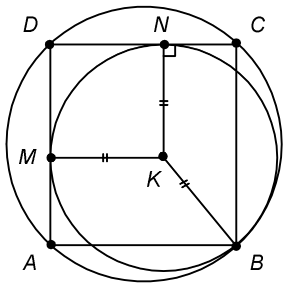

Рис. 12.6. Окружность и вписанный в нее квадрат

6. Пусть правильный многоугольник $A_1A_2...A_n$ — вписанный (рис. 12.7). Угол

$$\alpha = \angle A_1OA_2 = \angle A_2OA_3 = ... = \frac{360^\circ}{n},$$

где n — число вершин многоугольника. Площадь треугольника A_1OA_2 равна

$$S_1 = \frac{1}{2}R^2 \cdot \sin\alpha = \frac{R^2}{2} \cdot \sin\frac{360^\circ}{n}.$$

Очевидно, площадь n-угольника

$$S = \frac{nR^2}{2} \cdot \sin\frac{360^\circ}{n}.$$

В частности, для треугольника

$$S = \frac{3R^2}{2} \cdot \sin 120^\circ = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4},$$

для квадрата ($n = 4$) $S = 2R^2$. Для нахождения периметра следует рассмотреть треугольник A_1OA_2 (рис. 12.8).

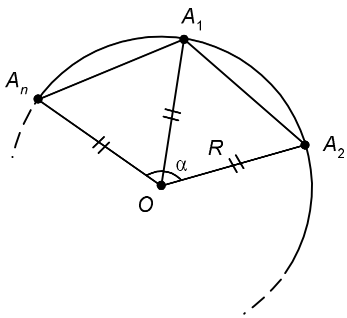

Рис. 12.7. Многоугольник $A_1A_2...A_n$

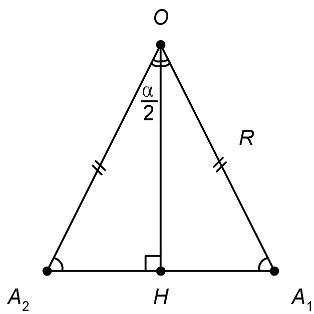

Рис. 12.8. Треугольник A_1OA_2

Пусть OH — высота этого треугольника (как известно, в равнобедренном треугольнике она является еще медианой и биссектрисой). Имеем:

$$AH_1 = OA_1 \cdot \sin\angle A_1OH = R \cdot \sin\frac{\alpha}{2};$$

тогда

$$A_1A_2 = 2R \cdot \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Следовательно, периметр нашего n-угольника

$$P = 2nR \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = 2nR \cdot \sin\frac{180°}{n}.$$

В частности, для треугольника

$$P = 6R \cdot \sin 60° = 3\sqrt{3}R;$$

для квадрата

$$P = 4\sqrt{2}R.$$

Пусть теперь правильный многоугольник $B_1B_2...B_n$ — описанный (рис. 12.9).

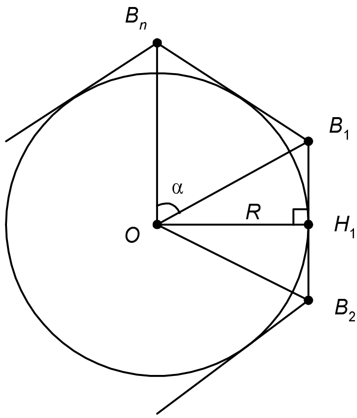

Рис. 12.9. Описанный многоугольник $B_1B_2...B_n$

Опуская подробности обоснований, запишем лишь необходимые количественные соотношения (обозначения ясны из чертежа):

$$OH_1 = R;$$

$$B_1H_1 = R\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2};$$

$$S_{B_1OB_2} = B_1H_1 \cdot OH_1 = R^2 \cdot \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = R^2 \cdot \mathrm{tg}\frac{180°}{2}.$$

В частности, для треугольника

$$S = 3R^2 \cdot \mathrm{tg}\,60° = 3\sqrt{3}R^2,$$

для квадрата

$$S = 4R^2.$$

Периметр:

$$P = n \cdot B_1B_2 = 2n \cdot B_1H_1 = 2nR \cdot \mathrm{tg}\frac{180°}{n}.$$

В частности, для треугольника

$$P = 6R \cdot \mathrm{tg}\,60° = 6\sqrt{3} \cdot R;$$

для квадрата

$$P = 8R.$$

Отметим, что проверка полученных результатов для $n = 3$ и $n = 4$ легко осуществима напрямую, через рассмотрение соответствующих вписанных или описанных треугольников (квадратов).

7. Чертеж приведен на рис. 12.10. Из треугольника OA_1B_1 $(\angle B_1 = 90°)$ имеем

$$\frac{A_1B_1}{OA_1} = \mathrm{tg}\,\angle A_1OB_1,$$

или, аналогично,

$$\frac{r}{R+r} = \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Поэтому

$$r = (R+r)\sin\frac{\alpha}{2};$$

$$r\left(1 - \sin\frac{\alpha}{2}\right) = R \cdot \sin\frac{\alpha}{2};$$

$$r = \frac{\sin\frac{180°}{n}}{1 - \sin\frac{180°}{n}} \cdot R = \frac{R}{\mathrm{cosec}\sin\frac{180°}{n} - 1}.$$

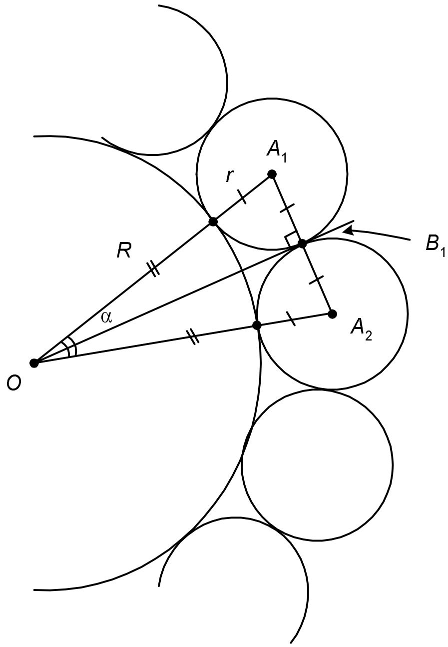

Рис. 12.10. Касающиеся окружности (общий случай)

(Напомним, что $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}$). В частности, для $n = 3$:

$$r = \frac{R}{\frac{2}{\sqrt{3}} - 1} = \frac{r\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \left(2\sqrt{3} + 3\right) R,$$

число в скобках достаточно велико ($\approx 6{,}5$), радиус r значительно превосходит R (рис. 12.11).

В случае $n = 4$, $r = \dfrac{R}{\sqrt{2} - 1} = \left(\sqrt{2} + 1\right) R \approx 2{,}4R$ (рис. 12.12).

При $n = 6$ уже $r = R$ (рис. 12.13), а для больших n будет $r < R$.

Если $n \to \infty$, то угол $\alpha = \dfrac{180^\circ}{n} \to 0$, $\sin\alpha \to 0$, $\dfrac{r}{R} \to 0$.

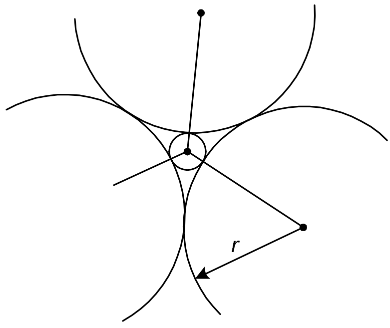

Рис. 12.11. Касающиеся окружности (n = 3)

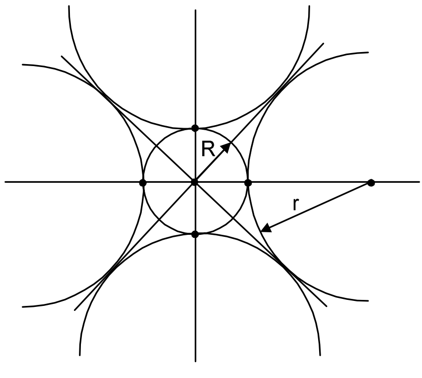

Рис. 12.12. Касающиеся окружности (n = 4)

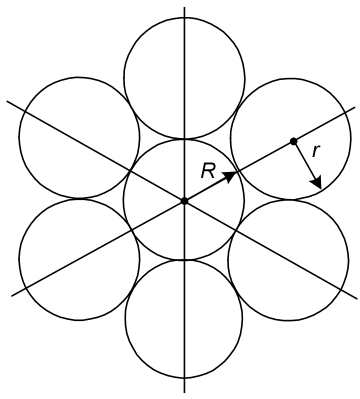

Рис. 12.13. Касающиеся окружности (n = 6)

8. Чертеж приведен на рис. 12.14. $ABCD$ — ромб, MH — радиус к точке касания. В прямоугольном треугольнике AMB MH — высота, проведенная к гипотенузе — равна $R = \sqrt{AH \cdot BH} = \sqrt{18 \cdot 32} = 24$ (см).

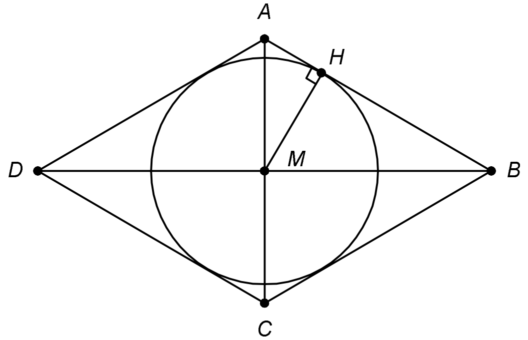

Рис. 12.14. Ромб и вписанная окружность

Очевидно,

$$MB = \sqrt{MH^2 + BH^2} = \sqrt{24^2 + 32^2} = 40 \text{ (см)};$$

$$MA = \sqrt{MA^2 + AH^2} = 30 \text{ (см)}.$$

Площадь ромба

$$S = 4S_{AMB} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot MA \cdot MB = 2 \cdot 30 \cdot 40 = 2400 \text{ (см}^2\text{)} = 24 \text{ (дм}^2\text{)}.$$

Периметр ромба $P = 4 \cdot \left(AH + BH\right) = 200$ (см), или 2 м.

Комментарии

1. Если в условии задачи не уточняется, каким образом касаются окружности (внешним или внутренним), следует рассмотреть обе возможности.

6. Интересно изучить поведение полученных выражений при $n \to \infty$. Однако здесь мы встречаемся с аналитическими трудностями, которые невозможно преодолеть в рамках стандартной школьной программы. В высшей математике доказывается, что при $t \to 0$ выражение $\dfrac{\sin t}{t}$ стремится к 1 (т. н. *первый замечательный предел*). Геометрический смысл этого утверждения прозрачен: малый центральный угол окружности вырезает дугу, по длине близкую к хорде. С учетом этого факта легко проанализировать, например, поведение выражения

$$S = \frac{nR^2}{2} \cdot \sin\frac{2\pi}{n},$$

соответствующего площади правильного вписанного n-угольника: если $n \to \infty$, то $(2\pi / n) \to 0$; поэтому

$$S = \frac{\sin\dfrac{2\pi}{n}}{\left(\dfrac{2\pi}{n}\right)} \cdot \pi R^2 \to \pi R^2.$$

Последнее выражение соответствует площади круга, что совершенно естественно: при "больших" n граница правильного вписанного n-угольника "сливается" с окружностью. Нетрудно убедиться, что при том же предельном процессе площадь описанного n-угольника также стремится к πR^2. Периметры вписанного и описанного n-угольников будут приближаться к $C = 2\pi R$ (длина окружности).

Задачи для самостоятельного решения

1. Три окружности радиусом $\rho = 1$ каждая касаются попарно. Найти радиус окружности, касающейся всех трех.

2. Боковые стороны равнобедренного треугольника имеют длину $a = 4$. Известен радиус окружности, описанной около этого треугольника, также равный 4. Найти периметр треугольника.

3. Катеты прямоугольного треугольника $BC = 4a$, $AC = 3a$. При каком значении параметра a расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей будет равно $\sqrt{5}$?

4. В ромб $ABCD$ с диагоналями $AC = 8$, $BD = 6$ вписана окружность, касающаяся сторон AB, BC, AD в точках P, Q, S, соответственно. Найти радиус круга, вписанного в треугольник PQS.

Ответы

1. $r = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) \cdot \rho \approx 0{,}155 \cdot \rho$ или $r = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right) \cdot \rho \approx 2{,}155 \cdot \rho$. **2.** $8 + 4\sqrt{3}$.
3. $a = 2$. **4.** 0,96.

Занятие 13

Задачи с параметрами

Задача с параметром как обобщение задачи без параметра. Простейшие задачи с параметрами, решаемые перебором значений параметра. Некоторые классы задач с параметрами, допускающие алгоритмическое решение. Функционально-графические подходы к решению сложных задач с параметрами.

Вводные задачи

Решить уравнения (1—5) при каждом значении параметра a:

1. $2x + 3 - 2a = 0$.

2. $ax - 1 = 0$.

3. $x^2 = 4 - a$.

4. $ax^2 - 3x + 2 = 0$.

5. $\dfrac{(x-a)\cdot(x-2a)}{x+3a} = 0$.

Решить неравенства (6—8) при каждом значении параметра a:

6. $2(x - 2a) \le 3(2x + a)$.

7. $ax^2 > -4$.

8. $\dfrac{(x-a)\cdot(x-2a)}{x+3a} \le 0$.

9. При каких значениях параметра a уравнение $ax^2 - x = 1$ имеет ровно одно решение?

10. Найти все значения a, при которых множество решений уравнения

$$x^2 = 1 - 2^{1-3a}$$

пусто.

11. При каких значениях параметра a наименьшим положительным решением неравенства $|x - a| \le x^2$ является $x_0 = 1/2$?

Ответы

1. При любом a существует единственное решение $x = a - 3/2$. **2.** Если $a = 0$, $\varnothing$; иначе $x \in \{1/a\}$. **3.** $\{\pm\sqrt{4-a}\}$, $a < 4$; $\{0\}$, $a = 4$; $\varnothing$, $a > 4$. **4.** $\left\{\frac{3 \pm \sqrt{9-8a}}{2a}\right\}$, $a < 0$; $\{2/3\}$, $a = 0$; $\left\{\frac{3 \pm \sqrt{9-8a}}{2a}\right\}$, $0 < a < 9/8$; $\{4/3\}$, $a = 9/8$; $\varnothing$, $a > 9/8$. **5.** $\varnothing$, $a = 0$; $\{a; 2a\}$, $a \ne 0$. **6.** $\left[-\frac{7}{4}a; +\infty\right)$. **7.** $\left(-\sqrt{-\frac{4}{a}}; \sqrt{-\frac{4}{a}}\right)$, $a < 0$; $\mathbb{R}$, $a \ge 0$. **8.** $(-\infty; 2a] \cup [a; -3a)$, $a < 0$; $(-\infty; 0)$, $a = 0$; $(-\infty; -3a) \cup [a; 2a]$, $a > 0$. **9.** $a \in \left\{-\frac{1}{4}; 0\right\}$. **10.** $a < \frac{1}{3}$. **11.** $a = \frac{3}{4}$.

Указания

1. Решить как обычное линейное уравнение, выразив x через a.

2. Особый случай $a = 0$ рассмотреть непосредственной подстановкой; в других случаях выразить x через a.

3. Особый случай соответствует равенству нулю правой части уравнения.

4. Особый случай 1: $a = 0$ (уравнение не является квадратным). Особый случай 2: дискриминант квадратного уравнения $D = 0$ при $a \ne 0$.

5. Особый случай $a = 0$ соответствует слиянию нулей числителя и знаменателя. Рассмотреть также возможности $a > 0$, $a < 0$.

6. Решить как обычное линейное уравнение, оставив в левой части только переменную x.

7. Особый случай: $a = 0$. При $a < 0$ или $a > 0$ можно делить на параметр.

8. Особый случай: $a = 0$. При $a < 0$ или $a > 0$ решить неравенство методом интервалов.

9. Некоторое уравнение является линейным при $a = 0$ и квадратным при $a \neq 0$. Вспомните, сколько решений и при каких условиях имеют такие уравнения.

10. Возможна замена параметра $\alpha = 1 - 2^{-3a+1}$.

11. Прямое решение через "раскрытие" модуля и перебор вариантов весьма громоздко; удобен графический подход к решению. Следует построить в плоскости $(x; a)$ кривую $|x-a| = x^2$ и области, в которых $|x-a| \le x^2$. Для выяснения вида множества решений при различных a провести горизонтальные прямые на (переменном) уровне a.

Решения

1. При любом $a \in \mathbb{R}$ имеем $2x+3-2a=0 \Leftrightarrow 2x=2a-3 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = a - \dfrac{3}{2}$.

2. Если $a = 0$, получаем уравнение $0 \cdot x - 1 = 0$, или $-1 = 0$. Это уравнение не имеет решений. При всех $a \neq 0$

$$ax - 1 = 0 \Leftrightarrow ax = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{a}.$$

3. Если $a < 4$, то выражение $4 - a$ положительно, и тогда $x = \pm\sqrt{4-a}$; если $a = 4$, уравнение имеет вид $x^2 = 4-4$, или $x^2 = 0$, откуда $x = 0$. Если же $a > 4$, то в правой части уравнения стоит отрицательное выражение, недопустимое для значений $x^2 \ge 0$. В этом случае уравнение не имеет решений.

4. При $a = 0$ уравнение записывается в виде $-3x+2=0$, т. е. фактически является линейным. Решая это линейное уравнение, получаем

$$x = 2/3.$$

Если $a \neq 0$, то мы имеем квадратное уравнение, количество решений которого зависит от дискриминанта $D = 9 - 8a$.

Дискриминант равен нулю при $a = 9/8$; в этом случае существует единственное решение

$$x_0 = \frac{3}{2a} = \frac{4}{3}.$$

Если $a < 9/8$ (но $a \neq 0$), то $D > 0$, и имеем два решения

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8a}}{2a}.$$

Если $a > \frac{9}{8}$, то $D < 0$, и решений нет.

5. Если $a = 0$, то уравнение приводится к виду

$$\frac{x^2}{x} = 0,$$

т. е. $x \in \varnothing$. Если $a \neq 0$, то числитель равен нулю при $x = a$ и $x = 2a$, а знаменатель при $x = -3a$. Все эти числа различны. Поэтому решений два: $x = a$, $x = 2a$.

6. Раскрывая скобки и приводя подобные члены, придем к более простому неравенству

$$4x \geq -7a, \text{ или } x \geq -\frac{7}{4}a.$$

Таким образом, при всех $a \in \mathbb{R}$ множество решений неравенства суть промежуток $\left[-\frac{7}{4}a; +\infty\right)$.

7. Если $a = 0$, получаем тривиальное неравенство $0 > -4$, справедливое независимо от значения x. Если $a > 0$, неравенство равносильно такому:

$$x^2 > -\frac{4}{a}.$$

Поскольку $x^2 \geq 0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$,

$$\text{а} -\frac{4}{a} < 0$$

при таких a, то любое значение x есть решение. Если же $a < 0$, то и в этом случае возможно деление на параметр, однако в силу его отрицательности знак неравенства следует изменить на противоположный:

$$x^2 < -\frac{4}{a}.$$

Теперь в правой части положительное выражение; решения образуют промежуток:

$$-\sqrt{-\frac{4}{a}} < x < +\sqrt{-\frac{4}{a}}.$$

8. При $a = 0$ неравенство выглядит особенно просто:

$$\frac{x^2}{x} \le 0.$$

Его решениями будут все отрицательные значения x, и только они. Если $a > 0$, то корни числителя $x_1 = a$ и $x_2 = 2a$, а корень знаменателя $x_0 = -3a$. Далее можно воспользоваться обычным методом интервалов (рис. 13.1). Аналогично изучается случай $a < 0$, однако теперь $2a < a < -3a$, и порядок особенных точек на числовой прямой инвертируется (рис. 13.2).

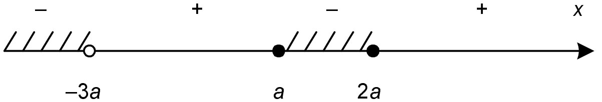

Рис. 13.1. $a > 0$

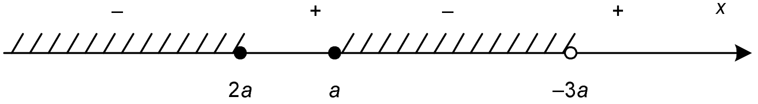

Рис. 13.2. $a < 0$

9. Задача имеет два решения.

Первое решение. Если $a = 0$, уравнение имеет вид $0 \cdot x^2 - x = 1$, и его единственное решение $x = -1$. Стало быть, нулевое значение параметра — одно из требуемых. Если $a \neq 0$, то уравнение является квадратным с дискриминантом

$D = 1 + 4a$. Для удовлетворения условия существования в точности одного решения необходимо и достаточно, чтобы $D = 0$, откуда $a = -1/4$.

Второе решение. Так как число $x_0 = 0$ ни при каком a не является корнем уравнения (не может быть, чтобы $a \cdot 0^2 - 0 = 1$), то исходное уравнение равносильно следующему:

$$a = \frac{x+1}{x^2}.$$

Пусть

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2}.$$

Задачу можно теперь переформулировать так: найти все возможные числовые значения, достигаемые функцией $y = f(x)$ лишь один раз. Далее можно построить график функции $y = f(x)$; остальное ясно из рис. 13.3.

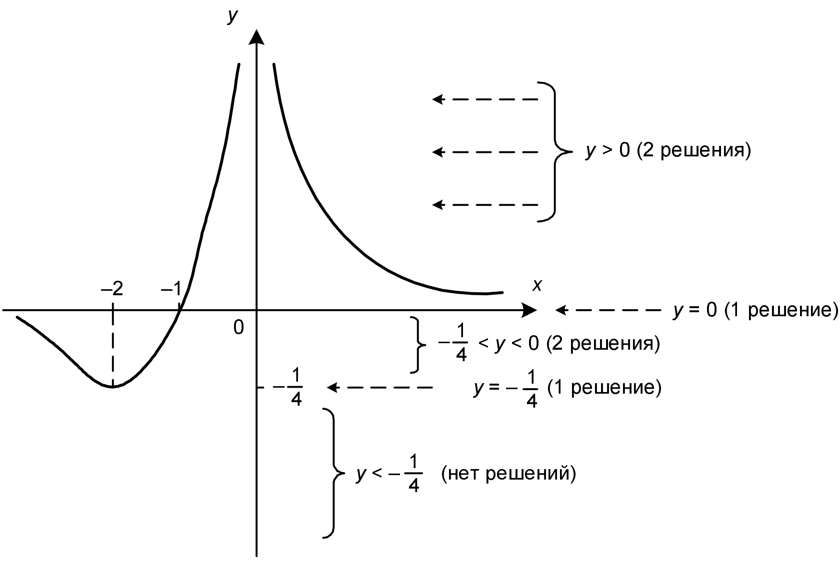

Рис. 13.3. График функции $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2}$

10. Пусть $\alpha = 1 - 2^{-3a+1}$; очевидно, что уравнение $x^2 = \alpha$ не имеет решений тогда и только тогда, когда $\alpha < 0$. Задача свелась к решению неравенства $1 - 2^{-3a+1} < 0$. Последовательно имеем

$$2^{-3a+1} > 1;$$

$$-3a + 1 > 0;$$

$$a < \frac{1}{3}.$$

11. Приведем пример "графического" решения (такое решение может быть сравнительно просто переведено на обычный аналитический язык). Необходимо построить в плоскости (x; a) множество точек, для которых $|x - a| = x^2$. Эта кривая будет границей фигуры, для точек которой выполняется $|x - a| \le x^2$. Имеем два случая:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \ge x & (1.1) \\ a = x^2 + x, & (1.2) \end{cases} \\ \begin{cases} a < x & (1.1) \\ a = x - x^2. & (1.4) \end{cases} \end{array}\right.$$

Строим параболу (1.2) и выделяем часть ее, принадлежащую полуплоскости (1.1), рис. 13.4.

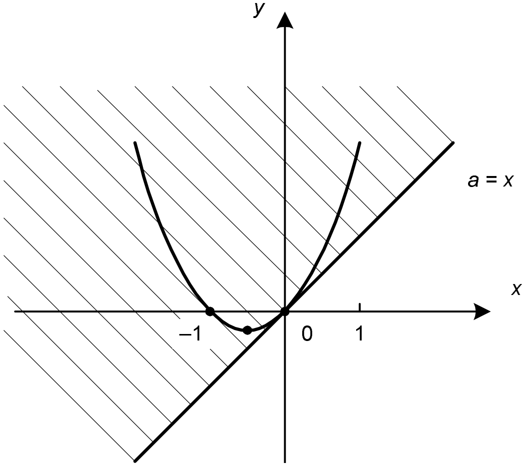

Рис. 13.4. Графики функций $a = x^2 + x$ и $a = x$

В данном случае "частью" окажется вся парабола целиком (конечно, это не всегда так). В начале координат парабола $a = x^2 + x$ и прямая $a = x$ касаются (убедитесь в этом самостоятельно).

Аналогично в полуплоскости $a < x$ строим принадлежащую ей часть параболы (1.4), рис. 13.5.

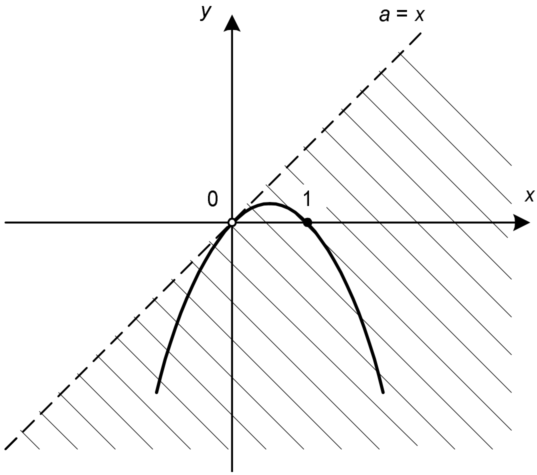

Рис. 13.5. Графики функций $a = x^2 - x$ и $a = x$

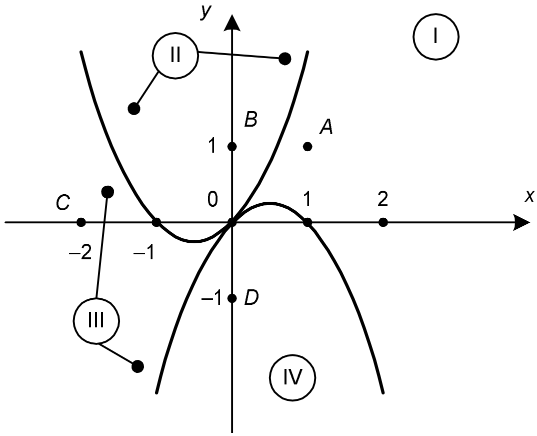

Рис. 13.6. Четыре области плоскости (x; a)

Парабола "теряет" одну точку — начало координат. Кривая $|x-a| = x^2$, таким образом, является объединением двух парабол, касающихся в точке (0; 0). Эта кривая разбивает всю плоскость (x; a) на четыре области (рис. 13.6).

Знак неравенства — один и тот же для всех точек каждой области, взятой отдельно (он может измениться лишь при переходе через границу между областями). Чтобы выяснить, какие из областей I—IV соответствуют решениям неравенства $|x-a| \le x^2$, выберем по одной точке в каждой области и проверим выполнение неравенства для соответствующей пары координат. В области I можно "проверить" точку $A(1;\ 1)$: неравенство $|1-1| \le 1^2$ истинно. Области II, III, IV можно испытать точками $B(0;\ 1)$, $C(-2;\ 0)$, $D(0;\ -1)$, соответственно. При этом выясняется, что область III также дает решения, а области II и IV — нет.

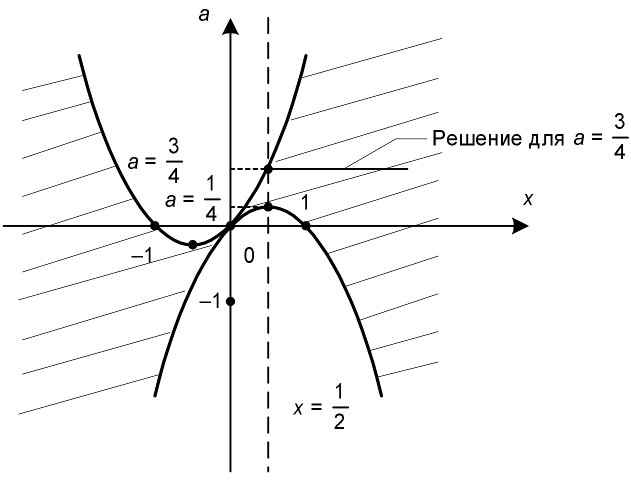

Рис. 13.7. Множество решений неравенства $|x - a| \le x^2$

На рис. 13.7 множество решений неравенства $|x-a| \le x^2$ выделено штриховкой. Пунктирная прямая $x = 1/2$ пересекает параболы в точках $a = 1/4$, $a = 3/4$. Пересечение этой прямой с заштрихованной областью соответствует значениям

$a \in [1/4;\ 3/4]$. При этом для всех $a \in [1/4;\ 3/4)$ имеются решения как меньшие, так и большие $x = 1/2$. Если же $a = 3/4$, то $x \in [1/2;\ +\infty)$, и именно в этом случае минимальное решение $x = 1/2$.

Комментарии

1—7. Все эти задачи относятся к простейшим задачам с параметром. Решение в каждом из случаев достигается простым перебором значений параметра. По сути, такие задачи решаются так же, как и задачи без параметра. Всякий раз, когда на пути к значению неизвестной встречается очередное "препятствие" — невозможность извлечения корня четной степени, "деление на ноль" и т. п. — возникает логическая развилка, которую приходится проходить во всех возможных направлениях. Однако логическая структура задачи этого типа всего лишь "древообразна". В более сложных случаях, когда нужно не просто найти значения переменной, а требуется еще что-то с ними (и с параметром) сделать, перебор может оказаться не оптимальным средством (логическое древо скорее напоминает кустарник с густо переплетенными ветвями). Тогда могут помочь графические схемы.

10. В этом примере присутствует идея "составного параметра". Хотя параметр входит в уравнение в сравнительно сложном виде (в показателе экспоненты), замена переменной позволяет свести задачу к тривиальной.

11. Описанный здесь способ решения является двумерным обобщением метода интервалов. Этот метод может быть с успехом применен при решении очень многих задач.

Задачи для самостоятельного решения

1. При каких значениях параметра p число $1 - 2p$ является решением уравнения $x^2 = x + 2$?

2. При каких значениях $a \in \mathbb{R}$ одним из решений неравенства $(0,25)^{2-ax} \le 2$ будет число $x^* = 4a + 3$?

3. Решить уравнение $(x-a)\left(x+2a^2\right)=0$ при каждом $a \in \mathbb{R}$.

4. Решить неравенство $\left(2^x-8\right)(x+b) \le 0$ для всех $b \in \mathbb{R}$.

5. При каких значениях p уравнение $(p-1)x+p=2$ не имеет отрицательных решений?

6. При каких $t \in \mathbb{R}$ уравнение

$$\cos\left(\frac{2x}{3}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{5-3t}{2}$$

не имеет ни одного решения?

7. При каких a уравнение $2^{-x}+\sqrt{2^{x+2}}=a$ имеет в точности одно решение?

8. При каких a парабола $y=(x-a)^2$ имеет общие точки с отрезком, соединяющим точки $M(1;\ 0)$ и $N(-1;\ 2)$?

9. При каких значениях a площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2+y^2=ax$ и $x^2+y^2=2ax$, равна 1?

10. При каких значениях $n \in \mathbb{R}$ функция $x(t)=\cos\omega t+\cos n\omega t$ не достигает значения 2 ни при каком $t>0$ ($\omega>0$)?

11. При каких $a \in \mathbb{R}$ система уравнений

$$\begin{cases} x+y=a, \\ x+y^2=1 \end{cases}$$

имеет решения, принадлежащие первому квадранту (точки могут располагаться и на осях)?

12. При каких значениях m прямая $x=1+m(y+2)$ имеет одну общую точку с параболой $y+2x=x^2$?

13. Известно, что наибольшее значение функции $y=\dfrac{px}{x^2+1}$ равно 8. Найти все $p \in \mathbb{R}$, для которых это условие возможно.

14. При каких $p \in \mathbb{R}$ число $\dfrac{2^p}{p-1} \in \mathbb{Z}$?

Ответы

1. $p = -1/2$; $p = 1$. **2.** $a \in [-1{,}25;\ 0{,}5]$. **3.** $\{0\}$, $a = 0$; $\{-1/2\}$, $a = -1/2$; $\left\{a;\ -2a^2\right\}$, иначе. **4.** $\{3\}$, $b = -3$; $[-b;\ 3]$, $b > -3$; $[3;\ -b]$, $b < -3$.

5. $p \in [1;\ 2]$. **6.** $t < 1$; $t > 2\frac{1}{3}$. **7.** $a = 6$. (*Указание:* замена $2^{\frac{x}{2}} = t,\ t > 0$. Исследовать поведение функции $f(t) = \frac{8}{t^2} + 2t$ на $(0;\ +\infty)$.)

8. $a \in \left[-1 - \sqrt{2};\ \frac{5}{4}\right]$ (*Указание:* проследить за движением параболы $y = (x - a)^2$ в плоскости $(x;\ y)$ при изменении параметра a.)

9. $a = \pm\frac{2}{\sqrt{3\pi}}$. Выделяя полные квадраты в левых частях, убеждаемся, что данные линии при $a \neq 0$ определяют окружности переменных радиусов. **10.** $n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, т. е. все иррациональные числа. (*Указание:* учесть ограниченность функции косинус и условие достижения ею максимально возможного значения.) **11.** $a \in [1;\ 5/4]$. **12.** $m \in \{\pm 1/2;\ 0\}$. Описанная геометрическая ситуация возможна в двух случаях: прямая параллельна оси параболы, в том числе совпадает с нею; прямая касается параболы. **13.** $p \in \{\pm 16\}$. (*Указание:* построить график функции $y = \frac{px}{x^2 + 1}$ при $p = 1$ и проследить за влиянием параметра p.)

14. $p \in \{0\} \cup \left\{1 + 2^{k-1} \mid k \in \mathbb{N}\right\}$. При $p - 1 \in \mathbb{N}$ данная задача сводится к вопросам делимости натуральных чисел.

Занятие 14

Стереометрия. Многогранники

Многогранники: параллелепипед, куб, пирамида, призма. Вычисление площадей поверхностей и объемов.

Вводные задачи

1. Найти площадь поверхности и объем куба с диагональю $d = 6\sqrt{3}$ см.

2. Выразить площади поверхностей правильных тетраэдра и октаэдра через длину ребра.

3. Дан параллелепипед $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$ (рис. 14.1), не обязательно прямоугольный. Какую долю от его объема составляет объем пирамиды $A_1C_1D_1D_2$?

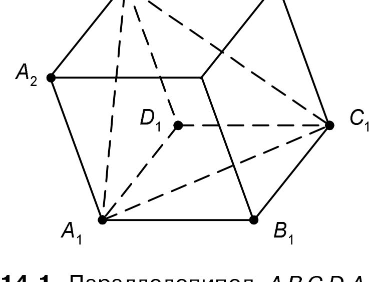

Рис. 14.1. Параллелепипед $A_1B_1C_1D_1A_2B_2C_2D_2$

4. В треугольной пирамиде $SABC$ все три плоских угла при вершине S — прямые, площади граней SBC, SAC, SAB равны $a^2/2$ $(a > 0)$. Найти высоту SH этой пирамиды.

5. Дан тетраэдр $SABC$ (для простоты — правильный). Точки M, N, P, Q — центры (точки пересечения медиан) граней SBC, SAC, SAB, ABC, соответственно. Найти отношение объемов и площадей поверхностей тетраэдров $SABC$ и $QNMP$.

6. Длины пяти ребер тетраэдра равны 1. Какой должна быть длина шестого ребра, чтобы объем этого тетраэдра был максимальным?

7. Правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S задана стороной основания 1 и высотой x. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины M и N ребер SA и SF (соответственно) и центр основания O. Рассмотреть также предельные ситуации $x \to 0$, $S \to \propto$.

Ответы

1. $S_{\text{пов}} = 216$ см^2, $V = 216$ см^3. **2.** $S_{\text{т}} = a^2\sqrt{3}$, $S_{\text{окт}} = 2S_{\text{т}} = 2a^2\sqrt{3}$. **3.** $\frac{1}{6}$.
4. $\frac{a}{\sqrt{3}}$. **5.** 27,9. **6.** $\sqrt{\frac{3}{2}}$. **7.** $S = \frac{5}{8}\cdot\sqrt{h^2 + \frac{3}{4}}$; при $x \to 0$, $S \to \frac{5\sqrt{3}}{16}$; при $x \to \propto$, $S \to \propto$ ($S \approx \frac{5}{8}h$).

Указания

1. Если измерения прямоугольного параллелепипеда равны a, b, c, то длина его диагонали $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ (это равенство можно получить через теорему Пифагора.) В частности, для куба ($a = b = c$) имеем $d = a\cdot\sqrt{3}$. Поверхность куба складывается из четырех равных квадратов со стороной a.

2. Поверхность правильного тетраэдра образована четырьмя, а октаэдра — восемью равносторонними треугольниками.

3. Объем тетраэдра составляет одну третью часть от объема пирамиды с теми же высотой и основанием.

4. Сначала проверить, что $SA = SB = SC = a$. Затем определить объем тетраэдра, принимая грань SAB за основание, а перпендикулярное ей ребро SC — за высоту. После этого можно "перевернуть" тетраэдр, "положив" его на грань ABC, и тогда вычислить длину высоты SH.
5. Доказать подобие тетраэдров $SABC$ и $QNMP$.
6. Объем тетраэдра будет максимальным в том случае, когда точка T окажется на наибольшем расстоянии от грани ABC.
7. В сечении будем иметь равнобочную трапецию $BMNE$ (см. рис. 14.6).

Решения

1. Если измерения прямоугольного параллелепипеда равны a, b, c, то его диагональ определяется по формуле (которая является "трехмерным вариантом" теоремы Пифагора): $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$. В данном случае $a = b = c$; $3a^2 = d^2 = \left(6\sqrt{3}\right)^2 = 108$; отсюда $a^2 = 36$, $a = 6$ (см). Поверхность куба складывается из шести квадратов; ее площадь $S_{\text{пов}} = 6a^2 = 216$ (см). Объем куба равен кубу его ребра: $V = a^3 = 216$ (см^3).
2. Все грани правильного тетраэдра являются равносторонними (правильными) треугольниками. Площадь правильного треугольника со стороной a равна
$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$
Так как поверхность тетраэдра складывается из четырех треугольников, имеем $S_{\text{т}} = a^2\sqrt{3}$. Поверхность правильного октаэдра (рис. 14.2) образована восемью правильными треугольниками со стороной a; следовательно, площадь его поверхности $S_{\text{окт}} = 2S_{\text{т}} = 2a^2\sqrt{3}$.

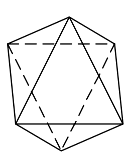

Рис. 14.2. Правильный октаэдр

3. Объем тетраэдра втрое меньше произведения площади его основания на высоту:

$$V_{A_1C_1D_1D_2} = \frac{1}{3} S_{A_1C_1D_1} \cdot h,$$

где h — высота параллелепипеда, проведенная к грани $A_1B_1C_1D_1$.

$$S_{A_1C_1D_1} = \frac{1}{2} S_{A_1B_1C_1D_1},$$

т. е.

$$V_{A_1C_1D_1D_2} = \frac{1}{6} S_{A_1B_1C_1D_1} \cdot D_1D_2.$$

Так как произведение $S_{A_1B_1C_1D_1} \cdot h$ равно объему параллелепипеда V, то

$$\frac{V_{A_1B_1C_1D_1}}{V} = \frac{1}{6}.$$

4. Пусть $SA = x$, $SB = y$, $SC = z$ (рис. 14.3).

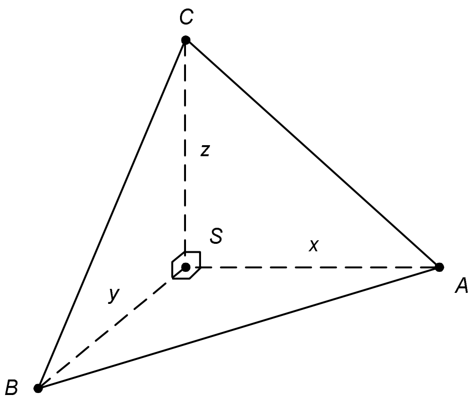

Рис. 14.3. Треугольная пирамида *SABC*

По условию

$$S_{SBC} = S_{SAC} = S_{SAB} = \frac{a^2}{2};$$

тогда

$$\frac{1}{2}yz = \frac{1}{2}xz = \frac{1}{2}xy = \frac{1}{2}a^2 .$$

Если в системе уравнений

$$\begin{cases} yz = a^2, \\ xz = a^2, \\ xy = a^2. \end{cases}$$

перемножить левые и правые части всех трех уравнений, получим $(xyz)^2 = a^6$, т. е. $xyz = a^3$. В силу первого уравнения $x = a$; аналогично $y = z = a$. Объем данной пирамиды будет равен

$$V = \frac{1}{6}xyz = \frac{a^3}{6}$$

(см. задачу 3). Если принять грань (ABC) за основание, то искомая высота SH найдется из соотношения

$$V = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot SH .$$

Найти площадь грани (ABC) несложно. Очевидно, эта грань является правильным треугольником с длиной стороны $a\sqrt{2}$ (треугольники SBC, SAC, SAB — равнобедренные прямоугольные с катетами a.) Имеем:

$$S_{ABC} = \frac{\left(a\sqrt{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} .$$

Следовательно, искомая высота

$$SH = \frac{3V}{S_{ABC}} = 3 \cdot \frac{a^3}{6} \cdot \frac{2}{a^2\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}} .$$

5. По условию задачи точки S, A, Q, M лежат в одной плоскости (рис. 14.4), причем $QX = \frac{1}{3}AX$, $MX = \frac{1}{3}SX$ (SX — медиана треугольника SBC; в случае правильного тетраэдра она будет и апофемой).

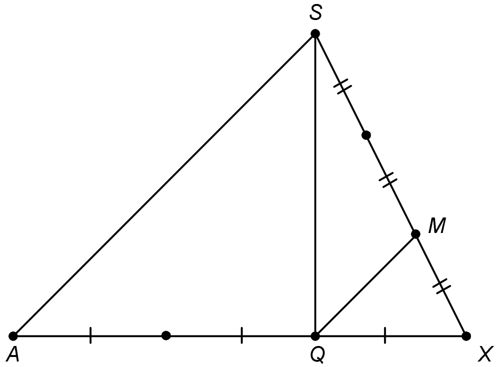

Рис. 14.4. Расположение точек S, A, Q, M

Отсюда по теореме Фалеса следует, что $QM \parallel AS$, треугольники QMX и ASX подобны по углам, а

$$QM = \frac{1}{3} AS .$$

Аналогично можно доказать, что

$$QN = \frac{1}{3} BS , \ QP = \frac{1}{3} CS , \ PN = \frac{1}{3} BC ,$$

$$PM = \frac{1}{3} AC , \ MN = \frac{1}{3} AB .$$

Это означает, что длины ребер тетраэдра $QMNP$ однозначно определяются длинами ребер тетраэдра $SABC$ и второе их короче. Но тетраэдр — жесткий многогранник (длинами ребер определяется вполне). Это значит, что тетраэдры $SABC$ и $QMNP$ подобны с коэффициентом подобия $k = 3$. Тогда отношение площадей поверхностей этих тетраэдров будет равно $k^2 = 9$, а отношение их объемов $k^3 = 27$.

6. Рассмотрим тетраэдр $ABCT$ с длинами ребер $AB = BC = AC = AT = CT = 1$, $BT = x$ (рис. 14.5).

Объем этого тетраэдра будет равен

$$V = \frac{1}{3} S_{ACB} \cdot TH ,$$

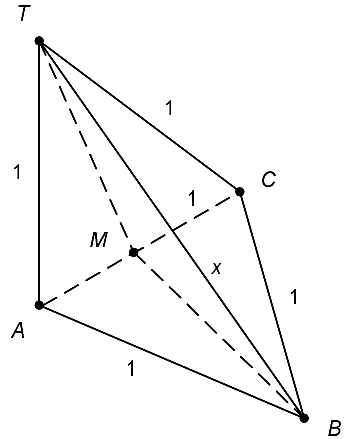

Рис. 14.5. Тетраэдр *ABCT*

где $TH = h$ — высота тетраэдра. При этом значение

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

фиксировано; объем V достигает максимума одновременно с высотой TH. Пусть далее BM — медиана треугольника ABC (она же высота и биссектриса). Несложно убедиться в том, что точки B, M, T, H лежат в одной плоскости. Очевидно, перпендикуляр TH к плоскости (ABC) не может оказаться длиннее наклонной TM, но TM — отрезок фиксированной длины:

$$TM^2 = AT^2 - AM^2 = \frac{3}{4},\ TM = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Стало быть, наибольшее значение высоты $h = TH$ достигается при совпадении точек M и H:

$$h_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

В этом случае

$$TM \perp (ABC),\ TM \perp MB,$$

$$TB^2 = TM^2 + MB^2 = 2TM^2 = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{2},$$

$$TB = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

7. Построим сечение пирамиды указанной плоскостью (рис. 14.6).

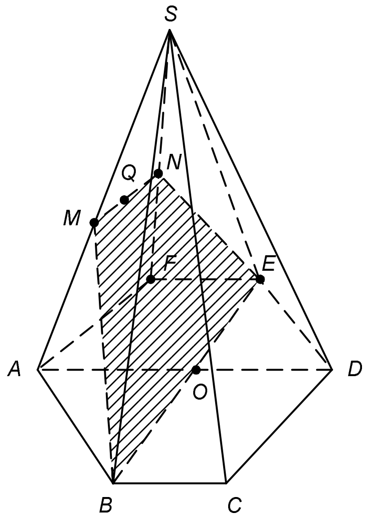

Рис. 14.6. Правильная шестиугольная пирамида *SABCDEF*

Очевидно, средняя линия MN треугольника SAF параллельна AF; следовательно, прямая MN параллельна плоскости основания пирамиды. Поэтому линия пересечения плоскости основания и плоскости сечения будет параллельна как MN, так и AF. В основании пирамиды — правильный шестиугольник $ABCDEF$. Прямая, параллельная стороне AF и проходящая через точку O, — это прямая BE, содержащая диагональ. Соединяя точки M и N, N и E, E и B, B и M, получаем сечение — трапецию $BMNE$. Данная трапеция является равнобедренной, т. к. BM и EN — соответствующие медианы равных треугольников — боковых граней пирамиды SAB и SFE. Основания трапеции

$$BE = 2AF = 2;\ MN = \frac{1}{2}AF = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, задача определения площади сечения сводится к вычислению длины высоты трапеции $BMNE$. Пусть SP — апофема грани SAF; SP пересечет среднюю линию MN в ее середине Q, причем $SQ = QP$ (тривиальные доказательства этих фактов опущены). Перейдем в плоскость (OSP) (рис. 14.7).

Здесь OQ — высота трапеции — является медианой прямоугольного треугольника с катетами $OS = x$ и $OP = \sqrt{3}/2$ (последнее ясно из рис. 14.8, треугольник AOF — равносторонний).

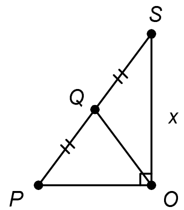

Рис. 14.7. Плоскость (OSP)

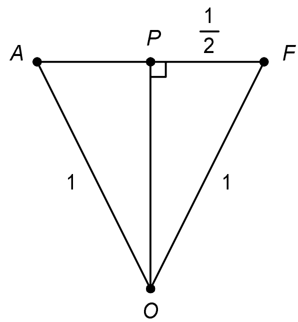

Рис. 14.8. Треугольник AOF

Но тогда

$$OQ = \frac{1}{2}\sqrt{OS^2 + OP^2} = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + \frac{3}{4}} = \frac{1}{4}\sqrt{4x^2 + 3},$$

и площадь трапеции

$$S_{BMNE} = \frac{1}{2}\left(BE + MN\right)\cdot OQ =$$
$$= \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{4}\sqrt{4x^2 + 3} = \frac{5}{16}\sqrt{4x^2 + 3};$$

для дальнейшего наряду с данным будем использовать также выражение

$$S_{BMNE} = \frac{5}{8}\sqrt{x^2 + \frac{3}{4}}\,.$$

Если $x \to 0$, то

$$S_{BMNE} \to \frac{5\sqrt{3}}{16}$$

("расплющенная" пирамида, точки S и O совпадают; M и N — середины отрезков OA и OF, соответственно; высота трапеции

$$OQ = \frac{1}{2}OP = \frac{\sqrt{3}}{4};$$

данная предельная ситуация изображена на рис. 14.9).

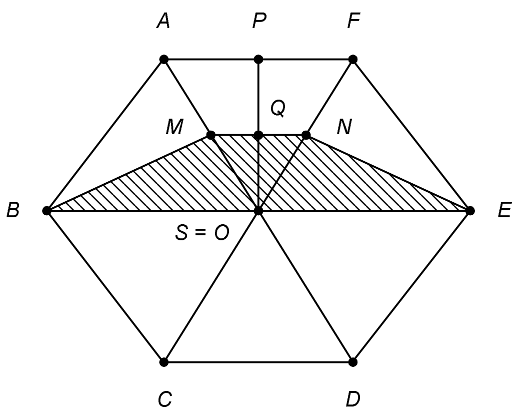

Рис. 14.9. Предельная ситуация $x \to 0$

Если же $x \to \infty$, высота трапеции OQ неограниченно возрастает при неизменных основаниях BE и MN; это приводит к "бесконечно большому" значению S_{BMNE}. Более точно

$$S_{BMNE} = \frac{5x}{8} \cdot \sqrt{1 + \frac{3}{4x^2}}\,;$$

множитель

$$\sqrt{1+\frac{3}{4x^2}} \to 1,$$

и скорость роста S_{BMNE} будет примерно линейной: $S_{BMNE} \approx \frac{5x}{8}$.

Комментарии

2. *Правильным* называется многогранник, у которого все грани — равные правильные многоугольники и все многогранные углы равны. Существует всего пять правильных многогранников: тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр. При этом грани тетраэдра, октаэдра и икосаэдра — правильные треугольники; грани куба — правильные четырехугольники — квадраты, а грани додекаэдра — правильные пятиугольники.
5. Результат данной задачи останется в силе и для случая произвольного тетраэдра.
6. Ситуация аналогична следующей: если в треугольнике зафиксировать длины двух сторон и варьировать угол между ними, то максимальную площадь будет иметь прямоугольный треугольник.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти ребра прямоугольного параллелепипеда, если его диагональ $d = 2\sqrt{14}$ см, боковая поверхность $S = 88$ см^2, а объем $V = 48$ см^3.
2. Сторона основания правильной треугольной пирамиды $SABC$ равна 2, а боковое ребро — 6. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания BC и точку M на ребре SA, если $SM : MA = 2 : 1$.
3. Найти угол наклона апофемы правильной треугольной пирамиды к плоскости основания, если площадь боковой грани равна площади основания.

4. Диагональ прямоугольного параллелепипеда перпендикулярна плоскости, проведенной через концы трех ребер, выходящих из той же вершины, что и эта диагональ. Найти объем параллелепипеда, если площадь его полной поверхности — 12.

5. Точки M, N, P расположены на ребрах BD, BC и AB треугольной пирамиды $ABCD$ соответственно, причем $BM : MD = BN : NC = BP : PA = 0{,}4$. Точка F лежит на продолжении ребра AD за вершину A, и известно, что

$$AF = \frac{1}{6} FB.$$

Каково отношение объемов тетраэдров $ABCD$ и $FMNP$?

6. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб ($AA_1 \parallel BB_1 \parallel \ldots$) с длиной диагонали $d = 2 \cdot \sqrt[6]{\frac{972}{5}}$. Пусть точки K, L, M — середины ребер AD, CD, DD_1, соответственно. Каков объем тетраэдра $KLMB_1$?

Ответы

1. 2, 4, 6. (*Указание:* принять длины ребер за неизвестные a, b, c и выразить через них данные в условии величины. Решить полученную систему уравнений.) **2.** $\sqrt{\frac{17}{3}}$. **3.** $\arccos\frac{2\sqrt{3}}{9}$. **4.** 8. **5.** $343:24$. (*Указание:* задача сводится к сравнению объемов тетраэдров с равными высотами и разными основаниями или, наоборот, с разными высотами и равными основаниями.) **6.** 1.

Занятие 15

Векторы и координаты

Вектор. Коллинеарность, компланарность. Координаты точки и координаты вектора. Длина вектора. Скалярное произведение векторов. Угол между векторами. Векторный метод в задачах стереометрии.

Вводные задачи

1. Какова длина вектора $\vec{a} = \{5;\ 12\}$?

2. Тот же вопрос для вектора $\vec{v} = \{\cos t;\ \sin t\}$. Какую линию описывает конец данного вектора (начало вектора — в начале координат) при изменении параметра t?

3. Найти координаты вектора $\vec{b}$, коллинеарного вектору $\vec{a} = \{3;\ -4\}$ и имеющего длину 1.

4. Отрезок MN задан координатами концов $M(3;\ 8)$, $N(-1;\ 2)$. Точка L принадлежит отрезку MN, причем $ML : LN = 5 : 2$. Найти координаты точки L и координаты точки $\widetilde{L}$, симметричной L относительно точки N.

5. Найти угол $\alpha = \angle ABC$ треугольника ABC, если известны координаты вершин треугольника $A(4;\ 2)$, $B(6;\ -4)$, $C(1;\ 1)$.

6. В прямоугольном треугольнике AOB ($\angle O = 90°$) найти расстояние от точки пересечения медиан до точки пересечения биссектрис, если длины катетов $OA = 3$, $OB = 4$.

7. Дана правильная пирамида $SABC$ с углом при вершине $\angle ASB = \varphi = 30°$ и ребром $SA = a$. Найти: угол между прямыми AB и SC; длину отрезка AK, где K — середина ребра SC; высоту SH пирамиды; расстояние от точки C до плоскости (SAB).

8. Пусть $ABCD$ — правильный тетраэдр, O — центр вписанной/описанной сфер. Доказать, что векторная сумма $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

9. Точка M плоскости (Oxy) движется по закону

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r}\,(t) = \left\{\frac{1-t^2}{1+t^2};\ \frac{2t}{1+t^2}\right\}.$$

При каком значении t расстояние от точки M до ближайшей к M точке прямой $3x + 4y = 20$ сократится до минимума?

Ответы

1. 13. **2.** 1; окружность. **3.** $\vec{b}_1 = \left\{\frac{3}{5};\ -\frac{4}{5}\right\}$; $\vec{b}_2 = \left\{-\frac{3}{5};\ \frac{4}{5}\right\}$.

4. $L\left(\frac{1}{7};\ \frac{26}{7}\right)$; $\tilde{L}\left(-\frac{15}{7};\ \frac{2}{7}\right)$. **5.** $\alpha = \frac{\pi}{2}$. **6.** $\frac{1}{3}$. **7.** $\left(\widehat{AB, SC}\right) = \frac{\pi}{2}$;

$AK = \frac{\sqrt{5 - 2\sqrt{3}}}{2} \cdot a$; $SH = a \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{3}+1}{3}}$; расстояние от точки C до плоскости (SAB) равно $a \cdot \sqrt{3\sqrt{3} - 5}$. **9.** При $t = \frac{1}{2}$.

Указания

1, 2. Длина вектора $\vec{a} = \{a_x;\ a_y\}$ может быть вычислена по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2}\ .$$

3. У коллинеарных векторов пропорциональные координаты.

4. Если известны координаты точек — концов вектора, то координаты самого вектора определяются вычитанием из координат конца соответствующих координат начала.

5. Воспользоваться скалярным произведением векторов, соответствующих сторонам искомого угла.

6. Удобно ввести систему координат, связанную с данным прямоугольным треугольником. Можно найти уравнения медиан и уравнения биссектрис, затем координаты точек пересечения соответствующих линий.

7. Ввести "базисную" тройку векторов, соответствующих боковым ребрам пирамиды, выходящих из вершины. Разложить по этим векторам те векторы, которые соответствуют искомым отрезкам, а также векторы, соответствующие сторонам искомых углов. Далее воспользоваться аппаратом скалярного умножения векторов.

8. Проследить, как изменится значение данной векторной суммы при повороте всей системы относительно прямой, соединяющей центр сферы и одну из вершин, на угол $\frac{2\pi}{3}$.

9. Убедиться, что данный вектор своим концом описывает единичную окружность.

Решения

1. $|\vec{a}| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$.

2. $\left|\vec{v}\left(t\right)\right| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$; конец вектора описывает единичную окружность $x^2 + y^2 = 1$; при увеличении параметра t движение происходит против часовой стрелки.

3. Координаты вектора $\vec{b}$: $\{3p;\ -4p\}$, где $p \in \mathbb{R}$ — неопределенный параметр. Из условия $\left|\vec{b}\right| = 1$ находим

$$(3p)^2 + (-4p)^2 = 1;$$

$$p^2 = \frac{1}{25};\ p = \pm\frac{1}{5};$$

$$\vec{b}_1 = \left\{\frac{3}{5};\ -\frac{4}{5}\right\};\ \vec{b}_2 = -\vec{b}_1 = \left\{-\frac{3}{5};\ \frac{4}{5}\right\}.$$

4. Имеем векторное равенство (рис. 15.1): $\overrightarrow{ML} = \dfrac{5}{7}\overrightarrow{MN}$. Координаты вектора $\overrightarrow{MN}$ легко найти, вычитая из координат конца (точка N) координаты начала (точка M): $\overrightarrow{MN} = \{-4;\ -6\}$. Тогда

$$\overrightarrow{ML} = \frac{5}{7}\overrightarrow{MN} = \left\{-\frac{20}{7};\ -\frac{30}{7}\right\}.$$

Так как по условию $M(3;\ 8)$, то $L\left(\dfrac{1}{7};\ \dfrac{26}{7}\right)$. Чтобы найти координаты $\tilde{L}$, к координатам точки $N(-1;\ 2)$ прибавим координаты вектора

$$\overrightarrow{N\tilde{L}} = \frac{2}{7}\overrightarrow{MN} = \left\{-\frac{8}{7};\ -\frac{12}{7}\right\}:\ \tilde{L}\left(-\frac{15}{7};\ \frac{2}{7}\right).$$

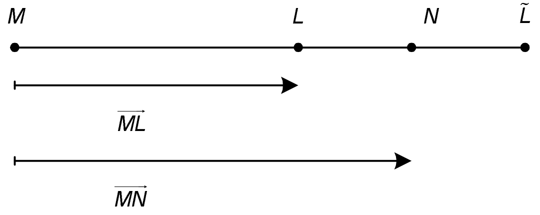

Рис. 15.1. Векторы

5. $\angle BAC$ — это угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Найти его можно, используя скалярное произведение этих векторов:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|};$$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = \{-3;\ -1\}\cdot\{2;\ \ 6\} = (-3)\cdot 2 + (-1)\cdot(-6) = 0;$$

следовательно $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$.

6. Чертеж к задаче приведен на рис. 15.2.

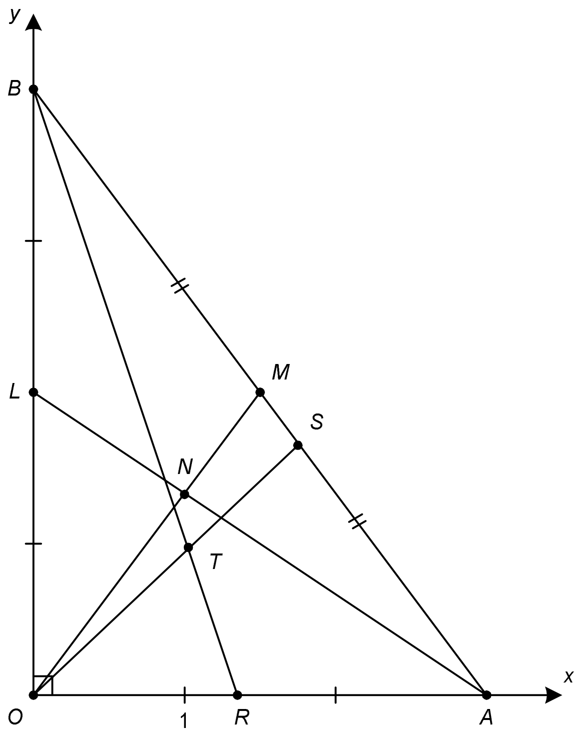

Рис. 15.2. Прямоугольный треугольник *AOB*

Здесь AL, OM — медианы, OS, BR — биссектрисы. Медианы пересекаются в точке N, биссектрисы — в точке T. Искомой является длина отрезка NT. Введем прямоугольную систему координат, совместив ее начало с вершиной прямого угла O. Направления осей выберем естественным образом: ось абсцисс вдоль вектора $\overrightarrow{OA}$, ось ординат вдоль вектора $\overrightarrow{OB}$. В такой системе координаты вершин треугольника, очевидно, будут $O(0;\ 0)$, $A(3;\ 0)$, $B(0;\ 4)$. Медианы заканчиваются в точках $L(0;\ 2)$ и $M\left(\dfrac{3}{2};\ 2\right)$ (координаты точки M есть среднее арифметическое соответствующих координат точек A и B). Зная координаты точек O и M, легко написать уравнение прямой OM:

$$y = \frac{4}{3}x$$

(в уравнение "прямой пропорциональности" $y = kx$ подставить $x = \frac{3}{2}$, $y = 2$). Если в уравнение линейной функции $y = kx + b$ подставить координаты точек $A(x = 3,\ y = 0)$ и $L(x = 0,\ y = 2)$, то найдем $k = -\frac{2}{3}$, $b = 2$; таким образом, уравнение прямой AL суть

$$y = -\frac{2}{3}x + 2.$$

Медианы AL и OM пересекаются в точке N, координаты x_N и y_N которой подлежат определению из системы

$$\begin{cases} y_N = -\dfrac{2}{3}x_N + 2, \\ y_N = \dfrac{4}{3}x_N. \end{cases}$$

Ее решение $x_N = 1$, $y_N = \frac{4}{3}$. Найти координаты точки T пересечения биссектрис OS и BR можно, решив совместно уравнения последних. Уравнение OS есть $y = x$. Далее следует найти координаты точки R. Здесь можно воспользоваться общим свойством биссектрис угла треугольника:

$$\frac{OR}{RA} = \frac{OB}{AB}.$$

Очевидно, $AB = 5$; поэтому

$$\frac{OR}{RA} = \frac{4}{5}.$$

Но $OR + RA = OA = 3$; значит,

$$OR + \frac{5}{4}OR = 3,$$

откуда

$$OR = \frac{4}{3}.$$

Уравнение прямой BR будет $y = -3x + 4$. Точку T найдем из системы

$$\begin{cases} y_T = x_T, \\ y_T = -3x_T + 4. \end{cases}$$

Решение данной системы — пара $x_T = 1$, $y_T = 1$. Значит, $N\left(1; \dfrac{4}{3}\right)$, $T(1;\ 1)$, т. е. точка N расположена "над" точкой T.

Расстояние $NT = \dfrac{1}{3}$.

7. Пирамида изображена на рис. 15.3.

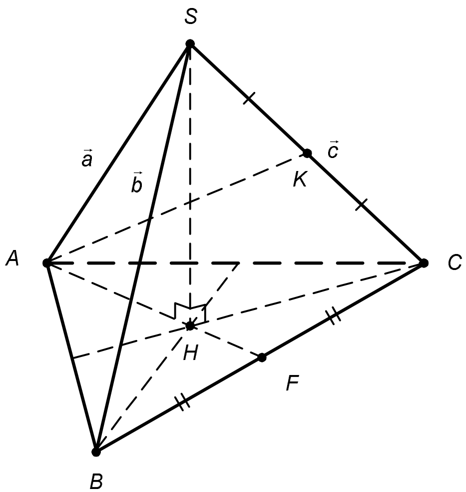

Рис. 15.3. Пирамида

Введем векторы $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$. Эти векторы, очевидно, некомпланарны (не параллельны никакой плоскости в пространстве), и через них можно линейно выразить любой другой вектор. Выбор данной векторной тройки аргументирован тем, что нам известны длины этих векторов

$$\left|\overrightarrow{SA}\right| = \left|\overrightarrow{SB}\right| = \left|\overrightarrow{SC}\right| = a$$

и попарные углы между ними:

$$\left(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}}\right)=\left(\widehat{\vec{b},\ \vec{c}}\right)=\left(\widehat{\vec{c},\ \vec{a}}\right)=\varphi=30^\circ .$$

Начнем с вычисления величины угла между прямыми AB и SC. Имеем:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SB}=-\vec{a}+\vec{b} .$$

Косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{SC}$ можно получить, используя скалярное произведение:

$$\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{SC}}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{SC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{SC}\right|} .$$

Числитель данной дроби

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{SC}=\left(-\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=-\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}=$$

$$=-\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{c}}\right)+\left|\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{c}\right|\cos\left(\widehat{\vec{b},\vec{c}}\right)=-a^2\cdot\cos 30^\circ+a^2\cdot\cos 30^\circ=0 .$$

Следовательно, искомый угол — прямой (что, конечно же, очевидно и без использования векторов).

Найдем AK. Соответствующий вектор

$$\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SK}=-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c} .$$

Его скалярный квадрат

$$\overrightarrow{AK}^2=\left(-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)\cdot\left(-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)=$$

$$=\vec{a}^2-\vec{a}\cdot\vec{c}+\frac{1}{4}\vec{c}^2=a^2-a^2\cos 30^\circ+\frac{1}{4}a^2=\frac{5-2\sqrt{3}}{4}a^2 .$$

Тогда

$$AK=\sqrt{\overrightarrow{AK}^2}=\frac{\sqrt{5-2\sqrt{3}}}{2}a .$$

Для нахождения высоты пирамиды требуется линейное выражение вектора $\overrightarrow{SH}$. Пусть F — середина ребра основания BC. Очевидно, справедливо векторное равенство

$$\overrightarrow{SH} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FH}.$$

Но

$$\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\left(\vec{c} - \vec{b}\right);$$

$$\overrightarrow{FH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{FA} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BA}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\left(\vec{b} - \vec{c}\right) + \left(\vec{a} - \vec{b}\right)\right) = \frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b} - \frac{1}{6}\vec{c}.$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{SH} = \vec{b} + \left(\frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}\right) + \left(\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b} - \frac{1}{6}\vec{c}\right) = \frac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right).$$

Скалярный квадрат этого вектора

$$\overrightarrow{SH}^2 = \frac{1}{9}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{9}\left(\left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 + \left|\vec{c}\right|^2 + 2\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|\cos 30° + 2\left|\vec{b}\right| \cdot \left|\vec{c}\right|\cos 30° + 2\left|\vec{c}\right| \cdot \left|\vec{a}\right|\cos 30°\right) =$$

$$= \frac{1}{9}\left(3a^2 + 3\sqrt{3}a^2\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{3}a^2.$$

Значит,

$$SH = a \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{3}+1}{3}}.$$

Найдем, наконец, расстояние от точки C до плоскости (SAB) — еще одну высоту пирамиды SP ($P \in (SAB)$). Так как точка P принадлежит плоскости (SAB), то при некоторых (пока неопределенных α и β) справедливо соотношение $\overrightarrow{SP} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Тогда $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{SP} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} - \vec{c}$. Ключевым является условие перпендикулярности вектора $\overrightarrow{CP}$ плоскости боковой грани (SAB), что эквивалентно системе требований $\overrightarrow{CP} \perp \vec{a}$, $\overrightarrow{CP} \perp \vec{b}$. Критерием перпендикулярности векторов является равенство нулю их скалярного произведения (критерий — необходимое и достаточное условия):

$$\overrightarrow{CP}\cdot\vec{a}=0\,,\ \overrightarrow{CP}\cdot\vec{b}=0\,.$$

Подставляя сюда выражение вектора $\overrightarrow{CP}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, запишем

$$\vec{a}\cdot\left(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}-\vec{c}\right)=0\,,\ \vec{b}\cdot\left(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}-\vec{c}\right)=0\,.$$

Именно из этих двух независимых уравнений определятся величины α и β:

$$\alpha\vec{a}^2+\beta\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}=0\,,\ \alpha\vec{a}\cdot\vec{b}+\beta\vec{b}^2-\vec{b}\cdot\vec{c}=0\,;$$

попарные скалярные произведения векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ известны ($\vec{a}^2=a^2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=a^2\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и т. д.); мы имеем дело с обычной линейной системой 2×2 для определения параметров α и β:

$$\alpha a^2+\beta a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=0\,;$$

$$\alpha a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\beta a^2-a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=0\,,$$

сокращая в обоих равенствах почленно на a^2, получим

$$\alpha+\beta\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\,,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha+\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}\,.$$

Отсюда, как нетрудно видеть,

$$\alpha=\beta=2\sqrt{3}-3\,.$$

Стало быть, вектор $\overrightarrow{CP}$ следующим образом выражается через тройку $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$\overrightarrow{CP}=\left(2\sqrt{3}-3\right)\left(\vec{a}+\vec{b}\right)-\vec{c}\,.$$

Для определения длины вектора $\overrightarrow{CP}$ используем его скалярный квадрат:

$$\overrightarrow{CP}^2=\left(3\sqrt{3}-5\right)a^2$$

(очевидные, но сравнительно длинные выкладки опущены). Таким образом,

$$CP = a \cdot \sqrt{3\sqrt{3} - 5}\ .$$

8. Повернем систему относительно прямой OD на угол $\frac{2\pi}{3}$ таким образом, чтобы вершина A переместилась в прежнее положение вершины B. При этом произойдет циклическая перестановка вершин A, B, C. Так как пирамида правильная, то векторная сумма не изменится. Но так может быть только в том случае, когда данная векторная сумма направлена вдоль OD. Так же можно доказать, что эта векторная сумма направлена вдоль OA. С другой стороны, прямые OA и OD очевидным образом не параллельны. Следовательно, векторная сумма может быть равна лишь нулевому вектору.

9. Так как

$$\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 = \frac{1-2t^2+t^4+4t^2}{1+2t^2+t^4} = 1\,,$$

то конец данного вектора всегда принадлежит единичной окружности. (Мы здесь не проверяем обратное, а именно: любая ли точка единичной окружности является концом такого вектора при некотором t; однако наше решение этого не потребует.) Несложно убедиться в том, что угловой коэффициент прямой, упомянутой в условии, равен $k_1 = -\frac{3}{4}$ (рис. 15.4).

Ближайшая к прямой точка единичной окружности принадлежит перпендикуляру, проведенному из начала координат к указанной прямой. Угловой коэффициент перпендикуляра

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} = \frac{4}{3}\,,$$

его уравнение

$$y = \frac{4}{3} \cdot x\ .$$

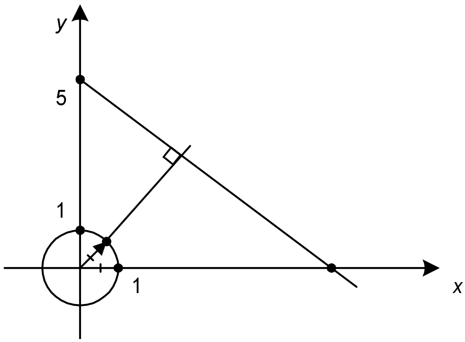

Рис. 15.4. Прямая $3x + 4y = 20$ и единичная окружность

Далее следует найти точку пересечения перпендикуляра и окружности. Это можно сделать, решив систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y = \dfrac{4}{3} \cdot x. \end{cases}$$

Координаты искомой точки окружности $\left(\dfrac{3}{5}; \dfrac{4}{5}\right)$. Соответствующее значение $t = \dfrac{1}{2}$.

Комментарии

2. В этой задаче единичная окружность "параметризована" тригонометрическими уравнениями. В *задаче* ***9*** описана параметризация окружности рациональными функциями. Вообще, параметрический способ задания кривой уравнениями $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$ во многих случаях более удобен, нежели явное задание зависимости $y = f(x)$; такой способ описания зависимостей между величинами очень распространен в высшей математике.

3. Похожим образом решалась бы задача с требованием сонаправленности (противоположной направленности) данных векторов. Достаточно было бы дополнительно потребовать, чтобы коэффициент пропорциональности был неотрицательным (неположительным).

7. Данный метод решения стереометрических задач удобен в тех случаях, когда имеются три отрезка с одной общей вершиной, не лежащие в данных плоскостях, при условии, что известны длины этих отрезков и углы между ними. Так бывает, например, в задачах, где "несущей конструкцией" является куб (параллелепипед) с известными ребрами. Безусловные достоинства данного метода — простота и общность.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти угол между векторами $\vec{a} = \left\{\sqrt{12};\, 2\right\}$ и $\vec{b} = \left\{-3;\, -\sqrt{27}\right\}$.
2. При каком значении α векторы $\vec{a} = \{\alpha;\, 2-\alpha\}$ и $\vec{b} = \{-1;\, -\alpha\}$ сонаправлены?
3. При каком значении α векторы из задачи 2 будут противоположными? Противоположно направленными?
4. Найти длину медианы AM треугольника ABC, если известны координаты его вершин $A(2;\, 2)$, $B(0;\, -1)$, $C(2;\, -2)$.
5. Пусть точка M — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$. Доказать векторные равенства:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MF};$$

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \vec{0}.$$

6. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти угол $\alpha = \angle C_1AF$ между диагональю AC_1 и отрезком AF, соединяющим вершину A с центром F грани BCC_1B_1.
7. В условиях предыдущей задачи найти расстояние от точки F до точки K, если A — середина отрезка KC_1.

Ответы

1. $\frac{5\pi}{6}$. **2.** Сонаправлены при $\alpha = -2$. **3.** Данные векторы не могут быть противоположными; при $\alpha = 1$ они противоположно направлены. **4.** $\frac{\sqrt{53}}{2}$. **6.** $\arccos\frac{2\sqrt{2}}{3} = \arcsin\frac{1}{3}$. (*Указание:* ввести базисные векторы, исходящие из вершины A и соответствующие ребрам куба.) **7.** $\frac{\sqrt{34}}{2}$. (*Указание:* найти скалярный квадрат вектора $\overrightarrow{KF}$).

Занятие 16

Функции и графики

Функция. Область определения и множество значений. Свойства функций. Вычисление значений. Графики. Решение задач с параметрами с использованием графиков функций. Обратная функция.

Вводные задачи

1. Дана функция $y = f(x) = 16x - 2x^2$. Найти $f(-1)$; $f\left(2^5\right)$; $f\left(4 - \dfrac{\sqrt{62}}{2}\right)$.

2. Пусть функция $y = f(x)$ — та же, что и в предыдущей задаче. Упростить выражение

$$F(\alpha) = 1 - 0{,}0625 \cdot f\left(8\sin^2\frac{\alpha}{4}\right).$$

3. Пусть $y = f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$.

а) Записать в явном виде функцию $y = f(f(x))$.

б) Найти $y = f\left(f\left(f\left(\sqrt{380}\right)\right)\right)$.

4. При каких α и β функция

$$f(x) = (\alpha + 2\beta - 1)x^3 + \left(\alpha^2 - \beta - 7\right)x^2 + \left(2\alpha - \beta^3\right)x + \alpha^4 - 6$$

будет линейной?

5. Построить график функции

$$y = f(x) = \frac{a^3}{x^2 + a^2},$$

$a > 0$ (локон Аньези). Сколько решений имеет уравнение $f(x) = a$? $f(x) = 0$? $f(x) = 1$?

6. Построить графики функций $y = f(x) = \left||x| - 1\right|$ и $y = g(x) = x^4 - 2x^2 + 1$. Сколько решений имеет уравнение $f(x) = a$ в зависимости от значений a ($a \in \mathbb{R}$)? Аналогично для уравнения $g(x) = a$.

7. При каких значениях параметров a и b уравнение $(x-a)^2 \cdot (x-b)^2 = 2$ имеет в точности три различных решения?

8. Найти функцию $x(y)$, обратную к функции $y(x)$, если

$$y = \frac{2 - 3(3x-2)^3}{3}.$$

9. Найти функцию $x(y)$, обратную к функции $y(x)$, для

$$y = \left(\frac{x^2 - 1}{2x}\right)^2$$

на $[1; +\infty)$.

10. Найти функцию, обратную к функции $y = 2|x| + 3x + 4$ на $\mathbb{R}$.

11. При каком наименьшем $n \in \mathbb{N}$ функция $y = nx - 5 \cdot |x|$ обратима на всей оси?

Ответы

1. -18; -1536; 1. **2.** $\cos\alpha$. **3.** а) $f(f(x)) = -\dfrac{1}{x-1}$; б) $\sqrt{380}$. **4.** $\alpha_1 = -3$, $\beta_1 = 2$; $\alpha_2 = \dfrac{5}{2}$, $\beta_2 = -\dfrac{3}{4}$. **5.** Уравнение $f(x) = a$ имеет единственное решение $x = 0$; уравнение $f(x) = a$ не имеет решений; уравнение

$f(x)=1$ имеет: пустое множество решений при $a<1$; одно решение при $a=1$; два решения при $a>1$. **6.** Оба уравнения имеют одно и то же количество решений при каждом a: $\varnothing$, если $a<0$; два решения, если $a=0$; четыре решения, если $0<a<1$; три решения, если $a=1$; два решения, если $a>1$. **7.** Условию задачи удовлетворяют любые пары $(a;\,b)$, которые удовлетворяют условию на разность $a-b=\pm 2\cdot\sqrt[4]{2}$.

8. $x(y)=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{3}-y}$. **9.** $x(y)=\sqrt{y}+\sqrt{y+1}$ $(y\geq 0)$.

10. $x(y)=\begin{cases} y-4, & y<4, \\ \frac{1}{5}(y-4), & y\geq 4. \end{cases}$ **11.** $n_{\min}=6$.

Указания

1. Для вычисления значения $f\left(4-\sqrt{62}/2\right)$ удобно представить выражение для функции в виде $f(x)=2x(8-x)$.

2. Использовать тригонометрические формулы: основное тригонометрическое тождество; синус двойного аргумента; формулы понижения степени; $0{,}0625=1/16$.

3. б) Прежде получить явное выражение для $y=f\left(f\left(f(x)\right)\right)$.

4. Потребовать, чтобы коэффициенты при высших степенях (третьих и четвертых) были нулями.

5. При построении графика учесть следующие очевидные свойства данной функции: четность, монотонное убывание при $x\geq 0$; стремление к нулю при $x\to\infty$. Полезно сосчитать несколько частных значений (например, $f(0)$, $f(a)$, $f(2a)$, $f(a/2)$). Определить количество решений для каждого из выписанных уравнений легче всего при помощи построенного графика $y=f(x)$.

6. Построение графика функции $f(x)=\left||x|-1\right|$ может быть осуществлено поэтапно: сначала построить модуль $y_1=|x|$, затем "опустить" график на единицу вниз, получится зависимость $y_2=|x|-1$. Действие внешних модульных скобок проявится в отражении относительно оси абсцисс части графика f_2, расположенной в нижней полуплоскости. Функция

$$g(x) = \left(x^2 - 1\right)^2 = (x-1)^2 \cdot (x+1)^2$$

является четной, неотрицательной, имеет два нуля $x = \pm 1$, при $x \to \infty$ стремится к $+\infty$. Количество решений уравнений $f(x) = a$, $g(x) = a$ определяется графически.

7. По отдельности рассмотреть случаи $a = b$, $a \neq b$. Во втором из них график функции

$$\varphi(x) = (x-a)^2 \cdot (x-b)^2$$

имеет точки касания с осью абсцисс $x = a$, $x = b$ и будет симметричен относительно вертикальной прямой

$$x = \frac{a+b}{2}.$$

На этой же оси расположится точка максимума функции φ.

8, 9. Выразить x через y.

10. Разбить область определения ($\mathbb{R}$) на два промежутка: $(-\infty; 0)$ и $[0; +\infty)$. На каждом из них выразить x через y. Убедиться, что полученное формальное выражение действительно обеспечивает взаимно-однозначную связь (соответствие) между переменными x и y.

11. Данная задача связана с предыдущей. Фактически требуется выяснить наличие монотонности функции $y(x)$ (монотонность — в строгом смысле) при тех или иных значениях $n \in \mathbb{N}$.

Решения

1. $f(-1) = 16 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1)^2 = -18$,

$$f\left(2^5\right) = 2^4 \cdot 2^5 - 2 \cdot \left(2^5\right)^2 = 2^9 - 2^{11} = 2^9 \cdot \left(1 - 2^2\right) = 512 \cdot (-3) = -1536,$$

$$f\left(4 - \frac{\sqrt{62}}{2}\right) = 16 \cdot \left(4 - \frac{\sqrt{62}}{2}\right) - 2 \cdot \left(4 - \frac{\sqrt{62}}{2}\right)^2 =$$

$$= 2\cdot\left(4-\frac{\sqrt{62}}{2}\right)\cdot\left(8-\left(4-\frac{\sqrt{62}}{2}\right)\right) = 2\cdot\left(4-\frac{\sqrt{62}}{2}\right)\cdot\left(4+\frac{\sqrt{62}}{2}\right) =$$

$$= 2\cdot\left(4^2-\left(\frac{\sqrt{62}}{2}\right)^2\right) = 2\cdot\left(16-\frac{31}{2}\right) = 1 .$$

2. $F(\alpha) = 1-\frac{1}{16}\cdot\left(16\cdot 8\sin^2\frac{\alpha}{4} - 2\cdot 64\sin^4\frac{\alpha}{4}\right) =$

$$= 1-8\sin^2\frac{\alpha}{4}\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{4}\right) = 1-8\sin^2\frac{\alpha}{4}\cos^2\frac{\alpha}{4} =$$

$$= 1-2\cdot\left(2\sin\frac{\alpha}{4}\cos\frac{\alpha}{4}\right)^2 = 1-2\cdot\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \cos\alpha .$$

3. Рассмотрим решение по отдельности.

а) $f\left(f(x)\right) = 1-\frac{1}{f(x)} = 1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 1-\frac{x}{x-1} = -\frac{1}{x-1};$

б) $f\left(f\left(f(x)\right)\right) = -\frac{1}{f(x)-1} = -\frac{1}{\left(1-\frac{1}{x}\right)-1} = x ,$

$f\left(f\left(f(x)\right)\right) = \sqrt{380} .$

4. Данная функция будет линейной при условии

$$\begin{cases} \alpha+2\beta-1=0, \\ \alpha^2-\beta-7=0. \end{cases}$$

Из первого условия имеем

$$\beta = \frac{1-\alpha}{2};$$

подставляя это выражение во второе уравнение, получим

$$\alpha^2-\frac{1-\alpha}{2}-7=0 ,$$

квадратное уравнение. В стандартном виде оно запишется так: $2\alpha^2+\alpha-15=0$. Его дискриминант $D = 121$, корни

$\alpha_1 = -3$, $\alpha_2 = 5/2$. Соответствующие значения параметра β суть $\beta_1 = 2$, $\beta_2 = -3/4$.

5. Область определения этой функции $\mathbb{R} = (-\infty;\, +\infty)$, т. к. знаменатель дроби строго положителен при всяком вещественном x. Если $x \to \pm\infty$, то знаменатель дроби, будучи положительным, неограниченно растет, а вся дробь будет сколь угодно малой положительной (это означает наличие горизонтальной асимптоты $y = 0$). Данная функция является четной:

$$f(-x) = \frac{a^3}{(-x)^2 + a^2} = \frac{a^3}{x^2 + a^2} = f(x) \quad (\forall\, x \in \mathbb{R}),$$

т. е. график функции симметричен относительно оси ординат (Oy). Значения функции всегда положительны:

$$\frac{a^3}{x^2 + a^2} > 0 \quad (\forall\, x \in \mathbb{R}).$$

Некоторые частные значения:

$$f(0) = \frac{a^3}{0^2 + a^2} = a, \qquad f(\pm 2a) = \frac{a}{5},$$

$$f(\pm a) = \frac{a}{2}, \qquad f(\pm 3a) = \frac{a}{10}.$$

$$f\left(\pm\frac{a}{2}\right) = \frac{4}{5}a,$$

На промежутке $[0;\, +\infty)$ знаменатель $x^2 + a^2$ возрастает, а вся дробь

$$\frac{a^3}{x^2 + a^2}$$

убывает (большим значениям x соответствуют меньшие значения $f(x)$). Перечисленных сведений достаточно для построения правдоподобного графика $f(x)$ (рис. 16.1). С помощью данного графика несложно ответить на поставленные в условии вопросы.

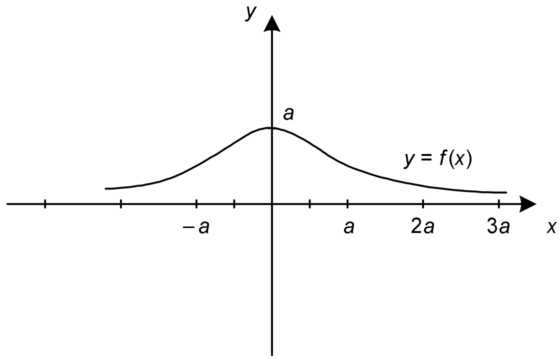

Рис. 16.1. График функции $f(x) = \dfrac{a^3}{x^2 + a^2}$

Очевидно, $f(x) = a$ возможно только при $x = 0$, т. е. данное уравнение имеет единственное решение. Далее, уравнение решений не имеет вовсе (всегда $f(x) > 0$). Что касается уравнения $f(x) = 1$, то количество его решений зависит от значения параметра a. Если $a = 1$, то решение единственное. Если $a < 1$, то решений нет вовсе (т. е. $f(x) \le a < 1$). Если же $a > 1$, то прямая $y = 1$ пересечет график в двух точках, соответственно уравнение будет иметь два решения $x_{1,2}$ ($x_1 = -x_2$).

6. График функции $f(x)$ можно построить, например, следующим образом. Очевидно, $f(-x) = f(x)$, т. е. функция f является четной. В правой полуплоскости ($x \ge 0$) выражение для функции упрощается: $f(x) = |x - 1|$. По определению модуля, если $x \ge 1$, то $f(x) = x - 1$, а если $x < 1$, то $f(x) = 1 - x$. Таким образом, график f на $[0; +\infty)$ образуется из отрезка и луча (рис. 16.2). Чтобы продолжить его в левую полуплоскость, достаточно отобразить его симметрично относительно оси ординат.

Вторая функция, g, задается биквадратным многочленом. Она также является четной. Запишем $g(x)$ в виде

$$g(x) = \left(x^2 - 1\right)^2 = (x - 1)^2 \cdot (x + 1)^2 .$$

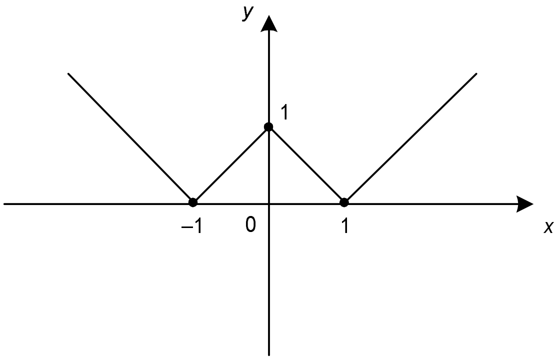

Рис. 16.2. График функции $f(x) = |x - 1|$

Очевидно, $g(\pm 1) = 0$; при всех $x \neq \pm 1$ $g(x) > 0$. Кроме того, $g(0) = 1$. При $x \in (1; +\infty)$ функция $g(x)$ быстро возрастает (рис. 16.3).

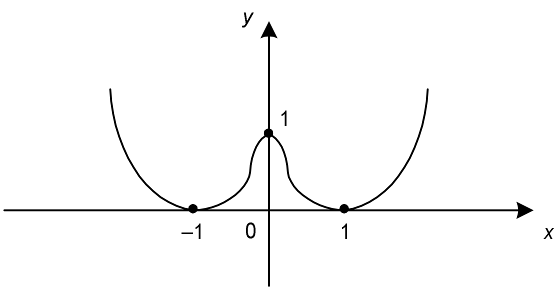

Рис. 16.3. График функции $g(x) = (x^2 - 1)^2$

Рассматривая построенные графики функций f и g, легко убедиться в том, что количество решений у них одинаково для каждого a (хотя сами решения, вообще говоря, различны). Если $a = 0$, каждое уравнение имеет симметричную пару решений $\{\pm 1\}$. Если $0 < a < 1$, каждое уравнение имеет по четыре решения. При $a = 1$ существует решение $x = 0$ и пара симметричных относительно нуля решений, всего три. При $a > 1$ — по два решения у каждого уравнения.

7. График функции $\varphi(x)=(x-a)^2\cdot(x-b)^2$ при $a\neq b$ будет выглядеть примерно так же, как график функции g из задачи 6; точки касания с осью абсцисс теперь a и b. Случай трех решений соответствует высоте 2 центральной "горки" с абсциссой $x=(a+b)/2$ (середина отрезка, соединяющего точки a и b). В симметрии графика относительно вертикальной оси $x=(a+b)/2$ легко убедиться, проверив тождество

$$\varphi\left(\frac{a+b}{2}+t\right)=\varphi\left(\frac{a+b}{2}-t\right)\ \text{ для }\ \forall t\in\mathbb{R}\,.$$

Требуем выполнения равенства

$$\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right)=2:\ \left(\frac{a+b}{2}-a\right)^2\cdot\left(\frac{a+b}{2}-b\right)^2=2\,;$$

$$(a-b)^4=32\,;$$

$$a-b=\pm 2\cdot\sqrt[4]{2}\,.$$

Если же $a=b$, то $\varphi(x)=(x-a)^4$. В этом случае уравнение $\varphi(x)=2$ имеет лишь два решения: $x-a=\pm\sqrt[4]{2}$; $x=a\pm\sqrt[4]{2}$.

8. Выразим переменную x через y:

$$(3x-2)^3=\frac{2}{3}-y\ \Leftrightarrow\ 3x-2=\sqrt[3]{\frac{2}{3}-y}\ \Leftrightarrow\ x=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{3}-y}\,.$$

Это и есть обратная функция к исходной.

9. Так как при $x\geq 1$ выражение $\dfrac{x^2-1}{2x}$ неотрицательно, то можно записать

$$\frac{x^2-1}{2x}=\sqrt{y}\,.$$

Избавляясь от дроби, получаем $x^2-1=2x\sqrt{y}$, откуда, выделяя полный квадрат, будем иметь $\left(x-\sqrt{y}\right)^2=1+y$; тогда $x=\sqrt{y}\pm\sqrt{1+y}$. Поскольку переменная x — положительна, искомая обратная функция $x=\sqrt{y}+\sqrt{1+y}$.

10. Покажем, что данная функция возрастает на $\mathbb{R}$. Действительно, пользуясь определением модуля, можем написать: $y = x + 4$ для $x < 0$; $y = 5x + 4$ для $x \geq 0$. Оба выражения соответствуют возрастающим линейным функциям (их угловые коэффициенты $k_1 = 1$, $k_2 = 5$ положительны). Кроме того, $y(x) < 4$ при $x < 0$, $y(x) > 4$ при $x > 0$, $y(0) = 4$. Поэтому $y(x)$ — возрастающая функция; этого достаточно для существования обратной функции. На промежутке $(-\infty; 0)$ имеем $x(y) = y - 4$; на $[0; +\infty)$ $x(y) = (y-4)/5$. Обратную функцию можно задать двумя выражениями:

$$x(y) = \begin{cases} y - 4, & y < 4; \\ \dfrac{1}{5}(y-4), & y \geq 4. \end{cases}$$

11. Раскрывая модуль, получаем

$$y(x) = \begin{cases} (n+5)\cdot x, & x < 0; \\ (n-5)\cdot x, & x \geq 0. \end{cases}$$

Если $n \in \{1; 2; 3; 4\}$, то угловые коэффициенты $n + 5$ и $n - 5$ имеют разные знаки. Это значит, что промежуток строгого возрастания $(-\infty; 0]$ сменяется промежутком строгого убывания $[0; +\infty)$. В этом случае функция $y(x)$ необратима. Действительно, если взять $y = -1$, то этому значению функции соответствовали бы два значения аргумента:

$$x_1 = -\frac{1}{n+5} < 0 \text{ и } x_2 = -\frac{1}{n-5} = \frac{1}{5-n} > 0,$$

что противоречит обратимости. Если $n = 5$, то при неотрицательных x функция $y(x)$ постоянна: $y = 0$, т. е. нулевым значениям y соответствует даже бесконечное множество значений x. Если же $n > 5$, оба угловых коэффициента положительны, $y(x)$ возрастает на $\mathbb{R}$ и вследствие этого функция $y(x)$ обратима. Наименьшее натуральное n, удовлетворяющее условию $n > 5$, есть 6.

Комментарии

3. Данная функция, как видно, обладает интересным свойством $f\left(f\left(f\left(x\right)\right)\right)=x$, или $f\circ f\circ f=\varepsilon$, где $\varepsilon\left(x\right)=x$ — "тождественная" функция. Можно привести примеры функций, обладающих свойством $f\circ f=\varepsilon$. Таковы, например, функции

$$f\left(x\right)=C-x;$$

$$f\left(x\right)=\frac{C}{x},$$

где C — константа.

5, 6. Если уравнение с самого начала не имеет вида $f\left(x\right)=a$ (такой вид особенно удобен для графического решения), то можно попробовать привести уравнение к этому виду (особенно когда параметр находится "на поверхности", входит линейно). Если же это не удается, то во многих случаях можно построить зависимость "переменная — параметр", и далее решать задачу аналогично предыдущему.

Попробуйте решить графически следующую задачу: "При каких значениях параметра a уравнение

$$\left(x^2+a^2-1\right)\cdot\left(x-a\right)=0$$

имеет в точности два решения?" Ответ: $a\in\left\{\pm\frac{\sqrt{2}}{2};\ \pm 1\right\}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Дана функция $y=f\left(x\right)=2^{x+1}-4^{x}$. Найти $f\left(5\right)$; $f\left(1\right)$; $f\left(\log_2 5\right)$; $f\left(f\left(0\right)\right)$.

2. Пусть

$$f\left(x\right)=\log_2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),$$

$$g(x) = \log_2\left(x - \sqrt{x^2+1}\right).$$

Найти целое число $f\left(\sin\frac{\pi}{8}\right) + g\left(\cos\frac{3\pi}{8}\right)$.

3. Чему равно значение $f\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}\right) - f\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{7}\right)$, если $f(x) = 2\left(x+\frac{1}{x}\right)^4 + 3$?

Найти явные выражения для $f(f(x)), f(g(x)), g(f(x)), g(g(x))$, если (4—6):

4. $f(x) = x^3$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$.

5. $f(x) = \frac{12}{x}$, $g(x) = \frac{4}{x}$.

6. $f(x) = |x|$, $g(x) = |x+2|$.

7. Найти нули функции $\varphi(x) = \sin\left(\pi x^2\right)$.

8. Каковы возможные целые значения функции $h(x) = \sqrt{5+3\sin x}$?

9. Построить график функции $f(x) = x^2 - 2|x|$. Сколько решений имеет уравнение $f(x) = \alpha$ в зависимости от значений параметра α? Тот же вопрос для уравнения $f(x) = a^2$.

10. Найти максимальную длину интервала числовой оси, не содержащего нулей функции

$$y = \sin\frac{\pi x^3}{8}.$$

11. Решить уравнение $f(x) = f(2)$, если $f(x) = 4^x - 16\cdot 2^x$.

12. Решить уравнение $f(x) = f(1/x)$, если $f(x) = \sqrt{1-\frac{2}{x}}$.

13. Для каких значений a выполнено тождество $f(a-x) \equiv f(a+x)$ ($\forall x \in \mathbb{R}$), если $f(x) = 2x^2 - 4x + 3$?

14. Тот же вопрос для функции $g(x) = 5\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

15. Даны многочлены $p(x) = x + 3$ и $q(x) = x + 1$. Найти минимальную возможную степень многочлена $t(x) = (p(x))^n - x(q(x))^m$, если n, $m \in \mathbb{N}$.

16. При каких значениях параметра p уравнение $\sqrt{x} = x + p$ будет иметь в точности одно решение?

17. При каких значениях параметра q уравнение $\log_3\left(x^2 + x + 3\right) = q + 1$ имеет два положительных решения?

18. Каков наименьший положительный период функции $f(x) = |\cos x| \cdot \cos 2x$?

19. Найти функцию, обратную к функции $y(x) = \sin \pi x$ на промежутке $\left[-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right]$.

Найти множество значений функции (20, 21):

20. $f(x) = \sin x + \cos 2x$.

21. $g(x) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x+1}$.

22. При каких значениях параметра p график функции

$$y = \frac{x+2}{2x^2 + 5x + p}$$

имеет ровно одну вертикальную асимптоту?

23. При каких значениях a существуют такие b, $c \in \mathbb{R}$ ($b < c$), что функция $f(x) = x^3 + 3ax + a^3$ возрастает на $(-\infty; b]$ и $[c; +\infty)$ и убывает на $[b; c]$?

Ответы

1. $f(5) = -960$; $f(1) = 0$; $f(\log_2 5) = -15$; $f(f(0)) = 0$. **2.** 0. (*Указание:* $f(x) + g(x) \equiv 0$; сравнить аргументы.) **3.** 0. (*Указание:* $f(a) \equiv f(1/a)$, $a \neq 0$.) **4.** $f(f(x)) = x^9$, $f(g(x)) = x$, $g(f(x)) = x$, $g(g(x)) = \sqrt[9]{x}$. **5.** $f(f(x)) = x \quad (x \neq 0)$, $f(g(x)) = 3x \quad (x \neq 0)$, $g(f(x)) = \frac{x}{3} \quad (x \neq 0)$, $g(g(x)) = x \quad (x \neq 0)$. **6.** $f(f(x)) = |x|$, $f(g(x)) = |x+2|$, $g(f(x)) = |x| + 2$, $g(g(x)) = |x+2| + 2$. **7.** $\{0;\ \pm\sqrt{k} \mid k \in \mathbb{N}\}$. **8.** 2. **9.** График данной функции изображен на рис. 16.4.

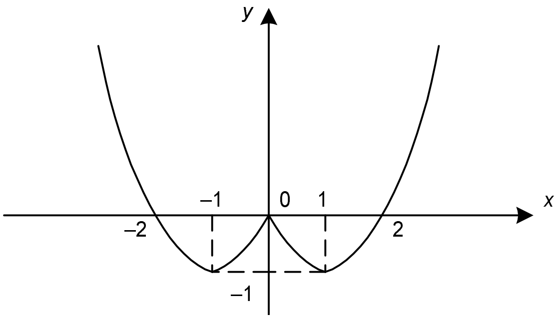

Рис. 16.4. График функции $f(x) = x^2 - 2|x|$

Уравнение $f(x) = \alpha$ не имеет ни одного решения, если $\alpha < -1$; два решения, если $\alpha = -1$; четыре решения, $-1 < \alpha < 0$; три решения, если $\alpha = 0$; два решения при $\alpha > 0$. Уравнение $f(x) = a^2$ имеет три решения, если $a = 0$; в других случаях (т. е. при a положительном либо отрицательном) решений два. **10.** 2. **11.** $\{2;\ 2 + \log_2 3\}$. **12.** $\{-1\}$. **13.** $a = 1$. (*Указание:* подстановка значений $a \pm x$ в выражение для функции приводит к равенству $ax = x$, которое должно выполняться тождественно при всех $x \in \mathbb{R}$.) **14.** $a = \pi k + \frac{\pi}{6}$ $(k \in \mathbb{Z})$. **15.** 1. (*Указание:* данное значение степени достижимо при $n = 2$, $m = 1$. Доказать, что меньшая, т. е. нулевая степень невозможна проще всего, вычислив $t(0)$ и $t(-1)$ — эти значения не совпадают ни при каких натуральных n, m.)

16. $p \in (-\infty;\ 0) \cup \left\{\frac{1}{4}\right\}$. (*Указание:* построить эскиз графика функции $\varphi(x) = \sqrt{x} - x$.) **17.** $\varnothing$. **18.** π. (*Указание:* очевидно, $f(x+\pi) \equiv f(\pi)$; достаточно проверить отсутствие меньшего, чем π, периода. Это следует, например, из того, что между точками $x = 0$ и $x = \pi$ значение функции меньше 1, тогда как $f(0) = f(\pi) = 1$. В любом случае полезно сделать набросок графика $f(x)$.) **19.** $x(y) = \frac{1}{\pi}\arcsin y - 2$. **20.** $E(f) = [-2;\ 9/8]$. (*Указание:* замена $t = \sin x$, $t \in [-1;\ 1]$.) **21.** $[0;\ +\infty)$. **22.** $p \in \left\{2;\ \frac{25}{8}\right\}$. **23.** $a < 0$.

Занятие 17

Текстовые задачи

Основные типы "текстовых" задач. Смеси (сплавы). Работа ("процессы"). Движение. Относительное движение (движение по и против течения). Задачи "на числа".

Вводные задачи

1. Петя спускается по движущемуся вниз эскалатору метро со скоростью относительно эскалатора вдвое большей скорости самого эскалатора за 1 мин. За какое время Петя поднимется по движущемуся вниз эскалатору, если отношение скоростей останется прежним?

2. Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу выезжают два автомобиля. Скорость автомобиля, выехавшего из пункта A, на 1/3 больше скорости автомобиля, выехавшего из B. От момента встречи до момента прибытия второго автомобиля в пункт A проходит 1 ч 20 мин. Сколько времени двигались автомобили до встречи?

3. Две трубы заполняют бассейн за T часов, причем первая, работая отдельно, заполняет этот же бассейн за t часов. За какое время τ заполнит бассейн лишь вторая труба? Рассмотреть, в частности, случаи $T = t/2$ и $T = 2$, $t = 3$. Как будет вести себя величина τ, если $T = 1$, а $t \to 1$ $(t > 1)$; $T = 1$, а $t \to \infty$? Найти также значение константы

$$\lambda = \frac{\tau}{T} - \frac{\tau}{t}$$

и выяснить ее смысл.

4. Массовая доля спирта в первом растворе составляет 40%, а во втором 20%. Какова массовая доля спирта r в растворе, полученном в результате смешения этих растворов в пропорции $m:n$? Рассмотреть, в частности, случаи $m = n = 1$ и $m = 1$, $n = 2$. Как будет вести себя искомая величина, если $n = 1$, $m \to \infty$? Если $m = 1$, $n \to \infty$?

5. Задумано некоторое трехзначное натуральное число. Известно, что как само число, так и сумма его цифр кратны 11. Если в этом числе вычеркнуть вторую цифру и вычесть полученное таким образом число из исходного, то разность будет делиться на 16. Какое число задумано?

Ответы

1. 3 мин. **2.** 1 ч. **3.** $\tau = \dfrac{tT}{t-T}$ $(t > T)$. Если $T = t/2$, то $\tau = 2T = t$. Если $T = 2$, $t = 3$, то $\tau = 6$. При $T = 1$, $t \to 1$ $(t > 1)$ имеем $\tau \to \infty$. При $T = 1$, $t \to \infty$, $\tau = T$. Константа $\lambda = 1$. **4.** $r = \dfrac{2\dfrac{m}{n}+1}{5\left(\dfrac{m}{n}+1\right)}$. Если $m = n = 1$, то $r = 30\%$; если $m = 1$, $n = 2$, то $r = \dfrac{4}{15} \approx 27\%$; если $n = 1$, $m \to \infty$, то $r = 40\%$; если $m = 1$, $n \to \infty$, то $r = 20\%$. **5.** 803.

Указания

1. Выяснить, во сколько раз отличаются скорости относительно шахты в первом и втором случаях.

2. Время, необходимое первому автомобилю для преодоления расстояния от пункта A до места встречи, составит 3/4 от времени, требуемого для движения второго автомобиля от точки встречи до пункта A.

3. При совместной работе складываются величины, обратные времени выполнения работы. В данном случае

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{t} + \frac{1}{\tau};$$

эти величины соответствуют долям бассейна, заполняемым за 1 ч.

4. Если взять m частей первого раствора и n частей второго, то в полученном после смешения растворе количество спирта будет $0{,}4m + 0{,}2n$, а количество самого раствора $m + n$.

5. Если трехзначное натуральное число N содержит k сотен, l десятков и m единиц, то его в символическом виде записывают следующим образом: $N = \overline{klm}$. При этом $N = 100k + 10l + m$. Сумма цифр при этом будет равна $S = k + l + m$; если вычеркнуть в N вторую цифру, то получим число $P = \overline{km} = 10k + m$.

Решения

1. Примем скорость Пети относительно эскалатора равной u, а скорость самого эскалатора v. Тогда $u = 2v$; при спуске вниз скорость Пети относительно неподвижной шахты будет $u + v = 3v$, а при подъеме вверх по движущемуся вниз эскалатору $u - v = v$. Таким образом, одно и то же расстояние, равное длине эскалатора, во втором случае будет преодолено втрое медленнее, т. е. за 3 мин.

2. Графическая иллюстрация к данной задаче приведена на рис. 17.1.

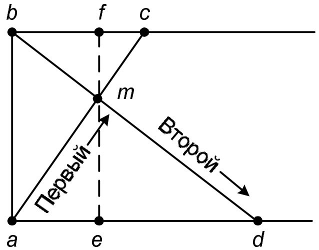

Рис. 17.1. Иллюстрация задачи 2

Здесь "горизонтальное" направление соответствует времени, "вертикальное" — координатам движущихся автомобилей. Пространственно-временная точка a соответствует старту первого автомобиля из пункта A, b — началу движения второго из B. Так как автомобили движутся равномерно, это движение будет изображаться отрезками ac и bd соответственно.

При этом точки c и d отвечают прибытию каждого из автомобилей в свой пункт назначения, а точка пересечения m соответствует месту и моменту встречи. По условию задачи отношение скоростей первого и второго автомобилей равно 4/3. Отсюда, в частности, следует, что расстояние между пунктами A и местом встречи первый автомобиль преодолеет за время, в 4/3 раза меньшее, чем второй, т. е. за 60 мин (ae); это и есть искомая величина.

Отметим, что применение схем подобного рода упрощает поиск решения во многих задачах "на движение". Иногда удобно привлекать и чисто геометрические соображения (например, треугольники bfm и dem на рис. 17.1 подобны).

3. Пусть емкость бассейна равна 1. За 1 ч первая труба, работая отдельно, заполняет долю бассейна, равную $a = 1/t$, а обе трубы вместе — $A = 1/T$. Следовательно, доля бассейна, заполняемая только второй трубой за 1 ч, есть

$$\alpha = \frac{1}{T} - \frac{1}{t} = \frac{t-T}{tT}.$$

Поэтому весь бассейн будет заполнен только второй трубой за время, равное

$$\tau = \frac{1}{\alpha} = \frac{tT}{t-T}.$$

В частном случае, когда $T = t/2$, это время будет равно $\tau = 2T$, что в действительности очевидно (трубы работают с одинаковой интенсивностью и вместе заполняют бассейн вдвое быстрее, чем по отдельности). Если $T = 2$, а $t = 3$, то $\tau = 6$, т. е. вторая труба вдвое "слабее" первой.

Рассмотрим теперь указанные в условии предельные случаи. При $T = 1$ имеем

$$\tau = \frac{t}{t-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{t}}$$

(мы выполнили деление числителя и знаменателя дроби на t). Если теперь $t \to 1$ $(t > 1)$, то

$$\frac{1}{t} \to 1 \left(\frac{1}{t} < 1\right);$$

$$1-\frac{1}{t}\to 0\ \left(1-\frac{1}{t}>0\right),$$

а все выражение $\tau \to +\infty$. Смысл такого предельного перехода весьма прост: при закрытой наглухо второй трубе бассейн заполняется лишь первой трубой за время $t = T$. Если же $T = 1$, а $t \to \infty$, то $1/t \to 0$, $1 - 1/t \to 1$, $\tau \to 1$, т. е. фактически работает лишь вторая труба: $\tau = T$. С учетом полученного выражения для τ константа

$$\lambda = \tau\cdot\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{t}\right)=\frac{tT}{t-T}\cdot\frac{t-T}{tT}=1;$$

где λ — емкость бассейна.

4. Взяв m частей первого раствора и n частей второго, получим общее количество спирта $0{,}4m + 0{,}2n$ (общее количество воды при этом составит $0{,}6m + 0{,}8n$). На весь полученный раствор приходится количество $m + n$. Доля спирта в таком растворе будет

$$r=\frac{0{,}4m+0{,}2n}{m+n}=\frac{2\frac{m}{n}+1}{5\left(\frac{m}{n}+1\right)}$$

(мы поделили числитель и знаменатель дроби на n и избавились от десятичных дробей). В частности, при $m = n = 1$ имеем

$$r=\frac{3}{10}=0{,}3=30\%,$$

т. е. концентрация спирта после смешения станет средней по отношению к его концентрациям в исходных растворах. Если $m = 1$, $n = 2$, то $r = 4/15 \approx 27\%$; концентрация снизится из-за большего влияния слабого второго раствора. Если $n = 1$, то

$$r=\frac{m+1}{5m+5}=\frac{2+\frac{1}{m}}{5+\frac{5}{m}};$$

при $m \to \infty$ имеем

$$\frac{1}{m}\to 0,\ r\to\frac{2}{5}=40\%,$$

т. е. фактически полученный раствор имеет концентрацию первого.

Обратно, при $m = 1$ и $n \to \propto$ получаем

$$r = \frac{\frac{2}{n}+1}{\frac{5}{n}+5} \to \frac{1}{5} = 20\%\,,$$

что соответствует концентрации второго.

5. Запишем данное число в виде $N = \overline{klm} = 100k + 10l + m$ ($k = 1, ..., 9$; $l, m = 0, ..., 9$). Сумма цифр этого числа равна $S = k + l + m$. Так как натуральные числа N и S кратны 11, то их разность $N - S = 99k + 9l$ также будет кратна 11. Поскольку первое слагаемое $99k$ кратно 11 при всяком $k = 1, ..., 9$, то и второе слагаемое $9l$ должно быть кратно 11. Но это возможно только при $l = 0$, т. е. у числа N в разряде десятков стоит цифра 0. При вычеркивании в числе N этой цифры получится число $P = \overline{km} = 10k + m$. По условию $N - P$ кратно 16, т. е. $90k$ кратно 16. В разложении составного числа 90 на простые множители: $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ имеется лишь одна двойка, тогда как $16 = 2^4$. Отсюда следует, что множитель k кратен 8. Но k принимает значения 1, ..., 9, поэтому существует лишь одна возможность: $k = 8$, т. е. в разряде сотен числа N стоит 8: $N = \overline{80m}$. В соответствии с признаком делимости на 11 получаем $8 + m = 11$, т. е. $m = 3$. Итак, искомое трехзначное число $N = 803$.

Комментарии

1, 2. Данные задачи относятся к т. н. "задачам на движение". Отметим, что в обеих задачах невозможно определить пройденное объектами расстояние и скорости этих объектов; определяются лишь взаимные отношения величин. Если все же ввести обозначения для скоростей и расстояний, то они тем или иным образом сократятся при решении. Например, пространственное расстояние ab на рис. 17.1 может быть произвольным, однако отношение $ab : em$ в любом случае останется равным $7:4$ (это следует из подобия треугольников abd и emd). Фиксированными являются и отношения "временных" отрезков bf и ed, fc и ae и т. д. Задача 2 относится к подтипу задач "на движение по и против течения". Единственное, что следует помнить при решении таких задач: при движении по течению собственная скорость объекта (теплохода, лодки, Пети и т. д.) и скорость течения (эскалатора) складываются, а при движении против течения — вычитаются.

3. Это представитель класса задач "на работу" (в широком смысле). Все задачи такого типа так или иначе сводятся к сложению (вычитанию) "производительностей" объектов, выполняющих "работу" (заполнение бассейна, выкапывание котлована, изготовление какого-то количества деталей и т. п.). "Производительность" равна отношению объема работы (во многих случаях этот объем удобно считать равным 1) ко времени выполнения. Предельные ситуации полезно рассматривать хотя бы для того, чтобы интуитивно представить роль и поведение входящих в задачу величин.

4. Задача на "смеси". Для устранения некоторой неопределенности в условии (массы растворов неизвестны) удобно использовать "части": если концентрации веществ относятся как $2:3$, то считать, что у нас имеются две части первого вещества и три части второго. "Часть" здесь имеет смысл коэффициента пропорциональности. Относительно данной конкретной задачи отметим, что независимо от значений m и n результирующая концентрация должна оказаться между 20% и 40%. Увеличение m по сравнению с n приводит к сдвигу этой величины к значению 40%, а увеличение n — к сдвигу в сторону 20% (таким образом можно с некоторой точностью предвидеть ответ).

5. Здесь полезно запомнить, что если натуральное число N представимо в виде $N = \overline{ab}$, то его можно записать как $N = 10a + b$ (в числе N имеется a десятков и b единиц); $K = \overline{abc} = 100a + 10b + c$ и т. д.

Задачи для самостоятельного решения

1. Задумано двузначное число. Если разделить это число на сумму его цифр, то получится 7. Если увеличить цифру в разряде десятков на 2, а цифру в разряде единиц — на 7 и в полученном числе переставить знаки, то такое число будет вчетверо больше исходного. Какое число задумано?

2. Имеется 5 кг 96%-го раствора серной кислоты. В каком количестве чистой воды следует развести этот раствор, чтобы концентрация кислоты упала до 80% (все доли — массовые)?

3. Маша и Галя могут набрать текст книги, печатая по отдельности, за 20 и 30 дней соответственно. Сколько времени займет работа, если половину этого срока будет работать Маша и половину — Галя?

4. Теплоход прошел 6 км по озеру и 9 км вверх по течению реки, затратив на весь путь 48 мин. Какова скорость теплохода при движении по озеру, если скорость течения реки 2 км/ч?

Ответы

1. 21. **2.** 600 г. **3.** 24 дня. **4.** 20 км/ч.

Занятие 18

Числовые последовательности

Последовательность. Различные способы задания последовательностей. Простейшие свойства числовых последовательностей: монотонность, ограниченность. Арифметическая и геометрическая прогрессии.

Вводные задачи

Найти указанные члены последовательностей (1—5):

1. $a_n = \dfrac{n-1}{n}$; a_5. Что больше: a_{79} или a_{97}?

2. $a_n = \dfrac{2^n}{n^2}$; a_2, a_{16}. Что больше: a_{35} или a_{37}?

3. $a_n = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1)$; a_{1000}.

4. r_n — остаток от деления натурального числа n на 4; r_{21}, r_{8m+2} ($m \in \mathbb{N}$); r_{49^5}.

5. $S_n = (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$; S_{2004}, S_{2005}, S_{2006}.

Определение

Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется *монотонно возрастающей*, если $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ (аналогично, для *монотонно убывающей* последовательности имеем $a_1 > a_2 > \ldots > a_n$).

Являются ли монотонно возрастающими или монотонно убывающими последовательности (6—8):

6. $a_n = n^2$; $b_n = (-1)^n \cdot n^2$.

7. Последовательность чисел, обратных натуральным: $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \ldots; \frac{1}{n}; \ldots$.

8. Последовательность a_n, первый член которой $a_1 = 1$, а все последующие вычисляются по формуле $a_{n+1} = (n+1) \cdot a_n$ ($n \in \mathbb{N}$). Чему равно a_7?

Определение

Последовательность $x_1; x_2; \ldots; x_n; \ldots$ называется *ограниченной снизу*, если для некоторого вещественного числа A имеем $A < x_k$ (k = 1, 2, ..., n, ...).

Аналогично, последовательность $x_1; x_2; \ldots; x_n; \ldots$ называется *ограниченной сверху*, если для некоторого $B \in \mathbb{R}$ будет $x_k < B$ ($\forall k \in \mathbb{N}$).

Последовательность $x_1; x_2; \ldots; x_n; \ldots$ называется *ограниченной*, если она является одновременно ограниченной снизу и сверху.

Являются ли ограниченными с одной или с обеих сторон последовательности (9—14); в случае утвердительного ответа указать примеры значений A и B:

9. Стационарная последовательность: c; c; c; ...; c; ... (c — некоторое вещественное число).

10. Последовательность натуральных чисел: 1; 2; ...; n; ....

11. Последовательность "обратных кубов" $a_n = n^{-3}$ $\left(1; \frac{1}{8}; \ldots; \frac{1}{n^3}; \ldots\right)$.

12. $t_n = \cos \pi n = (-1)^n$ ($n \in \mathbb{N}$).

13. Геометрическая прогрессия $a_n = q^n$ (рассмотреть два случая: $q > 1$; $-1 < q < 1$).

14. Последовательность сумм

$$a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} \ \left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4};\ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8};\ \ldots\right).$$

15. В арифметической прогрессии $a_n = a_1 + (n-1)d$ ($a \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$) найти: первые три члена; сумму первых девяти членов; сумму членов с нечетными номерами со 123-го по 321-й включительно. Определить также конкретные значения этих параметров для частного случая $a = d = 1$.

15. Натуральные числа образуют в некотором порядке геометрическую прогрессию. Если второе число увеличить на 8, то полученные числа образуют арифметическую прогрессию, а если затем последнее число увеличить на 144, то вновь образуется некоторая геометрическая прогрессия. Найти эти числа.

Ответы

1. $\frac{4}{5}$; $a_{97} > a_{79}$. **2.** $a_2 = 1$; $a_{16} = 256$; $a_{37} > a_{35}$. **3.** $a_{1000} = 1\,000\,000$.
4. $r_{21} = 1$; $r_{8m+2} = 2$; $r_{49^5} = 1$. **5.** $S_{2004} = 1$; $S_{2005} = S_{2006} = -1$.
6. Последовательность $\{a_n\}$ монотонно возрастает; последовательность $\{b_n\}$ монотонной не является. **7.** Монотонно убывает. **8.** Монотонно возрастает; $a_7 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$. **9.** Ограничена; $A = C - 1$; $B = C + 1$. **10.** Ограничена снизу: $A = 0$. Не ограничена сверху. **11.** Ограничена: $A = 0$, $B = 1{,}5$. **12.** Ограничена: $A = -2$, $B = +2$. **13.** В случае $q > 1$ ограничена снизу ($A = 1$) и не является ограниченной сверху. В случае $-1 < q < 1$ ограничена $A = -1$, $B = +1$. **14.** Ограничена: $A = 0$, $B = 1$. **15.** Первые три члена: a; $a + d$; $a + 2d$. Сумма первых девяти членов: $S_9 = 9a + 36d$. Сумма членов с нечетными номерами со 123-го по 321-й включительно: $100a + 22\,100d$. Для случая $a = d = 1$ соответственно $\{1; 2; 3\}$, $S_9 = 45$; $a_{123} + a_{125} + \ldots + a_{321} = 22\,200$. **16.** 1; 5; 25.

Указания

1. $a_n = 1 - \frac{1}{n}$; с ростом n дробь $\frac{1}{n}$ уменьшается, а разность $1 - \frac{1}{n}$ растет.

2. Для сравнения двух членов этой последовательности можно взять их отношение и сравнить его с единицей.

3. Выражение $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$ легко "свернуть" по общей формуле суммы k первых членов арифметической прогрессии:

$$S_k = \frac{a_1 + a_k}{2} \cdot k,$$

где k — количество членов прогрессии, подлежащих суммированию.

4. Выполнить деление с остатком чисел 21; $8m + 2$; 49^5 на 4 (при этом неполное частное значения не имеет).

5. Показатель степени $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$; важна его четность.

10, 11. Учесть монотонность указанных последовательностей.

14. Использовать формулу суммы n первых членов геометрической прогрессии:

$$S_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q},$$

где b_1 — первый член прогрессии, q — знаменатель прогрессии, $q \neq 1$.

16. Характеристическое свойство членов арифметической прогрессии: $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$ ($n = 2, 3, \ldots$). Характеристическое свойство членов геометрической прогрессии: $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$ ($n = 2, 3, \ldots$).

Решения

1. $a_5 = \frac{5-1}{5} = \frac{4}{5}$; $a_{79} = \frac{78}{79} = 1 - \frac{1}{79}$; $a_{97} = 1 - \frac{1}{97}$; $\frac{1}{79} > \frac{1}{97}$; $1 - \frac{1}{79} < 1 - \frac{1}{97}$; $a_{79} < a_{97}$.

2. $a_2 = \frac{2^2}{2^2} = 1$, $a_{16} = \frac{2^{16}}{16^2} = \frac{2^{16}}{\left(2^4\right)^2} = 2^8 = 256$.

Для сравнения a_{35} и a_{37} найдем их отношение:

$$\frac{a_{35}}{a_{37}} = \frac{2^{35}}{35^2} : \frac{2^{37}}{37^2} = \frac{1}{2^2} \cdot \left(\frac{37}{35}\right)^2 = \left(\frac{37}{70}\right)^2 < 1.$$

Следовательно, $a_{35} < a_{37}$.

3. По формуле суммы арифметической прогрессии (в данном случае первый член равен 1, разность 2, количество членов n) имеем:

$$a_n = \frac{1 + (2n-1)}{2} \cdot n = n^2.$$

Следовательно, $a_{1000} = 1\,000\,000$.

4. Так как 21 = 5 · 4 + 1, то остаток $r_{21} = 1$. Далее, $8m + 2 = 2m \cdot 4 + 2$; остаток 2. Наконец,

$$49^5 = (48+1)^5 =$$

$$= (4 \cdot 12 + 1) \cdot (4 \cdot 12 + 1) \cdot (4 \cdot 12 + 1) \cdot (4 \cdot 12 + 1) \cdot (4 \cdot 12 + 1);$$

при раскрытии скобок получим число вида 4p + 1, $p \in \mathbb{N}$. Поэтому искомый остаток есть 1.

5. $S_{2004} = (-1)^{\frac{2004 \cdot (2004+1)}{2}} = (-1)^{1002 \cdot 2005}$; в показателе степени — четное натуральное число. Поэтому $S_{2004} = 1$. Аналогично

$$S_{2005} = (-1)^{\frac{2005 \cdot 2006}{2}} = (-1)^{2005 \cdot 1003} = -1;$$

$$S_{2006} = (-1)^{\frac{2006 \cdot 2007}{2}} = (-1)^{1003 \cdot 2007} = -1 .$$

6. Так как при всех натуральных n будет $(n+1)^2 > n^2$, то $a_{n+1} > a_n$ ($\forall\, n \in \mathbb{N}$). Это говорит о монотонном возрастании a_n. Последовательность $\{b_n\}$ — знакочередующаяся, и уже поэтому не может быть монотонной.

7. Очевидно,

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n .$$

Таким образом, данная последовательность — строго убывающая.

8. Так как $n + 1 > 1$ ($\forall\, n \in \mathbb{N}$), то $a_{n+1} > a_n$ ($\forall\, n \in \mathbb{N}$). При этом $a_2 = 2a_1 = 2$, $a_3 = 3a_2 = 6$, $a_4 = 24$, $a_5 = 120$, $a_6 = 720$, $a_7 = 5040$.

9. Например, $c - 1 < c < c + 1$, т. е. данная последовательность — ограниченная.

10. Очевидно, в качестве нижней границы A можно взять число 0; верхней границы нет (существуют сколь угодно большие натуральные числа, т. е. для любого $B > 0$ найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что $n > B$). Значит, указанная последовательность ограничена снизу и не является ограниченной сверху. Поэтому она не является ограниченной.

11. Данная последовательность обладает свойством положительности: $a_n > 0$ ($\forall\, n \in \mathbb{N}$), т. е. подходит $A = 0$. При этом

$$1 > \frac{1}{2^3} > \ldots > \frac{1}{n^3} > \ldots ;$$

все члены последовательности не превосходят первого, равного 1. Поэтому годится $B = 1{,}5$.

12. В последовательности t_n все члены с четными номерами равны 1, а с нечетными -1: -1, $+1$, -1, $+1$, ... Можно взять $A = -2$, $B = +2$.

13. При $q > 1$ имеем возрастающую последовательность; все ее члены $a_n \geq q > 1$, т. е. эта последовательность ограничена снизу числом $A = 1$. В то же время, как бы ни было велико $B > 0$, найдется $n \in \mathbb{N}$ такое, что $q^n > B$. Поэтому данная последовательность не является ограниченной. При условии $-1 < q < 1$ будет выполнено неравенство $-1 < q^n = a_n < 1$, последовательность ограничена ($A = -1$, $B = +1$).

14. По формуле суммы геометрической прогрессии

$$a_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Очевидно, что для всех $n \in \mathbb{N}$ $A = 0 < a_n < 1 = B$; a_n — ограниченная последовательность.

15. Первые три члена прогрессии: $a_1 = a$, $a_2 = a + d$, $a_3 = a + 2d$. Сумма первых девяти членов:

$$S_9 = \frac{a_1 + a_9}{2} \cdot 9 = \frac{a + (a + 8d)}{2} \cdot 9 = 9a + 36d.$$

Члены с номерами 123, 125, ..., 321 образуют арифметическую прогрессию. С первым членом $a_{123} = a + 122d$, разностью $2d$, а их количество равно

$$\frac{321 - 123}{2} + 1 = 100.$$

Их общая сумма

$$\frac{2(a + 122d) + 2d \cdot 99}{2} \cdot 100 = 100a + 22100d.$$

В частном случае $a = d = 1$ имеем прогрессию из последовательных натуральных чисел: 1; 2; 3; ..., n. Сумма девяти первых членов $S_9 = 9a + 36d = 45$. Сумма членов a_{123}; a_{125}; ...; a_{321} будет равна 22 200.

16. Запишем данные числа в виде x, qx, qx^2 соответственно (q — знаменатель исходной геометрической прогрессии). Тогда арифметическая прогрессия будет иметь члены x, $qx + 8$, qx^2, а вторая геометрическая прогрессия — члены x, $qx + 8$, $qx^2 + 144$.

Используя характеристическое свойство для членов арифметической прогрессии $2a_2 = a_1 + a_3$ и для членов геометрической прогрессии $b_2{}^2 = b_1 b_3$, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2(qx+8) = x + q^2 x, \\ (qx+8)^2 = x \cdot (q^2 x + 144). \end{cases}$$

Из второго уравнения системы $q^2x^2 + 16qx + 64 = q^2x^2 + 144x$, откуда можно получить выражение для x через q:

$$x = \frac{4}{9-q}.$$

Подставим это выражение в первое уравнение, предварительно записав его в виде $x(q-1)^2 = 16$: $\frac{4}{q-9} \cdot (q-1)^2 = 16$.

Из этого уравнения, легко сводящегося к квадратному, можно определить знаменатель q:

$$(q-1)^2 = 4 \cdot (9-a);$$

$$q^2 + 2q - 35 = 0;$$

$$q = 5.$$

(Отрицательный корень $q = -7$ не удовлетворяет условию задачи.) Тогда $x = 1$, а исходная прогрессия состоит из чисел 1; 5; 25.

Комментарии

1—5. Числовую последовательность иногда определяют как функцию натурального аргумента: $a_n = a(n)$, $n \in \mathbb{N}$. В разнообразных задачах последовательность всюду задавалась явно, формулой общего члена a_n, либо, как в *задаче 4*, описательно. Наряду с явным способом задания последовательности, существует т. н. *рекуррентный способ задания*: сначала определяется первый член последовательности (или несколько первых членов), а затем по определенной формуле через предыдущие вычисляются последующие. Например, последовательность Фибоначчи определяется двумя первыми членами $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ и рекуррентной формулой $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$). Первые несколько членов этой последовательности: 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; ... Скорость роста членов этой последовательности примерно совпадает со скоростью роста геометрической прогрессии. Существует и явная формула общего члена последовательности Фибоначчи:

$$f_n = \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right],$$

но ее вывода мы здесь не приводим. Ниже, в *задаче 8*, определяется последовательность факториалов натуральных чисел: $a_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$; эта последовательность нами введена рекуррентно. Отметим, что скорость роста членов данной последовательности в некотором смысле значительно превышает "геометрическую" и тем более "арифметическую" (более точно, существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!} = 0 \quad (q \in \mathbb{R}),$$

т. е. выражение $\frac{q^n}{n!}$ сколь угодно мало отличается от 0 при достаточно больших n.) Рекуррентными формулами в школьном курсе математики вводятся арифметическая и геометрическая прогрессии: $a_n = a_{n-1} + d$ и $b_n = b_{n-1} \cdot q$, соответственно; здесь d — разность арифметической прогрессии, а q — знаменатель геометрической прогрессии.

6—8. Кроме строго возрастающей ($a_{n+1} > a_n$, $n \in \mathbb{N}$) и строго убывающей ($a_{n+1} < a_n$, $n \in \mathbb{N}$), определяются *нестрого монотонные последовательности* ($a_{n+1} \geq a_n$, $a_{n+1} \leq a_n$, соответственно). Например, последовательность

$$a_{n+1} = a_n + \cos^2 \frac{\pi n}{2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

такова: 0; 0; 1; 1; 2; 2. Она является неубывающей последовательностью.

9—14. Существует несколько иное определение ограниченной последовательности: последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если для некоторого $M > 0$ будет выполнено неравенство $|x_n| < M \quad (n \in \mathbb{N})$. Легко доказать, что это определение эквивалентно приведенному выше. Заметим еще, что абсолютно аналогично определяется ограниченность (неограниченность) произвольного числового множества. Например, интервал $(-1; 4)$ есть ограниченное числовое множество, а множество $\{x \in \mathbb{R} : \sin \pi x = 0\} = \mathbb{Z}$ ограниченным не является. В первом случае верно неравенство $|x| < 5 \quad (\forall\, x \in (-1; 4))$, а во втором какое бы $M > 0$ мы не взяли, найдется целое число — решение уравнения $\sin \pi x = 0$ — большее *M*. Что касается примера последовательности

$$a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n},$$

то ее ограниченность сверху представляется очевидной: сумма

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}$$

меньше суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = 1 .$$

В действительности понятие бесконечной суммы — это элемент высшей математики, присутствующий в школьной программе лишь на наглядно-интуитивном уровне.

16. Многие задачи "на прогрессии" удобно решать именно с привлечением упомянутых выше характеристических свойств, а не через "основные" параметры прогрессии — первый член и разность (первый член и знаменатель).

Задачи для самостоятельного решения

1. Показать, что все члены последовательности

$$t_n = \frac{(n+2)^3 - (n-2)^3}{3(n^2+1)+1}$$

равны одному и тому же вещественному числу. Указать это число.

2. Найти все $n \in \mathbb{N}$, при которых соответствующий член последовательности $a_n = n(n-14)+21$ положителен.

3. Найти номер члена последовательности $a_n = 0{,}17 \cdot 2^n$, ближайшего к 1.

4. Найти первый иррациональный член последовательности $c_n = \cos\frac{96\pi}{2^n}$.

5. Пусть

$$a_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Чему равно a_{100}? Как будет вести себя данное выражение, если $n \to \infty$?

6. При каких значениях параметра p арифметическая прогрессия

$$a_n = \left(p^2 + p - 6\right)n$$

будет убывающей?

7. Найти второй член геометрической прогрессии, если ее первый и четвертый члены соответственно равны

$$b_1 = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}, \; b_4 = \operatorname{ctg}^2\frac{3\pi}{8}.$$

8. Найти первый отрицательный член прогрессии 41,2; 39,8; 38,4;

9. При каких значениях параметра b три числа

$$\frac{1}{b};\ \frac{1}{b+1};\ \frac{1}{b+3}$$

в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию? Какова разность этой прогрессии?

10. Пусть последовательность $\{a_n\}$ — арифметическая прогрессия: $a_n = 2n + 4$ ($n \in \mathbb{N}$). Найти сумму членов прогрессии, являющихся трехзначными натуральными числами и имеющих номера, кратные 3.

11. Найти сумму 0,(1) + 0,(2) + ... + 0,(8). Показать, что ее значение есть число целое.

12. В сферу, ограничивающую объем $V = 1$, поместили еще одну сферу таким образом, что малая сфера касается большой и содержит ее центр. Во вторую сферу поместили третью, касающуюся ее и проходящую через ее центр и т. д. Какая по счету сфера, начиная со сферы, ограничивающей единичный объем, будет иметь объем менее $\frac{V}{500}$?

13. Сколько существует различных арифметических прогрессий из пяти членов — натуральных чисел, сумма членов для каждой из которых равна 20?

14. Дано квадратное уравнение

$$nx^2 - 2x - 1 = 0 \ \ (n \in \mathbb{N}).$$

Пусть x_n — больший корень этого уравнения. Найти номера тех членов последовательности x_n, которые являются целыми числами.

15. Пусть $\{\pi_n\}$ — возрастающая последовательность, члены которой — простые натуральные числа. Известно, что произведение

$$\pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \pi_4 \cdot \pi_5 = 11\,110.$$

Найти π_3.

Ответы

1. 4. **2.** $n = 1$; $n > 12$. **3.** $n = 2$. **4.** $c_7 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. **5.** $a_{100} = \frac{100}{101}$. Если $n \to \infty$, то $a_n \to 1$. **6.** $p \in (-3;\ 2)$. **7.** 1. **8.** 31. **9.** $b = 3$; $d = -\frac{1}{12}$. **10.** 82 050. **11.** 4. **12.** Четвертая. **13.** Три. **14.** $n = 3$. (*Указание:* найти явное выражение для большего корня уравнения. Затем приравнять его к некоторому $k \in \mathbb{Z}$. Получить уравнение $\sqrt{n+1} = kn - 1$, возвести обе его части в квадрат и далее исходить из соображений делимости.) **15.** 7. (*Указание:* учесть, что всякое составное натуральное число лишь единственным образом представимо в виде произведения простых сомножителей.)

Занятие 19

Стереометрия. Круглые тела

Цилиндр, конус, усеченный конус, шар. Вычисление площадей поверхностей и объемов. Комбинации круглых тел.

Вводные задачи

1. Металлическая труба длиной h имеет диаметр D и толщину Δ. Найти массу M трубы при плотности металла ρ. Как будет вести себя величина M, если $\Delta \to 0$; если $\Delta \to D/2$? Каков смысл этих предельных ситуаций?

2. Пусть V — объем полушара, S — площадь его поверхности, R — радиус. Чему равно отношение $V|(SR)$?

3. Что больше: отношение объема куба к объему вписанного шара или отношение объема шара к объему вписанного куба?

4. Объемы двух касающихся сфер V_1 и V_2 ($V_1 < V_2$). Найти объем сферы, касающейся двух других, если центры всех трех сфер лежат на одной прямой линии. Как будет вести себя эта величина, если

$$V_1 = \frac{4\pi}{3},\ V_2 \to \frac{4\pi}{3}\,?$$

Если

$$V_1 = \frac{4\pi}{3},\ V_2 \to 0\,?$$

5. Найти высоту H усеченного конуса с радиусом большего основания R и углом наклона образующей к плоскости основания α, если в него можно вписать сферу. Рассмотреть, в частности, случай $R = 1$, $\alpha = \pi/3$. Как будет вести себя величина H, если $\alpha \to \pi/2$? Каков геометрический смысл данной предельной ситуации?

6. Найти объем цилиндра, если его высота вдвое короче диагонали осевого сечения, а площадь полной поверхности $S_{\text{полн}} = \pi$.

7. На площадь основания приходится 1/3 часть полной поверхности конуса. Какая из точек ближе к вершине конуса — центр вписанной или центр описанной сферы?

Ответы

1. $M = \pi\rho h\Delta \cdot (D - \Delta)$; если $\Delta \to 0$, то $M \to 0$; если $\Delta \to \frac{D}{2}$, то $M \to \pi\rho h \cdot \frac{D^2}{4}$. **2.** $4:9$. **3.** Второе отношение больше. **4.** $V = \frac{4\pi}{3} \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{3V_1}{4\pi}} \pm \sqrt[3]{\frac{3V_2}{4\pi}}\right)^3$ (возможны два варианта расположения сфер в пространстве; рассмотрение предельных ситуаций *см. в разд. "Решения"*). **5.** $H = 2R \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. В частном случае $R = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$, имеем $H = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Если $\alpha \to \frac{\pi}{2}$, то $H \to 2R$ (усеченный конус переходит в квадрат). **6.** $V = \frac{\left(3\sqrt{3} - 5\right)\sqrt[4]{3}}{2} \cdot \pi$. **7.** Данные точки совпадают.

Указания

1. Задача сводится к вычислению объема тела, заключенного между двумя соóсными цилиндрами. Массу тела можно определить по формуле $M = \rho V$, где V — объем тела, ρ — его плотность.

2. $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, $S = 4\pi R$.

3. В первом случае диаметр шара равен длине ребра куба, во втором — длине диагонали куба.

4. Две сферы с данными объемами могут касаться как внешним, так и внутренним образом.

5. Рассмотреть осевое сечение усеченного конуса. Использовать теорему планиметрии: в четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда суммы длин противоположных сторон равны.

6. Объем цилиндра $V = \pi r^2 h$, полная поверхность $S_{\text{полн}} = 2\pi r^2 + 2\pi rh$, где r — радиус основания конуса, h — высота цилиндра.

7. Определить угол наклона образующей к плоскости основания.

Решения

1. Объем, "заполненный" металлом, есть разность объемов двух цилиндров равной высоты h и радиусов оснований $\frac{D}{2}$ и $\frac{D}{2} - \Delta$ соответственно. Этот объем равен

$$V = \pi h \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 - \pi h \cdot \left(\frac{D}{2} - \Delta\right)^2 = \pi h \cdot \left(D\Delta - \Delta^2\right).$$

Масса трубы $M = \rho V = \pi\rho h \cdot \Delta(D - \Delta)$. Если $\Delta \to 0$, то, очевидно, $M \to 0$ ("труба из фольги"); если

$$\Delta \to \frac{D}{2},$$

то

$$M \to \pi\rho h \cdot \frac{D^2}{4}.$$

Последняя величина соответствует массе "сплошной", без полости, трубы ($\pi h \cdot \dfrac{D^2}{4}$ — объем цилиндра диаметра D и высоты h).

2. При фиксированном (но произвольном) радиусе шара R его объем

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

площадь поверхности $S = 4\pi R^2$.

Объем полушара

$$V_{1/2} = \frac{2}{3}\pi R^3;$$

площадь поверхности $S = 2\pi R^2 + \pi R^2 = 3\pi R^2$ (поверхность полушара складывается из половины поверхности шара и площади круга радиуса R). Искомая постоянная

$$\frac{V}{SR} = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \frac{1}{3\pi R^2} \cdot \frac{1}{R} = \frac{4}{9}.$$

3. В первом случае шар касается граней куба в их центрах. Это означает, что диаметр шара $d = 2r$ (r — радиус шара) равен высоте куба. Высота же куба равна его ребру A. Объем куба

$$V_{\text{к}} = A^3,$$

объем шара

$$v_{\text{ш}} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{A}{2}\right)^3 = \frac{\pi A^3}{6}.$$

Отношение

$$\frac{V_{\text{к}}}{v_{\text{ш}}} = \frac{6}{\pi}.$$

Во втором случае центр шара совпадает с серединой диагонали куба. Если ребро куба равно a, то его диагональ имеет длину $a\sqrt{3}$, а половина диагонали — радиус шара —

$$R = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Следовательно, объем куба $v_к = a^3$, объем шара

$$V_ш = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{\pi a^3}{2}\sqrt{3}\,.$$

Отношение объемов

$$\frac{V_ш}{v_к} = \frac{\pi a^3}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{2}\,.$$

Таким образом, следует сравнить числа

$$\frac{6}{\pi} = \mu \text{ и } \frac{\pi\sqrt{3}}{2} = \lambda\,.$$

Имеем

$$\pi = 3{,}14... > 3 \Rightarrow \frac{6}{\pi} < \frac{6}{3} = 2\,,$$

т. е.

$$\mu < 2;\ \sqrt{3} > 1{,}5;\ \Rightarrow \frac{\pi\sqrt{3}}{2} > \frac{3 \cdot 1{,}5}{2} = 2{,}25\,,$$

т. е. $\lambda > 2$. Следовательно, второе отношение больше первого.

4. Возможны два случая:

- сферы касаются внешним образом;
- меньшая по объему сфера касается изнутри большей.

Радиусы сфер с объемами V_1 и V_2 равны соответственно

$$R_1 = \sqrt[3]{\frac{3V_1}{4\pi}} \text{ и } R_2 = \sqrt[3]{\frac{3V_2}{4\pi}}\,.$$

На рис. 19.1 точки O_1 и O_2 — центры этих сфер (изображен случай внешнего касания). Точки касания K_{12} этих сфер, K_1 касания малой сферы с третьей, K_2 касания большой сферы с третьей лежат на той же прямой, что и точки O_1, O_2. При этом $K_1K_{12} = K_{12}K_2$, т. е. $2R_1 + 2R_2 = D$, где $D = 2R$ — диаметр третьей сферы. Следовательно, радиус третьей сферы

$$R = R_1 + R_2 = \sqrt[3]{\frac{3V_1}{4\pi}} + \sqrt[3]{\frac{3V_2}{4\pi}}\,,$$

а ее объем

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt[3]{\frac{3V_1}{4\pi}} + \sqrt[3]{\frac{3V_2}{4\pi}}\right)^3.$$

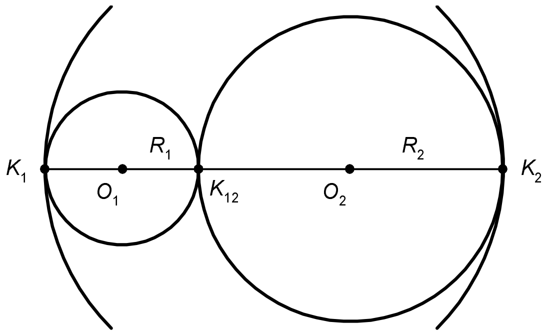

Рис. 19.1. Внешнее касание сфер

В случае внутреннего касания сфер с объемами V_1 и V_2 выкладки аналогичны; разница состоит в том, что радиусы R_1 и R_2 будут вычитаться

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V_1}{4\pi}} - \sqrt[3]{\frac{3V_2}{4\pi}}.$$

Объем третьей сферы тогда будет равен

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt[3]{\frac{3V_1}{4\pi}} - \sqrt[3]{\frac{3V_2}{4\pi}}\right)^3.$$

Если

$$V_1 = \frac{4\pi}{3},\ V_2 \to \frac{4\pi}{3},$$

то

$$R_1 = 1,\ R_2 \to 1;$$

$$V = \frac{32\pi}{3},$$

а $v \to 0$ (третья сфера "зажата" в узком зазоре между первыми двумя). Если $V_2 \to 0$, то $R_2 \to 0$, $v \to V_1$ (третья сфера "почти совпадает" с первой).

5. Рассмотрим осевое сечение данного усеченного конуса — равнобедренную трапецию $ABCD$ (рис. 19.2); обозначения ясны из рисунка.

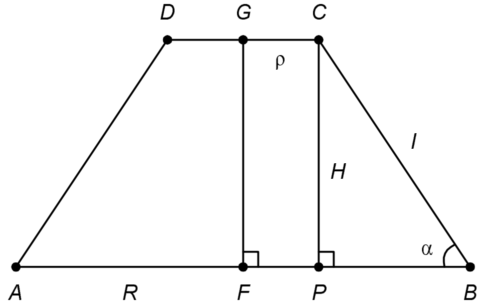

Рис. 19.2. Осевое сечение усеченного конуса

Запишем соотношения, связывающие параметры ρ, R, H, l и α. Так как по условию в усеченный конус можно вписать сферу, то в его осевое сечение можно вписать окружность. Поэтому $AD + BC = AB + CD$; имеем соотношение $R + \rho = l$. Далее, из прямоугольного треугольника BCP ($\angle P = \pi/2$) $H = l \cdot \sin\alpha$; $PB = R - \rho = l \cdot \cos\alpha$. Таким образом, можно записать систему уравнений

$$\begin{cases} R + \rho = l, \\ R - \rho = l\cos\alpha, \\ H = l\sin\alpha. \end{cases}$$

Складывая первое уравнение со вторым, получаем $2R = l + l \cdot \cos\alpha$, откуда

$$l = \frac{2}{1+\cos\alpha} \cdot R.$$

С учетом первого уравнения

$$\rho = l - R = \left(\frac{2}{1+\cos\alpha} - 1\right) \cdot R = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha} \cdot R$$

(первый множитель — тригонометрическую дробь — можно записать еще и так: $\mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}$.) Наконец, параметр

$$H=\frac{2\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot R=2R\cdot\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Именно эту величину требовалось оценить. В частном случае, когда $\alpha=\pi/3$, $R=1$, численные значения параметров будут $l=4/3$, $\rho=1/3$, $H=2/\sqrt{3}$ (при этом "нижнее" основание по радиусу втрое, а по площади вдевятеро превосходит "нижнее"). Что касается предельного случая $\alpha\to\pi/2$, то здесь $l\to 2R$; $\rho\to R$; $H\to 2R$ — осевое сечение приобретает вид квадрата, а сам усеченный конус вырождается в цилиндр.

6. Осевое сечение цилиндра — прямоугольник с измерениями h и $2r$ (h — высота цилиндра, r — радиус основания). По условию диагональ прямоугольника равна $2h$. В соответствии с теоремой Пифагора

$$h^2+4r^2=4h^2;$$

$$3h^2=4r^2;$$

$$h=\frac{2}{\sqrt{3}}r.$$

Полная поверхность цилиндра складывается из боковой поверхности и общей площади его оснований: $S=2\pi rh+2\pi r^2=\pi$. Тогда

$$rh+r^2=\frac{1}{2};$$

$$r\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}r+r^2=\frac{1}{2};$$

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+1\right)\cdot r^2=\frac{1}{2};$$

$$r^2=\frac{\sqrt{3}}{2\left(2+\sqrt{3}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(2-\sqrt{3}\right);$$

$$h^2=\frac{4}{3}r^2=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(2-\sqrt{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(4-2\sqrt{3}\right);$$

$$h = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt[4]{3}}.$$

Объем цилиндра

$$V = \pi r^2 h = \pi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\left(2-\sqrt{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt[4]{3}} = \frac{\left(3\sqrt{3}-5\right)\cdot\sqrt[4]{3}}{2} \cdot \pi .$$

7. Из условия следует, что площадь основания составляет половину площади боковой поверхности. Но отношение

$$\frac{S_{\text{осн}}}{S_{\text{бок}}} = \cos\varphi ,$$

где φ — угол между образующей и радиусом основания. Отсюда $\varphi = 60°$. Значит, осевое сечение конуса является равносторонним треугольником. Вписанной и описанной сферам соответствуют вписанная и описанная в этот треугольник окружности. Для правильного треугольника указанные точки совпадают.

Комментарии

2. Величина V — объем полушара — пропорциональна кубу радиуса шара, а S — площадь поверхности — пропорциональна R^2. Поэтому заранее очевидно, что "безразмерное" отношение V/SR должно быть постоянной, не зависящей от R величиной. То же относится, например, к величине S^3/V^2 (она будет постоянной для полушара и для шара).

4. Отметим, что в случае равных сфер ($V_1 = V_2$) результат легко предсказуем: $V = 8V_1$. Это связано с тем, что увеличение линейного размера — радиуса сферы — вдвое влечет за собой увеличение объема величины кубичной размерности относительно длины в 2^3, т. е. в восемь раз.

5. Если требуется решить задачу "в общем виде", т. е. выразить искомые величины через известные параметры, то для проверки правильности решения полезно рассмотреть некоторые простейшие предельные ситуации. Упомянутые случаи ($\alpha = \pi/3$, $\alpha = \pi/2$) легко "обрабатываются" непосредственно, без использования общих формул.

7. Если плоская фигура Φ в пространстве проектируется на некоторую плоскость, то площадь полученной проекции Φ' связана с площадью фигуры Φ соотношением

$$S(\Phi') = S(\Phi) \cdot \cos\alpha,$$

где α — угол между плоскостью фигуры Φ и плоскостью, на которую выполняется проектирование.

В частности, если $\alpha = 0$, $\cos\alpha = 1$, $S(\Phi') = S(\Phi)$ — фигура проектируется сама на себя, площадь постоянна; если $\alpha = 60°$, $\cos\alpha = 1/2$,

$$S(\Phi') = \frac{1}{2} S(\Phi),$$

т. е. площадь проекции вдвое меньше площади самой фигуры.

Случай $\alpha \to 90°$ также имеет простой геометрический смысл: проекцией фигуры конечных размеров является отрезок (в действительности получается некоторое подмножество отрезка). Тогда $S(\Phi') = 0$.

Коническая поверхность криволинейна, и к ней приведенные соображения, строго говоря, неприменимы. Однако можно мысленно разбить эту поверхность на множество мелких "лоскутков" почти плоской формы. Каждый такой фрагмент поверхности, проектируясь на плоскость основания, будет вносить свой вклад в площадь проекции всей боковой поверхности; при этом будет действовать приведенная выше формула (α — угол наклона образующей к плоскости основания — величина постоянная). Поскольку коэффициент $\cos\alpha$ один и тот же для всех фрагментов, отношение площади основания к площади боковой поверхности так же будет равно $\cos\alpha$ (в нашем случае это 1/2).

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти отношение объема куба к объему вписанного в него цилиндра (основания цилиндра принадлежат граням куба).

2. В конус с площадью основания 9π и объемом 12π вписан шар. Найти радиус этого шара.

3. Равносторонний треугольник площади $S = \sqrt{3}$ вращается вокруг одной из своих сторон. Найти поверхность тела вращения.

4. Три сферы, каждая радиусом $R = 2$, касаются друг друга попарно. Еще одна сфера радиусом $r = 1$ касается каждой из этих трех сфер. Найти объем тетраэдра с вершинами в центрах этих трех сфер.

5. То же для случая $R = \sqrt{3}$, $r = 2 - \sqrt{3}$.

6. Усеченный конус вписан в шар объемом

$$V = \frac{32\pi}{3}$$

таким образом, что его большее основание соответствует большому кругу. Найти площадь боковой поверхности усеченного конуса, если радиусы его оснований относятся как $2:1$.

7. Плоские углы при вершине O треугольной пирамиды $OABC$ — прямые. Известны длины боковых ребер пирамиды: $OA = 3$, $OB = 4$, $OC = 6$. Пусть F — центр описанной около этой пирамиды сферы. Найти объем тетраэдра $OABF$.

Ответы

1. $4:\pi$. **2.** 1. (*Указание:* рассмотреть осевое сечение конуса.) **3.** $2\sqrt{3}\cdot\pi$. **4.** $\frac{4\sqrt{11}}{3}$. **5.** Условие задачи некорректно, т. к. центры всех четырех сфер в этом случае принадлежат одной плоскости и не определяют тетраэдр. **6.** 6π. (*Указание:* рассмотреть осевое сечение.) **7.** 6.

Занятие 20

Производная

Производная как предел разностного отношения. Геометрический смысл производной, касательная к графику функции. Физический смысл производной. Вычисление производных элементарных функций. Использование производной для исследования функций на монотонность и экстремумы. Доказательство некоторых неравенств.

Вводные задачи

1. Задана последовательность $a_n = n^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$: 0, 1, 4, 9, 16, ..., n^2, ... Пусть $b_n = a_{n+1} - a_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Найти b_0, b_1, b_2, b_3. Пусть далее, $f(x) = x^2$, $x \geq 0$, $g'(x) = f(x)$. Найти $g(1/2)$, $g(3/2)$, $g(5/2)$, $g(7/2)$. Показать, что $g(n + 1/2) = b_n$.

2. Пусть $f(x) = x^2$, $x \geq 0$, $x_0 = 1$. Найти значения разностного отношения

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

для $x = 2$, $x = 1{,}1$, $x = 1{,}01$. Как будет вести себя данное отношение, когда $x \to x_0$?

3. Материальная точка движется по закону

$$h(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2, \; v_0 = const, \; v_0 > 0,$$

$$g = const\ ,\ \ g > 0\ .$$

Найти скорость точки в момент времени t, 0, $2v_0 / g$, v_0 / g. Объяснить полученные результаты с точки зрения физического смысла. Каково ускорение материальной точки?

4. Найти производные следующих функций:

а) $f(x) = x^7 - \dfrac{3}{4}x^8$;

б) $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x\sqrt[3]{x}} + 2$;

в) $f(x) = 2^x + 3^{x-1}$;

г) $f(x) = \ln x + \lg x + \ln 10 + \lg e$;

д) $f(x) = x^2 \cdot e^x$;

е) $f(x) = \dfrac{1 + 2x + 3x^2 + 4x^3}{2\sqrt{x}}$;

ж) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$;

з) $f(x) = e^{5x-1}$;

и) $f(x) = \sin x^2$;

к) $f(x) = \cos^2 x$;

л) $f(x) = \left(\left(1 + \dfrac{x}{2}\right)\sqrt{x^2 + 4x} - 2\ln\left(\sqrt{x^2 + 4x} + x + 2\right) + \ln 8\right)$.

5. Найти угол наклона касательной к графику функции $y = e^x$ в следующих точках: $x_1 = -1$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$; $x_4 = 2$; $x_5 = 100$; $x_6 = -100$.

6. Показать, что следующие функции являются строго возрастающими на указанных промежутках:

а) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$; $[1;\ +\infty)$;

б) $f(x) = \sin x$; $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$;

в) $f(x) = e^{2x-2}$; $\mathbb{R}$;

г) $f(x) = x^2 \cdot e^x$; $[0;\ +\infty)$.

7. Найти промежутки возрастания и убывания и точки экстремума следующих функций:

а) $f(x) = 12(3-4x)$;

б) $f(x) = x^3$;

в) $f(x) = |x|$;

г) $f(x) = x^2 + x^3$;

д) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$;

е) $f(x) = 2^x + 4^{-x}$;

ж) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

8. Построить графики следующих функций:

а) $f(x) = x \cdot e^{-x}$;

б) $f(x) = \dfrac{|x|}{x^2+1}$.

9. Доказать неравенства, пользуясь производной:

$$\sin x \le x,\ x \ge 0;\ \cos x \ge 1 - \frac{x^2}{2},\ x \ge 0;$$

$$\sin x \ge x - \frac{x^3}{6},\ x \ge 0$$

(более того, при $x > 0$ имеем $\sin x < x$, $\cos x > 1 - \dfrac{x^2}{2}$, $\sin x > x - \dfrac{x^3}{6}$).

10. Записать уравнение касательной к графику функции $y = 2x - x^2$, проходящей через точку:

а) $M(2;\ 0)$;

б) $K(-1;\ 0)$.

Ответы

1. Первые члены последовательности b_n: 1, 3, 5, 7. Значения функции $g(x)$: $g(1/2) = 1$, $g(3/2) = 3$, $g(5/2) = 5$, $g(7/2) = 7$. Имеет место равенство $g(n + 1/2) = b_n = 2n + 1$. **2.** 3; 2,1; 2,01; при $x \to x_0$ разностное отношение стремится к 2. **3.** $v(t) = v_0 - gt$; $v(0) = v_0$; $v\left(\dfrac{2v_0}{g}\right) = -v_0$; $v\left(\dfrac{v_0}{g}\right) = 0$; $a(t) = -g$. **4.** а) $f'(x) = 7x^6 - 6x^7$; б) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{4}{3x^2 \cdot \sqrt[3]{x}}$; в) $f'(x) = 2^x \ln 2 + 3^{x-1} \ln 3$; г) $f'(x) = \dfrac{\lg(10e)}{x}$; д) $f'(x) = x(x+2) \cdot e^x$; е) $f'(x) = \dfrac{20x^3 + 9x^2 + 2x - 1}{4x\sqrt{x}}$; ж) $f'(x) = \dfrac{x \cos x - \sin x}{x^2}$; з) $f'(x) = 5e^{5x-1}$; и) $f(x) = 2x \cdot \cos x^2$; к) $f'(x) = -\sin 2x$; л) $f'(x) = \sqrt{x^2 + 4x}$. **5.** $\alpha_1 = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{e} \approx 0{,}35$ (рад) $\approx 20°$; $\alpha_2 = \dfrac{\pi}{4} = 45°$; $\alpha_3 = \operatorname{arctg} e \approx 1{,}22$ (рад) $\approx 70°$; $\alpha_4 = \operatorname{arctg} e^2 \approx 1{,}44$ (рад) $\approx 82°$; $\alpha_5 = \operatorname{arctg} e^{100} \approx \dfrac{\pi}{2}$; $\alpha_6 = \operatorname{arctg} e^{-100} \approx 3{,}72 \cdot 10^{-44}$ (рад). **7.** а) убывает на $\mathbb{R}$, экстремумов нет; б) возрастает на $\mathbb{R}$, экстремумов нет; в) убывает на $(-\infty;\ 0]$ и возрастает на $[0;\ +\infty)$, $x_0 = 0$ — точка минимума; $y(0) = 0$; г) возрастает на $(-\infty;\ -2/3]$; убывает на $[-2/3;\ 0]$; возрастает на $[0;\ +\infty)$. Экстремумы: точка максимума $x_1 = -2/3$, ($y(x_1) = 4/27$); точка минимума $x_2 = 0$ ($y(x_2) = 0$); д) возрастает на $(-\infty;\ -2]$; убывает на $[-2;\ -1)$; убывает на $(-1;\ 0]$; возрастает на $[0;\ +\infty)$. В точке $x_1 = -2$ — максимум ($y(x_1) = -4$); в точке $x_2 = 0$ — минимум ($y(x_2) = 0$); е) убывает на $(-\infty;\ 1/3]$; возрастает на $[1/3;\ +\infty)$, в точке $x_0 = 1/3$ —

минимум ($y(1/3) = 3/\sqrt[3]{4}$); ж) возрастает на $(-\infty; 0]$ и убывает на $[0; +\infty)$,
в точке $x_0 = 0$ — максимум ($y(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$). **8.** Графики указанных функций изображены на рис. 20.5—20.7, соответственно. **10.** $y = 4 - 2x$; $y = \left(4 \pm 2\sqrt{3}\right)(x+1)$.

Указания

1. $b_n = a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - n^2$; $g(x) = f'(x) = \left(x^2\right)' = 2x$.

2. $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - {x_0}^2}{x - x_0} = x + x_0 = x + 1$.

3. Скорость точки задается производной функции $h = h(t)$. Ускорение является производной скорости.

4. а, б) Использовать формулу дифференцирования степенной функции.

в) Использовать формулу дифференцирования экспоненты: $\left(e^x\right) = e^x$; $\left(a^x\right) = a^x \ln a$ ($a > 0$, $a \neq 1$).

г) Производная натурального логарифма:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x};$$

производная логарифма по произвольному основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$):

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a},$$

иметь в виду, что $\ln 10$ и $\lg e$ — это постоянные; производная постоянной равна 0.

д) Правило дифференцирования произведения:

$$\left[f(x) \cdot g(x)\right]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x),$$

если только *f*, *g* — дифференцируемые функции.

е) Представить функцию $f(x)$ в виде суммы степенных слагаемых.

ж) Применить формулу дифференцирования частного двух функций:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)},$$

где *f*, *g* — дифференцируемые функции.

з, и, к) Производная сложной функции $h(x)$, где $h = f \circ g$ — композиция функций *g* и *f*, т. е. $h(x) = f(g(x))$, вычисляется по правилу

$$h'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x),$$

если только *f*, *g* — дифференцируемые функции, а композиция $f \circ g$ существует.

л) Первое слагаемое дифференцировать по правилу дифференцирования произведения, при этом $\varphi(x) = \sqrt{x^2 + 4x}$ — сложная функция. Второе слагаемое, без учета коэффициента (−2), является сложной функцией, причем производная суммы в скобках есть сумма производных $\varphi'(x)$ и $(x)' = 1$. Производная константы $\ln 8$ равна нулю.

5. Тангенс угла наклона касательной к графику функции $y = e^x$ равен значению производной этой функции в данной точке.

6. Использовать производную. Если функция $y = f(x)$ имеет производную в каждой точке промежутка (*a*; *b*) ($a \in \mathbb{R}$ или $a = -\infty$; независимо $b \in \mathbb{R}$ или $b = +\infty$), причем $f'(x) > 0$ на (*a*; *b*), то $f(x)$ возрастает на (*a*; *b*). Аналогично для $f'(x) < 0$ имеем убывание ($x \in$ (*a*; *b*)). Кроме того, можно обойтись элементарными средствами, т. е. доказать возрастание, исходя из определения.

7. На области определения найти т. н. критические точки (где $f'(x)=0$ или не существует). Эти точки разбивают область определения на промежутки монотонности.

8. б) Использовать четность данной функции.

9. Рассмотреть функции

$$\varphi(x) = x - \sin x\,,$$

$$\psi(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}\,,$$

$$\chi(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$$

на $\mathbb{R}$. Проверить, что $\varphi(0)=\psi(0)=\chi(0)=0$; $\varphi'(x)\ge 0$; $\psi'(x)\ge 0$; $\chi'(x)\ge 0$ на $(0; +\infty)$. Доказать, что функции φ, ψ, χ возрастают на $[0; +\infty)$.

10. В первом случае точка лежит на графике, можно воспользоваться общим уравнением касательной:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)\,.$$

Во втором случае удобнее исходить из того, что через точку $K(-1;\,0)$ проходят прямые вида

$$y = k(x+1)\,;$$

потребовать наличия единственного решения уравнения

$$k(x+1) = 2x - x^2\,.$$

Решения

1. $b_n = a_{n+1} - a_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$; $b_0 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$; $b_1 = 3$; $b_2 = 5$; $b_3 = 7$. $g(x) = f'(x) = \left(x^2\right)' = 2x$; $g\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$, $g\left(\frac{3}{2}\right) = 3$, $g\left(\frac{5}{2}\right) = 5$, $g\left(\frac{7}{2}\right) = 7$; $g\left(n + \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(n + \frac{1}{2}\right) = 2n + 1 = b_n$.

2. $f(x) = x^2$, $f(x_0) = x_0{}^2 = 1^2 = 1$; $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{x^2 - x_0{}^2}{x - x_0} =$

$= x + x_0 = x + 1$. Подставляя значения $x = 2$, $x = 1{,}1$, $x = 1{,}01$,

получаем последовательно для разностного отношения 3; 2,1; 2,01. Если $x \to 1$, то разностное отношение, равное $x + 1$, стремится к 2.

3. Скорость есть производная координаты по времени:

$$v(t) = h'(t) = \left(v_0 t - \frac{1}{2} g t^2\right)' = v_0 (t)' - \frac{1}{2} g \left(t^2\right)' = v_0 - gt .$$

При этом

$$v(0) = v_0 ,\ v\left(\frac{2v_0}{g}\right) = -v_0 ,\ v\left(\frac{v_0}{g}\right) = 0 .$$

Физический смысл: движение в вертикальном направлении с начальной скоростью v_0 при наличии постоянной силы тяжести (сообщающей материальной точке постоянное ускорение $-g$). В начальный момент ($t = 0$) скорость максимальна и направлена вверх ($v = v_0$), в верхней точке траектории ($t = v_0 / g$, $h = h_{\max} = v_0 /(2g)$) скорость равна нулю; момент времени $t = 2v_0 / g$ соответствует $h = 0$ — материальная точка возвращается на высоту старта, скорость по модулю равна стартовой, но направлена "вниз": $v(2v_0 / g) = -v_0$.

4. а) $f'(x) = \left(x^7 - \frac{3}{4} x^8\right)' = \left(x^7\right)' - \frac{3}{4} \cdot \left(x^8\right)' =$

$$= 7x^6 - \frac{3}{4} \cdot 8x^7 = 7x^6 - 6x^7;$$

б) $$f'(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt[3]{x}} + 2\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' + \left(x^{-\frac{4}{3}}\right)' =$$

$$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{4}{3}x^{-\frac{7}{3}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{4}{3x^2 \cdot \sqrt[3]{x}};$$

в) $$f'(x) = \left(2^x + 3^{x-1}\right)' = \left(2^x\right)' + \frac{1}{3}\left(3^x\right)' = 2^x \ln 2 + \frac{1}{3} \cdot 3^x \ln 3 =$$

$$= 2^x \ln 2 + 3^{x-1} \ln 3;$$

г) $$f'(x) = (\ln x + \lg x + \ln 10 + \lg e)' =$$

$$= (\ln x)' + (\lg x)' = \frac{1}{x} + \frac{1}{x \ln 10} = \frac{1}{x}(1 + \lg e) = \frac{\lg(10e)}{x};$$

д) $$f'(x) = \left(x^2 \cdot e^x\right)' = \left(x^2\right)' \cdot e^x + x^2 \cdot \left(e^x\right)' =$$

$$= 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = x(x+2)e^x;$$

е) $$f'(x) = \left(\frac{1 + 2x + 3x^2 + 4x^3}{2\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{2}\left(x^{-\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}} + 3x^{\frac{3}{2}} + 4x^{\frac{5}{2}}\right)' =$$

$$= -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{9}{4}x^{\frac{1}{2}} + 5x^{\frac{3}{2}} = \frac{20x^3 + 9x^2 + 2x - 1}{4x\sqrt{x}};$$

ж) $$f'(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot x - \sin x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2};$$

з) $$f'(x) = \left(e^{5x-1}\right)' = e^{5x-1} \cdot (5x-1)' = 5e^{5x-1};$$

и) $$f'(x) = \left(\sin x^2\right)' = \cos x^2 \cdot \left(x^2\right)' = 2x \cos x^2;$$

к) $f'(x) = \left(\cos^2 x\right)' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right)' = -\sin 2x$

или

$$f'(x) = \left(\cos^2 x\right)' = 2\cos x \cdot (\cos x)' = 2\cos x \cdot (-\sin x) = -\sin 2x;$$

л) т. к. для функции $\varphi(x) = \sqrt{x^2 + 4x}$ производная равна

$$\varphi'(x) = \left(\sqrt{x^2 + 4x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 4x}} \cdot \left(x^2 + 4x\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 4x}} \cdot (2x + 4) = \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x}},$$

то

$$f'(x) = \left(1 + \frac{x}{2}\right)' \cdot \varphi(x) + \left(1 + \frac{x}{2}\right) \cdot \varphi'(x) - \frac{2}{\varphi(x) + x + 2} \cdot \left[\varphi(x) + x + 2\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 4x} + \frac{x + 2}{2} \cdot \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x}} - \frac{2}{\sqrt{x^2 + 4x} + x + 2} \cdot \left(\frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x}} + 1\right) =$$

$$= \frac{x^2 + 4x + (x + 2)^2}{2\sqrt{x^2 + 4x}} - \frac{2}{\sqrt{x^2 + 4x}} =$$

$$\frac{x^2 + 4x + 2}{\sqrt{x^2 + 4x}} - \frac{2}{\sqrt{x^2 + 4x}} = \sqrt{x^2 + 4x}.$$

5. Тангенс угла наклона касательной к графику функции равен значению производной, сосчитанной в данной точке: $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$. В конкретном случае $f'(x) = e^x$; соответственно будем иметь

$f'(x_1) = e^{-1} = 0{,}368$; $\quad f'(x_4) = e^2 \approx 7{,}39$;

$f'(x_2) = e^0 = 1$; $\quad f'(x_5) = e^{100} \approx 2{,}69 \cdot 10^{43}$;

$f'(x_3) = e^1 = e = 2{,}718$; $\quad f'(x_6) = e^{-100} \approx 3{,}72 \cdot 10^{-44}$.

Поэтому соответствующие углы наклона касательных

$\alpha_1 = \operatorname{arctg}\frac{1}{e} \approx 0,35$; $\alpha_4 = \operatorname{arctg} e^2 \approx 1,44$;

$\alpha_2 = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = 45°$; $\alpha_5 = \operatorname{arctg} e^{100} \approx \frac{\pi}{2}$;

$\alpha_3 = \operatorname{arctg} e \approx 1,22$; $\alpha_6 = \operatorname{arctg} e^{-100} \approx 3,72 \cdot 10^{-44}$.

6. а) Доказательство "через производную":

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} > 0$$

при $x > 1$, $f'(1) = 0$, $f(x)$ возрастает на $[1; +\infty)$.

Доказательство "без производной": если $x_2 > x_1 \geq 1$, то

$$f(x_2) - f(x_1) = \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) - \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) = (x_2 - x_1) - \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} =$$

$$= (x_2 - x_1) \cdot \frac{x_1 x_2 - 1}{x_1 x_2} > 0.$$

Следовательно, $f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow f(x)$ возрастает на $[1; +\infty)$.

б) $f'(x) = (\sin x)' = \cos x > 0$ на $(-\pi/2;\ \pi/2)$, причем $f(\pm\pi/2) = 0$, следовательно, $f(x)$ возрастает на $[-\pi/2;\ \pi/2]$.

в) $f'(x) = \left(e^{2x-3}\right)' = 2e^{2x-3} > 0$ на $\mathbb{R}$, следовательно, $f(x)$ возрастает на $\mathbb{R}$.

г) $f'(x) = \left(x^2 \cdot e^x\right)' = 2x \cdot e^x - e^x \cdot x^2 > 0$ на $(0; +\infty)$; $f'(0) = 0$, следовательно, $f(x)$ возрастает на $[0; +\infty)$.

7. а) Данная функция является линейной:

$$f(x) = -48x + 36.$$

Угловой коэффициент $k = -48 < 0$, следовательно, $f(x)$ убывает на $\mathbb{R}$. Экстремумов нет.

б) Поскольку для $x_2 > x_1$ будет $f(x_2) = x_2^3 > x_1^3 = f(x_1)$, то $f(x)$ возрастает на $\mathbb{R}$. Экстремумов нет.

в) На $(0; +\infty)$ $f(x) = x$ — возрастающая функция; на $(-\infty; 0)$ $f(x) = -x$ — убывающая функция; на этих промежутках экстремумов нет. Значение в нуле $f(0) = |0| = 0$ — единственное неположительное, т. е. $f(0) < f(x)$ $(\forall x \neq 0)$. Поэтому $x_0 = 0$ — точка минимума.

г) Найдем производную данной функции:

$$f'(x) = \left(x^2\right)' + \left(x^3\right)' = 2x + 3x^2 = x(3x + 2).$$

Очевидно, что $f'(x) = 0$ при $x = 0$ или $x = -\dfrac{2}{3}$. Знаки производной и характер монотонности функции $f(x)$ отражены на рис. 20.1.

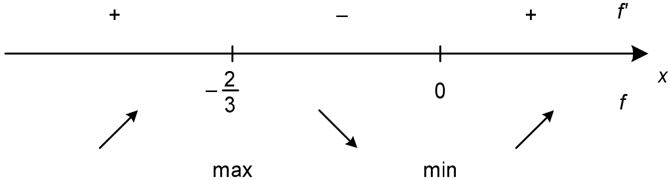

Рис. 20.1. Знаки производной и характер монотонности функции $f(x) = x^2 + x^3$

В точке $x_1 = -\dfrac{2}{3}$ функция $f(x)$ имеет локальный максимум

$$y = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{4}{27};$$

в точке $x_2 = 0$ — локальный минимум $y = 0$. Промежутки возрастания: $(-\infty; -2/3]$ и $[0; +\infty)$; промежуток убывания: $[-2/3; 0]$.

д) На каждом из промежутков $(-\infty; -1)$, $(-1; +\infty)$ существует производная, равная

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{x+1}\right)' = \left(\frac{\left(x^2-1\right)+1}{x+1}\right)' = \left(x-1+(x+1)^{-1}\right)' = 1-\frac{1}{(x+1)^2}.$$

Производная обращается в нуль при $(x+1)^2 = 1$, т. е. в точках $x_1 = -2$ и $x_2 = 0$. Соответствующая схема приведена на рис. 20.2.

Экстремумы: в точке $x_1 = -2$ — максимум ($y = 0$); в точке $x_2 = 0$ — минимум ($y = 0$). Промежутки возрастания: $(-\infty; -2]$ и $[0; +\infty)$; промежутки убывания: $[-2; -1)$ и $(-1; 0]$.

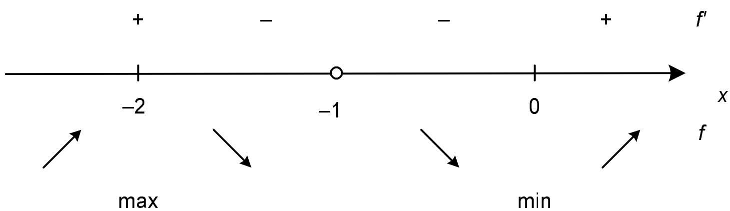

Рис. 20.2. Знаки производной и характер монотонности функции $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

е) Функция $y = f(x)$ имеет производную на всей вещественной оси:

$$f'(x) = 2^x \ln 2 - 4^{-x} \ln 4 = 4^{-x} \ln 2 \cdot \left(8^x - 2\right).$$

Она имеет единственный нуль в точке $x_0 = 1/3$ (рис. 20.3).

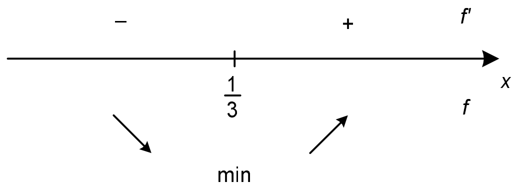

Рис. 20.3. Знаки производной и характер монотонности функции $f(x) = 2^x + 4^{-x}$

Функция f убывает на $(-\infty; 1/3]$ и возрастает на $[1/3; +\infty)$. В точке $x = 1/3$ — минимум, равный $y = \sqrt[3]{2} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} = \dfrac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

ж) Производная функции равна

$$f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \left(-\frac{x^2}{2}\right)' = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

При этом $f'(0) = 0$, $f'(x) > 0$ при $x < 0$ и $f'(x) < 0$ при $x > 0$. Таким образом, данная функция возрастает на $(-\infty; 0]$ и убывает на $[0; +\infty)$. В точке $x_0 = 0$ — локальный максимум $y = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$. График функции $f(x)$ представлен на рис. 20.4.

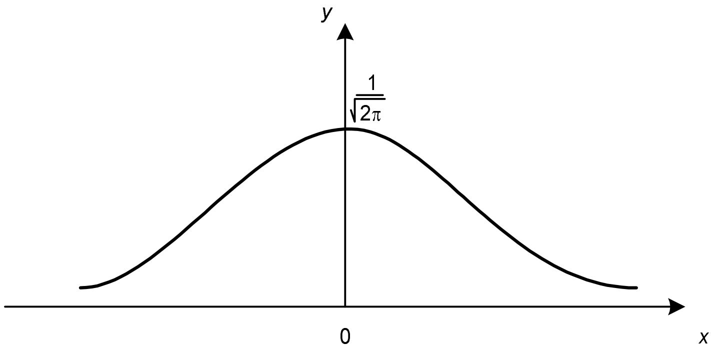

Рис. 20.4. График функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

8. а) Проведем исследование данной функции. Область определения: $\mathbb{R}$. Если $x \to +\infty$, то

$$y = \frac{x}{e^x} \to 0$$

(показательная функция e^x стремится к бесконечности быстрее x). Если $x \to -\infty$, то $y \to -\infty$. Нули функции: существует единственный нуль в точке $x_0 = 0$. Знаки функции: если $x < 0$, то $f(x) < 0$; если $x > 0$, то $f(x) > 0$. Для определения промежутков монотонности найдем производную:

$$f'(x) = \left(x \cdot e^{-x}\right)' = (x)' \cdot e^{-x} + x \cdot \left(e^{-x}\right)' = e^{-x} - x \cdot e^{-x} = (1-x)e^{-x}.$$

При этом $f'(x) = 0$ только в точке $x = 1$. Если $x > 1$, то $f'(x) < 0$; если $x < 1$, то $f'(x) > 0$. Следовательно, функция $f(x)$ возрастает на $(-\infty; 1]$ и убывает на $[1; +\infty)$. В самой точке $x = 1$ — максимум, равный $y = 1/e \approx 0,368$. График функции $f(x)$ приведен на рис. 20.5.

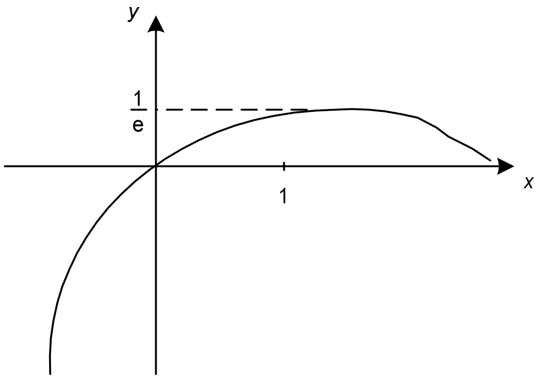

Рис. 20.5. График функции $f(x) = x \cdot e^{-x}$

б) Очевидно, что данная функция является четной:

$$f(-x) = \frac{|-x|}{(-x)^2 + 1} = \frac{|x|}{x^2 + 1} = f(x) \quad (\forall\, x \in \mathbb{R}).$$

Значит, $f(0) = 0$. Изучим поведение функции f только на $[0; +\infty)$. Если $x > 0$, то

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1};$$

поэтому

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)' = \frac{(x)' \cdot \left(x^2 + 1\right) - x \cdot \left(x^2 + 1\right)'}{\left(x^2 + 1\right)^2} =$$

$$= \frac{1 \cdot \left(x^2 + 1\right) - x \cdot (2x)}{\left(x^2 + 1\right)^2} = \frac{1 - x^2}{\left(x^2 + 1\right)^2}.$$

Схема знаков f' приведена на рис. 20.6.

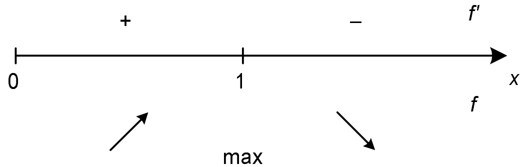

Рис. 20.6. Знаки производной и характер монотонности функции $f(x)=\frac{|x|}{x^2+1}$

Функция $f(x)$ возрастает на [0; 1] и убывает на [1; $+\infty$). В точке $x = 1$ имеется максимум $y = 1/2$. При всех $x > 0$, $\frac{x}{x^2+1} > 0$. Если $x \to +\infty$, то

$$\frac{x}{x^2+1} < \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \to 0,$$

т. е. существует горизонтальное асимптотическое направление $y = 0$. Для уточнения поведения функции $f(x)$ при $x \to 0$ учтем, что знаменатель x^2+1 будет близок к 1; тогда $f(x) \approx x$ (приближенное равенство тем точнее, чем ближе x к нулю). График функции $y = f(x)$ изображен на рис. 20.7. Очевидно, что при $x = -1$ мы получим еще один максимум, равный $y = 1/2$, а в точке $x = 0$ функция достигает минимума $y = 0$.

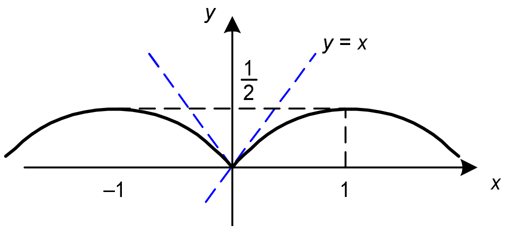

Рис. 20.7. График функции $f(x)=\frac{|x|}{x^2+1}$

9. Рассмотрим функцию

$$y = \varphi(x) = x - \sin x\,,\ \ x \in \mathbb{R}\,.$$

Ее производная

$$\varphi'(x) = 1 - \cos x \geq 0$$

при всяком x, причем $\varphi'(x) = 0$ лишь в точках $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Это означает, что $\varphi(x)$ есть функция возрастающая, в том числе на $[0; +\infty)$. Но $\varphi(0) = 0 - \sin 0 = 0$, следовательно, $\varphi(x) > 0$ $(\forall x > 0)$. Значит, $x > \sin x$ $(x > 0)$. Далее рассмотрим функцию

$$\psi(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2},\ \ x \in \mathbb{R}\,.$$

Имеем

$$\psi'(x) = -\sin x + x = \varphi(x)\,.$$

Но $\varphi(x) > 0$ при $x > 0$ ($\varphi(0) = 0$). Значит, $\psi(x)$ возрастает на $[0; +\infty)$. При этом

$$\psi(0) = \cos 0 - 1 + \frac{0^2}{2} = 0\,.$$

Следовательно, $\psi(x) > 0$ $(\forall x > 0)$. Значит,

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}\ \ (x > 0).$$

Рассмотрим, наконец, функцию

$$\chi(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6},\ \ x \in \mathbb{R}\,.$$

Ее производная

$$\chi'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} = \psi(x).$$

Но $\psi(x) > 0$ при $x > 0$ ($\psi(0) = 0$). Значит, $\chi(x)$ возрастает на $[0; +\infty)$. Так как

$$\chi(0) = \sin 0 - 0 + \frac{0^3}{6} = 0,$$

то $\chi(x) > 0$ $(\forall\, x > 0)$, значит,

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6} \quad (\forall\, x > 0).$$

Рис. 20.8, 20.9 иллюстрируют изложенное.

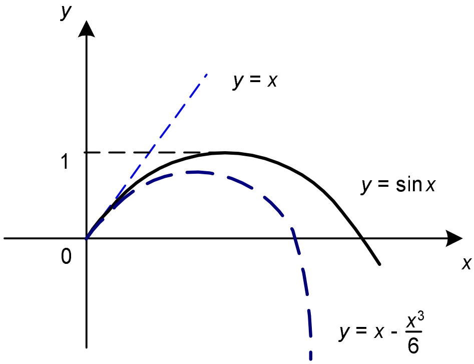

Рис. 20.8. Графики функций $y = \sin x$ и $y = x - \dfrac{x^3}{6}$

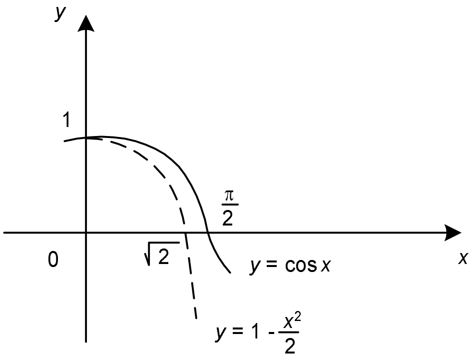

Рис. 20.9. Графики функций $y = \cos x$ и $y = 1 - \dfrac{x^2}{2}$

10. В первом случае $x_0 = 2$, $f(x_0) = 0$, $f'(x_0) = -2$. Уравнение касательной $y = -2(x-2)$. Во втором случае напишем уравнение прямой, проходящей через точку *K*: $y = k(x+1)$, где k — неопределенный угловой коэффициент наклона. Уравнение $k(x+1) = 2x - x^2$ должно иметь единственное решение; в стандартной форме оно запишется так: $x^2 + (k-2)x + k = 0$. Его дискриминант $D(k) = (k-2)^2 - 4k = k2 - 8k + 4$ обнуляется при $k = 4 \pm 2\sqrt{3}$. Поэтому нужные касательные описываются уравнением

$$y = \left(4 \pm 2\sqrt{3}\right)(x+1).$$

Комментарии

1. Последовательность b_n — это последовательность разностей соседних членов a_n. Тот факт, что все $b_n > 0$, указывает на возрастание a_n. Отметим, что и сама последовательность b_n является возрастающей. Если найти разности для соседних членов b_n, то получим постоянную последовательность: 2, 2, 2, Таким образом, b_n растет "равномерно", а a_n — "ускоренно". Аналогичная картина наблюдается при рассмотрении функции $f(x)$, ее производной $g(x)$ и производной $g(x)$, равной $h(x)$: $f(x) = x^2$; $g(x) = 2x$; $h(x) = 2$. Функция $h(x)$ — постоянная; функция $g(x)$ обладает свойством линейного роста, а $f(x)$ растет уже квадратично. При этом $g(x)$ можно интерпретировать как скорость изменения $f(x)$, а $h(x)$ — как "скорость изменения скорости", т. е. "ускорение". Нелишним будет напомнить физический смысл производной: производная есть скорость изменения величины.

2. Разностное отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

фигурирует в определении производной. Если при $x \to x_0$ (или, что то же самое, при $\Delta x \to 0$) указанное отношение стремится к определенному числовому пределу, то этот предел и называют *производной функции* $y = f(x)$ в точке $x = x_0$. В разобранном примере разностное отношение очевидным образом стремится к 2; это значение $f'(1)$. В принципе, производную любой функции можно сосчитать по определению, если, конечно, она существует).

Приведем пример вычисления производной функции $y = f(x) = \sqrt{x}$ в точке $x = x_0 > 0$. Разностное отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \to \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \quad (x \to x_0).$$

Поэтому

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0).$$

Последнюю производную, часто встречающуюся на практике, полезно помнить безотносительно к общему правилу дифференцирования степенной функции ($\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$, $n \neq 0$).

3. Область применения производной в физике безгранична. Кроме производной по времени, характеризующей скорость изменения физической величины, может рассматриваться, например, в уравнении гармонических колебаний: $x''(t) = -\omega^2 \cdot x(t)$, где $\omega > 0$ — частота колебательного процесса. Разумеется, имеются многочисленные приложения аппарата производной в других науках.

4. Во многих случаях вычисление производной облегчают предварительные преобразования, выполненные над исходным выражением. Например, функцию

$$y = \ln \frac{(x+2)^2 \cdot \sqrt[3]{x}}{6\sqrt{x+1}} \quad (x > 0)$$

удобно дифференцировать в виде

$$y = 2\ln(x+2) + \frac{1}{3}\ln x - \frac{1}{2}\ln(x+1) - \ln 6 .$$

5. Большая разница в значениях углов $\alpha_1, \ldots, \alpha_6$ связана с очень быстрым ростом экспоненты.

6. Строгая положительность производной является достаточным, но необязательно необходимым условием строгого возрастания. Скажем, функция $y = x^3$ имеет производную $y' = 3x^2$, равную нулю в точке 0; тем не менее, $y = x^3$ строго возрастает на $\mathbb{R}$.

8. При построении графика функции полезно чередовать применение элементов высшей математики (предел, производная) с использованием элементарных средств (подстановки некоторых значений аргумента, четность/нечетность, числовые оценки и т. п.).

9. Мы доказали неравенство

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x \quad (x > 0).$$

Оно связано, в частности, с *первым замечательным пределом*:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

и с приближенным равенством $\sin x \approx x$ $(|x \ll 1|)$. Кроме того, выражение

$$x - \frac{x^3}{6}$$

обеспечивает еще более точное приближение для $\sin x$ при "малых" x. Идею приближения "хорошей" (достаточное количество раз дифференцируемой) функции многочленом реализует доказываемая в математическом анализе формула Тейлора. Не вдаваясь в подробности, отметим лишь, что не только для малых, но и *всех вещественных* значений x

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \ldots$$

(знаки чередуются, степени нечетные, а знаменатель при степени n равен $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$).

Для косинуса имеем

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \ldots,$$

а для экспоненты

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots.$$

Задачи для самостоятельного решения

Найти производные (1—10); область определения находить не требуется:

1. $f(x) = \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + cx + d$ (a, b, c, $d \in \mathbb{R}$ — произвольные постоянные).

2. $f(x) = \left(x^2 + 2\right)^3$.

3. $f(x) = \dfrac{\left(\sqrt{x} + 1\right)\left(\sqrt[3]{x} - 1\right)}{\sqrt[4]{x}}$.

4. $f(x) = \dfrac{e^x}{\cos x}$.

5. $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^3 + x^2 + x + 1}$.

6. $f(x) = \ln \dfrac{(x+3)^7 \cdot \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x+2}}$.

7. $f(x) = \sin\left(e^x\right)$.

8. $f(x) = e^{\sin x}$.

9. $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$.

10. $f(x)=\frac{1}{4}(\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x)$.

11. Чему равно $f'(1)$, если

$$f(x)=(x-1)^2\cdot\frac{e^{\cos^2 5x}+2^{\sin \pi x}}{x^6+3}?$$

12. Найти угол наклона касательной к параболе

$$y=\frac{(x-1)^2}{2}$$

в точке пересечения с осью ординат; с осью абсцисс.

13. Найти решения уравнения $f'(x)\cdot g(x)=-f(x)\cdot g'(x)$, где

$$f(x)=\frac{e^x}{x^2+1};\; g(x)=x+\frac{1}{x}.$$

14. Записать уравнение касательной к графику функции

$$y=\frac{x^2+1}{x},$$

проходящей через точку $M(3;\,2)$.

15. Найти наименьшее значение функции

$$f(x)=\cos x+\cos\frac{x}{2}.$$

Ответы

1. $f'(x)=ax^2+bx+c$. **2.** $f'(x)=6x^5+24x^3+24x=6x\left(x^2+2\right)^2$.

3. $f'(x)=\frac{13}{12}x^{\frac{1}{12}}-\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}+\frac{7}{12}x^{-\frac{5}{12}}-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$. (*Указание:* представить $f(x)$ в виде суммы степенных слагаемых.) **4.** $f'(x)=\frac{\cos x+\sin x}{\cos^2 x}\cdot e^x$.

5. $f'(x) = -\dfrac{3x^2+2x+1}{\left(x^3+x^2+x+1\right)^2}$. (*Указание:* $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x^3+x^2+x+1}$.)

6. $f'(x) = \dfrac{7}{x+3} + \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{3x+6}$. (*Указание:* предварительно выполнить логарифмирование.) **7.** $f'(x) = e^x \cdot \cos\left(e^x\right)$. **8.** $f'(x) = \cos x \cdot e^{\sin x}$.

9. $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. **10.** $f'(x) = \dfrac{1}{\sin^2 2x}$. **11.** 0. **12.** $135°$; 0.

13. 1. **14.** $y = \dfrac{2}{9}(4x-3)$; $y = 2$. **15.** $-\dfrac{9}{8}$. (*Указание:* замена $\cos\dfrac{x}{2} = t$, $t \in [-1;\ 1]$.)

Занятие 21

Задачи оптимизации

Наибольшее и наименьшее значение выражения, зависящего от двух переменных величин, связанных зависимостью. Задачи оптимизации геометрического содержания и некоторые другие задачи. Проблема выбора удобного параметра оптимизации.

Вводные задачи

1. Величины u и v положительны и связаны условием постоянства произведения $u \cdot v = c^2$, $c > 0$. Каково наименьшее возможное значение их суммы $S = u + v$?

2. Периметр прямоугольника постоянен и равен $P = 4a$ ($a > 0$). Каково наибольшее значение площади такого прямоугольника (простейший случай изопериметрической задачи)?

По условию *задачи 2* найти (3, 4):

3. Минимально возможное значение длины диагонали прямоугольника.

4. Минимальную площадь описанного круга.

5. Сумма длин образующей и высоты конуса равна a ($a > 0$). Найти максимально возможный объем такого конуса. Каковы при этом высота и радиус основания?

6. Консервная банка цилиндрической формы имеет объем V. Каково должно быть отношение высоты к диаметру основания банки, чтобы на ее изготовление ушло минимальное количество жести?

7. Расходы на эксплуатацию некоторого устройства складываются из трех частей: $c_0 = A = const$ — "начальный взнос", $c_1 = \alpha t$ $(\alpha > 0)$ — часть, пропорциональная времени ("арендная плата") и $c_2 = \frac{\beta}{t^2}$ $(\beta > 0)$ — "плата за быстродействие". Условно считая, что устройство способно выполнить поставленную задачу за любое время $t > 0$, найти минимально возможную сумму расходов.

Ответы

1. Оптимальное (здесь — минимальное) возможное значение S есть $S_{\text{опт}} = 2c$. **2.** a^2 (т. е. прямоугольник является квадратом со стороной a). **3.** $d_{\text{опт}} = a\sqrt{2}$ (квадрат). **4.** $S_{\text{опт}} = \frac{\pi a^2}{2}$. **5.** $V_{\text{опт}} = \frac{\pi a^3}{24}$, $h_{\text{опт}} = \frac{a}{4}$, $r_{\text{опт}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. **6.** 1. **7.** $C_{\text{опт}} = A + \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{2\alpha^2\beta}$.

Указания

1. Выразить переменную v через u и получить выражение суммы S только через u.
2. По условию $P = 2(x + y) = 4a$, где x, y — длины сторон прямоугольника. Выразить y через x и подставить в выражение для площади $S = xy$.
3. Длина диагонали связана с длинами сторон соотношением $d^2 = x^2 + y^2$. Подставить сюда выражение y через x и найти минимум выражения d^2.
4. Диаметр описанного круга будет диагональю прямоугольника.
5. Пусть r — радиус основания конуса, h — его высота, l — длина образующей. По условию $l + h = a$; по теореме Пифагора $r^2 + h^2 = l^2$; объем конуса

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$

Получить выражение V как функции переменной h и найти его максимум.

6. Условие связи на переменные r (радиус основания банки) и h (ее высота): $\pi r^2 h = V$. Выразить h через r и подставить в выражение для полной поверхности: $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$, затем найти максимум функции $S(r)$.

7. Найти минимум функции

$$C(t) = A + \alpha t + \frac{\beta}{t^2}.$$

Для этого можно использовать производную $C'(t)$ либо неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим для трех величин.

Решения

1. Из условия связи $u \cdot v = c^2$ имеем

$$S = u + v = u + \frac{c^2}{u} = c\left(\frac{u}{c} + \frac{c}{u}\right).$$

Выражение в скобках есть сумма двух взаимно-обратных положительных величин. Такая сумма принимает минимальное значение (равное 2) при условии, если каждое из данных слагаемых равно 1. Это достигается при $u = c$, а сама сумма при этом $S_{\text{опт}} = 2c$.

2. Пусть одна из сторон прямоугольника имеет длину x, а другая y (x, $y > 0$). Тогда, очевидно, $P = 2(x + y) = 4a$; $x + y = 2a$; $y = 2a - x$, $x < 2a$. Площадь прямоугольника $S = xy = x(2a - x)$, $x \in (0;\ 2a)$. Функция $S = xy = x(2a - x)$ — квадратичная, ее наибольшее значение достигается при $x = a$ (вершина параболы). В этой точке $S(a) = a^2$. Таким образом, из всех прямоугольников с данным периметром наибольшую площадь имеет квадрат.

3. В тех же обозначениях диагональ прямоугольника

$$d = \sqrt{x^2 + y2};$$

$$d^2 = x^2 + (2a - x)^2 = 2x^2 - 4ax + 4a^2.$$

Данная зависимость — квадратичная, минимальное значение d^2 (а значит, и $d > 0$) достигается при $x = a$ (вершина параболы). Следовательно, самая короткая диагональ соответствует квадрату. При этом $d^2 = 2a^2 - 4a \cdot a + 4a^2 = 2a^2$, $d = a\sqrt{2}$.

4. Диаметр описанного круга — это диагональ прямоугольника. Площадь описанного круга

$$S = \frac{1}{4}\pi d^2$$

достигает минимального значения одновременно с диагональю. Это минимальное значение

$$S = \frac{1}{4}\pi\left(a\sqrt{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{4}.$$

5. Рассмотрим осевое сечение конуса (рис. 21.1), обозначения ясны из рисунка.

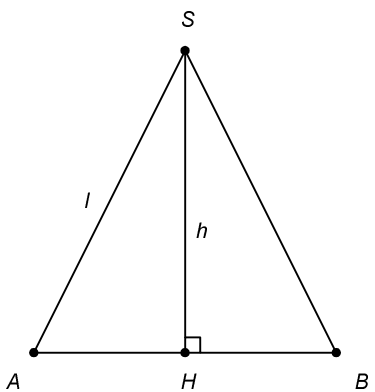

Рис. 21.1. Осевое сечение конуса

По условию $l + h = a$. Объем конуса вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h;$$

выражение для r^2 можно получить по теореме Пифагора для треугольника ASH:

$$r^2 = l^2 - h^2 = (l+h)(l-h) = a(a-2h).$$

Тогда объем конуса есть функция переменной h:

$$V = V(h) = \frac{\pi a^2}{3} \cdot (a-2h) \cdot h;$$

по смыслу задачи $h \in (0;\ a/2)$. Данная функция — квадратичная; ее максимум соответствует вершине параболы

$$h_0 = \frac{a}{4}.$$

При этом объем конуса

$$V_{\max} = V\left(\frac{a}{4}\right) = \frac{\pi a^3}{24};$$

радиус основания такого конуса

$$r = \sqrt{a(a-2h)} = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

6. Объем цилиндра $V = \pi r^2 h$, где r — радиус основания, h — высота цилиндра. Таким образом, переменные r и h связаны соотношением

$$r^2 h = \frac{V}{\pi}.$$

Увеличение одной из переменных ведет к уменьшению другой, что естественно. В условии фактически требуется минимизировать полную площадь поверхности. Эта площадь складывается из двух слагаемых: суммарной площади обоих оснований

$$S_{\text{осн}}^{(2)} = 2\pi r^2$$

и площади боковой поверхности

$$S_{\text{бок}} = 2\pi r h$$

(развертка боковой поверхности цилиндра — прямоугольник с измерениями $2\pi r \times h$). Полная поверхность цилиндра будет равна

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi\left(r^2 + hr\right).$$

Выражая из уравнения связи

$$r^2 h = \frac{V}{\pi}$$

переменную h через r (можно и наоборот, но это чуть менее удобно), получаем выражение полной поверхности как функцию r:

$$h = \frac{V}{\pi} \cdot r^{-2};$$

$$S(r) = 2\pi\left(r^2 + \frac{V}{\pi} \cdot r^{-1}\right);$$

$r \in (0; +\infty)$. Это выражение велико как при $r \to 0$ (за счет второго слагаемого), так и при $r \to \infty$ (за счет первого). Очевидно, при некотором $r = r_{\text{опт}} > 0$ должно достигаться оптимально малое значение. Найти $r_{\text{опт}}$ можно, например, с помощью производной:

$$S'(r) = 2\pi\left(2r - \frac{V}{\pi} \cdot r^{-2}\right);$$

$S'(r) = 0$, если

$$2r = \frac{V}{\pi} \cdot r^{-2},$$

откуда

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

В этом случае диаметр основания

$$D = 2r = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}},$$

а высота цилиндра

$$h = \frac{V}{\pi} \cdot \sqrt[3]{\frac{4\pi^2}{V^2}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}},$$

т. е. минимальная площадь поверхности достигается в том случае, когда диаметр основания банки равен ее высоте. Если

r меньше этого значения, то $S'(r) < 0$ и $S(r)$ убывает. Если r больше этого значения, то $S'(r) > 0$ и $S(r)$ возрастает; точка минимума

$$r = r_{\text{опт}} = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}.$$

7. Суммарные затраты на эксплуатацию

$$C(t) = c_0(t) + c_1(t) + c_2(t);$$

$$C(t) = A + \alpha t + \frac{\beta}{t^2}.$$

Эта величина велика как при $t \to 0$ (слишком интенсивное использование), так и при $t \to \infty$ (слишком долгая эксплуатация). Очевидно, при некотором $t = t_{\text{опт}} > 0$ должно достигаться оптимально малое значение суммарных затрат. Производная функции затрат по времени

$$C'(t) = \alpha - \frac{2\beta}{t^3};$$

$$C'(t) = 0$$

только при

$$t = \sqrt[3]{\frac{2\beta}{\alpha}}.$$

Если t меньше этого значения, то $C'(t) < 0$ и $C(t)$ убывает. Если t больше этого значения, то $C'(t) > 0$ и $C(t)$ возрастает. Значение

$$t = t_{\text{опт}} = \sqrt[3]{\frac{2\beta}{\alpha}}$$

будет оптимальным, именно оно доставляет минимум функции затрат. Этот минимум будет равен

$$C\left(\sqrt[3]{\frac{2\beta}{\alpha}}\right) = A + \alpha \cdot \sqrt[3]{\frac{2\beta}{\alpha}} + \beta \cdot \sqrt[3]{\frac{\alpha^2}{4\beta^2}} = A + \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{2\alpha^2\beta}.$$

Приведем еще одно решение, основанное на классическом неравенстве между средним арифметическим и средним геометрическим (для трех величин):

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \quad (a,\ b,\ c > 0),$$

причем равенство возможно лишь в том случае, когда $a = b = c$. Имеем:

$$C(t) = A + \alpha t + \frac{\beta}{t^2} = A + \frac{\alpha t}{2} + \frac{\alpha t}{2} + \frac{\beta}{t^2} = A + 3 \cdot \frac{\frac{\alpha t}{2} + \frac{\alpha t}{2} + \frac{\beta}{t^2}}{3} \geq$$

$$\geq A + 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{\alpha t}{2} \cdot \frac{\alpha t}{2} \cdot \frac{\beta}{t^2}} = A + 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{\alpha^2 \beta}{4}} = A + \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{2\alpha^2\beta},$$

причем равенство возможно, если

$$\frac{\alpha t}{2} = \frac{\beta}{t^2},$$

т. е. при

$$t = \sqrt[3]{\frac{2\beta}{\alpha}}.$$

Вообще, огромное количество задач данного раздела допускают элементарное (без использования производной) решение.

Комментарии

1. По всей видимости, это простейшая задача оптимизации. Тем не менее, в ней (на простейшем уровне) уже присутствует основная идея задач данного класса: найти минимальное (максимальное) значение некоторой величины, зависящей от двух (или более) переменных, когда эти переменные связаны между собой уравнением (уравнениями). Уравнение $u \cdot v = c^2$ в данной задаче как раз и является *уравнением связи* (его так и называют). В наших задачах достаточно выразить, пользуясь уравнением связи, одну из переменных через другую и подставить в выражение для оптимизируемой величины (здесь это S). Тем самым задача сводится к поиску оптимального (наименьшего или наибольшего) значения функции одной переменной. Конечно, возможна ситуация, когда из уравнения связи не удается выразить явно ни одну из величин. Для решения этой проблемы в высшей математике существуют специальные методы; однако они используют аппарат дифференциального исчисления функций нескольких (а не одной) переменных. Кроме того, некоторые задачи оптимизации настолько сложны, что могут быть решены лишь численно, с применением специальных компьютерных программ.

2. В более общем варианте изопериметрической задачи задается лишь длина границы, но не ее форма. Из всех плоских фигур с данной длиной границы l наибольшую площадь имеет круг.

5. В зависимости от того, насколько удачно выбран параметр оптимизации, решение может выглядеть более или менее сложным. Не всегда стоит "соглашаться" с параметром оптимизации, "установленным" составителем задачи. Вот один из таких примеров. Пусть дан ромб с фиксированной площадью $S = 2$, в который вписана окружность. Требуется выяснить, какой должна быть длина окружности, чтобы периметр ромба был максимальным. В этой планиметрической задаче удобно записать выражение площади через половины длин диагоналей x и y: $S = 2 = 2xy$, откуда $xy = 1$. Длина стороны

$$a = \sqrt{x^2 + y^2},$$

а периметр ромба

$$P = 4\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}}.$$

Выражение под корнем минимально при $x = 1$. Это значит "лучший" ромб — квадрат со стороной $\sqrt{2}$. Но это то же, что и диаметр вписанной окружности. Тогда радиус

$$r = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

а оптимальная длина окружности

$$l_{\text{опт}} = \pi\sqrt{2}.$$

Если же в качестве параметра оптимизации выбрать не x, а саму длину окружности, решение окажется менее простым.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти максимально возможное значение площади прямоугольного треугольника, если его катеты a и b связаны соотношением $a + 2b = 3$.
2. Пусть точка $M(x; y)$ принадлежит окружности $x^2 + y^2 = 4$. Какое наименьшее значение может принимать произведение ее координат xy?
3. На параболе $y + 1 = x^2$ найти точку, ближайшую к началу координат.
4. В треугольнике ABC к стороне AB длины $2a$ проведена медиана длины m. Какое наибольшее значение может принимать площадь треугольника S? Каково наибольшее возможное значение периметра треугольника P?
5. Из какой точки оси ординат отрезок, соединяющий точки $A(1; 1)$ и $B(1; -1)$, виден под наибольшим углом? Какова величина этого угла?
6. Каков максимально возможный объем конуса, вписанного в шар радиуса $R = 1$?
7. Каков максимально возможный объем цилиндра, вписанного в шар радиуса $R = 1$? Какую долю этот объем составляет от объема всего шара?
8. Боковая поверхность правильной четырехугольной пирамиды постоянна и равна 4. Каков должен быть угол наклона боковой грани к плоскости основания, чтобы объем пирамиды был наибольшим?
9. Переменные x, y, z связаны уравнениями

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9. \end{cases}$$

Какое наименьшее значение доступно переменной z?

Ответы

1. $S_{max} = 2{,}25$. **2.** -2. (*Указание:* сначала найти наибольшее возможное значение величины x^2y^2.) **3.** $\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$. (*Указание:* записать выражение для квадрата расстояния от начала координат до точки $X(x;\ x^2-1)$.) **4.** $S_{max} = am$, $P_{max} = 2\left(\sqrt{a^2+m^2}+a\right)$. (*Указание:* в качестве параметра оптимизации удобно взять один из углов между стороной AB и медианой CM.) **5.** Начало координат; 90°. (*Указание:* один из возможных параметров оптимизации — ордината искомой точки.) **6.** $\frac{32}{81}\pi R^3$; $\frac{8}{27}$. (*Указание:* удобный параметр оптимизации — расстояние от центра основания конуса до центра шара.) **7.** $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$; $\frac{1}{\sqrt{3}}$. (*Указание:* один из возможных параметров оптимизации — половина высоты цилиндра.) **8.** $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. (*Указание:* если высоту пирамиды обозначить h, апофему m, а сторону основания считать равной $2a$, то будем иметь $am = 1$, $a^2 + h^2 = m^2$, $V = \frac{4}{3}a^2h$. Отсюда можно получить выражение $V = \frac{4}{3}\sqrt{a^2 - a^6}$; затем следует найти наибольшее значение величины $\varphi(a) = a^2 - a^6$, $a \in (0;\ 1)$.) **9.** $z_{min} = -\frac{3}{\sqrt{2}}$. (*Указание:* выразить переменную y через x и z из первого уравнения и подставить во второе. Найти наибольшее возможное значение z^2; ему будет соответствовать наименьшее, отрицательное по знаку, значение переменной z.)

Занятие 22

Первообразная и интеграл. Вычисление площадей и объемов

Понятие первообразной. Нахождение первообразной элементарными средствами. Формула Ньютона — Лейбница. Площадь криволинейной трапеции. Применение определенного интеграла к вычислению объемов тел.

Вводные задачи

Доказать (1—4), что функция $y = F(x)$ является одной из первообразных для функции $y = f(x)$ на указанном промежутке:

1. $F(x) = 3x - x^3 + \sqrt{2}$, $f(x) = 3\left(1 - x^2\right)$, $\mathbb{R}$.

2. $F(x) = \sin 2x \cdot \cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8} \cdot \cos 2x$, $f(x) = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{8}\right)$, $\mathbb{R}$.

3. $F(x) = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$, $f(x) = \frac{1}{x^2 - a^2}$ $(a > 0)$, $(-a;\ a)$.

4. $F(x) = \operatorname{sh} x$, где $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$, $f(x) = \operatorname{ch} x$, где $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$. $\mathbb{R}$.

5. Найти первообразную функции $y = f(x) = x(3x - 2)$, проходящую через начало координат.

Найти все первообразные функции (6, 7):

6. $y = f(x) = 1 + \cos x$.

7. $y = f(x) = xe^x + e^x$.

8. Определить значения

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx;\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx;\ \int_a^{2\pi+a} \sin x\,dx;\ \int_{\pi n}^{\pi k} \sin x\,dx\ \ (n, k \in \mathbb{Z}).$$

9. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = x^2 + 1$, координатными осями и прямой линией $x = 1$.

10. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = 6$; $x + y = 5$.

11. При прямолинейном движении скорость точки меняется по закону $v(t) = v_0 \cos \Omega t$, $v_0 > 0$, $\Omega > 0$. В начальный момент координата $x(0) = 0$. Найти все моменты времени $t > 0$, когда координата максимальна.

12. Вывести формулы объемов конуса

$$V_{\text{к}} = \frac{1}{3}\pi R^2 h,$$

где R — радиус основания, h — высота, и шара

$$V_{\text{ш}} = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

где R — радиус шара, пользуясь методом параллельных сечений. (Интегрировать площадь сечения по высоте.)

Ответы

5. $F(x) = x^3 - x^2$. **6.** $F(x) = x + \sin x + c$. **7.** $F(x) = x \cdot e^x + c$. **8.** 1; 1; 0; $(-1)^n - (-1)^k$, $n, k \in \mathbb{Z}$. **9.** $\frac{4}{3}$. **10.** $\frac{5}{2} - \ln\frac{3}{2}$. **11.** $t = \frac{\pi}{2\Omega}(1 + 4n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Указания

1—4. По определению дифференцируемая функция $y = F(x)$ называется первообразной для функции $y = f(x)$ на (a, b), если $F'(x) = f(x)$ $(\forall x \in (a, b))$. Таким образом, задача сводится к вычислению $F'(x)$ и проверке тождества $F' \equiv f$.

5. Все первообразные $F(x)$ функции $y = f(x)$ на данном промежутке (a, b) выражаются через какую-либо из первообразных $F_0(x)$ по формуле

$$F(x) = F_0(x) + C,$$

где $C = const$. Постоянная C находится из условия, что $y = F(x)$ проходит через начало координат.

6. Одна из первообразных будет $y = F_0(x) = x + \sin x$.

7. Учесть, что $xe^x + e^x = \left(xe^x\right)'$.

8. Воспользоваться формулой Ньютона — Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — одна из первообразных функции $y = f(x)$ на (a, b).

9. Площадь данной фигуры равна значению определенного интеграла

$$S = \int_0^1 \left(x^2 + 1\right) dx.$$

10. Данную площадь можно понимать как разность площадей двух криволинейных трапеций.

11. Найти закон изменения координаты $x(t)$, имея в виду, что $v(t) = x'(t)$.

12. Поясним принцип решения для случая конуса (рис. 22.1).

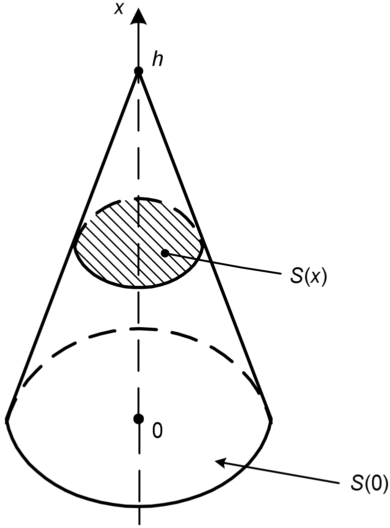

Рис. 22.1. Конус

Направим ось Ox от центра основания конуса к его вершине. Объем будет равен определенному интегралу от площади поперечного сечения $S(x)$ по высоте x в пределах от 0 до высоты конуса h:

$$V = \int_0^h S(x)\,dx .$$

Решения

1. $F'(x) = \left(3x - x^3 + \sqrt{2}\right)' = 3 - 3x^2 = f(x)$ на $\mathbb{R}$; следовательно $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на $\mathbb{R}$.

2. $F(x) = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{8}\right)$; $F'(x) = 2\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{8}\right) = f(x)$ на $\mathbb{R}$.

3. $F(x) = \dfrac{1}{2a}\left(\ln|x-a| - \ln|x+a|\right)$;

$F'(x) = \dfrac{1}{2a}\left(\dfrac{1}{x-a} - \dfrac{1}{x+a}\right) = \dfrac{1}{x^2 - a^2} = f(x)$ на $\mathbb{R}$.

4. $F(x)=\operatorname{sh}x$, где $(\operatorname{sh}x)'=\left[\frac{1}{2}\left(e^x-e^{-x}\right)\right]'=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)=\operatorname{ch}x$.

5. $f(x)=3x^2-2x$; $F(x)=x^3-x^2+A$, где A — неопределенная постоянная. Так как по условию $F(0)=0$, то $0^3-0^2+A=0$, $A=0$, $F(x)=x^3-x^2$.

6. $F(x)=x+\sin x+C$ (все первообразные отличаются на произвольную константу C).

7. $f(x)=xe^x+1\cdot e^x=x\cdot\left(e^x\right)'+(x)'\cdot e^x=\left(x\cdot e^x\right)'$; отсюда $F(x)=x\cdot e^x+C$, $C=const$.

8. По формуле Ньютона — Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

имеем:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\sin x=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1;$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=(-\cos x)=(-0)-(-1)=1;$$

$$\int_a^{2\pi+a}\sin x\,dx=(-\cos x)=-\cos(2\pi+a)+\cos a=-\cos a+\cos a=0.$$

Интеграл по периоду πn

$$\int_{\pi n}^{\pi k}\sin x\,dx=(-\cos x)=\cos\pi n-\cos\pi k=(-1)^n-(-1)^k,$$

в частности, при четных n и k имеем 0.

9. На рис. 22.2 криволинейная трапеция обозначена Φ. Ее площадь $\sigma(\Phi)$ равна определенному интегралу

$$\sigma(\Phi)=\int_0^1\left(x^2+1\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+x\right)=\frac{4}{3}.$$

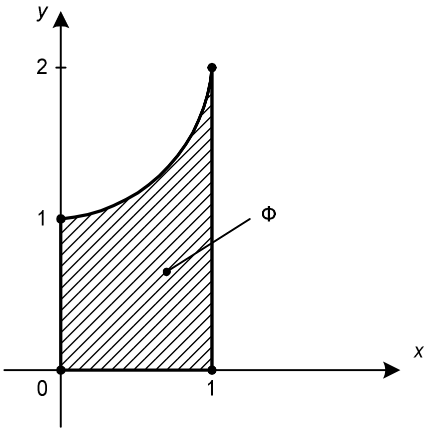

Рис. 22.2. Криволинейная трапеция

10. Указанная фигура G изображена на рис. 22.3.

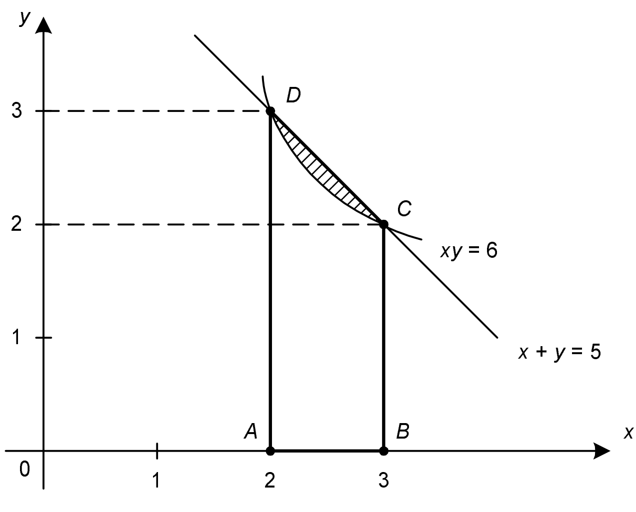

Рис. 22.3. Фигура, ограниченная линиями $xy = 6$ и $x + y = 5$

Она ограничена прямой $y = 5 - x$ и гиперболой $y = 6/x$. Ее площадь будет разностью площадей трапеции $ABCD$ и одноименной криволинейной трапеции. Очевидно, что

$$S_{\text{тр.}ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot AB = \frac{5}{2};$$

$$S_{\text{кр.тр.}ABCD} = \int_2^2 \frac{6}{x} dx = 6 \ln x = 6 \ln \frac{3}{2}.$$

Поэтому

$$S_G = \frac{5}{2} - \ln \frac{3}{2}.$$

11. Закон изменения координаты можно найти, приняв во внимание тот факт, что $x'(t) = v(t)$. Имеем:

$$x(t) = \frac{v_0}{\Omega} \sin \Omega t + x_0, \quad x_0 = const,$$

но $x(0) = 0$ по условию, следовательно,

$$x(t) = \frac{v_0}{\Omega} \sin \Omega t.$$

Координата будет максимальна для фазы

$$\Omega t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \; n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Соответствующие моменты времени

$$t_n = \frac{\pi}{2\Omega}(4n + 1).$$

12. В перпендикулярном сечении (см. рис. 22.1) на высоте x ($0 \le x \le h$) получаем круг радиуса $r(x)$ такого, что

$$\frac{r(x)}{R} = \frac{h - x}{h};$$

эта пропорция получается при рассмотрении осевого сечения. Откуда

$$r(x) = \frac{R}{h}(h - x).$$

Поэтому площадь перпендикулярного сечения дается формулой

$$S(x) = \pi r^2(x) = \pi \frac{R^2}{h^2}(h-x)^2 .$$

Тогда объем конуса можно получить интегрированием:

$$V = \int_0^h s(x)\,dx = \pi \frac{R^2}{h^2} \int_0^h (h-x)^2\,dx =$$

$$= \pi \frac{R^2}{h^2}\left[-\frac{(h-x)^3}{3}\right] = \pi \frac{R^2}{h^2}\left(0 + \frac{h^3}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi R^2 h .$$

Аналогично можно получить формулу объема шара. Рассмотрим для простоты полушар (рис. 22.4).

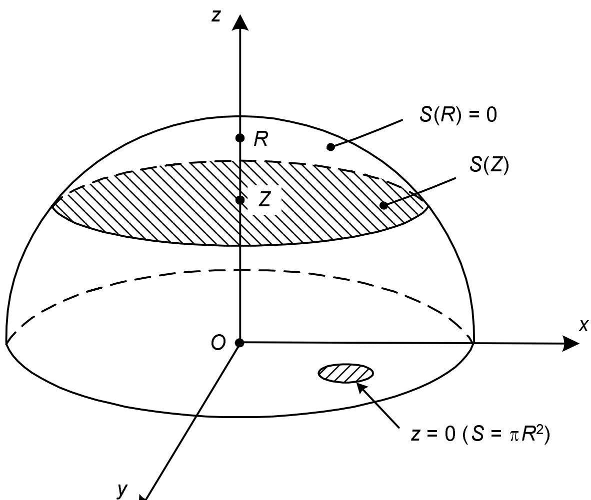

Рис. 22.4. Полушар

Пусть система координат ($Oxyz$) связана с полушаром таким образом, что ее начало совпадает с центром шара, а плоская часть поверхности расположена в плоскости (Oxy). Найдем площадь перпендикулярного сечения для переменных значений z. Удобнее всего это сделать через рассмотрение осевого сечения плоскостью (Oxz) (рис. 22.5).

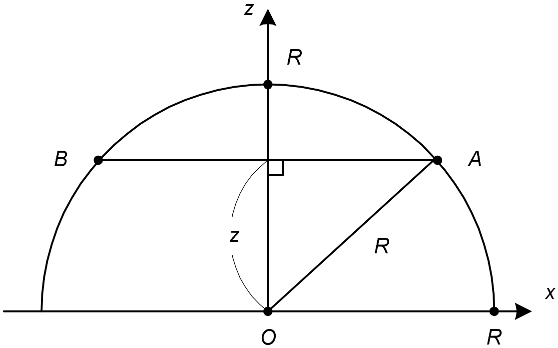

Рис. 22.5. Осевое сечение полушара

В этой плоскости сечение представится отрезком AB. Радиус сечения $r(z)$ можно найти по теореме Пифагора:

$$r^2(z) = R^2 - z^2.$$

Тогда переменная (зависящая от z) площадь сечения будет

$$S(z) = \pi r^2(z) = \pi\left(R^2 - z^2\right).$$

Интегрируя последнее выражение в пределах от 0 (сечение — большой круг) до R (сечение — одна точка, "северный полюс" шара), получим объем полушара:

$$V_{\text{пш}} = \int_0^R \pi\left(R^2 - z^2\right)dz = \pi\left(R^2 z - \frac{z^3}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi R^3;$$

тогда объем шара, очевидно, вдвое больше:

$$V_{\text{ш}} = 2 \cdot V_{\text{пш}} = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Комментарии

1—6. В этих задачах первообразные либо уже известны, либо легко угадываются. Не всегда по виду данной функции легко догадаться, имеется ли у нее элементарная первообразная.

Определение

Элементарной называется функция, которую можно выразить через простейшие элементарные функции путем использования конечного количества суперпозиций и четырех арифметических действий. Простейшие элементарные функции — это постоянные функции, степенные функции, показательные функции, логарифмические функции, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, обратные тригонометрические функции.

Например, функции

$$y = \log_2\left(e^{\sin^2\left(3\arccos\sqrt{x}\right)} + x^3 + 1\right)$$

или

$$y = |x| = \sqrt{x^2}$$

являются элементарными, а функция

$$y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \text{ —}$$

нет.

Уже такая простая с виду функция, как

$$y = \frac{\sin x}{x}$$

элементарной первообразной не имеет. Вообще, задача нахождения неопределенного интеграла (множества всех первообразных) неизмеримо сложнее задачи дифференцирования функции. Различные методы интегрирования функций изучаются в математическом анализе.

7. Один из случаев, когда подынтегральную функцию (здесь это $xe^x + e^x$) легко представить в виде производной элементарной функции (здесь xe^x). Вот другие примеры:

$$f(x) = 2x \cdot e^{x^2} = \left(e^{x^2}\right)';$$

$$f(x) = \frac{\cos\ln x}{x} = (\sin\ln x)';$$

$$f(x) = 1 + \ln x = x\cdot(\ln x)' + (x)'\cdot\ln x = (x\ln x)'.$$

Впрочем, последнее менее очевидно.

8. Отрезок $[a;\ 2\pi + a]$ соответствует периоду функции $y = \sin x$. Вообще, определенные интегралы по периоду (или по целому количеству периодов) от функций $y = \sin nx$ $(n > 0)$, $y = \cos nx$ $(n > 0)$ всегда дают 0. Геометрически это соответствует взаимному "поеданию" площадей над и под осью абсцисс (рис. 22.6).

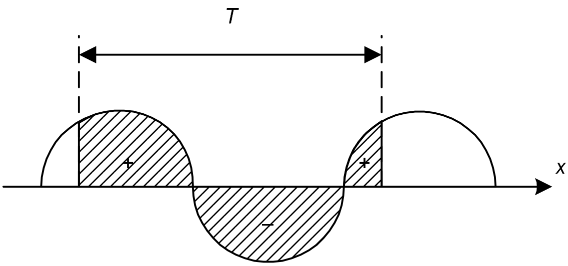

Рис. 22.6. Периодическая функция

9, 10. Во многих случаях площадь плоской фигуры можно представить через сумму (разность) площадей криволинейных трапеций. Например, площадь фигуры, ограниченной параболами $y - x^2 = 0$, $y^2 - x = 0$ можно найти как разность

$$S = \int_0^1 \sqrt{x}\, dx - \int_0^1 x^2\, dx$$

(следует сделать соответствующий чертеж).

11. Для ответа на вопрос задачи находить явное выражение $x(t)$ необязательно. Величина $x(t)$ достигает (локально) максимальных значений, когда ее производная $x'(t) = v(t)$ меняет знак с "+" на "−". Это происходит при условии

$$\Omega t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

12. Рассмотренные случаи родственны еще тем, что тела, объемы которых вычисляются, являются телами вращения. Поверхности таких тел образуются вращением некоторой линии вокруг некоторой оси. Если вращение происходит вокруг оси (Ox), а линия задается соответствием $y = f(x)$, $x \in [a;\ b]$, то объем тела вращения

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx$$

(интегрируется площадь перпендикулярного сечения $S(x) = \pi f^2(x)$). Разумеется, интегрирование площади сечения возможно и для иных тел, не являющихся телами вращения.

Задачи для самостоятельного решения

Доказать (1—5), что функция $y = F(x)$ является одной из первообразных для функции $y = f(x)$ на указанном промежутке:

1. $F(x) = (1+x)(1+2x)(1+3x)$, $f(x) = 2\left(3 + 11x + 9x^2\right)$, $\mathbb{R}$.

2. $F(x) = \dfrac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2 + b^2} e^{ax}$, $f(x) = e^{ax}\cos bx$, $\mathbb{R}$.

3. $F(x) = \ln\ln\ln x$, $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x\ln\ln x}$, $(1;\ +\infty)$.

4. $F(x) = x \cdot \operatorname{tg} x + \ln\cos x$, $f(x) = \dfrac{x}{\cos^2 x}$, $\left(-\dfrac{\pi}{2};\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

5. $F(x) = \dfrac{2x-3}{4} \cdot \sqrt{x^2 + x + 1} - \dfrac{1}{8}\ln\left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x + \dfrac{1}{2}\right)$,

$f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$, $\mathbb{R}$.

Найти все первообразные функции $f(x)$ (6—14):

6. $f(x) = 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$.

7. $f(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$.

8. $f(x) = \sqrt[5]{x \cdot \sqrt[3]{x}}$.

9. $f(x) = 3x^2 \cdot \cos x^3$.

10. $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 3}$.

11. $f(x) = e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x$.

12. $f(x) = \sin x \cdot \cos \dfrac{x}{2}$.

13. $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$.

14. $f(x) = \operatorname{sh}^3 x$, где $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Найти значения определенных интегралов (15—18):

15. $\int\limits_{-3}^{3} \left(9x - x^3\right) dx$.

16. $\int\limits_{0}^{a} \left(ax - x^2\right) dx$ $(a > 0)$.

17. $\int\limits_{\ln n}^{\ln(n+1)} e^x dx$ ($n \in \mathbb{N}$). Как будет вести себя данное выражение при $n \to \infty$?

18. $\int\limits_{1}^{A} \dfrac{dx}{x^2}$ ($A \in \mathbb{R}$, $A > 1$). Как будет вести себя данное выражение при $A \to \infty$?

19. Определить значение интеграла

$$\int\limits_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2}\, dx \quad (R > 0)$$

из геометрических соображений.

20. Определить число μ из равенства

$$\int_a^b x^2\,dx = \mu(b-a) \quad (a,\ b \in \mathbb{R},\ b > a).$$

21. Найти значение

$$\int_0^1 \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx\,.$$

Найти площади фигур, ограниченных линиями (22—25):

22. $q \cdot y = \pm x(q-x)$ $(q > 0)$. Как будет вести себя площадь при $q \to 0$?

23. $y^2 = x$, $x + y = 2$.

24. $|x| + |y| = 1$.

25. $|x| = \sin^2 y$ $(0 \le y \le \pi)$.

26. Решить уравнение:

$$\int_0^x e^{-t}\,dt = a\,,$$

если $a = 0$; $a = 1/2$; $a = 1$. Каков характер монотонности функции $a(x)$ на $[0; +\infty)$? К какому пределу стремится $a(x)$, если $x \to +\infty$?

27. Найти объем тела, образованного вращением синусоиды $y = \sin^2 x$ $(0 \le x \le \pi)$ вокруг оси (Ox).

Ответы

6. $F(x) = -\dfrac{1}{2}\cos 2x + C$. **7.** $F(x) = -\dfrac{1}{2}\sin 2x + C$.

8. $F(x) = \dfrac{15}{19}x \cdot \sqrt[15]{x^4} + C$. (*Указание:* $f(x) = x^{\frac{4}{15}}$.) **9.** $F(x) = \sin x^3 + C$.

(*Указание:* $f(x) = \left(x^3\right)' \cdot \cos x^3 = \left(\sin x^3\right)'$.) **10.** $F(x) = \ln\left(e^x + 3\right) + C$.

(*Указание:* $f(x)=\left(\ln\left(e^x+3\right)\right)'$.) **11.** $F(x)=e^x\sin x$. (*Указание:* $f(x)=\left(e^x\right)'\cdot\sin x+e^x\cdot(\sin x)'=\left(e^x\cdot\sin x\right)'$.)

12. $F(x)=-\dfrac{3}{8}\cos\dfrac{4x}{3}-\dfrac{3}{4}\cos\dfrac{2x}{3}+C$. (*Указание:* воспользоваться формулой преобразования произведения синуса и косинуса в сумму.) **13.** $F(x)=-2\operatorname{ctg}2x+C$. (*Указание:* $\dfrac{1}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}\equiv\dfrac{1}{\sin^2 x}+\dfrac{1}{\cos^2 x}$.)

14. $F(x)=\dfrac{1}{3}\operatorname{ch}^3 x-\operatorname{ch}x+C$, где $\operatorname{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$. (*Указание:* $\operatorname{sh}^3 x=\operatorname{sh}^2 x\cdot\operatorname{sh}x=\left(\operatorname{ch}^2-1\right)\cdot(\operatorname{ch}x)'=\left(\dfrac{1}{3}\operatorname{ch}^3 x-\operatorname{ch}x\right)'$.) **15.** 0. (*Указание:* воспользоваться свойством нечетности $f(x)$.) **16.** $\dfrac{a^3}{6}$. **17.** 1; не изменится (промежуток интегрирования $\left[\ln n;\ \ln(n+1)\right]$ имеет длину $\ln(n+1)-\ln n=\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ и "сжимается" с ростом *n*. Однако подынтегральная экспонента столь же быстро растет). **18.** $1-\dfrac{1}{A}$; стремится к 1.

19. $\dfrac{\pi R^2}{2}$. (*Указание:* значение интеграла равно площади полукруга радиуса *R*.) **20.** $\mu=\dfrac{1}{3}\left(a^2+ab+b^2\right)$; $\mu=\dfrac{1}{3}$. **21.** $\dfrac{\pi}{2}-1$. (*Указание:* показать, исходя из рассмотрения соответствующих криволинейных трапеций, что данный интеграл равен $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}^2 y\,dy$.) **22.** $\dfrac{q^2}{3}$; стремится к 0. **23.** 9/2.

24. 2. **25.** π. **26.** Если $a=0$, то $x=0$; если $a=1/2$, то $x=\ln 2$; если $a=1$, то $x\in\varnothing$; $a(x)$ строго возрастает на $[0;+\infty)$, стремясь к 1 при $x\to+\infty$. **27.** $\dfrac{3\pi^2}{8}$.

Приложение

Тесты

Тест 1

1. Пусть

$$\frac{x+1}{y} = \sqrt{2} - 1\,; \quad \frac{y+1}{x} = \sqrt{8} + 2\,.$$

Найти значение выражения

$$\frac{x+y+1}{xy}\,.$$

2. Решить уравнение $x + 30 = \sqrt{12 - x}$.

3. Указать наибольшее целое решение неравенства

$$\frac{x^2 + 2x + 4}{9 - x^2} \geq 0\,.$$

4. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют длины $|\vec{a}| = 0{,}15$, $|\vec{b}| = 0{,}2$. Найти длину вектора $2\vec{a} - 3\vec{b}$, если угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $120°$.

5. Решить уравнение

$$8^{\frac{7-x}{3}} + 16 = \left(\sqrt{2}\right)^{22-4x}\,.$$

6. Найти площадь фигуры, координаты точек которой удовлетворяют неравенствам $x^2 + y^2 \leq 5$, $x \geq |y|$.

7. Решить уравнение

$$\cos\frac{x}{2} = \cos x + 1,$$

если $\frac{x}{\pi} \notin \mathbb{Z}$.

8. При каких значениях параметра a уравнение $2\arcsin ax = a(a-2)$ имеет хотя бы одно решение?

9. Под каким углом пересекаются медианы равнобедренного прямоугольного треугольника, проведенные из вершин острых углов?

10. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 3. Точка F, расположенная внутри куба, удалена от каждой из вершин A, B и D на $\frac{\sqrt{27}}{2}$ единиц. При каких значениях параметра ρ ($\rho > 0$) ни одна точка сферы с центром в точке F радиусом ρ не принадлежит поверхности куба?

Ответы

1. 1. **2.** $\{-24\}$. **3.** 2. **4.** $\frac{3\sqrt{7}}{10}$. **5.** $\{3\}$. **6.** $\frac{5\pi}{4}$. **7.** $\left\{\frac{2\pi}{3}(6l \pm 1),\, l \in \mathbb{Z}\right\}$.

8. $a \in \left[1-\sqrt{\pi+1};\ 1+\sqrt{\pi+1}\right]$. **9.** $\arccos\frac{3}{5}$. **10.** $\rho \in \left(0;\ \frac{2\sqrt{6}}{4}\right) \cup \left(\frac{3\sqrt{3}}{2};\ +\infty\right)$.

Тест 2

1. Пусть $f(x) = \frac{100\lg x}{x}$. Вычислить $\lg(-f(0{,}1))$.

2. Решить неравенство

$$\left(\frac{x+1}{x}\right)^2 \le \left(\frac{x+1}{x}\right)^3.$$

3. Найти отношение утроенного квадрата суммы чисел $a = 30$ и $b = 60$ к корню квадратному из половины произведения этих же чисел.

4. Если одну из двух смежных сторон прямоугольника увеличить на 50%, а другую уменьшить на 25%, то получится квадрат с диагональю $\sqrt{288}$. Какова площадь прямоугольника?

5. Пусть

$$\sin\alpha = \frac{4}{5}, \ \cos\beta = 0{,}6,$$

причем углы α и β принадлежат первой четверти. Найти значение выражения $\sqrt{5}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{4}$.

6. Пусть x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $(x-2)\left(x^2-5x+2\right)=0$. Найти число

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_1+x_3}+\frac{x_3}{x_1+x_2}.$$

7. Решить уравнение $\sin x + \sin 4x = \sin 2x + \sin 3x$.

8. Дана арифметическая прогрессия 2, 5, 8, ... Найти наименьший член прогрессии, кратный 22.

9. Найти наибольшее значение функции $f(x) = |\sin x| + \cos 2x$.

10. Дана правильная четырехугольная пирамида с основанием 1. При какой высоте пирамиды радиус описанного шара будет наименьшим?

Ответы

1. 3. **2.** $\{-1\}\cup(0;\ +\infty)$. **3.** 810. **4.** 128. **5.** 1. **6.** $2\frac{27}{80}$.
7. $\left\{\pi+2\pi n;\ \frac{2\pi m}{5}\ \middle|\ n,m\in\mathbb{Z}\right\}$. **8.** 44. **9.** $\frac{9}{8}$. **10.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Тест 3

1. Найти наибольший натуральный делитель числа 1573, отличный от 1573.

2. В круговой сектор с центральным углом 90° вписан круг. Найти отношение площадей сектора и круга.

3. Вычислить значение выражения

$$A = \left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^{-1},$$

если $a = 0{,}1(6)$ и $b = 0{,}(6)$.

4. Решить уравнение

$$\frac{x^2 + 4}{3} = \sqrt{2} \cdot x$$

5. Что больше: $x = \sin 263°$ или $y = \sin 277°$?

Решить уравнение (6, 7):

6. $\lg \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} - \lg \sqrt{\dfrac{2}{x}} = \lg 2$.

7. $\cos \dfrac{x}{2} + \cos \dfrac{x}{4} = 2$.

8. Найти целую часть числа $\log_3 6 + \log_2 7$.

9. Найти все решения неравенства

$$\frac{\left(x - x^2\right)^2}{2x - 1} \le 0,$$

удаленные от точки 0 не более чем на 1.

10. Найти наибольшее значение функции

$$y = 2^{\frac{ax}{x^2+4}},$$

если ее наименьшее значение равно $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

Ответы

1. 143. **2.** $\dfrac{3+\sqrt{8}}{4}$. **3.** 0,4. **4.** $\left\{\sqrt{2};\ 2\sqrt{2}\right\}$. **5.** $x = y$. **6.** 512. **7.** $\{8\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\}$.
8. 4. **9.** $\left[-1;\ \dfrac{1}{2}\right) \cup \{1\}$. **10.** $2\sqrt{2}$.

Тест 4

1. Найти среднее арифметическое чисел $a = \log_2(1,2)$ и $b = \log_2\left(13\frac{1}{3}\right)$.

2. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}\arcsin\frac{2}{x}} = \frac{\sin(0,3\pi)}{\cos(0,2\pi)}.$$

3. Указать целые решения неравенства

$$\frac{x^2}{3-x} \le \frac{x}{3-x},$$

не превосходящие $2\sqrt{5}$.

4. Найти тангенс угла наклона касательной к графику функции

$$y = \frac{x \cdot \cos x}{1+x}$$

в точке с абсциссой $x_0 = 0$.

5. В правильном тетраэдре $SABC$ SM — высота, AK — медиана боковой грани. Найти угол между прямыми SM и AK.

6. При каких значениях параметра p множество решений неравенства $2 + 2^p \cdot x \le 4^p \cdot x^2$ содержит точку $x = 4$?

7. Решить неравенство

$$\frac{\log_x 2 - \log_x 3}{\log_x 5 - \log_x 6} \le 0.$$

8. Найти наибольшее отрицательное решение уравнения $\cos 5x \cdot \cos 6x = \cos 4x \cdot \cos 7x$.

9. Найти множество значений функции $f(x) = \arcsin\frac{x}{2} - \arccos x$.

10. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 1 + 4x(x+y) + y^2 = \cos(\cos z), \\ 6^x + \left(\sqrt{6}\right)^y = 2\sin(2,5 \cdot \pi + y). \end{cases}$$

Ответы

1. 2. **2.** 2. **3.** $\{0;\,1;\,4\}$. **4.** 1. **5.** $\arccos\frac{\sqrt{2}}{3}$. **6.** $p \ge -1$. **7.** $\varnothing$. **8.** $-\frac{\pi}{2}$.
9. $\left[-\frac{7\pi}{6};\,\frac{\pi}{6}\right]$. **10.** $x = 0$, $y = 0$, $z = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Тест 5

1. Пусть $x = \operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$. Вычислить $A = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2}$.

2. Решить неравенство $\log_{\sqrt{3}}(2 - x) \ge \log_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}} x$.

3. Найти площадь фигуры, точки которой удовлетворяют двойному неравенству $2x \le x^2 + y^2 \le 4$.

4. Имеются два сплава, образованные металлами *A* и *B*. Масса первого сплава 2 кг; металлы *A* и *B* входят в него в пропорции $2:3$ соответственно. Масса второго сплава 3 кг, пропорция металлов *A* и *B* в нем $3:2$. В какой пропорции будут входить металлы *A* и *B* в новый сплав, полученный из двух старых с добавлением 1 кг металла *A*?

5. Величина одного из острых углов прямоугольного треугольника

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{2x}{x^2 + 1} \quad (x > 0).$$

Какова при этом наименьшая величина второго острого угла?

6. Записать уравнение прямой, проходящей через начало координат и перпендикулярной касательной к графику функции

$$y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

в точке с абсциссой $x_0 = -\frac{\pi}{2}$.

7. Точки *A*, *B*, *C*, *D* расположены в пространстве таким образом, что $AB = AC = AD = 1$, $BC = CD = BD = \sqrt{2}$. Точка *F* такова, что сумма квадратов расстояний от нее до точек A, B и C является минимально возможной. Найти длину отрезка FD.

8. Найти множество значений функции f, где $y = f(x)$ — расстояние на числовой прямой от x до ближайшего корня уравнения

$$\cos\frac{x}{2} = \cos\frac{x}{3}.$$

9. Найти множество значений функции

$$y = \sqrt{\left(5^x - 5^{\frac{x}{5}}\right)\left(3^{\frac{x}{3}} - 3^x\right)} + \operatorname{arcctg} x.$$

10. Указать все натуральные числа n, для которых число $t = n \cdot \log_n 2$ является целым.

Ответы

1. 1. **2.** $\{1\}$. **3.** 3π. **4.** $3:2$. **5.** $\frac{\pi}{4}$. **6.** $y = -x$. **7.** $\frac{\sqrt{11}}{4}$. **8.** $\left[0; \frac{6\pi}{5}\right]$. **9.** $\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.
10. $\left\{2^{2^{m-1}} \mid m \in \mathbb{N}\right\}$.

Тест 6

1. Найти сумму цифр наибольшего шестизначного натурального числа, кратного 74.

2. Решить уравнение $4^{x-\sin\frac{5\pi}{6}} + x^2 \cdot \left(-\cos\frac{2\pi}{3}\right)^{1-x} = 2^{x\cdot\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}} + x^{-\lg 0{,}01}$.

3. Решить неравенство $\sqrt{|x| - |x-1| - 1} \le 0$.

4. Найти значение выражения

$$\frac{\arcsin\sqrt{4x^2 - 4x^4}}{\arcsin x},$$

если $x = 0{,}2$.

5. Найти уравнения осей симметрии графика функции

$$y = \frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

6. К графику функции $y = x^2 - 1$ в точке $(x_0;\ y_0)$ проведена касательная под углом α к оси абсцисс. Известно, что числа y_0, x_0 и $\operatorname{tg}\alpha$ в указанном порядке образуют арифметическую прогрессию. Найти длину отрезка, отсекаемого от этой касательной координатными осями, если $x_0 > 0$.

7. При каких значениях параметра α уравнение $x^2 + \alpha x = 2\alpha^2$ является следствием уравнения $x^2 + 2x = \alpha x + 2\alpha$?

8. Высота CO равностороннего треугольника ABC имеет длину $\sqrt{3}$. Сколько раз окружность $(O;\ R)$, где $R = 0{,}9$, пересекает стороны треугольника?

9. В тетраэдре $ABCD$ все углы при вершине D — прямые. Известно, что $AC = 5$, $BC = \sqrt{32}$; высота AH треугольника ABC является также его медианой. Найти объем тетраэдра $ABCD$.

10. Найти x и y из условий

$$\begin{cases} \cos x = \cos y, \\ x^2 + y^2 + 2\pi^2 = 4\pi x. \end{cases}$$

Ответы

1. 44. **2.** $\{1\}$. **3.** $[1;\ +\infty)$. **4.** 2. **5.** $2x + 1 = 0$. **6.** $\sqrt{5}$. **7.** $\alpha \in \{-2;\ 1\}$. **8.** Шесть. **9.** 8. **10.** $\{(\pi;\ \pm\pi),\ (3\pi;\ \pm\pi)\}$.

Тест 7

1. Найти значение выражения $5369 \cdot 5371 \cdot 5368 - 5370^2 \cdot 5368$.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x \lg 2 + y \lg 5 = 1, \\ x \lg 5 - y \lg 2 = \lg \dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

3. Найти длину промежутка решений уравнения $\left|x^2 - x\right| + x^2 = x$.

4. Если a и b — катеты прямоугольного треугольника, c — его гипотенуза, то каково значение постоянной

$$\frac{a}{\sqrt[4]{ac-ab}\cdot\sqrt[4]{ac+ab}}\,?$$

5. Найти наименьшее целое решение уравнения $2\sin\left(\frac{\pi\cdot 2^n}{48}\right) = \sqrt{3}$.

6. Решить неравенство $\left|x^2 - 5\right|\cdot(3 - x) \le 0$.

7. Найти значение $\frac{16}{\pi}\left(\operatorname{arctg} 0{,}2 + \operatorname{arctg} 0{,}(6)\right)$.

8. При каких значениях параметра a неравенство $(ax-1)^3 \le 8x^6 + a(x-1)^3$ имеет решение $x = x_0 = 1$?

9. Найти площадь боковой поверхности правильной треугольной призмы объемом $V = 6\sqrt{3}$, если радиус окружности, описанной около основания, равен $\rho = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

10. Найти множество значений функции $f(x) = \sqrt{x} - \sqrt[4]{x}$.

Ответы

1. -5368. **2.** $\{(1;\ 1)\}$. **3.** 1. **4.** 1. **5.** 4. **6.** $\{\pm\sqrt{5}\}\cup[3;\ +\infty)$. **7.** 4. **8.** $(-\infty;\ 3]$. **9.** 36. **10.** $[-0{,}25;\ +\infty)$.

Тест 8

1. Пусть $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = 2$, а $\operatorname{tg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha = 3$. Чему равно значение $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$?

2. При каких значениях a ветви парабол $y = \left(a^2 - a\right)x^2 - x$ и $y = \left(a^2 + a\right)x^2 + x$ направлены вверх?

3. Решить неравенство $\sqrt{\pi^2 - 4x^2} \cdot \sin x \le 0$.

4. Вычислить $\log_{1,5} 3 \cdot \sqrt{\log_3^2 2 + \log_3 0,75}$.

5. Какой угол образуют стрелки часов (часовая и минутная) в 15 часов 20 минут? (Ответ дать в радианах.)

6. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром $AA_1 = a = 2$. Найти расстояние от точки A до проекции центра грани CDD_1C_1 на плоскость (BDD_1).

7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x(x+1) + y(y+1) = 4, \\ 12(x+2) = y(2-y). \end{cases}$$

8. Известно, что корни уравнения $\cos^2 x = a$ образуют арифметическую прогрессию. Найти разность этой прогрессии.

9. Пусть p — корень уравнения $x^3 + 3x + 1 = 0$, а q — корень уравнения $x^3 + 4x + 1 = 0$. Какое из чисел больше: p или q?

10. Найти площадь правильного шестиугольника, вписанного в окружность $x^2 + y^2 = y$.

Ответы

1. 4. **2.** $a < -1,\ a > 1$. **3.** $\left\{-\frac{\pi}{2}\right\} \cup \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. **4.** 1. **5.** $\frac{\pi}{9}$. **6.** $\sqrt{\frac{7}{2}}$. **7.** $\{(-2; 0)\}$. **8.** $\frac{\pi}{2}$ или π. **9.** q. **10.** $\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

Тест 9

1. Из чисел $a = \sqrt{2} \cdot \sin 36,5°$, $b = \operatorname{tg} 0,8$, $c = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$, $d = \frac{1}{\sqrt[5]{5}}$ выбрать наибольшее.

2. Решить уравнение $\sqrt[3]{5 - \sqrt{\frac{2}{x}}} = -\sqrt[9]{27}$.

3. Найти наибольшее решение неравенства $z - 3 < \sqrt{z-1}$, не входящее в область определения функции $y = \operatorname{ctg} \pi z$.

4. Дуга окружности, вырезанная центральным углом $\theta = 60^\circ$, на 12 см короче оставшейся части этой окружности. Найти радиус окружности.

5. Найти значение производной функции $f(x) = \sqrt{x^2 - 6x + 9}$ в точке $x_0 = 2$.

6. Записать уравнения вертикальных асимптот к графику функции

$$y = \frac{x-1}{1-x^2}.$$

7. Зная, что $0{,}301 < \lg 2 < 0{,}302$; $0{,}477 < \lg 3 < 0{,}478$, найти значение $\lg 6{,}75$ с точностью до 0,01 в виде десятичной дроби.

8. В треугольнике ABC высота CH, имеющая длину 3, делит сторону AB на отрезки $AH = 1$ и $BH = 4$. Какова площадь круга, описанного около этого треугольника?

9. При каких значениях параметра a корни уравнения

$$\sin^2 \frac{x}{a} = 2a - 3$$

располагаются периодически?

10. Функция $y = f(x)$ определена на $[-1; 1]$, причем $f(\sin x) = \cos^2 x$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Найти величину

$$\left(\cos 2\pi - \cos \frac{2\pi}{9}\right)^{-1} \cdot f\left(\cos \frac{\pi}{9}\right).$$

Ответы

1. b. **2.** $\frac{1}{32}$. **3.** 4. **4.** $\frac{9}{\pi}$. **5.** -1. **6.** $x = -1$. **7.** 0,83. **8.** $\frac{125\pi}{18}$. **9.** $\left\{\frac{3}{2};\ 2;\ \frac{7}{4}\right\}$.

10. $\frac{1}{2}$.

Тест 10

1. Пусть функция $y = f(x)$ удовлетворяет уравнению

$$f(x) + f\left(\frac{3x}{2}\right) = 2x$$

для всякого $x \in \mathbb{R}$. Найти значение $f(32) - f(2)$.

2. Решить уравнение $2\left(\sqrt{x} - x\right) + 1 = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

3. Найти значение выражения $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1}$ с точностью до 0,1.

4. Каково наибольшее возможное значение выражения $\sin\frac{\pi n}{3} + \cos \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$?

5. Две окружности расположены таким образом, что центр каждой из них принадлежит другой окружности. Для соответствующих кругов найти отношение площади пересечения к площади объединения.

6. Решить неравенство $(6\arcsin x - \pi)(3\arccos x - \pi) \geq 0$.

7. Решить уравнение $\log_{-3x-1}\left(x^3 + 2\right) = \log_{x^2+2}\left(x^3 + 2\right)$.

8. Найти наибольшее значение функции $f(x) = 4\sin^2\frac{x}{6} + 3\cos\frac{x}{3}$.

9. Все члены арифметической прогрессии $\{a_n\}$ — натуральные числа. Член прогрессии с номером, равным a_1, равен 11, а член прогрессии с номером, равным a_2, равен 27. Найти a_1.

10. При каких значениях параметра α уравнение $\left|3x - x^3\right| = \alpha$ имеет ровно шесть различных корней?

Ответы

1. 12. **2.** $\left\{\frac{1}{2};\ 1\right\}$. **3.** 0,4. **4.** $\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$. **5.** $\frac{4\pi - 3\sqrt{3}}{8\pi + 3\sqrt{3}}$. **6.** $\frac{1}{2}$. **7.** $\left\{-1;\ -\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right\}$.
8. 3. **9.** 3. **10.** $\alpha \in (0;\ 2)$.

Тест 11[1]

1. Упростить выражение

$$\frac{a^2-3a-(a-1)\sqrt{a^2-4}+2}{a^2+3a-(a+1)\sqrt{a^2-4}+2}\cdot\sqrt{\frac{a+2}{a-2}}.$$

2. Представить в виде периодической десятичной дроби $\sqrt{2,(7)}$.

3. Сколько точек с целочисленными координатами лежат на кривой c: $xy+x-4y+1=0$?

4. Сравнить числа $a=12^{\lg 11}-12$ и $b=11^{\lg 12}-11$.

5. Решить неравенство

$$\frac{\lg^2(2x-1)}{x^2-2x}<0.$$

6. Найти целые решения уравнения

$$\sqrt[3]{24+\frac{x}{2}}+\sqrt{4-\frac{x}{2}}=4.$$

7. Решите неравенство $2x<|x+1|+|x-1|$.

8. Сумма первых четырех членов геометрической прогрессии с положительными членами в четыре раза больше суммы последующих четырех членов. Найти знаменатель прогрессии.

9. Вычислить $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}-\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$. В ответе указать целую часть результата.

10. Решить уравнение

$$\sqrt{\log_5(x+2)}+\sqrt{\log_3(1-x)}=\sqrt{\log_5(x+2)+\log_3(1-x)}.$$

11. Решить неравенство $0,25\cdot 2^x+2\cdot 2^{1-x}\le 2$.

---

[1] Этот и следующий тесты предлагались на Рейтинговом тестировании физико-механического факультета СПбГПУ в 2002 г. Материалы любезно предоставлены доц. А. Н. Васильевым.

12. Пассажирский поезд проходит мимо столба за 18 секунд. За какое время пройдут мимо друг друга пассажирский и товарный поезда, если длина пассажирского поезда составляет $\frac{2}{3}$ длины товарного поезда, а скорость пассажирского на 50 больше скорости товарного?

13. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 4xy + y^2 = 13, \\ 3x^2 + 7xy = 26. \end{cases}$$

14. Решить уравнение $\sqrt[1-2x]{2\sqrt{2}+3} + \sqrt[1-2x]{-2\sqrt{2}+3} = 10{,}1$.

15. При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x+2a+1} = x+3$ имеет не менее одного решения.

16. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} ax + y = 1, \\ x + 4y = a^2 \end{cases}$$

имеет решения одного знака?

17. При каких значениях параметра a уравнение $(a-2)\cdot 4^x + a\cdot 2^{x-1} + a + 2 = 0$ имеет единственное решение?

18. У арифметической прогрессии число членов больше трех, разность d — целое число, сумма первых n членов меньше суммы последних n членов на 108. Сколько таких прогрессий можно составить?

19. При каких значениях параметра a уравнения $\left(a^2+a\right)x + a^3 - a = 0$ и $\left(a^2+a\right)x + a(a+2) = 0$ равносильны?

20. В кафе, где работает автомат по производству пончиков, который некоторое количество пончиков уже приготовил, врывается толпа изголодавшихся студентов. 20 студентов смогли бы уничтожить все пончики за 96 минут, 76 студентов — в четыре раза быстрее (за 24 минуты). За сколько минут могут уничтожить все пончики 30 изголодавшихся студентов?

Ответы

1. $\dfrac{1-a}{1+a}$. **2.** $1,(6)$. **3.** 4. **4.** $a<b$. **5.** $\left(\dfrac{1}{2};\ 1\right)\cup(1;\ 2)$. **6.** $\{-64;\ 6\}$.

7. $(-\infty;\ 1)$. **8.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **9.** 2. **10.** $\{-1;\ 0\}$. **11.** $\{2\}$. **12.** 27 сек.

13. $\{(2;\ 1);\ (-2;\ -1)\}$. **14.** $\left\{\dfrac{1\pm\lg\left(3+2\sqrt{2}\right)}{2}\right\}$. **15.** $a\in\left[\dfrac{7}{8};\ +\infty\right)$.

16. $a\in(-\infty;\ -2)\cup(1;\ 2)$. **17.** $a\in\{-1;\ 0;\ 1\}$. **18.** 3.

19. $a\in\left\{\dfrac{1-\sqrt{13}}{2};\ 0;\ \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right\}$. **20.** 60 мин.

Тест 12

1. Вычислить тригонометрическое выражение $\dfrac{1}{2}\sin^{-1}10°-2\sin70°$. Установить, что это число — целое.

2. Решить уравнение $\sin2x=\cos5x$.

3. Найти сумму $\sin26°+\sin98°+\sin170°+\sin242°+\sin314°$.

4. Сравнить числа $a=\sin(\cos78°)$ и $b=\cos(\sin78°)$ без помощи калькулятора.

5. Для каких натуральных n функция $\cos nx\cdot\sin\dfrac{4x}{n}$ имеет период 3π?

6. Найти решение уравнения

$$\frac{2\sin x+3}{3\sin x-2}=\frac{2\cos x+3}{3\cos x-2},$$

удовлетворяющее условию $\cos x<0$.

7. Вычислить без помощи калькулятора $\arcsin(\sin22)$.

8. Решить неравенство $\arccos x\le\arcsin x$. В ответе указать количество целых решений.

9. Найти оси симметрии графика функции $f(x)=\sin^4x+\cos^4x$.

10. Решить неравенство

$$\left|\frac{3}{4}+\sin x\right| > \sin^2 x\,.$$

11. Решить систему

$$\begin{cases}\cos^2 x+\cos y = 2\cos y\sin y,\\ \sin^2 x - \sin y = 0.\end{cases}$$

12. При каких значениях параметра a уравнение $\sin^2 x + 2\sqrt{2}\sin x\cos x = a$ не имеет решений.

13. Длина вектора $\vec{a} = (\alpha;\,\beta)$ равна 4. Найти наименьшее значение выражения $5\alpha - 12\beta + 4$.

14. На прямой l: $y=-x$ найти такую точку $B(x;\,y)$, что вектор $\overrightarrow{AB}$ для $A(-1;\,0)$ параллелен прямой l': $y=-2x+7$.

15. Стороны AB, BC и AC треугольника ABC поделены соответственно точками K, L, M, N, P, Q в отношении $AK:KL:LB = 1:2:1$, $BM:MN:NC = 1:2:3$, $AP:PQ:QC = 1:1:1$. Найти площадь шестиугольника $KLMNQP$, если площадь треугольника ABC составляет 24 кв. ед.

16. Общая хорда двух окружностей стягивает центральные углы $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{3}$. Найти отношение радиусов окружностей в виде числа, не превосходящего 1.

17. Найти множество S точек на плоскости, отношение расстояний от которых до точек $A(-2;\,0)$ и $B(0;\,2)$ соответственно не превосходит $\sqrt{2}$. В ответе указать площадь дополнения множества S.

18. Плоские углы при вершине треугольной пирамиды равны $90°$, а боковые ребра b_1, b_2, b_3 образуют геометрическую прогрессию. Найти отношение объема пирамиды к объему шара радиусом b_2.

19. Объем правильной треугольной призмы равен 1. Выходящие из одной вершины диагонали боковых граней образуют угол α. Найти площадь основания.

20. Шар рассекается на восемь одинаковых частей тремя взаимно перпендикулярными плоскостями, проходящими через центр шара. Радиус вписанного в одну из таких частей шара равен 1. Найти радиус исходного шара.

Ответы

1. 1. **2.** $\left\{\frac{\pi}{14}+\frac{2\pi k}{7}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi l}{3}\right\} \mid k, l \in \mathbb{Z}$. **3.** 0. **4.** $a < b$. **5.** $\{2; 6\}$.

6. $\left\{-\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$. **7.** $7\pi-22$. **8.** 1. **9.** $x=\frac{\pi k}{4},\ k\in\mathbb{Z}$.

10. $\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{7\pi}{6}+2\pi k\right),\ k\in\mathbb{Z}$. **11.** $\left\{\left(\pm\arcsin\frac{1}{\sqrt[4]{2}}+\pi k_1;\ \frac{\pi}{4}+2\pi k_2\right)\right\}\cup$

$\cup\left\{\left(\frac{\pi}{2}+\pi k_3;\ \frac{\pi}{2}+2\pi k_4\right)\right\}\cup\left\{\left(\pi k_5;\ \pi+2\pi k_6\right)\right\},\ k_i\in\mathbb{Z}$.

12. $a\in(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$. **13.** -48. **14.** $B(-2;\ 2)$. **15.** 17. **16.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$. **17.** 16π.

18. $\frac{1}{8\pi}$. **19.** $3^{\frac{1}{6}}\cdot\left(\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}-3\right)^{-\frac{1}{3}}$. **20.** $\sqrt{3}+1$.

Список литературы

1. Багманов А. Т., Иванова Л. А., Толстых И. В. Математика. Избранные задачи. Абитуриенту для самостоятельной работы. — СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2003.
2. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. — М.: Наука, 1986.
3. Выгодский М. Я. Справочник по элементарной математике. Издание 27-е. — М.: Наука, 1986.
4. Егерев Н. К., Зайцев В. В., Кордемский Б. А., Маслова Т. Н., Орловская И. Ф., Позойский Р. И., Ряховская Г. С., Федорова Н. М. Сборник задач по математике для поступающих во втузы. Под ред. М. И. Сканави. — Минск: Вышейшая школа, 1990.
5. Нестеренко Ю. В., Олехник С. Н., Потапов М. К. Задачи вступительных экзаменов по математике. — М.: Наука, 1980.
6. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. — М.: Наука, 1970.
7. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. — М.: Наука, 1965.
8. Ткачук В. В. Математика — абитуриенту. В 2 т. — М.: МЦНМО, 1997.