

# **ФИНАНСОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**

С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ

# **EXCEL**

**2-е издание**

# FINANCIAL MODELING

Second edition

*Simon Benninga*



The MIT Press  
Massachusetts Institute of Technology  
Cambridge, Massachusetts 02142  
<http://mitpress.mit.edu>

# ФИНАНСОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ EXCEL

2-е издание

*Шимон Беннинга*



Москва • Санкт-Петербург • Киев  
2007

ББК 32.973.26-018.2.75

Б46

УДК 681.3.07

Издательский дом “Вильямс”

Зав. редакцией *С.Н. Тригуб*

Перевод с английского и редакция *В.Л. Бродового*

По общим вопросам обращайтесь в Издательский дом “Вильямс” по адресу:

info@williamspublishing.com, <http://www.williamspublishing.com>

115419, Москва, а/я 783; 03150, Киев, а/я 152

**Беннинга, Шимон.**

**Б46** Финансовое моделирование с использованием Excel, 2-е издание. : Пер. с англ. — М. : ООО “И.Д. Вильямс”, 2007. — 592 с. : ил. — Парал. тит. англ.

ISBN 978-5-8459-1141-4 (рус.)

В книге представлены финансовые модели и связанные с ними практические методы численного моделирования финансовых операций и отношений с использованием Microsoft Excel. Рассматриваются стандартные финансовые модели в области корпоративных финансов, операций с ценными бумагами и т.п. В книгу включены дополнительные технические главы по приемам работы в Excel и основам программирования в среде Visual Basic for Applications. Книга предназначена для специалистов по финансам, студентов и преподавателей финансово-экономических специальностей.

**ББК 32.973.26-018.2.75**

Все названия программных продуктов являются зарегистрированными торговыми марками соответствующих фирм.

Никакая часть настоящего издания ни в каких целях не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, если на это нет письменного разрешения издательства MIT Press.

Authorized translation from the English language edition published by MIT Press © 2001 Massachusetts Institute of Technology

All rights reserved. No part of this book shall be reproduced, stored in a retrieval system, or transmitted by any means, electronic, mechanical, photocopying, recording, or otherwise, without written permission from the publisher. No patent liability is assumed with respect to the use of the information contained herein.

All terms mentioned in this book that are known to be trademarks or service marks have been appropriately capitalized.

Russian language edition is published by Williams Publishing House according to the Agreement with R&I Enterprises International, Copyright © 2007.

ISBN 978-5-8459-1141-4 (рус.)

ISBN 0-262-02482-9 (англ.)

© Издательский дом “Вильямс”, 2007

© Massachusetts Institute of Technology, 2001



---

## Оглавление

|                                                              |            |
|--------------------------------------------------------------|------------|
| Предисловие                                                  | 17         |
| <b>I. Моделирование финансов компаний и предприятий</b>      | <b>21</b>  |
| 1. Элементарные финансовые расчеты                           | 23         |
| 2. Расчет стоимости капитала                                 | 45         |
| 3. Моделирование финансового отчета предприятия              | 73         |
| 4. Гипотетические модели и оценивание предприятий            | 103        |
| 5. Финансовый анализ арендных отношений                      | 113        |
| 6. Аренда имущества, частично приобретенного в кредит        | 127        |
| <b>II. Моделирование портфелей ценных бумаг</b>              | <b>141</b> |
| 7. Введение в модели портфелей ценных бумаг                  | 143        |
| 8. Вычисление ковариационной матрицы                         | 161        |
| 9. Расчет эффективных портфелей без ограничения прав продажи | 169        |
| 10. Расчет “бета” и линии рынка ценных бумаг                 | 189        |
| 11. Эффективные портфели при запрете на продажу без покрытия | 201        |
| 12. Стоимость, подверженная риску                            | 211        |
| <b>III. Модели ценообразования опционов</b>                  | <b>227</b> |
| 13. Введение в опционы                                       | 229        |
| 14. Биномиальная модель цены на опционы                      | 251        |
| 15. Логнормальное распределение                              | 273        |
| 16. Модель Блэка–Скоулза                                     | 291        |
| 17. Страхование портфелей ценных бумаг                       | 303        |

|                                                         |            |
|---------------------------------------------------------|------------|
| 18. Опциональные сделки                                 | 319        |
| 19. Пределы досрочного исполнения                       | 333        |
| <b>IV. Облигации и дюрация</b>                          | <b>349</b> |
| 20. Дюрация                                             | 351        |
| 21. Схемы иммунизации                                   | 367        |
| 22. Моделирование временной структуры процентных ставок | 377        |
| 23. Доходность облигаций с поправкой на дефолт          | 385        |
| 24. Дюрация и задача дешевой поставки                   | 401        |
| <b>V. Технические вопросы</b>                           | <b>413</b> |
| 25. Случайные числа                                     | 415        |
| 26. Таблицы данных                                      | 425        |
| 27. Матрицы                                             | 431        |
| 28. Метод Гаусса–Зейделя                                | 439        |
| 29. Функции Excel                                       | 443        |
| 30. Некоторые приемы работы с Excel                     | 459        |
| <b>VI. Введение в Visual Basic for Applications</b>     | <b>469</b> |
| 31. Функции, определяемые пользователем                 | 471        |
| 32. Типы и циклы                                        | 495        |
| 33. Макросы и взаимодействие с пользователем            | 513        |
| 34. Массивы                                             | 529        |
| 35. Объекты                                             | 549        |
| Список литературы                                       | 567        |
| Предметный указатель                                    | 577        |

---

## Содержание

|                                                                                                  |           |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Предисловие</b>                                                                               | <b>17</b> |
| От издательства                                                                                  | 18        |
| Предисловие к первому изданию                                                                    | 19        |
| <b>I. Моделирование финансов компаний и предприятий</b>                                          | <b>21</b> |
| <b>1. Элементарные финансовые расчеты</b>                                                        | <b>23</b> |
| 1.1. Введение                                                                                    | 23        |
| 1.2. Приведенная стоимость и чистая приведенная стоимость                                        | 24        |
| 1.3. Внутренняя ставка доходности и таблицы возврата средств                                     | 25        |
| 1.4. Неоднозначные решения для внутренней ставки доходности                                      | 28        |
| 1.5. График периодических выплат по кредиту                                                      | 29        |
| 1.6. Примеры расчета будущей стоимости                                                           | 30        |
| 1.7. Пенсионная задача — усложненная задача о будущей стоимости                                  | 32        |
| 1.8. Расчет непрерывно накапливаемого дохода                                                     | 35        |
| Упражнения                                                                                       | 38        |
| <b>2. Расчет стоимости капитала</b>                                                              | <b>45</b> |
| 2.1. Введение                                                                                    | 45        |
| 2.2. Дивидендная модель Гордона                                                                  | 46        |
| 2.3. Расчет стоимости акционерного капитала фирмы Abbot Laboratories по модели Гордона           | 49        |
| 2.4. Ценовая модель рынка капитала                                                               | 50        |
| 2.5. Использование линии рынка ценных бумаг (ЛРЦБ) для вычисления стоимости капитала Abbot       | 52        |
| 2.6. Расчет стоимости долга                                                                      | 54        |
| 2.7. Расчет стоимости долга фирмы Abbot                                                          | 55        |
| 2.8. Средневзвешенная стоимость капитала (СВСК)                                                  | 58        |
| 2.9. Когда модели не работают                                                                    | 59        |
| 2.10. Заключение                                                                                 | 62        |
| Упражнения                                                                                       | 63        |
| Приложение 1. Рекомендации по вычислению $\beta$ для долга                                       | 65        |
| Приложение 2. Почему $\beta$ является хорошей мерой риска. Показатели портфеля и отдельных акций | 67        |

## 8 Содержание

|                                                                                      |            |
|--------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| Приложение 3. Получение данных из Интернета                                          | 68         |
| <b>3. Моделирование финансового отчета предприятия</b>                               | <b>73</b>  |
| 3.1. Введение                                                                        | 73         |
| 3.2. Применение финансовых моделей: теория и первый пример                           | 73         |
| 3.3. Поток свободных средств (ПСС): расчет средств, производимых предприятием        | 80         |
| 3.4. Использование ПСС для оценки фирмы и ее капитала                                | 84         |
| 3.5. Некоторые замечания о процедуре оценивания                                      | 85         |
| 3.6. Анализ чувствительности                                                         | 87         |
| 3.7. Использование долга в качестве замыкателя                                       | 88         |
| 3.8. Использование планируемого коэффициента “долг/акционерный капитал”              | 91         |
| 3.9. Финансирование проекта: график выплаты долга                                    | 92         |
| 3.10. Заключение                                                                     | 95         |
| Упражнения                                                                           | 96         |
| Приложение 1: расчет потоков свободных средств при отрицательном доходе              | 98         |
| Приложение 2: ускоренная амортизация в гипотетических моделях                        | 99         |
| <b>4. Гипотетические модели и оценивание предприятий</b>                             | <b>103</b> |
| 4.1. Введение                                                                        | 103        |
| 4.2. Исходная информация                                                             | 103        |
| 4.3. Построение финансовой модели                                                    | 105        |
| 4.4. Вычисление потоков свободных средств (ПСС)                                      | 108        |
| 4.5. Вычисление средневзвешенной стоимости капитала                                  | 110        |
| 4.6. Анализ чувствительности решения                                                 | 111        |
| 4.7. Заключение                                                                      | 111        |
| Упражнения                                                                           | 112        |
| <b>5. Финансовый анализ арендных отношений</b>                                       | <b>113</b> |
| 5.1. Введение                                                                        | 113        |
| 5.2. Элементарный пример                                                             | 113        |
| 5.3. Аренда и финансирование фирмы: метод эквивалентного займа                       | 115        |
| 5.4. Задача для арендодателя: расчет максимальной приемлемой величины арендной платы | 117        |
| 5.5. Остаточная стоимость имущества и другие соображения                             | 120        |
| Упражнения                                                                           | 121        |
| Приложение. Налоговые и бухгалтерские аспекты арендных отношений                     | 122        |

|                                                                     |            |
|---------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>6. Аренда имущества, частично приобретенного в кредит</b>        | <b>127</b> |
| 6.1. Введение                                                       | 127        |
| 6.2. Пример                                                         | 129        |
| 6.3. Анализ денежных потоков по ЧПС или ВСД                         | 131        |
| 6.4. Смысл ВСД                                                      | 133        |
| 6.5. Бухгалтерский аспект: многофазный метод                        | 136        |
| 6.6. Сравнение ставки доходности по многофазному методу и ВСД       | 139        |
| Упражнения                                                          | 140        |
| <b>II. Моделирование портфелей ценных бумаг</b>                     | <b>141</b> |
| <b>7. Введение в модели портфелей ценных бумаг</b>                  | <b>143</b> |
| 7.1. Введение                                                       | 143        |
| 7.2. Простой пример с двумя активами                                | 143        |
| 7.3. Вычисление среднего дохода и дисперсии портфеля                | 147        |
| 7.4. Средний доход и дисперсия портфеля                             | 149        |
| 7.5. Эффективные портфели                                           | 152        |
| 7.6. Заключение                                                     | 154        |
| Упражнения                                                          | 154        |
| Приложение 1. Учет дивидендов                                       | 157        |
| Приложение 2. Различные способы вычисления сложного процента        | 159        |
| <b>8. Вычисление ковариационной матрицы</b>                         | <b>161</b> |
| 8.1. Введение                                                       | 161        |
| 8.2. Общие сведения                                                 | 162        |
| 8.3. Иллюстративный пример                                          | 163        |
| 8.4. Другие способы вычисления ковариационной матрицы               | 164        |
| 8.5. Модель одного индекса                                          | 166        |
| Упражнения                                                          | 168        |
| <b>9. Расчет эффективных портфелей без ограничения прав продажи</b> | <b>169</b> |
| 9.1. Введение                                                       | 169        |
| 9.2. Определения и обозначения                                      | 169        |
| 9.3. Некоторые теоремы об эффективных портфелях и ЦМРК              | 171        |
| 9.4. Пример расчета эффективной границы                             | 175        |
| 9.5. Расчет рыночного портфеля: линия рынка капитала (ЛРК)          | 181        |
| 9.6. ЛРК при наличии безрискового актива                            | 183        |
| Упражнения                                                          | 183        |

## 10 Содержание

|                                                                       |            |
|-----------------------------------------------------------------------|------------|
| Приложение                                                            | 185        |
| <b>10. Расчет “бета” и линии рынка ценных бумаг</b>                   | <b>189</b> |
| 10.1. Введение                                                        | 189        |
| 10.2. Тестирование ЦМРК                                               | 189        |
| 10.3. Тестирование ЦМРК: общие правила                                | 191        |
| 10.4. Причины получения неблагоприятных результатов                   | 192        |
| 10.5. Неэффективность “рыночного портфеля”                            | 193        |
| 10.6. Настоящий рыночный портфель и тестирование ЦМРК                 | 198        |
| 10.7. Есть ли польза от ЦМРК                                          | 199        |
| Упражнение                                                            | 200        |
| <b>11. Эффективные портфели при запрете на продажу без покрытия</b>   | <b>201</b> |
| 11.1. Введение                                                        | 201        |
| 11.2. Пример расчета                                                  | 203        |
| 11.3. Эффективная граница                                             | 205        |
| 11.4. Программа на VBA                                                | 207        |
| 11.5. Заключение                                                      | 208        |
| Упражнения                                                            | 209        |
| <b>12. Стоимость, подверженная риску</b>                              | <b>211</b> |
| 12.1. Введение                                                        | 211        |
| 12.2. Простейший пример                                               | 211        |
| 12.3. Определение квантилей в Excel                                   | 213        |
| 12.4. Задача трех активов: важность ковариационной матрицы            | 215        |
| 12.5. Генерирование тестовых данных                                   | 217        |
| Приложение. Пример перемешивания данных в Excel                       | 219        |
| <b>III. Модели ценообразования опционов</b>                           | <b>227</b> |
| <b>13. Введение в опционы</b>                                         | <b>229</b> |
| 13.1. Основные термины и определения                                  | 229        |
| 13.2. Некоторые примеры                                               | 231        |
| 13.3. Схемы расчетов и прибыли по опционам                            | 235        |
| 13.4. Схемы работы с опционами: прибыль от портфелей опционов и акций | 239        |
| 13.5. Теоремы об арбитражных операциях с опционами                    | 241        |
| Упражнения                                                            | 247        |

|                                                                             |            |
|-----------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>14. Биномиальная модель цены на опционы</b>                              | <b>251</b> |
| 14.1. Биномиальная модель с двумя датами                                    | 251        |
| 14.2. Цены возможных состояний                                              | 253        |
| 14.3. Биномиальная модель для нескольких периодов                           | 254        |
| 14.4. Оценивание американских опционов по биномиальной модели               | 259        |
| 14.5. Реализация биномиальной модели на VBA                                 | 261        |
| 14.6. Оценивание американского опциона на продажу                           | 262        |
| 14.7. Сходимость биномиальной модели к цене Блэка–Скоулза                   | 265        |
| 14.8. Нестандартные опционы и биномиальная модель: пример                   | 266        |
| Упражнения                                                                  | 268        |
| <b>15. Логнормальное распределение</b>                                      | <b>273</b> |
| 15.1. Введение                                                              | 273        |
| 15.2. Свойства курсов акций                                                 | 274        |
| 15.3. Логнормальное распределение курсов акций<br>и геометрическая диффузия | 277        |
| 15.4. Свойства логнормального распределения                                 | 280        |
| 15.5. Моделирование логнормальной эволюции цен                              | 282        |
| 15.6. Технический анализ                                                    | 285        |
| 15.7. Расчет параметров логнормального распределения                        | 287        |
| Упражнения                                                                  | 288        |
| <b>16. Модель Блэка–Скоулза</b>                                             | <b>291</b> |
| 16.1. Введение                                                              | 291        |
| 16.2. Модель Блэка–Скоулза                                                  | 291        |
| 16.3. Реализация модели на языке VBA                                        | 293        |
| 16.4. Расчет подразумеваемой волатильности                                  | 294        |
| 16.5. Функция VBA для нахождения подразумеваемой дисперсии                  | 295        |
| 16.6. “Тонка за сверхприбылью” с помощью опционов                           | 297        |
| Упражнения                                                                  | 300        |
| <b>17. Страхование портфелей ценных бумаг</b>                               | <b>303</b> |
| 17.1. Введение: страхование дохода от акций                                 | 303        |
| 17.2. Страхование портфелей сложных активов                                 | 304        |
| 17.3. Пример                                                                | 305        |
| 17.4. Некоторые свойства схем страхования портфелей                         | 308        |
| 17.5. Численное моделирование схем страхования портфелей                    | 309        |
| 17.6. Страхование общего дохода от портфеля                                 | 313        |

## 12 Содержание

|                                                                                                 |            |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 17.7. Опционы, включенные в стоимость портфеля                                                  | 316        |
| Упражнения                                                                                      | 318        |
| <b>18. Опциональные сделки</b>                                                                  | <b>319</b> |
| 18.1. Введение                                                                                  | 319        |
| 18.2. Простой пример опциона на продолжение                                                     | 320        |
| 18.3. Опцион на отказ от проекта                                                                | 323        |
| 18.4. Оценивание опциона на отказ как последовательности опционов на продажу                    | 328        |
| 18.5. Заключение                                                                                | 330        |
| Упражнения                                                                                      | 330        |
| <b>19. Пределы досрочного исполнения</b>                                                        | <b>333</b> |
| 19.1. Введение                                                                                  | 333        |
| 19.2. Зачем досрочно исполнять опцион на продажу                                                | 333        |
| 19.3. Предел досрочного исполнения для опционов на продажу                                      | 335        |
| 19.4. Программа на VBA для нахождения предела досрочного исполнения                             | 336        |
| 19.5. Замечание об эквивалентности по дивидендам                                                | 339        |
| 19.6. Досрочное исполнение американских опционов на покупку: расчетный пример                   | 340        |
| 19.7. Программа на VBA для предела досрочного исполнения опциона на покупку акций с дивидендами | 342        |
| Упражнения                                                                                      | 344        |
| Приложение. Доказательство                                                                      | 345        |
| <b>IV. Облигации и дюрация</b>                                                                  | <b>349</b> |
| <b>20. Дюрация</b>                                                                              | <b>351</b> |
| 20.1. Введение                                                                                  | 351        |
| 20.2. Примеры                                                                                   | 351        |
| 20.3. Смысл величины дюрации                                                                    | 353        |
| 20.4. Характер изменения дюрации                                                                | 357        |
| 20.5. Дюрация облигаций с неравномерными выплатами                                              | 358        |
| 20.6. Дюрация при непостоянной временной структуре                                              | 363        |
| Упражнения                                                                                      | 365        |
| <b>21. Схемы иммунизации</b>                                                                    | <b>367</b> |
| 21.1. Введение                                                                                  | 367        |
| 21.2. Базовая модель иммунизации                                                                | 367        |



|                                                                                                      |            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| 21.3. Численный пример                                                                               | 369        |
| 21.4. Выпуклость: продолжение эксперимента по иммунизации                                            | 372        |
| 21.5. Попытка усовершенствования                                                                     | 374        |
| Упражнения                                                                                           | 376        |
| <b>22. Моделирование временной структуры процентных ставок</b>                                       | <b>377</b> |
| 22.1. Введение                                                                                       | 377        |
| 22.2. Полиномиальные регрессии                                                                       | 377        |
| 22.3. Изменение коэффициентов со временем                                                            | 380        |
| 22.4. Теоретические модели временных структур                                                        | 382        |
| <b>23. Доходность облигаций с поправкой на дефолт</b>                                                | <b>385</b> |
| 23.1. Введение                                                                                       | 385        |
| 23.2. Расчет ожидаемого дохода в рамках одного периода                                               | 387        |
| 23.3. Задача для марковской цепи с несколькими периодами и состояниями                               | 388        |
| 23.4. Пример расчета                                                                                 | 391        |
| 23.5. Источники статистической информации                                                            | 393        |
| 23.6. Перерасчет ожидаемого дохода на случай неравных периодов                                       | 396        |
| 23.7. Вычисление коэффициентов “бета”                                                                | 398        |
| Упражнения                                                                                           | 398        |
| <b>24. Дюрация и задача дешевой поставки</b>                                                         | <b>401</b> |
| 24.1. Введение                                                                                       | 401        |
| 24.2. Общая модель дешевой поставки                                                                  | 401        |
| 24.3. Экстремальная купонная ставка как общее решение задачи дешевой поставки                        | 403        |
| 24.4. Выбор оптимального срока погашения для дешевой поставки: случай постоянной временной структуры | 403        |
| 24.5. Графики оптимальной поставки и дюрации в Excel                                                 | 404        |
| 24.6. Заключение                                                                                     | 411        |
| <b>V. Технические вопросы</b>                                                                        | <b>413</b> |
| <b>25. Случайные числа</b>                                                                           | <b>415</b> |
| 25.1. Введение                                                                                       | 415        |
| 25.2. Тестирование генератора Excel                                                                  | 416        |
| 25.3. Генерирование случайных чисел с нормальным распределением                                      | 419        |
| Упражнения                                                                                           | 423        |

|                                                           |            |
|-----------------------------------------------------------|------------|
| <b>26. Таблицы данных</b>                                 | <b>425</b> |
| 26.1. Введение                                            | 425        |
| 26.2. Пример                                              | 425        |
| 26.3. Пример                                              | 426        |
| 26.4. Построение двухмерной таблицы данных                | 427        |
| 26.5. Замечание по оформлению: сокрытие ячеек с формулами | 428        |
| 26.6. Таблицы данных Excel как массивы                    | 429        |
| Упражнения                                                | 430        |
| <b>27. Матрицы</b>                                        | <b>431</b> |
| 27.1. Введение                                            | 431        |
| 27.2. Матричные операции                                  | 432        |
| 27.3. Обращение матриц                                    | 434        |
| 27.4. Решение систем линейных уравнений                   | 435        |
| Упражнения                                                | 436        |
| <b>28. Метод Гаусса–Зейделя</b>                           | <b>439</b> |
| 28.1. Введение                                            | 439        |
| 28.2. Простой пример                                      | 439        |
| 28.3. Строгое решение                                     | 440        |
| 28.4. Заключение                                          | 440        |
| Упражнение                                                | 441        |
| <b>29. Функции Excel</b>                                  | <b>443</b> |
| 29.1. Введение                                            | 443        |
| 29.2. Финансовые функции                                  | 443        |
| 29.3. Функции для работы с массивами                      | 447        |
| 29.4. Статистические функции                              | 450        |
| 29.5. Регрессия в Excel                                   | 451        |
| 29.6. Функции проверки условий и поиска                   | 456        |
| 29.7. Функции ранжирования                                | 457        |
| <b>30. Некоторые приемы работы с Excel</b>                | <b>459</b> |
| 30.1. Введение                                            | 459        |
| 30.2. Быстрое копирование: ввод данных в соседний столбец | 459        |
| 30.3. Многострочные ячейки                                | 460        |
| 30.4. Текстовые функции                                   | 460        |
| 30.5. Обновляемые заголовки графиков                      | 461        |
| 30.6. Вставка греческих букв                              | 463        |

|                                                      |            |
|------------------------------------------------------|------------|
| 30.7. Верхние и нижние индексы                       | 464        |
| 30.8. Именованные ячейки                             | 465        |
| 30.9. Скрытые ячейки                                 | 466        |
| <b>VI. Введение в Visual Basic for Applications</b>  | <b>469</b> |
| <b>31. Функции, определяемые пользователем</b>       | <b>471</b> |
| 31.1. Введение                                       | 471        |
| 31.2. Ввод функции в редакторе VBA                   | 471        |
| 31.3. Добавление справки в мастер функций            | 475        |
| 31.4. Исправление ошибок в VBA                       | 477        |
| 31.5. Условное выполнение: оператор If               | 479        |
| 31.6. Оператор Select Case                           | 483        |
| 31.7. Использование функций Excel в VBA              | 485        |
| 31.8. Использование своих функций внутри аналогичных | 486        |
| Упражнения                                           | 488        |
| Приложение                                           | 491        |
| <b>32. Типы и циклы</b>                              | <b>495</b> |
| 32.1. Введение                                       | 495        |
| 32.2. Использование типа                             | 495        |
| 32.3. Переменные и их типы                           | 497        |
| 32.4. Операции сравнения и логические операции       | 500        |
| 32.5. Циклы                                          | 503        |
| Упражнения                                           | 509        |
| <b>33. Макросы и взаимодействие с пользователем</b>  | <b>513</b> |
| 33.1. Введение                                       | 513        |
| 33.2. Макроподпрограммы                              | 513        |
| 33.3. Вывод данных и функция MsgBox                  | 518        |
| 33.4. Ввод данных и функция InputBox                 | 520        |
| 33.5. Модули                                         | 521        |
| Упражнения                                           | 523        |
| <b>34. Массивы</b>                                   | <b>529</b> |
| 34.1. Введение                                       | 529        |
| 34.2. Простые массивы                                | 529        |
| 34.3. Многомерные массивы                            | 532        |
| 34.4. Динамические массивы и оператор ReDim          | 533        |
| 34.5. Присваивание массивов                          | 539        |

## 16 Содержание

|                                                   |            |
|---------------------------------------------------|------------|
| 34.6. Переменные типа Variant, содержащие массивы | 540        |
| 34.7. Массивы как параметры функций               | 541        |
| Упражнения                                        | 546        |
| <b>35. Объекты</b>                                | <b>549</b> |
| 35.1. Введение                                    | 549        |
| 35.2. Объекты таблицы: введение                   | 549        |
| 35.3. Объект-диапазон Range                       | 551        |
| 35.4. Оператор with                               | 554        |
| 35.5. Коллекции                                   | 555        |
| 35.6. Имена                                       | 558        |
| 35.7. Обзорщик объектов                           | 561        |
| Упражнения                                        | 562        |
| Приложение. Иерархия объектов Excel               | 565        |
| <b>36. Список литературы</b>                      | <b>567</b> |
| Главы 1–4: финансы и оценивание предприятий       | 567        |
| Главы 5–6: арендные отношения                     | 567        |
| Главы 7–11: портфели ценных бумаг                 | 568        |
| Глава 12: стоимость, подверженная риску           | 568        |
| Главы 13–17: опционы и страхование портфелей      | 569        |
| Глава 18: опциональные сделки                     | 570        |
| Главы 20–21: дюрация и иммунизация                | 571        |
| Глава 22: моделирование временной структуры       | 572        |
| Глава 24: задача дешевой поставки                 | 574        |
| Глава 25: случайные числа                         | 575        |
| <b>Предметный указатель</b>                       | <b>577</b> |

---

## Предисловие

Так же как и в ее предыдущей редакции, эта книга является сборником “рецептов” по реализации самых распространенных финансовых математических моделей в среде Excel. В данное издание добавлено шесть дополнительных глав, посвященных финансовым расчетам, стоимости капитала, стоимости, подверженной риску (*value at risk* — *VaR*), опциональным сделкам, расчетам по досрочному использованию опционов и моделированию временных структур. В книгу включена также дополнительная глава технического характера с подборкой различных удобных приемов работы в Excel.

Я глубоко признателен многим людям (помимо тех, которые уже перечислены в предисловии к предыдущему изданию) за помощь и ценные советы. Это Эндрю Адамович (Andrew A. Adamovich), Алехандро Санчес Аревало (Alejandro Sanchez Arevalo), Йони Азиз (Yoni Aziz), Тьерри Бержер-Хельмхен (Thierry Berger-Helmchen), Роман Вайсман Берман (Roman Weissman Bermann), Майкл Джакомо Бертолино (Michael Giacomo Bertolino), Джон Боллинджер (John Bollinger), Энрико Камерини (Enrico Camerini), Мануэль Каррера (Manuel Carrera), Рой Карсон (Roy Carson), Джон Карсон (John Carson), Лидия Кассорла (Lydia Cassorla), Филипп Шарлье (Philippe Charlier), Майкл Кларк (Michael J. Clarke), Альваро Кобо (Alvaro Cobo), Бени Даниэль (Beni Daniel), Исмаил Дауд (Ismail Dawood), Иэн Диксон (Ian Dickson), Моакир Дутра (Моасуг Dutra), Гектор Тассинари Элдридж (Hector Tassinari Eldridge), Шломи Элиас (Shlomy Elias), Пен Эн (Peng Eng), Джон Фантелл (Jon Fantell), Эрик Фернинг (Erik Ferning), Раз Гилад (Raz Gilad), Нир Глузман (Nir Gluzman), Майкл Гофман (Michael Gofman), Дорон Гринберг (Doron Greenberg), Фил Хэмилтон (Phil Hamilton), Мортен Хелбак (Morten Helbak), Хитоси Хибино (Hitoshi Hibino), Фу Сьят Хон (Foo Siat Hong), Марек Йохек (Marek Jochec), Рассел Хадсон (Russell W. Hudson), Тиффани Калико (Tiffani Kaliko), Борис Карасик (Boris Karasik), Рик Лабс (Rick Labs), Аллен Ли (Allen Lee), Пол Леджерер (Paul Legerer), Гуоли Ли (Guoli Li), Моти Маркус (Moti Marcus), Гершон Меншер (Gershon Mensher), Тал Мофкади (Tal Mofkadi), Стивен О’Нил (Stephen O’Neil), Стивен Онг (Steven Ong), Орен Оссад (Oren Ossad), Джеки Роснер (Jackie Rosner), Стив Рубин (Steve Rubin), Двир Саба (Dvir Sabah), Ори Сэлинджер (Ori Salinger), Меир Шахар (Meir Shahar), Роджер Шелор (Roger Shelor), Давид Сью (David Siu), Майя Сливински (Maja Sliwinski), Боб Таггарт (Bob Taggart), Морри Тамаркин (Maurry Tamarkin), Мун Хон Тхам (Mun Hon Tham), Эфрат Толковский (Efrat Tolkowsky), Мел Тукман (Mel Tukman), Сандра ван Бален (Sandra van Balen), Михаэль Ферхофен (Michael Verhofen), Ля Ван (Lia Wang), Роберто Уэсселс (Roberto Wessels), Итан Уэйанд (Ethan Weyand), Уббо Вирсема (Ubbo Wiersema), Вэйцин Цзе (Weiqin Xie), Ке Ян (Ke Yang), Кен Юк (Ken Yook), Джордж Юань (George Yuan), Хуршид Зайнутдинов (Khurshid Zaynutdinov), Эхуд Цигельман (Ehud Ziegelman) и Эрик Зивот (Eric Zivot). Хочу также поблагодарить моих редакторов, которые и на этот раз оказали мне неоценимую услугу:

Нэнси Ломбарди (Nancy Lombardi), Питера Райнхарта (Peter Reinhart), Викторию Ричардсон (Victoria Richardson) и Терри Вона (Terry Vaughn).

Как обычно, всецело приветствую отзывы и пожелания.

Шимон Беннинга

<http://finance.wharton.upenn.edu/~benninga>

[benninga@post.tau.ac.il](mailto:benninga@post.tau.ac.il)

---

## От издательства

Вы, читатель этой книги, и есть главный ее критик и комментатор. Мы ценим ваше мнение и хотим знать, что было сделано нами правильно, что можно было сделать лучше и что еще вы хотели бы увидеть изданным нами. Нам интересно услышать и любые другие замечания, которые вам хотелось бы высказать в наш адрес.

Мы ждем ваших комментариев и надеемся на них. Вы можете прислать нам бумажное или электронное письмо либо просто посетить наш Web-сервер и оставить свои замечания там. Одним словом, любым удобным для вас способом дайте нам знать, нравится или нет вам эта книга, а также выскажите свое мнение о том, как сделать наши книги более интересными для вас.

Посылая письмо или сообщение, не забудьте указать название книги и ее авторов, а также ваш обратный адрес. Мы внимательно ознакомимся с вашим мнением и обязательно учтем его при отборе и подготовке к изданию последующих книг. Наши координаты:

E-mail: [info@williamspublishing.com](mailto:info@williamspublishing.com)

WWW: <http://www.williamspublishing.com>

Адреса для писем:

из России: 115419, Москва, а/я 783

из Украины: 03150, Киев, а/я 152

## Предисловие к первому изданию

В этой книге, как и в ее предшественнице *Numerical Techniques in Finance* (*Численные методы в финансах*), представлены некоторые из важнейших финансовых моделей, а также связанные с ними методы численного расчета и моделирования с использованием Excel. В этом смысле книгу можно понимать как сборник готовых “рецептов”. Как и в любом сборнике рецептов, например в кулинарной книге, в ней дается перечень ингредиентов и указания по их смешиванию и приготовлению. Любому повару известно, что рецепт — это всего лишь отправная точка; приготовив блюдо по рецепту несколько раз, можно затем придумать собственные его варианты или приспособить результат к собственным вкусам и потребностям.

В книге *Финансовое моделирование* рассматриваются стандартные финансовые модели в области корпоративных финансов, анализа доходности предприятий, операций с ценными бумагами, опционов, страхования ценных бумаг, чувствительности к изменениям процентных ставок, компенсационных изменений стоимости. В каждом случае даются краткие и четкие пояснения по реализации моделей в среде Excel. Объем приводимой в книге теории финансов совсем невелик — не более, чем необходимо для понимания численной реализации методов.

Хотя программа Excel часто оказывается непригодной для расчетов на высшем уровне в масштабах отраслей и корпораций (касающихся, например, портфелей ценных бумаг), она отлично помогает понять вычислительные трудности и хитрости финансового моделирования. Часто бывает так, что наиболее полное понимание модели приходит именно после выполнения расчетов по ней, и для этой цели Excel как раз является одним из самых доступных и мощных инструментов.

В процессе работы над книгой своими советами и замечаниями мне помогало великое множество студентов, коллег и друзей (и многие из них относились сразу к нескольким категориям). Особо хотелось бы поблагодарить таких людей, как Оливье Блехнер (Olivier Blechner), Мириам Бранд (Myriam Brand), Элизабет Кок (Elizabeth Caulk), Джон Кок (John Caulk), Бенъямин Чачкес (Benjamin Czaczkes), Джон Феррари (John Ferrari), Джон Флэдджер (John P. Fladger), Кунихико Хигаси (Kunihiko Higashi), Джулия Хайнс (Julia Hynes), Дон Кайм (Don Keim), Энтони Ким (Anthony Kim), Кен Кунимото (Ken Kunimoto), Филипп Норе (Philippe Nore), Нир Шараби (Nir Sharabi), Марк Талер (Mark Thaler), Терри Вон (Terry Vaughn) и Цзяочже Чжоу (Xiaoge Zhou).

И наконец, отдельная благодарность прекрасному редакторскому коллективу: Нэнси Ломбарди (Nancy Lombardi), Питеру Райнхарту (Peter Reinhart), Виктории Ричардсон (Victoria Richardson) и Терри Вону (Terry Vaughn).





---

# I Моделирование финансов компаний и предприятий

Первые шесть глав этой книги посвящены ряду задач моделирования корпоративных финансов (т.е. финансов предприятий и компаний), которые требуют большого объема вычислений. В главах 1 и 2 рассматриваются некоторые основы финансовой теории и практики. Глава 1 представляет собой введение в элементарные финансовые расчеты с помощью программы Excel. Почти все рассматриваемые приложения являются вариантами применения метода дисконтированных потоков денежных средств (*discounted-cash-flow method*). Стоимость капитала, рассматриваемая в главе 2, представляет собой процентную ставку для дисконтирования корпоративных потоков денежных средств, используемую для расчета величины стоимости предприятия. Вычисление этой ставки — нетривиальная задача, для решения которой привлекаются теоретические модели и численные расчеты.

В главе 3 рассматривается построение гипотетических моделей (*pro forma models*) для симуляции составления отчета о прибылях и убытках предприятия, а также балансового отчета. Гипотетические модели лежат в основе многих корпоративных финансовых приложений, в том числе составления бизнес-планов, анализа кредитоспособности и оценивания стоимости. Работа с такими моделями требует знания финансовой теории, бухгалтерии и Excel. В главе 4 гипотетические модели используются для оценки стоимости фирмы; разрабатываемый в этой главе простой пример дает понятие о типичных операциях по оцениванию, выполняемых в процессе слияния и приобретения компаний.

В главах 5 и 6 рассматривается финансовый анализ арендных отношений. В главе 5 мы ограничимся принятием элементарного решения, касающегося взятия в аренду или приобретения актива, с использованием метода эквивалентных займов (*equivalent-loan method*). В приложении к главе 5 приведены некоторые соображения по налогам и бухгалтерскому учету, относящиеся к вопросам аренды. В главе 6 рассматривается финансовый анализ мероприятий по сдаче в аренду актива, частично приобретенного в кредит (*leveraged lease*), в том числе вопросы применения многофазного метода (*multiple-phased method*) из бюллетеня №13 (Statement 13) управления по стандартам финансовой отчетности (Financial Accounting Standards Board; сокращенное наименование документа — FASB 13). Норма прибыли, рассчитанная по многофазному методу, представляет собой гибридную норму прибыли, которую можно легко рассчитать в среде Excel.



---

# 1 Элементарные финансовые расчеты

---

## 1.1. Введение

---

Цель этой главы — дать читателю некоторое понятие об основах финансовых расчетов и их реализации в Excel. Если вы изучали хороший вводный курс по финансам, то большая часть рассматриваемых вопросов вам, возможно, уже знакома и в повторении не нуждается.

В этой главе изучаются следующие темы:

- Чистая приведенная стоимость (*net present value*) — ЧПС.
- Внутренняя ставка доходности (*internal rate of return*) — ВСД.
- Будущая стоимость.
- Задачи о пенсионном фонде и накоплении капитала.
- Расчет непрерывно начисляемого дохода.

Почти все финансовые задачи связаны с расчетом *текущей* стоимости *будущих* потоков денежных средств. Денежные поступления (или потоки, как их еще можно называть) могут быть гарантированными или негарантированными. В этой главе анализируется стоимость денежных поступлений, не подверженных риску, — т.е. будущих поступлений, приход которых полностью гарантирован.

Ключевым понятием, к которому мы будем все время возвращаться, является *альтернативная стоимость* или *цена возможности* (*opportunity cost*). Это ставка дохода, который должна приносить инвестиция для того, чтобы являться реальной, выгодной альтернативой другим аналогичным вложениям<sup>1</sup>. Как показано в этой главе, при вычислении чистой приведенной стоимости альтернативная стоимость инвестиции используется как коэффициент (ставка) дисконтирования. При расчете внутренней ставки доходности рассчитанная норма прибыли сравнивается с альтернативной стоимостью капиталовложения и таким образом оценивается его реальная ценность.

---

<sup>1</sup> В финансовой литературе можно встретить много синонимов термина *альтернативная стоимость*, таких как *ставка дисконтирования* (*discount rate*), *процентная ставка* (*interest rate*) или *стоимость капитала* (*cost of capital*).

## 1.2. Приведенная стоимость и чистая приведенная стоимость

Оба понятия из заголовка этого раздела, *приведенная стоимость*, ПС (*present value*, или *PV*), и *чистая приведенная стоимость*, ЧПС (*net present value*, или *NPV*), обозначают *текущую* стоимость ожидаемых в будущем денежных поступлений. В качестве примера рассмотрим оценку инвестиции, обещающей доход 100 долл. в год в конце нынешнего и еще четырех следующих лет. Предполагаем, что эта серия из пяти платежей по 100 долл. каждый гарантирована и деньги непременно поступят. Если бы банк платил нам годовой процент в размере 10% при депозите на пять лет, то эти десять процентов как раз и составляли бы альтернативную стоимость инвестиции — эталонную норму прибыли, с которой мы сравнивали бы выгоду от нашего вложения. Можно вычислить ценность инвестиции путем дисконтирования денежных поступлений от нее с использованием альтернативной стоимости в качестве ставки дисконтирования:

|    | A                | B        | C                   | D |
|----|------------------|----------|---------------------|---|
| 2  | Ставка дисконт.  | 10%      |                     |   |
| 3  | Текущ. стоимость | \$379,08 | <-- =ЧПС(B2;B7:B11) |   |
| 4  |                  |          |                     |   |
| 5  |                  | Потоки   |                     |   |
| 6  | Год              | средств  |                     |   |
| 7  | 1                | 100      |                     |   |
| 8  | 2                | 100      |                     |   |
| 9  | 3                | 100      |                     |   |
| 10 | 4                | 100      |                     |   |
| 11 | 5                | 100      |                     |   |

*Приведенная стоимость* (ПС) в объеме 379,08 долл. и есть текущая стоимость инвестиции.

Предположим, что данная инвестиция продавалась бы за 400 долл. Очевидно, она не стоила бы запрашиваемой цены, поскольку — при условии альтернативного дохода (учетной ставки) в размере 10% — реальная стоимость этого капиталовложения составляла бы только 379,08 долл. Здесь как раз уместно ввести понятие *чистой приведенной стоимости* (ЧПС). Обозначая символом  $r$  учетную ставку для данной инвестиции, получаем следующую формулу для ЧПС:

$$NPV = CF_0 + \sum_{t=1}^N \frac{CF_t}{(1+r)^t},$$

где  $CF_t$  — денежное поступление от инвестиции в момент  $t$ ;  $CF_0$  — поток средств (поступление) на текущий момент:

|    | F                | G       | H                      | I | J |
|----|------------------|---------|------------------------|---|---|
| 2  | Ставка дисконт.  | 10%     |                        |   |   |
| 3  | Текущ. стоимость | -20,92  | <-- =G7+ЧПС(G2;G8:G12) |   |   |
| 4  |                  |         |                        |   |   |
| 5  |                  | Потоки  |                        |   |   |
| 6  | Год              | средств |                        |   |   |
| 7  | 0                | -400    |                        |   |   |
| 8  | 1                | 100     |                        |   |   |
| 9  | 2                | 100     |                        |   |   |
| 10 | 3                | 100     |                        |   |   |
| 11 | 4                | 100     |                        |   |   |
| 12 | 5                | 100     |                        |   |   |

### Терминологическое примечание

Терминология Excel, касающаяся дисконтируемых потоков денежных средств, несколько отличается от стандартной финансовой терминологии. В Excel сокращение NVP (ЧПС) обозначает приведенную стоимость (а не *чистую* приведенную стоимость) серии денежных поступлений.

Чтобы рассчитать в Excel *чистую приведенную стоимость* серии денежных поступлений в обычном понимании финансовой теории, необходимо сначала вычислить *приведенную стоимость* будущих денежных поступлений (с использованием такой функции Excel, как ЧПС или NVP), а затем вычесть из этого числа денежный поток на начальный момент времени. (Эта величина часто совпадает со стоимостью рассматриваемого актива.)

### 1.3. Внутренняя ставка доходности и таблицы возврата средств

Продолжаем работу над тем же примером. Предположим, мы действительно заплатили 400 долларов за данную серию денежных потоков. *Внутренняя ставка доходности*, ВСД (*internal rate of return*, или *IRR*), определяется как сложная ставка дисконтирования  $r$ , обращающая величину ЧПС в нуль:

$$CF_0 + \sum_{t=1}^N \frac{CF_t}{(1+r)^t} = 0.$$

Эта задача решается с помощью функции Excel, которая называется ВСД (IRR); следует заметить, что функция ВСД принимает в качестве аргументов *все* денежные потоки данного капиталовложения, включая самое первое (в данном случае отрицательное) поступление в размере  $-400$ :

|    | A   | B       | C                 | D |
|----|-----|---------|-------------------|---|
| 15 | ВСД | 7,931%  | <-- =ВСД(В19:В24) |   |
| 16 | ЧПС | -20,92  |                   |   |
| 17 |     | Потоки  |                   |   |
| 18 | Год | средств |                   |   |
| 19 | 0   | -400    |                   |   |
| 20 | 1   | 100     |                   |   |
| 21 | 2   | 100     |                   |   |
| 22 | 3   | 100     |                   |   |
| 23 | 4   | 100     |                   |   |
| 24 | 5   | 100     |                   |   |

Величина ВСД является *сложной нормой прибыли от капиталовложения*. Чтобы как следует понять, о чем идет речь, полезно составить следующую таблицу:

|    | E                        | F              | G          | H                          | I       | J        | K |
|----|--------------------------|----------------|------------|----------------------------|---------|----------|---|
| 15 | ТАБЛИЦА ВОЗВРАТА СРЕДСТВ |                |            | Распределение поступлений  |         |          |   |
| 16 |                          |                |            | между доходом с инвестиции |         |          |   |
| 17 | =B19                     | Основная       | Приход     | и возвратом основной суммы |         |          |   |
| 18 |                          | сумма в начале | в конце    |                            |         |          |   |
| 19 | Год                      | года           | года       | Доход                      | Возврат |          |   |
| 20 | 1                        | 400,00         | 100        | 31,72                      | 68,28   | =G20-H20 |   |
| 21 | 2                        | 331,72         | 100        | 26,31                      | 73,69   |          |   |
| 22 | 3                        | 258,03         | 100        | 20,46                      | 79,54   |          |   |
| 23 | 4                        | 178,50         | 100        | 14,16                      | 85,84   |          |   |
| 24 | 5                        | 92,65          | 100        | 7,35                       | 92,65   |          |   |
| 25 |                          |                |            |                            |         |          |   |
| 26 | =F20-H20                 |                | =B\$15*F20 |                            |         |          |   |
| 27 |                          |                |            |                            |         |          |   |

В этой *таблице возврата средств* каждое денежное поступление от актива делится на две составляющие: проценты на сумму инвестиции и возврат (погашение) основной суммы. Процентная составляющая в конце каждого года равна произведению ВСД на сумму вложенного капитала в начале того же года. Обратите внимание, что основная сумма в начале последнего года (92,65 долл. в данном примере) в точности равна составляющей возврата основной суммы в конце того же года.

С помощью этой таблицы можно фактически вычислить внутреннюю ставку доходности. Рассмотрим инвестицию, которая сейчас стоит 1 тыс. долл. и окупается полностью по прошествии 1-го, 2-го, ..., 5-го года. Как показано в следующей таблице, ВСД этой инвестиции превышает 15%:

|    | A                        | B              | C           | D                          | E       | F        | G |
|----|--------------------------|----------------|-------------|----------------------------|---------|----------|---|
| 2  | Стоимость                | 1000           |             |                            |         |          |   |
| 3  | ВСД?                     | 15,00%         |             |                            |         |          |   |
| 4  |                          |                |             |                            |         |          |   |
| 5  |                          |                |             |                            |         |          |   |
| 6  | ТАБЛИЦА ВОЗВРАТА СРЕДСТВ |                |             | Распределение поступлений  |         |          |   |
| 7  |                          |                |             | между доходом с инвестиции |         |          |   |
| 8  | =B2                      | Основная       | Поступление | и возвратом основной суммы |         |          |   |
| 9  |                          | сумма в начале | в конце     |                            |         |          |   |
| 10 | Год                      | года           | года        | Доход                      | Возврат |          |   |
| 11 | 1                        | 1000,00        | 300         | 150,00                     | 150,00  | =C11-D11 |   |
| 12 | 2                        | 850,00         | 200         | 127,50                     | 72,50   |          |   |
| 13 | 3                        | 777,50         | 150         | 116,63                     | 33,38   |          |   |
| 14 | 4                        | 744,13         | 600         | 111,62                     | 488,38  |          |   |
| 15 | 5                        | 255,74         | 900         | 38,36                      | 861,64  |          |   |
| 16 | 6                        | -605,89        |             |                            |         |          |   |
| 17 | =B11-E11                 |                | =B\$3*B11   |                            |         |          |   |
| 18 |                          |                |             |                            |         |          |   |

Обратите внимание на ячейку (B16), которую мы добавили в этот пример. Если процентная ставка в ячейке B3 действительно является ВСД, то в ячейке B16 должно стоять число 0. Для вычисления ВСД можно воспользоваться инструментом Подбор параметра (Goal Seek) программы Excel, который вызывается из одноименного пункта меню Сервис (Tools):

|    | A                        | B              | C                                                                                 | D      | E       | F | G | H | I | J | K |
|----|--------------------------|----------------|-----------------------------------------------------------------------------------|--------|---------|---|---|---|---|---|---|
| 1  |                          |                |                                                                                   |        |         |   |   |   |   |   |   |
| 2  | Стоимость                | 1000           |                                                                                   |        |         |   |   |   |   |   |   |
| 3  | ВСД?                     | 15,00%         |                                                                                   |        |         |   |   |   |   |   |   |
| 4  |                          |                |                                                                                   |        |         |   |   |   |   |   |   |
| 5  |                          |                |                                                                                   |        |         |   |   |   |   |   |   |
| 6  | ТАБЛИЦА ВОЗВРАТА СРЕДСТВ |                | Распределение поступлений между доходом с инвестициями и возвратом основной суммы |        |         |   |   |   |   |   |   |
| 7  |                          |                |                                                                                   |        |         |   |   |   |   |   |   |
| 8  | =B2                      | Основная       | Поступление                                                                       |        |         |   |   |   |   |   |   |
| 9  |                          | сумма в начале | в конце                                                                           |        |         |   |   |   |   |   |   |
| 10 | Год                      | года           | года                                                                              | Доход  | Возврат |   |   |   |   |   |   |
| 11 | 1                        | 1000,00        | 300                                                                               | 150,00 | 150,00  |   |   |   |   |   |   |
| 12 | 2                        | 850,00         | 200                                                                               | 127,50 | 72,50   |   |   |   |   |   |   |
| 13 | 3                        | 777,50         | 150                                                                               | 116,63 | 33,38   |   |   |   |   |   |   |
| 14 | 4                        | 744,13         | 600                                                                               | 111,62 | 488,38  |   |   |   |   |   |   |
| 15 | 5                        | 255,74         | 900                                                                               | 38,36  | 861,64  |   |   |   |   |   |   |
| 16 | 6                        | -605,89        |                                                                                   |        |         |   |   |   |   |   |   |
| 17 | =B11-E11                 |                | =B53*B11                                                                          |        |         |   |   |   |   |   |   |
| 18 |                          |                |                                                                                   |        |         |   |   |   |   |   |   |

**Подбор параметра**

Установить в ячейке: \$B\$16

Значение: 0

Изменяя значение ячеек: \$B\$3

ОК Отмена

Результат можно видеть на следующем рисунке:

|    | A                        | B              | C                                                                                 | D      | E       | F | G |
|----|--------------------------|----------------|-----------------------------------------------------------------------------------|--------|---------|---|---|
| 2  | Стоимость                | 1000           |                                                                                   |        |         |   |   |
| 3  | ВСД?                     | 24,44%         |                                                                                   |        |         |   |   |
| 4  |                          |                |                                                                                   |        |         |   |   |
| 5  |                          |                |                                                                                   |        |         |   |   |
| 6  | ТАБЛИЦА ВОЗВРАТА СРЕДСТВ |                | Распределение поступлений между доходом с инвестициями и возвратом основной суммы |        |         |   |   |
| 7  |                          |                |                                                                                   |        |         |   |   |
| 8  | =B2                      | Основная       | Поступление                                                                       |        |         |   |   |
| 9  |                          | сумма в начале | в конце                                                                           |        |         |   |   |
| 10 | Год                      | года           | года                                                                              | Доход  | Возврат |   |   |
| 11 | 1                        | 1000,00        | 300                                                                               | 244,36 | 55,64   |   |   |
| 12 | 2                        | 944,36         | 200                                                                               | 230,76 | -30,76  |   |   |
| 13 | 3                        | 975,13         | 150                                                                               | 238,28 | -88,28  |   |   |
| 14 | 4                        | 1063,41        | 600                                                                               | 259,86 | 340,14  |   |   |
| 15 | 5                        | 723,26         | 900                                                                               | 176,74 | 723,26  |   |   |
| 16 | 6                        | 0,00           |                                                                                   |        |         |   |   |
| 17 | =B11-E11                 |                | =B53*B11                                                                          |        |         |   |   |
| 18 |                          |                |                                                                                   |        |         |   |   |

Разумеется, можно было бы упростить себе жизнь, воспользовавшись функцией ВСД (IRR):

|    | A                 | B                        | C | D |
|----|-------------------|--------------------------|---|---|
| 20 | Прямой расчет ВСД |                          |   |   |
| 21 |                   |                          |   |   |
| 22 | Год               | Потоки                   |   |   |
| 23 | 0                 | -1000                    |   |   |
| 24 | 1                 | 300                      |   |   |
| 25 | 2                 | 200                      |   |   |
| 26 | 3                 | 150                      |   |   |
| 27 | 4                 | 600                      |   |   |
| 28 | 5                 | 900                      |   |   |
| 29 |                   |                          |   |   |
| 30 | ВСД               | 24,44% <-- =ВСД(B23:B28) |   |   |

## 1.4. Неоднозначные решения для внутренней ставки доходности

Иногда для денежных потоков существует несколько значений ВСД. В следующем примере можно точно сказать, что ряд денежных поступлений в ячейках В8:В13 имеет две возможных ВСД, поскольку график величины ВСД дважды пересекает ось  $x$ .



Функция ВСД (IRR) программы Excel позволяет добавить дополнительный аргумент, с помощью которого можно найти обе величины ВСД. Для этого вместо записи ВСД(В8:В13) следует записать ВСД(В8:В13, нач\_приблиз). Аргумент *нач\_приблиз* — это начальное приближение для алгоритма, по которому Excel разыскивает ВСД; варьируя начальное приближение, можно определить обе искомые величины. Это иллюстрируется ячейками В32 и В33.

Сделаем два замечания по поводу данной процедуры.

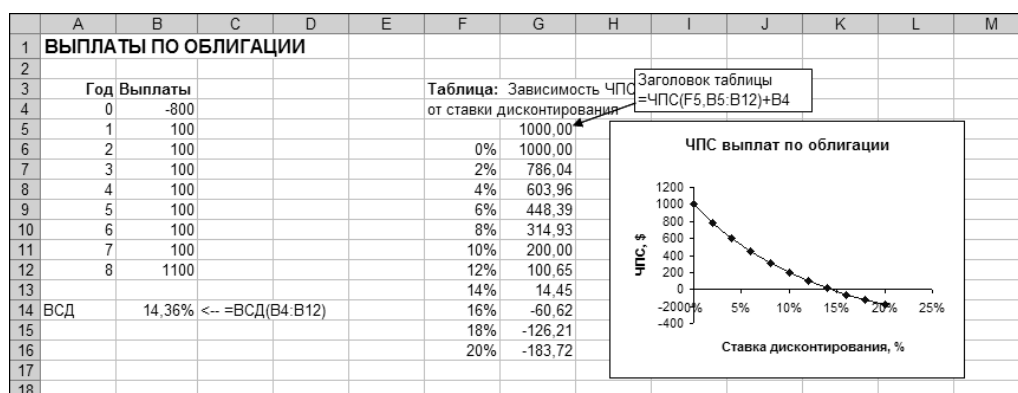
1. Аргумент *нач\_приблиз* должен быть достаточно близок к ВСД, поскольку решение не единственно. Например, если установить начальные приближения равными 0,1 и 0,5, получим те же значения ВСД, что и в первый раз:

|    | A                    | B      | C                    | D |
|----|----------------------|--------|----------------------|---|
| 31 | Определение двух ВСД |        |                      |   |
| 32 | Первая ВСД           | 8,78%  | <-- =ВСД(В8:В13,0.1) |   |
| 33 | Вторая ВСД           | 26,65% | <-- =ВСД(В8:В13,0.5) |   |
| 34 |                      |        |                      |   |



2. Чтобы определить порядковый номер и приближенное числовое значение ВСД, очень удобно построить график ВСД данной инвестиции как функцию от различных ставок дисконтирования (как уже было сделано выше). Внутренние ставки доходности будут соответствовать точкам, в которых график пересекает ось  $x$ , а примерные координаты этих точек следует задавать в качестве начальных приближений функции ВСД<sup>2</sup>.

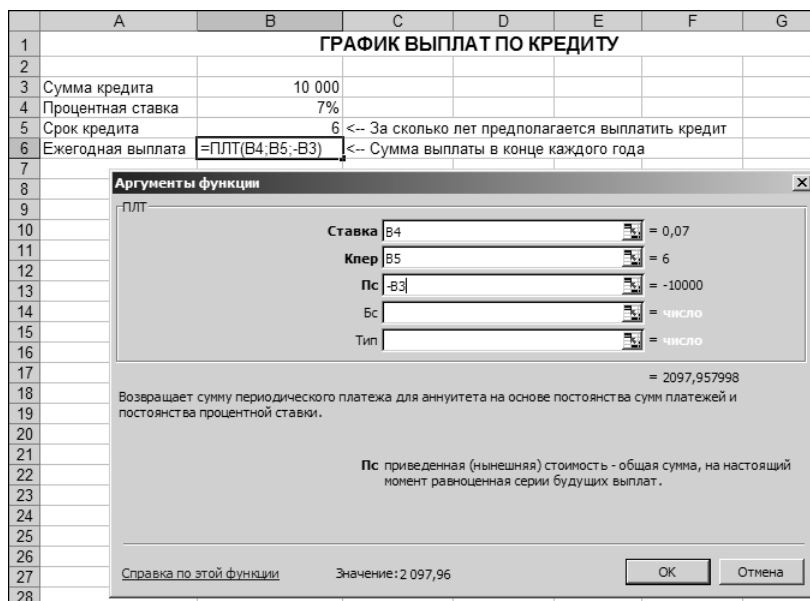
С технической точки зрения ряд потоков денежных средств может иметь несколько ВСД только в том случае, если у него есть как минимум два изменения знака. Рассмотрим, например, приобретение облигации с 10%-ным купоном, номинальной стоимостью 1000 долл. и восьмилетним сроком выплаты. Если текущая рыночная цена облигации составляет 800 долл., то поток денежных поступлений изменяет знак только один раз (с отрицательного в нулевом году на положительный в годах с первого по восьмой). Для такого случая существует только одно значение ВСД:



## 1.5. График периодических выплат по кредиту

Рассмотрим такую задачу: вы взяли кредит в размере 10 тыс. долл. под 7% в год. Банк желает получить его обратно вместе с процентами посредством ежегодных выплат в течение шести лет. Для вычисления размера ежегодной выплаты можно воспользоваться функцией Excel под названием ПЛТ (PMT):

<sup>2</sup> Если не задать начальное приближение (как в предыдущем разделе), Excel по умолчанию примет его равным 0. Тогда в текущем примере выражение ВСД(B8:B13) даст 8,78%.



Обратите внимание, что в поле ПС — которое в Excel обозначает начальную сумму кредита — помещено значение со знаком “минус”. В противном случае Excel выдаст отрицательную сумму платежа (это неудобно, но не страшно).

Правильность ответа можно проверить, составив таблицу погашения кредита:

|    | A                               | B        | C                                                  | D                          | E                   | F         | G         | H |
|----|---------------------------------|----------|----------------------------------------------------|----------------------------|---------------------|-----------|-----------|---|
| 1  | <b>ГРАФИК ВЫПЛАТ ПО КРЕДИТУ</b> |          |                                                    |                            |                     |           |           |   |
| 2  |                                 |          |                                                    |                            |                     |           |           |   |
| 3  | Сумма кредита                   | 10 000   |                                                    |                            |                     |           |           |   |
| 4  | Процентная ставка               | 7%       |                                                    |                            |                     |           |           |   |
| 5  | Срок кредита                    | 6        | <-- За сколько лет предполагается выплатить кредит |                            |                     |           |           |   |
| 6  | Ежегодная выплата               | 2 097,96 | <-- Сумма выплаты в конце каждого года             |                            |                     |           |           |   |
| 7  |                                 |          |                                                    |                            |                     |           |           |   |
| 8  |                                 |          |                                                    |                            |                     |           |           |   |
| 9  |                                 | Год      | Основная<br>сумма в нач.<br>года                   | Выплата<br>в конце<br>года | Содержание выплаты: |           |           |   |
| 10 |                                 |          |                                                    |                            | Процент             | Погашение | кредита   |   |
| 11 |                                 | 1        | 10 000,00                                          | 2 097,96                   | 700,00              | 1 397,96  | =B\$4*C11 |   |
| 12 |                                 | 2        | 8 602,04                                           | 2 097,96                   | 602,14              | 1 495,82  | =D11-E11  |   |
| 13 |                                 | 3        | 7 106,23                                           | 2 097,96                   | 497,44              | 1 600,52  | =C11-F11  |   |
| 14 |                                 | 4        | 5 605,70                                           | 2 097,96                   | 385,40              | 1 712,56  |           |   |
| 15 |                                 | 5        | 3 793,15                                           | 2 097,96                   | 265,52              | 1 832,44  |           |   |
| 16 |                                 | 6        | 1 960,71                                           | 2 097,96                   | 137,25              | 1 960,71  |           |   |
| 17 |                                 |          |                                                    |                            |                     |           |           |   |

## 1.6. Примеры расчета будущей стоимости

Начнем с элементарного. Предположим, вы положили на банковский счет 1 тыс. долл. и оставили ее эту сумму на 10 лет. Пусть по вкладу выплачивают 10% в год. Сколько у вас будет на счету по прошествии 10 лет? Ответ, как показано ниже в таблице, составляет 2593,74 долл.

|    | A                         | B        | C            | D                   | E          | F |
|----|---------------------------|----------|--------------|---------------------|------------|---|
| 1  | <b>ПРОСТОЕ НАКОПЛЕНИЕ</b> |          |              |                     |            |   |
| 2  |                           |          |              |                     |            |   |
| 3  | Процент                   | 10%      |              |                     |            |   |
| 4  |                           |          |              |                     |            |   |
| 5  | Год                       | Баланс   | Накопление   | Всего на            |            |   |
| 6  |                           | счета в  | дохода в     | счете в             |            |   |
| 7  |                           | нач.года | течение года | конце года          |            |   |
| 8  | 0                         | 1 000,00 | 100,00       | 1 100,00            | <-- =C8+B8 |   |
| 9  | 1                         | 1 100,00 | 110,00       | 1 210,00            |            |   |
| 10 | 2                         | 1 210,00 | 121,00       | 1 331,00            | =B\$3*B8   |   |
| 11 | 3                         | 1 331,00 | 133,10       | 1 464,10            |            |   |
| 12 | 4                         | 1 464,10 | 146,41       | 1 610,51            |            |   |
| 13 | 5                         | 1 610,51 | 161,05       | 1 771,56            |            |   |
| 14 | 6                         | 1 771,56 | 177,16       | 1 948,72            |            |   |
| 15 | 7                         | 1 948,72 | 194,87       | 2 143,59            |            |   |
| 16 | 8                         | 2 143,59 | 214,36       | 2 357,95            |            |   |
| 17 | 9                         | 2 357,95 | 235,79       | 2 593,74            |            |   |
| 18 | 10                        | 2 593,74 |              |                     |            |   |
| 19 |                           |          |              |                     | =D8        |   |
| 20 |                           |          |              |                     |            |   |
| 21 | Более простой способ      |          | 2593,74      | <-- =1000*(1+B3)^10 |            |   |

Как видно из ячейки C21, во всех этих сложных расчетах нет необходимости. Будущая стоимость суммы в 1000 долларов через десять лет при 10% годовых выражается формулой

$$FV = 1000 \cdot (1 + 10\%)^{10} = 2593,74.$$

Теперь рассмотрим следующую, несколько более сложную задачу. Вы снова открываете сберегательный счет. После внесения в этом году начального вклада в сумме 1000 долл. вы собираетесь делать такой же вклад в начале года №1, 2, ..., 9. Если по вкладу выплачивают 10% годовых, сколько у вас будет на счету в начале года №10?

Эта задача легко решается в Excel:

|    | A                                       | B         | C            | D           | E                        | F             | G |
|----|-----------------------------------------|-----------|--------------|-------------|--------------------------|---------------|---|
| 1  | <b>НАКОПЛЕНИЕ С ЕЖЕГОДНЫМИ ВЗНОСАМИ</b> |           |              |             |                          |               |   |
| 2  |                                         |           |              |             |                          |               |   |
| 3  | Процент                                 | 10%       |              |             |                          |               |   |
| 4  |                                         |           |              |             |                          |               |   |
| 5  | Год                                     | Баланс    | Накопление   | Проценты,   | Всего на                 |               |   |
| 6  |                                         | счета в   | дохода в     | накопленные | счете в                  |               |   |
| 7  |                                         | нач.года  | течение года | в теч.года  | конце года               |               |   |
| 8  | 0                                       | 0,00      | 1 000        | 100,00      | 1 100,00                 | <-- =D8+C8+B8 |   |
| 9  | 1                                       | 1 100,00  | 1 000        | 210,00      | 2 310,00                 |               |   |
| 10 | 2                                       | 2 310,00  | 1 000        | 331,00      | 3 641,00                 | =B\$3*(C8+B8) |   |
| 11 | 3                                       | 3 641,00  | 1 000        | 464,10      | 5 105,10                 |               |   |
| 12 | 4                                       | 5 105,10  | 1 000        | 610,51      | 6 715,61                 |               |   |
| 13 | 5                                       | 6 715,61  | 1 000        | 771,56      | 8 487,17                 |               |   |
| 14 | 6                                       | 8 487,17  | 1 000        | 948,72      | 10 435,89                |               |   |
| 15 | 7                                       | 10 435,89 | 1 000        | 1 143,59    | 12 579,48                |               |   |
| 16 | 8                                       | 12 579,48 | 1 000        | 1 357,95    | 14 937,42                |               |   |
| 17 | 9                                       | 14 937,42 | 1 000        | 1 593,74    | 17 531,17                |               |   |
| 18 | 10                                      | 17 531,17 |              |             |                          |               |   |
| 19 |                                         |           |              |             |                          | =E8           |   |
| 20 |                                         |           |              |             |                          |               |   |
| 21 | Будущая стоимость                       |           |              | \$17 531,17 | <-- =BC(B3.A18.-1000.,1) |               |   |

Таким образом, итоговая сумма на счету в начале 10-го года составляет 17 531,17 долл. Этот же ответ можно вычислить по формуле, в которой суммируется будущая стоимость всех ежегодных вкладов:

$$\begin{aligned}
 \text{Сумма в начале года №10} &= 1000 \cdot (1 + 10\%)^{10} + 1000 \cdot (1 + 10\%)^9 + \\
 &+ \dots + 1000 \cdot (1 + 10\%)^1 = \\
 &= \sum_{t=1}^{10} 1000 \cdot (1 + 10\%)^t.
 \end{aligned}$$

**Функция Excel.** Обратите внимание, что в ячейке D21 используется функция БС (FV), вычисляющая эту сумму. Диалоговое окно, которое открывается для задания ее параметров, выглядит так:

**Аргументы функции**

БС

Ставка B3 = 0,1

Кпер A18 = 10

Плт -1000 = -1000

Пс = число

Тип 1 = 1

= 17531,16706

Возвращает будущую стоимость инвестиции на основе периодических постоянных (равных по величине сумм) платежей и постоянной процентной ставки.

**Тип** значение 0 или 1, обозначающее, должна ли производиться выплата в начале периода (1) или же в конце периода (0 или отсутствие значения).

Справка по этой функции      Значение: \$17 531,17           

Сделаем три замечания по поводу этой функции.

1. Для положительных вкладов БС возвращает отрицательное число. Существует объяснение, почему функция запрограммирована именно так, но в целом такое поведение раздражает. Чтобы не получать отрицательных результатов, в поле Плт (Pmt) вводится число  $-1000$ .
2. Строка Пс (Pv) в диалоговом окне относится к ситуации, когда на счету в момент внесения вклада имеется некоторая начальная сумма, отличная от нуля. В нашем примере эта строка не заполнена — подразумевается, что начальная сумма равна нулю.
3. Как указывает примечание в диалоговом окне, поле Тип (Type) может принимать значение 1 или 0 в зависимости от того, делается ли выплата в начале или в конце каждого периода.

## 1.7. Пенсионная задача — усложненная задача о будущей стоимости

Далее рассмотрим типичное упражнение. Предположим, вам 55 лет и в 60 лет вы намерены уйти на пенсию. Чтобы в этой связи облегчить себе существование, вы хотите открыть пенсионный счет.

- В начале каждого года № 0, 1, 2, 3, 4 (т.е. начиная с текущего момента и следующие четыре года подряд) вы собираетесь вносить вклад на пенсионный счет. Вы полагаете, что по этому счету будут начисляться 8% годовых.
- После ухода на пенсию в возрасте 60 лет вы надеетесь прожить еще 8 лет<sup>3</sup>. Каждый год из этих восьми лет вы намерены снимать с пенсионного счета 30 тыс. долл. Конечно, на счет по-прежнему будут поступать упомянутые 8% годовых.

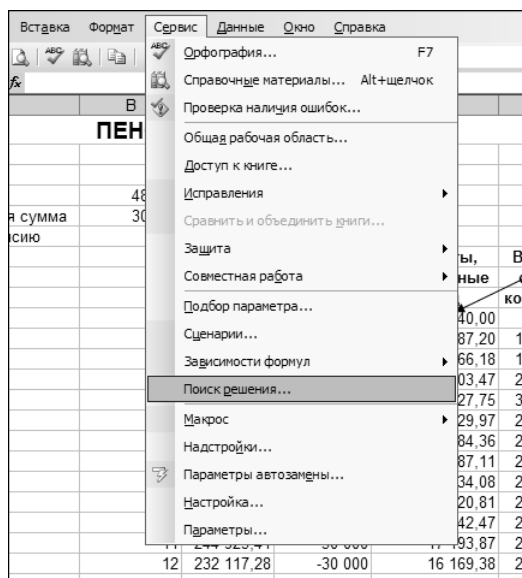
Сколько же следует вносить на пенсионный счет ежегодно? Следующий далее фрагмент электронной таблицы показывает, как легко можно ошибиться в такой задаче. В данном случае было подсчитано, что для получения 30 000 долларов в год в течение восьми лет необходимо вносить на счет  $\$240\,000/5 = \$48\,000$  в каждый из следующих пяти лет. Но из таблицы видно, что по прошествии восьми лет еще останется большая сумма денег! (Причина здесь в том, что были проигнорированы свойства сложного процента. Если установить процентную ставку в таблице равной нулю, то этот расчет даст правильный результат.)

|    | A                                               | B   | C                             | D                              | E                                  | F                                 | G | H |
|----|-------------------------------------------------|-----|-------------------------------|--------------------------------|------------------------------------|-----------------------------------|---|---|
| 1  | <b>ПЕНСИОННАЯ ЗАДАЧА</b>                        |     |                               |                                |                                    |                                   |   |   |
| 2  |                                                 |     |                               |                                |                                    |                                   |   |   |
| 3  | Процент                                         |     | 8%                            |                                |                                    |                                   |   |   |
| 4  | Ежегодный взнос                                 |     | 48 000                        |                                |                                    |                                   |   |   |
| 5  | Ежегодно снимаемая сумма после выхода на пенсию |     | 30 000                        |                                |                                    |                                   |   |   |
| 7  |                                                 | Год | Баланс<br>счета в<br>нач.года | Взнос<br>на счет<br>в нач.года | Проценты,<br>накопленные<br>за год | Всего на<br>счету в<br>конце года |   |   |
| 9  |                                                 |     | 0,00                          | 48 000                         | 3 840,00                           | 51 840,00                         |   |   |
| 10 |                                                 | 0   | 51 840,00                     | 48 000                         | 7 987,20                           | 107 827,20                        |   |   |
| 11 |                                                 | 1   | 107 827,20                    | 48 000                         | 12 466,18                          | 168 293,38                        |   |   |
| 12 |                                                 | 2   | 168 293,38                    | 48 000                         | 17 303,47                          | 233 596,85                        |   |   |
| 13 |                                                 | 3   | 233 596,85                    | 48 000                         | 22 527,75                          | 304 124,59                        |   |   |
| 14 |                                                 | 4   | 304 124,59                    | -30 000                        | 21 929,97                          | 296 054,56                        |   |   |
| 15 |                                                 | 5   | 296 054,56                    | -30 000                        | 21 284,36                          | 287 338,93                        |   |   |
| 16 |                                                 | 6   | 287 338,93                    | -30 000                        | 20 587,11                          | 277 926,04                        |   |   |
| 17 |                                                 | 7   | 277 926,04                    | -30 000                        | 19 834,08                          | 267 760,12                        |   |   |
| 18 |                                                 | 8   | 267 760,12                    | -30 000                        | 19 020,81                          | 256 780,93                        |   |   |
| 19 |                                                 | 9   | 256 780,93                    | -30 000                        | 18 142,47                          | 244 923,41                        |   |   |
| 20 |                                                 | 10  | 244 923,41                    | -30 000                        | 17 193,87                          | 232 117,28                        |   |   |
| 21 |                                                 | 11  | 232 117,28                    | -30 000                        | 16 169,38                          | 218 286,66                        |   |   |
| 22 |                                                 | 12  |                               |                                |                                    |                                   |   |   |

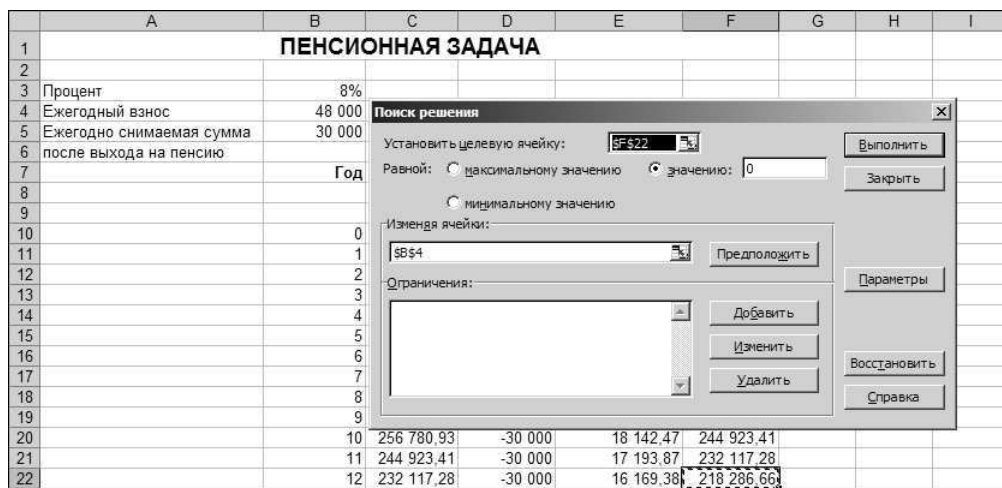
Существуют два способа решения этой задачи. В первом используется модуль поиска решения (Solver), имеющийся в среде Excel. Он вызывается из меню Сервис (Tools)<sup>4</sup>.

<sup>3</sup> Разумеется, на самом деле вы проживете гораздо дольше! Желаю вам самого крепкого здоровья! Просто числовые параметры задачи подобраны так, чтобы все данные хорошо помещались на страницу.

<sup>4</sup> Если пункта Поиск решения (Solver) нет в меню Сервис (Tools), его необходимо загрузить дополнительно. Выберите пункт меню Сервис⇒Настройки (Tools⇒Add-In) и в списке программ установите флажок возле пункта Поиск решения (Solver Add-In). Кстати, решать эту задачу можно было бы с помощью средства Подбор параметра (Goal Seek). Для таких простых задач, как эта, между подбором параметра и поиском решения нет большой разницы. Одно (и немаловажное) преимущество модуля поиска решения состоит в том, что он запоминает свои предыдущие аргументы, так что при повторном вызове из той же таблицы можно видеть, какие значения задавались в предыдущем приближении. Позже будет продемонстрировано решение задач, в которых подбор параметра не работает, и без модуля поиска решения не обойтись.



После выбора этого пункта меню откроется диалоговое окно. Вот как его нужно заполнить:



Если теперь мы щелкнем на кнопке Выполнить (Solve), то получим ответ:

|    | A                        | B      | C          | D          | E           | F          | G                | H |
|----|--------------------------|--------|------------|------------|-------------|------------|------------------|---|
| 1  | <b>ПЕНСИОННАЯ ЗАДАЧА</b> |        |            |            |             |            |                  |   |
| 2  |                          |        |            |            |             |            |                  |   |
| 3  | Процент                  | 8%     |            |            |             |            |                  |   |
| 4  | Ежегодный взнос          | 29 387 |            |            |             |            |                  |   |
| 5  | Ежегодно снимаемая сумма | 30 000 |            |            |             |            |                  |   |
| 6  | после выхода на пенсию   |        |            |            |             |            |                  |   |
| 7  |                          | Год    | Баланс     | Взнос      | Проценты,   | Всего на   |                  |   |
| 8  |                          |        | счета в    | на счет    | накопленные | счете в    |                  |   |
| 9  |                          |        | нач.года   | в нач.года | за год      | конце года |                  |   |
| 10 |                          | 0      | 0,00       | 29 387     | 2 350,92    | 31 737,48  | <-- =E10+D10+C10 |   |
| 11 |                          | 1      | 31 737,48  | 29 387     | 4 889,92    | 66 013,95  |                  |   |
| 12 |                          | 2      | 66 013,95  | 29 387     | 7 632,04    | 103 032,54 |                  |   |
| 13 |                          | 3      | 103 032,54 | 29 387     | 10 593,53   | 143 012,62 |                  |   |
| 14 |                          | 4      | 143 012,62 | 29 387     | 13 791,93   | 186 191,10 |                  |   |
| 15 |                          | 5      | 186 191,10 | -30 000    | 12 495,29   | 168 686,39 |                  |   |
| 16 |                          | 6      | 168 686,39 | -30 000    | 11 094,91   | 149 781,30 |                  |   |
| 17 |                          | 7      | 149 781,30 | -30 000    | 9 582,50    | 129 363,81 |                  |   |
| 18 |                          | 8      | 129 363,81 | -30 000    | 7 949,10    | 107 312,91 |                  |   |
| 19 |                          | 9      | 107 312,91 | -30 000    | 6 185,03    | 83 497,94  |                  |   |
| 20 |                          | 10     | 83 497,94  | -30 000    | 4 279,84    | 57 777,78  |                  |   |
| 21 |                          | 11     | 57 777,78  | -30 000    | 2 222,22    | 30 000,00  |                  |   |
| 22 |                          | 12     | 30 000,00  | -30 000    | 0,00        | 0,00       |                  |   |

### 1.7.1. Решение пенсионной задачи по формулам финансовой теории

Можно решить задачу еще более интеллектуальными средствами, если разобраться в процедуре дисконтирования. Итак, условие: текущая стоимость ряда платежей, дисконтированная с коэффициентом 8%, должна быть равна нулю.

$$\sum_{t=0}^4 \frac{\text{Нач. вклад}}{(1,08)^t} - \sum_{t=5}^{12} \frac{30000}{(1,08)^t} = 0$$

$$\Rightarrow \text{Нач. вклад} = \left[ \sum_{t=5}^{12} \frac{30000}{(1,08)^t} \right] / \left[ \sum_{t=0}^4 \frac{1}{(1,08)^t} \right].$$

С помощью функции Excel ПС (PV) можно вычислить как числитель выражения в правой части  $\sum_{t=5}^{12} \frac{30000}{(1,08)^t} = \frac{1}{(1,08)^4} \sum_{t=1}^8 \frac{30000}{(1,08)^t}$ , так и знаменатель  $\sum_{t=0}^4 \frac{1}{(1,08)^t}$ :

|    | A               | B         | C                               | D | E |
|----|-----------------|-----------|---------------------------------|---|---|
| 24 | Числитель       | 126718,54 | <-- =1/(1+B3)^4*ПС(B3,8,-30000) |   |   |
| 25 | Знаменатель     | 4,31      | <-- =ПС(B3,5,-1,,1)             |   |   |
| 26 | Ежегодный взнос | 29 386,55 | <-- =B24/B25                    |   |   |

## 1.8. Расчет непрерывно накапливаемого дохода

Предположим, вы помещаете 1000 долларов в банк, начисляющий 5% годовых. В конце года у вас будет  $1000 \cdot (1,05) = \$1050$ . Теперь предположим, что банк начисляет 2,5% дважды в год. По прошествии полугода у вас на счету будет сумма 1025 долл., а по прошествии года накопится  $\$1000 \cdot \left(1 + \frac{0,05}{2}\right)^2 = \$1050,625$ . Следуя этой логике, если получать проценты  $n$  раз в год, то накопленный ка-

питал составит  $\$1000 \cdot \left(1 + \frac{0,05}{n}\right)^n$ . При увеличении  $n$  эта величина возрастает, сходясь (довольно быстро, как мы вскоре увидим) к значению  $e^{0,05}$ , что в Excel записывается с помощью функции EXP. Когда  $n$  стремится к бесконечности, этот процесс называется *непрерывным накоплением* (*continuous compounding*) — соответственно с *непрерывным сложным процентом*.

(Набрав EXP(1) в ячейке электронной таблицы, можно убедиться, что  $e = 2,7182818285\dots$ )

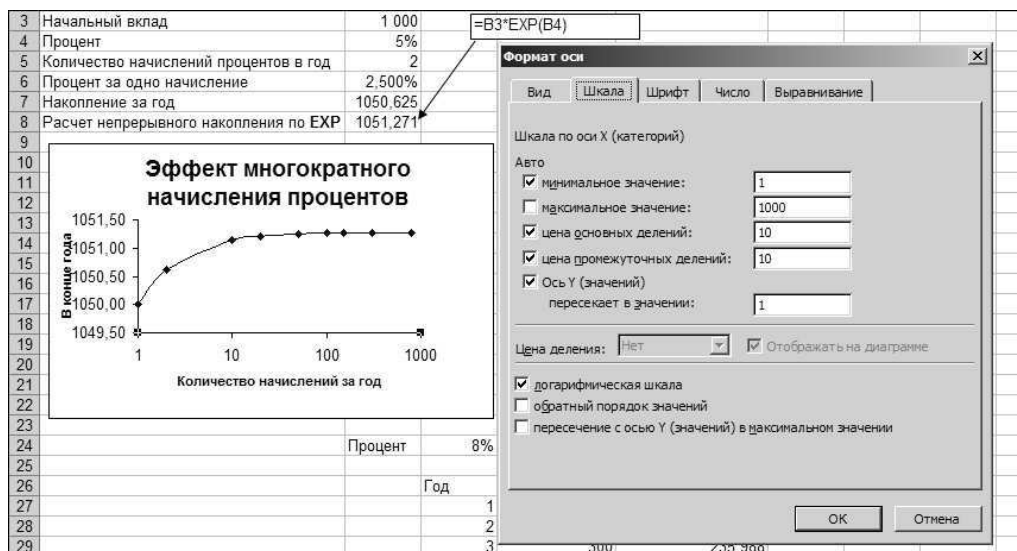
Как видно на следующем рисунке, капитал в 1 тыс. долл., непрерывно накапливаемый с процентной ставкой 5%, к концу года вырастает до  $\$1000 \cdot e^{0,05} = \$1051,271$ . Непрерывно накапливаясь в течение  $t$  лет, эта сумма вырастает до  $\$1000 \cdot e^{0,05t}$ .



### 1.8.1. Техническое замечание по поводу графика

График на рисунке представляет собой диаграмму Excel точечного типа со сглаживающими линиями (XY Scatter); по оси  $x$  используется логарифмическая шкала. Такая форма представления подчеркивает непрерывный характер накопления. На следующем рисунке выбрана ось  $x$  и открыто соответствующее диалоговое окно (чтобы сделать это, отметьте ось, щелкните правой кнопкой мыши и выберите пункт **Формат оси** (Format Axis)).





### 1.8.2. Непрерывное дисконтирование

Если коэффициент накопления для расчета непрерывного сложного процента с процентной ставкой  $r$  в течение  $t$  лет равен  $e^{rt}$ , то коэффициент дисконтирования для того же периода составит  $e^{-rt}$ . Таким образом, денежное поступление  $C_t$  на  $t$ -м году, дисконтированное по непрерывной схеме с процентной ставкой  $r$ , будет иметь текущую приведенную стоимость  $C_t e^{-r}$ , что и проиллюстрировано далее.

|    | В                 | С           | Д | Е                            | Г                      | Н |
|----|-------------------|-------------|---|------------------------------|------------------------|---|
| 24 | Процент           | 8%          |   |                              |                        |   |
| 25 |                   |             |   | Непрерывно дисконтируемая ПС |                        |   |
| 26 | Год               | Поступление |   |                              |                        |   |
| 27 | 1                 | 100         |   | 92,312                       | =EXP(-\$C\$24*C27)*D27 |   |
| 28 | 2                 | 200         |   | 170,429                      |                        |   |
| 29 | 3                 | 300         |   | 235,988                      |                        |   |
| 30 | 4                 | 350         |   | 254,152                      |                        |   |
| 31 | 5                 | 400         |   | 268,128                      |                        |   |
| 32 |                   |             |   |                              |                        |   |
| 33 | Текущая стоимость |             |   | 1021,009                     | =СУММ(E27:E31)         |   |

### 1.8.3. Вычисление ставки непрерывного дохода по фактическим суммам

Предположим, в момент времени 0 у вас на банковском счету имеется сумма 1 тыс. долл., а через год — уже 1200 долл. Какие проценты вам начислялись? Хотя ответ может показаться очевидным, на самом деле он зависит от метода расчета сложного процента. Если бы банк начислял проценты только раз в год, то ставка дохода составляла бы 20%:

$$\frac{1200}{1000} - 1 = 20\%$$

Но если бы банк выплачивал проценты дважды в год, то для определения процентной ставки необходимо было бы решить следующее уравнение:

$$1000 \cdot \left(1 + \frac{r}{2}\right)^2 = 1200 \Rightarrow \frac{r}{2} = \left(\frac{1200}{1000}\right)^{1/2} - 1 = 9,5445\%.$$

Таким образом, годовая процентная ставка при начислении процентов дважды в год составляет  $2 \cdot 9,5445 = 19,089\%$ .

В целом, если в год начисление процентов происходит  $n$  раз, то необходимо решить уравнение  $\frac{r}{n} = \left(\frac{1200}{1000}\right)^{1/n} - 1$  и соответственно умножить результат. Если  $n$  очень велико, это решение сходится к величине  $r = \ln\left(\frac{1200}{1000}\right)$ , что составляет 18,2322%.

|    | A                             | B       | C                             | D | E | F | G                   | H       | I        |
|----|-------------------------------|---------|-------------------------------|---|---|---|---------------------|---------|----------|
| 37 | Сумма начального вклада       | 1 000   |                               |   |   |   | Годовой процент при |         |          |
| 38 | Сумма в конце года            | 1 200   |                               |   |   |   | n начислениях в год |         |          |
| 39 | Количество начислений за год  | 2       |                               |   |   |   |                     |         |          |
| 40 | Эквивалентный годовой процент | 19,089% | <-- =(B38/B37)^(1/B39)-1)*B39 |   |   |   |                     | 19,089% | <-- =B40 |
| 41 |                               |         |                               |   |   |   | 1                   | 20,000% |          |
| 42 | Непрерывный сложный процент   | 18,232% | <-- =LN(B38/B37)              |   |   |   | 2                   | 19,089% |          |
| 43 |                               |         |                               |   |   |   | 4                   | 18,654% |          |
| 44 |                               |         |                               |   |   |   | 8                   | 18,442% |          |
| 45 |                               |         |                               |   |   |   | 20                  | 18,316% |          |
| 46 |                               |         |                               |   |   |   | 50                  | 18,265% |          |
| 47 |                               |         |                               |   |   |   | 100                 | 18,249% |          |

#### 1.8.4. Зачем нужно непрерывное накопление

Все приведенные рассуждения могут показаться далекими от жизни. Однако непрерывное накопление дохода и дисконтирование часто используются в финансовых расчетах. В этой книге непрерывное накопление используется для вычисления доходов от портфелей ценных бумаг (главы 7–12) и практически во всех расчетах по опционам (главы 13–19).

Существует еще одна причина для использования непрерывного расчета дохода — простота вычисления. Предположим, ваш капитал в 1 тыс. долл. вырос до 1500 долл. за один год и девять месяцев. Какова соответствующая годовая процентная ставка? Самый простой и строгий способ ответить на этот вопрос — рассчитать годовую ставку с непрерывным сложным процентом. Поскольку 1 год и 9 месяцев составляет 1,75 года, искомая ставка составляет

$$1000 \cdot \exp[r \cdot 1,75] = 1500 \Rightarrow r = \frac{1}{1,75} \ln \left[ \frac{1500}{1000} \right] = 23,1694\%.$$

### Упражнения

1. Вам предложили приобрести актив стоимостью 600 долл., приносящий денежное поступление 100 долл. в конце каждого года в течение следующих десяти лет:

- а) если ставка дисконтирования этого актива составляет 8%, стоит ли его приобретать?
- б) какова ВСД данного актива?
2. Вы только что взяли кредит на сумму 10 тыс. долл. на пять лет. Выплаты в конце каждого года постоянны (т.е. одинаковы для всех лет), а процентная ставка составляет 15%. Рассчитайте таблицу возврата средств и покажите распределение платежей каждого года между выплатой процентов и основной суммы кредита.
3. Вам предложили сделать инвестицию на следующих условиях:
- Сумма инвестиции составляет 1 тыс. долл.
  - Инвестиция дает денежное поступление в размере  $X$  долларов в конце первого года; каждый год в течение 11 лет это поступление возрастает на 10%.

Пусть ставка дисконтирования составляет 15%. Рассчитайте минимальное значение  $X$ , которое убедило бы вас согласиться на инвестицию (приобретение актива). Например, как показано в следующей таблице,  $X = \$100$  слишком мало — значение ЧПС в таблице получается отрицательным.

|    | A               | B        | C           | D |
|----|-----------------|----------|-------------|---|
| 1  |                 |          |             |   |
| 2  | Ставка дисконт. | 15%      |             |   |
| 3  | Начальный взнос | 100      |             |   |
| 4  | ЧПС             | -226,52  |             |   |
| 5  |                 |          |             |   |
| 6  | Год             |          |             |   |
| 7  | 0               | -1000,00 |             |   |
| 8  | 1               | 100,00   | <-- =B3     |   |
| 9  | 2               | 110,00   | <-- =B8*1.1 |   |
| 10 | 3               | 121,00   | <-- =B9*1.1 |   |
| 11 | 4               | 133,10   |             |   |
| 12 | 5               | 146,41   |             |   |
| 13 | 6               | 161,05   |             |   |
| 14 | 7               | 177,16   |             |   |
| 15 | 8               | 194,87   |             |   |
| 16 | 9               | 214,36   |             |   |
| 17 | 10              | 235,79   |             |   |
| 18 | 11              | 259,37   |             |   |

4. В следующей схеме денежных поступлений имеются две возможные ВСД. С помощью средств Excel постройте график ЧПС для данного потока денежных средств как функции от ставки дисконтирования. Затем с помощью функции ВСД (IRR) определите оба значения внутренней ставки доходности. Сделали бы вы капиталовложение в данный проект, если бы его альтернативная стоимость (цена возможности) составляла 20%?

|    | A    | B      |
|----|------|--------|
| 5  | Год  | Поток  |
| 6  | 0    | -500   |
| 7  | 1    | 600    |
| 8  | 2    | 300    |
| 9  | 3    | 300    |
| 10 | 4    | 200    |
| 11 | 5    | -1000  |
| 12 |      |        |
| 13 | ВСД1 | 6,34%  |
| 14 | ВСД2 | 60,20% |

5. В данном упражнении рассчитывается внутренняя ставка доходности методом последовательных приближений. Рассмотрим инвестицию стоимостью 800 долл., обещающую поступления в размере 300, 200, 150, 122, 133 в течение лет №1–5 (см. ячейки A8:B13 в следующей далее таблице). Заполнение таблицы возврата средств показывает, что величина 10% превышает ВСД (поскольку возврат основной суммы в конце 5-го года меньше, чем основная сумма в начале года).

|    | A   | B    | C | D                        | E                   | F               | G                                                                         | H       | I      | J |
|----|-----|------|---|--------------------------|---------------------|-----------------|---------------------------------------------------------------------------|---------|--------|---|
| 2  |     |      |   | ВСД?                     | 10,00%              |                 |                                                                           |         |        |   |
| 3  |     |      |   |                          |                     |                 |                                                                           |         |        |   |
| 4  |     |      |   | ТАБЛИЦА ВОЗВРАТА СРЕДСТВ |                     |                 | Распределение платежа между выплатой процентов и возвратом основной суммы |         |        |   |
| 5  |     |      |   |                          |                     |                 |                                                                           |         |        |   |
| 6  |     |      |   | =B8                      | Осн. сумма в начале | Выплата в конце |                                                                           |         |        |   |
| 7  | Год |      |   | год                      | года                | года            | Процент                                                                   | Возврат |        |   |
| 8  | 0   | -800 |   | 1                        | 800,00              | 300             | 80,00                                                                     | 220,00  | =F9-G9 |   |
| 9  | 1   | 300  |   | 2                        | 580,00              | 200             | 58,00                                                                     | 142,00  |        |   |
| 10 | 2   | 200  |   | 3                        | 438,00              | 150             | 43,80                                                                     | 106,20  |        |   |
| 11 | 3   | 150  |   | 4                        | 331,80              | 122             | 33,18                                                                     | 88,82   |        |   |
| 12 | 4   | 122  |   | 5                        | 242,98              | 133             | 24,30                                                                     | 108,70  |        |   |
| 13 | 5   | 133  |   | 6                        | 134,28              |                 |                                                                           |         |        |   |
| 14 |     |      |   |                          |                     |                 |                                                                           |         |        |   |
| 15 |     |      |   | =E9-H9                   |                     | =E\$2*E9        |                                                                           |         |        |   |
| 16 |     |      |   |                          |                     |                 |                                                                           |         |        |   |

Сделав ячейку ВСД? равной 3%, убеждаемся, что эта величина меньше, чем искомая ВСД, поскольку возврат основной суммы в конце 5-го года превышает основную сумму на начало года.

Варьируя значение в ячейке ВСД?, найдите внутреннюю ставку доходности данной инвестиции.

|    | D                        | E                   | F               | G                                                                         | H       | I      | J |
|----|--------------------------|---------------------|-----------------|---------------------------------------------------------------------------|---------|--------|---|
| 2  | ВСД?                     | 3,00%               |                 |                                                                           |         |        |   |
| 3  |                          |                     |                 |                                                                           |         |        |   |
| 4  | ТАБЛИЦА ВОЗВРАТА СРЕДСТВ |                     |                 | Распределение платежа между выплатой процентов и возвратом основной суммы |         |        |   |
| 5  |                          |                     |                 |                                                                           |         |        |   |
| 6  | =B8                      | Осн. сумма в начале | Выплата в конце |                                                                           |         |        |   |
| 7  |                          | года                | года            | Процент                                                                   | Возврат |        |   |
| 8  | год                      | года                | года            |                                                                           |         |        |   |
| 9  | 1                        | 800,00              | 300             | 24,00                                                                     | 276,00  | =F9-G9 |   |
| 10 | 2                        | 524,00              | 200             | 15,72                                                                     | 184,28  |        |   |
| 11 | 3                        | 339,72              | 150             | 10,19                                                                     | 139,81  |        |   |
| 12 | 4                        | 199,91              | 122             | 6,00                                                                      | 116,00  |        |   |
| 13 | 5                        | 83,91               | 133             | 2,52                                                                      | 130,48  |        |   |
| 14 | 6                        | -46,57              |                 |                                                                           |         |        |   |
| 15 | =E9-H9                   |                     | =E\$2*E9        |                                                                           |         |        |   |

6. Альтернативное определение ВСД — норма прибыли, делающая основную сумму инвестиции к началу 6-го года равной нулю<sup>5</sup>. Это продемонстрировано в предыдущей таблице, в которой ячейка E14 показывает основную сумму в начале 6-го года. Найдите искомую величину с помощью функции Excel Подбор параметра (Goal Seek). На следующем рисунке показано, как должен выглядеть экран.

<sup>5</sup> Конечно, в общем определении ВСД является нормой прибыли, которая обращает в нуль основную сумму в начале года, следующего за последним поступлением средств.

|    | A   | B    | C | D                        | E                      | F                  | G                                                                                                                                                                                | H      | I | J |
|----|-----|------|---|--------------------------|------------------------|--------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|---|---|
| 1  |     |      |   |                          |                        |                    |                                                                                                                                                                                  |        |   |   |
| 2  |     |      |   | ВСД?                     | 3,00%                  |                    |                                                                                                                                                                                  |        |   |   |
| 3  |     |      |   |                          |                        |                    |                                                                                                                                                                                  |        |   |   |
| 4  |     |      |   | ТАБЛИЦА ВОЗВРАТА СРЕДСТВ |                        |                    | <div> <div>Подбор параметра</div> <div> Установить в ячейке: E14<br/> Значение: 0<br/> Изменяя значение ячеек: \$E\$2 </div> <div> <div>ОК</div> <div>Отмена</div> </div> </div> |        |   |   |
| 5  |     |      |   |                          |                        |                    |                                                                                                                                                                                  |        |   |   |
| 6  |     |      |   |                          |                        |                    |                                                                                                                                                                                  |        |   |   |
| 7  | Год |      |   | =B8                      | Осн. сумма<br>в начале | Выплата<br>в конце |                                                                                                                                                                                  |        |   |   |
| 8  | 0   | -800 |   | год                      | года                   | года               |                                                                                                                                                                                  |        |   |   |
| 9  | 1   | 300  |   | 1                        | 800,00                 | 300                |                                                                                                                                                                                  |        |   |   |
| 10 | 2   | 200  |   | 2                        | 524,00                 | 200                |                                                                                                                                                                                  |        |   |   |
| 11 | 3   | 150  |   | 3                        | 339,72                 | 150                |                                                                                                                                                                                  |        |   |   |
| 12 | 4   | 122  |   | 4                        | 199,91                 | 122                | 6,00                                                                                                                                                                             | 116,00 |   |   |
| 13 | 5   | 133  |   | 5                        | 83,91                  | 133                | 2,52                                                                                                                                                                             | 130,48 |   |   |
| 14 |     |      |   | 6                        | -46,57                 |                    |                                                                                                                                                                                  |        |   |   |
| 15 |     |      |   | =E9:H9                   |                        | =E\$2*E9           |                                                                                                                                                                                  |        |   |   |
| 16 |     |      |   |                          |                        |                    |                                                                                                                                                                                  |        |   |   |

7. Рассчитайте ежегодную постоянную выплату по кредиту в сумме 100 тыс. долл., взятому на 5 лет под 13% годовых.
8. Вы только что взяли ссуду в размере 15 тыс. долл. для покупки автомобиля. Срок ссуды — 48 месяцев, а годовая процентная ставка составляет 15% (которую банк переводит в ежемесячную процентную ставку  $15\%/12 = 1,25\%$ ). Сорок восемь выплат (которые должны производиться в конце каждого из следующих 48 месяцев) равны между собой.
  - а) Рассчитайте объем ежемесячной выплаты по ссуде.
  - б) В таблице возврата средств вычислите (помесячно) основную сумму ссуды, остающуюся на начало месяца, и распределение ежемесячного платежа между выплатами процентов и основной суммы.
  - в) Покажите, что основная сумма на начало каждого месяца является текущей стоимостью оставшихся платежей по ссуде со ставкой дисконтирования, равной процентной ставке ссуды (воспользуйтесь функцией ПС, она же PV).
9. Вы рассматриваете возможность приобретения автомобиля у местного поставщика. Продавец предлагает вам один из двух вариантов оплаты:
  - а) Вы можете сразу заплатить 30 тыс. долл. наличными.
  - б) План оплаты в рассрочку: вы платите 5 тыс. долл. наличными сейчас и 1050 долл. в конце каждого из следующих 30 месяцев.

В качестве альтернативы плану продавца вы обращаетесь в местный банк, который готов предоставить вам ссуду в размере 25 тыс. долл. с процентной ставкой 1,25% в месяц.

  - а) Предполагая, что 1,25% — это цена возможности, рассчитайте текущую стоимость серии выплат по плану оплаты в рассрочку, предложенному продавцом автомобиля.
  - б) Какова фактическая процентная ставка, взимаемая продавцом? Выполните этот расчет, подготовив следующую таблицу (показана только часть ее, а вам придется проделать вычисления для всех 30 месяцев):

|    | C     | D         | E            | F       |
|----|-------|-----------|--------------|---------|
| 14 |       |           | Выплаты по   |         |
| 15 |       | Выплата   | плану оплаты |         |
| 16 | Месяц | наличными | в рассрочку  | Разница |
| 17 | 0     | 30 000    | 5 000        | 25 000  |
| 18 | 1     | 0         | 1 050        | -1 050  |
| 19 | 2     | 0         | 1 050        | -1 050  |
| 20 | 3     | 0         | 1 050        | -1 050  |
| 21 | 4     | 0         | 1 050        | -1 050  |
| 22 | 5     | 0         | 1 050        | -1 050  |
| 23 | 6     | 0         | 1 050        | -1 050  |

Теперь рассчитайте ВСД ряда чисел в столбце F; это и будет ежемесячная фактическая процентная ставка по плану оплаты в рассрочку.

10. Вы рассматриваете сберегательный план, в котором предполагается в конце каждого из следующих пяти лет вносить 15 тыс. долл. на счет. Если в этом плане предлагается 10% годовых, сколько у вас окажется на счету в конце 5-го года?

Выполните этот расчет, заполнив следующую таблицу. В ней расчет выполняется дважды — один раз с помощью функции ЕС (FV), а второй раз с помощью простой таблицы, показывающей накопление вклада к началу каждого года.

|    | A                 | B           | C                     | D | E   | F          | G       | H            |
|----|-------------------|-------------|-----------------------|---|-----|------------|---------|--------------|
| 3  | Ежегодная выплата | 15 000      |                       |   |     | Накопление | Внос    | Накопление   |
| 4  | Процентная ставка | 10%         |                       |   |     | на начало  | в конце | процентов    |
| 5  | Количество лет    | 5           |                       |   | Год | года       | года    | на нач. года |
| 6  | Общая сумма       | \$91 576,50 | <-- =ЕС(B4,B5,-B3,,0) |   |     | 1          | 0       | 15 000       |
| 7  |                   |             |                       |   | 2   | 15 000     | 15 000  | 1 500,00     |
| 8  |                   |             |                       |   | 3   | 31 500     | 15 000  | 3 150,00     |
| 9  |                   |             |                       |   | 4   | 49 650     | 15 000  | 4 965,00     |
| 10 |                   |             |                       |   | 5   | 69 615     | 15 000  | 6 961,50     |
| 11 |                   |             |                       |   | 6   | 91 577     |         |              |

11. Пересчитайте упражнение 10, на этот раз предполагая сделать пять вкладов в начале этого года и следующих четырех лет. Какая сумма накопится на счету к концу 5-го года?
12. Некий взаимный фонд заявляет, что если бы вы вносили 250 долл. в месяц в течение последних 10 лет, то накопили бы к данному моменту 85 тыс. долл. Предполагая, что эти взносы делаются в начале каждого месяца в течение 120 месяцев, рассчитайте фактический годовой процент, который получают инвесторы фонда.

*Подсказка:* заполните следующую таблицу и выполните Подбор параметра (Goal Seek).

|   | A                             | B      | C                     | D |
|---|-------------------------------|--------|-----------------------|---|
| 3 | Ежемесячный взнос             | 250    |                       |   |
| 4 | Количество месяцев            | 120    |                       |   |
| 5 |                               |        |                       |   |
| 6 | Фактический месячный процент? | 1,514% |                       |   |
| 7 | Накопление                    | 85 000 | <-- =ЕС(B6,B4,-B3,,1) |   |

Фактический годовой процент можно вычислить одним из двух способов.

- По формуле  $(1 + \text{ежемесячный процент})^{12} - 1$ . Это сложный годовой процент, и именно этот метод расчета предпочтителен, потому что в нем учитывается инвестирование средств, накопленных за месяц.

- По формуле  $12 \cdot \text{ежемесячный процент}$ . Такой метод часто применяется в банках.
13. Вам исполнилось 35 лет, и вы решили открыть пенсионный сберегательный счет. Когда вы уйдете на пенсию через 30 лет (т.е. в возрасте 65 лет), вы хотели бы иметь годовой доход в размере 100 000 долларов в течение следующих 20 лет. Рассчитайте, сколько вам нужно вносить на сберегательный счет, начиная с текущего момента и до возраста 65 лет, чтобы такой уровень дохода стал возможным. Сделайте следующие предположения:
- На все сбережения начисляется сложный годовой процент в размере 10%.
  - Первый взнос делается сейчас, а последний — в день, когда вам исполнится 64 года (всего 30 взносов).
  - Вы впервые снимете средства с этого счета в свой 65-й день рождения, а в последний раз — в возрасте 84 лет (всего 30 выплат).
14. У вас есть 25 тыс. долл. на банковском сберегательном счету, на который начисляется 5% годовых. Вашему бизнесу требуется сумма в 25 тыс. долл., и вы рассматриваете два варианта: (а) взять деньги со сберегательного счета или (б) взять кредит в банке под 6% годовых, не трогая сберегательный счет. Финансовый аналитик говорит вам, что вариант (б) лучше. Его рассуждения таковы: сумма процентов, выплачиваемых по этому 6%-му кредиту, меньше, чем сумма процентов, начисляемых за то же время на счет в сумме 25 тыс. долл. Его расчеты иллюстрируются приведенной ниже таблицей. Докажите, что он ошибается. (Если подумать, то 6%-ный кредит не может быть предпочтительным вариантом, раз уж банк платит 5% годовых по сберегательному счету. Но доказать это не всегда просто.)

|    | A                                    | B                 | C         | D          | E         |
|----|--------------------------------------|-------------------|-----------|------------|-----------|
| 1  | <b>Расчеты финансового аналитика</b> |                   |           |            |           |
| 2  |                                      |                   |           |            |           |
| 3  | Начисляемый процент                  | 5%                |           |            |           |
| 4  | Выплачиваемый процент                | 6%                |           |            |           |
| 5  | Начальная сумма вклада               | 25 000            |           |            |           |
| 6  |                                      |                   |           |            |           |
| 7  | <b>6%-НЫЙ КРЕДИТ</b>                 |                   |           |            |           |
| 8  | Год                                  | Основная          | Выплата   | Из которых |           |
| 9  |                                      | сумма на          | в конце   | выплачено  | Погашение |
| 10 |                                      | начало года       | года      | процентов  | осн.суммы |
| 11 | 1                                    | 25 000,00         | 13 635,92 | 1 500,00   | 12 135,92 |
| 12 | 2                                    | 12 864,08         | 13 635,92 | 771,84     | 12 864,08 |
| 13 |                                      | Всего выплачено % |           | 2 271,84   |           |
| 14 |                                      |                   |           |            |           |
| 15 | <b>Сберегательный счет</b>           |                   |           |            |           |
| 16 | Год                                  | На сберег.        | Проценты  | На счету   |           |
| 17 |                                      | счету             | в конце   | в конце    |           |
| 18 |                                      | в нач. года       | года      | года       |           |
| 19 | 1                                    | 25 000,00         | 1 250,00  | 26 250,00  |           |
| 20 | 2                                    | 26 250,00         | 1 312,50  | 27 562,50  |           |
| 21 |                                      | Получено %:       | 2 562,50  |            |           |

=ПЛТ(\$B\$4,2,-\$B\$5)





---

## 2 Расчет стоимости капитала

---

### 2.1. Введение

Наиболее распространенным методом оценивания стоимости предприятий является метод *дисконтированных денежных потоков*, ДДП (*discounted cash flow*, или *DCF*). В следующих двух главах будет продемонстрирован расчет потоков свободных средств фирмы с помощью комплексных финансовых моделей для анализа ее бухгалтерии. Дисконтирование данных потоков средств с надлежащим коэффициентом, содержащим поправку на риск, и дает требуемую оценку стоимости фирмы.

В этой главе рассматривается расчет стоимости капитала фирмы, в котором ставки дисконтирования применяются к будущим потокам средств. Для расчета стоимости акционерного капитала реализуются две модели, в которых ставки дисконтирования применяются к движениям акционерного капитала:

- Модель Гордона (Gordon) используется для расчета стоимости капитала по ожидаемым дивидендам фирмы.
- В ценовой модели рынка капитала, ЦМРК (*capital asset pricing model*, или *CAPM*), стоимость акционерного капитала рассчитывается по корреляции между доходом с капитала и доходом с большого диверсифицированного (неспециализированного) рыночного портфеля инвестиций. Как будет показано, с помощью ЦМРК можно также рассчитывать стоимость задолженности фирмы.

Другая составляющая стоимости капитала — это стоимость долга (заимствованных средств), т.е. ожидаемая будущая стоимость средств, взятых фирмой в долг. Будут продемонстрированы в действии три модели расчета стоимости долга.

Все эти модели используются нами для вычисления средневзвешенной стоимости капитала, СВСК (*weighted average cost of capital*, или *WACC*), т.е. индивидуальной ставки дисконтирования для оценивания потоков денежных средств фирмы. Во всей этой главе данные методы применяются для вычисления стоимости капитала компании Abbott Laboratories.

### Терминологическое примечание

Как отмечалось в предыдущей главе, “стоимость капитала” — это синоним выражения “индивидуальная ставка дисконтирования” (*appropriate discount rate*) применительно к серии потоков денежных средств. В финансовой теории слово “индивидуальный” (*appropriate*) чаще всего является синонимом выражения “с поправкой на риск”. Таким образом, другим названием для стоимости капитала будет “ставка дисконтирования с поправкой на риск”, СДПР (*risk-adjusted discount rate*, или *RADR*).

## 2.2. Дивидендная модель Гордона

Дивидендная модель Гордона<sup>1</sup> (Gordon) выводит стоимость акционерного капитала из следующего — на первый взгляд простого — утверждения:

*Цена акции равна текущей (приведенной) стоимости потока ожидаемых от нее в будущем дивидендов, причем ожидаемые дивиденды дисконтируются со ставкой, равной индивидуальной стоимости акционерных активов с поправкой на риск.*

Для примера рассмотрим случай акции, для дивидендов от которой ожидается ежегодный прирост 10%. Если в следующем году ожидается дивиденд в размере 3%, то цена акции на сегодняшний день,  $P_0$ , составит

$$P_0 = \frac{3}{1 + r_E} + \frac{3 \cdot (1,10)}{(1 + r_E)^2} + \frac{3 \cdot (1,10)^2}{(1 + r_E)^3} + \frac{3 \cdot (1,10)^3}{(1 + r_E)^4} \dots$$

Формула в ячейке B6 следующей таблицы дает дисконтирование по 67 годам поступления дивидендов (показаны не все):

|    | A                                       | B     | C                    | D                   |
|----|-----------------------------------------|-------|----------------------|---------------------|
| 1  | <b>Цена акции и ожидаемые дивиденды</b> |       |                      |                     |
| 2  |                                         |       |                      |                     |
| 3  | Дивиденд, ожидаемый в 1-й год           | 3     |                      |                     |
| 4  | Темп прироста дивиденда                 | 10%   |                      |                     |
| 5  | Стоимость капитала                      | 15%   |                      |                     |
| 6  | Цена акции                              | 56,95 | <-- =ЧПС(B5;C10:C76) |                     |
| 7  |                                         |       |                      |                     |
| 8  |                                         |       | Ожидаемый            |                     |
| 9  |                                         | Год   | дивиденд             |                     |
| 10 |                                         | 1     | 3,00                 | <-- =B3             |
| 11 |                                         | 2     | 3,30                 | <-- =C10*(1+\$B\$4) |
| 12 |                                         | 3     | 3,63                 | <-- =C11*(1+\$B\$4) |
| 13 |                                         | 4     | 3,99                 |                     |
| 14 |                                         | 5     | 4,39                 |                     |
| 15 |                                         | 6     | 4,83                 |                     |
| 16 |                                         | 7     | 5,31                 |                     |
| 17 |                                         | 8     | 5,85                 |                     |
| 18 |                                         | 9     | 6,43                 |                     |
| 19 |                                         | 10    | 7,07                 |                     |
| 20 |                                         | 11    | 7,78                 |                     |
| 21 |                                         | 12    | 8,56                 |                     |
| 22 |                                         | 13    | 9,42                 |                     |

<sup>1</sup> Модель названа в честь М.Дж. Гордона (M.J. Gordon), впервые опубликовавшего ее в статье под названием “Dividends, Earnings and Stock Prices”, *Review of Economics and Statistics*, №41, май 1959 г., с.99–105.

Обратите внимание, что наше “решение” — на самом деле приближенное. Мы взяли ЧПС для *очень длинного* ряда дивидендов, тогда как в уравнении используется *бесконечный* ряд. Чтобы вычислить сумму бесконечного ряда, придется проделать некоторые преобразования с формулой. Перепишем ее, обозначив символом  $D_1$  ожидаемый дивиденд следующего периода, а  $g$  — предполагаемый темп прироста дивидендов:

$$P_0 = \frac{D_1}{1+r_E} + \frac{D_1 \cdot (1+g)}{(1+r_E)^2} + \frac{D_1 \cdot (1+g)^2}{(1+r_E)^3} + \frac{D_1 \cdot (1+g)^3}{(1+r_E)^4} \dots =$$

$$= \sum_{t=1}^{\infty} \frac{D_1 \cdot (1+g)^{t-1}}{(1+r_E)^t} = \frac{D_1}{r_E - g}, \text{ при } |g| < r_E.$$

Последняя формула,  $P_0 = \frac{D_1}{r_E - g}$ , была выведена швейцарским математиком Леонардом Эйлером (1707–1783), и ее вывод (которым мы не будем здесь заниматься) занимает почетное место в курсе алгебры средней школы. Обратите внимание на условие в конце формулы: чтобы бесконечная сумма в первой строке формулы сходилась к конечному результату, темп прироста дивидендов должен быть меньше, чем ставка дисконтирования. Эту формулу можно использовать в нашей таблице:

|   | A                             | B     | C                    | D | E | F                           |
|---|-------------------------------|-------|----------------------|---|---|-----------------------------|
| 3 | Дивиденд, ожидаемый в 1-й год | 3     |                      |   |   |                             |
| 4 | Темп прироста дивиденда       | 10%   |                      |   |   |                             |
| 5 | Стоимость капитала            | 15%   |                      |   |   |                             |
| 6 | Цена акции                    | 56,95 | <-- =ЧПС(B5;C10:C76) |   |   | Цена акции по формуле 60,00 |
| 7 |                               |       |                      |   |   |                             |
| 8 |                               |       | Ожидаемый            |   |   | =B3/(B5-B4)                 |
| 9 |                               | Год   | дивиденд             |   |   |                             |

Итак, если ожидается дивиденд в размере 3% через год от текущего момента, и если прогнозируется его прирост на 10% в год, и если ставка дисконтирования равна 15%, то цена акции составит 60 долларов. Нашу техническую проблему можно решить переопределением формулы, как в приведенной ниже таблице.

|   | A                             | B                   | C | D                                                  | E | F | G |
|---|-------------------------------|---------------------|---|----------------------------------------------------|---|---|---|
| 3 | Дивиденд, ожидаемый в 1-й год | 3                   |   |                                                    |   |   |   |
| 4 | Темп прироста дивиденда       | 18%                 |   |                                                    |   |   |   |
| 5 | Стоимость капитала            | 15%                 |   |                                                    |   |   |   |
| 6 | Цена акции                    | Формула не работает |   | <-- =ЕСЛИ(B5<=B4,"Формула не работает",B3/(B5-B4)) |   |   |   |

### 2.2.1. “Прирост сверх нормы” и модель Гордона

Заметим, что если условие  $|g| < r_E$  нарушается, то формула  $P_0 = D_1/(r_E - g)$  дает отрицательный ответ. Однако это не означает, что акция имеет отрицательную цену; просто нарушено необходимое условие применимости формулы. В финансовых расчетах нарушение условия  $|g| < r_E$  обычно имеет место для очень быстро растущих фирм, для которых прогнозируется очень высокий темп прироста (по крайней мере на короткое время). В этом случае  $g > r_E$  и исходная формула дисконтирования дает бесконечное значение  $P_0$ . Этот результат, очевидно, не имеет смысла (оценивается стоимость ценной бумаги), поэтому возможны два варианта: (1) долгосрочный темп прироста меньше ставки  $r_E$  или (2) ставка дисконтирования  $r_E$  занижена.

В приведенной далее таблице продемонстрирован начальный, очень высокий, темп прироста, который в конце концов снижается до меньшего значения. Рассмотрим фирму, текущий дивиденд которой составляет 8 долларов на акцию. Ожидается прирост дивиденда фирмы на 35% в течение следующих пяти лет, а затем темп снизится до 8% в год. Стоимость акционерного капитала, т.е. ставка дисконтирования для всех дивидендов, составляет 18%:

|    | A                                          | B     | C                   | D                 | E      | F                                | G | H |
|----|--------------------------------------------|-------|---------------------|-------------------|--------|----------------------------------|---|---|
| 1  | <b>МОДЕЛЬ ГОРДОНА С 2-МЯ ТЕМПАМИ РОСТА</b> |       |                     |                   |        |                                  |   |   |
| 2  |                                            |       |                     |                   |        |                                  |   |   |
| 3  | Текущий дивиденд                           | 8,00  |                     | Оценка дивидендов |        |                                  |   |   |
| 4  | Темп роста $g_1$ , годы 1-5 ("выше нормы") | 35%   |                     | ПС за годы 1-5    | 60,99  | <-- =ЧПС(B6;B9;B13)              |   |   |
| 5  | Темп роста $g_2$ , years 6 - ∞             | 8%    |                     | ПС за годы 6 - ∞  | 169,35 | <-- =B13*(1+B5)/(B6-B5)/(1+B6)^5 |   |   |
| 6  | Стоимость капитала                         | 18%   |                     | Цена акции        | 230,33 | <-- =СУММ(E4;E5)                 |   |   |
| 7  |                                            |       |                     |                   |        |                                  |   |   |
| 8  | Год                                        |       |                     |                   |        |                                  |   |   |
| 9  | 1                                          | 10,80 | <-- =B3*(1+\$B\$4)  |                   |        |                                  |   |   |
| 10 | 2                                          | 14,58 | <-- =B9*(1+\$B\$4)  |                   |        |                                  |   |   |
| 11 | 3                                          | 19,68 | <-- =B10*(1+\$B\$4) |                   |        |                                  |   |   |
| 12 | 4                                          | 26,57 | <-- =B11*(1+\$B\$4) |                   |        |                                  |   |   |
| 13 | 5                                          | 35,87 | <-- =B12*(1+\$B\$4) |                   |        |                                  |   |   |
| 14 | 6                                          | 38,74 | <-- =B13*(1+\$B\$5) |                   |        |                                  |   |   |
| 15 | 7                                          | 41,84 | <-- =B14*(1+\$B\$5) |                   |        |                                  |   |   |
| 16 | 8                                          | 45,19 |                     |                   |        |                                  |   |   |
| 17 | 9                                          | 48,80 |                     |                   |        |                                  |   |   |
| 18 | 10                                         | 52,71 |                     |                   |        |                                  |   |   |
| 19 | 11                                         | 56,92 |                     |                   |        |                                  |   |   |
| 20 | 12                                         | 61,48 |                     |                   |        |                                  |   |   |

Чтобы рассчитать цену акции фирмы, вначале дисконтируем дивиденды за годы с 1-го по 5-й. В ячейке E4 показано, что эти пять будущих дивидендов стоят 60,99 долл. Теперь рассмотрим годы с 6-го до бесконечности. Обозначим долгосрочный темп прироста через  $g_2$  (в нашем примере он составляет 8%). В момент времени 0 дисконтированный поток дивидендов для лет 6–∞ будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}
 & \frac{Div_5 (1 + g_2)}{(1 + r_E)^6} + \frac{Div_5 (1 + g_2)^2}{(1 + r_E)^7} + \frac{Div_5 (1 + g_2)^3}{(1 + r_E)^8} + \dots = \\
 & = \sum_{t=6}^{\infty} \frac{Div_5 \cdot (1 + g_2)^{t-5}}{(1 + r_E)^t} = \\
 & = \frac{1}{(1 + r_E)^5} \sum_{t=6}^{\infty} \frac{Div_5 \cdot (1 + g_2)^t}{(1 + r_E)^t}.
 \end{aligned}$$

Последнее выражение и представляет собой модель Гордона, дисконтированную за пять лет:

$$\frac{1}{(1 + r_E)^5} \sum_{t=6}^{\infty} \frac{Div_5 \cdot (1 + g_2)^t}{(1 + r_E)^t} = \frac{1}{(1 + r_E)^5} \frac{Div_5 \cdot (1 + g_2)^t}{r_E - g_2}.$$

Как показано в таблице, цена акции получается равной 230,33.

### 2.2.2. Модель Гордона с постоянным темпом прироста

Теперь снова вернемся к модели Гордона с постоянным темпом прироста. Поскольку в этой модели  $P_0 = D_1 / (r_E - g)$ , можно переписать формулу так, чтобы получить стоимость акционерного капитала  $r_E$ :

$$r_E = \frac{\text{Ожидаемый дивиденд за следующий период}}{\text{Текущий курс акций}} + \text{Ожидаемый темп роста} = \\ = \frac{D_1}{P_0} + g.$$

Часто предполагают, что  $D_1 = D_0 (1 + g)$ , где  $D_0$  — последний дивиденд, выплаченный фирмой; в этом случае модель Гордона переписывается в таком виде:

$$r_E = \frac{D_0 (1 + g)}{P_0} + g.$$

---

## 2.3. Расчет стоимости акционерного капитала фирмы Abbot Laboratories по модели Гордона

В следующих таблицах представлена история выплаты дивидендов компанией Abbot Laboratories за период с 1988 по 1998 год. Совокупный прирост дивидендов фирмы за этот период составил 14,87% (а прирост за пять лет — 12,03%). Рыночный курс акций Abbott в конце 1998 года составлял 49 долларов. Применение формулы Гордона дает (в ячейках B21 и B22) стоимость акционерного капитала Abbott, равную 16,28% или 13,4% в зависимости от того, какой берется темп прироста.

### 2.3.1. Выбор темпа прироста в модели Гордона

Темп прироста  $g$  в формулах Гордона — это *ожидаемый, прогнозируемый* темп прироста дивидендов, который совсем не обязательно совпадает с реальным. Таким образом, “правильный” темп — понятие субъективное, которое зависит от представлений и прогнозов о том, какой дивиденд компания может выплатить и выплатит в будущем<sup>2</sup>. В случае фирмы Abbot Laboratories можно было бы решить, что темп прироста за пять лет более представительен, чем за десять, и в этом случае стоимость акционерного капитала составила бы 13,40%, а не 16,28%. (На основании более тщательного анализа фирмы Abbot можно было бы решить, что прежний темп прироста ее дивидендов не имеет никакого отношения к *будущему* темпу. Это одно из тех трудных решений, которые приходится принимать финансовому аналитику!)

---

<sup>2</sup> Иногда в этом вопросе могут помочь гипотетические финансовые отчеты, рассматриваемые в следующей главе. Прогнозируя будущий прирост сбыта и потребность компании в капитале, иногда можно предсказать ее будущие дивиденды.

|    | A                                            | B      | C                              | D                      | E | F |
|----|----------------------------------------------|--------|--------------------------------|------------------------|---|---|
| 1  | <b>ИСТОРИЯ ВЫПЛАТЫ ДИВИДЕНДОВ ABBOT LABS</b> |        |                                |                        |   |   |
| 2  |                                              |        |                                |                        |   |   |
| 3  | 1988                                         | 0.15   |                                |                        |   |   |
| 4  | 1989                                         | 0.17   | 13,33%                         | <-- =B4/B3-1           |   |   |
| 5  | 1990                                         | 0.21   | 23,53%                         | <-- =B5/B4-1           |   |   |
| 6  | 1991                                         | 0.25   | 19,05%                         |                        |   |   |
| 7  | 1992                                         | 0.30   | 20,00%                         |                        |   |   |
| 8  | 1993                                         | 0.34   | 13,33%                         |                        |   |   |
| 9  | 1994                                         | 0.38   | 11,76%                         |                        |   |   |
| 10 | 1995                                         | 0.42   | 10,53%                         |                        |   |   |
| 11 | 1996                                         | 0.48   | 14,29%                         |                        |   |   |
| 12 | 1997                                         | 0.54   | 12,50%                         |                        |   |   |
| 13 | 1998                                         | 0.60   | 11,11%                         |                        |   |   |
| 14 | Сложный процент, 10 лет                      |        | 14,87%                         | <-- =(B13/B3)^(1/10)-1 |   |   |
| 15 | Сложный процент, 5 лет                       |        | 12,03%                         | <-- =(B13/B8)^(1/5)-1  |   |   |
| 16 |                                              |        |                                |                        |   |   |
| 17 | <b>Модель Гордона</b>                        |        |                                |                        |   |   |
| 18 | P <sub>0</sub>                               | 49,00  | <-- Курс акций в конце 1998 г. |                        |   |   |
| 19 | D <sub>0</sub>                               | 0,60   | <-- Дивиденд в 1998 г.         |                        |   |   |
| 20 | г <sub>е</sub>                               |        |                                |                        |   |   |
| 21 | Рост за 10 лет                               | 16,28% | <-- =B19*(1+C14)/B18+C14       |                        |   |   |
| 22 | Рост за 5 лет                                | 13,40% | <-- =B19*(1+C15)/B18+C15       |                        |   |   |

## 2.4. Ценовая модель рынка капитала

Ценовая модель рынка капитала (ЦМРК) — это реальная альтернатива модели Гордона по части вычисления стоимости капитала. ЦМРК выводит стоимость капитала фирмы из ее ковариации с рыночной доходностью<sup>3</sup>. В следующей таблице демонстрируется часть десятилетней истории динамики цен и доходов компании Abbot Labs и индекса ценных бумаг S&P 500 (Standard and Poor's 500 Stock Index). Фактические расчеты величины  $\beta$  производились на данных за 10 лет (см. таблицу на прилагаемом к книге компакт-диске).

|    | A             | B       | C       | D | E                        | F       | G       |
|----|---------------|---------|---------|---|--------------------------|---------|---------|
| 1  | <b>SP500</b>  |         |         |   | <b>Abbott Labs (ABT)</b> |         |         |
| 2  |               |         |         |   |                          |         |         |
| 3  |               | Заключ. | Месячн. |   |                          | Заключ. | Месячн. |
| 4  | Дата          | цена    | доход   |   | Дата                     | цена    | доход   |
| 5  | Декабрь 1988  | 277,72  |         |   | Декабрь 1988             | 4,8182  |         |
| 6  | Январь 1989   | 297,47  | 7,11%   |   | Январь 1989              | 4,9369  | 2,46%   |
| 7  | Февраль 1989  | 288,86  | -2,89%  |   | Февраль 1989             | 5,1510  | 4,34%   |
| 8  | Март 1989     | 294,87  | 2,08%   |   | Март 1989                | 5,5162  | 7,09%   |
| 9  | Апрель 1989   | 309,64  | 5,01%   |   | Апрель 1989              | 5,6023  | 1,56%   |
| 10 | Май 1989      | 320,52  | 3,51%   |   | Май 1989                 | 6,0079  | 7,24%   |
| 11 | Июнь 1989     | 317,98  | -0,79%  |   | Июнь 1989                | 5,8812  | -2,11%  |
| 12 | Июль 1989     | 346,08  | 8,84%   |   | Июль 1989                | 6,7062  | 14,03%  |
| 13 | Август 1989   | 351,45  | 1,55%   |   | Август 1989              | 6,4512  | -3,80%  |
| 14 | Сентябрь 1989 | 349,15  | -0,65%  |   | Сентябрь 1989            | 6,5022  | 0,79%   |
| 15 | Октябрь 1989  | 340,36  | -2,52%  |   | Октябрь 1989             | 6,6903  | 2,89%   |
| 16 | Ноябрь 1989   | 345,99  | 1,65%   |   | Ноябрь 1989              | 7,1005  | 6,13%   |
| 17 | Декабрь 1989  | 353,40  | 2,14%   |   | Декабрь 1989             | 6,9723  | -1,81%  |
| 18 | Январь 1990   | 329,08  | -6,88%  |   | Январь 1990              | 6,6989  | -3,92%  |
| 19 | Февраль 1990  | 331,89  | 0,85%   |   | Февраль 1990             | 6,6087  | -1,35%  |
| 20 | Март 1990     | 339,94  | 2,43%   |   | Март 1990                | 6,7762  | 2,53%   |
| 21 | Апрель 1990   | 330,80  | -2,69%  |   | Апрель 1990              | 6,9225  | 2,16%   |

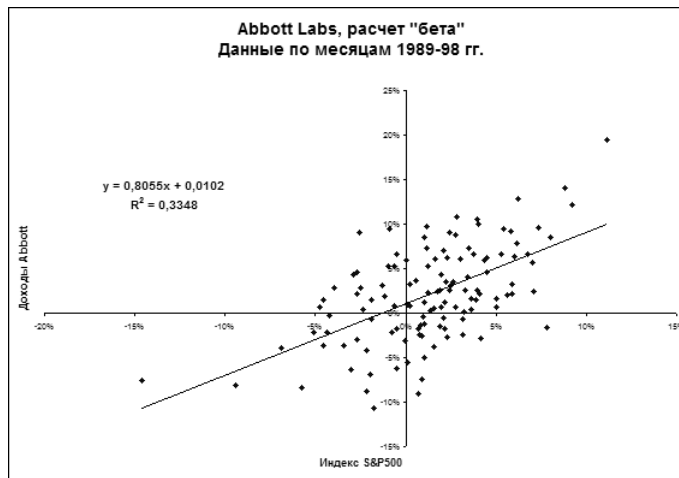
<sup>3</sup> ЦМРК подробно рассматривается в главах 7–11. А в этом разделе модель только применяется к вычислению стоимости капитала без лишних теоретических выкладок.

Показатель  $\beta$  для компании Abbott,  $\beta_{Abbott}$ , показывает чувствительность дохода по акциям фирмы к ее рыночной доходности. Он вычисляется по следующей формуле:

$$\beta_{Abbott} = \frac{\text{Ковариация (индекс по SP500, доходность Abbott)}}{\text{Дисперсия (индекс по SP500)}}.$$

В ячейке J5 фрагмента таблицы в разделе 2.5.1 показано, что показатель  $\beta$  для компании Abbott равен 0,8055.

Другой способ вычислить  $\beta$  — это отложить индекс S&P 500 по оси  $x$ , а показатели доходности Abbot по оси  $y$ , и с помощью функции Excel Линия тренда (Trendline) решить уравнение регрессии:



Уравнение регрессии на графике показывает наилучшую в смысле приближения линейную функцию, которая связывает доходность фирмы ( $y$  в уравнении) с ее индексами S&P 500 ( $x$  в правой части уравнения)<sup>4</sup>. Уравнение регрессии показывает, что за период 1989–1998 гг. один процент увеличения или уменьшения индекса S&P 500 приводил к подъему или спаду доходности фирмы Abbot на 0,8055. Величина  $R^2 = 0,3348$  говорит нам, что примерно 33% колебаний в доходности Abbot объясняется колебаниями индекса S&P 500<sup>5</sup>.

<sup>4</sup> Использование функции Линия тренда (Trendline), применяемой для решения уравнения регрессии, рассматривается в главе 29.

<sup>5</sup> Величина  $R^2$  в 33% может показаться небольшим, но, судя по литературе о ЦМПК, это довольно немалое число. Оно объясняет примерно 33% колебаний в доходах Abbot колебаниями индекса S&P 500. Остальную долю в этих колебаниях можно диверсифицировать, включив акции Abbot в неспециализированный портфель ценных бумаг.

## 2.5. Использование линии рынка ценных бумаг (ЛРЦБ) для вычисления стоимости капитала Abbot

В ценовой модели рынка капитала для вычисления стоимости капитала с поправкой на риск можно воспользоваться линией рынка ценных бумаг, ЛРЦБ (*security market line*, или *SML*). В этом разделе мы рассмотрим два определения ЛРЦБ. Разница между двумя методами состоит в том, как именно в уравнение стоимости капитала включаются налоги.

### 2.5.1. Первый метод: классическая ЛРЦБ

В классической формуле ЦМРК используется уравнение линии рынка ценных бумаг (ЛРЦБ), в котором налоги не учитываются.

$$\text{Стоимость капитала} = r_f + \beta [E(r_M) - r_f],$$

где  $r_f$  — безрисковая норма прибыли в экономике;  $E(r_M)$  — ожидаемая норма прибыли на рынке. Правильный выбор значений для параметров ЛРЦБ часто представляет сложную задачу. Обычно она решается примерно так:

- Величина  $r_f$  принимается равной такой надежной процентной ставке, какая только есть в экономике (например, норме процента по казначейским векселям).
- Величина  $E(r_M) - r_f$  может выбираться равной среднему от фактических в прошлом значений “премии за рыночный риск”, которая определяется как средняя норма прибыли от многоотраслевого, неспециализированного инвестиционного портфеля минус безрисковая процентная ставка.

Эти принципы иллюстрируются следующим фрагментом электронной таблицы:

|    | I                                   | J      | K                                           | L | M | N |
|----|-------------------------------------|--------|---------------------------------------------|---|---|---|
| 4  | Расчет стоимости по ЦМРК            |        |                                             |   |   |   |
| 5  |                                     |        |                                             |   |   |   |
| 6  | Бета для Abbott                     | 0,8055 | <-- =КОВАР(C5:C124,G5:G124)/ДИСПР(C5:C124)  |   |   |   |
| 7  |                                     |        |                                             |   |   |   |
| 8  | Стоимость по классич. ЦМРК          |        |                                             |   |   |   |
| 9  | Премия за риск                      | 8,40%  | <-- E(r <sub>M</sub> )-r <sub>f</sub>       |   |   |   |
| 10 | Безрисковая ставка                  | 4,40%  | <-- Процент по казнач. векселям, конец 1998 |   |   |   |
| 11 | r <sub>E</sub> , стоимость капитала | 11,17% | <-- =J10+J6*J9                              |   |   |   |

### 2.5.2. Второй метод: ЛРЦБ по Беннинге–Саригу с поправкой на налоги

В классическом методе ЛРЦБ никак не учитываются налоги. Беннинга и Сариг (Benninga–Sarig) показали в 1997 году, что в метод необходимо внести поправку на предельную ставку корпоративного налога на предприятия, существующую в экономике. Обозначая ставку корпоративного налога через  $T_C$  (от *corporate tax*), получаем ЛРЦБ по Беннинге–Саригу с поправкой на налоги:



$$\text{Стоимость капитала} = r_f (1 - T_C) + \beta [E(r_M) - r_f (1 - T_C)].$$

Эту формулу можно применять, адаптировав к ней описанные выше принципы:

- Величина  $r_f$  принимается равной безрисковой процентной ставке, существующей в экономике (в нашем случае — норме процента по казначейским векселям).
- $E(r_M) - r_f(1 - T_C) = [E(r_M) - r_f] + T_C r_f$ , что равно среднему от фактических в прошлом значений премии за рыночный риск плюс величина  $T_C r_f$ .

Для компании Abbot Labs метод Беннинги–Сарига дает несколько более низкую стоимость капитала:

|    | I                              | J      | K                                                  | L | M | N |
|----|--------------------------------|--------|----------------------------------------------------|---|---|---|
| 13 | <b>ЦМПК по Беннинге-Саригу</b> |        |                                                    |   |   |   |
| 14 | Премия за риск                 | 8,40%  | <-- $E(r_M) - r_f$                                 |   |   |   |
| 15 | Безрисковая ставка             | 4,40%  | <-- Процент по казнач. векселям, конец 1998        |   |   |   |
| 16 | Корпоративный налог            | 40%    |                                                    |   |   |   |
| 17 | Угл. коэфф. ЛРЦБ               | 10,16% | <-- $= J14 + J16 * J15 = E(r_M) - r_f * (1 - T_C)$ |   |   |   |
| 18 | $r_E$ , стоимость капитала     | 10,82% | <-- $= J15 * (1 - J16) + J6 * J17$                 |   |   |   |

### 2.5.3. Расчет ожидаемого на рынке дохода $E(r_M)$ по модели Гордона

Число 8,40% для выражения  $E(r_M) - r_f$  является приближенным значением фактической в прошлом премии за рыночный риск в Соединенных Штатах 1926–1994 гг. С одной стороны, использование фактических средних за прошедшие годы корректно, если есть уверенность, что прогнозируемые в будущем нормы прибыли будут соответствовать фактическим значениям в прошлом. С другой стороны, для прямого вычисления прогноза рыночной нормы прибыли можно воспользоваться текущими данными о рынке.

Как показали Беннинга и Сариг, модель Гордона дает возможность это сделать<sup>6</sup>. Напомним, что модель дает следующее выражение для стоимости акционерного капитала  $r_E$ :

$$r_E = \frac{D_0 (1 + g)}{P_0} + g.$$

Чтобы переписать эту формулу, предположим, что фирма выплачивает постоянную долю  $a$  своих доходов в виде дивидендов, обозначим текущий доход на одну акцию через  $EPS_0$  (*earning per share*) и будем трактовать  $g$  как темп прироста доходов фирмы:

$$r_E = \frac{a \cdot EPS_0 (1 + g)}{P_0} + g = \frac{a \cdot (1 + g)}{P_0 / EPS_0} + g.$$

<sup>6</sup> Более подробное изложение модели можно найти в главе 8 книги Simon Benninga, Oded Sarig, *Corporate Finance: A Valuation Approach* (McGraw-Hill, 1997).

Выражение в правой части формулы,  $P_0 / EPS_0$ , представляет собой отношение рыночной цены к прибыли на одну акцию фирмы. Эта формула привязывает стоимость капитала к текущим наблюдаемым параметрам рынка. Вот реализация этой формулы для вычисления стоимости капитала фирмы Abbot:

|    | A                                                                            | B      | C                                                     | D | E | F | G |
|----|------------------------------------------------------------------------------|--------|-------------------------------------------------------|---|---|---|---|
| 1  | В ЭТОЙ ТАБЛИЦЕ ПО СООТНОШЕНИЮ ЦЕН И ПРИБЫЛИ РАССЧИТЫВАЕТСЯ ОЖИДАЕМЫЙ ДОХОД   |        |                                                       |   |   |   |   |
| 2  | КОТОРЫЙ КОМБИНИРУЕТСЯ С "БЕТА" ФИРМЫ АББОТТ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ СТОИМОСТИ КАПИТАЛА |        |                                                       |   |   |   |   |
| 3  |                                                                              |        |                                                       |   |   |   |   |
| 4  | Ожидаемый рыночный доход по модели "цена-прибыль"                            |        |                                                       |   |   |   |   |
| 5  | Доля выплат дивидендов в доходах                                             | 40%    | <-- Разумная оценка                                   |   |   |   |   |
| 6  | Отношение рыночной цены к доходу                                             | 25     | <-- Приблизительно на конец 1998 г.                   |   |   |   |   |
| 7  | Ожидаемый средний темп роста дивидендов                                      | 7%     | <-- По оценкам аналитиков?                            |   |   |   |   |
| 8  | $E(I_M)$ по данной модели                                                    | 8,71%  | <-- $=B5*(1+B7)/B6+B7$                                |   |   |   |   |
| 9  |                                                                              |        |                                                       |   |   |   |   |
| 10 | Расчеты стоимости капитала по ЦМРК                                           |        |                                                       |   |   |   |   |
| 11 | Показатель "бета" для Abbott                                                 | 0,8055 | <-- Из предыдущего расчета                            |   |   |   |   |
| 12 |                                                                              |        |                                                       |   |   |   |   |
| 13 | Классическая ЦМРК                                                            |        |                                                       |   |   |   |   |
| 14 | Безрисковая ставка                                                           | 4,40%  | <-- Процент по казначейским векселям, конец 1998 г.   |   |   |   |   |
| 15 | Премия за риск, $E(I_M) - r_f$                                               | 4,31%  | <-- $=B8-B14$                                         |   |   |   |   |
| 16 | $r_E$ , стоимость капитала                                                   | 7,87%  | <-- $=B14+B11*B15$                                    |   |   |   |   |
| 17 |                                                                              |        |                                                       |   |   |   |   |
| 18 | ЦМРК Беннинги-Сарига с поправкой на налог                                    |        |                                                       |   |   |   |   |
| 19 | Безрисковая ставка                                                           | 4,40%  | <-- Процент по казначейским векселям, конец 1998 г.   |   |   |   |   |
| 20 | Корпоративный налог, $T_c$                                                   | 40%    | <-- Предельная ставка (приблиз.) корпор. налога в США |   |   |   |   |
| 21 | Премия за риск с поправкой, $E(I_M) - r_f*(1-T_c)$                           | 6,07%  | <-- $=B8-B19*(1-B20)$                                 |   |   |   |   |
| 22 | $r_E$ , стоимость капитала                                                   | 7,53%  | <-- $=B19*(1-B20)+B11*B21$                            |   |   |   |   |

## 2.6. Расчет стоимости долга

До сих пор мы занимались расчетом стоимости акционерного капитала для фирмы Abbot Labs. Теперь необходимо вычислить стоимость долга фирмы. По сути, это предельные издержки фирмы (до взимания корпоративного налога) на взятие в долг одного доллара. На практике стоимость долга часто бывает вычислить труднее, чем стоимость акционерного капитала. Существует как минимум четыре метода для расчета стоимости долга фирмы. Мы кратко изложим их суть, а затем проиллюстрируем три из этих методов на примере Abbot Labs. Первые два метода просты в применении; несмотря на свои теоретические изъяны, они часто используются на практике.

- Для удобства практических расчетов стоимость долга часто можно аппроксимировать, взяв *среднюю стоимость* существующего долга фирмы. Хотя этот метод наиболее прост в применении, в нем необоснованно смешивается *фактическая в прошлом* и *прогнозируемая в будущем* стоимость долга, тогда как вычислению подлежит именно последняя.
- Можно воспользоваться данными о выплатах по ценным бумагам корпорации с аналогичным уровнем риска. Если компания имеет рейтинг кредитоспособности А и в основном среднесрочные долги, то в качестве стоимости ее долга можно взять среднюю норму процента по среднесрочным долгам рейтинга А. Заметим, что применимость метода во многих случаях вызывает вопросы, поскольку выплаты по облигациям являются *обещанными* (гарантированными), тогда как стоимость долга — это *ожидаемая* прибыль по долгам фирмы. Как правило, существует риск дефолта, поэтому обещанный доход обычно бывает выше, чем реально ожидаемый.

Оба описанных выше метода сравнительно просты в применении. Во многих случаях проблемы или погрешности, создаваемые этими методами, не очень существенны<sup>7</sup>. Однако с теоретической точки зрения оба метода плохи тем, что не позволяют внести поправки на риск при вычислении стоимости долга. В следующих двух методах делаются поправки на риск, но сами методы труднее в применении:

- Можно применить ЦМРК для получения стоимости капитала фирмы, оценивая показатель  $\beta$  долга фирмы. Затем можно оценить стоимость долга с помощью линии рынка ценных бумаг (ЛРЦБ). Это делается аналогично расчету стоимости акционерного капитала, хотя — как будет показано — при реальном применении такого подхода приходится делать много упрощений и произвольных допущений.
- Можно воспользоваться моделью оценки стоимости долга по данным о ценах на облигации фирмы, об ориентировочной вероятности дефолта и о примерном объеме выплат держателям облигаций в случае дефолта. Этот метод математически нетривиален и требует большого объема работы; отложим его рассмотрение до главы 23. В отношении расчетов стоимости капитала он применяется на практике только в том случае, если анализируемая фирма имеет существенную сумму долгов, подверженных риску.

## 2.7. Расчет стоимости долга фирмы Abbot

Применим первые три из перечисленных методов для вычисления стоимости долга фирмы Abbot Labs.

### 2.7.1. Первый метод: средняя стоимость долга

Среднюю стоимость долга Abbot Labs в 1998 г. можно рассчитать по ее финансовым отчетам, получив цифру 5,49%:

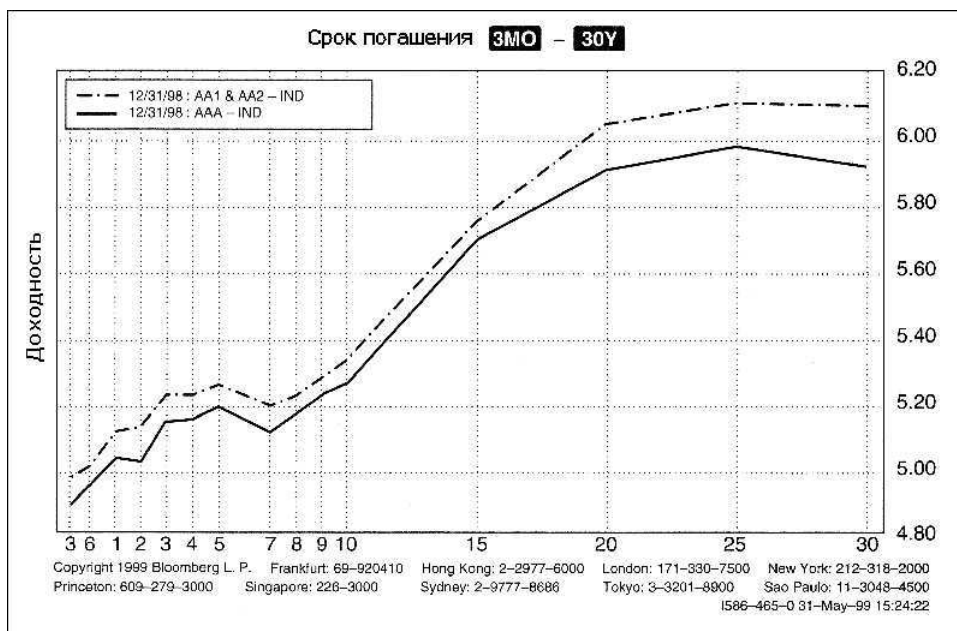
|   | A                                                | B             | C                     | D |
|---|--------------------------------------------------|---------------|-----------------------|---|
| 1 | <b>Средняя стоимость долга фирмы Abbott</b>      |               |                       |   |
| 2 |                                                  |               |                       |   |
| 3 | (Все цифры в миллионах долларов)                 | Конец 1998 г. | Конец 1997 г.         |   |
| 4 | Долгосрочный долг                                | 1 339,7       | 938                   |   |
| 5 | Краткосрочный долг и текущая часть долгосрочного | 1 759,1       | 1 781,4               |   |
| 6 | Общий долг                                       | 3 098,8       | 2 719,4               |   |
| 7 |                                                  |               |                       |   |
| 8 | Расходы на выплату процентов в 1998 г.           | 159,8         |                       |   |
| 9 | Проценты как доля среднего долга 1997-1998 гг.   | 5,49%         | <-- =B8/CP3НАЧ(B6:C6) |   |

<sup>7</sup> В ходе вычисления стоимости капитала делается множество допущений и предположений, а потому не обязательно получается точный ответ. Оценка стоимости капитала — это не *наука*, а *искусство*. Те, кто использует оценки стоимости капитала, всегда должны проверять их на устойчивость в окрестности полученных значений. Имея в руках данные о компании, которую вы анализируете, нередко можно позволить себе немножко вольно распорядиться ими для вычисления стоимости капитала (и сопутствующих накоплений).

Обратите внимание на включение всего долга фирмы (как долгосрочного, так и краткосрочного) и исключение всех остальных обязательств, перечисленных в балансовом отчете.

### 2.7.2. Второй метод: выплаты по долгам фирмы с учетом рейтинга кредитоспособности

В конце 1998 г. фирма Abbot имела рейтинг AA1. Средний срок платежей по ее долгам составлял пять лет. В конце того года процентные выплаты до срока погашения пятилетних долгов уровня AA1 составляли примерно 5,25% (см. приведенный ниже график от Bloomberg). Во втором методе в качестве стоимости долга используется именно это значение.



### 2.7.3. Третий метод: применение ценовой модели рынка капитала

В принципе, здесь должны выполняться все те же самые операции, что и при оценивании акций Abbot, т.е. вычисление показателя  $\beta$  по формуле  $\beta_{\text{долг}}^{\text{Abbot}} = \frac{\text{Ковар}(r_{\text{долг}}^{\text{Abbot}}, r_M)}{\text{Дисп}(r_M)}$ , где  $r_{\text{долг}}^{\text{Abbot}}$  — проценты по долгам Abbot;  $r_M$  — доходность согласно какому-нибудь рыночному индексу (как правило, S&P 500). При попытке применить эту формулу возникают большие сложности: обычно фирмы выпускают много серий облигаций (займов), и облигации из этих займов если вообще продаются, то нечасто (а значительная часть долга корпорации возникает в результате частного размещения средств). Поэтому по сравнению с данными по акциям данные по доходам с облигаций более труднодоступны и менее точны.

На практике показатель  $\beta$  для долга корпорации зависит от двух факторов.

- 1.Срок погашения долга. Чем длиннее срок погашения долга фирмы, тем больше его уровень риска.
- 2.Риск дефолта. Чем больше риск дефолта, тем больше показатель  $\beta$ .

Во многих вопросах, связанных с корпоративными долгами, первый фактор важнее второго. Для компании с относительно высоким уровнем кредитоспособности, такой как Abbot, этот фактор однозначно доминирует.

Для оценки показателя  $\beta$  долга фирмы полезно использовать следующие ориентировочные данные (эти значения представляют собой грубые прикидки, а их частичное обоснование дано в приложении к этой главе):

| Срок погашения         | Уровень риска | Показатель $\beta$ |
|------------------------|---------------|--------------------|
| Очень короткий         | Низкий        | 0                  |
| Короткий (1–3 года)    | Низкий        | 0,1                |
| Средний (3–10 лет)     | Средний       | 0,35               |
| Долгий (больше 10 лет) | Низкий        | 0,6                |
| Долгий (больше 10 лет) | Средний       | 0,8                |

Abbot Labs — компания с низким уровнем риска. Ее долги в основном находятся в среднесрочном диапазоне, причем ближе к краткосрочным. Поэтому показатель  $\beta$  ее долга можно принять равным 0,15. Как и в случае расчета стоимости акционерного капитала по ЦМРК, существует две модели для вычисления стоимости долга. В классическом определении ЦМРК стоимость долга вычисляется с помощью следующей линии рынка ценных бумаг (ЛРЦБ):

$$r_D = \text{Стоимость долга} = r_f + \beta_{\text{долг}} [E(r_M) - r_f].$$

ЛРЦБ стоимости долга с поправкой на налоги по модели Беннинги–Сарига имеет следующий вид:

$$r_D = \text{Стоимость долга} = r_f + \beta_{\text{долг}} [E(r_M) - r_f (1 - T_C)].$$

В следующем фрагменте электронной таблицы иллюстрируются оба расчета:

|    | А                                                   | В      | С                                             | Д | Е |
|----|-----------------------------------------------------|--------|-----------------------------------------------|---|---|
| 12 | <b>Расчет стоимости долга по ЦМРК</b>               |        |                                               |   |   |
| 13 | "Бета" для долга Abbott                             | 0,15   |                                               |   |   |
| 14 |                                                     |        |                                               |   |   |
| 15 | <b>Классическая ЦМРК для стоимости капитала</b>     |        |                                               |   |   |
| 16 | Премия за риск                                      | 8,40%  | <-- $E(r_M) - r_f$                            |   |   |
| 17 | Безрисковая процентная ставка                       | 4,40%  | <-- % по казнач. векселям, конец 1998 г.      |   |   |
| 18 | $r_D$ , стоимость долга                             | 5,660% | <-- $=B17+B13*B16$                            |   |   |
| 19 |                                                     |        |                                               |   |   |
| 20 | <b>ЦМРК по Беннинге-Саригу с поправкой на налог</b> |        |                                               |   |   |
| 21 | Премия за риск                                      | 8,40%  | <-- $E(r_M) - r_f$                            |   |   |
| 22 | Безрисковая процентная ставка                       | 4,40%  | <-- % по казнач. векселям, конец 1998 г.      |   |   |
| 23 | Корпоративный налог                                 | 40%    |                                               |   |   |
| 24 | Угловой коэф. ЛРЦБ с поправкой на налог             | 10,16% | <-- $=B21+B23*B22 = E(r_M) - r_f * (1 - T_C)$ |   |   |
| 25 | $r_D$ , стоимость долга                             | 5,92%  | <-- $=B22+B13*B24$                            |   |   |

## 2.8. Средневзвешенная стоимость капитала (СВСК)

В предыдущих примерах по дивидендной модели Гордона и ЦМРК вычисляется стоимость акционерного капитала — ставка дисконтирования с поправкой на риск, которая должна применяться к выплатам с акционерного капитала фирмы держателям ее акций. Ставка дисконтирования, применяемая к движению свободных средств фирмы, — т.е. денежным потокам фирмы в целом — называется *средневзвешенной стоимостью капитала*, СВСК (*weighted average cost of capital*, или *WACC*). СВСК — это средневзвешенное значение стоимости акционерного капитала и стоимости долга.

$$\text{СВСК} = \frac{E}{E + D} r_E + \frac{D}{E + D} r_D (1 - T_C),$$

где  $E$  — рыночная стоимость акции фирмы;  $D$  — рыночная стоимость долга фирмы;  $T_C$  — ставка корпоративного налога.

В приведенной далее таблице мы вычисляем СВСК фирмы Abbot для того случая, когда стоимость долга вычисляется первым методом (см. раздел 2.7.1), а стоимость капитала — как по модели Гордона, так и по ЦМРК.

|    | А                                                                                | В             | С                            | Д |
|----|----------------------------------------------------------------------------------|---------------|------------------------------|---|
| 1  | <b>РАСЧЕТ СВСК ДЛЯ АБВОТТ</b>                                                    |               |                              |   |
| 2  |                                                                                  |               |                              |   |
| 3  | <b>Расчет рыночной стоимости акционерного капитала на конец 1998 г.</b>          |               |                              |   |
| 4  | Количество акций, конец 1998 г.                                                  | 1 516 063 000 |                              |   |
| 5  | Цена акции, конец 1998 г.                                                        | 49,00         |                              |   |
| 6  | Акционерный капитал по рыночным ценам, конец 1998, млрд. \$                      | 74,29         |                              |   |
| 7  |                                                                                  |               |                              |   |
| 8  | <b>Оценка долга на конец 1998 г. (считается, что нетто-стоимость = рыночной)</b> |               |                              |   |
| 9  | Долгосрочный долг                                                                | 1 339 694 000 |                              |   |
| 10 | Краткосрочный долг и текущая доля долгосрочного                                  | 1 759 076 000 |                              |   |
| 11 | Общий долг                                                                       | 3 098 770 000 |                              |   |
| 12 | Снижение в наличных и их эквивалентах                                            | 308 230 000   |                              |   |
| 13 | Снижение в ценных бумагах                                                        | 75 087 000    |                              |   |
| 14 | Чистый долг, млрд. дол.                                                          | 2,72          |                              |   |
| 15 |                                                                                  |               |                              |   |
| 16 | Стоимость долга                                                                  | 5,49%         |                              |   |
| 17 |                                                                                  |               |                              |   |
| 18 | Стоимость предприятия = акционер. + заимств., млрд. дол.                         | 77,00         | <-- =B14+B6                  |   |
| 19 | % акционерного капитала                                                          | 0,96          | <-- =B6/B18                  |   |
| 20 | % заимствованных средств (долга)                                                 | 0,04          | <-- =1-B19                   |   |
| 21 |                                                                                  |               |                              |   |
| 22 | Предельная ставка налога для Abbott                                              | 40%           |                              |   |
| 23 |                                                                                  |               |                              |   |
| 24 | <b>РАСЧЕТ СТОИМОСТИ КАПИТАЛА</b>                                                 |               |                              |   |
| 25 |                                                                                  |               |                              |   |
| 26 | <b>По модели Гордона</b>                                                         |               |                              |   |
| 27 | Стоимость капитала                                                               | 13,40%        |                              |   |
| 28 | СВСК                                                                             | 13,05%        | <-- =B19*B27+B20*(1-B22)*B16 |   |
| 29 |                                                                                  |               |                              |   |
| 30 | <b>По ЦМРК</b>                                                                   |               |                              |   |
| 31 | Стоимость капитала (ЛРЦБ по Беннинге-Саригу)                                     | 10,82%        |                              |   |
| 32 | СВСК                                                                             | 10,56%        | <-- =B19*B31+B20*(1-B22)*B16 |   |

## 2.9. Когда модели не работают

У всех моделей есть свои недостатки, ибо ничто не совершенно<sup>8</sup>. В этом разделе рассматриваются некоторые потенциальные проблемы, возникающие в связи с использованием модели Гордона и модели оценивания капитальных активов.

### 2.9.1. Недостатки модели Гордона

Очевидно, данная модель не работает, если фирма не платит дивиденды и не имеет намерения их платить в ближайшем будущем<sup>9</sup>. Но трудности с применением модели могут возникнуть и тогда, когда фирма платит дивиденды. Во многих случаях особенно проблематично извлечь информацию о ставке будущих дивидендов из их фактической ставки в прошлом.

Для примера рассмотрим историю выплаты дивидендов компанией Ford Motor Company за период 1989–1998 гг.:

|    | A                                            | B        | C                                   | D | E |
|----|----------------------------------------------|----------|-------------------------------------|---|---|
| 1  | ИСТОРИЯ ДИВИДЕНДОВ FORD MOTOR CO., 1989-1998 |          |                                     |   |   |
| 2  |                                              |          |                                     |   |   |
| 3  | Год                                          | Дивиденд |                                     |   |   |
| 4  | 1989                                         | 3,00     |                                     |   |   |
| 5  | 1990                                         | 3,00     |                                     |   |   |
| 6  | 1991                                         | 1,95     |                                     |   |   |
| 7  | 1992                                         | 1,60     |                                     |   |   |
| 8  | 1993                                         | 1,60     |                                     |   |   |
| 9  | 1994                                         | 1,33     |                                     |   |   |
| 10 | 1995                                         | 1,23     |                                     |   |   |
| 11 | 1996                                         | 1,46     |                                     |   |   |
| 12 | 1997                                         | 1,64     |                                     |   |   |
| 13 | 1998                                         | 22,81    |                                     |   |   |
| 14 | Темп прироста, 1989-1997                     | -7,27%   | $\leftarrow = (B12/B4)^{(1/8)} - 1$ |   |   |
| 15 | Темп прироста, 1989-1998                     | 25,28%   | $\leftarrow = (B13/B4)^{(1/9)} - 1$ |   |   |

Источник проблемы очевиден. Компания Ford, дивиденды которой стабильно снижались вплоть до 1997 г., в 1998 г. выплатила денежный дивиденд в размере 21,09 долл. на акцию в дополнение к регулярным ежеквартальным дивидендам (сумма которых в 1998 г. составила 1,72 долл.). Если для прогнозирования будущего использовать фактическую историю прошлого, то при любом включении разового денежного дивиденда мы поневоле переоценим будущий рост дивидендов. Однако исключение упомянутого дивиденда в сумме 21,09 долл. из расчета тоже не приближает модель к реальной ситуации.

Похоже, что десятилетняя история выплаты дивидендов компанией Ford просто не является хорошим источником данных для расчета будущих выплат. Для желающих все-таки использовать модель Гордона предлагается несколько решений проблемы.

- Если исключить разовую выплату дивиденда в размере 21,09 долл., имевшую место в 1998 г., то рост дивидендов за последние четыре года, включая 1998 г.,

<sup>8</sup> “Счастье — это наибольшее соответствие между желаемым и действительным” (И.В. Сталин). Это не точная цитата, а обратный перевод с англ. — *Примеч. пер.*

<sup>9</sup> Фирма не может иметь намерения *никогда* не платить дивидендов, поскольку это на практике означает, что курсовая цена ее акций равна нулю.

составит разумную цифру 6,64%. Если предполагаемый в будущем рост дивидендов компании Ford принять равным этому значению, то стоимость акционерного капитала по модели Гордона (при рыночном курсе акции в конце 1998 г., равном 58,69 долл.) составит 9,77%.

|    | A                                                 | B        | C                                          | D | E |
|----|---------------------------------------------------|----------|--------------------------------------------|---|---|
| 18 | ДИВИДЕНДЫ FORD, ИСКЛЮЧАЯ ДИВИДЕНД \$21.09 1998 Г. |          |                                            |   |   |
| 19 | Год                                               | Дивиденд |                                            |   |   |
| 20 | 1989                                              | 3,00     |                                            |   |   |
| 21 | 1990                                              | 3,00     |                                            |   |   |
| 22 | 1991                                              | 1,95     |                                            |   |   |
| 23 | 1992                                              | 1,60     |                                            |   |   |
| 24 | 1993                                              | 1,60     |                                            |   |   |
| 25 | 1994                                              | 1,33     |                                            |   |   |
| 26 | 1995                                              | 1,23     |                                            |   |   |
| 27 | 1996                                              | 1,46     |                                            |   |   |
| 28 | 1997                                              | 1,64     |                                            |   |   |
| 29 | 1998                                              | 1,72     |                                            |   |   |
| 30 | Темп прироста, 1994-1998                          | 6,64%    | $\leftarrow = (B29/B25)^{(1/4)} - 1$       |   |   |
| 31 | Курс акций Ford, конец 1998                       | 58,69    |                                            |   |   |
| 32 | Стоимость капитала по Гордону                     | 9,77%    | $\leftarrow = B29 * (1 + B30) / B31 + B30$ |   |   |

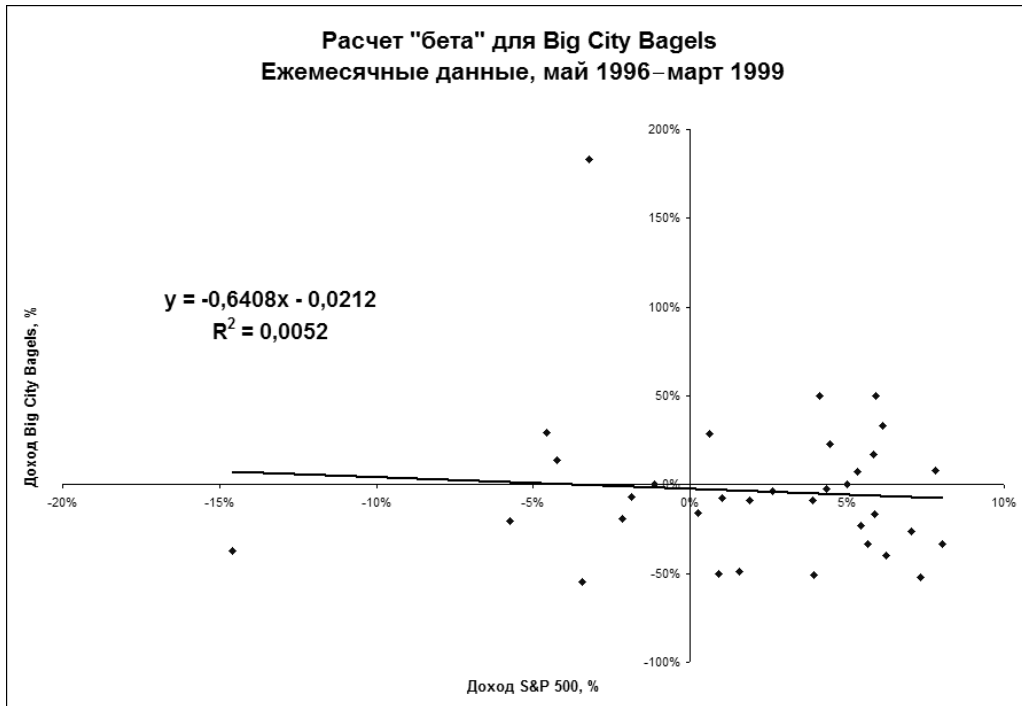
- Второй способ вычисления стоимости капитала компании Ford состоит в том, чтобы предсказать будущие дивиденды, построив подробную модель финансов компании. Такие модели — примеры которых приводятся в следующих двух главах — часто используются аналитиками. Несмотря на то что построение такой модели отнимает много времени и труда, в ней учитывается вся производственная и финансовая деятельность компании. Поэтому и прогноз дивидендов, полученный с ее помощью, потенциально обладает более высокой точностью и надежностью.

### 2.9.2. Недостатки ЦМРК

В следующем фрагменте электронной таблицы показаны индекс S&P 500 и доход фирмы Big City Bagels (обратите внимание, что во фрагменте таблицы пропущены строки с 8-й по 35-ю — некоторые строки данных скрыты). Сразу же за таблицей следует график, иллюстрирующий вычисление показателя  $\beta$  фирмы Big City Bagels. Этот показатель равен  $-0,6408$ .

|    | A                        | B       | C      | D | E                      | F       | G       |
|----|--------------------------|---------|--------|---|------------------------|---------|---------|
| 2  | Индекс S&P 500           |         |        |   | Big City Bagels (BIGC) |         |         |
| 3  |                          | Заклѹч. |        |   |                        | Заклѹч. |         |
| 4  | Дата                     | цена    |        |   | Дата                   | цена    |         |
| 5  | Май 1996                 | 669,12  |        |   | Май 1996               | 46,25   |         |
| 6  | Июнь 1996                | 670,63  | 0,23%  |   | Июнь 1996              | 38,75   | -16,22% |
| 7  | Июль 1996                | 639,95  | -4,57% |   | Июль 1996              | 50,00   | 29,03%  |
| 8  | Август 1996              | 651,99  | 1,88%  |   | Август 1996            | 45,63   | -8,75%  |
| 35 | Ноябрь 1998              | 1163,63 | 5,91%  |   | Ноябрь 1998            | 0,38    | 50,00%  |
| 36 | Декабрь 1998             | 1229,23 | 5,64%  |   | Декабрь 1998           | 0,25    | -33,33% |
| 37 | Январь 1999              | 1279,64 | 4,10%  |   | Январь 1999            | 0,38    | 50,00%  |
| 38 | Февраль 1999             | 1238,33 | -3,23% |   | Февраль 1999           | 1,06    | 183,33% |
| 39 | Март 1999                | 1286,37 | 3,88%  |   | Март 1999              | 0,97    | -8,82%  |
| 40 | "Сигма" дохода (ежемес.) |         | 4,91%  |   |                        |         | 43,81%  |
| 41 | "Сигма" дохода (ежегод.) |         | 17,02% |   |                        |         | 151,75% |
| 42 | =СТАНДОТКЛОН(C6:C39)     |         |        |   | =КОРЕНЬ(12)*C40        |         |         |
| 43 |                          |         |        |   |                        |         |         |





Акции фирмы явно имеют рискованный характер — среднегодовое стандартное отклонение ее доходов составляет 152% по сравнению с 17% в индексе S&P 500 за тот же период. Однако показатель  $\beta$  фирмы равен  $-0,6408$ , что означает — в контексте портфеля инвестиций — *отрицательный уровень риска*. Если бы это заключение было верным, это означало бы, что добавление акций Big City Bagels в какой-нибудь портфель бумаг понизило бы дисперсию портфеля в достаточной мере, чтобы оправдать их низкую, ниже безрискового уровня, доходность. Хотя это положение может оказаться верным для некоторых акций, все же трудно поверить, что в дальней перспективе показатель  $\beta$  действительно останется отрицательным<sup>10</sup>.

Значение  $R^2$  регрессии между доходами Big City Bagels и индексом S&P 500 чрезвычайно мало, всего 0,0052, а это означает, что S&P 500 попросту не объясняет вариации в доходах фирмы. Для знатоков математической статистики сообщаем: на самом деле положение еще хуже — среднеквадратическая ошибка оценки углового коэффициента составляет 1,57, что в полтора раза больше, чем сам угловой коэффициент (т.е. он статистически несущественно отличается от нуля).

Что же нам в таком случае делать? Как же вычислить стоимость капитала фирмы? Есть несколько возможных решений.

<sup>10</sup> Более правдоподобное объяснение состоит в том, что для рассматриваемого периода оцениваемая доходность Big City Bagels не имеет ничего общего с ее рыночной доходностью.

- Можно предположить, что показатель  $\beta$  действительно равен  $-0,6408$ . В зависимости от используемого варианта ЦМРК получаем следующую стоимость капитала:

|    | I                                            | J       | K                                                 | L | M | N |
|----|----------------------------------------------|---------|---------------------------------------------------|---|---|---|
| 3  | Расчеты стоимости по ЦМРК                    |         |                                                   |   |   |   |
| 4  |                                              |         |                                                   |   |   |   |
| 5  | Бета для Big City                            | -0,6408 | <-- =КОВАР(С6:С39;G6:G39)/ДИСПР(С6:С39)           |   |   |   |
| 6  |                                              |         |                                                   |   |   |   |
| 7  | Стоимость по классической ЦМРК               |         |                                                   |   |   |   |
| 8  | Премия за риск                               | 8,40%   | <-- $E(r_M) - r_f$                                |   |   |   |
| 9  | Безрисковая ставка                           | 4,40%   | <-- % по казнач. векселям, конец 1998             |   |   |   |
| 10 | $r_E$ , стоимость капитала                   | -0,98%  | <-- $=J9 + J5 * J8$                               |   |   |   |
| 11 |                                              |         |                                                   |   |   |   |
| 12 | ЦМРК по Беннинге-Саригу с поправкой на налог |         |                                                   |   |   |   |
| 13 | Премия за риск                               | 8,40%   | <-- $E(r_M) - r_f$                                |   |   |   |
| 14 | Безрисковая ставка                           | 4,40%   | <-- % по казнач. векселям, конец 1998             |   |   |   |
| 15 | Корпоративный налог                          | 40%     |                                                   |   |   |   |
| 16 | Угл. коэфф. ЛРЦБ                             | 10,16%  | <-- $=J13 + J15 * J14 = E(r_M) - r_f * (1 - T_c)$ |   |   |   |
| 17 | $r_E$ , стоимость капитала                   | -3,87%  | <-- $=J14 * (1 - J15) + J5 * J16$                 |   |   |   |

- Можно принять, что  $\beta$  для Big City Bagels на самом деле равен нулю. Зная среднеквадратичное отклонение оценки  $\beta$  для этой компании, легко видеть, что в статистическом смысле данный показатель не отличается от нуля, и такое предположение вполне имеет смысл. Можно заключить, что весь риск компании вполне диверсифицируем и что корректная стоимость акционерного капитала является безрисковой нормой прибыли.
- Можно предположить, что ковариация (корреляция) или отсутствие таковой между Big City Bagels и S&P 500 — не показатель их будущей корреляции. Это предположение в конце концов приведет нас к заключению о том, что риск фирмы сравним с риском аналогичных компаний. Небольшое исследование показателей  $\beta$  у различных фирм — производителей пищевой продукции закусочного типа обнаруживает, что их  $\beta$  значительно превосходит единицу: у New World Coffee это 1,15, у Pepsico он составляет 1,42, а у Starbucks — 1,84. Таким образом, можно заключить, что  $\beta$  у Big City Bagels будет находиться в пределах между 1,15 и 1,84 (в смысле будущей корреляции с рынком).

## 2.10. Заключение

В этой главе подробно рассмотрено и проиллюстрировано применение двух моделей к вычислению стоимости акционерного капитала: дивидендной модели Гордона и ценовой модели рынка капитала (ЦМРК). Мы также рассмотрели три из четырех практических методов расчета стоимости долга. Применение этих моделей всегда связано с известным произволом в допущениях и предположениях, поэтому мы рекомендуем следующее:

- Всегда вычисляйте стоимость капитала по нескольким разным моделям.
- При наличии достаточного времени попытайтесь рассчитать стоимость капитала не только для анализируемой вами фирмы, но и для аналогичных предприятий в той же отрасли хозяйства.

- Из результатов анализа попытайтесь вывести *компромиссную* оценку стоимости капитала. Смело исключайте из рассмотрения числа, которые кажутся вам бессмысленными или неразумными (например, отрицательную стоимость капитала для Big City Bagels).

## Упражнения

1. Ценные бумаги корпорации ABC Corp. имеют курс  $P_0 = 50$ . Фирма только что выплатила дивиденды в размере 3 доллара на акцию, и знающие держатели акций считают, что этот дивиденд будет возрастать на 5% ежегодно. Воспользуйтесь дивидендной моделью Гордона для расчета стоимости капитала ABC.
2. Компания Unheardof, Inc.<sup>11</sup> только что выплатила дивиденды в размере 5 долл. на акцию. Прогнозируется прирост ее дивидендов на 15% в год. Если стоимость акционерного капитала Unheardof составляет 25%, какова должна быть рыночная цена акции компании?
3. Компания Dismal.com<sup>12</sup> производит угнетающе-депрессивную информационную продукцию для Интернета. В настоящее время фирма не выплачивает дивидендов, но ее финансовый директор считает, что через три года она сможет выплачивать дивиденды в размере 15 долл. на акцию и что этот дивиденд будет расти на 20% в год. Предполагая, что стоимость акционерного капитала Dismal.com составляет 35%, оцените акции компании путем дисконтирования дивидендов.
4. Рассмотрим следующие данные о дивидендах и ценах для корпорации Chrysler:

|    | A                        | B          | C        | D |
|----|--------------------------|------------|----------|---|
| 1  | CHRYSLER CORPORATION (C) |            |          |   |
| 2  |                          | Курс       | Дивиденд |   |
| 3  |                          | акций в    | на       |   |
| 4  | Год                      | конце года | акцию    |   |
| 5  | 1986                     |            | 0,40     |   |
| 6  | 1987                     |            | 0,50     |   |
| 7  | 1988                     |            | 0,50     |   |
| 8  | 1989                     |            | 0,60     |   |
| 9  | 1990                     |            | 0,60     |   |
| 10 | 1991                     |            | 0,30     |   |
| 11 | 1992                     |            | 0,30     |   |
| 12 | 1993                     |            | 0,33     |   |
| 13 | 1994                     |            | 0,45     |   |
| 14 | 1995                     |            | 1,00     |   |
| 15 | 1996                     | 35,00      | 1,40     |   |

С помощью модели Гордона рассчитайте стоимость акционерного капитала Chrysler в 1996 г.

5. В электронной таблице к этой главе (см. прилагаемый компакт-диск) содержатся следующие ежемесячные данные о курсах акций IBM и индексе S&P 500 на 1998 г.:

<sup>11</sup> Название корпорации переводится как “Никому неизвестная”. Разумеется, это шутка автора. — *Примеч. пер.*

<sup>12</sup> Название домена переводится примерно как mрак.com. Еще одна шутка автора. — *Примеч. пер.*

|    | А                        | В       | С          |
|----|--------------------------|---------|------------|
| 1  | <b>S&amp;P 500 И IBM</b> |         |            |
| 2  |                          |         |            |
| 3  |                          | Индекс  | Курс акций |
| 4  |                          | S&P 500 | IBM (\$)   |
| 5  | Январь 1997              | 786,16  | 78,32      |
| 6  | Февраль 1997             | 790,82  | 71,77      |
| 7  | Март 1997                | 757,12  | 68,52      |
| 8  | Апрель 1997              | 801,34  | 80,13      |
| 9  | Май 1997                 | 848,28  | 86,37      |
| 10 | Июнь 1997                | 885,14  | 90,12      |
| 11 | Июль 1997                | 954,31  | 105,59     |
| 12 | Август 1997              | 899,47  | 101,23     |
| 13 | Сентябрь 1997            | 947,28  | 105,84     |
| 14 | Октябрь 1997             | 914,62  | 98,35      |
| 15 | Ноябрь 1997              | 955,40  | 109,34     |
| 16 | Декабрь 1997             | 970,43  | 104,47     |

- а) Рассчитайте показатель  $\beta$  для компании IBM по этим данным.
- б) Предположим, что в конце 1997 г. безрисковая процентная ставка составляла 5,50%. Полагая, что премия за рыночный риск равна  $E(r_M) - r_f = 8\%$  и что ставка корпоративного налога составляет  $T_C = 40\%$ , рассчитайте стоимость акционерного капитала IBM по ЦМРК с использованием как классической линии рынка ценных бумаг, так и линии Беннинги–Сарига с поправкой на налог.
- в) В конце 1997 г. компания IBM имела в обращении 969 015 351 акцию и 39,9 млрд. долл. долга. Принимая стоимость долга IBM равной 6,10%, повторите расчеты из пункта (б) так, чтобы получить две оценки средневзвешенной стоимости капитала IBM.
6. Текущий рыночный курс акций некоей фирмы составляет 50 долл., и фирма только что выплатила 6 долл. дивидендов на акцию.
- а) Предполагая, что инвесторы в фирме прогнозируют темп прироста дивидендов 10%, рассчитайте стоимость акционерного капитала фирмы.
- б) Постройте график зависимости между стоимостью акционерного капитала и ожидаемым темпом прироста дивидендов.
7. Упражнение на сверхнормативный рост: корпорация ABC только что выплатила дивиденды в размере 3 долл. на акцию. Вы — опытный финансовый аналитик — совершенно уверены, что темп прироста дивидендов компании в течение следующих 10 лет составит 15% в год. По прошествии этих 10 лет, по вашему мнению, темп роста дивидендов компании замедлится до среднего по отрасли значения, составляющего 5% в год. Если стоимость акционерного капитала фирмы ABC составляет 12%, какова нынешняя цена одной акции компании?
8. Рассмотрим компанию, для которой  $\beta_{\text{осн.кап.}} = 1,5$  и  $\beta_{\text{долг}} = 0,4$ . Пусть безрисковая процентная ставка равна 6%, ожидаемая норма прибыли на рынке  $E(r_M)$  составляет 15%, а корпоративный налог — 40%. При условии, что в структуре капитала компании ее акционерный капитал составляет 40%, а заимствованные средства (долг) — 60%, рассчитайте средневзвешенную стоимость ее капитала по ЦМРК с классической линией рынка ценных бумаг и с линией Беннинги–Сарига.

9. Вы рассматриваете возможность приобретения облигаций компании, отличающейся высоким уровнем риска. Номинал облигации составляет 100 долл., срок погашения — один год, купонная процентная ставка — 22%, а продается облигация за 95%. Вы оцениваете вероятность того, что компании удастся выжить на рынке и выплатить долг по облигациям, в 80%. С вероятностью 20%, по вашему мнению, компании грозит дефолт, и в этом случае вам удастся получить назад 40 долл. Каков в этом случае ожидаемый доход от облигации?
10. Сейчас 1 января 1997 г. Компания Normal America Inc. только что выплатила ежегодный дивиденд, который она выплачивала в конце каждого из последних 10 лет, как показано в следующей таблице:

|    | A                    | B          | C          | D       | E | F    | G          |
|----|----------------------|------------|------------|---------|---|------|------------|
| 1  | NORMAL AMERICA, INC. |            |            |         |   |      |            |
| 2  |                      |            |            |         |   |      |            |
| 3  |                      | Курс акций | Дивиденд   |         |   |      |            |
| 4  |                      | на         | на акцию   |         |   |      | Прибыль по |
| 5  | Год                  | 31 декабря | на 15 дек. |         |   |      | SP 500     |
| 6  | 1986                 | 33,00      |            |         |   |      |            |
| 7  | 1987                 | 30,69      | 2,50       | 0,57%   |   | 1987 | 4,7%       |
| 8  | 1988                 | 35,38      | 2,50       | 23,44%  |   | 1988 | 16,2%      |
| 9  | 1989                 | 42,25      | 3,00       | 27,90%  |   | 1989 | 31,4%      |
| 10 | 1990                 | 34,38      | 3,00       | -11,54% |   | 1990 | -3,3%      |
| 11 | 1991                 | 36,25      | 1,60       | 10,11%  |   | 1991 | 30,2%      |
| 12 | 1992                 | 32,25      | 1,40       | -7,17%  |   | 1992 | 7,4%       |
| 13 | 1993                 | 43,00      | 0,80       | 35,81%  |   | 1993 | 9,9%       |
| 14 | 1994                 | 42,13      | 0,80       | -0,17%  |   | 1994 | 1,2%       |
| 15 | 1995                 | 52,88      | 1,10       | 28,13%  |   | 1995 | 37,4%      |
| 16 | 1996                 | 55,75      | 1,60       | 8,46%   |   | 1996 | 22,9%      |

Вычислите коэффициент  $\beta$  для компании Normal America по отношению к индексу S&P 500.

### Приложение 1. Рекомендации по вычислению $\beta$ для долга

Vanguard — компания, управляющая большим количеством взаимных фондов. В число их входит фонд Vanguard Index 500, отслеживающий инвестиционный портфель S&P 500. Компания имеет также многочисленные облигационные фонды. В следующей таблице показаны значения  $\beta$  этих облигационных фондов, полученные по следующей формуле для каждого отдельного фонда:

$$\frac{\text{Ковар}(\text{доход}_{SP500}, \text{доход}_{\text{облиг.фонд}})}{\text{Дисп}(\text{доход}_{SP500})}.$$

Если выполнить такой расчет для нескольких фондов Vanguard, получим следующие результаты.

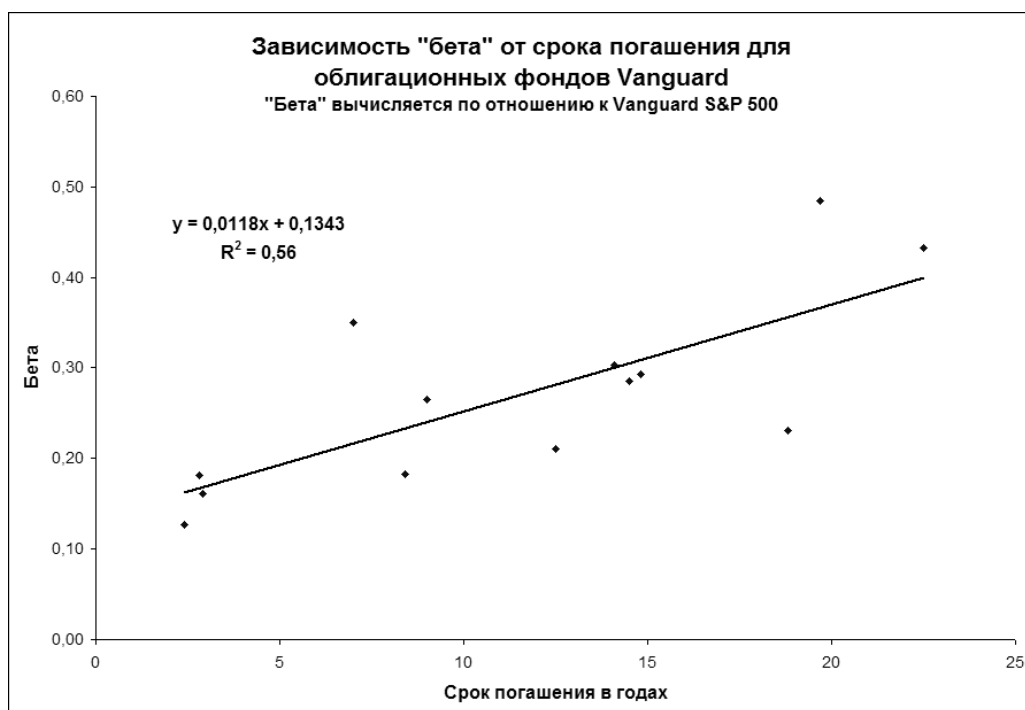
Регрессия показателя  $\beta$  по среднему сроку погашения облигационного фонда дает

$$\beta_{\text{фонда}} = 0,1313 + 0,0118 \cdot \text{срок погашения}, R^2 = 0,56$$

Рекомендации по выбору значений  $\beta$  для стоимости заимствованных средств (долга) в этой главе основаны именно на этой регрессии.

| 1  | A                                                                                                                        | B                             | C                      | D                       | E                   | F                          | G      | H                                     | I                      | J                         | K                                 | L                      | M                           |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|------------------------|-------------------------|---------------------|----------------------------|--------|---------------------------------------|------------------------|---------------------------|-----------------------------------|------------------------|-----------------------------|
| 2  | <b>"БЕТА" ДЛЯ ИЗБРАННЫХ ФОНДОВ VANGUARD</b>                                                                              |                               |                        |                         |                     |                            |        |                                       |                        |                           |                                   |                        |                             |
| 3  | Примечание: Данные взяты с Web-сайта Vanguard, <a href="http://majestic4.vanguard.com">http://majestic4.vanguard.com</a> |                               |                        |                         |                     |                            |        |                                       |                        |                           |                                   |                        |                             |
| 4  | Это не строгое научное исследование!                                                                                     |                               |                        |                         |                     |                            |        |                                       |                        |                           |                                   |                        |                             |
| 5  | Год, который закончился 31 декабря                                                                                       | Портфель индекса Vanguard 500 | Краткосроч. федеральн. | Краткосроч. корпоратив. | Краткосроч. казнач. | Высоко-доходн. корпоратив. | ГНИА   | Общий индекс облиг. с пенсильв.страх. | Долгосроч. необлагаем. | Высокодоходн. необлагаем. | Застрахов. долгосроч. необлагаем. | Долгосроч. необлагаем. | Долгосроч. казначейства США |
| 6  | 1999                                                                                                                     | 21.07%                        | 2.07%                  | 3.30%                   | 1.85%               | 2.55%                      | 0.78%  | -0.76%                                | -2.66%                 | -3.38%                    | -2.91%                            | -3.53%                 | -8.66%                      |
| 7  | 1998                                                                                                                     | 28.62%                        | 5.94%                  | 6.57%                   | 7.36%               | 5.62%                      | 7.14%  | 8.58%                                 | 6.19%                  | 6.45%                     | 6.13%                             | 6.02%                  | 13.05%                      |
| 8  | 1997                                                                                                                     | 33.19%                        | 6.46%                  | 6.95%                   | 6.39%               | 11.91%                     | 9.47%  | 9.44%                                 | 8.25%                  | 9.24%                     | 8.65%                             | 9.29%                  | 13.90%                      |
| 9  | 1996                                                                                                                     | 22.88%                        | 4.78%                  | 4.79%                   | 4.39%               | 9.54%                      | 5.24%  | 3.58%                                 | 4.33%                  | 4.46%                     | 4.02%                             | 4.41%                  | -1.25%                      |
| 10 | 1995                                                                                                                     | 37.45%                        | 12.26%                 | 12.74%                  | 12.11%              | 19.15%                     | 17.04% | 18.18%                                | 16.45%                 | 18.13%                    | 18.60%                            | 18.72%                 | 30.11%                      |
| 11 | 1994                                                                                                                     | 1.18%                         | 0.94%                  | -0.08%                  | -0.58%              | -1.71%                     | -0.95% | -2.66%                                | -4.54%                 | -5.06%                    | -5.58%                            | -5.75%                 | -7.03%                      |
| 12 | 1993                                                                                                                     | 9.89%                         | 7.00%                  | 7.07%                   | 6.41%               | 18.24%                     | 5.90%  | 9.68%                                 | 12.74%                 | 12.66%                    | 13.09%                            | 13.45%                 | 16.79%                      |
| 13 | 1992                                                                                                                     | 7.42%                         | 6.19%                  | 7.20%                   | 6.75%               | 14.24%                     | 6.85%  | 7.14%                                 | 10.17%                 | 9.88%                     | 9.17%                             | 9.30%                  | 7.40%                       |
| 14 | 1991                                                                                                                     | 30.22%                        | 12.24%                 | 13.08%                  | 6.75%               | 29.01%                     | 16.77% | 15.25%                                | 12.20%                 | 14.75%                    | 12.49%                            | 13.50%                 | 17.43%                      |
| 15 | 1990                                                                                                                     | -3.32%                        | 9.31%                  | 9.23%                   | 3.08%               | -5.85%                     | 10.32% | 8.65%                                 | 6.92%                  | 4.92%                     | 7.04%                             | 6.82%                  | 5.78%                       |
| 16 | 1989                                                                                                                     | 31.36%                        | 11.34%                 | 11.45%                  |                     | 1.89%                      | 14.77% | 13.64%                                | 10.56%                 | 11.07%                    | 10.60%                            | 11.54%                 | 17.93%                      |
| 17 | 1988                                                                                                                     | 16.22%                        | 5.73%                  | 6.95%                   |                     | 13.55%                     | 8.81%  | 7.35%                                 | 11.95%                 | 13.81%                    | 12.79%                            | 12.24%                 | 9.15%                       |
| 18 | 1987                                                                                                                     | 4.71%                         | 0.00%                  | 4.46%                   |                     | 2.65%                      | 2.15%  | 1.14%                                 | -1.26%                 | -1.57%                    | 0.12%                             | -1.14%                 | -2.93%                      |
| 19 | 1986                                                                                                                     | 18.06%                        |                        | 11.42%                  |                     | 16.86%                     | 11.69% | -0.21%                                | 7.52%                  | 19.67%                    | 18.62%                            | 19.38%                 | 7.22%                       |
| 20 | 1985                                                                                                                     | 31.23%                        |                        | 14.90%                  |                     | 21.99%                     | 20.68% |                                       | 21.65%                 | 20.68%                    | 19.35%                            | 20.77%                 |                             |
| 21 | 1984                                                                                                                     | 6.21%                         |                        | 14.22%                  |                     | 7.86%                      | 14.03% |                                       | 9.70%                  | 9.70%                     | 2.19%                             | 8.55%                  |                             |
| 22 | 1983                                                                                                                     | 21.30%                        |                        |                         |                     | 15.09%                     | 9.65%  |                                       | 10.38%                 |                           |                                   | 9.50%                  |                             |
| 23 | 1982                                                                                                                     | 21.00%                        |                        |                         |                     |                            | 31.56% |                                       | 35.89%                 |                           |                                   | 38.56%                 |                             |
| 24 | 1981                                                                                                                     | -5.20%                        |                        |                         |                     |                            | 4.78%  |                                       | -8.77%                 |                           |                                   | -11.15%                |                             |
| 25 | 1980                                                                                                                     | 31.90%                        |                        |                         |                     |                            | -6.61% |                                       | -11.43%                |                           |                                   | -16.00%                |                             |
| 26 |                                                                                                                          |                               |                        |                         |                     |                            |        |                                       |                        |                           |                                   |                        |                             |
| 27 |                                                                                                                          |                               |                        |                         |                     |                            |        |                                       |                        |                           |                                   |                        |                             |
| 28 |                                                                                                                          |                               |                        |                         |                     |                            |        |                                       |                        |                           |                                   |                        |                             |
| 29 | "Бета" отн. S&P 500                                                                                                      | 1.0000                        | 0.1609                 | 0.1267                  | 0.1815              | 0.3507                     | 0.1833 | 0.2647                                | 0.2110                 | 0.3034                    | 0.2854                            | 0.2931                 | 0.4847                      |
| 30 | Средний срок погаш.                                                                                                      |                               | 2.9                    | 2.4                     | 2.8                 | 7                          | 8.4    | 9                                     | 12.5                   | 14.1                      | 14.5                              | 14.8                   | 19.7                        |

Результаты регрессии наглядно видно на следующем графике:

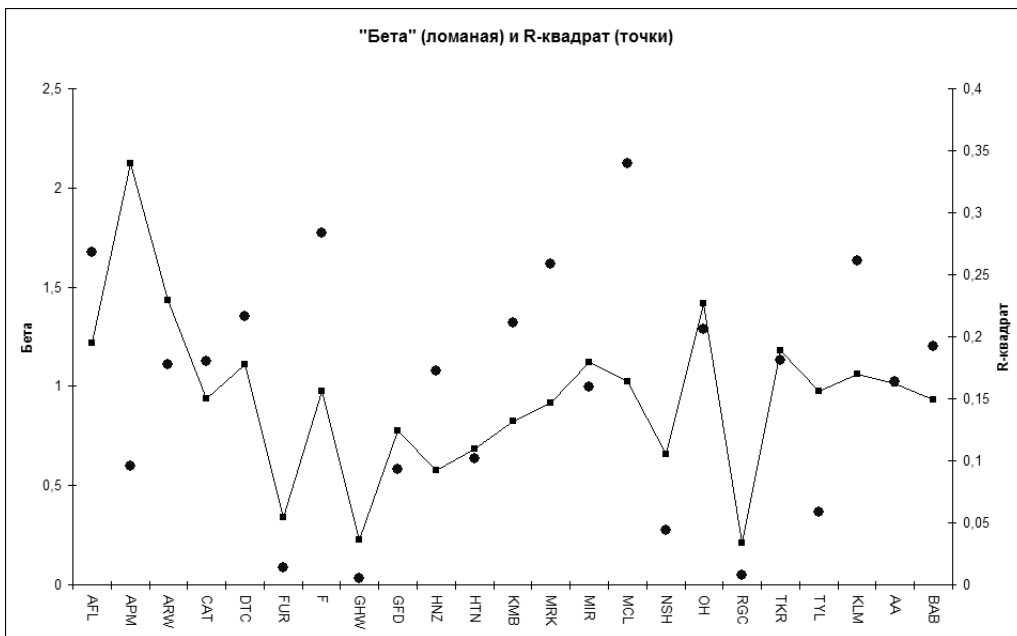


## Приложение 2. Почему $\beta$ является хорошей мерой риска. Показатели портфеля и отдельных акций

Хотя показатель  $\beta$  может и не являться хорошей мерой уровня риска отдельных акций, средняя величина  $\beta$  очень хорошо описывает риск для диверсифицированного портфеля ценных бумаг. Это утверждение как раз и иллюстрируется данным приложением. Но прежде чем перейти непосредственно к его иллюстрации, следует подчеркнуть значимость первого предложения:

*Если показатель  $\beta$  портфеля ценных бумаг является хорошей мерой риска этого портфеля, то — для держателей диверсифицированных портфелей (каковыми являются большинство инвесторов) — показатель  $\beta$  отдельной акции также является хорошей мерой риска этой акции, если она с течением времени остается в диверсифицированном портфеле.*

Для иллюстрации рассмотрим следующий график, на котором показаны величины  $\beta$  для 23 акций<sup>13</sup>. Как видно, значение  $R^2$  для отдельных регрессий невысоко (самое высокое из них составляет 35%, а самое низкое близко к нулю). Среднее  $R^2$  по 23 акциям равно 16,05%, а среднее  $\beta$  составляет 0,944.



Объединяя 23 акции в равномерно взвешенный портфель, получаем  $\beta$  для портфеля, равный 0,944, что равно среднему показателю его отдельных составляющих<sup>14</sup>. Однако величина  $R^2$  для портфеля равна 61,44%, что значительно

<sup>13</sup> Показатель  $\beta$  вычисляется по отношению к данным о доходности S&P 500, взятым по каждому месяцу с июля 1994 г. по июнь 1999 г.

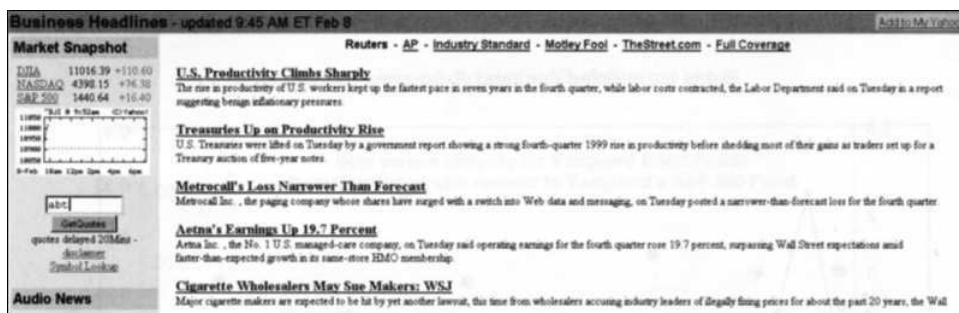
<sup>14</sup> Всегда справедливо следующее равенство. Пусть у нас есть  $n$  ценных бумаг с показателями  $\beta$ , равными

превышает среднюю  $R^2$  по всем бумагам. Для большого, хорошо диверсифицированного портфеля его показатель  $R^2$  приближается к единице.

Смысл этого числа заключается в том, что при вкладывании средств в большие диверсифицированные портфели практически весь риск сосредоточен в  $\beta$  отдельных активов.

### Приложение 3. Получение данных из Интернета

Все данные, использованные в этой главе, получены из Интернета. В этом приложении кратко описано, как именно они добывались. Помните, что Интернет отличается динамичностью и изменчивостью, так что описанные в книге технические детали могут сильно отличаться от реальности к тому моменту, когда вы будете это читать<sup>15</sup>.

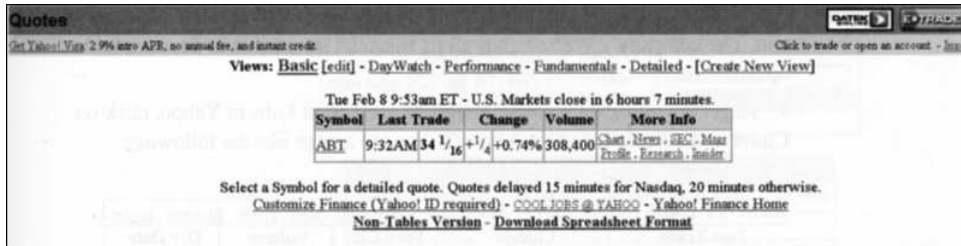


1. Вначале необходимо зайти на бизнес-страницу портала Yahoo (<http://dailynews.yahoo.com/headlines/business/>) и ввести в окне Get Quotes (Получить котировки) символическое обозначение фирмы, данные о которой требуются. На рисунке показан запрос на информацию по индексу **abt** — это обозначение Abbot Laboratories.
2. После ввода индекса и щелчка на кнопке Get Quotes (Получить котировки) отобразятся биржевые котировки компании:

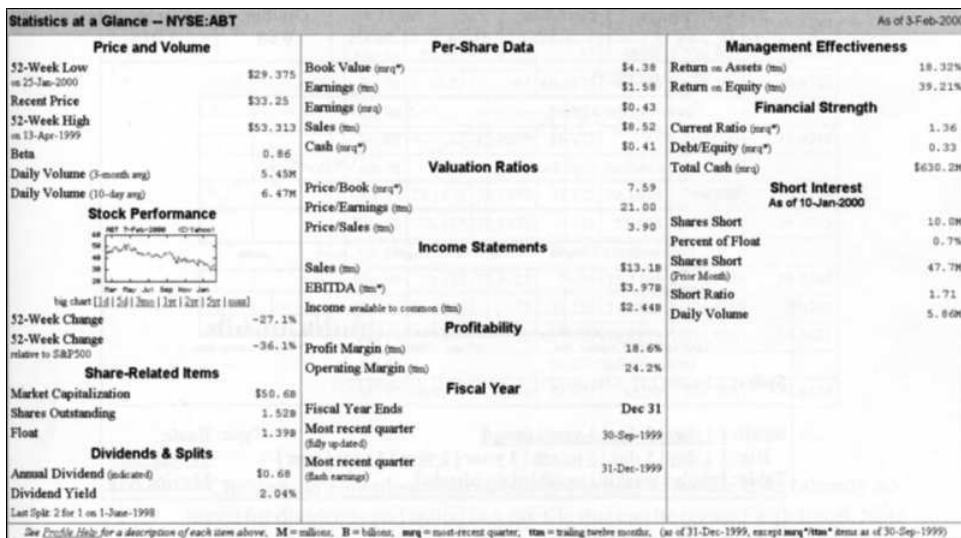
$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ . Предположим, они объединяются в портфель с весовыми коэффициентами для каждой ценной бумаги, равными  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , где  $\sum_{i=1}^n x_i = 1$ . Тогда  $\beta$  для портфеля будет равен взвешенному среднему  $\beta$  по всем ценным бумагам:  $\beta_{\text{портф.}} = \sum_{i=1}^n x_i \beta_i$ .

<sup>15</sup> Действительно, к настоящему моменту даже дизайн и структура Web-сайта, на который автор ссылается в данном приложении, сильно изменились. Поэтому приложение имеет, пожалуй, лишь “архивно-историческую” ценность. — *Примеч. пер.*





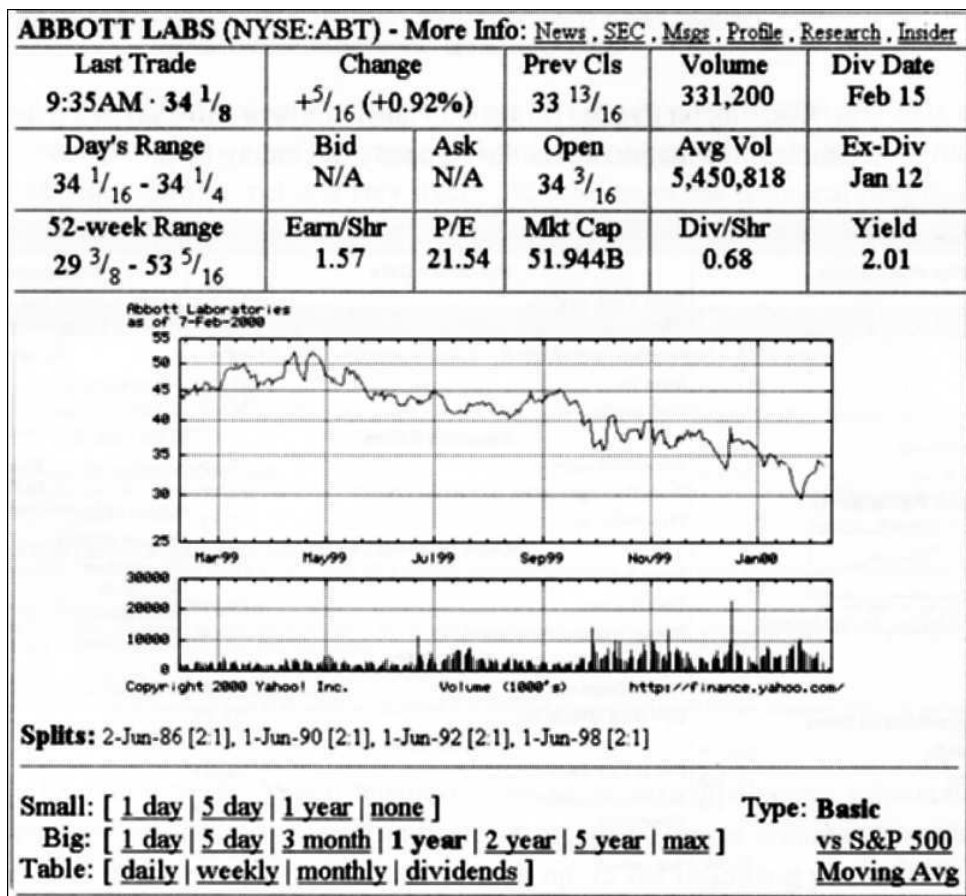
3. Если щелкнуть на Profile (Сводные данные) в ячейке More Info (Дополнительная информация), откроется страница сводной финансовой информации о компании, включая ее показатель  $\beta$ .



Заметим, что  $\beta$  для Abbot здесь имеет не то значение, которое было вычислено в главе. Это различие возникло по двум причинам. Во-первых, в главе использовались данные о доходах с включением в них дивидендов, а расчеты на сайте Yahoo выполняются без учета дивидендов. Во-вторых, анализируемые интервалы времени отличаются — в расчетах на Yahoo используются данные за пять лет, а в главе — за десять.

Обратите также внимание, что с этой страницы можно перейти на другие, содержащие намного больше информации об Abbot. Web-сайт компании содержит все ее финансовые отчеты в форме, удобной для скачивания.

4. Чтобы получить информацию о котировках Abbot с сайта Yahoo в удобной для скачивания форме, следует щелкнуть на Chart (Диаграмма) в ячейке More Info (Дополнительная информация). Откроется примерно такая страница:



5. Если же щелкнуть на Table (Таблица) и выбрать нужный интервал времени, а также установить переключатель в положение Monthly (Ежемесячные данные), получим следующее:

|                |           |                                                                                                                                 |  |                                                                                                       |  |
|----------------|-----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| Month Day Year |           | <input type="radio"/> Daily<br><input type="radio"/> Weekly<br><input type="radio"/> Monthly<br><input type="radio"/> Dividends |  | Ticker Symbol: <input type="text" value="abt"/><br><input type="button" value="Get Historical Data"/> |  |
| Start Date:    | Dec 01 97 |                                                                                                                                 |  |                                                                                                       |  |
| End Date:      | Jan 31 99 |                                                                                                                                 |  |                                                                                                       |  |

| Date   | Open                                 | High    | Low     | Close   | Volume    | Adj. Close* |
|--------|--------------------------------------|---------|---------|---------|-----------|-------------|
| Jan 99 | 49.3125                              | 50      | 44.9375 | 46.4375 | 2,204,800 | 45.6808     |
| Jan 99 | \$0.15 Cash Dividend                 |         |         |         |           |             |
| Dec 98 | 48                                   | 49.75   | 47.50   | 49      | 1,846,700 | 48.0463     |
| Nov 98 | 47.25                                | 49.8125 | 46.6875 | 48      | 1,679,600 | 47.0658     |
| Oct 98 | 42.50                                | 47.8125 | 40.875  | 47      | 2,144,200 | 46.0852     |
| Oct 98 | \$0.15 Cash Dividend                 |         |         |         |           |             |
| Sep 98 | 38.75                                | 44.3125 | 36.625  | 43.4375 | 2,866,800 | 42.4433     |
| Aug 98 | 41.375                               | 42.9375 | 37      | 38.50   | 2,526,000 | 37.6188     |
| Jul 98 | 41.25                                | 43      | 40.6875 | 41.625  | 1,654,500 | 40.6723     |
| Jul 98 | \$0.15 Cash Dividend                 |         |         |         |           |             |
| Jun 98 | 37                                   | 42.1875 | 36.375  | 41      | 1,967,700 | 39.9246     |
| Jun 98 | 2:1 Stock Split (before market open) |         |         |         |           |             |
| May 98 | 73.1875                              | 75.1875 | 72.125  | 74.1875 | 794,900   | 36.1208     |
| Apr 98 | 76.125                               | 76.4375 | 71      | 73.125  | 1,527,300 | 35.6035     |
| Apr 98 | \$0.30 Cash Dividend                 |         |         |         |           |             |
| Mar 98 | 74.625                               | 75.5625 | 74.50   | 75.3125 | 1,074,300 | 36.5245     |
| Feb 98 | 71.5625                              | 73      | 71.125  | 74.8125 | 1,324,800 | 36.282      |
| Jan 98 | 65.625                               | 72      | 65.0625 | 70.8125 | 1,351,000 | 34.3421     |
| Jan 98 | \$0.27 Cash Dividend                 |         |         |         |           |             |
| Dec 97 | 66.9375                              | 67.50   | 65.375  | 65.50   | 920,100   | 31.6424     |

[Download Spreadsheet Format](#)

Далее следует щелкнуть на ссылке **Download Spreadsheet Format** (Скачать в табличном формате), чтобы получить данные, уже распределенные по дивидендам и дроблению, в файле формата csv, который можно открыть в Excel. Следует отметить, что можно выбрать начальную (Start Date) и конечную (End Date) даты интервала по своему усмотрению.

*Примечание.* Условные обозначения двух наиболее распространенных индексов ценных бумаг таковы: **^SPX** (индекс S&P 500) и **^DJI** (индекс Доу-Джонса, или Dow-Jones 30 Industrials).



---

## 3 Моделирование финансового отчета предприятия

---

### 3.1. Введение

Не вызывает никаких сомнений, что для анализа доходности предприятия и успешного управления его финансами бывает полезно составить и проанализировать баланс или финансовый отчет фирмы на некоторый предстоящий срок. Моделирование таких *гипотетических финансовых отчетов (pro forma financial statements)* лежит в основе многих направлений финансового анализа предприятий. В этой и следующих главах мы сосредоточим внимание на применении гипотетических отчетов к оцениванию фирм и их акционерного капитала, однако этот метод может использоваться также и для анализа кредитоспособности — изучая финансовую ведомость, можно спрогнозировать, какой объем финансирования понадобится фирме в будущем. С помощью гипотетических отчетов можно поиграть в обычные игры с симуляционными моделями (“а что будет, если...”), а также выяснить, какие трудности может испытывать фирма в связи с изменениями в параметрах ее финансов и сбыта.

В этой главе представлено множество различных финансовых моделей. Все модели являются *управляемыми сбытом (sales driven)*, т.е. в них предполагается, что большая часть статей баланса и ведомости прибылей/убытков прямо или косвенно зависит от сбыта продукции. Математические алгоритмы анализа моделей включают решение систем линейных уравнений для прогноза статей баланса и дохода на предстоящие годы. Однако пользователю электронной таблицы нет нужды беспокоиться о математической стороне модели. Благодаря способности электронных таблиц решать итерационными методами уравнения, описывающие взаимосвязи в моделях, нам остается позаботиться только о том, чтобы правильно задать в среде Excel соотношения между компонентами финансовой модели предприятия<sup>1</sup>.

---

### 3.2. Применение финансовых моделей: теория и первый пример

Практически все модели гипотетических финансовых моделей *управляются сбытом*; этот термин означает, что наиболее важные переменные финансового отчета фирмы в большинстве своем являются функциями объема сбыта продукции. На-

---

<sup>1</sup> В число математических методов для автоматизированных расчетов по бухгалтерским балансам входит итерационный метод решения систем уравнений, известный как метод Гаусса–Зейделя. Хотя знать его суть для понимания этой главы не обязательно, все же полезно иметь в виду, что метод Гаусса–Зейделя можно реализовать в Excel и непосредственно. Подробности об этом — в главе 28.

пример, дебиторскую задолженность можно принять равной некоторой доле от объема сбыта фирмы. А вот несколько более сложный пример — можно постулировать, что основной капитал (или какой-нибудь актив) является ступенчатой функцией объема сбыта:

$$\text{Основной капитал} = \begin{cases} a, & \text{если сбыт} < A \\ b, & \text{если } A \leq \text{сбыт} < B \end{cases}$$

И эти примеры можно продолжать.

Чтобы рассчитать модель финансового планирования, необходимо отличать те статьи финансового отчета, которые являются функциональными зависимостями от сбыта (и, возможно, других статей), от тех, в которых принимаются стратегические решения по финансовой деятельности фирмы. Насчет активной части баланса обычно предполагают, что она включает в себя только функциональные зависимости. Краткосрочные обязательства также часто считают зависимыми, а на долю независимых решений оставляют только соотношение между долгосрочными обязательствами и акционерным капиталом.

Далее приведен простой пример. Необходимо составить прогноз финансовой ведомости для фирмы, текущий баланс и ведомость прибылей/убытков которой выглядят следующим образом:

|                                                | А | В     |
|------------------------------------------------|---|-------|
| 14 Год                                         |   | 0     |
| 15 Ведомость прибылей и убытков                |   |       |
| 16 Объем сбыта                                 |   | 1 000 |
| 17 Себестоимость продукции                     |   | (500) |
| 18 Процентные выплаты по долгам                |   | (32)  |
| 19 Проценты, начисленные по наличным средствам |   | 6     |
| 20 Амортизация                                 |   | (100) |
| 21 Прибыль до уплаты налогов                   |   | 374   |
| 22 Налоги                                      |   | (150) |
| 23 Прибыль после уплаты налогов                |   | 225   |
| 24 Дивиденды                                   |   | (90)  |
| 25 Нераспределенная прибыль                    |   | 135   |
| 26                                             |   |       |
| 27 Балансовая ведомость                        |   |       |
| 28 Наличные средства и ликвидные ценные бумаги |   | 80    |
| 29 Оборотные средства                          |   | 150   |
| 30 Основные средства                           |   |       |
| 31 Себестоимость                               |   | 1 070 |
| 32 Накопленная амортизация                     |   | (300) |
| 33 Остаточная стоимость основных средств       |   | 770   |
| 34 Всего активов                               |   | 1 000 |
| 35                                             |   |       |
| 36 Краткосрочные обязательства                 |   | 80    |
| 37 Долг (заимствованные средства)              |   | 320   |
| 38 Акционерный капитал                         |   | 450   |
| 39 Накопленная нераспределенная прибыль        |   | 150   |
| 40 Всего обязательств и акционерного капитала  |   | 1 000 |

Текущий объем сбыта (в году №0) составляет 1000 единиц. Ожидается, что сбыт продукции фирмы будет возрастать на 10% в год. Кроме того, для статей финансовой ведомости фирмы известны следующие факты и приняты следующие допущения:

|                                       |                                                                                                                                                                                   |
|---------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Оборотные средства                    | Принимаются равными 15% объема сбыта на конец года                                                                                                                                |
| Краткосрочные обязательства           | Принимаются равными 8% объема сбыта на конец года                                                                                                                                 |
| Остаточная стоимость основных средств | 77% объема сбыта на конец года                                                                                                                                                    |
| Амортизация                           | 10% средней балансовой стоимости активов за год                                                                                                                                   |
| Себестоимость основных средств        | Сумма остаточной стоимости основных средств и накопленной амортизации                                                                                                             |
| Долг                                  | Фирма не выплачивает долгов и не берет в долг в течение пяти прогнозируемых лет                                                                                                   |
| Наличные и ликвидные ценные бумаги    | Это <i>переменная-замыкатель (plug)</i> баланса фирмы (см. данное ниже объяснение). Предполагается, что доход по средним балансам наличных и ликвидных ценных бумаг составляет 8% |

### 3.2.1. Замыкатель

Пожалуй, наиболее важной переменной, отвечающей в моделировании доходности за принятие финансовых решений, является *переменная-замыкатель (plug)*. Ее назначают, выбирая одну из статей баланса так, чтобы она “замыкала” модель, приводя баланс в соответствие. Для примера рассмотрим баланс нашей первой гипотетической модели.

| Активы                                      | Обязательства и акционерный капитал              |
|---------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| Наличные средства и ликвидные ценные бумаги | Краткосрочные обязательства                      |
| Оборотные средства                          | Долги                                            |
| Основные средства                           | Акционерный капитал                              |
| Себестоимость                               | Фонды (внесенный капитал)                        |
| – Накопленная амортизация                   | Накопленный доход                                |
| Остаточная стоимость                        |                                                  |
| Общая сумма активов                         | Общая сумма обязательств и акционерного капитала |

В этом балансе предполагается, что переменной-замыкателем будет выступать статья “наличные средства и ликвидные ценные бумаги”. Такое предположение придает замыкателью сразу два смысла.

1. *Технический смысл*: формальное замыкание баланса. Принимается следующее определение:

$$\boxed{\text{Наличные и ценные бумаги}} = \boxed{\text{Сумма обязательств и акционерного капитала}} - \boxed{\text{Краткосрочные обязательства}} - \boxed{\text{Остаточная стоимость основных средств}}$$

Благодаря введению такого определения активная и пассивная части баланса всегда сойдутся.

2. *Финансовый смысл*: принимая в качестве замыкателя общую сумму наличных и стоимости ценных бумаг, мы делаем предположение о характере самофинансирования фирмы. Например, в нашей следующей модели фирма не продает дополнительных акций, не выплачивает ничего по своим существующим долгам и не берет в долг дополнительно. Данное определение подразумевает, что все дополнительное финансирование (если в нем возникнет надобность) будет осуществляться фирмой за счет ее наличных средств и ликвидных ценных бумаг; это означает также, что если у фирмы появится свободная наличность, она поступит на соответствующий счет<sup>2</sup>.

### 3.2.2. Прогнозирование баланса и доходности следующего года

Для года номер 0 мы уже составили финансовую ведомость. Теперь составим ее на год вперед — для года №1.

|    | A                                                 | B      | C     | D                           | E | F |
|----|---------------------------------------------------|--------|-------|-----------------------------|---|---|
| 1  | <b>ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ ФИНАНСОВОЙ ВЕДОМОСТИ</b>     |        |       |                             |   |   |
| 2  |                                                   |        |       |                             |   |   |
| 3  | Прирост объема сбыта                              | 10%    |       |                             |   |   |
| 4  | Оборотные средства/Объем сбыта                    | 15%    |       |                             |   |   |
| 5  | Краткосрочные обязательства/Объем сбыта           | 8%     |       |                             |   |   |
| 6  | Остат. стоимость осн. средств/Объем сбыта         | 77%    |       |                             |   |   |
| 7  | Себестоимость продукции/Объем сбыта               | 50%    |       |                             |   |   |
| 8  | Норма амортизации                                 | 10%    |       |                             |   |   |
| 9  | Процентная ставка по задолженности                | 10,00% |       |                             |   |   |
| 10 | Проценты, начисляемые по наличным средствам       | 8,00%  |       |                             |   |   |
| 11 | Ставка налога                                     | 40%    |       |                             |   |   |
| 12 | Норма выплаты дивиденда                           | 40%    |       |                             |   |   |
| 13 |                                                   |        |       |                             |   |   |
| 14 | Год                                               | 0      | 1     |                             |   |   |
| 15 | <b>Ведомость прибылей и убытков</b>               |        |       |                             |   |   |
| 16 | Объем сбыта                                       | 1 000  | 1 100 | <-- =B16*(1+\$B\$3)         |   |   |
| 17 | Себестоимость продукции                           | (500)  | (550) | <-- =C16*\$B\$7             |   |   |
| 18 | Процентные выплаты по долгам                      | (32)   | (32)  | <-- =B\$9*(B37+C37)/2       |   |   |
| 19 | Проценты, начисленные по наличным средствам       | 6      | 9     | <-- =B\$10*(B28+C28)/2      |   |   |
| 20 | Амортизация                                       | (100)  | (117) | <-- =B\$8*(C31+B31)/2       |   |   |
| 21 | Прибыль до уплаты налогов                         | 374    | 410   | <-- =СУММ(C16:C20)          |   |   |
| 22 | Налоги                                            | (150)  | (164) | <-- =C21*\$B\$11            |   |   |
| 23 | Прибыль после уплаты налогов                      | 225    | 246   | <-- =C22+C21                |   |   |
| 24 | Дивиденды                                         | (90)   | (98)  | <-- =B\$12*C23              |   |   |
| 25 | Нераспределенная прибыль                          | 135    | 148   | <-- =C24+C23                |   |   |
| 26 |                                                   |        |       |                             |   |   |
| 27 | <b>Балансовая ведомость</b>                       |        |       |                             |   |   |
| 28 | Наличные средства и ликвидные ценные бумаги       | 80     | 144   | <-- =C40-C29-C33            |   |   |
| 29 | Оборотные средства                                | 150    | 165   | <-- =C16*\$B\$4             |   |   |
| 30 | Основные средства                                 |        |       |                             |   |   |
| 31 | Себестоимость                                     | 1 070  | 1 264 | <-- =C33-C32                |   |   |
| 32 | Накопленная амортизация                           | (300)  | (417) | <-- =B32-\$B\$8*(C31+B31)/2 |   |   |
| 33 | Остаточная стоимость основных средств             | 770    | 847   | <-- =C16*\$B\$6             |   |   |
| 34 | <b>Всего активов</b>                              | 1 000  | 1 156 | <-- =C33+C29+C28            |   |   |
| 35 |                                                   |        |       |                             |   |   |
| 36 | Краткосрочные обязательства                       | 80     | 88    | <-- =C16*\$B\$5             |   |   |
| 37 | Долг (заимствованные средства)                    | 320    | 320   | <-- =B37                    |   |   |
| 38 | Акционерный капитал                               | 450    | 450   | <-- =B38                    |   |   |
| 39 | Накопленная нераспределенная прибыль              | 150    | 298   | <-- =B39+C25                |   |   |
| 40 | <b>Всего обязательств и акционерного капитала</b> | 1 000  | 1 156 | <-- =СУММ(C36:C39)          |   |   |

<sup>2</sup> Статью и счет “наличные средства и ликвидные ценные бумаги” можно рассматривать как “отрицательный долг”. Мы вернемся к этому вопросу позже, когда будем заниматься оценкой фирмы с помощью гипотетической модели.



Формулы в этой таблице большей частью очевидны. (Знак доллара в них играет большую роль — он указывает, что при копировании ссылки на ячейки не должны меняться, т.е. ссылки являются абсолютными, а не относительными! Если опустить знак доллара, параметры модели будут меняться при копировании ячеек для прогноза на 2-й год и далее, порождая ошибки.) В следующем далее списке уравнений модели ее параметры выделены полужирным шрифтом.

#### Уравнения ведомости прибылей и убытков

- $\text{Объем сбыта} = \text{Начальный объем сбыта} \cdot (1 + \text{Прирост объема сбыта})^{\text{год}}$
- $\text{Себестоимость продукции} = \text{Объем сбыта} \cdot \text{Себестоимость продукции/Объем сбыта}$

Здесь предполагается, что единственные расходы, связанные со сбытом, — это себестоимость сбываемой продукции. Большинство компаний также вводят в баланс статью под названием “общие и административные расходы, издержки сбыта” (*selling, general and administrative expenses*, или *SG&A*). Изменения, которые нужно внести в баланс для введения этой статьи, очевидны (см. одно из упражнений в конце этой главы).

- $\text{Процентные выплаты по долгам} = \text{Процентная ставка долга} \cdot \text{Средний долг за год}$

Последняя формула позволяет учесть изменения в модели, связанные с выплатой долгов, а также продление кредитов по разным процентным ставкам. Обратите внимание, что в текущей версии модели долг остается постоянным, однако в других версиях, которые будут рассматриваться позже, сумма долга будет меняться со временем.

- $\text{Доход с процентов по наличным средствам и ценным бумагам} = \text{Процентная ставка дохода} \cdot \text{Средний объем средств за год}$
- $\text{Амортизация} = \text{Норма амортизации} \cdot \text{Средняя себестоимость основных средств за год}$

В последнем уравнении подразумевается, что все новые основные средства приобретены в течение года. Предполагается также, что никакие из основных средств не были ликвидированы.

- $\text{Прибыль до уплаты налогов} = \text{Объем сбыта} - \text{Себестоимость продукции} - \text{Процентные выплаты по долгам} + \text{Доход с процентов по наличным средствам и ценным бумагам} - \text{Амортизация}$
- $\text{Налоги} = \text{Ставка налога} \cdot \text{Прибыль до уплаты налогов}$
- $\text{Прибыль после уплаты налогов} = \text{Прибыль до уплаты налогов} - \text{Налоги}$
- $\text{Дивиденды} = \text{Норма выплачиваемого дивиденда} \cdot \text{Прибыль после уплаты налогов}$

Предполагается, что фирма выплачивает в качестве дивидендов фиксированный процент от прибыли. В качестве альтернативы можно было бы предположить, что фирма устанавливает фиксированную сумму дивиденда на одну акцию.

- *Нераспределенная прибыль = Прибыль после уплаты налогов – Дивиденды*

#### Уравнения бухгалтерского баланса

- *Наличные средства и ликвидные ценные бумаги = Общая сумма обязательств – Краткосрочные обязательства – Остаточная стоимость основных средств*

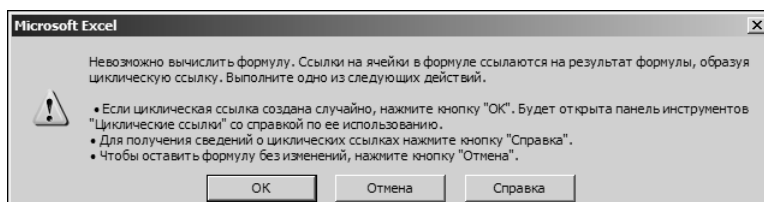
Как уже объяснялось выше, эта формула означает, что параметр “наличные средства и ликвидные ценные бумаги” является замыкателем баланса.

- *Оборотные средства = **Оборотные средства/Объем сбыта** · Объем сбыта*
- *Остаточная стоимость основных средств = **Остаточная стоимость основных средств/Объем сбыта** · Объем сбыта*
- *Накопленная амортизация = Накопленная амортизация предыдущего года + **Норма амортизации** · Средняя себестоимость основных средств за год*
- *Себестоимость основных средств = Остаточная стоимость основных средств + Накопленная амортизация*

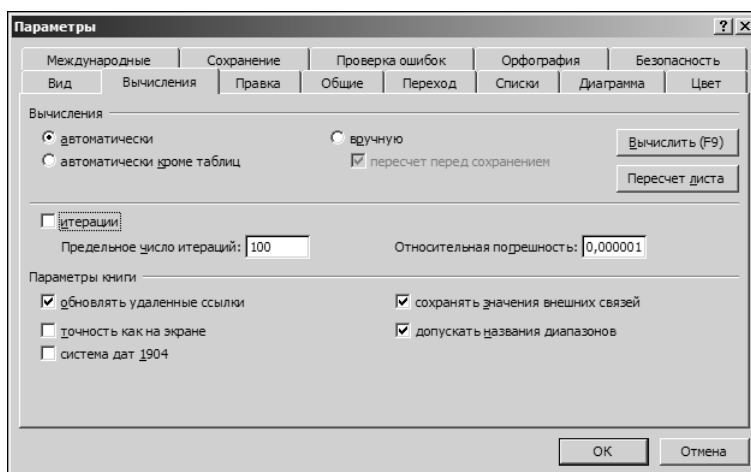
Обратите внимание, что в этой модели не делается различия между статьями “недвижимость и оборудование предприятия” (*plant property and equipment, PP&E*) и другими основными средствами — например, землей.

- *Краткосрочные обязательства = **Краткосрочные обязательства/Объем сбыта** · Объем сбыта*
- Долг считается неизменным. В модели другого типа, которая будет рассмотрена позже, долг может считаться замыкателем баланса.
- Акционерный капитал считается неизменным (фирма не выпускает новых акций).
- *Накопленная нераспределенная прибыль = Накопленная нераспределенная прибыль предыдущего года + Нераспределенная прибыль, добавленная в этом году*

В моделях доходности рассматриваемого типа в Excel всегда используются взаимозависимые ячейки. В результате наличие решения зависит от способности Excel рассчитать ячейки с циклическими ссылками. Чтобы обеспечить корректный пересчет таблицы, следует выбрать пункт меню Сервис⇒Параметры (Tools⇒Options), перейти на вкладку Вычисления (Calculation) и установить там флажок Итерации (Iteration). Если этот флажок не установлен, то при открытии таблицы с итерациями Excel выдаст следующее сообщение об ошибке:



В зависимости от того, где именно вы находитесь в Excel в момент открытия файла с циклическими ссылками, конкретный вид сообщения может отличаться. Но каким бы оно ни было, поступать нужно так: закройте окно сообщения, выберите пункт меню Сервис⇒Параметры (Tools⇒Options), перейдите на вкладку Вычисления (Calculation) и установите флажок Итерации (Iteration).



### 3.2.3. Продление модели до 2-го года и далее

Итак, модель создана, и ее можно продлить дальше в будущее, скопировав нужные столбцы.

|    | A                                                 | B            | C            | D            | E            | F            | G            |
|----|---------------------------------------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 1  | <b>ПЕРВАЯ ФИНАНСОВАЯ МОДЕЛЬ</b>                   |              |              |              |              |              |              |
| 2  |                                                   |              |              |              |              |              |              |
| 3  | Прирост объема сбыта                              | 10%          |              |              |              |              |              |
| 4  | Оборотные средства/Объем сбыта                    | 15%          |              |              |              |              |              |
| 5  | Краткосрочные обязательства/Объем сбыта           | 8%           |              |              |              |              |              |
| 6  | Остат. стоимость осн. средств/Объем сбыта         | 77%          |              |              |              |              |              |
| 7  | Себестоимость продукции/Объем сбыта               | 50%          |              |              |              |              |              |
| 8  | Норма амортизации                                 | 10%          |              |              |              |              |              |
| 9  | Процентная ставка по задолженности                | 10,00%       |              |              |              |              |              |
| 10 | Проценты, начисляемые по наличным средствам       | 8,00%        |              |              |              |              |              |
| 11 | Ставка налога                                     | 40%          |              |              |              |              |              |
| 12 | Норма выплаты дивиденда                           | 40%          |              |              |              |              |              |
| 13 |                                                   |              |              |              |              |              |              |
| 14 | <b>Год</b>                                        | <b>0</b>     | <b>1</b>     | <b>2</b>     | <b>3</b>     | <b>4</b>     | <b>5</b>     |
| 15 | <b>Ведомость прибылей и убытков</b>               |              |              |              |              |              |              |
| 16 | Объем сбыта                                       | 1 000        | 1 100        | 1 210        | 1 331        | 1 464        | 1 611        |
| 17 | Себестоимость продукции                           | (500)        | (550)        | (605)        | (666)        | (732)        | (805)        |
| 18 | Процентные выплаты по долгам                      | (32)         | (32)         | (32)         | (32)         | (32)         | (32)         |
| 19 | Проценты, начисленные по наличным средствам       | 6            | 9            | 14           | 20           | 26           | 33           |
| 20 | Амортизация                                       | (100)        | (117)        | (137)        | (161)        | (189)        | (220)        |
| 21 | Прибыль до уплаты налогов                         | 374          | 410          | 450          | 492          | 538          | 587          |
| 22 | Налоги                                            | (150)        | (164)        | (180)        | (197)        | (215)        | (235)        |
| 23 | Прибыль после уплаты налогов                      | 225          | 246          | 270          | 295          | 323          | 352          |
| 24 | Дивиденды                                         | (90)         | (98)         | (108)        | (118)        | (129)        | (141)        |
| 25 | Нераспределенная прибыль                          | 135          | 148          | 162          | 177          | 194          | 211          |
| 26 |                                                   |              |              |              |              |              |              |
| 27 | <b>Балансовая ведомость</b>                       |              |              |              |              |              |              |
| 28 | Наличные средства и ликвидные ценные бумаги       | 80           | 144          | 213          | 289          | 371          | 459          |
| 29 | Оборотные средства                                | 150          | 165          | 182          | 200          | 220          | 242          |
| 30 | Основные средства                                 |              |              |              |              |              |              |
| 31 | Себестоимость                                     | 1 070        | 1 264        | 1 486        | 1 740        | 2 031        | 2 364        |
| 32 | Накопленная амортизация                           | (300)        | (417)        | (554)        | (715)        | (904)        | (1 124)      |
| 33 | Остаточная стоимость основных средств             | 770          | 847          | 932          | 1 025        | 1 127        | 1 240        |
| 34 | <b>Всего активов</b>                              | <b>1 000</b> | <b>1 156</b> | <b>1 326</b> | <b>1 513</b> | <b>1 718</b> | <b>1 941</b> |
| 35 |                                                   |              |              |              |              |              |              |
| 36 | Краткосрочные обязательства                       | 80           | 88           | 97           | 106          | 117          | 129          |
| 37 | Долг (заимствованные средства)                    | 320          | 320          | 320          | 320          | 320          | 320          |
| 38 | Акционерный капитал                               | 450          | 450          | 450          | 450          | 450          | 450          |
| 39 | Накопленная нераспределенная прибыль              | 150          | 298          | 460          | 637          | 830          | 1 042        |
| 40 | <b>Всего обязательств и акционерного капитала</b> | <b>1 000</b> | <b>1 156</b> | <b>1 326</b> | <b>1 513</b> | <b>1 718</b> | <b>1 941</b> |

Обратите внимание, что наиболее распространенная ошибка, которую делают при переходе от двухлетней модели к той, которая показана на рисунке, — это отсутствие знака доллара в ссылках на ячейки. Если вы сделаете такую ошибку, то получите нули в тех местах, где должны быть числа.

### 3.3. Поток свободных средств (ПСС): расчет средств, производимых предприятием

Теперь у нас в руках есть модель, с помощью которой можно заняться финансовыми прогнозами. Наиболее важный расчет для цели оценки предприятия — это *поток свободных средств, ПСС* (от англ. *free cash flow, FCF*). ПСС — объем денежных поступлений от деятельности предприятия без различения источников этих средств — является наилучшей мерой объема средств, производимого

деятельностью фирмы<sup>3</sup>. Ниже приведено самое простое определение потока свободных средств.

---

*Определение потока свободных средств*

---

|                                                   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|---------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Прибыль после уплаты налогов                      | Это основная мера доходности бизнеса, но с точки зрения бухгалтерии она включает как движение денежных средств (например, проценты), так и расходы некассового характера — например, амортизацию. Прибыль после уплаты налогов еще не отражает изменения в оборотном капитале фирмы, приобретения новых основных средств, а это существенные статьи расходов                                                                                                                        |
| + Амортизация                                     | Этот некассовый расход прибавляется к прибыли после уплаты налогов                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| + Выплаты процентов после уплаты налогов (чистые) | Введение ПСС — это попытка оценить объем средств, поступающих от хозяйственной деятельности фирмы. Чтобы нейтрализовать влияние процентных выплат на прибыль фирмы, мы делаем следующее: <ul style="list-style-type: none"> <li>• прибавляем процентные выплаты по долгам после уплаты налогов (<i>после</i>, поскольку процентные выплаты подлежат налогообложению);</li> <li>• отнимаем процентные поступления от наличных средств и ценных бумаг после уплаты налогов</li> </ul> |
| – Прирост оборотных средств                       | Когда объем сбыта фирмы возрастает, ей требуется больше капиталовложений в материально-производственные запасы, счета к получению и т.д. Это приращение оборотных средств относится не к расходам на налоги (а потому игнорируется в прибыли после уплаты налогов), а к текущим расходам фирмы                                                                                                                                                                                      |
| + Прирост краткосрочных обязательств              | Прирост объема сбыта часто сопровождается перераспределением средств по статьям, связанным со сбытом (таким как счета к оплате или задолженность по налогам). Прирост объема краткосрочных обязательств — в связи с деятельностью по сбыту — увеличивает средства фирмы. Поскольку здесь имеется прямая связь со сбытом, эти средства включены в расчет ПСС                                                                                                                         |
| + Прирост себестоимости основных средств          | Прирост в стоимости основных средств (т.е. долговременных активов, используемых фирмой для производства ее продукции) связан с расходом денежных средств, а потому уменьшает ПСС                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |

---

<sup>3</sup> Подробное рассмотрение вопросов, связанных с потоками свободных средств и их использованием для оценки предприятий, можно найти в книгах Беннинги и Сарига (Benninga, Sarig, 1997) и Коуплэнда, Коллера и Мюррена (Copeland, Koller, Murrin, 1996).

А вот и соответствующий расчет для нашей фирмы:

|    | A                                            | B | C     | D     | E     | F     | G     |
|----|----------------------------------------------|---|-------|-------|-------|-------|-------|
| 43 | Год                                          | 0 | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     |
| 44 | Потоки свободных средств                     |   |       |       |       |       |       |
| 45 | Прибыль после уплаты налогов                 |   | 246   | 270   | 295   | 323   | 352   |
| 46 | Плюс амортизация                             |   | 117   | 137   | 161   | 189   | 220   |
| 47 | Минус прирост оборотных средств              |   | (15)  | (17)  | (18)  | (20)  | (22)  |
| 48 | Плюс прирост краткосрочных обязательств      |   | 8     | 9     | 10    | 11    | 12    |
| 49 | Минус прирост себестоимости основных средств |   | (194) | (222) | (254) | (291) | (333) |
| 50 | Плюс проценты на долг после уплаты налогов   |   | 19    | 19    | 19    | 19    | 19    |
| 51 | Минус % на наличные средства после налогов   |   | (5)   | (9)   | (12)  | (16)  | (20)  |
| 52 | Потоки свободных средств                     |   | 176   | 188   | 201   | 214   | 228   |

### 3.3.1. Согласование балансов средств

Расчет потока свободных средств отличается от “сводного баланса движения денежных средств”, входящего в состав любого бухгалтерского отчета (примером какового является приведенный далее балансовый отчет компании Abbot Labs). Цель бухгалтерского отчета о движении денежных средств состоит в том, чтобы объяснить увеличение объема средств на балансе фирмы через денежные потоки в ходе основной, инвестиционной и финансовой деятельности фирмы.

#### Сводный баланс движения денежных средств — Abbot Labs

|                                                                                                                                                 | Год, окончившийся 31 декабря |                  |                  |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|------------------|------------------|
| (Суммы указаны в тыс. долл.)                                                                                                                    | 1998                         | 1997             | 1996             |
| <b>Основная деятельность</b>                                                                                                                    |                              |                  |                  |
| Чистый доход                                                                                                                                    | 2 333 231                    | 2 094 462        | 1 882 033        |
| Поправка для согласования чистого дохода с кассовыми поступлениями от основной деятельности — амортизация материальных и нематериальных активов | 784 243                      | 727 754          | 686 085          |
| Чистый курсовой доход или убыток                                                                                                                | (14 176)                     | 31 005           | (3 419)          |
| Чистый доход или убыток от инвестиций и финансовых операций                                                                                     | 90 798                       | 113 999          | 57 224           |
| Счет к получению от торговых операций                                                                                                           | (143 470)                    | (222 427)        | (163 621)        |
| Материально-производственные запасы                                                                                                             | (111 649)                    | (98 964)         | (125 726)        |
| Предоплаченные расходы и другие активы                                                                                                          | (239 533)                    | (491 769)        | (303 766)        |
| Счет к оплате за торговые операции, другие обязательства                                                                                        | 178 979                      | 485 407          | 342 407          |
| Налог на прибыль к оплате                                                                                                                       | (145 522)                    | (10 700)         | 10 845           |
| <b>Сальдо кассовых поступлений от основной деятельности</b>                                                                                     | <b>2 732 901</b>             | <b>2 628 767</b> | <b>2 382 062</b> |

**Сводный баланс движения денежных средств — Abbot Labs (окончание)**

| (Суммы указаны в тыс. долл.)                                                                                                  | <i>Год, окончившийся 31 декабря</i> |                    |                  |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|--------------------|------------------|
|                                                                                                                               | 1998                                | 1997               | 1996             |
| <b>Инвестиционная деятельность</b>                                                                                            |                                     |                    |                  |
| Приобретение International Murex в 1998 г., предприятий Sanofi в 1997 г., MediSense в 1996 г., чистая приобретенная стоимость | (249 177)                           | (200 475)          | (830 559)        |
| Приобретение собственности, оборудования и предприятий                                                                        | (990 619)                           | (1 007 296)        | (949 028)        |
| Приобретение ценных бумаг                                                                                                     | (278 002)                           | (25 115)           | (312 535)        |
| Выручка от продажи ценных бумаг                                                                                               | 78 898                              | 43 424             | 117 783          |
| Прочее                                                                                                                        | 18 034                              | 8 209              | 19 098           |
| <b>Сальдо средств, вовлеченных в инвестиционную деятельность</b>                                                              | <b>(1420866)</b>                    | <b>(1197671)</b>   | <b>(1955241)</b> |
| <b>Финансовая деятельность</b>                                                                                                |                                     |                    |                  |
| Выручка нетто от уплат по коммерческим векселям                                                                               | 42 000                              | 402 000            | 317 000          |
| Выручка от выпуска в оборот бумаг долгосрочного долга                                                                         | 400 000                             | —                  | 500 000          |
| Другие операции по заимствованию средств                                                                                      | (59 499)                            | 16 085             | 18 037           |
| Приобретение обыкновенных акций                                                                                               | (875 407)                           | (1 054 512)        | (808 816)        |
| Выручка от исполнения фондовых опционов                                                                                       | 150 881                             | 137 482            | 109 638          |
| Выплата дивидендов                                                                                                            | (891 661)                           | (809 554)          | (728 147)        |
| <b>Сальдо средств, вовлеченных в финансовую деятельность</b>                                                                  | <b>(1 233 686)</b>                  | <b>(1 308 499)</b> | <b>(592 288)</b> |
| Влияние колебаний курса валют на наличные средства и их эквиваленты                                                           | (143)                               | (2 782)            | (5 521)          |
| <b>Чистый приток (убыль) наличных средств и их эквивалентов</b>                                                               | <b>78 206</b>                       | <b>119 815</b>     | <b>(170 988)</b> |
| <b>Наличные средства и их эквиваленты, начало года</b>                                                                        | <b>230 024</b>                      | <b>110 209</b>     | <b>281 197</b>   |
| <b>Наличные средства и их эквиваленты, конец года</b>                                                                         | <b>308 230</b>                      | <b>230 024</b>     | <b>110 209</b>   |
| <b>Дополнительная информация о движении средств</b>                                                                           |                                     |                    |                  |
| Уплаченный налог на прибыль                                                                                                   | 1 060 479                           | 922 242            | 801 107          |
| Выплаченные проценты                                                                                                          | 153 875                             | 132 645            | 89 509           |

В следующем примере наличные средства и ликвидные ценные бумаги включены в анализ так, как если бы они составляли единый счет; затем приращение этого счета выводится из сводного баланса движения денежных средств.

|    | A                                              | B            | C     | D     | E     | F     | G     |
|----|------------------------------------------------|--------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 55 | СОГЛАСОВАНИЕ БАЛАНСОВ СРЕДСТВ                  |              |       |       |       |       |       |
| 56 | Основная деятельность                          |              |       |       |       |       |       |
| 57 | Прибыль после уплаты налогов                   |              | 246   | 270   | 295   | 323   | 352   |
| 58 | Плюс амортизация                               |              | 117   | 137   | 161   | 189   | 220   |
| 59 | Поправки в оборотных средствах нетто:          |              |       |       |       |       |       |
| 60 | Минус прирост оборотных средств                |              | (15)  | (17)  | (18)  | (20)  | (22)  |
| 61 | Плюс прирост краткосрочных обязательств        |              | 8     | 9     | 10    | 11    | 12    |
| 62 | Сальдо средств от основной деятельности        |              | 356   | 400   | 448   | 502   | 562   |
| 63 |                                                |              |       |       |       |       |       |
| 64 | Инвестиционная деятельность                    |              |       |       |       |       |       |
| 65 | Приобретение основных средств-капитал. затраты |              | (194) | (222) | (254) | (291) | (333) |
| 66 | Приобретение инвестиционных ценных бумаг       |              | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| 67 | Выручка от продажи ценных бумаг                |              | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| 68 | Сальдо средств от инвестиционной деятельности  |              | (194) | (222) | (254) | (291) | (333) |
| 69 |                                                |              |       |       |       |       |       |
| 70 | Финансовая деятельность                        |              |       |       |       |       |       |
| 71 | Чистые поступления от займов                   |              | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| 72 | Сальдо выручки от выпуска акций и их выкупа    |              | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| 73 | Выплаченные дивиденды                          |              | (98)  | (108) | (118) | (129) | (141) |
| 74 | Сальдо средств от финансовой деятельности      |              | -98   | -108  | -118  | -129  | -141  |
| 75 |                                                |              |       |       |       |       |       |
| 76 | Чистый прирост наличных средств и эквивалентов | =C74+C68+C62 | 64    | 70    | 76    | 82    | 88    |
| 77 | Контроль: изменение в сумме наличных средств   | =C28-B28     | 64    | 70    | 76    | 82    | 88    |
| 78 |                                                |              |       |       |       |       |       |
| 79 |                                                |              |       |       |       |       |       |

В строке 77 выполняется контроль: изменения на едином кассовом счету, введенные из сводного баланса, должны совпадать с изменениями в финансовой модели (где объем наличных средств служит замыкателем).

### 3.4. Использование ПСС для оценки фирмы и ее капитала

Цена предприятия (*enterprise value*) определяется как сумма задолженности фирмы, стоимости ее конвертируемых ценных бумаг и акционерного капитала. В финансовой теории цена предприятия равна приведенной стоимости ожидаемых в будущем потоков денежных средств фирмы.

Для определения цены предприятия можно воспользоваться расчетной моделью ПСС и стоимостью капитала. Предположим, мы определили, что средневзвешенная стоимость капитала (СВСК) фирмы составляет 20% (напомним, что расчет СВСК рассматривался в главе 2). Тогда цена предприятия равна дисконтированной стоимости прогнозируемых ПСС фирмы плюс ее *конечная стоимость* (*terminal value*):

$$\begin{aligned} \text{Цена предприятия} = & \frac{\text{ПСС}_1}{(1 + \text{СВСК})^1} + \frac{\text{ПСС}_2}{(1 + \text{СВСК})^2} + \dots + \\ & + \frac{\text{ПСС}_5}{(1 + \text{СВСК})^5} + \frac{\text{Конечная стоимость через 5 лет}}{(1 + \text{СВСК})^5}. \end{aligned}$$



В этой формуле конечная стоимость через 5 лет заменяет приведенную стоимость всех ПСС, начиная с 6-го года и далее<sup>4</sup>.

Вот пример, в котором используются наши построения:

|    | A                                        | B     | C                     | D   | E   | F   | G     | H                        | I | J |
|----|------------------------------------------|-------|-----------------------|-----|-----|-----|-------|--------------------------|---|---|
| 55 | <b>Оценка фирмы</b>                      |       |                       |     |     |     |       |                          |   |   |
| 56 | Средневзвешенная стоимость капитала      | 20%   |                       |     |     |     |       |                          |   |   |
| 57 |                                          |       |                       |     |     |     |       |                          |   |   |
| 58 | Год                                      | 0     | 1                     | 2   | 3   | 4   | 5     |                          |   |   |
| 59 | ПСС                                      |       | 176                   | 188 | 201 | 214 | 228   |                          |   |   |
| 60 | Конечная стоимость                       |       |                       |     |     |     | 2 511 | <-- =G59*(1+B3)/(B56-B3) |   |   |
| 61 | Всего                                    |       | 176                   | 188 | 201 | 214 | 2 740 |                          |   |   |
| 62 |                                          |       |                       |     |     |     |       |                          |   |   |
| 63 | ЧПС строки 61                            | 1 598 | <-- =ЧПС(B56,C61:G61) |     |     |     |       |                          |   |   |
| 64 | Плюс начальные (год 0) наличные средства | 80    |                       |     |     |     |       |                          |   |   |
| 65 | Цена предприятия                         | 1 678 |                       |     |     |     |       |                          |   |   |
| 66 | Минус текущая стоимость долга фирмы      | -320  |                       |     |     |     |       |                          |   |   |
| 67 | Стоимость акционерного капитала          | 1 358 |                       |     |     |     |       |                          |   |   |

### 3.5. Некоторые замечания о процедуре оценивания

#### 3.5.1. Конечная стоимость

При определении конечной стоимости был использован вариант модели Гордона, описанный в главе 2. Мы предположили, что — на интервале в 5 ближайших прогнозируемых лет — потоки средств будут возрастать на величину, равную темпу роста сбыта, а именно 10%. Это предположение дает следующую конечную стоимость:

$$\begin{aligned}
 \text{Конечная стоимость в конце 5-го года} &= \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\text{ПСС}_{t+5}}{(1 + \text{СВСК})^t} = \\
 &= \sum_{t=1}^{\infty} \frac{\text{ПСС}_5 (1 + \text{прирост})^t}{(1 + \text{СВСК})^t} = \frac{\text{ПСС}_5 (1 + \text{прирост})}{\text{СВСК} - \text{прирост}}.
 \end{aligned}$$

Последнее уравнение выведено аналогично дивидендной оценке курса акций (по модели Гордона), рассмотренной в главе 2.

Существуют и другие способы расчета конечной стоимости. Все нижеперечисленные являются стандартными вариантами, которые можно реализовать в рамках нашей модели (см. упражнения в конце главы):

- *Конечная стоимость* = *Нетто-сумма долга на 5-м году* +  
+ *Собственный капитал*

В этом уравнении подразумевается, что сумма нетто, фигурирующая в балансе, соответствует курсовой рыночной стоимости.

<sup>4</sup> Мы не занимаемся фактическим проецированием в будущее этих потоков денежных средств. Вместо этого, как сейчас будет показано, конечная стоимость определяется по ПСС 5-го года.

- Конечная стоимость = (Курсовой/балансовый коэффициент цены предприятия) × (Нетто-сумма долга на 5-м году + Собственный капитал)
- Конечная стоимость = (Коэффициент “цена - доход”) · (Прибыль на 5-м году) + Нетто-сумма долга на 5-м году
- Конечная стоимость = Коэффициент ДБВНА · (Ожидаемый ДБВНА на 5-м году)

Здесь ДБВНА — сокращение от “доход без вычета налога и амортизации” (англ. *earnings before interest, taxes, depreciation, and amortization* — EBITDA).

### 3.5.1.1. Трактовка статьи наличных средств и ликвидных ценных бумаг при оценивании предприятия

Обратите внимание, что мы прибавили начальную сумму наличных средств к приведенной стоимости будущих ПСС, чтобы получить цену предприятия. В этой процедуре сделаны следующие допущения:

- Балансы наличных средств и ликвидных ценных бумаг в 0-м году не требуются для вычисления ПСС в последующие годы.
- Балансы наличных средств и ликвидных ценных бумаг в 0-м году представляют собой “излишки”, которые можно списать или выплатить держателям акций, не повлияв этим на будущие экономические показатели фирмы.

Иногда инвестиционные банкиры и фондовые аналитики делают полностью эквивалентное допущение: считают начальные балансы наличных средств *отрицательным долгом*. Если сделать такое предположение, то стоимость акционерного капитала фирмы следовало бы оценить следующим образом:

|    | A                                               | B     | C            | D |
|----|-------------------------------------------------|-------|--------------|---|
| 69 | <b>Наличные средства как отрицательный долг</b> |       |              |   |
| 70 | ЧПС строки 61 = цена предприятия                | 1 598 |              |   |
| 71 | Чистый долг на 0-м году                         | -240  | <-- =B37+B28 |   |
| 72 | Стоимость акционерного капитала                 | 1 358 |              |   |

### 3.5.2. Дисконтирование по полугодиям

Хотя в формуле ЧПС подразумевается, что все потоки денежных средств имеют место в конце года, более логично было бы предположить, что они практически равномерно распределены по всему году. Поэтому для целей дисконтирования следует принять, что денежные потоки в среднем имеют место в середине года. Отсюда выводится более логичная оценка цены предприятия:

$$\begin{aligned} \text{Цена предприятия} = & \frac{\text{ПСС}_1}{(1 + \text{СВСК})^{0,5}} + \frac{\text{ПСС}_2}{(1 + \text{СВСК})^{1,5}} + \dots + \\ & + \frac{\text{ПСС}_5}{(1 + \text{СВСК})^{4,5}} + \frac{\text{Конечная стоимость на 5-м году}}{(1 + \text{СВСК})^{4,5}} = \end{aligned}$$

$$= \left[ \frac{\text{ПСС}_1}{(1 + \text{СВСК})^1} + \frac{\text{ПСС}_1}{(1 + \text{СВСК})^2} + \dots + \frac{\text{ПСС}_5}{(1 + \text{СВСК})^5} + \frac{\text{Конечная стоимость на 5-м году}}{(1 + \text{СВСК})^5} \right] \cdot (1 + \text{СВСК})^{0,5}.$$

Включение дисконтирования за полгода в наши расчеты цены дает следующую модель:

|    | A                                                    | B                                       | C   | D   | E   | F   | G     | H                        | I | J |
|----|------------------------------------------------------|-----------------------------------------|-----|-----|-----|-----|-------|--------------------------|---|---|
| 75 | <b>Оценка фирмы с дисконтированием по полугодиям</b> |                                         |     |     |     |     |       |                          |   |   |
| 76 | Средневзвешенная стоимость капитала                  | 20%                                     |     |     |     |     |       |                          |   |   |
| 77 |                                                      |                                         |     |     |     |     |       |                          |   |   |
| 78 | Год                                                  | 0                                       | 1   | 2   | 3   | 4   | 5     |                          |   |   |
| 79 | ПСС                                                  |                                         | 176 | 188 | 201 | 214 | 228   |                          |   |   |
| 80 | Конечная стоимость                                   |                                         |     |     |     |     | 2 511 | <-- =G72*(1+B3)/(B69-B3) |   |   |
| 81 | Всего                                                |                                         | 176 | 188 | 201 | 214 | 2 740 |                          |   |   |
| 82 |                                                      |                                         |     |     |     |     |       |                          |   |   |
| 83 | ЧПС строки 81                                        | 1 750 <-- =ЧПС(B76,C81:G81)*(1+B76)^0.5 |     |     |     |     |       |                          |   |   |
| 84 | Плюс начальные (год 0) наличные средства             | 80                                      |     |     |     |     |       |                          |   |   |
| 85 | Цена предприятия                                     | 1 830                                   |     |     |     |     |       |                          |   |   |
| 86 | Минус текущая стоимость долга фирмы                  | -320                                    |     |     |     |     |       |                          |   |   |
| 87 | Стоимость акционерного капитала                      | 1 510                                   |     |     |     |     |       |                          |   |   |

### 3.6. Анализ чувствительности

Как и во всякой модели, созданной в Excel, в нашей оценке можно выполнять самый разнообразный анализ чувствительности. Возьмем последний случай за основу и зададим для примера такой вопрос: как повлияет темп прироста сбыта на стоимость акционерного капитала фирмы?



В ячейках B91:C100 содержится таблица данных (если вы не знаете, как создать такие таблицы, обратитесь к главе 26). Как и следовало ожидать, чем выше темп прироста сбыта, тем выше стоимость акционерного капитала фирмы.

Еще один вариант — это рассчитать влияние на стоимость капитала как темпа прироста сбыта, так и СВСК. Здесь, однако, нужно проявить осторожность. Рассмотрим выражение конечной стоимости:

$$\text{Конечная стоимость} = \frac{\text{ПСС}_5 \cdot (1 + \text{прирост})}{\text{СВСК} - \text{прирост}}$$

Расчет по нему имеет смысл только тогда, когда СВСК выше темпа прироста<sup>5</sup>. Для преодоления этой проблемы следует определить ячейку В107 в таблице данных следующим образом (таблица данных сама выполняет анализ чувствительности):

|     | A                    | B                        | C        | D        | E        | F        | G        | H        | I        | J        | K      |
|-----|----------------------|--------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|--------|
| 104 |                      |                          |          |          |          |          |          |          |          |          |        |
| 105 |                      | =ЕСЛИ(В76<=В3,"нбф",В87) |          |          |          |          |          |          |          |          |        |
| 106 |                      |                          | СВСК     |          |          |          |          |          |          |          |        |
| 107 |                      | 1 510,41                 | 10%      | 12%      | 14%      | 16%      | 18%      | 20%      | 22%      | 24%      | 26%    |
| 108 |                      | 0%                       | 1 924,40 | 1 590,09 | 1 350,72 | 1 170,74 | 1 030,36 | 917,73   | 825,31   | 748,05   | 682,47 |
| 109 | темпа прироста сбыта | 2%                       | 2 333,27 | 1 848,81 | 1 525,20 | 1 293,54 | 1 119,39 | 983,59   | 874,66   | 785,29   | 710,60 |
| 110 |                      | 4%                       | 3 014,72 | 2 236,89 | 1 769,46 | 1 457,28 | 1 233,85 | 1 065,90 | 934,97   | 829,97   | 743,84 |
| 111 |                      | 6%                       | 4 377,63 | 2 883,69 | 2 135,86 | 1 686,52 | 1 386,46 | 1 171,74 | 1 010,37 | 884,58   | 783,72 |
| 112 |                      | 8%                       | 8 466,36 | 4 177,29 | 2 746,52 | 2 030,37 | 1 600,12 | 1 312,85 | 1 107,30 | 952,85   | 832,48 |
| 113 |                      | 10% нбф                  | 8 058,09 | 3 967,84 | 2 603,47 | 1 920,62 | 1 510,41 | 1 236,55 | 1 040,62 | 893,42   |        |
| 114 |                      | 12% нбф                  | нбф      | 7 631,79 | 3 749,65 | 2 454,77 | 1 806,75 | 1 417,49 | 1 157,65 | 971,77   |        |
| 115 |                      | 14% нбф                  | нбф      | нбф      | 7 188,21 | 3 523,08 | 2 300,64 | 1 688,91 | 1 321,49 | 1 076,24 |        |
| 116 |                      | 16% нбф                  | нбф      | нбф      | нбф      | 6 728,01 | 3 288,44 | 2 141,28 | 1 567,25 | 1 222,50 |        |

### 3.7. Использование долга в качестве замыкателя

В моделях, рассматривавшихся до сих пор, замыкателем служила статья наличных средств и ликвидных ценных бумаг, а долг представлял собой константу. Однако в некоторых оценках параметров моделей из-за этого можно получить *отрицательную величину* наличных средств. Рассмотрим следующий пример, в котором модель все та же, но некоторые значения параметров изменены (о чем указано в самой таблице).

<sup>5</sup> Если темп прироста выше СВСК, то конечная стоимость равна  $\sum_{t=1}^{\infty} \frac{\text{ПСС}_5 \cdot (1 + \text{прирост})^t}{(1 + \text{СВСК})^t}$ . Эта проблема уже обсуждалась в главе 2 в связи с дивидендной моделью Гордона.

|    | A                                                 | B            | C                  | D            | E            | F            | G            |
|----|---------------------------------------------------|--------------|--------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 3  | Прирост объема сбыта                              | 20%          | <-- Увеличен с 10% |              |              |              |              |
| 4  | Оборотные средства/Объем сбыта                    | 20%          | <-- Увеличен с 15% |              |              |              |              |
| 5  | Краткосрочные обязательства/Объем сбыта           | 8%           |                    |              |              |              |              |
| 6  | Остат. стоимость осн. средств/Объем сбыта         | 80%          | <-- Увеличен с 77% |              |              |              |              |
| 7  | Себестоимость продукции/Объем сбыта               | 50%          |                    |              |              |              |              |
| 8  | Норма амортизации                                 | 10%          |                    |              |              |              |              |
| 9  | Процентная ставка по задолженности                | 10,00%       |                    |              |              |              |              |
| 10 | Проценты, начисляемые по наличным средствам       | 8,00%        |                    |              |              |              |              |
| 11 | Ставка налога                                     | 40%          |                    |              |              |              |              |
| 12 | Норма выплаты дивиденда                           | 50%          | <-- Увеличен с 40% |              |              |              |              |
| 13 |                                                   |              |                    |              |              |              |              |
| 14 | Год                                               | 0            | 1                  | 2            | 3            | 4            | 5            |
| 15 | <b>Ведомость прибылей и убытков</b>               |              |                    |              |              |              |              |
| 16 | Объем сбыта                                       | 1 000        | 1 200              | 1 440        | 1 728        | 2 074        | 2 488        |
| 17 | Себестоимость продукции                           | (500)        | (600)              | (720)        | (864)        | (1 037)      | (1 244)      |
| 18 | Процентные выплаты по долгам                      | (40)         | (40)               | (40)         | (40)         | (40)         | (40)         |
| 19 | Проценты, начисленные по наличным средствам       | 6            | 4                  | (0)          | (6)          | (13)         | (21)         |
| 20 | Амортизация                                       | (100)        | (124)              | (156)        | (194)        | (242)        | (299)        |
| 21 | Прибыль до уплаты налогов                         | 366          | 440                | 524          | 624          | 742          | 884          |
| 22 | Налоги                                            | (147)        | (176)              | (210)        | (249)        | (297)        | (354)        |
| 23 | Прибыль после уплаты налогов                      | 220          | 264                | 314          | 374          | 445          | 530          |
| 24 | Дивиденды                                         | (110)        | (132)              | (157)        | (187)        | (223)        | (265)        |
| 25 | Нераспределенная прибыль                          | 110          | 132                | 157          | 187          | 223          | 265          |
| 26 |                                                   |              |                    |              |              |              |              |
| 27 | <b>Балансовая ведомость</b>                       |              |                    |              |              |              |              |
| 28 | Наличные средства и ликвидные ценные бумаги       | 80           | 28                 | (36)         | (113)        | (209)        | (325)        |
| 29 | Оборотные средства                                | 200          | 240                | 288          | 346          | 415          | 498          |
| 30 | Основные средства                                 |              |                    |              |              |              |              |
| 31 | Себестоимость основных средств                    | 1 100        | 1 384              | 1 732        | 2 157        | 2 675        | 3 306        |
| 32 | Накопленная амортизация                           | (300)        | (424)              | (580)        | (774)        | (1 016)      | (1 315)      |
| 33 | Остаточная стоимость основных средств             | 800          | 960                | 1 152        | 1 382        | 1 659        | 1 991        |
| 34 | <b>Всего активов</b>                              | <b>1 080</b> | <b>1 228</b>       | <b>1 404</b> | <b>1 615</b> | <b>1 865</b> | <b>2 163</b> |
| 35 |                                                   |              |                    |              |              |              |              |
| 36 | Краткосрочные обязательства                       | 80           | 96                 | 115          | 138          | 166          | 199          |
| 37 | Долг (заимствованные средства)                    | 400          | 400                | 400          | 400          | 400          | 400          |
| 38 | Акционерный капитал                               | 450          | 450                | 450          | 450          | 450          | 450          |
| 39 | Накопленная нераспределенная прибыль              | 150          | 282                | 439          | 626          | 849          | 1 114        |
| 40 | <b>Всего обязательств и акционерного капитала</b> | <b>1 080</b> | <b>1 228</b>       | <b>1 404</b> | <b>1 615</b> | <b>1 865</b> | <b>2 163</b> |

Вследствие этих изменений статья баланса “наличные средства и ликвидные ценные бумаги” (строка 28) становится отрицательной уже ко 2-му году, а этот результат, очевидно, не имеет логического смысла. Однако экономический смысл этих отрицательных чисел совершенно ясен: при увеличении темпа прироста сбыта, возрастании потребностей в оборотных фондах и основных средствах, а также повышении доли выплаты дивидендов из прибыли фирма нуждается в большем объеме финансирования<sup>6</sup>.

Итак, нам требуется модель, в которой бы учитывалось следующее:

- сумма по статье наличных средств и ликвидных ценных бумаг должна быть всегда неотрицательной;
- если фирме требуется дополнительное финансирование, она *берет средства в долг*.

<sup>6</sup> Если внимательно изучить модель в представленном выше виде, можно заметить имеющееся в ней неявное предположение о том, что дополнительное финансирование производится за счет наличных средств. Если считать эти средства неким расчетным счетом с процентами, то в модели подразумевается, что фирма покрывает перерасход по этому счету с той же процентной ставкой, которая выплачивается по самому счету.

Ниже представлена именно такая модель.

|    | A                                                     | B      | C                   | D     | E     | F       | G       | H                                  | I | J | K |
|----|-------------------------------------------------------|--------|---------------------|-------|-------|---------|---------|------------------------------------|---|---|---|
| 1  | <b>МОДЕЛЬ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ НАЛИЧНЫМИ СРЕДСТВАМИ</b> |        |                     |       |       |         |         |                                    |   |   |   |
| 2  |                                                       |        |                     |       |       |         |         |                                    |   |   |   |
| 3  | Прирост объема сбыта                                  | 20%    | <-- Увеличен с 10%  |       |       |         |         |                                    |   |   |   |
| 4  | Оборотные средства/Объем сбыта                        | 20%    | <-- Увеличен с 15%  |       |       |         |         |                                    |   |   |   |
| 5  | Краткосрочные обязательства/Объем сбыта               | 8%     |                     |       |       |         |         |                                    |   |   |   |
| 6  | Остат. стоимость осн. средств/Объем сбыта             | 80%    | <-- Увеличен с 77%  |       |       |         |         |                                    |   |   |   |
| 7  | Себестоимость продукции/Объем сбыта                   | 50%    |                     |       |       |         |         |                                    |   |   |   |
| 8  | Норма амортизации                                     | 10%    |                     |       |       |         |         |                                    |   |   |   |
| 9  | Процентная ставка по задолженности                    | 10,00% |                     |       |       |         |         |                                    |   |   |   |
| 10 | Проценты, начисляемые по наличным средствам           | 8,00%  |                     |       |       |         |         |                                    |   |   |   |
| 11 | Ставка налога                                         | 40%    |                     |       |       |         |         |                                    |   |   |   |
| 12 | Норма выплаты дивиденда                               | 50%    | <-- Увеличена с 40% |       |       |         |         |                                    |   |   |   |
| 13 |                                                       |        |                     |       |       |         |         |                                    |   |   |   |
| 14 | Год                                                   | 0      | 1                   | 2     | 3     | 4       | 5       |                                    |   |   |   |
| 15 | <b>Ведомость прибылей и убытков</b>                   |        |                     |       |       |         |         |                                    |   |   |   |
| 16 | Объем сбыта                                           | 1 000  | 1 200               | 1 440 | 1 728 | 2 074   | 2 488   |                                    |   |   |   |
| 17 | Себестоимость продукции                               | (500)  | (600)               | (720) | (864) | (1 037) | (1 244) |                                    |   |   |   |
| 18 | Процентные выплаты по долгам                          | (40)   | (40)                | (42)  | (47)  | (56)    | (67)    |                                    |   |   |   |
| 19 | Проценты, начисленные по наличным средствам           | 6      | 4                   | 1     | -     | -       | -       |                                    |   |   |   |
| 20 | Амортизация                                           | (100)  | (124)               | (156) | (194) | (242)   | (299)   |                                    |   |   |   |
| 21 | Прибыль до уплаты налогов                             | 366    | 440                 | 524   | 622   | 739     | 878     |                                    |   |   |   |
| 22 | Налоги                                                | (147)  | (176)               | (209) | (249) | (296)   | (351)   |                                    |   |   |   |
| 23 | Прибыль после уплаты налогов                          | 220    | 264                 | 314   | 373   | 443     | 527     |                                    |   |   |   |
| 24 | Дивиденды                                             | (110)  | (132)               | (157) | (187) | (222)   | (263)   |                                    |   |   |   |
| 25 | Нераспределенная прибыль                              | 110    | 132                 | 157   | 187   | 222     | 263     |                                    |   |   |   |
| 26 |                                                       |        |                     |       |       |         |         |                                    |   |   |   |
| 27 | <b>Балансовая ведомость</b>                           |        |                     |       |       |         |         |                                    |   |   |   |
| 28 | Наличные средства и ликвидные ценные бумаги           | 80     | 28                  | -     | -     | -       | -       | <-- =G40-G29-G33                   |   |   |   |
| 29 | Оборотные средства                                    | 200    | 240                 | 288   | 346   | 415     | 498     |                                    |   |   |   |
| 30 | Основные средства                                     |        |                     |       |       |         |         |                                    |   |   |   |
| 31 | Себестоимость основных средств                        | 1 100  | 1 384               | 1 732 | 2 157 | 2 675   | 3 306   |                                    |   |   |   |
| 32 | Накопленная амортизация                               | (300)  | (424)               | (580) | (774) | (1 016) | (1 315) |                                    |   |   |   |
| 33 | Остаточная стоимость основных средств                 | 800    | 960                 | 1 152 | 1 382 | 1 659   | 1 991   |                                    |   |   |   |
| 34 | <b>Всего активов</b>                                  | 1 080  | 1 228               | 1 440 | 1 728 | 2 074   | 2 488   |                                    |   |   |   |
| 35 |                                                       |        |                     |       |       |         |         |                                    |   |   |   |
| 36 | Краткосрочные обязательства                           | 80     | 96                  | 115   | 138   | 166     | 199     |                                    |   |   |   |
| 37 | Долг (заемствованные средства)                        | 400    | 400                 | 436   | 514   | 610     | 728     | <-- =МАКC(G29+G33-G36-G38-G39,F37) |   |   |   |
| 38 | Акционерный капитал                                   | 450    | 450                 | 450   | 450   | 450     | 450     |                                    |   |   |   |
| 39 | Накопленная нераспределенная прибыль                  | 150    | 282                 | 439   | 626   | 847     | 1 111   |                                    |   |   |   |
| 40 | <b>Всего обязательств и акционерного капитала</b>     | 1 080  | 1 228               | 1 440 | 1 728 | 2 074   | 2 488   |                                    |   |   |   |

Уравнения для наличных средств (строка 28) и долга (строка 37) приведены в таблице на 5-й год. В терминах бухгалтерии они означают следующее.

- Наличные средства и ликвидные ценные бумаги остаются параметром-замыкателем модели.
- Пусть долг в балансовой ведомости удовлетворяет следующему контрольному неравенству:

$$\begin{array}{l}
 \boxed{\text{Оборотные средства}} + \boxed{\text{Остаточная стоимость основных средств}} > \boxed{\text{Краткосрочные обязательства}} + \\
 + \boxed{\text{Прошлогодний долг}} + \boxed{\text{Акционерный капитал}} + \boxed{\text{Накопленная нераспределенная прибыль}}
 \end{array}$$

В этом случае, даже если наличные средства равны 0, необходимо увеличить баланс долга, чтобы профинансировать производственную деятельность фирмы.

Пусть долг удовлетворяет следующему неравенству:

$$\begin{array}{l}
 \boxed{\text{Оборотные средства}} + \boxed{\text{Остаточная стоимость основных средств}} < \boxed{\text{Краткосрочные обязательства}} + \\
 + \boxed{\text{Прошлогодний долг}} + \boxed{\text{Акционерный капитал}} + \boxed{\text{Накопленная нераспределенная прибыль}}
 \end{array}$$

В этом случае увеличивать долг нет надобности, и фактически у фирмы есть положительные наличные средства, служащие балансирующим параметром. Все это учитывается автоматически благодаря тому, что мы сделали наличные средства переменной-замыкателем.

- В терминах программирования для Excel эта формула выглядит так (для 5-го года; однако в каждом из предыдущих лет используется выражение того же типа):  $\text{МАКС}(G29+G33-G36-G38-G39, F37)$ .

Как показано в упражнениях к этой главе, данная модель может легко учесть ситуацию с минимальным балансом наличных средств.

### 3.8. Использование планируемого коэффициента “долг/акционерный капитал”

Очередное изменение, которое можно внести в модель, также связано с выбором параметра-замыкателя. Предположим, фирма планирует добиться определенного отношения заемных средств (долга) к собственным (акционерному капиталу): в течение каждого из следующих пяти лет долг и собственный капитал в балансовой ведомости должны соотноситься между собой с заданным коэффициентом. Эта ситуация демонстрируется в следующем примере:

|    | A                                                           | B        | C        | D        | E        | F        | G        | H | I | J |
|----|-------------------------------------------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|---|---|---|
| 1  | <b>ПЛАНИРУЕМЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ “ДОЛГ / АКЦИОНЕРНЫЙ КАПИТАЛ”</b> |          |          |          |          |          |          |   |   |   |
| 2  |                                                             |          |          |          |          |          |          |   |   |   |
| 3  | Прирост объема сбыта                                        | 10%      |          |          |          |          |          |   |   |   |
| 4  | Оборотные средства/Объем сбыта                              | 15%      |          |          |          |          |          |   |   |   |
| 5  | Краткосрочные обязательства/Объем сбыта                     | 8%       |          |          |          |          |          |   |   |   |
| 6  | Остат.стоимость осн.средств/Объем сбыта                     | 77%      |          |          |          |          |          |   |   |   |
| 7  | Себестоимость продукции/Объем сбыта                         | 50%      |          |          |          |          |          |   |   |   |
| 8  | Норма амортизации                                           | 10%      |          |          |          |          |          |   |   |   |
| 9  | Процентная ставка по задолженности                          | 10,00%   |          |          |          |          |          |   |   |   |
| 10 | Проценты, начисляемые по наличным средствам                 | 8,00%    |          |          |          |          |          |   |   |   |
| 11 | Ставка налога                                               | 40%      |          |          |          |          |          |   |   |   |
| 12 | Норма выплаты дивиденда                                     | 60%      |          |          |          |          |          |   |   |   |
| 13 |                                                             |          |          |          |          |          |          |   |   |   |
| 14 | <b>Год</b>                                                  | <b>0</b> | <b>1</b> | <b>2</b> | <b>3</b> | <b>4</b> | <b>5</b> |   |   |   |
| 15 | <b>Ведомость прибылей и убытков</b>                         |          |          |          |          |          |          |   |   |   |
| 16 | Объем сбыта                                                 | 1 000    | 1 100    | 1 210    | 1 331    | 1 464    | 1 611    |   |   |   |
| 17 | Себестоимость продукции                                     | (500)    | (550)    | (605)    | (666)    | (732)    | (805)    |   |   |   |
| 18 | Процентные выплаты по долгам                                | (32)     | (30)     | (29)     | (28)     | (29)     | (32)     |   |   |   |
| 19 | Проценты, начисленные по наличным средствам                 | 6        | 6        | 6        | 6        | 6        | 6        |   |   |   |
| 20 | Амортизация                                                 | (100)    | (117)    | (137)    | (161)    | (189)    | (220)    |   |   |   |
| 21 | Прибыль до уплаты налогов                                   | 374      | 409      | 445      | 483      | 521      | 560      |   |   |   |
| 22 | Налоги                                                      | (150)    | (164)    | (178)    | (193)    | (208)    | (224)    |   |   |   |
| 23 | Прибыль после уплаты налогов                                | 225      | 246      | 267      | 290      | 313      | 336      |   |   |   |
| 24 | Дивиденды                                                   | (135)    | (147)    | (160)    | (174)    | (188)    | (202)    |   |   |   |
| 25 | Нераспределенная прибыль                                    | 90       | 98       | 107      | 116      | 125      | 134      |   |   |   |
| 26 |                                                             |          |          |          |          |          |          |   |   |   |
| 27 | <b>Балансовая ведомость</b>                                 |          |          |          |          |          |          |   |   |   |
| 28 | Наличные средства и ликвидные ценные бумаги                 | 80       | 80       | 80       | 80       | 80       | 80       |   |   |   |
| 29 | Оборотные средства                                          | 150      | 165      | 182      | 200      | 220      | 242      |   |   |   |
| 30 | Основные средства                                           |          |          |          |          |          |          |   |   |   |
| 31 | Себестоимость основных средств                              | 1 070    | 1 264    | 1 486    | 1 740    | 2 031    | 2 364    |   |   |   |
| 32 | Накопленная амортизация                                     | (300)    | (417)    | (554)    | (715)    | (904)    | (1 124)  |   |   |   |
| 33 | Остаточная стоимость основных средств                       | 770      | 847      | 932      | 1 025    | 1 127    | 1 240    |   |   |   |
| 34 | <b>Всего активов</b>                                        | 1 000    | 1 092    | 1 193    | 1 305    | 1 427    | 1 562    |   |   |   |
| 35 |                                                             |          |          |          |          |          |          |   |   |   |
| 36 | Краткосрочные обязательства                                 | 80       | 88       | 97       | 106      | 117      | 129      |   |   |   |
| 37 | Долг (заимствованные средства)                              | 320      | 287      | 284      | 276      | 302      | 331      |   |   |   |
| 38 | Акционерный капитал                                         | 450      | 469      | 457      | 451      | 412      | 372      |   |   |   |
| 39 | Накопленная нераспределенная прибыль                        | 150      | 248      | 355      | 471      | 596      | 730      |   |   |   |
| 40 | <b>Всего обязательств и акционерного капитала</b>           | 1 000    | 1 092    | 1 193    | 1 305    | 1 427    | 1 562    |   |   |   |
| 41 |                                                             |          |          |          |          |          |          |   |   |   |
| 42 | <b>Планир.коэфф. “долг/акционерный капитал”</b>             | 0,53     | 0,40     | 0,35     | 0,30     | 0,30     | 0,30     |   |   |   |

В строке 42 данной таблицы показано планируемое значение отношения долга к капиталу в течение 1-го–5-го годов. Фирма желает снизить текущий коэффициент, равный 53%, до 30% через два года. Необходимо внести соответствующие изменения в уравнения модели, а именно:

- $\text{Долг} = \text{Планируемое отношение долга к капиталу} \times (\text{Акционерный капитал} + \text{Нераспределенная прибыль})$
- $\text{Акционерный капитал} = \text{Сумма баланса} - \text{Краткосрочные обязательства} - \text{Долг} - \text{Накопленная нераспределенная прибыль}$

Обратите внимание, что фирма сделает новые заимствования на 4-м и 5-м годах; на 1-м году акционерный капитал возрастет (что говорит о выпуске новых акций), тогда как в последующие годы он уменьшится (т.е. акции будут выкуплены у акционеров).

---

### 3.9. Финансирование проекта: график выплаты долга

Рассмотрим еще одно применение гипотетического моделирования. В типичном случае так называемого “финансирования проекта” фирма берет средства в долг для осуществления такого финансирования. Долг часто сопровождается дополнительными ограничениями.

- Фирме не разрешается выплачивать дивиденды, пока не выплачен весь долг.
- Фирме не разрешается выпускать новые акции.
- Фирма должна выплатить долг за определенный срок.

В следующем упрощенном примере используется вариант нашей базовой модели с балансом наличных средств. Организуется новая фирма или проект; в 0-м году имеем следующее.

- У фирмы имеются активы в размере 2200 единиц, из которых 100 покрыто за счет краткосрочных обязательств, 1100 — за счет акций и 1000 — за счет заимствованных средств (долга).
- Долг необходимо выплатить несколькими равными взносами (по основной сумме) в течение следующих пяти лет. До тех пор, пока долг не выплачен, фирме не разрешается выплачивать дивиденды (если у нее появляются свободные средства, они проходят по статье наличных средств и ликвидных ценных бумаг).



|    | A                                           | B                        | C                                       | D     | E     | F     | G       |
|----|---------------------------------------------|--------------------------|-----------------------------------------|-------|-------|-------|---------|
| 1  | <b>ФИНАНСИРОВАНИЕ ПРОЕКТА</b>               |                          |                                         |       |       |       |         |
| 2  |                                             |                          |                                         |       |       |       |         |
| 3  | Прирост объема сбыта                        | 15%                      |                                         |       |       |       |         |
| 4  | Оборотные средства/Объем сбыта              | 15%                      |                                         |       |       |       |         |
| 5  | Краткосрочные обязательства/Объем сбыта     | 8%                       |                                         |       |       |       |         |
| 6  | Себестоимость продукции/Объем сбыта         | 45%                      |                                         |       |       |       |         |
| 7  | Норма амортизации                           | 10%                      |                                         |       |       |       |         |
| 8  | Процентная ставка по задолженности          | 10,00%                   |                                         |       |       |       |         |
| 9  | Проценты, начисляемые по наличным средствам | 8,00%                    |                                         |       |       |       |         |
| 10 | Ставка налога                               | 40%                      |                                         |       |       |       |         |
| 11 | Норма выплаты дивиденда                     | 0%                       | <-- Никаких дивидендов до выплаты долга |       |       |       |         |
| 12 |                                             |                          |                                         |       |       |       |         |
| 13 | Год                                         | 0                        | 1                                       | 2     | 3     | 4     | 5       |
| 14 | <b>Ведомость прибылей и убытков</b>         |                          |                                         |       |       |       |         |
| 15 | Объем сбыта                                 |                          | 1 150                                   | 1 323 | 1 521 | 1 749 | 2 011   |
| 16 | Себестоимость продукции                     |                          | (518)                                   | (595) | (684) | (787) | (905)   |
| 17 | Процентные выплаты по долгам                |                          | (90)                                    | (70)  | (60)  | (30)  | (10)    |
| 18 | Проценты, начисленные по наличным средствам |                          | 1                                       | 3     | 9     | 21    | 49      |
| 19 | Амортизация                                 |                          | (211)                                   | (233) | (257) | (284) | (314)   |
| 20 | Прибыль до уплаты налогов                   |                          | 333                                     | 426   | 539   | 669   | 822     |
| 21 | Налоги                                      |                          | (133)                                   | (171) | (216) | (268) | (329)   |
| 22 | Прибыль после уплаты налогов                |                          | 200                                     | 257   | 323   | 401   | 493     |
| 23 | Дивиденды                                   |                          | -                                       | -     | -     | -     | -       |
| 24 | Нераспределенная прибыль                    |                          | 200                                     | 257   | 323   | 401   | 493     |
| 25 |                                             |                          |                                         |       |       |       |         |
| 26 | <b>Балансовая ведомость</b>                 |                          |                                         |       |       |       |         |
| 27 | Наличные средства и ликвид                  | замыкатели: =C39-C28-C32 |                                         |       |       |       |         |
| 28 | Оборотные средства                          |                          | 200                                     | 173   | 198   | 228   | 262     |
| 29 | Основные средства                           |                          |                                         |       |       |       |         |
| 30 | Себестоимость основных средств              | 2 000                    | 2 211                                   | 2 443 | 2 700 | 2 985 | 3 289   |
| 31 | Накопленная ам =B31-                        |                          | (211)                                   | (443) | (700) | (985) | (1 289) |
| 32 | Остаточная стоимость основных средств       | 2 000                    | 2 000                                   | 2 000 | 2 000 | 2 000 | 2 000   |
| 33 | Всего активов                               | 2 200                    | 2 192                                   | 2 262 | 2 401 | 2 621 | 2 935   |
| 34 |                                             |                          |                                         |       |       |       |         |
| 35 | Краткосрочные обязательства                 | 100                      | 92                                      | 106   | 122   | 140   | 161     |
| 36 | Долг (заимствованные средства)              | 1 000                    | 800                                     | 600   | 400   | 200   | -       |
| 37 | Акционерный капитал =B36-SBS36/5            | 1 100                    | 1 100                                   | 1 100 | 1 100 | 1 100 | 1 100   |
| 38 | Накопленная нераспределенная прибыль        | -                        | 200                                     | 456   | 780   | 1 181 | 1 674   |
| 39 | Всего обязательств и акционерного капитала  | 2 200                    | 2 192                                   | 2 262 | 2 401 | 2 621 | 2 935   |

Сроки и условия выплаты долга учтены в модели путем указания баланса долга в конце каждого года. Поскольку фирма не должна выпускать никаких новых акций (согласно договоренности по сделанному займу), замыкателем модели не должен находиться в пассивной части баланса. В нашей модели замыкателем является статья наличных средств и ликвидных ценных бумаг.

В модели сделано еще одно допущение, часто применяемое к основным средствам. Предполагается, что *остаточная стоимость* (нетто) основных средств не изменяется в течение всего срока реализации проекта. Как видно из строк 30–32, из данного предположения следует, что себестоимость основных средств возрастает ежегодно на сумму их амортизации. Отсюда также следует, что амортизация не дает никакого потока денежных средств.

|    | A                                                                                       | B | C     | D     | E     | F     | G     |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------|---|-------|-------|-------|-------|-------|
| 42 | <b>РАСЧЕТ ПОТОКОВ СВОБОДНЫХ СРЕДСТВ</b>                                                 |   |       |       |       |       |       |
| 43 | Год                                                                                     | 0 | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     |
| 44 | Прибыль после уплаты налогов                                                            |   | 200   | 257   | 323   | 401   | 493   |
| 45 | Плюс амортизация                                                                        |   | 211   | 233   | 257   | 284   | 314   |
| 46 | Минус прирост оборотных средств                                                         |   | 28    | (26)  | (30)  | (34)  | (39)  |
| 47 | Плюс прирост краткосрочных обязательств                                                 |   | (8)   | 14    | 16    | 18    | 21    |
| 48 | Минус прирост себестоимости основных средств                                            |   | (211) | (233) | (257) | (284) | (314) |
| 49 | Плюс чистые проценты после уплаты налогов                                               |   | 54    | 42    | 30    | 18    | 6     |
| 50 | Минус % по наличным средствам после налогов                                             |   | (1)   | (3)   | (9)   | (21)  | (40)  |
| 51 | <b>Потоки свободных средств</b>                                                         |   | 272   | 283   | 330   | 382   | 441   |
| 52 | Поток средств, порожденный амортизацией, равен приросту себестоимости основных средств. |   |       |       |       |       |       |
| 53 |                                                                                         |   |       |       |       |       |       |
| 54 |                                                                                         |   |       |       |       |       |       |
| 55 |                                                                                         |   |       |       |       |       |       |

В этом примере у фирмы нет проблем с выплатой основной суммы долга. Как специалисты по анализу кредитоспособности мы хотели бы выяснить, как повлияют на способность фирмы к выплате долга изменения в различных параметрах модели. В следующем примере мы увеличили отношение себестоимости продукции к объему сбыта. При этих новых параметрах фирма больше не может выплачивать требуемые взносы в течение 1–3-го годов. Этот факт можно видеть на модели: в течение лет 1–3 баланс наличных средств отрицателен, что указывает на необходимость брать займы для выплаты основной суммы долга<sup>7</sup>.

|    | A                                                 | B                       | C                                     | D     | E     | F     | G       |
|----|---------------------------------------------------|-------------------------|---------------------------------------|-------|-------|-------|---------|
| 1  | ФИНАНСИРОВАНИЕ ПРОЕКТА--невозможно выплатить долг |                         |                                       |       |       |       |         |
| 2  |                                                   |                         |                                       |       |       |       |         |
| 3  | Прирост объема сбыта                              | 15%                     |                                       |       |       |       |         |
| 4  | Оборотные средства/Объем сбыта                    | 15%                     |                                       |       |       |       |         |
| 5  | Краткосрочные обязательства/Объем сбыта           | 8%                      |                                       |       |       |       |         |
| 6  | Себестоимость продукции/Объем сбыта               | 55%                     |                                       |       |       |       |         |
| 7  | Норма амортизации                                 | 10%                     |                                       |       |       |       |         |
| 8  | Процентная ставка по задолженности                | 10,00%                  |                                       |       |       |       |         |
| 9  | Проценты, начисляемые по наличным средствам       | 8,00%                   |                                       |       |       |       |         |
| 10 | Ставка налога                                     | 40%                     |                                       |       |       |       |         |
| 11 | Норма выплаты дивиденда                           | 0%                      | ← Никаких дивидендов до выплаты долга |       |       |       |         |
| 12 |                                                   |                         |                                       |       |       |       |         |
| 13 | Год                                               | 0                       | 1                                     | 2     | 3     | 4     | 5       |
| 14 | Ведомость прибылей и убытков                      |                         |                                       |       |       |       |         |
| 15 | Объем сбыта                                       |                         | 1 150                                 | 1 323 | 1 521 | 1 749 | 2 011   |
| 16 | Себестоимость продукции                           |                         | (633)                                 | (727) | (836) | (962) | (1 106) |
| 17 | Процентные выплаты по долгам                      |                         | (90)                                  | (70)  | (50)  | (30)  | (10)    |
| 18 | Проценты, начисленные по наличным средствам       |                         | (2)                                   | (6)   | (7)   | (4)   | 4       |
| 19 | Амортизация                                       |                         | (211)                                 | (233) | (257) | (284) | (314)   |
| 20 | Прибыль до уплаты налогов                         |                         | 215                                   | 287   | 370   | 469   | 585     |
| 21 | Налоги                                            |                         | (86)                                  | (115) | (148) | (187) | (234)   |
| 22 | Прибыль после уплаты налогов                      |                         | 129                                   | 172   | 222   | 281   | 351     |
| 23 | Дивиденды                                         |                         | -                                     | -     | -     | -     | -       |
| 24 | Нераспределенная прибыль                          |                         | 129                                   | 172   | 222   | 281   | 351     |
| 25 |                                                   |                         |                                       |       |       |       |         |
| 26 | Балансовая ведомость                              |                         |                                       |       |       |       |         |
| 27 | Наличные средства и ликвид                        | закрывать: =C39-C28-C32 | -                                     | (52)  | (92)  | (83)  | (18)    |
| 28 | Оборотные средства                                |                         | 200                                   | 173   | 198   | 228   | 262     |
| 29 | Основные средства                                 |                         |                                       |       |       |       |         |
| 30 | Себестоимость основных средств                    |                         | 2 000                                 | 2 211 | 2 443 | 2 700 | 2 985   |
| 31 | Накопленная (=B31-\$B\$37*(C30+B30)/2             |                         |                                       | (211) | (443) | (700) | (985)   |
| 32 | Остаточная стоимость основных средств             |                         | 2 000                                 | 2 000 | 2 000 | 2 000 | 2 000   |
| 33 | Всего активов                                     |                         | 2 200                                 | 2 121 | 2 107 | 2 145 | 2 244   |
| 34 |                                                   |                         |                                       |       |       |       |         |
| 35 | Краткосрочные обязательства                       |                         | 100                                   | 92    | 106   | 122   | 140     |
| 36 | Долг (заимствованные средства)                    |                         | 1 000                                 | 800   | 600   | 400   | 200     |
| 37 | Акционерный капитал                               | =B36-\$B\$36/5          | 1 100                                 | 1 100 | 1 100 | 1 100 | 1 100   |
| 38 | Накопленная нераспределенная прибыль              |                         | -                                     | 129   | 301   | 523   | 804     |
| 39 | Всего обязательств и акционерного капитала        |                         | 2 200                                 | 2 121 | 2 107 | 2 145 | 2 244   |

### 3.9.1. Расчет прибыли по акциям

Держатели акций проекта должны заплатить 1100 единиц в 0-м году. В течение лет 1–4 они не получают никакого дохода, но в 5-м году становятся владельцами компании. Предположим, что балансовая стоимость активов в точности равна их рыночной стоимости. Тогда в предыдущем примере в конце 5-го года собственный капитал фирмы равен первоначальному акционерному капиталу плюс накопленная нераспределенная прибыль, что составляет 2255. Ожидаемая прибыль на акционерный капитал, или ПАК (*return on equity* — *ROE*), вычисляется следующим образом:

<sup>7</sup> С точки зрения финансов предприятия положительный баланс наличных средств эквивалентен отрицательному балансу долга. Таким образом, если наличные средства отрицательны, это эквивалентно тому, что фирма взяла деньги в долг.

|    | A                                    | B      | C                 | D | E | F | G     | H                | I |
|----|--------------------------------------|--------|-------------------|---|---|---|-------|------------------|---|
| 57 | ПРИБЫЛЬ НА АКЦИОНЕРНЫЙ КАПИТАЛ (ПАК) |        |                   |   |   |   |       |                  |   |
| 58 | Год                                  | 0      | 1                 | 2 | 3 | 4 | 5     |                  |   |
| 59 | Поток средств акционерного капитала  | -1 100 | -                 | - | - | - | 2 255 | <-- =G23+G37+G38 |   |
| 60 | ПРИБЫЛЬ НА АКЦИОНЕРНЫЙ КАПИТАЛ (ПАК) | 15.44% | <-- =BCD(B59:G59) |   |   |   |       |                  |   |

Интересно отметить, что эта прибыль возрастает, когда объем инвестированного акционерного капитала уменьшается<sup>8</sup>. Рассмотрим случай, когда фирма берет займы 1500 единиц, а держатели акций вкладывают 600.

|    | A                                    | B      | C                 | D | E | F | G     | H                | I |
|----|--------------------------------------|--------|-------------------|---|---|---|-------|------------------|---|
| 57 | ПРИБЫЛЬ НА АКЦИОНЕРНЫЙ КАПИТАЛ (ПАК) |        |                   |   |   |   |       |                  |   |
| 58 | Год                                  | 0      | 1                 | 2 | 3 | 4 | 5     |                  |   |
| 59 | Поток средств акционерного капитала  | -600   | -                 | - | - | - | 1 602 | <-- =G23+G37+G38 |   |
| 60 | ПРИБЫЛЬ НА АКЦИОНЕРНЫЙ КАПИТАЛ (ПАК) | 21.70% | <-- =BCD(B59:G59) |   |   |   |       |                  |   |

Как показывают приведенные ниже таблица данных и график, чем меньше начальные вложения акционеров, тем выше прибыль на акционерный капитал.

|    | A                                                            | B     | C      | D        | E | F | G | H | I | J |
|----|--------------------------------------------------------------|-------|--------|----------|---|---|---|---|---|---|
| 63 | Таблица данных: ПАК как функция начального объема инвестиций |       | 21.70% | <-- =B60 |   |   |   |   |   |   |
| 64 |                                                              | 2 000 | 11.40% |          |   |   |   |   |   |   |
| 65 |                                                              | 1 800 | 11.98% |          |   |   |   |   |   |   |
| 66 |                                                              | 1 600 | 12.70% |          |   |   |   |   |   |   |
| 67 |                                                              | 1 400 | 13.59% |          |   |   |   |   |   |   |
| 68 |                                                              | 1 200 | 14.73% |          |   |   |   |   |   |   |
| 69 |                                                              | 1 000 | 16.27% |          |   |   |   |   |   |   |
| 70 |                                                              | 800   | 18.42% |          |   |   |   |   |   |   |
| 71 |                                                              | 600   | 21.70% |          |   |   |   |   |   |   |
| 72 |                                                              | 400   | 27.37% |          |   |   |   |   |   |   |
| 73 |                                                              | 200   | 40.10% |          |   |   |   |   |   |   |
| 74 |                                                              |       |        |          |   |   |   |   |   |   |
| 75 |                                                              |       |        |          |   |   |   |   |   |   |
| 76 |                                                              |       |        |          |   |   |   |   |   |   |



### 3.10. Заключение

Анализ и прогнозирование с помощью гипотетических моделей — это один из главных инструментов финансового анализа предприятий и корпораций. Помните, что финансовое моделирование — это нетривиальное сочетание финансовой теории, основ бухгалтерии и программирования электронных таблиц. Чтобы действительно приносить пользу, финансовые модели должны отражать текущую ситуацию и быть достаточно простыми, т.е. пользователь должен легко понимать, как и почему модели дают именно такие результаты — неважно, идет ли речь об оценке предприятия, анализе кредитоспособности или несложном прогнозе финансового состояния фирмы либо проекта на несколько ближайших лет.

<sup>8</sup> Это интересно, но не удивительно: если инвестированный капитал уменьшается, то возрастает доля заемных средств в проекте, а потому повышается и уровень риска для держателей акций. Более высокий доход призван компенсировать этот дополнительный риск. Но самый интересный вопрос (на который здесь не дается ответа) — действительно ли высокая прибыльность проекта является компенсацией за его рискованность?

## Упражнения

1. Начнем с простого упражнения, которое поможет вам понять, что и как делается в моделировании финансовых ведомостей/отчетов. Скопируйте модели из разделов 3.2, 3.7 и 3.8, т.е. введите правильные формулы в нужных ячейках и убедитесь, что полученные результаты совпадают с примерами из книги. (Это скорее упражнение по бухгалтерии, чем по финансовому анализу. Если вы похожи на некоторых финансовых аналитиков, то обнаружите, что в бухгалтерии есть немало упущенных вами аспектов!)
2. Модель из раздела 3.2 включает себестоимость продукции, но не “общие и административные расходы, издержки сбыта” (*selling, general and administrative expenses — SG&A*). Предположим, фирма тратит по этой статье расходов 200 долл. в год независимо от объемов сбыта.
  - а) Измените модель так, чтобы учесть в ней это новое предположение. Покажите статьи прибылей и убытков, баланс средств, потоки свободных средств и оценку стоимости фирмы.
  - б) Постройте таблицу данных и продемонстрируйте в ней чувствительность стоимости акционерного капитала к объему общих и административных расходов и издержек. Объем этих расходов должен варьироваться от 0 до 500 долл. в год.
3. Предположим, в модели из раздела 3.2 *себестоимость основных средств* составляет 100% от сбыта в течение 1–5-го года (в нынешней модели функцией объема сбыта является *остаточная стоимость основных средств*). Внесите соответствующие изменения в модель. Покажите получившуюся ведомость прибылей и убытков, баланс средств, потоки свободных средств для лет 1–5. (Предположите, что в 0-м году основные средства соответствуют таблице из раздела 3.2. Заметьте, что, поскольку данные на 0-й год известны — это текущее состояние фирмы в отличие от данных за годы 1–5, которые являются прогнозами — коэффициенты в 0-м году не обязаны соответствовать прогнозам за 1–5-й годы.)
4. Еще раз вернемся к модели из раздела 3.2. Предположим, что себестоимость основных средств описывается следующей ступенчатой функцией:

$$\begin{aligned}
 &\boxed{\text{Себестоимость основных средств}} = \\
 &= \begin{cases} 100\% \cdot \text{Объем сбыта}, & \text{Объем сбыта} < 1200 \\ 1200 + 90\% \cdot (\text{Объем сбыта} - 1200), & 1200 < \text{Объем сбыта} \leq 1400 \\ 1380 + 80\% \cdot (\text{Объем сбыта} - 1400), & \text{Объем сбыта} > 1400 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Учтите эту функцию в модели.

5. Рассмотрим модель из раздела 3.7 (в которой сумма долга является замыкателем).
  - а) Предположим, что фирма имеет в обращении 1000 акций и решает выплатить в 1-м году по 15 центов дивидендов на акцию. Кроме того, предположим, что в течение последующих лет фирма хочет увеличивать сумму дивиденда на акцию на 12% в год. Внесите эти изменения в гипотетическую модель.
  - б) Выполните анализ чувствительности и покажите в нем влияние ежегодного прироста суммы дивиденда на отношение долга к собственным средствам. Пусть прирост изменяется в диапазоне от 0 до 18% шагами по 2%. В этом упражнении долг определяется как чистый (нетто), т.е. долг за вычетом наличных средств и ликвидных ценных бумаг.
6. В модели из раздела 3.7 предположите, что фирме нужно иметь баланс наличных средств в конце каждого года не менее 25 единиц. Внесите это ограничение в модель.
7. В упражнении по оцениванию из раздела 3.4 конечная стоимость вычисляется по дивидендной модели Гордона на основе движения денежных средств. Замените эту конечную стоимость остаточной балансовой стоимостью долга в конце 5-го года плюс акционерный капитал. При внесении этого изменения фактически предполагается, что балансовая стоимость хорошо коррелирует с рыночной стоимостью.
8. Повторите упражнение 7, на этот раз заменив конечную стоимость коэффициентом ДБВНА, умноженным на прогнозируемый ДБВНА в конце 5-го года. Постройте график *стоимости акционерного капитала* фирмы как функции от прогнозируемого коэффициента ДБВНА 5-го года; коэффициент должен изменяться от 6 до 14.
9. В гипотетической модели финансирования проекта из раздела 3.9 предполагается, что фирма выплачивает свой исходный долг размером 1000 единиц равными долями основной суммы в течение 5 лет. Откажитесь от этого предположения и сделайте следующее: фирма выплачивает долг равными долями процентов и основной суммы в течение пяти лет. *Подсказка:* для вычисления ежегодных выплат воспользуйтесь функцией ПЛТ (PMT); затем постройте таблицу возврата средств (см. главу 1), чтобы в ней разбить ежегодные выплаты на проценты и возврат основной суммы.
10. В этой задаче вводится понятие *устойчивых дивидендов (sustainable dividends)*. Фирма, финансовое положение которой иллюстрируется далее, желает поддерживать баланс наличных средств на уровне 80 в течение следующих пяти лет. Она также не хочет выпускать новых акций или изменять текущую задолженность. Все это означает, что замыкателем баланса служит уровень дивидендов. Промоделируйте эту ситуацию. Заметим, что для некоторых значений параметров могут получиться “отрицательные дивиденды”; это попросту означает, что в таком случае устойчивого уровня дивидендов не существует.

|    | A                                                 | B      | C   | D   | E   | F   | G   |
|----|---------------------------------------------------|--------|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1  | <b>УСТОЙЧИВЫЕ ДИВИДЕНДЫ -- шаблон</b>             |        |     |     |     |     |     |
| 2  |                                                   |        |     |     |     |     |     |
| 3  | Прирост объема сбыта                              | 10%    |     |     |     |     |     |
| 4  | Оборотные средства/Объем сбыта                    | 15%    |     |     |     |     |     |
| 5  | Краткосрочные обязательства/Объем сбыта           | 8%     |     |     |     |     |     |
| 6  | Остат.стоимость осн.средств/Объем сбыта           | 77%    |     |     |     |     |     |
| 7  | Себестоимость продукции/Объем сбыта               | 50%    |     |     |     |     |     |
| 8  | Норма амортизации                                 | 10%    |     |     |     |     |     |
| 9  | Процентная ставка по задолженности                | 10,00% |     |     |     |     |     |
| 10 | Проценты, начисляемые по наличным средствам       | 8,00%  |     |     |     |     |     |
| 11 | Ставка налога                                     | 40%    |     |     |     |     |     |
| 12 |                                                   |        |     |     |     |     |     |
| 13 | Год                                               | 0      | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   |
| 14 | <b>Ведомость прибылей и убытков</b>               |        |     |     |     |     |     |
| 15 | Объем сбыта                                       | 1 000  |     |     |     |     |     |
| 16 | Себестоимость продукции                           | (500)  |     |     |     |     |     |
| 17 | Процентные выплаты по долгам                      | (32)   |     |     |     |     |     |
| 18 | Проценты, начисленные по наличным средствам       | 8      |     |     |     |     |     |
| 19 | Амортизация                                       | (100)  |     |     |     |     |     |
| 20 | Прибыль до уплаты налогов                         | 374    |     |     |     |     |     |
| 21 | Налоги                                            | (150)  |     |     |     |     |     |
| 22 | Прибыль после уплаты налогов                      | 225    |     |     |     |     |     |
| 23 | Дивиденды                                         | (90)   |     |     |     |     |     |
| 24 | Нераспределенная прибыль                          | 135    |     |     |     |     |     |
| 25 |                                                   |        |     |     |     |     |     |
| 26 | <b>Балансовая ведомость</b>                       |        |     |     |     |     |     |
| 27 | Наличные средства и ликвидные ценные бума         | 80     | 80  | 80  | 80  | 80  | 80  |
| 28 | Оборотные средства                                | 150    |     |     |     |     |     |
| 29 | Основные средства                                 |        |     |     |     |     |     |
| 30 | Себестоимость                                     | 1 070  |     |     |     |     |     |
| 31 | Накопленная амортизация                           | (300)  |     |     |     |     |     |
| 32 | Остаточная стоимость основных средств             | 770    |     |     |     |     |     |
| 33 | <b>Всего активов</b>                              | 1 000  |     |     |     |     |     |
| 34 |                                                   |        |     |     |     |     |     |
| 35 | Краткосрочные обязательства                       | 80     |     |     |     |     |     |
| 36 | Долг (заимствованные средства)                    | 320    | 320 | 320 | 320 | 320 | 320 |
| 37 | Акционерный капитал                               | 450    | 450 | 450 | 450 | 450 | 450 |
| 38 | Накопленная нераспределенная прибыль              | 150    |     |     |     |     |     |
| 39 | <b>Всего обязательств и акционерного капитала</b> | 1 000  |     |     |     |     |     |

## Приложение 1: расчет потоков свободных средств при отрицательном доходе

Начнем с простого примера. У фирмы нет амортизации, ее чистый оборотный капитал остается на постоянном уровне, отсутствуют капитальные затраты, а доходы за два года подряд имеют следующий вид:

|    | A                                           | B    | C    |
|----|---------------------------------------------|------|------|
| 2  | <b>ПРИБЫЛИ И УБЫТКИ С ПЕРЕНОСОМ</b>         |      |      |
| 3  | Год                                         | 1    | 2    |
| 4  | Доход до выплаты процентов и налогов (ДДПН) | -100 | 400  |
| 5  | Проценты                                    | -50  | -80  |
| 6  | Прибыль до уплаты налогов                   | -150 | 320  |
| 7  | Перенос убытков                             | 0    | -150 |
| 8  | Облагаемый доход                            | -150 | 170  |
| 9  | Налоги (30%)                                | 0    | -51  |
| 10 | Прибыль после уплаты налогов                | -150 | 119  |

Напомним, что ПСС — это объем потоков денежных средств, порождаемых деятельностью фирмы при условии отсутствия долга. Таким образом, для вычисления ПСС фирмы нами были рассчитаны ее прибыли и убытки, которые она бы имела (включая перенос налогов) при отсутствии процентных выплат.

|    | A                                           | B    | C    |
|----|---------------------------------------------|------|------|
| 13 | ПСС ПРИ ОТСУТСТВИИ ДОЛГА                    |      |      |
| 14 | Год                                         | 1    | 2    |
| 15 | Доход до выплаты процентов и налогов (ДДПН) | -100 | 400  |
| 16 | Проценты                                    | 0    | 0    |
| 17 | Прибыль до уплаты налогов                   | -100 | 400  |
| 18 | Перенос убытков                             | 0    | -100 |
| 19 | Облагаемый доход                            | -100 | 300  |
| 20 | Налоги (30%)                                | 0    | -90  |
| 21 | Прибыль после уплаты налогов                | -100 | 210  |
| 22 | Плюс перенесенные убытки                    | 0    | 100  |
| 23 | Поток свободных средств (ПСС)               | -100 | 310  |

Перенесенные убытки прибавляются затем к прибыли после уплаты налогов, поскольку являются *некассовым* расходом (наподобие амортизации). Этот же расчет можно выполнить и непосредственно по ведомости прибылей и убытков. Однако следует признать, что при переносе налогов и убытков включается элемент процентных начислений, которые следует выделить для определения нетто-позиции.

|    | A                                           | B    | C    | D |
|----|---------------------------------------------|------|------|---|
| 26 | РАСЧЕТ ПСС ПО ВЕДОМОСТИ ПРИБЫЛЕЙ И УБЫТКОВ  |      |      |   |
| 27 | Год                                         | 1    | 2    |   |
| 28 | Доход до выплаты процентов и налогов (ДДПН) | -100 | 400  |   |
| 29 | Проценты                                    | -50  | -80  |   |
| 30 | Прибыль до уплаты налогов                   | -150 | 320  |   |
| 31 | Перенос убытков                             | 0    | -150 |   |
| 32 | Облагаемый доход                            | -150 | 170  |   |
| 33 | Налоги (30%)                                | 0    | -51  |   |
| 34 | Прибыль после уплаты налогов                | -150 | 119  |   |
| 35 | Расчет ПСС                                  |      |      |   |
| 36 | Прибыль после уплаты налогов                | -150 | 119  |   |
| 37 | Плюс перенесенные убытки                    | 0    | 150  |   |
| 38 | Плюс проценты, за вычетом налогов           | 50   | 56   |   |
| 39 | Минус налоговый щит для % при переносе      | 0    | -15  |   |
| 40 | Поток свободных средств (ПСС)               | -100 | 310  |   |

## Приложение 2: ускоренная амортизация в гипотетических моделях

В моделях этой главы используется линейная амортизация (равномерное списывание)<sup>9</sup>. Но в них можно учесть и ускоренную амортизацию (отдельный вопрос — стоит ли вообще это делать; ответ на него дается в конце приложения).

Для примера рассмотрим компанию, которая учитывает амортизацию своих активов по пятилетнему плану согласно системе ускоренного возмещения издержек (*Accelerated Cost Recovery System — ACRS*), введенной в Законе об уменьшении налоговых ставок (*Tax Reduction Act*) в США в 1986 г. Согласно этому плану, нормы амортизации активов принимаются такими, как показано в следующей таблице:

<sup>9</sup> Это приложение содержит материал повышенной сложности, который можно пропустить при первом чтении.

|    | A                                                  | B      | C             | D |
|----|----------------------------------------------------|--------|---------------|---|
| 78 | Таблица амортизации--срок службы осн.средств 5 лет |        |               |   |
| 79 |                                                    | Норма  | Прогрессивная |   |
| 80 | Год                                                | аморт. | амортизация   |   |
| 81 | 1                                                  | 20%    | 20%           |   |
| 82 | 2                                                  | 32%    | 52%           |   |
| 83 | 3                                                  | 19,20% | 71%           |   |
| 84 | 4                                                  | 11,52% | 83%           |   |
| 85 | 5                                                  | 11,52% | 94%           |   |
| 86 | 6                                                  | 5,76%  | 100%          |   |
| 87 | 7                                                  | 0%     | 100%          |   |

(Обратите внимание, что “пятилетний” план амортизации фактически предусматривает амортизацию актива в течение шести лет.)

В следующем фрагменте таблицы показан план амортизации основных средств в течение пяти лет:

|    | A                                                                | B      | C       | D       | E       | F       | G       |
|----|------------------------------------------------------------------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 55 | РАСЧЕТ АМОРТИЗАЦИИ--осн.средства в 0-м году имеют возраст 3 года |        |         |         |         |         |         |
| 56 | Прирост объема сбыта                                             | 10%    |         |         |         |         |         |
| 57 | Остат.стоимость осн.средств/Объем сбыта                          | 77%    |         |         |         |         |         |
| 58 | Объем сбыта                                                      | 1 000  | 1 100   | 1 210   | 1 331   | 1 464   | 1 611   |
| 59 |                                                                  |        |         |         |         |         |         |
| 60 | Год                                                              | 0      | 1       | 2       | 3       | 4       | 5       |
| 61 | Себестоимость основных средств, конец года                       | 2 674  | 3 155   | 3 838   | 4 536   | 5 290   | 5 815   |
| 62 | Накопленная амортизация                                          | -1 904 | (2 308) | (2 907) | (3 511) | (4 162) | (4 575) |
| 63 | Требуемая остат.стоимость осн.средств, конец года                | 770    | 847     | 932     | 1 025   | 1 127   | 1 240   |
| 64 |                                                                  |        |         |         |         |         |         |
| 65 | Новые активы, приобретенные в теч.года                           |        | 481     | 683     | 698     | 754     | 526     |
| 66 |                                                                  |        |         |         |         |         |         |
| 67 | Расчет накопленной амортизации                                   |        |         |         |         |         |         |
| 68 | Накопл. амортизация в конце предыд.года                          |        | 1 904   | 2 308   | 2 907   | 3 511   | 4 162   |
| 69 | Амортизация активов 0-го года                                    |        | 308     | 308     | 154     | 0       | 0       |
| 70 | Амортизация активов, приобрет. в 1-м году                        |        | 96      | 154     | 92      | 55      | 55      |
| 71 | Амортизация активов, приобрет. во 2-м году                       |        |         | 137     | 219     | 131     | 79      |
| 72 | Амортизация активов, приобрет. в 3-м году                        |        |         |         | 140     | 223     | 134     |
| 73 | Амортизация активов, приобрет. в 4-м году                        |        |         |         |         | 241     | 145     |
| 74 | Амортизация активов, приобрет. в 5-м году                        |        |         |         |         |         | 168     |
| 75 | Накопленная амортизация                                          | 1 904  | 2 308   | 2 907   | 3 511   | 4 162   | 4 575   |
| 76 |                                                                  |        |         |         |         |         |         |

Ниже приведены пояснения к данному плану.

- На каждом году отношение остаточной стоимости основных средств к объему сбыта принимается равным 77%. Прогноз объема сбыта продукции дается в строке 58, а требуемая остаточная стоимость основных средств — в строке 63.
- В начале отсчета (точка 0) предполагается, что активы фирмы имеют возраст 3 года. Соответственно прогрессивная амортизация активов составляет 71% от их начальной стоимости ( $0,71 \cdot 2674 = 1904$ ).
- Прогрессивная амортизация в течение 1–5-го года вычисляется путем суммирования годовой амортизации по каждой группе активов с использованием функции ВПР (VLookup); см. ее описание в главе 29.



|    | A                                                  | B             | C                         | D     | E     | F     | G     | H |
|----|----------------------------------------------------|---------------|---------------------------|-------|-------|-------|-------|---|
| 68 | Накопл. амортизация в конце предыд. года           |               | 1 904                     | 2 308 | 2 907 | 3 511 | 4 162 |   |
| 69 | Амортизация активов 0-го года                      |               | 308                       | 308   | 154   | 0     | 0     |   |
| 70 | Амортизация активов, приобрет. в 1-м году          |               | 96                        | 154   | 92    | 55    | 55    |   |
| 71 | Амортизация активов, приобрет. во 2-м году         |               |                           | 137   | 219   | 131   | 79    |   |
| 72 | Амортизация активов, приобрет. в 3-м году          |               |                           |       | 140   | 223   | 134   |   |
| 73 | Амортизация активов, приобрет. в 4-м году          |               |                           |       |       | 241   | 145   |   |
| 74 | Амортизация активов, приобрет. в 5-м году          |               |                           |       |       |       | 168   |   |
| 75 | Накопленная амортизация                            | 1 904         | 2 308                     | 2 907 | 3 511 | 4 162 | 4 575 |   |
| 76 |                                                    |               |                           |       |       |       |       |   |
| 77 |                                                    |               |                           |       |       |       |       |   |
| 78 | Таблица амортизации--срок службы осн.средств 5 лет |               |                           |       |       |       |       |   |
| 79 |                                                    |               |                           |       |       |       |       |   |
| 80 | Год                                                | Норма аморти. | Прогрессивная амортизация |       |       |       |       |   |
| 81 | 1                                                  | 20%           | 20%                       |       |       |       |       |   |
| 82 | 2                                                  | 32%           | 52%                       |       |       |       |       |   |
| 83 | 3                                                  | 19,20%        | 71%                       |       |       |       |       |   |
| 84 | 4                                                  | 11,52%        | 83%                       |       |       |       |       |   |
| 85 | 5                                                  | 11,52%        | 94%                       |       |       |       |       |   |
| 86 | 6                                                  | 5,76%         | 100%                      |       |       |       |       |   |
| 87 | 7                                                  | 0%            | 100%                      |       |       |       |       |   |

- На результаты прогрессивной амортизации, вычисленные в предыдущей таблице, ссылается строка 62. Себестоимость основных средств вычисляется в строке 61.

|    | A                                                 | B      | C       |
|----|---------------------------------------------------|--------|---------|
| 58 | Объем сбыта                                       | 1 000  | 1 100   |
| 59 |                                                   |        |         |
| 60 | Год                                               |        | 1       |
| 61 | Себестоимость основных средств, конец года        | 2 674  | 3 155   |
| 62 | Накопленная амортизация                           | -1 904 | (2 308) |
| 63 | Требуемая остат.стоимость осн.средств, конец года | 770    | 847     |

### Стоит ли игра свеч?

Как видите, построение гипотетических моделей для учета ускоренной амортизации — дело непростое и запутанное. При моделировании ускоренной амортизации необходимо делать ряд дополнительных допущений насчет плана использования активов (т.е. за какой период считать амортизацию — три, пять, семь лет или какой-нибудь другой срок). Аналитик также должен сделать предположение о среднем возрасте существующих активов. В приведенном примере предполагалось, что амортизация активов следует пятилетнему плану и что имеющиеся активы в начальный момент времени имеют возраст три года. При ускоренной амортизации также требуется составить отдельный план для активов, приобретенных в каждом расчетном году.

Как финансовый аналитик вы должны спросить себя, стоит ли вообще игра свеч. По нашему мнению, подробный анализ ускоренной амортизации уместен только в тех случаях, когда у фирмы имеется большой объем основных средств, которые порождают очень существенный прирост базы основного капитала (т.е. движение денежных средств, рассчитанное по ускоренной модели, действительно сильно отличается от равномерной модели).



---

## 4 Гипотетические модели и оценивание предприятий

---

### 4.1. Введение

В этой главе гипотетические модели финансовых отчетов предприятий (см. главу 3) используются для оценки стоимости этих предприятий. Подобные оценки вполне типичны для финансовых расчетов, выполняемых при слиянии и приобретении компаний (хотя в жизни они значительно сложнее).

При оценивании стоимости компании требуется решить ряд сложных вопросов:

- построить гипотетическую модель оцениваемой компании;
- вычислить соответствующие потоки денежных средств;
- рассчитать стоимость капитала по движениям свободных средств;
- определить *конечную стоимость* фирмы;
- правильно дисконтировать потоки средств;
- провести анализ чувствительности (устойчивости) результатов;
- не бояться сочетать финансовую теорию, знание бухгалтерии и здравый смысл!

Для небольшой главы в книге по финансовому моделированию это достаточно широкий круг вопросов<sup>1</sup>. И тем не менее каждому из них в этой главе посвящено краткое описание и пример реализации. Большая часть операций иллюстрируется на примере оценки вымышленной компании Farmers Bagels (что в переводе означает “фермерские булочки” — *Примеч. пер.*).

---

### 4.2. Исходная информация

Фирма Farmers Bagels, основанная в начале 1995 г., со временем превратилась в обширную и успешную сеть магазинчиков-бубличных. В каждой из таких бубличных покупатель может приобрести не только булочки в упаковке для домашнего потребления, но также сэндвичи из бубликов и кофе.

В начале 1997 г., вскоре после публикации финансового отчета Farmers Bagels за 1996 г., долю акций компании захотела приобрести большая фирма Buyout

---

<sup>1</sup> Более подробное рассмотрение этих вопросов заняло бы отдельную книгу. В этой связи вниманию читателя предлагается (и да простит он нашу нескромность) книга Simon Benninga & Oded Sarig, *Corporate Finance: A Valuation Approach*, New-York: McGraw-Hill, 1997.

Inc. (корпорация “Выкупатель”; шутки автора продолжаютс. — *Примеч. пер.*), вкладывающая капитал в различные отрасли рынка продуктов питания. Фирма Buyout наняла группу финансовых аналитиков для помощи в оценке стоимости Farmers Bagels и определения диапазона цен на ее акции.

Аналитики начали свою работу с рассмотрения финансовых отчетов Farmers Bagels за два года ее существования.

|    | A                                                     | B          | C          |
|----|-------------------------------------------------------|------------|------------|
| 1  | <b>FARMERS BAGELS, INC.</b>                           |            |            |
| 2  | Результаты финансовой деятельности за первые два года |            |            |
| 3  |                                                       |            |            |
| 4  |                                                       | 1995       | 1996       |
| 5  | Оборотные фонды                                       |            |            |
| 6  | Наличные средства и их эквиваленты                    | 2 016 245  | 3 023 989  |
| 7  | Счета к получению                                     | 1 278 771  | 4 194 238  |
| 8  | Товарно-материальные запасы                           | 185 314    | 759 104    |
| 9  | Предоплаченные расходы и другие активы                | 392 116    | 1 006 169  |
| 10 |                                                       |            |            |
| 11 | Основные средства и оборудование                      |            |            |
| 12 | Себестоимость                                         | 4 000 000  | 13 030 853 |
| 13 | Минус накопленная амортизация                         | (400 000)  | (170 305)  |
| 14 | Чистая стоимость основных средств                     | 3 600 000  | 11 327 768 |
| 15 |                                                       |            |            |
| 16 | Всего активов                                         | 7 472 446  | 20 311 268 |
| 17 |                                                       |            |            |
| 18 |                                                       |            |            |
| 19 | Краткосрочные обязательства                           |            |            |
| 20 | Счета к оплате и начисленные расходы                  | 906 648    | 3 271 271  |
| 21 | Налог на прибыль к оплате                             | 157 935    | 423 486    |
| 22 | Другие обязательства                                  | 52 910     | 151 189    |
| 23 |                                                       |            |            |
| 24 | Долгосрочные обязательства                            | 846 058    | 8 597 874  |
| 25 |                                                       |            |            |
| 26 | Акционерный капитал                                   |            |            |
| 27 | Обыкновенные акции                                    | 4 610 999  | 4 610 999  |
| 28 | Нераспределенная прибыль                              | 897 896    | 3 256 449  |
| 29 | Всего обязательств и акционерного капитала            | 7 472 446  | 20 311 268 |
| 30 |                                                       |            |            |
| 31 |                                                       |            |            |
| 32 | Ведомость прибылей и убытков                          | 1995       | 1996       |
| 33 | Объем сбыта                                           |            |            |
| 34 | Сбыт продукции                                        | 6 076 345  | 18 977 564 |
| 35 | Другие доходы                                         | 131 326    | 176 111    |
| 36 | Общий доход от сбыта                                  | 6 207 671  | 19 153 675 |
| 37 |                                                       |            |            |
| 38 | Операционные расходы                                  |            |            |
| 39 | Себестоимость продукции                               | (246 1470) | (7839481)  |
| 40 | Амортизация                                           | (400 000)  | (130305)   |
| 41 | Общие и административные расходы, издержки сбыта      | (1866614)  | (6045369)  |
| 42 | Процентные выплаты по долгам                          | (50763)    | (84605)    |
| 43 | Проценты, начисленные по наличным средствам           | 100 812    | 171 362    |
| 44 | Прибыль до уплаты налогов                             | 1 529 636  | 4 052 496  |
| 45 | Учет налога на прибыль                                | (631740)   | (1693943)  |
| 46 | Прибыль после уплаты налогов                          | 897 896    | 2 358 553  |

Затем был выполнен анализ некоторых финансовых коэффициентов.

|    | A                                                        | B     | C     |
|----|----------------------------------------------------------|-------|-------|
| 1  | <b>FARMERS BAGELS, INC.</b>                              |       |       |
| 2  | Анализ финансовых коэффициентов                          |       |       |
| 3  |                                                          |       |       |
| 4  |                                                          | 1995  | 1996  |
| 5  | Оборотные фонды                                          |       |       |
| 6  | Счета к получению                                        | 20,6% | 21,9% |
| 7  | Товарно-материальные запасы                              | 3,0%  | 4,0%  |
| 8  | Предоплаченные расходы и другие активы                   | 6,3%  | 5,3%  |
| 9  |                                                          |       |       |
| 10 | Чистая стоимость основных средств, % от нового сбыта     | 64,4% | 69,8% |
| 11 |                                                          |       |       |
| 12 | Краткосрочные обязательства                              |       |       |
| 13 | Счета к оплате и начисленные расходы                     | 14,6% | 17,1% |
| 14 | Налог на прибыль к оплате (в % от начисленного)          | 25,0% | 25,0% |
| 15 | Другие обязательства                                     | 0,9%  | 0,8%  |
| 16 |                                                          |       |       |
| 17 | Операционные расходы                                     |       |       |
| 18 | Себестоимость продукции                                  | 39,7% | 40,9% |
| 19 | Общие и административные расходы, издержки сбыта         | 30,1% | 31,6% |
| 20 | Учет налога на прибыль (в % от прибыли до уплаты налога) | 41,3% | 41,8% |

### 4.3. Построение финансовой модели

Аналитики воспользовались вычисленными финансовыми коэффициентами из предыдущего раздела (а также дополнительной информацией, почерпнутой из переговоров между Buyout и Farmers Bagels) и построили финансовую модель для прогнозирования будущей финансовой эффективности фирмы Farmers Bagels. Для построения такой модели пришлось принять целый ряд перечисленных далее допущений.

- Разница между поступлениями от сбыта продукции и другими доходами игнорируется; рассматривается только совокупный доход. Консультанты решили, что не смогут спрогнозировать другие виды дохода с достаточной точностью. Прогноз сбыта выглядит следующим образом:

|    | В              | С          |
|----|----------------|------------|
| 1  |                |            |
| 2  | FARMERS BAGELS |            |
| 3  | ПРОГНОЗ СБЫТА  |            |
| 4  |                | Прогноз    |
| 5  | Год            | сбыта      |
| 6  | 1997           | 28 048 500 |
| 7  | 1998           | 42 021 000 |
| 8  | 1999           | 55 993 500 |
| 9  | 2000           | 69 966 000 |
| 10 | 2001           | 83 938 500 |

Аналитики не решились предсказывать сбыт далее 2001 г.; в результате получается задача о *конечной стоимости*, рассматриваемая в разделе 4.5.

- Себестоимость продаваемой продукции составляет 40% выручки от ее сбыта.
- Общие и административные расходы, издержки сбыта будут снижаться на 1% в год, с 32% от объема сбыта в 1996 г. до 28% в 2001 г.
- Расходы на выплату процентов по задолженностям составят 12% среднегодового долгового баланса, а доход от процентов составит 6% среднегодового баланса наличных средств и их эквивалентов.
- Налог на прибыль Farmers Bagels составит 41,5% от дохода компании.
- Консультанты посчитали, что фирме необходимо иметь “буферный фонд” наличных средств, хотя его объем может снижаться по мере роста компании. Они предсказали снижение процентной доли фонда наличных средств и их эквивалентов в объеме сбыта.

|    | А                                                     | В    | С    | Д    | Е    | F    | G    |
|----|-------------------------------------------------------|------|------|------|------|------|------|
| 17 | Год                                                   | 1996 | 1997 | 1998 | 1999 | 2000 | 2001 |
| 18 | Наличные средства и их эквиваленты, % от объема сбыта |      | 20%  | 15%  | 10%  | 10%  | 10%  |

- Объем дебиторской задолженности (счетов к получению) составит 22% от объема сбыта продукции.
- Доля расходов на товарно-материальные запасы возрастет до 5% от объема сбыта в течение следующих двух лет и останется на этом уровне.
- Расходы на предоплату упадут до уровня 5% объема сбыта.
- Объем погашения себестоимости основных средств и оборудования упадет с 70% от прироста объема сбыта в 1996 г. до 40% в 2001 г. Консультанты

пояснили, что такое падение будет вызвано повышением рентабельности при производстве бубликов.

- Амортизация будет линейной, на уровне 10% себестоимости основных средств.
- Кредиторская задолженность (счета к оплате) и начисленные расходы будут расти на 1% в год, пока не достигнут 20%.
- Кредиторская задолженность по налогу на прибыль останется на уровне 25% от суммы налога, начисленной за год. Эта статья представляет долю налогов за текущий год, которые фактически будут выплачены в следующем году.
- Другие суммы текущих (краткосрочных) обязательств составят 1% от объема сбыта.
- Компания не будет выплачивать дивиденды на протяжении следующих пяти лет и не будет создавать нового акционерного капитала. Таким образом, “замыкателем” модели является сумма задолженности.

Модель, построенная на основе этих допущений и прогнозов, показана на рисунке, приведенном ниже.

|    | A                                                                                                      | B           | C            | D            | E            | F            | G            |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 13 | <b>FARMERS BAGELS: ИСХОДНАЯ ГИПОТЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ</b>                                                  |             |              |              |              |              |              |
| 14 |                                                                                                        |             |              |              |              |              |              |
| 15 | Прогноз финансовых коэффициентов: все коэффициенты являются % от объема сбыта, если не указано другое. |             |              |              |              |              |              |
| 16 |                                                                                                        |             |              |              |              |              |              |
| 17 | Год                                                                                                    | 1996        | 1997         | 1998         | 1999         | 2000         | 2001         |
| 18 | Наличные средства и их эквиваленты, % от объема сбыта                                                  |             | 20%          | 15%          | 10%          | 10%          | 10%          |
| 19 | Счета к получению                                                                                      |             | 22%          |              |              |              |              |
| 20 | Товарно-материальные запасы                                                                            |             | 4,5%         | 5,0%         | 5,0%         | 5,0%         | 5,0%         |
| 21 | Предоплаченные расходы и другие оборотные активы                                                       |             | 5%           |              |              |              |              |
| 22 |                                                                                                        |             |              |              |              |              |              |
| 23 | Чистая стоимость основных средств, % от сбыта                                                          | 70%         | 65%          | 58%          | 51%          | 44%          | 40%          |
| 24 | Амортизация                                                                                            |             | 10%          |              |              |              |              |
| 25 |                                                                                                        |             |              |              |              |              |              |
| 26 | Счета к оплате и начисленные расходы                                                                   |             | 17%          | 18%          | 19%          | 20%          | 20%          |
| 27 | Налог на прибыль к оплате (в % от начисленного)                                                        |             | 25%          |              |              |              |              |
| 28 | Другие краткосрочные обязательства                                                                     |             | 1%           |              |              |              |              |
| 29 |                                                                                                        |             |              |              |              |              |              |
| 30 | Процентные выплаты по долгам                                                                           |             | 12%          |              |              |              |              |
| 31 | Проценты, начисленные по наличным средствам                                                            |             | 6%           |              |              |              |              |
| 32 | Себестоимость продукции                                                                                |             | 40%          |              |              |              |              |
| 33 | Общие и административные расходы, издержки сбыта                                                       |             | 32%          | 31%          | 30%          | 29%          | 28%          |
| 34 | Учет налога на прибыль (в % от прибыли до уплаты налога)                                               |             | 41,5%        |              |              |              |              |
| 35 |                                                                                                        |             |              |              |              |              |              |
| 36 |                                                                                                        | 1996        | 1997         | 1998         | 1999         | 2000         | 2001         |
| 37 | <b>Ведомость прибылей и убытков</b>                                                                    |             |              |              |              |              |              |
| 38 | Объем сбыта                                                                                            | 18 977 564  | 28 048 200   | 42 021 000   | 55 993 500   | 69 966 000   | 83 938 500   |
| 39 |                                                                                                        |             |              |              |              |              |              |
| 40 | <b>Операционные расходы</b>                                                                            |             |              |              |              |              |              |
| 41 | Себестоимость продукции                                                                                |             | (11 219 400) | (16 808 400) | (22 397 400) | (27 986 400) | (33 575 400) |
| 42 | Амортизация                                                                                            |             | (1 892 696)  | (2 703 101)  | (3 415 699)  | (4 030 489)  | (4 689 389)  |
| 43 | Общие и административные расходы, издержки сбыта                                                       |             | (8 975 520)  | (13 026 510) | (16 798 050) | (20 290 140) | (23 502 780) |
| 44 | Процентные выплаты по долгам                                                                           |             | (1 325 198)  | (1 782 358)  | (1 756 823)  | (1 216 577)  | (278 387)    |
| 45 | Проценты, начисленные по наличным средствам                                                            |             | 259 011      | 367 386      | 377 076      | 377 879      | 461 714      |
| 46 | Прибыль до уплаты налогов                                                                              |             | 4 894 697    | 8 058 017    | 11 982 604   | 16 820 273   | 22 454 258   |
| 47 | Учет налога на прибыль                                                                                 |             | (2 031 299)  | (3 344 077)  | (4 972 781)  | (6 980 413)  | (9 318 517)  |
| 48 | <b>Прибыль после уплаты налогов</b>                                                                    |             | 2 863 397    | 4 713 940    | 7 009 823    | 9 839 860    | 13 135 741   |
| 49 |                                                                                                        |             |              |              |              |              |              |
| 50 | <b>Балансовая ведомость</b>                                                                            |             |              |              |              |              |              |
| 51 | <b>Оборотные средства</b>                                                                              |             |              |              |              |              |              |
| 52 | Наличные средства и их эквиваленты                                                                     | 3 023 889   | 5 609 700    | 6 303 150    | 5 599 350    | 6 996 600    | 8 393 850    |
| 53 | Счета к получению                                                                                      | 4 194 238   | 6 170 670    | 9 244 620    | 12 318 570   | 15 392 520   | 18 466 470   |
| 54 | Товарно-материальные запасы                                                                            | 759 104     | 1 262 183    | 2 101 050    | 2 799 675    | 3 498 300    | 4 196 925    |
| 55 | Предоплаченные расходы и другие активы                                                                 | 1 006 169   | 1 402 425    | 2 101 050    | 2 799 675    | 3 498 300    | 4 196 925    |
| 56 | <b>Всего оборотных средств</b>                                                                         | 8 983 500   | 14 444 978   | 19 749 870   | 23 517 270   | 29 385 720   | 35 254 170   |
| 57 |                                                                                                        |             |              |              |              |              |              |
| 58 | <b>Основные средства и оборудование</b>                                                                |             |              |              |              |              |              |
| 59 | Себестоимость                                                                                          | 13 030 853  | 18 926 962   | 27 031 012   | 34 156 987   | 40 304 887   | 45 893 887   |
| 60 | Минус накопленная амортизация                                                                          | (1 703 085) | (3 595 782)  | (6 298 883)  | (9 714 581)  | (13 745 070) | (18 334 459) |
| 61 | Чистая стоимость основных средств                                                                      | 11 327 768  | 15 331 180   | 20 732 129   | 24 442 406   | 26 559 817   | 27 559 428   |
| 62 |                                                                                                        |             |              |              |              |              |              |
| 63 | <b>Всего активов</b>                                                                                   | 20 311 268  | 29 776 158   | 40 481 999   | 47 959 676   | 55 945 537   | 62 813 598   |
| 64 |                                                                                                        |             |              |              |              |              |              |
| 65 | <b>Краткосрочные обязательства</b>                                                                     |             |              |              |              |              |              |
| 66 | Счета к оплате и начисленные расходы                                                                   | 3 271 271   | 4 769 245    | 7 563 780    | 10 639 765   | 13 993 200   | 16 787 700   |
| 67 | Налог на прибыль к оплате                                                                              | 423 486     | 607 825      | 836 019      | 1 243 195    | 1 745 103    | 2 329 629    |
| 68 | Другие краткосрочные обязательства                                                                     | 151 189     | 280 485      | 420 210      | 559 935      | 699 560      | 839 385      |
| 69 | <b>Всего краткосрочных обязательств</b>                                                                | 3 845 946   | 5 556 555    | 8 820 009    | 12 441 895   | 16 437 863   | 19 956 714   |
| 70 |                                                                                                        |             |              |              |              |              |              |
| 71 | <b>Долгосрочные обязательства</b>                                                                      |             |              |              |              |              |              |
| 72 |                                                                                                        | 8 597 874   | 13 488 758   | 16 217 205   | 13 063 172   | 7 213 105    | (2 573 325)  |
| 73 |                                                                                                        |             |              |              |              |              |              |
| 74 | <b>Акционерный капитал</b>                                                                             |             |              |              |              |              |              |
| 75 | Обыкновенные акции                                                                                     | 4 610 999   | 4 610 999    | 4 610 999    | 4 610 999    | 4 610 999    | 4 610 999    |
| 76 | Неразмещенная прибыль                                                                                  | 3 256 449   | 6 119 846    | 10 833 786   | 17 843 609   | 27 693 469   | 40 819 210   |
| 77 | <b>Всего обязательств и акционерного капитала</b>                                                      | 20 311 268  | 29 776 158   | 40 481 999   | 47 959 676   | 55 945 537   | 62 813 598   |

### 4.3.1. Отрицательный долг

Обратите внимание, что в наших гипотетических моделях прогнозируется отрицательный баланс долгосрочной задолженности в 2001 году. Возникновение такого результата объясняется принципом построения модели. Замыкателем модели является долг, поэтому если фирме удалось заработать достаточно средств, то все долговые балансы выплачиваются, и сумма долга, необходимая для уравновешивания пассивной и активной части баланса, становится отрицательной. Этот результат режет глаз (потому что практически всегда долг в балансовой ведомости является положительным по определению), хотя в самой процедуре нет ничего ошибочного. Отрицательный долг просто означает, что у фирмы имеется положительный баланс наличных средств. Расчет по нашей модели в связи с этим усложняется, и не только из-за того, что проценты, выплачиваемые по задолженности (12%), превышают проценты, получаемые в виде дохода по активным средствам (6%), но еще и ввиду того, что компания желает всегда иметь некоторую минимальную сумму наличных средств в своем распоряжении. Решение этой задачи достигается с помощью схемы, изложенной в разделе 3.7, и нижеприведенных соображений.

- Фирма Farmers Bagels желает иметь в распоряжении некоторый минимальный объем наличных средств, равный определенной доле от объема выручки. Если общая сумма этого минимума средств *плюс* все остальные активы превышает текущий объем задолженности *плюс* акционерный капитал, то у фирмы нет долга.

- Если же, с другой стороны, выполняется соотношение

$$[\text{Доля наличных средств}] \cdot \text{Объем сбыта} + \text{Дебиторская задолженность} + \\ + \text{Товарно-материальные запасы} + \text{Предоплаченные расходы} + \text{Чистая стоимость основных средств} - \text{Краткосрочные обязательства} - \\ - \text{Обыкновенные акции} - \text{Нераспределенная прибыль} < 0$$

то долг устанавливается равным нулю. В этом случае

$$\text{Общая сумма обязательств и акционерного капитала} > \text{Дебиторская задолженность} + \text{Товарно-материальные запасы} + \text{Предоплаченные расходы} + \text{Чистая стоимость основных средств}$$

Разность между левой и правой частью данного неравенства и является суммой наличных средств (превышающей минимальный желательный баланс этих средств).

По этой методике получается следующая гипотетическая финансовая модель:

|    | A                                                                                                      | B                 | C                 | D                 | E                 | F                 | G                 |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 1  | <b>FARMERS BAGELS: ГИПОТЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ БЕЗ ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ДОЛГА</b>                                  |                   |                   |                   |                   |                   |                   |
| 2  |                                                                                                        |                   |                   |                   |                   |                   |                   |
| 3  | Прогноз финансовых коэффициентов: все коэффициенты являются % от объема сбыта, если не указано другое. |                   |                   |                   |                   |                   |                   |
| 4  |                                                                                                        |                   |                   |                   |                   |                   |                   |
| 5  | год                                                                                                    | 1996              | 1997              | 1998              | 1999              | 2000              | 2001              |
| 6  | Наличные средства и их эквиваленты                                                                     |                   | 20%               | 15%               | 10%               | 10%               | 10%               |
| 7  | Счета к получению                                                                                      |                   | 22%               |                   |                   |                   |                   |
| 8  | Товарно-материальные запасы                                                                            |                   | 4,5%              | 5,0%              | 5,0%              | 5,0%              | 5,0%              |
| 9  | Предоплаченные расходы и другие оборотные активы                                                       |                   | 5%                |                   |                   |                   |                   |
| 10 |                                                                                                        |                   |                   |                   |                   |                   |                   |
| 11 | Себестоимость основных средств, % от сбыта                                                             | 70%               | 65%               | 58%               | 51%               | 44%               | 40%               |
| 12 | Амортизация                                                                                            |                   | 10%               |                   |                   |                   |                   |
| 13 |                                                                                                        |                   |                   |                   |                   |                   |                   |
| 14 | Счета к оплате и начисленные расходы                                                                   |                   | 17%               | 18%               | 19%               | 20%               | 20%               |
| 15 | Налог на прибыль к оплате (в % от начисленного)                                                        |                   | 25%               |                   |                   |                   |                   |
| 16 | Другие краткосрочные обязательства                                                                     |                   | 1%                |                   |                   |                   |                   |
| 17 |                                                                                                        |                   |                   |                   |                   |                   |                   |
| 18 | Процентные выплаты по долгам                                                                           |                   | 12%               |                   |                   |                   |                   |
| 19 | Проценты, начисленные по наличным средствам                                                            |                   | 6%                |                   |                   |                   |                   |
| 20 | Себестоимость продукции                                                                                |                   | 40%               |                   |                   |                   |                   |
| 21 | Общие и административные расходы, издержки сбыта                                                       |                   | 32%               | 31%               | 30%               | 29%               | 28%               |
| 22 | Учет налога на прибыль (в % от прибыли до уплаты)                                                      |                   | 41,5%             |                   |                   |                   |                   |
| 23 |                                                                                                        |                   |                   |                   |                   |                   |                   |
| 24 |                                                                                                        |                   |                   |                   |                   |                   |                   |
| 25 | <b>Ведомость прибылей и убытков</b>                                                                    |                   |                   |                   |                   |                   |                   |
| 26 | Объем сбыта                                                                                            | 18 977 564        | 28 048 500        | 42 021 000        | 55 993 500        | 69 966 000        | 83 938 500        |
| 27 |                                                                                                        |                   |                   |                   |                   |                   |                   |
| 28 | <b>Операционные расходы</b>                                                                            |                   |                   |                   |                   |                   |                   |
| 29 | Себестоимость продукции                                                                                |                   | (11 219 400)      | (16 808 400)      | (22 397 400)      | (27 986 400)      | (33 575 400)      |
| 30 | Амортизация                                                                                            |                   | (1 892 696)       | (2 703 101)       | (3 415 699)       | (4 030 489)       | (4 589 389)       |
| 31 | Общие и административные расходы, издержки сбыта                                                       |                   | (8 976 520)       | (13 026 510)      | (16 788 050)      | (20 290 140)      | (23 502 780)      |
| 32 | Процентные выплаты по долгам                                                                           |                   | (1 325 198)       | (1 782 358)       | (1 766 823)       | (1 216 577)       | (432 786)         |
| 33 | Проценты, начисленные по наличным средствам                                                            |                   | 259 011           | 357 386           | 357 075           | 377 879           | 537 284           |
| 34 | Прибыль до уплаты налогов                                                                              |                   | 4 894 697         | 8 058 017         | 11 982 604        | 16 820 273        | 22 375 429        |
| 35 | Учет налога на прибыль                                                                                 |                   | (2 031 299)       | (3 344 077)       | (4 972 781)       | (6 980 413)       | (9 285 803)       |
| 36 | Прибыль после уплаты налогов                                                                           |                   | 2 863 397         | 4 713 940         | 7 009 823         | 9 839 860         | 13 089 626        |
| 37 |                                                                                                        |                   |                   |                   |                   |                   |                   |
| 38 | <b>Балансовая ведомость</b>                                                                            |                   |                   |                   |                   |                   |                   |
| 39 | <b>Оборотные средства</b>                                                                              |                   |                   |                   |                   |                   |                   |
| 40 | Наличные средства и их эквиваленты                                                                     | 3 023 989         | 5 609 700         | 6 303 150         | 5 599 350         | 6 996 600         | 10 912 882        |
| 41 | Счета к получению                                                                                      | 4 194 238         | 6 170 670         | 9 244 620         | 12 318 570        | 15 392 520        | 18 466 470        |
| 42 | Товарно-материальные запасы                                                                            | 759 104           | 1 262 183         | 2 101 050         | 2 789 675         | 3 498 300         | 4 196 925         |
| 43 | Предоплаченные расходы и другие активы                                                                 | 1 006 169         | 1 402 425         | 2 101 050         | 2 789 675         | 3 498 300         | 4 196 925         |
| 44 | <b>Всего оборотных средств</b>                                                                         | <b>8 983 500</b>  | <b>14 444 978</b> | <b>19 749 870</b> | <b>23 517 270</b> | <b>29 385 720</b> | <b>37 773 202</b> |
| 45 |                                                                                                        |                   |                   |                   |                   |                   |                   |
| 46 | <b>Основные средства и оборудование</b>                                                                |                   |                   |                   |                   |                   |                   |
| 47 | Себестоимость                                                                                          | 13 030 853        | 18 926 962        | 27 031 012        | 34 156 987        | 40 304 887        | 45 893 887        |
| 48 | Минус накопленная амортизация                                                                          | -1 703 085        | (3 595 782)       | (6 298 883)       | (9 714 581)       | (13 745 070)      | (18 334 459)      |
| 49 | <b>Чистая стоимость основных средств</b>                                                               | <b>11 327 768</b> | <b>15 331 180</b> | <b>20 732 129</b> | <b>24 442 405</b> | <b>26 559 817</b> | <b>27 559 428</b> |
| 50 |                                                                                                        |                   |                   |                   |                   |                   |                   |
| 51 | <b>Всего активов</b>                                                                                   | <b>20 311 268</b> | <b>29 776 158</b> | <b>40 481 999</b> | <b>47 959 675</b> | <b>55 945 537</b> | <b>65 332 630</b> |
| 52 |                                                                                                        |                   |                   |                   |                   |                   |                   |
| 53 |                                                                                                        |                   |                   |                   |                   |                   |                   |
| 54 | <b>Краткосрочные обязательства</b>                                                                     |                   |                   |                   |                   |                   |                   |
| 55 | Счета к оплате и начисленные расходы                                                                   | 3 271 271         | 4 768 245         | 7 563 780         | 10 638 765        | 13 993 200        | 16 787 700        |
| 56 | Налог на прибыль к оплате                                                                              | 423 486           | 507 825           | 836 019           | 1 243 195         | 1 745 103         | 2 321 451         |
| 57 | Другие краткосрочные обязательства                                                                     | 151 189           | 280 485           | 420 210           | 559 935           | 699 660           | 839 385           |
| 58 | <b>Всего краткосрочных обязательств</b>                                                                | <b>3 845 946</b>  | <b>5 556 555</b>  | <b>8 820 009</b>  | <b>12 441 895</b> | <b>16 437 963</b> | <b>19 948 536</b> |
| 59 |                                                                                                        |                   |                   |                   |                   |                   |                   |
| 60 | Долгосрочные обязательства                                                                             | 8 597 874         | 13 488 758        | 16 217 205        | 13 063 172        | 7 213 105         | -                 |
| 61 |                                                                                                        |                   |                   |                   |                   |                   |                   |
| 62 | <b>Акционерный капитал</b>                                                                             |                   |                   |                   |                   |                   |                   |
| 63 | Обыкновенные акции                                                                                     | 4 610 999         | 4 610 999         | 4 610 999         | 4 610 999         | 4 610 999         | 4 610 999         |
| 64 | Нераспределенная прибыль                                                                               | 3 256 449         | 6 119 846         | 10 833 786        | 17 843 609        | 27 683 469        | 40 773 095        |
| 65 | <b>Всего обязательств и акционерного капитала</b>                                                      | <b>20 311 268</b> | <b>29 776 158</b> | <b>40 481 999</b> | <b>47 959 675</b> | <b>55 945 537</b> | <b>65 332 630</b> |

#### 4.4. Вычисление потоков свободных средств (ПСС)

Как говорилось в разделе 3.3, поток свободных средств (ПСС) — это понятие, которое описывает *объем средств, порождаемый хозяйственной деятельностью фирмы*. Еще одна интерпретация этой величины — объем средств, который фирма порождала бы своей деятельностью, если бы не имела вообще никаких финансовых активов — никакого долга и никаких наличных средств или их эквивалентов.

Формальное определение ПСС приведено ниже.



## Поток свободных средств

Прибыль после вычета налогов (ППН)

Плюс амортизация

Плюс выплаченные дивиденды, за вычетом налогов

Минус полученные проценты, за вычетом налогов

Минус прирост текущих активов, за исключением наличных средств  
и их эквивалентов

Плюс прирост обязательств

Минус стоимость приобретенных основных средств (т.е. минус изменение  
в себестоимости основных средств)

ПСС фирмы часто бывают отрицательными, даже если фирма получает положительную прибыль. Эта тенденция видна особенно отчетливо в периоды быстрого роста, когда для расширения сбыта необходимо привлекать большие объемы новых активов. Именно так обстояло дело с Farmers Bagels в течение первых двух лет ее существования.

|    | A                                                                | B                | C                | D |
|----|------------------------------------------------------------------|------------------|------------------|---|
| 50 | <b>FARMERS BAGELS: ПОТОКИ СВОБОДНЫХ СРЕДСТВ ЗА 1995-1996 гг.</b> |                  |                  |   |
| 51 |                                                                  | 1995             | 1996             |   |
| 52 | Прибыль после уплаты налогов                                     | 897 896          | 2 358 553        |   |
| 53 | Плюс амортизация                                                 | 400 000          | 1 303 085        |   |
| 54 | Плюс проценты на долг после уплаты налогов                       | 29 798           | 49 241           |   |
| 55 | Минус % на наличные средства после налогов                       | (59177)          | (99733)          |   |
| 56 | Минус прирост оборотных средств                                  | (1856201)        | (5959511)        |   |
| 57 | Плюс прирост краткосрочных обязательств                          | 1 117 493        | 2 728 453        |   |
| 58 | Минус прирост себестоимости основных средств                     | (4000000)        | (9030853)        |   |
| 59 | <b>Потоки свободных средств</b>                                  | <b>(3470191)</b> | <b>(8650766)</b> |   |

За два первых года существования компания Farmers Bagels получала вполне нормальную прибыль, однако для увеличения чистого оборотного капитала (разницы между текущими активами и обязательствами) и приобретения новых основных средств требовался большой объем финансирования. Пока рост сбыта Farmers Bagels не замедлится или компания не расширится, следует ожидать сохранения этой тенденции.

В приведенной ниже таблице показан прогноз потоков свободных средств Farmers Bagels на следующие пять лет.

|    | A                                                   | B | C                  | D                  | E                | F                | G                 |
|----|-----------------------------------------------------|---|--------------------|--------------------|------------------|------------------|-------------------|
| 68 | <b>Прогноз потоков свободных средств, 1997-2001</b> |   | 1997               | 1998               | 1999             | 2000             | 2001              |
| 69 | Прибыль после уплаты налогов                        |   | 2 863 397          | 4 713 940          | 7 009 823        | 9 839 800        | 13 089 626        |
| 70 | Плюс амортизация                                    |   | 1 892 696          | 2 703 101          | 3 415 699        | 4 030 489        | 4 589 389         |
| 71 | Плюс проценты на долг после уплаты налогов          |   | 775 241            | 1 042 679          | 1 027 741        | 711 697          | 253 180           |
| 72 | Минус % на наличные средства после налогов          |   | (151 521)          | (209 071)          | (208 889)        | (221 059)        | (314 311)         |
| 73 | Минус прирост оборотных средств, кроме наличных     |   | (2 875 767)        | (4 611 443)        | (4 471 200)      | (4 471 200)      | (4 471 200)       |
| 74 | Плюс прирост краткосрочных обязательств             |   | 1 710 609          | 3 263 454          | 3 621 886        | 3 996 068        | 3 510 572         |
| 75 | Минус прирост себестоимости основных средств        |   | (5 896 108)        | (8 104 050)        | (7 125 975)      | (6 147 900)      | (5 589 000)       |
| 76 | <b>Потоки свободных средств</b>                     |   | <b>(1 681 453)</b> | <b>(1 201 388)</b> | <b>3 269 085</b> | <b>7 737 955</b> | <b>11 068 256</b> |

Только в 1999 г. ожидается первое положительное значение ПСС.

## 4.5. Вычисление средневзвешенной стоимости капитала

Чтобы оценить Farmers Bagels, мы вычислим ее средневзвешенную стоимость капитала, которая по определению равна

$$\text{СВСК} = r_E \frac{E}{E + D} + r_D (1 - T_C) \frac{D}{E + D},$$

где  $r_E$  — стоимость акционерного капитала фирмы;  $r_D$  — стоимость ее долга;  $T_C$  — предельная ставка корпоративного налога на прибыль;  $E$  и  $D$  — соответственно рыночная стоимость акционерного капитала и долг Farmers Bagels. Точность расчетов стоимости капитала для отдельной фирмы подвержена случайным погрешностям из-за множества факторов, которые не обязательно проявятся в будущем. Чтобы избежать этой проблемы, средневзвешенная стоимость капитала фирм в отрасли производства бубликов вычисляется нами по ценовой модели рынка капитала (ЦМРК). Как показано в следующей таблице, средний показатель  $\beta$  для фирм в той отрасли, в которой работает Farmers Bagels, равен 1,56, а СВСК в среднем по отрасли равна 20,43%:

|    | A                                               | B | C           | D           | E           | F           | G           |
|----|-------------------------------------------------|---|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 68 | Прогноз потоков свободных средств, 1997-2001    |   | 1997        | 1998        | 1999        | 2000        | 2001        |
| 69 | Прибыль после уплаты налогов                    |   | 2 863 397   | 4 713 940   | 7 009 823   | 9 839 800   | 13 089 626  |
| 70 | Плюс амортизация                                |   | 1 892 696   | 2 703 101   | 3 415 699   | 4 030 489   | 4 589 389   |
| 71 | Плюс проценты на долг после уплаты налогов      |   | 775 241     | 1 042 679   | 1 027 741   | 711 697     | 253 180     |
| 72 | Минус % на наличные средства после налогов      |   | (151 521)   | (209 071)   | (208 889)   | (221 059)   | (314 311)   |
| 73 | Минус прирост оборотных средств, кроме наличных |   | (2 875 767) | (4 611 443) | (4 471 200) | (4 471 200) | (4 471 200) |
| 74 | Плюс прирост краткосрочных обязательств         |   | 1 710 809   | 3 263 454   | 3 621 886   | 3 996 068   | 3 510 572   |
| 75 | Минус прирост себестоимости основных средств    |   | (5 896 108) | (8 104 050) | (7 125 975) | (6 147 900) | (5 589 000) |
| 76 | Потоки свободных средств                        |   | (1 681 453) | (1 201 388) | 3 269 085   | 7 737 955   | 11 088 256  |

Для оценивания Farmers Bagels мы берем среднюю СВСК по отрасли.

|    | A                                                    | B          | C                                      | D | E |
|----|------------------------------------------------------|------------|----------------------------------------|---|---|
| 79 | FARMERS BAGELS--ОЦЕНИВАНИЕ ПО СРЕДНЕЙ СВСК В ОТРАСЛИ |            |                                        |   |   |
| 80 | Стоимость капитала                                   | 20,43%     |                                        |   |   |
| 81 | Прирост потоков свободных средств после 2001 г.      | 5,00%      |                                        |   |   |
| 82 |                                                      |            |                                        |   |   |
| 83 | Приведенная стоимость ПСС, 1997-2001 гг.             | 8 444 910  | <-- =ЧПС(B80;C76;G76)*(1+B80)^0,5      |   |   |
| 84 | Конечная стоимость, после 2001                       | 32 632 731 | <-- =G76*(1+B81)/(B80-B81)*(1+B80)^4,5 |   |   |
| 85 | Цена предприятия = ПС дисконтных ПСС + Конеч. ст.    | 41 077 640 | <-- =СУММ(B83;B84)                     |   |   |
| 86 | Стоимость долга на конец 1996 г.                     | 8 597 874  | <-- =B80                               |   |   |
| 87 | Стоимость акционерного капитала                      | 32 479 766 | <-- =B85-B86                           |   |   |
| 88 |                                                      |            |                                        |   |   |
| 89 | Количество акций                                     | 5 000 000  |                                        |   |   |
| 90 | Цена акции                                           | 6,50       |                                        |   |   |

В расчете приведенной стоимости ПСС за 1997–2001 гг. предполагается, что в среднем движения денежных средств происходят в середине года; как показано в разделе 3.5.2, при этом необходимо умножить формулу приведенной стоимости в Excel на  $(1 + \text{СВСК})^{0,5}$ . Эта поправка внесена в ячейку B83. Если для приближения приведенной стоимости всех остальных ПСС за пределами прогнозируемого периода используется конечная стоимость, то следует внести аналогичную поправку (ячейка B87):

$$\text{Конечная стоимость} = \left\{ \frac{\text{ПСС}_{2001} \cdot (1 + g)}{\text{СВСК} - g} \right\} \cdot (1 + \text{СВСК})^{0,5},$$

где  $g$  обозначает конечный темп роста.

## 4.6. Анализ чувствительности решения

Расчеты, выполняемые при оценивании предприятий, предоставляют целый ряд возможностей для анализа чувствительности (или устойчивости) решения; такой анализ легко реализуется в Excel. Сейчас мы создадим двумерную таблицу данных для вычисления стоимости Farmers Bagels как функции от СВСК и конечного темпа роста.

|    | A                                                           | B          | C | D | E | F |
|----|-------------------------------------------------------------|------------|---|---|---|---|
| 77 |                                                             |            |   |   |   |   |
| 78 |                                                             |            |   |   |   |   |
| 79 | <b>FARMERS BAGELS--ОЦЕНИВАНИЕ ПО СРЕДНЕЙ СВСК В ОТРАСЛИ</b> |            |   |   |   |   |
| 80 | Стоимость капитала                                          | 20,43%     |   |   |   |   |
| 81 | Прирост потоков свободных средств после 2001 г.             | 5,00%      |   |   |   |   |
| 82 |                                                             |            |   |   |   |   |
| 83 | Приведенная стоимость ПСС, 1997-2001 гг.                    | 8 444 910  |   |   |   |   |
| 84 | Конечная стоимость, после 2001                              | 32 632 731 |   |   |   |   |
| 85 | Цена предприятия = ПС дисконт-ных ПСС + Конеч.ст.           | 41 077 640 |   |   |   |   |
| 86 | Стоимость долга на конец 1996 г.                            | 8 597 874  |   |   |   |   |
| 87 | Стоимость акционерного капитала                             | 32 479 766 |   |   |   |   |
| 88 |                                                             |            |   |   |   |   |
| 89 | Количество акций                                            | 5 000 000  |   |   |   |   |
| 90 | Цена акции                                                  | 6,50       |   |   |   |   |

**Таблица подстановки**

Подставлять значения по столбцам в: \$B\$80

Подставлять значения по строкам в: \$B\$81

OK Отмена

Вот такая таблица данных получается в результате:

|     | A                                                                                             | B    | C     | D     | E     | F    | G    | H    | I    |
|-----|-----------------------------------------------------------------------------------------------|------|-------|-------|-------|------|------|------|------|
| 108 | <b>АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ: ЦЕНА АКЦИИ КАК ФУНКЦИЯ КОНЕЧНОГО ПРИРОСТА ОБЪЕМА СБЫТА И СВСК</b> |      |       |       |       |      |      |      |      |
| 109 |                                                                                               | =B90 | СВСК  |       |       |      |      |      |      |
| 110 |                                                                                               | 6,50 | 15%   | 17%   | 19%   | 21%  | 23%  | 25%  | 27%  |
| 111 | Конечный прирост объема сбыта                                                                 | 0%   | 8,23  | 6,63  | 5,39  | 4,40 | 3,60 | 2,95 | 2,40 |
| 112 |                                                                                               | 2%   | 9,62  | 7,63  | 6,14  | 4,97 | 4,05 | 3,30 | 2,68 |
| 113 |                                                                                               | 4%   | 11,52 | 9,94  | 7,08  | 5,68 | 4,59 | 3,72 | 3,01 |
| 114 |                                                                                               | 6%   | 14,26 | 10,73 | 8,32  | 6,57 | 5,25 | 4,23 | 3,41 |
| 115 |                                                                                               | 8%   | 16,57 | 13,31 | 10,00 | 7,73 | 6,09 | 4,85 | 3,89 |
| 116 |                                                                                               | 10%  | 26,33 | 17,37 | 12,43 | 9,32 | 7,19 | 5,66 | 4,49 |

Еще один анализ чувствительности можно провести, выбирая различные заменители конечной стоимости Farmers Bagels.

|     | A                                                                          | B           | C                         | D |
|-----|----------------------------------------------------------------------------|-------------|---------------------------|---|
| 119 | <b>АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ПО РАЗЛИЧНЫМ ЗАМЕНИТЕЛЯМ КОНЕЧНОЙ СТОИМОСТИ</b> |             |                           |   |
| 120 | С использованием отношения "рыночная/балансовая стоимость"                 |             |                           |   |
| 121 | Приведенная стоимость ПСС, 1997-2001 гг.                                   | 8 444 910   | <-- =B83                  |   |
| 122 | Ср. по отрасли отношение рыночной стоимости к балансу                      | 1,5         |                           |   |
| 123 | Рыночная стоимость акц. капитала + долг на конец 2001 г.                   | 45 384 094  | <-- =G60+G63+G64          |   |
| 124 | Прогноз стоимости акц. капитала + долга, конец 2001 г.                     | 68 076 141  | <-- =B123*B122            |   |
| 125 | Балансы наличных средств на конец 2001 г.                                  | 10 912 882  | <-- =G40                  |   |
| 126 | Прогнозируемая конечная стоимость                                          | 78 989 023  | <-- =B125+B124            |   |
| 127 | СВСК                                                                       | 20,43%      | <-- =B80                  |   |
| 128 | Цена предприятия                                                           | 39 627 806  | <-- =B121+B126/(1+B127)^5 |   |
| 129 |                                                                            |             |                           |   |
| 130 | С использованием отношения "цена/доход"                                    |             |                           |   |
| 131 | Приведенная стоимость ПСС, 1997-2001 гг.                                   | 8 444 910   | <-- =B121                 |   |
| 132 | Среднее по отрасли отношение "цена/доход"                                  | 8           |                           |   |
| 133 | Прибыль на конец 2001 г.                                                   | 13 089 626  | <-- =G36                  |   |
| 134 | Прогнозируемая цена акц. капитала, конец 2001 г.                           | 104 717 010 | <-- =B132*B133            |   |
| 135 | Долг на конец 2001 г.                                                      | -           | <-- =G60                  |   |
| 136 | Баланс наличных средств на конец 2001 г.                                   | 10 912 882  | <-- =G40                  |   |
| 137 | Прогнозируемая конечная стоимость                                          | 115 629 892 | <-- =B136+B135+B134       |   |
| 138 | СВСК                                                                       | 20,43%      | <-- =B127                 |   |
| 139 | Цена предприятия                                                           | 54 092 707  | <-- =B131+B137/(1+B138)^5 |   |

## 4.7. Заключение

Гипотетическая модель — это очень удобное средство для прогнозирования потоков средств и создания комплексной схемы оценивания предприятия. Однако все это жонглирование цифрами не должно ввести вас в заблуждение насчет того, что финальная оценка стоимости является точной и единственно возможной. Для

корректной оценки фирмы автор модели должен искусно сочетать теорию финансов, принципы бухгалтерского учета и квалифицированные экспертные оценки.

---

## Упражнения

1. На основе оценочной модели для Farmers Bagels из раздела 4.5 постройте таблицы данных для следующего анализа чувствительности:
  - а) стоимости акционерного капитала Farmers Bagels к изменениям доли дебиторской задолженности в общем объеме сбыта;
  - б) стоимости акционерного капитала Farmers Bagels к изменениям в ставке налога на прибыль.
2. В модели из раздела 4.5 предполагается, что прирост в себестоимости основных средств является убывающей функцией объема сбыта. Измените модель с учетом предположения о том, что *чистая* стоимость основных средств является постоянной функцией объема сбыта.
3. Продлите модель из раздела 4.5 за пределы 2001 г. Покажите, что если Farmers Bagels продолжит невыплату дивидендов, то у нее накопится большой резерв наличных средств и их эквивалентов. “Решите” эту проблему, предположив, что начиная с 2002 г. фирма будет выплачивать фиксированный процент своей прибыли в качестве дивиденда.
4. Выполните анализ чувствительности оценки из раздела 4.6 к отношению между рыночной и балансовой стоимостью капитала. Назначьте пределы изменения этого отношения от 0,8 до 2.
5. Выполните анализ чувствительности оценки из раздела 4.6 к отношению “цена/доход”, варьируя его от 4 до 20.
6. Предположим, что средняя величина коэффициента ДБВНА (дохода без вычета налога и амортизации) в производстве бубликов равна 8. Используйте этот коэффициент для оценивания акций Farmers Bagels.

---

## 5 Финансовый анализ арендных отношений

---

### 5.1. Введение

Аренда — это вид договорных отношений, согласно которым владелец имущества (*арендодатель*) предоставляет его во временное пользование *арендатору*. В этой главе арендные отношения анализируются с точки зрения арендатора. Рассматриваются отношения долгосрочной аренды, при которой имущество большую часть своего срока существования находится в распоряжении арендатора. Наш воображаемый арендатор будет анализировать арендные отношения с хозяйственно-экономической точки зрения — как альтернативу простой покупке нужного ему имущества<sup>1</sup>.

В приведенном далее примере рассматривается компания, стоящая перед выбором — приобрести ли ей или взять в аренду некоторое необходимое оборудование. Предполагается, что текущие расходы и поступления, связанные с этим оборудованием, не зависят от того, кто им владеет, т.е. и владелец, и арендатор получали бы с него одинаковый доход и должны были бы нести одни и те же расходы по его обслуживанию. Как сказано в Бюллетене №13 Управления по стандартам финансового учета США, рассматриваемые нами арендные отношения “фактически передают все выгоды и риски, связанные с владением собственностью” арендатору.

Анализ, проводимый в этой главе, сосредоточен исключительно на потоках денежных средств, связанных с арендой. Предполагается, что арендодатель уплачивает налоги с дохода, получаемого им от сдачи в аренду, и получает налоговые льготы в связи с амортизацией имущества, а также что арендатор может декларировать арендную плату как свои расходы. В ходе анализа подразумевается, что налоговые органы считают арендодателя владельцем имущества, а арендатора — его пользователем. Как поясняется в приложении к этой главе, такое предположение не является тривиальным. Кроме вопросов анализа движений денежных средств, в связи с арендой возникает еще ряд сложных вопросов бухгалтерского учета, которые также кратко затрагиваются в приложении.

---

### 5.2. Элементарный пример

Суть нашего анализа легко понять из следующего простого примера. Пусть некоей компании для ее хозяйственной деятельности необходима машина стоимостью 540 тыс. долл. В случае ее приобретения амортизация будет исчисляться

---

<sup>1</sup> Таким образом, приводимый в этой главе анализ касается многих аспектов долгосрочной аренды, но неверен для краткосрочной — например, взятия напрокат автомобиля.

линейно, вплоть до достижения нулевой конечной стоимости. Ориентировочный срок службы машины — шесть лет. Ставка корпоративного налога на прибыль,  $T_C$ , выплачиваемого компанией, составляет 38%.

Вместо приобретения машины компания может рассмотреть возможность взятия ее в аренду на шесть лет. Некий арендодатель предложил компании такую машину в аренду за плату 130 тыс. долл. в год, с немедленной выплатой первого платежа и следующими пятью платежами в начале каждого из следующих пяти лет.

Один из подходов к анализу этой задачи (неправильный, как окажется позже) — это сравнить приведенные стоимости потоков денежных средств, соответствующих покупке и аренде. Компания придерживается мнения, что выплата арендной платы и налоговый щит от амортизации лишены финансового риска. Далее, предположим, что безрисковая ставка составляет 12%. Судя по результатам приведенного ниже расчета, компания должна приобрести данное имущество<sup>2</sup>.

$$\begin{aligned}\text{ЧПС(аренда)} &= \sum_{t=0}^5 \frac{(1 - T_C) \cdot \text{Арендная плата}}{(1 + 12\%)^t} = \\ &= \sum_{t=0}^5 \frac{(1 - T_C) \cdot 130000}{(1 + 12\%)^t} = 371145,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ЧПС(приобретение)} &= \text{Стоимость имущества} - \text{ПС(щит на амортизацию)} = \\ &= 540000 - \sum_{t=1}^6 \frac{0,38 \cdot 90000}{(1 + 12\%)^t} = 399390.\end{aligned}$$

Данный расчет показывает, что приобретение имущества предпочтительнее его аренды. Однако это заблуждение, поскольку здесь игнорируется тот факт, что аренда очень близко напоминает покупку имущества в сочетании с взятием ссуды. Поэтому в том случае, если сравнивается аренда (т.е. аналог приобретения с взятием ссуды) с простым приобретением без взятия ссуды, финансовые риски будут отличаться от фактических. Если компания имеет намерение взять имущество в аренду, то она также, возможно, не против взять в долг деньги для приобретения данного имущества. Взятие в долг изменит картину денежных потоков и может также дать определенные выгоды в плане налогов. Поэтому наше решение брать в аренду может измениться, если мы учтем возможность взятия ссуды.

В следующем разделе представлен метод анализа арендных отношений, в котором эта проблема решается путем введения гипотетического займа (ссуды), который бы породил те же потоки денежных средств и соответственно те же риски, что и взятие в аренду. Этот метод анализа арендных отношений называется *методом эквивалентного займа*.

<sup>2</sup> В данный момент мы предполагаем, что остаточная стоимость имущества в конце его срока службы равна нулю. В разделе 5.5 мы откажемся от этого предположения.

### 5.3. Аренда и финансирование фирмы: метод эквивалентного займа

В основе метода эквивалентного займа лежит идея вычисления такого гипотетического займа, который в определенном смысле был бы эквивалентен аренде<sup>3</sup>. После этого становится очевидно, что предпочтительнее: аренда или приобретение имущества.

Проще всего понять суть метода на примере. Для этого вернемся к ситуации, описанной ранее.

|    | A                                                   | B        | C                                            | D        | E        | F        | G        | H       |
|----|-----------------------------------------------------|----------|----------------------------------------------|----------|----------|----------|----------|---------|
| 1  | <b>МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНОГО ЗАЙМА</b>                   |          |                                              |          |          |          |          |         |
| 2  |                                                     |          |                                              |          |          |          |          |         |
| 3  | Стоимость актива                                    | 540 000  |                                              |          |          |          |          |         |
| 4  | Процентная ставка                                   | 12%      |                                              |          |          |          |          |         |
| 5  | Арендная плата                                      | 130 000  |                                              |          |          |          |          |         |
| 6  | Годовая амортизация                                 | 90 000   |                                              |          |          |          |          |         |
| 7  | Ставка налога                                       | 38%      |                                              |          |          |          |          |         |
| 8  |                                                     |          |                                              |          |          |          |          |         |
| 9  | Год                                                 | 0        | 1                                            | 2        | 3        | 4        | 5        | 6       |
| 10 |                                                     |          |                                              |          |          |          |          |         |
| 11 | <b>Денежные потоки от аренды за вычетом налогов</b> |          |                                              |          |          |          |          |         |
| 12 | Арендная плата                                      | -80 600  | -80 600                                      | -80 600  | -80 600  | -80 600  | -80 600  |         |
| 13 |                                                     |          |                                              |          |          |          |          |         |
| 14 | <b>Денежные потоки от приобретения</b>              |          |                                              |          |          |          |          |         |
| 15 | Стоимость актива                                    | -540 000 |                                              |          |          |          |          |         |
| 16 | Налоговый щит от амортизации                        |          | 34 200                                       | 34 200   | 34 200   | 34 200   | 34 200   | 34 200  |
| 17 | Чистый поток при покупке                            | -540 000 | 34 200                                       | 34 200   | 34 200   | 34 200   | 34 200   | 34 200  |
| 18 |                                                     |          |                                              |          |          |          |          |         |
| 19 | <b>Разностный поток</b>                             |          |                                              |          |          |          |          |         |
| 20 | Аренда минус покупка                                | 459 400  | -114 800                                     | -114 800 | -114 800 | -114 800 | -114 800 | -34 200 |
| 21 |                                                     |          |                                              |          |          |          |          |         |
| 22 | ВСД разностного потока                              | 9,60%    |                                              |          |          |          |          |         |
| 23 |                                                     |          |                                              |          |          |          |          |         |
| 24 | Решение??                                           | Купить   | =<=ЕСЛИ(B22<(1-B7)*B4;"Арендовать";"Купить") |          |          |          |          |         |

В строках 3–7 находятся параметры задачи. В таблице сравниваются денежные потоки (соответственно при аренде и при покупке) *после уплаты налогов*. Следует обратить внимание, что статьи расходов записываются со знаком “минус”, а статьи доходов (например, налоговый щит от амортизации) — со знаком “плюс”.

- Поток средств в случае аренды составляет  $(1 - \text{ставка налога}) * \text{арендная плата}$  в каждом из шести лет (с 0-го по 5-й).
- Поток средств в случае приобретения имущества равен его стоимости в нулевом году (это отток, а не приток, поэтому со знаком “минус”), а в годах с 1-го по 6-й — налоговому щиту от амортизации, который равен ставке налога, умноженной на амортизацию (это приток средств, поэтому со знаком “плюс”).

В строке 20 таблицы показан *разностный поток* — разница в потоках, возникающих в случае аренды и покупки. Из этой строки видно, что в случае аренды имущества вместо его приобретения получается следующее.

<sup>3</sup> Данный метод представили его авторы Майерс, Дилл и Ботиста в публикации Myers, Dill and Bautista (1976). Более доступное его изложение можно найти в Levy, Sarnat (1979).

- Приток средств в 0-м году составляет 459 400 долл. Этот приток соответствует средствам, *экономленным* благодаря аренде в 0-м году.
- Отток средств в 1–5-м годах составляет 114 800 долл., а в 6-м году — 34 200 долл. Этот отток соответствует *предельной себестоимости аренды* по сравнению с приобретением (с учетом налогов). Данная предельная себестоимость включает две составляющие: арендную плату с учетом налогов (80 600 долл.) и отсутствие налогового щита на амортизацию в случае аренды (34 200 долл.).

Таким образом, взятие имущества в аренду вместо его приобретения эквивалентно получению займа в сумме 459 400 долл. с ежегодными выплатами (с учетом налогов) в размере 114 800 долл. в течение 1–5-го года и выплатой 34 200 долл. на 6-м году (опять-таки с учетом налогов). Другими словами, аренду можно считать альтернативным методом финансирования. *Для корректного сравнения аренды с приобретением имущества следует сравнивать стоимость такого финансирования со стоимостью альтернативного финансирования.* Внутренняя ставка доходности в строке 22 — 9,60% — показывает уровень себестоимости финансирования, неявно заложенного в арендные отношения. Эта величина больше, чем себестоимость займа с учетом налогов, поскольку в последнем случае (при ставке налога 38% и процентной ставке займа 12%) эта себестоимость составляет 7,44%. Таким образом, наше заключение состоит в том, что приобретение выгоднее аренды.

### 5.3.1. Почему не аренда

Наверняка не всех убедили приведенные выше аргументы. Поэтому в данном разделе представлена дополнительная аргументация. Мы покажем, что если фирма может взять в долг под 12%, то она может одолжить *больше денег с тем же графиком выплат* (с учетом налогов), что и в случае сравнения аренды с простой покупкой. Данный гипотетический заем показан в следующей таблице:

|    | J   | K          | L          | M          | N          | O             | P       |
|----|-----|------------|------------|------------|------------|---------------|---------|
| 2  |     | Осн. сумма | Выплата    | Из которых |            | Возврат займа |         |
| 3  |     | в начале   | займа,     |            | Возврат    | за вычетом    |         |
| 4  | Год | года       | конец года | Проценты   | осн. суммы | налогов       |         |
| 5  | 1   | 487 443    | 137 027    | 58 493     | 78 534     | 114 800       | 114 800 |
| 6  | 2   | 408 909    | 133 446    | 49 069     | 84 377     | 114 800       | 114 800 |
| 7  | 3   | 324 532    | 129 599    | 38 944     | 90 655     | 114 800       | 114 800 |
| 8  | 4   | 233 877    | 125 465    | 28 065     | 97 400     | 114 800       | 114 800 |
| 9  | 5   | 136 478    | 121 023    | 16 377     | 104 646    | 114 800       | 114 800 |
| 10 | 6   | 31 832     | 35 652     | 3 820      | 31 832     | 34 200        | 34 200  |
| 11 |     |            |            |            |            |               |         |

В этой таблице (которая представляет собой разновидность таблиц выплат по займам, рассмотренных в главе 1) показана основная сумма гипотетической банковской ссуды, выданной под 12% годовых. В начале 0-го года (т.е. в то время, когда фирма приобретает имущество либо берет его в аренду) фирма берет, например, 487 443 долл., в долг у банка. В конце года фирма выплачивает банку сумму в 137 027 долл., из которой 58 493 долл. составляют проценты (эта цифра равна сумме 487 443 долл., умноженной на 12%), а остальные 78 534 долл. идут



в счет погашения основной суммы. Чистый, с учетом долга, возврат за первый год — в предположении полной облагаемости процентных выплат налогом — составляет  $(1 - 38\%) \cdot 58\,493 + 78\,534 = 114\,800$ . Эта сумма, разумеется, равна разностному потоку с учетом налогов, вычисленному в нашей исходной таблице.

Выплаты в последующие годы вычисляются аналогичным образом. В начале 6-го года от основной суммы долга остается 31 832 долл.; эта сумма полностью выплачивается к концу года, причем выплата с учетом налога составляет 34 200 долл.

В чем смысл этого примера? Если фирма рассматривает вопрос взятия в аренду, чтобы получить приток средств от этой аренды в сумме 459 400 долл., то ей следует вместо этого взять ссуду в банке в размере 487 443 долл. под 12% годовых; эту ссуду она сможет выплатить по той же схеме движения средств (с учетом налогов), которая заложена в аренду. Окончательный вывод: все равно приобретение имущества выгоднее его аренды.

Таблица выплаты займа строилась следующим образом. Основная сумма в начале каждого года с 1-го по 6-й равна приведенной стоимости оттоков денежных средств при аренде, дисконтированной по ставке  $(1 - 38\%) \cdot 12\%$ . Таким образом, например,

$$\begin{aligned} 487443 &= \sum_{t=1}^5 \frac{114800}{[1 + (1 - 0,38) \cdot 0,12]^t} + \frac{34200}{[1 + (1 - 0,38) \cdot 0,12]^6}, \\ 408909 &= \sum_{t=1}^4 \frac{114800}{[1 + (1 - 0,38) \cdot 0,12]^t} + \frac{34200}{[1 + (1 - 0,38) \cdot 0,12]^5} \\ &\vdots \\ 31832 &= \frac{34200}{[1 + (1 - 0,38) \cdot 0,12]} \end{aligned}$$

Как только становится известна основная сумма в начале каждого года, восстановить остальные столбцы уже нетрудно.

Проценты =  $12\% \times$  Основная сумма в начале года.

Общая сумма выплаты = Проценты за год  $t$  + Выплата осн. суммы за год  $t$ .

Выплата с учетом налогов, год  $t$  =  $(1 - \text{ставка налога}) \cdot$  Проценты +  
+ Выплата осн. суммы

#### 5.4. Задача для арендодателя: расчет максимальной приемлемой величины арендной платы

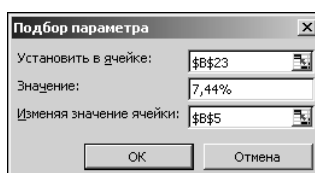
Задача анализа арендных отношений со стороны арендодателя обратна к задаче арендатора.

- Арендатору необходимо решить — при заданной величине арендной платы за арендуемое имущество, — что для него предпочтительнее, приобрести имущество или арендовать его.
- Арендодателю необходимо решить, какая *минимальная арендная плата* оправдывает приобретение имущества с целью сдачи его в аренду.

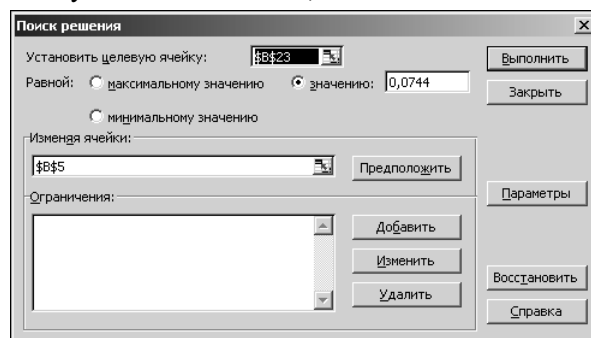
Один из способов решить задачу арендодателя — это выполнить расчет, обратный предыдущему. Воспользуемся функцией Excel Подбор параметра (Goal Seek), которая активизируется из меню Сервис (Tools), и получим с ее помощью сумму минимально допустимой арендной платы в размере 121 047 долл.

|    | A                                                   | B          | C                                                          | D        | E        | F        | G        | H       |
|----|-----------------------------------------------------|------------|------------------------------------------------------------|----------|----------|----------|----------|---------|
| 1  | РАСЧЕТ МАКСИМАЛЬНО ПРИЕМЛЕМОЙ АРЕНДНОЙ ПЛАТЫ        |            |                                                            |          |          |          |          |         |
| 2  |                                                     |            |                                                            |          |          |          |          |         |
| 3  | Стоимость актива                                    | 540 000    |                                                            |          |          |          |          |         |
| 4  | Процентная ставка                                   | 12%        |                                                            |          |          |          |          |         |
| 5  | Арендная плата                                      | 121 047    | <-- Вычисляется "Поиском решения" или "Подбором параметра" |          |          |          |          |         |
| 6  | Годовая амортизация                                 | 90 000     |                                                            |          |          |          |          |         |
| 7  | Ставка налога                                       | 38%        |                                                            |          |          |          |          |         |
| 8  | Процентная ставка с учетом налога                   | 7,44%      |                                                            |          |          |          |          |         |
| 9  |                                                     |            |                                                            |          |          |          |          |         |
| 10 | Год                                                 | 0          | 1                                                          | 2        | 3        | 4        | 5        | 6       |
| 11 |                                                     |            |                                                            |          |          |          |          |         |
| 12 | <b>Денежные потоки от аренды за вычетом налогов</b> |            |                                                            |          |          |          |          |         |
| 13 | Арендная плата                                      | -75 049    | -75 049                                                    | -75 049  | -75 049  | -75 049  | -75 049  |         |
| 14 |                                                     |            |                                                            |          |          |          |          |         |
| 15 | <b>Денежные потоки от приобретения</b>              |            |                                                            |          |          |          |          |         |
| 16 | Стоимость актива                                    | -540 000   |                                                            |          |          |          |          |         |
| 17 | Налоговый щит от амортизации                        |            | 34 200                                                     | 34 200   | 34 200   | 34 200   | 34 200   | 34 200  |
| 18 | Чистый поток при покупке                            | -540 000   | 34 200                                                     | 34 200   | 34 200   | 34 200   | 34 200   | 34 200  |
| 19 |                                                     |            |                                                            |          |          |          |          |         |
| 20 | <b>Разностный поток</b>                             |            |                                                            |          |          |          |          |         |
| 21 | Аренда минус покупка                                | 464 951    | -109 249                                                   | -109 249 | -109 249 | -109 249 | -109 249 | -34 200 |
| 22 |                                                     |            |                                                            |          |          |          |          |         |
| 23 | ВСД разностного потока                              | 7,44%      | <-- =ВСД(B21:H21;0)                                        |          |          |          |          |         |
| 24 |                                                     |            |                                                            |          |          |          |          |         |
| 25 | Решение??                                           | Арендовать | <-- =ЕСЛИ(B23<(1-B7)*B4;"Арендовать";"Купить")             |          |          |          |          |         |

Вот как должны выглядеть параметры в окне Подбора параметра:



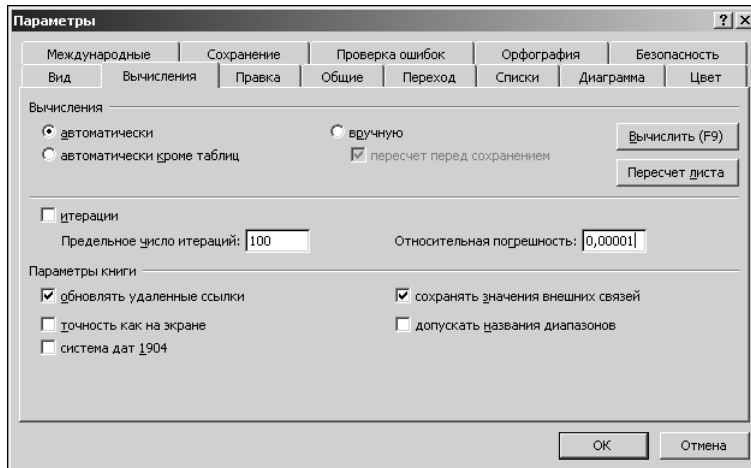
Если же для решения проблемы используется функция Поиск решения (Solver), то его окно будет выглядеть так, как показано ниже.



Симметрия двух задач — арендатора и арендодателя — предполагает, что если арендатор хочет взять имущество в аренду, то арендодателю будет невыгодно приобретать его с целью сдачи. Однако в некоторых случаях система начисления амортизации и разница в налоговых ставках для арендатора и арендодателя делают арендные отношения выгодными для обеих сторон. В упражнениях к этой главе приведен пример на эту тему.

### Некоторые особенности функций Поиска решения (Solver) и Подбора параметра (Goal Seek)

1. Ни одна из этих (в целом очень хороших) функций Excel не воспринимает формулы в полях, задающих целевое значение. Так, в данном примере хотелось бы записать в поле Значение (To value) окна Подбор параметра формулу  $= (1-B7) * B4$ , но этот способ не сработает: необходимо указывать числовое значение, в данном случае процентную ставку с учетом налога.
2. Возможно, придется некоторое время “поиграть” с параметрами в окне Сервис⇒Параметры⇒Вычисления (Tools⇒Options⇒Calculation), чтобы добиться достаточной точности расчета, при которой значение в ячейке B23 составит ровно 7,44%. Если приемлемого ответа добиться не удастся, увеличьте значение, заданное в поле Относительная погрешность (Maximum change).



3. Функция Подбор параметра не сохраняет заданные параметры от вызова к вызову. Поэтому придется каждый раз заново вводить данные. А вот модуль Поиск решения свои параметры запоминает.

## 5.5. Остаточная стоимость имущества и другие соображения

До сих пор в нашем примере игнорировалась остаточная стоимость имущества — его ожидаемая рыночная стоимость после окончания срока аренды. Чисто технически совсем нетрудно включить остаточную стоимость в расчеты (правда, необходимо соблюдать осторожность — см. предупреждение после следующего численного примера). Предположим для примера, что имущество будет иметь в 7-м году рыночную стоимость 100 тыс. долл.; считая эту сумму полностью облагаемой налогом (в конце концов, за предыдущие шесть лет мы начислили амортизацию вплоть до нуля), получаем остаточную стоимость с учетом налога, равную  $(1 - \text{ставка налога}) * 100 \text{ тыс. долл.} = 62 \text{ тыс. долл.}$

|    | A                                                   | B        | C                                                     | D        | E        | F        | G        | H       | I       |
|----|-----------------------------------------------------|----------|-------------------------------------------------------|----------|----------|----------|----------|---------|---------|
| 1  | <b>ОСТАТОЧНАЯ СТОИМОСТЬ ПРИ АНАЛИЗЕ АРЕНДЫ</b>      |          |                                                       |          |          |          |          |         |         |
| 2  |                                                     |          |                                                       |          |          |          |          |         |         |
| 3  | Стоимость актива                                    | 540 000  |                                                       |          |          |          |          |         |         |
| 4  | Процентная ставка                                   | 12%      |                                                       |          |          |          |          |         |         |
| 5  | Арендная плата                                      | 121 048  |                                                       |          |          |          |          |         |         |
| 6  | Годовая амортизация                                 | 90 000   | Полная амортизация за 6 лет                           |          |          |          |          |         |         |
| 7  | Ставка налога                                       | 38%      |                                                       |          |          |          |          |         |         |
| 8  | Остаточная стоимость                                | 100 000  | Реализуется на 7-м году; полностью облагается налогом |          |          |          |          |         |         |
| 9  |                                                     |          |                                                       |          |          |          |          |         |         |
| 10 | Год                                                 | 0        | 1                                                     | 2        | 3        | 4        | 5        | 6       | 7       |
| 11 |                                                     |          |                                                       |          |          |          |          |         |         |
| 12 | <b>Денежные потоки от аренды за вычетом налогов</b> |          |                                                       |          |          |          |          |         |         |
| 13 | Арендная плата                                      | -75 050  | -75 050                                               | -75 050  | -75 050  | -75 050  | -75 050  |         |         |
| 14 |                                                     |          |                                                       |          |          |          |          |         |         |
| 15 | <b>Денежные потоки от приобретения</b>              |          |                                                       |          |          |          |          |         |         |
| 16 | Стоимость актива                                    | -540 000 |                                                       |          |          |          |          |         |         |
| 17 | Налоговый щит от амортизации                        |          | 34 200                                                | 34 200   | 34 200   | 34 200   | 34 200   | 34 200  |         |
| 18 | Остат. стоимость с учетом налогов                   |          |                                                       |          |          |          |          |         | 62 000  |
| 19 | Чистый поток при покупке                            | -540 000 | 34 200                                                | 34 200   | 34 200   | 34 200   | 34 200   | 34 200  | 62 000  |
| 20 |                                                     |          |                                                       |          |          |          |          |         |         |
| 21 | <b>Разностный поток</b>                             |          |                                                       |          |          |          |          |         |         |
| 22 | Аренда минус покупка                                | 464 950  | -109 250                                              | -109 250 | -109 250 | -109 250 | -109 250 | -34 200 | -62 000 |
| 23 |                                                     |          |                                                       |          |          |          |          |         |         |
| 24 | ВСД разностного потока                              | 10,02%   | <-- =ВСД(В22;I22;0)                                   |          |          |          |          |         |         |
| 25 |                                                     |          |                                                       |          |          |          |          |         |         |
| 26 | Решение??                                           | Купить   | <-- =ЕСЛИ(В24<(1-В7)*В4;"Арендовать";"Купить")        |          |          |          |          |         |         |

Неудивительно, что перспектива получения дополнительных поступлений от владения имуществом делает аренду еще менее привлекательным вариантом, чем раньше (разницу можно заметить по увеличению внутренней ставки доходности разностного денежного потока в ячейке В24 с 9,60% в первоначальном примере до 10,02%).

Однако здесь следует соблюдать особую осторожность. В таблице остаточная стоимость по умолчанию считается таким же гарантированным притоком средств, что и налоговый щит на амортизацию, а также арендная плата. А это предположение как раз может оказаться далеким от истины! Хорошего, практически надежного решения этой проблемы не существует. На скорую руку можно предложить умножить сумму 100 тыс. долл. на некий коэффициент, меньший единицы, который будет выражать негарантированность ликвидности имущества за его остаточную стоимость. На жаргоне финансистов он называется “коэффициентом поправки на надежность” (*certainty-equivalence factor*), и упоминания о

нем можно найти в любой серьезной публикации по финансам<sup>4</sup>. В последней таблице, приводимой в этой главе, коэффициент приведения для остаточной стоимости арендуемого имущества принимается равным 0,7.

|    | A                                                                       | B        | C                                                     | D        | E        | F        | G        | H       | I       | J                 |
|----|-------------------------------------------------------------------------|----------|-------------------------------------------------------|----------|----------|----------|----------|---------|---------|-------------------|
| 1  | <b>ОСТАТОЧНАЯ СТОИМОСТЬ ПРИ АНАЛИЗЕ АРЕНДЫ - поправка на надежность</b> |          |                                                       |          |          |          |          |         |         |                   |
| 2  |                                                                         |          |                                                       |          |          |          |          |         |         |                   |
| 3  | Стоимость актива                                                        | 540 000  |                                                       |          |          |          |          |         |         |                   |
| 4  | Процентная ставка                                                       | 12%      |                                                       |          |          |          |          |         |         |                   |
| 5  | Арендная плата                                                          | 121 048  |                                                       |          |          |          |          |         |         |                   |
| 6  | Годовая амортизация                                                     | 90 000   | Полная амортизация за 6 лет                           |          |          |          |          |         |         |                   |
| 7  | Ставка налога                                                           | 38%      |                                                       |          |          |          |          |         |         |                   |
| 8  | Остаточная стоимость                                                    | 100 000  | Реализуется на 7-м году; полностью облагается налогом |          |          |          |          |         |         |                   |
| 9  | Поправочный коэффициент                                                 | 0,7      | Коэффициент поправки на надежность                    |          |          |          |          |         |         |                   |
| 10 |                                                                         |          |                                                       |          |          |          |          |         |         |                   |
| 11 | Год                                                                     | 0        | 1                                                     | 2        | 3        | 4        | 5        | 6       | 7       |                   |
| 12 |                                                                         |          |                                                       |          |          |          |          |         |         |                   |
| 13 | <b>Денежные потоки от аренды за вычетом налогов</b>                     |          |                                                       |          |          |          |          |         |         |                   |
| 14 | Арендная плата                                                          | -75 050  | -75 050                                               | -75 050  | -75 050  | -75 050  | -75 050  |         |         |                   |
| 15 |                                                                         |          |                                                       |          |          |          |          |         |         |                   |
| 16 | <b>Денежные потоки от приобретения</b>                                  |          |                                                       |          |          |          |          |         |         |                   |
| 17 | Стоимость актива                                                        | -540 000 |                                                       |          |          |          |          |         |         |                   |
| 18 | Налоговый щит от амортизации                                            |          | 34 200                                                | 34 200   | 34 200   | 34 200   | 34 200   | 34 200  |         |                   |
| 19 | Остат. стоимость с учетом налогов                                       |          |                                                       |          |          |          |          |         | 43 400  | <-- =(1-B7)*B8*B9 |
| 20 | Чистый поток при покупке                                                | -540 000 | 34 200                                                | 34 200   | 34 200   | 34 200   | 34 200   | 34 200  | 43 400  |                   |
| 21 |                                                                         |          |                                                       |          |          |          |          |         |         |                   |
| 22 | <b>Разностный поток</b>                                                 |          |                                                       |          |          |          |          |         |         |                   |
| 23 | Аренда минус покупка                                                    | 464 950  | -109 250                                              | -109 250 | -109 250 | -109 250 | -109 250 | -34 200 | -43 400 |                   |
| 24 |                                                                         |          |                                                       |          |          |          |          |         |         |                   |
| 25 | ВСД разностного потока                                                  | 9,30%    | <-- =ВСД(B23:I23,0)                                   |          |          |          |          |         |         |                   |
| 26 |                                                                         |          |                                                       |          |          |          |          |         |         |                   |
| 27 | Решение??                                                               | Купить   | <-- =ЕСЛИ(B25<(1-B7)*B4;"Арендовать";"Купить")        |          |          |          |          |         |         |                   |

## Упражнения

- Пусть ваша компания рассматривает вопрос приобретения или аренды имущества стоимостью 1 млн. долл. В случае его приобретения амортизация будет начисляться по линейной схеме в течение шести лет вплоть до нулевой остаточной стоимости. Компания-арендодатель предлагает данное имущество в аренду за 300 тыс. долл. в год. Первая выплата арендной платы должна состояться в момент заключения договора аренды (т.е. в 0-м году), а оставшиеся пять выплат должны быть сделаны в начале 1–5-го года. Ваша компания уплачивает налог по ставке  $T_C = 40\%$  и может взять ссуду в банке под 10% годовых. Вопросы:
  - следует ли вашей компании приобрести указанное имущество или взять его в аренду?
  - на какую максимальную арендную плату следует согласиться?
- Корпорация ABC рассматривает вопрос аренды некоторого имущества у корпорации XYZ. Вот все данные, имеющие отношение к делу:

<sup>4</sup> Дальнейшие ссылки по этому коэффициенту см. в Brealey, Myers (1996, с. 225). Однако следует заметить, что ни та публикация, ни наша книга (ни какая-либо другая) не содержат точных указаний, как же вычислять этот коэффициент. Тут все зависит от того, как именно учитывается риск.

|                                   |                                                                                                                                                                               |
|-----------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Стоимость имущества               | 1 000 000 долл.                                                                                                                                                               |
| График амортизации                | 1-й год — 20%                                                                                                                                                                 |
|                                   | 2-й год — 32%                                                                                                                                                                 |
|                                   | 3-й год — 19,20%                                                                                                                                                              |
|                                   | 4-й год — 11,52%                                                                                                                                                              |
|                                   | 5-й год — 11,52%                                                                                                                                                              |
|                                   | 6-й год — 5,76%                                                                                                                                                               |
| Срок аренды                       | 6 лет                                                                                                                                                                         |
| Арендная плата                    | 200 тыс. долл. в год, с выплатой в начале 0-го,<br>1-го, ..., 5-го года                                                                                                       |
| Остаточная стоимость<br>имущества | Ноль                                                                                                                                                                          |
| Налоговые ставки                  | Для ABC: $T_C = 0\%$ (корпорация использует схему<br>переноса налоговых выплат, не позволяющую ей<br>пользоваться дополнительными налоговыми щитами)<br>Для XYZ: $T_C = 40\%$ |

Покажите, что договор взаимовыгоден: компании ABC выгодно взять имущество в аренду, а компании XYZ — приобрести его, чтобы сдать в аренду ABC.

- Продолжаем анализ того же примера. Найти *наибольшую арендную плату*, которую готова заплатить компания ABC, и *наименьшую*, которая удовлетворит компанию XYZ.
- Выполните анализ чувствительности (с использованием таблиц данных, которые подробно рассмотрены в главе 26) по коэффициенту поправки на надежность из раздела 5.5 и покажите, что внутренняя ставка доходности разностного денежного потока изменяется в зависимости от него.

---

## Приложение. Налоговые и бухгалтерские аспекты арендных отношений

В этой главе рассматривается случай, когда арендодатель удерживает за собой налоговые преимущества, связанные с владением имуществом. Другими словами, арендодатель может начислять амортизацию на сдаваемое в аренду имущество, а арендатор вычитает арендную плату как расход из своего дохода. Чтобы все это могло иметь место, очень важно, чтобы налоговый орган, IRS (Internal Revenue Service — Налоговое управление США), признал данные арендные отношения *истинной арендой*.

Хотя IRS время от времени меняет те или иные установленные ею правила, все же принцип в их основе остается неизменным: арендатору следует предоставлять преимущества, связанные с владением имуществом, только в том случае, если он также принимает на себя часть соответствующего хозяйственного риска. На основе этого принципа налоговое управление разработало серию тестов, с помощью которых проверяет, в достаточной ли степени арендодатель передал арендатору риск, связанный с владением имуществом. Если это именно так, то IRS считает

договор “аренды” эквивалентом договора купли-продажи между “арендодателем” и “арендатором”. Если не весь риск, связанный с владением имуществом, передан арендатору, то аренда является истинной, и к ней применим выполненный в этой главе анализ.

Разъясняющий документ Revenue Ruling 55-540 устанавливает семь условий, при выполнении которых договорные отношения считаются куплей-продажей, а не арендой, с точки зрения налоговой практики.

- Отдельные части арендной платы непосредственно связаны с процентными поступлениями, которые должен получить арендатор с используемого имущества.
- После выплаты установленной суммы арендной платы арендатор получает право собственности на имущество.
- Существенная часть покупной цены имущества выплачивается в виде арендной платы за относительно короткий срок от момента установления арендных отношений.
- *Установленная арендная плата существенно превосходит “разумную” условно-расчетную арендную плату.*
- Присутствует опцион выгодной цены на покупку: курс премий номинален по отношению к справедливой рыночной цене имущества в момент, когда опцион может быть исполнен.
- Некоторая часть арендной платы обозначена как процентные выплаты.
- Аренда может возобновляться за номинальную арендную плату в течение срока полезной службы имущества.

В дополнение к этим условиям документ Revenue Ruling 55-541 регулирует соотношение между сроком аренды и сроком полезной службы имущества. В целом договорные отношения считаются условной куплей-продажей, а не арендой, если срок полезного использования имущества не превосходит срок аренды.

Один из составителей договоров аренды утверждает, что IRS обычно классифицирует арендные отношения как истинную аренду при выполнении всех критериев, приведенных ниже.

- Расчетная рыночная цена арендуемого имущества по окончании срока аренды составляет не менее 20% исходной стоимости этого имущества.
- Срок аренды не превосходит 80% расчетного срока полезной службы имущества.
- Отсутствует опцион выгодной цены на покупку.
- Доля владения арендодателя в сдаваемом в аренду имуществе составляет не менее 20%.

### **Арендные отношения с точки зрения бухгалтерии**

Бухгалтеры считают арендные отношения неудобными для учета. До выпуска в 1976 году Бюллетеня №13 (Statement 13) Управления по стандартам финансо-

вого учета (Financial Accounting Standards Board — FASB) фирмы, как правило, вообще не включали арендованное имущество в свои балансовые отчеты и указывали факт аренды того или иного имущества только в сносках-примечаниях к финансовым отчетам. Такая практика создала несоответствие в бухгалтерском учете аренды и приобретения имущества в долг. Поскольку данные виды договорных хозяйственных отношений имеют очень много общего, такое несоответствие является нелогичным.

В Бюллетене №13 предпринимается попытка решения этой проблемы. Данный Бюллетень написан длинно и сложно, и подробное изложение предлагаемых в нем решений выходит за рамки нашей книги. Поэтому здесь будет дан только набросок решения проблемы согласно этому документу, а в следующей главе будет рассмотрена трактовка аренды имущества, частично приобретенного в кредит, согласно ему же.

Основная идея, лежащая в основе трактовки аренды согласно Бюллетеню №13, заключается в том, что *в некоторых случаях* арендатор должен включать арендованное имущество в свою балансовую ведомость, *даже если официально имущество принадлежит другому юридическому лицу*. Так следует поступать в случаях, когда хозяйственная сущность договорных отношений аренды (а не юридическая их сторона) делает арендатора фактическим владельцем имущества. В качестве примера приведем непрерывную аренду автомобиля в течение десяти лет. К моменту возвращения автомобиля его владельцу он уже будет практически лишен потребительской ценности, поэтому Бюллетень требует включения такого имущества в балансовую ведомость арендатора.

Формально Бюллетень №13 требует от арендатора включить арендованное имущество в балансовую ведомость (в данном случае, согласно терминологии, идет речь о *капитальной аренде*), если выполняется один из четырех критериев.

1. По окончании срока аренды арендуемое имущество переходит в собственность арендатора.
2. Аренда содержит опцион покупки по выгодной цене, который позволяет арендатору приобрести арендуемое имущество по очень низкой цене по окончании срока аренды.
3. Срок аренды превосходит 75% расчетного срока службы арендуемого имущества.
4. Приведенная стоимость выплат арендной платы превосходит 90% справедливой рыночной цены имущества. Приведенная стоимость рассчитывается по ставке эквивалентного займа, т.е. по такой процентной ставке, которую бы заплатил арендатор при получении займа на сумму, необходимую для приобретения имущества.

Если аренда является капитальной согласно правилам Бюллетеня №13, то арендатор вносит арендуемое имущество и соответствующее долговое обязательство на свой баланс. Затем начисляется амортизация на имущество и соответственно на обязательство на весь срок аренды. Все получается так, как если бы рассматриваемое имущество было приобретено арендатором, причем 100% необходимой суммы было бы взято в долг.



Что следует делать арендодателю в том случае, когда арендатор вносит имущество на свой баланс? Если арендатор приобрел имущество (в чисто формальном, учетном смысле) за 100% заемных средств, то арендодатель в том же смысле продал имущество за 100% заемных средств. В этом и состоит суть трактовки аренды согласно Бюллетеню №13.

### **Приведение в соответствие налоговой и бухгалтерской трактовки аренды**

Налоговая и бухгалтерская трактовка аренды очень похожи по своей сути. Поэтому логично ожидать, что в тех случаях, в которых аренда трактуется как капитальная согласно Бюллетеню №13, она же будет трактоваться налоговыми органами как продажа. Если бы наш мир управлялся рациональным рассудком, то арендаторы вносили бы арендованное имущество на свой баланс только в тех случаях, когда налоговое управление трактует аренду как продажу.

Однако наш мир устроен более хитроумно. Оказывается, можно довольно просто исключить арендуемое имущество из балансовой ведомости, так что при этом налоговое управление будет рассматривать аренду как истинную, а договорные отношения тем не менее будут организованы так, что все хозяйственные преимущества владения перейдут от арендодателя к арендатору. Подробнее см. в публикациях из списка литературы к этой главе.



---

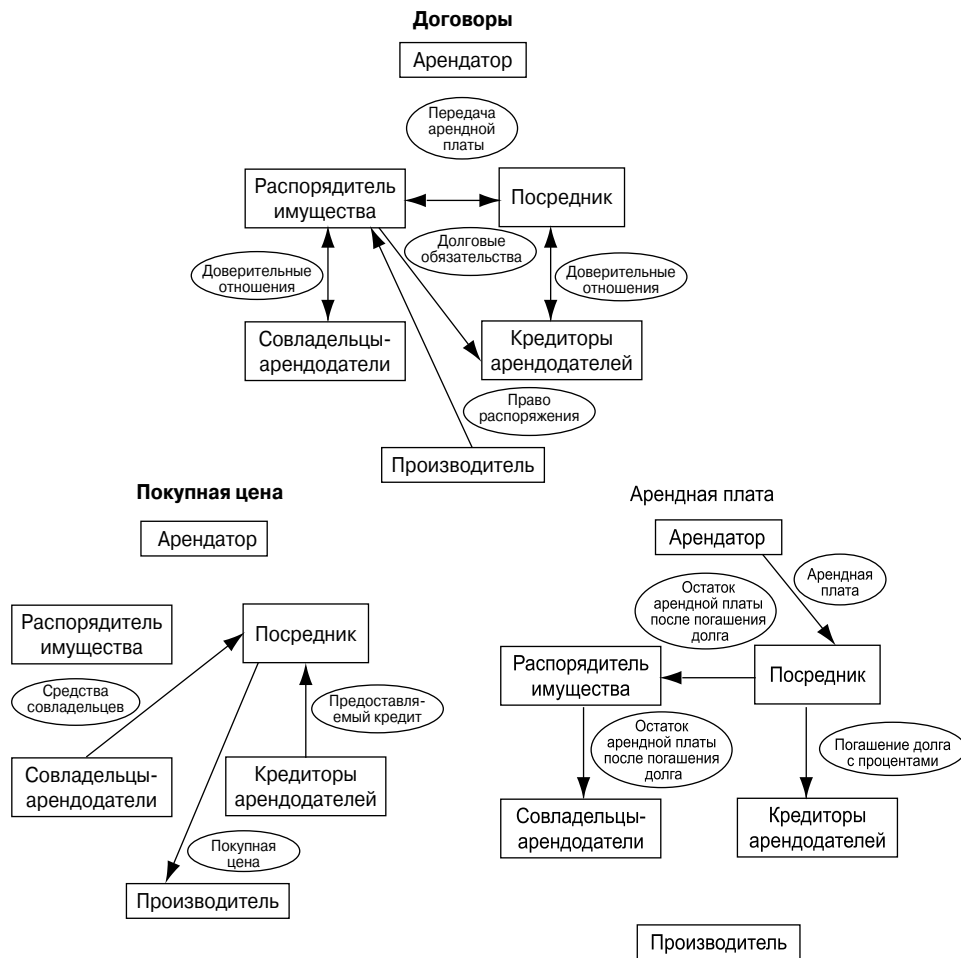
## 6 Аренда имущества, частично приобретенного в кредит

---

### 6.1. Введение

В случае *аренды имущества, частично приобретенного в кредит (leveraged lease)* арендодатель финансирует приобретение имущества, сдаваемого им в аренду, путем взятия в долг. С точки зрения арендатора нет никакой разницы между арендой имущества, приобретенного в кредит или как-то иначе. Однако с точки зрения арендодателя расчет потоков денежных средств в случае аренды имущества, частично приобретенного в кредит, представляет особый интерес.

В отношениях аренды имущества, частично приобретенного в кредит, обычно участвуют не менее шести сторон: арендатор, долевые участники аренды (совладельцы-арендодатели), кредиторы долевых участников, распорядитель имущества, посредник в арендно-кредитных отношениях (*indenture trustee*) и производитель имущества. В большинстве случаев присутствует и седьмая сторона: составитель арендного договора (брокерская компания). На рисунке, приведенном ниже, показаны отношения между шестью сторонами типичных отношений аренды имущества, частично приобретенного в кредит.



При анализе данного вида арендных отношений возникают две основные задачи.

1. *Непосредственный финансовый анализ арендных отношений с точки зрения арендодателя.* Имеется в виду расчет денежных потоков, получаемых арендодателем, и вычисление чистой приведенной стоимости (ЧПС) либо внутренней ставки доходности (ВСД) этих потоков.
2. *Бухгалтерский анализ арендных отношений.* Бухгалтеры используют так называемый *многофазный метод (multiple phases method)* для вычисления ставки доходности аренды имущества, частично приобретенного в кредит. Такая ставка, полученная по многофазному методу, отличается от ВСД. В обычном финансовом контексте это различие не имеет никакого значения, поскольку гипотеза эффективного рынка говорит нам, что важны только потоки денежных средств. Однако в нашем несовершенном мире люди склонны чрезмерно беспокоиться о том, чтобы в финансовых отчетах все было гладко. Поскольку учетную ставку доходности для аренды вычислить не так легко, мы сделаем это с помощью Excel, а затем проанализируем результат.

## 6.2. Пример

Изучим проблему на примере, который частично взят из приложения Е к Бюллетеню №13 Управления по стандартам финансовой отчетности (FASB 13); этот документ является “библией” бухгалтера во всем, что касается арендных отношений.

Пусть компания-арендодатель рассматривает вопрос о приобретении имущества стоимостью 1 млн. долл. Доля вложенного капитала компании составит 200 тыс. долл., а доля заемных средств — остальные 800 тыс. долл. Проценты по займу составляют 10%, так что ежегодные выплаты процентов и основной суммы в течение 15-летнего срока займа составят 105 179 долл.<sup>1</sup>

Компания собирается сдавать имущество в аренду за 110 тыс. долл. в год, с выплатой в конце года. Срок аренды составляет 15 лет. Амортизация на имущество будет начисляться за период восемь лет, по стандартному графику налогового управления США для имущества с семилетним сроком службы<sup>2</sup>. График амортизации такого имущества имеет следующий вид.

| Год | Амортизация |
|-----|-------------|
| 1   | 14,28       |
| 2   | 24,49       |
| 3   | 17,49       |
| 4   | 12,5        |
| 5   | 8,92        |
| 6   | 8,92        |
| 7   | 8,92        |
| 8   | 4,48        |

Поскольку ко времени продажи имущества (к 16-му году) оно полностью теряет стоимость в результате амортизации, налогообложению подлежит вся его ожидаемая остаточная стоимость (300 тыс. долл.). Ставка корпоративного налога на компанию составляет 40%.

Все эти факты изложены в приведенной ниже таблице, в которой также вычисляются потоки денежных средств для арендодателя.

<sup>1</sup> Расчет выполнен с помощью функции Excel =PMT(10%,15,-800000).

<sup>2</sup> См. Ross, Westerfield, Jaffee (1996), табл. 7.3 (с. 171). Следует заметить, что согласно нормам налогового управления США имущество с семилетним сроком службы имеет восьмилетний график амортизационных отчислений, поскольку предполагается, что имущество приобреталось в середине года.

|    | A                                                                | B                | C                                                       | D                  | E                 | F              | G               | H               | I            |
|----|------------------------------------------------------------------|------------------|---------------------------------------------------------|--------------------|-------------------|----------------|-----------------|-----------------|--------------|
| 1  | <b>ОСНОВНОЙ ПРИМЕР АРЕНДЫ С ЧАСТИЧНЫМ ПРИОБРЕТЕНИЕМ В КРЕДИТ</b> |                  |                                                         |                    |                   |                |                 |                 |              |
| 2  |                                                                  |                  |                                                         |                    |                   |                |                 |                 |              |
| 3  | Стоимость актива                                                 | 1 000 000        |                                                         |                    |                   |                |                 |                 |              |
| 4  | Срок аренды                                                      | 15               |                                                         |                    |                   |                |                 |                 |              |
| 5  | Остаточная стоимость                                             | 300 000          |                                                         |                    |                   |                |                 |                 |              |
| 6  | Вложенный капитал                                                | 200 000          |                                                         |                    |                   |                |                 |                 |              |
| 7  | Долг                                                             | 800 000          | кредит на 15 лет, равные выплаты процентов и осн. суммы |                    |                   |                |                 |                 |              |
| 8  | Процентная ставка                                                | 10%              |                                                         |                    |                   |                |                 |                 |              |
| 9  | Ежегодная выплата долга                                          | 105 179          |                                                         |                    |                   |                |                 |                 |              |
| 10 | Ежегодный доход от сдачи в аренду                                | 110 000          |                                                         |                    |                   |                |                 |                 |              |
| 11 | Ставка налога                                                    | 40%              |                                                         |                    |                   |                |                 |                 |              |
| 12 |                                                                  |                  |                                                         |                    |                   |                |                 |                 |              |
| 13 |                                                                  |                  |                                                         |                    |                   |                |                 |                 |              |
| 14 |                                                                  | <b>Вложенный</b> | <b>Доход</b>                                            |                    | <b>Осн. сумма</b> |                |                 | <b>Возврат</b>  |              |
| 15 | <b>Год</b>                                                       | <b>капитал</b>   | <b>от аренды</b>                                        | <b>Амортизация</b> | <b>в начале</b>   | <b>Выплата</b> | <b>Проценты</b> | <b>основной</b> | <b>Ден.</b>  |
| 16 |                                                                  | -200 000         |                                                         |                    | <b>года</b>       | <b>кредита</b> |                 | <b>суммы</b>    | <b>поток</b> |
| 17 | 1                                                                |                  | 110 000                                                 | 142 800            | 800 000           | 105 179        | 80 000          | 25 179          | 49 941       |
| 18 | 2                                                                |                  | 110 000                                                 | 244 900            | 774 821           | 105 179        | 77 482          | 27 697          | 89 774       |
| 19 | 3                                                                |                  | 110 000                                                 | 174 900            | 747 124           | 105 179        | 74 712          | 30 467          | 60 666       |
| 20 | 4                                                                |                  | 110 000                                                 | 125 000            | 716 657           | 105 179        | 71 666          | 33 513          | 39 487       |
| 21 | 5                                                                |                  | 110 000                                                 | 89 200             | 683 144           | 105 179        | 68 314          | 36 865          | 23 827       |
| 22 | 6                                                                |                  | 110 000                                                 | 89 200             | 646 280           | 105 179        | 64 628          | 40 551          | 22 352       |
| 23 | 7                                                                |                  | 110 000                                                 | 89 200             | 605 728           | 105 179        | 60 573          | 44 606          | 20 730       |
| 24 | 8                                                                |                  | 110 000                                                 | 44 800             | 561 122           | 105 179        | 56 112          | 49 067          | 1 186        |
| 25 | 9                                                                |                  | 110 000                                                 |                    | 512 056           | 105 179        | 51 206          | 53 973          | -18 697      |
| 26 | 10                                                               |                  | 110 000                                                 |                    | 458 082           | 105 179        | 45 808          | 59 371          | -20 856      |
| 27 | 11                                                               |                  | 110 000                                                 |                    | 398 711           | 105 179        | 39 871          | 65 308          | -23 231      |
| 28 | 12                                                               |                  | 110 000                                                 |                    | 333 403           | 105 179        | 33 340          | 71 839          | -25 843      |
| 29 | 13                                                               |                  | 110 000                                                 |                    | 261 565           | 105 179        | 26 156          | 79 023          | -28 716      |
| 30 | 14                                                               |                  | 110 000                                                 |                    | 182 542           | 105 179        | 18 254          | 86 925          | -31 877      |
| 31 | 15                                                               |                  | 110 000                                                 |                    | 95 617            | 105 179        | 9 562           | 95 617          | -35 354      |
| 32 | 16                                                               |                  | 300 000                                                 |                    |                   |                |                 |                 | 180 000      |
| 33 |                                                                  |                  |                                                         |                    |                   |                |                 |                 |              |
| 34 |                                                                  |                  |                                                         |                    |                   |                | ВСД потоков     |                 | 12,46%       |

В последнем столбце стоят суммы денежных потоков пайщикам-совладельцам имущества. Типовой ежегодный денежный поток владельцу доли в имуществе вычисляется следующим образом:

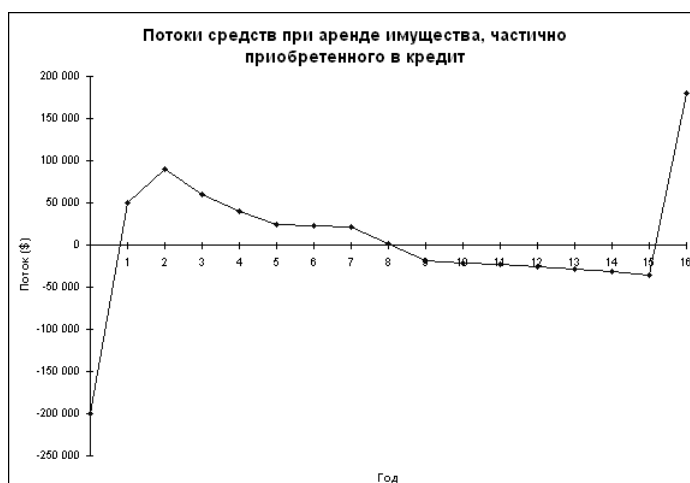
$$\text{Поток}(t) = (1 - \text{Налог}) \cdot \text{Арендная плата} + \text{Налог} \cdot \text{Амортизация}(t) - (1 - \text{Налог}) \cdot \text{Проценты}(t) - \text{Выплата основной суммы}.$$

Ниже приведено подробное объяснение этой формулы.

| Слагаемое                                            | Объяснение                                                                                                                                                               |
|------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $+(1 - \text{Налог}) \cdot \text{Арендная плата}$    | Пайщики-совладельцы имущества получают арендную плату с учетом налогов                                                                                                   |
| $+\text{Налог} \cdot \text{Амортизация}(t)$          | Пайщики-совладельцы получают налоговый щит на амортизацию имущества                                                                                                      |
| $-(1 - \text{Налог}) \cdot \text{Проценты}$          | Налогооблагаемые проценты на долг                                                                                                                                        |
| $-\text{Выплата основной суммы}$                     | Выплата основной суммы налогом не облагается                                                                                                                             |
| $+(1 - \text{Налог}) \times$<br>Остаточная стоимость | Это слагаемое фигурирует только в последнем году; остаточная стоимость подлежит полному налогообложению, поскольку амортизация была начислена на всю стоимость имущества |

Сложение перечисленных слагаемых, кроме последнего, дает денежный поток в обычные годы. В типичном случае аренды имущества, частично приобретенного в долг, денежный поток в начале срока аренды обычно положителен, затем он начинает убывать со временем и снова становится положительным в конце срока аренды, когда владельцу возвращается его остаточная стоимость. У этого явления есть три причины.

1. Приток средств, вызванный начислением амортизации, обычно заканчивается или резко падает до конца срока аренды. Чем более ускоренный метод начисления амортизации используется, тем больше будет налоговая скидка на амортизацию (и соответствующий налоговый щит) в начале срока службы имущества.
2. В последующие годы аренды доля ежегодных выплат по кредиту, относящаяся к процентам (за вычетом налогов), убывает, тогда как доля, составляющая выплаты основной суммы (не подлежащая налогообложению) растет.
3. Наконец, разумеется, предусмотрено большое поступление денежных средств от реализации имущества за остаточную стоимость по окончании срока аренды.

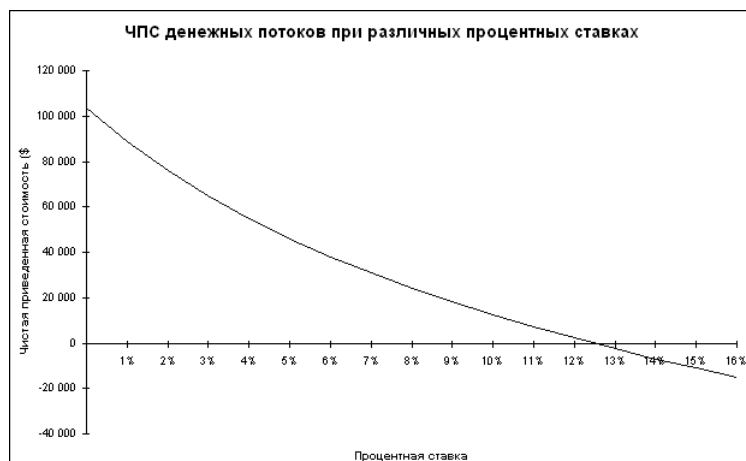


### 6.3. Анализ денежных потоков по ЧПС или ВСД

Какие же выводы следует сделать из рассмотрения всех этих потоков денежных средств? Один из способов их анализа (возможно, наилучший; по крайней мере теоретически) — это взять их чистую приведенную стоимость (ЧПС) с некоторой ставкой дисконтирования, в которой учтена поправка на риск. Если проанализировать компоненты потоков, то увидим, что основной риск проистекает из следующих трех источников.

1. Арендатор не выполнит своих обязательств по арендной плате.
2. Могут измениться налоговые ставки, что повлияет на налоговые скидки от амортизации и потоки средств, связанные с процентными выплатами.
3. Остаточная стоимость обладает весьма высокой степенью неопределенности.

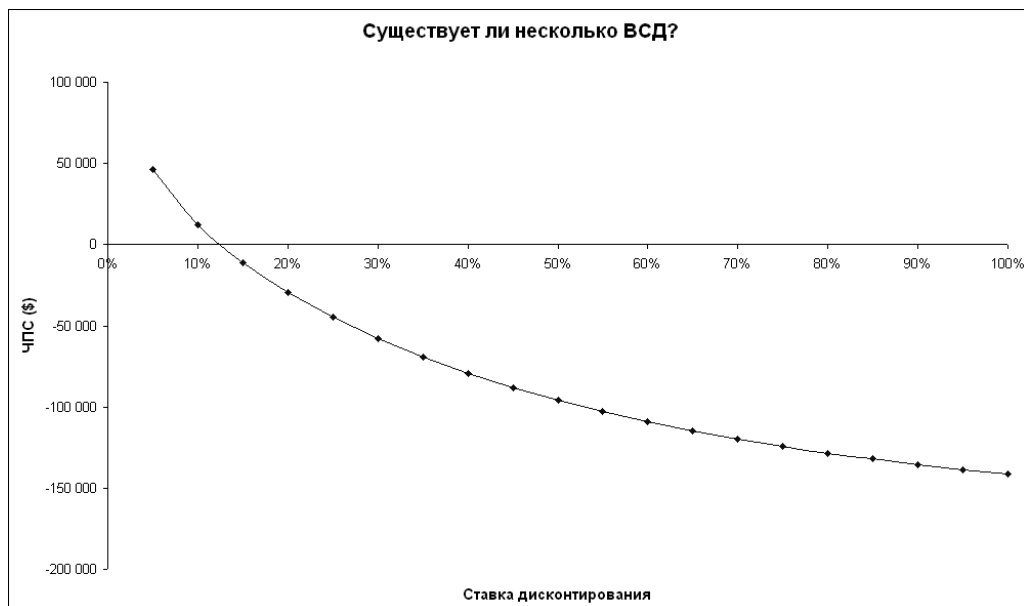
На нижеприведенном графике показана ЧПС потоков денежных средств в зависимости от процентной ставки.



Обратите внимание, что поскольку потоки вычисляются с учетом налогов, то и все соответствующие сравнения следует выполнять по процентной ставке с учетом налогов. Например, пусть арендодатель практически уверен в надежности всех расчетных поступлений и поэтому хочет сравнить их со случаем процентной ставки по кредиту в размере 10%. Тогда, поскольку ставка налога для арендодателя составляет 40%, соответствующая ставка дисконтирования для такого сравнения должна составлять  $(1 - 40\%) * 10\% = 6\%$ ; при такой ставке потоки денежных средств от аренды будут иметь ЧПС, равную 38 068 долл.

Бывает, что арендодатели не доверяют такому показателю, как чистая приведенная стоимость. В качестве меры приемлемости арендного договора они предпочитают внутреннюю ставку доходности. Поскольку потоки денежных средств от аренды дважды меняют знак, то в принципе им могут соответствовать два значения ВСД. Поскольку ВСД — это такая процентная ставка, при которой график ЧПС пересекает ось  $x$ , с помощью Excel можно графически определить количество различных ее значений. Следующий график показывает, что для очень широкого диапазона реальных процентных ставок имеется всего одно значение ВСД.





Поэтому можно смело использовать формулу ВСД(потоки, 0) для определения внутренней ставки доходности в нашем случае с арендой. Она составляет 12,46%.

#### 6.4. Смысл ВСД

Вопрос о том, каков смысл величины ВСД, важен как для понимания ее хозяйственно-экономической важности, так и для бухгалтерского определения дохода от аренды актива, частично приобретенного в кредит. Для иллюстрации всех сложностей в этом деле мы ненадолго отвлечемся от нашего исходного примера и изучим пример попроще. Рассмотрим капиталовложение в размере 100 тыс. долл., которое дает положительные потоки (приток) средств только в следующие пять лет.

|    | В   | С        | Д                  | Е |
|----|-----|----------|--------------------|---|
| 4  | Год | Денежный |                    |   |
| 5  |     | поток    |                    |   |
| 6  | 0   | -100 000 |                    |   |
| 7  | 1   | 31 000   |                    |   |
| 8  | 2   | 22 000   |                    |   |
| 9  | 3   | 16 000   |                    |   |
| 10 | 4   | 22 000   |                    |   |
| 11 | 5   | 35 000   |                    |   |
| 12 |     |          |                    |   |
| 13 | ВСД | 8,097%   | <-- =ВСД(С6:С11,0) |   |

Что означает ВСД в размере 8,097%? Если представить капиталовложение в 100 тыс. долл. как кредит для реализации проекта, то каждое движение средств можно будет разделить на:

1. Проценты по основной сумме “кредита” в начале периода.
2. Выплату основной суммы.

Разумеется, в конце пятилетнего периода должна быть выплачена вся основная сумма. ВСД является такой “процентной ставкой”, при которой сумма “кредита” выплачивается вместе с “процентами” в точности в срок существования проекта. Это видно в следующей таблице, в которой каждое движение средств разделяется на “доход по основной сумме капиталовложения в начале периода” и на “возврат основной суммы”.

|    | Г                              | Н          | І        | Ј                    | К          |
|----|--------------------------------|------------|----------|----------------------|------------|
| 1  | РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕНЕЖНЫХ ПОТОКОВ |            |          |                      |            |
| 2  |                                |            |          |                      |            |
| 3  |                                | Инвестиция |          | Распределение потока |            |
| 4  | Год                            | на начало  | Денежный |                      | Выплата    |
| 5  |                                | периода    | поток    | Доход                | инвестиции |
| 6  | 1                              | 100 000    | 31 000   | 8 097                | 22 903     |
| 7  | 2                              | 77 097     | 22 000   | 6 242                | 15 758     |
| 8  | 3                              | 61 339     | 16 000   | 4 966                | 11 034     |
| 9  | 4                              | 50 305     | 22 000   | 4 073                | 17 927     |
| 10 | 5                              | 32 378     | 35 000   | 2 622                | 32 378     |

В каждом периоде за капиталовложение в сумме, которую оно составляло в начале периода, вначале взимается “плата”, как раз и равная ВСД. Оставшееся поступление денежных средств засчитывается за выплату основной суммы капиталовложения. Так, например:

|                                                                                                                                                          |                              |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------|
| Сумма капиталовложения в начале 1-го периода<br>(т.е. начальное вложение)                                                                                | 100 000                      |
| Приток денежных средств за период                                                                                                                        | 31 000                       |
| 8,10% * Капиталовложение в начале периода                                                                                                                | 8 097                        |
| Приток средств в качестве выплаты основной суммы                                                                                                         | 22 903                       |
| Сумма капиталовложения в начале 2-го периода = Сумма<br>в начале предыдущего периода – Приток средств в качестве<br>выплаты основной суммы в 1-м периоде | 100 000 – 22 093 =<br>77 097 |

Обратите внимание на последнюю строку в таблице распределения притока средств. В начале 5-го года от суммы капиталовложения все еще остается 32 378 долл.; притока средств за 5-й год в объеме 35 тыс. долл. в точности хватает, чтобы выплатить прибыль на это капиталовложение в сумме 2 622 долл. и полностью выплатить саму эту сумму. В начале 6-го года от суммы капиталовложения не остается ничего! (Этот результат — разумеется, не чудо. Все дело в способе подсчета внутренней ставки доходности.)

### 6.4.1. Снова к основному примеру аренды

Применим аналогичные рассуждения к потокам денежных средств от аренды актива, частично приобретенного в кредит.

|    | A                                               | B                 | C                | D                           | E                 |
|----|-------------------------------------------------|-------------------|------------------|-----------------------------|-------------------|
| 1  | <b>РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕНЕЖНЫХ ПОТОКОВ ОТ АРЕНДЫ</b> |                   |                  |                             |                   |
| 2  | <b>МЕЖДУ ДОХОДОМ И ВОЗВРАТОМ ИНВЕСТИЦИЙ</b>     |                   |                  |                             |                   |
| 3  |                                                 |                   |                  |                             |                   |
| 4  | ВСД                                             | 12,46%            | <-- =ВСД(С9:С25) |                             |                   |
| 5  |                                                 |                   |                  |                             |                   |
| 6  |                                                 | <b>Инвестиция</b> |                  | <b>Распределение потока</b> |                   |
| 7  | <b>Год</b>                                      | <b>на начало</b>  | <b>Денежный</b>  |                             | <b>Выплата</b>    |
| 8  |                                                 | <b>периода</b>    | <b>поток</b>     | <b>Доход</b>                | <b>инвестиции</b> |
| 9  | 0                                               |                   | -200 000         |                             |                   |
| 10 | 1                                               | 200 000           | 49 941           | 24 913                      | 25 028            |
| 11 | 2                                               | 174 972           | 89 774           | 21 796                      | 67 978            |
| 12 | 3                                               | 106 994           | 60 666           | 13 328                      | 47 338            |
| 13 | 4                                               | 59 656            | 39 487           | 7 431                       | 32 056            |
| 14 | 5                                               | 27 600            | 23 827           | 3 438                       | 20 389            |
| 15 | 6                                               | 7 212             | 22 352           | 898                         | 21 454            |
| 16 | 7                                               | -14 242           | 20 730           | -1 774                      | 22 504            |
| 17 | 8                                               | -36 746           | 1 186            | -4 577                      | 5 763             |
| 18 | 9                                               | -42 510           | -18 697          | -5 295                      | -13 401           |
| 19 | 10                                              | -29 108           | -20 856          | -3 626                      | -17 230           |
| 20 | 11                                              | -11 878           | -23 231          | -1 480                      | -21 751           |
| 21 | 12                                              | 9 873             | -25 843          | 1 230                       | -27 073           |
| 22 | 13                                              | 36 945            | -28 716          | 4 602                       | -33 319           |
| 23 | 14                                              | 70 264            | -31 877          | 8 753                       | -40 630           |
| 24 | 15                                              | 110 894           | -35 354          | 13 814                      | -49 168           |
| 25 | 16                                              | 160 062           | 180 000          | 19 938                      | 160 062           |

Обратите внимание, что (как и в нашем простом примере) ВСД в размере 12,46% позволяет успешно распределить доход так, что вся сумма вложения учитывается полностью к концу проекта (для случая нашей аренды это 16 лет). Однако следует обратить внимание и на некоторые необычные явления в таблице: пять денежных поступлений в графе “Доход” имеют отрицательный знак, как и семь выплат по основной сумме. Истолковать эти явления можно двумя способами.

- С чисто технической точки зрения свести концы с концами в таблице можно только в том случае, если сделать некоторые из цифр доходов отрицательными. Такая интерпретация верна, но не слишком интересна.
- С экономической точки зрения отрицательные величины доходов означают, что в некоторые годы проект себя не окупает, но и избавиться от него тоже нельзя. Для примера рассмотрим финансовое положение арендодателя в начале 9-го года. Впереди ему предстоят *семь лет* отрицательных денежных потоков. Только через восемь лет, в 16-м году, арендодатель снова увидит положительный денежный поток от своих арендных отношений. Разумный арендодатель обязательно захочет избавиться от такого договора аренды; приведенная стоимость денежных потоков в начале 9-го года при ставке дисконтирования 10% составляет 39 333 долл. (и это еще с учетом реализации имущества по остаточной стоимости в 16-м году!). Но, конечно, ни один разумный капиталовкладчик не приобретет такой договор в начале 9-го года аренды, *если ему за это не заплатит* или если ставка дисконтирования не будет отрицательной. Именно это обстоятельство — что арендодатель вынужден был бы заплатить кому-нибудь, чтобы сбыть арендный договор с рук на 9-м году, — и выражается

отрицательным доходом на 9-м году проекта<sup>3</sup>. С хозяйственно-экономической точки зрения в этот момент сдача в аренду не просто невыгодна — она становится бременем для арендодателя.

Как будет показано в следующем разделе, отрицательный доход в ходе аренды имущества, частично приобретенного в кредит, вызывает у бухгалтеров изрядную головную боль.

## 6.5. Бухгалтерский аспект: многофазный метод

Бюллетень №13 Управления по стандартам финансовой отчетности (FASB 13) содержит обязательное требование, чтобы денежные поступления арендодателю от сдачи в аренду имущества, частично приобретенного в кредит, разделялись на доход и на выплату основной суммы кредита. Логично было бы делать это с применением ВСД потоков денежных средств, как показано в предыдущем разделе. Но здесь составителям Бюллетеня помешала такая непростая грань человеческой натуры, как нежелание нести убытки, пусть даже они формальны и экономически оправданы. (В Бюллетене говорится о невозможности применения такого метода к рассматриваемому виду аренды, но в качестве объяснения приводится только предположение, что арендодатели ни при каких обстоятельствах не захотят фиксировать в документах убытки, понесенные от сдачи в аренду.)

Метод, разработанный для того, чтобы избежать учета отрицательных доходов, иногда называют *многофазным методом* (*multiple-phases method — MPM*), хотя точнее было бы назвать его “испорченным методом ВСД”.

Сам факт, что для учета доходов используется довольно глупая методика, не должен нас беспокоить, поскольку глупость, увы, в нашем мире множится и торжествует. Плохо то, что излишняя сложность и неочевидность придают методу некую респектабельность в глазах людей. (Из этого следует извлечь урок!) Здесь не мешает небольшое разоблачение в виде кратких пояснений к методу.

Пусть многофазная ставка доходности  $Q$  (между прочим, это сокращение от *quirky*, т.е. “нелепая”) определяется следующим образом.

<sup>3</sup> Отрицательный доход фактически начинается в 7-м году, т.е. проект имеет отрицательную экономическую ценность уже в этот момент.

| Год            | Многофазный метод                                                                                                                                                                                                               | Примечание                                                                                                                                     |
|----------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1              | Сумма капиталовложения арендодателя в имущество в начале 1-го года равна доле средств, внесенных за имущество сразу.<br>В нашем примере Вложение(1) = 200 000 долл.                                                             | Аналогично вычислению ВСД                                                                                                                      |
| $t$            | В конце года $t$ арендодатель должен декларировать в бухгалтерских документах следующий доход от аренды:<br>$\begin{cases} Q \cdot \text{Вложение}(1) & \text{если это число} > 0 \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$ | Если доход положителен, используется распределение между доходом и выплатой кредита, как в методе ВСД; иначе доход устанавливается равным нулю |
| $t$            | Вложение капитала арендодателя в имущество в начале любого года $t > 1$ определяется таким образом:<br>$\text{Вложение}(t) = \text{Вложение}(t-1) - [\text{Поток средств}(t-1) - \text{Доход}(t-1)]$                            | Как в методе ВСД                                                                                                                               |
| Послед-<br>ний | Поток средств (посл. год) =<br>$\text{Вложение}(\text{посл. год}) \cdot (1 + Q)$                                                                                                                                                | Как в методе ВСД                                                                                                                               |

### 6.5.1. Вычисление ставки доходности по многофазному методу

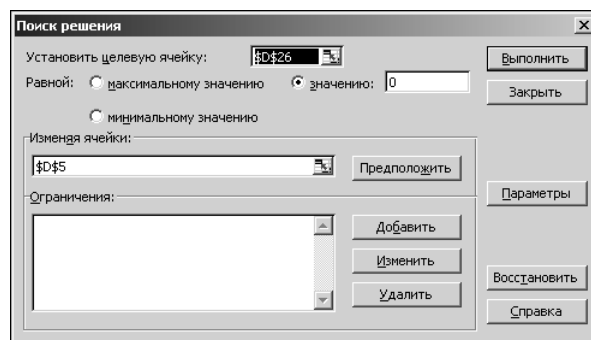
Чтобы вычислить ставку доходности  $Q$  согласно многофазному методу, вначале построим таблицу, аналогичную той, которая использовалась в разделе 6.4 для иллюстрации расчета ВСД. Единственная разница состоит в том, что мы продлили срок до 17-го года включительно (т.е. следующего года после окончания проекта). Расчетная ставка  $Q$  должна давать нулевую остаточную сумму капиталовложения в начале 17-го года. Например, приведенное ниже решение *не дает* правильного значения  $Q$ .

|    | C                                               | D                 | E               | F                           | G                 |
|----|-------------------------------------------------|-------------------|-----------------|-----------------------------|-------------------|
| 1  | <b>МНОГОФАЗНЫЙ МЕТОД:</b>                       |                   |                 |                             |                   |
| 2  | <b>РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕНЕЖНЫХ ПОТОКОВ ОТ АРЕНДЫ</b> |                   |                 |                             |                   |
| 3  | <b>МЕЖДУ ДОХОДОМ И ВОЗВРАТОМ ИНВЕСТИЦИЙ</b>     |                   |                 |                             |                   |
| 4  |                                                 |                   |                 |                             |                   |
| 5  | Q                                               | 12,00%            |                 |                             |                   |
| 6  |                                                 |                   |                 |                             |                   |
| 7  |                                                 | <b>Инвестиция</b> |                 | <b>Распределение потока</b> |                   |
| 8  | <b>Год</b>                                      | <b>на начало</b>  | <b>Денежный</b> |                             | <b>Выплата</b>    |
| 9  |                                                 | <b>периода</b>    | <b>поток</b>    | <b>Доход</b>                | <b>инвестиции</b> |
| 10 | 1                                               | 200 000           | 49 941          | 24 000                      | 25 941            |
| 11 | 2                                               | 174 059           | 89 774          | 20 887                      | 68 887            |
| 12 | 3                                               | 105 172           | 60 666          | 12 621                      | 48 045            |
| 13 | 4                                               | 57 127            | 39 487          | 6 855                       | 32 632            |
| 14 | 5                                               | 24 495            | 23 827          | 2 939                       | 20 887            |
| 15 | 6                                               | 3 608             | 22 352          | 433                         | 21 919            |
| 16 | 7                                               | -18 312           | 20 730          | 0                           | 20 730            |
| 17 | 8                                               | -39 042           | 1 186           | 0                           | 1 186             |
| 18 | 9                                               | -40 228           | -18 697         | 0                           | -18 697           |
| 19 | 10                                              | -21 531           | -20 856         | 0                           | -20 856           |
| 20 | 11                                              | -675              | -23 231         | 0                           | -23 231           |
| 21 | 12                                              | 22 556            | -25 843         | 2 707                       | -28 550           |
| 22 | 13                                              | 51 105            | -28 716         | 6 133                       | -34 849           |
| 23 | 14                                              | 85 954            | -31 877         | 10 314                      | -42 192           |
| 24 | 15                                              | 128 146           | -35 354         | 15 378                      | -50 732           |
| 25 | 16                                              | 178 878           | 180 000         | 21 465                      | 158 535           |
| 26 | 17                                              | 20 343            |                 |                             |                   |

Все формулы в этой таблице совпадают с расчетными формулами для ВСД, кроме формул в столбце для дохода. Например, доход в 1-м году вычисляется по следующей формуле:

$$=IF(\$D\$5*D10>0, \$D\$5*D10, 0)$$

Найдем значение  $Q$  с помощью модуля Excel Поиск решения (Solver). Его диалоговое окно, которое открывается после выбора команды Сервис⇒Поиск решения (Tools⇒Solver), показано ниже.



Целевая ячейка \$D\$26 содержит остаточную сумму капиталовложения в начале 17-го года; поскольку это следующий год после окончания проекта, сумма должна составлять 0. Применение этого метода в нашем случае дает следующее.

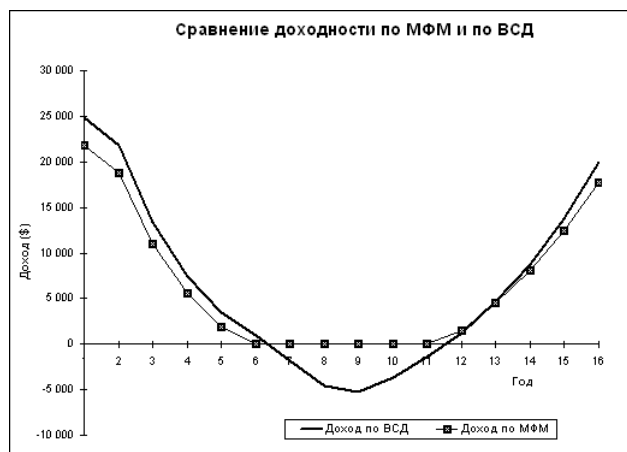
|    | C                                               | D                 | E               | F                           | G                 |
|----|-------------------------------------------------|-------------------|-----------------|-----------------------------|-------------------|
| 1  | <b>МНОГОФАЗНЫЙ МЕТОД:</b>                       |                   |                 |                             |                   |
| 2  | <b>РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДЕНЕЖНЫХ ПОТОКОВ ОТ АРЕНДЫ</b> |                   |                 |                             |                   |
| 3  | <b>МЕЖДУ ДОХОДОМ И ВОЗВРАТОМ ИНВЕСТИЦИИ</b>     |                   |                 |                             |                   |
| 4  |                                                 |                   |                 |                             |                   |
| 5  | Q                                               | 10,91%            |                 |                             |                   |
| 6  |                                                 |                   |                 |                             |                   |
| 7  |                                                 | <b>Инвестиция</b> |                 | <b>Распределение потока</b> |                   |
| 8  | <b>Год</b>                                      | <b>на начало</b>  | <b>Денежный</b> |                             | <b>Выплата</b>    |
| 9  |                                                 | <b>периода</b>    | <b>поток</b>    | <b>Доход</b>                | <b>инвестиции</b> |
| 10 | 1                                               | 200 000           | 49 941          | 21 822                      | 28 119            |
| 11 | 2                                               | 171 881           | 89 774          | 18 754                      | 71 019            |
| 12 | 3                                               | 100 862           | 60 666          | 11 005                      | 49 661            |
| 13 | 4                                               | 51 201            | 39 487          | 5 587                       | 33 901            |
| 14 | 5                                               | 17 301            | 23 827          | 1 888                       | 21 939            |
| 15 | 6                                               | -4 638            | 22 352          | 0                           | 22 352            |
| 16 | 7                                               | -26 990           | 20 730          | 0                           | 20 730            |
| 17 | 8                                               | -47 721           | 1 186           | 0                           | 1 186             |
| 18 | 9                                               | -48 906           | -18 697         | 0                           | -18 697           |
| 19 | 10                                              | -30 210           | -20 856         | 0                           | -20 856           |
| 20 | 11                                              | -9 354            | -23 231         | 0                           | -23 231           |
| 21 | 12                                              | 13 877            | -25 843         | 1 514                       | -27 357           |
| 22 | 13                                              | 41 234            | -28 716         | 4 499                       | -33 216           |
| 23 | 14                                              | 74 449            | -31 877         | 8 123                       | -40 001           |
| 24 | 15                                              | 114 450           | -35 354         | 12 488                      | -47 842           |
| 25 | 16                                              | 162 292           | 180 000         | 17 708                      | 162 292           |
| 26 | 17                                              | 0                 |                 |                             |                   |

## 6.6. Сравнение ставки доходности по многофазному методу и ВСД

Ставка доходности по многофазному методу (МФМ) широко используется в практике аренды имущества, частично приобретенного в кредит. Как она соотносится с ВСД?

- Как правило, ставка по МФМ меньше или равна ВСД. Равенство достигается тогда, когда все потоки денежных средств положительны; в противном случае ВСД превосходит ставку доходности по МФМ.
- Если ставка по МФМ меньше ВСД, то в какой-то момент расчет по ВСД даст отрицательный доход от аренды, в то время как расчет по МФМ даст нулевой.

Для конкретного примера из этой главы имеем следующее графическое представление.



## Упражнения

1. Проведите повторный анализ примера с арендой, данного в этой главе. Покажите, что если амортизация начисляется линейно в течение 15 лет, то ставка доходности по МФМ равна ВСД. Объясните этот факт.
2. В примере арендных отношений из раздела 6.5 найдите наименьшую арендную плату, при которой ставка по МФМ равна ВСД (график амортизации возьмите в исходном виде).



---

## II Моделирование портфелей ценных бумаг

Современная финансовая теория портфелей ценных бумаг, восходящая к работам Гарри Марковица (Harry Markowitz), Джона Линтера (John Linter), Яна Моссена (Jan Mossin) и Уильяма Шарпа (William Sharpe), является одним из крупнейших достижений финансовой науки. В главах 7–12 реализованы некоторые из идей этих ученых и показано, как решать на практике стандартные задачи, связанные с ценными бумагами. В этих главах активно используются матричные функции и таблицы данных Excel (см. главы 26 и 27).

В главе 7 дается введение в методику расчетов, связанных с портфелями ценных бумаг. На основе ценовой информации рассчитываются объемы дохода по отдельным активам и портфелю в целом. Большая часть главы посвящена простой задаче портфеля из двух активов, а общий случай рассматривается в разделах 7.3 и 7.4.

В главе 8 показано, как пользоваться данными о доходах для вычисления ковариационной матрицы. Такой расчет несложно выполнить с помощью матричных функций Excel. В главе 9 рассматривается как теория, так и практические методы расчета эффективных портфелей ценных бумаг при отсутствии запрета на продажу без покрытия, авансом (*short sale*). С помощью матричных функций Excel можно рассчитать два эффективных портфеля, которые затем можно использовать для построения эффективной границы.

В главе 10 воспроизводится простая тестовая задача для ценовой модели рынка капитала (ЦМРК). На основе некоторых рыночных данных строится линия рынка ценных бумаг (ЛРЦБ). Затем эти результаты рассматриваются в связи с критикой Ролла (Roll) в адрес данных тестов. С помощью Excel легко выполнить регрессионный анализ, которого требуют такие тесты. (Регрессия рассматривается в главе 29.)

В предыдущих главах предполагалось, что оптимизаторы портфелей ценных бумаг имеют право продавать бумаги авансом. В главе 11 будет показано, как с помощью функции Поиска решения (Solver) рассчитать в Excel эффективные портфели при запрете на продажу без покрытия. Наконец, в главе 12 будет дано введение в методы рисковей стоимости в контексте работы с портфелями ценных бумаг.



---

# 7 Введение в модели портфелей ценных бумаг

---

## 7.1. Введение

В этой главе рассматриваются основные приемы, лежащие в основе расчетов по портфелям ценных бумаг. Мы начнем с простого примера портфеля из двух активов и покажем, как вывести распределение доходов по ним из информации о курсе бумаг в прошлом. Затем будет рассмотрен общий случай  $N$  активов; для этого случая становится удобной матричная форма записи и матричные функции Excel.

Прежде чем мы продолжим, полезно будет ввести некоторые общие обозначения. Каждый актив  $i$  (это могут быть акции, облигации, недвижимое имущество и т.д., хотя все конкретные расчеты будут относиться только к акциям) характеризуется несколькими статистиками:  $E(r_i)$  — средним (ожидаемым) доходом с актива;  $\text{Дисп}(r_i)$  — дисперсией дохода с актива  $i$ ;  $\text{Ковар}(r_i, r_j)$  — ковариацией доходов с активов  $i$  и  $j$ . В наших приложениях часто будет удобно записать  $\text{Ковар}(r_i, r_j)$  в виде  $\sigma_{ij}$ , а  $\text{Дисп}(r_i)$  — в виде  $\sigma_{ii}$  (вместо  $\sigma_i^2$ , как это делается обычно). Поскольку ковариация дохода с актива с самим собой, т.е.  $\text{Ковар}(r_i, r_i)$ , фактически является дисперсией дохода, такая запись является не только компактной, но и рациональной.

---

## 7.2. Простой пример с двумя активами

Предположим, у нас есть информация о курсе двух ценных бумаг (акции А и акции В) за 12 месяцев. Имеются следующие данные:

|    | А          | В       | С       |
|----|------------|---------|---------|
| 1  | Курс акций |         |         |
| 2  | Месяц      | Акция А | Акция В |
| 3  | 0          | 25,00   | 45,00   |
| 4  | 1          | 24,12   | 44,85   |
| 5  | 2          | 23,37   | 46,88   |
| 6  | 3          | 24,75   | 45,25   |
| 7  | 4          | 26,62   | 50,87   |
| 8  | 5          | 26,50   | 53,25   |
| 9  | 6          | 28,00   | 53,25   |
| 10 | 7          | 28,88   | 62,75   |
| 11 | 8          | 29,75   | 65,50   |
| 12 | 9          | 31,38   | 66,87   |
| 13 | 10         | 36,25   | 78,50   |
| 14 | 11         | 37,13   | 78,00   |
| 15 | 12         | 36,88   | 68,23   |
| 16 |            |         |         |

Эти данные включают в себя заключительную цену каждой из акций на конец каждого месяца. Курсовая цена в 0-м месяце — это начальная цена акции (т.е. заключительная цена в месяце, предшествующем 1-му). Необходимо рассчитать статистику дохода по каждой акции.

Вначале вычисляем *месячный доход* по каждой акции. Это процент прибыли, которую получил бы инвестор, купивший акцию в конце некоторого месяца  $t - 1$  и продавший ее в конце следующего месяца. Для месяца  $t$  и акции А месячный доход  $r_{At}$  определяется следующим выражением:

$$r_{At} = \ln \left( \frac{P_{At}}{P_{A,t-1}} \right).$$

Сделаем два замечания по поводу данного расчета дохода. Во-первых, вычислялся непрерывный сложный доход на акцию. Вместо него можно было бы вычислять дискретный доход  $P_{At}/P_{A,t-1} - 1$ . В приложении 2 в конце этой главы рассматриваются причины выбора именно непрерывной сложной схемы начисления дохода. Во-вторых, вычисляется чистый доход от курсовой цены акции. Если бы по акции в месяце  $t$  выплачивался дивиденд, то весь доход составил бы

$$r_{At} = \ln \left( \frac{P_{At} + Div_t}{P_{A,t-1}} \right).$$

В следующих примерах мы пренебрегаем возможностью выплаты дивидендов. Расчет дохода легко реализуется в Excel. Вначале вводим нужные формулы.

|    | A                 | B       | C      | D | E       | F       | G                | H |
|----|-------------------|---------|--------|---|---------|---------|------------------|---|
| 18 | ВЫЧИСЛЕНИЕ ДОХОДА |         |        |   |         |         |                  |   |
| 19 |                   | Акция А |        |   | Акция В |         |                  |   |
| 20 | Месяц             | Курс    | Доход  |   | Курс    | Доход   |                  |   |
| 21 | 0                 | 25,00   |        |   | 45,00   |         |                  |   |
| 22 | 1                 | 24,12   | -3,58% |   | 44,85   | -0,33%  |                  |   |
| 23 | 2                 | 23,37   | -3,16% |   | 46,88   | 4,43%   | <-- =LN(E23/E22) |   |
| 24 | 3                 | 24,75   | 5,74%  |   | 45,25   | -3,54%  |                  |   |
| 25 | 4                 | 26,62   | 7,28%  |   | 50,87   | 11,71%  |                  |   |
| 26 | 5                 | 26,50   | -0,45% |   | 53,25   | 4,57%   |                  |   |
| 27 | 6                 | 28,00   | 5,51%  |   | 53,25   | 0,00%   |                  |   |
| 28 | 7                 | 28,88   | 3,09%  |   | 62,75   | 16,42%  |                  |   |
| 29 | 8                 | 29,75   | 2,97%  |   | 65,50   | 4,29%   |                  |   |
| 30 | 9                 | 31,38   | 5,33%  |   | 66,87   | 2,07%   |                  |   |
| 31 | 10                | 36,25   | 14,43% |   | 78,50   | 16,03%  |                  |   |
| 32 | 11                | 37,13   | 2,40%  |   | 78,00   | -0,64%  |                  |   |
| 33 | 12                | 36,88   | -0,68% |   | 68,23   | -13,38% |                  |   |

Теперь делаем крайне смелое — почти героическое — предположение о том, что данные о доходности за последние 12 месяцев представляют распределение дохода (в вероятностном смысле. — *Примеч. ред.*) в предстоящем месяце. Таким образом, предполагается, что прошлое дает нам некоторую информацию о тенденции поведения доходов в будущем. Из этого предположения вытекает следующее допущение о том, что среднее значение известных из прошлого данных дает *ожидаемое значение месячного дохода* по каждой акции. Далее на этом же основании предполагаем, что из информации о прошлой доходности нам известна дисперсия будущих доходов. С использованием функций Excel СРЗНАЧ (Average), ДИСПР (Varp) и СТАНДОТКЛОНП (Stdevp) можно рассчитать следующие статистики распределения дохода.

|    | A                    | B | C      | D | E | F      | G                          | H | I |
|----|----------------------|---|--------|---|---|--------|----------------------------|---|---|
| 35 | Среднее за месяц     |   | 3,24%  |   |   | 3,47%  | <-- =СРЗНАЧ(F22:F33)       |   |   |
| 36 | Дисперсия за месяц   |   | 0,23%  |   |   | 0,66%  | <-- =ДИСПР(F22:F33)        |   |   |
| 37 | Станд.откл. за месяц |   | 4,78%  |   |   | 8,03%  | <-- =СТАНДОТКЛОНП(F22:F33) |   |   |
| 38 |                      |   |        |   |   |        |                            |   |   |
| 39 | Среднее за год       |   | 38,86% |   |   | 41,62% | <-- =12*F35                |   |   |
| 40 | Дисперсия за год     |   | 2,75%  |   |   | 7,75%  | <-- =12*F36                |   |   |
| 41 | Станд.откл. за год   |   | 16,57% |   |   | 27,83% | <-- =КОРЕНЬ(F40)           |   |   |

Обратите внимание, что применяется функция ДИСПР (Varp) вместо ДИСП (Var) и функция СТАНДОТКЛОНП (Stdevp) вместо СТАНДОТКЛОН (Stdev). Различие между этими функциями, а также соображения, которыми следует руководствоваться при выборе, можно найти в главе 29.

Далее необходимо вычислить *ковариацию* доходов. Ковариация (и производный от нее коэффициент корреляции) — это мера взаимосвязи между изменениями доходов с двух активов. Математическое определение ковариации таково:

$$\text{Ковар}(r_A, r_B) = \frac{1}{M} \sum_1^M [r_{At} - E(r_A)] \cdot [r_{Bt} - E(r_B)],$$

где  $M$  — количество точек в распределении (в нашем случае  $M = 12$ ). Это уравнение легко реализуется в Excel.

|    | A                             | B            | C | D       | E            | F | G        | H                            | I | J |
|----|-------------------------------|--------------|---|---------|--------------|---|----------|------------------------------|---|---|
| 44 | РАСЧЕТ КОВАРИАЦИИ И ДИСПЕРСИИ |              |   |         |              |   |          |                              |   |   |
| 45 | Акция А                       |              |   | Акция В |              |   |          |                              |   |   |
| 46 | Доход                         | Доход-средн. |   | Доход   | Доход-средн. |   | Произв.  |                              |   |   |
| 47 |                               |              |   |         |              |   |          |                              |   |   |
| 48 | -0,0358                       | -0,0682      |   | -0,0033 | -0,0380      |   | 0,00259  | <-- =E48*B48                 |   |   |
| 49 | -0,0316                       | -0,0640      |   | 0,0443  | 0,0096       |   | -0,00061 |                              |   |   |
| 50 | 0,0574                        | 0,0250       |   | -0,0354 | -0,0701      |   | -0,00175 |                              |   |   |
| 51 | 0,0728                        | 0,0404       |   | 0,1171  | 0,0824       |   | 0,00333  |                              |   |   |
| 52 | -0,0045                       | -0,0369      |   | 0,0457  | 0,0110       |   | -0,00041 |                              |   |   |
| 53 | 0,0551                        | 0,0227       |   | 0,0000  | -0,0347      |   | -0,00079 |                              |   |   |
| 54 | 0,0309                        | -0,0015      |   | 0,1642  | 0,1295       |   | -0,00019 |                              |   |   |
| 55 | 0,0297                        | -0,0027      |   | 0,0429  | 0,0082       |   | -0,00002 |                              |   |   |
| 56 | 0,0533                        | 0,0209       |   | 0,0207  | -0,0140      |   | -0,00029 |                              |   |   |
| 57 | 0,1443                        | 0,1119       |   | 0,1603  | 0,1257       |   | 0,01406  |                              |   |   |
| 58 | 0,0240                        | -0,0084      |   | -0,0064 | -0,0411      |   | 0,00035  |                              |   |   |
| 59 | -0,0068                       | -0,0392      |   | -0,1338 | -0,1685      |   | 0,00660  |                              |   |   |
| 60 |                               |              |   |         |              |   |          |                              |   |   |
| 61 |                               |              |   |         | Ковариация   |   | 0,00191  | <-- =СРЗНАЧ(G48:G59)         |   |   |
| 62 |                               |              |   |         |              |   | 0,00191  | <-- =КОВАР(A48:A59,D48:D59)  |   |   |
| 63 |                               |              |   |         | Корреляция   |   | 0,49589  | <-- =G62/(F37*C37)           |   |   |
| 64 |                               |              |   |         |              |   | 0,49589  | <-- =КОРРЕЛ(A48:A59,D48:D59) |   |   |

В столбце “Произведение” находится произведение отклонений от средних значений за каждый месяц, т.е. слагаемые  $[r_{At} - E(r_A)] \cdot [r_{Bt} - E(r_B)]$  для  $t = 1, \dots, 12$ . Ковариация дается формулой СРЗНАЧ(Произведение) и равна 0,00191. Вычислить ковариацию таким способом полезно хотя бы один раз, однако есть и более короткий путь, также проиллюстрированный в таблице. Для работы с массивами в Excel имеется функция КОВАР (Covar); КОВАР(Массив1,Массив2) вычисляет ковариацию двух массивов непосредственно. Чтобы найти ковариацию таким способом, не обязательно вычислять разницу между доходом и его средним значением; достаточно применить функцию КОВАР непосредственно к столбцам, как это и сделано в ячейке G62.

Значение ковариации не так-то просто истолковать, поскольку оно зависит от единиц измерения дохода. Если бы доход был записан в процентах (например, 4 вместо 0,04), то ковариация была бы равна 19,1, а это в 10 000 раз больше, чем только что полученное число. Можно также вычислить и коэффициент корреляции  $\rho_{AB}$ , определяемый как

$$\rho_{AB} = \frac{\text{Ковар}(r_A, r_B)}{\sigma_A \sigma_B}.$$

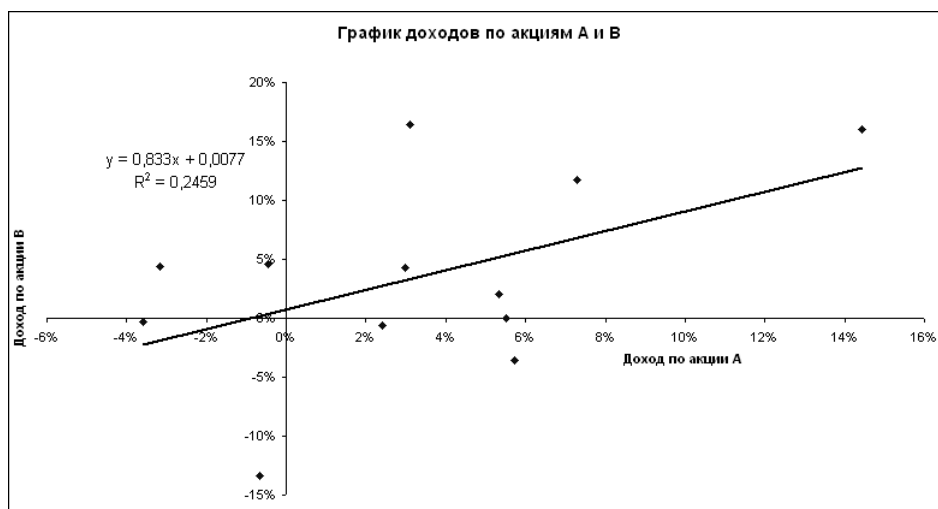
Коэффициент корреляции — безразмерная величина; в нашем примере он равен 0,4958. Как было показано в таблице, коэффициент корреляции можно вычислить в Excel непосредственно с помощью функции `КОРРЕЛ(Массив1, Массив2)`, где `Массив1` и `Массив2` представляют собой те же векторы-столбцы, которые использовались для вычисления ковариации функцией `КОВАР`.

Коэффициент корреляции показывает степень линейной зависимости между доходами по акциям А и В. Можно доказать следующие утверждения о коэффициенте корреляции.

- Значение коэффициента корреляции всегда находится между +1 и -1:  $-1 \leq \rho_{AB} \leq 1$ .
- Если коэффициент корреляции равен +1, то доходы по двум активам линейно зависимы с положительным угловым коэффициентом, т.е. если  $\rho_{AB} = 1$ , то  $r_{At} = c + dr_{Bt}$ , где  $d > 0$ .
- Если коэффициент корреляции равен -1, то доходы по двум активам линейно зависимы с отрицательным угловым коэффициентом, т.е. если  $\rho_{AB} = -1$ , то  $r_{At} = c + dr_{Bt}$ , где  $d < 0$ .
- Если распределения доходов статистически независимы, то их коэффициент корреляции равен нулю. (Обратное неверно: если коэффициент корреляции равен нулю, это не обязательно означает, что распределения независимы. В качестве примера см. упражнение 5.)

### 7.2.1. Другое представление коэффициента корреляции

Коэффициент корреляции можно представить еще и таким образом: построить графики доходов с акций А и В в одних и тех же осях, а затем с помощью средства Excel `Линия тренда (Trendline)` выполнить регрессию доходов по акциям В по отношению к доходам по акциям А. (Более подробно `Линия тренда` рассматривается в главе 29.) Коэффициент корреляции равен квадратному корню из регрессии  $R^2$ .



### 7.3. Вычисление среднего дохода и дисперсии портфеля

Теперь предположим, что мы формируем портфель, наполовину состоящий из акций А, а наполовину — из акций В. Каково будет среднее значение (математическое ожидание) и дисперсия дохода по этому портфелю? Не помешает хотя бы раз выполнить в Excel прямой непосредственный расчет.

|    | А                                                        | В     | С        | Д           | Е        | Ф                            | Г | Н |
|----|----------------------------------------------------------|-------|----------|-------------|----------|------------------------------|---|---|
| 1  | <b>РАСЧЕТ СРЕДНЕГО И СИГМА ДЛЯ ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ БУМАГ</b> |       |          |             |          |                              |   |   |
| 2  |                                                          |       |          |             |          |                              |   |   |
| 3  | Доля А                                                   | 0,5   |          |             |          |                              |   |   |
| 4  |                                                          |       |          |             |          |                              |   |   |
| 5  |                                                          | Месяц | $R_{At}$ | $R_{Bt}$    | $R_{Pt}$ |                              |   |   |
| 6  |                                                          | 1     | -3,58%   | -0,33%      | -1,96%   | <-- =С6*\$B\$3+(1-\$B\$3)*D6 |   |   |
| 7  |                                                          | 2     | -3,16%   | 4,43%       | 0,63%    |                              |   |   |
| 8  |                                                          | 3     | 5,74%    | -3,54%      | 1,10%    |                              |   |   |
| 9  |                                                          | 4     | 7,28%    | 11,71%      | 9,50%    |                              |   |   |
| 10 |                                                          | 5     | -0,45%   | 4,57%       | 2,06%    |                              |   |   |
| 11 |                                                          | 6     | 5,51%    | 0,00%       | 2,75%    |                              |   |   |
| 12 |                                                          | 7     | 3,09%    | 16,42%      | 9,76%    |                              |   |   |
| 13 |                                                          | 8     | 2,97%    | 4,29%       | 3,63%    |                              |   |   |
| 14 |                                                          | 9     | 5,33%    | 2,07%       | 3,70%    |                              |   |   |
| 15 |                                                          | 10    | 14,43%   | 16,03%      | 15,23%   |                              |   |   |
| 16 |                                                          | 11    | 2,40%    | -0,64%      | 0,88%    |                              |   |   |
| 17 |                                                          | 12    | -0,68%   | -13,38%     | -7,03%   |                              |   |   |
| 18 |                                                          |       |          | Среднее     | 3,35%    | <-- =СРЗНАЧ(Е6:Е17)          |   |   |
| 19 |                                                          |       |          | Дисперсия   | 0,31%    | <-- =ДИСПР(Е6:Е17)           |   |   |
| 20 |                                                          |       |          | Станд.откл. | 5,60%    | <-- =СТАНДОТКЛОНП(Е6:Е17)    |   |   |

Легко видеть, что средний доход от портфеля в точности равен среднему арифметическому от средних доходов по двум активам:

$$\begin{aligned}
 \text{Ожидаемый средний доход} &= E(r_p) = 0,5E(r_A) + 0,5E(r_B) = \\
 &= 0,5 \cdot 3,24\% + 0,5 \cdot 3,47\% = 3,35\%.
 \end{aligned}$$

В целом средний доход от портфеля равен *средневзвешенному доходу* по входящим в него активам. Если обозначить через  $\gamma$  долю акций А в портфеле, то

$$E(r_p) = \gamma E(r_A) + (1 - \gamma) E(r_B).$$

Однако дисперсия доходов от портфеля *не является* средним арифметическим дисперсий доходов от отдельных активов! Дисперсия описывается следующей формулой:

$$\text{Дисп}(r_p) = \gamma^2 \text{Дисп}(r_A) + (1 - \gamma)^2 \text{Дисп}(r_B) + 2\gamma(1 - \gamma) \text{Ковар}(r_A \cdot r_B).$$

Можно переписать эту формулу и в других обозначениях:

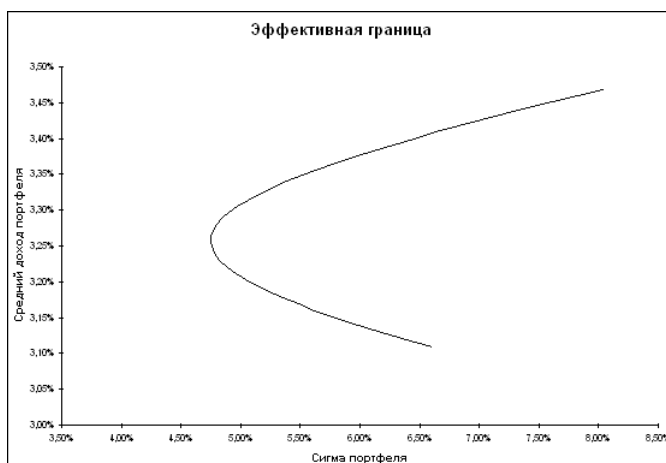
$$\sigma_p^2 = \gamma^2 \sigma_A^2 + (1 - \gamma)^2 \sigma_B^2 + 2\gamma(1 - \gamma) \rho_{AB} \sigma_A \sigma_B.$$

При изучении финансовой теории часто выполняют такое упражнение: построить график средних значений и стандартных отклонений для различных соотношений долей акционерных капиталов в портфеле, т.е. в зависимости от  $\gamma$ . Для этого следует построить таблицу с использованием команды Данные  $\Rightarrow$  Таблица подстановки (Data  $\Rightarrow$  Table); см. главу 26.

|    | A     | B     | C       | D                                                    | E                                                           | F | G | H |
|----|-------|-------|---------|------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|---|---|---|
| 23 | Доля  | Сигма | Среднее | <-- Заголовки таблицы: =КОРЕНЬ(E19) and =E18, соотв. |                                                             |   |   |   |
| 24 |       | 5,60% | 3,35%   |                                                      |                                                             |   |   |   |
| 25 | 0     | 8,03% | 3,47%   |                                                      |                                                             |   |   |   |
| 26 | 0,075 | 7,62% | 3,45%   |                                                      | Приемы построения таблиц данных рассматриваются в главе 26. |   |   |   |
| 27 | 0,15  | 7,21% | 3,43%   |                                                      |                                                             |   |   |   |
| 28 | 0,225 | 6,82% | 3,42%   |                                                      |                                                             |   |   |   |
| 29 | 0,3   | 6,46% | 3,40%   |                                                      |                                                             |   |   |   |
| 30 | 0,375 | 6,11% | 3,38%   |                                                      |                                                             |   |   |   |
| 31 | 0,45  | 5,80% | 3,37%   |                                                      |                                                             |   |   |   |
| 32 | 0,525 | 5,51% | 3,35%   |                                                      |                                                             |   |   |   |
| 33 | 0,6   | 5,26% | 3,33%   |                                                      |                                                             |   |   |   |
| 34 | 0,675 | 5,06% | 3,31%   |                                                      |                                                             |   |   |   |
| 35 | 0,75  | 4,90% | 3,30%   |                                                      |                                                             |   |   |   |
| 36 | 0,825 | 4,80% | 3,28%   |                                                      |                                                             |   |   |   |
| 37 | 0,9   | 4,75% | 3,26%   |                                                      |                                                             |   |   |   |
| 38 | 0,975 | 4,77% | 3,25%   |                                                      |                                                             |   |   |   |
| 39 | 1,05  | 4,84% | 3,23%   |                                                      |                                                             |   |   |   |
| 40 | 1,125 | 4,96% | 3,21%   |                                                      |                                                             |   |   |   |
| 41 | 1,2   | 5,14% | 3,19%   |                                                      |                                                             |   |   |   |
| 42 | 1,275 | 5,36% | 3,18%   |                                                      |                                                             |   |   |   |
| 43 | 1,35  | 5,62% | 3,16%   |                                                      |                                                             |   |   |   |
| 44 | 1,425 | 5,92% | 3,14%   |                                                      |                                                             |   |   |   |
| 45 | 1,5   | 6,25% | 3,13%   |                                                      |                                                             |   |   |   |
| 46 | 1,575 | 6,60% | 3,11%   |                                                      |                                                             |   |   |   |

График средних значений и стандартных отклонений показан на следующем рисунке. Чтобы рисунок выглядел именно так, следует выбрать для диаграммы первый вариант типа График (Graph Type XY).





## 7.4. Средний доход и дисперсия портфеля

Постановку задач по расчету портфеля ценных бумаг можно упростить с помощью матричной формы записи<sup>1</sup>. В общем случае  $N$  активов, входящих в портфель, обозначим долю актива  $i$  через  $\gamma_i$ . Удобно записать доли активов в портфеле в виде вектора-столбца  $\Gamma$ :

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \vdots \\ \gamma_N \end{bmatrix}$$

Транспонированный вектор  $\Gamma^T$  будет представлять собой вектор-строку:

$$\Gamma^T = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_N].$$

Средний доход от портфеля, доли активов в котором заданы вектором  $\Gamma$ , будет равен средневзвешенному значению средних доходов по отдельным активам:

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^N \gamma_i E(r_i).$$

<sup>1</sup> В главе 27 дается достаточно вводных сведений о матрицах для решения всех задач, встречающихся в этой книге. Поскольку в Excel имеются превосходные средства для работы с матрицами, рекомендуется вначале изучить главу 27, а затем уже продолжать чтение текущей главы. Функции Excel МУМНОЖ (MMult) и МОБР (Minverse), используемые для расчета портфелей, также рассматриваются в главе 27.

Теперь запишем  $E(r)$  в виде вектора-столбца доходов по отдельным активам, а  $E(r)^T$  — соответственно в виде транспонированного вектора-строки:

$$E(r) = \begin{bmatrix} E(r_1) \\ E(r_2) \\ E(r_3) \\ \vdots \\ E(r_N) \end{bmatrix}$$

$$E(r)^T = [E(r_1), E(r_2), E(r_3), \dots, E(r_N)].$$

В этом случае средний доход от портфеля можно записать в матричной форме следующим образом:

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^N \gamma_i E(r_i) = \Gamma^T E(r) = E(r)^T \Gamma.$$

Дисперсия портфеля дается следующей формулой:

$$\text{Дисп}(r_p) = \sum_{i=1}^N (\gamma_i)^2 \text{Дисп}(r_i) + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \gamma_i \gamma_j \text{Ковар}(r_i, r_j).$$

Эта формула, такая страшная на первый взгляд, представляет собой просто обобщение приведенного ранее выражения для дисперсии портфеля, состоящего из двух активов. В нем дисперсия каждого актива фигурирует один раз с коэффициентом в виде квадрата доли актива в портфеле. Ковариация каждой пары активов также фигурирует один раз с множителем в виде удвоенного произведения долей соответствующих активов. Для удобства можно ввести следующие обозначения:

$$\text{Дисп}(r_i) = \sigma_{ii}, \quad \text{Ковар}(r_i, r_j) = \sigma_{ij}.$$

Тогда можно записать:

$$\text{Дисп}(r_p) = \sum_i \sum_j \gamma_i \gamma_j \sigma_{ij}.$$

Наиболее экономичная запись дисперсии портфеля получается с помощью матричных обозначений. Матричную форму также легче всего реализовать в Excel для больших портфелей. В таком представлении будем называть матрицу, содержащую элемент  $\sigma_{ij}$  на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца, *ковариационной матрицей*:

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} & \dots & \sigma_{1N} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} & \dots & \sigma_{2N} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} & \dots & \sigma_{3N} \\ \vdots & & & & \\ \sigma_{N1} & \sigma_{N2} & \sigma_{N3} & \dots & \sigma_{NN} \end{bmatrix}.$$

В этом случае дисперсия портфеля активов дается формулой  $\text{Дисп}(r_p) = \Gamma^T S \Gamma$ .

Наконец, если обозначить через  $\Gamma_1 = [\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_N]$  доли активов в портфеле 1, а через  $\Gamma_2 = [\delta_1, \delta_2, \delta_3, \dots, \delta_N]$  — доли активов в портфеле 2, то можно показать, что ковариация двух портфелей будет равна  $\text{Ковар}(1, 2) = \Gamma_1 S \Gamma_2^T$ .

А сейчас приведем пример. Предположим, имеются четыре подверженных риску актива с приведенными ниже ожидаемыми средними доходами и ковариационной матрицей.

|   | В                                             | С     | Д    | Е     | Ф             | Г   | Н | И |
|---|-----------------------------------------------|-------|------|-------|---------------|-----|---|---|
| 1 | <b>ЗАДАЧА ДЛЯ ПОРТФЕЛЯ ИЗ ЧЕТЫРЕХ АКТИВОВ</b> |       |      |       |               |     |   |   |
| 2 |                                               |       |      |       |               |     |   |   |
| 3 | Ковариационная матрица                        |       |      |       | Средний доход |     |   |   |
| 4 | 0,10                                          | 0,01  | 0,03 | 0,05  |               | 6%  |   |   |
| 5 | 0,01                                          | 0,30  | 0,06 | -0,04 |               | 8%  |   |   |
| 6 | 0,03                                          | 0,06  | 0,40 | 0,02  |               | 10% |   |   |
| 7 | 0,05                                          | -0,04 | 0,02 | 0,50  |               | 15% |   |   |

Мы хотим проанализировать два портфеля рискованных активов.

|               | В | С   | Д   | Е   | Ф   |
|---------------|---|-----|-----|-----|-----|
| 9 Портфель 1  |   | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,1 |
| 10 Портфель 2 |   | 0,2 | 0,1 | 0,1 | 0,6 |

Для наглядности изложения вначале выделим в таблицах место для транспонированных показателей этих двух портфелей. Для вставки соответствующих ячеек используется функция ТРАНСП (Transpose), которая описана в главе 29.

|                           | В   | С | Д          |
|---------------------------|-----|---|------------|
| 19 После транспонирования |     |   |            |
| 20 Портфель 1             |     |   | Портфель 2 |
| 21                        | 0,2 |   | 0,2        |
| 22                        | 0,3 |   | 0,1        |
| 23                        | 0,4 |   | 0,1        |
| 24                        | 0,1 |   | 0,6        |

Далее вычисляем средние значения, дисперсии и ковариацию двух портфелей. Для всех этих расчетов применяется функция МУМНОЖ (Mmult).

|               | В      | С                                        | Д | Е          | Ф      | Г                                          | Н | И | Ж | К |
|---------------|--------|------------------------------------------|---|------------|--------|--------------------------------------------|---|---|---|---|
| 12 Портфель 1 |        |                                          |   | Портфель 2 |        |                                            |   |   |   |   |
| 13 Среднее    | 9,10%  |                                          |   | Среднее    | 12,00% | <-- =МУМНОЖ(С10:Ф10,\$Г\$4:\$Г\$7)         |   |   |   |   |
| 14 Дисперсия  | 12,16% |                                          |   | Дисперсия  | 20,34% | <-- =МУМНОЖ(С10:Ф10,МУМНОЖ(В4:Е7,Д21:Д24)) |   |   |   |   |
| 15            |        |                                          |   |            |        |                                            |   |   |   |   |
| 16 Ковариация | 0,0714 | <-- =МУМНОЖ(С9:Ф9,МУМНОЖ(В4:Е7,Д21:Д24)) |   |            |        |                                            |   |   |   |   |
| 17 Корреляция | 0,4540 | <-- =С16/КОРЕНЬ(С14*Ф14)                 |   |            |        |                                            |   |   |   |   |

Теперь вычисляем стандартное отклонение и совместный доход от портфелей 1 и 2. Обратите внимание, что как только подсчитаны средние, дисперсии и ковариации доходов по двум портфелям, расчет средних и дисперсий любого вида портфелей выполняется аналогично случаю двух активов.

|    | A                                                                  | B      | C                                              | D      | E                                       | F | G | H | I | J |
|----|--------------------------------------------------------------------|--------|------------------------------------------------|--------|-----------------------------------------|---|---|---|---|---|
| 26 | <b>Расчет дохода от комбинаций портфеля 1 и портфеля 2</b>         |        |                                                |        |                                         |   |   |   |   |   |
| 27 | Доля портфеля 1                                                    | 0,3    |                                                |        |                                         |   |   |   |   |   |
| 28 | Средний доход                                                      | 11,13% | <-- =B27*C13+(1-B27)*F13                       |        |                                         |   |   |   |   |   |
| 29 | Дисперсия дохода                                                   | 14,06% | <-- =B27*2*C14+(1-B27)*2*F14+2*B27*(1-B27)*C16 |        |                                         |   |   |   |   |   |
| 30 | Станд. отклон. дохода                                              | 37,50% | <-- =КОРЕНЬ(B29)                               |        |                                         |   |   |   |   |   |
| 31 |                                                                    |        |                                                |        |                                         |   |   |   |   |   |
| 32 |                                                                    |        |                                                |        |                                         |   |   |   |   |   |
| 33 | <b>Таблица доходов (таблица данных на основании этого примера)</b> |        |                                                |        |                                         |   |   |   |   |   |
| 34 |                                                                    |        |                                                |        |                                         |   |   |   |   |   |
| 35 |                                                                    | Доля   | Ст.откл.                                       | Средн. | <--содержимое этих ячеек показано ниже: |   |   |   |   |   |
| 36 |                                                                    |        | 37,50%                                         | 11,13% | <-- =B30                                |   |   |   |   |   |
| 37 |                                                                    | 0      | 45,10%                                         | 12,00% | <-- =B28                                |   |   |   |   |   |
| 38 |                                                                    | 0,1    | 42,29%                                         | 11,71% |                                         |   |   |   |   |   |
| 39 |                                                                    | 0,2    | 39,74%                                         | 11,42% |                                         |   |   |   |   |   |
| 40 |                                                                    | 0,3    | 37,50%                                         | 11,13% |                                         |   |   |   |   |   |
| 41 |                                                                    | 0,4    | 35,63%                                         | 10,84% |                                         |   |   |   |   |   |
| 42 |                                                                    | 0,5    | 34,20%                                         | 10,55% |                                         |   |   |   |   |   |
| 43 |                                                                    | 0,6    | 33,26%                                         | 10,26% |                                         |   |   |   |   |   |
| 44 |                                                                    | 0,7    | 32,84%                                         | 9,97%  |                                         |   |   |   |   |   |
| 45 |                                                                    | 0,8    | 32,99%                                         | 9,68%  |                                         |   |   |   |   |   |
| 46 |                                                                    | 0,9    | 33,67%                                         | 9,39%  |                                         |   |   |   |   |   |
| 47 |                                                                    | 1      | 34,87%                                         | 9,10%  |                                         |   |   |   |   |   |
| 48 |                                                                    | 1,1    | 36,53%                                         | 8,81%  |                                         |   |   |   |   |   |
| 49 |                                                                    | 1,2    | 38,60%                                         | 8,52%  |                                         |   |   |   |   |   |
| 50 |                                                                    |        |                                                |        |                                         |   |   |   |   |   |
| 51 |                                                                    |        |                                                |        |                                         |   |   |   |   |   |
| 52 |                                                                    |        |                                                |        |                                         |   |   |   |   |   |



## 7.5. Эффективные портфели

*Эффективный портфель* — это портфель подверженных риску ценных бумаг (активов), дисперсия доходов по которому минимальна среди всех портфелей, имеющих один и тот же средний ожидаемый доход. Либо же можно сказать и так: эффективный портфель дает максимальный средний доход из всех портфелей с одинаковой дисперсией. Формально-математическое определение эффективно-го портфеля таково: для заданного среднего дохода  $\mu$  эффективным портфелем называется решение задачи

$$\min \sum_i \sum_j x_i x_j \sigma_{ij} = \text{Дисп}(r_p)$$

при выполнении условий-ограничений

$$\begin{aligned} \sum_i x_i r_i &= E(r_p); \\ \sum_i x_i &= 1. \end{aligned}$$

*Эффективной границей* называется множество всех эффективных портфелей. Как было показано Блэком (Black, 1972), эффективная граница является геометрическим местом всех выпуклых линейных комбинаций (выпуклой линейной оболочкой) любых двух эффективных портфелей. Таким образом, если  $x = \{x_1, \dots, x_N\}$  и  $y = \{y_1, \dots, y_N\}$  — эффективные портфели, и  $a$  — некоторая константа, то эффективным будет также портфель  $z$ , определяемый формулой

$$z = ax + (1 - a)y = \begin{bmatrix} ax_1 + (1 - a)y_1 \\ ax_2 + (1 - a)y_2 \\ \vdots \\ ax_N + (1 - a)y_N \end{bmatrix}.$$

Таким образом, можно найти всю эффективную границу, зная два эффективных портфеля. Согласно этой теореме получается, что любой эффективный портфель является выпуклой линейной комбинацией некоторых двух портфелей  $x$  и  $y$ . Если обозначить средние значения и дисперсии  $x$  и  $y$  соответственно через  $[E(r_x), \sigma_x^2]$  и  $[E(r_y), \sigma_y^2]$  и если положить  $z = ax + (1 - a)y$ , то

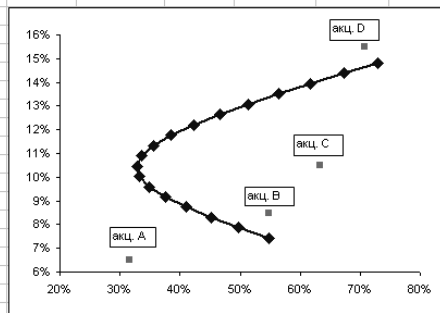
$$\begin{aligned} E(r_z) &= aE(r_x) + (1 - a)E(r_y); \\ \sigma_z^2 &= a^2\sigma_x^2 + (1 - a)^2\sigma_y^2 + 2a(1 - a)\text{Ковар}(x, y) = \\ &= a^2\sigma_x^2 + (1 - a)^2\sigma_y^2 + 2a(1 - a)x^TSy \end{aligned}$$

Дальнейшие подробности расчета эффективных портфелей ценных бумаг рассматриваются в главе 9.

### 7.5.1. Возвращение к общему случаю (раздел 7.4)

Для демонстрации того, что эффективный портфель ценных бумаг — понятие далеко не тривиальное, мы покажем, что два портфеля, линейные комбинации которых показаны на графиках в разделе 7.4, *не являются эффективными*. Это легко увидеть, если расширить таблицу данных и включить в нее цифры отдельных активов.

|    | A                                                          | B                                                                  | C                                              | D      | E   | F | G | H | I | J | K |
|----|------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------|--------|-----|---|---|---|---|---|---|
| 26 | <b>Расчет дохода от комбинаций портфеля 1 и портфеля 2</b> |                                                                    |                                                |        |     |   |   |   |   |   |   |
| 27 | Доля портфеля 1                                            | 0,3                                                                |                                                |        |     |   |   |   |   |   |   |
| 28 | Средний доход                                              | 11,13%                                                             | <-- =B27*C13+(1-B27)*F13                       |        |     |   |   |   |   |   |   |
| 29 | Дисперсия дохода                                           | 14,06%                                                             | <-- =B27^2*C14+(1-B27)^2*F14+2*B27*(1-B27)*C16 |        |     |   |   |   |   |   |   |
| 30 | Станд. отклон. дохода                                      | 37,50%                                                             | <-- =КОРЕНЬ(B29)                               |        |     |   |   |   |   |   |   |
| 31 |                                                            |                                                                    |                                                |        |     |   |   |   |   |   |   |
| 32 |                                                            |                                                                    |                                                |        |     |   |   |   |   |   |   |
| 33 |                                                            | <b>Таблица доходов (таблица данных на основании этого примера)</b> |                                                |        |     |   |   |   |   |   |   |
| 34 |                                                            |                                                                    |                                                |        |     |   |   |   |   |   |   |
| 35 |                                                            | Доля                                                               | Ст.откл.                                       | Средн. |     |   |   |   |   |   |   |
| 36 |                                                            |                                                                    | 37,50%                                         | 11,13% |     |   |   |   |   |   |   |
| 37 |                                                            | -0,8                                                               | 72,88%                                         | 14,32% |     |   |   |   |   |   |   |
| 38 |                                                            | -0,65                                                              | 67,23%                                         | 13,89% |     |   |   |   |   |   |   |
| 39 |                                                            | -0,5                                                               | 61,72%                                         | 13,45% |     |   |   |   |   |   |   |
| 40 |                                                            | -0,35                                                              | 56,40%                                         | 13,02% |     |   |   |   |   |   |   |
| 41 |                                                            | -0,2                                                               | 51,33%                                         | 12,58% |     |   |   |   |   |   |   |
| 42 |                                                            | -0,05                                                              | 46,59%                                         | 12,15% |     |   |   |   |   |   |   |
| 43 |                                                            | 0,1                                                                | 42,29%                                         | 11,71% |     |   |   |   |   |   |   |
| 44 |                                                            | 0,25                                                               | 38,57%                                         | 11,28% |     |   |   |   |   |   |   |
| 45 |                                                            | 0,4                                                                | 35,63%                                         | 10,84% |     |   |   |   |   |   |   |
| 46 |                                                            | 0,55                                                               | 33,66%                                         | 10,41% |     |   |   |   |   |   |   |
| 47 |                                                            | 0,7                                                                | 32,84%                                         | 9,97%  |     |   |   |   |   |   |   |
| 48 |                                                            | 0,85                                                               | 33,26%                                         | 9,54%  |     |   |   |   |   |   |   |
| 49 |                                                            | 1                                                                  | 34,87%                                         | 9,10%  |     |   |   |   |   |   |   |
| 50 |                                                            | 1,15                                                               | 37,52%                                         | 8,67%  |     |   |   |   |   |   |   |
| 51 |                                                            | 1,3                                                                | 41,00%                                         | 8,23%  |     |   |   |   |   |   |   |
| 52 |                                                            | 1,45                                                               | 45,13%                                         | 7,80%  |     |   |   |   |   |   |   |
| 53 |                                                            | 1,6                                                                | 49,74%                                         | 7,36%  |     |   |   |   |   |   |   |
| 54 |                                                            | 1,75                                                               | 54,72%                                         | 6,93%  |     |   |   |   |   |   |   |
| 55 |                                                            | Акция А                                                            | 31,62%                                         |        | 6%  |   |   |   |   |   |   |
| 56 |                                                            | Акция В                                                            | 54,77%                                         |        | 8%  |   |   |   |   |   |   |
| 57 |                                                            | Акция С                                                            | 63,25%                                         |        | 10% |   |   |   |   |   |   |
| 58 |                                                            | Акция D                                                            | 70,71%                                         |        | 15% |   |   |   |   |   |   |



Если бы эти два портфеля были эффективными, то все отдельные акции попадали бы на график комбинаций или внутрь его. В главе 9 будет показано, как рассчитывать эффективные портфели, и там же вы увидите, что для этого требуются намного более сложные вычисления.

## 7.6. Заключение

В этой главе сделан краткий обзор основных понятий и математических методов расчета портфелей ценных бумаг. В следующих главах будут показаны методы вычисления ковариационной матрицы по доходам с активов и расчета эффективных портфелей.

## Упражнения

1. В файле Problems07.xls содержатся данные о курсовой цене акций из индекса Dow-Jones 30 Industrials с декабря 1993 г. по апрель 1999 г. Выделив данные о компаниях American Airlines (AA) и Sears-Roebuck (S), проверьте и подтвердите следующие статистики доходности этих двух ценных бумаг.

|   | A                                                        | B | C         | D                               | E | F        | G |
|---|----------------------------------------------------------|---|-----------|---------------------------------|---|----------|---|
| 1 | <b>Компании AMERICAN AIRLINES (AA) и SEARS (S),</b>      |   |           |                                 |   |          |   |
| 2 | <b>данные о доходности за декабрь 93 - апрель 99 гг.</b> |   |           |                                 |   |          |   |
| 3 | <b>Месячная статистика</b>                               |   | <b>AA</b> |                                 |   | <b>S</b> |   |
| 4 | Среднее                                                  |   | 0,0257    |                                 |   | 0,0146   |   |
| 5 | Сигма                                                    |   | 0,0955    |                                 |   | 0,0851   |   |
| 6 | Ковариация                                               |   | 0,0020    |                                 |   |          |   |
| 7 |                                                          |   |           |                                 |   |          |   |
| 8 | Корреляция                                               |   | 0,2401    | <-- Используется функция КОРРЕЛ |   |          |   |
| 9 |                                                          |   | 0,2401    | <-- =C6/(C5*F5)                 |   |          |   |

2. Используя данные из упражнения 1, предположим, что вы приобрели и сформировали портфель из 50% акций American Airlines (AA) и 50% акций Sears (S) и были его держателем в течение всего указанного периода. Рассчитайте следующие статистики данного портфеля:
  - а) среднемесячный доход;
  - б) стандартное отклонение ( $\sigma$ ) ежемесячного дохода.
3. Ниже приведена статистика годовых доходов двух фондов взаимных инвестиций из семейства Vanguard.

|    | A                                                                                              | B             | C              | D | E | F | G | H |
|----|------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|----------------|---|---|---|---|---|
| 1  | <b>Доходность фондов Windsor и Index 500 семейства Vanguard</b>                                |               |                |   |   |   |   |   |
| 2  | Источник: <a href="http://www.vanguard.com">http://www.vanguard.com</a>                        |               |                |   |   |   |   |   |
| 3  | Фонд Index 500 имитирует индекс SP500; фонд Windsor - рискованный, с ожидаемым высоким доходом |               |                |   |   |   |   |   |
| 4  |                                                                                                |               |                |   |   |   |   |   |
| 5  | <b>Год, заканчивающийся</b>                                                                    | <b>Индекс</b> | <b>Фонд</b>    |   |   |   |   |   |
| 6  | <b>31 декабря</b>                                                                              | <b>SP 500</b> | <b>Windsor</b> |   |   |   |   |   |
| 7  | 1997                                                                                           | 33,40%        | 22,00%         |   |   |   |   |   |
| 8  | 1996                                                                                           | 23,00%        | 26,40%         |   |   |   |   |   |
| 9  | 1995                                                                                           | 37,60%        | 30,10%         |   |   |   |   |   |
| 10 | 1994                                                                                           | 1,30%         | -0,10%         |   |   |   |   |   |
| 11 | 1993                                                                                           | 10,10%        | 19,40%         |   |   |   |   |   |
| 12 | 1992                                                                                           | 7,60%         | 16,50%         |   |   |   |   |   |
| 13 | 1991                                                                                           | 30,50%        | 28,60%         |   |   |   |   |   |
| 14 | 1990                                                                                           | -3,10%        | -15,50%        |   |   |   |   |   |
| 15 | 1989                                                                                           | 31,70%        | 15,00%         |   |   |   |   |   |
| 16 | 1988                                                                                           | 16,60%        | 28,70%         |   |   |   |   |   |
| 17 | 1987                                                                                           | 5,30%         | 1,20%          |   |   |   |   |   |
| 18 | 1986                                                                                           | 18,70%        | 20,30%         |   |   |   |   |   |
| 19 | 1985                                                                                           | 31,80%        | 28,00%         |   |   |   |   |   |
| 20 | 1984                                                                                           | 6,30%         | 19,50%         |   |   |   |   |   |
| 21 |                                                                                                |               |                |   |   |   |   |   |
| 22 | Среднее                                                                                        | 17,91%        | 17,15%         |   |   |   |   |   |
| 23 | Стандартное отклонение                                                                         | 13,03%        | 12,82%         |   |   |   |   |   |
| 24 | Ковариация доходов                                                                             | 0,0126        |                |   |   |   |   |   |
| 25 |                                                                                                |               |                |   |   |   |   |   |
| 26 | <b>Доходы с портфеля</b>                                                                       |               |                |   |   |   |   |   |
| 27 | Процентная доля SP500                                                                          | 25%           |                |   |   |   |   |   |
| 28 | Процентная доля Windsor                                                                        | 75%           |                |   |   |   |   |   |
| 29 |                                                                                                |               |                |   |   |   |   |   |
| 30 | Средний ожидаемый доход                                                                        | 17,34%        |                |   |   |   |   |   |
| 31 | Дисперсия дохода                                                                               | 1,50%         |                |   |   |   |   |   |
| 32 | Стандартное отклонение                                                                         | 12,26%        |                |   |   |   |   |   |

С помощью средств Excel постройте графики комбинаций стандартного отклонения дохода (по оси  $x$ ) и среднего дохода (по оси  $y$ ), варьируя процентную долю SP 500 в портфеле от 0 до 100%.

4. Используя базу данных DJ Industrials для American Airlines (AA), Procter & Gamble (PG) и General Electric (GE), рассчитайте:
  - а) среднемесячный доход;
  - б) ковариации ежемесячных доходов. Ковариации (AA, AA), (PG, PG) и (GE, GE) являются по сути дисперсиями, тогда как (AA, GE), (AA, PG) и (PG, GE) — собственно ковариациями;
  - в) среднемесячный доход и стандартное отклонение ежемесячных доходов от портфеля, составленного из трех пакетов ценных бумаг в равных долях.
5. Предположим,  $X$  и  $Y$  — две случайные величины, причем  $Y = X^2$ . Пусть  $X$  принимает значения  $-5, -4, -2, 2, 4$  и  $5$  с равными вероятностями. Покажите, что коэффициент корреляции между величинами  $X$  и  $Y$  равен нулю. Означает ли это, что  $X$  и  $Y$  — независимые случайные величины?
6. В приведенной далее таблице даны курсы акций двух американских фармацевтических фирм — Pfizer и Merck — на конец года в течение 1981–1992 гг., а также график выплаты дивидендов за период 1982–1992 гг.

- а) Подсчитайте следующие величины за период 1982–1992 гг.:
- ежегодный доход по каждой из акций (не забудьте о дивидендах!);
  - средние значения, дисперсию и стандартное отклонение доходов по каждой акции;
  - ковариацию и коэффициент корреляции доходов.
- б) Постройте график среднего дохода от портфеля (по оси  $y$ ) в зависимости от его стандартного отклонения (по оси  $x$ ) для портфелей из двух активов, в которых доля акций Pfizer изменяется от 0 до 1,4.

|    | A              | B      | C        | D | E     | F        |
|----|----------------|--------|----------|---|-------|----------|
| 1  | PFIZER и MERCK |        |          |   |       |          |
| 2  |                |        |          |   |       |          |
| 3  |                | Pfizer |          |   | Merck |          |
| 4  |                | Курс   | Дивиденд |   | Курс  | Дивиденд |
| 5  | 1981           | 11,85  |          |   | 4,95  |          |
| 6  | 1982           | 16,35  | 0,46     |   | 4,25  | 0,16     |
| 7  | 1983           | 19,6   | 0,58     |   | 5,15  | 0,16     |
| 8  | 1984           | 17,95  | 0,66     |   | 4,85  | 0,17     |
| 9  | 1985           | 23,45  | 0,74     |   | 6,35  | 0,18     |
| 10 | 1986           | 29,75  | 0,82     |   | 10,95 | 0,21     |
| 11 | 1987           | 29,25  | 0,9      |   | 19,20 | 0,27     |
| 12 | 1988           | 26,9   | 1        |   | 17,95 | 0,43     |
| 13 | 1989           | 32,45  | 1,1      |   | 22,85 | 0,55     |
| 14 | 1990           | 34,1   | 1,2      |   | 26,35 | 0,64     |
| 15 | 1991           | 61,45  | 1,32     |   | 41,50 | 0,77     |
| 16 | 1992           | 76,05  | 1,48     |   | 51,15 | 0,9      |

7. Рассмотрим два актива, А и В, со следующими средними доходами и дисперсиями:

$$E(r_A) = 0,03, E(r_B) = 0,05,$$

$$\text{Дисп}(r_A) = 0,0025, \text{Дисп}(r_B) = 0,0045.$$

Теперь рассмотрим три случая:

$$\rho_{AB} = +1, \quad \rho_{AB} = -1, \quad \rho_{AB} = 0.$$

Постройте графики комбинаций средних значений и дисперсий портфелей для каждого случая. (Такие графики встречаются практически в любом элементарном учебнике финансовой теории. Стандартное отклонение обычно откладывается по оси  $x$ , а средний доход от портфеля — по оси  $y$ . В данном случае, если необходимо построить все три графика в одной и той же паре осей, то придется либо поменять оси ролями, либо прибегнуть к хитрости.)

8. Рассмотрим портфель из трех активов со следующими параметрами:

$$\text{Средний доход} = \begin{pmatrix} 10\% \\ 12\% \\ 14\% \end{pmatrix}. \text{ Ковариационная матрица} = \begin{pmatrix} 0,30, 02 - 0,05 \\ 0,020, 40, 06 \\ -0,050, 060, 6 \end{pmatrix}.$$



Предположим, имеются два портфеля со следующими весовыми коэффициентами активов:

$$\text{Портфель 1} = (0, 30, 20, 5).$$

$$\text{Портфель 2} = (0, 50, 40, 1).$$

а) Вычислите следующие величины:

- среднее значение и дисперсию доходов каждого портфеля;
- ковариацию и коэффициент корреляции доходов от портфелей.

б) Постройте график среднего дохода и дисперсии выпуклых линейных комбинаций портфелей.

## Приложение 1. Учет дивидендов

В этом приложении рассматриваются два способа внесения поправок в расчет доходов с целью учета выплаты дивидендов, которые ранее в этой главе игнорировались. Первый и наиболее простой из способов учета дивидендов — это добавить их к годовому изменению курсовой цены. В следующем примере, если вы приобретаете акции General Motors (GM) по цене на конец 1986 г., равной 33 долл. за акцию, и держите их в течение года, то в конце года вы получаете 0,57%.

$$\text{Дискретный сложный процент в 1987 г.} = \frac{30,69 + 2,50}{33,00} - 1 = 0,568\%.$$

$$\text{Непрерывный сложный процент в 1987 г.} = \ln \left[ \frac{30,69 + 2,50}{33,00} \right] = 0,567\%.$$

Выбор между дискретным и непрерывным сложными процентами обсуждается ниже, в приложении 2.

|    | B                          | C        | D                | E           | F           | G                         | H | I |
|----|----------------------------|----------|------------------|-------------|-------------|---------------------------|---|---|
| 4  | General Motors (GM)        |          |                  |             |             |                           |   |   |
| 5  |                            | Курс     | Дивиденд         | Дискретно   | Непрерывно  |                           |   |   |
| 6  |                            | на конец | на               | начисляемый | начисляемый |                           |   |   |
| 7  | Год                        | года     | акцию            | доход       | доход       |                           |   |   |
| 8  | 1986                       | 33,00    |                  |             |             |                           |   |   |
| 9  | 1987                       | 30,69    | 2,50             | 0,568%      | 0,567%      |                           |   |   |
| 10 | 1988                       | 41,75    | 2,50             | 44,196%     | 36,600%     |                           |   |   |
| 11 | 1989                       | 42,25    | 3,00             | 8,383%      | 8,050%      |                           |   |   |
| 12 | 1990                       | 34,38    | 3,00             | -11,538%    | -12,260%    |                           |   |   |
| 13 | 1991                       | 28,88    | 1,60             | -11,345%    | -12,042%    |                           |   |   |
| 14 | 1992                       | 32,25    | 1,40             | 16,537%     | 15,304%     |                           |   |   |
| 15 | 1993                       | 54,88    | 0,80             | 72,636%     | 54,601%     |                           |   |   |
| 16 | 1994                       | 42,13    | 0,80             | -21,777%    | -24,560%    |                           |   |   |
| 17 | 1995                       | 52,88    | 1,10             | 28,131%     | 24,788%     |                           |   |   |
| 18 | 1996                       | 55,75    | 1,60             | 8,463%      | 8,124%      |                           |   |   |
| 19 |                            |          |                  |             |             |                           |   |   |
| 20 | Среднеарифм. годовой доход |          |                  | 13,425%     | 9,92%       | <-- =СРЗНАЧ(F9:F18)       |   |   |
| 21 | Станд. отклонение дохода   |          |                  | 27,148%     | 22,838%     | <-- =СТАНДОТКЛОНП(F9:F18) |   |   |
| 22 |                            |          |                  |             |             |                           |   |   |
| 23 |                            |          | =(C18+D18)/C17-1 |             |             |                           |   |   |

=LN((D18+C18)/C17)

### Реинвестирование дивидендов

Другой способ вычисления дохода с учетом дивидендов основан на предположении, что дивиденды реинвестируются в акции.

|    | J                           | K                                                 | L       | M        | N          | O       | P         | Q                    | R |
|----|-----------------------------|---------------------------------------------------|---------|----------|------------|---------|-----------|----------------------|---|
| 3  | РЕИНВЕСТИРОВАННЫЕ ДИВИДЕНДЫ |                                                   |         |          |            |         |           |                      |   |
| 4  |                             | Кол-во                                            | Курс    | Дивиденд | Всего      | Кол-во  | Стоимость |                      |   |
| 5  |                             | акций                                             | акций   | на акцию | получено   | акций   | акций     |                      |   |
| 6  |                             | в нач.                                            | в конце |          | дивидендов | в конце | в конце   |                      |   |
| 7  | Год                         | года                                              | года    |          |            | года    | года      |                      |   |
| 8  | 1986                        |                                                   | 33,00   |          |            |         | 33,000    | =K10+N10/L10         |   |
| 9  | 1987                        | 1,00                                              | 30,69   | 2,500    | 2,500      | 1,081   | 33,188    |                      |   |
| 10 | 1988                        | 1,08                                              | 41,75   | 2,500    | 2,704      | 1,146   | 47,855    | =O10*L10             |   |
| 11 | 1989                        | 1,15                                              | 42,25   | 3,000    | 3,439      | 1,228   | 51,867    |                      |   |
| 12 | 1990                        | 1,23                                              | 34,38   | 3,000    | 3,683      | 1,335   | 45,882    |                      |   |
| 13 | 1991                        | 1,33                                              | 28,88   | 1,600    | 2,136      | 1,409   | 40,677    |                      |   |
| 14 | 1992                        | 1,41                                              | 32,25   | 1,400    | 1,972      | 1,470   | 47,403    |                      |   |
| 15 | 1993                        | 1,47                                              | 54,88   | 0,800    | 1,176      | 1,491   | 81,835    |                      |   |
| 16 | 1994                        | 1,49                                              | 42,13   | 0,800    | 1,193      | 1,520   | 64,014    |                      |   |
| 17 | 1995                        | 1,52                                              | 52,88   | 1,100    | 1,672      | 1,551   | 82,021    |                      |   |
| 18 | 1996                        | 1,55                                              | 55,75   | 1,600    | 2,482      | 1,596   | 88,963    |                      |   |
| 19 |                             |                                                   |         |          |            |         |           |                      |   |
| 20 |                             | Непрерывный доход, пересчитанный на год           |         |          |            |         | 9,92%     | =LN(P18/P8)/10       |   |
| 21 |                             | Сложный доход как сумма геометрической прогрессии |         |          |            |         | 10,43%    | =LN(P18/P8)/(1/10)-1 |   |
| 22 |                             |                                                   |         | =K10*M10 |            |         |           |                      |   |
| 23 |                             |                                                   |         |          |            |         |           |                      |   |

Вначале рассмотрим данные за 1987 г. Поскольку акции приобретены в конце 1986 г., к концу 1987 г. у нас в руках имеется ровно одна единица капитала. Если дивиденды за 1987 г. реинвестировать в акции по цене на конец 1987 г., то на них можно купить еще 0,081 единицы:

$$\text{Новые акции, приобретенные в конце 1987 г.} = \frac{2,50}{30,69} = 0,081.$$

Таким образом, в начале 1988 г. мы имеем 1,081 единиц капитала. Поскольку дивиденды за 1988 г. составляют 2,50 долл. на акцию, общий объем дивидендов будет равен  $1,081 \cdot 2,50 \text{ долл.} = 2,704 \text{ долл.}$  Реинвестирование этих дивидендов в акции дает

$$\text{Новые акции, приобретенные в конце 1988 г.} = \frac{2,704}{41,75} = 0,065.$$

Таким образом, к концу 1988 г. держатель акций GM накопит  $1 + 0,081 + 0,065 = 1,146$  единицы капитала (акций).

Как показывает приведенный фрагмент таблицы, дальнейшее реинвестирование дивидендов даст акционерный капитал в объеме 1,596 единицы в конце 1996 г. на общую сумму 88,963 долл.

Доход по этому капиталовложению можно подсчитать одним из двух способов:

$$\begin{aligned} \text{Непрерывный сложный процент} &= \ln \left[ \frac{\text{Цена на конец 1996 г.}}{\text{Начальное вложение}} \right] / 10 = \\ &= \ln \left[ \frac{88,963}{33,00} \right] / 10 = 9,92\%. \end{aligned}$$

Обратите внимание, что этот непрерывный сложный процент равен тому, который рассчитан в первом фрагменте таблицы по годовым доходам (ячейка F22).

Вместо этого можно подсчитать доход как сумму геометрической прогрессии:

$$\begin{aligned} & \text{Сложный процент по геометрической прогрессии} = \\ & = \left[ \frac{\text{Цена на конец 1996 г.}}{\text{Начальное вложение}} \right]^{1/10} - 1 = \left[ \frac{88,963}{33,00} \right]^{1/10} - 1 = 10,43\%. \end{aligned}$$

## Приложение 2. Различные способы вычисления сложного процента

При вычислении дохода как непрерывного сложного процента предполагается, что  $P_t = P_{t-1}e^{r_t}$ , где  $r_t$  — доход в процентах за период  $(t-1, t)$ . Предположим, что  $r_1, r_2, \dots, r_{12}$  — доходы за 12 периодов (периодом может быть месяц или год), тогда курсовая стоимость акции по прошествии 12 периодов составит

$$P_{12} = P_0 e^{r_1 + r_2 + \dots + r_{12}}.$$

Такое представление курсовой стоимости и дохода позволяет принять *средний доход за период* равным  $\bar{r} = (r_1 + r_2 + \dots + r_{12})/12$ . Поскольку нам хочется думать, что данные о доходах за прошедшие 12 периодов представляют вероятностное распределение дохода в предстоящем периоде, отсюда следует, что доход как непрерывный сложный процент является как раз подходящей мерой дохода в отличие от дохода как дискретного сложного процента  $r_t = (P_{At} - P_{At-1})/P_{At-1}$ .

### Насколько отличаются непрерывный и дискретный сложные проценты?

Доход, подсчитанный как непрерывный сложный процент, всегда будет меньше дискретного сложного процента, хотя разница между ними обычно невелика. В следующей таблице показана эта разница для примера из раздела 7.2.

|    | A                                               | B       | C       | D      | E | F     | G       | H       | I                         | J | K |
|----|-------------------------------------------------|---------|---------|--------|---|-------|---------|---------|---------------------------|---|---|
| 1  | Сопоставление непрерывного и дискретного дохода |         |         |        |   |       |         |         |                           |   |   |
| 2  |                                                 |         |         |        |   |       |         |         |                           |   |   |
| 3  |                                                 |         | Акция А |        |   |       | Акция В |         |                           |   |   |
| 4  |                                                 |         | Непрер. | Дискр. |   |       | Непрер. | Дискр.  |                           |   |   |
| 5  | Месяц                                           | Курс    | доход   | доход  |   | Курс  | доход   | доход   |                           |   |   |
| 6  | 0                                               | 25,00   |         |        |   | 45,00 |         |         |                           |   |   |
| 7  | 1                                               | 24,12   | -3,58%  | -3,52% |   | 44,85 | -0,33%  | -0,33%  |                           |   |   |
| 8  | 2                                               | 23,37   | -3,16%  | -3,11% |   | 46,88 | 4,43%   | 4,53%   |                           |   |   |
| 9  | 3                                               | 24,75   | 5,74%   | 5,91%  |   | 45,25 | -3,54%  | -3,48%  |                           |   |   |
| 10 | 4                                               | 26,62   | 7,28%   | 7,56%  |   | 50,87 | 11,71%  | 12,42%  |                           |   |   |
| 11 | 5                                               | 26,50   | -0,45%  | -0,45% |   | 53,25 | 4,57%   | 4,68%   |                           |   |   |
| 12 | 6                                               | 28,00   | 5,51%   | 5,66%  |   | 53,25 | 0,00%   | 0,00%   |                           |   |   |
| 13 | 7                                               | 28,88   | 3,09%   | 3,14%  |   | 62,75 | 16,42%  | 17,84%  |                           |   |   |
| 14 | 8                                               | 29,75   | 2,97%   | 3,01%  |   | 65,50 | 4,29%   | 4,38%   |                           |   |   |
| 15 | 9                                               | 31,38   | 5,33%   | 5,48%  |   | 66,87 | 2,07%   | 2,09%   |                           |   |   |
| 16 | 10                                              | 36,25   | 14,43%  | 15,52% |   | 78,50 | 16,03%  | 17,39%  |                           |   |   |
| 17 | 11                                              | 37,13   | 2,40%   | 2,43%  |   | 78,00 | -0,64%  | -0,64%  |                           |   |   |
| 18 | 12                                              | 36,88   | -0,68%  | -0,67% |   | 68,23 | -13,38% | -12,53% |                           |   |   |
| 19 |                                                 |         |         |        |   |       |         |         |                           |   |   |
| 20 |                                                 | Среднее | 3,24%   | 3,41%  |   |       | 3,47%   | 3,86%   | <-- =СРЗНАЧ(Н7:Н18)       |   |   |
| 21 |                                                 | Сигма   | 4,78%   | 5,02%  |   |       | 8,03%   | 8,32%   | <-- =СТАНДОТКЛОНП(Н7:Н18) |   |   |

**Вычисление годового дохода и дисперсии по доходам за другие периоды**

Предположим, мы вначале рассчитываем последовательность *ежемесячных* доходов как непрерывные сложные проценты, а затем хотим подсчитать *средний годовой* доход и его дисперсию. Очевидно, среднегодовой доход дается формулой

$$\text{Среднегодовой доход} = 12 \left[ \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n r_t \right].$$

Для вычисления дисперсии годовой ставки дохода следует предположить, что ежемесячные доходы являются независимыми, одинаково распределенными случайными величинами. Из этого следует, что  $\text{Дисп}(r) = 12 \left[ \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \text{Дисп}(r_t) \right] = 12\sigma_{\text{мес}}^2$  и что стандартное отклонение годовой ставки дохода дается формулой  $\sigma = \sqrt{12}\sigma_{\text{мес}}$ .

Вернемся к нашему примеру. Имея данные о ежемесячных доходах, можно вычислить годовую ставку дохода, ее дисперсию и стандартное отклонение.

|    | A                                             | B              | C                        | D | E           | F                        | G                         | H | I |
|----|-----------------------------------------------|----------------|--------------------------|---|-------------|--------------------------|---------------------------|---|---|
| 1  | <b>МЕСЯЧНОЕ И ГОДОВОЕ СРЕДНЕЕ И ДИСПЕРСИЯ</b> |                |                          |   |             |                          |                           |   |   |
| 2  |                                               |                |                          |   |             |                          |                           |   |   |
| 3  |                                               | <b>Акция А</b> |                          |   |             | <b>Акция В</b>           |                           |   |   |
| 4  |                                               |                | <b>Непрерывный доход</b> |   |             | <b>Непрерывный доход</b> |                           |   |   |
| 5  | <b>Месяц</b>                                  | <b>Курс</b>    |                          |   | <b>Курс</b> |                          |                           |   |   |
| 6  | 0                                             | 25,00          |                          |   | 45,00       |                          |                           |   |   |
| 7  | 1                                             | 24,12          | -3,58%                   |   | 44,85       | -0,33%                   |                           |   |   |
| 8  | 2                                             | 23,37          | -3,16%                   |   | 46,88       | 4,43%                    |                           |   |   |
| 9  | 3                                             | 24,75          | 5,74%                    |   | 45,25       | -3,54%                   |                           |   |   |
| 10 | 4                                             | 26,62          | 7,28%                    |   | 50,87       | 11,71%                   |                           |   |   |
| 11 | 5                                             | 26,50          | -0,45%                   |   | 53,25       | 4,57%                    |                           |   |   |
| 12 | 6                                             | 28,00          | 5,51%                    |   | 53,25       | 0,00%                    |                           |   |   |
| 13 | 7                                             | 28,88          | 3,09%                    |   | 62,75       | 16,42%                   |                           |   |   |
| 14 | 8                                             | 29,75          | 2,97%                    |   | 65,50       | 4,29%                    |                           |   |   |
| 15 | 9                                             | 31,38          | 5,33%                    |   | 66,87       | 2,07%                    |                           |   |   |
| 16 | 10                                            | 36,25          | 14,43%                   |   | 78,50       | 16,03%                   |                           |   |   |
| 17 | 11                                            | 37,13          | 2,40%                    |   | 78,00       | -0,64%                   |                           |   |   |
| 18 | 12                                            | 36,88          | -0,68%                   |   | 68,23       | -13,38%                  |                           |   |   |
| 19 |                                               |                |                          |   |             |                          |                           |   |   |
| 20 | <b>Среднее за месяц</b>                       |                | 3,24%                    |   |             | 3,47%                    | <-- =СРЗНАЧ(F7:F18)       |   |   |
| 21 | <b>Дисперсия за месяц</b>                     |                | 0,23%                    |   |             | 0,65%                    | <-- =ДИСПР(F7:F18)        |   |   |
| 22 | <b>Станд.откл. за месяц</b>                   |                | 4,78%                    |   |             | 8,03%                    | <-- =СТАНДОТКЛОНП(F7:F18) |   |   |
| 23 |                                               |                |                          |   |             |                          |                           |   |   |
| 24 | <b>Среднее за год</b>                         |                | 38,88%                   |   |             | 41,62%                   | <-- =12*F20               |   |   |
| 25 | <b>Дисперсия за год</b>                       |                | 2,75%                    |   |             | 7,75%                    | <-- =12*F21               |   |   |
| 26 | <b>Станд.откл. за год</b>                     |                | 16,57%                   |   |             | 27,83%                   | <-- =КОРЕНЬ(12)*F22       |   |   |

# 8 Вычисление ковариационной матрицы

## 8.1. Введение

Для расчета эффективных портфелей необходимо уметь вычислять ковариационную матрицу по данным о доходах с ценных бумаг. В этой главе рассматриваются именно вопросы вычисления такой матрицы в среде Excel. Демонстрируется несколько методов, в том числе прямой расчет в таблице с помощью матрицы избыточной доходности (*excess return matrix*), реализация этого метода с помощью языка Visual Basic for Applications (VBA) и “модель одного индекса” (*single-index model*).

Прежде чем перейти к чтению этой главы, рекомендуется изучить ту часть главы 29, в которой рассматриваются *функции для работы с массивами*. Это функции Excel, аргументы которых представляют собой векторы и матрицы; их реализация несколько отличается от стандартных функций Excel. В текущей главе особенно интенсивно используются функции ТРАНСП (Transpose) и МУМНОЖ (MMult).

На протяжении всей главы для иллюстрации методов расчетов используются данные о доходности шести ценных бумаг.

|    | A                                          | B       | C       | D                       | E       | F       | G       | H       |
|----|--------------------------------------------|---------|---------|-------------------------|---------|---------|---------|---------|
| 1  | ДАННЫЕ О ДОХОДНОСТИ ДЛЯ РАСЧЕТА КОВАРИАЦИИ |         |         |                         |         |         |         |         |
| 2  |                                            |         |         |                         |         |         |         |         |
| 3  |                                            | AMR     | BS      | GE                      | HR      | MO      | UK      | SP500   |
| 4  | 1974                                       | -0,3505 | -0,1154 | -0,4246                 | -0,2107 | -0,0758 | 0,2331  | -0,2647 |
| 5  | 1975                                       | 0,7083  | 0,2472  | 0,3719                  | 0,2227  | 0,0213  | 0,3569  | 0,3720  |
| 6  | 1976                                       | 0,7329  | 0,3665  | 0,2550                  | 0,5815  | 0,1276  | 0,0781  | 0,2384  |
| 7  | 1977                                       | -0,2034 | -0,4271 | -0,0490                 | -0,0938 | 0,0712  | -0,2721 | -0,0718 |
| 8  | 1978                                       | 0,1663  | -0,0452 | -0,0573                 | 0,2751  | 0,1372  | -0,1346 | 0,0656  |
| 9  | 1979                                       | -0,2659 | 0,0158  | 0,0898                  | 0,0793  | 0,0215  | 0,2254  | 0,1844  |
| 10 | 1980                                       | 0,0124  | 0,4751  | 0,3350                  | -0,1894 | 0,2002  | 0,3657  | 0,3242  |
| 11 | 1981                                       | -0,0264 | -0,2042 | -0,0275                 | -0,7427 | 0,0913  | 0,0479  | -0,0491 |
| 12 | 1982                                       | 1,0642  | -0,1493 | 0,6968                  | -0,2615 | 0,2243  | 0,0456  | 0,2141  |
| 13 | 1983                                       | 0,1942  | 0,3680  | 0,3110                  | 1,8682  | 0,2066  | 0,2640  | 0,2251  |
| 14 |                                            |         |         |                         |         |         |         |         |
| 15 |                                            |         | AMR     | American Airlines       |         |         |         |         |
| 16 |                                            |         | BS      | Bethlehem Steel         |         |         |         |         |
| 17 |                                            |         | GE      | General Electric        |         |         |         |         |
| 18 |                                            |         | HR      | International Harvester |         |         |         |         |
| 19 |                                            |         | MO      | Philip Morris           |         |         |         |         |
| 20 |                                            |         | UK      | Union Carbide           |         |         |         |         |

Этот конкретный набор данных выведен расчетным путем из информации о ежегодных колебаниях курсовых цен на указанные ценные бумаги. Например, доход по бумагам AMR, равный –35,05% в 1974 г., вычислялся по формуле

$$r_{AMR,1974} = \frac{\text{Курс}_{AMR,31\text{дек}1974} - \text{Курс}_{AMR,31\text{дек}1973}}{\text{Курс}_{AMR,31\text{дек}1973}}.$$

Как указывалось в главе 7, такие данные о доходности часто вычисляются по *полному доходу*, включающему также и дивиденды за рассматриваемый период. Если бы в нашем случае это было так, мы бы имели

$$r_{AMR,1974} = \frac{\text{Курс}_{AMR,31\text{дек}1974} - \text{Курс}_{AMR,31\text{дек}1973} + \text{Дивиденд}_{AMR,1973}}{\text{Курс}_{AMR,31\text{дек}1973}}.$$

Предположим, мы располагаем данными о доходности  $N$  ценных бумаг за  $M$  периодов. Доход от актива  $i$  за период  $t$  можно обозначить через  $r_{it}$ . Запишем *средний доход* от актива  $i$  в виде

$$\bar{r}_i = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N r_{it}, i = 1, \dots$$

Тогда ковариация доходов от активов  $i$  и  $j$  будет вычисляться по формуле

$$\sigma_{ij} = \text{Ковар}(i, j) = \frac{1}{M} \sum_{t=1}^M (r_{it} - \bar{r}_i) \cdot (r_{jt} - \bar{r}_j), i, j = 1, \dots$$

Наша задача состоит в том, чтобы вычислить эти ковариации как можно экономичнее.

## 8.2. Общие сведения

До сих пор для вычисления ковариационной матрицы не придумано ничего нагляднее, чем прямой метод с использованием матрицы избыточной доходности. Предположим, имеется  $N$  подверженных риску активов и для каждого актива известны данные о доходности за  $M$  периодов. Тогда матрица избыточной доходности будет выглядеть следующим образом:

$$A = \begin{bmatrix} r_{11} - \bar{r}_1 & \dots & r_{N1} - \bar{r}_N \\ r_{12} - \bar{r}_1 & \dots & r_{N2} - \bar{r}_N \\ \vdots & & \vdots \\ r_{1M} - \bar{r}_1 & \dots & r_{NM} - \bar{r}_N \end{bmatrix}.$$

Транспонированная матрица будет равна

$$A^T = \begin{bmatrix} r_{11} - \bar{r}_1 & r_{12} - \bar{r}_1 & \dots & r_{1M} - \bar{r}_1 \\ r_{N1} - \bar{r}_N & r_{N2} - \bar{r}_N & \dots & r_{NM} - \bar{r}_N \end{bmatrix}.$$

Умножив  $A^T$  на  $A$  и разделив на количество периодов  $M$ , получим ковариационную матрицу:

$$S = [\sigma_{ij}] = \frac{A^T \cdot A}{M}.$$

### 8.3. Иллюстративный пример

Проиллюстрируем изложенный метод численным примером. Вначале вычислим средний доход от каждого актива (в последней строке приведенной далее таблицы).

|    | A                                                              | B          | C         | D         | E         | F         | G         | H                   | I | J |
|----|----------------------------------------------------------------|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|---------------------|---|---|
| 1  | <b>ВЫЧИСЛЕНИЕ КОВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ ПО ИЗБЫТОЧНЫМ ДОХОДАМ</b> |            |           |           |           |           |           |                     |   |   |
| 2  |                                                                |            |           |           |           |           |           |                     |   |   |
| 3  |                                                                | <b>AMR</b> | <b>BS</b> | <b>GE</b> | <b>HR</b> | <b>MO</b> | <b>UK</b> |                     |   |   |
| 4  | <b>1974</b>                                                    | -0,3505    | -0,1154   | -0,4246   | -0,2107   | -0,0758   | 0,2331    |                     |   |   |
| 5  | <b>1975</b>                                                    | 0,7083     | 0,2472    | 0,3719    | 0,2227    | 0,0213    | 0,3569    |                     |   |   |
| 6  | <b>1976</b>                                                    | 0,7329     | 0,3665    | 0,2550    | 0,5815    | 0,1276    | 0,0781    |                     |   |   |
| 7  | <b>1977</b>                                                    | -0,2034    | -0,4271   | -0,0490   | -0,0938   | 0,0712    | -0,2721   |                     |   |   |
| 8  | <b>1978</b>                                                    | 0,1663     | -0,0452   | -0,0573   | 0,2751    | 0,1372    | -0,1346   |                     |   |   |
| 9  | <b>1979</b>                                                    | -0,2659    | 0,0158    | 0,0898    | 0,0793    | 0,0215    | 0,2254    |                     |   |   |
| 10 | <b>1980</b>                                                    | 0,0124     | 0,4751    | 0,3350    | -0,1894   | 0,2002    | 0,3657    |                     |   |   |
| 11 | <b>1981</b>                                                    | -0,0264    | -0,2042   | -0,0275   | -0,7427   | 0,0913    | 0,0479    |                     |   |   |
| 12 | <b>1982</b>                                                    | 1,0642     | -0,1493   | 0,6968    | -0,2615   | 0,2243    | 0,0456    |                     |   |   |
| 13 | <b>1983</b>                                                    | 0,1942     | 0,3680    | 0,3110    | 1,8682    | 0,2066    | 0,2640    |                     |   |   |
| 14 | <b>Среднее</b>                                                 | 0,2032     | 0,0531    | 0,1501    | 0,1529    | 0,1025    | 0,1210    | <-- =CP3HAЧ(G4:G13) |   |   |

Средние значения подсчитываются функцией CP3HAЧ (Average) по каждому столбцу данных.

Далее вычисляем матрицу избыточной доходности, вычитая средний доход по каждому активу из значений доходов за периоды.

|    | A                                    | B          | C         | D         | E         | F         | G         | H                | I |
|----|--------------------------------------|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------------|---|
| 16 | <b>Матрица избыточной доходности</b> |            |           |           |           |           |           |                  |   |
| 17 |                                      | <b>AMR</b> | <b>BS</b> | <b>GE</b> | <b>HR</b> | <b>MO</b> | <b>UK</b> |                  |   |
| 18 | <b>1974</b>                          | -0,5537    | -0,1686   | -0,5747   | -0,3635   | -0,1784   | 0,1121    |                  |   |
| 19 | <b>1975</b>                          | 0,5051     | 0,1940    | 0,2218    | 0,0698    | -0,0812   | 0,2359    |                  |   |
| 20 | <b>1976</b>                          | 0,5297     | 0,3134    | 0,1049    | 0,4286    | 0,0250    | -0,0429   |                  |   |
| 21 | <b>1977</b>                          | -0,4066    | -0,4802   | -0,1991   | -0,2466   | -0,0313   | -0,3931   |                  |   |
| 22 | <b>1978</b>                          | -0,0369    | -0,0984   | -0,2074   | 0,1222    | 0,0347    | -0,2555   |                  |   |
| 23 | <b>1979</b>                          | -0,4691    | -0,0374   | -0,0603   | -0,0736   | -0,0810   | 0,1044    |                  |   |
| 24 | <b>1980</b>                          | -0,1908    | 0,4220    | 0,1849    | -0,3423   | 0,0977    | 0,2447    |                  |   |
| 25 | <b>1981</b>                          | -0,2296    | -0,2574   | -0,1777   | -0,8956   | -0,0112   | -0,0731   |                  |   |
| 26 | <b>1982</b>                          | 0,8610     | -0,2024   | 0,5467    | -0,4144   | 0,1217    | -0,0754   | <-- =G12-\$G\$14 |   |
| 27 | <b>1983</b>                          | -0,0090    | 0,3149    | 0,1609    | 1,7154    | 0,1041    | 0,1430    | <-- =G13-\$G\$14 |   |

Транспонированную матрицу можно вычислить с помощью функции ТРАНСП (Transpose).

|    | A                                                      | B                                                                                                                                                                                                                                          | C           | D           | E           | F           | G           | H           | I           | J           | K           |
|----|--------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 29 | <b>Транспонированная матрица избыточной доходности</b> |                                                                                                                                                                                                                                            |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 30 |                                                        | <b>1974</b>                                                                                                                                                                                                                                | <b>1975</b> | <b>1976</b> | <b>1977</b> | <b>1978</b> | <b>1979</b> | <b>1980</b> | <b>1981</b> | <b>1982</b> | <b>1983</b> |
| 31 | <b>AMR</b>                                             | -0,5537                                                                                                                                                                                                                                    | 0,5051      | 0,5297      | -0,4066     | -0,0369     | -0,4691     | -0,1908     | -0,2296     | 0,8610      | -0,0090     |
| 32 | <b>BS</b>                                              | -0,1686                                                                                                                                                                                                                                    | 0,1940      | 0,3134      | -0,4802     | -0,0984     | -0,0374     | 0,4220      | -0,2574     | -0,2024     | 0,3149      |
| 33 | <b>GE</b>                                              | -0,5747                                                                                                                                                                                                                                    | 0,2218      | 0,1049      | -0,1991     | -0,2074     | -0,0603     | 0,1849      | -0,1777     | 0,5467      | 0,1609      |
| 34 | <b>HR</b>                                              | -0,3635                                                                                                                                                                                                                                    | 0,0698      | 0,4286      | -0,2466     | 0,1222      | -0,0736     | -0,3423     | -0,8956     | -0,4144     | 1,7154      |
| 35 | <b>MO</b>                                              | -0,1784                                                                                                                                                                                                                                    | -0,0812     | 0,0250      | -0,0313     | 0,0347      | -0,0810     | 0,0977      | -0,0112     | 0,1217      | 0,1041      |
| 36 | <b>UK</b>                                              | 0,1121                                                                                                                                                                                                                                     | 0,2359      | -0,0429     | -0,3931     | -0,2555     | 0,1044      | 0,2447      | -0,0731     | -0,0754     | 0,1430      |
| 37 |                                                        | Ячейки B31:K36 содержат формулу =ТРАНСП(B18:G27). Для ввода этой формулы:<br>1. Выделите область B31:K36<br>2. Введите =ТРАНСП(B18:G27)<br>3. Вместо <Enter> нажмите <Ctrl+Shift+Enter><br>Формула будет введена в виде (=ТРАНСП(B18:G27)) |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 38 |                                                        |                                                                                                                                                                                                                                            |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 39 |                                                        |                                                                                                                                                                                                                                            |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 40 |                                                        |                                                                                                                                                                                                                                            |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 41 |                                                        |                                                                                                                                                                                                                                            |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 42 |                                                        |                                                                                                                                                                                                                                            |             |             |             |             |             |             |             |             |             |
| 43 |                                                        |                                                                                                                                                                                                                                            |             |             |             |             |             |             |             |             |             |

Теперь ковариационную матрицу можно получить умножением  $A^T$  на  $A$ . Для этого снова используется функция работы с массивами — на этот раз МУМНОЖ(A\_Transpose,A)/N.

|    | A   | B                                                                                                                                                                                                                                                                          | C      | D      | E      | F       | G       | H | I |
|----|-----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|--------|--------|---------|---------|---|---|
| 45 |     | Произведение трансп.матрицы избыт.доходности на саму матрицу / 10                                                                                                                                                                                                          |        |        |        |         |         |   |   |
| 46 |     | AMR                                                                                                                                                                                                                                                                        | BS     | GE     | HR     | MO      | UK      |   |   |
| 47 | AMR | 0,2060                                                                                                                                                                                                                                                                     | 0,0375 | 0,1077 | 0,0493 | 0,0208  | 0,0059  |   |   |
| 48 | BS  | 0,0375                                                                                                                                                                                                                                                                     | 0,0790 | 0,0355 | 0,1028 | 0,0089  | 0,0406  |   |   |
| 49 | GE  | 0,1077                                                                                                                                                                                                                                                                     | 0,0355 | 0,0867 | 0,0443 | 0,0194  | 0,0148  |   |   |
| 50 | HR  | 0,0493                                                                                                                                                                                                                                                                     | 0,1028 | 0,0443 | 0,4435 | 0,0193  | 0,0274  |   |   |
| 51 | MO  | 0,0208                                                                                                                                                                                                                                                                     | 0,0089 | 0,0194 | 0,0193 | 0,0083  | -0,0015 |   |   |
| 52 | UK  | 0,0059                                                                                                                                                                                                                                                                     | 0,0406 | 0,0148 | 0,0274 | -0,0015 | 0,0392  |   |   |
| 53 |     | Ячейки B47:G52 содержат формулу =МУМНОЖ(B31:K36,B18:G27)/10.<br>Для ввода этой формулы:<br>1. Выделите всю область<br>2. Введите =МУМНОЖ(B31:K36,B18:G27)/10<br>3. Вместо <Enter> нажмите <Ctrl+Shift+Enter><br>Формула будет введена в виде {=МУМНОЖ(B31:K36,B18:G27)/10} |        |        |        |         |         |   |   |
| 54 |     |                                                                                                                                                                                                                                                                            |        |        |        |         |         |   |   |
| 55 |     |                                                                                                                                                                                                                                                                            |        |        |        |         |         |   |   |
| 56 |     |                                                                                                                                                                                                                                                                            |        |        |        |         |         |   |   |
| 57 |     |                                                                                                                                                                                                                                                                            |        |        |        |         |         |   |   |
| 58 |     |                                                                                                                                                                                                                                                                            |        |        |        |         |         |   |   |
| 59 |     |                                                                                                                                                                                                                                                                            |        |        |        |         |         |   |   |

## 8.4. Другие способы вычисления ковариационной матрицы

В этом разделе представлены два альтернативных способа вычисления ковариационной матрицы<sup>1</sup>. Первый способ основан на применении функции языка VBA<sup>2</sup>.

```
Function VarCovar(rng As Range) As Variant
    Dim i As Integer
    Dim j As Integer
    Dim numCols As Integer
    numCols = rng.Columns.Count
    Dim matrix() As Double
    ReDim matrix(numCols - 1, numCols - 1)

    For i = 1 To numCols
        For j = 1 To numCols
            matrix(i - 1, j - 1) = _
                Application.WorksheetFunction.
                    Covar(rng.Columns(i), rng.Columns(j))
        Next j
    Next i

    VarCovar = matrix
End Function
```

Эта функция дает результат в виде *массива* (т.е. применять ее следует с помощью клавиш <Ctrl+Shift+Enter>). Ниже показан пример ее работы.

<sup>1</sup> В этом разделе, который при первом чтении можно пропустить, от читателя требуется некоторое знакомство с языком программирования среды Excel — Visual Basic for Applications (VBA), который рассматривается в главах 31 и 32.

<sup>2</sup> Выражаю свою благодарность Амиру Кишу (Amir Kirsch) из Тель-Авивского университета, который показал мне эту функцию.



|    | A                                                        | B      | C      | D      | E                                                                                                                                                     | F | G | H | I |
|----|----------------------------------------------------------|--------|--------|--------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|
| 1  | <b>ФУНКЦИЯ VBA ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ КОВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ</b> |        |        |        |                                                                                                                                                       |   |   |   |   |
| 2  |                                                          |        |        |        |                                                                                                                                                       |   |   |   |   |
| 3  | <b>Данные о доходности четырех акций (по столбцам)</b>   |        |        |        |                                                                                                                                                       |   |   |   |   |
| 4  |                                                          |        |        |        |                                                                                                                                                       |   |   |   |   |
| 5  | 22,9%                                                    | 3,6%   | 4,1%   | 9,5%   |                                                                                                                                                       |   |   |   |   |
| 6  | 37,4%                                                    | 18,2%  | 8,6%   | 19,2%  |                                                                                                                                                       |   |   |   |   |
| 7  | 1,2%                                                     | -2,7%  | 0,1%   | -1,7%  |                                                                                                                                                       |   |   |   |   |
| 8  | 9,9%                                                     | 9,7%   | 6,3%   | 18,2%  |                                                                                                                                                       |   |   |   |   |
| 9  | 7,4%                                                     | 7,1%   | 6,4%   | 14,2%  |                                                                                                                                                       |   |   |   |   |
| 10 | 30,2%                                                    | 15,2%  | 9,5%   | 29,0%  |                                                                                                                                                       |   |   |   |   |
| 11 | -3,3%                                                    | 8,6%   | 7,0%   | -5,8%  |                                                                                                                                                       |   |   |   |   |
| 12 | 31,4%                                                    | 13,6%  | 8,1%   | 1,9%   |                                                                                                                                                       |   |   |   |   |
| 13 | 16,2%                                                    | 7,4%   | 6,4%   | 13,6%  |                                                                                                                                                       |   |   |   |   |
| 14 |                                                          |        |        |        |                                                                                                                                                       |   |   |   |   |
| 15 | <b>Ковариационная матрица</b>                            |        |        |        |                                                                                                                                                       |   |   |   |   |
| 16 | 0,0182                                                   | 0,0057 | 0,0021 | 0,0080 | Эти ячейки содержат формулу<br>=varcovar(A5:D13). Для ее<br>ввода:<br>* Выделите область B16:E19<br>* Введите формулу<br>* Нажмите <Ctrl+Shift+Enter> |   |   |   |   |
| 17 | 0,0057                                                   | 0,0035 | 0,0015 | 0,0034 |                                                                                                                                                       |   |   |   |   |
| 18 | 0,0021                                                   | 0,0015 | 0,0007 | 0,0015 |                                                                                                                                                       |   |   |   |   |
| 19 | 0,0080                                                   | 0,0034 | 0,0015 | 0,0110 |                                                                                                                                                       |   |   |   |   |
| 20 |                                                          |        |        |        |                                                                                                                                                       |   |   |   |   |
| 21 |                                                          |        |        |        |                                                                                                                                                       |   |   |   |   |
| 22 |                                                          |        |        |        |                                                                                                                                                       |   |   |   |   |
| 23 | Выражаю благодарность Амиру Киршу (Amir Kirsch)          |        |        |        |                                                                                                                                                       |   |   |   |   |

#### 8.4.1. Применение функции СМЕЩ (Offset)

Можно вычислить ковариационную матрицу также с применением функции СМЕЩ (Offset), имеющейся в Excel<sup>3</sup>. С ее помощью задается блок ячеек относительно некоторой начальной ячейки. Например, СМЕЩ(нач.ячейки,строк,столбцов) обозначает блок ячеек такого же размера, как и заданные начальные ячейки, но находящийся на расстоянии строк и столбцов от них. Применение этого способа иллюстрируется в следующей таблице. Ковариационная матрица на границе снабжена индексами 0, 1, 2, 3.

|    | A                                                               | B                                                      | C      | D      | E      | F                                                                                                                                                    | G | H | I | J | K | L | M |
|----|-----------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|--------|--------|--------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| 1  | <b>ВЫЧИСЛЕНИЕ КОВАРИАЦИОННОЙ МАТРИЦЫ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИИ СМЕЩ</b> |                                                        |        |        |        |                                                                                                                                                      |   |   |   |   |   |   |   |
| 2  |                                                                 |                                                        |        |        |        |                                                                                                                                                      |   |   |   |   |   |   |   |
| 3  |                                                                 | <b>Данные о доходности четырех акций (по столбцам)</b> |        |        |        |                                                                                                                                                      |   |   |   |   |   |   |   |
| 4  |                                                                 | 22,9%                                                  | 3,6%   | 4,1%   | 9,5%   |                                                                                                                                                      |   |   |   |   |   |   |   |
| 5  |                                                                 | 37,4%                                                  | 18,2%  | 8,6%   | 19,2%  |                                                                                                                                                      |   |   |   |   |   |   |   |
| 6  |                                                                 | 1,2%                                                   | -2,7%  | 0,1%   | -1,7%  |                                                                                                                                                      |   |   |   |   |   |   |   |
| 7  |                                                                 | 9,9%                                                   | 9,7%   | 6,3%   | 18,2%  |                                                                                                                                                      |   |   |   |   |   |   |   |
| 8  |                                                                 | 7,4%                                                   | 7,1%   | 6,4%   | 14,2%  |                                                                                                                                                      |   |   |   |   |   |   |   |
| 9  |                                                                 | 30,2%                                                  | 15,2%  | 9,5%   | 29,0%  |                                                                                                                                                      |   |   |   |   |   |   |   |
| 10 |                                                                 | -3,3%                                                  | 8,6%   | 7,0%   | -5,8%  |                                                                                                                                                      |   |   |   |   |   |   |   |
| 11 |                                                                 | 31,4%                                                  | 13,6%  | 8,1%   | 1,9%   |                                                                                                                                                      |   |   |   |   |   |   |   |
| 12 |                                                                 | 16,2%                                                  | 7,4%   | 6,4%   | 13,6%  |                                                                                                                                                      |   |   |   |   |   |   |   |
| 13 |                                                                 |                                                        |        |        |        |                                                                                                                                                      |   |   |   |   |   |   |   |
| 14 |                                                                 | <b>Ковариационная матрица</b>                          |        |        |        |                                                                                                                                                      |   |   |   |   |   |   |   |
| 15 |                                                                 | 0                                                      | 1      | 2      | 3      | Ячейка B16 содержит формулу<br>=КОВАР(СМЕЩ(\$B\$4:\$B\$12;0;\$B\$15);СМЕЩ(\$B\$4:\$B\$12;0;\$A16)).<br>Ее можно скопировать во все остальные ячейки. |   |   |   |   |   |   |   |
| 16 | 0                                                               | 0,0182                                                 | 0,0057 | 0,0021 | 0,0080 |                                                                                                                                                      |   |   |   |   |   |   |   |
| 17 | 1                                                               | 0,0057                                                 | 0,0035 | 0,0015 | 0,0034 |                                                                                                                                                      |   |   |   |   |   |   |   |
| 18 | 2                                                               | 0,0021                                                 | 0,0015 | 0,0007 | 0,0015 |                                                                                                                                                      |   |   |   |   |   |   |   |
| 19 | 3                                                               | 0,0080                                                 | 0,0034 | 0,0015 | 0,0110 |                                                                                                                                                      |   |   |   |   |   |   |   |
| 20 |                                                                 |                                                        |        |        |        |                                                                                                                                                      |   |   |   |   |   |   |   |

<sup>3</sup> Использовать эту функцию для вычисления ковариационной матрицы предложил Шай Заффрир (Shay Zafrir), студент, обучающийся по специальности “управление предприятиями” в Тель-Авивском университете.

## 8.5. Модель одного индекса

Модель одного индекса, или МОИ (*single-index model* — *SIM*), создана в попытке устранить некоторые вычислительные сложности, связанные с нахождением ковариационной матрицы. Модель основана на предположении о том, что доходы по каждому активу можно представить в виде линейной регрессии по некоторому рыночному индексу:

$$\widetilde{R}_i = \alpha_i + \beta_i \widetilde{R}_x + \widetilde{\varepsilon}_i.$$

Отталкиваясь от этого предположения, легко установить следующие два факта:

$$E(\widetilde{R}_i) = \alpha_i + \beta_i E(\widetilde{R}_x). \text{ Это утверждение тривиально.}$$

$$\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_x^2.$$

Этот факт менее очевиден и требует доказательства. Выпишем определение  $\sigma_{ij}$  и развернем его:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= E \left\{ \left[ \widetilde{R}_i - E(\widetilde{R}_i) \right] \left[ \widetilde{R}_j - E(\widetilde{R}_j) \right] \right\} = \\ &= E \left\{ \left[ \alpha_i + \beta_i \widetilde{R}_x - \left[ \alpha_i + \beta_i E(\widetilde{R}_x) \right] \right] \left[ \alpha_j + \beta_j \widetilde{R}_x - \left[ \alpha_j + \beta_j E(\widetilde{R}_x) \right] \right] \right\} = \\ &= E \left\{ \beta_i \left[ \widetilde{R}_x - E(\widetilde{R}_x) \right] \beta_j \left[ \widetilde{R}_x - E(\widetilde{R}_x) \right] \right\} = \\ &= \beta_i \beta_j E \left\{ \left[ \widetilde{R}_x - E(\widetilde{R}_x) \right] \left[ \widetilde{R}_x - E(\widetilde{R}_x) \right] \right\} = \beta_i \beta_j \sigma_x^2 \end{aligned}$$

С помощью модели одного индекса можно сильно упростить вычисление ковариационной матрицы. Продемонстрируем это на нашем примере с шестью портфелями, добавив седьмой столбец для доходности по индексу S&P 500. Выполняя регрессию доходов от каждого актива по портфелю Standard & Poor 500, получаем следующую таблицу величин  $\beta$ .

|    | A                     | B                                                   | C       | D       | E       | F       | G       | H       |
|----|-----------------------|-----------------------------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1  | МОДЕЛЬ ОДНОГО ИНДЕКСА |                                                     |         |         |         |         |         |         |
| 2  |                       |                                                     |         |         |         |         |         |         |
| 3  |                       | AMR                                                 | BS      | GE      | HR      | MO      | UK      | SP500   |
| 4  | 1974                  | -0,3505                                             | -0,1154 | -0,4246 | -0,2107 | -0,0758 | 0,2331  | -0,2647 |
| 5  | 1975                  | 0,7083                                              | 0,2472  | 0,3719  | 0,2227  | 0,0213  | 0,3569  | 0,3720  |
| 6  | 1976                  | 0,7329                                              | 0,3665  | 0,2550  | 0,5815  | 0,1276  | 0,0781  | 0,2384  |
| 7  | 1977                  | -0,2034                                             | -0,4271 | -0,0490 | -0,0938 | 0,0712  | -0,2721 | -0,0718 |
| 8  | 1978                  | 0,1663                                              | -0,0452 | -0,0573 | 0,2751  | 0,1372  | -0,1346 | 0,0656  |
| 9  | 1979                  | -0,2659                                             | 0,0158  | 0,0898  | 0,0793  | 0,0215  | 0,2254  | 0,1844  |
| 10 | 1980                  | 0,0124                                              | 0,4751  | 0,3350  | -0,1894 | 0,2002  | 0,3657  | 0,3242  |
| 11 | 1981                  | -0,0264                                             | -0,2042 | -0,0275 | -0,7427 | 0,0913  | 0,0479  | -0,0491 |
| 12 | 1982                  | 1,0642                                              | -0,1493 | 0,6968  | -0,2615 | 0,2243  | 0,0456  | 0,2141  |
| 13 | 1983                  | 0,1942                                              | 0,3680  | 0,3110  | 1,8682  | 0,2066  | 0,2640  | 0,2251  |
| 14 |                       |                                                     |         |         |         |         |         |         |
| 15 | Бета                  | 1,4820                                              | 1,0840  | 1,3107  | 1,2991  | 0,2622  | 0,4939  |         |
| 16 |                       |                                                     |         |         |         |         |         |         |
| 17 |                       | =НАКЛОН(B4:B13,\$H\$4:\$H\$13)                      |         |         |         |         |         |         |
| 18 |                       | =КОВАР(B4:B13,\$H\$4:\$H\$13)/ДИСПР(\$H\$4:\$H\$13) |         |         |         |         |         |         |
| 19 |                       |                                                     |         |         |         |         |         |         |
| 20 |                       |                                                     |         |         |         |         |         |         |

Формулы, обведенные овальной рамкой, представляют два способа вычисления показателя  $\beta$  для ценных бумаг (эта тема будет рассматриваться в следующей главе).

Чтобы вычислить ковариационную матрицу, необходимо вначале вычислить матрицу с элементами  $\beta_i\beta_j\sigma_{SP}^2$ . Этот расчет легко реализуется путем помещения показателей  $\beta$  шести активов на границы нашей ковариационной матрицы.

|    | A           | B     | C      | D      | E      | F      | G      | H      | I |
|----|-------------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|---|
| 11 | Дисп(SP500) |       | 0,0359 |        |        |        |        |        |   |
| 12 |             |       |        |        |        |        |        |        |   |
| 13 |             |       | AMR    | BS     | GE     | HR     | MO     | UK     |   |
| 14 |             |       | 1,482  | 1,084  | 1,311  | 1,299  | 0,262  | 0,494  |   |
| 15 | AMR         | 1,482 | 0,0790 | 0,0578 | 0,0698 | 0,0692 | 0,0140 | 0,0263 |   |
| 16 | BS          | 1,084 | 0,0578 | 0,0422 | 0,0511 | 0,0506 | 0,0102 | 0,0192 |   |
| 17 | GE          | 1,311 | 0,0698 | 0,0511 | 0,0618 | 0,0612 | 0,0124 | 0,0233 |   |
| 18 | HR          | 1,299 | 0,0692 | 0,0506 | 0,0612 | 0,0607 | 0,0122 | 0,0231 |   |
| 19 | MO          | 0,262 | 0,0140 | 0,0102 | 0,0124 | 0,0122 | 0,0025 | 0,0047 |   |
| 20 | UK          | 0,494 | 0,0263 | 0,0192 | 0,0233 | 0,0231 | 0,0047 | 0,0088 |   |
| 21 |             |       |        |        |        |        |        |        |   |
| 22 |             |       |        |        |        |        |        |        |   |

Для вычисления элементов матрицы мы прибегли к *смешанным ссылкам*. Например, в правом верхнем углу ковариационной матрицы (содержащем дисперсию дохода с акций AMR, равную 0,0790) стоит формула =C\$14\*\$B15\*\$C\$11. Ячейка C11 содержит дисперсию по индексу (в данном случае  $\sigma_{SP}^2 = 0,0359$ ), а C\$14 и \$B15 ссылаются на ячейки на границе матрицы, содержащие показатели  $\beta$  рассматриваемых активов<sup>4</sup>. При копировании этой формулы во все нужные ячейки образуется ковариационная матрица, построенная по модели одного индекса.

Очевидно, что ковариационная матрица в ее представлении по МОИ отличается от точной ковариационной матрицы, вычисленной по фактическому доходу (см. разделы 8.2 и 8.3). В частности, при положительности всех  $\beta$  (которая обычно имеет место) ковариационная матрица по МОИ не будет иметь отрицательных элементов, поэтому она не сможет учесть отрицательную ковариацию между двумя активами. В нашем примере разность двух ковариационных матриц довольно значительна.

<sup>4</sup> Обратите внимание, что дисперсия индекса S&P 500 эквивалентна стандартному отклонению примерно в 19%. За период 1926–1991 гг. стандартное отклонение годовых доходов по индексу S&P 500 составляло 20,22%. За период 1981–1991 гг. стандартное отклонение оказывается несколько меньшим — 16,31%. (См. ежегодник Ibbotson Associates, *Stocks, Bonds, Bills, and Inflation* — 1992 Yearbook. Chicago: Ibbotson Associates, 1992.)

|    | A                                             | B       | C       | D       | E       | F       | G       | H      |
|----|-----------------------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|
| 13 |                                               |         | AMR     | BS      | GE      | HR      | MO      | UK     |
| 14 |                                               |         | 1,482   | 1,084   | 1,311   | 1,299   | 0,262   | 0,494  |
| 15 | AMR                                           | 1,482   | 0,0790  | 0,0578  | 0,0698  | 0,0692  | 0,0140  | 0,0263 |
| 16 | BS                                            | 1,084   | 0,0578  | 0,0422  | 0,0511  | 0,0506  | 0,0102  | 0,0192 |
| 17 | GE                                            | 1,311   | 0,0698  | 0,0511  | 0,0618  | 0,0612  | 0,0124  | 0,0233 |
| 18 | HR                                            | 1,299   | 0,0692  | 0,0506  | 0,0612  | 0,0607  | 0,0122  | 0,0231 |
| 19 | MO                                            | 0,262   | 0,0140  | 0,0102  | 0,0124  | 0,0122  | 0,0025  | 0,0047 |
| 20 | UK                                            | 0,494   | 0,0263  | 0,0192  | 0,0233  | 0,0231  | 0,0047  | 0,0088 |
| 21 |                                               |         |         |         |         |         |         |        |
| 22 |                                               |         |         |         |         |         |         |        |
| 23 |                                               |         |         |         |         |         |         |        |
| 24 | Ковариационная матрица по данным о доходности |         |         |         |         |         |         |        |
| 25 |                                               | AMR     | BS      | GE      | HR      | MO      | UK      |        |
| 26 | AMR                                           | 0,2060  | 0,0375  | 0,1077  | 0,0493  | 0,0208  | 0,0059  |        |
| 27 | BS                                            | 0,0375  | 0,0790  | 0,0355  | 0,1028  | 0,0089  | 0,0406  |        |
| 28 | GE                                            | 0,1077  | 0,0355  | 0,0867  | 0,0443  | 0,0194  | 0,0148  |        |
| 29 | HR                                            | 0,0493  | 0,1028  | 0,0443  | 0,4435  | 0,0193  | 0,0274  |        |
| 30 | MO                                            | 0,0208  | 0,0089  | 0,0194  | 0,0193  | 0,0083  | -0,0015 |        |
| 31 | UK                                            | 0,0059  | 0,0406  | 0,0148  | 0,0274  | -0,0015 | 0,0392  |        |
| 32 |                                               |         |         |         |         |         |         |        |
| 33 | Разница между двумя ковариационными матрицами |         |         |         |         |         |         |        |
| 34 |                                               | AMR     | BS      | GE      | HR      | MO      | UK      |        |
| 35 | AMR                                           | 0,1270  | -0,0202 | 0,0379  | -0,0200 | 0,0069  | -0,0205 |        |
| 36 | BS                                            | -0,0202 | 0,0368  | -0,0156 | 0,0522  | -0,0013 | 0,0213  |        |
| 37 | GE                                            | 0,0379  | -0,0156 | 0,0250  | -0,0169 | 0,0071  | -0,0084 |        |
| 38 | HR                                            | -0,0200 | 0,0522  | -0,0169 | 0,3829  | 0,0070  | 0,0043  |        |
| 39 | MO                                            | 0,0069  | -0,0013 | 0,0071  | 0,0070  | 0,0058  | -0,0061 |        |
| 40 | UK                                            | -0,0205 | 0,0213  | -0,0084 | 0,0043  | -0,0061 | 0,0304  |        |

## Упражнения

1. В следующей таблице приведены данные о годовой прибыли по акциям шести мебельных фирм за 1982–1992 гг. Вычислите ковариационную матрицу доходов с активов по этим данным.

|    | A                                   | B        | C       | D         | E       | F       | G          |
|----|-------------------------------------|----------|---------|-----------|---------|---------|------------|
| 1  | ДАННЫЕ ПО ШЕСТИ МЕБЕЛЬНЫМ КОМПАНИЯМ |          |         |           |         |         |            |
| 2  |                                     |          |         |           |         |         |            |
| 3  |                                     |          |         |           | Leggett | Herman  | Shaw       |
| 4  |                                     | La-Z-Boy | Kimball | Flexsteel | & Platt | Miller  | Industries |
| 5  | 1982                                | 36,67%   | 0,20%   | 41,54%    | 21,92%  | 26,13%  | 22,50%     |
| 6  | 1983                                | 122,82%  | 61,43%  | 195,09%   | 62,27%  | 73,38%  | 117,89%    |
| 7  | 1984                                | 14,44%   | 63,51%  | -38,38%   | -1,27%  | 45,15%  | 7,80%      |
| 8  | 1985                                | 21,39%   | 28,42%  | 1,30%     | 81,17%  | 24,27%  | 38,14%     |
| 9  | 1986                                | 45,36%   | -7,44%  | 21,89%    | 19,83%  | 10,73%  | 54,48%     |
| 10 | 1987                                | 20,19%   | 48,27%  | 9,11%     | -10,21% | -11,92% | 26,82%     |
| 11 | 1988                                | -8,94%   | -11,28% | 12,65%    | 13,77%  | 7,06%   | -6,24%     |
| 12 | 1989                                | 27,02%   | 12,85%  | 12,08%    | 32,55%  | -7,55%  | 123,03%    |
| 13 | 1990                                | -11,64%  | 2,42%   | -17,13%   | -6,48%  | 1,31%   | 15,48%     |
| 14 | 1991                                | 20,29%   | 6,90%   | 3,62%     | 50,12%  | -5,54%  | 19,92%     |
| 15 | 1992                                | 34,08%   | 22,21%  | 33,46%    | 84,40%  | 5,71%   | 62,76%     |
| 16 |                                     |          |         |           |         |         |            |
| 17 | Бета                                | 0,80     | 0,95    | 0,65      | 0,85    | 0,85    | 1,40       |

2. Снова обратимся к фирмам, описанным в упражнении 1. Предположим, что стандартное отклонение по рыночному индексу составляет 18%. Вычислите ковариационную матрицу с использованием модели одного индекса.
3. В таблице “DJ 30, исх. данные” из файла Problems08.xls с компакт-диска, прилагаемого к книге, вы найдете данные по курсу 30 акций на конец месяца из индекса Dow–Jones 30 Industrials. Вычислите ковариационную матрицу индекса по этим данным (в следующей главе по этой же матрице будет выполняться расчет эффективной границы индекса).

---

## 9 Расчет эффективных портфелей без ограничения прав продажи

---

### 9.1. Введение

В этой главе рассматриваются все расчеты, необходимые для применения обеих версий классической ценовой модели рынка капитала, или ЦМРК (*capital asset pricing model — CAPM*): как версии, основанной на безрисковом активе (*risk-free asset*), так и ЦМРК с нулевым “бета” по Блэку (Black, 1972), в которой не требуется допущения о безрисковости актива. Вы сами увидите, как легко выполнять соответствующие расчеты с помощью средств электронных таблиц.

Глава имеет следующую структуру. Вначале даются некоторые предварительные определения и обозначения. Затем формулируются основные теоретические положения (доказательства даны в приложении к главе). В последующих разделах рассматривается применение этих положений, а именно:

- расчет эффективных портфелей;
- расчет эффективной границы.

В этой главе больше теоретического материала, чем в большинстве других глав нашей книги. В разделе 9.3 излагаются теоремы, лежащие в основе расчетов как эффективных портфелей, так и *линии рынка ценных бумаг, ЛРЦБ (security market line — SML)*, и рассматриваемые далее в главе 10. Если материал раздела 9.3 покажется вам сложным, пропустите его при первом чтении и попытайтесь разобраться в примере расчета из раздела 9.4.

---

### 9.2. Определения и обозначения

На протяжении этой главы будут использоваться описанные далее обозначения. Пусть имеется  $N$  подверженных риску активов, средний ожидаемый доход с каждого из которых обозначим как  $E(r_i)$ . Переменная  $R$  будет обозначать вектор-столбец ожидаемых доходов с этих активов:

$$R = \begin{bmatrix} E(r_1) = \bar{r}_1 \\ E(r_2) = \bar{r}_2 \\ \vdots \\ E(r_N) = \bar{r}_N \end{bmatrix}.$$

Обозначение  $S$  будет относиться к ковариационной матрице размерности  $N \times N$ :

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_{11}\sigma_{21} \dots \sigma_{N1} \\ \sigma_{12}\sigma_{22} \dots \sigma_{N2} \\ \vdots \\ \sigma_{1N}\sigma_{2N} \dots \sigma_{NN} \end{bmatrix}.$$

*Портфелем рискованных (подверженных риску) активов* (там, где нам не грозят разночтения, будем употреблять просто слово *портфель*) будем называть вектор-столбец  $x$ , координаты которого в сумме дают 1:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix}, \quad \sum_{i=1}^N x_i = 1.$$

Каждая координата  $x_i$  представляет долю портфеля, вложенную в  $i$ -й актив.

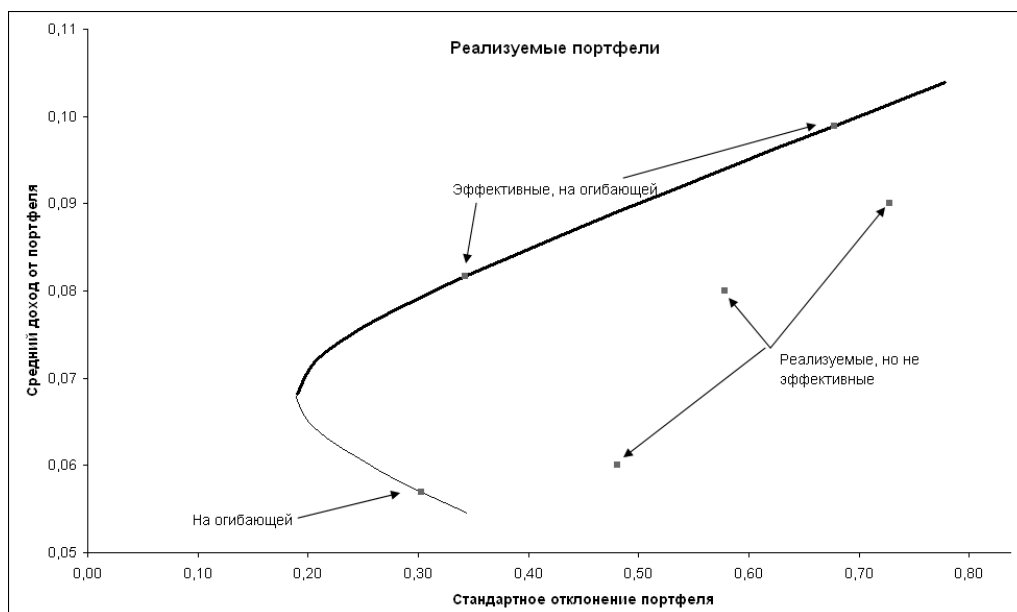
*Ожидаемый (средний) доход с портфеля  $x$*  —  $E(r_x)$  — вычисляется путем умножения  $x$  на  $R$ :

$$E(r_x) = x^T \cdot R \equiv \sum_{i=1}^N x_i E(r_i)$$

*Дисперсия дохода с портфеля  $x$* , обозначаемая  $\sigma_x^2 \equiv \sigma_{xx}$ , представляет собой произведение  $x^T S x = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \sigma_{ij}$ .

*Ковариация между доходами с двух портфелей  $x$  и  $y$* ,  $\text{Ковар}(x, y)$ , определяется как произведение  $\sigma_{xy} = x^T S y = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i y_j \sigma_{ij}$ . Обратите внимание, что  $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ .

На приведенном далее графике наглядно показаны четыре понятия. *Реализуемым портфелем* называется любой портфель, доли активов в котором в сумме дают единицу. *Реализуемым множеством* называется множество средних доходов и дисперсий реализуемых портфелей; реализуемое множество представляет собой область внутри и справа от кривой. Реализуемый портфель находится на *ограничивающей* реализуемого множества, если для заданного среднего дохода его дисперсия принимает минимальное значение. Наконец, портфель  $x$  называется *эффективным портфелем*, если доход с него максимален для заданной дисперсии (или стандартного отклонения). Таким образом, портфель  $x$  является эффективным, если нет другого портфеля  $y$ , такого, что  $E(R_y) > E(R_x)$  и при этом  $\sigma_y \leq \sigma_x$ . Множество всех эффективных портфелей называется *эффективной границей*; это множество изображается на графике жирной линией.



### 9.3. Некоторые теоремы об эффективных портфелях и ЦМРК

В приложении к этой главе приведены доказательства утверждений, которые излагаются ниже и представляют собой основу для расчетов ЦМРК. Все приведенные теоремы используются при выводе эффективной границы и линии рынка ценных бумаг; примеры конкретных числовых расчетов даются в следующих разделах и в главе 10.

**Теорема 1.** Пусть  $c$  — некоторая константа. Тогда обозначение  $R - c$  относится к следующему вектору-столбцу:

$$R - c = \begin{bmatrix} E(r_1) - c \\ E(r_2) - c \\ \vdots \\ E(r_N) - c \end{bmatrix}.$$

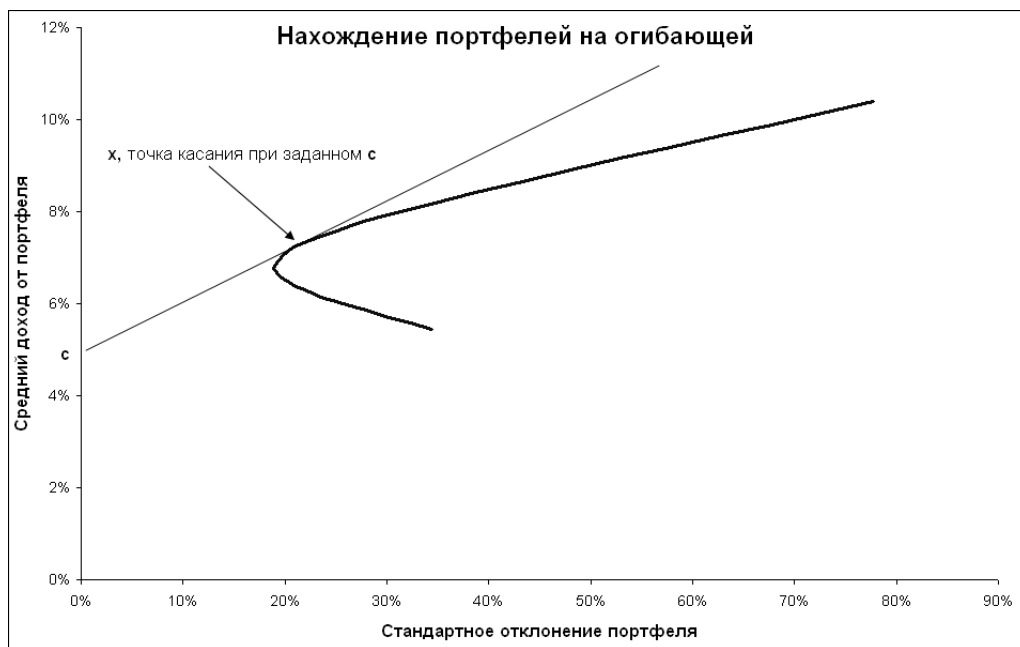
Пусть вектор  $z$  является решением системы линейных уравнений  $R - c = Sz$ . Тогда из этого решения можно получить портфель  $x$  на огибающей реализуемого множества:

$$z = S^{-1} \{R - c\};$$

$$x = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}, \text{ где } x_i = \frac{z_i}{\sum_{j=1}^N z_j}.$$

Более того, утверждается, что все портфели на огибающей имеют указанный вид.

*Наглядное представление.* Строгое доказательство данной теоремы приведено в приложении к этой главе, однако геометрический смысл ее ясен и очевиден. Предположим, мы выбрали константу  $c$  и пытаемся найти эффективный портфель  $x$ , для которого проведенная из точки  $c$  прямая касается границы реализуемого множества.



Теорема 1 как раз и описывает методику нахождения  $x$ ; более того, в теореме утверждается, что все портфели на огибающей (в частности, все эффективные портфели) строятся только по этой методике. Таким образом, если  $x$  — портфель на огибающей, то существует константа  $c$  и вектор  $z$ , такие, что  $Sz = R - c$  и  $x = z / \sum_i z_i$ .

**Теорема 2.** Согласно этой теореме, впервые доказанной Блэком (Black, 1972), зная любые два портфеля на огибающей, можно восстановить всю огибающую. Если заданы два портфеля,  $x = \{x_1, \dots, x_N\}$  и  $y = \{y_1, \dots, y_N\}$ , то все портфели на огибающей являются выпуклыми линейными комбинациями  $x$  и  $y$ . Это означает, что для любой заданной константы  $a$  приведенный далее портфель лежит на огибающей эффективной границы:



$$ax + (1 - a)y = \begin{bmatrix} ax_1 + (1 - a)y_1 \\ ax_2 + (1 - a)y_2 \\ \vdots \\ ax_N + (1 - a)y_N \end{bmatrix}.$$

**Теорема 3.** Пусть  $y$  — любой портфель, принадлежащий огибающей. Тогда для любого другого портфеля (как на огибающей, так и вне ее) справедливо соотношение

$$E(r_x) = c + \beta_x [E(r_y) - c],$$

где  $\beta_x = \frac{\text{Ковар}(x, y)}{\sigma_y^2}$ .

Более того,  $c$  является средним ожидаемым доходом от портфеля  $z$ , ковариация которого с портфелем  $y$  равна нулю:

$$c = E(r_z), \quad \text{Ковар}(y, z) = 0$$

*Примечания.* Если  $y$  принадлежит огибающей, то регрессия любого произвольного портфеля  $x$  по  $y$  дает линейное соотношение. Эта версия ЦМПК обычно называется *ЦМПК с нулевым “бета” по Блэку* в честь Фишера Блэка (Fisher Black), в работе которого за 1972 г. получен рассматриваемый результат. В данной модели линия рынка ценных бумаг Шарпа–Линтнера–Моссена (Sharpe–Lintner–Mossin) заменена ЛРЦБ, в которой роль безрискового актива играет портфель с нулевым показателем “бета” по отношению к некоторому портфелю  $y$ , принадлежащему огибающей. Отметим, что этот результат справедлив для любого портфеля  $y$  с огибающей.

Если рыночный портфель  $M$  является эффективным (“если” здесь очень важно, как будет показано позже), то результат Блэка также справедлив для рыночного портфеля. Таким образом, ЛРЦБ справедлива при замене  $c$  на  $E(r_z)$ :

$$E(r_x) = E(r_z) + \beta_x [E(r_y) - E(r_z)],$$

где  $\beta_x = \frac{\text{Ковар}(x, M)}{\sigma_M^2}$ ,  $\text{Ковар}(z, M) = 0$ .

Из всех результатов, касающихся ЦМПК, данная версия ЛРЦБ больше всего исследовалась эмпирически. В главе 10 демонстрируется вычисление  $\beta$  и расчет ЛРЦБ; далее рассматривается критика Ролла (Roll) в адрес эмпирических исследований. Из приведенного далее графика легко видеть, как можно найти портфель с нулевым “бета” на огибающей реализуемого множества.



Если имеется безрисковый актив, теорема 3 сводится к частному случаю линии рынка ценных бумаг для классической ценовой модели рынка капитала.

**Теорема 4.** Если имеется безрисковый актив с доходом  $r_f$ , то существует портфель  $M$  на огибающей, такой, что

$$E(r_x) = r_f + \beta_x [E(r_y) - r_f],$$

где  $\beta_x = \frac{\text{Ковар}(x, M)}{\sigma_M^2}$ .

*Примечание.* Если все инвесторы выбирают свои портфели только на основе среднего дохода и стандартного отклонения, то  $M$  — это портфель, составленный из *всех подверженных риску активов в экономике* в долях, пропорциональных рыночной цене актива. Конкретизируем данное утверждение. Предположим, имеется  $N$  подверженных риску активов; пусть рыночная цена актива  $i$  равняется  $V_i$ . Тогда рыночный портфель будет иметь следующие весовые (долевые) коэффициенты:

$$\text{Доля актива } i \text{ в } M = \frac{V_i}{\sum_{h=1}^N V_h}.$$

Это утверждение впервые было доказано Шарпом (Sharpe, 1964), Линтнером (Lintner, 1965) и Моссеном (Mossin, 1966).

**Теорема 5.** Верно утверждение, обратное к теореме 4. Предположим, имеется такой портфель  $y$ , что для любого портфеля  $x$  выполняется следующее соотношение:

$$E(r_x) = c + \beta_x [E(r_y) - c],$$

где  $\beta_x = \frac{\text{Ковар}(x,y)}{\sigma_y^2}$ .

В этом случае портфель  $y$  является эффективным.

Из всех перечисленных особо следует выделить теоремы 3 и 5. В них утверждается, что *соотношение линии рынка ценных бумаг выполняется тогда и только тогда, когда для всех портфелей можно выполнить регрессию по портфелю, принадлежащему огибающей*. Как убедительно показал Ролл (Roll, 1977, 1978), данные теоремы доказывают тот факт, что для проверки ЦМРК недостаточно просто показать, что выполняется соотношение ЛРЦБ<sup>1</sup>. Единственный способ — это проверить, является ли *реальный рыночный портфель эффективным в терминах среднего дохода и дисперсии*. К этой теме мы еще вернемся в главе 10.

Далее в этой главе мы исследуем практический смысл приведенных теорем на численных примерах, решенных в среде Excel.

## 9.4. Пример расчета эффективной границы

В этом разделе мы с помощью Excel будем рассчитывать эффективную границу. Рассмотрим пакет инвестиций, состоящий из четырех подверженных риску активов со следующими ожидаемыми доходами и ковариационной матрицей.

| 4 | A                      | B      | C     | D      | E | F             |
|---|------------------------|--------|-------|--------|---|---------------|
| 5 | Ковариационная матрица |        |       |        |   | Средний доход |
| 6 | 0,400                  | 0,030  | 0,020 | 0,000  |   | 0,06          |
| 7 | 0,030                  | 0,200  | 0,001 | -0,060 |   | 0,05          |
| 8 | 0,020                  | 0,001  | 0,300 | 0,030  |   | 0,07          |
| 9 | 0,000                  | -0,060 | 0,030 | 0,100  |   | 0,08          |

Наш расчет будет выполняться в два этапа. Вначале мы найдем два портфеля на огибающей реализуемого множества (раздел 9.4.1), а затем в разделе 9.4.2 построим эффективную границу.

### 9.4.1. Поиск двух портфелей на огибающей

Согласно теореме 2, для нахождения всей эффективной границы необходимо найти два эффективных портфеля. По теореме 1 для этого нужно решить систему  $R - c = Sz$  относительно  $z$  для двух различных значений  $c$ . Для каждого из  $c$  путем решения системы находим вектор  $z$ , а затем для нахождения эффективного портфеля принимаем  $x_i = z_i / \sum_h z_h$ .

Значения  $c$ , для которых следует решить систему, могут выбираться более-менее произвольно; для облегчения задачи вначале решим систему для  $c = 0$ . Получим следующий результат.

<sup>1</sup> Статья Ролла 1977 г. чаще цитируется и отличается более полным изложением материала, однако его же статья 1978 г. гораздо легче для восприятия и понимания. Если вас интересуют затронутые вопросы, начните с нее.

|    | В      | С      |
|----|--------|--------|
| 12 | z      | x      |
| 13 | 0,1019 | 0,0540 |
| 14 | 0,5657 | 0,2998 |
| 15 | 0,1141 | 0,0605 |
| 16 | 1,1052 | 0,5857 |

Для этого в ячейках устанавливаются формулы, приведенные ниже.

- Для  $z$ : =МУМНОЖ(МОБР(А6:D9), F6:F9). Диапазон А6:D9 содержит ковариационную матрицу, а в ячейках F6:F9 записаны средние доходы от активов.
- Для  $x$ : в каждой ячейке записывается соответствующее значение  $z$ , разделенное на сумму всех  $z$ . Например, ячейка C13 содержит формулу =B13/СУММ(B\$13:B\$16).

Теперь решим систему относительно какой-нибудь другой константы  $c$ . Для этого потребуется еще несколько формул, как видно из следующей таблицы.

|    | А                      | В      | С      | Д         | Е             | Г         |
|----|------------------------|--------|--------|-----------|---------------|-----------|
| 3  |                        |        |        |           |               | Среднее   |
| 4  |                        |        |        |           |               | минус     |
| 5  | Ковариационная матрица |        |        |           | Средний доход | константа |
| 6  | 0,400                  | 0,030  | 0,020  | 0,000     | 0,06          | -0,005    |
| 7  | 0,030                  | 0,200  | 0,001  | -0,060    | 0,05          | -0,015    |
| 8  | 0,020                  | 0,001  | 0,300  | 0,030     | 0,07          | 0,005     |
| 9  | 0,000                  | -0,060 | 0,030  | 0,100     | 0,08          | 0,015     |
| 10 |                        |        |        |           |               |           |
| 11 |                        |        |        | Константа | 0,065         |           |
| 12 |                        | z      | x      |           | z             | y         |
| 13 |                        | 0,1019 | 0,0540 |           | -0,0101       | -0,1163   |
| 14 |                        | 0,5657 | 0,2998 |           | -0,0353       | -0,4067   |
| 15 |                        | 0,1141 | 0,0605 |           | 0,0047        | 0,0544    |
| 16 |                        | 1,1052 | 0,5857 |           | 0,1274        | 1,4687    |

Каждая ячейка вектора-столбца под заголовком “Среднее минус константа” содержит средний доход актива за вычетом константы  $c$  (в данном случае  $c = 0,065$ ). Второй вектор  $z$  и соответствующий портфель на огибающей  $y$  имеют следующий вид.

|    | Е       | Г       |
|----|---------|---------|
| 12 | z       | y       |
| 13 | -0,0101 | -0,1163 |
| 14 | -0,0353 | -0,4067 |
| 15 | 0,0047  | 0,0544  |
| 16 | 0,1274  | 1,4687  |

Этот вектор  $z$  вычисляется аналогично первому с той разницей, что в ячейках используется функция МУМНОЖ(МОБР(А6:D9), G6:G9).

В заключение расчета получим средние доходы, стандартные отклонения и ковариации доходов для портфелей  $x$  и  $y$ .

|    | В          | С       | Д      | Е        | Ф      |
|----|------------|---------|--------|----------|--------|
| 19 | Трансп.х   |         |        |          |        |
| 20 | 0,0540     | 0,2998  | 0,0605 | 0,5857   |        |
| 21 |            |         |        |          |        |
| 22 | Трансп.у   |         |        |          |        |
| 23 | -0,1163    | -0,4067 | 0,0544 | 1,4687   |        |
| 24 |            |         |        |          |        |
| 25 | Сред(х)    | 0,0693  |        | Сред(у)  | 0,0940 |
| 26 | Дисп(х)    | 0,0367  |        | Дисп(у)  | 0,3341 |
| 27 | Сигма(х)   | 0,1917  |        | Сигма(у) | 0,5780 |
| 28 |            |         |        |          |        |
| 29 | Ковар(х,у) | 0,0498  |        |          |        |
| 30 | Корр(х,у)  | 0,4496  |        |          |        |

Транспонированные векторы  $x$  и  $y$  вставлены с использованием функции ТРАНСП (функции для работы с массивами рассматриваются в главе 29). Теперь средние, дисперсии и ковариации вычисляются таким образом:

- Сред( $x$ ) — по формуле МУМНОЖ(трансп.х, средние);
- Дисп( $x$ ) — по формуле МУМНОЖ(МУМНОЖ(трансп.х, ковар.матр.), х);
- Сигма( $x$ ) — по формуле КОРЕНЬ(дисперсия);
- Ковар( $x, y$ ) — по формуле МУМНОЖ(МУМНОЖ(трансп.х, ковар.матр.), у);
- Корр( $x, y$ ) — по формуле КОВАР(х, у) / (сигма\_х \* сигма\_у).

В следующей таблице показано все, что мы проделали в этом разделе.

|    | А                      | В          | С       | Д         | Е        | Ф       | Г         |
|----|------------------------|------------|---------|-----------|----------|---------|-----------|
| 3  |                        |            |         |           |          |         | Среднее   |
| 4  |                        |            |         |           |          | Средний | минус     |
| 5  | Ковариационная матрица |            |         |           |          | доход   | константа |
| 6  | 0,400                  | 0,030      | 0,020   | 0,000     |          | 0,06    | -0,005    |
| 7  | 0,030                  | 0,200      | 0,001   | -0,060    |          | 0,05    | -0,015    |
| 8  | 0,020                  | 0,001      | 0,300   | 0,030     |          | 0,07    | 0,005     |
| 9  | 0,000                  | -0,060     | 0,030   | 0,100     |          | 0,08    | 0,015     |
| 10 |                        |            |         |           |          |         |           |
| 11 |                        |            |         | Константа | 0,065    |         |           |
| 12 |                        | z          | x       |           | z        | у       |           |
| 13 |                        | 0,1019     | 0,0540  |           | -0,0101  | -0,1163 |           |
| 14 |                        | 0,5657     | 0,2998  |           | -0,0353  | -0,4067 |           |
| 15 |                        | 0,1141     | 0,0605  |           | 0,0047   | 0,0544  |           |
| 16 |                        | 1,1052     | 0,5857  |           | 0,1274   | 1,4687  |           |
| 17 |                        |            |         |           |          |         |           |
| 18 |                        |            |         |           |          |         |           |
| 19 |                        | Трансп.х   |         |           |          |         |           |
| 20 |                        | 0,0540     | 0,2998  | 0,0605    | 0,5857   |         |           |
| 21 |                        |            |         |           |          |         |           |
| 22 |                        | Трансп.у   |         |           |          |         |           |
| 23 |                        | -0,1163    | -0,4067 | 0,0544    | 1,4687   |         |           |
| 24 |                        |            |         |           |          |         |           |
| 25 |                        | Сред(х)    | 0,0693  |           | Сред(у)  | 0,0940  |           |
| 26 |                        | Дисп(х)    | 0,0367  |           | Дисп(у)  | 0,3341  |           |
| 27 |                        | Сигма(х)   | 0,1917  |           | Сигма(у) | 0,5780  |           |
| 28 |                        |            |         |           |          |         |           |
| 29 |                        | Ковар(х,у) | 0,0498  |           |          |         |           |
| 30 |                        | Корр(х,у)  | 0,4496  |           |          |         |           |

### 9.4.2. Нахождение эффективной границы

Согласно теореме 2 из раздела 9.3, огибающую реализуемого множества (включающую в себя эффективную границу) можно получить, составив выпуклую линейную комбинацию двух портфелей, рассчитанных в разделе 9.4.1. Пусть  $p$  — портфель, в котором доля средств  $a$  вложена в портфель  $x$ , а доля  $(1-a)$  — в портфель  $y$ . Тогда согласно материалу главы 7 среднее значение и дисперсия дохода от портфеля  $p$  составят

$$E(R_p) = aE(R_x) + (1-a)E(R_y);$$

$$\sigma_p = \sqrt{a^2\sigma_x^2 + (1-a)^2\sigma_y^2 + 2a(1-a)\text{Ковар}(x,y)}.$$

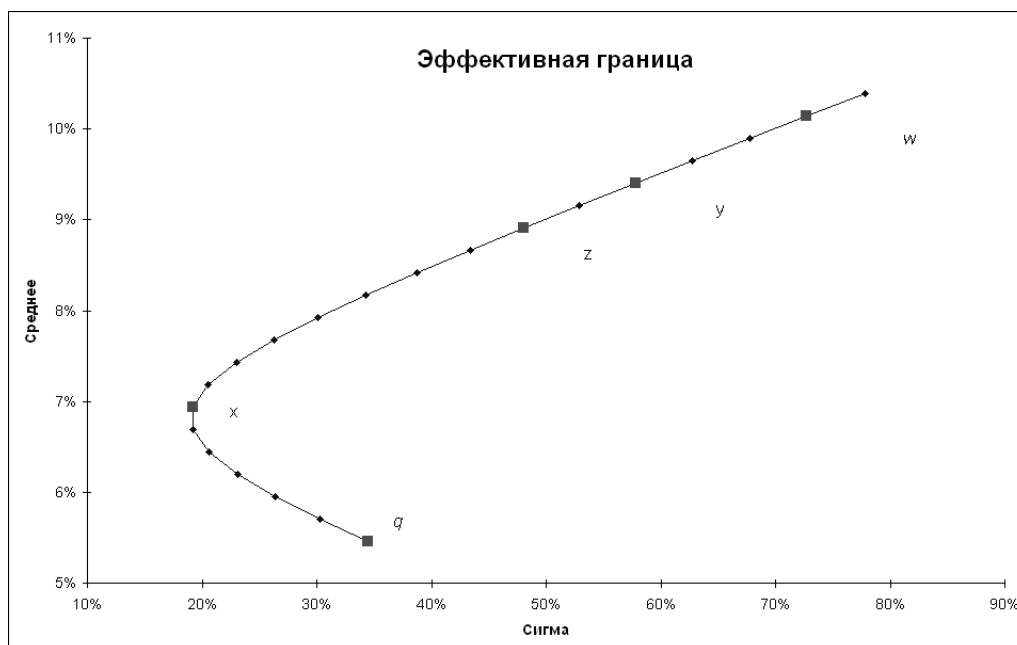
Ниже показан образец такого расчета для наших двух портфелей.

|    | А                      | В      |
|----|------------------------|--------|
| 34 | Расчет одного портфеля |        |
| 35 | Доля $x$               | 0,3    |
| 36 | средний доход п.       | 8,66%  |
| 37 | сигма п.               | 43,35% |

На основании этого расчета можно построить следующую таблицу данных (см. главу 26).

|    | С                       | Д      | Е      | Ф                            | Г      | Н       | И |
|----|-------------------------|--------|--------|------------------------------|--------|---------|---|
| 33 | ТАБЛИЦА ДАННЫХ          |        |        |                              |        |         |   |
| 34 | ДЛЯ ГРАФИКА ЭФФЕКТИВНОЙ |        |        |                              |        |         |   |
| 35 | ГРАНИЦЫ                 |        |        |                              |        |         |   |
| 36 |                         | Сигма  | Доход  |                              |        |         |   |
| 37 |                         | 0,4335 | 0,0866 | <-- заголовок таблицы данных |        |         |   |
| 38 |                         | -0,4   | 0,7778 | 0,1038                       |        |         |   |
| 39 |                         | -0,3   | 0,7274 | 0,1014                       | 0,1014 | Порт. w |   |
| 40 |                         | -0,2   | 0,6772 | 0,0989                       |        |         |   |
| 41 |                         | -0,1   | 0,6274 | 0,0965                       |        |         |   |
| 42 |                         | 0      | 0,5780 | 0,0940                       | 0,0940 | Порт. y |   |
| 43 |                         | 0,1    | 0,5291 | 0,0915                       |        |         |   |
| 44 |                         | 0,2    | 0,4809 | 0,0891                       | 0,0891 | Порт. z |   |
| 45 |                         | 0,3    | 0,4335 | 0,0866                       |        |         |   |
| 46 |                         | 0,4    | 0,3874 | 0,0841                       |        |         |   |
| 47 |                         | 0,5    | 0,3429 | 0,0817                       |        |         |   |
| 48 |                         | 0,6    | 0,3010 | 0,0792                       |        |         |   |
| 49 |                         | 0,7    | 0,2627 | 0,0767                       |        |         |   |
| 50 |                         | 0,8    | 0,2298 | 0,0743                       |        |         |   |
| 51 |                         | 0,9    | 0,2051 | 0,0718                       |        |         |   |
| 52 |                         | 1      | 0,1917 | 0,0693                       | 0,0693 | Порт. x |   |
| 53 |                         | 1,1    | 0,1919 | 0,0669                       |        |         |   |
| 54 |                         | 1,2    | 0,2058 | 0,0644                       |        |         |   |
| 55 |                         | 1,3    | 0,2309 | 0,0619                       |        |         |   |
| 56 |                         | 1,4    | 0,2640 | 0,0595                       |        |         |   |
| 57 |                         | 1,5    | 0,3024 | 0,0570                       |        |         |   |
| 58 |                         | 1,6    | 0,3445 | 0,0545                       | 0,0545 | Порт. q |   |

Сама таблица данных на рисунке очерчена жирной линией. Пять точек данных в четвертом столбце представляют собой средний ожидаемый доход от портфеля, описываемого ячейками слева от них. Эти точки данных изображены на графике на следующем рисунке в виде отдельных серий данных.



Заметим, что все выпуклые линейные комбинации лежат на огибающей, но не обязательно являются эффективными. Например,  $z$  — это эффективный портфель, являющийся выпуклой комбинацией двух эффективных портфелей  $x$  и  $y$ ; в данном случае доля  $x$  составляет 20%, а доля  $y$  — 80%. Портфель  $w$  также является выпуклой линейной комбинацией  $x$  и  $y$  (в данном случае весовой коэффициент при  $y$  положителен, а при  $x$  — отрицателен), а портфель  $q$ , хотя и лежит на огибающей множества реализуемых портфелей, не является эффективным. Таким образом, несмотря на то, что всякий эффективный портфель является выпуклой комбинацией некоторых двух эффективных портфелей, *обратное неверно*: не всякая выпуклая линейная комбинация двух эффективных портфелей является эффективным портфелем.

### 9.4.3. Одноэтапный расчет эффективных портфелей

В примерах этого раздела эффективные портфели рассчитываются путем выпи-сывания большей части компонентов портфеля в таблице по отдельности. Однако в некоторых случаях бывает необходимо рассчитать эффективный портфель в один этап. Для этого необходимо знать несколько хитростей Excel, большинство из которых связано с правильным применением функций работы с массивами.

1. Запишем формулу  $=F6:F9-F11$  как функцию массива (т.е. вставим ее с помощью комбинации клавиш  $\langle \text{Ctrl}+\text{Shift}+\text{Enter} \rangle$ ) и получим значения всех координат вектора F6:F9 минус E11.

|    | A                      | B     | C    | D         | E    | F       | G         | H            | I |
|----|------------------------|-------|------|-----------|------|---------|-----------|--------------|---|
| 3  |                        |       |      |           |      |         | Среднее   |              |   |
| 4  |                        |       |      |           |      | Средний | минус     |              |   |
| 5  | Ковариационная матрица |       |      |           |      | доход   | константа |              |   |
| 6  | 0,40                   | 0,03  | 0,02 | 0,00      |      | 0,06    | 0,05      |              |   |
| 7  | 0,03                   | 0,20  | 0,00 | -0,06     |      | 0,05    | 0,04      |              |   |
| 8  | 0,02                   | 0,00  | 0,30 | 0,03      |      | 0,07    | 0,06      | {=F6:F9-E11} |   |
| 9  | 0,00                   | -0,06 | 0,03 | 0,10      |      | 0,08    | 0,07      |              |   |
| 10 |                        |       |      |           |      |         |           |              |   |
| 11 |                        |       |      | Константа | 0,01 |         |           |              |   |

Тот же прием можно применить и для вычисления эффективного портфеля.

|    | A | B                            | C       | D                                | E | F                            | G | H       | I       | J                        | K | L |
|----|---|------------------------------|---------|----------------------------------|---|------------------------------|---|---------|---------|--------------------------|---|---|
| 13 |   | z                            | x       |                                  |   |                              |   | z       | y       |                          |   |   |
| 14 |   | 0,10187                      | 0,05399 |                                  |   |                              |   | 0,08464 | 0,05257 |                          |   |   |
| 15 |   | 0,56570                      | 0,29981 |                                  |   |                              |   | 0,47324 | 0,29395 |                          |   |   |
| 16 |   | 0,11414                      | 0,06049 | {=B14:B17/СУММ(\$B\$14:\$B\$17)} |   |                              |   | 0,09730 | 0,06044 | {=H14:H17/СУММ(H14:H17)} |   |   |
| 17 |   | 1,10518                      | 0,58572 |                                  |   |                              |   | 0,95475 | 0,59304 |                          |   |   |
| 18 |   |                              |         |                                  |   |                              |   |         |         |                          |   |   |
| 19 |   | {=МУМНОЖ(МОБР(A6:D9),F6:F9)} |         |                                  |   | {=МУМНОЖ(МОБР(A6:D9),G6:G9)} |   |         |         |                          |   |   |
| 20 |   |                              |         |                                  |   |                              |   |         |         |                          |   |   |

2. Функция Excel ТРАНСП (Transpose) применяется и к ячейке, но только в качестве функции обработки массива. Следовательно, содержимое ячейки для функции ТРАНСП должно вводиться с помощью комбинации клавиш <Ctrl+Shift+Enter> вместо клавиши <Enter>. Пример приведен ниже.

|    | B         | C      | D                                                | E | F | G | H | I |
|----|-----------|--------|--------------------------------------------------|---|---|---|---|---|
| 23 | Средн.х   | 0,0693 | {=МУМНОЖ(ТРАНСП(C14:C17),F6:F9)}                 |   |   |   |   |   |
| 24 | Дисп.х    | 0,0367 | {=МУМНОЖ(МУМНОЖ(ТРАНСП(C14:C17),A6:D9),C14:C17)} |   |   |   |   |   |
| 25 | Ст.откл.х | 0,1917 | {=КОРЕНЬ(C24)}                                   |   |   |   |   |   |

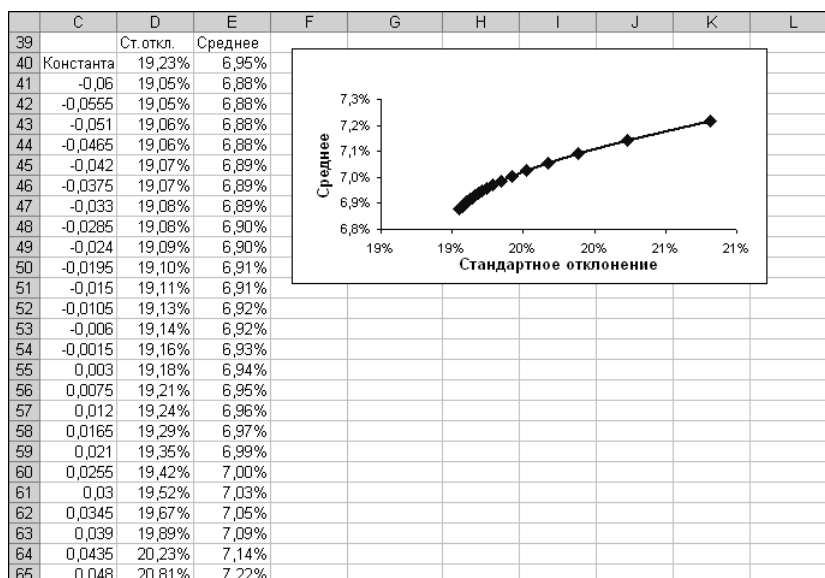
Обратите внимание на фигурные скобки ({}), которые обозначают употребление функции обработки массива (см. главу 29). Эти скобки вводить не надо — Excel вставляет их автоматически после нажатия <Ctrl+Shift+Enter>.

Если проявить немного терпения, можно построить таблицу, в которой средний доход и стандартное отклонение  $\sigma$  эффективного портфеля будут вычисляться в одной ячейке. В следующем примере показано вычисление среднего дохода и стандартного отклонения для портфеля  $y$  и константы  $c = 0,01$ .

|    | A                                                                                                                                                                             | B      | C | D                                                                                          | E | F | G | H | I |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------|---|--------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|---|
| 27 |                                                                                                                                                                               |        |   |                                                                                            |   |   |   |   |   |
| 28 | Эфф. портфель в один этап                                                                                                                                                     |        |   | {=МУМНОЖ(ТРАНСП(МУМНОЖ(МОБР(A6:D9),F6:F9-E11)/СУММ(МУМНОЖ(МОБР(A6:D9),F6:F9-E11))),F6:F9)} |   |   |   |   |   |
| 29 | Средн. портф.                                                                                                                                                                 | 6,95%  |   |                                                                                            |   |   |   |   |   |
| 30 | Сигма портф.                                                                                                                                                                  | 19,23% |   |                                                                                            |   |   |   |   |   |
| 31 |                                                                                                                                                                               |        |   |                                                                                            |   |   |   |   |   |
| 32 | {=КОРЕНЬ(МУМНОЖ(ТРАНСП(МУМНОЖ(МОБР(A6:D9),F6:F9-E11)/СУММ(МУМНОЖ(МОБР(A6:D9),F6:F9-E11))),МУМНОЖ(A6:D9,МУМНОЖ(МОБР(A6:D9),F6:F9-E11)/СУММ(МУМНОЖ(МОБР(A6:D9),F6:F9-E11))))))} |        |   |                                                                                            |   |   |   |   |   |
| 33 |                                                                                                                                                                               |        |   |                                                                                            |   |   |   |   |   |
| 34 |                                                                                                                                                                               |        |   |                                                                                            |   |   |   |   |   |
| 35 |                                                                                                                                                                               |        |   |                                                                                            |   |   |   |   |   |
| 36 |                                                                                                                                                                               |        |   |                                                                                            |   |   |   |   |   |

В этой методике явно не хватает простоты, наглядности и понятности, но и она может оказаться полезной. С ее помощью легко построить эффективную границу как функцию задаваемой константы.





## 9.5. Расчет рыночного портфеля: линия рынка капитала (ЛРК)

Предположим, что существует безрисковый актив, средний ожидаемый доход с которого равен  $r_f$ . Пусть  $M$  — эффективный портфель, являющийся решением следующей системы уравнений:

$$R - r_f = Sz,$$

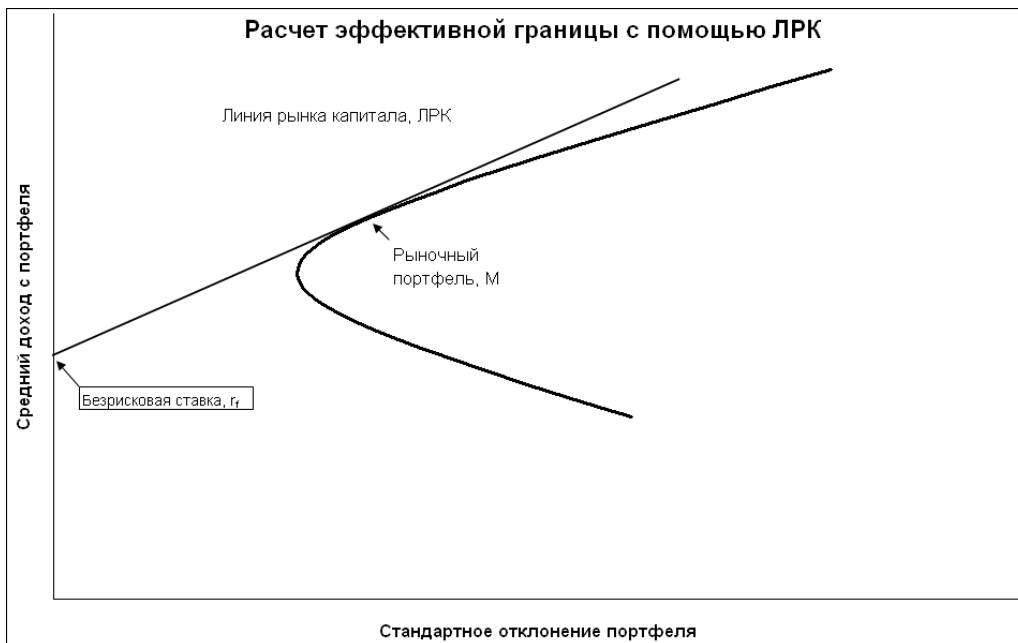
$$M_i = \frac{z_i}{\sum_{i=1}^N z_i}.$$

Теперь рассмотрим выпуклую линейную комбинацию портфеля  $M$  и безрискового актива  $r_f$ . Положим для примера, что доля безрискового актива в этом портфеле составляет  $a$ . Из стандартных уравнений для среднего дохода и его стандартного отклонения получаем:

$$E(r_p) = ar_f + (1 - a)E(r_M),$$

$$\sigma_p = \sqrt{a^2\sigma_{r_f}^2 + (1 - a)^2\sigma_M^2 + 2a(1 - a)\text{Ковар}(r_f, y)} = (1 - a)\sigma_M.$$

Геометрическое место всех таких комбинаций при  $a \geq 0$  называется *линией рынка капитала*, или *ЛРК* (*capital market line — CML*). Ее можно изобразить на одном графике с эффективной границей следующим образом.



Портфель  $M$  называется *рыночным портфелем* в силу ряда причин.

- Предположим, что капиталовкладчики достигли согласия по поводу статистической информации о портфеле (т.е. вектора ожидаемых доходов  $R$  и ковариационной матрицы  $S$ ). Далее предположим, что капиталовкладчики заинтересованы только в достижении максимального среднего дохода с портфеля при заданном его стандартном отклонении  $\sigma$ . Отсюда следует, что *все оптимальные портфели находятся на ЛРК*.
- В описанном выше случае далее следует, что портфель  $M$  — *единственный портфель подверженных риску активов, который входит во все оптимальные портфели*. Поэтому он должен включать все подверженные риску активы, причем доля каждого из активов должна быть пропорциональна его рыночной цене. Это можно выразить так:

Доля актива  $i$  в портфеле  $M = \frac{V_i}{\sum_{i=1}^N V_i}$ , где  $V_i$  — рыночная цена  $i$ -го актива.

Зная  $r_f$ , нетрудно найти  $M$ : нужно просто решить систему для эффективного портфеля с константой  $c = r_f$ . При изменении  $r_f$  получаем другой “рыночный” портфель — это просто эффективный портфель с соответствующей константой. В нашем примере можно положить безрисковую ставку дохода равной  $r_f = 5\%$ , тогда решение системы  $R - r_f = Sz$  дает следующее.

|    | D         | E        | F      | G | H                                                                               | I | J |
|----|-----------|----------|--------|---|---------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| 11 | Константа | 0,05     |        |   |                                                                                 |   |   |
| 12 |           | z        | M      |   |                                                                                 |   |   |
| 13 |           | 0,0157   | 0,0313 |   | Примечание: рыночный портфель M построен по касательной для заданной константы. |   |   |
| 14 |           | 0,1034   | 0,2058 |   |                                                                                 |   |   |
| 15 |           | 0,0303   | 0,0604 |   |                                                                                 |   |   |
| 16 |           | 0,3529   | 0,7025 |   |                                                                                 |   |   |
| 17 |           | Сред(M)  | 0,0726 |   |                                                                                 |   |   |
| 18 |           | Сигма(M) | 0,2121 |   |                                                                                 |   |   |

## 9.6. ЛРК при наличии безрискового актива

Теорема 4 утверждает, что при наличии безрискового актива выполняется следующее линейное соотношение (известное под названием *линии рынка капитала* — ЛРК):

$$E(r_x) = r_f + \beta_x [E(r_M) - r_f],$$

где  $\beta_x = \frac{\text{Ковар}(x, M)}{\sigma_M^2}$ .

В следующей главе рассматриваются некоторые статистические методы для нахождения ЛРК, аналогичные тем, которые используются финансовыми аналитиками.

## Упражнения

1. В главе 8 от вас требовалось рассчитать ковариационную матрицу доходов для шести мебельных фирм. Средние доходы и ковариационная матрица для них соответственно равны.

|    | A                      | B        | C       | D         | E       | F      | G      | H | I       |
|----|------------------------|----------|---------|-----------|---------|--------|--------|---|---------|
| 3  | Ковариационная матрица |          |         |           |         |        |        |   |         |
| 4  |                        | La-Z-Boy | Kimball | Flexsteel | Leggett | Miller | Shaw   |   | Среднее |
| 5  | La-Z-Boy               | 0,1152   | 0,0398  | 0,1792    | 0,0492  | 0,0568 | 0,0989 |   | 29,24%  |
| 6  | Kimball                | 0,0398   | 0,0649  | 0,0447    | 0,0062  | 0,0349 | 0,0269 |   | 20,68%  |
| 7  | Flexsteel              | 0,1792   | 0,0447  | 0,3334    | 0,0775  | 0,0886 | 0,1487 |   | 25,02%  |
| 8  | Leggett                | 0,0492   | 0,0062  | 0,0775    | 0,1033  | 0,0191 | 0,0597 |   | 31,64%  |
| 9  | Miller                 | 0,0568   | 0,0349  | 0,0886    | 0,0191  | 0,0594 | 0,0243 |   | 15,34%  |
| 10 | Shaw                   | 0,0989   | 0,0269  | 0,1487    | 0,0597  | 0,0243 | 0,1653 |   | 43,87%  |

- а) Зная эту матрицу и предполагая, что безрисковая ставка дохода равна нулю, рассчитайте эффективный портфель из этих шести активов.
- б) Решите эту же задачу при безрисковой ставке дохода в 10%.
- в) С помощью этих двух портфелей постройте эффективную границу для указанных шести мебельных компаний. Начертите ее график.

- г) Существует ли эффективный портфель со строго положительными долями всех активов<sup>2</sup>?
2. Достаточным условием для нахождения эффективных портфелей с положительными весовыми коэффициентами является диагональность ковариационной матрицы:  $\sigma_{ij} = 0$  при  $i \neq j$ . По непрерывности отсюда следует, что портфели с положительными весами получаются и в том случае, если недиагональные элементы ковариационной матрицы достаточно малы по сравнению с диагональными. Рассмотрим такое преобразование этой матрицы, при котором

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} \varepsilon \sigma_{ij}^{\text{Исх}}, & \text{если } i \neq j, \\ \sigma_{ii}^{\text{Исх}}, & \text{иначе} \end{cases}$$

При  $\varepsilon = 1$  данное преобразование дает исходную ковариационную матрицу, а при  $\varepsilon = 0$  — целиком диагональную матрицу.

Для  $r = 10\%$  найдите максимальное значение  $\varepsilon$ , при котором все весовые коэффициенты портфеля положительны.

3. Рассмотрим пример, приведенный в разделе 9.4. С помощью Excel определите портфель на огibaющей, показатель  $\beta$  которого по отношению к эффективному портфелю  $y$  равен нулю. *Подсказка:* обратите внимание на то, что ввиду линейности ковариации тем же свойством обладает и  $\beta$ . Пусть  $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$  — выпуклая линейная комбинация  $x$  и  $y$  и пусть необходимо определить  $\beta_z$ . В этом случае

$$\begin{aligned} \beta_z &= \frac{\text{Ковар}(z, y)}{\sigma_y^2} = \frac{\text{Ковар}[\lambda x + (1 - \lambda)y, y]}{\sigma_y^2} = \\ &= \lambda \frac{\text{Ковар}(x, y)}{\sigma_y^2} + \frac{(1 - \lambda)\text{Ковар}(y, y)}{\sigma_y^2} = \lambda \beta_x + (1 - \lambda). \end{aligned}$$

4. В этой задаче мы возвращаемся к задаче с четырьмя активами, рассмотренной в разделе 7.5.

|   | A                                             | B     | C    | D     | E | F            | G            |
|---|-----------------------------------------------|-------|------|-------|---|--------------|--------------|
| 1 | <b>ЗАДАЧА ДЛЯ ПОРТФЕЛЯ ИЗ ЧЕТЫРЕХ АКТИВОВ</b> |       |      |       |   |              |              |
| 2 |                                               |       |      |       |   |              |              |
| 3 |                                               |       |      |       |   |              |              |
| 4 | Ковариационная матрица                        |       |      |       |   | Средн. доход | Станд. откл. |
| 5 | 0,10                                          | 0,01  | 0,03 | 0,05  |   | 6%           | 31,62%       |
| 6 | 0,01                                          | 0,30  | 0,06 | -0,04 |   | 8%           | 54,77%       |
| 7 | 0,03                                          | 0,06  | 0,40 | 0,02  |   | 10%          | 63,25%       |
| 8 | 0,05                                          | -0,04 | 0,02 | 0,50  |   | 15%          | 70,71%       |

Найдите огibaющее множество для этих четырех активов и покажите, что все отдельные активы принадлежат этому множеству. У вас должен получиться примерно такой график, как показано ниже.

<sup>2</sup> Решение задачи при условии строго положительных весовых коэффициентов активов не является тривиальным. См. публикации Green, 1986 и Nielsen, 1987.



## Приложение

В этом приложении собраны доказательства различных утверждений, выдвинутых в настоящей главе. Как и на протяжении главы, предполагается, что исследуются данные по  $N$  подверженным риску активам. Важно отметить, что все определения “реализуемости” и “оптимальности” даются именно по отношению к этому набору активов. Поэтому, например, слово “эффективный” в развернутом виде означает “эффективный по отношению к исследуемому набору из  $N$  активов”.

**Теорема 0.** Множество всех реализуемых портфелей активов, подверженных риску, выпукло.

**Доказательство.** Портфель  $x$  является реализуемым тогда и только тогда, когда весовые коэффициенты (доли активов) в сумме дают единицу, т.е.  $\sum_{i=1}^N x_i = 1$ , где  $N$  — количество активов. Предположим, что  $x$  и  $y$  — реализуемые портфели, а  $\lambda$  — некоторое число в диапазоне от 0 до 1. Очевидно, что портфель  $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$  также является реализуемым.

**Теорема 1.** Пусть  $c$  — некоторая константа. Обозначим через  $R$  вектор средних доходов. Портфель  $x$  находится на огибающей по отношению к набору из  $N$  активов тогда и только тогда, когда он является нормированным решением системы:

$$R - c = Sz$$

$$x_i = \frac{z_i}{\sum_h z_h}$$

**Доказательство.** Портфель  $x$  находится на огибающей реализуемого множества портфелей тогда и только тогда, когда он находится в точке касания линии, исходящей из точки  $c$  на оси  $y$ , с реализуемым множеством. Такой портфель должен доставлять максимум или минимум отношению  $\frac{x(R-c)}{\sigma^2(x)}$ , где  $x(R-c)$  — скалярное произведение, выражающее средний избыточный над  $c$  доход, а  $\sigma^2(x)$  — дисперсия портфеля. Пусть максимальное (или минимальное) значение этого отношения равно  $\lambda$ . Тогда наш портфель должен удовлетворять соотношению

$$\frac{x(R-c)}{\sigma^2(x)} = \lambda \Rightarrow x(R-c) = \sigma^2(x)\lambda = xSx^T\lambda.$$

Пусть  $h$  — некоторый актив; продифференцируем последнее соотношение по  $x_h$ . В результате получим  $\overline{R_h} - c = Sx^T\lambda$ . Записывая  $z_h = \lambda x_h$ , видим, что портфель является эффективным в том и только в том случае, если он является решением системы  $\overline{R} - c = Sz$ . Нормирование вектора  $z$  для приведения суммы его координат к единице дает окончательный результат.

**Теорема 2.** Выпуклая линейная комбинация любых двух портфелей на огибающей также принадлежит огибающей реализуемого множества.

**Доказательство.** Пусть  $x$  и  $y$  — портфели, принадлежащие огибающей. По теореме 1 отсюда следует, что существуют два вектора,  $z_x$  и  $z_y$ , а также две константы,  $c_x$  и  $c_y$ , такие, что

- $x$  — нормированный на единицу вектор  $z_x$ , т.е.  $x_i = \frac{z_{xi}}{\sum_h z_{xh}}$ , а  $y$  — нормированный на единицу вектор  $z_y$ ;
- выполняются соотношения  $\overline{R} - c_x = Sz_x$  и  $\overline{R} - c_y = Sz_y$ .

Далее, поскольку  $z$  доставляет максимум отношению  $\frac{z(R-c)}{\sigma^2(z)}$ , максимум также будет давать и тот же вектор, нормированный каким-либо образом. Поэтому без потери общности можно полагать, что сумма компонент  $z$  равна 1.

Отсюда следует, что для любого действительного числа  $a$  портфель  $az_x + (1-a)z_y$  является решением системы  $\overline{R} - [ac_x + (1-a)c_y] = Sz$ . Утверждение теоремы доказано.

**Теорема 3.** Пусть  $y$  — портфель, лежащий на огибающей множества  $N$  активов. Тогда для любого другого портфеля  $x$  (включая, возможно, и портфель, состоящий всего из одного актива) существует константа  $c$ , такая, что выполняется следующее соотношение между средним ожидаемым доходом с портфеля  $x$  и средним ожидаемым доходом с портфеля  $y$ :

$$E(r_x) = c + \beta_x [E(r_y) - c],$$

где  $\beta_x = \frac{\text{Ковар}(x,y)}{\sigma_y^2}$ .

Более того,  $c = E(r_z)$ , где  $z$  — произвольный портфель, для которого  $\text{Ковар}(z, y) = 0$ .

**Доказательство.** Пусть  $y$  — некоторый портфель на огибающей, а  $x$  — другой произвольный портфель. Полагаем, что  $x$  и  $y$  представляют собой векторы-столбцы. Следует заметить, что

$$\beta_x \equiv \frac{\text{Ковар}(x, y)}{\sigma_y^2} = \frac{x^T S y}{y^T S y}.$$

Поскольку  $y$  лежит на огибающей, мы знаем, что существует вектор  $w$  и константа  $c$ , являющиеся решением системы  $S w = R - c$ , и что  $y = w / \sum_i w_i = w / a$ .

Подставляя это равенство в выражение для  $\beta_x$ , получаем

$$\beta_x = \frac{\text{Ковар}(x, y)}{\sigma_y^2} = \frac{x^T S y}{y^T S y} = \frac{x^T (R - c) / a}{y^T (R - c) / a} = \frac{x^T (R - c)}{y^T (R - c)}.$$

Далее заметим, что поскольку  $\sum_i x_i = 1$ , отсюда следует, что  $x^T I (R - c) = E(r_x) - c$  и  $y^T I (R - c) = E(r_y) - c$ . Из этого соотношения получаем

$$\beta_x = \frac{E(r_x) - c}{E(r_y) - c}.$$

Это можно переписать в виде

$$E(r_x) = c + \beta_x [E(r_y) - c].$$

Для завершения доказательства предположим, что  $z$  — портфель, имеющий нулевую ковариацию с  $y$ . Тогда из предыдущих результатов следует  $c = E(r_z)$ . Утверждение теоремы доказано.

**Теорема 4.** Если в дополнение к  $N$  подверженным риску активам существует безрисковый актив с доходом  $r_f$ , то выполняется стандартное соотношение *линии рынка ценных бумаг*:

$$E(r_x) = r_f + \beta_x [E(r_y) - r_f],$$

где  $\beta_x = \frac{\text{Ковар}(x, M)}{\sigma_M^2}$ .

**Доказательство.** Если существует безрисковая ставка дохода, то касательная к эффективной границе, проведенная от ее значения на оси  $y$ , лежит выше всех остальных реализуемых портфелей. Назовем точку касания на эффективной границе  $M$ ; отсюда непосредственно следует утверждение теоремы.

*Примечание.* Еще раз напомним, что выражение “рыночный портфель” в данном случае означает “портфель, являющийся рыночным в отношении совокупности  $N$  активов”.

**Теорема 5.** Предположим, существует портфель  $y$ , такой, что для любого портфеля  $x$  выполняется следующее соотношение:

$$E(r_x) = c + \beta_x [E(r_y) - c], \quad \beta_x = \frac{\text{Ковар}(x, y)}{\sigma_y^2}.$$

Тогда портфель  $y$  принадлежит огибающей.

**Доказательство.** Подставляя определение  $\beta_x$ , получаем, что для любого портфеля  $x$  выполняется следующее соотношение:

$$\frac{x^T S y}{\sigma_y^2} = \frac{x^T R - c}{y^T R - c}.$$

Пусть  $x$  — вектор, составленный из одного только первого рискового актива:  $x = \{1, 0, \dots, 0\}$ . Тогда из предыдущего уравнения получаем

$$S_1 y \frac{y^T R - c}{\sigma_y^2} = E(r_1) - c.$$

Перепишем это в виде

$$S_1 a y = E(r_1) - c,$$

где  $S_1$  — первая строка ковариационной матрицы  $S$ . Заметим, что  $a = \frac{y^T R - c}{\sigma_y^2}$  — это константа, значение которой не зависит от вектора  $x$ . Если выбрать  $x$  состоящим из одного  $i$ -го подверженного риску актива, то получим

$$S_i a y = E(r_i) - c.$$

Таким образом, доказано, что вектор  $z = a y$  является решением системы  $Sz = R - c$ ; поэтому по теореме 1 нормированный вектор  $z$  принадлежит огибающей. Но нормирование вектора  $z$  как раз и дает вектор  $y$ .



---

# 10 Расчет “бета” и линии рынка ценных бумаг

---

## 10.1. Введение

В этой главе рассматриваются некоторые типичные данные о рынке капитала и выполняется тестовая проверка ЦМРК (ценовой модели рынка капитала). Нам необходимо будет рассчитать “бета” для набора активов, а затем вывести уравнение линии рынка ценных бумаг (ЛРЦБ). Упомянутая проверка — самый простой тест из всех возможных для ЦМРК. Существует огромное количество книг, в которых рассматриваются всевозможные статистические и методологические ловушки ЦМРК. Изучение этих вопросов рекомендуется начинать с учебников Elton, Gruber (1995) и Naugen (1997).

---

## 10.2. Тестирование ЦМРК

Тестирование ЦМРК будет продемонстрировано на простом численном примере, в котором используются те же данные, что и в главе 8. Пример начинается со ставок дохода по шести ценным бумагам и портфелю S&P 500. В качестве первого этапа анализа этих данных и тестирования ЦМРК рассчитаем *средний доход* и “бета” для каждой акции с использованием следующих формул:

Средний доход от  $i$ -й акции = СРЗНАЧ(доходы от  $i$ -й акции, 1972–81),

$$\beta_i = \frac{\text{КОВАР(доходы от } i\text{-й акции, доходы по S\& P500)}}{\text{ДИСПР(доходы по S\& P500)}}.$$

Здесь СРЗНАЧ (Average), КОВАР (Covar) и ДИСПР (Varp) — функции Excel над векторами-столбцами доходов<sup>1</sup>. Вычисление этих статистик дает результаты, показанные далее в таблице. Обратите внимание, что  $\beta_{SP500} = 1$ , как и должно быть, если S&P 500 является рыночным портфелем. Заметим также, что вместо вычисления  $\beta$  с помощью функций КОВАР и ДИСПР можно воспользоваться функцией НАКЛОН (Slope).

---

<sup>1</sup> Как говорилось в главах 7 и 9, в Excel есть две функции для вычисления дисперсии: ДИСП(массив) дает дисперсию выборки, а ДИСПР(массив) — дисперсию генеральной совокупности. Мы здесь используем вторую функцию в силу причин, рассмотренных в главе 7.

|    | A       | B                                                  | C       | D       | E       | F       | G       | H       |
|----|---------|----------------------------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 3  |         | AMR                                                | BS      | GE      | HR      | MO      | UK      | SP500   |
| 4  | 1974    | -0,3505                                            | -0,1154 | -0,4246 | -0,2107 | -0,0758 | 0,2331  | -0,2647 |
| 5  | 1975    | 0,7083                                             | 0,2472  | 0,3719  | 0,2227  | 0,0213  | 0,3569  | 0,3720  |
| 6  | 1976    | 0,7329                                             | 0,3665  | 0,2550  | 0,5815  | 0,1276  | 0,0781  | 0,2384  |
| 7  | 1977    | -0,2034                                            | -0,4271 | -0,0490 | -0,0938 | 0,0712  | -0,2721 | -0,0718 |
| 8  | 1978    | 0,1663                                             | -0,0452 | -0,0573 | 0,2751  | 0,1372  | -0,1346 | 0,0656  |
| 9  | 1979    | -0,2659                                            | 0,0158  | 0,0898  | 0,0793  | 0,0215  | 0,2254  | 0,1844  |
| 10 | 1980    | 0,0124                                             | 0,4751  | 0,3350  | -0,1894 | 0,2002  | 0,3657  | 0,3242  |
| 11 | 1981    | -0,0264                                            | -0,2042 | -0,0275 | -0,7427 | 0,0913  | 0,0479  | -0,0491 |
| 12 | 1982    | 1,0642                                             | -0,1493 | 0,6968  | -0,2615 | 0,2243  | 0,0456  | 0,2141  |
| 13 | 1983    | 0,1942                                             | 0,3680  | 0,3110  | 1,8682  | 0,2066  | 0,2640  | 0,2251  |
| 14 |         |                                                    |         |         |         |         |         |         |
| 15 | Среднее | 0,2032                                             | 0,0531  | 0,1501  | 0,1529  | 0,1025  | 0,1210  | 0,1238  |
| 16 | Бета    | 1,4820                                             | 1,0840  | 1,3107  | 1,2991  | 0,2622  | 0,4939  | 1,0000  |
| 17 |         |                                                    |         |         |         |         |         |         |
| 18 |         | =НАКЛОН(B4:B13,\$H\$4:\$H\$13)                     |         |         |         |         |         |         |
| 19 |         | =КОВАР(B4:B13,\$H\$4:\$H\$13)/VARP(\$H\$4:\$H\$13) |         |         |         |         |         |         |
| 20 |         |                                                    |         |         |         |         |         |         |
| 21 |         |                                                    |         |         |         |         |         |         |

Для построения линии рынка ценных бумаг ЦМРК принимается, что средний доход от каждой ценной бумаги линейно связан с ее показателем “бета”. Предполагая, что данные о прошлых доходах отражают распределение ожидаемого в будущем дохода, принимаем  $E(R_i) = \alpha + \beta_i \Pi + \varepsilon_i$ . На втором этапе тестирования ЦМРК мы исследуем эту гипотезу, составляя регрессию средних доходов по  $\beta$ .

В Excel имеется несколько способов для вывода результатов регрессионного анализа. Самый простой способ — воспользоваться функциями ОТРЕЗОК (Intercept), НАКЛОН (Slope) и КВПИРСОН (Rsqr), выдающими стандартные результаты по методу наименьших квадратов.

|    | A                         | B      | C                              | D | E | F |
|----|---------------------------|--------|--------------------------------|---|---|---|
| 23 | Регрессия средних по бета |        |                                |   |   |   |
| 24 | Отрезок                   | 0,0766 | <-- =ОТРЕЗОК(B15:G15,B16:G16)  |   |   |   |
| 25 | Наклон                    | 0,0545 | <-- =НАКЛОН(B15:G15,B16:G16)   |   |   |   |
| 26 | R-квадрат                 | 0,2793 | <-- =КВПИРСОН(B15:G15,B16:G16) |   |   |   |

В этих результатах предполагается, что ЛРЦБ задается соотношением  $E(R_i) = \alpha + \beta_i \Pi$ , где  $\alpha = 0,0766$  и  $\Pi = 0,0545$ . Величина  $R^2$  регрессии (доля изменчивости средних величин, объясняемая показателем  $\beta$ ) составляет 28%.

Можно также воспользоваться командой Сервис⇒Анализ данных⇒Регрессия (Tools⇒Data Analysis⇒Regression) и построить таблицу, выходных данных в которой будет гораздо больше. Но этот способ работает только тогда, когда данные организованы в столбик, поэтому вначале перепишем их в таком виде, как показано ниже.

|    | C       | D      |
|----|---------|--------|
| 29 | Среднее | Бета   |
| 30 | 0,2032  | 1,4820 |
| 31 | 0,0531  | 1,0840 |
| 32 | 0,1501  | 1,3107 |
| 33 | 0,1529  | 1,2991 |
| 34 | 0,1025  | 0,2622 |
| 35 | 0,1210  | 0,4939 |

В результате получается примерно следующее.

|    | A                        | B            | C                  | D            | E          | F            | G           | H            | I             |
|----|--------------------------|--------------|--------------------|--------------|------------|--------------|-------------|--------------|---------------|
| 1  | Вывод ИТОГОВ             |              |                    |              |            |              |             |              |               |
| 2  |                          |              |                    |              |            |              |             |              |               |
| 3  | Регрессионная статистика |              |                    |              |            |              |             |              |               |
| 4  | Множественный R          | 0,5285       |                    |              |            |              |             |              |               |
| 5  | R-квадрат                | 0,2793       |                    |              |            |              |             |              |               |
| 6  | Нормированный R-квадрат  | 0,0991       |                    |              |            |              |             |              |               |
| 7  | Стандартная ошибка       | 0,0485       |                    |              |            |              |             |              |               |
| 8  | Наблюдения               | 6            |                    |              |            |              |             |              |               |
| 9  |                          |              |                    |              |            |              |             |              |               |
| 10 | Дисперсионный анализ     |              |                    |              |            |              |             |              |               |
| 11 |                          | df           | SS                 | MS           | F          | Значимость F |             |              |               |
| 12 | Регрессия                | 1            | 0,0036             | 0,0036       | 1,5503     | 0,2811       |             |              |               |
| 13 | Остаток                  | 4            | 0,0094             | 0,0023       |            |              |             |              |               |
| 14 | Итого                    | 5            | 0,0130             |              |            |              |             |              |               |
| 15 |                          |              |                    |              |            |              |             |              |               |
| 16 |                          | Коэффициенты | Стандартная ошибка | t-статистика | P-Значение | Нижние 95%   | Верхние 95% | Нижние 95,0% | Верхние 95,0% |
| 17 | Y-пересечение            | 0,0766       | 0,0476             | 1,6094       | 0,1828     | -0,0555      | 0,2087      | -0,0555      | 0,2087        |
| 18 | Переменная X 1           | 0,0545       | 0,0438             | 1,2451       | 0,2811     | -0,0670      | 0,1761      | -0,0670      | 0,1761        |

Как стандартное отклонение, так и  $t$ -статистика показывают, что и  $\alpha$ , и  $\Pi$  незначительно отличаются от нуля.

Приведенные выше данные были получены путем выполнения следующей команды:

### 10.3. Тестирование ЦМРК: общие правила

В предыдущем разделе демонстрировался конкретный численный пример, в котором мы на примере некоторых данных тестировали ЦМРК. А в этом разделе мы охарактеризуем то, что мы делали в разделе 10.2.

Тестирование ЦМРК начинается с данных о доходности набора активов. Выполняются следующие этапы анализа.

- Определяется кандидат на роль рыночного портфеля  $M$ . В предыдущем примере на роль рыночного портфеля претендовал индекс Standard & Poor 500 (SP500). Это критически важный этап. В принципе “истинный” рыночный портфель должен, как было указано в главе 9, содержать все подверженные

риску активы в долях, пропорциональных их рыночному курсу. Очевидно, просчитать этот теоретический рыночный портфель невозможно, и поэтому нам остается обходиться суррогатом. Как мы увидим в следующих двух разделах, теоремы из главы 9 могут существенно прояснить влияние выбора суррогатного рыночного портфеля на характеристики нашего регрессионного анализа ЦМРК.

- Для каждого из рассматриваемых активов определяется показатель  $\beta$ .
- Составляется регрессия среднего дохода по соответствующим  $\beta$ ; на этом этапе мы получаем линию рынка ценных бумаг (ЛРЦБ).

Наш “тест” дал следующую ЛРЦБ:

$$E(r_i) = 7,66\% + 5,45\%\beta_i, R^2 = 27,93\%.$$

Если отсекаемый отрезок регрессии является безрисковой ставкой дохода (или доходом от портфеля с нулевым “бета”), то средний ожидаемый доход на рынке составит  $E(r_m) = 7,66\% + 5,45\% = 13,11\%$ .

#### 10.4. Причины получения неблагоприятных результатов

Эксперимент, проведенный в разделе 10.3, — проверка ЦМРК путем построения линии рынка ценных бумаг, — дал не очень-то впечатляющий результат. В нем мало что говорит в пользу ЛРЦБ: ни  $R^2$  регрессии, ни  $t$ -статистика не позволяют уверенно сказать о существовании взаимосвязи между ожидаемым доходом и “бета” портфеля.

Существует несколько возможных причин для такого неблагоприятного исхода.

1. Возможно, сама ЦМРК в данном случае неприменима. Это может случиться по ряду причин, перечисленных ниже.
  - Возможно, на рынке введены ограничения на продажу активов авансом. В нашем выводе ЦМРК (см. главу 9) предполагается, что таких ограничений нет. Это предположение, очевидно, не вполне соответствует действительности. Расчет эффективных портфелей при запрете на продажу авансом рассматривается в главе 11. В этом случае не существует простой взаимосвязи (наподобие доказанной в главе 9) между доходами с активов и их показателями “бета”. В частности, при запрете на продажу авансом нет никаких оснований предполагать выполнение ЛРЦБ.
  - Возможно, разные действующие лица рынка не сходятся в оценке вероятностей или величин доходов с активов, их дисперсий и ковариаций.

2. Возможно, ЦМРК имеет место только для портфелей, но не для отдельных активов.
3. Возможно, наш набор активов недостаточно велик. В конце концов, в ЦМРК подразумевается учет *всех подверженных риску активов*, тогда как мы выбрали для примера только небольшое подмножество всего их множества. В литературе по тестированию ЦМРК приведены тесты, в которых множество подверженных риску активов расширяется за счет облигаций, недвижимого имущества и даже таких специализированных недиверсифицируемых “активов”, как высококвалифицированные кадры (“человеческий капитал”).
4. Возможно, “рыночный портфель” не является эффективным портфелем. Такая возможность предусматривается в расчетах главы 9 по эффективным портфелям, и именно такое предположение будет рассматриваться в следующем разделе.

---

## 10.5. Неэффективность “рыночного портфеля”

В ходе расчета ЛРЦБ в разделах 10.2 и 10.3 выполнялась регрессия среднего дохода с каждого актива по доходам с рыночного портфеля. Теоремы главы 9 об эффективных портфелях наводят на мысль, что наша попытка получить разумный результат провалилась из-за того, что портфель S&P 500 не является эффективным по отношению к набору из шести выбранных нами активов. Из теоремы 3 главы 9 следует, что если бы мы решили выполнять регрессию доходов с наших активов по портфелю, являющемуся эффективным по отношению к самому множеству активов, то величина  $R^2$  оказалась бы равной 100%. Из теоремы 5 главы 9 следует, что если  $R^2$  составляет 100%, то портфель, по которому выполняется регрессия доходов, обязательно является эффективным по отношению к множеству активов. В данном разделе приводится расчетный иллюстративный пример к утверждениям этих теорем.

### 10.5.1. Эффективен ли S&P 500?

Начнем с вопроса о том, является ли портфель S&P 500 действительно эффективным по отношению к шести выбранным нами активам. В главе 8 мы рассчитывали ковариационную матрицу для этого набора данных. Сейчас же, следуя методикам из главы 9, мы можем построить следующую таблицу для поиска двух эффективных портфелей.

|    | A                      | B                                 | C        | D       | E                                                   | F      | G       | H       | I         | J       | K         | L         |
|----|------------------------|-----------------------------------|----------|---------|-----------------------------------------------------|--------|---------|---------|-----------|---------|-----------|-----------|
| 3  | Ковариационная матрица |                                   |          |         |                                                     |        |         |         |           |         | Среднее   |           |
| 4  |                        |                                   |          |         |                                                     |        |         |         |           |         | минус     |           |
| 5  |                        |                                   | AMR      | BS      | GE                                                  | HR     | MO      | UK      |           | Среднее | константа |           |
| 6  |                        | AMR                               | 0,2060   | 0,0375  | 0,1077                                              | 0,0493 | 0,0208  | 0,0059  |           | 0,2032  | 0,1032    |           |
| 7  |                        | BS                                | 0,0375   | 0,0790  | 0,0355                                              | 0,1028 | 0,0089  | 0,0406  |           | 0,0531  | -0,0469   |           |
| 8  |                        | GE                                | 0,1077   | 0,0355  | 0,0867                                              | 0,0443 | 0,0194  | 0,0148  |           | 0,1501  | 0,0501    |           |
| 9  |                        | HR                                | 0,0493   | 0,1028  | 0,0443                                              | 0,4435 | 0,0193  | 0,0274  |           | 0,1529  | 0,0529    |           |
| 10 |                        | MO                                | 0,0208   | 0,0089  | 0,0194                                              | 0,0193 | 0,0083  | -0,0015 |           | 0,1025  | 0,0025    |           |
| 11 |                        | UK                                | 0,0059   | 0,0406  | 0,0148                                              | 0,0274 | -0,0015 | 0,0392  |           | 0,1210  | 0,0210    |           |
| 12 |                        |                                   |          |         |                                                     |        |         |         |           |         |           |           |
| 13 |                        |                                   |          |         |                                                     |        |         |         |           |         |           |           |
| 14 |                        | Расчет двух эффективных портфелей |          |         |                                                     |        |         |         |           |         |           |           |
| 15 |                        |                                   |          |         |                                                     |        |         |         | Константа | 10%     |           |           |
| 16 |                        |                                   | z        | x       |                                                     |        |         |         |           | z       | y         |           |
| 17 | =МУМНОЖ(МОБР(С         |                                   | 5,9969   | 0,1065  |                                                     |        |         |         |           | 1,5261  | 0,2036    |           |
| 18 | 6:Н11),J6:J11)         |                                   | -15,4455 | -0,2743 |                                                     |        |         |         |           | -5,2570 | -0,7014   |           |
| 19 |                        |                                   | -16,7869 | -0,2982 | <-- =С19/СУММ(\$С\$17:\$С\$22)                      |        |         |         |           | -2,0059 | -0,2677   |           |
| 20 |                        |                                   | 0,9185   | 0,0163  |                                                     |        |         |         |           | 0,7113  | 0,0949    |           |
| 21 |                        |                                   | 55,6285  | 0,9881  |                                                     |        |         |         |           | 6,2721  | 0,8369    |           |
| 22 |                        |                                   | 25,9885  | 0,4616  |                                                     |        |         |         |           | 6,2480  | 0,8337    |           |
| 23 |                        |                                   |          |         |                                                     |        |         |         |           |         |           |           |
| 24 |                        | Среднее                           |          | 0,1220  | <-- =МУМНОЖ(ТРАНСП(D17:D22),J6:J11)                 |        |         |         |           |         | 0,1651    | Среднее   |
| 25 |                        | Дисперсия                         |          | 0,0022  | <-- =МУМНОЖ(МУМНОЖ(ТРАНСП(D17:D22),С6:Н11),D17:D22) |        |         |         |           |         | 0,0087    | Дисперсия |
| 26 |                        | Сигма                             |          | 0,0465  | <-- =КОРЕНЬ(E25)                                    |        |         |         |           |         | 0,0932    | Сигма     |
| 27 |                        | Ковариация                        |          | 0,0029  | <-- =МУМНОЖ(МУМНОЖ(ТРАНСП(D17:D22),С6:Н11),K17:K22) |        |         |         |           |         |           |           |

В этой таблице  $x$  и  $y$  — два эффективных портфеля; согласно теореме 2 главы 9, выпуклая линейная комбинация этих портфелей образует эффективную границу.

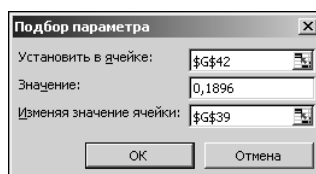
Мы намерены построить таблицу данных для расчета эффективной границы. Однако вначале вычислим средний доход и стандартное отклонение портфеля S&P 500.

|    | N                   | O       | P       | Q                         | R | S |
|----|---------------------|---------|---------|---------------------------|---|---|
| 2  | Данные о доходности |         |         |                           |   |   |
| 3  |                     |         | SP500   |                           |   |   |
| 4  |                     | 1974    | -0,2647 |                           |   |   |
| 5  |                     | 1975    | 0,3720  |                           |   |   |
| 6  |                     | 1976    | 0,2384  |                           |   |   |
| 7  |                     | 1977    | -0,0718 |                           |   |   |
| 8  |                     | 1978    | 0,0656  |                           |   |   |
| 9  |                     | 1979    | 0,1844  |                           |   |   |
| 10 |                     | 1980    | 0,3242  |                           |   |   |
| 11 |                     | 1981    | -0,0491 |                           |   |   |
| 12 |                     | 1982    | 0,2141  |                           |   |   |
| 13 |                     | 1983    | 0,2251  |                           |   |   |
| 14 |                     |         |         |                           |   |   |
| 15 |                     | Среднее | 0,1238  | <-- =СРЗНАЧ(P4:P13)       |   |   |
| 16 |                     | Сигма   | 0,1896  | <-- =СТАНДОТКЛОНП(P4:P13) |   |   |

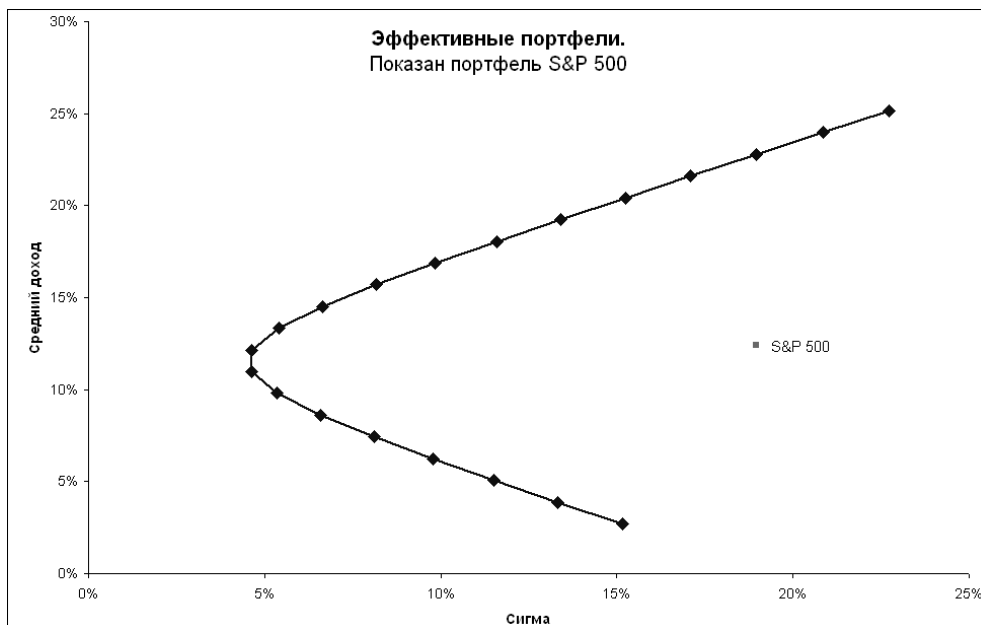
Таблица, построенная нами (обведена рамкой), демонстрирует расчет для одиночного портфеля, а также результаты для портфеля S&P 500.

|    | B                          | C                          | D      | E                                      | F        | G      | H       | I       | J                            | K | L |
|----|----------------------------|----------------------------|--------|----------------------------------------|----------|--------|---------|---------|------------------------------|---|---|
| 29 |                            | Расчет для одного портфеля |        |                                        |          |        |         |         |                              |   |   |
| 30 |                            | Доля x                     | 0,2500 |                                        |          |        |         |         |                              |   |   |
| 31 |                            | Доля y                     | 0,7500 |                                        |          |        |         |         |                              |   |   |
| 32 |                            |                            |        |                                        |          |        |         |         |                              |   |   |
| 33 |                            | Среднее                    | 0,1543 | <-- =D30*D24+D31*K24                   |          |        |         |         |                              |   |   |
| 34 |                            | Дисперсия                  | 0,0061 | <-- =D30*2*D25+D31*2*K25+2*D30*D31*D27 |          |        |         |         |                              |   |   |
| 35 |                            | Сигма                      | 0,0783 | <-- =КОРЕНЬ(D34)                       |          |        |         |         |                              |   |   |
| 36 |                            |                            |        |                                        |          |        |         |         |                              |   |   |
| 37 |                            |                            |        |                                        | Доля     |        |         | Среднее |                              |   |   |
| 38 |                            |                            |        |                                        | портфеля | Сигма  | Среднее | SP500   |                              |   |   |
| 39 | Шаг                        | 0,2737                     |        |                                        |          | 0,0783 | 0,1543  |         | <-- Заголовок таблицы данных |   |   |
| 40 |                            |                            |        |                                        | -2,0000  | 0,2273 | 0,2514  |         |                              |   |   |
| 41 | Ячейка D39 - это изменение |                            |        |                                        | -1,7263  | 0,2084 | 0,2396  |         |                              |   |   |
| 42 | в доле портфеля в таблице  |                            |        |                                        | -1,4526  | 0,1896 | 0,2278  | 0,1238  |                              |   |   |
| 43 | данных справа.             |                            |        |                                        | -1,1789  | 0,1709 | 0,2160  |         |                              |   |   |
| 44 |                            |                            |        |                                        | -0,9052  | 0,1523 | 0,2042  |         |                              |   |   |
| 45 |                            |                            |        |                                        | -0,6316  | 0,1340 | 0,1924  |         |                              |   |   |
| 46 |                            |                            |        |                                        | -0,3579  | 0,1160 | 0,1806  |         |                              |   |   |
| 47 |                            |                            |        |                                        | -0,0842  | 0,0985 | 0,1688  |         |                              |   |   |
| 48 |                            |                            |        |                                        | 0,1895   | 0,0818 | 0,1570  |         |                              |   |   |
| 49 |                            |                            |        |                                        | 0,4632   | 0,0665 | 0,1451  |         |                              |   |   |
| 50 |                            |                            |        |                                        | 0,7369   | 0,0540 | 0,1333  |         |                              |   |   |
| 51 |                            |                            |        |                                        | 1,0106   | 0,0464 | 0,1215  |         |                              |   |   |
| 52 |                            |                            |        |                                        | 1,2843   | 0,0462 | 0,1097  |         |                              |   |   |
| 53 |                            |                            |        |                                        | 1,5580   | 0,0535 | 0,0979  |         |                              |   |   |
| 54 |                            |                            |        |                                        | 1,8317   | 0,0659 | 0,0861  |         |                              |   |   |
| 55 |                            |                            |        |                                        | 2,1054   | 0,0811 | 0,0743  |         |                              |   |   |
| 56 |                            |                            |        |                                        | 2,3790   | 0,0977 | 0,0625  |         |                              |   |   |
| 57 |                            |                            |        |                                        | 2,6527   | 0,1152 | 0,0507  |         |                              |   |   |
| 58 |                            |                            |        |                                        | 2,9264   | 0,1332 | 0,0389  |         |                              |   |   |
| 59 |                            |                            |        |                                        | 3,2001   | 0,1515 | 0,0270  |         |                              |   |   |

В ячейке Шаг указана разность между долями активов в портфеле, т.е. если вначале берется доля актива  $x$ , равная  $-2$ , то следующая доля равна  $-2,000 + \text{шаг} = -1,726$ . Для нахождения величины этого шага использовалось средство Excel Подбор параметра (Goal Seek): одно из стандартных отклонений портфелей должно было быть равно стандартному отклонению S&P 500.



Затем мы поместили средний доход по S&P 500, равный 0,1238, в отдельный столбец. Все эти операции в итоге дали результат в виде графика эффективной границы и портфеля S&P 500.



### 10.5.2. Перерасчет ЛРЦБ с эффективным портфелем

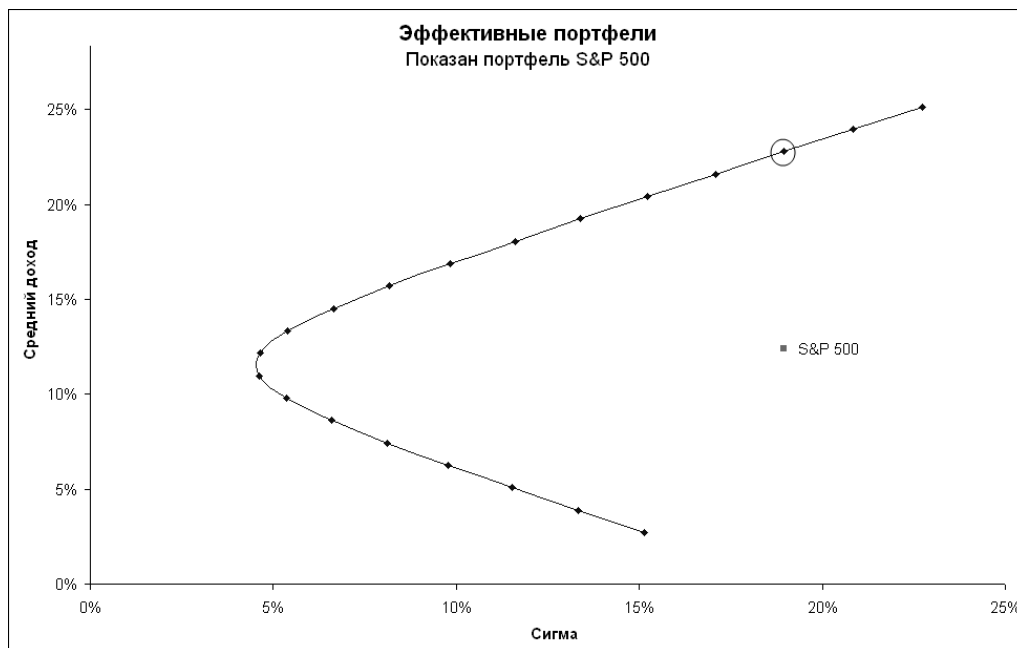
На приведенном выше графике показано множество эффективных портфелей, образованных шестью активами, а также портфель S&P 500, совершенно очевидно являющийся *неэффективным* по отношению к данному набору активов. Из теорем главы 9 следует, что в этом случае ЛРЦБ *не может* иметь показатель  $R^2$ , равный 100%. Из теоремы 3 главы 9 также следует, что если выполнить регрессию по эффективному портфелю, то получим  $R^2 = 100\%$ . В этом разделе мы покажем правильность этого вывода на численном примере.

Начнем с поиска эффективного портфеля с тем же стандартным отклонением, что и у S&P 500. Этот портфель можно взять из приведенной ранее таблицы данных: у него доля вложенных в  $x$  средств составляет  $-1,4526$ , а в  $y$  соответственно  $2,4526$ . Его статистические характеристики для наглядности приведены ниже.

|    | C         | D       |
|----|-----------|---------|
| 30 | Доля $x$  | -1,4526 |
| 31 | Доля $y$  | 2,4526  |
| 32 |           |         |
| 33 | Среднее   | 0,2278  |
| 34 | Дисперсия | 0,0360  |
| 35 | Сигма     | 0,1896  |

Этот портфель обведен кружочком на следующем графике.





### 10.5.3. Вывод ЛРЦБ

Теперь проведем следующий эксперимент: заново выведем ЛРЦБ, используя в качестве “рыночного портфеля” тот эффективный портфель, который был найден в разделе 10.5.2. Для простоты будем называть его “рыночным” портфелем, всегда заключая данный термин в кавычки<sup>2</sup>. “Рыночный” портфель составлен из доли  $-1,4526$  портфеля  $x$  и  $2,4526$  портфеля  $y$ . Поскольку доли активов в портфелях  $x$  и  $y$  уже известны, легко определить состав “рыночного” портфеля.

|    | C         | D       | E        | F        | G         | H                        | I | J |
|----|-----------|---------|----------|----------|-----------|--------------------------|---|---|
| 30 | Доля $x$  | -1,4526 |          |          |           |                          |   |   |
| 31 | Доля $y$  | 2,4526  |          |          |           |                          |   |   |
| 32 |           |         |          |          |           |                          |   |   |
| 33 | Среднее   | 0,2278  |          |          |           |                          |   |   |
| 34 | Дисперсия | 0,0360  |          |          |           |                          |   |   |
| 35 | Сигма     | 0,1896  |          |          |           |                          |   |   |
| 36 |           |         |          |          |           |                          |   |   |
| 37 |           |         | Портфель | Портфель | “Рыночн.” |                          |   |   |
| 38 |           |         | $x$      | $y$      | портфель  |                          |   |   |
| 39 |           | AMR     | 0,1065   | 0,2036   | 0,3447    | <-- =D\$30*E39+D\$31*F39 |   |   |
| 40 |           | BS      | -0,2743  | -0,7014  | -1,3219   |                          |   |   |
| 41 |           | GE      | -0,2982  | -0,2677  | -0,2233   |                          |   |   |
| 42 |           | HR      | 0,0163   | 0,0949   | 0,2091    |                          |   |   |
| 43 |           | MO      | 0,9881   | 0,8369   | 0,6173    |                          |   |   |
| 44 |           | UK      | 0,4616   | 0,8337   | 1,3741    |                          |   |   |

<sup>2</sup> Мы, разумеется, также не предполагаем, что S&P 500 является истинным рыночным портфелем.

Более того, поскольку нам известен доход по каждому из шести активов за 1972–1981 гг., мы можем вывести доход от “рыночного” портфеля за каждый из этих лет, умножив доход от отдельного актива на его долю в “рыночном” портфеле:

$$\text{Доход от “рыночного” портфеля за год } t = 0,3447 \cdot AMR - 1,3219 \cdot BS - \\ - 0,2233 \cdot GE + 0,2091 \cdot HR + 0,6173 \cdot MO + 1,3741 \cdot UK$$

В приведенной далее таблице вычисляются эти доходы, а затем составляется регрессия среднего дохода от каждого актива по его  $\beta$  относительно “рыночного” портфеля.

|    | D                             | E                                                      | F                              | G       | H       | I       | J       | K | L                  | M | N | O |
|----|-------------------------------|--------------------------------------------------------|--------------------------------|---------|---------|---------|---------|---|--------------------|---|---|---|
| 47 |                               | ГОДОВЫЕ ДОХОДЫ ПО ШЕСТИ АКТИВАМ И “РЫНОЧНОМУ” ПОРТФЕЛЮ |                                |         |         |         |         |   |                    |   |   |   |
| 48 |                               |                                                        |                                |         |         |         |         |   |                    |   |   |   |
| 49 |                               | AMR                                                    | BS                             | GE      | HR      | MO      | UK      |   | “Рыночн. портфель” |   |   |   |
| 50 | 1974                          | -0,3505                                                | -0,1154                        | -0,4246 | -0,2107 | -0,0758 | 0,2331  |   | 0,3560             |   |   |   |
| 51 | 1975                          | 0,7083                                                 | 0,2472                         | 0,3719  | 0,2227  | 0,0213  | 0,3569  |   | 0,3845             |   |   |   |
| 52 | 1976                          | 0,7329                                                 | 0,3665                         | 0,2550  | 0,5815  | 0,1276  | 0,0781  |   | 0,0189             |   |   |   |
| 53 | 1977                          | -0,2034                                                | -0,4271                        | -0,0490 | -0,0938 | 0,0712  | -0,2721 |   | 0,1558             |   |   |   |
| 54 | 1978                          | 0,1663                                                 | -0,0452                        | -0,0573 | 0,2751  | 0,1372  | -0,1346 |   | 0,0872             |   |   |   |
| 55 | 1979                          | -0,2659                                                | 0,0158                         | 0,0898  | 0,0793  | 0,0215  | 0,2254  |   | 0,2070             |   |   |   |
| 56 | 1980                          | 0,0124                                                 | 0,4751                         | 0,3350  | -0,1894 | 0,2002  | 0,3657  |   | -0,1121            |   |   |   |
| 57 | 1981                          | -0,0264                                                | -0,2042                        | -0,0275 | -0,7427 | 0,0913  | 0,0479  |   | 0,2340             |   |   |   |
| 58 | 1982                          | 1,0642                                                 | -0,1493                        | 0,6968  | -0,2615 | 0,2243  | 0,0456  |   | 0,5550             |   |   |   |
| 59 | 1983                          | 0,1942                                                 | 0,3680                         | 0,3110  | 1,8682  | 0,2066  | 0,2640  |   | 0,3918             |   |   |   |
| 60 |                               |                                                        |                                |         |         |         |         |   |                    |   |   |   |
| 61 | Среднее                       | 0,2032                                                 | 0,0531                         | 0,1501  | 0,1529  | 0,1025  | 0,1210  |   | 0,2278             |   |   |   |
| 62 | Бета относительно “рыночного” |                                                        |                                |         |         |         |         |   |                    |   |   |   |
| 63 |                               | 0,7938                                                 | -0,4647                        | 0,3484  | 0,3716  | -0,0504 | 0,1043  |   | 1,0000             |   |   |   |
| 64 |                               |                                                        |                                |         |         |         |         |   |                    |   |   |   |
| 65 |                               |                                                        |                                |         |         |         |         |   |                    |   |   |   |
| 66 |                               |                                                        |                                |         |         |         |         |   |                    |   |   |   |
| 67 | Регрессия средних по бета     |                                                        |                                |         |         |         |         |   |                    |   |   |   |
| 68 | Отрезок                       | 0,1086                                                 | <-- =ОТРЕЗОК(E61:J61,E63:J63)  |         |         |         |         |   |                    |   |   |   |
| 69 | Наклон                        | 0,1193                                                 | <-- =НАКЛОН(E61:J61,E63:J63)   |         |         |         |         |   |                    |   |   |   |
| 70 | R-квадрат                     | 1,0000                                                 | <-- =КВПИРСОН(E61:J61,E63:J63) |         |         |         |         |   |                    |   |   |   |

Как видите, получен идеальный результат! Как утверждается в теореме 3 главы 9, при регрессии доходов от портфеля по их  $\beta$  относительно эффективного портфеля соблюдается точное линейное соотношение!

## 10.6. Настоящий рыночный портфель и тестирование ЦМРК

Если немного подумать, станет ясно, что хотя “рыночный” портфель из предыдущего раздела и является эффективным относительно наших шести ценных бумаг, он не может быть *истинным рыночным портфелем*, даже если бы указанные шесть бумаг представляли все на свете подверженные риску активы, поскольку Bethlehem Steel и General Electric входят в “рыночный” портфель с отрицательными долями участия. Разумеется, к реальному рыночному портфелю нужно выдвинуть хотя бы то требование, что все доли в нем должны быть *положительными*.

Ролл (Roll, 1977, 1978) предположил, что существует ровно один тест ЦМРК, а именно: получение ответа на вопрос “Является ли истинный рыночный портфель эффективным по среднему и дисперсии?”. Если ответ на этот вопрос поло-

жителен, тогда из теоремы 3 главы 9 следует, что между средним доходом каждого портфеля и его  $\beta$  имеет место линейное соотношение. В нашем небольшом примере мы можем пролить свет на этот запутанный вопрос, построив таблицу долей активов в портфелях на эффективной границе. Нам известно, что каждый эффективный портфель является линейной комбинацией  $x$  и  $y$  (по теореме 2 главы 9), и в следующей таблице наглядно показаны доли активов в эффективных портфелях.

|    | B                        | C        | D        | E        | F        | G        | H        |
|----|--------------------------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 3  | Два эффективных портфеля |          |          |          |          |          |          |
| 4  |                          | $x$      | $y$      |          |          |          |          |
| 5  | AMR                      | 0,1065   | 0,2036   |          |          |          |          |
| 6  | BS                       | -0,2743  | -0,7014  |          |          |          |          |
| 7  | GE                       | -0,2982  | -0,2677  |          |          |          |          |
| 8  | HR                       | 0,0163   | 0,0949   |          |          |          |          |
| 9  | MO                       | 0,9881   | 0,8369   |          |          |          |          |
| 10 | UK                       | 0,4616   | 0,8337   |          |          |          |          |
| 11 |                          |          |          |          |          |          |          |
| 12 |                          |          |          |          |          |          |          |
| 13 | Доли отдельных активов   |          |          |          |          |          |          |
| 14 | $x$                      | AMR      | BS       | GE       | HR       | MO       | UK       |
| 15 | -10                      | 1,1747   | (4,9725) | 0,0375   | 0,8809   | (0,6749) | 4,5543   |
| 16 | -9,5                     | 1,1262   | (4,7589) | 0,0222   | 0,8416   | (0,5993) | 4,3682   |
| 17 | -9                       | 1,0776   | (4,5454) | 0,0070   | 0,8023   | (0,5237) | 4,1822   |
| 18 | -8,5                     | 1,0290   | (4,3318) | (0,0083) | 0,7630   | (0,4481) | 3,9962   |
| 19 | -8                       | 0,9805   | (4,1183) | (0,0235) | 0,7237   | (0,3725) | 3,8102   |
| 20 | 0                        | 0,2036   | (0,7014) | (0,2677) | 0,0949   | 0,8369   | 0,8337   |
| 21 | 0,5                      | 0,1551   | (0,4879) | (0,2829) | 0,0556   | 0,9125   | 0,6476   |
| 22 | 1                        | 0,1065   | (0,2743) | (0,2982) | 0,0163   | 0,9881   | 0,4616   |
| 23 | 1,5                      | 0,0580   | (0,0608) | (0,3134) | (0,0230) | 1,0637   | 0,2756   |
| 24 | 2                        | 0,0094   | 0,1528   | (0,3287) | (0,0623) | 1,1392   | 0,0895   |
| 25 | 2,5                      | (0,0391) | 0,3663   | (0,3439) | (0,1016) | 1,2148   | (0,0965) |
| 26 | 3                        | (0,0877) | 0,5799   | (0,3592) | (0,1409) | 1,2904   | (0,2825) |
| 27 | 3,5                      | (0,1363) | 0,7934   | (0,3745) | (0,1802) | 1,3660   | (0,4685) |
| 28 | 4                        | (0,1848) | 1,0070   | (0,3897) | (0,2195) | 1,4416   | (0,6546) |
| 29 | 4,5                      | (0,2334) | 1,2205   | (0,4050) | (0,2588) | 1,5172   | (0,8406) |
| 30 | 5                        | (0,2819) | 1,4341   | (0,4202) | (0,2981) | 1,5928   | (1,0266) |
| 31 | 5,5                      | (0,3305) | 1,6476   | (0,4355) | (0,3374) | 1,6684   | (1,2127) |
| 32 | 6                        | (0,3790) | 1,8612   | (0,4507) | (0,3767) | 1,7440   | (1,3987) |
| 33 | 6,5                      | (0,4276) | 2,0747   | (0,4660) | (0,4160) | 1,8195   | (1,5847) |
| 34 | 7                        | (0,4761) | 2,2883   | (0,4813) | (0,4553) | 1,8951   | (1,7708) |
| 35 | 7,5                      | (0,5247) | 2,5018   | (0,4965) | (0,4946) | 1,9707   | (1,9568) |
| 36 | 8                        | (0,5732) | 2,7154   | (0,5118) | (0,5338) | 2,0463   | (2,1428) |
| 37 | 8,5                      | (0,6218) | 2,9289   | (0,5270) | (0,5731) | 2,1219   | (2,3289) |
| 38 | 9                        | (0,6704) | 3,1425   | (0,5423) | (0,6124) | 2,1975   | (2,5149) |
| 39 | 9,5                      | (0,7189) | 3,3560   | (0,5575) | (0,6517) | 2,2731   | (2,7009) |
| 40 | 10                       | (0,7675) | 3,5696   | (0,5728) | (0,6910) | 2,3487   | (2,8869) |
| 41 | 10,5                     | (0,8160) | 3,7831   | (0,5881) | (0,7303) | 2,4243   | (3,0730) |

Отрицательные доли здесь заключены в скобки, чтобы легче было выделить портфели с положительными долями всех активов. При внимательном взгляде на таблицу можно обнаружить, что каждый потенциальный “рыночный” портфель содержит по крайней мере один отрицательный коэффициент для одного из активов! Если бы наши шесть ценных бумаг составляли весь фондовый рынок, ЦМРК можно было бы выбросить.

## 10.7. Есть ли польза от ЦМРК

Так что же, можно засчитать себе поражение и совсем отбросить ЦМРК? Нет, не совсем.

- Во-первых, вполне возможно, что средние доходы приблизительно описываются их регрессией по “рыночному” портфелю. В этом альтернативном определении ЦМРК мы заявляем (не без оснований, как указано в сноске), что показатель  $\beta$  какого-либо актива (измеряющий степень зависимости доходов с актива от рыночной доходности) является важной мерой подверженности актива риску<sup>3</sup>.
- Во-вторых, ЦМРК можно использовать как нормативную методику по выбору портфелей. Как показано в приложении к главе 2, большие неспециализированные портфели хорошо описываются своими показателями “бета”, поэтому средний  $\beta$  хорошо диверсифицированного портфеля вполне может адекватно описывать уровень подверженности портфеля риску.

### Упражнение

В своей известной публикации Ролл (Roll, 1978) рассматривает тесты ЛРЦБ в контексте четырех активов.

|   | A                      | B    | C    | D    | E | F      |
|---|------------------------|------|------|------|---|--------|
| 3 | Ковариационная матрица |      |      |      |   | Доходы |
| 4 | 0,10                   | 0,02 | 0,04 | 0,05 |   | 0,06   |
| 5 | 0,02                   | 0,20 | 0,04 | 0,01 |   | 0,07   |
| 6 | 0,04                   | 0,04 | 0,40 | 0,10 |   | 0,08   |
| 7 | 0,05                   | 0,01 | 0,10 | 0,60 |   | 0,09   |

- Определите два эффективных портфеля в рамках этой модели из четырех активов.
- Предположим, рыночный портфель составлен из равных долей каждого актива (т.е. в рыночном портфеле используются весовые коэффициенты 0,25, 0,25, 0,25, 0,25). Рассчитайте соответствующую линию рынка ценных бумаг. Является ли такой портфель эффективным?
- Ролл утверждает, что следующие четыре портфеля являются эффективными.

|    | O       | P       | Q       | R        | S        |
|----|---------|---------|---------|----------|----------|
| 42 | Акция 1 | 0,59600 | 0,40700 | -0,04400 | -0,49600 |
| 43 | Акция 2 | 0,27621 | 0,31909 | 0,42140  | 0,52395  |
| 44 | Акция 3 | 0,07695 | 0,13992 | 0,29017  | 0,44076  |
| 45 | Акция 4 | 0,05083 | 0,13399 | 0,33242  | 0,53129  |

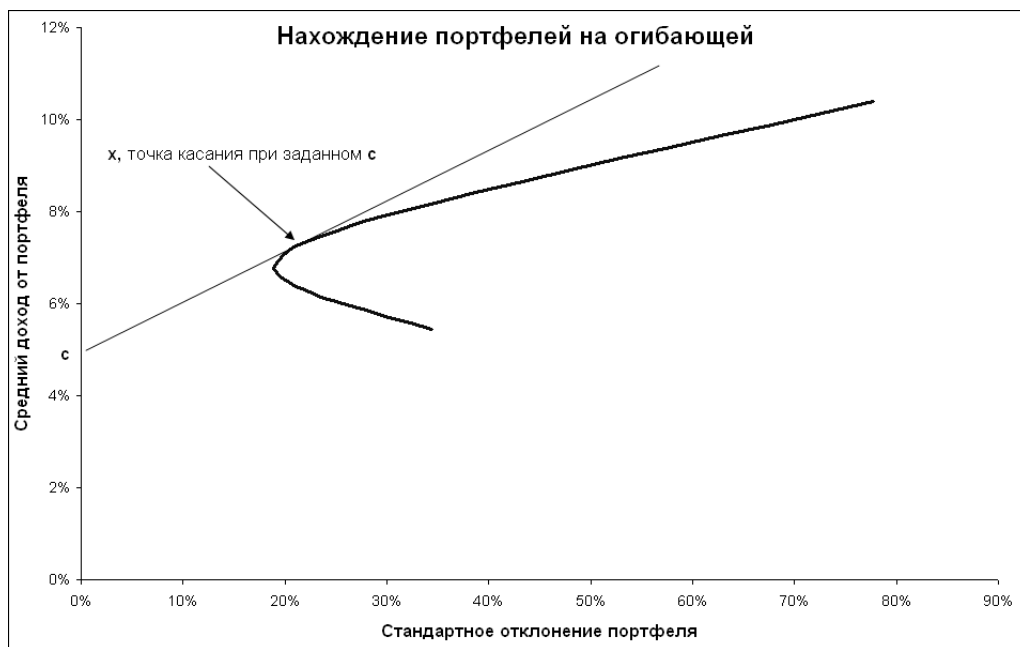
Докажите это утверждение.

<sup>3</sup> Вообще говоря, показатель  $R^2$ , равный 28%, который мы получили в нашей регрессии для ЛРЦБ, — вполне нормальная величина в реальных финансовых расчетах. Часто студенты под влиянием идеализма преподавателей статистики и слишком прямолинейного мировоззрения полагают, что коэффициент  $R^2$  любой убедительной регрессии должен составлять не менее 90%. Однако в финансовом анализе с прямолинейностью делать нечего. Следует усвоить правило, что любая финансовая регрессия, дающая  $R^2$  больше 80%, скорее всего рассчитана некорректно и только вводит в заблуждение.

# 11 Эффективные портфели при запрете на продажу без покрытия

## 11.1. Введение

В главе 9 рассматривалась задача нахождения эффективного портфеля. Как было показано там, эту задачу можно свести к построению касательной к огибающей реализуемого множества портфелей.



Чтобы решить данную задачу и найти такой эффективный портфель, необходимо, в частности, решить следующую задачу:

$$\max \Theta = \frac{E(r_x) - c}{\sigma_p \text{ при условии}} \quad \sum_{i=1}^N x_i = 1,$$

где

$$E(r_x) = x^T \cdot R = \sum_{i=1}^N x_i E(r_i);$$

$$\sigma_p = \sqrt{x^T S x} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \sigma_{ij}}.$$

Теорема 1, изложенная в главе 9, дает методику решения такой задачи. Решения задачи максимизации допускают *отрицательные* весовые коэффициенты активов в портфелях; случай  $x_i < 0$  соответствует следующим двум допущениям:

- актив номер  $i$  продан инвестором авансом (*без покрытия*), т.е. еще до его фактического наличия на руках;
- денежные поступления от этой продажи немедленно оказываются в распоряжении инвестора.

В действительности все происходит, конечно, гораздо сложнее, чем в этой простой учебной модели продажи без покрытия. В частности, редко бывает так, чтобы вырученные от продажи авансом средства сразу же поступили в распоряжение инвестора, поскольку брокерские фирмы обычно практикуют частичное или даже полное депонирование этих средств. Может быть и так, что инвесторам полностью запрещается продавать активы без покрытия (многие мелкие инвесторы сразу действуют, исходя из предположения о невозможности продажи без покрытия).

В этой главе исследуются именно такие задачи. Демонстрируется применение Поиска решения (Solver) в среде Excel для нахождения эффективных портфелей активов при ограничении продажи без покрытия<sup>1</sup>. Хотя приведенные решения далеки от идеала (в частности, отнимают слишком много времени), они поучительны и легко понятны.

Начнем с задачи нахождения оптимального портфеля при полном запрете продажи авансом без покрытия. Решаемая задача аналогична задаче максимизации, поставленной ранее, с добавлением ограничения-связи для реализации указанного запрета:

$$\max \Theta = \frac{E(r_x) - c}{\sigma_p} \quad \text{при условиях} \quad \sum_{i=1}^N x_i = 1, \quad x_i \geq 0, i = 1, \dots, N,$$

где

<sup>1</sup> Мы не углубляемся в детали математического аппарата, связанного с расчетами при наличии такого ограничения. Существенным моментом является условие Куна–Такера (Kuhn–Tucker), о котором можно прочитать в книге Elton, Gruber (1995).

$$E(r_x) = x^T \cdot R = \sum_{i=1}^N x_i E(r_i);$$

$$\sigma_p = \sqrt{x^T S x} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i x_j \sigma_{ij}}.$$

## 11.2. Пример расчета

Нашу задачу можно решить в Excel, используя команду Сервис⇒Поиск решения (Tools⇒Solver)<sup>2</sup>. Продемонстрируем это на следующем конкретном примере с использованием всего четырех подверженных риску активов.

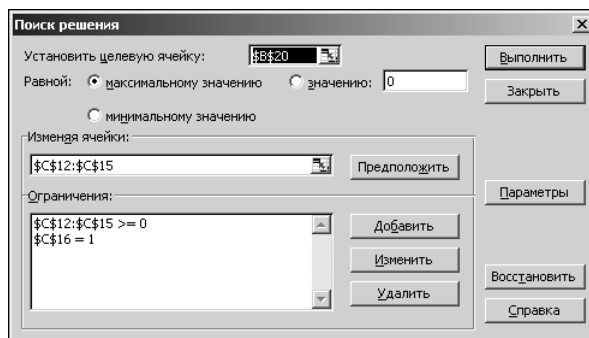
|   | B                      | C    | D     | E    | F | G       |
|---|------------------------|------|-------|------|---|---------|
| 3 | Ковариационная матрица |      |       |      |   | Средние |
| 4 | 0,1                    | 0,03 | -0,08 | 0,05 |   | 8%      |
| 5 | 0,03                   | 0,2  | 0,02  | 0,03 |   | 9%      |
| 6 | -0,08                  | 0,02 | 0,3   | 0,2  |   | 10%     |
| 7 | 0,05                   | 0,03 | 0,2   | 0,9  |   | 11%     |

Чтобы решить нашу задачу о портфеле без продажи авансом, построим следующую таблицу (в которой также иллюстрируется решение для  $c = 9\%$ ).

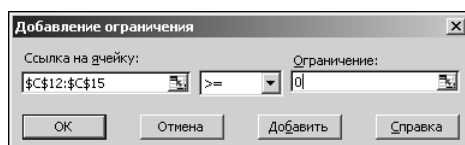
|    | A                                                                                             | B                      | C                                                            | D                  | E    | F | G       | H | I |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|--------------------------------------------------------------|--------------------|------|---|---------|---|---|
| 1  | <b>ЗАПРЕТ НА ПРОДАЖУ БЕЗ ПОКРЫТИЯ</b>                                                         |                        |                                                              |                    |      |   |         |   |   |
| 2  |                                                                                               |                        |                                                              |                    |      |   |         |   |   |
| 3  |                                                                                               | Ковариационная матрица |                                                              |                    |      |   | Средние |   |   |
| 4  |                                                                                               | 0,1                    | 0,03                                                         | -0,08              | 0,05 |   | 8%      |   |   |
| 5  |                                                                                               | 0,03                   | 0,2                                                          | 0,02               | 0,03 |   | 9%      |   |   |
| 6  |                                                                                               | -0,08                  | 0,02                                                         | 0,3                | 0,2  |   | 10%     |   |   |
| 7  |                                                                                               | 0,05                   | 0,03                                                         | 0,2                | 0,9  |   | 11%     |   |   |
| 8  |                                                                                               |                        |                                                              |                    |      |   |         |   |   |
| 9  |                                                                                               | c                      | 9,0%                                                         | <-- Это константа  |      |   |         |   |   |
| 10 |                                                                                               |                        |                                                              |                    |      |   |         |   |   |
| 11 |                                                                                               | Оптимальные доли       |                                                              |                    |      |   |         |   |   |
| 12 |                                                                                               | x <sub>1</sub>         | 0,0000                                                       |                    |      |   |         |   |   |
| 13 |                                                                                               | x <sub>2</sub>         | 0,0000                                                       |                    |      |   |         |   |   |
| 14 |                                                                                               | x <sub>3</sub>         | 0,5556                                                       |                    |      |   |         |   |   |
| 15 |                                                                                               | x <sub>4</sub>         | 0,4444                                                       |                    |      |   |         |   |   |
| 16 |                                                                                               | Всего                  | 1                                                            | <-- =СУММ(C12:C15) |      |   |         |   |   |
| 17 |                                                                                               |                        |                                                              |                    |      |   |         |   |   |
| 18 | Средн. портфеля                                                                               | 10,44%                 | <-- (=МУМНОЖ(ТРАНСП(C12:C15);G4:G7))                         |                    |      |   |         |   |   |
| 19 | Сигма портфеля                                                                                | 60,76%                 | <-- (=КОРЕНЬ(МУМНОЖ(ТРАНСП(C12:C15);МУМНОЖ(B4:E7;C12:C15)))) |                    |      |   |         |   |   |
| 20 | Тета                                                                                          | 2,38%                  | <-- =(B18-C9)/B19                                            |                    |      |   |         |   |   |
| 21 |                                                                                               |                        |                                                              |                    |      |   |         |   |   |
| 22 | <b>Примечание:</b> Поскольку формулы в ячейках B18 и B19 содержат функцию ТРАНСП, они должны  |                        |                                                              |                    |      |   |         |   |   |
| 23 | вводиться как массивы - с помощью <Ctrl+Shift+Enter>. Фигурные скобки вводятся автоматически. |                        |                                                              |                    |      |   |         |   |   |
| 24 | Подробнее см. в разделе 9.4 главы 9.                                                          |                        |                                                              |                    |      |   |         |   |   |

Решение было получено поиском решения с помощью вышеупомянутого модуля-надстройки Excel. При первом вызове функции Поиск решения заполняется диалоговое окно, показанное на нижеприведенном рисунке.

<sup>2</sup> Если такой команды нет в меню, значит, вы еще не подключили надстройку Поиск решения (Solver). Чтобы подключить ее, выберите команду Сервис⇒Надстройки (Tools⇒Add-ins) и установите флажок напротив пункта Поиск решения (Solver).



Ограничение неотрицательности можно добавить, щелкнув на кнопке Добавить (Add) в этом диалоговом окне. Откроется следующее окно, которое на рисунке уже заполнено.



Второе ограничение (сумма коэффициентов портфеля должна составлять единицу) вводится аналогично.

Изменяя значения  $c$  в таблице, можно просчитать и другие портфели. В следующем примере константа  $c$  выбрана равной 8,5%.

|    | A                                     | B                      | C                                                          | D                  | E    | F | G       | H | I |
|----|---------------------------------------|------------------------|------------------------------------------------------------|--------------------|------|---|---------|---|---|
| 1  | <b>ЗАПРЕТ НА ПРОДАЖУ БЕЗ ПОКРЫТИЯ</b> |                        |                                                            |                    |      |   |         |   |   |
| 2  |                                       |                        |                                                            |                    |      |   |         |   |   |
| 3  |                                       | Ковариационная матрица |                                                            |                    |      |   | Средние |   |   |
| 4  |                                       | 0,1                    | 0,03                                                       | -0,08              | 0,05 |   | 8%      |   |   |
| 5  |                                       | 0,03                   | 0,2                                                        | 0,02               | 0,03 |   | 9%      |   |   |
| 6  |                                       | -0,08                  | 0,02                                                       | 0,3                | 0,2  |   | 10%     |   |   |
| 7  |                                       | 0,05                   | 0,03                                                       | 0,2                | 0,9  |   | 11%     |   |   |
| 8  |                                       |                        |                                                            |                    |      |   |         |   |   |
| 9  |                                       | c                      | 8,5%                                                       | <-- Это константа  |      |   |         |   |   |
| 10 |                                       |                        |                                                            |                    |      |   |         |   |   |
| 11 |                                       | Оптимальные доли       |                                                            |                    |      |   |         |   |   |
| 12 |                                       | $x_1$                  | 0,0000                                                     |                    |      |   |         |   |   |
| 13 |                                       | $x_2$                  | 0,2514                                                     |                    |      |   |         |   |   |
| 14 |                                       | $x_3$                  | 0,4885                                                     |                    |      |   |         |   |   |
| 15 |                                       | $x_4$                  | 0,2601                                                     |                    |      |   |         |   |   |
| 16 |                                       | Всего                  | 1                                                          | <-- =СУММ(C12:C15) |      |   |         |   |   |
| 17 |                                       |                        |                                                            |                    |      |   |         |   |   |
| 18 | Средн. портфеля                       | 10,01%                 | <-- =МУМНОЖ(ТРАНСП(C12:C15);G4:G7))                        |                    |      |   |         |   |   |
| 19 | Сигма портфеля                        | 45,25%                 | <-- =КОРЕНЬ(МУМНОЖ(ТРАНСП(C12:C15);МУМНОЖ(B4:E7;C12:C15))) |                    |      |   |         |   |   |
| 20 | Тета                                  | 3,33%                  | <-- =(B18-C9)/B19                                          |                    |      |   |         |   |   |

В обоих примерах ограничение на продажу без покрытия играет существенную роль. В первом примере как  $x_1$ , так и  $x_2$  равны нулю, в то время как во втором примере  $x_1$  равен нулю. Однако не при всех значениях  $c$  получаются портфели, в которых ограничение продажи авансом существенно. Например, выбрав константу  $c$  равной 8%, получаем следующее.



|    | A                                     | B                             | C                                                            | D                  | E    | F | G              | H | I |
|----|---------------------------------------|-------------------------------|--------------------------------------------------------------|--------------------|------|---|----------------|---|---|
| 1  | <b>ЗАПРЕТ НА ПРОДАЖУ БЕЗ ПОКРЫТИЯ</b> |                               |                                                              |                    |      |   |                |   |   |
| 2  |                                       |                               |                                                              |                    |      |   |                |   |   |
| 3  |                                       | <b>Ковариационная матрица</b> |                                                              |                    |      |   | <b>Средние</b> |   |   |
| 4  |                                       | 0,1                           | 0,03                                                         | -0,08              | 0,05 |   | 8%             |   |   |
| 5  |                                       | 0,03                          | 0,2                                                          | 0,02               | 0,03 |   | 9%             |   |   |
| 6  |                                       | -0,08                         | 0,02                                                         | 0,3                | 0,2  |   | 10%            |   |   |
| 7  |                                       | 0,05                          | 0,03                                                         | 0,2                | 0,9  |   | 11%            |   |   |
| 8  |                                       |                               |                                                              |                    |      |   |                |   |   |
| 9  |                                       | c                             | 8,0%                                                         | <-- Это константа  |      |   |                |   |   |
| 10 |                                       |                               |                                                              |                    |      |   |                |   |   |
| 11 |                                       | <b>Оптимальные доли</b>       |                                                              |                    |      |   |                |   |   |
| 12 |                                       | x <sub>1</sub>                | 0,2004                                                       |                    |      |   |                |   |   |
| 13 |                                       | x <sub>2</sub>                | 0,2587                                                       |                    |      |   |                |   |   |
| 14 |                                       | x <sub>3</sub>                | 0,4219                                                       |                    |      |   |                |   |   |
| 15 |                                       | x <sub>4</sub>                | 0,1190                                                       |                    |      |   |                |   |   |
| 16 |                                       | Всего                         | 1                                                            | <-- =СУММ(C12:C15) |      |   |                |   |   |
| 17 |                                       |                               |                                                              |                    |      |   |                |   |   |
| 18 | Средн. портфеля                       | 9,46%                         | <-- (=МУМНОЖ(ТРАНСП(C12:C15);G4:G7))                         |                    |      |   |                |   |   |
| 19 | Сигма портфеля                        | 31,91%                        | <-- (=КОРЕНЬ(МУМНОЖ(ТРАНСП(C12:C15);МУМНОЖ(B4:E7;C12:C15)))) |                    |      |   |                |   |   |
| 20 | Тета                                  | 4,57%                         | <-- =(B18-C9)/B19                                            |                    |      |   |                |   |   |

При понижении  $c$  запрет на продажу без покрытия становится существенным по отношению к активу №4. Например, при  $c = 3\%$  имеем

|    | A               | B                       | C                                                            | D                  | E | F | G | H | I |
|----|-----------------|-------------------------|--------------------------------------------------------------|--------------------|---|---|---|---|---|
| 9  |                 | c                       | 3,0%                                                         | <-- Это константа  |   |   |   |   |   |
| 10 |                 |                         |                                                              |                    |   |   |   |   |   |
| 11 |                 | <b>Оптимальные доли</b> |                                                              |                    |   |   |   |   |   |
| 12 |                 | x <sub>1</sub>          | 0,5856                                                       |                    |   |   |   |   |   |
| 13 |                 | x <sub>2</sub>          | 0,0965                                                       |                    |   |   |   |   |   |
| 14 |                 | x <sub>3</sub>          | 0,3179                                                       |                    |   |   |   |   |   |
| 15 |                 | x <sub>4</sub>          | 0,0000                                                       |                    |   |   |   |   |   |
| 16 |                 | Всего                   | 1                                                            | <-- =СУММ(C12:C15) |   |   |   |   |   |
| 17 |                 |                         |                                                              |                    |   |   |   |   |   |
| 18 | Средн. портфеля | 8,73%                   | <-- (=МУМНОЖ(ТРАНСП(C12:C15);G4:G7))                         |                    |   |   |   |   |   |
| 19 | Сигма портфеля  | 20,32%                  | <-- (=КОРЕНЬ(МУМНОЖ(ТРАНСП(C12:C15);МУМНОЖ(B4:E7;C12:C15)))) |                    |   |   |   |   |   |
| 20 | Тета            | 28,21%                  | <-- =(B18-C9)/B19                                            |                    |   |   |   |   |   |

Для очень высоких  $c$  (в следующем случае  $c = 11\%$ ) максимизированный портфель содержит только 4-й актив.

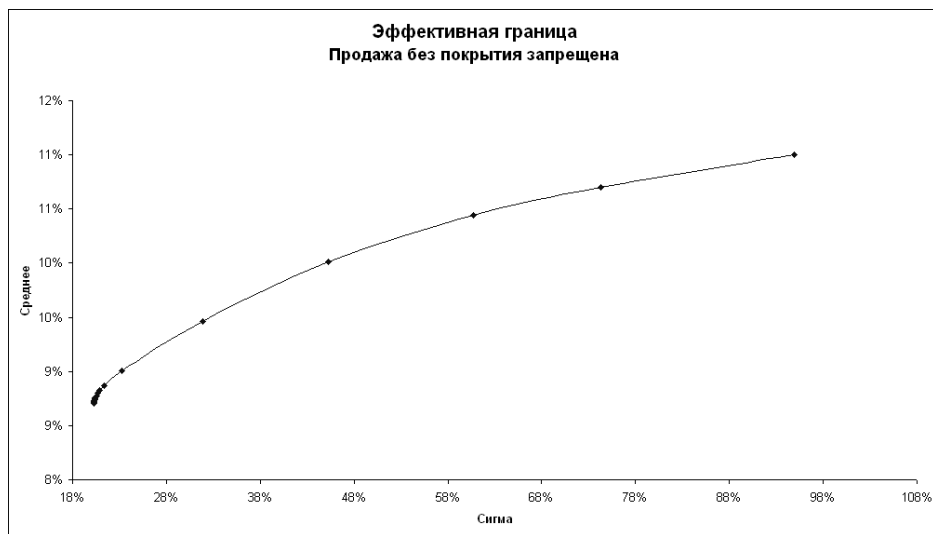
|    | A               | B                       | C                                                            | D                  | E | F | G | H | I |
|----|-----------------|-------------------------|--------------------------------------------------------------|--------------------|---|---|---|---|---|
| 9  |                 | c                       | 11,0%                                                        | <-- Это константа  |   |   |   |   |   |
| 10 |                 |                         |                                                              |                    |   |   |   |   |   |
| 11 |                 | <b>Оптимальные доли</b> |                                                              |                    |   |   |   |   |   |
| 12 |                 | x <sub>1</sub>          | 0,0000                                                       |                    |   |   |   |   |   |
| 13 |                 | x <sub>2</sub>          | 0,0000                                                       |                    |   |   |   |   |   |
| 14 |                 | x <sub>3</sub>          | 0,0000                                                       |                    |   |   |   |   |   |
| 15 |                 | x <sub>4</sub>          | 1,0000                                                       |                    |   |   |   |   |   |
| 16 |                 | Всего                   | 1                                                            | <-- =СУММ(C12:C15) |   |   |   |   |   |
| 17 |                 |                         |                                                              |                    |   |   |   |   |   |
| 18 | Средн. портфеля | 11,00%                  | <-- (=МУМНОЖ(ТРАНСП(C12:C15);G4:G7))                         |                    |   |   |   |   |   |
| 19 | Сигма портфеля  | 94,87%                  | <-- (=КОРЕНЬ(МУМНОЖ(ТРАНСП(C12:C15);МУМНОЖ(B4:E7;C12:C15)))) |                    |   |   |   |   |   |
| 20 | Тета            | 0,00%                   | <-- =(B18-C9)/B19                                            |                    |   |   |   |   |   |

### 11.3. Эффективная граница

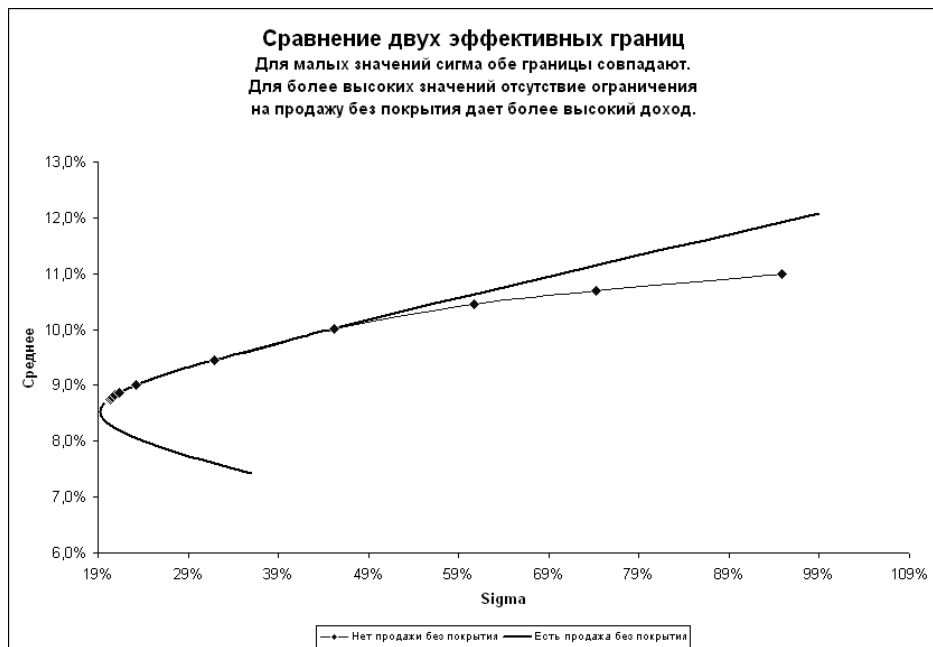
Займемся построением эффективной границы при наличии запрета на продажу без покрытия. Напомним, что в случае отсутствия такого запрета (см. главу 9) для определения эффективной границы было достаточно найти два эффективных портфеля. При накладывании запрета этот метод больше не работает. В данном

случае определение эффективной границы требует построения большого количества точек. Единственный эффективный (просим прощения за каламбур) способ сделать это — написать программу на VBA, которая бы много раз вызывала Поиск решения и помещала найденные решения в таблицу.

В этом разделе рассматривается такая программа. Одной из ее задач будет построение графика эффективной границы без продажи авансом.



Имея программу и график новой эффективной границы, можно сравнить ее с эффективной границей при *разрешенной* продаже без покрытия.



В соотношении между графиками, которое можно видеть на рисунке, нет ничего особенно удивительного.

- В целом эффективная граница с разрешенной продажей без покрытия как раз и должна лежать выше, чем в случае запрета такой продажи. Это очевидно, поскольку запрет вводит в задачу максимизации дополнительное ограничение.
- В некоторых случаях (например, в показанном ранее случае  $c = 8$ ) две эффективные границы совпадают.

Поместив оба графика на одну координатную сетку, становится видно, что влияние запрета на продажу без покрытия сказывается в основном на портфелях с высокими доходами и дисперсиями.

## 11.4. Программа на VBA

Результат в задаче с запретом на продажу без покрытия, продемонстрированной в разделе 11.3, был получен с помощью следующей программы на языке Visual Basic for Applications:

```
Sub Solve()
    SolverOk SetCell:="$B$20", MaxMinVal:=1,
        ValueOf:="0", ByChange:="$C$12:$C$15"
    SolverSolve UserFinish:=True
End Sub

Sub Doit()
    Range("Results").ClearContents
    For counter = 1 To 40
        Range("constant") = -0.04 + counter * 0.005
        Solve
        Application.SendKeys ("{Enter}")
        Range("Results").Cells(counter, 1) =
            ActiveSheet.Range("constant")
        Range("Results").Cells(counter, 2) =
            ActiveSheet.Range("portfolio_sigma")
        Range("Results").Cells(counter, 3) =
            ActiveSheet.Range("portfolio_mean")
        Range("Results").Cells(counter, 4) =
            ActiveSheet.Range("x_1")
        Range("Results").Cells(counter, 5) =
            ActiveSheet.Range("x_2")
        Range("Results").Cells(counter, 6) =
            ActiveSheet.Range("x_3")
        Range("Results").Cells(counter, 7) =
            ActiveSheet.Range("x_4")
    Next counter
End Sub
```

Программа состоит из двух подпрограмм: *Solve* активизирует модуль поиска решения Excel, а *Doit* вызывает этот модуль несколько раз для различных значений диапазона *constant* (это ячейка C9 таблицы) и помещает результаты в диапазон *Results*.

Результат работы программы приведен ниже.

|    | M      | N      | O       | P              | Q              | R              | S              |
|----|--------|--------|---------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 3  | c      | Сигма  | Среднее | x <sub>1</sub> | x <sub>2</sub> | x <sub>3</sub> | x <sub>4</sub> |
| 4  | -0,035 | 20,24% | 8,70%   | 0,605          | 0,089          | 0,307          | 0,000          |
| 5  | -0,03  | 20,25% | 8,70%   | 0,604          | 0,089          | 0,307          | 0,000          |
| 6  | -0,025 | 20,25% | 8,70%   | 0,603          | 0,089          | 0,307          | 0,000          |
| 7  | -0,02  | 20,25% | 8,71%   | 0,603          | 0,089          | 0,308          | 0,000          |
| 8  | -0,015 | 20,25% | 8,71%   | 0,602          | 0,090          | 0,309          | 0,000          |
| 9  | -0,01  | 20,26% | 8,71%   | 0,601          | 0,090          | 0,309          | 0,000          |
| 10 | -0,005 | 20,26% | 8,71%   | 0,599          | 0,091          | 0,310          | 0,000          |
| 11 | 0      | 20,27% | 8,71%   | 0,598          | 0,091          | 0,311          | 0,000          |
| 12 | 0,005  | 20,27% | 8,71%   | 0,597          | 0,092          | 0,311          | 0,000          |
| 13 | 0,01   | 20,28% | 8,72%   | 0,595          | 0,093          | 0,312          | 0,000          |
| 14 | 0,015  | 20,29% | 8,72%   | 0,593          | 0,093          | 0,313          | 0,000          |
| 15 | 0,02   | 20,30% | 8,72%   | 0,591          | 0,094          | 0,315          | 0,000          |
| 16 | 0,025  | 20,31% | 8,73%   | 0,589          | 0,095          | 0,316          | 0,000          |
| 17 | 0,03   | 20,32% | 8,73%   | 0,586          | 0,097          | 0,318          | 0,000          |
| 18 | 0,035  | 20,34% | 8,74%   | 0,582          | 0,098          | 0,320          | 0,000          |
| 19 | 0,04   | 20,37% | 8,74%   | 0,578          | 0,100          | 0,322          | 0,000          |
| 20 | 0,045  | 20,41% | 8,75%   | 0,573          | 0,102          | 0,325          | 0,000          |
| 21 | 0,05   | 20,46% | 8,76%   | 0,566          | 0,105          | 0,329          | 0,000          |
| 22 | 0,055  | 20,54% | 8,78%   | 0,557          | 0,108          | 0,334          | 0,000          |
| 23 | 0,06   | 20,67% | 8,80%   | 0,545          | 0,113          | 0,342          | 0,000          |
| 24 | 0,065  | 20,90% | 8,82%   | 0,528          | 0,120          | 0,352          | 0,000          |
| 25 | 0,07   | 21,36% | 8,87%   | 0,499          | 0,132          | 0,368          | 0,000          |
| 26 | 0,075  | 23,27% | 9,01%   | 0,427          | 0,163          | 0,386          | 0,025          |
| 27 | 0,08   | 31,91% | 9,46%   | 0,200          | 0,259          | 0,422          | 0,119          |
| 28 | 0,085  | 45,25% | 10,01%  | 0,000          | 0,251          | 0,488          | 0,260          |
| 29 | 0,09   | 60,76% | 10,44%  | 0,000          | 0,000          | 0,556          | 0,444          |
| 30 | 0,095  | 74,30% | 10,70%  | 0,000          | 0,000          | 0,300          | 0,700          |
| 31 | 0,1    | 94,87% | 11,00%  | 0,000          | 0,000          | 0,000          | 1,000          |
| 32 | 0,105  | 94,87% | 11,00%  | 0,000          | 0,000          | 0,000          | 1,000          |
| 33 | 0,11   | 94,87% | 11,00%  | 0,000          | 0,000          | 0,000          | 1,000          |
| 34 | 0,115  | 94,87% | 11,00%  | 0,000          | 0,000          | 0,000          | 1,000          |
| 35 | 0,12   | 94,87% | 11,00%  | 0,000          | 0,000          | 0,000          | 1,000          |
| 36 | 0,125  | 94,87% | 11,00%  | 0,000          | 0,000          | 0,000          | 1,000          |
| 37 | 0,13   | 94,87% | 11,00%  | 0,000          | 0,000          | 0,000          | 1,000          |
| 38 | 0,135  | 94,87% | 11,00%  | 0,000          | 0,000          | 0,000          | 1,000          |
| 39 | 0,14   | 94,87% | 11,00%  | 0,000          | 0,000          | 0,000          | 1,000          |
| 40 | 0,145  | 94,87% | 11,00%  | 0,000          | 0,000          | 0,000          | 1,000          |
| 41 | 0,15   | 94,87% | 11,00%  | 0,000          | 0,000          | 0,000          | 1,000          |
| 42 | 0,155  | 94,87% | 11,00%  | 0,000          | 0,000          | 0,000          | 1,000          |
| 43 | 0,16   | 94,87% | 11,00%  | 0,000          | 0,000          | 0,000          | 1,000          |

## 11.5. Заключение

Вряд ли кто-нибудь скажет, что Excel предлагает быстрый способ решить задачу максимизации портфеля, будь то при наличии или отсутствии запрета на продажу без покрытия. Однако с его помощью можно проиллюстрировать основные принципы такого расчета, а модуль поиска решения Excel позволяет получить решение достаточно легко и наглядно.

## Упражнения

В обоих приведенных ниже упражнениях используется набор данных, представленный в главе 8 (этот же набор применялся и в первом упражнении к главе 9). В главе 8 требовалось вычислить ковариационную матрицу доходов по бумагам шести мебельных компаний. Средние доходы и ковариационная матрица выглядят следующим образом.

|   | B                      | C        | D       | E         | F       | G      | H      | I | J         |
|---|------------------------|----------|---------|-----------|---------|--------|--------|---|-----------|
| 2 | Ковариационная матрица |          |         |           |         |        |        |   |           |
| 3 |                        | La-Z-Boy | Kimball | Flexsteel | Leggett | Miller | Shaw   |   | Средние   |
| 4 | La-Z-Boy               | 0,1267   | 0,0438  | 0,1971    | 0,0541  | 0,0625 | 0,1088 |   | La-Z-Boy  |
| 5 | Kimball                | 0,0438   | 0,0713  | 0,0492    | 0,0068  | 0,0384 | 0,0296 |   | Kimball   |
| 6 | Flexsteel              | 0,1971   | 0,0492  | 0,3667    | 0,0853  | 0,0975 | 0,1636 |   | Flexsteel |
| 7 | Leggett                | 0,0541   | 0,0068  | 0,0853    | 0,1136  | 0,0210 | 0,0657 |   | & Platt   |
| 8 | Miller                 | 0,0625   | 0,0384  | 0,0975    | 0,0210  | 0,0654 | 0,0267 |   | Miller    |
| 9 | Shaw                   | 0,1088   | 0,0296  | 0,1636    | 0,0657  | 0,0267 | 0,1819 |   | Shaw      |

1. Располагая этими данными, рассчитайте эффективную границу при условии, что продажа без покрытия запрещена.
2. На той же координатной сетке постройте эффективную границу этих шести активов как с возможностью продажи без покрытия, так и без нее.



---

# 12 Стоимость, подверженная риску

---

## 12.1. Введение

Стоимость, подверженная риску, или СПР<sup>1</sup> (*value-at-risk* — *VaR*), — это мера наихудшего потенциально ожидаемого убытка в нормальных рыночных условиях за некоторый промежуток времени при заданном уровне доверительности. СПР дает ответ на вопрос, какой убыток можно понести с вероятностью  $x$  в пределах заданного временного горизонта. Можно определить эту величину и так: это наименьшая квантиль потенциальных убытков в пределах заданного портфеля за указанный период времени. Заданный промежуток времени  $T$  и доверительная вероятность (квантиль)  $q$  — вот два основных параметра, которые следует правильно выбрать для реализации поставленной цели оценки риска. Временной горизонт может варьироваться от нескольких часов для активного участника биржевых торгов до года для пенсионного фонда. Если основная цель состоит в том, чтобы удовлетворить заданные извне требования регулирующих органов, например, требования к банковскому капиталу, то квантиль обычно очень мала (например, 1% наихудшего исхода). Однако для внутренних моделей управления риском, используемых компаниями для контроля допустимого уровня риска, обычно принимается цифра 5% (более подробную информацию можно найти на многих сайтах в Интернете). С общим введением в теорию стоимости, подверженной риску, можно ознакомиться по работам Linsmeier, Pearson (1996) и Jorion (1997).

Разъясним понятие СПР на примере. Пусть управляющий инвестиционным портфелем имеет СПР в размере 1 млн. долл. в день с вероятностью 1%. Это означает, что имеется только один шанс из ста, что при нормальной обстановке на рынке убыток за день составит более миллиона.

---

## 12.2. Простейший пример

Предположим, что управляющий оперирует портфелем, содержащим один актив. Доход с актива обычно имеет распределение со средним значением 20% и стандартным отклонением 30%. Текущая цена портфеля составляет 100 млн. долл. Необходимо ответить на несколько простых вопросов, касающихся вероятностного распределения цены портфеля на конец года.

---

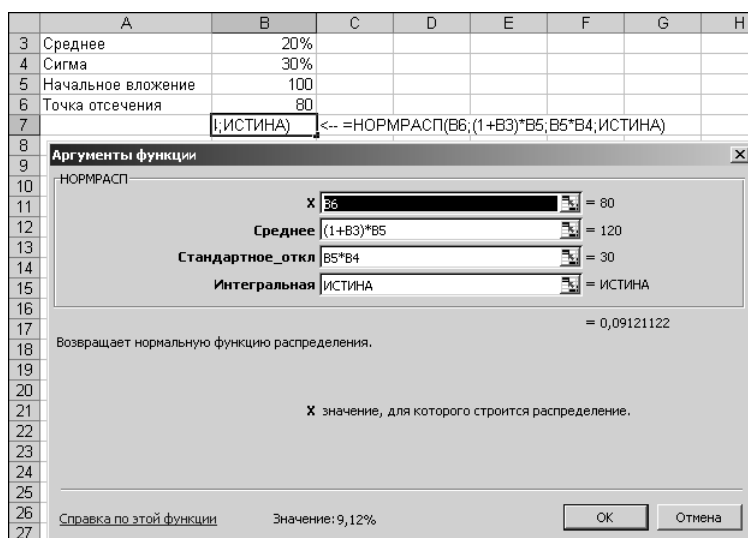
<sup>1</sup> В основу этой главы положена статья Цви Винера (Zvi Wiener) из Еврейского университета в Иерусалиме, впервые опубликованная в *Mathematics in Education and Research*, 1998, vol. 7, p. 39–45.

1. Каков характер этого распределения?
2. Какова вероятность понести убыток более 20 млн. долл. к концу года (т.е. какова вероятность, что в конце года цена окажется ниже 80 млн.)?
3. Какой максимальный убыток можно понести к концу года с вероятностью 1%? Это и будет СПР с вероятностью 1%.

Вероятность того, что рыночная стоимость портфеля в конце года составит меньше 80 млн., равна менее чем 9%. (В примере слово “миллионы” опущено.)

|   | A                  | B     | C                                        | D | E | F | G |
|---|--------------------|-------|------------------------------------------|---|---|---|---|
| 3 | Среднее            | 20%   |                                          |   |   |   |   |
| 4 | Сигма              | 30%   |                                          |   |   |   |   |
| 5 | Начальное вложение | 100   |                                          |   |   |   |   |
| 6 | Точка отсечения    | 80    |                                          |   |   |   |   |
| 7 |                    | 9,12% | <-- =НОРМРАСП(B6,(1+B3)*B5;B5*B4;ИСТИНА) |   |   |   |   |

Вот как будет выглядеть экран в процессе применения функции НОРМРАСП (NormDist).



На этом рисунке видно, что функция Excel НОРМРАСП может давать как само распределение, так и функцию вероятностей. В первом случае с применением таблицы данных получаем стандартный график колоколообразной формы.





### 12.3. Определение квантилей в Excel

С вероятностью 1% стоимость портфеля в конце года составит менее 50,20974 млн.; таким образом, стоимость, подверженная риску, для данного распределения равна  $100 - 50,20974 = 49,79026$ .

|    | A                    | B        | C                                                                                                                  | D | E | F | G |
|----|----------------------|----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|
| 1  | ВЫЧИСЛЕНИЕ КВАНТИЛЕЙ |          |                                                                                                                    |   |   |   |   |
| 2  |                      |          |                                                                                                                    |   |   |   |   |
| 3  | Среднее              | 20%      |                                                                                                                    |   |   |   |   |
| 4  | Сигма                | 30%      |                                                                                                                    |   |   |   |   |
| 5  | Начальное вложение   | 100      |                                                                                                                    |   |   |   |   |
| 6  | Точка отсечения      | 50,20956 | <-- =НОРМОБР(0,01;(1+B3)*B5,B5*B4)                                                                                 |   |   |   |   |
| 7  |                      | 1,00%    | <-- =НОРМРАСП(B6,(1+B3)*B5,B5*B4,ИСТИНА)                                                                           |   |   |   |   |
| 8  |                      |          |                                                                                                                    |   |   |   |   |
| 9  | СПР на уровне 1,00%  | 49,79044 | <-- =B5-B6                                                                                                         |   |   |   |   |
| 10 |                      |          |                                                                                                                    |   |   |   |   |
| 11 |                      |          | Содержит строковую формулу, изменяющуюся в завис. от содержимого ячейки B6:<br>="СПР на уровне "&ТЕКСТ(B7,"0,00%") |   |   |   |   |
| 12 |                      |          |                                                                                                                    |   |   |   |   |
| 13 |                      |          |                                                                                                                    |   |   |   |   |
| 14 |                      |          |                                                                                                                    |   |   |   |   |

Отсеченный хвост распределения, который показан в таблице, известен под названием квантиля. Это решение найдено с помощью Поиска решения (Solver).

|    | A                                                                                                                                                                        | B        | C                                        | D | E | F | G |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|------------------------------------------|---|---|---|---|
| 2  |                                                                                                                                                                          |          |                                          |   |   |   |   |
| 3  | Среднее                                                                                                                                                                  | 20%      |                                          |   |   |   |   |
| 4  | Сигма                                                                                                                                                                    | 30%      |                                          |   |   |   |   |
| 5  | Начальное вложение                                                                                                                                                       | 100      |                                          |   |   |   |   |
| 6  | Точка отсечения                                                                                                                                                          | 50,20956 | <-- =НОРМОБР(0,01;(1+B3)*B5,B5*B4)       |   |   |   |   |
| 7  |                                                                                                                                                                          | 1,00%    | <-- =НОРМРАСП(B6,(1+B3)*B5,B5*B4,ИСТИНА) |   |   |   |   |
| 8  | <b>Поиск решения</b>                                                                                                                                                     |          |                                          |   |   |   |   |
| 9  | Установить целевую ячейку: <input type="text" value="\$B\$7"/> <input type="button" value="Выполнить"/>                                                                  |          |                                          |   |   |   |   |
| 10 | Равной: <input type="radio"/> максимальному значению <input checked="" type="radio"/> значению: <input type="text" value="0,01"/> <input type="button" value="Закреть"/> |          |                                          |   |   |   |   |
| 11 | <input type="radio"/> минимальному значению                                                                                                                              |          |                                          |   |   |   |   |
| 12 | Изменяя ячейки:                                                                                                                                                          |          |                                          |   |   |   |   |
| 13 | <input type="text" value="\$B\$6"/> <input type="button" value="Предположить"/>                                                                                          |          |                                          |   |   |   |   |
| 14 | Ограничения:                                                                                                                                                             |          |                                          |   |   |   |   |
| 15 | <input type="text" value=""/>                                                                                                                                            |          |                                          |   |   |   |   |
| 16 | <input type="button" value="Добавить"/>                                                                                                                                  |          |                                          |   |   |   |   |
| 17 | <input type="button" value="Изменить"/>                                                                                                                                  |          |                                          |   |   |   |   |
| 18 | <input type="button" value="Удалить"/>                                                                                                                                   |          |                                          |   |   |   |   |
| 19 | <input type="button" value="Параметры"/>                                                                                                                                 |          |                                          |   |   |   |   |
| 20 | <input type="button" value="Восстановить"/>                                                                                                                              |          |                                          |   |   |   |   |
| 21 | <input type="button" value="Справка"/>                                                                                                                                   |          |                                          |   |   |   |   |
| 22 |                                                                                                                                                                          |          |                                          |   |   |   |   |
| 23 |                                                                                                                                                                          |          |                                          |   |   |   |   |
| 24 |                                                                                                                                                                          |          |                                          |   |   |   |   |

### 12.3.1. Определение квантилей в Excel

С помощью Поиска решения (Solver) можно найти квантиль любого распределения. Для двух используемых нами распределений — нормального и логарифмически нормального (логнормального) — в Excel есть встроенные функции нахождения квантилей. Эти функции — НОРМОБР (Norminv), НОРМСТОБР (Normsinv) и ЛОГНОРМОБР (Loginv) — находят обратные к нормальному, стандартному нормальному и логнормальному распределениям.

Далее приведен пример для набора данных, которым оперируем мы; на этот раз в ячейке B6 записана функция НОРМОБР(0,01;(1+B3)\*B5;B5\*B4). Эта функция находит точку отсечения, для которой функция нормального распределения со средним значением 120 и стандартным отклонением 30 дает вероятность 1%. Эта точка видна на следующем графике, на котором показана часть плотности нормального распределения.



### 12.3.2. Логнормальное распределение

Логнормальное распределение более приемлемо для стоимости активов во многих случаях (оно не может становиться отрицательным), чем нормальное. Предположим, доход с портфеля распределен нормально со среднегодовым значением  $\mu$  и стандартным отклонением  $\sigma$ . Далее предположим, что текущая стоимость портфеля равна  $V_0$ . Тогда отсюда следует (см. Hull, 1997, глава 11), что логарифм стоимости портфеля в момент времени  $T$ , которую мы обозначим  $V_T$ , распределен нормально:

$$\ln V_T \sim \text{Норм} \left[ \ln(V_0) + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma \sqrt{T} \right].$$

Предположим, например, что  $V_0 = 100$ ,  $\mu = 10\%$ , а  $\sigma = 30\%$ . Тогда логарифм стоимости портфеля в конце года распределен по следующему нормальному закону:

$$\ln V_1 \sim \text{Норм} \left[ \ln(100) + \left( 0,10 - \frac{0,3^2}{2} \right), 0,3 \right] = \text{Норм}[4,666017, 0,3].$$

Таким образом, портфель, начальная стоимость которого составляет 100 млн. долл., а годовой доход распределен с параметрами  $\mu = 10\%$  и  $\sigma = 30\%$ , имеет годовую СПР с вероятностью 1%, равную 47,42 млн.

|    | А                                              | В        | С                            | Д | Е |
|----|------------------------------------------------|----------|------------------------------|---|---|
| 3  | Нач. стоимость, $V_0$                          | 100      |                              |   |   |
| 4  | Среднее, $\mu$                                 | 10%      |                              |   |   |
| 5  | Сигма, $\sigma$                                | 30%      |                              |   |   |
| 6  | Период времени, $T$                            | 1        | <-- в годах                  |   |   |
| 7  |                                                |          |                              |   |   |
| 8  | Параметры нормального распределения $\ln(V_T)$ |          |                              |   |   |
| 9  | Среднее                                        | 4,6602   | <-- =LN(B3)+(B4-B5^2/2)*B6   |   |   |
| 10 | Сигма                                          | 0,3000   | <-- =B5*B6                   |   |   |
| 11 |                                                |          |                              |   |   |
| 12 | Точка отсечения                                | 52,57632 | <-- =ЛОГНОРМОБР(0,01;B9;B10) |   |   |
| 13 | СПР на уровне 1%                               | 47,42368 | <-- =B3-B12                  |   |   |

В большинстве расчетов СПР не оперируют с годовыми значениями этой величины. Руководство компаний и регулирующие органы обычно интересуются потенциальным снижением стоимости портфелей за гораздо более короткий срок (несколько дней, максимум несколько недель). Очевидно, СПР за любой интервал времени можно рассчитать по формуле

$$\ln V_T \sim \text{Норм} \left[ \ln(V_0) + \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma \sqrt{T} \right].$$

Напомним, что  $T$  здесь относится к величинам годового масштаба; если в году 250 рабочих дней, то СПР за день рассчитывается для  $T = 1/250$  (для многих рыночных активов с фиксированным доходом следует использовать 1/360, 1/365 или 1/365,25 в зависимости от соглашений, действующих на рынке).

## 12.4. Задача трех активов: важность ковариационной матрицы

Как видно из предыдущих примеров, СПР — не очень сложное понятие, по крайней мере в общих чертах. Однако на практике в расчетах СПР возникают два больших затруднения.

1. Во-первых, трудность представляет оценка параметров распределений доходов от активов. В реальных расчетах СПР необходимо оценивать средние доходы, дисперсии и корреляции. А это далеко не тривиальная задача! В этом разделе мы продемонстрируем важность корреляций между доходами с активов. В следующем разделе будет приведен очень упрощенный пример оценки распределения доходов по рыночным данным о доходности. Например, представьте себе, что скупка евро и авансовая продажа долларов США — это менее рискованная тактика, чем игра только на одной валюте, из-за высокой вероятности того, что доход по одной из позиций будет уравновешен убытками по другой.
2. Во-вторых, трудность представляет и само вычисление объемов различных позиций. Большое финансовое учреждение может одновременно выполнять тысячи кредитных операций. В базе данных ссуд и займов может отсутствовать их классификация по уровню риска и даже по срокам погашения. Еще один пример — банк может иметь взаимно уравновешенные позиции в иностранных валютах в своих отделениях, находящихся в различных географических регионах. Скупка немецких марок в Нью-Йорке может уравновешиваться их авансовой продажей в Женеве; риск банка, измеряемый нами в СПР, необходимо рассчитывать по чистой разнице.

Начнем с задачи о корреляциях между доходами с активов. Продолжим предыдущий пример, но теперь предположим, что имеется три подверженных риску актива. Как и ранее, параметры распределений доходов с активов предполагаются известными: все средние  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$ , а также ковариационная матрица доходов.

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

Разумеется, матрица  $S$  симметрична;  $\sigma_{ii}$  представляет собой дисперсию дохода от  $i$ -го актива, а  $\sigma_{ij}$  — ковариацию доходов от  $i$ -го и  $j$ -го активов (если  $i = j$ , снова получаем дисперсию  $i$ -го актива  $\sigma_{ii}$ ).

Предположим, что общая стоимость актива на сегодняшний день составляет 100 млн. долл., причем в первый актив вложено 30 млн., во второй — 25 млн. и в третий — 45 млн. Тогда распределение доходов от портфеля имеет следующие параметры:

$$\text{Средний доход} = \{x_1, x_2, x_3\} \begin{Bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{Bmatrix} = x_1\mu_1 + x_2\mu_2 + x_3\mu_3,$$

$$\text{Дисперсия дохода} = \{x_1, x_2, x_3\} S \{x_1, x_2, x_3\}^T,$$

где  $\{x_1, x_2, x_3\} = \{0,3, 0,25, 0,45\}$  — вектор долей каждого из трех активов в портфеле. Предполагая, что доходы распределены по нормальному закону (соответственно цены распределены по логнормальному), можно рассчитать СПР так, как это показано в следующей таблице.

|    | A                                                                                                                                                                                   | B                                                               | C | D              | E     | F     | G | H          |
|----|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|---|----------------|-------|-------|---|------------|
| 1  | СПР ДЛЯ ЗАДАЧИ ТРЕХ АКТИВОВ                                                                                                                                                         |                                                                 |   |                |       |       |   |            |
| 2  |                                                                                                                                                                                     |                                                                 |   |                |       |       |   |            |
| 3  |                                                                                                                                                                                     | Средний                                                         |   | Ковариационная |       |       |   | Доли       |
| 4  |                                                                                                                                                                                     | доход                                                           |   | матрица        |       |       |   | в портфеле |
| 5  | Актив 1                                                                                                                                                                             | 10%                                                             |   | 0,1            | 0,04  | 0,03  |   | 0,30       |
| 6  | Актив 2                                                                                                                                                                             | 12%                                                             |   | 0,04           | 0,2   | -0,04 |   | 0,25       |
| 7  | Актив 3                                                                                                                                                                             | 13%                                                             |   | 0,03           | -0,04 | 0,6   |   | 0,45       |
| 8  |                                                                                                                                                                                     |                                                                 |   |                |       |       |   |            |
| 9  | Начальное вложение                                                                                                                                                                  | 100                                                             |   |                |       |       |   |            |
| 10 | Средний доход                                                                                                                                                                       | 0,1185 <-- (=МУМНОЖ(ТРАНСП(B5:B7);H5:H7))                       |   |                |       |       |   |            |
| 11 | Сигма портфеля                                                                                                                                                                      | 0,3848 <-- (=КОРЕНЬ(МУМНОЖ(МУМНОЖ(ТРАНСП(H5:H7);D5:F7);H5:H7))) |   |                |       |       |   |            |
| 12 |                                                                                                                                                                                     |                                                                 |   |                |       |       |   |            |
| 13 | Сред. стоимость вложения                                                                                                                                                            | 111,8500                                                        |   |                |       |       |   |            |
| 14 | Сигма стоимости вложения                                                                                                                                                            | 38,4838                                                         |   |                |       |       |   |            |
| 15 |                                                                                                                                                                                     |                                                                 |   |                |       |       |   |            |
| 16 | Точка отсечения                                                                                                                                                                     | 22,32338 <-- =НОРМОБР(0,01;(1+B10)*B9;B11*B9)                   |   |                |       |       |   |            |
| 17 | Знач. функции вероятностей                                                                                                                                                          | 0,01 <-- =НОРМРАСП(B16;B13;B14;ИСТИНА)                          |   |                |       |       |   |            |
| 18 | СПР на уровне 1,00%                                                                                                                                                                 | 77,67662 <-- =B9-B16                                            |   |                |       |       |   |            |
| 19 | Функции в ячейках B10 и B11 - это функции массивов:<br>вписав их в ячейки, следует нажать <Ctrl+Shift+Enter>.<br>Фигурные скобки {} не вписываются, а добавляются<br>автоматически. |                                                                 |   |                |       |       |   |            |
| 20 |                                                                                                                                                                                     |                                                                 |   |                |       |       |   |            |
| 21 |                                                                                                                                                                                     |                                                                 |   |                |       |       |   |            |
| 22 |                                                                                                                                                                                     |                                                                 |   |                |       |       |   |            |
| 23 |                                                                                                                                                                                     |                                                                 |   |                |       |       |   |            |

## 12.5. Генерирование тестовых данных

Иногда бывает необходимо сгенерировать псевдослучайные тестовые данные для тех или иных целей. В этом разделе представлен пример такой операции. Предположим, что сейчас 10 февраля 1997 г.; рассмотрим фирму, сделавшую капиталовложение в два актива.

- Фирма приобрела во владение две единицы индексного фонда. Текущая рыночная цена единицы составляет 293, так что вложение в данный фонд равно  $2 \times 293 = 586$ .
- Фирма продала авансом иностранную облигацию с номиналом в рублях. Это облигация с нулевым купоном (т.е. по ней не выплачиваются проценты) номинальной стоимостью 100 рублей и сроком погашения 8 мая 2000 г. Если текущая процентная ставка по рублю составляет 5,30%, то на 10 февраля 1997 г. стоимость облигации в рублях составит

$$-100 \times \exp[-5,3\% \times (8 \text{ мая } 2000 - 10 \text{ февр } 1997)/365] = -84,2166.$$

В долларах стоимость облигации составляет  $-84,2166 \times 3,40 = -286,3365$ , так что чистая стоимость портфеля равна  $586 - 286,3365 = 299,66$ .

Этот пример показан на следующем рисунке:

|    | A                           | B          | C       | D        | E        | F | G                          | H        | I        | J         |
|----|-----------------------------|------------|---------|----------|----------|---|----------------------------|----------|----------|-----------|
| 3  | Кол-во единиц индекс. фонда | 2          |         |          |          |   |                            |          |          |           |
| 4  | Срок погашения облигаций    | 08.05.2000 |         |          |          |   |                            |          |          |           |
| 5  |                             |            |         |          |          |   |                            |          |          |           |
| 6  |                             |            |         |          |          |   |                            |          |          |           |
| 7  |                             |            |         | Процент. | Обменный |   | Общая                      | Рубл.    | Долл.    | Стоимость |
| 8  |                             |            |         | ставка   | курс     |   | индекс.                    | стоим.   | стоим.   | портфеля  |
| 9  |                             | Дата       | Индекс. | в рублях | рубля    |   | стоим.                     | облиг.   | облиг.   |           |
| 10 |                             | 10.02.1997 | 293     | 5,30%    | 3,40     |   | 586,00                     | -84,2166 | -286,336 | 299,66    |
| 11 |                             |            |         |          |          |   | =B3*C9                     |          | =H9*I9   | =G9+J9    |
| 12 |                             |            |         |          |          |   |                            |          |          |           |
| 13 |                             |            |         |          |          |   |                            |          |          |           |
| 14 |                             |            |         |          |          |   |                            |          |          |           |
| 15 |                             |            |         |          |          |   | =-100*EXP(-(B4-B9)/365*D9) |          |          |           |

Теперь предположим, что у нас есть данные по курсу обмена и рыночному индексу. Покажем данные за 40 дней (середина массива данных опущена, но можно убедиться, что строки следуют от 8 до 47).

|    | A          | B      | C            | D      | E | F         |
|----|------------|--------|--------------|--------|---|-----------|
| 6  |            |        | Иностранн.   | Курс   |   | Стоимость |
| 7  | День       | Индекс | проц. ставка | обмена |   | портфеля  |
| 8  | 02.01.1997 | 462,71 | 5,28%        | 3,50   |   | 632,13    |
| 9  | 03.01.1997 | 514,71 | 5,26%        | 3,47   |   | 738,41    |
| 10 | 04.01.1997 | 456,5  | 5,23%        | 3,46   |   | 622,49    |
| 11 | 05.01.1997 | 487,39 | 5,24%        | 3,45   |   | 685,17    |
| 12 | 06.01.1997 | 470,42 | 5,25%        | 3,45   |   | 651,28    |
| 45 | 08.02.1997 | 467,14 | 5,31%        | 3,44   |   | 644,75    |
| 46 | 09.02.1997 | 562,06 | 5,32%        | 3,41   |   | 837,17    |
| 47 | 10.02.1997 | 481,61 | 5,30%        | 3,40   |   | 676,88    |

На основе этих данных необходимо сгенерировать “случайные” данные о доходности. Мы сделаем это с помощью *перемешивания*, т.е. случайного перетасовывания данных. На каждом шаге процесса мы изменим порядок последовательности цен, ставок доходности и обменного курса, а затем рассчитаем доход от портфеля<sup>2</sup>.

|    | A                                   | B          | C           | D                        | E           | F           | G             | H                  |
|----|-------------------------------------|------------|-------------|--------------------------|-------------|-------------|---------------|--------------------|
| 1  | ПЕРЕМЕШИВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДОХОДОВ |            |             |                          |             |             |               |                    |
| 2  |                                     |            |             |                          |             |             |               |                    |
| 3  | Кол-во единиц фонда                 | 2          |             |                          | Итераций    | 1 000       | Нач. момент   | 18:26:40           |
| 4  | Срок погашения                      | 08.05.2000 |             |                          | Доход       | -0,13       | Истекш. время | 0:00:14            |
| 5  | Кол-во точек данных                 | 40         |             |                          |             |             |               |                    |
| 6  |                                     |            |             |                          |             |             |               |                    |
| 7  |                                     |            |             |                          |             |             |               |                    |
| 8  |                                     |            |             |                          |             |             |               |                    |
| 9  | День                                | Индекс     | Случ. числа | Иностранная проц. ставка | Случ. числа | Курс обмена | Случ. числа   | Стоимость портфеля |
| 10 | 02.01.1997                          | 500,71     | 0,0101      | 5,26%                    | 0,0551      | 3,41        | 0,0029        | 715,48             |
| 11 | 03.01.1997                          | 561,88     | 0,0451      | 5,35%                    | 0,0751      | 3,42        | 0,0238        | 837,80             |
| 12 | 04.01.1997                          | 472,35     | 0,0711      | 5,29%                    | 0,1295      | 3,46        | 0,0319        | 654,77             |
| 13 | 05.01.1997                          | 458,26     | 0,0948      | 5,28%                    | 0,1393      | 3,45        | 0,0339        | 627,29             |
| 14 | 06.01.1997                          | 470,42     | 0,1161      | 5,28%                    | 0,1549      | 3,37        | 0,0447        | 658,28             |
| 15 | 07.01.1997                          | 705,27     | 0,1235      | 5,28%                    | 0,1730      | 3,40        | 0,0492        | 1 125,42           |
| 16 | 08.01.1997                          | 462,71     | 0,1889      | 5,25%                    | 0,2480      | 3,46        | 0,0866        | 634,94             |
| 17 | 09.01.1997                          | 786,16     | 0,1932      | 5,23%                    | 0,3151      | 3,52        | 0,0904        | 1 276,56           |
| 18 | 10.01.1997                          | 654,17     | 0,2095      | 5,29%                    | 0,3305      | 3,45        | 0,0981        | 1 019,00           |
| 19 | 11.01.1997                          | 790,82     | 0,2258      | 5,28%                    | 0,3329      | 3,44        | 0,1002        | 1 293,00           |
| 20 | 12.01.1997                          | 640,43     | 0,2355      | 5,27%                    | 0,4111      | 3,42        | 0,1090        | 993,76             |
| 21 | 13.01.1997                          | 450,91     | 0,2465      | 5,24%                    | 0,4306      | 3,49        | 0,1347        | 608,51             |
| 22 | 14.01.1997                          | 645,5      | 0,2473      | 5,28%                    | 0,4471      | 3,48        | 0,1617        | 998,88             |
| 23 | 15.01.1997                          | 636,02     | 0,3356      | 5,24%                    | 0,4600      | 3,41        | 0,1703        | 985,37             |
| 24 | 16.01.1997                          | 487,39     | 0,3481      | 5,24%                    | 0,4725      | 3,43        | 0,3106        | 686,39             |
| 25 | 17.01.1997                          | 757,02     | 0,3605      | 5,34%                    | 0,4941      | 3,48        | 0,3681        | 1 222,37           |
| 26 | 18.01.1997                          | 615,93     | 0,3729      | 5,26%                    | 0,5232      | 3,42        | 0,3725        | 944,42             |
| 27 | 19.01.1997                          | 670,63     | 0,4329      | 5,31%                    | 0,5447      | 3,46        | 0,3654        | 1 050,90           |
| 28 | 20.01.1997                          | 687,33     | 0,4370      | 5,28%                    | 0,5867      | 3,44        | 0,4372        | 1 085,39           |
| 29 | 21.01.1997                          | 544,75     | 0,4619      | 5,31%                    | 0,6256      | 3,49        | 0,4492        | 796,53             |
| 30 | 22.01.1997                          | 445,77     | 0,4715      | 5,30%                    | 0,6457      | 3,41        | 0,4539        | 605,15             |
| 31 | 23.01.1997                          | 584,41     | 0,5146      | 5,28%                    | 0,6595      | 3,40        | 0,4600        | 883,04             |
| 32 | 24.01.1997                          | 581,5      | 0,5770      | 5,25%                    | 0,6616      | 3,41        | 0,4869        | 876,06             |
| 33 | 25.01.1997                          | 562,06     | 0,5821      | 5,30%                    | 0,6821      | 3,39        | 0,4889        | 839,29             |
| 34 | 26.01.1997                          | 453,69     | 0,6051      | 5,27%                    | 0,7255      | 3,42        | 0,4959        | 619,70             |
| 35 | 27.01.1997                          | 669,12     | 0,6235      | 5,34%                    | 0,7800      | 3,45        | 0,5233        | 1 048,66           |
| 36 | 28.01.1997                          | 467,14     | 0,7492      | 5,27%                    | 0,7888      | 3,42        | 0,6194        | 646,52             |
| 37 | 29.01.1997                          | 475,49     | 0,7531      | 5,23%                    | 0,7931      | 3,68        | 0,6290        | 640,89             |
| 38 | 30.01.1997                          | 651,99     | 0,7742      | 5,24%                    | 0,8141      | 3,42        | 0,6621        | 1 015,85           |
| 39 | 31.01.1997                          | 533,4      | 0,7876      | 5,32%                    | 0,8279      | 3,42        | 0,6745        | 779,39             |
| 40 | 01.02.1997                          | 605,37     | 0,8181      | 5,26%                    | 0,8419      | 3,50        | 0,6956        | 915,98             |
| 41 | 02.02.1997                          | 740,74     | 0,8524      | 5,32%                    | 0,8767      | 3,44        | 0,7230        | 1 192,30           |
| 42 | 03.02.1997                          | 481,61     | 0,8646      | 5,26%                    | 0,9085      | 3,44        | 0,8086        | 673,43             |
| 43 | 04.02.1997                          | 444,27     | 0,9123      | 5,25%                    | 0,9211      | 3,41        | 0,8245        | 601,14             |
| 44 | 05.02.1997                          | 514,71     | 0,9143      | 5,31%                    | 0,9215      | 3,43        | 0,8855        | 740,86             |
| 45 | 06.02.1997                          | 459,27     | 0,9226      | 5,25%                    | 0,9283      | 3,46        | 0,8967        | 626,85             |
| 46 | 07.02.1997                          | 639,95     | 0,9280      | 5,32%                    | 0,9349      | 3,41        | 0,9008        | 993,03             |
| 47 | 08.02.1997                          | 466,45     | 0,9555      | 5,27%                    | 0,9497      | 3,47        | 0,9063        | 640,47             |
| 48 | 09.02.1997                          | 461,79     | 0,9604      | 5,36%                    | 0,9609      | 3,42        | 0,9103        | 636,16             |
| 49 | 10.02.1997                          | 456,5      | 0,9766      | 5,35%                    | 0,9984      | 3,47        | 0,9148        | 621,24             |

<sup>2</sup> Прием перемешивания данных подробно рассмотрен на примере в приложении к этой главе.

Перемешанные данные о доходности показаны на приведенном ниже рисунке.

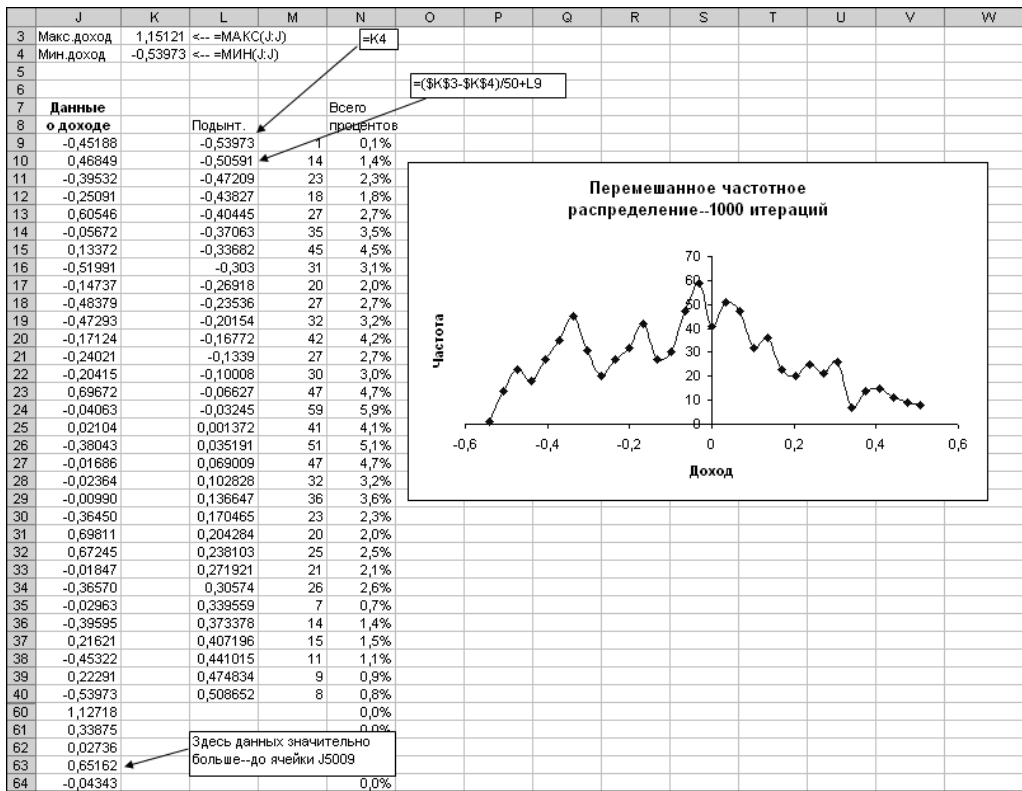


График на рисунке справа показывает вероятностное распределение дохода, далекое от нормального. Из столбцов L, M и N видно, что пятипроцентная СПР равна примерно -47%, т.е. с вероятностью 5% фирма может потерять 47% своих капиталовложений.

## Приложение. Пример перемешивания данных в Excel

Перемешивание данных применяется для получения “новых” данных из массива уже имеющихся путем из случайного перетасовывания. В этом приложении приводится простой иллюстративный пример перемешивания. Он основан на игре “именинное лото”, придуманной к 85-му дню рождения Хелены Беннинга-Франк (Helena Benninga-Frank). Правила этой игры приведены ниже.

- Каждый участник получает карточку “лото бабушки Хелены”, состоящую из пяти столбцов по пять чисел в каждом. В первом столбце содержится пять чисел со значениями от 1 до 17, во втором — от 18 до 34 и т.д. Карточка показана ниже.

| Именинное лото<br>на 85-ю годовщину<br>бабушки Хелены! |    |    |    |    |
|--------------------------------------------------------|----|----|----|----|
| Н                                                      | Е  | Л  | Е  | Н  |
| 11                                                     | 34 | 40 | 54 | 74 |
| 14                                                     | 28 | 36 | 61 | 82 |
| 12                                                     | 18 | 45 | 65 | 73 |
| 10                                                     | 23 | 37 | 63 | 84 |
| 8                                                      | 20 | 39 | 59 | 78 |

- Мы составили 85 вопросов, ответами на которые являются числа от 1 до 85. Когда вытаскивается карточка с вопросом, кто-нибудь должен дать правильный ответ на него, и тогда все, у кого на карточке есть это число, вычеркивают число с карточки. Например, задается вопрос “Сколько внуков у бабушки Хелены?”, и кто-то отвечает: “Тринадцать”. Тогда все, у кого в первом столбце на карточке есть число 13, вычеркивают его.
- Первый, кто вычеркнул пять чисел в ряд (по горизонтали, по вертикали или по диагонали), выигрывает приз. (Чтобы выиграть, не надо отличаться особым талантом — нужно лишь внимательно слушать правильные ответы.)

Создание карточек мы хотели возложить на Excel, но не знали, как подойти к этой задаче. Наконец был обнаружен необходимый прием, с помощью которого моделируется выбор шаров из урны без их замены и возвращения. (Данная тема будет подробнее рассмотрена далее.)

### Описание приема

Сам по себе прием довольно несложен. Предположим, необходимо сделать выборку из пяти случайных чисел от 1 до 17. (Именно такие числа должны стоять в первом столбце карточки “лото бабушки Хелены”.) Вот как это делается.

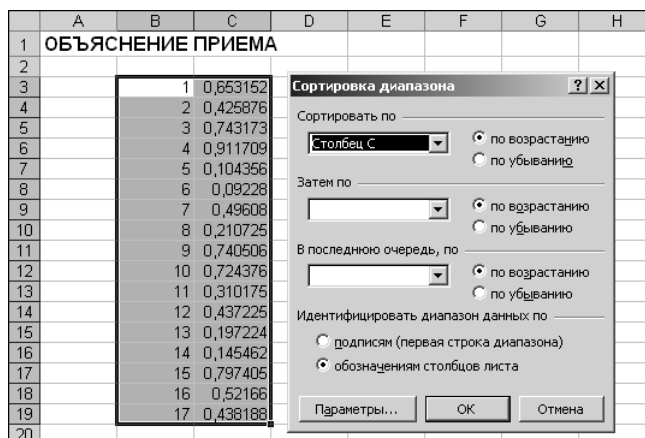


- В начале создается список чисел от 1 до 17, а соседний столбец заполняется случайными числами. На этом этапе получится таблица, показанная ниже.

|    | A                 | B  | C        | D |
|----|-------------------|----|----------|---|
| 1  | ОБЪЯСНЕНИЕ ПРИЕМА |    |          |   |
| 2  |                   |    |          |   |
| 3  |                   | 1  | 0,653152 |   |
| 4  |                   | 2  | 0,425876 |   |
| 5  |                   | 3  | 0,743173 |   |
| 6  |                   | 4  | 0,911709 |   |
| 7  |                   | 5  | 0,104356 |   |
| 8  |                   | 6  | 0,09228  |   |
| 9  |                   | 7  | 0,49608  |   |
| 10 |                   | 8  | 0,210725 |   |
| 11 |                   | 9  | 0,740506 |   |
| 12 |                   | 10 | 0,724376 |   |
| 13 |                   | 11 | 0,310175 |   |
| 14 |                   | 12 | 0,437225 |   |
| 15 |                   | 13 | 0,197224 |   |
| 16 |                   | 14 | 0,145462 |   |
| 17 |                   | 15 | 0,797405 |   |
| 18 |                   | 16 | 0,52166  |   |
| 19 |                   | 17 | 0,438188 |   |

Список случайных чисел создавался в два этапа. Вначале в каждую из ячеек от C3 до C19 вводилась формула =СЛЧИС(). Затем ячейки C3:C19 копировались, а их значения вставлялись снова в них же с помощью команды Правка⇒Специальная вставка⇒Значения (Edit⇒Paste Special⇒Values). Таким образом мы избавились от формул, оставив только их результаты, иначе функция СЛЧИС() выдавала бы новые значения после каждого нажатия клавиши <Enter>.

- Далее оба столбца сортируются по возрастанию, причем в качестве ключа сортировки используется второй из них. Вначале следует выделить соответствующие данные, а затем выполнить команду Excel Данные⇒Сортировка (Data⇒Sort). При этом экран будет выглядеть так, как показано ниже, где для сортировки выбран столбец C.



- В нашем случае выполнение команды сортировки дает следующий результат.

|    | A                 | B  | C        | D |
|----|-------------------|----|----------|---|
| 1  | ОБЪЯСНЕНИЕ ПРИЕМА |    |          |   |
| 2  |                   |    |          |   |
| 3  |                   | 6  | 0,09228  |   |
| 4  |                   | 5  | 0,104356 |   |
| 5  |                   | 14 | 0,145462 |   |
| 6  |                   | 13 | 0,197224 |   |
| 7  |                   | 8  | 0,210725 |   |
| 8  |                   | 11 | 0,310175 |   |
| 9  |                   | 2  | 0,425876 |   |
| 10 |                   | 12 | 0,437225 |   |
| 11 |                   | 17 | 0,438188 |   |
| 12 |                   | 7  | 0,49608  |   |
| 13 |                   | 16 | 0,52166  |   |
| 14 |                   | 1  | 0,653152 |   |
| 15 |                   | 10 | 0,724376 |   |
| 16 |                   | 9  | 0,740506 |   |
| 17 |                   | 3  | 0,743173 |   |
| 18 |                   | 15 | 0,797405 |   |
| 19 |                   | 4  | 0,911709 |   |

- Наконец выбираются первые пять чисел из первого столбца (в нашем примере 6, 5, 14, 13, 8). Разумеется, можно выбрать эту пятерку из середины или из конца столбца — это не имеет значения.

### Вероятностная модель

Здесь мы по сути выполняем операцию по выбору случайных чисел из урны *без возврата или замены*. Эта модель — одна из стандартных во всех учебниках по основам теории вероятностей; она представляет собой урну с шарами внутри. На каждом шаре написан свой номер; в нашем случае имеется семнадцать шаров с номерами от 1 до 17. Урну встряхивают, чтобы перемешать шары, а затем вынимают из нее пять шаров. Каждый шар после вытаскивания из урны не возвращается в нее.

Эта модель несколько отличается от стандартного генератора случайных чисел, в котором числа выбираются *с заменой* (т.е. после того, как номер шара записывается, шар возвращается в урну, и его можно вытащить снова)<sup>3</sup>.

### Программа на Visual Basic

Следующий очевидный этап в этой работе — написание программы на Visual Basic для автоматизации процесса. Вот какая таблица получается в результате.

<sup>3</sup> В Excel имеется функция СЛУЧМЕЖДУ(нижн\_гран; верхн\_гран); в английской версии она называется Rand-between(low, high). С ее помощью можно сгенерировать случайное число, заключенное между заданными границами. Для выбора пяти чисел от 1 до 17 можно просто вставить формулу =СЛУЧМЕЖДУ(1;17) в пять соседних ячеек. Но это все равно что выбирать шары из урны с заменой, поэтому может появиться несколько одинаковых чисел, что в лото недопустимо!

|    | A | B        | C                                                      | D        | E           | F        | G           | H        | I                                        | J        | K           | L |
|----|---|----------|--------------------------------------------------------|----------|-------------|----------|-------------|----------|------------------------------------------|----------|-------------|---|
| 1  |   |          | Именинное лото<br>на 85-ю годовщину<br>бабушки Хелены! |          |             |          |             |          |                                          |          |             |   |
| 2  |   |          |                                                        |          |             |          |             |          |                                          |          |             |   |
| 3  |   |          |                                                        |          |             |          |             |          | Примечание: макрос запускается «Ctrl+A». |          |             |   |
| 4  |   |          |                                                        |          |             |          |             |          |                                          |          |             |   |
| 5  |   |          | Н                                                      | Е        | Л           | Е        | Н           |          |                                          |          |             |   |
| 6  |   |          | 11                                                     | 34       | 40          | 54       | 74          |          |                                          |          |             |   |
| 7  |   |          | 14                                                     | 28       | 36          | 61       | 82          |          |                                          |          |             |   |
| 8  |   |          | 12                                                     | 18       | 45          | 65       | 73          |          |                                          |          |             |   |
| 9  |   |          | 10                                                     | 23       | 37          | 63       | 84          |          |                                          |          |             |   |
| 10 |   |          | 8                                                      | 20       | 39          | 59       | 78          |          |                                          |          |             |   |
| 11 |   |          |                                                        |          |             |          |             |          |                                          |          |             |   |
| 12 |   |          |                                                        |          |             |          |             |          |                                          |          |             |   |
| 13 |   | Числа    |                                                        | Числа    |             | Числа    |             | Числа    |                                          | Числа    |             |   |
| 14 |   | набора-1 | Случ.числа                                             | набора-2 | Случ.числа  | набора-3 | Случ.числа  | набора-4 | Случ.числа                               | набора-5 | Случ.числа  |   |
| 15 |   | 11       | 0,055593481                                            | 34       | 0,018758357 | 40       | 0,00024122  | 54       | 0,088641392                              | 74       | 0,030950808 |   |
| 16 |   | 14       | 0,080916245                                            | 28       | 0,107375324 | 36       | 0,073853331 | 61       | 0,096429063                              | 82       | 0,044933856 |   |
| 17 |   | 12       | 0,243846185                                            | 18       | 0,156863073 | 45       | 0,081893563 | 65       | 0,097929835                              | 73       | 0,098989556 |   |
| 18 |   | 10       | 0,269731581                                            | 23       | 0,156302214 | 37       | 0,105452657 | 63       | 0,166873476                              | 84       | 0,206017196 |   |
| 19 |   | 8        | 0,35347285                                             | 20       | 0,257267654 | 39       | 0,128248884 | 59       | 0,207627296                              | 78       | 0,235282242 |   |
| 20 |   | 16       | 0,38499542                                             | 27       | 0,390471468 | 50       | 0,149981081 | 67       | 0,272946835                              | 80       | 0,254601896 |   |
| 21 |   | 15       | 0,390291452                                            | 30       | 0,450640801 | 46       | 0,191922488 | 60       | 0,329735935                              | 72       | 0,256628931 |   |
| 22 |   | 9        | 0,404834151                                            | 19       | 0,474459171 | 35       | 0,210368833 | 56       | 0,401842058                              | 70       | 0,272942364 |   |
| 23 |   | 3        | 0,430261135                                            | 26       | 0,508087363 | 38       | 0,331694424 | 66       | 0,443862498                              | 77       | 0,297258019 |   |
| 24 |   | 7        | 0,462980032                                            | 22       | 0,54207021  | 49       | 0,35702312  | 57       | 0,461874366                              | 75       | 0,322717667 |   |
| 25 |   | 17       | 0,489894748                                            | 32       | 0,596094549 | 48       | 0,454207838 | 58       | 0,492165625                              | 81       | 0,34060657  |   |
| 26 |   | 5        | 0,502453923                                            | 21       | 0,628751874 | 41       | 0,536794066 | 53       | 0,530212522                              | 79       | 0,48047471  |   |
| 27 |   | 6        | 0,5137375                                              | 25       | 0,654409412 | 43       | 0,544013977 | 62       | 0,58979255                               | 83       | 0,482428074 |   |
| 28 |   | 1        | 0,543360591                                            | 31       | 0,753688097 | 42       | 0,657054961 | 55       | 0,757729292                              | 71       | 0,673646688 |   |
| 29 |   | 4        | 0,6779477                                              | 29       | 0,783995271 | 47       | 0,678913355 | 68       | 0,872546852                              | 69       | 0,750687718 |   |
| 30 |   | 2        | 0,916163981                                            | 33       | 0,832730174 | 51       | 0,704395771 | 64       | 0,827616537                              | 76       | 0,790128887 |   |
| 31 |   | 13       | 0,979077935                                            | 24       | 0,938545167 | 44       | 0,82741183  | 52       | 0,92878598                               | 85       | 0,864534497 |   |

В программе на VBA повторяется пять фрагментов кода (с некоторыми небольшими и очевидными вариациями); вот один из них, вполне типичный:

```

For Row = 1 To 17
    Range("output1").Cells(Row, 1) = Row
    Range("output1").Cells(Row, 2) = Rnd
Next Row
Range("output1").Select
Selection.Sort Key1:=Range("random1"),
    Order1:=xlAscending,
    Header:=xlGuess, _
    OrderCustom:=1, MatchCase:=False,
    Orientation:=xlTopToBottom
For Row = 1 To 5
    Range("card").Cells(Row, 1) =
        Range("output1").Cells(Row, 1)
Next Row

```

Диапазон output1 содержит два столбца и 17 строк; вторая строка диапазона называется random1.

|    | В        | С           |
|----|----------|-------------|
| 13 | Числа    |             |
| 14 | набора-1 | Случ. числа |
| 15 | 11       | 0,055593491 |
| 16 | 14       | 0,060916245 |
| 17 | 12       | 0,243845165 |
| 18 | 10       | 0,269731581 |
| 19 | 8        | 0,35347265  |
| 20 | 16       | 0,36499542  |
| 21 | 15       | 0,390291452 |
| 22 | 9        | 0,404834151 |
| 23 | 3        | 0,430261135 |
| 24 | 7        | 0,462980032 |
| 25 | 17       | 0,489894748 |
| 26 | 5        | 0,502453923 |
| 27 | 6        | 0,5137375   |
| 28 | 1        | 0,543360591 |
| 29 | 4        | 0,6779477   |
| 30 | 2        | 0,916163981 |
| 31 | 13       | 0,979077935 |

Если мы хотим напечатать карточку, можно как-нибудь назвать область, предназначенную для печати (здесь это printarea), и написать макрос для этой цели. Можно даже написать макрос для создания нескольких карточек и вывода их на печать:

```
Sub cardprint()
    Range("printarea").Select
    Selection.PrintOut Copies:=1, Collate:=True
End Sub

Sub multprint()
    For counter = 1 To 10
        doit
        Application.ScreenUpdating = True
    Next counter
End Sub
```

Главный модуль doit(), приведенный полностью в конце этой главы, содержит строку Application.ScreenUpdating = False. Эта команда запрещает обновление экрана до достижения конца главного модуля. Она экономит время, а также позволяет не загромождать экран лишними данными. Однако при выполнении модуля multprint() эта команда в конце каждого прохода цикла отменяется с целью просмотра результатов; вот зачем в тексте модуля находится строка Application.ScreenUpdating = True.

### Заключительные замечания

- Как это должно быть очевидно, числа на карточках форматируются с помощью соответствующих команд Excel.
- Структура команды Selection.Sort была заимствована из записанного макроса, после чего в нее были внесены необходимые изменения.

**Полный текст программы**

```

Sub doit()
    Application.ScreenUpdating = False

    For Row = 1 To 17
        Range("output1").Cells(Row, 1) = Row
        Range("output1").Cells(Row, 2) = Rnd
    Next Row
    Range("output1").Select
    Selection.Sort Key1:=Range("random1"),
        Order1:=xlAscending, Header:=xlGuess,
        OrderCustom:=1, MatchCase:=False,
        Orientation:=xlTopToBottom
    For Row = 1 To 5
        Range("card").Cells(Row, 1) =
            Range("output1").Cells(Row, 1)
    Next Row

    For Row = 1 To 17
        Range("output2").Cells(Row, 1) = Row + 17
        Range("output2").Cells(Row, 2) = Rnd
    Next Row
    Range("output2").Select
    Selection.Sort Key1:=Range("random2"),
        Order1:=xlAscending, Header:=xlGuess,
        OrderCustom:=1, MatchCase:=False,
        Orientation:=xlTopToBottom
    For Row = 1 To 5
        Range("card").Cells(Row, 2) =
            Range("output2").Cells(Row, 1)
    Next Row

    For Row = 1 To 17
        Range("output3").Cells(Row, 1) = Row + 34
        Range("output3").Cells(Row, 2) = Rnd
    Next Row
    Range("output3").Select
    Selection.Sort Key1:=Range("random3"),
        Order1:=xlAscending, Header:=xlGuess,
        OrderCustom:=1, MatchCase:=False,
        Orientation:=xlTopToBottom
    For Row = 1 To 5
        Range("card").Cells(Row, 3) =
            Range("output3").Cells(Row, 1)
    Next Row

    For Row = 1 To 17
        Range("output4").Cells(Row, 1) = Row + 51
        Range("output4").Cells(Row, 2) = Rnd
    Next Row

```

```
Range("output4").Select
Selection.Sort Key1:=Range("random4"),
    Order1:=xlAscending, Header:=xlGuess,
    OrderCustom:=1, MatchCase:=False,
    Orientation:=xlTopToBottom
For Row = 1 To 5
Range("card").Cells(Row, 4) =
    Range("output4").Cells(Row, 1)
Next Row

For Row = 1 To 17
Range("output5").Cells(Row, 1) = Row + 68
Range("output5").Cells(Row, 2) = Rnd
Next Row
Range("output5").Select
Selection.Sort Key1:=Range("random5"),
    Order1:=xlAscending, Header:=xlGuess,
    OrderCustom:=1, MatchCase:=False,
    Orientation:=xlTopToBottom
For Row = 1 To 5
Range("card").Cells(Row, 5) =
    Range("output5").Cells(Row, 1)
Next Row
End Sub
```

---

## III Модели ценообразования опционов

В главах 13–19 рассматривается теория ценообразования в опционах (сделках с премией) и ее приложения. В главе 13 дается введение в опционы. После введения необходимых терминов в ней рассматриваются расчеты по опционам и основные утверждения-теоремы, касающиеся формирования курсовой цены. В главе 14 описывается биномиальная модель ценообразования в опционах и ее реализация в Excel. После демонстрации работы биномиальных моделей для американских и европейских опционов на языке Visual Basic for Applications (VBA), который подробно описан в главах 31–35, строятся биномиальные функции ценообразования.

В главе 15 рассматривается логнормальный характер курсовой стоимости ценных бумаг. Предположение о логнормальности лежит в основе формул ценообразования Блэка–Скоулза (Black–Scholes). В этой же главе логнормальные процессы ценообразования моделируются средствами Excel.

Глава 16 посвящена формулам Блэка–Скоулза для европейских опционов типа “колл”. Эти формулы можно реализовать либо путем прямого вычисления в таблице, либо путем создания новых функций на языке VBA в файле таблицы. В главе показаны в действии оба метода. В главе 17 рассматривается применение модели Блэка–Скоулза — страхование портфеля ценных бумаг. С помощью Excel там моделируется реализация стратегий страхования портфеля; в этом процессе применяются логнормальные модели, разработанные в главе 15.

Реальные опционы — сделки опционального характера — рассматриваются в главе 18. Реальные опционы представляют собой применение аппарата опционов к анализу эффективности намечаемых капиталовложений и задачам оценивания активов, рассмотренным в главах 1–4. Наконец, в главе 19 обсуждаются границы досрочного исполнения для опционов на продажу и покупку.





---

# 13 Введение в опционы

---

## 13.1. Основные термины и определения

В этой главе дается краткое введение в опционы. Содержимое этой главы может претендовать лишь на то, чтобы кратко ознакомить с предметом уже информированных читателей. Если вам вообще ничего не известно об опционах, обратитесь к учебнику по финансам<sup>1</sup>. Мы начнем с основных определений и терминологии опционов, затем перейдем к графикам выплат по опционам и “графикам прибыли” и закончим обсуждением некоторых наиболее важных утверждений относительно арбитражных операций с опционами (иногда именуемых линейными ограничениями ценообразования). В последующих главах рассматриваются два метода ценообразования опционов: биномиальная модель (глава 14) и модель Блэка–Скоулза (глава 16).

*Опционом* на капитальный актив называется ценная бумага, которая дает ее держателю право купить или продать одну акцию (долю) этого актива в оговоренный день (или не позднее него) по заранее определенной цене. Ниже приводится краткий словарь терминов и обозначений, применяемых при работе с опционами.

- *Опцион на покупку, или “колл” (call), C.* Опцион, который дает держателю право приобрести акцию (долю актива) в определенный день или не позднее него по заранее определенной цене.
- *Опцион на продажу, или “пут” (put), P.* Опцион, который дает держателю право продать акцию (долю актива) в определенный день или не позднее него по заранее определенной цене.
- *Цена исполнения (exercise price), X.* Цена, по которой держатель опциона может продать или купить ценную бумагу, обеспечивающую опцион; также называется *ценой использования (strike price)*.
- *Дата погашения (expiration date), T.* Дата, не позже которой держатель может приобрести или продать обеспечивающий актив (может являться и точной датой сделки).
- *Цена актива (stock price),  $S_t$ .* Курсовая цена обеспечивающего актива в момент времени  $t$ . Текущий курс обозначается  $S_0$ .
- *Цена опциона (option price).* Курсовая цена, по которой продается или покупается опцион.

---

<sup>1</sup> Хорошие вводные главы имеются в следующих книгах: John Hull (2000), гл. 6–8; Bodie, Kane, Marcus (1996), гл. 19, 20.

**Американские и европейские опционы.** На жаргоне фондового рынка *американским опционом* называется такой опцион, который можно исполнить либо ранее даты погашения, либо точно в назначенную дату. В то же время *европейским опционом* называется опцион, который подлежит исполнению только в назначенный день  $T$ . Эти термины создают путаницу по двум причинам.

1. Опционы, которыми торгуют на европейских и американских опционных биржах, — почти исключительно американского типа.
2. Простейшие формулы ценообразования опционов (в том числе знаменитая формула ценообразования Блэка–Скоулза, рассматриваемая в главе 16) выведены для *европейских опционов*. Как будет показано в разделе 13.5, во многих случаях вычислять цену американских опционов можно по тем же правилам, что и европейских.

Цену европейского опциона на покупку (“колл”) в момент  $t$  будем обозначать  $C_t$ ; цену европейского опциона на продажу (“пут”) —  $P_t$ . В тех случаях, когда очевидно, что цена опциона относится к текущему моменту, индекс будет опускаться, и вместо  $C_0$  или  $P_0$  будем писать просто  $C$  или  $P$ . На тот случай, когда будет нужна более полная и точная информация, введем обозначение  $C_t(S_t, X, T)$  для цены опциона на покупку в момент  $t$  при цене обеспечивающего актива  $S_t$ , цене исполнения  $X$  и дате погашения  $T$ . Если мы хотим указать, что формула ценообразования относится к опциону американского типа, то будем применять верхний индекс  $A$ :  $C_t^A$ ,  $C_t^A(S_t, X, T)$  или  $P_t^A(S_t, X, T)$ . При записи без верхнего индекса речь всегда будет идти о европейских опционах.

### 13.1.1. Продажа и покупка опционов: финансовые потоки

Покупатель опциона типа “колл” (на покупку) приобретает право приобрести долю актива по установленной цене в день  $T$  или не позже него и платит за это право во время покупки опциона. Продавец опциона на покупку соответственно продает (говорят также “выписывает”) такое право и немедленно получает за это цену опциона, в обмен принимая на себя обязательство предоставить в будущем требуемую единицу актива по цене исполнения, если этого потребует покупатель опциона. Если смотреть на все с позиций движения денежных средств, то покупатель опциона имеет начальный отрицательный поток средств (из-за выплаты цены опциона) и будущие потоки, в худшем случае равные нулю (если исполнение опциона нецелесообразно), а в лучшем — положительные (при исполнении опциона). Положение продавца опциона прямо противоположно: начальный положительный поток средств и конечный поток, в лучшем случае равный нулю.

| Схема платежей по опциону "колл" (на покупку)                                                        |                                                          |                                    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|------------------------------------|
| Момент 0                                                                                             | Момент T                                                 |                                    |
| Приобретение опциона,<br>денежный поток $< 0$                                                        | Расчет по опциону,<br>$\text{Max}[S_T - X, 0] \geq 0$    | Денежные<br>потоки у<br>покупателя |
| Между моментами 0 и T:<br>Ден. поток = 0 для европ. опциона<br>Ден. поток $\geq 0$ для амер. опциона |                                                          |                                    |
| Выпуск (продажа) опциона,<br>денежный поток $> 0$                                                    | Расчет по опциону<br>$= - \text{Max}[S_T - X, 0] \leq 0$ | Денежные<br>потоки у<br>продавца   |
| Между моментами 0 и T:<br>Ден. поток = 0 для европ. опциона<br>Ден. поток $\leq 0$ для амер. опциона |                                                          |                                    |

То же самое справедливо для потоков средств покупателя и продавца опциона на продажу актива.

| Схема платежей по опциону "пут" (на продажу)                                                         |                                                          |                                    |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|------------------------------------|
| Момент 0                                                                                             | Момент T                                                 |                                    |
| Приобретение опциона,<br>денежный поток $< 0$                                                        | Расчет по опциону,<br>$\text{Max}[S_T - X, 0] \geq 0$    | Денежные<br>потоки у<br>покупателя |
| Между моментами 0 и T:<br>Ден. поток = 0 для европ. опциона<br>Ден. поток $\geq 0$ для амер. опциона |                                                          |                                    |
| Выпуск (продажа) опциона,<br>денежный поток $> 0$                                                    | Расчет по опциону<br>$= - \text{Max}[S_T - X, 0] \leq 0$ | Денежные<br>потоки у<br>продавца   |
| Между моментами 0 и T:<br>Ден. поток = 0 для европ. опциона<br>Ден. поток $\leq 0$ для амер. опциона |                                                          |                                    |

## 13.2. Некоторые примеры

Далее в этом разделе приведены репринтные фрагменты страниц опционов из *Wall Street Journal*<sup>2</sup>. Ниже приведен отрывок из котировок опционов American

<sup>2</sup> Отсканированные фрагменты взяты из международного издания *Wall Street Journal* за понедельник, 29 января 1996 г. Перепечатаны с разрешения *Wall Street Journal* © Dow Jones & Company, Inc. Авторские права зарезервированы во всех странах мира.

Exress (AmExpr — один из наиболее активно торгуемых за один день контрактов, как это видно из отрывка).

| Option | Strike | Exp. | -Call- |      | -Put- |      |
|--------|--------|------|--------|------|-------|------|
|        |        |      | Vol.   | Last | Vol.  | Last |
| AmExpr | 35     | Feb  | 1000   | 8½   | ...   | ...  |
| 43¼    | 35     | Apr  | 602    | 9½   | 18    | 5¼   |
| 43¼    | 37½    | Feb  | 650    | 6½   | 722   | 1¼   |
| 43¼    | 37½    | Apr  | 10     | 6    | 405   | 1¼   |
| 43¼    | 40     | Feb  | 2140   | 4¾   | 170   | 1½   |
| 43¼    | 40     | Jul  | 589    | 6½   | 155   | 1¾   |
| 43¼    | 42½    | Feb  | 1831   | 2¼   | 815   | 1    |
| 43¼    | 42½    | Apr  | 250    | 3¾   | 16    | 2¼   |
| 43¼    | 42½    | Jul  | 85     | 4¾   | 1030  | 2½   |
| 43¼    | 45     | Feb  | 4830   | 1¾   | 218   | 2¾   |
| 43¼    | 45     | Mar  | 836    | 1¼   | 223   | 3    |
| 43¼    | 45     | Apr  | 1157   | 2¾   | 103   | 3¼   |
| 43¼    | 45     | Jul  | 231    | 3¾   | 35    | 4¼   |
| 43¼    | 47½    | Jul  | 410    | 2¾   | ...   | ...  |
| 43¼    | 50     | Apr  | 1977   | 1¼   | 2     | 6¾   |

Опционы на AmExpr имеют цены исполнения, равные 35, 37 ½, 40, 42 ½, 45, 47 ½ и 50. Даты погашения опционов — февраль, апрель и июль 1996 г. Не во всех месяцах имеются опционы по всем ценам исполнения. Например, нет апрельского опциона с ценой исполнения 40. Не все опционы участвуют в торгах (например, июльский на продажу по цене 47 ½ или февральский на продажу по 35).

Наиболее активно торгуемый опцион на 26 января 1996 г. — это опцион с февральским сроком исполнения по цене 45 на покупку (“колл”). Изучим его более подробно. Это опцион, срок которого истекает в пятницу, 17 февраля (все опционы истекают в третью пятницу установленного для них месяца). Он дает право его держателю приобрести 100 акций капитала American Express по 45 долл. На 26 января в торгах участвовало 4 830 таких опционов (т.е. прав на приобретение в совокупности 483 000 акций); цена каждого опциона (на одну единицу обеспечивающего актива) составляла 1 ⅜<sup>3</sup>. Эта цена уплачивается за привилегию приобрести между текущим моментом и 17 февраля одну акцию капитала American Express за 45 долл. независимо от рыночного курса этих акций в момент исполнения опциона<sup>4</sup>.

<sup>3</sup> Далее в нашем изложении, в том числе в последующих главах, игнорируется тот факт, что опцион дает право продажи или покупки 100 акций. Таким образом, если февральский опцион ценой 45 долл. котируется по 1 ⅜, то мы анализируем его так, как будто покупатель приобрел (за 1,375 долл.) право купить *одну* акцию AmExpr за 45 долл., тогда как на самом деле покупатель потратил 137,5 долл. на право приобретения 100 акций за 4500 долл.

<sup>4</sup> Как показано в разделе 13.5, исполнение опциона до истечения его срока обычно не оптимально. Одна из замечательных теорем в теории ценообразования опционов гласит, что досрочное исполнение может быть оптимальным только в том случае, если по обеспечиваемому активу выплачиваются дивиденды до даты истечения срока. В результате американские опционы на покупку (“колл”) во многих случаях можно анализировать и рассчитывать как европейские опционы.

## U.S. LISTED OPTIONS QUOTATIONS

Friday, January 26, 1996

Volume and close for actively traded equity options with results for corresponding put or call contract as of 3 p.m. Volume figures are unofficial. Open Interest is total outstanding for all exchanges and reflects previous trading day. Close when possible is shown for the underlying stock on primary market. CB-Chicago Board Options Exchange. AM-American Stock Exchange. PB-Philadelphia Stock Exchange. PC-Pacific Stock Exchange. NY-New York Stock Exchange. XC-Composite. c-Call. p-Put.

## MOST ACTIVE CONTRACTS

| Option | Strike     | Vol.    | Exch. | Last     | Net Chg | Last Close | Open Int. | Option | Strike     | Vol.    | Exch. | Last     | Net Chg | Last Close | Open Int. |
|--------|------------|---------|-------|----------|---------|------------|-----------|--------|------------|---------|-------|----------|---------|------------|-----------|
| Compaq | Feb 50     | 11,851  | PC    | 3/4 -    | 1/16    | 46 3/4     | 18,512    | NwmtMn | Jun 50     | p 2,500 | PB    | 1 3/4    | ...     | 56 3/4     | 80        |
| MicrTc | Feb 35     | p10,505 | XC    | 2 1/16 + | 3/4     | 34 3/4     | 11,185    | I B M  | Feb 95     | p 2,335 | CB    | 1/2 -    | 3/16    | 104 7/8    | 8,494     |
| MicrTc | Feb 35     | 6,162   | XC    | 2 1/8 -  | 7/8     | 34 3/4     | 13,642    | Compaq | Feb 50     | p 2,268 | PC    | 3 3/4 +  | 3/16    | 46 3/4     | 7,293     |
| MicrTc | Feb 30     | p 5,339 | XC    | 1 +      | 1/4     | 34 3/4     | 15,136    | MicrTc | Apr 35     | p 2,222 | XC    | 4 1/2 -  | 1/2     | 34 3/4     | 4,236     |
| Loral  | Apr 45     | 5,288   | CB    | 1 7/8 +  | 1/4     | 45 1/2     | 10,128    | AmExpr | Feb 40     | p 2,140 | XC    | 4 3/4 +  | 2 1/2   | 43 3/4     | 1,394     |
| AmExpr | Feb 45     | 4,830   | XC    | 1 3/4 +  | 1 1/4   | 43 3/4     | 404       | BankAm | Mar 60     | p 2,130 | CB    | 1 -      | 7/8     | 63 3/4     | 408       |
| MicrTc | Feb 32 1/2 | p 4,347 | XC    | 1 1/4 +  | 1/2     | 34 3/4     | 1,702     | Intel  | Feb 55     | p 2,129 | AM    | 1 7/8 -  | 1/4     | 55         | 7,250     |
| BankAm | Jan 98 60  | 4,150   | CB    | 1 1/4 +  | 3/4     | 63 3/4     | 564       | MicrTc | Feb 45     | p 2,107 | XC    | 1 1/4 -  | 1/4     | 34 3/4     | 11,414    |
| AppleC | Feb 35     | 3,822   | AM    | 3/4 +    | 1/16    | 30 3/4     | 12,396    | Motrla | Feb 50     | p 2,076 | AM    | 3/4 -    | 3/16    | 53 1/4     | 11,407    |
| Loral  | Feb 45     | 3,712   | CB    | 1 1/4 +  | 3/4     | 45 1/2     | 9,083     | Compaq | Feb 45     | p 2,065 | PC    | 1 +      | 1/4     | 46 3/4     | 5,533     |
| MicrTc | Feb 40     | 3,331   | XC    | 1 1/16 - | 7/8     | 34 3/4     | 18,476    | ApiMat | Feb 35     | p 2,063 | PC    | 1 3/4 +  | 1/4     | 36 3/4     | 1,402     |
| Hasbro | Jul 45     | 3,301   | PC    | 4 1/4 +  | ...     | 42 3/4     | 323       | Compaq | Feb 45     | p 2,036 | PC    | 3 3/4 -  | 1/4     | 46 3/4     | 4,037     |
| I B M  | Feb105     | 3,280   | CB    | 2 3/4 +  | 1/16    | 104 7/8    | 9,453     | GTRiba | Feb 10     | p 2,034 | XC    | 1/2 -    | 1/16    | 9 3/4      | 13,869    |
| EMC    | Feb 20     | 3,184   | CB    | 3/4 -    | 1 1/16  | 19 3/4     | 8,257     | BkBot  | Jan 97 40  | p 2,000 | PB    | 2 3/4 +  | 3/4     | 43 1/2     | 244       |
| Hasbro | Mar 45     | 2,982   | PC    | 2        | ...     | 42 3/4     | 202       | SFeGld | Feb 12 1/2 | p 2,000 | XC    | 3 1/4 -  | 1/4     | 15 3/4     | 135       |
| Hasbro | Feb 40     | 2,962   | PC    | 4 3/4 +  | ...     | 42 3/4     | 1,901     | MicrTc | Mar 40     | p 1,998 | XC    | 1 1/16 - | 7/8     | 34 3/4     | 2,800     |
| I B M  | Feb110     | 2,860   | CB    | 1 1/16 - | 3/16    | 104 7/8    | 7,117     | Iomega | Feb 55     | p 1,979 | XC    | 1 3/4 -  | 1 1/8   | 48 1/2     | 4,518     |
| GTele  | Feb 27 1/2 | 2,688   | XC    | 1 1/16 + | 1 1/16  | 28         | 6,292     | AmExpr | Apr 50     | p 1,977 | XC    | 1 1/16 + | 1 1/8   | 43 3/4     | 529       |
| I B M  | Feb100     | p 2,571 | CB    | 1 1/16 - | 5/16    | 104 7/8    | 11,050    | I B M  | Feb105     | p 1,968 | CB    | 3 -      | 1/2     | 104 7/8    | 5,085     |
| Intel  | Feb 55     | 2,544   | AM    | 1 1/16 + | 3/16    | 55         | 17,785    | Hasbro | Feb 45     | p 1,897 | PC    | 1 3/4    | ...     | 42 3/4     | 2,307     |

| Option | Strike | Exp. | -Call-      | -Put-      | Option   | Strike | Exp. | -Call-     | -Put-     | Option   | Strike | Exp. | -Call-     | -Put-      |
|--------|--------|------|-------------|------------|----------|--------|------|------------|-----------|----------|--------|------|------------|------------|
| ADT    | 12 1/2 | Mar  | ...         | 625 3/16   | Enitpe   | 15     | Apr  | 100 3/16   | 220 1 1/4 | 53 1/4   | 50     | Feb  | 171 4 1/8  | 2076 9/16  |
| A S A  | 45     | Feb  | 234 1 3/4   | 53 7/8     | Exide    | 30     | Feb  | 49 4 1/8   | 318 7/8   | 53 1/4   | 50     | Mar  | 60 4 7/8   | 245 1 1/4  |
| 46     | 47 1/2 | Mar  | 345 1 1/4   | ...        | 33 3/4   | 35     | Feb  | 763 1 1/4  | 79 3      | 53 1/4   | 50     | Jul  | 1 6 3/4    | 329 3      |
| AT&T   | 65     | Mar  | 1021 1 3/4  | ...        | 33 3/4   | 30     | May  | ...        | 242 16    | 53 1/4   | 55     | Feb  | 340 1 3/4  | 63 2 3/4   |
| 64 3/4 | 70     | Feb  | 531 1 1/8   | 50 6 1/8   | F N M    | 27 1/2 | Feb  | 350 4 3/8  | 55 1 1/8  | 53 1/4   | 55     | Apr  | 277 3      | 3 4 1/4    |
| Abbt L | 40     | Feb  | 546 1 1/4   | 45 1 1/16  | 32       | 30     | Feb  | 183 2 1/8  | 680 3/4   | 53 1/4   | 60     | Apr  | 220 1 1/4  | 186 7 1/2  |
| A M D  | 20     | Feb  | 302 1       | 510 3/4    | 32       | 30     | Mar  | 26 2 3/8   | 684 3/4   | 53 1/4   | 65     | Jul  | 230 1 1/4  | ...        |
| Alaska | 20     | Feb  | 1395 1 1/16 | 24 1 1/16  | Ford     | 30     | Feb  | 364 3/4    | 23 1 1/8  | NewbNk   | 50     | Feb  | 371 2      | 47 2 1/2   |
| 19 1/2 | 20     | Apr  | 405 1 1/4   | ...        | 29 1/4   | 30     | Jun  | 227 1 1/2  | 22 2 1/8  | 49 1/2   | 50     | Mar  | 514 3 3/8  | 16 3 1/2   |
| Altera | 60     | Feb  | 213 5 1/4   | 62 3       | FounHI   | 40     | Feb  | 370 2 3/4  | 380 1     | 49 1/2   | 55     | Mar  | 368 1 1/2  | ...        |
| Alza   | 22 1/2 | Jul  | ...         | 520 7/8    | FrMcRP   | 20     | Jun  | 260 1 1/8  | ...       | NwmtMn   | 50     | Jun  | 1 8 3/8    | 2500 1 3/4 |
| 26 1/2 | 27 1/2 | Apr  | 355 1 1/8   | ...        | Gandif   | 15     | Feb  | 250 1 1/8  | 150 1 1/8 | Nokia    | 35     | Feb  | 230 3 3/8  | ...        |
| AmerOn | 35     | Feb  | 311 7 3/8   | 76 3/4     | Ghwy2000 | 20     | Feb  | 409 5 3/8  | 124 3 1/8 | Norame   | 10     | May  | 261 9 1/8  | ...        |
| 42     | 40     | Feb  | 771 3 3/8   | 720 2      | 25 3/4   | 22 1/2 | Feb  | 767 3 3/8  | 104 1/2   | NthfldLb | 20     | Feb  | 357 2 1/8  | 100 2 3/4  |
| 42     | 40     | Apr  | 732 6 1/2   | 122 4 1/2  | 25 3/4   | 25     | Feb  | 1253 2     | 44 1 1/8  | 20 3/4   | 20     | May  | 1030 4     | ...        |
| 42     | 42 1/2 | Apr  | 1070 5      | 20 6       | 25 3/4   | 25     | Mar  | 436 3 1/8  | 270 2 3/4 | 20 3/4   | 22 1/2 | Feb  | 327 1 3/4  | ...        |
| 42     | 45     | Feb  | 1102 1 1/2  | 17 5 1/8   | 25 3/4   | 30     | Mar  | 380 1 1/8  | ...       | 20 3/4   | 22 1/2 | Aug  | 210 4 1/4  | ...        |
| 42     | 45     | Apr  | 280 4 1/4   | ...        | 25 3/4   | 30     | Jun  | 255 2 3/4  | ...       | 20 3/4   | 22 1/2 | Aug  | 449 3 3/4  | 43 7/8     |
| 42     | 50     | Feb  | 218 1 1/8   | ...        | GavICn   | 10     | Feb  | 266 5 1/8  | 130 1 1/2 | Novell   | 10     | Aug  | 907 1 1/8  | 165 3/4    |
| 42     | 50     | Apr  | 387 2 3/4   | ...        | 9        | 10     | Mar  | 273 3/4    | 5 1 3/4   | 12 3/4   | 12 1/2 | Mar  | 300 1 1/4  | 155 1 1/8  |
| AmExpr | 35     | Feb  | 1000 8 3/4  | ...        | G M      | 50     | Feb  | 1729 2 1/8 | 351 7/8   | 12 3/4   | 15     | Feb  | 342 1 1/4  | 7 3        |
| 43 1/4 | 35     | Apr  | 602 9 3/8   | 18 5 1/8   | 51 1/8   | 50     | Mar  | 460 2 3/4  | 94 1 1/4  | 12 3/4   | 15     | Mar  | 400 7 1/4  | 2 2 1/4    |
| 43 1/4 | 37 1/2 | Feb  | 650 6 3/4   | 722 1/8    | 51 1/8   | 50     | Jun  | 227 4 3/8  | 38 2 1/4  | 12 3/4   | 15     | May  | 370 7/8    | 110 3 1/4  |
| 43 1/4 | 37 1/2 | Apr  | 10 6        | 405 1 1/8  | 51 1/8   | 55     | Feb  | 363 3/4    | 42 3 3/4  | 12 3/4   | 20     | Feb  | 242 1 3/4  | ...        |
| 43 1/4 | 40     | Feb  | 2140 4 3/8  | 170 1 1/2  | 51 1/8   | 55     | Mar  | 1546 3/4   | 5 4 1/8   | 12 3/4   | 20     | May  | 301 3/8    | ...        |
| 43 1/4 | 40     | Jul  | 589 6 1/2   | 155 1 3/4  | Genzym   | 75     | Feb  | 260 1 1/2  | ...       | OakTch   | 60     | Feb  | 471 1 1/8  | ...        |
| 43 1/4 | 42 1/2 | Feb  | 1831 2 1/8  | 815 1      | GlenFd   | 15     | Jul  | ...        | 210 7/8   | 52 1/2   | 60     | Mar  | 209 3 3/4  | ...        |
| 43 1/4 | 42 1/2 | Apr  | 250 3 3/8   | 16 2 3/8   | Grace    | 60     | Feb  | 320 2 1/8  | 3 2 1/8   | OfceDp   | 15     | Apr  | ...        | 1000 5 1/8 |
| 43 1/4 | 42 1/2 | Jul  | 85 4 3/8    | 1030 2 1/2 | GrdCean  | 30     | Feb  | 331 1 1/8  | 10 1 1/8  | Oracle   | 50     | Feb  | 447 3 3/4  | 108 3 3/8  |
| 43 1/4 | 45     | Feb  | 4830 1 3/4  | 218 2 3/4  | GTele    | 25     | Feb  | 400 3 3/4  | 250 1 1/2 | 47 3/8   | 50     | Mar  | 473 1 1/4  | 26 3 3/8   |
| 43 1/4 | 45     | Mar  | 836 1 1/8   | 22 3       | 28       | 27 1/2 | Feb  | 2688 1 1/8 | 5 1 1/2   | OrbSci   | 17 1/2 | Feb  | 225 1 1/2  | ...        |
| 43 1/4 | 45     | Apr  | 1157 2 3/8  | 103 3 1/4  | 28       | 30     | Feb  | 218 1 1/8  | ...       | Organo   | 30     | Feb  | 629 1 3/8  | 15 1 3/4   |
| 43 1/4 | 45     | Jul  | 231 3 3/4   | 35 4 1/8   | 28       | 30     | Mar  | 1856 1 1/8 | ...       | ParntC   | 50     | Feb  | 539 1 1/8  | 1300 3/4   |
| 43 1/4 | 47 1/2 | Jul  | 410 2 3/8   | ...        | GTRiba   | 7 1/2  | Feb  | 212 2 1/4  | ...       | PepBys   | 30     | Feb  | 59 1 1/8   | 17 2 3/4   |
| 43 1/4 | 50     | Apr  | 1977 1 1/8  | 2 6 3/8    | 9 3/8    | 10     | Feb  | 2034 1 1/2 | 250 7/8   | Pepsi    | 55     | Feb  | 615 5      | ...        |
| Amgen  | 55     | Feb  | 233 5       | 139 7/8    | 9 3/8    | 10     | Mar  | 778 1 3/8  | 44 1 3/8  | 59 1/8   | 60     | Feb  | 812 1      | ...        |
| 59 1/2 | 60     | Feb  | 258 1 1/8   | 513 2 3/8  | 9 3/8    | 10     | Apr  | 599 1 1/8  | ...       | Pfizer   | 60     | Feb  | 310 5 3/8  | 30 3/4     |
| AnnTav | 10     | Feb  | 51 1        | 334 1 1/8  | Harlev   | 30     | Feb  | 228 4 1/2  | 27 1 1/4  | 47 3/8   | 65     | Feb  | 1123 1 1/8 | 104 1 3/4  |



## INDEX OPTIONS TRADING

Friday, January 26, 1996

Volume, close, net change and open interest for all contracts. Volume figures are unofficial. Open interest reflects previous trading day. p-Put, c-Call. The totals for call and put volume and open interest are closing figures.

## CHICAGO

| Strike                       | Vol. | Close     | Net. Chg. | Open Int. |
|------------------------------|------|-----------|-----------|-----------|
| <b>CB MEXICO INDEX (MEX)</b> |      |           |           |           |
| Jun 85 p                     | 20   | 11 1/4    | - 1/4     | 22        |
| Feb 85 c                     | 5    | 7 1/4     | - 1/4     | 170       |
| Mar 85 c                     | 10   | 11 1/4    | - 1/4     | 32        |
| Feb 80 c                     | 110  | 1 3/4     | - 3/8     | 431       |
| Mar 80 c                     | 110  | 8 1/4     | - 1/4     | 248       |
| Feb 85 p                     | 20   | 3 1/4     | - 1/4     | 248       |
| Call Vol.                    | 122  | Open Int. | 1,418     |           |
| Put Vol.                     | 129  | Open Int. | 3,141     |           |

| Strike                     | Vol. | Close     | Net. Chg. | Open Int. |
|----------------------------|------|-----------|-----------|-----------|
| <b>CB TECHNOLOGY (TXN)</b> |      |           |           |           |
| Jun 85 p                   | 16   | 2 1/4     | - 1/4     | 900       |
| Feb 85 c                   | 5    | 2 1/4     | - 1/4     | 1,561     |
| Mar 85 c                   | 5    | 2 1/4     | - 1/4     | 435       |
| Feb 80 c                   | 50   | 6 1/4     | - 1/4     | 1,500     |
| Mar 80 c                   | 676  | 6 1/4     | - 1/4     | 1,500     |
| Feb 85 p                   | 190  | 4 1/4     | - 1/4     | 595       |
| Mar 85 p                   | 50   | 8 1/4     | - 1/4     | 188       |
| Feb 80 c                   | 110  | 2 1/4     | - 1/4     | 335       |
| Mar 80 c                   | 540  | 1 1/4     | - 1/4     | 33        |
| Feb 85 p                   | 450  | 1 1/4     | - 1/4     | 450       |
| Mar 85 p                   | 250  | 4 1/4     | - 1/4     | 33        |
| Call Vol.                  | 171  | Open Int. | 9,113     |           |
| Put Vol.                   | 417  | Open Int. | 13,417    |           |

| Strike                  | Vol.  | Close     | Net. Chg. | Open Int. |
|-------------------------|-------|-----------|-----------|-----------|
| <b>NASDAQ-100 (NDX)</b> |       |           |           |           |
| Feb 85 p                | 315   | 3 1/4     | - 1/4     | 3,421     |
| Mar 85 p                | 20    | 3 1/4     | - 1/4     | 507       |
| Apr 85 p                | 20    | 3 1/4     | - 1/4     | 1,180     |
| Feb 80 c                | 30    | 7 1/4     | - 1/4     | 3,179     |
| Mar 80 c                | 2,000 | 3 1/4     | - 1/4     | 183       |
| Feb 85 p                | 6     | 3 1/4     | - 1/4     | 5,014     |
| Mar 85 p                | 98    | 3 1/4     | - 1/4     | 1,596     |
| Feb 80 c                | 26    | 3 1/4     | - 1/4     | 2,368     |
| Mar 80 c                | 108   | 3 1/4     | - 1/4     | 935       |
| Feb 85 p                | 11    | 3 1/4     | - 1/4     | 230       |
| Mar 85 p                | 172   | 3 1/4     | - 1/4     | 3,062     |
| Feb 80 c                | 1     | 3 1/4     | - 1/4     | 30        |
| Mar 80 c                | 3     | 3 1/4     | - 1/4     | 164       |
| Feb 85 p                | 54    | 3 1/4     | - 1/4     | 104       |
| Mar 85 p                | 123   | 3 1/4     | - 1/4     | 1,233     |
| Feb 80 c                | 100   | 3 1/4     | - 1/4     | 451       |
| Mar 80 c                | 123   | 3 1/4     | - 1/4     | 1,233     |
| Feb 85 p                | 2,148 | 3 1/4     | - 1/4     | 829       |
| Mar 85 p                | 11    | 3 1/4     | - 1/4     | 408       |
| Feb 80 c                | 20    | 3 1/4     | - 1/4     | 133       |
| Mar 80 c                | 20    | 3 1/4     | - 1/4     | 13        |
| Feb 85 p                | 20    | 3 1/4     | - 1/4     | 20        |
| Mar 85 p                | 20    | 3 1/4     | - 1/4     | 20        |
| Call Vol.               | 1,407 | Open Int. | 24,243    |           |
| Put Vol.                | 1,379 | Open Int. | 43,747    |           |

| Strike                    | Vol. | Close     | Net. Chg. | Open Int. |
|---------------------------|------|-----------|-----------|-----------|
| <b>RUSSELL 2000 (RUT)</b> |      |           |           |           |
| Feb 85 p                  | 199  | 3 1/4     | - 1/4     | 199       |
| Mar 85 p                  | 1    | 3 1/4     | - 1/4     | 283       |
| Apr 85 p                  | 1    | 3 1/4     | - 1/4     | 1,592     |
| Feb 80 c                  | 1    | 3 1/4     | - 1/4     | 316       |
| Mar 80 c                  | 20   | 8 1/4     | - 3/4     | 10        |
| Call Vol.                 | 9    | Open Int. | 5,705     |           |
| Put Vol.                  | 31   | Open Int. | 9,469     |           |

| Strike                           | Vol.  | Close     | Net. Chg. | Open Int. |
|----------------------------------|-------|-----------|-----------|-----------|
| <b>S &amp; P 100 INDEX (OEX)</b> |       |           |           |           |
| Feb 85 p                         | 21    | 4 1/4     | - 1/4     | 4,036     |
| Mar 85 p                         | 40    | 4 1/4     | - 1/4     | 5,539     |
| Apr 85 p                         | 860   | 4 1/4     | - 1/4     | 8,968     |
| Feb 80 c                         | 2     | 8 1/4     | - 1/4     | 140       |
| Mar 80 c                         | 300   | 2 1/4     | - 1/4     | 2,047     |
| Feb 85 p                         | 844   | 4 1/4     | - 1/4     | 2,911     |
| Mar 85 p                         | 1,149 | 4 1/4     | - 1/4     | 597       |
| Feb 80 c                         | 60    | 1 1/4     | - 1/4     | 1,249     |
| Mar 80 c                         | 250   | 3 1/4     | - 1/4     | 3,427     |
| Feb 85 p                         | 275   | 4 1/4     | - 1/4     | 6,054     |
| Mar 85 p                         | 537   | 4 1/4     | - 1/4     | 4,609     |
| Feb 80 c                         | 40    | 2 1/4     | - 1/4     | 1         |
| Mar 80 c                         | 62    | 7 1/4     | - 1/4     | 1         |
| Feb 85 p                         | 1,308 | 4 1/4     | - 1/4     | 326       |
| Mar 85 p                         | 1,308 | 4 1/4     | - 1/4     | 14,105    |
| Feb 80 c                         | 45    | 1 1/4     | - 1/4     | 2,303     |
| Mar 80 c                         | 540   | 1 1/4     | - 1/4     | 3,563     |
| Feb 85 p                         | 675   | 4 1/4     | - 1/4     | 10,157    |
| Mar 85 p                         | 19    | 4 1/4     | - 1/4     | 3,592     |
| Feb 80 c                         | 925   | 4 1/4     | - 1/4     | 3,410     |
| Mar 80 c                         | 1,522 | 4 1/4     | - 1/4     | 892       |
| Feb 85 p                         | 868   | 4 1/4     | - 1/4     | 22,832    |
| Mar 85 p                         | 1,749 | 4 1/4     | - 1/4     | 6,358     |
| Feb 80 c                         | 75    | 1 1/4     | - 1/4     | 478       |
| Mar 80 c                         | 10    | 3 1/4     | - 1/4     | 884       |
| Call Vol.                        | 3,612 | Open Int. | 15,014    |           |
| Put Vol.                         | 3,612 | Open Int. | 15,014    |           |

| Strike                           | Vol.  | Close     | Net. Chg. | Open Int. |
|----------------------------------|-------|-----------|-----------|-----------|
| <b>S &amp; P 500 INDEX (SPX)</b> |       |           |           |           |
| Feb 85 p                         | 21    | 4 1/4     | - 1/4     | 4,036     |
| Mar 85 p                         | 40    | 4 1/4     | - 1/4     | 5,539     |
| Apr 85 p                         | 860   | 4 1/4     | - 1/4     | 8,968     |
| Feb 80 c                         | 2     | 8 1/4     | - 1/4     | 140       |
| Mar 80 c                         | 300   | 2 1/4     | - 1/4     | 2,047     |
| Feb 85 p                         | 844   | 4 1/4     | - 1/4     | 2,911     |
| Mar 85 p                         | 1,149 | 4 1/4     | - 1/4     | 597       |
| Feb 80 c                         | 60    | 1 1/4     | - 1/4     | 1,249     |
| Mar 80 c                         | 250   | 3 1/4     | - 1/4     | 3,427     |
| Feb 85 p                         | 275   | 4 1/4     | - 1/4     | 6,054     |
| Mar 85 p                         | 537   | 4 1/4     | - 1/4     | 4,609     |
| Feb 80 c                         | 40    | 2 1/4     | - 1/4     | 1         |
| Mar 80 c                         | 62    | 7 1/4     | - 1/4     | 1         |
| Feb 85 p                         | 1,308 | 4 1/4     | - 1/4     | 326       |
| Mar 85 p                         | 1,308 | 4 1/4     | - 1/4     | 14,105    |
| Feb 80 c                         | 45    | 1 1/4     | - 1/4     | 2,303     |
| Mar 80 c                         | 540   | 1 1/4     | - 1/4     | 3,563     |
| Feb 85 p                         | 675   | 4 1/4     | - 1/4     | 10,157    |
| Mar 85 p                         | 19    | 4 1/4     | - 1/4     | 3,592     |
| Feb 80 c                         | 925   | 4 1/4     | - 1/4     | 3,410     |
| Mar 80 c                         | 1,522 | 4 1/4     | - 1/4     | 892       |
| Feb 85 p                         | 868   | 4 1/4     | - 1/4     | 22,832    |
| Mar 85 p                         | 1,749 | 4 1/4     | - 1/4     | 6,358     |
| Feb 80 c                         | 75    | 1 1/4     | - 1/4     | 478       |
| Mar 80 c                         | 10    | 3 1/4     | - 1/4     | 884       |
| Call Vol.                        | 3,612 | Open Int. | 15,014    |           |
| Put Vol.                         | 3,612 | Open Int. | 15,014    |           |

| Strike                       | Vol. | Close     | Net. Chg. | Open Int. |
|------------------------------|------|-----------|-----------|-----------|
| <b>AM MEXICO INDEX (MXI)</b> |      |           |           |           |
| Feb 85 p                     | 10   | 2 1/4     | - 1/4     | 10        |
| Mar 85 p                     | 10   | 2 1/4     | - 1/4     | 57        |
| Call Vol.                    | 22   | Open Int. | 470       |           |
| Put Vol.                     | 10   | Open Int. | 2,892     |           |

| Strike               | Vol. | Close     | Net. Chg. | Open Int. |
|----------------------|------|-----------|-----------|-----------|
| <b>BIOTECH (BTK)</b> |      |           |           |           |
| Apr 85 p             | 39   | 2 1/4     | - 1/4     | 39        |
| Feb 85 c             | 14   | 2 1/4     | - 1/4     | 1,068     |
| Mar 85 c             | 30   | 2 1/4     | - 1/4     | 1,011     |
| Feb 80 c             | 2    | 12 1/4    | - 1/4     | 11        |
| Mar 80 c             | 40   | 4 1/4     | - 1/4     | 16        |
| Feb 85 p             | 10   | 3 1/4     | - 1/4     | 12        |
| Mar 85 p             | 10   | 3 1/4     | - 1/4     | 212       |
| Call Vol.            | 34   | Open Int. | 2,120     |           |
| Put Vol.             | 34   | Open Int. | 2,120     |           |

| Strike                 | Vol. | Close  | Net. Chg. | Open Int. |
|------------------------|------|--------|-----------|-----------|
| <b>COMP TECH (XCI)</b> |      |        |           |           |
| Feb 85 p               | 37   | 18 1/4 | - 3/4     | 37        |
| Mar 85 p               | 25   | 3 1/4  | - 1/4     | 62        |
| Feb 80 c               | 25   | 6 1/2  | - 1/4     | 6         |
| Mar 80 c               | 25   | 6 1/2  | - 1/4     | 145       |
| Feb 85 p               | 30   | 7 1/4  | - 1/4     | 36        |

## RANGES FOR UNDERLYING INDEXES

|                        | High   | Low    | Close  | Net Chg. | From Dec. 31 | % Chg. |
|------------------------|--------|--------|--------|----------|--------------|--------|
| S&P 100 (OEX)          | 596.11 | 588.86 | 595.60 | + 5.09   | + 9.68       | + 1.7  |
| S&P 500 -A.M. (SPX)    | 621.70 | 615.26 | 621.62 | + 4.59   | + 5.69       | + 0.9  |
| S&P Banks (BIX)        | 329.97 | 327.93 | 329.41 | + 0.33   | - 1.09       | - 0.3  |
| CB-Tech (TXN)          | 156.59 | 153.89 | 155.94 | + 0.55   | - 0.59       | - 0.4  |
| CB-Mexico (MEX)        | 86.72  | 84.67  | 86.66  | + 1.07   | + 14.92      | + 20.8 |
| CB-Lps Mex (VEX)       | 8.67   | 8.47   | 8.67   | + 0.11   | + 1.50       | + 20.9 |
| Nasdaq 100 (NDX)       | 577.05 | 568.33 | 577.05 | + 4.79   | + 0.82       | + 0.1  |
| Russell 2000 (RUT)     | 311.22 | 309.83 | 311.22 | + 0.66   | - 4.75       | - 1.5  |
| Lps S&P 100 (OEX)      | 59.61  | 58.89  | 59.56  | + 0.51   | + 0.97       | + 1.7  |
| Lps S&P 500 (SPX)      | 62.17  | 61.53  | 62.16  | + 0.46   | + 0.57       | + 0.9  |
| S&P Midcap (MID)       | 216.57 | 214.98 | 216.57 | + 0.90   | - 1.27       | - 0.6  |
| Major Mkt (XMI)        | 556.67 | 548.38 | 555.95 | + 6.65   | + 20.35      | + 3.8  |
| Leaps MMkt (XLT)       | 55.67  | 54.84  | 55.60  | + 0.67   | + 2.04       | + 3.8  |
| Hong Kong (HKO)        |        |        | 224.56 | + 0.27   | + 21.65      | + 10.7 |
| Leaps HK (HKL)         |        |        | 22.46  | + 0.03   | + 2.17       | + 10.7 |
| AM-Mexico (MXI)        | 103.67 | 101.41 | 103.67 | + 1.27   | + 20.05      | + 24.0 |
| Institut'l -A.M. (XII) | 644.51 | 636.06 | 644.14 | + 6.21   | + 7.42       | + 1.2  |
| Japan (JPN)            |        |        | 209.78 | + 2.42   | + 7.94       | + 3.9  |
| MS Cyclical (CYC)      | 342.02 | 339.14 | 341.84 | + 1.83   | + 1.62       | + 0.5  |
| MS Consumr (CMR)       | 290.65 | 286.91 | 290.54 | + 2.90   | + 5.79       | + 2.0  |
| MS Hi Tech (MST)       | 315.56 | 310.57 | 314.41 | + 1.62   | - 1.36       | - 0.4  |
| Pharma (DRG)           | 300.35 | 294.09 | 300.26 | + 4.68   | + 4.31       | + 1.5  |
| Biotech (BTK)          | 138.43 | 135.00 | 137.78 | + 2.53   | + 4.01       | + 3.0  |
| Comp Tech (XCI)        | 233.24 | 229.57 | 232.57 | + 1.49   | + 3.95       | + 1.7  |
| NYSE (NYA)             | 332.89 | 329.72 | 332.84 | + 2.29   | + 3.33       | + 1.0  |
| Gold/Silver (XAU)      | 140.34 | 138.57 | 139.83 | - 0.41   | + 19.41      | + 16.1 |
| OTC (XOC)              | 424.49 | 418.49 | 424.45 | + 3.09   | - 0.25       | - 0.1  |
| Utility (UTY)          | 282.27 | 280.80 | 282.21 | + 0.24   | + 4.61       | + 1.7  |
| Value Line (VLE)       | 568.70 | 565.68 | 568.68 | + 1.95   | - 1.22       | - 0.2  |
| Bank (BCK)             | 391.67 | 389.48 | 390.95 | + 0.30   | - 2.90       | - 0.7  |
| Semicond (SOX)         | 188.69 | 183.85 | 187.89 | + 0.24   | - 12.77      | - 6.4  |
| Top 100 (TPX)          | 559.61 | 552.28 | 559.37 | + 5.38   | + 6.35       | + 1.2  |

| Strike                       | Vol.  | Close     | Net. Chg. | Open Int. |
|------------------------------|-------|-----------|-----------|-----------|
| <b>S &amp; P BANKS (BIX)</b> |       |           |           |           |
| Feb 85 p                     | 144   | 7 1/4     | - 3/4     | 2,587     |
| Mar 85 p                     | 328   | 9 1/4     | - 1/2     | 19,002    |
| Apr 85 p                     | 236   | 11 1/4    | - 1/2     | 15,800    |
| Feb 80 c                     | 54    | 11 1/4    | - 1/2     | 792       |
| Mar 80 c                     | 7,859 | 10 1/4    | - 1/2     | 42,415    |
| Feb 85 p                     | 219   | 10 1/4    | - 1/2     | 3,581     |
| Mar 85 p                     | 11    | 5 1/4     | - 1/2     | 4,808     |
| Feb 80 c                     | 13    | 13 1/4    | - 1/2     | 20,541    |
| Mar 80 c                     | 888   | 1 1/4     | - 1/2     | 28        |
| Feb 85 p                     | 385   | 15 1/4    | - 1/2     | 11,495    |
| Mar 85 p                     | 3,675 | 10 1/4    | - 1/2     | 20,745    |
| Feb 80 c                     | 13    | 19 1/4    | - 3/4     | 890       |
| Mar 80 c                     | 10    | 10 1/4    | - 1/2     | 10,154    |
| Feb 85 p                     | 200   | 7 1/4     | - 1/2     | 40        |
| Mar 85 p                     | 200   | 1 1/4     | - 1/2     | 2,957     |
| Feb 80 c                     | 20    | 4 1/4     | - 1/2     | 6,754     |
| Mar 80 c                     | 420   | 2 1/4     | - 1/2     | 8,014     |
| Feb 85 p                     | 10    | 27 1/4    | - 1/2     | 1,101     |
| Mar 85 p                     | 235   | 15 1/4    | - 1/2     | 9,286     |
| Feb 80 c                     | 180   | 30 1/4    | - 1/2     | 1,707     |
| Mar 80 c                     | 30    | 5 1/4     | - 1/2     | 1,596     |
| Feb 85 p                     | 180   | 30 1/4    | - 1/2     | 1,596     |
| Mar 85 p                     | 180   | 30 1/4    | - 1/2     | 1,596     |
| Call Vol.                    | 2,442 | Open Int. | 41,790    |           |
| Put Vol.                     | 6,112 | Open Int. | 91,943    |           |

|                             |   |       |        |       |         |
|-----------------------------|---|-------|--------|-------|---------|
| 640                         | p | 15    | 19 1/2 | 3 1/2 | 800     |
| 640                         | p | 13    | 2 1/2  |       | 10,154  |
| 640                         | p | 1     | 19     | 1 1/2 | 40      |
| 645                         | c | 200   | 7 1/2  |       | 2,057   |
| 645                         | c | 20    | 1 1/2  |       | 6,754   |
| 645                         | c | 20    | 2      | 3 1/2 | 8,014   |
| 650                         | p | 420   | 1/2    |       | 9,286   |
| 650                         | p | 195   | 27 1/2 | 1 1/2 | 9,286   |
| 650                         | p | 110   | 30     | 2     | 1,842   |
| 655                         | c | 180   | 1/2    |       | 1,707   |
| 660                         | c | 30    | 5 1/2  | 1/2   | 596     |
| 665                         | c | 30    | 3 1/2  |       | 1,066   |
| Vol.                        |   | 2,407 | Open   | Int.  | 611,993 |
|                             |   | 0.12  | Open   | Int.  | 608,943 |
| <b>S &amp; P BANKS(BIX)</b> |   |       |        |       |         |
| 325                         | c | 100   | 8 1/2  | 7/8   | 111     |

Опцион на продажу AmExpr (“пут”) по цене 45 долл. — это право *продать* одну акцию American Express не позднее 17 февраля за 45 долл. Заплатив за этот опцион “пут” сегодня  $2\frac{3}{4}$  долл., вы получаете право продать акцию AmExpr за 45 долл. в течение периода между нынешним днем и февралем за 45 долл. независимо от рыночного курса этих акций. Разумеется, такой опцион целесообразно исполнить только в том случае, если рыночный курс в момент исполнения составляет менее 45 долл.<sup>5</sup>

### 13.3. Схемы расчетов и прибыли по опционам

Одна из привлекательных черт опционов состоит в том, что они позволяют их владельцам изменять схемы расчетов по обеспечивающим активам. В этом разделе мы рассмотрим:

- основные схемы расчетов и прибыли по опционам на продажу и покупку, а также по соответствующим ценным бумагам;
- схемы расчетов для различных сочетаний опционов и ценных бумаг.

#### 13.3.1. Получение прибыли с актива

##### 13.3.1.1. Прибыль от приобретения ценной бумаги

Предположим, вы приобрели акцию General Pills в июле по ее текущему курсу 40 долл. Если в сентябре курс этой ценной бумаги составит 70 долл., вы получите прибыль в размере 30 долл., а если курс будет равен 30 долл., то понесете убыток (получите отрицательную прибыль) в 10 долл.<sup>6</sup>. Обобщим эту схему, обозначив  $S_T$  курс ценной бумаги в сентябре, а  $S_0$  — ее же курс в июле. Тогда можно записать функцию прибыли с ценной бумаги в виде

$$\text{Прибыль} = S_T - S_0.$$

##### 13.3.1.2. Прибыль от продажи ценной бумаги авансом

Предположим, мы продали одну акцию General Pills авансом в июле, когда ее рыночный курс составлял 40 долл. Если в сентябре ее курс равен 70 долл. и если в этот момент ликвидировать сделку по авансовой продаже (т.е. купить акцию по рыночному курсу, чтобы вернуть акцию поставителю обеспечения), то прибыль составит –30 долл.:

$$\text{Прибыль от авансовой продажи} = S_0 - S_T = -(\text{Прибыль от приобретения}).$$

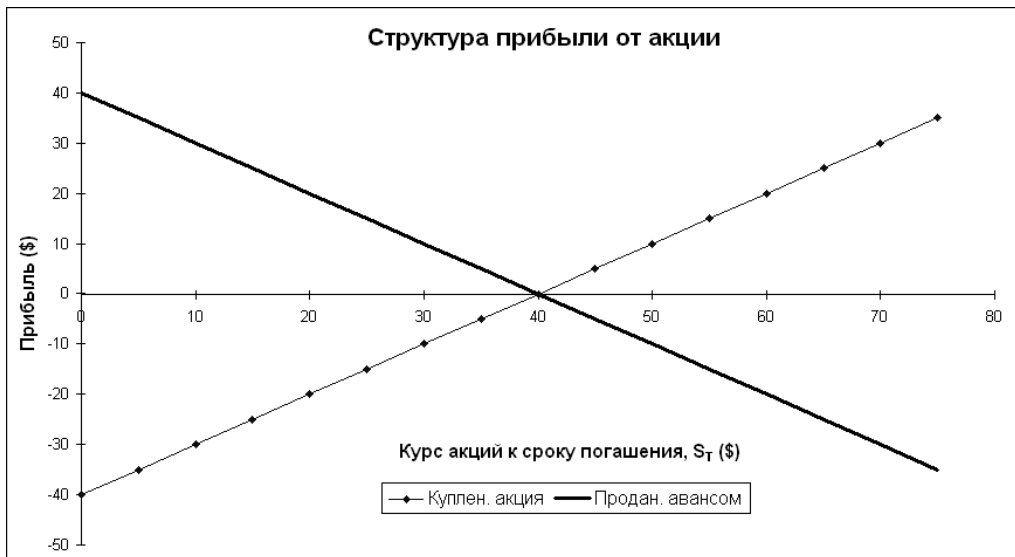
Обратите внимание, что доход от продажи авансом без покрытия равен *отрицательной* прибыли от приобретения; это соотношение всегда имеет место (в том числе для опционов, рассматриваемых в разделе 13.3.2).

<sup>5</sup> В противоположность опционам на покупку (“колл”) досрочное исполнение опциона на продажу (“пут”) может оказаться оптимальным даже при отсутствии выплаты дивидендов. Подробнее об этом — в главе 16.

<sup>6</sup> Употребление слов “доход” и “прибыль” в данном разделе не всегда корректно по отношению к стандартным определениям из финансовой теории, поскольку здесь игнорируются проценты, связанные с приобретением ценной бумаги. Но в данном случае такая некорректность стала уже привычной и ничем не грозит.

### 13.3.1.3. Графики структур прибыли

На следующем графике, построенном в Excel, показаны структуры прибыли как от приобретения, так и от продажи авансом акций GP.



### 13.3.2. Прибыль от опциона на покупку (“колл”)

#### 13.3.2.1. Структура прибыли от покупки опциона “колл”

Возвращаясь к опционам компании General Pills (GP) (см. предыдущий раздел), предположим, что в июле вы приобрели один сентябрьский опцион GP-40 за сумму 4 долл.<sup>7</sup> В сентябре вы исполните опцион только в том случае, если рыночный курс акций GP будет выше 40 долл. Если обозначить начальную (июльскую) цену опциона как  $C_0$ , то функцию прибыли от опциона в сентябре можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{Прибыль от опциона в сентябре} &= \max(0, S_T - X) - C_0 = \\ &= \max(0, S_T - 40) - 4 = \begin{cases} -4, & \text{если } S_T \leq 40, \\ S_T - 44, & \text{если } S_T > 40. \end{cases} \end{aligned}$$

<sup>7</sup> Поскольку цена исполнения этого опциона равна текущему рыночному курсу акций, говорят об опционе на покупку без выигрыша (*at-the-money call*). Если цена исполнения выше текущей рыночной, говорят об опционе на покупку с проигрышем (*out-of-the-money call*), а в противном случае — с выигрышем (*in-the-money call*).



### 13.3.2.2. Структура прибыли от продажи опциона “колл”

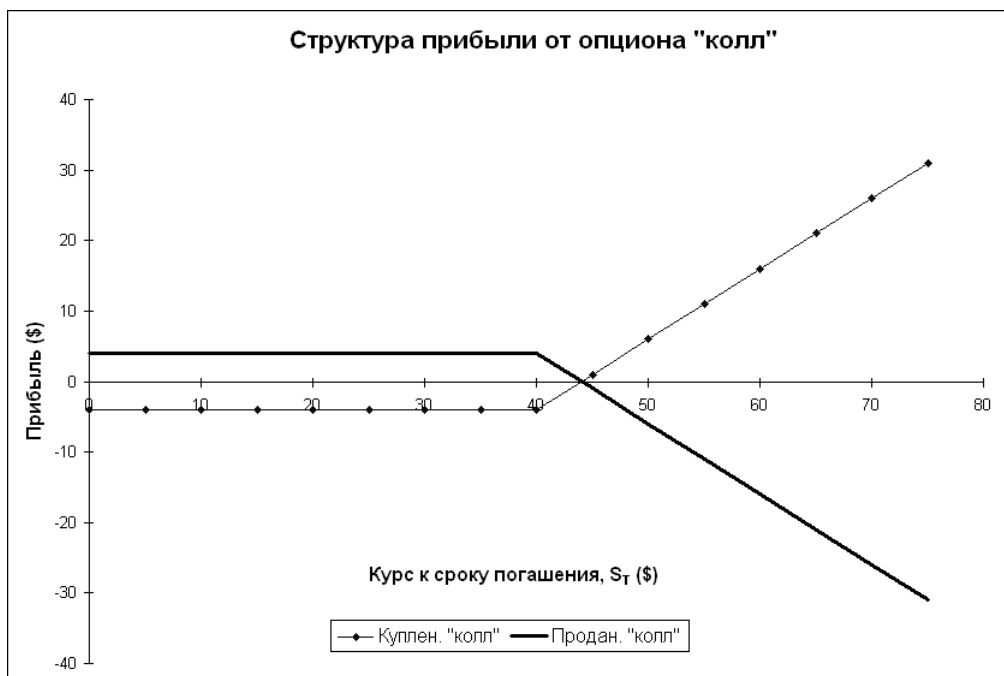
На рынке опционов покупатель опциона “колл” приобретает его у стороны, выпускающей такой опцион на определенные активы. На жаргоне опционного рынка говорят, что продавец *выписывает* опцион. Стоит потратить несколько минут, чтобы получше разобраться, в чем разница между ценными бумагами, приобретенными покупателем опциона и его продавцом.

- Покупатель опциона “колл” приобретает ценную бумагу, дающую ему право *купить акцию (долю актива) в указанный день  $T$  или ранее по цене  $X$* . Стоимость этого привилегированного права составляет *цену опциона  $C$* , которая уплачивается в момент его покупки. Таким образом, в самом начале покупатель опциона имеет отрицательное движение своих денежных средств (в раз-мере  $C$ ), в то время как движение его средств в день  $T$  всегда неотрицательно и составляет  $\max(S_T - X, 0)$ .
- Продавец опциона получает сумму  $C$  в момент купли-продажи. Взамен этой цены он *соглашается продать акцию (долю актива) по цене  $X$  в день  $T$  или ранее*. Заметьте, что в то время как покупатель опциона приобрел *право*, продавец принял на себя *обязательство*. Далее обратите внимание на то, что схема финансовых потоков у продавца прямо противоположна схеме у покупателя: начальное движение средств у продавца положительно  $(+C)$ , а в день  $T$  всегда совершается неположительное движение средств —  $-\max(S_T - X, 0)$ .

Прибыль продавца опциона “колл” противоположна прибыли его покупателя. В случае опционов GP имеем:

$$\begin{aligned}\text{Прибыль продавца опциона в сентябре} &= C_0 - \max(0, S_T - X) = \\ &= 4 - \max(0, S_T - 40) = \begin{cases} +4, & \text{если } S_T \leq 40, \\ 44 - S_T, & \text{если } S_T > 40. \end{cases}\end{aligned}$$

Построив графики получения прибыли от купленного и выписанного (проданного) опциона типа “колл”, получим следующее.



### 13.3.3. Прибыль от опциона на продажу ("пут")

#### 13.3.2.1. Структура прибыли от покупки опциона "пут"

Если в июле вы приобрели за 2 долл. один опцион "пут" на продажу акций GP по 40 долл., то в сентябре вы исполните этот опцион только в том случае, если рыночный курс акций GP будет ниже 40 долл. Обозначив начальную (июльскую) цену опциона как  $P_0$ , можно записать функцию прибыли от него в сентябре следующим образом:

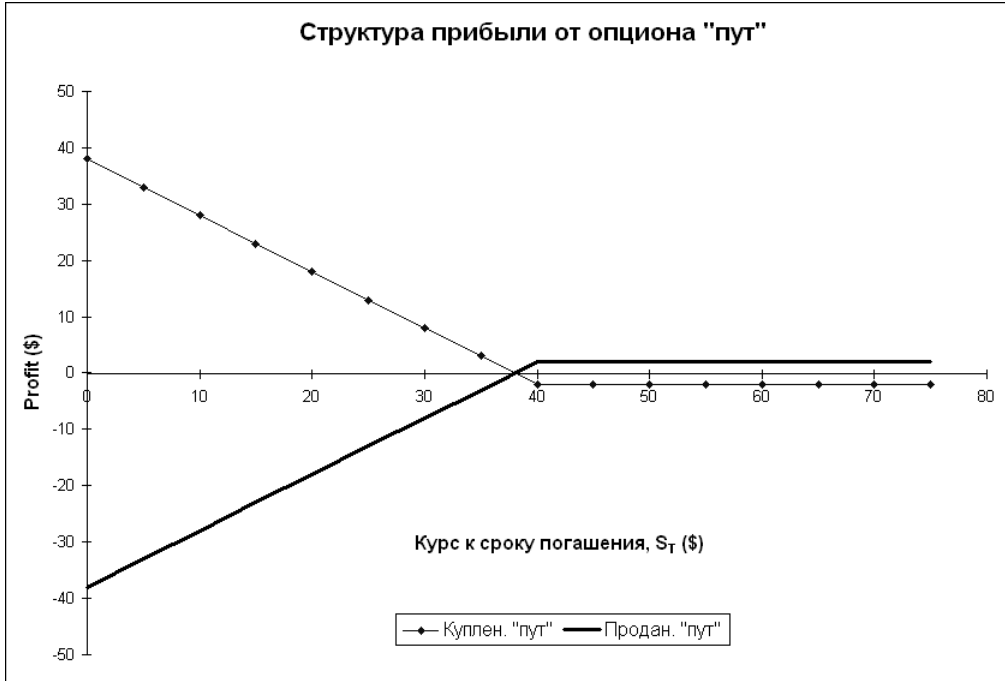
$$\begin{aligned} \text{Прибыль от опциона в сентябре} &= \max(0, X - S_T) - P_0 = \\ &= \max(0, 40 - S_T) - 2 = \begin{cases} 38 - S_T, & \text{если } S_T \leq 40, \\ -2, & \text{если } S_T > 40. \end{cases} \end{aligned}$$

#### 13.3.2.2. Структура прибыли от продажи опциона "пут"

Продавец опциона "пут" обязуется приобрести одну акцию GP в день  $T$  или ранее по цене исполнения опциона  $X$ . Ставя себя в это "завидное" положение, продавец опциона получает взамен в момент продажи цену опциона  $P_0$ . Поэтому получение прибыли от продажи сентябрьского опциона GP с ценой исполнения 40 происходит по следующей схеме:

$$\begin{aligned} \text{Прибыль продавца опциона в сентябре} &= P_0 - \max(0, X - S_T) = \\ &= 2 - \max(0, 40 - S_T) = \begin{cases} -38 + S_T, & \text{если } S_T \leq 40, \\ 2, & \text{если } S_T > 40. \end{cases} \end{aligned}$$

Графики прибыли от приобретенного и проданного опционов имеют следующий вид.



### 13.4. Схемы работы с опционами: прибыль от портфелей опционов и акций

Интересно проанализировать и построить графики комбинированной прибыли от портфелей опционов и акций. Такой анализ дает понятие о том, как с помощью опционов можно *изменить схему получения прибыли* от таких "стандартных" ценных бумаг, как акции и облигации. Приведем несколько примеров.

#### 13.4.1. Защитный опцион "пут"

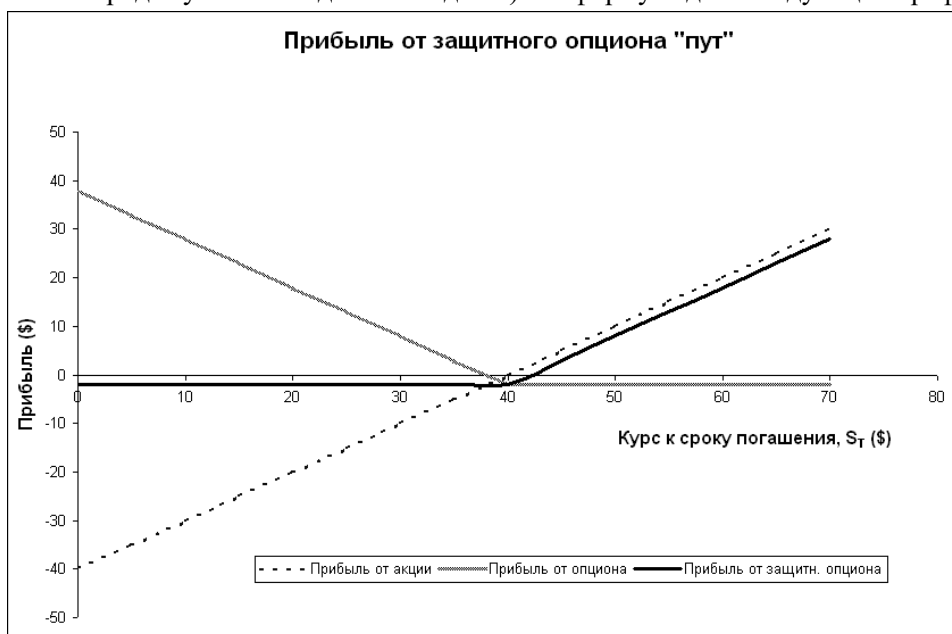
Рассмотрим следующую комбинацию.

- Одну акцию (долю актива), приобретенную по цене  $S_0$ .
- Один опцион на продажу ("пут"), приобретенный по цене  $P$  при цене исполнения  $X$ .

Такая схема часто называется *защитным опционом “пут”* (*protective put*) или *страхованием портфеля*; в главе 17 мы вернемся к этой теме и изучим ее более подробно. Структура дохода от защитного опциона “пут” имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{Прибыль от акции} + \text{прибыль от опциона} &= S_T - S_0 + \max(X - S_T, 0) - P = \\ &= \begin{cases} S_T - S_0 + X - S_T - P, & \text{если } S_T \leq X \\ S_T - S_0 - P, & \text{если } S_T \geq X \end{cases} = \begin{cases} X - S_0 - P, & \text{если } S_T \leq X, \\ S_T - S_0 - P, & \text{если } S_T \geq X. \end{cases} \end{aligned}$$

Применительно к примеру с акциями GP (т.е. покупки акции за 40 долл. и опциона на продажу с  $X = 40$  долл. за 2 долл.) эта формула дает следующий график.



Такая схема получения доходов очень похожа на структуру прибыли от опциона на покупку<sup>8</sup>.

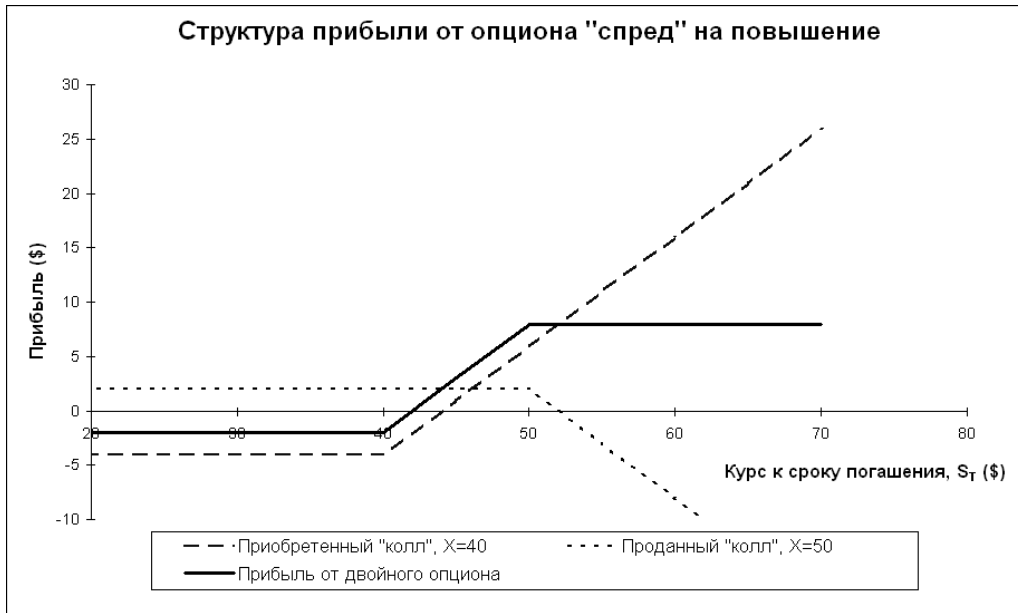
### 13.4.2. Двойной опцион — “спред”

Еще одна возможная комбинация — это покупка и продажа опционов “колл” с разными ценами исполнения. Когда купленный опцион имеет низкую цену исполнения, а проданный — более высокую, такая комбинация называется *двойным опционом на повышение (bull spread)*. Например, вы купили опцион на покупку (за 4 долл.) с ценой исполнения 40 долл. и выписали, т.е. продали опцион (за 2 долл.) с ценой исполнения 50 долл. Такой двойной опцион дает прибыль в размере

<sup>8</sup> В разделе 13.5 мы докажем и проиллюстрируем на примере *теорему о паритете “пут”–“колл”*. Из этой теоремы следует, что опцион на покупку следует выставать по такой цене  $C$ , чтобы  $C = P + S_0 - X e^{-rT}$ . При установке правильной цены на опцион “колл” на основе этой теоремы прибыль от сочетания “акция + опцион на продажу” оказывается такой же, как прибыль от сочетания “облигация + опцион на покупку”.

$$\begin{aligned} \max(S_T - 40, 0) - 4 - [\max(S_T - 50, 0) - 2] = \\ = \begin{cases} -4 + 2, & \text{если } S_T \leq 40, \\ S_T - 40 - 4 + 2 = S_T - 42, & \text{если } 40 \leq S_T \leq 50, \\ S_T - 40 - 4 - (S_T - 50 - 2) = 8, & \text{если } S_T \geq 50. \end{cases} \end{aligned}$$

На следующей диаграмме Excel показаны оба опциона “колл” и итоговая прибыль от двойного опциона.



### 13.5. Теоремы об арбитражных операциях с опционами

В следующих главах будет рассматриваться оценка опционов при тех или иных предположениях о распределении вероятностей дохода с обеспечивающих активов (обычно это акции), на которые выписываются эти опционы. Однако и без таких предположений о ценообразовании на опционы можно сказать многое. В этом разделе мы рассмотрим ряд *арбитражных ограничений* на ценообразование по опционам. Наш список не может претендовать на полноту, и мы ограничимся только теми теоремами или утверждениями, которые проливают свет на формирование цен опционов и будут использоваться в последующих главах.

В ходе изложения всегда будет предполагаться, что существует единая безрисковая процентная ставка, определяющая курс облигаций. Будем также предполагать, что по этой ставке начисляется непрерывный сложный процент, так что приведенная стоимость безрисковой ценной бумаги, доход от продажи которой составляет  $X$  в момент времени  $T$ , начисляется по формуле  $e^{-rT}X$ .

**Теорема 1.** Рассмотрим опцион на покупку (“колл”), обеспечением которого служит акция без выплаты дивидендов вплоть до даты истечения срока действия опциона,  $T$ . Тогда нижняя граница цены опциона вычисляется по формуле

$$C \geq \max(S_0 - Xe^{-rT}, 0).$$

*Примечание.* Прежде чем доказывать эту теорему, будет полезно рассмотреть ее смысл. Предположим, что безрисковая процентная ставка составляет 10%, и пусть у нас есть американский опцион на покупку со сроком исполнения  $T = 1/2$  (т.е. срок его действия истекает через полгода), ценой исполнения  $X = 80$  и обеспечением в виде ценной бумаги с текущим рыночным курсом  $S_0 = 83$ . При “наивном” подходе к определению нижней границы цены опциона можно было бы заключить, что опцион стоит минимум 3 долл., поскольку его можно исполнить немедленно с прибылью в 3 долл. А вот теорема 1 утверждает, что опцион стоит *по крайней мере не меньше*, чем  $83 - e^{-0,10 \cdot 0,5} 80 = 6,90$ . Более того, при тщательном анализе приведенного далее доказательства окажется, что это свойство не зависит от того, является ли опцион американским — для европейских опционов оно тоже имеет место.

|   | A                                                                   | B     | C                              | D | E |
|---|---------------------------------------------------------------------|-------|--------------------------------|---|---|
| 1 | <b>Теорема 1--Нижние и верхние границы цен на опционы "колл"</b>    |       |                                |   |   |
| 2 |                                                                     |       |                                |   |   |
| 3 | Текущий курс акций, $S_0$                                           | 83    |                                |   |   |
| 4 | Срок погашения опциона, $T$                                         | 0,5   |                                |   |   |
| 5 | Цена исполнения опциона, $X$                                        | 80    |                                |   |   |
| 6 | Процентная ставка, $r$                                              | 10%   |                                |   |   |
| 7 |                                                                     |       |                                |   |   |
| 8 | Минимальная цена по "наивному" расчету, $\max(S_0 - X, 0)$          | 3     | <-- =МАКС(В3-В5,0)             |   |   |
| 9 | Нижняя граница цены по теореме 1, $\max(S_0 - \text{Exp}(-rT)X, 0)$ | 6,902 | <-- =МАКС(В3-EXP(-В6*В4)*В5,0) |   |   |

**Доказательство.** Стандартные обоснования цен в арбитражных сделках основываются на рассмотрении финансовых потоков при той или иной схеме инвестирования. В данном случае эта схема имеет следующий вид:

*В момент времени 0 :*

- Купить одну акцию обеспечивающего актива.
- Взять в долг сумму приведенной стоимости (ПС) для цены исполнения опциона  $X$ .
- Продать опцион на покупку.
- В момент времени  $T$ :
- Исполнить опцион, если это выгодно.
- Возвратить взятые в долг средства.

Такая схема порождает следующую таблицу потоков денежных средств.

| Сейчас                   |                       | В момент времени $T$ |              |
|--------------------------|-----------------------|----------------------|--------------|
| Операция                 | Поток                 | $S_T < X$            | $S_T \geq X$ |
| Купить акцию             | $-S_0$                | $+S_T$               | $+S_T$       |
| Взять в долг ПС цены $X$ | $+Xe^{-rT}$           | $-X$                 | $-X$         |
| Продать опцион           | $+C$                  | $0$                  | $-(S_T - X)$ |
| Итого                    | $-S_0 + Xe^{-rT} + C$ | $S_T - X \leq 0$     | $0$          |

Заметьте, что в момент  $T$  поток средств от данного опциона либо отрицателен (если опцион не исполняется), либо равен нулю (при  $S_T \geq X$ ). Но финансовый актив (в данном случае сочетание купленной акции, заемных средств и продажи опциона), поступления от которого в будущем отрицательны, обязан иметь положительный начальный приток средств, поэтому

$$C - S_0 + Xe^{-rT} > 0 \text{ или } C > S_0 - Xe^{-rT}.$$

Для завершения доказательства заметим, что цена опциона на покупку ни в каком случае не может быть отрицательной. Следовательно,  $C > \max(S_0 - Xe^{-rT}, 0)$ , что и требовалось доказать.

Из теоремы 1 немедленно следует один интересный вывод: во многих случаях возможность досрочного исполнения американского опциона бесполезна, поэтому цену на американский опцион на покупку (“колл”) можно устанавливать так, как если бы он был европейским. Точное утверждение звучит следующим образом.

**Теорема 2.** Рассмотрим американский опцион на покупку (“колл”), выписанный на акцию, по которой не выплачиваются дивиденды до истечения срока действия опциона — даты,  $T$ . Тогда решение о досрочном исполнении опциона (ранее окончания его срока действия) не может быть оптимальным.

**Доказательство.** Предположим, что держатель опциона рассматривает возможность его досрочного исполнения, т.е. в некоторый день  $t < T$ . Единственная причина, зачем ему это может понадобиться, может заключаться в том, что  $S_t - X > 0$ , где  $S_t$  — курсовая цена обеспечивающего актива в момент времени  $t$ . Но по теореме 1 рыночная цена опциона в момент  $t$  составляет не менее  $S_t - Xe^{-r(T-t)}$ , где  $r$  — безрисковая процентная ставка. Поскольку  $S_t - Xe^{-r(T-t)} > S_t - X$ , отсюда следует, что держателю лучше продать опцион на рынке, чем исполнять его.

Теорема 2 означает, что цены на многие американские опционы “колл” следует устанавливать так, как если бы они были европейскими опционами. Обратите внимание, что это неверно для американских опционов на продажу (“пут”) даже при том, что по обеспечивающему активу не выплачивают дивидендов (пример будет рассмотрен в главе 16).

**Теорема 3 (о границах опционов на продажу).** Нижняя граница стоимости опциона на продажу (“пут”) составляет

$$P \geq \max(0, Xe^{-rT} - S_0).$$

**Доказательство.** Доказательство утверждения этой теоремы по форме аналогично доказательству предыдущей теоремы. Составим таблицу движения средств и схему инвестирования.

| Сейчас                  |                      | В момент времени $T$ |                  |
|-------------------------|----------------------|----------------------|------------------|
| Операция                | Поток                | $S_T < X$            | $S_T \geq X$     |
| Продать акцию авансом   | $+S_0$               | $-S_T$               | $-S_T$           |
| Дать в долг ПС цены $X$ | $+Xe^{-rT}$          | $+X$                 | $+X$             |
| Продать опцион          | $+P$                 | $-(X - S_T)$         | $0$              |
| Итого                   | $P + S_0 - Xe^{-rT}$ | $0$                  | $X - S_T \leq 0$ |

Поскольку в этой схеме в будущем предусматриваются только отрицательные или нулевые поступления, начальный поток средств на сегодняшний день в ней должен быть положителен, откуда заключаем, что

$$P - Xe^{-rT} + S_0 \geq 0.$$

В сочетании с тем фактом, что цена опциона ни в коем случае не может быть отрицательной, получаем доказательство утверждения теоремы.

**Теорема 4 (о паритете опционов “пут” и “колл”).** Пусть  $C$  — стоимость европейского опциона “колл” с ценой исполнения  $X$ , выписанного на акцию с текущей рыночной стоимостью  $S_0$ ;  $P$  — стоимость европейского опциона “пут” на ту же акцию с той же ценой исполнения  $X$ . Предположим, что оба опциона имеют одну и ту же дату исполнения,  $T$ , и пусть существует непрерывная сложная процентная ставка,  $r$ . Тогда

$$C + Xe^{-rT} = P + S_0.$$

**Доказательство.** Доказательство выполняется по той же схеме, что и два предыдущих. Рассмотрим сочетание четырех активов (опциона на продажу, опциона на покупку, акции и облигации) и покажем, что должно выполняться соотношение цен, указанное в утверждении.



| Сейчас                                     |                           | В момент времени $T$ |              |
|--------------------------------------------|---------------------------|----------------------|--------------|
| Операция                                   | Поток                     | $S_T < X$            | $S_T \geq X$ |
| Купить опцион “колл”                       | $-C$                      | 0                    | $+S_T - X$   |
| Купить облигацию с выплатой $X$ в день $T$ | $-Xe^{-rT}$               | $X$                  | $X$          |
| Продать опцион “пут”                       | $+P$                      | $-(X - S_T)$         | 0            |
| Продать авансом одну акцию                 | $+S_0$                    | $-S_T$               | $-S_T$       |
| Итого                                      | $-C - Xe^{-rT} + P + S_0$ | 0                    | 0            |

Поскольку эта схема дает будущие денежные поступления в нулевом объеме, начальный поток также должен равняться нулю независимо от курсовой цены акции<sup>9</sup>. Поэтому

$$C + Xe^{-rT} - P - S_0 = 0.$$

Отсюда и следует утверждение теоремы.

Паритет опционов “пут” и “колл” означает, что процентная ставка,  $r$ , одновременно определяет курс акции,  $S_0$ , цену опциона “колл”,  $C$ , с ценой исполнения  $X$ , а также цену опциона “пут”,  $P$ , с ценой исполнения  $X$ . Ниже приведен иллюстративный пример, в котором через цену опциона “колл”,  $C$ , цену исполнения,  $X$ , текущий курс акций,  $S_0$ , и процентную ставку,  $r$ , вычисляется цена на опцион “пут” с ценой исполнения  $X$  и сроком действия  $T$ .

|    | A                                                                          | B      | C                         | D | E |
|----|----------------------------------------------------------------------------|--------|---------------------------|---|---|
| 1  | Паритет "пут"--"колл"                                                      |        |                           |   |   |
| 2  |                                                                            |        |                           |   |   |
| 3  | Текущий курс акций, $S_0$                                                  | 55     |                           |   |   |
| 4  | Срок погашения опциона, $T$                                                | 0,5    |                           |   |   |
| 5  | Цена исполнения опциона, $X$                                               | 60     |                           |   |   |
| 6  | Процентная ставка, $r$                                                     | 10%    |                           |   |   |
| 7  | Цена опциона "колл", $C$                                                   | 3      |                           |   |   |
| 8  | Цена опциона "пут"                                                         | 5,0738 | <-- =B7+B5*EXP(-B6*B4)-B3 |   |   |
| 9  |                                                                            |        |                           |   |   |
| 10 | В этой таблице с помощью паритета "пут"--"колл" выводится цена             |        |                           |   |   |
| 11 | опциона "пут" на основе цены опциона "колл", $C$ , процентной ставки $r$ , |        |                           |   |   |
| 12 | срока погашения $T$ и цены исполнения $X$ .                                |        |                           |   |   |

**Теорема 5 (о выпуклости цены опциона “колл”).** Рассмотрим три европейских опциона “колл”, проданных на одну и ту же акцию без выплаты дивидендов с одной и той же датой погашения,  $T$ . Предположим, что цены исполнения опционов равны  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3$  и обозначим соответствующие цены опционов как  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$ . Далее предположим, что  $X_2 = (X_1 + X_3)/2$ . В этом случае

<sup>9</sup> Это важнейшее, фундаментальнейшее утверждение финансовой теории: если схема инвестирования дает в будущем тождественно равные нулю денежные поступления, то ее текущая стоимость также равна нулю. Аналогично, если схема инвестирования дает в будущем неотрицательные потоки средств, то начальное движение средств в ней должно быть отрицательным (т.е. чтобы позже получить что-то, нужно сначала заплатить).

$$C_2 < \frac{C_1 + C_3}{2}.$$

Это означает, что цена опциона “колл” является выпуклой функцией цены исполнения.

**Доказательство.** Для доказательства теоремы рассмотрим следующую схему инвестирования.

| Сейчас                                       |                    | В момент времени $T$ |                      |                                    |                 |
|----------------------------------------------|--------------------|----------------------|----------------------|------------------------------------|-----------------|
| Операция                                     | Поток              | $S_T < X_1$          | $X_1 \leq S_T < X_2$ | $X_2 \leq S_T < X_3$               | $X_3 \leq S_T$  |
| Купить опцион с ценой исполнения $X_1$       | $-C_1$             | 0                    | $S_T - X_1$          | $S_T - X_1$                        | $S_T - X_1$     |
| Купить опцион с ценой исполнения $X_3$       | $-C_3$             | 0                    | 0                    | 0                                  | $S_T - X_3$     |
| Продать два опциона с ценой исполнения $X_2$ | $+2C_2$            | 0                    | 0                    | $-2(S_T - X_2)$                    | $-2(S_T - X_2)$ |
| Итого                                        | $2C_2 - C_1 - C_3$ | 0                    | $S_T - X_1 \geq 0$   | $2X_2 - X_1 - S_T = X_3 - S_T > 0$ | 0               |

Поскольку все финансовые поступления в будущем неотрицательны (и имеют положительную вероятность оказаться больше нуля), отсюда следует, что начальный поток обязан быть отрицательным:

$$2C_2 - C_1 - C_3 < 0 \Rightarrow C_2 < \frac{C_1 + C_3}{2}.$$

Теорема доказана. Отметим, что принятое предположение о том, что  $X_2 = (X_1 + X_3)/2$ , сделано для удобства и не влияет на общность доказательства.

Сформулируем без доказательства аналогичную теорему для опционов “пут”.

**Теорема 6 (о выпуклости цены опциона “пут”).** Рассмотрим три европейских опциона на продажу, т.е. “пут”, проданных на одну и ту же акцию без дивидендов, с одной и той же датой погашения,  $T$ . Предположим, что цены исполнения опционов равны  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3$  и обозначим соответствующие цены опционов через  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$ . Далее предположим, что  $X_2 = (X_1 + X_3)/2$ . Тогда цена опциона является выпуклой функцией цены его исполнения:

$$P_2 < \frac{P_1 + P_3}{2}.$$

Наконец, докажем следующую теорему.

**Теорема 7 (о границах цены на опцион “колл” при известных будущих дивидендах).** Рассмотрим опцион “колл” с ценой исполнения  $X$  и датой погашения  $T$ . Предположим, что в некоторый момент времени  $t < T$  по обеспечивающей акции гарантированно будет выплачен дивиденд  $D$ . Тогда нижняя граница цены опциона “колл” задается следующим неравенством:

$$C \geq \max(S_0 - De^{-rt} - Xe^{-rT}, 0).$$

**Доказательство.** Воспользуемся доказательством теоремы 1 с незначительными изменениями.

| Сейчас                         | В момент $t$                     |      | В момент $T$     |              |
|--------------------------------|----------------------------------|------|------------------|--------------|
| Операция                       | Поток                            |      | $S_T < X$        | $S_T \geq X$ |
| Купить акцию                   | $-S_0$                           | $+D$ | $+S_T$           | $+S_T$       |
| Взять в долг ПС дивидендов $D$ | $+De^{-rt}$                      | $-D$ |                  |              |
| Взять в долг ПС суммы $X$      | $+Xe^{-rt}$                      |      | $-X$             | $-X$         |
| Продать опцион                 | $+C$                             | $-$  | $0$              | $-(S_T - X)$ |
| Итого                          | $-S_0 + De^{-rt} + Xe^{-rt} + C$ | $0$  | $S_T - X \leq 0$ | $0$          |

Теорема доказана.

В упражнении 7 к главе 16 теорема 7 применяется к ценообразованию для индексного опциона.

## Упражнения

- Посмотрите на цены опционов American Express, приведенные в этой главе. Февральский опцион “колл” с  $X = 37,5$  идет по цене  $6\frac{3}{8}$ , тогда как апрельский опцион с той же ценой исполнения идет по 6. Сможете ли вы вывести схему купли-продажи ценных бумаг по этим котировкам? Можете ли вы предложить обоснование приведенных в газете цен?
- Пусть на акцию с текущим курсом  $S = 50$  продается американский опцион на ее покупку — “колл”. Цена исполнения опциона равна  $X = 45$ . При цене опциона, равной 2 долл., покажите, как организовать куплю-продажу для получения немедленной прибыли.  
Если дата погашения опциона  $T = 1$  год, а процентная ставка — 10%, какова минимальная цена опциона? Воспользуйтесь теоремой 1.
- Пусть на акцию с текущим курсом  $S = 80$  продается европейский опцион на ее покупку — “колл”. Цена исполнения опциона равна  $X = 80$ , процентная ставка

$r = 8\%$ , а срок погашения  $T = 1$ . Предполагается, что по акции выплачивается дивиденд в размере 3 в момент времени  $t = 1/2$ . Определите минимальную цену опциона по теореме 7.

4. Пусть опцион “пут” с ценой исполнения 50 имеет собственную цену 6, а опцион “колл” на ту же ценную бумагу с ценой исполнения 60 имеет собственную цену 10. Сроки обоих опционов истекают в один и тот же день. Постройте в одной и той же системе осей график “прибыли” для

- а) одного проданного опциона “пут” и одного проданного “колл”;
- б) двух проданных опционов “пут” и одного проданного “колл”;
- в) трех проданных опционов “пут” и одного проданного “колл”;
- г) представьте себе, что три графика пересекаются в одной и той же точке, соответствующей некоторому значению  $S_T$ . Определите это значение.

5. Рассмотрим два следующих опциона “колл”.

Оба опциона проданы на акции корпорации ABC, текущий курс которых составляет 100 долл. ABC не выплачивает дивидендов.

Срок погашения обоих опционов — один год.

У одного опциона  $X_1 = 90$  и собственная цена 30; у второго —  $X_2 = 100$  и собственная цена 20.

Безрисковая ставка, начисляемая по непрерывной схеме, составляет 10%.

Составив схему двойного опциона (“спреда”), т.е. покупки одного опциона и продажи другого, покажите, что разница между ценами двух опционов *слишком велика* и что существует безрисковая арбитражная схема.

6. Акция корпорации ABC имеет текущий курс продажи 95 долл. Опцион на покупку этой акции (“колл”) с ценой исполнения 90 долл. продается за 8 долл.

- а) Покажите структуру прибыли при покупке одной акции и одного опциона на акцию.
- б) Покажите структуру прибыли при покупке одной акции и двух опционов.
- в) Рассмотрите структуру прибыли от покупки одной акции и  $N$  опционов. При каком курсе акций пересекаются все графики прибыли?

7. Европейский опцион “колл” со сроком погашения 6 месяцев и ценой исполнения  $X = 80$  на акцию с текущим курсом 85 продается по цене 12 долл. Европейский опцион “пут”, выписанный на ту же акцию с тем же сроком погашения и той же ценой исполнения, продается за 5 долл. При годовой процентной ставке, равной 10% (с непрерывным начислением), составьте арбитражную сделку для этой ситуации.

8. Докажите теорему 6. Затем решите следующую задачу.

Три опциона “пут” на акции фирмы XYZ с одним и тем же сроком погашения продаются по следующим ценам:

- для цены исполнения 40: 6;
- для цены исполнения 50: 4;
- для цены исполнения 60: 1.

Покажите арбитражную схему, позволяющую извлечь прибыль при этих ценах, и докажите ее работоспособность.

9. Текущий курс акций корпорации ABC составляет 50. Цены на опционы “колл” по акциям ABC приведены в следующей таблице.

| <i>Цена исполнения опциона “колл”</i> | <i>Собственная цена опциона</i> |
|---------------------------------------|---------------------------------|
| 40                                    | 16,5                            |
| 50                                    | 9,5                             |
| 60                                    | 4,5                             |
| 70                                    | 2                               |

Постройте график прибыли для следующей схемы с опционами “колл”: покупка одного опциона на 40, продажа двух опционов на 50, покупка одного опциона на 60 и продажа двух опционов на 70.

10. Рассмотрим следующую схему работы с опционами, в которой задействованы только опционы “колл”.

| <i>Цена исполнения</i> | <i>Количество купленных и проданных опционов</i> | <i>Собственная цена опциона</i> |
|------------------------|--------------------------------------------------|---------------------------------|
| 20                     | 1 продан                                         | 45                              |
| 30                     | 2 куплено                                        | 33                              |
| 40                     | 1 продан                                         | 22                              |
| 50                     | 1 куплен                                         | 18                              |
| 60                     | 2 продано                                        | 17                              |
| 70                     | 1 куплен                                         | 16                              |

- а) Постройте график прибыли для этой схемы.  
 б) В приведенных ценах имеется одно нарушение арбитражного условия. Найдите его и дайте объяснение.



---

# 14 Биномиальная модель цены на опционы

---

## 14.1. Биномиальная модель с двумя датами

Наряду с моделью Блэка–Скоулза (Black–Scholes), которая будет рассмотрена в главе 16, наиболее широко используемой моделью ценообразования для опционов является биномиальная. Она обладает рядом преимуществ — например, легко программируется и адаптируется к многим достаточно сложным задачам расчета цены на опционы. Кроме того, данная модель способствует более глубокому пониманию сути формирования цены на опционы. При распространении модели на много периодов она становится одним из мощнейших методов оценивания бумаг типа опционов, доходы по которым зависят от рыночного курса других финансовых активов.

Для иллюстрации применения биномиальной модели начнем со следующего очень простого примера.

- Известны две ключевые даты: дата 0 представляет сегодняшний день, а дата 1 — день через год от нынешнего.
- Имеется два “фундаментальных”, “опорных” актива — одна акция и одна облигация. На акцию выписан опцион на ее покупку (“колл”).
- Текущий курс акции составляет 50 долл. В день, обозначенный датой 1, он либо возрастет на 10%, либо упадет на 3%.
- Процентная ставка дохода за период составляет 6%.
- Опцион “колл” истекает в день 1 и имеет цену исполнения  $X = 50$  долл.

Ниже приведен фрагмент таблицы, реализующей эту модель.

|    | A                                         | B             | C    | D                       | E | F              | G    | H                   | I | J | K |
|----|-------------------------------------------|---------------|------|-------------------------|---|----------------|------|---------------------|---|---|---|
| 1  | <b>БИНОМИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ С ДВУМЯ ДАТАМИ</b> |               |      |                         |   |                |      |                     |   |   |   |
| 2  |                                           |               |      |                         |   |                |      |                     |   |   |   |
| 3  | Вверх                                     | 10%           |      |                         |   |                |      |                     |   |   |   |
| 4  | Вниз                                      | -3%           |      |                         |   |                |      |                     |   |   |   |
| 5  |                                           |               |      |                         |   |                |      |                     |   |   |   |
| 6  | Начальный курс акций                      | 50            |      |                         |   |                |      |                     |   |   |   |
| 7  | Процентная ставка                         | 6%            |      |                         |   |                |      |                     |   |   |   |
| 8  | Цена исполнения                           | 50            |      |                         |   |                |      |                     |   |   |   |
| 9  |                                           |               |      |                         |   |                |      |                     |   |   |   |
| 10 |                                           | Курс акций    |      |                         |   | Курс облигаций |      |                     |   |   |   |
| 11 |                                           |               | 55   | <-- =B\$12*(1+B3)       |   |                | 1,06 | <-- =G\$12*(1+B\$7) |   |   |   |
| 12 |                                           | 50            |      |                         |   | 1              |      |                     |   |   |   |
| 13 |                                           |               | 48,5 | <-- =B\$12*(1+B4)       |   |                | 1,06 | <-- =G\$12*(1+B\$7) |   |   |   |
| 14 |                                           |               |      |                         |   |                |      |                     |   |   |   |
| 15 |                                           | Опцион "колл" |      |                         |   |                |      |                     |   |   |   |
| 16 |                                           |               | 5    | <-- =МАКС(D11-\$B\$8;0) |   |                |      |                     |   |   |   |
| 17 |                                           | ???           |      |                         |   |                |      |                     |   |   |   |
| 18 |                                           |               | 0    | <-- =МАКС(D13-\$B\$8;0) |   |                |      |                     |   |   |   |

Необходимо рассчитать цену на опцион “колл”. Проведем это следующим образом. Покажем, что *существует такая комбинация акций и облигаций, которая в точности дублирует схему получения прибыли по опциону*. Для доказательства этого факта нам потребуются элементы линейной алгебры. Предположим, мы нашли такое количество  $A$  акций и  $B$  облигаций, что

$$\begin{aligned} 55A + 1,06B &= 5, \\ 48,5A + 1,06B &= 0. \end{aligned}$$

Решение этой системы уравнений дает  $A = 0,769$ ;  $B = -35,1959$ . Таким образом, приобретение 0,77 акции и взятие в долг 35,20 долл. под 6% на один период даст доход в размере 5 долл., если курсовая цена акции поднимется, и 0 долл., если упадет — т.е. ту же схему получения прибыли, что и от опциона “колл”. Отсюда следует, что цена опциона должна быть равна стоимости воспроизведения ее схемы прибыли, т.е.

$$\text{Стоимость опциона "колл"} = 0,7692 \cdot \$50 - \$35,1959 = \$3,2656.$$

Такой способ рассуждений называется *ценообразованием по арбитражному эквиваленту (pricing by arbitrage)*. Если два актива или набора активов (в нашем случае это опцион плюс портфель из 0,77 акции и -35,20 долл. облигаций) дают одинаковый доход, то они должны иметь и одинаковую рыночную цену.

|    | A                   | B      | C               | D                                             | E | F | G | H |
|----|---------------------|--------|-----------------|-----------------------------------------------|---|---|---|---|
| 21 |                     | A      | 0,7692          | <-- =(D16-D18)/(B12*(B3-B4))                  |   |   |   |   |
| 22 |                     |        |                 |                                               |   |   |   |   |
| 23 |                     | B      | -35,1959        | <-- =((1+B3)*D18-(1+B4)*D16)/((1+B7)*(B3-B4)) |   |   |   |   |
| 24 |                     |        |                 |                                               |   |   |   |   |
| 25 | Цена опциона "колл" | 3,2656 | <-- =C21*B6+C23 |                                               |   |   |   |   |

В последующих разделах мы покажем, что этот простой метод ценообразования по арбитражному эквиваленту можно распространить и на несколько периодов. А в следующем разделе мы пока что займемся обобщением самого метода.



## 14.2. Цены возможных состояний

Существует более простой (и более общий) метод решения задачи. С точки зрения сегодняшнего дня существует всего две возможности для дня завтрашнего: курс акций либо поднимется, либо упадет. Представим себе, что рынок определяет цену  $q_u$  за \$1 в “верхнем” (*up*) состоянии рынка и цену  $q_d$  за 1 долл. в его “нижнем” (*down*) состоянии. Тогда как на акции, так и на облигации цены должны устанавливаться с помощью следующих *цен возможных состояний* (*state prices*):

$$\begin{aligned} q_u S(1+u) + q_d S(1+d) &= S \Rightarrow q_u(1+u) + q_d(1+d) = 1, \\ q_u(1+i) + q_d(1+i) &= 1. \end{aligned}$$

Решение этой системы дает следующие значения:

$$\begin{aligned} q_u &= \frac{i-d}{(1+i)(u-d)}, \\ q_d &= \frac{u-i}{(1+i)(u-d)}. \end{aligned}$$

Теперь с помощью этих цен можно установить цену на опцион “колл”:

$$C = q_u \max[S(1+u) - X, 0] + q_d \max[S(1+d) - X, 0].$$

Если курс акций может возрасти за один период с коэффициентом  $u$  (в  $u$  раз) или упасть с коэффициентом  $d$  и если процентная ставка за период равна  $i$ , то любой другой финансовый актив следует оценивать путем дисконтирования дохода по нему в “верхнем” состоянии со ставкой  $q_u$  и в “нижнем” — со ставкой  $q_d$ .

В нашем случае цены возможных состояний вычисляются таким образом.

|    | A                        | B      | C                             | D | E | F                                          | G                    | H | I | J |
|----|--------------------------|--------|-------------------------------|---|---|--------------------------------------------|----------------------|---|---|---|
| 27 |                          |        |                               |   |   | Проверка: действительно ли цены возм.сост. |                      |   |   |   |
| 28 | Цены возможных состояний |        |                               |   |   | отвечают курсам акций и облигаций          |                      |   |   |   |
| 29 | $q_u$                    | 0,6531 | <-- =(B7-B4)/((1+B7)*(B3-B4)) |   |   | 1,06                                       | <-- =1/(B29+B30)     |   |   |   |
| 30 | $q_d$                    | 0,2903 | <-- =(B3-B7)/((1+B7)*(B3-B4)) |   |   | 50                                         | <-- =B29*D11+B30*D13 |   |   |   |

Обратите внимание, что в ячейках F29 и F30 мы проверяем, действительно ли по этим ценам восстанавливается процентная ставка и курс акций. Если с помощью этих цен вычислить цену опциона “колл” из предыдущего раздела (с  $S = 50$ ;  $X = 50$ ;  $u = 0,10$ ;  $d = -0,03$ ;  $i = 0,06$ ), то получим:

$$\begin{aligned} C &= q_u \max[S(1+u) - X, 0] + q_d \max[S(1+d) - X, 0] = \\ &= 0,6531 \times 5 + 0,2903 \times 0 = 3,27 \end{aligned}$$

Этот результат, разумеется, совпадает с полученным ранее. Обратите внимание также на то, что цены возможных состояний можно использовать и для оценивания опционов “пут”; при тех же параметрах получим

$$P = q_u \max [X - S(1 + u), 0] + q_d \max [X - S(1 + d), 0] = \\ = 0,6531 \times \max (50 - 55, 0) + 0,2903 \times \max (50 - 48, 5, 0) = 0,4354.$$

Заметим также, что, как этого следовало ожидать, теорема о паритете “пут”–“колл” выполняется и в данном конкретном случае:

$$P + S = 0,4354 + 50 = C + \frac{X}{1 + i} = 3,27 + \frac{50}{1,06}.$$

Соберем все полученные факты вместе:

|    | A                                                                    | B       | C                                 | D                               | E      | F                                                                                                       | G | H | I | J | K |
|----|----------------------------------------------------------------------|---------|-----------------------------------|---------------------------------|--------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|---|
| 1  | <b>БИНОМИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ДВУХ ДАТ С ЦЕНАМИ ВОЗМОЖНЫХ СОСТОЯНИЙ</b> |         |                                   |                                 |        |                                                                                                         |   |   |   |   |   |
| 2  |                                                                      |         |                                   |                                 |        |                                                                                                         |   |   |   |   |   |
| 3  | Вверх                                                                | 10%     |                                   | <b>Цены возможных состояний</b> |        |                                                                                                         |   |   |   |   |   |
| 4  | Вниз                                                                 | -3%     |                                   | $q_u$                           | 0,6531 | <-- =(B7-B4)/((1+B7)*(B3-B4))                                                                           |   |   |   |   |   |
| 5  |                                                                      |         |                                   | $q_d$                           | 0,2903 | <-- =(B3-B7)/((1+B7)*(B3-B4))                                                                           |   |   |   |   |   |
| 6  | Начальный курс акций                                                 | 50      |                                   |                                 |        |                                                                                                         |   |   |   |   |   |
| 7  | Процентная ставка                                                    | 6%      |                                   |                                 |        |                                                                                                         |   |   |   |   |   |
| 8  | Цена исполнения                                                      | 50      |                                   |                                 |        |                                                                                                         |   |   |   |   |   |
| 9  |                                                                      |         |                                   |                                 |        |                                                                                                         |   |   |   |   |   |
| 10 | <b>Прибыль от опциона “колл”</b>                                     |         |                                   |                                 |        |                                                                                                         |   |   |   |   |   |
| 11 | В верхнем состоянии                                                  | 5       | <-- =МАКС(\$B\$6*(1+B3)-\$B\$8,0) |                                 |        |                                                                                                         |   |   |   |   |   |
| 12 | В нижнем состоянии                                                   | 0       | <-- =МАКС(\$B\$6*(1+B4)-\$B\$8,0) |                                 |        |                                                                                                         |   |   |   |   |   |
| 13 | Цена опциона                                                         | 3,2656  | <-- =\$E\$4*B11+\$E\$5*B12        |                                 |        |                                                                                                         |   |   |   |   |   |
| 14 |                                                                      |         |                                   |                                 |        |                                                                                                         |   |   |   |   |   |
| 15 | <b>Прибыль от опциона “пут”</b>                                      |         |                                   |                                 |        |                                                                                                         |   |   |   |   |   |
| 16 | В верхнем состоянии                                                  | 0       | <-- =МАКС(\$B\$8-(1+B3)*\$B\$6,0) |                                 |        |                                                                                                         |   |   |   |   |   |
| 17 | В нижнем состоянии                                                   | 1,5     | <-- =МАКС(\$B\$8-(1+B4)*\$B\$6,0) |                                 |        |                                                                                                         |   |   |   |   |   |
| 18 | Цена опциона                                                         | 0,4354  | <-- =\$E\$4*B16+\$E\$5*B17        |                                 |        |                                                                                                         |   |   |   |   |   |
| 19 |                                                                      |         |                                   |                                 |        |                                                                                                         |   |   |   |   |   |
| 20 | <b>Паритет “пут–колл”</b>                                            |         |                                   |                                 |        |                                                                                                         |   |   |   |   |   |
| 21 | Курс + пут                                                           | 50,4354 | <-- =B6+B18                       |                                 |        |                                                                                                         |   |   |   |   |   |
| 22 | Колл + ПС(X)                                                         | 50,4354 | <-- =B13+B8/(1+B7)                |                                 |        |                                                                                                         |   |   |   |   |   |
| 23 |                                                                      |         |                                   |                                 |        |                                                                                                         |   |   |   |   |   |
| 24 |                                                                      |         |                                   |                                 |        |                                                                                                         |   |   |   |   |   |
|    |                                                                      |         |                                   |                                 |        | <b>Примечание о ПС(X) в паритете “пут–колл”:</b>                                                        |   |   |   |   |   |
|    |                                                                      |         |                                   |                                 |        | В модели с непрерывным временем (стандартной модели Блэка-Скоулза) $ПС(X) = X \cdot \exp(-i \cdot T)$ . |   |   |   |   |   |
|    |                                                                      |         |                                   |                                 |        | Здесь используется дискретное время, и $ПС(X)$ должна вычисляться соответственно:                       |   |   |   |   |   |
|    |                                                                      |         |                                   |                                 |        | $ПС(X) = X/(1+i)$ .                                                                                     |   |   |   |   |   |

### 14.3. Биномиальная модель для нескольких периодов

Биномиальную модель легко распространить на случай нескольких финансовых периодов. Для примера рассмотрим биномиальную модель для трех периодов со следующими характеристиками.

- В каждый период курс акций поднимается на 10% или падает на 3% по сравнению с предыдущим периодом.
- Ставка дохода за каждый период составляет 6%.

Напомним, что при таких колебаниях курсовой цены и такой ставке дохода цены возможных состояний будут равны

$$q_u = \frac{i - d}{(1 + i)(u - d)} = 0,6531,$$

$$q_d = \frac{u - i}{(1 + i)(u - d)} = 0,2903.$$

Теперь с помощью этих цен можно определить стоимость опциона “колл”, выписанного на акцию по прошествии двух периодов. Как и ранее, предполагаем, что курсовая цена акции вначале составляет 50 долл., а цена исполнения опциона  $X$  равна 50 после двух периодов. При этих предположениях получаем следующую картину.

|    | A             | B | C       | D | E       | F | G              | H | I    | J | K      |
|----|---------------|---|---------|---|---------|---|----------------|---|------|---|--------|
| 11 | Курс акций    |   |         |   |         |   | Курс облигаций |   |      |   |        |
| 12 |               |   |         |   | 60,5000 |   |                |   |      |   | 1,1236 |
| 13 |               |   | 55,0000 |   |         |   |                |   | 1,06 |   |        |
| 14 | 50            |   |         |   | 53,3500 |   | 1              |   |      |   | 1,1236 |
| 15 |               |   | 48,5000 |   |         |   |                |   | 1,06 |   |        |
| 16 |               |   |         |   | 47,0450 |   |                |   |      |   | 1,1236 |
| 17 |               |   |         |   |         |   |                |   |      |   |        |
| 18 | Опцион “колл” |   |         |   |         |   |                |   |      |   |        |
| 19 |               |   |         |   | 10,5000 |   |                |   |      |   |        |
| 20 |               |   | 7,8302  |   |         |   |                |   |      |   |        |
| 21 | 5,749         |   |         |   | 3,3500  |   |                |   |      |   |        |
| 22 |               |   | 2,1880  |   |         |   |                |   |      |   |        |
| 23 |               |   |         |   | 0,0000  |   |                |   |      |   |        |

Как определялась цена опциона “колл”, равная 5,749? Чтобы объяснить это, будем двигаться в обратном направлении с начала 2-го периода.

**Дата 2.** По прошествии двух периодов курс акций равен либо 60,50 долл. (что соответствует двум подъемам), либо 53,35 долл. (один подъем и одно падение), либо 47,05 долл. (два падения). Поэтому, зная цену исполнения  $X = 50$ , получаем, что окончательная сумма дохода по опциону в конце 2-го периода составит 10,50, 3,35 или 0 долл.

**Дата 1.** В этот момент существуют две возможности. Первая состоит в достижении “верхнего” состояния, и в этом случае текущий курс будет равен 55 долл., а доход по опциону составит 10,50 или 3,35 долл. в следующий период.

|     |  |       |
|-----|--|-------|
|     |  | 10,50 |
| ??? |  | 3,35  |

Для оценивания опциона в этом состоянии воспользуемся ценами возможных состояний  $q_u = 0,6531$  и  $q_d = 0,2903$ :

$$\begin{aligned} \text{Цена опциона в “верхнем” состоянии периода 1} &= \\ &= 0,6531 \times 10,50 + 0,2903 \times 3,35 = 7,830. \end{aligned}$$

Вторая возможность состоит в попадании в “нижнее” состояние периода.

|     |      |
|-----|------|
| ??? | 3,35 |
| ??? | 0,00 |

С помощью тех же цен возможных состояний (которые, в конце концов, зависят только от степени повышения/понижения курса акций и от ставки доходности) получаем

$$\begin{aligned} \text{Цена опциона в “нижнем” состоянии периода 1} &= \\ &= 0,6531 \times 3,35 + 0,2903 \times 0 = 2,188. \end{aligned}$$

**Дата 0.** Продолжая двигаться в обратном направлении, получаем нашу схему уже в таком состоянии.

|     |  |       |       |
|-----|--|-------|-------|
|     |  | 7,830 | 10,50 |
| ??? |  | 2,188 | 3,35  |
|     |  |       | 0,00  |

Таким образом, в период 0 покупатель опциона владеет ценной бумагой, которая будет стоить 7,83 долл., если обеспечивающая ее акция поднимется в цене (попадет в “верхнее” состояние), и 2,19 долл. в том случае, если акция понизится в цене (попадет в “нижнее” состояние). И снова воспользуемся ценами возможных состояний для оценивания этого опциона:

$$\text{Цена опциона в период 0} = 0,6531 \times 7,830 + 0,2903 \times 2,188 = 5,749.$$

|    | A                                                 | B   | C    | D                        | E      | F                                       | G | H              | I    | J      | K |
|----|---------------------------------------------------|-----|------|--------------------------|--------|-----------------------------------------|---|----------------|------|--------|---|
| 1  | <b>БИНОМИАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ОПЦИОНА С ТРЕМЯ ДАТАМИ</b> |     |      |                          |        |                                         |   |                |      |        |   |
| 2  |                                                   |     |      |                          |        |                                         |   |                |      |        |   |
| 3  | Вверх                                             | 10% |      |                          |        |                                         |   |                |      |        |   |
| 4  | Вниз                                              | -3% |      |                          |        |                                         |   |                |      |        |   |
| 5  |                                                   |     |      | цены возможных состояний |        |                                         |   |                |      |        |   |
| 6  | Нач. курс акций                                   | 50  |      | $q_u$                    | 0,6531 | $\leftarrow = (B7-B4)/((1+B7)*(B3-B4))$ |   |                |      |        |   |
| 7  | Процент. ставка                                   | 6%  |      | $q_d$                    | 0,2903 | $\leftarrow = (B3-B7)/((1+B7)*(B3-B4))$ |   |                |      |        |   |
| 8  | Цена исполн-я                                     | 50  |      |                          |        |                                         |   |                |      |        |   |
| 9  |                                                   |     |      |                          |        |                                         |   |                |      |        |   |
| 10 | Курс акций                                        |     |      |                          |        |                                         |   | Курс облигаций |      |        |   |
| 11 |                                                   |     |      |                          |        |                                         |   |                |      |        |   |
| 12 |                                                   | 50  | 55   | 60,50                    |        |                                         |   | 1              | 1,06 | 1,1236 |   |
| 13 |                                                   |     | 48,5 | 53,35                    |        |                                         |   |                | 1,06 | 1,1236 |   |
| 14 |                                                   |     |      | 47,05                    |        |                                         |   |                |      | 1,1236 |   |
| 15 |                                                   |     |      |                          |        |                                         |   |                |      |        |   |
| 16 |                                                   |     |      |                          |        |                                         |   |                |      |        |   |
| 17 |                                                   |     |      |                          |        |                                         |   |                |      |        |   |
| 18 | Цена опциона “колл”                               |     |      |                          |        |                                         |   |                |      |        |   |
| 19 |                                                   |     |      |                          |        |                                         |   |                |      |        |   |
| 20 |                                                   |     |      |                          |        |                                         |   |                |      |        |   |
| 21 |                                                   |     |      |                          |        |                                         |   |                |      |        |   |
| 22 |                                                   |     |      |                          |        |                                         |   |                |      |        |   |
| 23 |                                                   |     |      |                          |        |                                         |   |                |      |        |   |
| 24 |                                                   |     |      |                          |        |                                         |   |                |      |        |   |
| 25 |                                                   |     |      |                          |        |                                         |   |                |      |        |   |
| 26 |                                                   |     |      |                          |        |                                         |   |                |      |        |   |
| 27 |                                                   |     |      |                          |        |                                         |   |                |      |        |   |

### 14.3.1. Обобщение биномиальной модели на случай многих периодов

Очевидно, что схему рассуждений из рассмотренного примера можно обобщить и на большее количество периодов. Ниже приведен еще один граф, показывающий модель с пятью датами и теми же параметрами повышения/понижения, что и ранее.

|         |            |         |  |         |         |         |
|---------|------------|---------|--|---------|---------|---------|
|         |            |         |  |         |         | 73,2050 |
|         | Курс акций |         |  |         |         |         |
|         |            |         |  |         | 66,5500 | 64,5535 |
|         |            | 55,0000 |  | 60,5000 |         |         |
| 50,0000 |            |         |  |         | 58,6850 | 56,9245 |
|         |            | 48,5000 |  | 53,3500 |         |         |
|         |            |         |  |         | 51,7495 | 50,1970 |
|         |            |         |  | 47,0450 |         |         |
|         |            |         |  |         | 45,6337 | 44,2646 |

|        |                |        |  |        |        |        |
|--------|----------------|--------|--|--------|--------|--------|
|        |                |        |  |        |        | 1,2625 |
|        | Курс облигаций |        |  |        |        |        |
|        |                |        |  |        | 1,1910 | 1,2625 |
|        |                | 1,0600 |  | 1,1236 |        |        |
| 1,0000 |                |        |  |        | 1,1910 | 1,2625 |
|        |                | 1,0600 |  | 1,1236 |        |        |
|        |                |        |  |        | 1,1910 | 1,2625 |
|        |                |        |  | 1,1236 |        |        |
|        |                |        |  |        | 1,1910 | 1,2625 |

|         |                     |         |  |         |         |         |
|---------|---------------------|---------|--|---------|---------|---------|
|         |                     |         |  |         |         | 23,2050 |
|         | Цена опциона "колл" |         |  |         |         |         |
|         |                     |         |  |         | 19,3802 | 14,5535 |
|         |                     | 13,0190 |  | 16,0002 |         |         |
| 10,4360 |                     |         |  |         | 11,5152 | 6,9245  |
|         |                     | 6,6593  |  | 8,8502  |         |         |
|         |                     |         |  |         | 4,5797  | 0,1970  |
|         |                     |         |  | 3,0284  |         |         |
|         |                     |         |  |         | 0,1287  | 0,0000  |

### 14.3.2. Направление расчета

Действительно ли необходимо двигаться вспять по приведенным схемам? Наш ответ — нет, не обязательно. Нет никакой необходимости оценивать доходность опциона в каждом узле в обратном направлении от конечной даты, *если опцион является европейским*. Достаточно будет оценить доход на конце каждой ветви графа с помощью цен возможных состояний, при этом не допустив ошибки в подсчете количества путей, ведущих к каждому конечному узлу. Ниже приведена таблица, соответствующая нашему примеру.

|    | B        | C        | D      | E      | F                                                                        | G      | H            | I                  | J |
|----|----------|----------|--------|--------|--------------------------------------------------------------------------|--------|--------------|--------------------|---|
| 43 |          |          |        |        |                                                                          |        |              |                    |   |
| 44 |          |          |        |        | $q_u^{*}(\text{кол-во шагов вверх}) * q_d^{*}(\text{кол-во шагов вниз})$ |        |              |                    |   |
| 45 | Конечная |          |        |        |                                                                          |        | Стоимость =  |                    |   |
| 46 | курсовая | Конечный | Кол-во | Кол-во | Цена                                                                     |        | доход *      |                    |   |
| 47 | цена     | доход    | шагов  | шагов  | возмож.                                                                  | Кол-во | цена *       |                    |   |
| 48 |          |          | вверх  | вниз   | состояния                                                                | путей  | кол-во путей |                    |   |
| 49 | 73,2050  | 23,2050  | 4      | 0      | 0,1820                                                                   | 1      | 4,2224       | <-- =G49*F49*C49   |   |
| 50 |          |          |        |        |                                                                          |        |              |                    |   |
| 51 | 64,5535  | 14,5535  | 3      | 1      | 0,0809                                                                   | 4      | 4,7078       | <-- =G51*F51*C51   |   |
| 52 |          |          |        |        |                                                                          |        |              |                    |   |
| 53 | 56,9245  | 6,9245   | 2      | 2      | 0,0359                                                                   | 6      | 1,4933       | <-- =G53*F53*C53   |   |
| 54 |          |          |        |        |                                                                          |        |              |                    |   |
| 55 | 50,1970  | 0,1970   | 1      | 3      | 0,0160                                                                   | 4      | 0,0126       | <-- =G55*F55*C55   |   |
| 56 |          |          |        |        |                                                                          |        |              |                    |   |
| 57 | 44,2646  | 0,0000   | 0      | 4      | 0,0071                                                                   | 1      | 0,0000       | <-- =G57*F57*C57   |   |
| 58 |          |          |        |        |                                                                          |        |              |                    |   |
| 59 |          |          |        |        | Стоимость опциона                                                        |        | 10,4360      | <-- =СУММ(H49:H57) |   |

Поясним все, что содержится в этой таблице. Для каждой величины дохода по опциону на конце ветви мы рассматриваем следующие вопросы.

Каков путь к данному узлу по схеме? Сколько шагов “вверх” и “вниз” необходимо сделать?

Какова цена за доллар в доходе для конкретного состояния?

Цена возможного состояния = 
$$q_u^{\text{кол-во шагов вверх}} \times q_d^{\text{кол-во шагов вниз}}$$

Сколько путей ведет к одному конечному узлу?

Ответ дается биномиальным коэффициентом 
$$\binom{\text{Кол-во периодов}}{\text{Кол-во шагов вверх}}$$

Какова приведенная стоимость дохода из конечного узла в момент времени 0?

Ответ равен произведению дохода на цену и на кол-во путей

Какова стоимость опциона в момент времени 0?

Сумма стоимостей всех возможных доходов

Пример: конечный доход 14,5535 возникает при начальной курсовой цене 64,5535 после трех подъемов и одного понижения

Пример: приведенная стоимость рассмотренного выше конечного дохода в момент 0 равна  $0,6531^3 \times 0,2903^1 = 0,0809$

Пример: существует

$\binom{4}{3} = 4$  пути, конечный доход в конце которых составляет 64,5535. Биномиальный коэффициент вычисляется функцией Excel ЧИСЛКОМБ (Combin)

Пример:  $14,5535 \times 0,0809 \times 4 = 4,7078$

Итоговое значение: 10,4360. Это стоимость многопериодного опциона “колл” в биномиальной модели с пятью расчетными датами (четырьмя расчетными периодами)

Отсюда следует, что цена европейского опциона в биномиальной модели с  $n$  периодами равна:

$$\text{“Колл”} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} q_u^i q_d^{n-i} \max \left[ S_0 (1+u)^i (1+d)^{n-i} - X, 0 \right],$$

$$\text{“Пут”} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} q_u^i q_d^{n-i} \max \left[ X - S_0 (1+u)^i (1+d)^{n-i}, 0 \right].$$

В следующем разделе этот метод применяется к оценке американских опционов. В разделе 14.5 эти формулы будут реализованы на языке VBA.

#### 14.4. Оценка американских опционов по биномиальной модели

Биномиальная модель может применяться для оценивания не только европейских, но и американских опционов<sup>1</sup>. Снова возьмем ту же основную модель, в которой подъем курса составляет 10%, падение — 3%,  $S = 50$ ,  $X = 50$  и  $i = 6\%$ . Рассмотрим вариант модели с тремя расчетными датами. Схемы прибыли для акций и облигаций уже приводились, и осталось рассмотреть только схему для опциона “пут” с ценой исполнения  $X = 50$ . Состояния рынка мы обозначим следующим образом.

| Обозначения состояний |   |           |    |
|-----------------------|---|-----------|----|
|                       |   | u         | uu |
| 0                     |   | ud или du |    |
|                       | d | dd        |    |

Ниже приведены значения курса акций и дохода по опциону “пут” в день 3.

| Курс акций |      |       | Доход от американского опциона “пут” |    |      |
|------------|------|-------|--------------------------------------|----|------|
|            |      | 60,50 |                                      |    | 0,00 |
| 50         | 55   | 53,35 | ??                                   | ?? | 0,00 |
|            | 48,5 | 47,05 |                                      | ?? | 2,96 |

В день 2 держатель американского опциона “пут” может выбрать, держать ли ему опцион дальше или исполнить его. В результате имеем следующую функцию стоимости:

$$\begin{aligned} \boxed{\text{Цена опциона в день 2, состояние } u} &= \max \left\{ \text{Стоимость опциона при исполнении, } q_u \times \text{Доход в сост. } uu + q_d \times \text{Доход в сост. } ud \right\} = \\ &= \max \left\{ \max (X - S_u), q_u \times \text{Доход в сост. } uu + q_d \times \text{Доход в сост. } ud \right\} \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Напомним, что согласно материалу главы 13 американский опцион на акцию без выплаты дивидендов имеет ту же стоимость, что и европейский. В этом разделе мы рассмотрим опционы на продажу (“пут”), а менее интересный случай опционов на покупку (“колл”) оставим читателю в качестве упражнения. В главе 19 оценивание американских опционов будет рассмотрено более подробно.

Аналогичная функция имеет место для стоимости опциона в состоянии  $d$  в день 2. Получается дерево, приведенное ниже.

|    |  |     |  |      |
|----|--|-----|--|------|
|    |  | 0   |  | 0,00 |
| ?? |  |     |  | 0,00 |
|    |  | 1,5 |  | 2,96 |

Вот каким образом его можно истолковать. В состоянии  $u$ , в котором курс акций равен 55 долл., исполнять опцион нет смысла; поскольку будущий доход от состояния  $u$  равен нулю, опцион ничего не стоит. С другой стороны, в состоянии  $d$  держатель опциона получает  $\max(50 - 48,5, 0) = 1,5$ , если он исполняет опцион. Но если он держит его и дальше без исполнения, то его рыночная цена зависит от будущих возможных состояний и доходов:

$$q_u \times 0 + q_d \times 2,96 = 0,6531 \times 0 + 0,2903 \times 2,96 = 0,8578.$$

Очевидно, в этом состоянии выгоднее исполнить опцион, чем держать его дальше.

В день 0 снова справедлива аналогичная функция стоимости:

$$\begin{aligned} \text{Цена опциона в день 0} &= \max \left\{ \begin{array}{l} \text{Стоимость опциона при исполнении,} \\ q_u \times \text{Доход в сост. } u + q_d \times \text{Доход в сост. } d \end{array} \right\} = \\ &= \max \left\{ \begin{array}{l} \max(X - S), \\ q_u \times \text{Доход в сост. } u + q_d \times \text{Доход в сост. } d \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Теперь дерево стоимости для американского опциона “пут” выглядит следующим образом.

|                           |  |     |  |                                                                                                |
|---------------------------|--|-----|--|------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Американский опцион “пут” |  |     |  |                                                                                                |
|                           |  | 0   |  | $=\text{МАКС}(\text{МАКС}(X-S*(1+u), 0), q_u \text{put\_payoffuu} + q_d \text{put\_payoffud})$ |
| 0,4354                    |  |     |  | $=\text{МАКС}(\text{МАКС}(X-S*(1+d), 0), q_u \text{put\_payoffud} + q_d \text{put\_payoffdd})$ |
|                           |  | 1,5 |  | $=\text{МАКС}(\text{МАКС}(X-S, 0), q_u \text{put\_valueu} + q_d \text{put\_valued})$           |

Это дерево стоит сравнить с деревом стоимости для европейского опциона “пут”.

|                          |  |        |  |        |
|--------------------------|--|--------|--|--------|
| Европейский опцион “пут” |  |        |  |        |
|                          |  | 0      |  | 0,0000 |
| 0,2490                   |  |        |  | 0,0000 |
|                          |  | 0,8578 |  | 2,9550 |

Таким образом, с помощью биномиальной модели мы рассчитали цену как на американский, так и на европейский опцион на продажу (“пут”). В ходе этого мы показали, что американский опцион “пут” может оказаться дороже аналогичного европейского.



### 14.5. Реализация биномиальной модели на VBA

Процедура ценообразования из предыдущих примеров может показаться излишне громоздкой, но она легко программируется на языке Visual Basic for Applications среды Excel. В биномиальной модели курс обеспечивающей акции может *подниматься* или *падать* в любой момент времени. Если  $q_u$  — цена возможного состояния, соответствующая подъему, а  $q_d$  — падению курса акций, то цена опциона “колл” по биномиальной модели равна

$$\text{“Колл”} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} q_u^i q_d^{n-i} \max \left[ S_0 (1+u)^i (1+d)^{n-i} - X, 0 \right],$$

где  $u$  — величина подъема курса акций;  $d$  — величина его падения;  $\binom{n}{i}$  — биномиальный коэффициент (количество возможных наборов подъемов из  $n$  изменений курса):

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}.$$

Для расчета биномиальных коэффициентов используется функция Excel ЧИСЛКОМБ (Combin) с аргументами  $n$  и  $i$ .

Всякий раз при рассмотрении конечных аппроксимаций для формул ценообразования опционов необходимо выбирать аппроксимацию для подъема и падения курса акций. Преобразуем процентную ставку доходности и показатель колебаний курса акций  $\sigma$  в биномиальные коэффициенты следующим образом:

$$\begin{aligned} \Delta t &= 1/n, & R &= e^{r\Delta t}, \\ 1+U &= e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, & q_u &= \frac{R-D}{R(U-D)}, \\ 1+D &= e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, & q_d &= \frac{1}{R} - q_u. \end{aligned}$$

Такая аппроксимация гарантирует, что при  $\Delta t \rightarrow 0$ , т.е. при  $n \rightarrow \infty$ , распределение дохода по акциям будет стремиться к логнормальному распределению<sup>2</sup>.

Имея такую аппроксимацию, можно уже заняться написанием функций VBA для реализации формул биномиальной модели цены на европейские опционы. При реализации формул ценообразования для опционов “колл” и “пут” будем использовать следующие функции:

```
Function EurCall(S, X, T, rf, sigma, n)
'VBA не различает регистр, поэтому пишем "rf"
'вместо "r", а также "r" вместо "R".
```

<sup>2</sup> Это не единственная аппроксимация, сходящаяся к логнормальному процессу. См. Omberg (1987), Hull (2000), а также Benninga, Steinmetz, Stroughair (1993).

```

'Обратите внимание, что вместо "1 + up" и "1 + down"
'пишется просто "up" и "down"
delta_t = T / n
up = Exp(sigma * Sqr(delta_t))
down = Exp(-sigma * Sqr(delta_t))
r = Exp(rf * delta_t)
q_up = (r - down) / (r * (up - down))
q_down = 1 / r - q_up
EurCall = 0
For Index = 0 To n
    EurCall = EurCall + Application.Combin(n, Index) * _
        q_up ^ Index * q_down ^ (n - Index) * _
        Application.Max(S * up ^ Index * down ^ _
            (n - Index) - X, 0)
Next Index
End Function
Function (EurPut(S, X, T, rf, Sigma, n)
    delta_t = T / n
    up = Exp(sigma * Sqr(delta_t))
    r = Exp(rf * delta_t)
    q_up = (r - down) / (r * (up - down))
    q_down = 1 / r - q_up
    EurPut = 0
    For Index = 0 To n
        EurPut = EurPut + Application.Combin(n, Index) * _
            q_up ^ Index * q_down ^ (n - Index) * _
            Application.Max(X - up ^ Index * down ^ _
                (n - Index) * S, 0)
    Next Index
End Function

```

Обратите внимание на то, что хотя мы непосредственно реализовали биномиальную формулу для европейского опциона “пут”, можно было бы воспользоваться теоремой о паритете “колл”–“пут”.

## 14.6. Оценивание американского опциона на продажу

Согласно утверждению известной теоремы, приведенной в главе 13, цена американского опциона на покупку (“колл”) акции, по которой не выплачиваются дивиденды, равна цене аналогичного европейского опциона. Однако ценообразование опциона на продажу (“пут”) может подчиняться и другим правилам. В следующей функции VBA для оценивания американских опционов “пут” используется биномиальная модель, аналогичная показанной в разделе 14.4.

```

Function AmericanPut(S, X, T, rf, sigma, n)
'VBA не различает регистр, поэтому пишем "rf"
'вместо "r", а также "r" вместо "R".
'Обратите внимание, что вместо "1 + up" и "1 + down"
'пишется просто "up" и "down"

```

```

delta_t = T / n
up = Exp(sigma * Sqr(delta_t))
down = Exp(-sigma * Sqr(delta_t))
r = Exp(rf * delta_t)
q_up = (r - down) / (r * (up - down))
q_down = 1 / r - q_up
DimOptionReturnEnd() As Double
DimOptionReturnMiddle() As Double
ReDim OptionReturnEnd(n + 1)

For State = 0 To n
    OptionReturnEnd(State) = Application.Max(X - _
        S * up ^ State * down ^ (n - State), 0)
Next State

For Index = n - 1 To 0 Step -1
    ReDim OptionReturnMiddle(Index)
    For State = 0 To Index
        OptionReturnMiddle(State) = _
            Application.Max(X - S * up ^ State * _
                down ^ (Index - State), q_down * _
                OptionReturnEnd(State) + q_up * _
                OptionReturnEnd(State + 1))
    Next State
    ReDim OptionReturnEnd(Index)
    For State = 0 To Index
        OptionReturnEnd(State) = _
            OptionReturnMiddle(State)
    Next State
Next Index
AmericanPut = OptionReturnMiddle(0)
End Function

```

В этой функции используются два массива, OptionReturnEnd и OptionReturnMiddle, в которых хранятся значения стоимости опциона для каждого момента времени  $t$  — соответственно при  $t + 1$  и при  $t$ . Отметим также, что поскольку в VBA нет собственной функции для вычисления максимума, мы вызвали функцию Excel Max с помощью оператора Application.Max.

Можно определить аналогичную функцию и для американских опционов “колл”, хотя она всего лишь подтвердит то, что мы уже знаем и без нее — стоимости американского и европейского опционов “колл” на акции, по которым не выплачиваются дивиденды, равны между собой.

```

Function AmericanCall(S, X, T, rf, sigma, n)
    'VBA не различает регистр, поэтому пишем "rf"
    'вместо "r", а также "r" вместо "R".
    'Обратите внимание, что вместо "1 + up" и "1 + down"
    'пишется просто "up" и "down"
    delta_t = T / n
    up = Exp(sigma * Sqr(delta_t))
    down = Exp(-sigma * Sqr(delta_t))

```

```

r = Exp(rf * delta_t)
q_up = (r - down) / (r * (up - down))
q_down = 1 / r - q_up
DimOptionReturnEnd() As Double
DimOptionReturnMiddle() As Double
ReDim OptionReturnEnd(n + 1)
For State = 0 To n
    OptionReturnEnd(State) = Application.Max(S * _
        up ^ State * down ^ (n - State) - X, 0)
Next State
For Index = n - 1 To 0 Step -1
    ReDim OptionReturnMiddle(Index)
    For State = 0 To Index
        OptionReturnMiddle(State) = _
            Application.Max(S * up ^ State * down ^ _
                (Index - State) - X, q_down * _
                OptionReturnEnd(State) + q_up * _
                OptionReturnEnd(State + 1))
    Next State
    ReDim OptionReturnEnd(Index)
    For State = 0 To Index
        OptionReturnEnd(State) = _
            OptionReturnMiddle(State)
    Next State
Next Index
AmericanCall = OptionReturnMiddle(0)
End Function

```

Вот как выглядит результат работы программы при ее реализации на листе электронной таблицы. Кстати, в этой же таблице показано, что для американских опционов “колл” теорема о паритете “пут”–“колл” не выполняется.

|    | A                                       | B       | C                                         | D | E | F |
|----|-----------------------------------------|---------|-------------------------------------------|---|---|---|
| 1  | <b>ОЦЕНИВАНИЕ АМЕРИКАНСКИХ ОПЦИОНОВ</b> |         |                                           |   |   |   |
| 2  |                                         |         |                                           |   |   |   |
| 3  | S                                       | 60      | Текущий курс акций                        |   |   |   |
| 4  | X                                       | 60      | Цена исполнения опциона                   |   |   |   |
| 5  | T                                       | 0,5000  | Срок до исполнения (в годах)              |   |   |   |
| 6  | r                                       | 8%      | Годовая процентная ставка                 |   |   |   |
| 7  | Сигма                                   | 30%     | Уровень риска                             |   |   |   |
| 8  | n                                       | 20      | Кол-во подразбиений T                     |   |   |   |
| 9  |                                         |         |                                           |   |   |   |
| 10 | Цена американского опциона "пут"        | 4,0905  | <-- =AmericanPut(S,X,T,interest,sigma,n)  |   |   |   |
| 11 | Цена американского опциона "колл"       | 6,1701  | <-- =AmericanCall(S,X,T,interest,sigma,n) |   |   |   |
| 12 |                                         |         |                                           |   |   |   |
| 13 | Цена европейского опциона "пут"         | 3,8175  | <-- =EurPut(S, X,T,interest,sigma,n)      |   |   |   |
| 14 | Цена европейского опциона "колл"        | 6,1701  | <-- =EurCall(S, X,T,interest,sigma,n)     |   |   |   |
| 15 |                                         |         |                                           |   |   |   |
| 16 | <b>Паритет "пут--колл"?</b>             |         |                                           |   |   |   |
| 17 | Дельта t, Δt                            | 0,0250  | <-- =B5/B8                                |   |   |   |
| 18 | $R = e^{rt}$                            | 1,0020  | <-- =EXP(B6*B17)                          |   |   |   |
| 19 |                                         |         |                                           |   |   |   |
| 20 | Цена амер.опц."пут" + курс акций        | 64,0905 | <-- =B10+B3                               |   |   |   |
| 21 | Цена амер.опц."колл" + курс облигац.    | 63,8175 | <-- Цена амер.опц."колл"+X/R^n            |   |   |   |
| 22 |                                         |         |                                           |   |   |   |
| 23 | Цена европ.опц."пут" + курс акций       | 63,8175 | <-- =B13+B3                               |   |   |   |
| 24 | Цена европ.опц."колл" + курс облигац.   | 63,8175 | <-- Цена европ.опц."колл"+X/R^n           |   |   |   |

Данная таблица иллюстрирует ряд важных моментов.

- Цена европейского опциона “пут” *ниже* (в общем случае), чем соответствующего американского. Это различие возникает оттого, что для опционов “пут” возможность досрочного исполнения является существенно ценной.
- Поскольку американский опцион “колл”, выписанный на акцию без выплаты дивидендов, никогда не исполняется досрочно, цены европейских и американских опционов на покупку равны между собой.
- Теорема о паритете “пут”–“колл” не выполняется для американских опционов, но, естественно, выполняется для европейских<sup>3</sup>.

#### 14.7. Сходимость биномиальной модели к цене Блэка–Скоулза<sup>4</sup>

В разделе 14.5 была определена функция  $\text{EurCall}(S, X, T, r, \sigma, n)$ , в которой по биномиальной модели вычисляется стоимость опциона “колл”; в этой функции аргумент  $n$  представляет собой количество отрезков разбиения на интервале времени  $T$ . В главе 16 будет подробно рассмотрена модель Блэка–Скоулза (Black–Scholes), наиболее широко используемая для расчета цены на опционы. А пока мы ограничимся замечанием о том, что при больших  $n$  биномиальная модель сходится к модели Блэка–Скоулза.

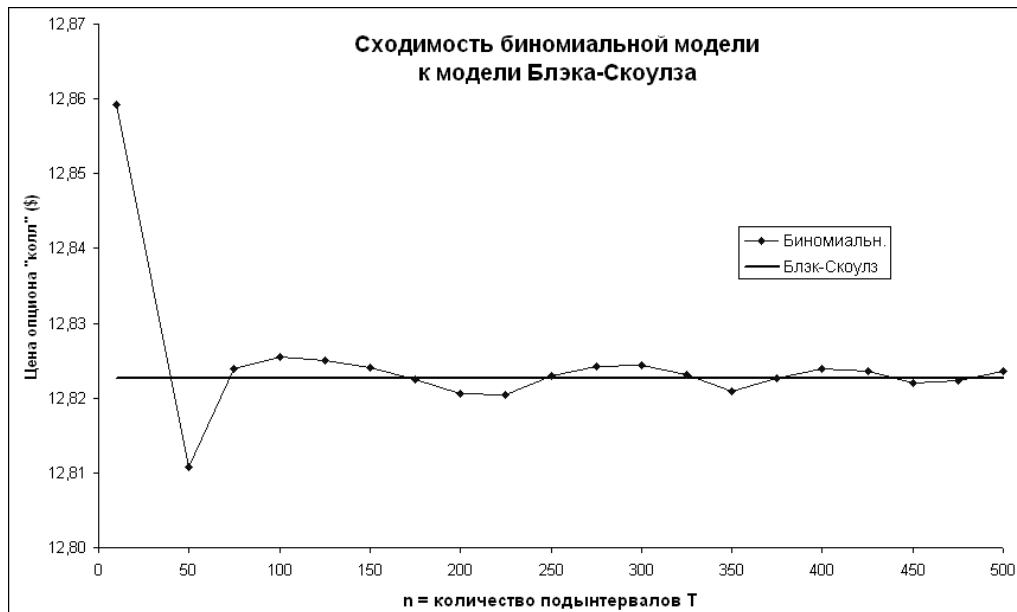
Для демонстрации справедливости этого утверждения построим таблицу, приведенную ниже.

|    | A                                                              | B       | C                                                              | D           | E           | F                                        | G | H | I |
|----|----------------------------------------------------------------|---------|----------------------------------------------------------------|-------------|-------------|------------------------------------------|---|---|---|
| 1  | <b>СХОДИМОСТЬ БИНОМИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ К ФОРМУЛЕ БЛЭКА--СКОУЛЗА</b> |         |                                                                |             |             |                                          |   |   |   |
| 2  |                                                                |         |                                                                |             |             |                                          |   |   |   |
| 3  | S                                                              | 60      | Текущий курс акций                                             |             |             |                                          |   |   |   |
| 4  | X                                                              | 50      | Цена исполнения опциона                                        |             |             |                                          |   |   |   |
| 5  | T                                                              | 0,5000  | Срок до исполнения (в годах)                                   |             |             |                                          |   |   |   |
| 6  | r                                                              | 8%      | Годовая процентная ставка                                      |             |             |                                          |   |   |   |
| 7  | Сигма                                                          | 30%     | Уровень риска                                                  |             |             |                                          |   |   |   |
| 8  | n                                                              | 20      | Кол-во подразбиений T                                          |             |             |                                          |   |   |   |
| 9  |                                                                |         |                                                                |             |             |                                          |   |   |   |
| 10 | Цена европ. опц. “колл” по бином. модели                       | 12,8055 | <-- =EurCall(S, X, interest, sigma, T, n)                      |             |             |                                          |   |   |   |
| 11 | Цена европ. опц. “пут” по бином. модели                        | 0,8450  | <-- =EurPut(S, X, interest, sigma, T, n)                       |             |             |                                          |   |   |   |
| 12 |                                                                |         |                                                                |             |             |                                          |   |   |   |
| 13 | Цена опц. “колл” по Блэку-Скоулзу                              | 12,8226 | <-- =BSCall(S, X, interest, sigma, T)                          |             |             |                                          |   |   |   |
| 14 | Цена опц. “пут” по Блэку-Скоулзу                               | 0,8621  | <-- =BSPut(S, X, interest, sigma, T)                           |             |             |                                          |   |   |   |
| 15 |                                                                |         |                                                                |             |             |                                          |   |   |   |
| 16 |                                                                |         | <b>Таблица данных: При возрастании n</b>                       |             |             |                                          |   |   |   |
| 17 |                                                                |         | <b>цена по бином. модели стремится к цене по Блэку-Скоулзу</b> |             |             |                                          |   |   |   |
| 18 |                                                                |         |                                                                |             |             |                                          |   |   |   |
| 19 |                                                                |         |                                                                | Биномиальн. | Блэк-Скоулз |                                          |   |   |   |
| 20 |                                                                |         |                                                                |             |             | <-- Заголовок таблицы в ячейке C20 скрыт |   |   |   |
| 21 |                                                                |         |                                                                | 10          | 12,8593     | 12,8226                                  |   |   |   |
| 22 |                                                                |         |                                                                | 50          | 12,8108     | 12,8226                                  |   |   |   |
| 23 |                                                                |         |                                                                | 75          | 12,8238     | 12,8226                                  |   |   |   |
| 24 |                                                                |         |                                                                | 100         | 12,8255     | 12,8226                                  |   |   |   |
| 25 |                                                                |         |                                                                | 125         | 12,8251     | 12,8226                                  |   |   |   |
| 26 |                                                                |         |                                                                | 150         | 12,8240     | 12,8226                                  |   |   |   |
| 27 |                                                                |         |                                                                | 175         | 12,8226     | 12,8226                                  |   |   |   |
| 28 |                                                                |         |                                                                | 200         | 12,8205     | 12,8226                                  |   |   |   |
| 29 |                                                                |         |                                                                | 225         | 12,8204     | 12,8226                                  |   |   |   |
| 30 |                                                                |         | n ->                                                           | 250         | 12,8230     | 12,8226                                  |   |   |   |
| 31 |                                                                |         |                                                                | 275         | 12,8243     | 12,8226                                  |   |   |   |
| 32 |                                                                |         |                                                                | 300         | 12,8243     | 12,8226                                  |   |   |   |
| 33 |                                                                |         |                                                                | 325         | 12,8232     | 12,8226                                  |   |   |   |
| 34 |                                                                |         |                                                                | 350         | 12,8210     | 12,8226                                  |   |   |   |
| 35 |                                                                |         |                                                                | 375         | 12,8226     | 12,8226                                  |   |   |   |
| 36 |                                                                |         |                                                                | 400         | 12,8238     | 12,8226                                  |   |   |   |
| 37 |                                                                |         |                                                                | 425         | 12,8236     | 12,8226                                  |   |   |   |
| 38 |                                                                |         |                                                                | 450         | 12,8221     | 12,8226                                  |   |   |   |
| 39 |                                                                |         |                                                                | 475         | 12,8223     | 12,8226                                  |   |   |   |
| 40 |                                                                |         |                                                                | 500         | 12,8236     | 12,8226                                  |   |   |   |

<sup>3</sup> О границах разницы между американскими опционами “пут” и “колл” можно прочитать в Jarrow, Rudd (1983).

<sup>4</sup> Здесь мы несколько забегаем вперед. Формула Блэка–Скоулза (Black–Scholes) для цены опциона рассматривается в главе 16, поэтому данный раздел можно пропустить при первом чтении.

Функция  $BSCall(S, X, interest, sigma, T)$  — это функция на языке VBA, вычисляющая цену по Блэку–Скоулзу. Эта функция будет рассмотрена в главе 16.



В упражнениях к этой главе вам придется показать, что формула биномиальной модели для опционов “пут” также сходится к формуле Блэка–Скоулза для соответствующих опционов.

## 14.8. Нестандартные опционы и биномиальная модель: пример

С помощью биномиальной модели можно устанавливать цены и на нестандартные опционы. Рассмотрим следующий пример. У вас имеется опцион на покупку акции некоторой компании. Опцион можно исполнить досрочно, однако цена исполнения меняется в зависимости от даты исполнения. В рассматриваемом нами случае выполняются следующие условия.

- Имеется ровно  $n$  возможных дат исполнения (т.е. опцион можно исполнить только в один из установленных дней).
- При исполнении опциона в день  $t$  становится невозможным исполнение в любой день  $s > t$ . Однако если опцион не исполнен в день  $s$ , его можно исполнить в день  $t > s$ .
- Цена исполнения в день  $t$  составляет  $X_t$ . Другими словами, цена исполнения изменяется со временем.

Попробуем оценить этот опцион в рамках биномиальной модели. Для этого определим его как американский опцион с тремя различными ценами исполнения. Вот как решение этой задачи выглядит на листе электронной таблицы; здесь используется методика для задач об опционах с досрочным исполнением, рассмотренная в разделе 14.4.

|    | A                                        | B                 | C                                       | D                      | E   | F | G | H | I | J | K | L | M |
|----|------------------------------------------|-------------------|-----------------------------------------|------------------------|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1  | <b>СЛУЧАЙ ПЕРЕМЕННОЙ ЦЕНЫ ИСПОЛНЕНИЯ</b> |                   |                                         |                        |     |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 2  |                                          |                   |                                         |                        |     |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 3  | Начальный курс акций                     | 100               |                                         | <b>Цены исполнения</b> |     |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 4  | Вверх                                    | 10%               |                                         | Date 1                 | 100 |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 5  | Вниз                                     | -5%               |                                         | Date 2                 | 105 |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 6  | Процентная ставка                        | 6%                |                                         | Date 3                 | 112 |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 7  |                                          |                   |                                         |                        |     |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 8  | <b>Цены возможных состояний</b>          |                   |                                         |                        |     |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 9  | $q_u$                                    | 0,6918            | $\leftarrow = (B6-B5)/((1+B6)*(B4-B5))$ |                        |     |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 10 | $q_d$                                    | 0,2516            | $\leftarrow = (B4-B6)/((1+B6)*(B4-B5))$ |                        |     |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 11 |                                          |                   |                                         |                        |     |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 12 | <b>Проверка</b>                          |                   |                                         |                        |     |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 13 | $1/(q_u+q_d)$                            | 1,06              | $\leftarrow = 1/(B9+B10)$               |                        |     |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 14 | $q_u*(1+up)+q_d*(1+down)$                | 1                 | $\leftarrow = B9*(1+B4)+B10*(1+B5)$     |                        |     |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 15 |                                          |                   |                                         |                        |     |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 16 |                                          | <b>Курс акций</b> |                                         |                        |     |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 17 |                                          |                   |                                         |                        |     |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 18 |                                          |                   |                                         |                        |     |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 19 |                                          |                   |                                         |                        |     |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 20 |                                          |                   |                                         |                        |     |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 21 |                                          |                   |                                         |                        |     |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 22 |                                          |                   |                                         |                        |     |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 23 |                                          |                   |                                         |                        |     |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 24 |                                          |                   |                                         |                        |     |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 25 |                                          |                   |                                         |                        |     |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 26 |                                          |                   |                                         |                        |     |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 27 |                                          |                   |                                         |                        |     |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 28 |                                          |                   |                                         |                        |     |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 29 |                                          |                   |                                         |                        |     |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 30 |                                          |                   |                                         |                        |     |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 31 |                                          |                   |                                         |                        |     |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 32 |                                          |                   |                                         |                        |     |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 33 |                                          |                   |                                         |                        |     |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 34 |                                          |                   |                                         |                        |     |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 35 |                                          |                   |                                         |                        |     |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 36 |                                          |                   |                                         |                        |     |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 37 |                                          |                   |                                         |                        |     |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 38 |                                          |                   |                                         |                        |     |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 39 |                                          |                   |                                         |                        |     |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 40 |                                          |                   |                                         |                        |     |   |   |   |   |   |   |   |   |

Большая часть таблицы составлена в точном соответствии с разделом 14.4. В ячейках B16:H22 определен курс акций в зависимости от времени, следующий процедуре биномиального метода с повышением 10% и понижением 5% (ячейки B4 и B5). Но самое интересное начинается непосредственно в части оценивания.

|    | A | B | C | D | E | F | G | H | I | J | K | L | M |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 23 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 24 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 25 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 26 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 27 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 28 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 29 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 30 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 31 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 32 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 33 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |

Как всегда в случае американских опционов, в каждом узле дерева мы решаем, стоит ли опцион больше при его исполнении или при дальнейшем удерживании. Но обратите внимание, что на предыдущем рисунке цена исполнения меняется

со временем, поэтому цена исполнения для даты 3 берется из ячейки E6, для даты 2 — из ячейки E5, а для даты 1 — из ячейки E4.

Как видно из ячейки B29, стоимость данного американского опциона “колл” составляет 8,368.

## Упражнения

1. Акция, которая сейчас продается за 25 долл., через год будет стоить либо 35, либо 20 долл. Пусть процентная ставка составляет 8%. Какова текущая стоимость опциона “колл” сроком на один год на указанную акцию при цене исполнения 30 долл.? Для оценивания опциона используйте систему уравнений из раздела 14.1.
2. В упражнении 1 рассчитайте цены возможных состояний  $q_u$  и  $q_d$ , а затем с их помощью вычислите текущую стоимость опциона “пут” сроком на один год на ту же акцию при цене исполнения 30 долл. Покажите, что выполняется паритет “пут”–“колл”, т.е. возьмите ответы этой и предыдущей задачи и покажите, что

$$\text{Цена опциона “колл”} + \frac{X}{1+r} = \text{Текущий курс акций} + \text{цена опциона “пут”}.$$

3. Пусть в биномиальной модели опцион “колл” и опцион “пут” выписаны на одну и ту же акцию. Цена исполнения опциона “колл” равна 30, а цена исполнения опциона “пут” составляет 40. Будущий возможный доход от опциона “колл” равен 0 или 5, а от “пут” — 20 или 5. Цена на опцион “колл” установлена равной 2,25, а на “пут” — 12,25.
  - а) Какова безрисковая процентная ставка дохода? Предположим, основной расчетный период равен одному году.
  - б) Каков текущий курс акций?
4. Пусть все надежные аналитики сходятся на том, что акция корпорации ABC, которая сейчас продается за 50 долл., через год будет иметь курс либо 65, либо 45 долл. Вероятности соответственно повышени и понижения установлены равными 0,6 и 0,4. Безрисковая ставка дохода на рынке равна 6%. Сколько стоит опцион “колл” на акцию ABC с ценой исполнения 50 долл. и сроком погашения 1 год?
5. Пусть некоторая акция сейчас имеет курс 60. К концу года ожидается либо подъем курса на 25%, либо его падение на 20%. Безрисковая ставка дохода составляет 5%. Рассчитайте цену европейского опциона “пут” на эту акцию с ценой исполнения 55 по биномиальной модели.



6. Заполните все ячейки с символами ??? в следующей таблице.

|    | A                                | B   | C   | D                        | E   | F | G                               | H   | I   | J | K   |
|----|----------------------------------|-----|-----|--------------------------|-----|---|---------------------------------|-----|-----|---|-----|
| 3  | Вверх                            | 35% |     |                          |     |   |                                 |     |     |   |     |
| 4  | Вниз                             | -5% |     | цены возможных состояний |     |   |                                 |     |     |   |     |
| 5  |                                  |     |     | $q_u$                    | ??? |   |                                 |     |     |   |     |
| 6  | Нач. курс акций                  | 40  |     | $q_d$                    | ??? |   |                                 |     |     |   |     |
| 7  | Процент. ставка                  | 25% |     |                          |     |   |                                 |     |     |   |     |
| 8  | Цена исполн-я                    | 40  |     |                          |     |   |                                 |     |     |   |     |
| 9  |                                  |     |     |                          |     |   |                                 |     |     |   |     |
| 10 | Курс акций                       |     |     |                          |     |   | Курс облигаций                  |     |     |   |     |
| 11 |                                  |     |     |                          | ??? |   |                                 |     |     |   | ??? |
| 12 |                                  |     | ??? |                          | ??? |   |                                 | ??? |     |   | ??? |
| 13 |                                  | 40  |     |                          | ??? |   |                                 | 1   |     |   | ??? |
| 14 |                                  |     | ??? |                          | ??? |   |                                 |     | ??? |   | ??? |
| 15 |                                  |     |     |                          | ??? |   |                                 |     |     |   | ??? |
| 16 |                                  |     |     |                          |     |   |                                 |     |     |   |     |
| 17 |                                  |     |     |                          |     |   |                                 |     |     |   |     |
| 18 | Цена опциона "колл"              |     |     |                          |     |   | Цена европейского опциона "пут" |     |     |   |     |
| 19 |                                  |     |     |                          |     |   |                                 |     |     |   |     |
| 20 |                                  |     |     |                          | ??? |   |                                 |     |     |   | ??? |
| 21 |                                  |     | ??? |                          | ??? |   |                                 | ??? |     |   | ??? |
| 22 | ???                              |     |     |                          | ??? |   | ???                             |     | ??? |   | ??? |
| 23 |                                  |     | ??? |                          | ??? |   |                                 | ??? |     |   | ??? |
| 24 |                                  |     |     |                          | ??? |   |                                 |     |     |   | ??? |
| 25 |                                  |     |     |                          |     |   |                                 |     |     |   |     |
| 26 |                                  |     |     |                          |     |   |                                 |     |     |   |     |
| 27 | Цена американского опциона "пут" |     |     |                          |     |   |                                 |     |     |   |     |
| 28 |                                  |     |     |                          |     |   |                                 |     |     |   |     |
| 29 |                                  |     |     |                          | ??? |   |                                 |     |     |   |     |
| 30 |                                  |     | ??? |                          | ??? |   |                                 |     |     |   |     |
| 31 | ???                              |     |     |                          | ??? |   |                                 |     |     |   |     |
| 32 |                                  |     | ??? |                          | ??? |   |                                 |     |     |   |     |
| 33 |                                  |     |     |                          | ??? |   |                                 |     |     |   |     |

7. Рассмотрим следующую биномиальную модель с тремя расчетными датами, в которой годовая ставка дохода равна 9%, а курс акций повышается на 15% либо понижается на 10% за период.

| Курс акций |    |      |       | Курс облигаций |      |      |        |
|------------|----|------|-------|----------------|------|------|--------|
|            |    |      | 66,13 |                |      |      | 1,1881 |
|            |    | 57,5 |       |                | 1,09 |      | 1,1881 |
|            | 50 |      | 51,75 |                |      | 1,09 | 1,1881 |
|            |    | 45   |       |                |      |      | 1,1881 |
|            |    |      | 40,50 |                |      |      |        |

- Оцените европейский опцион "колл" на эту акцию с ценой исполнения 60.
  - Оцените европейский опцион "пут" на эту акцию с ценой исполнения 60.
  - Оцените американский опцион "колл" на эту акцию с ценой исполнения 60.
  - Оцените американский опцион "пут" на эту акцию с ценой исполнения 60.
8. Рассмотрим следующую биномиальную модель с тремя расчетными датами, в которой курс акций либо поднимается на 30%, либо падает на 10% за каждый период и в которой ставка дохода за один период составляет 25%.

| Курс акций |    |    |       | Курс облигаций |      |      |        |
|------------|----|----|-------|----------------|------|------|--------|
|            |    |    | 50,70 |                |      |      | 1,5625 |
|            |    | 39 |       |                | 1,25 |      | 1,5625 |
|            | 30 |    | 35,10 |                |      | 1,25 | 1,5625 |
|            |    | 27 |       |                |      |      | 1,5625 |
|            |    |    | 24,30 |                |      |      |        |

- а) Рассмотрим европейский опцион с  $X = 30$  и  $T = 2$ . Заполните поля на следующем дереве.

| Цена опциона "колл" |  |     |     |     |
|---------------------|--|-----|-----|-----|
|                     |  |     |     | ??? |
|                     |  | ??? |     | ??? |
| ???                 |  |     | ??? | ??? |
|                     |  | ??? |     | ??? |
|                     |  |     |     | ??? |

- б) Оцените европейский опцион "пут" с  $X = 30$  и  $T = 2$ .  
 в) Теперь рассмотрим американский опцион "пут" с  $X = 30$  и  $T = 2$ . Заполните поля на следующем дереве.

| Цена американского опциона "пут" |  |     |     |     |
|----------------------------------|--|-----|-----|-----|
|                                  |  |     |     | ??? |
|                                  |  | ??? |     | ??? |
| ???                              |  |     | ??? | ??? |
|                                  |  | ??? |     | ??? |
|                                  |  |     |     | ??? |

9. Известная фирма по управлению ценными бумагами предложила на рынок новый финансовый актив. Он называется Best of Both Worlds<sup>5</sup> (сокращенно BOBOW) и стоит 10 долл. Срок его погашения — пять лет; по окончании этого срока капиталовкладчику возвращаются его 10 долл. и *дополнительно* выплачиваются 120% положительного дохода по индексу S&P 500. До окончания срока погашения никаких выплат нет.

Например, если индекс S&P 500 находится сейчас на уровне 1500, а через пять лет — на уровне 1800, то держатель актива BOBOW получит  $\$12,40 = \$10 \times [1 + 1,2 \times (1800/1500 - 1)]$ . Если же S&P 500 останется на том же уровне или опустится ниже его, то держатель актива BOBOW получит назад свои 10 долл.

Предположим, что годовая процентная ставка на пятилетнюю облигацию одного платежа с непрерывным начислением процентов составляет 6%. Далее предположим, что индекс S&P 500 находится сейчас на уровне 1500, а через пять лет, по вашему мнению, поднимется до 2500 или упадет до 1200. Покажите с помощью биномиальной модели оценивания, что цена на BOBOW занижена.

10. Эта задача продолжает обсуждение, начатое в разделе 14.6. Покажите, что при  $n \rightarrow \infty$  цена европейского опциона "пут" по биномиальной модели сходится к цене по Блэку–Скоулзу. (Обратите внимание, что файл Chapter14.xls содержит функцию BSPut, которая вычисляет цену опциона "пут" по формуле Блэка–Скоулза.)  
 11. А это усложненный вариант упражнения 10. Рассмотрим альтернативную параметризацию биномиальной модели:

<sup>5</sup> Это примерно означает "в любом случае без потерь" и к обычному значению слова *world* ("мир") отношения не имеет. Здесь имеются в виду два возможных будущих "мира", т.е. состояния рынка, при повышении и понижении индекса S&P 500; предлагаемый финансовый актив обеспечивает его держателю как минимум отсутствие убытков в любом случае. — *Примеч. пер.*

---


$$\begin{aligned}\Delta t &= 1/n, & R &= e^{r\Delta t}, \\ 1 + U &= e^{(r-\sigma^2/2)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}}, & q_u &= \frac{R-D}{R(U-D)}, \\ 1 + D &= e^{(r-\sigma^2/2)\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}}, & q_d &= \frac{1}{R} - q_u.\end{aligned}$$


---

Напишите VBA-функции для реализации оценки европейских опционов “колл” и “пут” по биномиальной модели при такой параметризации и покажите, что и в этом случае имеет место сходимость к формуле Блэка–Скоулза. (Основное, что нужно понять из этого примера, — это неединственность параметризации.)

12. На акцию с текущим курсом 50 долл. выписан опцион “колл”. Срок погашения опциона — три года, и за это время каждый год курс акций может подниматься на 25% или падать на 10%. Годовая ставка дохода постоянна и составляет 6%. Опцион можно исполнить в день 1 (в конце 1-го периода) по цене 55 долл., в день 2 — по цене 60 долл. и в день 3 — по цене 65 долл. Какова его текущая стоимость? Стоит ли вообще исполнять этот опцион досрочно?
13. Еще раз вернемся к упражнению 12. Покажите, что если цена исполнения после 1-го периода равна  $X$ , после второго —  $X(1+r)$ , а после третьего —  $X(1+r)^2$ , то исполнять опцион досрочно не имеет смысла<sup>6</sup>.

---

<sup>6</sup> Можно также показать, что это свойство имеет место, если прирост цены исполнения меньше безрисковой ставки дохода. Таким образом, для задачи из раздела 14.7 американский опцион “колл” будет исполнен досрочно только в том случае, если цены исполнения имеют темп прироста ниже ставки дохода.



---

# 15 Логнормальное распределение

---

## 15.1. Введение

В предыдущей главе рассматривалось формирование цены на опционы с помощью биномиальной модели. Биномиальная модель, сама по себе являющаяся удобным и наглядным способом оценивания опционов и других производных ценных бумаг, еще и раскрывает глубокие смысловые аспекты ценообразования таких бумаг. Она показывает, что, приняв некоторые предположения относительно неопределенности в курсе акций, а также зная безрисковую ставку дохода, можно рассчитать цену опциона или другого актива, цена которого зависит от курса обеспечивающих акций.

Недостаток биномиального метода оценивания опционов заключается в том, что не получается вывести простые формулы для такого оценивания. Метод, разработанный и предложенный в предыдущей главе, носит численный, а не аналитический характер. Чтобы вывести *формулу* цены на опцион наподобие формулы Блэка–Скоулза (Black–Scholes), которую мы рассмотрим в главе 16, необходимо сделать некоторые предположения относительно статистических свойств курса акций, обеспечивающих опцион.

Центральным допущением модели Блэка–Скоулза (для краткости — БС) является предположение о логнормальном распределении курса акций. В этой главе мы постараемся так подкрепить это предположение фактами, чтобы у вас не осталось недовольства в его адрес. Мы пойдем следующим путем. Мы не станем доказывать формулу Блэка–Скоулза для цены на опцион, но постараемся убедить вас, что основная гипотеза модели БС в отношении курса акций — а именно, логнормальность этого курса — разумна и обоснована. Если нам удастся это сделать, то ознакомиться с техническими деталями доказательства формулы БС будет уже легко по другим, более подробным источникам.

Эта глава имеет следующую структуру.

- Вначале обсуждается вопрос о том, какие предположения относительно курса акций можно считать “разумными”.
- Затем объясняется, почему логнормальное распределение является разумным применительно к курсам акций.
- Наконец, рассказывается, как моделировать эволюцию логнормальной курсовой цены во времени.

## 15.2. Свойства курсов акций

Каковы же разумные предположения относительно поведения курсов акций во времени? Очевидно, курс акции (или курсовая цена любого другого подверженного риску финансового актива) является величиной неопределенной, случайной. Но каково распределение этой величины? Этот вопрос может легко поставить в тупик. Чтобы ответить на него, следует подумать, какие свойства вообще может иметь курс акций с позиций здравого смысла. Можно назвать пять таких общих свойств.

1. Курсовая цена — величина неопределенная. Зная эту цену сегодня, мы не можем точно сказать, какой она будет завтра.
2. Изменения в курсе носят непрерывный характер. В течение короткого периода времени изменения невелики, а при сужении интервала времени до нуля к нулю стремятся и изменение курса акций<sup>1</sup>.
3. Курс акций не бывает равен нулю. Это означает, что акции “умерших” компаний исключаются из рассмотрения.
4. Средний доход от владения акцией имеет тенденцию возрастать со временем. Обратите внимание — всего лишь имеет тенденцию. Мы *не знаем точно*, даст ли акция более высокий доход при ее более длительном удерживании, однако *ожидаем*, что если подверженный риску финансовый актив удерживать в течение длительного периода, то он *в среднем* будет давать более высокий доход.
5. *Неопределенность*, ассоциируемая с доходом от удержания акции, также имеет тенденцию возрастать со временем. Другими словами, зная текущий курс акций, можно утверждать, что дисперсия завтрашнего курса невелика, тогда как дисперсия ожидаемого через месяц курса значительно больше, а ожидаемого через год — еще больше.

### 15.2.1. Общие свойства и графики курсов акций во времени

Чтобы оценить здравость наших суждений о курсах акций, стоит рассмотреть их изменения во времени за некоторый период, представив эти изменения в виде графика. Например, ниже на рисунке приведены графики изменения курсов некоторых реальных акций во времени.

<sup>1</sup> Наблюдая за курсами акций, можно убедиться, что предположение о непрерывности обычно бывает обоснованным, хотя иногда оказывается катастрофически неверным (посмотрите на поведение рыночных котировок в октябре 1987 г., и вы увидите яркие примеры *разрывности* курсов). Можно построить такую модель курсов акций, в которой предполагается, что обычно курсы имеют непрерывный характер, но в них время от времени могут происходить случайные скачки. См. Cox, Ross (1976); Merton (1976); Jarrow, Rudd (1983).



Если бы мы моделировали графики курсов акций (что иногда и будем делать позже в этой главе с использованием логнормальной модели), как бы они выглядели? Согласно общим предположениям, можно было бы ожидать увидеть следующее.

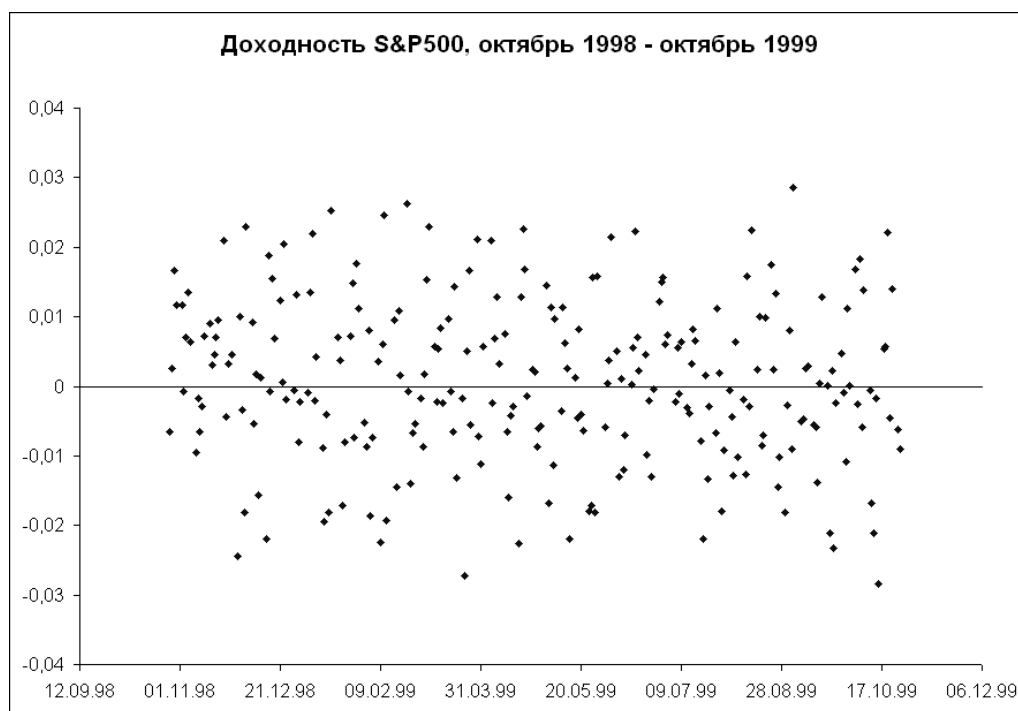
1. Извилистые линии.
2. Непрерывные графики без разрывов и скачков.
3. Линии, которые всегда лежат выше нулевой оси и не пересекают ее, как бы низко не опускались.
4. Среднее значение по всем возможным линиям в некоторый момент времени выше, чем начальный курс акций. Чем дальше вперед по оси времени, тем больше бы становилось это среднее.
5. Стандартное (среднеквадратичное) отклонение по всем возможным линиям увеличивалось бы при движении вперед по оси времени.

А вот как еще можно представить курсы акций. Возьмем ежедневные доходы по индексу Standard & Poor 500<sup>2</sup>.

<sup>2</sup> Когда берется натуральный логарифм от отношений цен, этим самым неявно предполагается, что процесс создания/накопления дохода по природе непрерывен. Например, если курс равен 30 в день 1 и 31 в день 2, то за день на акцию накапливается доход, подсчитываемый как непрерывный сложный процент в размере  $\ln(31/30) = 3,279\%$ .

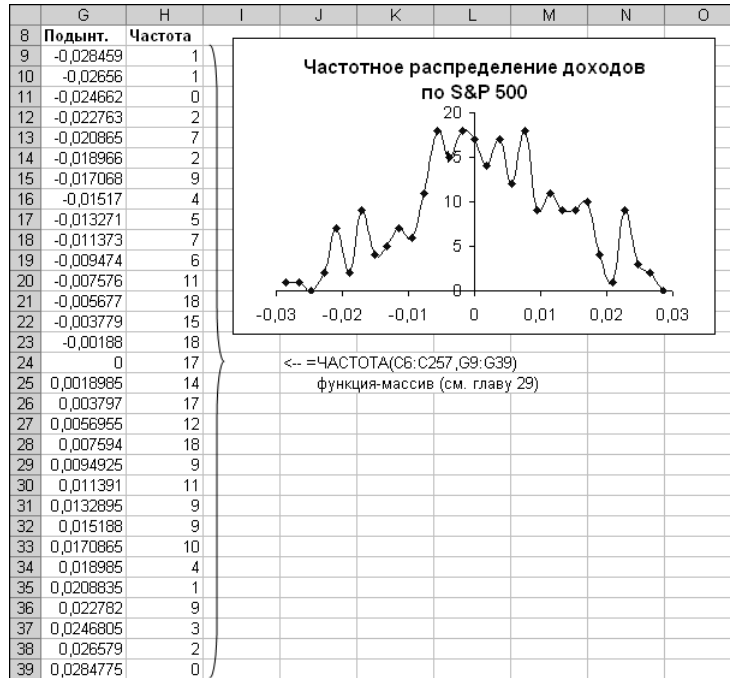
|    | A                                     | B       | C       | D              | E | F |
|----|---------------------------------------|---------|---------|----------------|---|---|
| 1  | НЕКОТОРЫЕ ДАННЫЕ О ДОХОДНОСТИ S&P 500 |         |         |                |   |   |
| 2  |                                       |         |         |                |   |   |
| 3  |                                       | Курс    |         |                |   |   |
| 4  | Дата                                  | SP500   | Доход   |                |   |   |
| 5  | 26.10.98                              | 1072,32 |         |                |   |   |
| 6  | 27.10.98                              | 1065,34 | -0,0065 | <-- =LN(B6/B5) |   |   |
| 7  | 28.10.98                              | 1068,09 | 0,0026  | <-- =LN(B7/B6) |   |   |
| 8  | 29.10.98                              | 1085,93 | 0,0166  |                |   |   |
| 9  | 30.10.98                              | 1098,67 | 0,0117  |                |   |   |
| 10 | 02.11.98                              | 1111,60 | 0,0117  |                |   |   |
| 11 | 03.11.98                              | 1110,84 | -0,0007 |                |   |   |
| 12 | 04.11.98                              | 1118,67 | 0,0070  |                |   |   |
| 13 | 05.11.98                              | 1133,85 | 0,0135  |                |   |   |
| 14 | 06.11.98                              | 1141,01 | 0,0063  |                |   |   |
| 15 | 09.11.98                              | 1130,20 | -0,0095 |                |   |   |

Если построить график этих доходов за год, получится картина, которую нелегко воспринять и истолковать.



Но если воспользоваться функцией Excel ЧАСТОТА (Frequency), рассматриваемой в главе 29, то можно построить распределение частот этих доходов, и получится, что они распределены примерно по нормальному закону.





Как мы увидим в следующем разделе, предположение о нормальном распределении доходов по акциям лежит в основе логнормального закона распределения курсов этих акций.

### 15.3. Логнормальное распределение курсов акций и геометрическая диффузия

В этом разделе мы расскажем с более строгих позиций, что мы имеем в виду под логнормальным распределением курсов акций. Затем будет установлена связь процесса изменения курсов акций по логнормальному закону с процессом геометрической диффузии.

Обозначим как  $S_t$  курс некоторой акции в момент времени  $t$ . При логнормальном распределении предполагается, что *натуральный логарифм величины “единица плюс доход”* от удерживания акции в промежутке между моментами  $t$  и  $t + \Delta t$  распределен нормально со средним значением  $\mu$  и стандартным отклонением  $\sigma$ . Обозначим процентную ставку дохода за период  $\Delta t$  через  $\tilde{r}_{\Delta t}$  (это случайная величина). Тогда можно записать  $S_{t+\Delta t} = S_t \exp[\tilde{r}_{\Delta t} \Delta t]$ . В логнормальном распределении мы предполагаем, что ставка дохода  $\tilde{r}_{\Delta t}$  за короткий период времени  $\Delta t$  распределена нормально со средним значением  $\mu \Delta t$  и стандартным отклонением  $\sigma^2 \Delta t$ .

Соотношение между курсами акций  $S_t$  и  $S_{t+\Delta t}$  в моменты времени  $t$  и  $t + \Delta t$  можно записать еще и таким образом:

$$\frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} = \exp \left[ \mu \Delta t + \sigma Z \sqrt{\Delta t} \right],$$

где  $Z$  — стандартная нормальная случайная величина (со средним значением 0 и стандартным отклонением 1)<sup>3</sup>.

Разберемся, что означает это предположение. Для начала положим  $\sigma = 0$ . В этом случае имеем

$$S_{t+\Delta t} = S_t \exp [\mu \Delta t].$$

Это значит просто-напросто, что курс акций возрастает экспоненциально без всякой неопределенности. В таком случае акция является просто безрисковой облигацией, по которой накапливается непрерывный сложный процент  $\mu$ .

А теперь допустим, что  $\sigma > 0$ . В этом случае предположение о логнормальности говорит о том, что, хотя имеется тенденция к возрастанию курсовой цены, все же присутствует и элемент случайности (распределенный по нормальному закону), который следует принимать во внимание. Понять этот процесс легче всего путем его пошагового моделирования. Предположим, например, что мы пытаемся моделировать логнормальный процесс изменения курсовой цены с  $\mu = 15\%$ ,  $\sigma = 30\%$  и  $\Delta t = 0,004$ . Пусть курс в момент 0 составляет  $S_0 = 35$ . Для моделирования возможного курса в момент  $\Delta t$  нужно вначале выбрать случайное число  $Z$  из стандартного нормального распределения<sup>4</sup>. Пусть это число равно 0,1165. Тогда курс акций  $S_{\Delta t}$  в момент времени  $\Delta t$  составит

$$\begin{aligned} S_{\Delta t} &= S_0 \exp \left[ \mu \Delta t + \sigma Z \sqrt{\Delta t} \right] = \\ &= 35 \exp \left[ 0,15 \times 0,004 + 0,3 \times 0,1165 \times \sqrt{0,004} \right] = 35,0985. \end{aligned}$$

Конечно, можно было бы выбрать и другое случайное число. Например, если бы случайное число  $Z$  было равно  $-0,9102$ , то мы бы имели

$$\begin{aligned} S_{\Delta t} &= S_0 \exp \left[ \mu \Delta t + \sigma Z \sqrt{\Delta t} \right] = \\ &= 35 \exp \left[ 0,15 \times 0,004 - 0,3 \times (-0,9102) \times \sqrt{0,004} \right] = 34,421. \end{aligned}$$

Этот процесс проиллюстрирован в следующем фрагменте электронной таблицы, где мы сгенерировали список из 250 чисел, взятых из стандартного нормального распределения (в научно-технической терминологии — “стандартных нормальных отклонений”)<sup>5</sup>. Все эти числа — равноправные кандидаты на

<sup>3</sup> Если вы знакомы с диффузионными процессами, то процесс изменения логнормального курса акций представляет собой *геометрическую диффузию*:  $\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dB$ , где  $dB$  — винеровский процесс (“белый шум”), для которого  $dB = Z\sqrt{dt}$ , где  $Z$  — стандартная нормальная случайная величина.

<sup>4</sup> Некоторые способы генерирования случайных чисел (с помощью функций Excel или VBA) можно найти в главе 25.

<sup>5</sup> Количество рабочих дней в году — приблизительно 250. Поэтому когда мы определили  $\Delta t = 1/250 = 0,004$ , мы тем самым моделировали ежедневное изменение курса акций в течение года.

роль  $Z$ . Выбрав  $Z$  для конкретного интервала времени  $\Delta t$ , сразу получаем курсовую цену  $S_{t+\Delta t}$ .

|    | A                                  | B     | C            | D            | E           | F                                                   | G | H | I | J |
|----|------------------------------------|-------|--------------|--------------|-------------|-----------------------------------------------------|---|---|---|---|
| 1  | <b>Логнормальное распределение</b> |       |              |              |             |                                                     |   |   |   |   |
| 2  | Простой пример                     |       |              |              |             |                                                     |   |   |   |   |
| 3  |                                    |       |              |              |             |                                                     |   |   |   |   |
| 4  |                                    |       | <b>Время</b> | <b>Норм.</b> | <b>Курс</b> |                                                     |   |   |   |   |
| 5  |                                    |       | <b>откл.</b> | <b>акций</b> |             |                                                     |   |   |   |   |
| 6  | Среднее                            | 15%   | 0            | 35,0000      | <-- B9      |                                                     |   |   |   |   |
| 7  | Сигма                              | 30%   | 1            | -0,87688     | 34,4432     | <-- =E6*EXP(\$B\$6*\$B\$8+\$B\$7*D7*КОРЕНЬ(\$B\$8)) |   |   |   |   |
| 8  | $\Delta t$                         | 0,004 | 2            | 1,387725     | 35,3833     | <-- =E7*EXP(\$B\$6*\$B\$8+\$B\$7*D8*КОРЕНЬ(\$B\$8)) |   |   |   |   |
| 9  | Начальный курс акций               | 35    | 3            | 1,234612     | 36,2437     |                                                     |   |   |   |   |
| 10 |                                    |       | 4            | 0,683103     | 36,7386     |                                                     |   |   |   |   |
| 11 |                                    |       | 5            | 0,715531     | 37,2631     |                                                     |   |   |   |   |
| 12 |                                    |       | 6            | -0,65236     | 36,8268     |                                                     |   |   |   |   |
| 13 |                                    |       | 7            | -1,91058     | 35,5370     |                                                     |   |   |   |   |
| 14 |                                    |       | 8            | -0,03041     | 35,5378     |                                                     |   |   |   |   |
| 15 |                                    |       | 9            | 0,159681     | 35,6671     |                                                     |   |   |   |   |
| 16 |                                    |       | 10           | 0,511053     | 36,0362     |                                                     |   |   |   |   |
| 17 |                                    |       | 11           | -0,92939     | 35,4276     |                                                     |   |   |   |   |
| 18 |                                    |       | 12           | -1,36386     | 34,5433     |                                                     |   |   |   |   |
| 19 |                                    |       | 13           | 0,929804     | 35,1792     |                                                     |   |   |   |   |
| 20 |                                    |       | 14           | -0,27274     | 35,0186     |                                                     |   |   |   |   |
| 21 |                                    |       | 15           | -0,74201     | 34,5498     |                                                     |   |   |   |   |
| 22 |                                    |       | 16           | 0,331329     | 34,7885     |                                                     |   |   |   |   |



В этой таблице для генерирования списка из 250 стандартных нормальных отклонений используется команда Сервис⇒Анализ данных⇒Генерация случайных чисел (Tools⇒Data Analysis⇒Random Number Generation). Соответствующее диалоговое окно показано ниже.

**Генерация случайных чисел**

Число переменных:  **OK**

Число случайных чисел:  **Отмена**

Распределение:  **Справка**

Параметры

Среднее =

Стандартное отклонение =

Случайное рассевание:

Параметры вывода

☒ Выходной интервал:  **...**

☐ Новый рабочий лист:

☐ Новая рабочая книга

Подведем итоги. Для моделирования *роста курсовой цены* в том случае, когда курс акций следует логнормальному распределению, выполним следующее.

- Умножим  $\Delta t$  (длину интервала времени) на  $\mu$  (среднюю ставку дохода). Таким образом получаем детерминированную, гарантированную часть дохода.
- Выберем случайное число (реализацию случайной величины) по стандартному нормальному закону и умножим его на  $\sigma\sqrt{\Delta t}$ . Таким образом получаем неопределенную, случайную составляющую дохода. (Наличие квадратного корня подразумевает линейность дисперсии дохода по акции относительно времени. Подробнее об этом — в следующем разделе.)
- Сложим два указанных числа и возведем  $e$  в полученную степень.

## 15.4. Свойства логнормального распределения

Как известно, график нормального распределения — это колоколоподобная кривая. А как выглядит логнормальное распределение? В следующем вычислительном эксперименте мы смоделировали 1000 случайных курсов акций в конце года. Эксперимент представлял собой продолжение эксперимента, проведенного в предыдущем разделе; поскольку нас интересуют курсовые цены в конце года, принимаем  $\Delta t = 1$ . Для реализации эксперимента выполним следующие действия.

- Сгенерируем список 1000 нормальных отклонений.
- По каждому нормальному отклонению вычислим курсовую цену на конец года:

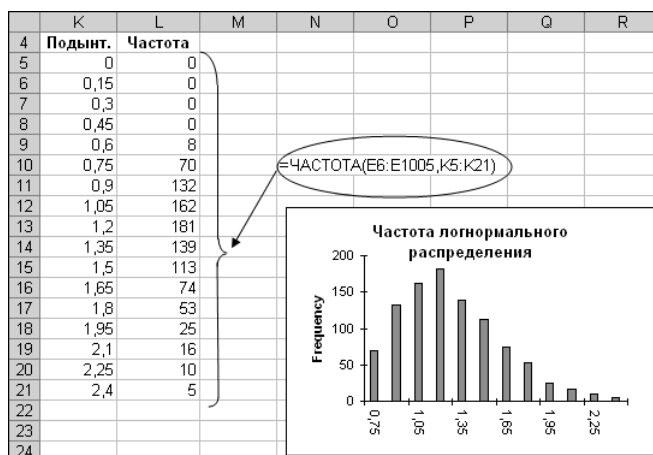
$$S_1 = S_0 \exp \left[ \mu \Delta t + \sigma Z \sqrt{\Delta t} \right] = S_0 \exp [\mu + \sigma Z].$$

- Распределим значения курсов по подынтервалам и строим гистограмму.

Таблица для этого эксперимента приведена ниже.

|    | A                                      | B   | C | D                                                     | E                                                                                     | F                                                | G | H | I | J |
|----|----------------------------------------|-----|---|-------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|---|---|---|---|
| 1  | <b>Логнормальная гистограмма</b>       |     |   |                                                       |                                                                                       |                                                  |   |   |   |   |
| 2  |                                        |     |   |                                                       |                                                                                       |                                                  |   |   |   |   |
| 3  |                                        |     |   |                                                       |                                                                                       |                                                  |   |   |   |   |
| 4  |                                        |     |   |                                                       |                                                                                       |                                                  |   |   |   |   |
| 5  |                                        |     |   | <b>Список 1000 нормально<br/>распределенных чисел</b> | <b>Логнорм.распред.<br/><math>\exp(\mu\Delta t + \sigma Z \sqrt{\Delta t})</math></b> |                                                  |   |   |   |   |
| 6  | Среднее                                | 15% |   | 0,726111011                                           | 1,4446                                                                                | <-- =EXP(\$B\$6*\$B\$8+\$B\$7*D6*КОРЕНЬ(\$B\$8)) |   |   |   |   |
| 7  | Сигма                                  | 30% |   | -0,75691446                                           | 0,9258                                                                                |                                                  |   |   |   |   |
| 8  | $\Delta t$                             | 1   |   | 0,054451448                                           | 1,1810                                                                                |                                                  |   |   |   |   |
| 9  |                                        |     |   | 1,616244845                                           | 1,8868                                                                                |                                                  |   |   |   |   |
| 10 |                                        |     |   | -0,009147243                                          | 1,1587                                                                                |                                                  |   |   |   |   |
| 11 | Команда Сервис->Анализ                 |     |   | 1,130981673                                           | 1,6312                                                                                |                                                  |   |   |   |   |
| 12 | данных->Генерация случайных            |     |   | 2,550623321                                           | 2,4972                                                                                |                                                  |   |   |   |   |
| 13 | чисел создает список из 1000           |     |   | -0,230678552                                          | 1,0842                                                                                |                                                  |   |   |   |   |
| 14 | нормально распределенных случайных     |     |   | 1,092166713                                           | 1,6123                                                                                |                                                  |   |   |   |   |
| 15 | чисел (со средним =0 и станд. откл.=1) |     |   | -2,794113243                                          | 0,5025                                                                                |                                                  |   |   |   |   |
| 16 | в столбце справа.                      |     |   | 0,724598976                                           | 1,4439                                                                                |                                                  |   |   |   |   |
| 17 |                                        |     |   | 0,433137757                                           | 1,3231                                                                                |                                                  |   |   |   |   |
| 18 |                                        |     |   | -1,047612841                                          | 0,8485                                                                                |                                                  |   |   |   |   |
| 19 |                                        |     |   | 1,33371941                                            | 1,7335                                                                                |                                                  |   |   |   |   |

Сгенерировав 1000 логнормальных относительных изменений курса,  $\exp \left[ \mu \Delta t + \sigma Z \sqrt{\Delta t} \right]$ , можно распределить их по подынтервалам с помощью функции ЧАСТОТА (Frequency), которая предназначена для работы с массивами и рассматривается в главе 29.



Если проделать этот вычислительный эксперимент для большого количества точек, получившийся график плотности распределения станет гладким. Например, ниже показано распределение частот для выборки из 100 000 элементов с  $\mu = 10\%$ ,  $\sigma = 20\%$  и  $\Delta t = 1$  (распределение получено с помощью программы на языке VBA на компьютере Pentium-166 за 7 секунд).



```
'Моделирование логнормального распределения
'Обратите внимание, что принимается delta = 1!
Sub RandomNumberSimulation()
Application.ScreenUpdating = False
Range("starttime") = Time
```

```

N = Range("runs").Value
mean = Range("mean")
sigma = Range("sigma")
ReDim Frequency(0 To 1000) As Integer

For Index = 1 To N
start:
    Static rand1, rand2, S1, S2, X1, X2
    rand1 = 2 * Rnd - 1
    rand2 = 2 * Rnd - 1
    S1 = rand1 ^ 2 + rand2 ^ 2
    If S1 > 1 Then GoTo start
    S2 = Sqr(-2 * Log(S1) / S1)
    X1 = rand1 * S2
    X2 = rand2 * S2

    Return1 = Exp(mean + sigma * X1)
    Return2 = Exp(mean + sigma * X2)

    Frequency(Int(Return1 / 0.01)) = _
        Frequency(Int(Return1 / 0.01)) + 1
    Frequency(Int(Return2 / 0.01)) = _
        Frequency(Int(Return2 / 0.01)) + 1
Next Index

For Index = 0 To 400
    Range("output").Cells(Index + 1, 1) = _
        Frequency(Index) / N
Next Index

Range("stoptime") = Time
Range("elapsed") = Range("stoptime") - Range("starttime")
Range("elapsed").NumberFormat = "hh:mm:ss"

End Sub

```

Фрагмент кода, который генерирует случайные стандартные нормальные отклонения, состоит из восьми строк после метки `start`. Более подробно он рассматривается в главе 25.

## 15.5. Моделирование логнормальной эволюции цен

Вернемся к проблеме моделирования эволюции во времени курсов акций, подчиняющихся логнормальному закону распределения, которую мы затронули в разделе 15.3. Постараемся понять смысл следующих предложений, моделируя процесс на языке VBA: “Текущий курс акций составляет 25 долл. Курс распределен по логнормальному закону, с логарифмическим среднегодовым значением 10% и логарифмическим среднегодовым стандартным отклонением 20%”. Нам необ-

ходимо знать, как курс акций может вести себя день за днем в течение следующего года. Существует неограниченное количество возможных путей эволюции курсовой цены. Мы смоделируем только один из них. Если же понадобится еще один, можно запустить процесс моделирования снова.

В году примерно 250 рабочих дней. Поэтому дневное колебание курса акций со дня  $t$  на день  $t + 1$  можно смоделировать, установив  $\Delta t = 1/250 = 0,004$ ,  $\mu = 10\%$  и  $\sigma = 20\%$ . Если начальный курс акций равен  $S_0 = 25$  долл., то после одного дня он составит

$$\begin{aligned} S_{\Delta t} &= S_0 \exp \left[ \mu \Delta t + \sigma Z \sqrt{\Delta t} \right] = \\ &= 25 \times \exp \left[ 0,15 \times 0,004 + 0,20 \times Z \sqrt{0,004} \right]. \end{aligned}$$

После двух дней курс будет равен

$$S_{0,008} = S_{0,004} \left[ 0,15 \times 0,004 + 0,20 \times Z \sqrt{0,004} \right].$$

И так далее. На каждом шаге случайное нормальное отклонение  $Z$  является неопределенным фактором в доходе по акции. Из-за этой неопределенности все смоделированные пути эволюции курсовой цены будут различными.

Далее приведена программа на VBA, которая называется PricePathSimulation и воспроизводит типичную картину эволюции цены во времени.

```
Sub pricePathSimulation()
    Range("starttime") = Time
    Application.ScreenUpdating = False

    N = Range("runs").Value
    mean = Range("mean")
    sigma = Range("sigma")
    delta_t = 1 / (2 * N)

    ReDim price(0 To 2 * N) As Double

    price(0) = Range("initial_price")

    For Index = 1 To N
        start:
        Static rand1, rand2, S1, S2, X1, X2
        rand1 = 2 * Rnd - 1
        rand2 = 2 * Rnd - 1
        S1 = rand1 ^ 2 + rand2 ^ 2
        If S1 > 1 Then GoTo start
        S2 = Sqr(-2 * Log(S1) / S1)
        X1 = rand1 * S2
        X2 = rand2 * S2

        price(2 * Index - 1) = price(2 * Index - 2) * _
```

```

    Exp(mean * delta_t + sigma * Sqr(delta_t) * X1)
    price(2 * Index) = price(2 * Index - 1) * _
    Exp(mean * delta_t + sigma * Sqr(delta_t) * X2)
Next Index

For Index = 0 To 2 * N
    Range("output").Cells(Index + 1, 1) = Index
    Range("output").Cells(Index + 1, 2) = price(Index)
Next Index

Range("stoptime") = Time
Range("elapsed") = Range("stoptime") - Range("starttime")
Range("elapsed").NumberFormat = "hh:mm:ss"

End Sub

```

Результат работы программы выглядит на листе электронной таблицы так, как показано ниже.



Как видно из текста программы, обновление экрана отключено с помощью команды `Application.ScreenUpdating = False`. Это существенно ускоряет выполнение моделирования. (Попробуйте деактивизировать эту команду, и сами увидите разницу.)

Можно слегка изменить программу и сгенерировать много разных путей эволюции курса по логнормальному закону (см. упр. 1). Результат работы такой программы показан ниже в виде графиков.



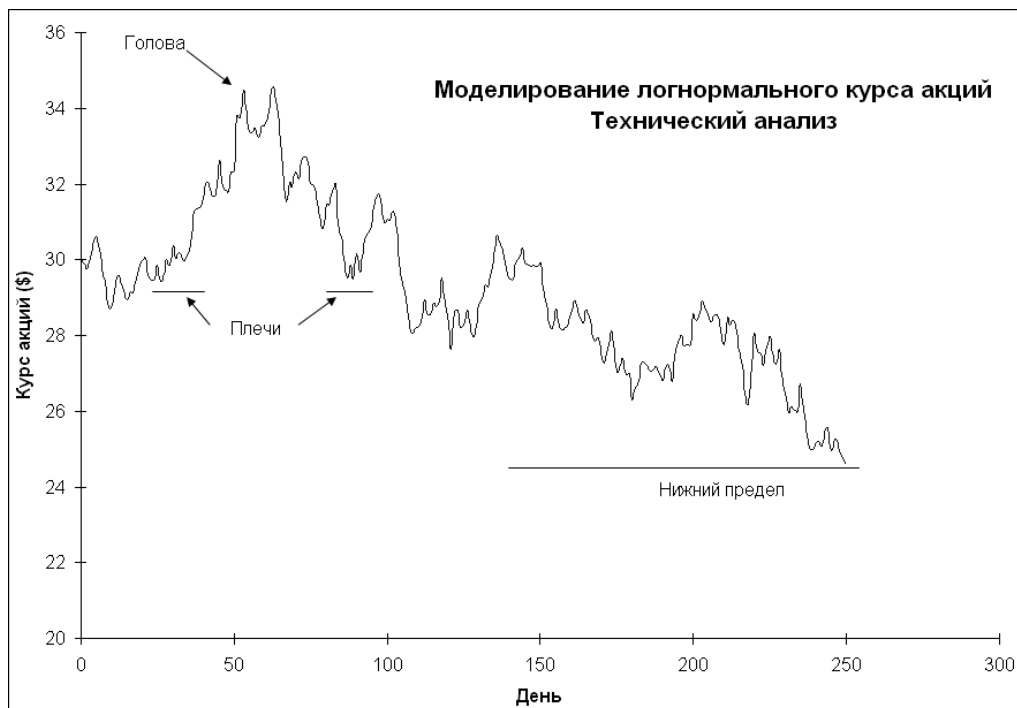


Как видно, в среднем цена финансового актива растет со временем, как и дисперсия доходов. Эти результаты согласуются со свойствами 4 и 5 курсовых цен из раздела 15.2 — ожидается, что и доход от актива, и неопределенность, связанная с получением этого дохода, будет расти со временем.

## 15.6. Технический анализ

Аналитики в области ценных бумаг делятся на две категории: “фундаменталисты” и “технари”. Это деление не имеет ничего общего с их взглядами на то, кто и как создал Вселенную; здесь имеется в виду всего лишь их мнение о сути формирования курсов акций. “Фундаменталисты” полагают, что стоимость акции полностью определяется экономическими показателями предприятия. Поэтому когда фундаменталист проводит анализ состояния бумаг компании, он изучает доходы, соотношение заемных средств и акционерного капитала, рынки сбыта и т.д.

В противоположность этому “технари” считают, что курс акций определяется собственными закономерностями его изменения. Они полагают, что изучение эволюции курсовых цен в прошлом поможет им предсказать курс акций в будущем (или хотя бы высказать близкие к истине предположения о нем). Такой технарй может сказать вам нечто вроде: “курс меняется по шаблону “голова и плечи” (*head-and-shoulders*)”. При этом имеется в виду, что график курса акций имеет следующий вид.



“Технари” также пользуются такими терминами, как “нижний предел” (*floor*; кстати, он есть на показанном графике), “высота рикошета” (*rebound level*), “висячий элемент” (*pennant*)<sup>6</sup>.

С классических (можно сказать, ортодоксальных) позиций чисто технический анализ курса акций считается несостоятельным и бесполезным. Одна из основных гипотез финансовой теории гласит, что рынок эффективно учитывает информацию, известную о торгуемых на нем ценных бумагах. Существует несколько вариантов такой теории; один из них называется *слабой гипотезой эффективного рынка* и гласит, что в текущей курсовой стоимости акций учитывается вся информация о прошлых курсах ценных бумаг. Из этой гипотезы следует, что предсказание будущей курсовой цены с помощью только технического анализа прошлых цен невозможно<sup>7</sup>.

И все же множество людей верит в возможности технического анализа. (Уже сама эта вера может до некоторой степени сделать технический анализ обоснованным, поскольку косвенно влияет на курсовую стоимость.) Симуляционное моделирование, выполненное нами в этой главе, позволяет сгенерировать хоть миллионы возможных шаблонов, а затем проанализировать их и получить “на-

<sup>6</sup> Чикагская товарная биржа опубликовала замечательное введение в технический анализ и его терминологию под названием “An Introduction to Speculating” (“Введение в биржевые спекуляции”). Его можно получить бесплатно в издательском отделе (Publications Division) Чикагской товарной биржи (Chicago Board of Trade), находящегося по адресу 141 W.Jackson, Chicago IL 60604.

<sup>7</sup> Этот вопрос обсуждается в главе 13 книги Brealey, Myers (1996); более глубоко эта проблема изложена в главе 9 книги Copeland, Weston (1983).

дежное” предсказание будущего курса акций. Например, на рисунке, приведенном выше, видно, что нижний предел для курса акций составляет 24 долл., поскольку курс ни разу не опускался ниже. Проницательный аналитик обнаружит на этом рисунке отчетливый трехпиковый рисунок типа “голова и плечи” в промежутке между 40-м и 100-м днями. К тому же есть еще и верхний предел, равный 35 долл. Аналитик-“технар” может сделать прогноз о том, что курсовая цена всегда будет оставаться на уровне ниже 35 долл., если только ее не угрождает подпрыгнуть выше. (Если вы собираетесь стать таким аналитиком, вам придется научиться нести всю эту ахинею с абсолютно честным, непроницаемым выражением лица.)

### 15.7. Расчет параметров логнормального распределения

Основная задача этого раздела — показать, как по данным о курсовой стоимости вычисляются параметры  $\mu$  и  $\sigma$ , необходимые для моделирования логнормального распределения (а в следующей главе — еще и  $\sigma$ , необходимого как исходный параметр для формулы Блэка–Скоулза). Но прежде всего следует отметить, что среднее и дисперсия логарифма дохода с акций за промежутки времени  $\Delta t$  равны

$$E \left[ \ln \left( \frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} \right) \right] = E \left( \mu \Delta t + \sigma Z \sqrt{\Delta t} \right) = \mu \Delta t,$$

$$\text{Дисп} \left[ \ln \left( \frac{S_{t+\Delta t}}{S_t} \right) \right] = \text{Дисп} \left( \mu \Delta t + \sigma Z \sqrt{\Delta t} \right) = \sigma^2 \Delta t.$$

Из этих выражений видно, что как средний ожидаемый логарифмический доход, так и дисперсия логарифмического дохода являются линейными во времени.

Теперь предположим, что нам необходимо оценить логнормальные параметры  $\mu$  и  $\sigma$  по фактической информации о прошлых курсовых ценах. Имеем

$$\mu = \frac{\text{Ср} [\ln (S_{t+\Delta t}/S_t)]}{\Delta t}, \sigma^2 = \frac{\text{Дисп} [\ln (S_{t+\Delta t}/S_t)]}{\Delta t}.$$

Приведем конкретный пример. Ниже приведена таблица Excel, в которой перечислены ежемесячные значения курса некоей акции. По этим ценам мы рассчитываем логарифмический доход, а также среднее значение и стандартное отклонение, *приведенное к годовому интервалу времени*. Обратите внимание, что величина  $\sigma$  вычисляется с помощью функции СТАНДОТКЛОНП (Stdevp); при этом подразумевается, что эти данные представляют действительное распределение.

|    | A                                             | B     | C        | D                     | E | F |
|----|-----------------------------------------------|-------|----------|-----------------------|---|---|
| 1  | Вычисление среднего и стандартного отклонения |       |          |                       |   |   |
| 2  |                                               |       |          |                       |   |   |
| 3  |                                               |       | Месячный |                       |   |   |
| 4  | Месяц                                         | Курс  | доход    |                       |   |   |
| 5  | 0                                             | 12,00 |          |                       |   |   |
| 6  | 1                                             | 12,90 | 7,23%    | <-- =LN(B6/B5)        |   |   |
| 7  | 2                                             | 12,35 | -4,36%   | <-- =LN(B7/B6)        |   |   |
| 8  | 3                                             | 12,88 | 4,20%    |                       |   |   |
| 9  | 4                                             | 13,80 | 6,90%    |                       |   |   |
| 10 | 5                                             | 13,20 | -4,45%   |                       |   |   |
| 11 | 6                                             | 13,55 | 2,62%    |                       |   |   |
| 12 | 7                                             | 12,65 | -6,87%   |                       |   |   |
| 13 | 8                                             | 14,50 | 13,65%   |                       |   |   |
| 14 | 9                                             | 15,35 | 5,70%    |                       |   |   |
| 15 | 10                                            | 14,85 | -3,31%   |                       |   |   |
| 16 | 11                                            | 15,25 | 2,66%    |                       |   |   |
| 17 | 12                                            | 15,50 | 1,63%    |                       |   |   |
| 18 |                                               |       |          |                       |   |   |
| 19 | Среднее по месяцам                            |       | 2,13%    | <-- =СРЗНАЧ(С6:С17)   |   |   |
| 20 | Станд. отклон. по месяцам                     |       | 5,74%    | =СТАНДОТКЛОНП(С6:С17) |   |   |
| 21 |                                               |       |          |                       |   |   |
| 22 | Среднее за год                                |       | 25,59%   | <-- =С19*12           |   |   |
| 23 | Станд. отклон. за год                         |       | 19,88%   | <-- =С20*КОРЕНЬ(12)   |   |   |

Обратите внимание, что среднегодовой логарифмический доход в 12 раз больше среднемесячного, тогда как годовое стандартное отклонение в  $\sqrt{12}$  раз больше месячного. В целом, если данные о доходе генерируются за  $n$  периодов в течение года, то справедливы соотношения

$$\begin{aligned}\text{Среднегодовой доход} &= n \times \text{Средний доход за период,} \\ \text{Величина } \sigma \text{ за год} &= \sqrt{n} \times \text{Величина } \sigma \text{ период.}\end{aligned}$$

Разумеется, это не единственный способ вычисления параметров логнормального распределения. Нужно упомянуть еще как минимум два метода.

- Можно тем или иным способом экстраполировать среднее значение и стандартное отклонение *будущих* доходов на основе их прошлой истории. Один из примеров такой экстраполяции — скользящее среднее.
- С помощью формулы Блэка–Скоулза (Black–Scholes) можно найти *подразумеваемую неустойчивость (implied volatility)*: величину  $\sigma$  логарифмического дохода по акции, которая соответствует цене опциона на эту акцию. Этот метод будет продемонстрирован в разделе 16.4.

## Упражнения

1. Напишите программу на языке VBA, которая бы воспроизводила логнормальную плотность распределения при произвольном количестве запусков. Другими словами, эта программа должна делать следующее:
  - а) генерировать  $N$  нормальных случайных отклонений;
  - б) для каждого отклонения вычислять относительное изменение цен,  $\exp \left[ \mu \Delta t + \sigma Z \sqrt{\Delta t} \right]$ ;

- в) распределять относительные изменения по набору подынтервалов от 0 до 3 с шагом 0,1;
- г) выводить на лист таблицы величины частот и строить график их распределения, аналогичный графику из раздела 15.4.
2. Запустите несколько сеансов моделирования путей эволюции курсовых цен. Изучите формы получившихся распределений. Найдите в них какие-нибудь из типовых шаблонов или форм, рассматриваемых в техническом анализе курсов ценных бумаг. Вот примеры таких шаблонов<sup>8</sup>:
- площадка опоры (*support area*);
  - площадка сопротивления (*resistance area*);
  - уклон вверх/вниз (*uptrend/downtrend*);
  - голова и плечи (*head and shoulders*);
  - перевернутые голова и плечи (*inverted head and shoulders*);
  - двойной верх/двойное дно (*double top/bottom*);
  - скругленный верх/скругленное дно (*rounded top/bottom*);
  - треугольник восходящий, симметричный, нисходящий (*triangle — ascending, symmetrical, descending*);
  - флаг (*flag*).
3. Напишите программу на языке VBA, которая бы генерировала десять графиков эволюции курса во времени и вычерчивала бы их на листе таблицы Excel (как это сделано в разделе 15.5).
4. Файл Problems15.xls содержит ежедневные данные о курсовых ценах для индекса S&P 500 и для Abbot Laboratories с 26 октября 1998 г. по 26 октября 1999 г. Используя эти данные, вычислите годовое среднее, дисперсию и стандартное отклонение логарифмических доходов для S&P 500 и для Abbot Laboratories. Какова корреляция между доходами по бумагам S&P 500 и Abbot Laboratories?

<sup>8</sup> Как сам автор, так и редакция не советует всерьез относиться к этим терминам. Несмотря на их обилие, никакая архисложная и архиважная наука за ними не стоит. — *Примеч. ред.*



---

# 16 Модель Блэка–Скоулза

---

## 16.1. Введение

В своей знаменитой статье, опубликованной в 1973 г., Фишер Блэк (Fisher Black) и Майрон Скоулз (Myron Scholes) вывели формулу для цен европейских опционов “колл” и “пут” на акции без выплаты дивидендов. Их модель является, пожалуй, самой знаменитой моделью в современной финансовой теории. Формула Блэка–Скоулза относительно проста в использовании и при этом часто дает приемлемые приближения для цен на более сложные опционы.

В этой главе мы не претендуем на полный вывод и обоснование модели — для этого потребовалось бы знание теории случайных процессов и изрядные математические выкладки. Вместо этого мы опишем “механику” работы модели и покажем, как реализовать ее в Excel<sup>1</sup>.

---

## 16.2. Модель Блэка–Скоулза

Рассмотрим акцию, курс которой распределен по логнормальному закону. Для цены опциона “колл” на эту акцию в модели Блэка–Скоулза используется следующая формула:

$$C = SN(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2).$$

Здесь введены обозначения

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

где  $C$  — цена опциона;  $S$  — цена обеспечивающего актива;  $X$  — цена исполнения опциона;  $T$  — срок до исполнения/погашения опциона;  $r$  — процентная ставка;  $\sigma$  — стандартное отклонение логарифма дохода по акции.  $N(\ )$  обозначает вели-

---

<sup>1</sup> В упражнениях к главе 14 мы давали намек на одну из форм доказательства формулы Блэка–Скоулза. Там отмечалось, что формула Блэка–Скоулза совпадает с формулой биномиальной модели оценивания опционов в том случае, когда: (а) длина типового периода стремится к нулю; (б) повышение и понижение курса акций в биномиальной модели стремится к логнормальному процессу изменения курсовой цены; (в) временная структура процентных ставок фиксирована.

чину стандартного нормального распределения. Предполагается, что по акции не выплачиваются дивиденды до даты  $T$ .

По теореме о паритете “пут”–“колл” (см. главу 13) опцион “пут” с тем же сроком погашения  $T$  и той же ценой исполнения  $X$  имеет цену  $P = C - S + X e^{-rT}$ . Подставляя в эту формулу выражение для  $C$  и выполняя некоторые преобразования, получим формулу Блэка–Скоулза для опционов “пут”:

$$P = X e^{-rT} N(-d_2) - S N(-d_1).$$

### 16.2.1. Реализация формул Блэка–Скоулза

Формулы Блэка–Скоулза для цен на опционы “колл” и “пут” легко реализуются в таблице Excel. В следующем примере показано, как вычисляется цена опциона “колл” на покупку акции с текущим курсом  $S = 25$  при цене исполнения  $X = 25$ , приведенной годовой процентной ставке  $r = 6\%$  и  $\sigma = 30\%$ . Срок погашения опциона составляет полгода:  $T = 0,5$ . Отметим, что все три параметра,  $T$ ,  $r$  и  $\sigma$ , считаются приведенными к годовичному интервалу<sup>2</sup>.

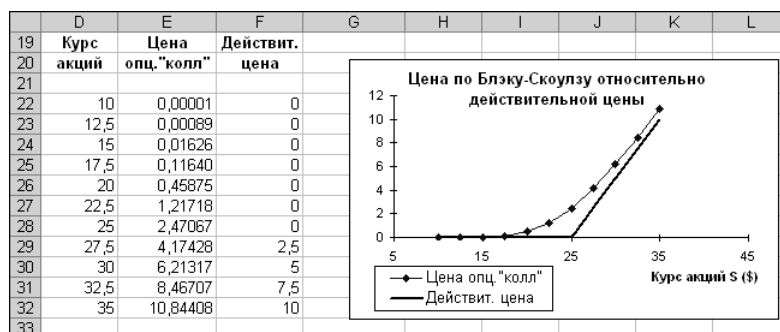
|    | A                                             | B      | C                                                                           | D | E | F | G |
|----|-----------------------------------------------|--------|-----------------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|
| 1  | <b>Формула Блэка–Скоулза для цены опциона</b> |        |                                                                             |   |   |   |   |
| 2  |                                               |        |                                                                             |   |   |   |   |
| 3  | S                                             | 25     | Текущий курс акций                                                          |   |   |   |   |
| 4  | X                                             | 25     | Цена исполнения                                                             |   |   |   |   |
| 5  | r                                             | 6,00%  | Безрисковая процентная ставка                                               |   |   |   |   |
| 6  | T                                             | 0,5    | Срок до исполнения (в годах)                                                |   |   |   |   |
| 7  | Сигма                                         | 30%    | Волатильность акции                                                         |   |   |   |   |
| 8  |                                               |        |                                                                             |   |   |   |   |
| 9  | d <sub>1</sub>                                | 0,2475 | <-- (LN(S/X)+(r+0.5*sigma^2)*T)/(sigma*КОРЕНЬ(T))                           |   |   |   |   |
| 10 | d <sub>2</sub>                                | 0,0354 | <-- d1-sigma*КОРЕНЬ(T)                                                      |   |   |   |   |
| 11 |                                               |        |                                                                             |   |   |   |   |
| 12 | N(d <sub>1</sub> )                            | 0,5977 | <-- Используется формула НОРМСТРАСП(d <sub>1</sub> )                        |   |   |   |   |
| 13 | N(d <sub>2</sub> )                            | 0,5141 | <-- Используется формула НОРМСТРАСП(d <sub>2</sub> )                        |   |   |   |   |
| 14 |                                               |        |                                                                             |   |   |   |   |
| 15 | Цена опц. “колл”                              | 2,47   | <-- S*N(d <sub>1</sub> )-X*exp(-r*T)*N(d <sub>2</sub> )                     |   |   |   |   |
| 16 | Цена опц. “пут”                               | 1,73   | <-- цена опц. “колл” - S + X*Exp(-r*T): по паритету “пут-колл”              |   |   |   |   |
| 17 |                                               | 1,73   | <-- X*exp(-r*T)*N(-d <sub>2</sub> ) - S*N(-d <sub>1</sub> ): прямая формула |   |   |   |   |

Заметьте, что цена опциона “пут” вычисляется дважды: один раз с помощью теоремы о паритете, а второй раз непосредственно по формуле Блэка–Скоулза.

С помощью приведенной таблицы можно выполнить традиционный анализ чувствительности. Например, следующая таблица данных (см. главу 26), созданная с помощью команды меню Данные⇒Таблица подстановки (Data⇒Table), дает для переменного курса акций  $S$  стоимости опционов “колл” по Блэку–Скоулзу в сравнении с его действительной стоимостью, т.е.  $\max[S - X, 0]$ . Заметим, что заголовок таблицы данных не показан (строка 21).

<sup>2</sup> В последнем разделе главы 15 рассматривается приведение величины  $\sigma$  к годовичному интервалу на основе данных о логнормальном процессе на более коротких интервалах.





### 16.3. Реализация модели на языке VBA

Хотя реализация формул Блэка–Скоулза в ячейках таблицы, показанная в предыдущем разделе, вполне достаточна для некоторых целей, иногда требуется цельная, замкнутая функция, которую можно было бы непосредственно использовать и в Excel. Средство для реализации такой функции — это Visual Basic for Applications. Ниже приведена VBA-функция для оценивания опционов “колл”.

```
Function dOne(Stock, Exercise, Time, Interest, sigma)
    dOne = (Log(Stock / Exercise) + Interest * Time) / _
        (sigma * Sqr(Time)) + 0.5 * sigma * Sqr(Time)
End Function
```

```
Function CallOption(Stock, Exercise, Time, Interest, sigma)
    CallOption = Stock * Application.NormSDist(dOne(Stock, _
        Exercise, Time, Interest, sigma)) - Exercise * _
        Exp(-Time * Interest) * _
        Application.NormSDist(dOne(Stock, Exercise, _
        Time, Interest, sigma) - sigma * Sqr(Time))
End Function
```

Первая функция определяет  $d_1$ , а вторая (CallOption) — цену опциона “колл” по Блэку–Скоулзу. Обратите внимание на использование функции Excel НОРМСТРАСП (NormSDist), которая дает стандартное нормальное распределение; чтобы она работала в VBA, необходимо писать Application.NormSDist.

#### 16.3.1. Оценивание опционов на продажу

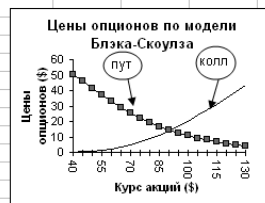
Согласно теореме о паритете опционов “пут”–“колл”, цена на опцион “пут” (опцион на продажу) выражается формулой  $P = C - S + Xe^{-rT}$ . Эту формулу можно реализовать в виде еще одной функции VBA:

```
Function PutOption(Stock, Exercise, Time, Interest, sigma)
    PutOption = CallOption(Stock, Exercise, Time, _
        Interest, sigma) + Exercise * Exp(-Interest * _
        Time) - Stock
End Function
```

### 16.3.2. Применение функций в таблице

Приведем пример применения функций, определенных выше, в таблице Excel. График в этой таблице был построен с помощью таблицы данных. (Мы обычно скрываем первую строку таких таблиц на рисунках, но здесь она приведена.)

|    | A                                        | B       | C                               | D | E | F | G   | H       | I       | J                            | K    | L | M | N |
|----|------------------------------------------|---------|---------------------------------|---|---|---|-----|---------|---------|------------------------------|------|---|---|---|
| 1  | <b>МОДЕЛЬ БЛЭКА-СКОУЛЗА НА ЯЗЫКЕ VBA</b> |         |                                 |   |   |   |     |         |         |                              |      |   |   |   |
| 2  |                                          |         |                                 |   |   |   |     |         |         |                              |      |   |   |   |
| 3  | S                                        | 100     |                                 |   |   |   | =B9 | "Колл"  | "Пут"   |                              | =B10 |   |   |   |
| 4  | X                                        | 100     |                                 |   |   |   |     | 20,3185 | 10,8022 | <-- Заголовок таблицы данных |      |   |   |   |
| 5  | T                                        | 1,00    |                                 |   |   |   |     | 0,1802  | 0,6639  |                              |      |   |   |   |
| 6  | Процент                                  | 10,00%  |                                 |   |   |   |     | 45      | 0,4104  |                              |      |   |   |   |
| 7  | Сигма                                    | 40,00%  |                                 |   |   |   |     | 50      | 0,8081  |                              |      |   |   |   |
| 8  |                                          |         |                                 |   |   |   |     | 55      | 1,4241  |                              |      |   |   |   |
| 9  | Цена опц "колл"                          | 20,3185 | <-- =CallOption(B3,B4,B5,B6,B7) |   |   |   |     |         |         |                              |      |   |   |   |
| 10 | Цена опц "пут"                           | 10,8022 | <-- =PutOption(B3,B4,B5,B6,B7)  |   |   |   |     |         |         |                              |      |   |   |   |
| 11 |                                          |         |                                 |   |   |   |     | 60      | 2,3019  |                              |      |   |   |   |
| 12 |                                          |         |                                 |   |   |   |     | 65      | 3,4739  |                              |      |   |   |   |
| 13 | Справа находится таблица                 |         |                                 |   |   |   |     |         |         |                              |      |   |   |   |
| 14 | данных, в которой приведены              |         |                                 |   |   |   |     |         |         |                              |      |   |   |   |
| 15 | цены опционов "колл" и "пут"             |         |                                 |   |   |   |     |         |         |                              |      |   |   |   |
| 16 | для различных курсов акций.              |         |                                 |   |   |   |     |         |         |                              |      |   |   |   |
| 17 |                                          |         |                                 |   |   |   |     | 70      | 4,9600  |                              |      |   |   |   |
| 18 |                                          |         |                                 |   |   |   |     | 75      | 6,7683  |                              |      |   |   |   |
| 19 |                                          |         |                                 |   |   |   |     | 80      | 8,8965  |                              |      |   |   |   |
| 20 |                                          |         |                                 |   |   |   |     | 85      | 11,3341 |                              |      |   |   |   |
|    |                                          |         |                                 |   |   |   |     | 90      | 14,0645 |                              |      |   |   |   |
|    |                                          |         |                                 |   |   |   |     | 95      | 17,0669 |                              |      |   |   |   |
|    |                                          |         |                                 |   |   |   |     | 100     | 20,3185 |                              |      |   |   |   |
|    |                                          |         |                                 |   |   |   |     | 105     | 23,7954 |                              |      |   |   |   |
|    |                                          |         |                                 |   |   |   |     | 110     | 27,4740 |                              |      |   |   |   |



## 16.4. Расчет подразумеваемой волатильности

При расчете цен на опционы часто встречается следующая задача. Пусть известна цена  $C$  опциона "колл", текущий курс обеспечивающего актива  $S$ , процентная ставка  $r$ , срок погашения опциона  $T$ , а также цена исполнения опциона  $X$ . Требуется найти показатель изменчивости или неустойчивости (волатильности)  $\sigma$ , заложенный в цену опциона  $C$ . Для примера рассмотрим опцион со следующими параметрами:

- цена опциона —  $C = 4$ ;
- текущий курс обеспечивающих акций —  $S = 45$ ;
- цена исполнения опциона —  $X = 50$ ;
- процентная ставка —  $r = 8\%$ ;
- срок погашения или исполнения —  $T = 1$ .

Требуется найти *подразумеваемую волатильность* (*implied volatility*)  $\sigma$ , т.е. такое стандартное отклонение, при котором формула Блэка-Скоулза для опционов "колл" давала бы цену 4 при остальных известных параметрах. Задача легко решается методом проб и ошибок, если заметить, что цена опциона монотонно возрастает с ростом  $\sigma$ . Ниже приведена таблица данных, соответствующая предыдущему рисунку.

|    | A                                               | B                     | C                                                       | D | E | F | G | H |
|----|-------------------------------------------------|-----------------------|---------------------------------------------------------|---|---|---|---|---|
| 1  | <b>Формула Блэка–Скоулза для цен на опционы</b> |                       |                                                         |   |   |   |   |   |
| 2  |                                                 |                       |                                                         |   |   |   |   |   |
| 3  | S                                               | 45                    | Текущий курс акций                                      |   |   |   |   |   |
| 4  | X                                               | 50                    | Цена исполнения                                         |   |   |   |   |   |
| 5  | r                                               | 8,00%                 | Безрисковая процентная ставка                           |   |   |   |   |   |
| 6  | T                                               | 1                     | Срок до исполнения (в годах)                            |   |   |   |   |   |
| 7  | Сигма                                           | 10,000%               | Волатильность акции                                     |   |   |   |   |   |
| 8  |                                                 |                       |                                                         |   |   |   |   |   |
| 9  | d <sub>1</sub>                                  | -0,2036               | <-- (LN(S/X)+(r+0.5*sigma^2)*T)/(sigma*КОРЕНЬ(T))       |   |   |   |   |   |
| 10 | d <sub>2</sub>                                  | -0,3036               | <-- d1-sigma*КОРЕНЬ(T)                                  |   |   |   |   |   |
| 11 |                                                 |                       |                                                         |   |   |   |   |   |
| 12 | N(d <sub>1</sub> )                              | 0,4193                | <-- Используется формула НОРМСТРАСП(d <sub>1</sub> )    |   |   |   |   |   |
| 13 | N(d <sub>2</sub> )                              | 0,3807                | <-- Используется формула НОРМСТРАСП(d <sub>2</sub> )    |   |   |   |   |   |
| 14 |                                                 |                       |                                                         |   |   |   |   |   |
| 15 | Цена опц. "колл"                                | 1,2977                | <-- S*N(d <sub>1</sub> )-X*exp(-r*T)*N(d <sub>2</sub> ) |   |   |   |   |   |
| 16 |                                                 |                       |                                                         |   |   |   |   |   |
| 17 |                                                 | <b>ТАБЛИЦА ДАННЫХ</b> |                                                         |   |   |   |   |   |
| 18 |                                                 | 1,2977                | <-- =B15, заголовок таблицы                             |   |   |   |   |   |
| 19 |                                                 | 15%                   | 2,18576                                                 |   |   |   |   |   |
| 20 |                                                 | 16%                   | 2,36461                                                 |   |   |   |   |   |
| 21 |                                                 | 17%                   | 2,54368                                                 |   |   |   |   |   |
| 22 |                                                 | 18%                   | 2,72291                                                 |   |   |   |   |   |
| 23 |                                                 | 19%                   | 2,90225                                                 |   |   |   |   |   |
| 24 |                                                 | 20%                   | 3,08168                                                 |   |   |   |   |   |
| 25 |                                                 | 21%                   | 3,26116                                                 |   |   |   |   |   |
| 26 |                                                 | 22%                   | 3,44068                                                 |   |   |   |   |   |
| 27 |                                                 | 23%                   | 3,62020                                                 |   |   |   |   |   |
| 28 |                                                 | 24%                   | 3,79971                                                 |   |   |   |   |   |
| 29 |                                                 | 25%                   | 3,97921                                                 |   |   |   |   |   |
| 30 |                                                 | 26%                   | 4,15866                                                 |   |   |   |   |   |
| 31 |                                                 | 27%                   | 4,33806                                                 |   |   |   |   |   |



Из таблицы данных становится ясно, что в цене, равной 4, заложена подразумеваемая волатильность  $\sigma$  чуть более 25%. Метод проб и ошибок дает значение  $\sigma = 25,116\%$ .

|    | A                                               | B       | C                                                       | D | E | F | G |
|----|-------------------------------------------------|---------|---------------------------------------------------------|---|---|---|---|
| 1  | <b>Формула Блэка–Скоулза для цен на опционы</b> |         |                                                         |   |   |   |   |
| 2  |                                                 |         |                                                         |   |   |   |   |
| 3  | S                                               | 45      | Текущий курс акций                                      |   |   |   |   |
| 4  | X                                               | 50      | Цена исполнения                                         |   |   |   |   |
| 5  | r                                               | 8,00%   | Безрисковая процентная ставка                           |   |   |   |   |
| 6  | T                                               | 1       | Срок до исполнения (в годах)                            |   |   |   |   |
| 7  | Сигма                                           | 25,116% | Волатильность акции                                     |   |   |   |   |
| 8  |                                                 |         |                                                         |   |   |   |   |
| 9  | d <sub>1</sub>                                  | 0,0246  | <-- (LN(S/X)+(r+0.5*sigma^2)*T)/(sigma*КОРЕНЬ(T))       |   |   |   |   |
| 10 | d <sub>2</sub>                                  | -0,2266 | <-- d1-sigma*КОРЕНЬ(T)                                  |   |   |   |   |
| 11 |                                                 |         |                                                         |   |   |   |   |
| 12 | N(d <sub>1</sub> )                              | 0,5098  | <-- Используется формула НОРМСТРАСП(d <sub>1</sub> )    |   |   |   |   |
| 13 | N(d <sub>2</sub> )                              | 0,4104  | <-- Используется формула НОРМСТРАСП(d <sub>2</sub> )    |   |   |   |   |
| 14 |                                                 |         |                                                         |   |   |   |   |
| 15 | Цена опц. "колл"                                | 4,0000  | <-- S*N(d <sub>1</sub> )-X*exp(-r*T)*N(d <sub>2</sub> ) |   |   |   |   |

## 16.5. Функция VBA для нахождения подразумеваемой дисперсии

Чтобы облегчить нахождение величины  $\sigma$  для заданного опциона “колл”, можно определить функцию CallVolatility на языке Visual Basic for Applications. Заголовок функции имеет вид CallVolatility(Stock, Exercise, Time, Interest, Target), где аргументы имеют следующий смысл:

- Stock — курсовая цена обеспечивающего актива,  $S$ ;
- Exercise — цена исполнения опциона,  $X$ ;
- Time — срок погашения опциона,  $T$ ;
- Interest — процентная ставка  $r$ ;
- Target — цена опциона,  $C$ .

Эта функция находит  $\sigma$ , при котором формула Блэка–Скоулза дает заданную величину  $C$ .

```
Function CallVolatility(Stock, Exercise, Time, _
    Interest, Target)
    High = 1
    Low = 0
    Do While (High - Low) > 0.0001
    If CallOption(Stock, Exercise, Time, Interest, _
        (High + Low) / 2) > Target
    Then
        High = (High + Low) / 2
    Else Low = (High + Low) / 2
    End If
    Loop
    CallVolatility = (High + Low) / 2
End Function
```

В этой функции используется методика, очень напоминающая метод проб и ошибок. Начинаем с двух возможных оценок  $\sigma$  — оценки High, равной 100%, и оценки Low, равной 0%. Далее выполняются следующие операции.

- Среднее между High и Low значение подставляется в формулу Блэка–Скоулза: CallOption(Stock, Exercise, Time, Interest, (High+Low)/2). Обратите внимание, что для работы функции CallVolatility необходимо, чтобы функция CallOption была доступна из текущего листа таблицы.
- Если CallOption(Stock, Exercise, Time, Interest, (High+Low)/2) > Target, то текущая оценка для  $\sigma$ , равная (High+Low)/2, слишком велика, и High заменяется на (High+Low)/2.
- Если CallOption(Stock, Exercise, Time, Interest, (High+Low)/2) < Target, то текущая оценка для  $\sigma$ , равная (High+Low)/2, слишком мала, и Low заменяется на (High+Low)/2.

Эта процедура повторяется до тех пор, пока разность High - Low не станет меньше 0,0001 (или другой произвольно выбранной малой константы)<sup>3</sup>.

<sup>3</sup> Этот критерий останова срабатывает всегда (т.е. любой процесс поиска в конце концов закончится), если описанное деление пополам применяется к монотонной функции. Данный критерий можно было бы заменить следующим: |CallOption(Stock, Exercise, Time, Interest, (High+Low)/2) - Target| < 0,0001. Для нахождения подразумеваемой волатильности оба критерия эквивалентны, но в других случаях правило такого рода может и не сработать.

Ниже приведен пример применения этой функции, содержащий таблицу данных и график, на котором подразумеваемая волатильность показана в виде функции цены опциона “колл”.



## 16.6. “Гонка за сверхприбылью” с помощью опционов

В этом разделе представлено простое применение формулы Блэка–Скоулза. Предположим, вы убеждены, что некоторые акции поднимутся в цене через короткий промежуток времени. Вы хотите купить такие опционы “колл” на эти акции, которые бы дали как можно большую прибыль. С помощью формулы Блэка–Скоулза легко показать, что для этого необходимо:

- покупать опционы “колл” с кратчайшим сроком погашения;
- покупать в основном опционы “колл” с максимально завышенными ценами исполнения (с максимальным выигрышем).

Проиллюстрируем это с помощью таблицы.

|    | A                                    | B      | C                                                       | D | E | F | G |
|----|--------------------------------------|--------|---------------------------------------------------------|---|---|---|---|
| 1  | ПОЛУЧЕНИЕ "СВЕРХПРИБЫЛИ" ОТ ОПЦИОНОВ |        |                                                         |   |   |   |   |
| 2  |                                      |        |                                                         |   |   |   |   |
| 3  | S                                    | 25     | Текущий курс акций                                      |   |   |   |   |
| 4  | X                                    | 25     | Цена исполнения                                         |   |   |   |   |
| 5  | r                                    | 6,00%  | Безрисковая процентная ставка                           |   |   |   |   |
| 6  | T                                    | 0,5    | Срок до исполнения (в годах)                            |   |   |   |   |
| 7  | Сигма                                | 30%    | Волатильность акции                                     |   |   |   |   |
| 8  |                                      |        |                                                         |   |   |   |   |
| 9  | d <sub>1</sub>                       | 0,2475 | <-- (LN(S/X)+(r+0.5*sigma^2)*T)/(sigma*KOPEHb(T))       |   |   |   |   |
| 10 | d <sub>2</sub>                       | 0,0354 | <-- d1-sigma*KOPEHb(T)                                  |   |   |   |   |
| 11 |                                      |        |                                                         |   |   |   |   |
| 12 | N(d <sub>1</sub> )                   | 0,5977 | <-- Используется формула НОРМСТРАСП(d <sub>1</sub> )    |   |   |   |   |
| 13 | N(d <sub>2</sub> )                   | 0,5141 | <-- Используется формула НОРМСТРАСП(d <sub>2</sub> )    |   |   |   |   |
| 14 |                                      |        |                                                         |   |   |   |   |
| 15 | Цена опц. "колл"                     | 2,47   | <-- S*N(d <sub>1</sub> )-X*exp(-r*T)*N(d <sub>2</sub> ) |   |   |   |   |
| 16 | Цена опц. "пут"                      | 1,73   | <-- цена опц. "колл" - S + X*Exp(-r*T): по паритету     |   |   |   |   |
| 17 |                                      |        |                                                         |   |   |   |   |
| 18 | Прибыль от "колл"                    | 6,0483 | <-- =B12*B3/B15                                         |   |   |   |   |
| 19 | Прибыль от "пут"                     | 5,8070 | <-- =NORMSDIST(-B9)*B3/B16                              |   |   |   |   |

В ячейке B18 определена величина “сверхприбыли” по опциону “колл”. Это всего-навсего процентное изменение в цене опциона, деленное на процентное изменение в курсе акций (в экономической теории эта величина называется *ценовой эластичностью, price elasticity*):

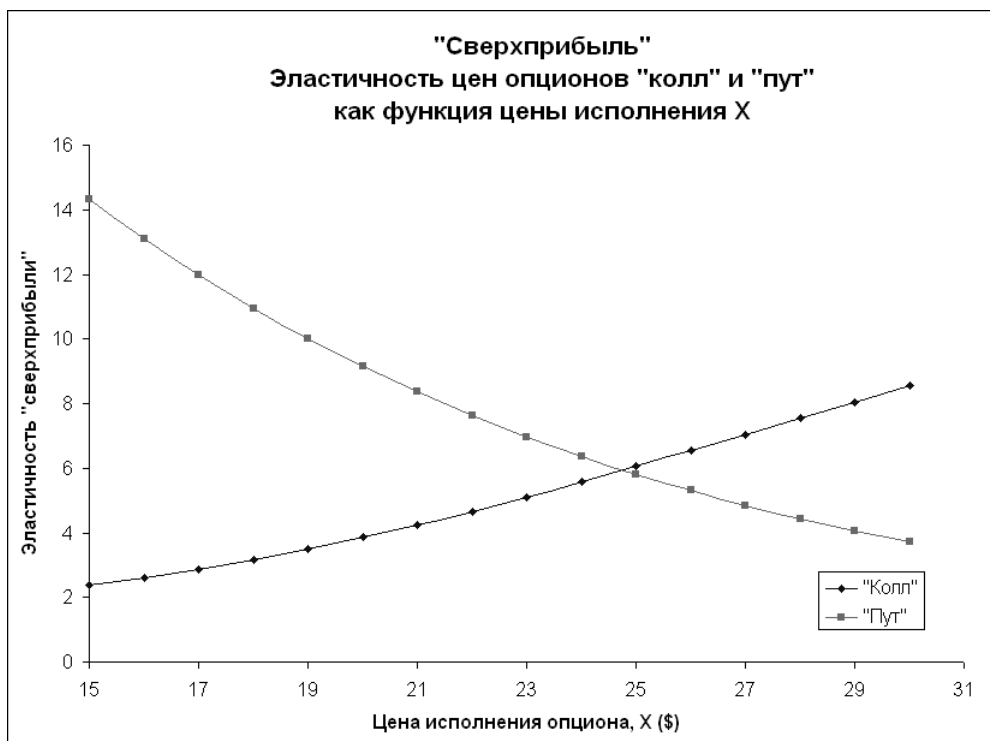
$$\text{Сверхприбыль по опциону "колл"} = \frac{\partial C/C}{\partial S/S} = \frac{\partial C}{\partial S} \frac{S}{C} = N(d_1) \frac{S}{C}.$$

Аналогично для опциона “пут” такая “сверхприбыль” определяется по следующей формуле (разумеется, в этом случае затею вообще стоит начинать только при наличии уверенности, что курс акций скоро пойдет вниз):

$$\text{Сверхприбыль по опциону "пут"} = \frac{\partial P/P}{\partial S/S} = \frac{\partial P}{\partial S} \frac{S}{P} = -N(-d_1) \frac{S}{P}.$$

Эта величина определена в ячейке B19. Чтобы числа было легче воспринимать и понимать, мы опустили знак “минус” во втором случае и сделали “сверхприбыль” по опциону “пут” равной  $N(-d_1)S/P$ .

На следующем рисунке показаны графики “сверхприбыли” по опционам обоих типов.



Поэкспериментируйте с таблицей, и вы сами увидите, что чем дольше срок погашения, тем меньше “сверхприбыль”. Другими словами это можно выразить так: наиболее рискованные опционы имеют самую завышенную цену исполнения и самый короткий срок погашения.

|    | F | G | H                          | I                                                          | J                 | K       | L       | M      | N | O |
|----|---|---|----------------------------|------------------------------------------------------------|-------------------|---------|---------|--------|---|---|
| 24 |   |   |                            | Таблица: влияние S и T на "сверхприбыль" по опциону "колл" |                   |         |         |        |   |   |
| 25 |   |   |                            |                                                            |                   |         |         |        |   |   |
| 26 |   |   |                            |                                                            |                   |         |         |        |   |   |
| 27 |   |   | Заголовок таблицы:<br>=B18 |                                                            | Т-срок исполнения |         |         |        |   |   |
| 28 |   |   |                            | 6,0483                                                     | 0,25              | 0,5     | 0,75    | 1      |   |   |
| 29 |   |   |                            | 15                                                         | 25,8566           | 14,1767 | 10,1698 | 8,1113 |   |   |
| 30 |   |   | S, курс акций              | 16                                                         | 23,3203           | 12,9886 | 9,4124  | 7,5625 |   |   |
| 31 |   |   |                            | 17                                                         | 20,9931           | 11,9035 | 8,7218  | 7,0623 |   |   |
| 32 |   |   |                            | 18                                                         | 18,8591           | 10,9122 | 8,0913  | 6,6056 |   |   |
| 33 |   |   |                            | 19                                                         | 16,9055           | 10,0067 | 7,5154  | 6,1882 |   |   |
| 34 |   |   |                            | 20                                                         | 15,1222           | 9,1804  | 6,9891  | 5,8062 |   |   |
| 35 |   |   |                            | 21                                                         | 13,5006           | 8,4274  | 6,5082  | 5,4565 |   |   |
| 36 |   |   |                            | 22                                                         | 12,0334           | 7,7424  | 6,0691  | 5,1362 |   |   |
| 37 |   |   |                            | 23                                                         | 10,7137           | 7,1205  | 5,6682  | 4,8426 |   |   |
| 38 |   |   |                            | 24                                                         | 9,5347            | 6,5572  | 5,3025  | 4,5737 |   |   |
| 39 |   |   |                            | 25                                                         | 8,4892            | 6,0483  | 4,9691  | 4,3272 |   |   |
| 40 |   |   |                            | 26                                                         | 7,5694            | 5,5896  | 4,6655  | 4,1012 |   |   |
| 41 |   |   |                            | 27                                                         | 6,7664            | 5,1773  | 4,3892  | 3,8941 |   |   |
| 42 |   |   |                            | 28                                                         | 6,0706            | 4,8074  | 4,1379  | 3,7043 |   |   |
| 43 |   |   |                            | 29                                                         | 5,4720            | 4,4764  | 3,9094  | 3,5303 |   |   |
|    |   |   |                            | 30                                                         | 4,9598            | 4,1807  | 3,7019  | 3,3708 |   |   |

## Упражнения

1. С помощью модели Блэка–Скоулза оцените следующие опционы:
  - а) “колл” на акцию с текущим курсом 50, ценой исполнения  $X = 50$ , сроком  $T = 0,5$ , процентной ставкой  $r = 10\%$ ,  $\sigma = 25\%$ ;
  - б) “пут” с теми же параметрами.
2. Используйте данные из упражнения 1 и средства работы с таблицами данных в Excel для построения графиков, показывающих следующее:
  - а) чувствительность цены опциона “колл” по Блэку–Скоулзу к изменениям в начальном курсе акций  $S$ ;
  - б) чувствительность цены опциона “пут” по Блэку–Скоулзу к изменениям  $\sigma$ ;
  - в) чувствительность цены опциона “колл” по Блэку–Скоулзу к изменениям срока погашения  $T$ ;
  - г) чувствительность цены опциона “колл” по Блэку–Скоулзу к изменениям процентной ставки  $r$ ;
  - д) чувствительность цены опциона “пут” к изменениям цены исполнения  $X$ .
3. Постройте график для сравнения *действительной стоимости* опциона “колл” (определяемой как  $\max[S - X, 0]$ ) и его же цены по Блэку–Скоулзу. Из этого графика станет ясно, что для опциона “колл”, оцененного по формуле Блэка–Скоулза, никогда не бывает выгодно досрочное исполнение.
4. Постройте график для сравнения *действительной стоимости* опциона “пут” ( $\max[X - S, 0]$ ) и его же цены по Блэку–Скоулзу. Из этого графика должно стать ясно, что опцион “пут”, оцененный по Блэку–Скоулзу, бывает выгодно исполнить досрочно.
5. Еще раз вспомним опционы на акции American Express из главы 13. Предположим, что сейчас пятница, 26 января 1996 г., и опционы имеют следующие даты погашения:
  - “Feb” — 16 февраля 1996 г.
  - “Mar” — 15 марта 1996 г.
  - “Apr” — 19 апреля 1996 г.
  - “Jul” — 19 июля 1996 г.
 Сгенерируйте две таблицы:
  - а) таблицу цен (по формуле Блэка–Скоулза) всех опционов “колл” на акции American Express. Предполагается, что процентная ставка равна  $r = 6\%$ , а соответствующая волатильность  $\sigma = 30\%$ ;
  - б) аналогичную таблицу для опционов “пут” на акции American Express.
6. С помощью модуля поиска решения Excel (Поиск решения или Solver) найдите курс акций, при котором имеет место максимальная разница между ценой на опцион “колл” по Блэку–Скоулзу и действительной стоимостью опциона. Параметры задачи:  $S = 45$ ,  $X = 45$ ,  $T = 1$ ,  $\sigma = 40\%$ ,  $r = 8\%$ .



7. Как гласит теорема 7 из главы 13, европейский опцион на акции следует оценивать, отфильтровав из курса обеспечивающих акций все дивиденды, выплачиваемые до срока погашения опциона. Мертон показал (см. Merton, 1973), что для случая актива с курсовой ценой  $S$ , по которому выплачивается начисляемый по непрерывной схеме дивиденд  $k$ , этот подход дает следующую формулу для ценообразования опционов “колл”:

$$C = Se^{-kT}N(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2),$$

где

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r - k + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Эта формула часто применяется для ценообразования опционов по индексам, где наличие множества дивидендов по акциям делает предположение о непрерывном накоплении дивидендов вполне обоснованным. Воспользуйтесь этой формулой для оценивания опциона “колл” по индексу с текущим курсом  $S = 500$  при сроке погашения  $T = 1$ , ставке дивиденда  $k = 2,2\%$ , стандартном отклонении  $\sigma = 20\%$  и процентной ставке  $r = 7\%$ .

8. Моделью Мертона из упражнения 7 можно также пользоваться для оценки опционов на валюту. Предположим для примера, что нужно оценить опцион “колл” на покупку 10 000 евро по курсу 1,10 долл. за 1 евро через три месяца. Пусть процентная ставка дохода в США равна 5,5%, а ставка по евро составляет 3,8%. В следующей таблице показано использование модели Мертона для оценки такого опциона (обратите внимание на низкий показатель волатильности — это типично для валютной торговли).

Выполните с помощью этой модели анализ чувствительности, показывающий влияние текущего курса обмена валют на цену опциона.

|    | A                                   | B       | C                                                                                                                      | D | E | F | G | H |
|----|-------------------------------------|---------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|---|
| 1  | <b>Оценивание валютных опционов</b> |         |                                                                                                                        |   |   |   |   |   |
| 2  |                                     |         |                                                                                                                        |   |   |   |   |   |
| 3  | S                                   | 1,04    | Текущий обменный курс: цена в долларах за 1 евро                                                                       |   |   |   |   |   |
| 4  | X                                   | 1,10    | Цена исполнения                                                                                                        |   |   |   |   |   |
| 5  | r <sub>us</sub>                     | 5,50%   | Процентная ставка по доллару                                                                                           |   |   |   |   |   |
| 6  | r <sub>€</sub>                      | 3,80%   | Процентная ставка по евро                                                                                              |   |   |   |   |   |
| 7  | T                                   | 0,25    | Срок погашения (в годах)                                                                                               |   |   |   |   |   |
| 8  | Сигма                               | 6,00%   | Волатильность                                                                                                          |   |   |   |   |   |
| 9  | d <sub>1</sub>                      | -1,7130 | <-- (LN(S/X)+(r <sub>us</sub> -r <sub>€</sub> +0.5*sigma^2)*T)/(sigma*KOPEHb(T))                                       |   |   |   |   |   |
| 10 | d <sub>2</sub>                      | -1,7430 | <-- d1 - sigma*KOPEHb(T)                                                                                               |   |   |   |   |   |
| 11 |                                     |         |                                                                                                                        |   |   |   |   |   |
| 12 | Сумма одной сделки в евро           | 10 000  |                                                                                                                        |   |   |   |   |   |
| 13 |                                     |         |                                                                                                                        |   |   |   |   |   |
| 14 | N(d <sub>1</sub> )                  | 0,0434  | <-- Используется формула НОРМСТРАСП(d <sub>1</sub> )                                                                   |   |   |   |   |   |
| 15 | N(d <sub>2</sub> )                  | 0,0407  | <-- Используется формула НОРМСТРАСП(d <sub>2</sub> )                                                                   |   |   |   |   |   |
| 16 |                                     |         |                                                                                                                        |   |   |   |   |   |
| 17 | Цена опц. “колл”                    | 5,42    | <-- (S*Exp(-r <sub>€</sub> *T)*N(d <sub>1</sub> )-X*exp(-r <sub>us</sub> *T)*N(d <sub>2</sub> ))*B12                   |   |   |   |   |   |
| 18 | Цена опц. “пут”                     | 553,53  | <-- (X*exp(-r <sub>us</sub> *T)*N(-d <sub>2</sub> )-S*Exp(-r <sub>€</sub> *T)*N(-d <sub>1</sub> ))*B12: прямая формула |   |   |   |   |   |

9. Заметим, что формулу Блэка–Скоулза можно применять для расчета премии опциона “колл” в виде процента цены исполнения и через  $S/X$  :

$$C = SN(d_1) - Xe^{-rT}N(d_2) \Rightarrow \frac{C}{X} = \frac{S}{X}N(d_1) - e^{-rT}N(d_2),$$

где

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Реализуйте этот подход на листе таблицы.

10. Заметим также, что и премию опциона “пут” по Блэку–Скоулзу можно вычислять в виде процента от цены исполнения через  $S/X$  :

$$P = -SN(-d_1) + Xe^{-rT}N(-d_2) \Rightarrow \frac{P}{X} = e^{-rT}N(-d_2) - \frac{S}{X}N(-d_1),$$

где

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Реализуйте этот подход на листе таблицы. Найдите отношение  $S/X$ , при котором  $C/X$  и  $P/X$  пересекаются в точке, соответствующей  $T = 0,5$ ,  $\sigma = 25\%$ ,  $r = 10\%$ . (Для этого можно построить график или воспользоваться модулем поиска решения Excel.) Обратите внимание, что на положение точки пересечения влияет процентная ставка и срок погашения опциона, но не величина  $\sigma$ .

# 17 Страхование портфелей ценных бумаг

## 17.1. Введение: страхование дохода от акций

Для того чтобы гарантировать некий минимальный доход от вложений в акции, можно использовать опционы. Как мы показали при рассмотрении стратегии работы с опционами в главе 13, при покупке акции (или портфеля акций) и одновременном приобретении опциона “пут” на продажу этой акции (или портфеля) создается гарантия, что денежный доход от этой покупки будет не меньше цены исполнения опциона. Но далеко не всегда и не на все портфели можно найти рыночные опционы; в этом случае формула Блэка–Скоулза для ценообразования опционов может помочь сформировать динамическую схему для имитации опциона “пут”. В этой схеме получение дохода от опциона на продажу имитируется изменяющимися во времени объемами вложения средств в подверженный риску актив (пакет или портфель акций) и в лишенные риска облигации. Такие имитационные схемы лежат в основе страхования портфелей ценных бумаг, которое рассматривается в этой главе.

Начнем со следующего простого примера. Вы решили вложить средства в одну акцию компании General Pills с текущей стоимостью 56 долл. По акции не выплачиваются дивиденды. Вы надеетесь на получение значительной прибыли к концу года, но есть и опасение, что курс акции может упасть. Чтобы защититься от падения курсовой стоимости, вы решаете приобрести европейский опцион на продажу этой акции. Приобретенный опцион позволяет продать акцию в конце года по цене 50 долл. Стоимость опциона, 2,38 долл., выведена по модели Блэка–Скоулза (Black–Scholes), рассмотренной в главе 16, с использованием следующих данных:  $S_0 = \$56$ ,  $X = \$50$ ,  $\sigma = 30\%$  и  $r = 8\%$ .

|    | A                                             | B      | C                                                              | D | E | F | G | H |
|----|-----------------------------------------------|--------|----------------------------------------------------------------|---|---|---|---|---|
| 1  | <b>Формула Блэка-Скоулза в применении</b>     |        |                                                                |   |   |   |   |   |
| 2  | <b>к опциону "пут" на акции General Pills</b> |        |                                                                |   |   |   |   |   |
| 3  |                                               |        |                                                                |   |   |   |   |   |
| 4  | S                                             | 56     | Курс акций                                                     |   |   |   |   |   |
| 5  | X                                             | 50     | Цена исполнения                                                |   |   |   |   |   |
| 6  | T                                             | 1      | Оставшийся срок                                                |   |   |   |   |   |
| 7  | r                                             | 8,00%  | Безрисковая процентная ставка                                  |   |   |   |   |   |
| 8  | Sigma                                         | 30%    | Волатильность акции                                            |   |   |   |   |   |
| 9  |                                               |        |                                                                |   |   |   |   |   |
| 10 | d <sub>1</sub>                                | 0,7944 | <-- (LN(S/X)+(r+0.5*sigma^2)*T)/(sigma*KOPEHb(T))              |   |   |   |   |   |
| 11 | d <sub>2</sub>                                | 0,4944 | <-- d1-Sigma*KOPEHb(T)                                         |   |   |   |   |   |
| 12 |                                               |        |                                                                |   |   |   |   |   |
| 13 | N(d <sub>1</sub> )                            | 0,7865 | <-- Используется формула НОРМСТРАСП(d <sub>1</sub> )           |   |   |   |   |   |
| 14 | N(d <sub>2</sub> )                            | 0,6895 | <-- Используется формула НОРМСТРАСП(d <sub>2</sub> )           |   |   |   |   |   |
| 15 |                                               |        |                                                                |   |   |   |   |   |
| 16 | Цена опц. "колл"                              | 12,22  | <-- S*N(d <sub>1</sub> )-X*exp(-r*T)*N(d <sub>2</sub> )        |   |   |   |   |   |
| 17 | Цена опц. "пут"                               | 2,38   | <-- цена опц. "колл" - S + X*Exp(-r*T): по паритету "пут-колл" |   |   |   |   |   |

Такой *защитный опцион* или схема *страхования портфеля* гарантирует потере не более 6 долл. на одной акции General Pills. Если курс акций в конце года составит величину, большую 50 долл., то вы просто пропустите дату погашения опциона, не исполняя его. А если курс акций в конце года будет менее 50 долл., вы сможете продать опцион и получить свои 50 долл. Получается так, как будто вы приобрели страховой полис на акцию со страховым взносом 6 долл.

Разумеется, такое страхование имеет свою цену. Вместо того чтобы вложить в одну акцию 56 долл., вы вложили 58,38 долл. Дополнительные 2,38 долл. можно было бы положить в банк и получить по ним проценты за год в сумме  $8\% \times 2,38 = 0,19$  долл. Можно было бы также пустить сумму 2,38 долл. на приобретение дополнительных акций.

## 17.2. Страхование портфелей сложных активов

В предыдущем примере была применена схема страхования портфеля путем приобретения опциона на продажу, обеспечивающий актив которого полностью совпадает с используемым портфелем акций. Но этот метод не всегда оказывается применимым по следующим причинам.

- Может случиться так, что на рынке нет опциона “пут” на те акции, которые необходимо застраховать.
- Бывает желательно приобрести страховку на более сложный пакет активов — например, на портфель акций. На некоторые портфели существуют опционы “пут” (например, имеются в продаже опционы на портфели S&P 100 и S&P 500), но, очевидно, на большинство портфелей таковых нет.

И здесь приходит на помощь модель Блэка–Скоулза для ценообразования опционов. Из этой формулы следует, что опцион “пут” на акцию (далее под акцией будем понимать как одиночный актив, так и портфель акций) — это просто портфель, состоящий из проданной авансом (без фактического наличия) акции и наличной на руках безрисковой бумаги, причем доли вложенных в этот портфель средств непрерывно корректируются. Для примера рассмотрим формулу Блэка–Скоулза для опциона “пут” со сроком погашения  $T = 1$  и ценой исполнения  $X$ . В момент времени  $t$ , такой, что  $0 \leq t < 1$ , опцион имеет стоимость

$$P_t = -S_t N(-d_1) + X e^{-r(1-t)} N(-d_2),$$

где

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/X) + (r + \sigma^2/2)(1-t)}{\sigma\sqrt{1-t}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{1-t}.$$

Срок до исполнения опциона составляет здесь  $(1 - t)$ , а символом  $S_t$  обозначен курс акций в момент  $t$ .

Таким образом, приобретение опциона эквивалентно вложению суммы  $Xe^{-r(1-t)}N(-d_2)$  в безрисковую ценную бумагу (облигацию), срок погашения которой  $T = 1$ , и вложению суммы  $-S_tN(-d_1)$  в акцию. Поскольку вложение в акцию имеет отрицательный знак, опцион “пут” эквивалентен продаже акции авансом и наличию на руках безрискового актива.

Общая сумма, требуемая для приобретения одной акции и опциона на нее, равна  $S_t + P_t$ . Расписывая это выражение и подставляя формулу цены опциона по Блэку–Скоулзу, получаем

$$\begin{aligned}\text{Вложение в защитный опцион} &= S_t + P_t = \\ &= S_t - S_tN(-d_1) + Xe^{-r(1-t)}N(-d_2) = \\ &= S_t[1 - N(-d_1)] + Xe^{-r(1-t)}N(-d_2) = \\ &= S_tN(d_1) + Xe^{-r(1-t)}N(-d_2).\end{aligned}$$

В последнем равенстве учтено, что для стандартного нормального распределения  $N(x) + N(-x) = 1$ . Однако полезно рассмотреть эту задачу под другим углом зрения, считая общую сумму капиталовложения  $S_t + P_t$  в момент  $t$  как портфель из акции и облигации; затем следует задаться вопросом, какая доля  $\omega_t$  данного портфеля вложена в акцию в момент  $t$ . Перепишав предыдущую формулу в долях портфеля, получаем

$$\text{Доля, вложенная в акцию} = \omega_t = \frac{S_tN(d_1)}{S_tN(d_1) + Xe^{-r(1-t)}N(-d_2)},$$

$$\text{Доля, вложенная в безрисковый актив} = 1 - \omega_t = \frac{Xe^{-r(1-t)}N(-d_2)}{S_tN(d_1) + Xe^{-r(1-t)}N(-d_2)}.$$

В целом получается так, что если вы хотите приобрести тот или иной портфель активов *и одновременно* страховой полис, гарантирующий, что при  $t = 1$  весь ваш пакет активов будет стоить не менее  $X$ , то в любой момент времени  $t$  следует иметь долю  $\omega_t$  всех своих средств в виде вложения в выбранный портфель, а долю  $1 - \omega_t$  — в виде безрисковых облигаций с нулевым купоном и сроком погашения  $t = 1$ . Для определения указанных процентных долей можно воспользоваться формулой Блэка–Скоулза для ценообразования по опционам.

### 17.3. Пример

Предположим, вы решили вложить 1000 долл. в акции компании General Pills (с текущим курсом 56 долл.) и в защитный опцион “пут” на эти акции с ценой исполнения 50 долл. и сроком погашения в один год от нынешнего момента. Таким образом, создается гарантия, что стоимость акции в денежном выражении по прошествии одного года составит не менее 50 долл. Предположим, что на бирже

нет опционов на акции General Pills, поэтому придется создать свой собственный опцион путем вложения средств в акции и безрисковые облигации с одноразовой выплатой. Безрисковая процентная ставка составляет 8%, а стандартное отклонение логарифмического дохода по бумагам General Pills — 30%.

Построим последовательность портфелей, реализующую эту схему с недельным шагом по времени<sup>1</sup>.

### 17.3.1. Неделя №0

В начале нулевой недели необходимо вложить следующую долю капитала в акции General Pills:

$$\omega_0 = \frac{S_0 N(d_1)}{S_0 + P_0} = \frac{56 \times 0,7865}{56 + 2,38} = 75,45\%.$$

Оставшиеся средства в объеме  $1 - \omega_0 = 24,55\%$  следует поместить в безрисковые облигации с единовременной выплатой, погашаемые через год. Если бы на торгах имелись опционы “пут” на акции General Pills и если бы они имели цену исполнения 50 и срок погашения 1 год от текущего момента, то они бы продавались по цене 2,38 долл. Тогда схема была бы следующей: покупка 17,13 акции GP (на сумму 959,23 долл.) и 17,13 опциона на их продажу (на сумму 40,77 долл.). Приобретение акций на сумму 754,40 долл. и облигаций на сумму 254,60 долл. в точности имитирует вложение средств в 17,13 акции и 17,13 опциона. Эквивалентность этих двух схем гарантируется моделью Блэка–Скоулза. Расчеты цены на опцион и соответствующих процентных долей портфеля приведены в следующей таблице.

|    | A                                             | B      | C                                                             | D | E | F | G | H |
|----|-----------------------------------------------|--------|---------------------------------------------------------------|---|---|---|---|---|
| 1  | <b>Формула Блэка–Скоулза в применении</b>     |        |                                                               |   |   |   |   |   |
| 2  | <b>к опциону "пут" на акции General Pills</b> |        |                                                               |   |   |   |   |   |
| 3  |                                               |        |                                                               |   |   |   |   |   |
| 4  | S                                             | 56     | Курс акций                                                    |   |   |   |   |   |
| 5  | X                                             | 50     | Цена исполнения                                               |   |   |   |   |   |
| 6  | T                                             | 1      | Оставшийся срок                                               |   |   |   |   |   |
| 7  | r                                             | 8,00%  | Безрисковая процентная ставка                                 |   |   |   |   |   |
| 8  | Sigma                                         | 30%    | Волатильность акции                                           |   |   |   |   |   |
| 9  |                                               |        |                                                               |   |   |   |   |   |
| 10 | d <sub>1</sub>                                | 0,7944 | <-- (LN(S/X)+(r+0.5*sigma^2)*T)/(sigma*KOPEHb(T))             |   |   |   |   |   |
| 11 | d <sub>2</sub>                                | 0,4944 | <-- d1-Sigma*KOPEHb(T)                                        |   |   |   |   |   |
| 12 |                                               |        |                                                               |   |   |   |   |   |
| 13 | N(d <sub>1</sub> )                            | 0,7865 | <-- Используется формула НОРМСТРАСП(d <sub>1</sub> )          |   |   |   |   |   |
| 14 | N(d <sub>2</sub> )                            | 0,6895 | <-- Используется формула НОРМСТРАСП(d <sub>2</sub> )          |   |   |   |   |   |
| 15 |                                               |        |                                                               |   |   |   |   |   |
| 16 | Цена опц "колл"                               | 12,22  | <-- S*N(d <sub>1</sub> )-X*exp(-r*T)*N(d <sub>2</sub> )       |   |   |   |   |   |
| 17 | Цена опц "пут"                                | 2,38   | <-- цена опц "колл" - S + X*Exp(-r*T): по паритету "пут-колл" |   |   |   |   |   |
| 18 |                                               |        |                                                               |   |   |   |   |   |
| 19 | <b>Расчет долей в страховании портфеля</b>    |        |                                                               |   |   |   |   |   |
| 20 | Омега                                         | 75,45% | <-- =B4*B13/(B4+B17): доля в акциях                           |   |   |   |   |   |
| 21 | 1-омега                                       | 24,55% | <-- =1-B20: доля в облигациях                                 |   |   |   |   |   |

<sup>1</sup> Здесь имеется скрытое противоречие между дискретной модификацией портфелей и непрерывным балансированием капиталовложений, лежащим в основе модели Блэка–Скоулза. Оно рассматривается в конце этой главы.

Теперь перейдем к концу первой недели. Вы начинали в момент времени  $t = 0$  с начальным вложением в объеме 1000 долл.; теперь предположим, что к концу первой недели курс акций GP поднялся до 60 долл. В этом случае стоимость портфеля в начале и конце первой недели будет следующей.

| Неделя | Курс акций в начале недели | Курс акций в конце недели | $d_1$ в нач.недели | Омега, в нач.нед. | Акции  | Облиг. | Стоим. портфеля | Акции  | Облиг. | Стоим. портфеля |
|--------|----------------------------|---------------------------|--------------------|-------------------|--------|--------|-----------------|--------|--------|-----------------|
| 0      | 56,00                      | 60,00                     | 0,7944             | 0,7545            | 754,50 | 245,50 | 1000,00         | 808,39 | 245,88 | 1054,27         |

Следует отметить, что стоимость облигаций в конце недели известна заранее; эта стоимость возрастает в  $1,00154 = e^{(1/52) \cdot 0,008}$  раза в неделю<sup>2</sup>. Однако курсовая стоимость акций зависит от прироста стоимости акционерного капитала General Pills. В течение недели №0 этот прирост составил  $60/56 = 1,0714$ .

### 17.3.2. Неделя №1

В начале недели №1 выполняется балансировка портфеля с увеличением доли капитала, вложенной в акции, и уменьшением доли облигаций. Новые доли в портфеле зависят от нового срока погашения облигаций (по прошествии одной недели текущим моментом времени становится  $t = 1/52 = 0,0192$ ), курса акций в начале недели (60 долл.) и общей стоимости портфеля в начале недели (1054,27 долл.). Как показано далее на листе таблицы Excel, необходимо выполнить *перебалансировку* портфеля, вложив в акции General Pills следующую долю капитала:

$$\omega_{0,0192} = \frac{SN(d_1)}{S + P} = \frac{60 \times 0,8476}{60 + 1,63} = 82,53\%.$$

Остальную его часть — 17,47% — следует вложить в облигации. Здесь 1,63 долл. — это стоимость европейского опциона на продажу по модели Блэка–Скоулза, рассчитанная по корректным параметрам.

|    | A                                             | B        | C                                                            | D | E | F | G | H |
|----|-----------------------------------------------|----------|--------------------------------------------------------------|---|---|---|---|---|
| 1  | <b>Формула Блэка-Скоулза в применении</b>     |          |                                                              |   |   |   |   |   |
| 2  | <b>к опциону "пут" на акции General Pills</b> |          |                                                              |   |   |   |   |   |
| 3  |                                               |          |                                                              |   |   |   |   |   |
| 4  | S                                             | 60       | Курс акций                                                   |   |   |   |   |   |
| 5  | X                                             | 50       | Цена исполнения                                              |   |   |   |   |   |
| 6  | T                                             | 0,980769 | Оставшийся срок=51/52                                        |   |   |   |   |   |
| 7  | r                                             | 8,00%    | Безрисковая процентная ставка                                |   |   |   |   |   |
| 8  | Sigma                                         | 30%      | Волатильность акции                                          |   |   |   |   |   |
| 9  |                                               |          |                                                              |   |   |   |   |   |
| 10 | $d_1$                                         | 1,0263   | <= (LN(S/X)+(r+0.5*sigma^2)*T)/(sigma*KOPENb(T))             |   |   |   |   |   |
| 11 | $d_2$                                         | 0,7292   | <= d1-Sigma*KOPENb(T)                                        |   |   |   |   |   |
| 12 |                                               |          |                                                              |   |   |   |   |   |
| 13 | $N(d_1)$                                      | 0,8476   | <= Используется формула НОРМСТРАСП( $d_1$ )                  |   |   |   |   |   |
| 14 | $N(d_2)$                                      | 0,7671   | <= Используется формула НОРМСТРАСП( $d_2$ )                  |   |   |   |   |   |
| 15 |                                               |          |                                                              |   |   |   |   |   |
| 16 | Цена опц."колл"                               | 15,40    | <= S*N( $d_1$ )-X*Exp(-r*T)*N( $d_2$ )                       |   |   |   |   |   |
| 17 | Цена опц."пут"                                | 1,63     | <= цена опц."колл" - S + X*Exp(-r*T): по паритету "пут-колл" |   |   |   |   |   |
| 18 |                                               |          |                                                              |   |   |   |   |   |
| 19 | <b>Расчет долей в страховании портфеля</b>    |          |                                                              |   |   |   |   |   |
| 20 | Омега                                         | 82,53%   | <= B4*B13/(B4+B17): доля в акциях                            |   |   |   |   |   |
| 21 | 1-омега                                       | 17,47%   | <= 1-B20: доля в облигациях                                  |   |   |   |   |   |

<sup>2</sup> Здесь мы всегда полагаем, что процентная ставка постоянна. В данной ситуации это предположение приемлемо как некоторое приближение к реальности (т.е. влияние изменений в процентной ставке намного меньше, чем влияние колебаний курсовой стоимости акций). Если бы понадобилось учесть изменения процентной ставки, в модели возник бы еще один источник неопределенности.

Предположим, что в конце недели №1 курс акций General Pills упал до уровня 52 долл. Теперь положение выглядит таким образом.

| Неделя | Курс акций<br>в начале<br>недели | Курс акций<br>в конце<br>недели | $d_1$<br>в<br>нач.недели | Омега,<br>в<br>нач.нед. | Стоим.портфеля в нач.недели |        |                    | Стоим.портфеля в конце нед. |        |                    |
|--------|----------------------------------|---------------------------------|--------------------------|-------------------------|-----------------------------|--------|--------------------|-----------------------------|--------|--------------------|
|        |                                  |                                 |                          |                         | Акции                       | Облиг. | Стоим.<br>портфеля | Акции                       | Облиг. | Стоим.<br>портфеля |
| 0      | 56,00                            | 60,00                           | 0,7944                   | 0,7545                  | 754,50                      | 245,50 | 1000,00            | 808,39                      | 245,88 | 1054,27            |
| 1      | 60,00                            | 52,00                           | 1,0263                   | 0,8253                  | 870,06                      | 184,22 | 1054,27            | 754,05                      | 184,50 | 938,55             |

### 17.3.3. Неделя №2

Поскольку прошла еще одна неделя, пропорции капиталовложений в General Pills теперь должны быть следующими:

$$\omega_{0,0385} = \frac{SN(d_1)}{S + P} = \frac{52 \times 0,7061}{52 + 3,33} = 66,35\%.$$

Это дает нам следующий расчет:

| Неделя | Курс акций<br>в начале<br>недели | Курс акций<br>в конце<br>недели | $d_1$<br>в<br>нач.недели | Омега,<br>в<br>нач.нед. | Стоим.портфеля в нач.недели |        |                    | Стоим.портфеля в конце нед. |        |                    |
|--------|----------------------------------|---------------------------------|--------------------------|-------------------------|-----------------------------|--------|--------------------|-----------------------------|--------|--------------------|
|        |                                  |                                 |                          |                         | Акции                       | Облиг. | Стоим.<br>портфеля | Акции                       | Облиг. | Стоим.<br>портфеля |
| 0      | 56,00                            | 60,00                           | 0,7944                   | 0,7545                  | 754,50                      | 245,50 | 1000,00            | 808,39                      | 245,88 | 1054,27            |
| 1      | 60,00                            | 52,00                           | 1,0263                   | 0,8253                  | 870,06                      | 184,22 | 1054,27            | 754,05                      | 184,50 | 938,55             |
| 2      | 52,00                            | ???                             | 0,5419                   | 0,6635                  | 622,73                      | 315,82 | 938,55             | ???                         | 316,30 | ???                |

Имеющаяся неопределенность будет разрешена только после того, как мы узнаем курс акций в конце недели.

Конечно, приведенный пример не вполне корректен, поскольку в модели Блэка–Скоулза подразумевается непрерывное корректирование долей капиталовложений в портфеле, тогда как мы ждали целую неделю, чтобы внести соответствующие изменения. В этом вопросе мы лелеем скромную надежду, что конечные (но короткие) интервалы корректирования адекватно аппроксимируют схему Блэка–Скоулза с непрерывной корректировкой. (На самом деле мы просто не можем выполнять корректировку портфеля непрерывно. Более того, поскольку такая корректировка подразумевает потерю средств на оплате финансовых транзакций, в действительности только и возможна корректировка через конечные промежутки времени.)

## 17.4. Некоторые свойства схем страхования портфелей

В предыдущем примере демонстрировались некоторые типичные свойства страхования портфелей. Три наиболее важными являются следующие.

**Свойство 1.** Если курс акций превышает цену исполнения  $X$ , то доля  $\omega$  средств, вложенных в подверженный риску актив, составляет более 50%.



**Доказательство.** Для доказательства этого свойства необходимо преобразовать формулу для  $\omega$ . Перепишем  $\omega$  в следующем виде:

$$\omega = \frac{SN(d_1)}{SN(d_1) + Xe^{-r(1-t)}N(-d_2)} = \frac{1}{1 + \frac{Xe^{-r(1-t)}N(-d_2)}{SN(d_1)}}.$$

Покажем, что при  $S \geq X$  знаменатель в выражении для  $\omega$  меньше 2, откуда и будет следовать доказываемое утверждение. Вначале заметим, что при  $S \geq X$  имеет место неравенство  $X/S \leq 1$ . Далее заметим, что  $e^{-r(1-t)} < 1$  для всех  $0 \leq t \leq 1$ . Наконец, рассмотрим отношение

$$\begin{aligned} \frac{N(-d_2)}{N(d_1)} &= \frac{N(\sigma\sqrt{1-t} - d_1)}{N(d_1)} = \\ &= \frac{N\{0, 5\sigma\sqrt{1-t} - [\ln(S/X) + r(1-t)]/(1-t)\}}{N\{0, 5\sigma\sqrt{1-t} + [\ln(S/X) + r(1-t)]/(1-t)\}} < 1. \end{aligned}$$

Свойство 1 доказано.

**Свойство 2.** При возрастании курса акций возрастает и доля  $\omega$  вложения капитала в акции, и наоборот.

**Доказательство.** Достаточно показать, что при возрастании  $S$  уменьшается цена опциона и  $N(-d_1)$ . Перепишем исходное определение  $\omega$  в виде

$$\omega = \frac{S[1 - N(-d_1)]}{S + P} = \frac{[1 - N(-d_1)]}{1 + P/S}.$$

Таким образом, при возрастании  $S$  уменьшается знаменатель и возрастает числитель  $\omega$ , что и доказывает свойство 2.

**Свойство 3.** При  $t \rightarrow 1$  происходит одно из двух: если  $S_t > X$ , то  $\omega_t \rightarrow 1$ ; если же  $S_t < X$ , то  $\omega_t \rightarrow 0$ .

**Доказательство.** Заметим, что когда  $S_t > X$  и  $t \rightarrow 1$ , имеет место  $N(d_1) \rightarrow 1$  и  $N(-d_1) \rightarrow 0$ ; в этом случае  $\omega_t \rightarrow 1$ . Соответственно при  $S_t < X$  и  $t \rightarrow 1$  справедливы соотношения  $N(d_1) \rightarrow 0$  и  $N(-d_1) \rightarrow 1$ , откуда  $\omega_t \rightarrow 0$ . (Строго говоря, эти утверждения верны лишь в предельном вероятностном смысле — см. работу Billingsley, 1968. Что, например, происходит в случае  $t \rightarrow 1$  и  $S_t/X \rightarrow 1$ ? В этом случае  $\omega_t \rightarrow 1/2$ , однако вероятность такого исхода равна нулю.)

## 17.5. Численное моделирование схем страхования портфелей

Итак, как же выглядят реальные схемы страхования портфелей ценных бумаг? В этом разделе мы попытаемся промоделировать такую схему. Здесь везде подразумевается, что процентная ставка дохода постоянна, а курс акций распределен по логнормальному закону. Ниже в таблице приведен пример выходных данных такого моделирования.

| Неделя | Курс акций<br>в начале<br>недели | Курс акций<br>в конце<br>недели | $d_t$<br>в<br>нач.недели | Омега,<br>в<br>нач.нед. | Стоим.портфеля в нач.недели |        |                       | Стоим.портфеля в конце нед. |        |                       | Станд.<br>норм.<br>отклон-я |
|--------|----------------------------------|---------------------------------|--------------------------|-------------------------|-----------------------------|--------|-----------------------|-----------------------------|--------|-----------------------|-----------------------------|
|        |                                  |                                 |                          |                         | Акции                       | Облиг. | Стоимость<br>портфеля | Акции                       | Облиг. | Стоимость<br>портфеля |                             |
| 0      | 56,00                            | 59,72                           | 0,7944                   | 0,7545                  | 754,50                      | 245,50 | 1000,00               | 804,68                      | 245,88 | 1050,56               | 1,47845185                  |
| 1      | 59,72                            | 55,17                           | 1,0108                   | 0,8210                  | 862,53                      | 188,03 | 1050,56               | 796,74                      | 188,32 | 985,06                | -1,9765048                  |
| 2      | 55,17                            | 55,27                           | 0,7430                   | 0,7377                  | 726,68                      | 258,38 | 985,06                | 727,99                      | 258,78 | 986,78                | -0,0257444                  |
| 3      | 55,27                            | 56,16                           | 0,7485                   | 0,7400                  | 730,19                      | 256,58 | 986,78                | 741,92                      | 256,98 | 998,90                | 0,31386435                  |
| 4      | 56,16                            | 58,49                           | 0,8032                   | 0,7588                  | 757,99                      | 240,92 | 998,90                | 789,51                      | 241,29 | 1030,79               | 0,90991989                  |
| 5      | 58,49                            | 57,95                           | 0,9461                   | 0,8037                  | 828,44                      | 202,35 | 1030,79               | 820,72                      | 202,66 | 1023,38               | -0,2943955                  |
| 6      | 57,95                            | 61,53                           | 0,9147                   | 0,7947                  | 813,24                      | 210,15 | 1023,38               | 863,47                      | 210,47 | 1073,94               | 1,37145889                  |
| 7      | 61,53                            | 58,37                           | 1,1310                   | 0,8535                  | 916,62                      | 157,33 | 1073,94               | 869,57                      | 157,57 | 1027,14               | -1,3358908                  |
| 8      | 58,37                            | 57,97                           | 0,9441                   | 0,8040                  | 825,78                      | 201,36 | 1027,14               | 820,14                      | 201,67 | 1021,81               | -0,2341028                  |
| 9      | 57,97                            | 63,33                           | 0,9211                   | 0,7975                  | 814,87                      | 206,94 | 1021,81               | 890,27                      | 207,25 | 1097,52               | 2,05775905                  |
| 10     | 63,33                            | 58,56                           | 1,2513                   | 0,8811                  | 967,01                      | 130,51 | 1097,52               | 894,17                      | 130,71 | 1024,88               | -1,9517665                  |
| 11     | 58,56                            | 55,74                           | 0,9634                   | 0,8104                  | 830,59                      | 194,29 | 1024,88               | 790,58                      | 194,59 | 985,17                | -1,2560076                  |
| 12     | 55,74                            | 54,03                           | 0,7786                   | 0,7536                  | 742,43                      | 242,75 | 985,17                | 719,60                      | 243,12 | 962,72                | -0,8200573                  |
| 13     | 54,03                            | 53,81                           | 0,6591                   | 0,7126                  | 686,00                      | 276,72 | 962,72                | 683,21                      | 277,15 | 960,35                | -0,1672765                  |
| 14     | 53,81                            | 48,97                           | 0,6424                   | 0,7070                  | 678,97                      | 281,38 | 960,35                | 617,92                      | 281,81 | 899,74                | -2,3340544                  |
| 15     | 48,97                            | 48,81                           | 0,2692                   | 0,5601                  | 503,95                      | 395,79 | 899,74                | 502,26                      | 396,40 | 898,66                | -0,1501553                  |
| 16     | 48,81                            | 48,25                           | 0,2499                   | 0,5527                  | 496,66                      | 401,99 | 898,66                | 491,05                      | 402,61 | 893,66                | -0,3425248                  |
| 17     | 48,25                            | 47,64                           | 0,1975                   | 0,5314                  | 474,86                      | 418,80 | 893,66                | 468,82                      | 419,44 | 888,27                | -0,3770492                  |
| 18     | 47,64                            | 47,03                           | 0,1377                   | 0,5069                  | 450,26                      | 438,00 | 888,27                | 444,53                      | 438,68 | 883,21                | -0,3773778                  |
| 19     | 47,03                            | 45,61                           | 0,0760                   | 0,4817                  | 425,43                      | 457,77 | 883,21                | 412,56                      | 458,48 | 871,04                | -0,8080178                  |
| 20     | 45,61                            | 45,02                           | -0,0636                  | 0,4242                  | 369,45                      | 501,58 | 871,04                | 364,71                      | 502,35 | 867,06                | -0,3802541                  |
| 21     | 45,02                            | 44,90                           | -0,1308                  | 0,3974                  | 344,59                      | 522,47 | 867,06                | 343,65                      | 523,28 | 866,92                | -0,1353169                  |
| 22     | 44,90                            | 42,94                           | -0,1556                  | 0,3883                  | 336,58                      | 530,34 | 866,92                | 321,86                      | 531,15 | 853,01                | -1,144715                   |
| 23     | 42,94                            | 40,98                           | -0,3687                  | 0,3066                  | 261,54                      | 591,47 | 853,01                | 249,61                      | 592,39 | 842,00                | -1,1910106                  |
| 24     | 40,98                            | 42,53                           | -0,5981                  | 0,2287                  | 192,54                      | 649,45 | 842,00                | 199,83                      | 650,45 | 850,28                | 0,82295173                  |
| 25     | 42,53                            | 40,30                           | -0,4484                  | 0,2796                  | 237,73                      | 612,55 | 850,28                | 225,27                      | 613,49 | 838,76                | -1,3636645                  |
| 26     | 40,30                            | 42,74                           | -0,7222                  | 0,1929                  | 161,84                      | 676,92 | 838,76                | 171,65                      | 677,97 | 849,62                | 1,3464205                   |
| 27     | 42,74                            | 44,48                           | -0,4649                  | 0,2756                  | 234,18                      | 615,44 | 849,62                | 243,71                      | 616,39 | 860,09                | 0,88905381                  |
| 28     | 44,48                            | 41,77                           | -0,2906                  | 0,3405                  | 292,88                      | 567,21 | 860,09                | 275,03                      | 568,09 | 843,12                | -1,5803926                  |
| 29     | 41,77                            | 43,04                           | -0,6240                  | 0,2248                  | 189,53                      | 653,59 | 843,12                | 195,27                      | 654,60 | 849,86                | 0,64705773                  |
| 30     | 43,04                            | 41,25                           | -0,4976                  | 0,2671                  | 227,02                      | 622,85 | 849,86                | 217,61                      | 623,81 | 841,41                | -1,086562                   |
| 31     | 41,25                            | 35,67                           | -0,7439                  | 0,1909                  | 160,65                      | 680,76 | 841,41                | 138,92                      | 681,81 | 820,73                | -3,563473                   |
| 32     | 35,67                            | 35,93                           | -1,5565                  | 0,0438                  | 35,99                       | 784,74 | 820,73                | 36,25                       | 785,95 | 822,20                | 0,10695658                  |
| 33     | 35,93                            | 34,63                           | -1,5697                  | 0,0430                  | 35,32                       | 786,88 | 822,20                | 34,04                       | 788,09 | 822,13                | -0,9597738                  |
| 34     | 34,63                            | 33,13                           | -1,8363                  | 0,0236                  | 19,38                       | 802,75 | 822,13                | 18,54                       | 803,98 | 822,52                | -1,1353404                  |
| 35     | 33,13                            | 33,03                           | -2,1620                  | 0,0104                  | 8,56                        | 813,97 | 822,52                | 8,53                        | 815,22 | 823,75                | -0,1377884                  |
| 36     | 33,03                            | 32,34                           | -2,2601                  | 0,0081                  | 6,64                        | 817,11 | 823,75                | 6,50                        | 818,37 | 824,87                | -0,5782022                  |
| 37     | 32,34                            | 33,52                           | -2,4806                  | 0,0043                  | 3,58                        | 821,29 | 824,87                | 3,71                        | 822,55 | 826,27                | 0,79368078                  |
| 38     | 33,52                            | 33,98                           | -2,3524                  | 0,0064                  | 5,28                        | 820,99 | 826,27                | 5,35                        | 822,25 | 827,60                | 0,25657073                  |
| 39     | 33,98                            | 34,28                           | -2,3669                  | 0,0062                  | 5,15                        | 822,46 | 827,60                | 5,19                        | 823,72 | 828,91                | 0,14389116                  |
| 40     | 34,28                            | 35,73                           | -2,4186                  | 0,0054                  | 4,51                        | 824,41 | 828,91                | 4,70                        | 825,67 | 830,37                | 0,92413075                  |
| 41     | 35,73                            | 34,13                           | -2,2441                  | 0,0090                  | 7,49                        | 822,88 | 830,37                | 7,15                        | 824,15 | 831,31                | -1,1663406                  |
| 42     | 34,13                            | 36,79                           | -2,7188                  | 0,0023                  | 1,89                        | 829,42 | 831,31                | 2,03                        | 830,70 | 832,73                | 1,73176431                  |
| 43     | 36,79                            | 37,65                           | -2,2847                  | 0,0083                  | 6,93                        | 825,80 | 832,73                | 7,10                        | 827,07 | 834,16                | 0,4853905                   |
| 44     | 37,65                            | 40,62                           | -2,2476                  | 0,0094                  | 7,82                        | 826,34 | 834,16                | 8,44                        | 827,62 | 836,05                | 1,75913556                  |
| 45     | 40,62                            | 41,89                           | -1,7336                  | 0,0340                  | 28,45                       | 807,60 | 836,05                | 29,34                       | 808,64 | 838,19                | 0,66957568                  |
| 46     | 41,89                            | 39,78                           | -1,5944                  | 0,0468                  | 39,21                       | 798,98 | 838,19                | 37,23                       | 800,21 | 837,44                | -1,3109161                  |
| 47     | 39,78                            | 41,31                           | -2,3277                  | 0,0080                  | 6,69                        | 830,75 | 837,44                | 6,95                        | 832,03 | 838,98                | 0,83742066                  |
| 48     | 41,31                            | 40,73                           | -2,1779                  | 0,0122                  | 10,25                       | 828,72 | 838,98                | 10,11                       | 830,00 | 840,11                | -0,4142782                  |
| 49     | 40,73                            | 41,34                           | -2,7473                  | 0,0025                  | 2,06                        | 838,04 | 840,11                | 2,10                        | 839,33 | 841,43                | 0,29072226                  |
| 50     | 41,34                            | 38,55                           | -3,1510                  | 0,0007                  | 0,57                        | 840,86 | 841,43                | 0,53                        | 842,16 | 842,69                | -1,7456387                  |
| 51     | 38,55                            | 39,45                           | -6,1903                  | 0,0000                  | 0,00                        | 842,69 | 842,69                | 0,00                        | 843,98 | 843,98                | 0,48452989                  |
| 52     | 39,45                            |                                 |                          |                         |                             |        | 843,98                |                             |        |                       |                             |

Суть всех приведенных в таблице столбцов уже разъяснялась ранее. Исключение составляет последний столбец, содержащий последовательность случайных чисел из стандартного нормального распределения. Курс акций в конце каждой недели определяется именно этими числами. В нашем примере курс акций, равный 59,72 в конце нулевой недели, определяется гипотезой логнормальности, как это было показано в главе 15:  $S_t = S_{t-1} \exp \{ \mu \Delta t + \sigma Z \sqrt{t} \}$ . Как уже говорилось в главе 15, эти стандартные нормальные отклонения генерировались командой Excel Сервис⇒Анализ данных⇒Генерация случайных чисел (Tools⇒Data Analysis⇒Random Number Generation).

На графике этот результат выглядит так, как показано ниже.



На этом конкретном графике курс акций (отложенный на левой оси) убывал в течение всего года, так что схема страхования портфеля, показанная сплошной линией, дает больший доход, чем обычная схема работы с акциями. Фактически в этой схеме неявно используется опцион “пут”.

В данном примере курсовая стоимость акции упала намного ниже 50 долл. Как указывалось в разделе 17.3, в момент времени 0 схема страхования портфеля эквивалентна приобретению 17,13 акции и опционов на продажу всех этих акций. В нашей модели стоимость портфеля никогда не опускается ниже примерно 820 долл. ( $\approx 17,13 \times 47,87$  долл.), хотя курс акций иногда падает почти до 32 долл. Согласно свойству 3 из раздела 17.4, к концу года по нашей схеме страхования весь капитал будет вложен в облигации; к 51-й неделе в акции не будет вложено ничего.

Можно запустить расчет модели еще раз и снова построить график выходных данных, изобразив курс акций и общую стоимость портфеля на протяжении года.

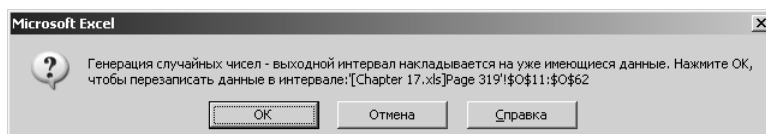


В этом примере схема страхования приводит к тому, что весь капитал к концу года будет вложен в акции (этот результат опять следует из свойства 3 раздела 17.4). Здесь схема со страхованием оказывается дороже схемы без страхования (т.е. постфактум можно сказать, что лучше было бы обойтись без страхования).

С помощью средства Excel Сервис⇒Запись макроса (Tools⇒Record Macro) можно создать макрос, автоматизирующий процесс пересчета модели.

```
Sub Simulation()
' Макрос Simulation для пересчета модели
' Записан 28.10.1999 Шимоном Беннинга
'
Application.SendKeys ("{Enter}")
Application.Run "ATPVBAEN.XLA!Random", _
ActiveSheet.Range("$O$11:$O$62"), , _
, 2, , 0, 1
End Sub
```

Первая строка макроса, Application.SendKeys ("{Enter}"), добавлена потому, что при каждом запуске генератора случайных чисел на экране появляется диалоговое окно, показанное ниже.



В первой строке макроса в программу посылается нажатие клавиши <Enter> с целью ответить утвердительно и закрыть это окно, тем самым автоматически введя данные в заданный диапазон.

## 17.6. Страхование общего дохода от портфеля

До сих пор мы занимались только задачей построения искусственных опционов “пут” по одному на каждую акцию. В несколько другой постановке задача выглядит так: построить такой портфель из опционов “пут” и акций, который бы гарантировал заданную *общую* сумму дохода на *общую* сумму начального капиталовложения. Такая задача возникает обычно в следующей ситуации.

Имеется капитал для вложения в сумме 1000 долл. и требуется гарантировать, что через год он будет составлять не менее  $1000z$ , где  $z$  — некоторое число, обычно от 0 до 1. Если, например,  $z$  равно 0,93, то это означает, что капитал через год должен составлять не менее 930 долл.<sup>3</sup>. Вы хотите вложить капитал в акции с текущим курсом  $S_0$  и в опцион “пут” на продажу этих акций с ценой исполнения  $X$ . Количество опционов должно равняться количеству акций. Зная  $X$  и  $S_0$ , можно рассчитать цену опциона  $P(S_0, X)$ . Для реализации этой схемы необходимо приобрести  $\alpha$  акций, где

$$\alpha = \frac{1000}{S_0 + P(S_0, X)}.$$

Поскольку приобретено  $\alpha$  акций и  $\alpha$  опционов на их продажу по цене исполнения  $X$ , минимальный доход от продажи портфеля составит  $\alpha X$ . Необходимо, чтобы эта сумма равнялась  $1000z$ , откуда имеем  $\alpha = 1000z / X$ . Таким образом, минимальный требуемый доход гарантируется при условии

$$S_0 + P(S_0, X) = \frac{X}{z}.$$

Подставим сюда формулу Блэка–Скоулза для оценивания опциона “пут” при  $T = 1$  и получим

$$\begin{aligned} \frac{X}{z} &= S_0 + P(S_0, X) = S_0 - S_0 N(-d_1) + X e^{-r} N(-d_2) = \\ &= S_0 [1 - N(-d_1)] + X e^{-r} N(-d_2) = S_0 N(d_1) + X e^{-r} N(-d_2) = \\ &= S_0 N(d_1) + X e^{-r} N(\sigma - d_1). \end{aligned}$$

Здесь обозначено

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/X) + (r + \sigma^2/2)}{\sigma}, \quad d_2 = d_1 - \sigma.$$

Таким образом, чтобы найти  $X$ , нужно решить относительно него следующее уравнение:

<sup>3</sup> Как будет показано позже, можно построить схему страхования и для случая  $z > 1$  (но только до некоторого предела).

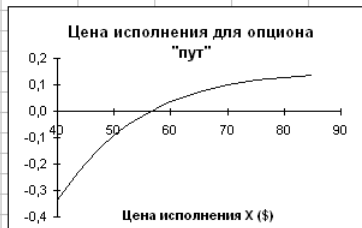
$$\frac{X}{z} = S_0 N(d_1) + X e^{-r} N(\sigma - d_1).$$

Разделив это уравнение на  $X$  и перенося все его члены в одну часть, получим

$$\frac{1}{z} - \frac{S_0}{X} N(d_1) - e^{-r} N(\sigma - d_1) = 0.$$

Ниже приведено решение этого уравнения на листе таблицы Excel. С помощью таблицы данных там построен график левой части уравнения; решение получаем в той точке, в которой график пересекает ось  $x$ . Эта точка соответствует искусственно построенной цене исполнения  $X$  опциона “пут” при  $S_0 = 56$ ,  $\sigma = 30\%$ ,  $r = 8\%$ ,  $T = 1$  и  $z = 93\%$ .

|    | A                                               | B      | C                                                                               | D  | E       | F      | G | H | I | J |
|----|-------------------------------------------------|--------|---------------------------------------------------------------------------------|----|---------|--------|---|---|---|---|
| 1  | <b>РАСЧЕТ ЦЕНЫ ИСПОЛНЕНИЯ ДЛЯ ОПЦИОНА “ПУТ”</b> |        |                                                                                 |    |         |        |   |   |   |   |
| 2  |                                                 |        |                                                                                 |    |         |        |   |   |   |   |
| 3  | z                                               | 0,9300 | Сумма страховки                                                                 |    |         |        |   |   |   |   |
| 4  |                                                 |        |                                                                                 |    |         |        |   |   |   |   |
| 5  | S                                               | 56     | Текущий курс акций                                                              |    |         |        |   |   |   |   |
| 6  | X                                               | 57     | Цена исполнения                                                                 |    |         |        |   |   |   |   |
| 7  | T                                               | 1      | Срок погашения (в годах)                                                        |    |         |        |   |   |   |   |
| 8  | r                                               | 8,00%  | Безрисковая процентная ставка                                                   |    |         |        |   |   |   |   |
| 9  | Сигма                                           | 30%    | Волатильность акции                                                             |    |         |        |   |   |   |   |
| 10 | d <sub>1</sub>                                  | 0,3577 | <-- (LN(S/X)+(r+0.5*sigma^2)*T)/(sigma*КОРЕНЬ(T))                               |    |         |        |   |   |   |   |
| 11 | d <sub>2</sub>                                  | 0,0577 | <-- d1 - sigma*КОРЕНЬ(T)                                                        |    |         |        |   |   |   |   |
| 12 |                                                 |        |                                                                                 |    |         |        |   |   |   |   |
| 13 | N(d <sub>1</sub> )                              | 0,6397 | <-- Используется формула НОРМСТРАСП(d <sub>1</sub> )                            |    |         |        |   |   |   |   |
| 14 | N(d <sub>2</sub> )                              | 0,5230 | <-- Используется формула НОРМСТРАСП(d <sub>2</sub> )                            |    |         |        |   |   |   |   |
| 15 |                                                 |        |                                                                                 |    |         |        |   |   |   |   |
| 16 | Уравнение                                       | 0,0065 | <-- 1/z - S <sub>0</sub> /X*N(d <sub>1</sub> )-exp(-r*T)*(1-N(d <sub>2</sub> )) |    |         |        |   |   |   |   |
| 17 |                                                 |        |                                                                                 |    |         |        |   |   |   |   |
| 18 |                                                 |        | <b>Таблица данных</b>                                                           |    |         |        |   |   |   |   |
| 19 |                                                 |        | заголовков -->                                                                  |    |         | 0,0065 |   |   |   |   |
| 20 |                                                 |        | Расчет                                                                          | 40 | -0,3375 |        |   |   |   |   |
| 21 |                                                 |        | цены                                                                            | 45 | -0,1960 |        |   |   |   |   |
| 22 |                                                 |        | исполнения                                                                      | 50 | -0,0923 |        |   |   |   |   |
| 23 |                                                 |        | опциона “пут”                                                                   | 55 | -0,0172 |        |   |   |   |   |
| 24 |                                                 |        |                                                                                 | 60 | 0,0363  |        |   |   |   |   |
| 25 |                                                 |        |                                                                                 | 65 | 0,0738  |        |   |   |   |   |
| 26 |                                                 |        |                                                                                 | 70 | 0,0996  |        |   |   |   |   |
| 27 |                                                 |        |                                                                                 | 75 | 0,1172  |        |   |   |   |   |
| 28 |                                                 |        |                                                                                 | 80 | 0,1291  |        |   |   |   |   |
| 29 |                                                 |        |                                                                                 | 85 | 0,1370  |        |   |   |   |   |
| 30 |                                                 |        |                                                                                 |    |         |        |   |   |   |   |



Как видно, левая часть уравнения является монотонно возрастающей функцией  $X$ . В таком случае точное решение  $X = 56,4261$  можно найти с помощью модуля поиска решения (Сервис⇒Поиск решения или Tools⇒Solver).

|    | A                                        | B      | C       | D | E | F | G | H | I | J |
|----|------------------------------------------|--------|---------|---|---|---|---|---|---|---|
| 1  | РАСЧЕТ ЦЕНЫ ИСПОЛНЕНИЯ ДЛЯ ОПЦИОНА "ПУТ" |        |         |   |   |   |   |   |   |   |
| 2  |                                          |        |         |   |   |   |   |   |   |   |
| 3  | z                                        | 0,9300 | Сумма   |   |   |   |   |   |   |   |
| 4  |                                          |        |         |   |   |   |   |   |   |   |
| 5  | S                                        | 56     | Текущ   |   |   |   |   |   |   |   |
| 6  | X                                        | 57     | Цена    |   |   |   |   |   |   |   |
| 7  | T                                        | 1      | Срок    |   |   |   |   |   |   |   |
| 8  | r                                        | 8,00%  | Безри   |   |   |   |   |   |   |   |
| 9  | Сигма                                    | 30%    | Волат   |   |   |   |   |   |   |   |
| 10 | d <sub>1</sub>                           | 0,3577 | <-- (L  |   |   |   |   |   |   |   |
| 11 | d <sub>2</sub>                           | 0,0577 | <-- d1  |   |   |   |   |   |   |   |
| 12 |                                          |        |         |   |   |   |   |   |   |   |
| 13 | N(d <sub>1</sub> )                       | 0,6397 | <-- Ис  |   |   |   |   |   |   |   |
| 14 | N(d <sub>2</sub> )                       | 0,5230 | <-- Ис  |   |   |   |   |   |   |   |
| 15 |                                          |        |         |   |   |   |   |   |   |   |
| 16 | Уравнение                                | 0,0065 | <-- 1/z |   |   |   |   |   |   |   |
| 17 |                                          |        |         |   |   |   |   |   |   |   |

Поиск решения

Установить целевую ячейку:

Равной: ☐ максимальному значению ☒ значению:

☐ минимальному значению

Изменяя ячейки:

Ограничения:

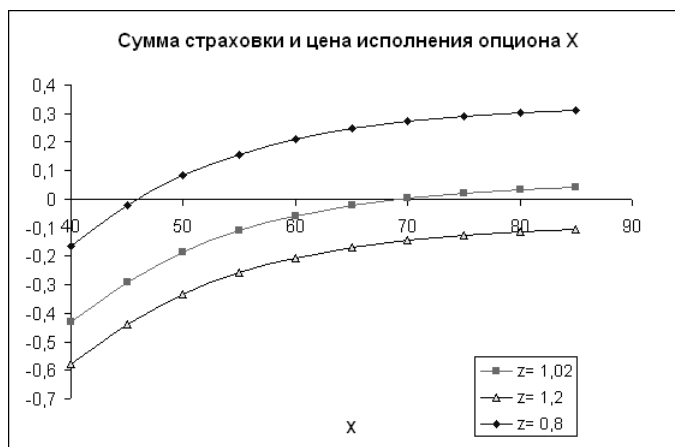
|    | A                                        | B        | C                                                                               | D | E | F | G |
|----|------------------------------------------|----------|---------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|
| 1  | РАСЧЕТ ЦЕНЫ ИСПОЛНЕНИЯ ДЛЯ ОПЦИОНА "ПУТ" |          |                                                                                 |   |   |   |   |
| 2  |                                          |          |                                                                                 |   |   |   |   |
| 3  | z                                        | 0,9300   | Сумма страховки                                                                 |   |   |   |   |
| 4  |                                          |          |                                                                                 |   |   |   |   |
| 5  | S                                        | 56       | Текущий курс акций                                                              |   |   |   |   |
| 6  | X                                        | 56,42617 | Цена исполнения                                                                 |   |   |   |   |
| 7  | T                                        | 1        | Срок погашения (в годах)                                                        |   |   |   |   |
| 8  | r                                        | 8,00%    | Безрисковая процентная ставка                                                   |   |   |   |   |
| 9  | Сигма                                    | 30%      | Волатильность акции                                                             |   |   |   |   |
| 10 | d <sub>1</sub>                           | 0,3914   | <-- (LN(S/X)+(r+0.5*sigma*2)*T)/(sigma*КОРЕНЬ(T))                               |   |   |   |   |
| 11 | d <sub>2</sub>                           | 0,0914   | <-- d1 - sigma*КОРЕНЬ(T)                                                        |   |   |   |   |
| 12 |                                          |          |                                                                                 |   |   |   |   |
| 13 | N(d <sub>1</sub> )                       | 0,6522   | <-- Используется формула НОРМСТРАСП(d <sub>1</sub> )                            |   |   |   |   |
| 14 | N(d <sub>2</sub> )                       | 0,5364   | <-- Используется формула НОРМСТРАСП(d <sub>2</sub> )                            |   |   |   |   |
| 15 |                                          |          |                                                                                 |   |   |   |   |
| 16 | Уравнение                                | 0,0000   | <-- 1/z - S <sub>0</sub> /X*N(d <sub>1</sub> )-exp(-r*T)*(1-N(d <sub>2</sub> )) |   |   |   |   |
| 17 |                                          |          |                                                                                 |   |   |   |   |

### 17.6.1. Страхование с повышенной суммой

Что будет, если повысить сумму, на которую мы хотим застраховать портфель? Можно ли таким образом получить больше, чем изначально вложено? При подъеме страховой суммы неявно закладываемая в сделку цена опциона "пут" также должна возрастать. Поэтому, страхуясь на большую сумму, приходится тратить более крупную долю нашего капитала в 1000 долл. на опцион "пут" (страхование) и меньшую долю на собственно акции (имеющие потенциал роста курсовой стоимости).

Можно ли застраховаться на сумму более крупную, чем сумма самого капиталовложения? Другими словами, можно ли установить  $z > 1$ ? Таким образом, мы ставим задачу нахождения такой страховой суммы, при которой гарантированно получаем *больше*, чем вложили вначале. Относительно несложный расчет показывает, что действительно можно выбрать  $z > 1$  при условии, что  $z \leq 1 + r$ . Итак, по методу страхования портфеля опционом нельзя гарантировать доход выше, чем доход по безрисковой ставке!

На следующем графике наглядно показаны ответы на оба вопроса, поставленных в начале раздела.



Как видно на графике, можно застраховаться с  $z = 1,02$ , т.е. гарантировать получение не менее 1020 долл. при начальном вложении капитала в сумме 1000 долл. Но на сумму, соответствующую  $z = 1,2$ , застраховаться невозможно, поскольку ось  $x$  и соответствующая кривая не пересекаются.

## 17.7. Опционы, включенные в стоимость портфеля

До сих пор мы рассматривали формирование опционов на продажу с целью страхования портфеля ценных бумаг. Теперь поставим обратную задачу — рассмотрим ситуацию, в которой нам предлагают купить пакет или портфель, содержащий уже включенный в него опцион “пут”. Ставится задача вычисления реальной стоимости обеспечивающего актива, входящего в состав пакета.

Опционы, включенные в стоимость пакета, часто встречаются на практике. Рассмотрим ситуацию, в которой вам предлагают приобрести актив плюс опцион на право перепродать этот актив продавцу. На ум приходит несколько вариантов такого рода: безотзывные предложения фирмам об их приобретении, коммерческие предложения типа “гарантируется качество или возврат денег”, а также торговля компьютерной техникой, в которой можно вернуть приобретенный товар, но необходимо уплатить 15% “пошлины за возврат”. (Применение этих идей к реализации сделок с приобретением фирм можно посмотреть в работе Bhagat, Brickley, Loewenstein, 1987.)

Если бы удалось узнать дисперсию распределения стоимости актива, то его истинную стоимость можно было бы вывести из ценового предложения. Не имея такой информации, можно определить геометрическое место точек, описывающих возможные стандартные отклонения и значения истинной стоимости актива. С этой целью обозначим  $V_a$  истинную стоимость актива за вычетом всех возможных опционов и цен выкупа, а  $V_p$  — стоимость опциона “пут”. Покупную цену обозначим как  $Y$  (разумеется, она включает в себя и стоимость опциона), а цену, за которую можно вернуть свои деньги, —  $X$ . Тогда имеет место соотношение



$$Y = V_a + V_p.$$

Если предположить, что опцион оценивается по формуле Блэка–Скоулза, то будем иметь

$$V_p = -V_a N(-d_1) + X e^{-rT} N(\sigma\sqrt{T} - d_1).$$

Здесь введено обозначение

$$d_1 = \frac{\ln(V_a/X) + \left(rT + \frac{\sigma}{2}\sqrt{T}\right)}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Следовательно, для решения задачи необходимо найти значения  $\sigma$  и  $V_a$ , которые одновременно являются решением уравнения

$$Y = V_a N(d_1) + X e^{-rT} N(\sigma\sqrt{T} - d_1).$$

Правая часть этого уравнения возрастает как по  $\sigma$ , так и по  $V_a$ .

Приведем пример. Вам предлагают приобрести подверженный риску актив за 100 долл. Если вы будете неудовлетворены, актив можно вернуть в течение года, получив назад 85 долл. (т.е. 15 долл. взимаются в качестве “пошлины за возврат”). Сколько же в действительности стоит такой актив? Предполагая, что значение  $\sigma$  для этого актива составляет 30%, решаем следующее уравнение при  $Y = 100$ ,  $\sigma = 30\%$ ,  $T = 1$ ,  $r = 10\%$  и  $X = 85$ :

$$Y = V_a N(d_1) + X e^{-rT} N(\sigma\sqrt{T} - d_1).$$

Ответ получен далее на листе таблицы Excel с помощью поиска решения (Сервис⇒Поиск решения или Tools⇒Solver). Найденная истинная стоимость актива составляет  $V_a = 96,71$  долл.

|    | A                                       | B        | C                                                    | D | E | F | G |
|----|-----------------------------------------|----------|------------------------------------------------------|---|---|---|---|
| 1  | ОПЦИОН, ВКЛЮЧЕННЫЙ В СТОИМОСТЬ ПОРТФЕЛЯ |          |                                                      |   |   |   |   |
| 2  |                                         |          |                                                      |   |   |   |   |
| 3  | V <sub>a</sub>                          | 96,70586 | Истинная стоимость актива                            |   |   |   |   |
| 4  | X                                       | 85       | Гарантированная выручка                              |   |   |   |   |
| 5  | r                                       | 10,00%   | Безрисковая процентная ставка                        |   |   |   |   |
| 6  | T                                       | 1        | Срок погашения                                       |   |   |   |   |
| 7  | Сигма                                   | 30%      | Волатильность                                        |   |   |   |   |
| 8  | d <sub>1</sub>                          | 0,9134   | <-- (LN(S/X)+(r+0.5*sigma^2)*T)/(sigma*КОРЕНЬ(T))    |   |   |   |   |
| 9  | d <sub>2</sub>                          | 0,6134   | <-- d1 - sigma*КОРЕНЬ(T)                             |   |   |   |   |
| 10 |                                         |          |                                                      |   |   |   |   |
| 11 | N(d <sub>1</sub> )                      | 0,8195   | <-- Используется формула НОРМСТРАСП(d <sub>1</sub> ) |   |   |   |   |
| 12 | N(d <sub>2</sub> )                      | 0,7302   | <-- Используется формула НОРМСТРАСП(d <sub>2</sub> ) |   |   |   |   |
| 13 |                                         |          |                                                      |   |   |   |   |
| 14 | Цена опциона                            | 3,29     | <-- =B3*(1-B11)+B4*EXP(-B5*B6)*(1-B12)               |   |   |   |   |
| 15 | Цена опциона и актива                   | 100,00   | <-- =B3+B14                                          |   |   |   |   |
| 16 |                                         |          |                                                      |   |   |   |   |

## Упражнения

1. Как управляющий инвестициями вы желаете вложить капитал в актив с  $\sigma = 40\%$ . Для этого желательно создать опцион “пут” на это капиталовложение, чтобы в конце года потенциальные убытки составили не более 5%. Поскольку на данный актив опционов “пут” не существует, вы планируете создать синтетический опцион, задействовав динамическую схему инвестирования — приобретение портфеля, состоящего из динамически меняющихся долей подверженного риску актива и безрисковых облигаций. Пусть процентная ставка дохода составляет 6%; какую долю первоначального вложения следует поместить в портфель и в безрисковые облигации?
2. Промоделируйте схему упражнения 1, предполагая, что балансировка портфеля выполняется еженедельно.
3. Вернемся к численному примеру из раздела 17.7. Напишите функцию на языке VBA для нахождения истинной стоимости актива  $V_a$ . (Подсказка: воспользуйтесь методом деления пополам.) Затем с помощью этой функции постройте график, отражающий компромиссное соотношение между стоимостью актива и неустойчивостью его конъюнктуры (*волатильностью*), т.е. стандартным отклонением логарифмической доходности  $\sigma$ .
4. Вам предлагают приобрести часть пакета акций некоторой фирмы. Продавец запрашивает 55 долл. за акцию, одновременно предлагая возможность выкупа акций через полгода по 50 долл. за акцию. Определите истинную стоимость акций, предполагая  $\sigma$  логарифмического дохода по акциям равным 80%. Безрисковая ставка доходности составляет 10%.

---

# 18 Опциональные сделки

---

## 18.1. Введение

В стандартном анализе предполагаемых капиталовложений на основе чистой приведенной стоимости (ЧПС) оценивание финансового проекта выполняется путем дисконтирования ожидаемых от него финансовых потоков по ставке стоимости капитала с поправкой на риск. На данный момент это наиболее распространенный метод экономического анализа намечаемых капиталовложений, будь то проекты присоединения компаний или закупки оборудования. Однако в стандартном анализе по ЧПС не учитывается *гибкость принятия решений*, присущая инвестиционной деятельности. Сложность этих процессов частично заключается в том, что принятые решения можно менять по ходу дела в зависимости от обстоятельств.

Приведем два примера.

1. Фирма рассматривает возможность замены части своего оборудования агрегатами новой модели. Вместо замены сразу всех агрегатов фирма может вначале заменить только один. В зависимости от производительности нового агрегата фирма принимает решение о замене остального оборудования. Возможность такого анализа промежуточных результатов и динамического принятия решения не учитывается в стандартном анализе по ЧПС. Фактически эта сделка аналогична опциону “колл” (опциону на покупку), поэтому ее можно назвать “опционом на ожидание” или “опционом на модернизацию”<sup>1</sup>.
2. Фирма рассматривает возможность капиталовложения в проект, финансовые поступления от которого (пока неопределенные) ожидаются только через некоторое время. Одним из вариантов, не учитываемых в рамках метода оценивания по ЧПС, является *отказ от проекта*, если отдача от него окажется недостаточной. Этот вариант сделки аналогичен опциону “пут”, неявно закладываемому во многие проекты, и потому называется *опционом на отказ от проекта* (*abandonment option*) или иногда *опционом на сокращение масштаба проекта* (*option to contract scale*).

В практике хозяйствования встречается множество других *опциональных сделок* такого характера. В основном труде по оцениванию опциональных сделок, книге Trigeorgis (1996), перечисляются следующие наиболее распространенные.

---

<sup>1</sup> Двусмысленность оригинального текста состоит в том, что слово *option* по-английски означает как “возможность, вариант выбора, право выбора”, так и финансовый термин “опцион” (фактически имеющий то же значение, только в более узком контексте). Вот почему название главы в оригинале — “Real options” — не вполне корректно передавалось бы выражением “реальные опционы”. При чтении этой главы следует всегда помнить о существовании двух указанных значений. — *Примеч. пер.*

- Опцион на отсрочку или ожидание при разработке природного ресурса или постройке завода.
- Опцион на поэтапное продолжение (поэтапное инвестирование): на каждом этапе работ проводится финансово-экономический анализ эффективности капиталовложений, и проект прекращается либо продолжается по его результатам.
- Опцион на изменение масштаба операций (расширение, сокращение, замораживание или повторный запуск).
- Опцион на прекращение проекта.
- Опцион на изменение статей расходов или характера продукции.
- Опцион роста: раннее вложение капитала в проект содержит в себе опцион “выхода на рынок” в более позднее время.

Распознавание опционального характера сделок — это важное дополнение к методике анализа по ЧПС. Одна из трудностей при работе с такими опционами — это вычислительные трудности при их оценивании. Моделирование и оценивание подобных опционов гораздо труднее, чем стандартных финансовых потоков. Примеры, представленные в этой главе, посвящены демонстрации этих трудностей. Нередко наличие опционального характера в сделке бывает важно распознать затем, чтобы доказать, что метод ЧПС дает неправильную оценку стоимости проекта, поскольку игнорирует заложенные в нем дополнительные возможности. Обычно мы будем приходить к выводу, что наличие опциона *повышает* стоимость проекта, и поэтому метод ЧПС *занижает* его реальную стоимость.

## 18.2. Простой пример опциона на продолжение

В этом разделе представлен простой пример опциона на продолжение работ. Рассмотрим корпорацию ABC Co., имеющую в своем распоряжении шесть гипотетических производственных агрегатов. Компания рассматривает возможность замены всех устаревших машин новыми, которые стоят 1000 долл. за штуку. Срок службы нового агрегата — пять лет. Ожидаются следующие финансовые потоки в связи с новой машиной<sup>2</sup>.

|                                                | A | B     | C   | D   | E   | F   | G   |
|------------------------------------------------|---|-------|-----|-----|-----|-----|-----|
| 3 Год                                          |   | 0     | 1   | 2   | 3   | 4   | 5   |
| 4 Денежные потоки, связанные с одним агрегатом |   | -1000 | 220 | 300 | 400 | 200 | 150 |

Финансовый аналитик, работающий над проектом модернизации производства, определил стоимость капитала в этом проекте равной 12%. Используя ожидаемые финансовые потоки и ставку 12%, аналитик делает заключение, что замена одной старой машины на новую невыгодна, поскольку ЧПС при этом отрицательна:

<sup>2</sup> Это разностный поток средств от замены старого агрегата на новый. В расчет включены налоги, прирост амортизации и продажа старого агрегата.

$$-1000 + \frac{220}{1,12} + \frac{300}{(1,12)^2} + \frac{400}{(1,12)^3} + \frac{200}{(1,12)^4} + \frac{150}{(1,12)^5} = -67,48.$$

И в этот момент делается хитрый финт (вводится в оборот опцион). Главный механик, заведующий парком технологического оборудования, заявляет примерно следующее: “Я хочу поработать с новым агрегатом в течение года. Если к концу года эксперимент окажется успешным, я заменю и остальные пять агрегатов на новые”.

Изменит ли такой план наши предыдущие отрицательные выводы относительно замены одного агрегата? Ответ на этот вопрос — да. Чтобы в этом убедиться, важно понять, что перед нами комплексное предложение.

- Замена одного агрегата в настоящее время. ЧПС этой операции составляет  $-67,48$ .
- *Опцион* (предоставляемая возможность) на замену еще пяти агрегатов по прошествии года. Пусть безрисковая ставка дохода равна 6%. Тогда такую возможность можно рассматривать как опцион “колл” на покупку актива, имеющего следующую текущую стоимость:

$$S = \frac{220}{1,12} + \frac{300}{(1,12)^2} + \frac{400}{(1,12)^3} + \frac{200}{(1,12)^4} + \frac{150}{(1,12)^5} = 932,52$$

и цену исполнения  $X = 1000$ . Разумеется, такой опцион “колл” можно будет исполнить только в том случае, если приобрести первый агрегат в настоящее время<sup>3</sup>.

Предположим, мы считаем модель Блэка–Скоулза (Black–Scholes) пригодной для оценки этого опциона. Тогда имеем следующее.

|    | A                                                           | B       | C                                                       | D   | E   | F   | G   |
|----|-------------------------------------------------------------|---------|---------------------------------------------------------|-----|-----|-----|-----|
| 1  | <b>ОПЦИОН НА ПРОДОЛЖЕНИЕ</b>                                |         |                                                         |     |     |     |     |
| 2  |                                                             |         |                                                         |     |     |     |     |
| 3  | Год                                                         | 0       | 1                                                       | 2   | 3   | 4   | 5   |
| 4  | Денежные потоки, связанные с одним агрегатом                | -1000   | 220                                                     | 300 | 400 | 200 | 150 |
| 5  |                                                             |         |                                                         |     |     |     |     |
| 6  | Ставка дисконтирования в связи с модернизацией              | 12%     |                                                         |     |     |     |     |
| 7  | Безрисковая ставка дисконтирования                          | 6%      |                                                         |     |     |     |     |
| 8  | ЧПС одного агрегата                                         | -67,48  |                                                         |     |     |     |     |
| 9  |                                                             |         |                                                         |     |     |     |     |
| 10 | Количество машин,купаемых в следующем году                  | 5       |                                                         |     |     |     |     |
| 11 | Стоимость опциона на приобретение одного агрегата через год | 143,98  | <-- =B24                                                |     |     |     |     |
| 12 | ЧПС всего проекта                                           | 652,39  | <-- =B8+B10*B11                                         |     |     |     |     |
| 13 |                                                             |         |                                                         |     |     |     |     |
| 14 | <b>Формула Блэка-Скоулза для цены опциона</b>               |         |                                                         |     |     |     |     |
| 15 | S                                                           | 932,52  | ПС денежных потоков, связанных с агрегатом              |     |     |     |     |
| 16 | X                                                           | 1000,00 | Цена исполнения = стоимость агрегата                    |     |     |     |     |
| 17 | r                                                           | 6,00%   | Безрисковая процентная ставка                           |     |     |     |     |
| 18 | T                                                           | 1       | Срок погашения (в годах)                                |     |     |     |     |
| 19 | Сигма                                                       | 40%     | <-- Волатильность                                       |     |     |     |     |
| 20 | d <sub>1</sub>                                              | 0,1753  | <-- (LN(S/X)+(r+0.5*sigma^2)*T)/(sigma*КОРЕНЬ(T))       |     |     |     |     |
| 21 | d <sub>2</sub>                                              | -0,2247 | <-- d1 - sigma*КОРЕНЬ(T)                                |     |     |     |     |
| 22 | N(d <sub>1</sub> )                                          | 0,5696  | <-- Используется формула НОРМСТРАСП(d <sub>1</sub> )    |     |     |     |     |
| 23 | N(d <sub>2</sub> )                                          | 0,4111  | <-- Используется формула НОРМСТРАСП(d <sub>2</sub> )    |     |     |     |     |
| 24 | Цена опциона = цена опциона "колл" по БС                    | 143,98  | <-- S*N(d <sub>1</sub> )-X*exp(-r*T)*N(d <sub>2</sub> ) |     |     |     |     |

<sup>3</sup> Фактически тем самым мы оцениваем стоимость обучения!

Как показано в ячейке B12, стоимость всего проекта составляет 652,39 долл.

Вывод таков, что приобрести один агрегат сейчас, зная, что через год у нас будет возможность приобрести еще пять, — это выгодный проект. Критическим моментом здесь является волатильность, или неустойчивость конъюнктуры (стандартное отклонение логарифмического дохода). Чем она меньше (т.е. чем меньше неопределенность), тем менее ценным становится проект.



Последний вывод не слишком неожидан: стоимость проекта в целом основывается на неопределенности фактических финансовых потоков через год от текущего момента. Чем меньше эта неопределенность (выражаемая величиной  $\sigma$ ), тем менее ценен проект.

### 18.2.1. Модель Блэка–Скоулза и оценивание опциональных сделок

Подходит ли модель Блэка–Скоулза для оценивания опциональных сделок? Почти наверняка на этот вопрос следует ответить: “Нет, не подходит”. Но будем реалистами — эта модель пока что является наиболее удобным в численном отношении (т.е. простым) инструментом, которым мы располагаем для оценивания каких бы то ни было опционов. Поэтому она часто используется применительно к реальным сделкам опционального характера; при этом следует понимать, что она дает только некоторое приближение к действительной стоимости опциона. Такова жизнь.

Следует понимать, что гипотезы, лежащие в основе модели Блэка–Скоулза — непрерывность операций, постоянная ставка дохода, невозможность исполнения до назначенного срока, — не позволяют считать ее адекватной в применении к опциональным сделкам, рассматриваемым в этой главе. Во многих случаях в таких сделках встречается то, что в контексте фондового рынка можно было бы назвать выплатой дивидендов по ценным бумагам и/или досрочным исполнением. Ниже приведены два примера такого рода.

- Опцион поэтапного инвестирования, предоставляющий возможность расширить или частично свернуть инвестиционный проект, — это по сути опцион с досрочным исполнением.
- При наличии опциона на отказ от проекта в течение всего времени, пока проект еще находится в работе и инвестиция не отозвана, по проекту выплачиваются “дивиденды” в виде определенных финансовых потоков.

Итак, можно надеяться только на то, что модель Блэка–Скоулза даст некоторое *приближение* к стоимости опциона, заложенного в опциональную сделку.

### 18.3. Опцион на отказ от проекта

Рассмотрим следующий инвестиционный проект.

|    | A                         | B   | C   | D | E   |
|----|---------------------------|-----|-----|---|-----|
| 13 | Финансовые потоки проекта |     |     |   |     |
| 14 |                           |     |     |   |     |
| 15 |                           |     |     |   | 150 |
| 16 |                           |     | 100 |   |     |
| 17 |                           |     |     |   | 80  |
| 18 |                           | -50 |     |   |     |
| 19 |                           |     |     |   | 80  |
| 20 |                           |     | -50 |   |     |
| 21 |                           |     |     |   | -60 |

Как видно, начальная стоимость проекта составляет 50 долл. Через один учетный период проект даст финансовые потоки в объеме либо 100 долл., либо 50 долл., т.е. при определенных обстоятельствах он окажется убыточным. Через два периода проект опять может оказаться убыточным (в самом худшем случае) либо прибыльным.

#### 18.3.1. Оценивание проекта

Чтобы оценить стоимость проекта, воспользуемся ценами возможных состояний из методики оценивания опционов<sup>4</sup>. Цена возможного состояния  $q_u$  — это текущая цена за 1 долл., которую следует заплатить в последующем периоде в “верхнем” состоянии проекта; соответственно цена  $q_d$  — это текущая цена за 1 долл., которую следует заплатить в “нижнем” состоянии. В следующем фрагменте таблицы Excel показаны все необходимые подробности и выведена оценка стоимости проекта в сумме –29,38 долл. (что подразумевает отказ от его реализации).

<sup>4</sup> Вычисление этих цен рассматривается в разделе 18.3.4.

|    | A                                                  | B        | C                                         | D                        | E                                                      | F                                 | G | H | I | J | K      | L          |
|----|----------------------------------------------------|----------|-------------------------------------------|--------------------------|--------------------------------------------------------|-----------------------------------|---|---|---|---|--------|------------|
| 1  | ОЦЕНИВАНИЕ ОПЦИОНА НА ОТКАЗ ОТ ПРОЕКТА             |          |                                           |                          |                                                        |                                   |   |   |   |   |        |            |
| 2  |                                                    |          |                                           |                          |                                                        |                                   |   |   |   |   |        |            |
| 3  | Рыночные данные                                    |          |                                           | Цены возможных состояний |                                                        |                                   |   |   |   |   |        |            |
| 4  | Ожидаемый рыночный доход                           | 12%      |                                           | $q_u$                    | 0,3087                                                 | <-- =(1+B6-B10)/((1+B6)*(B9-B10)) |   |   |   |   |        |            |
| 5  | Сигма рыночного дохода                             | 30%      |                                           | $q_d$                    | 0,6347                                                 | <-- =(B9-1-B6)/((1+B6)*(B9-B10))  |   |   |   |   |        |            |
| 6  | Безрисковая ставка                                 | 6%       |                                           |                          |                                                        |                                   |   |   |   |   |        |            |
| 7  |                                                    |          |                                           |                          |                                                        |                                   |   |   |   |   |        |            |
| 8  | Подъем и понижение рыночного дохода за один период |          |                                           |                          |                                                        |                                   |   |   |   |   |        |            |
| 9  | Вверх                                              | 1,521962 | <-- =EXP(B4+B5), можно принять и EXP(B5)  |                          |                                                        |                                   |   |   |   |   |        |            |
| 10 | Вниз                                               | 0,83527  | <-- =EXP(B4-B5), можно принять и EXP(-B5) |                          |                                                        |                                   |   |   |   |   |        |            |
| 11 |                                                    |          |                                           |                          |                                                        |                                   |   |   |   |   |        |            |
| 12 |                                                    |          |                                           |                          |                                                        |                                   |   |   |   |   |        |            |
| 13 | Финансовые потоки проекта                          |          |                                           |                          | Коэффициенты приведенной стоимости в разных состояниях |                                   |   |   |   |   |        |            |
| 14 |                                                    |          |                                           |                          |                                                        |                                   |   |   |   |   |        |            |
| 15 |                                                    |          |                                           |                          | 150                                                    |                                   |   |   |   |   | 0,0953 | <-- =E4*2  |
| 16 |                                                    |          |                                           |                          | 80                                                     |                                   |   |   |   |   | 0,1959 | <-- =E4*E5 |
| 17 |                                                    |          |                                           |                          | 80                                                     |                                   |   |   |   |   | 0,1959 | <-- =E4*E5 |
| 18 |                                                    |          |                                           |                          | -60                                                    |                                   |   |   |   |   | 0,4028 | <-- =E5*2  |
| 19 |                                                    |          |                                           |                          |                                                        |                                   |   |   |   |   |        |            |
| 20 |                                                    |          |                                           |                          |                                                        |                                   |   |   |   |   |        |            |
| 21 |                                                    |          |                                           |                          |                                                        |                                   |   |   |   |   |        |            |
| 22 |                                                    |          |                                           |                          |                                                        |                                   |   |   |   |   |        |            |
| 23 | Приведенная стоимость                              |          |                                           | =C16*116                 |                                                        |                                   |   |   |   |   |        |            |
| 24 |                                                    |          |                                           |                          | 14,2981                                                | <-- =E15*K15                      |   |   |   |   |        |            |
| 25 |                                                    |          |                                           |                          | 15,6755                                                | <-- =E17*K17                      |   |   |   |   |        |            |
| 26 |                                                    |          |                                           |                          | 15,6755                                                | <-- =E19*K19                      |   |   |   |   |        |            |
| 27 |                                                    |          |                                           |                          | -24,1673                                               | <-- =E21*K21                      |   |   |   |   |        |            |
| 28 |                                                    |          |                                           |                          |                                                        |                                   |   |   |   |   |        |            |
| 29 |                                                    |          |                                           |                          |                                                        |                                   |   |   |   |   |        |            |
| 30 |                                                    |          |                                           |                          |                                                        |                                   |   |   |   |   |        |            |
| 31 |                                                    |          |                                           |                          |                                                        |                                   |   |   |   |   |        |            |
| 32 | Чистая приведенная стоимость                       |          |                                           | -29,38                   | <-- =СУММ(A24:F30)                                     |                                   |   |   |   |   |        |            |

Методика здесь состоит в том, чтобы рассчитать коэффициенты приведенной стоимости для всех состояний (что будет рассмотрено позже) и умножить их на финансовые потоки, соответствующие этим состояниям. Каждый узел дерева дисконтируется по соответствующей цене состояния; например, финансовый поток в размере 80 для даты 2 дисконтируется по ставке  $q_u q_d$ . ЧПС проекта — это сумма всех дисконтированных финансовых потоков плюс начальная стоимость проекта (ячейка C32).

### 18.3.2. Опцион на отказ повышает стоимость

Теперь предположим, что мы имеем возможность отказаться от проекта в день 1, если финансовый поток от него “угрожает” стать равным -50 долл.; далее предположим, что при таком отказе все последующие финансовые потоки равны нулю. Как показано на следующем рисунке, такой *опцион на отказ от проекта* повышает его стоимость.

|    | A                                          | B   | C   | D | E   | F | G                                                | H   | I | J | K        | L |  |
|----|--------------------------------------------|-----|-----|---|-----|---|--------------------------------------------------|-----|---|---|----------|---|--|
| 35 | Денежные потоки в случае отказа от проекта |     |     |   |     |   | Приведенная стоимость в случае отказа от проекта |     |   |   |          |   |  |
| 36 |                                            |     |     |   |     |   |                                                  |     |   |   |          |   |  |
| 37 |                                            |     |     |   | 150 |   |                                                  |     |   |   | 14,29808 |   |  |
| 38 |                                            |     | 100 |   | 80  |   |                                                  |     |   |   | 15,67551 |   |  |
| 39 |                                            |     |     |   |     |   |                                                  |     |   |   |          |   |  |
| 40 |                                            | -50 |     |   |     |   |                                                  | -50 |   |   |          |   |  |
| 41 |                                            |     |     |   | 0   |   |                                                  |     |   |   | 0        |   |  |
| 42 |                                            |     | 0   |   | 0   |   |                                                  |     | 0 |   | 0        |   |  |
| 43 |                                            |     |     |   |     |   |                                                  |     |   |   |          |   |  |
| 44 |                                            |     |     |   |     |   |                                                  |     |   |   |          |   |  |
| 45 |                                            |     |     |   |     |   |                                                  |     |   |   |          |   |  |
| 46 |                                            |     |     |   |     |   |                                                  |     |   |   | 10,85    |   |  |
| 47 |                                            |     |     |   |     |   |                                                  |     |   |   |          |   |  |



Если еще немного подумать над этим вопросом, станет ясно, что иногда бывает выгодно даже *заплатить за то, чтобы отказаться от проекта*. Вот как будет выглядеть картина происходящего, если мы платим 10 долл. за отказ от проекта в его неблагоприятном состоянии (эти расходы можно рассматривать, например, как стоимость закрытия предприятия).

|    | A                                          | B   | C   | D | E   | F | G                                                | H | I        | J | K        | L |
|----|--------------------------------------------|-----|-----|---|-----|---|--------------------------------------------------|---|----------|---|----------|---|
| 35 | Денежные потоки в случае отказа от проекта |     |     |   |     |   | Приведенная стоимость в случае отказа от проекта |   |          |   |          |   |
| 36 |                                            |     |     |   |     |   |                                                  |   |          |   |          |   |
| 37 |                                            |     |     |   | 150 |   |                                                  |   |          |   | 14,29808 |   |
| 38 |                                            |     | 100 |   | 80  |   |                                                  |   | 30,87402 |   | 15,67551 |   |
| 39 |                                            |     |     |   |     |   |                                                  |   |          |   |          |   |
| 40 |                                            | -50 |     |   |     |   | -50                                              |   |          |   |          |   |
| 41 |                                            |     |     |   | 0   |   |                                                  |   |          |   | 0        |   |
| 42 |                                            |     | -10 |   | 0   |   |                                                  |   | -6,34656 |   | 0        |   |
| 43 |                                            |     |     |   |     |   |                                                  |   |          |   |          |   |
| 44 |                                            |     |     |   |     |   |                                                  |   |          |   |          |   |
| 45 |                                            |     |     |   |     |   |                                                  |   |          |   |          |   |
| 46 |                                            |     |     |   |     |   |                                                  |   |          |   | 4,50     |   |
| 47 |                                            |     |     |   |     |   |                                                  |   |          |   |          |   |
|    |                                            |     |     |   |     |   | Приведенная стоимость в случае отказа            |   |          |   |          |   |

### 18.3.3. Отказ с продажей оборудования

Существует еще одна возможность: продажа оборудования и основных средств при отказе от проекта. В этом случае отказ дает даже положительные финансовые потоки. Пусть, например, наш актив можно продать за 15 долл.

|    | A                                          | B   | C   | D | E   | F | G                                                | H | I        | J | K        | L |
|----|--------------------------------------------|-----|-----|---|-----|---|--------------------------------------------------|---|----------|---|----------|---|
| 50 | Денежные потоки в случае отказа от проекта |     |     |   |     |   | Приведенная стоимость в случае отказа от проекта |   |          |   |          |   |
| 51 |                                            |     |     |   | 150 |   |                                                  |   |          |   | 14,29808 |   |
| 52 |                                            |     | 100 |   | 80  |   |                                                  |   | 30,87402 |   | 15,67551 |   |
| 53 |                                            |     |     |   |     |   |                                                  |   |          |   |          |   |
| 54 |                                            |     |     |   |     |   |                                                  |   |          |   |          |   |
| 55 |                                            | -50 |     |   | 0   |   | -50                                              |   |          |   | 0        |   |
| 56 |                                            |     |     |   | 0   |   |                                                  |   |          |   | 0        |   |
| 57 |                                            |     | 15  |   |     |   |                                                  |   | 9,51984  |   |          |   |
| 58 |                                            |     |     |   |     |   |                                                  |   |          |   |          |   |
| 59 |                                            |     |     |   |     |   |                                                  |   |          |   |          |   |
| 60 |                                            |     |     |   |     |   |                                                  |   |          |   |          |   |
| 61 |                                            |     |     |   |     |   |                                                  |   |          |   | 20,37    |   |
| 62 |                                            |     |     |   |     |   |                                                  |   |          |   |          |   |
| 63 |                                            |     |     |   |     |   |                                                  |   |          |   |          |   |
|    |                                            |     |     |   |     |   | Приведенная стоимость в случае отказа            |   |          |   |          |   |

Продажа активов  
за \$15

### 18.3.4. Определение цен возможных состояний

Метод, по которому определяются цены возможных состояний, подробно рассматривался в главе 14. Подразумевается, что в каждый учетный период рыночный портфель ценных бумаг (под которым мы имеем в виду большой неспециализированный фондовый портфель наподобие S&P 500) изменяет свою стоимость “вверх” или “вниз”; эти изменения измеряются средним доходом  $\mu$  от портфеля и стандартным отклонением  $\sigma$  этих доходов. Предполагая, что доходы от рыночного портфеля имеют среднее  $\mu = 12\%$  и стандартное отклонение  $\sigma = 30\%$ , мы получили следующие величины в наших предыдущих примерах:

$$U(\text{“вверх”}) = \exp(\mu + \sigma) = 1,53, \quad D(\text{“вниз”}) = \exp(\mu - \sigma) = 0,8.$$

Обозначим текущую цену за один доллар в “верхнем” состоянии через один период как  $q_u$ , а аналогичную цену в “нижнем” состоянии — как  $q_d$ . Тогда, как было показано в главе 14, цены возможных состояний вычисляются путем решения следующей системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned} 1 &= q_u U + q_d D, \\ \frac{1}{1+r} &= q_u + q_d. \end{aligned}$$

Решение этой системы уравнений имеет вид

$$q_u = \frac{1+r-D}{(1+r)(U-D)}, \quad q_d = \frac{U-(1+r)}{(1+r)(U-D)}.$$

### 18.3.5. Другие способы определения цен возможных состояний

В качестве альтернативного метода определения цен возможных состояний можно предложить сопоставление их со стоимостью капитала проекта. Вернемся к рассмотренному ранее проекту и предположим, что вероятность каждого из состояний равна  $1/2$ . Далее предположим, что безрисковая ставка дохода равна 6%. Наконец, примем ставку дисконтирования для капитала проекта — для случая, когда в нем нет никаких опционов — равной 22%. Тогда ЧПС проекта без опциональных вариантов равна 12,48 долл.

|    | A                                                                        | B     | C                                                 | D    | E | F   | G | H |
|----|--------------------------------------------------------------------------|-------|---------------------------------------------------|------|---|-----|---|---|
| 28 | 2-й способ: сопоставление цен возможных состояний со стоимостью капитала |       |                                                   |      |   |     |   |   |
| 29 |                                                                          |       |                                                   |      |   |     |   |   |
| 30 | Стоимость капитала проекта                                               | 22%   | ← Ставка дисконтирования для проекта без опционов |      |   |     |   |   |
| 31 | Безрисковая проц. ставка                                                 | 6%    |                                                   |      |   |     |   |   |
| 32 |                                                                          |       |                                                   |      |   |     |   |   |
| 33 | Денежные потоки проекта                                                  |       |                                                   |      |   |     |   |   |
| 34 |                                                                          |       |                                                   |      |   |     |   |   |
| 35 |                                                                          |       |                                                   |      |   | 150 |   |   |
| 36 |                                                                          |       |                                                   |      |   | 80  |   |   |
| 37 |                                                                          |       |                                                   |      |   | 80  |   |   |
| 38 |                                                                          |       |                                                   |      |   | -60 |   |   |
| 39 |                                                                          |       |                                                   |      |   |     |   |   |
| 40 |                                                                          |       |                                                   |      |   |     |   |   |
| 41 |                                                                          |       |                                                   |      |   |     |   |   |
| 42 |                                                                          |       |                                                   |      |   |     |   |   |
| 43 | Ожидаемые потоки                                                         |       |                                                   |      |   |     |   |   |
| 44 | Год                                                                      | 0     | 1                                                 | 2    |   |     |   |   |
| 45 | Ожидаемые потоки                                                         | -50   | 25                                                | 62,5 |   |     |   |   |
| 46 | Ожидаемая ЧПС                                                            | 12,48 | ← =ЧПС(B30,C45:D45)+A37                           |      |   |     |   |   |
| 47 |                                                                          |       |                                                   |      |   |     |   |   |

Теперь найдем цены возможных состояний  $q_u$  и  $q_d$ , обладающие двумя свойствами.

1. Они согласованы с безрисковой ставкой дохода, т.е.

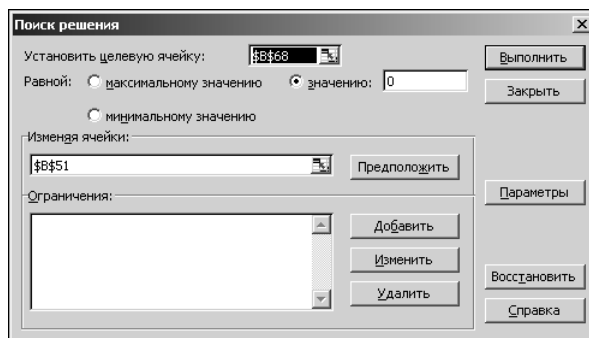
$$q_u + q_d = \frac{1}{1+r} = \frac{1}{1,06}.$$

2. Цены возможных состояний должны давать для проекта ту же ЧПС, что и рассчитанная по стоимости его капитала.

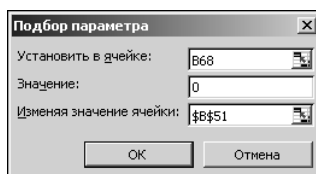
Из второго требования следует, что для определения цен возможных состояний нам придется воспользоваться модулем поиска решения Excel (Solver). Вот как выглядит это решение (далее после таблицы показано, как именно оно было найдено).

|    | A                                                                        | B      | C                                                   | D    | E        | F                | G | H |
|----|--------------------------------------------------------------------------|--------|-----------------------------------------------------|------|----------|------------------|---|---|
| 28 | 2-й способ: сопоставление цен возможных состояний со стоимостью капитала |        |                                                     |      |          |                  |   |   |
| 29 |                                                                          |        |                                                     |      |          |                  |   |   |
| 30 | Стоимость капитала проекта                                               | 22%    | <-- Ставка дисконтирования для проекта без опционов |      |          |                  |   |   |
| 31 | Безрисковая проц. ставка                                                 | 6%     |                                                     |      |          |                  |   |   |
| 32 |                                                                          |        |                                                     |      |          |                  |   |   |
| 33 | Денежные потоки проекта                                                  |        |                                                     |      |          |                  |   |   |
| 34 |                                                                          |        |                                                     |      | 150      |                  |   |   |
| 35 |                                                                          |        | 100                                                 |      | 80       |                  |   |   |
| 36 |                                                                          |        |                                                     |      | 80       |                  |   |   |
| 37 |                                                                          | -50    |                                                     |      | -60      |                  |   |   |
| 38 |                                                                          |        | -50                                                 |      |          |                  |   |   |
| 39 |                                                                          |        |                                                     |      |          |                  |   |   |
| 40 |                                                                          |        |                                                     |      |          |                  |   |   |
| 41 |                                                                          |        |                                                     |      |          |                  |   |   |
| 42 |                                                                          |        |                                                     |      |          |                  |   |   |
| 43 | Ожидаемые потоки: состояния равновероятны                                |        |                                                     |      |          |                  |   |   |
| 44 | Год                                                                      | 0      | 1                                                   | 2    |          |                  |   |   |
| 45 | Ожидаемые потоки                                                         | -50    | 25                                                  | 62,5 |          |                  |   |   |
| 46 | Ожидаемая ЧПС                                                            | 12,48  | <-- =ЧПС(В30,С45:Д45)+А37                           |      |          |                  |   |   |
| 47 |                                                                          |        |                                                     |      |          |                  |   |   |
| 48 |                                                                          |        |                                                     |      |          |                  |   |   |
| 49 | Цены возможных состояний                                                 |        |                                                     |      |          |                  |   |   |
| 50 | $q_u$                                                                    | 0,4241 | <-- =1/(1+В31)-В51                                  |      |          |                  |   |   |
| 51 | $q_d$                                                                    | 0,5193 | <-- Определяется "Поиском решения"                  |      |          |                  |   |   |
| 52 |                                                                          |        |                                                     |      |          |                  |   |   |
| 53 |                                                                          |        |                                                     |      |          |                  |   |   |
| 54 | Дисконтирование по состояниям                                            |        |                                                     |      |          |                  |   |   |
| 55 |                                                                          |        |                                                     |      | 26,9797  | <-- =Е34*В50*2   |   |   |
| 56 |                                                                          |        | 42,4105                                             |      | 17,6187  | <-- =Е36*В50*В51 |   |   |
| 57 |                                                                          |        |                                                     |      | 17,6187  | <-- =Е38*В50*В51 |   |   |
| 58 |                                                                          | -50    |                                                     |      | -16,1798 | <-- =Е40*В51*2   |   |   |
| 59 |                                                                          |        | -25,9646                                            |      |          |                  |   |   |
| 60 |                                                                          |        |                                                     |      |          |                  |   |   |
| 61 |                                                                          |        |                                                     |      |          |                  |   |   |
| 62 |                                                                          |        |                                                     |      |          |                  |   |   |
| 63 |                                                                          |        |                                                     |      |          |                  |   |   |
| 64 |                                                                          |        |                                                     |      |          |                  |   |   |
| 65 |                                                                          |        |                                                     |      |          |                  |   |   |
| 66 | ЧПС по состояниям                                                        | 12,48  | <-- =SUM(Д54:Н60)                                   |      |          |                  |   |   |
| 67 |                                                                          |        |                                                     |      |          |                  |   |   |
| 68 | Целевая функция                                                          | -0,00  | <-- =В66-В46                                        |      |          |                  |   |   |

Как было сказано выше, для определения цен возможных состояний использовался поиск решения (Сервис⇒Поиск решения или Tools⇒Solver).



Тот же результат можно получить с помощью подбора параметра (Сервис⇒Подбор параметра (Tools⇒Goal Seek)). Однако модуль подбора параметра в Excel не запоминает своих предыдущих установок, и в результате при каждом очередном расчете приходится заново задавать ссылки на ячейки. В данном случае диалоговое окно подбора параметра выглядит так, как показано ниже.



#### 18.4. Оценивание опциона на отказ как последовательности опционов на продажу

В предыдущем примере показано, как и почему опцион на отказ от проекта обладает стоимостью. Тот же пример иллюстрирует и другую, менее привлекательную черту такого опциона, а именно трудность его оценивания. Оценить ожидаемые финансовые потоки от проекта — уже само по себе непросто, а еще труднее оценить их по всем возможным состояниям и вывести все цены возможных состояний для сложного проекта.

Один из возможных компромиссных методов при оценивании опциона на отказ — это рассматривать проект как последовательность финансовых потоков *плюс* последовательность опционов “пут” по Блэку–Скоулзу. Рассмотрим следующий пример. Оценивается проект длительностью четыре года с ожидаемыми финансовыми потоками, приведенными в следующей далее таблице, и ставкой дисконтирования с поправкой на риск 12%. Как видно, проект имеет отрицательную ЧПС.

|   | A                                          | B      | C                          | D   | E   | F   |
|---|--------------------------------------------|--------|----------------------------|-----|-----|-----|
| 3 | Денежные потоки проекта                    |        |                            |     |     |     |
| 4 | Год                                        | 0      | 1                          | 2   | 3   | 4   |
| 5 | Поток                                      | -750   | 100                        | 200 | 300 | 400 |
| 6 |                                            |        |                            |     |     |     |
| 7 | Ставка дисконтирования с поправкой на риск | 12%    | Стоимость капитала проекта |     |     |     |
| 8 |                                            |        |                            |     |     |     |
| 9 | ЧПС без опционов                           | -33,53 | <-- =ЧПС(B7;C5:F5)+BС      |     |     |     |

Предположим, что отказаться от проекта можно в конце любого из последующих четырех лет, продав оборудование за 300 долл. Хотя такой опцион является американским, а не опционом Блэка–Скоулза, тем не менее мы оцениваем его как последовательность опционов “пут” по модели Блэка–Скоулза. В любом случае предполагается, что вначале мы получаем денежное поступление (поток) конца года, а затем уже оцениваем опцион на отказ по остаточной стоимости проекта.

- *Конец 1-го года.* Ожидаемая стоимость актива в конце первого года равна дисконтированной стоимости его будущих финансовых потоков:  $702,44 = \frac{200}{1,12} + \frac{300}{(1,12)^2} + \frac{400}{(1,12)^3}$ . Опцион на отказ дает нам возможность получить 300 долл. за актив в течение следующих трех лет. Если стоимость имеет неустойчивость 50%, то оценивание опциона по формуле Блэка–Скоулза для опционов “пут” со сроком погашения 1 год дает стоимость 19,53 долл. В следующей таблице используется функция на языке VBA под названием Putoption, разработанная в главе 16.

|    | A                                                  | B      | C                                   | D   | E   | F   |
|----|----------------------------------------------------|--------|-------------------------------------|-----|-----|-----|
| 1  | ЦЕНА ОТКАЗА--ПОДРОБНЫЙ РАСЧЕТ 1-ГО ГОДА            |        |                                     |     |     |     |
| 2  |                                                    |        |                                     |     |     |     |
| 3  | Денежные потоки проекта                            |        |                                     |     |     |     |
| 4  | Год                                                | 0      | 1                                   | 2   | 3   | 4   |
| 5  | Поток                                              | -750   | 100                                 | 200 | 300 | 400 |
| 6  |                                                    |        |                                     |     |     |     |
| 7  | Ставка дисконтирования с поправкой на риск         | 12%    | Стоимость капитала проекта          |     |     |     |
| 8  |                                                    |        |                                     |     |     |     |
| 9  | Оценивание опциона “пут” на отказ, сроком на 1 год |        |                                     |     |     |     |
| 10 | Стоимость проекта в конце 1-го года                | 702,44 | Аналогично стоимости актива         |     |     |     |
| 11 | Стоимость отказа                                   | 300    | Аналогично цене исполнения          |     |     |     |
| 12 | Срок погашения (в годах)                           | 3      |                                     |     |     |     |
| 13 | Безрисковая процентная ставка                      | 6%     |                                     |     |     |     |
| 14 | Сигма                                              | 50%    |                                     |     |     |     |
| 15 |                                                    |        |                                     |     |     |     |
| 16 | Стоимость опциона “пут”                            | 19,53  | <-- =putoption(B10,B11,B12,B13,B14) |     |     |     |

- *Конец 2-го года.* Имеем опцион “пут” с ценой исполнения 300 долл. на актив стоимостью  $596,73 = \frac{300}{1,12} + \frac{400}{(1,12)^2}$ . Оценивая опцион на отказ от проекта как опцион “пут” модели Блэка–Скоулза со сроком погашения 2 года, получаем его стоимость (при  $\sigma = 50\%$ ), равную 17,74 долл.
- *Конец 3-го года.* Имеем опцион “пут” с ценой исполнения 300 долл. на актив стоимостью  $357,14 = \frac{400}{1,12}$ . Опциону остался один год до исполнения, а стоит он 32,47 долл.
- *Конец 4-го года.* Актив не стоит ничего с точки зрения будущих финансовых потоков, но от него можно отказаться, получив 300 долл. (ликвидационную стоимость или “стоимость лома”). Опцион на отказ стоит 300 долл.

В приведенной ниже таблице актив оценивается как сумма следующих величин:

- приведенной стоимости будущих ожидаемых финансовых потоков; как было показано ранее, она равна 33,53 долл.;
- приведенной стоимости (по безрисковой ставке) последовательности опционов “пут” Блэка–Скоулза; эта стоимость составляет 299,10 долл.

Общая стоимость проекта равна  $-33,53 \text{ долл.} + 299,10 \text{ долл.} = 265,57 \text{ долл.}$

|    | A                                                                        | B      | C                                                            | D      | E      | F      | G |
|----|--------------------------------------------------------------------------|--------|--------------------------------------------------------------|--------|--------|--------|---|
| 1  | <b>ОЦЕНИВАНИЕ ОПЦИОНА НА ОТКАЗ КАК ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ОПЦИОНОВ "ПУТ"</b> |        |                                                              |        |        |        |   |
| 2  |                                                                          |        |                                                              |        |        |        |   |
| 3  | <b>Денежные потоки проекта</b>                                           |        |                                                              |        |        |        |   |
| 4  | Год                                                                      | 0      | 1                                                            | 2      | 3      | 4      |   |
| 5  | Денежный поток                                                           | -750   | 100                                                          | 200    | 300    | 400    |   |
| 6  |                                                                          |        |                                                              |        |        |        |   |
| 7  | Ставка дисконтирования с поправкой на риск                               | 12%    | Стоимость капитала проекта                                   |        |        |        |   |
| 8  |                                                                          |        |                                                              |        |        |        |   |
| 9  | ЧПС без опционов                                                         | -33,53 | <-- =ЧПС(B7,C5:F5)+B5                                        |        |        |        |   |
| 10 |                                                                          |        |                                                              |        |        |        |   |
| 11 | Сигма                                                                    | 50%    |                                                              |        |        |        |   |
| 12 | Безрисковая ставка                                                       | 6%     |                                                              |        |        |        |   |
| 13 | Цена отказа                                                              | 300    | Можно отказаться от проекта в конце любого года за эту сумму |        |        |        |   |
| 14 |                                                                          |        |                                                              |        |        |        |   |
| 15 | ЧПС потоков по ставке с поправкой на риск                                | -33,53 | <-- =B9                                                      |        |        |        |   |
| 16 | Цена опциона на отказ                                                    | 299,10 | <-- =ЧПС(B12,C20:F20)                                        |        |        |        |   |
| 17 | Приведенная стоимость с поправкой                                        | 265,57 |                                                              |        |        |        |   |
| 18 |                                                                          |        |                                                              |        |        |        |   |
| 19 | Оставшиеся потоки, приведенные к концу года                              |        | 702,44                                                       | 586,73 | 357,14 | 0,00   |   |
| 20 | Цена опциона "пут"                                                       |        | 19,53                                                        | 17,74  | 32,47  | 300,00 |   |
| 21 |                                                                          |        |                                                              |        |        |        |   |
| 22 |                                                                          |        |                                                              |        |        |        |   |
| 23 |                                                                          |        |                                                              |        |        |        |   |
| 24 |                                                                          |        |                                                              |        |        |        |   |
| 25 |                                                                          |        |                                                              |        |        |        |   |
| 26 |                                                                          |        |                                                              |        |        |        |   |
| 27 |                                                                          |        |                                                              |        |        |        |   |
| 28 |                                                                          |        |                                                              |        |        |        |   |
| 29 |                                                                          |        |                                                              |        |        |        |   |
| 30 |                                                                          |        |                                                              |        |        |        |   |
| 31 |                                                                          |        |                                                              |        |        |        |   |

## 18.5. Заключение

Вполне понятно и очевидно, что при составлении смет проектов и анализе их окупаемости следует учитывать опциональные аспекты данных проектов. Оценить стоимость таких опционов не всегда бывает просто. В этой главе мы попытались подчеркнуть важность творческого, интуитивного подхода к делу и привели несколько возможных примеров оценивания проектов.

## Упражнения

1. Ваша компания рассматривает возможность приобретения десяти технологических машин, каждой из которых соответствуют следующие финансовые потоки (пункт  $-550$  долл. — это стоимость машины).

| Год | Финансовые потоки для одной машины |
|-----|------------------------------------|
| 0   | –550                               |
| 1   | 100                                |
| 2   | 200                                |
| 3   | 300                                |
| 4   | 400                                |

Соответствующая ставка дисконтирования, по вашим оценкам, составляет 25%.

- а) Рекомендовали бы вы приобретение только одной машины, если бы не было никаких опциональных возможностей?
  - б) Ваш главный инженер предлагает приобрести одну машину сейчас, а через полгода — посмотрев, как она работает, — повторно рассмотреть вопрос о приобретении еще девяти. Оцените эту схему, предполагая, что финансовые потоки, соответствующие машинам, имеют стандартное отклонение 30%, а безрисковая ставка дохода равна 10%.
2. Ваша компания рассматривает возможность приобретения нового агрегата. Агрегат стоит 50 тыс. долл., а финансовый анализ показывает, что приведенная стоимость будущих финансовых потоков от него равна 45 тыс. долл. Таким образом, чистая приведенная стоимость составляет –5 тыс. долл. Полученная оценка ЧПС основана на данных, предоставленных производителем оборудования, а также на экспертных оценках вашего финансового аналитика.
- Поставщик оборудования предлагает курсы по обучению работе с агрегатом, за которые нужно заплатить 1500 долл. По вашим оценкам, величина  $\sigma$  финансовых потоков от агрегата равна 30%, безрисковая ставка дохода составляет 6%, и после курсов есть возможность приобрести оборудование по цене 50 тыс. долл. в течение полугода. Стоит ли проходить такие курсы?
3. Рассмотрим проект, потоки средств от которого имеют следующий вид.

| Денежные потоки проекта |  |     |     |       |                 |
|-------------------------|--|-----|-----|-------|-----------------|
|                         |  |     | 169 |       | Цены возм.сост. |
|                         |  | 130 |     | $q_u$ | 0,3000          |
|                         |  |     | 91  | $q_d$ | 0,5000          |
|                         |  |     | 91  |       |                 |
|                         |  | 70  |     |       |                 |
|                         |  |     | –90 |       |                 |

- а) Оцените проект с помощью цен возможных состояний.
- б) Предположим, что от проекта можно отказаться после 2-го периода без дополнительной платы. Как это повлияет на его стоимость?
- в) Предположим, что проект можно в любое время продать за 100 долл. Постройте дерево финансовых потоков и оцените проект.

4. Предположим, что некоторый рыночный портфель имеет средний доход  $\mu = 15\%$  и стандартное отклонение  $\sigma = 20\%$ .
- Пусть безрисковая ставка дохода составляет 8%. Рассчитайте цены возможных “верхнего” и “нижнего” состояний на один период.
  - Покажите влияние безрисковой ставки дохода на цены возможных состояний (с помощью таблицы данных).
  - Покажите влияние величины  $\sigma$  на цены возможных состояний.
5. Рассмотрим следующую схему движения средств в проекте.

| Денежные потоки проекта |     |  |      |
|-------------------------|-----|--|------|
|                         |     |  | 180  |
|                         | 130 |  | 90   |
| -50                     |     |  | 60   |
|                         | -50 |  | -100 |

- Пусть стоимость капитала составляет 30%, а безрисковая ставка дохода равна 5%. Определите цены возможных состояний, соответствующие ЧПС проекта.
- Оцените проект при условии, что существует возможность отказа от него (опцион на отказ) и можно изменить все отрицательные потоки средств на нулевые.



---

# 19 Пределы досрочного исполнения

---

## 19.1. Введение

В главе 14 было показано, что досрочное исполнение опциона на продажу (“пут”) может оказаться выгодным, так что американский опцион этого вида может цениться выше, чем европейский, аналогичный во всем остальном. Мы начнем эту главу как раз с более детального разбора данной задачи<sup>1</sup>. Выясним, как определить предел досрочного исполнения для опциона “пут” — определяемый как *самый высокий курс акций* в момент времени  $t$ , для которого опцион можно исполнить досрочно. Будет показано, как вычислить этот предел.

Затем рассмотрим аналогичную задачу для опционов на покупку (“колл”). Из главы 13 мы знаем, что нет смысла исполнять досрочно американский опцион этого вида на акцию, по которой не выплачиваются дивиденды. Таким образом, единственный случай, в котором возможно раннее исполнение опционов “колл”, — это наличие дивидендов по обеспечиваемому активу. Эта задача будет рассмотрена в подробностях, и для опциона “колл” будет выведен предел досрочного исполнения — *самый низкий курс акций* в момент времени  $t$ , при котором опцион “колл” можно исполнить досрочно.

---

## 19.2. Зачем досрочно исполнять опцион на продажу

В первой таблице этой главы вычисляется цена по Блэку–Скоулзу (Black–Scholes) для опциона “пут” со сроком погашения в 1 год. Вспомним, что цена по Блэку–Скоулзу всегда вычисляется для европейских опционов. В приведенной таблице начальный расчет цены опциона — в строках 2–15 — выполняется для  $S = X = 50$  (т.е. для опциона на продажу по текущему курсу).

В таблице данных, начинающейся в строке 21, вычисляется стоимость опциона для различных значений курсовой стоимости акций  $S$ . Построен график этих величин в зависимости от так называемой действительной стоимости опциона (т.е. величины  $\max(X - S, 0)$ , где  $X = 50$ ). На графике видно, что для низкого курса акций цена опциона по Блэку–Скоулзу падает ниже его действительной стоимости. При таких низких значениях курса держатель европейского опциона готов был бы доплатить, лишь бы исполнить опцион досрочно. Поэтому — для данных значений курса акций — ценность американского опциона выше, чем европейского.

---

<sup>1</sup> В этой главе рассматривается более сложный материал, чем в других, поэтому при первом чтении ее можно пропустить.

|    | A                                                  | B       | C                                                                                   | D | E | F | G | H | I | J |
|----|----------------------------------------------------|---------|-------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|
| 1  | <b>Оценивание опциона по формуле Блэка-Скоулза</b> |         |                                                                                     |   |   |   |   |   |   |   |
| 2  |                                                    |         |                                                                                     |   |   |   |   |   |   |   |
| 3  | S                                                  | 50      | Текущий курс акций                                                                  |   |   |   |   |   |   |   |
| 4  | X                                                  | 50      | Цена исполнения                                                                     |   |   |   |   |   |   |   |
| 5  | r                                                  | 10,00%  | Безрисковая процентная ставка                                                       |   |   |   |   |   |   |   |
| 6  | T                                                  | 1       | Срок погашения опциона (в годах)                                                    |   |   |   |   |   |   |   |
| 7  | Сигма                                              | 25%     | Волатильность акции                                                                 |   |   |   |   |   |   |   |
| 8  | d <sub>1</sub>                                     | 0,5250  | $\leftarrow (LN(S/X) + (r + 0.5 \cdot \sigma^2) \cdot T) / (\sigma \cdot \sqrt{T})$ |   |   |   |   |   |   |   |
| 9  | d <sub>2</sub>                                     | 0,2750  | $\leftarrow d_1 - \sigma \cdot \sqrt{T}$                                            |   |   |   |   |   |   |   |
| 10 |                                                    |         |                                                                                     |   |   |   |   |   |   |   |
| 11 | N(d <sub>1</sub> )                                 | 0,7002  | $\leftarrow$ Используется формула НОРМСТРАСП(d <sub>1</sub> )                       |   |   |   |   |   |   |   |
| 12 | N(d <sub>2</sub> )                                 | 0,6083  | $\leftarrow$ Используется формула НОРМСТРАСП(d <sub>2</sub> )                       |   |   |   |   |   |   |   |
| 13 |                                                    |         |                                                                                     |   |   |   |   |   |   |   |
| 14 | Цена опц "колл"                                    | 7,49    | $\leftarrow S \cdot N(d_1) - X \cdot \exp(-r \cdot T) \cdot N(d_2)$                 |   |   |   |   |   |   |   |
| 15 | Цена опц "пут"                                     | 2,73    | $\leftarrow$ цена опц "колл" - S + X * Exp(-r * T): по паритету "пут-колл"          |   |   |   |   |   |   |   |
| 16 |                                                    |         |                                                                                     |   |   |   |   |   |   |   |
| 17 |                                                    |         |                                                                                     |   |   |   |   |   |   |   |
| 18 | Курс                                               | Цена по | "Истинная"                                                                          |   |   |   |   |   |   |   |
| 19 | акций                                              | Б.-С.   | цена                                                                                |   |   |   |   |   |   |   |
| 20 |                                                    |         |                                                                                     |   |   |   |   |   |   |   |
| 21 | 36                                                 | 10,2246 | 14                                                                                  |   |   |   |   |   |   |   |
| 22 | 38                                                 | 8,7220  | 12                                                                                  |   |   |   |   |   |   |   |
| 23 | 40                                                 | 7,3615  | 10                                                                                  |   |   |   |   |   |   |   |
| 24 | 42                                                 | 6,1496  | 8                                                                                   |   |   |   |   |   |   |   |
| 25 | 44                                                 | 5,0870  | 6                                                                                   |   |   |   |   |   |   |   |
| 26 | 46                                                 | 4,1691  | 4                                                                                   |   |   |   |   |   |   |   |
| 27 | 48                                                 | 3,3872  | 2                                                                                   |   |   |   |   |   |   |   |
| 28 | 50                                                 | 2,7298  | 0                                                                                   |   |   |   |   |   |   |   |
| 29 | 52                                                 | 2,1835  | 0                                                                                   |   |   |   |   |   |   |   |
| 30 | 54                                                 | 1,7445  | 0                                                                                   |   |   |   |   |   |   |   |
| 31 | 56                                                 | 1,3692  | 0                                                                                   |   |   |   |   |   |   |   |
| 32 | 58                                                 | 1,0745  | 0                                                                                   |   |   |   |   |   |   |   |
| 33 | 60                                                 | 0,8389  | 0                                                                                   |   |   |   |   |   |   |   |
| 34 | 62                                                 | 0,6518  | 0                                                                                   |   |   |   |   |   |   |   |
| 35 | 64                                                 | 0,5043  | 0                                                                                   |   |   |   |   |   |   |   |
| 36 | 66                                                 | 0,3886  | 0                                                                                   |   |   |   |   |   |   |   |
| 37 | 68                                                 | 0,2985  | 0                                                                                   |   |   |   |   |   |   |   |
| 38 |                                                    |         |                                                                                     |   |   |   |   |   |   |   |
| 39 |                                                    |         |                                                                                     |   |   |   |   |   |   |   |

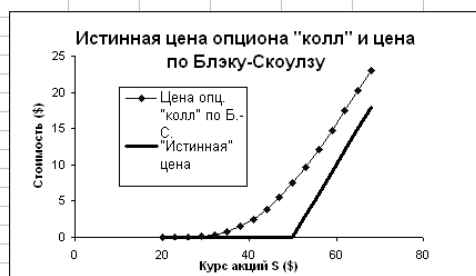


При низком курсе акций цена по Б.-С. меньше, чем "истинная". Если исполнить опцион досрочно, его стоимость оказалась бы выше. Следовательно, досрочное исполнение может быть выгодно для опционов "пут".

### 19.2.1. Американский опцион на покупку: бессмысленность досрочного исполнения

Следует отметить, что сравнение стоимости по Блэку-Скоулзу с действительной стоимостью для европейского опциона на покупку ("колл") дает другие результаты. (Как и в случае других оценок по Блэку-Скоулзу, опцион выписывается на акцию без выплаты дивидендов до срока погашения.)

|    | A     | B               | C          | D | E | F | G | H | I | J |
|----|-------|-----------------|------------|---|---|---|---|---|---|---|
| 42 | Курс  | Цена опц.       | "Истинная" |   |   |   |   |   |   |   |
| 43 | акций | "колл" по Б.-С. | цена       |   |   |   |   |   |   |   |
| 44 |       |                 |            |   |   |   |   |   |   |   |
| 45 | 20    | 0,001084418     | 0          |   |   |   |   |   |   |   |
| 46 | 23    | 0,008324474     | 0          |   |   |   |   |   |   |   |
| 47 | 26    | 0,039815234     | 0          |   |   |   |   |   |   |   |
| 48 | 29    | 0,135487334     | 0          |   |   |   |   |   |   |   |
| 49 | 32    | 0,358384972     | 0          |   |   |   |   |   |   |   |
| 50 | 35    | 0,783619384     | 0          |   |   |   |   |   |   |   |
| 51 | 38    | 1,480174467     | 0          |   |   |   |   |   |   |   |
| 52 | 41    | 2,494925815     | 0          |   |   |   |   |   |   |   |
| 53 | 44    | 3,845132736     | 0          |   |   |   |   |   |   |   |
| 54 | 47    | 5,519971649     | 0          |   |   |   |   |   |   |   |
| 55 | 50    | 7,487895389     | 0          |   |   |   |   |   |   |   |
| 56 | 53    | 9,705824675     | 3          |   |   |   |   |   |   |   |
| 57 | 56    | 12,12728401     | 6          |   |   |   |   |   |   |   |
| 58 | 59    | 14,70815912     | 9          |   |   |   |   |   |   |   |
| 59 | 62    | 17,40995237     | 12         |   |   |   |   |   |   |   |
| 60 | 65    | 20,20103959     | 15         |   |   |   |   |   |   |   |
| 61 | 68    | 23,05660704     | 18         |   |   |   |   |   |   |   |



Поскольку цена опциона по Блэку–Скоулзу всегда выше действительной стоимости, в досрочном исполнении нет никакого смысла. Когда мы вернемся к этому случаю позже, в разделе 19.5, то введем выплату дивидендов, чтобы дать держателю опциона “колл” повод для его досрочного исполнения.

### 19.3. Предел досрочного исполнения для опционов на продажу

Для американского опциона на продажу (“пут”) предел досрочного исполнения — это *самый высокий курс акций* в момент  $t$ , при котором имеет смысл досрочно исполнять опцион. Рассмотрим следующий пример, в котором оценка стоимости американского опциона на продажу выполняется по схеме, описанной в главе 14.

|    | A                                                                        | B                                                                    | C       | D                        | E       | F                                                                                                | G       | H     | I | J        | K |
|----|--------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|---------|--------------------------|---------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|-------|---|----------|---|
| 1  | ОЦЕНИВАНИЕ АМЕРИКАНСКОГО ОПЦИОНА "ПУТ" ПО БИНОМ.МОДЕЛИ ЗА ЧЕТЫРЕ ПЕРИОДА |                                                                      |         |                          |         |                                                                                                  |         |       |   |          |   |
| 2  |                                                                          |                                                                      |         |                          |         |                                                                                                  |         |       |   |          |   |
| 3  | Вверх                                                                    | 0,2214                                                               |         | Цены возможных состояний |         |                                                                                                  |         |       |   |          |   |
| 4  | Вниз                                                                     | -0,1813                                                              |         | $q_u$                    | 0,4904  | $\leftarrow = (B8-B4-1)/(B8*(B3-B4))$                                                            |         |       |   |          |   |
| 5  |                                                                          |                                                                      |         | $q_d$                    | 0,4898  | $\leftarrow = 1/B8-E4$                                                                           |         |       |   |          |   |
| 6  | Нач.курс акций                                                           | 50                                                                   |         |                          |         |                                                                                                  |         |       |   |          |   |
| 7  | Цена исполнения                                                          | 55                                                                   |         | Сигма                    | 40%     |                                                                                                  |         |       |   |          |   |
| 8  | $1+r(\Delta t)$                                                          | 1,020201                                                             |         | $r$                      | 8%      |                                                                                                  |         |       |   |          |   |
| 9  |                                                                          |                                                                      |         | $T$                      | 1       |                                                                                                  |         |       |   |          |   |
| 10 |                                                                          |                                                                      |         |                          |         |                                                                                                  |         |       |   |          |   |
| 11 |                                                                          |                                                                      |         |                          |         | Примечание: Период $T = 1$ делится на 4                                                          |         |       |   |          |   |
| 12 |                                                                          |                                                                      |         |                          |         | подпериода. "Верхнее" состояние для каждого периода                                              |         |       |   |          |   |
| 13 |                                                                          |                                                                      |         |                          |         | определяется как $\exp[\sigma^2 \Delta t] - 1$ , а "нижнее" как $\exp[-\sigma^2 \Delta t] - 1$ , |         |       |   |          |   |
| 14 |                                                                          |                                                                      |         |                          |         | где $\sigma = 40\%$ . Годовая процентная ставка в 8% дискретизируется                            |         |       |   |          |   |
| 15 |                                                                          |                                                                      |         |                          |         | по формуле $\exp[8\%/4] - 1$ для каждого подпериода.                                             |         |       |   |          |   |
| 16 |                                                                          |                                                                      |         |                          |         |                                                                                                  |         |       |   |          |   |
| 17 |                                                                          |                                                                      |         |                          |         |                                                                                                  |         |       |   |          |   |
| 18 |                                                                          | Курс акций: Опцион "пут" исполняется в позициях, обведенных кружком. |         |                          |         |                                                                                                  |         |       |   |          |   |
| 19 |                                                                          |                                                                      |         |                          |         |                                                                                                  |         |       |   | 111,2770 |   |
| 20 |                                                                          |                                                                      |         |                          |         |                                                                                                  |         |       |   |          |   |
| 21 |                                                                          |                                                                      |         |                          | 74,5912 |                                                                                                  | 91,1059 |       |   | 74,5912  |   |
| 22 |                                                                          |                                                                      |         |                          |         |                                                                                                  |         |       |   |          |   |
| 23 | 50,0000                                                                  |                                                                      | 61,0701 |                          | 50,0000 |                                                                                                  | 61,0701 |       |   | 50,0000  |   |
| 24 |                                                                          |                                                                      | 40,9365 |                          |         |                                                                                                  | 40,9365 |       |   |          |   |
| 25 |                                                                          |                                                                      |         |                          | 33,5160 |                                                                                                  |         |       |   | 33,5160  |   |
| 26 |                                                                          |                                                                      |         |                          |         |                                                                                                  | 27,4406 |       |   |          |   |
| 27 |                                                                          |                                                                      |         |                          |         |                                                                                                  |         |       |   | 22,4664  |   |
| 28 |                                                                          |                                                                      |         |                          |         |                                                                                                  |         |       |   |          |   |
| 29 | $t=0$                                                                    | $t=0.25$                                                             |         | $t=0.5$                  |         | $t=0.75$                                                                                         |         | $t=1$ |   |          |   |
| 30 |                                                                          |                                                                      |         |                          |         |                                                                                                  |         |       |   |          |   |
| 31 |                                                                          |                                                                      |         |                          |         |                                                                                                  |         |       |   |          |   |
| 32 |                                                                          | Цена амер.опциона "пут"                                              |         |                          |         |                                                                                                  |         |       |   |          |   |
| 33 |                                                                          |                                                                      |         |                          | 1,1994  |                                                                                                  | 0,0000  |       |   | 0,0000   |   |
| 34 |                                                                          |                                                                      | 4,5499  |                          |         |                                                                                                  | 2,4489  |       |   | 0,0000   |   |
| 35 | 9,3278                                                                   |                                                                      |         |                          | 8,0889  |                                                                                                  |         |       |   | 5,0000   |   |
| 36 |                                                                          |                                                                      | 14,4893 |                          |         |                                                                                                  | 14,0635 |       |   |          |   |
| 37 |                                                                          |                                                                      |         |                          | 21,4840 |                                                                                                  |         |       |   | 21,4840  |   |
| 38 |                                                                          |                                                                      |         |                          |         |                                                                                                  | 27,5594 |       |   |          |   |
| 39 |                                                                          |                                                                      |         |                          |         |                                                                                                  |         |       |   | 32,5336  |   |
| 40 |                                                                          |                                                                      |         |                          |         |                                                                                                  |         |       |   |          |   |

Расчеты выполняются в направлении от конца дерева к его началу. Как и в главе 14, цена опциона в каждом узле вычислялась следующим образом:

$$\max \left\{ \begin{array}{l} \text{Немедленное исполнение в узле,} \\ q_u \times (\text{Цена опциона в следующем "верхнем" узле}) + \\ + q_d \times (\text{Цена опциона в следующем "нижнем" узле}) \end{array} \right\}.$$

На предыдущем рисунке узлы, в которых исполнялся опцион, обведены овалами. *Предел досрочного исполнения* опциона “пут” определяется как самая высокая цена исполнения этого опциона в каждый момент времени  $t$ :

#### Пределы досрочного исполнения для американского опциона на продажу

| $t$  | Предел досрочного исполнения |
|------|------------------------------|
| 0    | 0                            |
| 0,25 | 0                            |
| 0,5  | 33,5160                      |
| 0,75 | 40,9365                      |
| 1    | 50                           |

Сделаем два замечания, прежде чем двигаться дальше.

- Термин “предел досрочного исполнения” содержит некоторую вольность словоупотребления, поскольку включает и конечные точки исполнения опциона.
- Второе, более важное, замечание таково: если опцион “пут” исполняется досрочно при курсе  $S$  в момент времени  $t$ , то опцион будет исполнен досрочно при всех курсах *ниже*  $S$  в тот же момент времени. Это утверждение доказывается в приложении к главе.

#### 19.4. Программа на VBA для нахождения предела досрочного исполнения

В этом разделе мы напишем программу на VBA для нахождения предела досрочного исполнения опциона “пут”. Программа берет входные параметры из таблицы Excel, к которой она прилагается, а выходные данные поступают в ту же таблицу. Сама таблица (так сказать, “лицо” программы) приведена ниже; выходные данные помещены в столбцы *Время* и *Предел досрочного исполнения*.



Приведенный график демонстрирует, что при наличии длительного времени до даты погашения опциона “пут” опять-таки нет смысла исполнять его досрочно (на графике предел досрочного исполнения для  $t \leq 0,1$  равен нулю). Когда же приближается срок погашения, предел досрочного исполнения повышается, т.е. держатель опциона испытывает все большее беспокойство по поводу того, не избавиться ли ему от опциона. Например, в нашем случае при  $t = 0,4$  (до исполнения остается одна десятая часть года) держатель опциона сочтет оптимальным исполнить его, если курс акций поднимется выше 41,81<sup>2</sup>.

Программа на Visual Basic for Applications для нахождения предела досрочного исполнения является модификацией программы, разработанной в главе 14 для расчета стоимости американского опциона “пут”. Для удобства ссылок на ячейки таблицы используются именованные диапазоны (подробнее о них вы узнаете в главе 30).

```
Sub PutBoundary()
    Application.ScreenUpdating = False
    n = Worksheets("Early exercise").Range("n")
    S = Worksheets("Early exercise").Range("S")
    X = Worksheets("Early exercise").Range("X")
    delta_t = Worksheets("Early exercise").Range("T") / _
        Worksheets("Early exercise").Range("n")
    up = Exp(Worksheets("Early exercise").Range("sigma")_
        * Sqr(delta_t))
```

<sup>2</sup> Хотелось бы ожидать от предела досрочного исполнения гладкого и монотонного возрастания по времени, и в случае непрерывного времени это действительно так. “Волнистый” характер рассчитанного здесь предела типичен для случая дискретной аппроксимации. Аналогичные “волны” можно наблюдать и в главе 14 при анализе сходимости биномиальной модели оценивания к цене опциона по Блэку–Скоулзу.

```

down = Exp(-Worksheets("Early exercise").Range("sigma")_
    * Sqr(delta_t))
R = Exp(Worksheets("Early exercise").Range("interest")_
    * delta_t)
qup = (R - down) / (R * (up - down))
qdown = 1 / R - qup
Dim OptionReturnEnd() As Double
Dim OptionReturnMiddle() As Double
Dim boundary() As Double
ReDim OptionReturnEnd(n + 1)
ReDim boundary(n + 1, n + 1)

Worksheets("Early exercise").Range("output").Clear

For Index = 0 To n
    boundary(Index, 1) = Index
    boundary(Index, 2) = 0
Next Index

For state = 0 To n + 1
    OptionReturnEnd(state) = 0
Next state

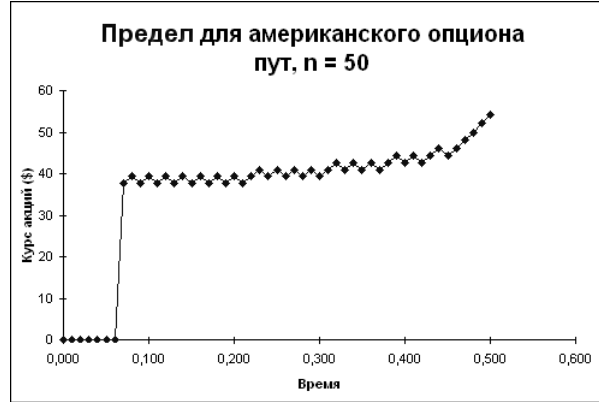
For Index = n To 0 Step -1
    ReDim OptionReturnMiddle(Index + 1)
    For state = 0 To Index
        OptionReturnMiddle(state) = Application.Max(X - _
            S * up ^ state * down ^ (Index - state), _
            qdown * OptionReturnEnd(state) + _
            qup * OptionReturnEnd(state + 1))
        If X - S * up ^ state * down ^ (Index - state) > _
            qdown * OptionReturnEnd(state) + qup * _
            OptionReturnEnd(state + 1) Then boundary(Index, _
            2) = S * up ^ state * down ^ (Index - state)
        End If
    Next state
    ReDim OptionReturnEnd(Index)
    For state = 0 To Index
        OptionReturnEnd(state) = _
            OptionReturnMiddle(state)
    Next state
Next Index

For Index = 0 To n
    Worksheets("Early exercise").Range("output")._
        Cells(Index, 1) = boundary(Index, 1) * delta_t
    Worksheets("Early exercise").Range("output")._
        Cells(Index, 2) = boundary(Index, 2)
Next Index

End Sub

```

Если программу запустить на выполнение большого количества итераций, предел приобретает более гладкий характер, как показано на приведенном ниже рисунке.



### 19.5. Замечание об эквивалентности по дивидендам

В следующем разделе мы рассмотрим пределы досрочного исполнения для американских опционов на покупку акций (“колл”), по которым выплачиваются дивиденды. Но вначале следует рассмотреть процессы выплаты дивидендов и их влияние на цены возможных состояний.

Начнем с понятия “эквивалентности по дивидендам” для двух курсов акций, изменяющихся на некотором промежутке времени. Пусть по первой акции дивиденды не выплачиваются. Сегодняшний курс акций  $S$  к завтрашнему дню станет равным  $S_u$  (“верхний” курс) либо  $S_d$  (“нижний” курс). Для второй акции текущий курс равен  $\hat{S}$ , а к завтрашнему дню он станет равным  $\hat{S}_u$  либо  $\hat{S}_d$ . Но по второй акции в каждом узле дерева эволюции курса по времени выплачиваются дивиденды:  $D_0$  в момент времени 0,  $D_u$  или  $D_d$  в момент времени 1 в зависимости от направления изменения курса<sup>3</sup>.

Назовем два курса акций в их эволюции по времени *эквивалентными*, если  $S = \hat{S} + D_0$ ,  $S_u = \hat{S}_u + D_u$  и  $S_d = \hat{S}_d + D_d$ . Обратите внимание, что, несмотря на эквивалентность, цены возможных состояний у них не совпадают. Действительно, вначале рассмотрим цены возможных состояний для эволюции курса акций без дивидендов:

$$\begin{aligned} q_u S_u + q_d S_d &= S, \\ q_u + q_d &= \frac{1}{1+r} \equiv \frac{1}{R} \\ \Rightarrow \quad q_d &= \frac{u-R}{R(u-d)}, \quad q_u = \frac{R-d}{R(u-d)}. \end{aligned}$$

<sup>3</sup> Заметим, что здесь  $u$  (*up*, “вверх”) и  $d$  (*down*, “вниз”) обозначают доход с учетом узла “1”. Такое употребление этих обозначений слегка отличается от главы 14, где узел “1” не учитывался. Например,  $u$  в главе 14 мог равняться 20%, тогда как здесь его аналог был бы  $u = 1,2$ .

Если положить  $\hat{S} = S(1 - \delta)$ , где  $\delta$  – процентная ставка выплаты дивидендов, то будем иметь

$$q_d = \frac{Su - \hat{S}R}{RS(u - d)} = \frac{Su - S(1 - \delta)R}{RS(u - d)} = \frac{u - (1 - \delta)R}{R(u - d)},$$

$$q_u = \frac{(1 - \delta)R - d}{R(u - d)}.$$

Таким образом, при эквивалентности двух процессов колебаний курсов по дивидендам их цены возможных состояний отличаются.

## 19.6. Досрочное исполнение американских опционов на покупку: расчетный пример

Начнем с примера американского опциона “колл” на покупку акции, по которой выплачиваются дивиденды. На следующем рисунке показаны все основные принципы. Общий денежный эквивалент (дивиденд плюс курсовая стоимость акции) в каждом периоде либо возрастает на 41,91%, либо падает на 22,22%. Верхнее дерево на рисунке показывает изменение общего эквивалента.

В каждом периоде два процента общего денежного эквивалента выплачиваются в виде дивиденда, а оставшаяся сумма составляет курсовую стоимость за вычетом дивидендов, показанную в середине рисунка. Нижнее дерево на рисунке представляет выплату дивидендов.

|    | A                                                                        | B      | C                                                         | D                                   | E                                                                                     | F | G                                     | H                                                                                            | I | J | K | L        | M |
|----|--------------------------------------------------------------------------|--------|-----------------------------------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|---|---------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|----------|---|
| 1  | ОЦЕНИВАНИЕ АМЕРИКАНСКОГО ОПЦИОНА "ПУТ" ПО БИНОМ.МОДЕЛИ ЗА ЧЕТЫРЕ ПЕРИОДА |        |                                                           |                                     |                                                                                       |   |                                       |                                                                                              |   |   |   |          |   |
| 2  |                                                                          |        |                                                           |                                     |                                                                                       |   |                                       |                                                                                              |   |   |   |          |   |
| 3  | Переходы с учетом дивидендов                                             |        | Цены возможных состояний                                  |                                     |                                                                                       |   | Примечание: Период T = 1 делится на 4 |                                                                                              |   |   |   |          |   |
| 4  | Вверх                                                                    | 1,4191 | $q_u$                                                     | 0,3324                              | $\leftarrow = ((1-E14)*B9-B5)/(B4-B5)$                                                |   |                                       | подпериода. "Верхнее" состояние для каждого под-                                             |   |   |   |          |   |
| 5  | Вниз                                                                     | 0,7788 | $q_d$                                                     | 0,6528                              | $\leftarrow = (B4-(1-E14)*B9)/(B4-B5)$                                                |   |                                       | периода определяется как $\exp[\text{среднее}*\Delta t + \text{сигма}*\sqrt{\Delta t}]$ (A1) |   |   |   |          |   |
| 6  |                                                                          |        |                                                           |                                     |                                                                                       |   |                                       |                                                                                              |   |   |   |          |   |
| 7  | Нач.курс акций                                                           | 50     | Среднее                                                   | 20%                                 | а "нижнее" - как $\exp[\text{среднее}*\Delta t - \text{сигма}*\sqrt{\Delta t}]$ , где |   |                                       |                                                                                              |   |   |   |          |   |
| 8  | Цена исполнения                                                          | 30     | Сигма                                                     | 60%                                 | среднее = 20% и сигма = 60%. Годовая процентная                                       |   |                                       |                                                                                              |   |   |   |          |   |
| 9  | $1+r(\Delta t)$                                                          | 1,0151 | r                                                         | 6%                                  | ставка в 6% дискретизируется как $\exp[6\%/4] - 1$                                    |   |                                       |                                                                                              |   |   |   |          |   |
| 10 |                                                                          |        | T                                                         | 1                                   | для каждого подпериода                                                                |   |                                       |                                                                                              |   |   |   |          |   |
| 11 |                                                                          |        | Норма дивиденда                                           |                                     | Норма дивиденда составляет 8%;                                                        |   |                                       |                                                                                              |   |   |   |          |   |
| 12 |                                                                          |        | Годовая                                                   | 8%                                  | выплаты производятся ежеквартально.                                                   |   |                                       |                                                                                              |   |   |   |          |   |
| 13 |                                                                          |        | в $\Delta t$                                              | 2,00%                               | $\leftarrow = E13/4$                                                                  |   |                                       |                                                                                              |   |   |   |          |   |
| 14 |                                                                          |        |                                                           |                                     |                                                                                       |   |                                       |                                                                                              |   |   |   |          |   |
| 15 |                                                                          |        | Курс акций, включая дивиденды (как если бы дивиденд = 0%) |                                     |                                                                                       |   |                                       |                                                                                              |   |   |   |          |   |
| 16 |                                                                          |        |                                                           |                                     |                                                                                       |   |                                       |                                                                                              |   |   |   |          |   |
| 17 |                                                                          |        |                                                           |                                     |                                                                                       |   |                                       |                                                                                              |   |   |   | 202,7600 |   |
| 18 |                                                                          |        |                                                           |                                     |                                                                                       |   |                                       |                                                                                              |   |   |   | 142,8626 |   |
| 19 |                                                                          |        |                                                           |                                     |                                                                                       |   |                                       |                                                                                              |   |   |   | 111,2770 |   |
| 20 |                                                                          |        | 50,0000                                                   | 70,9534                             |                                                                                       |   |                                       |                                                                                              |   |   |   | 61,0701  |   |
| 21 |                                                                          |        |                                                           |                                     |                                                                                       |   |                                       |                                                                                              |   |   |   | 33,5160  |   |
| 22 |                                                                          |        |                                                           | 38,9400                             |                                                                                       |   |                                       |                                                                                              |   |   |   | 23,6183  |   |
| 23 |                                                                          |        |                                                           |                                     |                                                                                       |   |                                       |                                                                                              |   |   |   | 18,3940  |   |
| 24 |                                                                          |        |                                                           |                                     |                                                                                       |   |                                       |                                                                                              |   |   |   |          |   |
| 25 |                                                                          |        |                                                           |                                     |                                                                                       |   |                                       |                                                                                              |   |   |   |          |   |
| 26 |                                                                          |        |                                                           |                                     |                                                                                       |   |                                       |                                                                                              |   |   |   |          |   |
| 27 |                                                                          |        |                                                           | Курс акций после выплаты дивидендов |                                                                                       |   |                                       |                                                                                              |   |   |   |          |   |
| 28 |                                                                          |        |                                                           |                                     |                                                                                       |   |                                       |                                                                                              |   |   |   |          |   |
| 29 |                                                                          |        |                                                           |                                     |                                                                                       |   |                                       |                                                                                              |   |   |   | 198,7048 |   |
| 30 |                                                                          |        |                                                           |                                     |                                                                                       |   |                                       |                                                                                              |   |   |   | 140,0249 |   |
| 31 |                                                                          |        |                                                           |                                     |                                                                                       |   |                                       |                                                                                              |   |   |   | 109,0515 |   |
| 32 |                                                                          |        | 49,0000                                                   | 69,5343                             |                                                                                       |   |                                       |                                                                                              |   |   |   | 76,8473  |   |
| 33 |                                                                          |        |                                                           |                                     |                                                                                       |   |                                       |                                                                                              |   |   |   | 59,8487  |   |
| 34 |                                                                          |        |                                                           | 38,1612                             |                                                                                       |   |                                       |                                                                                              |   |   |   | 42,1747  |   |
| 35 |                                                                          |        |                                                           |                                     |                                                                                       |   |                                       |                                                                                              |   |   |   | 32,8457  |   |
| 36 |                                                                          |        |                                                           |                                     |                                                                                       |   |                                       |                                                                                              |   |   |   | 23,1460  |   |
| 37 |                                                                          |        |                                                           |                                     |                                                                                       |   |                                       |                                                                                              |   |   |   | 18,0261  |   |
| 38 |                                                                          |        |                                                           |                                     |                                                                                       |   |                                       |                                                                                              |   |   |   |          |   |
| 39 |                                                                          |        |                                                           |                                     |                                                                                       |   |                                       |                                                                                              |   |   |   |          |   |
| 40 |                                                                          |        |                                                           |                                     |                                                                                       |   |                                       |                                                                                              |   |   |   |          |   |
| 41 |                                                                          |        |                                                           |                                     |                                                                                       |   |                                       |                                                                                              |   |   |   |          |   |
| 42 |                                                                          |        |                                                           |                                     |                                                                                       |   |                                       |                                                                                              |   |   |   |          |   |
| 43 |                                                                          |        |                                                           |                                     |                                                                                       |   |                                       |                                                                                              |   |   |   | 4,0552   |   |
| 44 |                                                                          |        |                                                           |                                     |                                                                                       |   |                                       |                                                                                              |   |   |   | 2,8577   |   |
| 45 |                                                                          |        |                                                           |                                     |                                                                                       |   |                                       |                                                                                              |   |   |   | 2,2255   |   |
| 46 |                                                                          |        | 1,0000                                                    | 1,4191                              |                                                                                       |   |                                       |                                                                                              |   |   |   | 1,5683   |   |
| 47 |                                                                          |        |                                                           |                                     |                                                                                       |   |                                       |                                                                                              |   |   |   | 1,2214   |   |
| 48 |                                                                          |        |                                                           | 0,7788                              |                                                                                       |   |                                       |                                                                                              |   |   |   | 0,8607   |   |
| 49 |                                                                          |        |                                                           |                                     |                                                                                       |   |                                       |                                                                                              |   |   |   | 0,6703   |   |
| 50 |                                                                          |        |                                                           |                                     |                                                                                       |   |                                       |                                                                                              |   |   |   | 0,4724   |   |
| 51 |                                                                          |        |                                                           |                                     |                                                                                       |   |                                       |                                                                                              |   |   |   | 0,3679   |   |



Рассмотрим задачу о досрочном исполнении на следующем примере.

|    | A       | B                                                          | C        | D | E                                                                  | F | G                                 | H | I        |
|----|---------|------------------------------------------------------------|----------|---|--------------------------------------------------------------------|---|-----------------------------------|---|----------|
| 50 |         |                                                            |          |   |                                                                    |   |                                   |   |          |
| 51 |         |                                                            |          |   | =МАКС(G29-X; $q_u \cdot 153 + q_d \cdot 155$ )                     |   |                                   |   |          |
| 52 |         |                                                            |          |   | G29 - курс акций <i>после</i> выплаты дивидендов                   |   |                                   |   |          |
| 53 |         |                                                            |          |   |                                                                    |   |                                   |   | 168,7048 |
| 54 |         | Цена амер.опциона "колл"                                   |          |   |                                                                    |   | 110,0249                          |   |          |
| 55 |         |                                                            |          |   | 68,6739                                                            |   |                                   |   | 79,0515  |
| 56 |         |                                                            | 39,5343  |   |                                                                    |   | 46,8473                           |   |          |
| 57 | 20,3665 |                                                            |          |   | 24,1534                                                            |   |                                   |   | 29,8487  |
| 58 |         |                                                            | 11,0717  |   |                                                                    |   | 12,1747                           |   |          |
| 59 |         |                                                            |          |   | 4,6636                                                             |   |                                   |   | 2,8457   |
| 60 |         |                                                            |          |   |                                                                    |   | 0,9458                            |   |          |
| 61 |         |                                                            |          |   |                                                                    |   |                                   |   | 0,0000   |
| 62 |         |                                                            |          |   |                                                                    |   |                                   |   |          |
| 63 |         |                                                            |          |   |                                                                    |   | = $q_u \cdot 164 + q_d \cdot 166$ |   |          |
| 64 |         | Цена европ.опциона "колл" на акции <i>после</i> дивидендов |          |   |                                                                    |   |                                   |   | 168,7048 |
| 65 |         |                                                            |          |   |                                                                    |   | 107,6710                          |   |          |
| 66 |         |                                                            |          |   | 65,6530                                                            |   |                                   |   | 79,0515  |
| 67 |         |                                                            | 36,7652  |   |                                                                    |   | 45,7570                           |   |          |
| 68 | 19,1171 |                                                            |          |   | 22,8955                                                            |   |                                   |   | 29,8487  |
| 69 |         |                                                            | 10,5675  |   |                                                                    |   | 11,7778                           |   |          |
| 70 |         |                                                            |          |   | 4,5318                                                             |   |                                   |   | 2,8457   |
| 71 |         |                                                            |          |   |                                                                    |   | 0,9458                            |   |          |
| 72 |         |                                                            |          |   |                                                                    |   |                                   |   | 0,0000   |
| 73 |         |                                                            |          |   |                                                                    |   |                                   |   |          |
| 74 |         |                                                            |          |   | =ЕСЛИ(G29-X > $q_u \cdot 153 + q_d \cdot 155$ , "Досрочн.", "Нет") |   |                                   |   |          |
| 75 |         |                                                            |          |   |                                                                    |   |                                   |   |          |
| 76 |         | Точки досрочного исполнения                                |          |   |                                                                    |   |                                   |   | Досрочн. |
| 77 |         |                                                            |          |   |                                                                    |   |                                   |   |          |
| 78 |         |                                                            | Досрочн. |   | Досрочн.                                                           |   |                                   |   | Досрочн. |
| 79 | Нет     |                                                            |          |   | Досрочн.                                                           |   |                                   |   |          |
| 80 |         |                                                            | Нет      |   |                                                                    |   | Досрочн.                          |   |          |
| 81 |         |                                                            |          |   | Нет                                                                |   |                                   |   | Досрочн. |
| 82 |         |                                                            |          |   |                                                                    |   | Нет                               |   |          |
| 83 |         |                                                            |          |   |                                                                    |   |                                   |   | Нет      |

Чтобы рассчитать цену американского опциона "колл", в каждом узле необходимо сравнить следующие величины:

- цену опциона, определяемую как приведенную за следующий период стоимость по ценам возможных состояний (например,  $q_u 153 + q_d 155$  в одной из ячеек выше на рисунке);
- цену опциона в качестве немедленно исполняемого (в приведенном примере это  $G29 - X$ ).

Если вторая величина больше первой, опцион исполняется немедленно.

### 19.7. Программа на VBA для предела досрочного исполнения опциона на покупку акций с дивидендами

Программа для расчета предела досрочного исполнения опциона “колл” (определяемого как *самая низкая курсовая стоимость акции* в момент  $t$ , для которой имеет смысл исполнять опцион) дает на выходе данные, которые показаны на нижеприведенном рисунке.

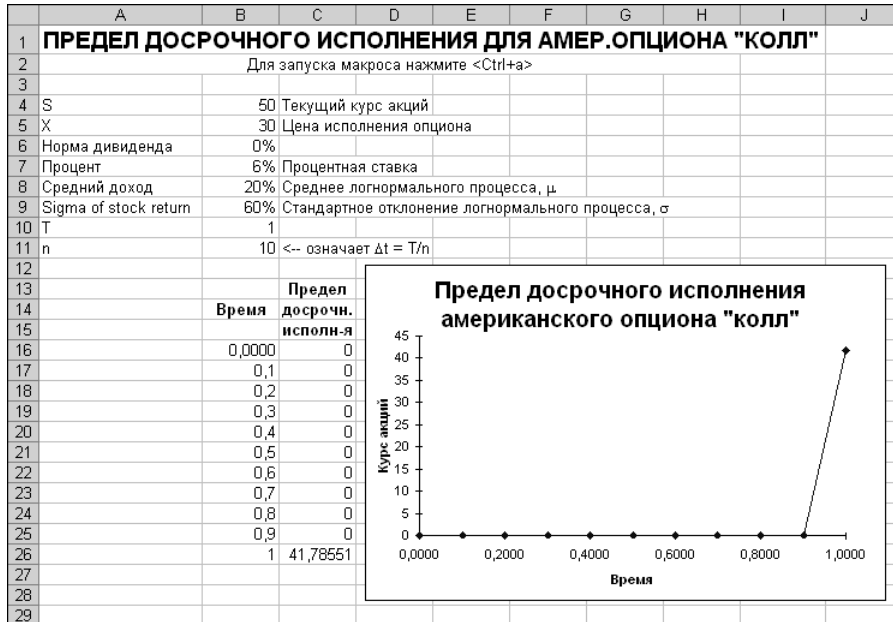


Сделаем два общих замечания.

- Если текущий момент находится далеко от даты погашения опциона  $T$ , то исполнять опцион досрочно нет смысла.
- Как только досрочное исполнение становится потенциально оптимальным, предел досрочного исполнения убывает по мере приближения даты погашения опциона  $T$ .<sup>4</sup> Объясняется это тем, что при досрочном исполнении опциона ищется компромисс между захватом выплаты дивидендов (что достигается досрочным исполнением) и ценой ожидания возрастания курса.

Подставляя в расчетную модель условия отсутствия дивидендов, получаем в нашей таблице стандартный результат: досрочное исполнение опциона “колл” при отсутствии дивидендов не бывает целесообразным.

<sup>4</sup> Как уже отмечалось (для пределов досрочного исполнения опциона “пут”), волнообразность предела досрочного исполнения опциона “колл” возникает вследствие биномиальной аппроксимации процесса изменения курсовой цены.



Ниже приведена соответствующая программа на языке VBA.

```

Sub CallBoundary()
    Application.ScreenUpdating = False
    n = Worksheets("Early exercise").Range("n")
        'деление года на подпериоды
    S = Worksheets("Early exercise").Range("S")
        'начальный курс акций
    X = Worksheets("Early exercise").Range("X")
        'цена исполнения опциона
    divYld = Worksheets("Early exercise").Range("divrate") _
        / n 'ставка дивиденда
    delta_t = Worksheets("Early exercise").Range("T") / n
    up = Exp(Worksheets("Early exercise").Range("mean") / _
        n + Worksheets("Early exercise").Range("sigma") _
        * Sqr(delta_t))
    down = Exp(Worksheets("Early exercise").Range("mean") _
        / n - Worksheets("Early exercise").Range("sigma") _
        * Sqr(delta_t))
    R = Exp(Worksheets("Early exercise").Range("interest") _
        * delta_t)
    qup = (R * (1 - divYld) - down) / (R * (up - down))
    qdown = 1 / R - qup

    Dim OptionReturnEnd() As Double
    Dim OptionReturnMiddle() As Double
    Dim boundary() As Double
    ReDim OptionReturnEnd(n + 1)
    ReDim boundary(n + 1, 2)

```

```

Worksheets("Early exercise").Range("output").Clear

For Index = 0 To n
    boundary(Index, 1) = Index
    boundary(Index, 2) = 0
Next Index

For state = 0 To n + 1
    OptionReturnEnd(state) = 0
Next state

For Index = n To 0 Step -1
    ReDim OptionReturnMiddle(Index + 1)
    For state = Index To 0 Step -1

        stock = S * up ^ state * down ^ (Index - state) * _
            * (1 - divYld)
        optionalive = qdown * OptionReturnEnd(state) + _
            qup * OptionReturnEnd(state + 1)
        If stock - X > optionalive Then
            boundary(Index, 2) = stock:
            OptionReturnMiddle(state) = stock - X:
        Else: OptionReturnMiddle(state) = qdown * _
            OptionReturnEnd(state) + _
            qup * OptionReturnEnd(state + 1)
        End If
    Next state
    ReDim OptionReturnEnd(Index)
    For state = 0 To Index
        OptionReturnEnd(state) = _
            OptionReturnMiddle(state)
    Next state
Next Index

For Index = 0 To n
    Worksheets("Early exercise").Range("output"). _
        Cells(Index, 1) = boundary(Index, 1) * delta_t
    Worksheets("Early exercise").Range("output"). _
        Cells(Index, 2) = boundary(Index, 2)
Next Index
End Sub

```

---

## Упражнения

1. Рассмотрим американский опцион на продажу акции по текущему курсу, равному  $S = 50$ . Найдите предел досрочного исполнения при  $t = 0,5$  для последовательности таких опционов с  $T = 1, 2, 3, 4, \dots, 10$ . Предполагается, что

безрисковая ставка дохода равна 8%, а  $\sigma = 30\%$ . Какие выводы можно сделать из результатов?

2. Рассмотрим последовательность американских опционов на продажу акций с текущим курсом  $S = 100$ . Пусть все опционы имеют цену исполнения  $X = 120$  и срок погашения  $T = 1$ . Разделим этот интервал на подынтервалы длиной  $\Delta t = 0,1$  (т.е. установим в таблице  $n = 10$ ). Сравните пределы досрочного исполнения для  $\sigma = 20\%$  и  $\sigma = 40\%$ . (Для этого постройте график!) Можно ли дать наглядное объяснение этим результатам?

### Приложение. Доказательство

Докажем следующее утверждение относительно досрочного исполнения: если в момент времени  $t$  опцион на продажу (“пут”) исполняется при курсовой цене акций  $S$ , то он был бы исполнен в этот же момент  $t$  и при всех курсовых ценах ниже  $S$ .

Начнем с рассмотрения одного учетного периода времени, оставшегося до даты погашения. Пусть досрочное исполнение является оптимальным в более высоком узле, где предыдущий курс акций равен  $S$ :

$$X - Su > q_u \max(X - Su^2, 0) + q_d \max(X - Sud, 0).$$

Чтобы решить досрочно исполнить опцион при курсе  $Sd$ , необходимо показать, что

$$X - Sd > q_u \max(X - Sud, 0) + q_d \max(X - Sd^2, 0).$$

Вначале заметим, что поскольку  $X - Su > 0$ , отсюда следует, что

$$\max(X - Sud, 0) = X - Sud \text{ и } \max(X - Sd^2, 0) = X - Sd^2.$$

Поэтому можно переписать наше критериальное неравенство в виде

$$X - Sd > q_u (X - Sud) + q_d (X - Sd^2).$$

Преобразование правой части дает нам

$$q_u (X - Sud) + q_d (X - Sd^2) = \frac{X}{1+r} - Sd.$$

(Это следует из соотношений  $q_u + q_d = \frac{1}{1+r}$  и  $q_u Su + q_d Sd = S$ .) Таким образом, необходимо выяснить, выполняется ли неравенство

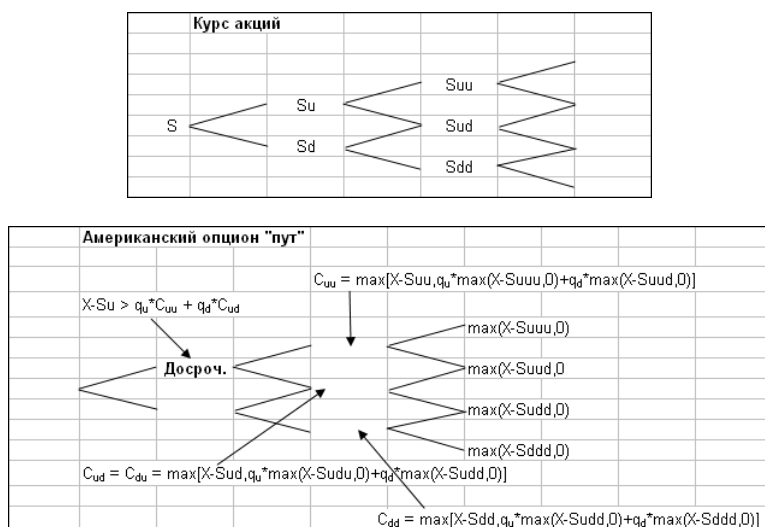
$$X - Sd > \frac{X}{1+r} - Sd \Rightarrow X > \frac{X}{1+r}.$$

А это, очевидно, имеет место, поскольку процентная ставка  $r > 0$ . Заметим, что это доказательство действительно и для непостоянных цен возможных состояний (т.е. не для рынка, описываемого моделью Блэка–Скоулза).

### Два периода до даты погашения: общий случай

Теперь рассмотрим два периода (или большее количество) до срока погашения опциона. При  $S_u$  предполагаем досрочное исполнение, т.е.

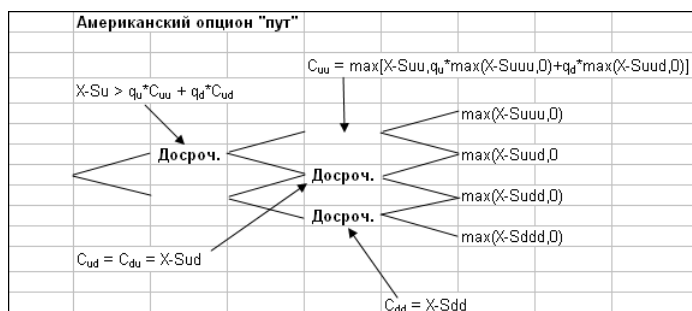
$$X - S_u > q_u C_{uu} + q_d C_{ud}.$$



Необходимо доказать, что и при  $S_d$  будет иметь место досрочное исполнение:  $X - S_d > q_u C_{du} + q_d C_{dd}$ . Известны следующие правила:  $C > C_{ud} > C_{udd} \dots$ . Аналогично,  $C < C_d < C_{dd} \dots$ . Таким образом, поскольку  $X - S_u > q_u C_{uu} + q_d C_{ud}$ , отсюда следует, что

$$X - S_u > q_u C_{uu} + q_d C_{ud} > q_u C_{uud} + q_d C_{udd}.$$

Далее,  $X - S_{ud} > X - S_u$ . Поэтому досрочное исполнение имеет место при  $ud$ , а из первой части доказательства следует, что досрочное исполнение также имеет место при  $dd$ . Поэтому можно утверждать следующее.



Осталось установить, выполняется ли неравенство  $X - S_d > q_u C_{du} + q_d C_{dd}$ . После некоторых преобразований становится очевидно, что оно всегда выполняется при положительной ставке дохода,  $r > 0$ :

$$\begin{aligned}
 X - S_d &> q_u C_{du} + q_d C_{dd} = \\
 &= q_u (X - S_{ud}) + q_d (X - S_{dd}) = \\
 &= \frac{X}{1 + r} - q_u S_{ud} - q_d S_{dd} = \frac{X}{1 + r} - S_d.
 \end{aligned}$$

Оставшаяся часть доказательства следует по индукции.





---

## IV Облигации и дюрация

Главы 20–24 посвящены рассмотрению облигаций и временной структуры процентных ставок. В главах 20 и 21 рассматриваются классические постановки задач о дюрации (сроке до погашения) и иммунизации. В главе 20 разрабатывается базовая концепция дюрации по Макалею (Macaulay). Функция ДЛИТ (Duration) среды Excel несколько громоздка и трудоемка в применении, поэтому мы разработали и реализовали новую, более простую формулу для нее с помощью языка VBA. В главе 21 рассматривается использование дюрации для иммунизирования портфелей облигаций. В главе 22 демонстрируется моделирование временной структуры с помощью полиномиальной аппроксимации. Такие аппроксимации широко применяются в практике и вполне работоспособны в ряде приложений. В главе 23 с помощью марковского процесса и имеющейся в наличии информации о вероятностях дефолта и долях вложенного в облигации капитала, подлежащих возвращению, моделируется ожидаемая ставка доходности подверженных риску корпоративных облигаций. Наконец, в главе 24, написанной совместно с Цви Винером (Zvi Wiener), рассматривается соотношение между дюрацией и облигацией с дешевой поставкой в фьючерсных контрактах на казначейские облигации.



---

# 20 Дюрация

---

## 20.1. Введение

Дюрация (что дословно означает *срок* или *длительность*) — это мера чувствительности курса облигации к изменениям в процентной ставке, по которой эта облигация дисконтируется. Она широко используется в качестве меры риска облигаций (т.е. чем выше дюрация, тем более подверженной риску является облигация). В этой главе будет рассмотрена основная разновидность дюрации — дюрация по Макалею (*Macauley duration*), или средневзвешенный срок до погашения, — и ее определение для случая, когда временная структура постоянна. В главе 21 будет рассмотрено применение дюрации в схемах иммунизации.

Рассмотрим облигацию с выплатами  $C_t$ , где  $t = 1, \dots, N$ . Обычно первые  $N-1$  выплат — это проценты, а  $C_N$  — это выплата основной суммы плюс последняя процентная выплата. Если временная структура постоянна, а ставка дисконтирования для всех выплат равна  $r$ , то текущая рыночная стоимость облигации будет равна

$$P = \sum_{t=1}^N \frac{C_t}{(1+r)^t}.$$

Дюрация, или мера длительности, по Макалею (а в этой и следующих главах мы всегда будем употреблять слово “дюрация” только в этом смысле) определяется так:

$$D = \frac{1}{P} \sum_{t=1}^N \frac{tC_t}{(1+r)^t}.$$

В разделе 20.3 дается толкование смысла этой формулы. Но прежде чем перейти к нему, стоит рассмотреть, как дюрация вычисляется в Excel.

---

## 20.2. Примеры

Рассмотрим две облигации. Облигация А выпущена только что. Ее номинал составляет 1000 долл., текущая рыночная процентная ставка — 7%, а срок погашения — 10 лет. Облигация В была выпущена пять лет назад, когда процентная ставка была выше. Эта облигация имеет номинал 1000 долл. и купонную ставку 13%. На момент выпуска ее срок погашения составлял 15 лет, так что сейчас

осталось еще десять лет. Поскольку текущая рыночная процентная ставка составляет 7%, рыночная стоимость облигации В дается формулой

$$\$1421,41 = \sum_{i=1}^{10} \frac{\$130}{(1,07)^i} + \frac{\$1000}{(1,07)^{10}}.$$

На первый раз (но только на первый!) дюрацию обеих облигаций стоит вычислить длинным путем. Воспользуемся следующей таблицей Excel.

|    | A                     | B                | C                                            | D                                                  | E                | F                                            | G |
|----|-----------------------|------------------|----------------------------------------------|----------------------------------------------------|------------------|----------------------------------------------|---|
| 1  | ПРЯМОЙ РАСЧЕТ ДЮРАЦИИ |                  |                                              |                                                    |                  |                                              |   |
| 2  |                       |                  |                                              |                                                    |                  |                                              |   |
| 3  | Доходность            | 7%               |                                              |                                                    |                  |                                              |   |
| 4  |                       |                  |                                              |                                                    |                  |                                              |   |
| 5  | Год                   | C <sub>t,A</sub> | r*C <sub>t,A</sub> / PA*(1+ДСП) <sup>t</sup> |                                                    | C <sub>t,B</sub> | r*C <sub>t,B</sub> / PB*(1+ДСП) <sup>t</sup> |   |
| 6  | 1                     | 70               | 0,0654                                       |                                                    | 130              | 0,0855                                       |   |
| 7  | 2                     | 70               | 0,1223                                       |                                                    | 130              | 0,1598                                       |   |
| 8  | 3                     | 70               | 0,1714                                       |                                                    | 130              | 0,2240                                       |   |
| 9  | 4                     | 70               | 0,2136                                       |                                                    | 130              | 0,2791                                       |   |
| 10 | 5                     | 70               | 0,2495                                       |                                                    | 130              | 0,3260                                       |   |
| 11 | 6                     | 70               | 0,2799                                       |                                                    | 130              | 0,3657                                       |   |
| 12 | 7                     | 70               | 0,3051                                       |                                                    | 130              | 0,3987                                       |   |
| 13 | 8                     | 70               | 0,3259                                       |                                                    | 130              | 0,4258                                       |   |
| 14 | 9                     | 70               | 0,3427                                       |                                                    | 130              | 0,4477                                       |   |
| 15 | 10                    | 1070             | 5,4393                                       |                                                    | 1130             | 4,0413                                       |   |
| 16 |                       | Курс             | Дюрация                                      |                                                    | Курс             | Дюрация                                      |   |
| 17 |                       | \$ 1 000         | 7,5152                                       |                                                    | \$ 1 421         | 6,7535                                       |   |
| 18 |                       | =ЧПС(B3,B6:B15)  |                                              |                                                    | =СУММ(F6:F15)    |                                              |   |
| 19 |                       |                  |                                              |                                                    |                  |                                              |   |
| 20 |                       |                  |                                              |                                                    |                  |                                              |   |
| 21 | Формула Excel         |                  | 7,5152                                       | <-- =ДЛИТ(ДАТА(1996,12,3),ДАТА(2006,12,3),7%,B3,1) |                  |                                              |   |

Как и следовало ожидать, дюрация облигации А больше, чем облигации В, поскольку полная выплата по облигации А требует большего времени, чем по облигации В. Взглянем на это соотношение с другой точки зрения. Чистая приведенная стоимость выплаты 1-го года по облигации А (70 долл.) составляет 6,54% ее цены, тогда как аналогичная величина для облигации В (130 долл.) равна 8,55% ее цены. Цифры для 2-го года составляют соответственно 6,11 и 7,99%. (Чтобы получить цифры второго года, следует поделить соответствующую строку приведенной выше таблицы на 2, поскольку в формуле для дюрации каждая выплата взвешивается по периоду, в котором она производится.)

### 20.2.1. Расчет по формуле Excel

В среде Excel есть две формулы для дюрации: ДЛИТ (Duration) и МДЛИТ (MDuration). Функция МДЛИТ (MDuration), несколько неточно именуемая в Excel дюрацией по Макалею, определяется следующим образом:

$$\text{МДЛИТ} = \frac{\text{Дюрация}}{\left(1 + \frac{\text{Доходность к погашению}}{\text{Кол-во купонных выплат}}\right)}.$$

Обе формулы имеют один и тот же синтаксис. Например, для ДЛИТ этот синтаксис таков:

ДЛИТ(дата\_согл, дата\_вступл\_в\_силу, купон, доход, частота, базис)

Здесь обозначено:

- `дата_согл` — дата заключения соглашения (сделки), т.е. дата приобретения облигации;
- `дата_вступл_в_силу` — дата погашения (Название параметра, взятое из справки Excel, не вполне точно. — *Примеч. пер.*);
- `купон` — фиксированная процентная ставка дохода по облигации;
- `доход` — доходность к получению до срока погашения облигации;
- `частота` — количество выплат по облигации в год;
- `базис` — “исчисление дней”, т.е. способ подсчета количества дней в году; обозначается числовым кодом от 0 до 4:
  - 0 или отсутствует — американское (NASD) 30/360;
  - 1 — действительное/действительное;
  - 2 — действительное/360;
  - 3 — действительное/365;
  - 4 — европейское 30/360.

Формула ДЛИТ (Duration) дает стандартную дюрацию по Макалею. Формула МДЛИТ (MDuration) может применяться для расчета неустойчивости конъюнктуры облигации (см. раздел 20.3).

При реализации обеих формул дюрации могут возникнуть некоторые сложности, поскольку в них требуется указывать дату в виде последовательного номера дня — как для даты приобретения, так и для даты погашения. На предыдущем рисунке формула Excel реализована в ячейке C21; в качестве даты приобретения облигации А принято 3 декабря 1996 г., а в качестве даты ее погашения — 3 декабря 2006 г. Даты выбраны произвольно. Последний параметр формулы дюрации Excel — базис, или исчисление дней, — необязателен, и его можно опустить<sup>1</sup>.

## 20.3. Смысл величины дюрации

В этом разделе будут рассмотрены три различных смысловых значения дюрации, каждый из которых по-своему интересен и важен.

### 20.3.1. Взвешенное среднее выплат по облигации

Как изначально определил смысл дюрации сам Макалей в 1938 г., дюрация — это взвешенное среднее выплат по облигации. Перепишем формулу дюрации в следующем виде:

<sup>1</sup> Вставка дат в порядковых форматах в формулы Excel для дюрации не всегда выполняется удобно. Позже в этой главе мы решим эту проблему, реализовав более простую формулу дюрации на языке VBA. А пока отложим этот вопрос до изучения темы расчета дюрации облигаций при неравномерном распределении выплат во времени (раздел 20.5).

$$D = \frac{1}{P} \sum_{t=1}^N \frac{tC_t}{(1+r)^t} = \sum_{t=1}^N \left[ \frac{C_t/P}{(1+r)^t} \right] \times t.$$

Обратите внимание, что сумма всех членов в скобках,  $\left[ \frac{C_t/P}{(1+r)^t} \right]$ , равна нулю. Это следует из определения курсовой цены облигации; каждый из этих членов является долей цены облигации, которая соответствует выплате в момент  $t$ . В формуле дюрации каждый из членов  $\left[ \frac{C_t/P}{(1+r)^t} \right]$  умножен на момент времени, в который происходит выплата. Таким образом, *дюрация представляет собой взвешенное (с временными коэффициентами) среднее значение дисконтированных выплат по облигации, рассматриваемых как составляющие курсовой стоимости облигации.*

### 20.3.2. Эластичность курса облигации относительно ставки дисконтирования

Дюрацию можно рассматривать и с другой точки зрения — как *эластичность* (на математическом языке скорее *чувствительность*. — *Примеч. пер.*) курса облигации по отношению к ее ставке дисконтирования. Тогда становится понятно, почему дюрация может служить мерой неустойчивости конъюнктуры облигации, а также почему ее часто используют как меру подверженности облигации риску. Для обоснования этого толкования величины дюрации возьмем производную цены облигации по ее текущей процентной ставке:

$$\frac{dP}{dr} = \sum_{t=1}^N \frac{-tC_t}{(1+r)^{t+1}}.$$

После некоторых преобразований имеем

$$\frac{dP}{dr} = \sum_{t=1}^N \frac{-tC_t}{(1+r)^{t+1}} = -\frac{DP}{1+r}.$$

Из этой формулы можно вывести два полезных толкования величины дюрации.

- Во-первых, дюрацию можно воспринимать как *эластичность курса облигации по отношению к коэффициенту дисконтирования*, где под коэффициентом дисконтирования (discount factor) понимается величина  $(1+r)$ :

$$\frac{dP/P}{dr/(1+r)} = \frac{\text{Относительное изменение курса облигации}}{\text{Отн. изменение коэффициента дисконтирования}} = -D.$$

- Во-вторых, дюрацию можно использовать как *меру неустойчивости (волатильности) курса облигации*, переписав предыдущую формулу в виде

$$\frac{dP}{P} = -D \frac{dr}{1+r}.$$

Теперь вернемся к примерам предыдущего раздела. Предположим, что рыночная процентная ставка возросла на 10% своей величины, с 7 до 7,7%. Как изменится курс облигаций? Курс облигации А станет следующим:

$$952,39 = \sum_{t=1}^{10} \frac{\$70}{(1,077)^t} + \frac{\$1000}{(1,077)^{10}}.$$

Аналогично, курс облигации В становится равным

$$1360,50 = \sum_{t=1}^{10} \frac{\$130}{(1,077)^t} + \frac{\$1000}{(1,077)^{10}}.$$

Как и предсказывает формула волатильности курса, изменения в курсах облигаций аппроксимируются формулой  $\Delta P \cong -DP\Delta r/(1+r)$ . Чтобы убедиться в этом, проведем расчет для каждой из облигаций.

|    | A                                                      | B          | C                                                                | D        | E          | F                   | G                        | H | I |
|----|--------------------------------------------------------|------------|------------------------------------------------------------------|----------|------------|---------------------|--------------------------|---|---|
| 24 | Аппроксимация колебаний курса с использованием дюрации |            |                                                                  |          |            |                     |                          |   |   |
| 25 |                                                        |            |                                                                  |          |            |                     |                          |   |   |
| 26 |                                                        | Фактич.    |                                                                  |          |            |                     |                          |   |   |
| 27 | Облигация                                              | $\Delta P$ | D                                                                | P        | $\Delta r$ | $-DP\Delta r/(1+r)$ |                          |   |   |
| 28 | A                                                      | -47,61     | 7,5152                                                           | \$ 1 000 | 0,007      | -49,17              | <-- =-C28*D28*E28/(1,07) |   |   |
| 29 | B                                                      | -60,92     | 6,7535                                                           | \$ 1 421 | 0,007      | -62,80              |                          |   |   |
| 30 |                                                        |            |                                                                  |          |            |                     |                          |   |   |
| 31 |                                                        |            | =-(ПС(7%,10,70)+1000/(1,07)*10-(ПС(7,7%,10,70)+1000/(1,077)*10)) |          |            |                     |                          |   |   |
| 32 |                                                        |            |                                                                  |          |            |                     |                          |   |   |

Заметим, что вместо применения функции Excel длит (Duration) и умножения на  $\Delta r/(1+r)$  можно было бы воспользоваться функцией мдлит (MDuration) и умножить на  $\Delta r$ .

|    | A                                                                             | B | C      | D                                                               | E | F | G | H |
|----|-------------------------------------------------------------------------------|---|--------|-----------------------------------------------------------------|---|---|---|---|
| 34 | Использование формулы МДЛИТ:                                                  |   |        |                                                                 |   |   |   |   |
| 35 | М-дюрация облигации А                                                         |   | 7,0236 | <-- =МДЛИТ(ДАТА(1996;12;3),ДАТА(2006;12;3),7%,7%,1)             |   |   |   |   |
| 36 | $\Delta r$                                                                    |   | 0,007  |                                                                 |   |   |   |   |
| 37 | Курс облигаци                                                                 |   | 1000   |                                                                 |   |   |   |   |
| 38 | $-DP\Delta r/(1+r)$                                                           |   | 49,17  | Произведение чисел из трех верхних ячеек = -DP $\Delta r/(1+r)$ |   |   |   |   |
| 39 |                                                                               |   |        |                                                                 |   |   |   |   |
| 40 | М-дюрация облигации В                                                         |   | 6,3117 | <-- =МДЛИТ(ДАТА(1999;10;31),ДАТА(2009;10;31),13%,7%,1)          |   |   |   |   |
| 41 | $\Delta r$                                                                    |   | 0,007  |                                                                 |   |   |   |   |
| 42 | Курс облигаци                                                                 |   | 1 421  |                                                                 |   |   |   |   |
| 43 | $-DP\Delta r/(1+r)$                                                           |   | 62,80  | <-- =C42*C41*C40                                                |   |   |   |   |
| 44 |                                                                               |   |        |                                                                 |   |   |   |   |
| 45 | Примечание: в формулах в яч.С35 и С40 используются разные даты! Это не играет |   |        |                                                                 |   |   |   |   |
| 46 | роли в функциях Excel ДЛИТ и МДЛИТ, если интервалы между датами одинаковы     |   |        |                                                                 |   |   |   |   |
| 47 | (в данном случае - 10 лет).                                                   |   |        |                                                                 |   |   |   |   |

### 20.3.3. Формула Бэбкока: дюрация как выпуклая линейная комбинация доходов по облигациям

Третья интерпретация величины дюрации дается формулой Бэбкока (Babcock, 1985). Эта формула показывает, что дюрация представляет собой взвешенное среднее двух факторов:

$$D = N \left( 1 - \frac{y}{r} \right) + \frac{y}{r} \text{ПСНП}(r, N) (1 + r).$$

Здесь “текущая ставка дохода” по облигации равна

$$y = \frac{\text{Купон облигации}}{\text{Курс облигации}}.$$

Приведенная стоимость начисленных процентов за  $N$  учетных периодов составляет

$$\text{ПСНП}(r, N) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{(1+r)^i}.$$

Эта формула дает еще два полезных угла зрения на величину дюрации.

- Дюрация — это взвешенное среднее срока погашения облигации и домноженной на  $(1+r)$  величины  $\text{ПСНП}$ , соответствующей облигации. (Кстати, величина  $\text{ПСНП}$  вычисляется с помощью функции Excel ПС (PV) с аргументами  $r$ ,  $N$  и  $-1$ .)
- Во многих случаях текущая ставка дохода  $y$  незначительно отличается от доходности к получению до срока погашения  $r$ . Тогда дюрация не слишком отличается от  $(1+r)$   $\text{ПСНП}$ .

В отличие от двух предыдущих интерпретаций дюрации формула Бэбкока справедлива только для облигации с постоянными процентными (купонными) выплатами и единовременной выплатой основной суммы в момент  $N$ . Формула не распространяется на случай неравномерных во времени выплат  $C_t$ .

Далее на рисунке показана реализация формулы Бэбкока для облигации В.

|    | A                      | B        | C                                           | D | E |
|----|------------------------|----------|---------------------------------------------|---|---|
| 49 | <b>Формула Бэбкока</b> |          |                                             |   |   |
| 50 | N                      | 10       | Срок погашения                              |   |   |
| 51 | r                      | 7%       | Текущая рыночная процентная ставка          |   |   |
| 52 | C                      | 13%      | Купонная ставка                             |   |   |
| 53 | Курс                   | 1 421,41 | <-- =ПС(B51,B50,-B52*1000)+1000/(1+B51)*B50 |   |   |
| 54 | y                      | 9,15%    | Текущий доход                               |   |   |
| 55 | ПСНП(r,N)              | 7,02     | <-- =ПС(B51,B50,-1)                         |   |   |
| 56 | D                      | 6,7535   | <-- =B50*(1-B54/B51)+B54/B51*B55*(1+B51)    |   |   |



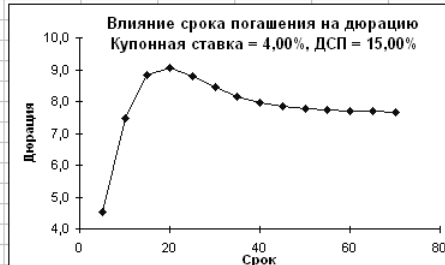
## 20.4. Характер изменения дюрации

Интуиция подсказывает, что дюрация должна быть возрастающей функцией срока погашения облигации и убывающей функцией купонных выплат. Однако, как показывают следующие примеры, интуиция иногда ошибается.

|    | A                                                    | B          | C                                       | D        | E | F | G | H | I |
|----|------------------------------------------------------|------------|-----------------------------------------|----------|---|---|---|---|---|
| 1  | ВЛИЯНИЕ КУПОННОЙ СТАВКИ И СРОКА ПОГАШЕНИЯ НА ДЮРАЦИЮ |            |                                         |          |   |   |   |   |   |
| 2  |                                                      |            |                                         |          |   |   |   |   |   |
| 3  | Текущая дата                                         | 21.05.1996 | <-- =DATE(1996,5,21)                    |          |   |   |   |   |   |
| 4  | Срок, в годах                                        | 21         |                                         |          |   |   |   |   |   |
| 5  | Дата погашения                                       | 21.05.2017 | <-- =DATE(1996+B4,5,21)                 |          |   |   |   |   |   |
| 6  | ДСП                                                  | 15%        | Yield to maturity (i.e., discount rate) |          |   |   |   |   |   |
| 7  | Купонная ставка                                      | 4%         |                                         |          |   |   |   |   |   |
| 8  | Номинал                                              | 1 000      |                                         |          |   |   |   |   |   |
| 9  |                                                      |            |                                         |          |   |   |   |   |   |
| 10 | Дюрация                                              | 9,0110     | <-- =ДЛИТ(B3,B5,B7,B6,1)                |          |   |   |   |   |   |
| 11 |                                                      |            |                                         |          |   |   |   |   |   |
| 12 | Таблица данных: влияние срока погашения на дюрацию   |            |                                         |          |   |   |   |   |   |
| 13 |                                                      |            | 9,0110                                  | <-- =B10 |   |   |   |   |   |
| 14 |                                                      | 5          | 4,5163                                  |          |   |   |   |   |   |
| 15 |                                                      | 10         | 7,4827                                  |          |   |   |   |   |   |
| 16 |                                                      | 15         | 8,8148                                  |          |   |   |   |   |   |
| 17 |                                                      | 20         | 9,0398                                  |          |   |   |   |   |   |
| 18 |                                                      | 25         | 8,7881                                  |          |   |   |   |   |   |
| 19 |                                                      | 30         | 8,4461                                  |          |   |   |   |   |   |
| 20 |                                                      | 35         | 8,1633                                  |          |   |   |   |   |   |
| 21 |                                                      | 40         | 7,9669                                  |          |   |   |   |   |   |
| 22 |                                                      | 45         | 7,8421                                  |          |   |   |   |   |   |
| 23 |                                                      | 50         | 7,7668                                  |          |   |   |   |   |   |
| 24 |                                                      | 55         | 7,7228                                  |          |   |   |   |   |   |
| 25 |                                                      | 60         | 7,6977                                  |          |   |   |   |   |   |
| 26 |                                                      | 65         | 7,6837                                  |          |   |   |   |   |   |
| 27 |                                                      | 70         | 7,6759                                  |          |   |   |   |   |   |

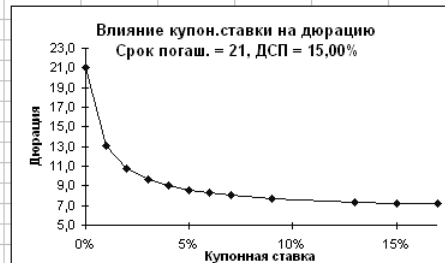
**Влияние срока погашения на дюрацию**  
Купонная ставка = 4,00%, ДСП = 15,00%

| Срок | Дюрация |
|------|---------|
| 5    | 4,5163  |
| 10   | 7,4827  |
| 15   | 8,8148  |
| 20   | 9,0398  |
| 25   | 8,7881  |
| 30   | 8,4461  |
| 35   | 8,1633  |
| 40   | 7,9669  |
| 45   | 7,8421  |
| 50   | 7,7668  |
| 55   | 7,7228  |
| 60   | 7,6977  |
| 65   | 7,6837  |
| 70   | 7,6759  |



При возрастании процентной (купонной) ставки дюрация облигации совершенно определенно убывает. Это продемонстрировано в следующей таблице на графике (представляющем собой иллюстрацию к предыдущему примеру).

|    | A                                                         | B   | C       | D        | E | F | G | H | I |
|----|-----------------------------------------------------------|-----|---------|----------|---|---|---|---|---|
| 31 | <b>Таблица данных: влияние купонной ставки на дюрацию</b> |     |         |          |   |   |   |   |   |
| 32 |                                                           |     | 9,0110  | <-- =B10 |   |   |   |   |   |
| 33 |                                                           | 0%  | 21,0000 |          |   |   |   |   |   |
| 34 |                                                           | 1%  | 13,1204 |          |   |   |   |   |   |
| 35 |                                                           | 2%  | 10,7865 |          |   |   |   |   |   |
| 36 |                                                           | 3%  | 9,6677  |          |   |   |   |   |   |
| 37 |                                                           | 4%  | 9,0110  |          |   |   |   |   |   |
| 38 |                                                           | 5%  | 8,5792  |          |   |   |   |   |   |
| 39 |                                                           | 6%  | 8,2736  |          |   |   |   |   |   |
| 40 |                                                           | 7%  | 8,0459  |          |   |   |   |   |   |
| 41 |                                                           | 9%  | 7,7294  |          |   |   |   |   |   |
| 42 |                                                           | 13% | 7,3707  |          |   |   |   |   |   |
| 43 |                                                           | 15% | 7,2593  |          |   |   |   |   |   |
| 44 |                                                           | 17% | 7,1729  |          |   |   |   |   |   |
| 45 |                                                           |     |         |          |   |   |   |   |   |
| 46 |                                                           |     |         |          |   |   |   |   |   |



## 20.5. Дюрация облигаций с неравномерными выплатами

Формулы дюрации, рассматриваемые до сих пор, основывались на предположении о равномерном распределении выплат по облигациям во времени. Для облигаций это практически всегда так и есть, *за исключением первого платежа*. Для примера рассмотрим облигацию, проценты по которой выплачиваются 1 мая каждого года: 1997, 1998, ..., 2010, а номинал выплачивается единовременно в день погашения. Все выплаты отстоят друг от друга на год. Однако если купить такую облигацию 1 сентября 1996 г., то до первого платежа пройдет восемь месяцев, а не год. Такую облигацию будем называть *облигацией с неравномерными выплатами*. В этом разделе мы рассмотрим два аспекта этой задачи, чрезвычайно часто встречающейся на практике.

1. Расчет дюрации такой облигации при известной ставке дохода к погашению. Будет показано, что дюрация вычисляется по очень простой формуле, непосредственно связанной с дюрацией облигации с равномерными платежами (т.е. со стандартной формулой). В ходе этого расчета будет выведена более простая формула для выполнения расчетов в Excel.
2. Расчет ставки дохода к получению до срока погашения (доходности к погашению) для облигации с неравномерными выплатами. Здесь потребуется некоторая изобретательность, и в результате будет разработана очередная функция на VBA.

### 20.5.1. Расчет дюрации

Рассмотрим облигацию с  $N$  платежами, первый из которых осуществляется в момент  $\alpha < 1$ , а остальные распределены во времени равномерно. Далее мы покажем, что дюрация такой облигации вычисляется как сумма двух слагаемых:

- дюрации облигации с  $N$  платежами, распределенными через равномерные интервалы (т.е. стандартной дюрации, которая рассматривалась ранее);
- $\alpha - 1$ .

Доказать это сравнительно несложно. Обозначим выплаты по облигациям через  $C_\alpha, C_{\alpha+1}, C_{\alpha+2}, \dots, C_{\alpha+N-1}$ , где  $0 < \alpha < 1$ . Курс облигации вычисляется по следующей формуле:

$$P = \sum_{t=1}^N \frac{C_{\alpha+t-1}}{(1+r)^{\alpha+t-1}} = (1+r)^{1-\alpha} \sum_{t=1}^N \frac{C_{\alpha+t-1}}{(1+r)^t}.$$

Дюрация такой облигации описывается формулой

$$D = \frac{1}{P} \sum_{t=1}^N \frac{(\alpha+t-1) C_{\alpha+t-1}}{(1+r)^{\alpha+t-1}}.$$

Перепишем последнее выражение в виде

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{1}{P} (1+r)^{1-\alpha} \left[ \sum_{t=1}^N \frac{tC_{t+\alpha-1}}{(1+r)^t} + \sum_{t=1}^N \frac{(\alpha-1)C_{t+\alpha-1}}{(1+r)^t} \right] = \\
 &= \frac{1}{(1+r)^{1-\alpha} \sum_{t=1}^N \frac{C_{t+\alpha-1}}{(1+r)^t}} (1+r)^{1-\alpha} \left[ \sum_{t=1}^N \frac{tC_{t+\alpha-1}}{(1+r)^t} + (\alpha-1) \sum_{t=1}^N \frac{C_{t+\alpha-1}}{(1+r)^t} \right] = \\
 &= \frac{1}{\sum_{t=1}^N \frac{C_{t+\alpha-1}}{(1+r)^t}} \left[ \sum_{t=1}^N \frac{tC_{t+\alpha-1}}{(1+r)^t} \right] + \alpha - 1.
 \end{aligned}$$

А вот пример расчета дюрации облигации с неравномерными выплатами. Напомним, что если до первого платежа проходит срок  $\alpha$ , то формула дюрации выглядит следующим образом:

$$D = \sum_{t=1}^N \frac{1}{P} \frac{(\alpha + t - 1) C_{\alpha+t}}{(1+r)^{\alpha+t-1}}.$$

В каждой из ячеек диапазона D11:D15 вычисляется значение одного из слагаемых этой формулы.

|    | A                                                                  | B                        | C                                         | D      | E                                    | F                              | G | H | I | J |
|----|--------------------------------------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------------|--------|--------------------------------------|--------------------------------|---|---|---|---|
| 1  | <b>ДЮРАЦИЯ ОБЛИГАЦИИ С НЕРАВНОМЕРНЫМИ ВЫПЛАТАМИ--прямой расчет</b> |                          |                                           |        |                                      |                                |   |   |   |   |
| 2  |                                                                    |                          |                                           |        |                                      |                                |   |   |   |   |
| 3  | Альфа                                                              | 0,3                      | Срок до первой купонной выплаты (в годах) |        |                                      |                                |   |   |   |   |
| 4  | N                                                                  | 5                        | Количество выплат                         |        |                                      |                                |   |   |   |   |
| 5  | ДСП                                                                | 6%                       |                                           |        |                                      |                                |   |   |   |   |
| 6  | Купон                                                              | 100                      |                                           |        |                                      |                                |   |   |   |   |
| 7  | Номинал                                                            | 1 000                    |                                           |        |                                      |                                |   |   |   |   |
| 8  | Курс                                                               | 1 217                    | <-- =ЧПС(B5,C11:C15)*(1+B5)^(1-B3)        |        |                                      |                                |   |   |   |   |
| 9  |                                                                    |                          |                                           |        |                                      |                                |   |   |   |   |
| 10 |                                                                    | Период                   | Выплата                                   |        |                                      |                                |   |   |   |   |
| 11 |                                                                    | 0,3                      | 100                                       | 0,0242 | <-- =(C11*B11)/(1+\$B\$5)*B11/\$B\$8 |                                |   |   |   |   |
| 12 |                                                                    | 1,3                      | 100                                       | 0,0990 |                                      |                                |   |   |   |   |
| 13 |                                                                    | 2,3                      | 100                                       | 0,1653 |                                      |                                |   |   |   |   |
| 14 |                                                                    | 3,3                      | 100                                       | 0,2237 |                                      |                                |   |   |   |   |
| 15 |                                                                    | 4,3                      | 1 100                                     | 3,0249 |                                      |                                |   |   |   |   |
| 16 |                                                                    | Дюрация                  |                                           | 3,5371 | <-- =СУММ(D11:D15)                   |                                |   |   |   |   |
| 17 |                                                                    |                          |                                           |        |                                      |                                |   |   |   |   |
| 18 |                                                                    | Вычисляется функцией VBA |                                           |        | 3,5371                               | <-- =dduration(B4,B6/B7,B5,B3) |   |   |   |   |

Как отмечалось в разделе 20.2, формула Excel длит (Duration) трудновата в применении из-за специфики указания дат. Поэтому мы здесь реализуем более простую формулу дюрации на языке VBA. Синтаксис для ее вызова будет выглядеть так: `DDuration(numberPayments, couponRate, YTM, timeToFirstPayment)`, где аргументы обозначают соответственно количество выплат, купонную процентную ставку, доходность к погашению и срок до первой выплаты.

```
Function dduration(numberPayments, couponRate, YTM,
    timeToFirstPayment)
```

```

price = 1 / (1 + YTM) ^ numberPayments
dduration = numberPayments / (1 + YTM) ^ numberPayments

For Index = 1 To numberPayments
    price = couponRate / (1 + YTM) ^ Index + price
Next Index

For Index = 1 To numberPayments
    dduration = couponRate * Index / (1 + YTM) ^ _
        Index + dduration
Next Index

dduration = dduration / price + timeToFirstPayment - 1
End Function

```

Наша “кустарная” функция Dduration требует в качестве аргумента только количество платежей по облигации, купонную ставку и срок до первой выплаты,  $\alpha$ . Применение формулы показано в таблице на предыдущем рисунке, в ячейке E18.

### 20.5.2. Расчет доходности к погашению

Как видно из предыдущего изложения, для расчета дюрации требуется знать доходность к погашению, или доход по облигации к получению до срока ее погашения (в формулах —  $YTM$ , от *yield to maturity*). Эта величина представляет собой не что иное, как внутреннюю ставку доходности, рассчитанную для выплат по облигации и ее начальной стоимости. Часто эта величина бывает задана, но если это не так, то возникает задача внесения корректив в функцию Excel ВСД (IRR) по причине неравномерного распределения выплат во времени. В этом разделе дается пример решения такой задачи с помощью небольшой хитрости.

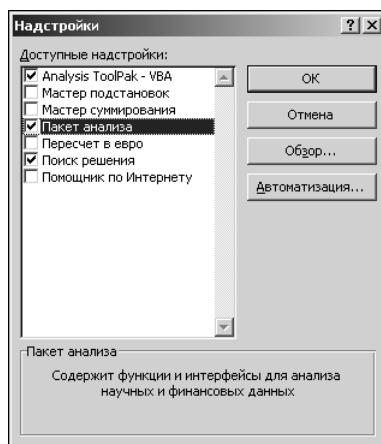
Рассмотрим облигацию с текущей курсовой стоимостью 1123 долл. и выплатой по купону 1 января каждого года в сумме 89 долл. В срок погашения, 1 января 2001 г., по облигации будет выплачена сумма 1089 долл. — ежегодная купонная выплата плюс номинал. Будем считать, что сейчас 3 октября 1996 г. Задача определения доходности к погашению по этой облигации осложняется тем, что хотя все платежи отстоят друг от друга на год, до первой купонной выплаты остается всего 0,2466 года:  $0,2466 = [DATA(1997,1,1) - DATA(1996,10,3)]/365$ . Таким образом, в Excel требуется решить следующее уравнение:

$$-1123 + \sum_{t=1}^3 \frac{89}{(1 + YTM)^{t+0,2466}} + \frac{1089}{(1 + YTM)^{4,2466}} = 0.$$

Для решения этой проблемы воспользуемся функцией Excel ЧИСТВНДОХ (XIRR).

|    | A                                                                | B           | C                                         | D                               | E | F | G | H |
|----|------------------------------------------------------------------|-------------|-------------------------------------------|---------------------------------|---|---|---|---|
| 1  | <b>ВЫЧИСЛЕНИЕ ВСД НЕРАВНОМЕРНЫХ ПЛАТЕЖЕЙ - ФУНКЦИЯ ЧИСТВНДОХ</b> |             |                                           |                                 |   |   |   |   |
| 2  |                                                                  |             |                                           |                                 |   |   |   |   |
| 3  | Текущая дата                                                     | 35341       |                                           |                                 |   |   |   |   |
| 4  | Годовая купонная ставка                                          | 89          | Выплачивается 1 января следующие пять лет |                                 |   |   |   |   |
| 5  | Срок погашения                                                   | 36892       |                                           |                                 |   |   |   |   |
| 6  | Номинал                                                          | 1000        |                                           |                                 |   |   |   |   |
| 7  | Курс облигации                                                   | 1123        |                                           |                                 |   |   |   |   |
| 8  |                                                                  |             |                                           |                                 |   |   |   |   |
| 9  | Срок до первой выплаты                                           | 0,2465753   |                                           |                                 |   |   |   |   |
| 10 |                                                                  |             |                                           |                                 |   |   |   |   |
| 11 |                                                                  | <b>Дата</b> | <b>Выплата</b>                            |                                 |   |   |   |   |
| 12 |                                                                  | 35341       | -1123                                     |                                 |   |   |   |   |
| 13 |                                                                  | 35431       | 89                                        |                                 |   |   |   |   |
| 14 |                                                                  | 35796       | 89                                        |                                 |   |   |   |   |
| 15 |                                                                  | 36161       | 89                                        |                                 |   |   |   |   |
| 16 |                                                                  | 36526       | 89                                        |                                 |   |   |   |   |
| 17 |                                                                  | 36892       | 1089                                      |                                 |   |   |   |   |
| 18 |                                                                  |             |                                           |                                 |   |   |   |   |
| 19 |                                                                  | ДСП         | 7,300%                                    | <-- =ЧИСТВНДОХ(C12:C17;B12:B17) |   |   |   |   |

Чтобы иметь возможность пользоваться функцией ЧИСТВНДОХ, следует подключить Пакет анализа (Analysis ToolPak) к Excel. Для этого выберите в меню Сервис (Tools) команду Надстройки (Add-Ins), а когда откроется показанное ниже меню, установите флажок напротив пункта Пакет анализа (Analysis ToolPak).



Теперь можно пользоваться функцией ЧИСТВНДОХ (XIRR), возвращающей внутреннюю ставку доходности для последовательности движений средств, причем не обязательно периодических. В функцию следует передать список потоков и список соответствующих им дат. Как и для функции ВСД (IRR), можно задать начальное приближение, хотя это не обязательно<sup>2</sup>.

### 20.5.3. Расчет доходности до срока погашения с помощью программы на VBA

Если даты платежей неизвестны, величину дохода к получению до срока погашения (т.е. *УТМ*) для серии неравномерно распределенных во времени платежей

<sup>2</sup> В Excel имеется также функция ЧИСТНЗ (XNPV) для вычисления чистой приведенной стоимости последовательности движений денежных средств или платежей, осуществляемых с неравномерной периодичностью.

можно вычислить с помощью программы на VBA. Приведенная ниже программа составлена из двух функций. Первая из функций, `annuityvalue`, вычисляет величину  $\sum_{t=1}^n \frac{1}{(1+r)^t}$ . Вторая функция, `unevenYTM`, вычисляет величину доходности к погашению для неравномерных платежей простым методом деления пополам; от пользователя требуется задать точность поиска решения, `epsilon`.

```
Function annuityvalue(interest, numberPeriods)
    annuityvalue = 0

    For Index = 1 To numberPeriods
        annuityvalue = annuityvalue + 1 / (1 + interest) ^ Index
    Next Index
End Function

Function unevenYTM(couponRate, faceValue, bondPrice, _
    numberPayments, timeToFirstPayment, epsilon)
    Dim YTM As Double
    high = 1
    low = 0

    While Abs(annuityvalue(YTM, numberPayments) * _
        couponRate * faceValue + faceValue / (1 + _
        YTM) ^ numberPayments - bondPrice / (1 + _
        YTM) ^ (1 - timeToFirstPayment)) >= epsilon

        YTM = (high + low) / 2

        If annuityvalue(YTM, numberPayments) * _
            couponRate * faceValue + faceValue / (1 + _
            YTM) ^ numberPayments - bondPrice / (1 + _
            YTM) ^ (1 - timeToFirstPayment) > 0 Then
            low = YTM
        Else
            high = YTM
        End If

    Wend

    unevenYTM = (high + low) / 2
End Function
```

Ниже приведена иллюстрация применения этой функции.

|    | A                                                                                           | B       | C                                            | D | E |
|----|---------------------------------------------------------------------------------------------|---------|----------------------------------------------|---|---|
| 1  | <b>ПРИМЕР ВЫЧИСЛЕНИЯ ДСП С НЕРАВНОМЕРНЫМИ ПЕРИОДАМИ</b>                                     |         |                                              |   |   |
| 2  | Иллюстрируется применение функции <code>unevenYTM</code> на языке VBA.                      |         |                                              |   |   |
| 3  | Синтаксис функции:                                                                          |         |                                              |   |   |
| 4  | <b><code>unevenYTM(купон, номинал, курс, кол_во_выплат, срок_до_первой, эpsilon)</code></b> |         |                                              |   |   |
| 5  |                                                                                             |         |                                              |   |   |
| 6  | Купонная ставка                                                                             | 7,90%   |                                              |   |   |
| 7  | Номинал                                                                                     | 1000,00 |                                              |   |   |
| 8  | Курс                                                                                        | 1123,00 |                                              |   |   |
| 9  | Количество выплат                                                                           | 5       |                                              |   |   |
| 10 | Срок до первой выплаты                                                                      | 0,25    |                                              |   |   |
| 11 | Эпсилон                                                                                     | 0,00001 |                                              |   |   |
| 12 |                                                                                             |         |                                              |   |   |
| 13 | ДСП                                                                                         | 6,138%  | <code>=unevenYTM(B6,B7,B8,B9,B10,B11)</code> |   |   |

## 20.6. Дюрация при непостоянной временной структуре

В общей модели временной структуры процентных ставок все платежи дисконтируются в момент  $t$  по ставке  $r_t$ , так что стоимость облигации вычисляется по формуле

$$P = \sum_{t=1}^N \frac{C_t}{(1 + r_t)^t}.$$

Мера дюрации, которую мы рассматриваем в этой главе, вычисляется в предположении либо постоянной временной структуры (т.е.  $r_t = r = \text{const}$  для всех  $t$ ), либо временной структуры с параллельным сдвигом. При наличии во временной структуре параллельного сдвига курс облигации можно записать таким образом:

$$P = \sum_{t=1}^N \frac{C_t}{(1 + r_t + \Delta t)^t}.$$

Затем мера дюрации вычисляется взятием производной по  $\Delta t$ .

Общая модель временной структуры должна давать объяснение, откуда берется ставка дисконтирования  $r_t$  для платежей в момент  $t$  и как происходит изменение процентных ставок в этот момент. Это трудная задача, один из аспектов которой рассматривается в главе 22<sup>3</sup>.

Означает ли сложность этой задачи то, что простая мера дюрации, представленная в этой главе, — бесполезна? Отнюдь. Может оказаться, что дюрация по Макалею дает хорошее приближение к изменениям стоимости облигации, произошедшим вследствие изменения временной структуры, даже при том, что сама

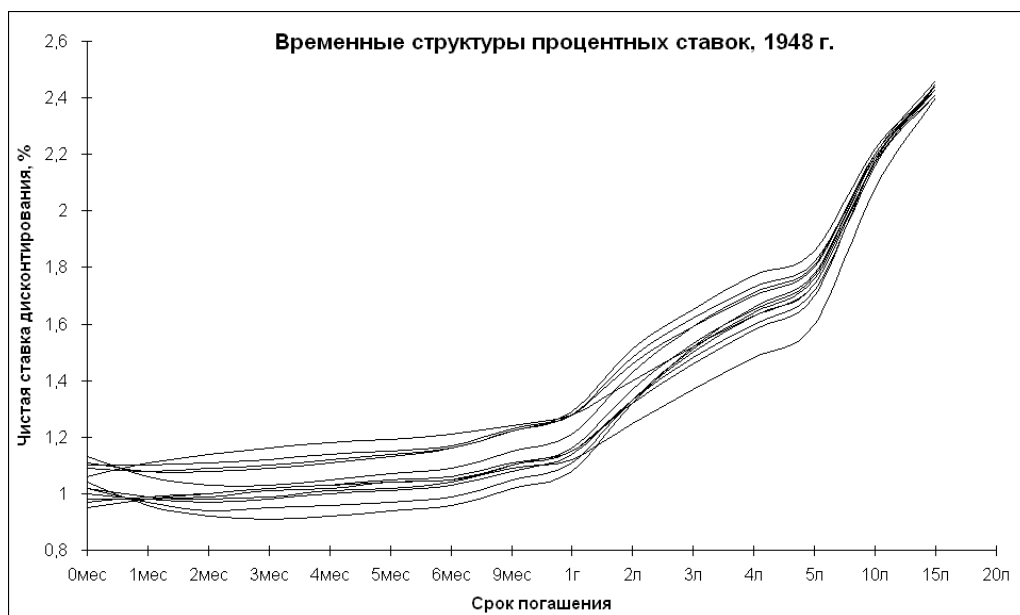
<sup>3</sup> В главе 22 рассматриваются полиномиальные аппроксимации временной структуры. Дальнейшие сведения об общих моделях временных структур можно найти в работе Hull (2000), гл. 21, 22.

временная структура достаточно сложна и непостоянна<sup>4</sup>. В этом разделе мы изучим такую возможность на примере данных из файла Term Structure.XLS, находящегося на прилагаемом к книге компакт-диске<sup>5</sup>. Этот файл содержит периодические ежемесячные данные о временной структуре процентных ставок в США за период с декабря 1949 г. по февраль 1987 г. Типичная строка этого файла выглядит следующим образом.

| Дата    | 0мес | 1мес | 2мес | 3мес | 4мес | 5мес | 6мес |
|---------|------|------|------|------|------|------|------|
| 12.1946 | 0,18 | 0,32 | 0,42 | 0,48 | 0,52 | 0,55 | 0,58 |

| 9мес | 1г   | 2г   | 3г   | 4г  | 5л   | 10л  | 15л  | 20л  |
|------|------|------|------|-----|------|------|------|------|
| 0,65 | 0,72 | 0,95 | 1,15 | 1,3 | 1,41 | 1,82 | 2,16 | 2,32 |

В приведенной на рисунке строке можно видеть данные по процентным ставкам в декабре 1946 г. Процентные ставки даются в *годовом исчислении*, т.е. 0,32 означает 0,32% в год. На следующих двух графиках показаны формы временных структур, взятых из файла<sup>6</sup>. Каждая линия на графике представляет временную структуру в каком-либо конкретном месяце. В 1948 г. временные структуры находились в тесной корреляции и имели возрастающий характер.



<sup>4</sup> Это, похоже, подтверждается работой Gultekin, Rogalski (1984).

<sup>5</sup> Эти данные взяты из McCulloch (1990).

<sup>6</sup> Процентные ставки — это чистые ставки дисконтирования, рассчитанные таким образом, чтобы стоимость облигации с курсом  $P$  и  $N$  выплатами  $C_1, C_2, \dots, C_N$  была равна  $P = \sum_{t=1}^N C_t / (1 + r_t)^t$ . Столбец, обозначенный “0мес” (“ноль месяцев”), содержит *мгновенную процентную ставку* — процентную ставку за самый короткий доступный на рынке срок займа. Можно считать ее ставкой, выплачиваемой на валютном рынке за однодневный депозит.



Для сравнения приведем график временных структур в 1981 г., на котором имеются как возрастающие, так и убывающие кривые, а также структуры с “горбами”.



Несмотря на большое разнообразие форм временных структур, из упражнения 7 станет ясно, что дюрация по Макалею может дать адекватное приближение к изменениям стоимости облигаций за короткие периоды.

## Упражнения

1. Как повлияет на дюрацию облигации *повышение* ставки купонных выплат? Доход к получению до срока погашения предполагается постоянным. Постройте численный пример с графиками.
2. Как повлияет на дюрацию облигации повышение доходности к погашению ( $YTM$ )? Как и в упражнении 1, постройте численный пример с графиками. Обратите внимание, что при  $N \rightarrow \infty$  облигация становится *консолью* (облигацией, по которой не выплачивается основная сумма, а только осуществляется бесконечная последовательность купонных выплат). Дюрация консоли равна  $(1 + YTM)/YTM$ . Покажите, что ваши численные ответы сходятся к этой формуле.
3. “Дюрацию можно воспринимать как некий показатель подверженности облигации риску. При прочих равных параметрах более подверженная риску облигация имеет меньшую дюрацию”. Проверьте это утверждение на примере. В чем его экономический смысл?

4. Облигацией с нулевым купоном (облигацией одного платежа) со сроком погашения  $N$  называется облигация, по которой отсутствуют выплаты в моменты  $1, 2, \dots, N-1$ , а в момент  $N$  выплачивается единовременно и основная сумма займа, и проценты. Какова дюрация такой облигации?
5. Воспроизведите два графика из раздела 20.4.
6. Рыночная стоимость облигаций West Jefferson Development на 23 января 1987 г. составляла 1122,32 долл. Первого марта и первого сентября каждого года в период с 1987 по 1993 гг. по этой облигации выплачиваются проценты в сумме 59 долл. Первого сентября 1993 г. облигация выкупается по номиналу 1000 долл. Рассчитайте доходность к погашению по этой облигации, а затем ее дюрацию.
7. Это упражнение основано на данных из файла Term Structure.XLS.
  - а) Постройте как минимум три графика шести временных структур для не менее чем 10 типичных подпериодов. Например, это могут быть временные структуры с января по июнь 1953 г., с июля по декабрь 1980 г. и т.д.
  - б) Какова была бы купонная процентная ставка для пятилетней облигации с годовым купоном в январе 1980 г.? А для десятилетней облигации? Для ответа на этот вопрос необходимо решить следующее уравнение:

$$1000 = \sum_{t=1}^5 \frac{1000c}{(1+r_t)^t} + \frac{1000}{(1+r_5)^5},$$

где  $c$  — купонная ставка по облигации, а  $r_t$  — чистая ставка дисконтирования для периода  $t$ . Заметим, что для десятилетней облигации придется *интерполировать* имеющиеся данные.

- в) Рассчитайте купонную ставку по пятилетним облигациям для всех данных. Постройте графики результатов.
- г) Теперь о дюрации: вернемся к упражнению 7б. Предположим, вы рассчитали  $s_{\text{январь.1980}}$ , и немедленно после этого расчета временная структура изменилась на структуру февраля 1980 г. Как это скажется на курсе облигаций? Насколько хорошо это изменение аппроксимируется мерой дюрации Макалея (в предположении о том, что изменение ставки  $\Delta r$  является изменением краткосрочной процентной ставки)?
- д) Повторите расчет упражнения 7в для не менее чем 10 периодов. Представьте результаты в наглядной форме.
8. Перепишите функцию-формулу DDuration из раздела 20.5.1 так, чтобы при отсутствии параметра timeToFirstPayment (т.е. срока до первой выплаты) величина  $\alpha$  автоматически устанавливалась равной 1.

---

# 21 Схемы иммунизации

---

## 21.1. Введение

Стоимость портфеля облигаций в будущем зависит от структуры процентных ставок, преобладающей до того дня (включительно), когда портфель предполагается ликвидировать. Если портфель имеет постоянный расчетный денежный эквивалент в некоторый фиксированный будущий момент времени независимо от преобладающей в данное время структуры процентных ставок, то говорят, что такой портфель *иммунизирован*. В этой главе рассматриваются схемы иммунизации, тесно связанные с понятием дюрации (см. главу 20). Схемы иммунизации рассматривались специалистами для многих разновидностей дюрации, но в этой главе мы ограничимся только простейшей из них — дюрацией по Макалею.

---

## 21.2. Базовая модель иммунизации

Рассмотрим следующую ситуацию. У фирмы имеется точно известное на будущее финансовое обязательство  $Q$ . (Хороший пример — страховая компания, которая точно знает, что в будущем обязана сделать выплату.) Дисконтированная стоимость такого обязательства составляет

$$V_0 = \frac{Q}{(1+r)^N},$$

где  $r$  — соответствующая ставка дисконтирования.

Предположим, что данное будущее обязательство застраховано облигацией, которую держит фирма. Другими словами, фирма владеет облигацией, стоимость которой  $V_B$  равна дисконтированной стоимости будущего обязательства  $V_0$ . Пусть  $P_1, P_2, \dots, P_M$  — последовательность ожидаемых выплат по облигации; тогда приведенная стоимость облигации вычисляется по формуле

$$V_B = \sum_{t=1}^M \frac{P_t}{(1+r)^t}.$$

Теперь предположим, что процентная ставка  $r$  меняется на  $r + \Delta r$ . С помощью линейной аппроксимации получаем, что приближительная новая стоимость

будущего обязательства вычисляется по формуле

$$V_0 + \Delta V_0 \approx V_0 + \frac{dV_0}{dr} \Delta r = V_0 + \Delta r \left[ \frac{-NQ}{(1+r)^{N+1}} \right].$$

Однако новая стоимость облигации вычисляется также и по формуле

$$V_B + \Delta V_B \approx V_B + \frac{dV_B}{dr} \Delta r = V_B + \Delta r \sum_{t=1}^N \frac{-tP_t}{(1+r)^{t+1}}.$$

Если два приведенных выражения равны между собой, то изменение в ставке  $r$  не должно повлиять на страховые свойства портфеля компании. Приравнявая два выражения, получаем условие

$$V_B + \Delta r \sum_{t=1}^N \frac{-tP_t}{(1+r)^{t+1}} = V_0 + \Delta r \left[ \frac{-NQ}{(1+r)^{N+1}} \right].$$

Вспомним, что

$$V_B = V_0 = \frac{Q}{(1+r)^N}.$$

Поэтому полученное равенство можно упростить следующим образом:

$$\frac{1}{V_B} \sum_{t=1}^M \frac{tP_t}{(1+r)^t} = N.$$

Выраженное этим равенством утверждение стоит сформулировать строго — в виде формальной теоремы.

*Предположим, что временная структура процентных ставок всегда постоянна (т.е. ставка дисконтирования для всех будущих движений средств в любой момент времени — одна и та же) или что временная структура испытывает только параллельные сдвиги вверх или вниз. Тогда для того, чтобы при любых изменениях ставки дисконтирования  $r$  рыночная стоимость актива была равна рыночной стоимости будущего финансового обязательства  $Q$ , необходимо и достаточно, чтобы дюрация актива была равна дюрации облигации. Здесь мы понимаем слово “равна” в смысле приближенного равенства по линейной аппроксимации приращений.*

Обязательство, для которого создается актив такого рода, называется *иммунизированным*.

В сформулированном выше утверждении есть два важнейших ограничения.

- Рассмотренная иммунизация применима только с точностью до линейной аппроксимации. Перейдя в следующих разделах к численным примерам, мы уви-

дим, сколь велика разница между равенством с точностью до величин второго порядка малости и “истинным” равенством. Джордж Оруэлл (George Orwell) в своей знаменитой повести “Звероферма” (*Animal Farm*) сделал похожее наблюдение о том, что “все животные равны между собой, но некоторые — равнее других”.

- Предполагается, что временная структура либо постоянна, либо кусочно-постоянна, т.е. изменяется параллельным сдвигом вверх или вниз. Такое предположение может давать в лучшем случае только грубое приближение к реальности (вспомните реальные графики временных структур из раздела 20.6). Принятие других моделей временных структур приводит к другим определениям дюрации и иммунизации (которые можно посмотреть в работах Bierwag и др., 1981, 1983a, 1983b; Cox, Ingersoll, Ross, 1985; Vasicek, 1977). Изучая эмпирическими методами имеющиеся альтернативы, авторы работы Gultekin, Rogalski (1984) пришли к выводу, что простое определение дюрации по Макалею, используемое в этой главе, ничуть не хуже остальных.

### 21.3. Численный пример

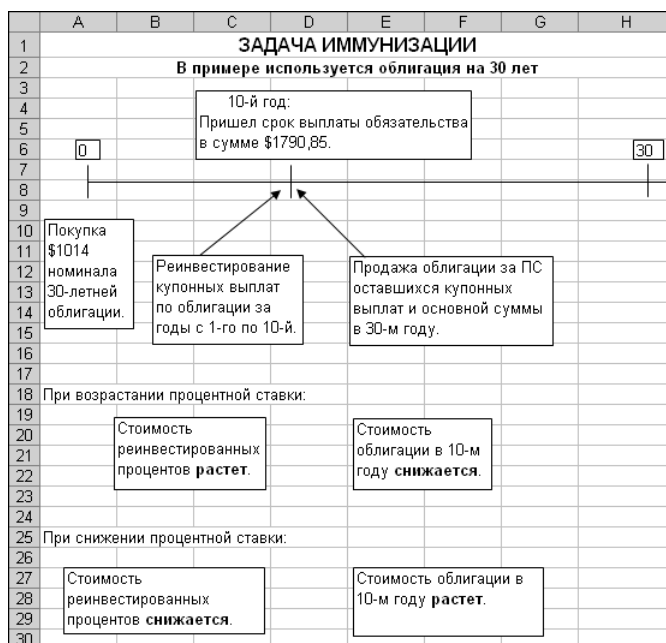
В этом разделе мы рассмотрим простейший пример иммунизации. Пусть необходимо иммунизировать обязательство 10-летней продолжительности с приведенной стоимостью 1000 долл. (Например, при текущей процентной ставке 6% его будущая стоимость составит  $1000 \text{ долл.} \times 1,06^{10} = 1790,85 \text{ долл.}$ ) Вы собираетесь иммунизировать данное обязательство путем покупки облигации или комбинации облигаций общим номиналом 1000 долл.

К рассмотрению принимаются три облигации.

1. Облигации №1 осталось десять лет до погашения; она имеет купонную ставку 6,7% и номинал 1000 долл.
2. Облигация №2 будет погашена через пятнадцать лет, имеет ставку купона 6,988% и номинал 1000 долл.
3. Облигации №3 осталось тридцать лет до погашения, она имеет купонную ставку 5,9% и номинал 1000 долл.

При текущей доходности к погашению, равной 6%, курсы облигаций отличаются. Например, облигация №1 стоит  $1051,52 \text{ долл.} = \sum_{t=1}^{10} \frac{67}{(1,06)^t} + \frac{1000}{(1,06)^{10}}$ . Таким образом, чтобы приобрести реальную долю этой облигации в 1000 долл., необходимо купить  $951 \text{ долл.} = 1000/1051,52 \text{ долл.}$  ее номинала.

А вот облигация №3 в настоящее время стоит 986,24 долл., поэтому для того, чтобы купить 1000 долл. рыночной стоимости этой облигации, необходимо приобрести 1013,96 долл. ее номинала. Если вы собираетесь с помощью этой облигации финансировать обязательство на 1790,85 долл., срок которого наступает через десять лет, вы столкнетесь с задачей, схематически показанной на следующем рисунке.



Как мы увидим далее, 30-летняя облигация в точности обеспечит финансирование будущего обязательства на 1790,85 долл. только в том случае, если текущая рыночная процентная ставка в 6% останется неизменной.

Ниже представлена сводка известной информации о курсах и дюрациях трех облигаций.

|    | A                                                         | B                          | C          | D           | E | F |
|----|-----------------------------------------------------------|----------------------------|------------|-------------|---|---|
| 1  | <b>ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ПРИМЕР ИММУНИЗАЦИИ С 3-МЯ ОБЛИГАЦИЯМИ</b> |                            |            |             |   |   |
| 2  |                                                           |                            |            |             |   |   |
| 3  | Доходность до срока погашения                             | 6%                         |            |             |   |   |
| 4  |                                                           |                            |            |             |   |   |
| 5  |                                                           | Облиг.1                    | Облиг.2    | Облиг.3     |   |   |
| 6  | Купонная ставка                                           | 6,70%                      | 6,988%     | 5,90%       |   |   |
| 7  | Срок погашения                                            | 10                         | 15         | 30          |   |   |
| 8  | Номинальная стоимость                                     | 1 000                      | 1 000      | 1 000       |   |   |
| 9  |                                                           |                            |            |             |   |   |
| 10 | Курс облигаций                                            | \$1 051,52                 | \$1 095,96 | \$986,24    |   |   |
| 11 | Номинал, эквив. рыночному курсу \$1000                    | \$ 951,00                  | \$ 912,44  | \$ 1 013,96 |   |   |
| 12 |                                                           |                            |            |             |   |   |
| 13 | Дюрация                                                   | 7,6655                     | 10,0000    | 14,6361     |   |   |
| 14 |                                                           | =dduration(B7,B6,\$B\$3,1) |            |             |   |   |
| 15 |                                                           |                            |            |             |   |   |
| 16 |                                                           |                            |            |             |   |   |

Обратите внимание, что для расчета дюрации используется наша “кустарная” функция DDuration, разработанная в главе 20.

Если доходность к погашению остается неизменной, то каждую из купонных выплат можно реинвестировать под 6%. Например, облигация №2 по прошествии десяти лет при этом даст конечный денежный эквивалент, равный

$$\sum_{t=0}^9 69,88 \times (1,06)^t + \left[ \sum_{t=1}^5 \frac{69,88}{(1,06)^t} + \frac{1000}{(1,06)^5} \right] = 921,07 + 1041,62 = 1962,69.$$

Первое слагаемое в этом выражении,  $\sum_{t=0}^9 69,88 \times (1,06)^t$ , является суммой реинvestированных купонных выплат. Второе и третье слагаемое,  $\sum_{t=1}^5 \frac{69,88}{(1,06)^t} + \frac{1000}{(1,06)^5}$ , представляют рыночную стоимость облигации через десять лет, когда облигации останется еще пять лет до погашения. Поскольку приобретается только 912,44 долл. номинала облигации, по прошествии десяти лет будем иметь  $0,91244 \times 1962,69 \text{ долл.} = 1790,85 \text{ долл.}$  Это в точности та сумма, которую необходимо иметь к указанному сроку. Результаты этого расчета для всех трех облигаций при условии неизменности величины доходности к погашению представлены в следующей таблице:

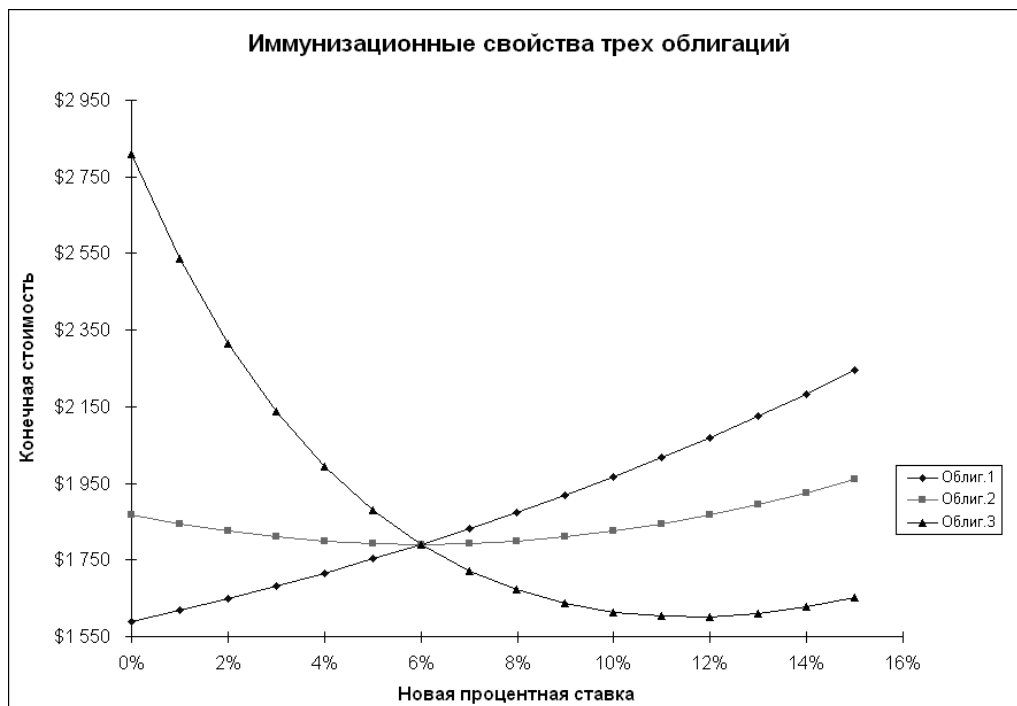
|    | A                                         | B           | C           | D           | E                                                   | F | G | H | I |
|----|-------------------------------------------|-------------|-------------|-------------|-----------------------------------------------------|---|---|---|---|
| 19 | Новое значение доходности до срока погаш. | 6%          |             |             |                                                     |   |   |   |   |
| 20 |                                           |             |             |             |                                                     |   |   |   |   |
| 21 |                                           | Облиг.1     | Облиг.2     | Облиг.3     |                                                     |   |   |   |   |
| 22 | Курс облигаций                            | \$1 000,00  | \$1 041,62  | \$988,53    | <-- =ПС(\$B\$19,D7-10,D6*D8)+D8/(1+\$B\$19)^(D7-10) |   |   |   |   |
| 23 | Реинвестированные проценты                | \$883,11    | \$921,07    | \$777,67    | <-- =БС(\$B\$19,10,D6*D8)                           |   |   |   |   |
| 24 | <b>Всего</b>                              | \$1 883,11  | \$1 962,69  | \$1 766,20  |                                                     |   |   |   |   |
| 25 |                                           |             |             |             |                                                     |   |   |   |   |
| 26 | Коэффициент–процент приобрет. номинала    | 95,10%      | 91,24%      | 101,40%     |                                                     |   |   |   |   |
| 27 | <b>Итого (после умножения на коэфф.)</b>  | \$ 1 790,85 | \$ 1 790,85 | \$ 1 790,85 |                                                     |   |   |   |   |

Вывод, который можно сделать из таблицы, состоит в том, что приобретение доли в 1000 долл. любой из трех облигаций позволит через десять лет профинансировать будущее обязательство в объеме 1790,85 долл. *при условии, что рыночная процентная ставка в 6% останется неизменной.*

А теперь предположим, что сразу же после приобретения облигаций доходность к погашению изменяется и остается на уровне своего нового значения. Такое изменение, очевидно, повлияет на выполненный нами расчет. Например, если доходность упадет до 5%, таблица приобретет следующий вид.

|    | A                                         | B           | C           | D           | E                                                   | F | G | H | I |
|----|-------------------------------------------|-------------|-------------|-------------|-----------------------------------------------------|---|---|---|---|
| 19 | Новое значение доходности до срока погаш. | 5%          |             |             |                                                     |   |   |   |   |
| 20 |                                           |             |             |             |                                                     |   |   |   |   |
| 21 |                                           | Облиг.1     | Облиг.2     | Облиг.3     |                                                     |   |   |   |   |
| 22 | Курс облигаций                            | \$1 000,00  | \$1 086,07  | \$1 112,16  | <-- =ПС(\$B\$19,D7-10,D6*D8)+D8/(1+\$B\$19)^(D7-10) |   |   |   |   |
| 23 | Реинвестированные проценты                | \$842,72    | \$878,94    | \$742,10    | <-- =БС(\$B\$19,10,D6*D8)                           |   |   |   |   |
| 24 | <b>Всего</b>                              | \$1 842,72  | \$1 965,01  | \$1 854,26  |                                                     |   |   |   |   |
| 25 |                                           |             |             |             |                                                     |   |   |   |   |
| 26 | Коэффициент–процент приобрет. номинала    | 95,10%      | 91,24%      | 101,40%     |                                                     |   |   |   |   |
| 27 | <b>Итого (после умножения на коэфф.)</b>  | \$ 1 752,43 | \$ 1 792,97 | \$ 1 880,14 |                                                     |   |   |   |   |

Таким образом, если ставка доходности упадет, то облигация №1 уже не обеспечит финансирование будущего обязательства, тогда как облигация №3 даст чрезмерный объем такого финансирования. Способность облигации №2 финансировать обязательство практически не изменится — что и неудивительно, поскольку ее дюрация составляет в точности десять лет. Этот расчет можно повторить для любого нового значения доходности к погашению. Результаты показаны на следующем рисунке.



Очевидно, что для успешной иммунизации следует приобрести облигацию №2.

#### 21.4. Выпуклость: продолжение эксперимента по иммунизации

Дюрация портфеля облигаций является средневзвешенной дюрацией активов этого портфеля. Отсюда получаем еще один способ инвестирования в облигации с дюрацией, равной 10. Если вложить 665,09 долл. в облигацию №1 и 344,91 долл. в облигацию №3, получившийся портфель также будет иметь дюрацию, равную 10. Весовые коэффициенты рассчитаны следующим образом:

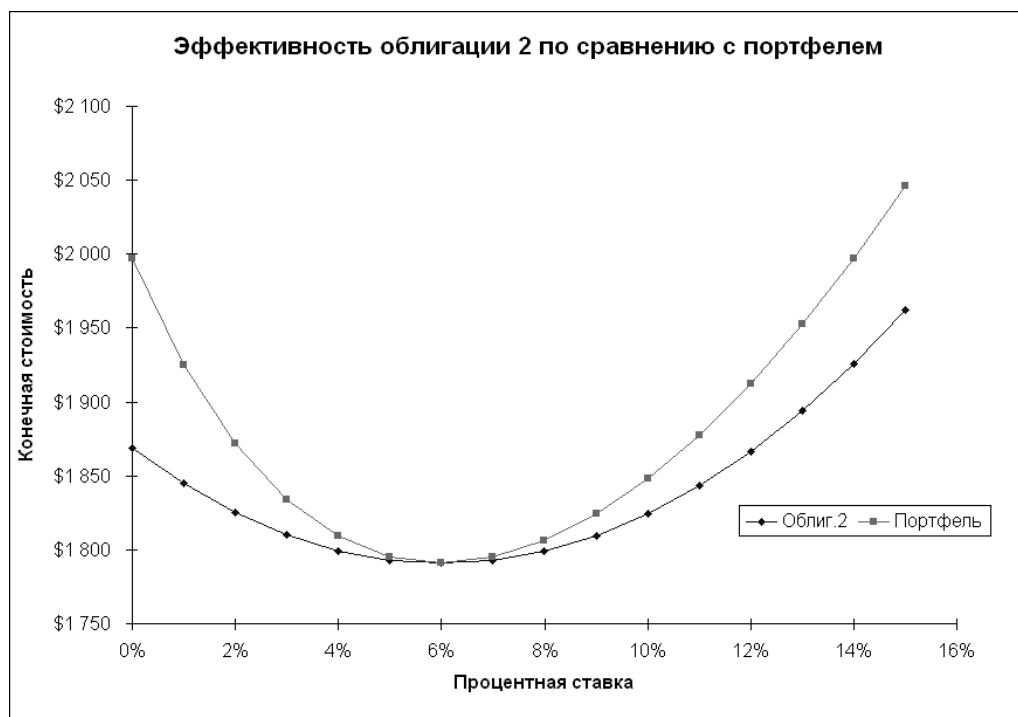
$$\begin{aligned} \lambda D_{\text{обл1}} + (1 - \lambda) D_{\text{обл2}} &= 7,665\lambda + 14,636(1 - \lambda) = 10 \\ \Rightarrow \lambda &= 0,66509. \end{aligned}$$

Повторим наш эксперимент с этим портфелем облигаций. Начиная со строки 16 приведенной ниже таблицы, мы повторяем эксперимент предыдущего раздела с другой величиной доходности к погашению, добавив портфель из облигаций №1 и №3. Результаты расчета показывают, что будущая стоимость портфеля (строка 24) остается неизменной.



|    | A                                                        | B                  | C                                | D                  | E | F                  | G                                  | H | I |
|----|----------------------------------------------------------|--------------------|----------------------------------|--------------------|---|--------------------|------------------------------------|---|---|
| 1  | <b>ЭКСПЕРИМЕНТЫ С ПОРТФЕЛЯМИ ОБЛИГАЦИЙ И ВЫПУКЛОСТЬЮ</b> |                    |                                  |                    |   |                    |                                    |   |   |
| 2  |                                                          |                    |                                  |                    |   |                    |                                    |   |   |
| 3  | Доходность до срока погашения (ДСП)                      | 6%                 |                                  |                    |   |                    |                                    |   |   |
| 4  |                                                          |                    |                                  |                    |   |                    |                                    |   |   |
| 5  |                                                          | <b>Облиг.1</b>     | <b>Облиг.2</b>                   | <b>Облиг.3</b>     |   |                    |                                    |   |   |
| 6  | Купонная ставка                                          | 6,70%              | 6,988%                           | 5,90%              |   |                    |                                    |   |   |
| 7  | Срок                                                     | 10                 | 15                               | 30                 |   |                    |                                    |   |   |
| 8  | Номинал                                                  | 1 000              | 1 000                            | 1 000              |   |                    |                                    |   |   |
| 9  |                                                          |                    |                                  |                    |   |                    |                                    |   |   |
| 10 | Курс облигаций                                           | \$1 051,52         | \$1 095,96                       | \$986,24           |   |                    |                                    |   |   |
| 11 | Номинал, эквив. рыночному курсу \$1000                   | \$ 951,00          | \$ 912,44                        | \$ 1 013,96        |   |                    |                                    |   |   |
| 12 |                                                          |                    |                                  |                    |   |                    |                                    |   |   |
| 13 | Дюрация                                                  | 7,6655             | 10,0000                          | 14,6361            |   |                    |                                    |   |   |
| 14 |                                                          |                    |                                  |                    |   |                    |                                    |   |   |
| 15 |                                                          |                    |                                  |                    |   |                    |                                    |   |   |
| 16 | Новая ДСП                                                | 7%                 |                                  |                    |   |                    |                                    |   |   |
| 17 |                                                          |                    |                                  |                    |   |                    |                                    |   |   |
| 18 |                                                          | <b>Облиг.1</b>     | <b>Облиг.2</b>                   | <b>Облиг.3</b>     |   |                    | <b>Портфель из</b>                 |   |   |
| 19 | Курс облигаций                                           | \$1 000,00         | \$999,51                         | \$883,47           |   |                    | <b>1-й и 3-й облиг.</b>            |   |   |
| 20 | Реинвестированные проценты                               | \$925,70           | \$965,49                         | \$815,17           |   |                    |                                    |   |   |
| 21 | <b>Всего</b>                                             | <b>\$1 925,70</b>  | <b>\$1 965,00</b>                | <b>\$1 698,64</b>  |   |                    |                                    |   |   |
| 22 |                                                          |                    |                                  |                    |   |                    |                                    |   |   |
| 23 | Коэффициент—процент приобрет. номинала                   | 95,10%             | 91,24%                           | 101,40%            |   |                    |                                    |   |   |
| 24 | <b>Итого (после умножения на коэфф.)</b>                 | <b>\$ 1 831,35</b> | <b>\$ 1 792,95</b>               | <b>\$ 1 722,34</b> |   | <b>\$ 1 794,84</b> | <b>&lt;-- =B27*B24+(1-B27)*D24</b> |   |   |
| 25 |                                                          |                    |                                  |                    |   |                    |                                    |   |   |
| 26 | Портфель из 1-й и 3-й облигаций                          |                    |                                  |                    |   |                    |                                    |   |   |
| 27 | Доля облигаций 1                                         | 0,6651             | <b>&lt;-- =(1-D13)/(B13-D13)</b> |                    |   |                    |                                    |   |   |
| 28 | Доля облигаций 3                                         | 0,3349             | <b>&lt;-- =1-B27</b>             |                    |   |                    |                                    |   |   |

Если построить таблицу данных для этого эксперимента и соответствующие ей графики, получим, что портфель работает эффективнее, чем отдельная облигация №2.



Еще раз посмотрим на график. Обратите внимание, что хотя конечная стоимость имеет выпуклый характер относительно доходности как для портфеля, так и для облигации №2, конечная стоимость портфеля *более выпукла*, чем стоимость отдельной облигации. Редингтон (Redington), чьими усилиями понятия дюрации и иммунизации приобрели широкое распространение, в своей работе (Redington, 1952) указывал, что такая выпуклость крайне желательна, и теперь мы сами понимаем, почему: независимо от характера изменения величины доходности к погашению портфель облигаций обеспечивает *больший запас финансирования* будущего обязательства, чем одна облигация. Это, несомненно, очень желательное свойство для иммунизированного портфеля, в связи с которым можно сформулировать следующее правило.

*Сравнивая два иммунизированных портфеля, которые оба по отдельности обеспечивают финансирование заранее известного будущего обязательства, следует отдать предпочтение тому портфелю, конечная стоимость которого более выпукла по отношению к изменениям величины доходности к погашению<sup>1</sup>.*

## 21.5. Попытка усовершенствования

Несмотря на все, что было сказано в предыдущем разделе, было бы интересно вывести характеристики портфеля, конечная стоимость которого была бы как можно менее чувствительна к изменениям в доходности к погашению. Один из способов усовершенствования эффективности (назовем это так) портфеля облигаций состоит в том, чтобы согласовать не только первые (откуда и возникает понятие дюрации, как это показано в разделе 21.2), но и вторые производные изменений стоимости.

Непосредственно продолжая рассуждения раздела 21.2, получаем следующее условие равенства вторых производных:

$$N(N+1) = \sum_{t=1}^M \frac{t(t+1)P_t}{(1+r)^t}.$$

Следующий пример демонстрирует, какие усовершенствования можно внести в портфель путем согласования вторых производных. Рассмотрим четыре облигации, одна из которых — облигация №2 с дюрацией ровно десять лет — взята из предыдущего примера. Все облигации описаны в таблице, приведенной ниже.

<sup>1</sup> Выпуклость, показанная в этом примере, имеет еще одно следствие: она демонстрирует невозможность параллельных изменений во временной структуре! Если бы такие изменения были возможны и описывали погрешности (неопределенности) во временной структуре, то можно было бы сформировать пакет облигаций, который всегда выигрывал бы от изменений во временной структуре. А это арбитражная возможность, которая в модели идеального рынка не имеет места. Автор благодарит Цви Винера (Zvi Wiener) за указание на этот факт.

|    | A                                      | B              | C              | D              | E              | F                                                    | G | H | I | J |
|----|----------------------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|------------------------------------------------------|---|---|---|---|
| 1  | <b>ВЫПУКЛОСТЬ</b>                      |                |                |                |                |                                                      |   |   |   |   |
| 2  |                                        |                |                |                |                |                                                      |   |   |   |   |
| 3  | Доходность до срока погашения          | 6%             |                |                |                |                                                      |   |   |   |   |
| 4  |                                        |                |                |                |                |                                                      |   |   |   |   |
| 5  |                                        | <b>Облиг.1</b> | <b>Облиг.2</b> | <b>Облиг.3</b> | <b>Облиг.4</b> |                                                      |   |   |   |   |
| 6  | Купонная ставка                        | 4,50%          | 6,988%         | 3,50%          | 11,00%         |                                                      |   |   |   |   |
| 7  | Срок                                   | 20             | 15             | 14             | 10             |                                                      |   |   |   |   |
| 8  | Номинал                                | 1 000          | 1 000          | 1 000          | 1 000          |                                                      |   |   |   |   |
| 9  |                                        |                |                |                |                |                                                      |   |   |   |   |
| 10 | Курс облигаций                         | \$827,95       | \$1 095,96     | \$767,63       | \$1 368,00     |                                                      |   |   |   |   |
| 11 | Номинал, эквив. рыночному курсу \$1000 | \$ 1 207,80    | \$ 912,44      | \$ 1 302,72    | \$ 730,99      |                                                      |   |   |   |   |
| 12 |                                        |                |                |                |                |                                                      |   |   |   |   |
| 13 | Дюрация                                | 12,8964        | 10,0000        | 10,8484        | 7,0539         |                                                      |   |   |   |   |
| 14 | Вторая производная дюрации             | 229,0873       | 136,4996       | 148,7023       | 67,5980        | <-- =secondDur(E7,E6,\$B\$3)/bondprice(E7,E6,\$B\$3) |   |   |   |   |

Здесь `secondDur(numberPayments, couponRate, YTM)` — функция на языке VBA, разработанная нами для вычисления второй производной дюрации. Вот ее текст:

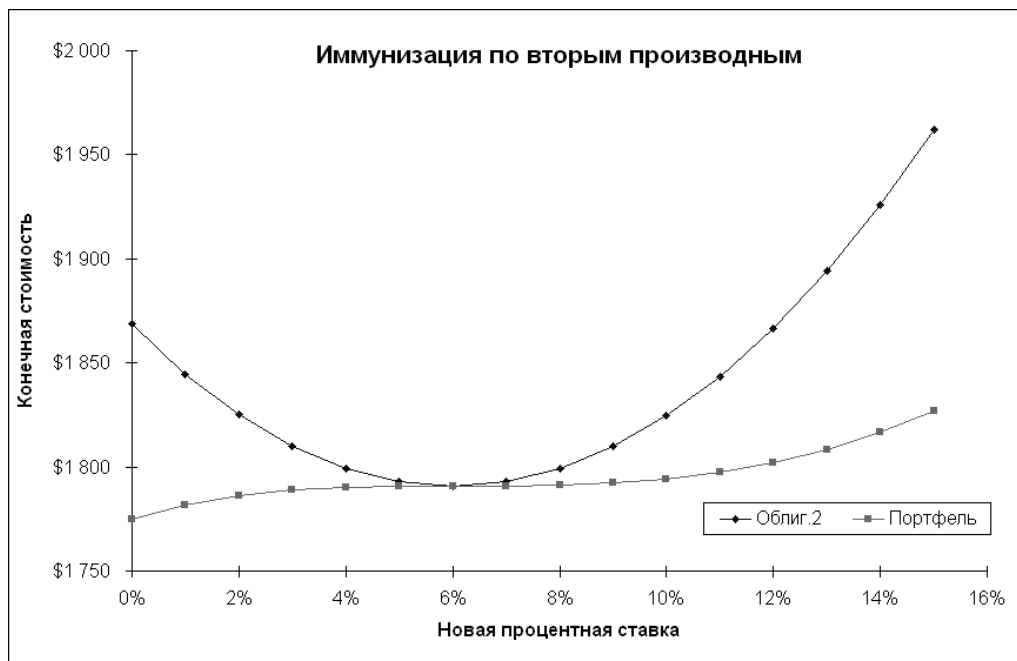
```
Function secondDur(numberPayments, couponRate, YTM)

For Index = 1 To numberPayments
    If Index < numberPayments Then
        secondDur = couponRate * Index * (Index + 1) _
            / (1 + YTM) ^ Index + secondDur
    Else
        secondDur = (couponRate + 1) * Index * _
            (Index + 1) / (1 + YTM) ^ Index + secondDur
    End If

    secondDur = secondDur
Next Index

End Function
```

Для построения портфеля облигаций, дюрация и вторая производная от дюрации которого равны аналогичным характеристикам будущего обязательства, требуются три облигации. Доли облигаций в портфеле, для которого выполнено такое согласование, составляют  $-0,56185$  для облигации №1,  $1,641528$  для облигации №3 и  $-0,07967$  для облигации №4. (Отрицательные доли облигаций №1 и №4 означают, что эти облигации мы продаем авансом — без покрытия.) Как показано на следующем рисунке, такой портфель обеспечивает даже лучшее страхование конечной стоимости, чем отдельная облигация №2.



## Упражнения

- Докажите, что дюрация портфеля равна средневзвешенной дюрации активов портфеля.
- Постройте таблицу, с помощью которой можно повторить расчеты раздела 21.5.
  - Используя пример из раздела 21.3, найдите комбинацию облигаций №1 и №3 с дюрацией 8.
  - Найдите комбинацию облигаций №1 и №2 с дюрацией 8.
- Какой портфель (а или б) из упражнения 3 вы бы предпочли для иммунизации облигации с дюрацией 8?
- Продолжая выполнение упражнения 3, пересчитайте доли активов в портфеле для требуемой дюрации, равной 12. Какой портфель вы бы предпочли сейчас?

## 22 Моделирование временной структуры процентных ставок

### 22.1. Введение

Эта глава посвящена моделированию временной структуры процентных ставок с использованием полиномиальной модели и других регрессионных моделей.

### 22.2. Полиномиальные регрессии

Проиллюстрируем некоторые понятия моделирования временной структуры на примере того же набора данных о процентных ставках государственного казначейства США, который использовался в главе 20 (согласно McCulloch, 1990). Мы используем подмножество этих данных за 1980–1987 гг. Ниже показано, как выглядит часть этих данных.

| НАБОР ДАННЫХ ПО ВРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЕ ПРОЦЕНТНЫХ СТАВОК |       |       |       |       |       |       |       |
|-------------------------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|                                                       | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     |
| Дата                                                  | 0мес  | 1мес  | 2мес  | 3мес  | 4мес  | 5мес  | 6мес  |
| 1.1980                                                | 11,03 | 11,87 | 12,28 | 12,36 | 12,39 | 12,43 | 12,43 |
| 2.1980                                                | 13,29 | 13,92 | 14,26 | 14,32 | 14,37 | 14,54 | 14,73 |
| 3.1980                                                | 13,89 | 15,07 | 15,44 | 15,24 | 15,19 | 15,53 | 15,92 |
| 4.1980                                                | 10,28 | 10,39 | 10,52 | 10,68 | 10,82 | 10,95 | 11,04 |
| 5.1980                                                | 8,22  | 7,85  | 7,76  | 7,91  | 8,1   | 8,25  | 8,36  |
| 6.1980                                                | 4,09  | 6,66  | 7,94  | 8,16  | 8,11  | 8,13  | 8,2   |
| 7.1980                                                | 6,47  | 7,84  | 8,57  | 8,8   | 8,87  | 8,9   | 8,93  |
| 8.1980                                                | 8,27  | 9,2   | 9,86  | 10,26 | 10,5  | 10,64 | 10,71 |
| 9.1980                                                | 10,98 | 11,2  | 11,42 | 11,63 | 11,79 | 11,89 | 11,95 |
| 10.1980                                               | 10,23 | 11,66 | 12,58 | 12,99 | 13,14 | 13,21 | 13,27 |

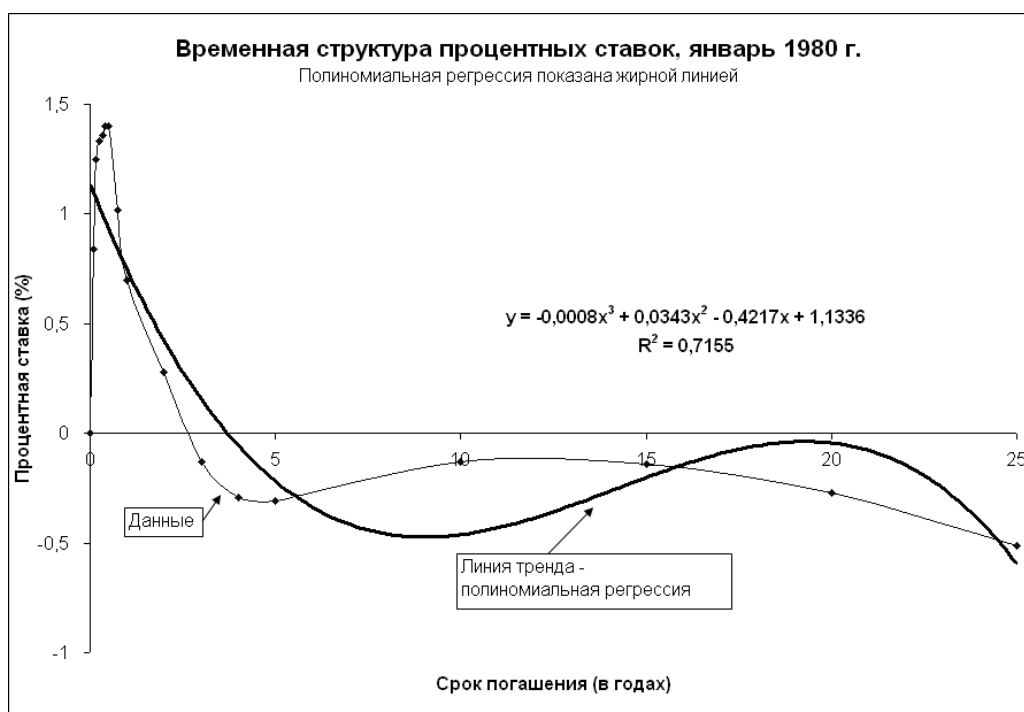
Данные о процентных ставках покрывают период 20–25 лет, но для экономии места мы не показываем полной длины строк. Заметим, что процентные ставки в таблице выражены непосредственно в процентах, а не в долях единицы — например, трехмесячная процентная ставка в январе 1980 г. равнялась 12,36%.

Вначале нормализуем данные, рассмотрев превышение каждой ставки над краткосрочной ставкой. Для этого вычтем ставку за 0 месяцев (которую надо понимать как процентную ставку очень краткосрочного — скажем, однодневного — вложения в какой-нибудь инвестиционный фонд денежного рынка) из всех остальных ячеек строки, как показано ниже.

| 4  |         | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     |
|----|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 5  | Date    | 0мес  | 1мес  | 2мес  | 3мес  | 4мес  | 5мес  | 6мес  |
| 6  | Time    | 0,000 | 0,083 | 0,167 | 0,250 | 0,333 | 0,417 | 0,500 |
| 7  | 1.1980  | 0     | 0,84  | 1,25  | 1,33  | 1,36  | 1,4   | 1,4   |
| 8  | 2.1980  | 0     | 0,63  | 0,97  | 1,03  | 1,08  | 1,25  | 1,44  |
| 9  | 3.1980  | 0     | 1,18  | 1,55  | 1,35  | 1,3   | 1,64  | 2,03  |
| 10 | 4.1980  | 0     | 0,11  | 0,24  | 0,4   | 0,54  | 0,67  | 0,76  |
| 11 | 5.1980  | 0     | -0,37 | -0,46 | -0,31 | -0,12 | 0,03  | 0,14  |
| 12 | 6.1980  | 0     | 2,57  | 3,85  | 4,07  | 4,02  | 4,04  | 4,11  |
| 13 | 7.1980  | 0     | 1,37  | 2,1   | 2,33  | 2,4   | 2,43  | 2,46  |
| 14 | 8.1980  | 0     | 0,93  | 1,59  | 1,99  | 2,23  | 2,37  | 2,44  |
| 15 | 9.1980  | 0     | 0,22  | 0,44  | 0,65  | 0,81  | 0,91  | 0,97  |
| 16 | 10.1980 | 0     | 1,43  | 2,35  | 2,76  | 2,91  | 2,98  | 3,04  |

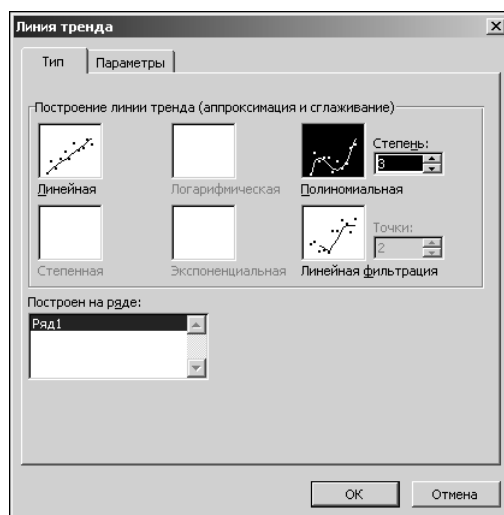
Обратите внимание, что в таблице также появилась лишняя строка. В строке 6 данные о сроках погашения облигаций приведены к годовым единицам.

Существуют убедительные подтверждения эффективности полиномиальной регрессии в моделировании временной структуры процентных ставок<sup>1</sup>. Для примера рассмотрим временную структуру в январе 1980 г.

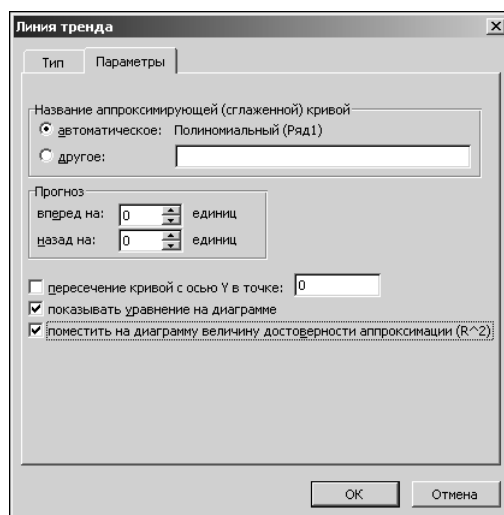


Расчет регрессии выполнен в Excel с помощью средства Линия тренда (Trendline). Вначале был построен график данных в прямоугольных осях XY. Затем после щелчка правой кнопкой мыши из контекстного меню был выбран пункт Добавить линию тренда (Add Trendline). В результате открылось следующее меню (отметим, что уже выбрана полиномиальная регрессия 3-го порядка).

<sup>1</sup> См., например, работы Litterman, Schneikman (1991); Mann, Ramanlal (1997).



Прежде чем щелкнуть на кнопке ОК в этом диалоговом окне, мы перешли на вкладку Параметры (Options), чтобы задать желаемую форму представления графика.



Линия регрессии имеет следующую формулу:

$$y = -0,0008x^3 + 0,0343x^2 - 0,4217x + 1,1336, \quad R^2 = 0,7155.$$

Таким образом, 70% изменчивости данной конкретной временной структуры определяется временем ( $x$ ), квадратом времени ( $x^2$ ) и кубом времени ( $x^3$ ). В работе Litterman, Scheinkman (1991) коэффициент при  $x$  называется *коэффициентом уровня (level factor)* из-за способа его влияния на процентные ставки. При изменении этого коэффициента во временной структуре происходит параллель-

ный сдвиг. Те же авторы называют коэффициент при  $x^2$  *коэффициентом уклона* (*steepness factor*), а при  $x^3$  — *коэффициентом кривизны* (*curvature factor*) временной структуры.

Для выполнения этой регрессии можно также воспользоваться функцией Excel ЛИНЕЙН (Linest). Чтобы с помощью этой функции построить полиномиальную регрессию 3-й степени, мы добавили в наш набор данных квадрат и куб времени (как и раньше, показаны только фрагменты полных строк).

|    | A                                                               | B     | C      | D      | E      | F      | G      | H      | I      |
|----|-----------------------------------------------------------------|-------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 1  | <b>ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИИ ЛИНЕЙН (LINEST)</b>                       |       |        |        |        |        |        |        |        |
| 2  | Данные представлены в виде превышения над краткосрочной ставкой |       |        |        |        |        |        |        |        |
| 3  |                                                                 |       |        |        |        |        |        |        |        |
| 4  |                                                                 | 1     | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      |
| 5  | Дата                                                            | 0мес  | 1мес   | 2мес   | 3мес   | 4мес   | 5мес   | 6мес   | 9мес   |
| 6  | Время                                                           | 0,000 | 0,083  | 0,167  | 0,250  | 0,333  | 0,417  | 0,500  | 0,750  |
| 7  | Время <sup>2</sup>                                              | 0     | 0,0069 | 0,0278 | 0,0625 | 0,1111 | 0,1736 | 0,2500 | 0,5625 |
| 8  | Время <sup>3</sup>                                              | 0     | 0,0006 | 0,0046 | 0,0156 | 0,0370 | 0,0723 | 0,1250 | 0,4219 |
| 9  | 1.1980                                                          | 0     | 0,84   | 1,25   | 1,33   | 1,36   | 1,4    | 1,4    | 1,02   |
| 10 | 2.1980                                                          | 0     | 0,63   | 0,97   | 1,03   | 1,08   | 1,25   | 1,44   | 1,63   |

Теперь выделим диапазон размером  $5 \times 4$  и введем функцию ЛИНЕЙН (Linest) в виде массива; более подробно об ее использовании можно прочитать в главе 29.

|    | T                                                 | U                    | V                    | W          | X              | Y           |
|----|---------------------------------------------------|----------------------|----------------------|------------|----------------|-------------|
| 7  | <b>Результаты работы функции ЛИНЕЙН (LINEST)</b>  |                      |                      |            |                |             |
| 8  |                                                   | <b>r<sup>2</sup></b> | <b>r<sup>2</sup></b> | <b>t</b>   | <b>Отрезок</b> |             |
| 9  | Коэффициенты                                      | -0,0008072           | 0,0342852            | -0,4217044 | 1,13360515     |             |
| 10 | Стандартные ошибки                                | 0,00033754           | 0,01216843           | 0,11059289 | 0,16178995     |             |
| 11 | R <sup>2</sup> и С.О. (y)                         | 0,71553824           | 0,42880714           | #И/Д       | #И/Д           |             |
| 12 | F, d <sub>f</sub>                                 | 10,9001145           | 13                   | #И/Д       | #И/Д           |             |
| 13 | SS <sub>req</sub> , SS <sub>resid</sub>           | 6,01279413           | 2,39038234           | #И/Д       | #И/Д           |             |
| 14 | T-статистика                                      | -2,3914108           | 2,81755343           | -3,8131239 | 7,00664748     | <-- =X9/X10 |
| 15 |                                                   |                      |                      |            |                |             |
| 16 | Формула в ячейках U9:X13 (функция выдает массив): |                      |                      |            |                |             |
| 17 | =ЛИНЕЙН(B9:R9,B6:R8,,ИСТИНА)                      |                      |                      |            |                |             |

Из строки “Т-статистика” очевидно, что все три коэффициента имеют существенную значимость.

## 22.3. Изменение коэффициентов со временем

Теперь можно повторить этот же эксперимент над временными структурами из работы McCullogh (1990), построив таблицу с изменяющимися во времени коэффициентами. Ниже приведено несколько строк из этой таблицы.



|    | A                                                                        | B                       | C                       | D                     | E              | F                       | G                                                                                                                                                                                                                                                                            | H | I | J | K |
|----|--------------------------------------------------------------------------|-------------------------|-------------------------|-----------------------|----------------|-------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|
| 1  | <b>ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИИ ЛИНЕЙН (LINEST)</b>                                |                         |                         |                       |                |                         |                                                                                                                                                                                                                                                                              |   |   |   |   |
| 2  | Функция используется для демонстрации изменения коэффициентов во времени |                         |                         |                       |                |                         |                                                                                                                                                                                                                                                                              |   |   |   |   |
| 3  |                                                                          |                         |                         |                       |                |                         |                                                                                                                                                                                                                                                                              |   |   |   |   |
| 4  |                                                                          |                         |                         |                       |                |                         |                                                                                                                                                                                                                                                                              |   |   |   |   |
| 5  |                                                                          |                         |                         |                       |                |                         |                                                                                                                                                                                                                                                                              |   |   |   |   |
| 6  |                                                                          |                         |                         |                       |                |                         |                                                                                                                                                                                                                                                                              |   |   |   |   |
| 7  |                                                                          |                         |                         |                       |                |                         |                                                                                                                                                                                                                                                                              |   |   |   |   |
| 8  | <b>Дата</b>                                                              | <b><math>t^3</math></b> | <b><math>t^2</math></b> | <b><math>t</math></b> | <b>Отрезок</b> | <b><math>R^2</math></b> | <b>Примечание:</b> Ячейки B9:E9 содержат формулу<br>(=ЛИНЕЙН(L9:AB9,\$M\$5:\$AC\$7)). Ячейки M5:AC5<br>содержат время, а также его квадрат и куб.<br>Формула копируется в нужные ячейки.<br>Ячейка F9 содержит формулу<br>=ИНДЕКС(ЛИНЕЙН(M9:AC9,\$M\$5:\$AC\$7,;ИСТИНА),3,1) |   |   |   |   |
| 9  | 1.1980                                                                   | -0,0008                 | 0,0343                  | -0,4217               | 1,1336         | 71,55%                  |                                                                                                                                                                                                                                                                              |   |   |   |   |
| 10 | 2.1980                                                                   | -0,0001                 | 0,0086                  | -0,2762               | 1,1587         | 86,54%                  |                                                                                                                                                                                                                                                                              |   |   |   |   |
| 11 | 3.1980                                                                   | -0,0014                 | 0,0593                  | -0,8209               | 1,6074         | 88,38%                  |                                                                                                                                                                                                                                                                              |   |   |   |   |
| 12 | 4.1980                                                                   | -0,0003                 | 0,0113                  | -0,0916               | 0,4556         | 17,78%                  |                                                                                                                                                                                                                                                                              |   |   |   |   |
| 13 | 5.1980                                                                   | 0,0005                  | -0,0268                 | 0,4586                | -0,1996        | 96,93%                  |                                                                                                                                                                                                                                                                              |   |   |   |   |
| 14 | 6.1980                                                                   | 0,0010                  | -0,0505                 | 0,7208                | 3,1846         | 60,88%                  |                                                                                                                                                                                                                                                                              |   |   |   |   |
| 15 | 7.1980                                                                   | 0,0007                  | -0,0363                 | 0,5698                | 1,8186         | 77,91%                  |                                                                                                                                                                                                                                                                              |   |   |   |   |
| 16 | 8.1980                                                                   | 0,0010                  | -0,0441                 | 0,5313                | 1,6942         | 51,13%                  |                                                                                                                                                                                                                                                                              |   |   |   |   |
| 17 | 9.1980                                                                   | -0,0001                 | 0,0009                  | 0,0152                | 0,6400         | 31,47%                  |                                                                                                                                                                                                                                                                              |   |   |   |   |
| 18 | 10.1980                                                                  | 0,0001                  | -0,0063                 | 0,0315                | 2,3198         | 20,02%                  |                                                                                                                                                                                                                                                                              |   |   |   |   |
| 19 | 11.1980                                                                  | -0,0010                 | 0,0423                  | -0,5951               | 1,1428         | 91,68%                  |                                                                                                                                                                                                                                                                              |   |   |   |   |
| 20 | 12.1980                                                                  | -0,0009                 | 0,0376                  | -0,4909               | 2,9244         | 51,87%                  |                                                                                                                                                                                                                                                                              |   |   |   |   |
| 21 | 1.1981                                                                   | -0,0015                 | 0,0638                  | -0,7865               | 0,7615         | 91,32%                  |                                                                                                                                                                                                                                                                              |   |   |   |   |
| 22 | 2.1981                                                                   | -0,0006                 | 0,0250                  | -0,3482               | 0,8460         | 90,08%                  |                                                                                                                                                                                                                                                                              |   |   |   |   |
| 23 | 3.1981                                                                   | -0,0002                 | 0,0009                  | 0,0072                | -0,2530        | 91,69%                  |                                                                                                                                                                                                                                                                              |   |   |   |   |
| 24 | 4.1981                                                                   | -0,0003                 | 0,0088                  | -0,1584               | 2,0541         | 64,87%                  |                                                                                                                                                                                                                                                                              |   |   |   |   |
| 25 | 5.1981                                                                   | -0,0014                 | 0,0585                  | -0,7609               | -0,5463        | 94,97%                  |                                                                                                                                                                                                                                                                              |   |   |   |   |
| 26 | 6.1981                                                                   | -0,0004                 | 0,0152                  | -0,2326               | 0,5594         | 96,10%                  |                                                                                                                                                                                                                                                                              |   |   |   |   |

Заметим, что на протяжении 16-месячного периода наибольшие изменения касались параметра “отрезок” (отсечение на оси) — это основной случай, процентные ставки нулевой даты. Следующие по величине изменения касались коэффициента при  $t$ , который служит мерой изменения во временной структуре как функции времени. Изменения в коэффициентах  $t^2$  и  $t^3$  оказались намного меньшими; это означает, что они характеризуют в основном долговременные тенденции. Этот факт подчеркивается следующим графиком, на котором показаны параметры отрезков и коэффициенты регрессии  $r_{jt} = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \beta_3 t^3$  за весь период до 1987 г. включительно.



Можно построить также график величины  $R^2$ , чтобы грубо оценить степень соответствия регрессии данным. На протяжении большей части 1980-х годов регрессия прекрасно соответствует данным, хотя в начале десятилетия соответствие несколько хуже из-за чрезвычайно неустойчивых временных структур того периода.



## 22.4. Теоретические модели временных структур

Модель временной структуры, используемая в этой главе, — аппроксимация многочленом (полиномом) 3-й степени — очень полезна на практике. Но в научной литературе описано гораздо больше разнообразных теоретических моделей. В этом разделе мы коснемся одной из них — модели Васичека (Vasicek, 1990). Модель временной структуры по Васичеку основана на двух гипотезах, касающихся процентных ставок.

- Вся временная структура считается зависимой от процентной ставки для самого короткого срока погашения; она обозначается как  $r$  и называется *мгновенной процентной ставкой* (*spot interest rate*).
- Предполагается, что изменения мгновенной ставки  $r$  носят колебательный характер около линии средних значений; их можно записать в виде

$$\Delta r = \alpha (\gamma - r) + \rho Z \sqrt{\Delta t},$$

где  $\gamma$  — долгосрочное среднее от мгновенных процентных ставок;  $\alpha$  — коэффициент сдвига в сторону долгосрочного среднего;  $\rho$  — мгновенное стандартное отклонение.

Васичек показал, что коэффициент приведенной стоимости  $v(t, s, r)$  в момент  $t$  для всех моментов  $s > t$  вычисляется по формуле

$$v[t, s, r, R(\infty)] = \exp \left\{ \frac{1}{\alpha} \left( 1 - e^{-\alpha(s-t)} \right) [R(\infty) - r] - \right. \\ \left. - (s - t) R(\infty) - \frac{\rho^2}{4\alpha^3} \left( 1 - e^{-\alpha(s-t)} \right)^2 \right\}, t \leq s,$$

где  $R(\infty)$  — долгосрочная процентная ставка. Чтобы оценить облигацию по модели Васичека, следует задать  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\rho$  и  $R(\infty)$ , а затем записать цену облигации как функцию текущей мгновенной процентной ставки  $r$ :

$$P = \sum_{s=1}^N v[0, s, r, R(\infty)] C_t.$$

Модель Васичека легко программируется в Excel, но полное рассмотрение ее свойств выходит за рамки этой книги.



---

## 23 Доходность облигаций с поправкой на дефолт

---

### 23.1. Введение

В этой главе рассматривается влияние риска дефолта (несоблюдения долговых обязательств) на доходность облигаций, удерживаемых владельцем до самого срока их погашения. *Средняя ожидаемая доходность* облигации, по которой возможна невыплата, отличается от *обещанного дохода* по облигации. Последний определяется как *доходность до срока погашения* (*yield to maturity*), т.е. внутренняя ставка доходности, рассчитанная по текущему рыночному курсу облигации и ее *обещанным* купонным выплатам вместе с *обещанной* выплатой основной суммы в будущем. Средний ожидаемый доход по облигации рассчитать несколько сложнее: необходимо принять во внимание как вероятность будущего дефолта, так и процентную долю от основной суммы, которую держатели могут вернуть себе в случае этого дефолта. Еще больше усложняется ситуация в случае, когда дефолт происходит не сразу, а поэтапно — путем постепенного падения кредитоспособности компании, выпустившей облигации<sup>1</sup>.

В этой главе ожидаемый доход по облигациям, подверженным риску, вычисляется с применением марковской модели. Учет риска производится по всем трем упомянутым факторам: вероятности дефолта, переходу выпускающей фирмы из одного состояния кредитоспособности в другое и процентной доле номинальной стоимости облигации, которую может вернуть себе ее держатель в случае дефолта. После демонстрации на примере и решения небольшой модельной задачи в Excel будет запрограммирована более полная модель на основе общедоступной реальной статистики. Наконец, будет показано применение модели для расчета коэффициента “бета” — меры риска в ценовой модели рынка капитала, используемой в работе с ценными бумагами (эта модель рассматривалась в главах 7–12).

#### 23.1.1. Предварительные сведения

Прежде чем продолжить, дадим определения некоторых терминов.

- При выпуске облигация получает некоторую *номинальную стоимость* (*face value*), соответствующую *основной сумме* (*principal*) займа. Держатель облигации рассчитывает получить эту основную сумму в срок погашения облигации. Облигация может продаваться по цене, равной номинальной стоимости, т.е. *по номиналу* (*at par*).

---

<sup>1</sup> Кроме риска дефолта, облигации подвержены также риску, связанному с временной структурой процентных ставок: курс облигации может заметно изменяться со временем в результате вариаций во временной структуре. Это особенно часто случается с долгосрочными облигациями. В этой главе риск, связанный с временной структурой, для простоты не рассматривается; мы ограничимся только влиянием риска дефолта на ожидаемую доходность облигаций.

- По облигации устанавливается процентная ставка, именуемая *купонной ставкой* (*coupon rate*). Благодаря этому держатель акций рассчитывает получить в виде периодических выплат сумму, равную произведению ставки купона на номинальную стоимость облигации.
- В любой момент облигацию можно продать на рынке по *рыночной цене* (*market price*). Эта цена может отличаться от купонной ставки облигации<sup>2</sup>.
- *Доходностью облигации до срока погашения* (*yield to maturity — YTM*) называется внутренняя ставка доходности облигации, рассчитанная в предположении, что облигация удерживается на руках до срока погашения и не подвержена дефолту.

Облигации американских корпораций оцениваются различными организациями, которые присваивают им рейтинг в зависимости от способности выпускающей компании осуществлять выплаты и расчеты по этим облигациям. В следующей таблице приведена схема классификации, используемая двумя основными рейтинговыми организациями, Standard & Poor (S&P) и Moody's.

#### Рейтинг ликвидности долгосрочных обязательств

| По окупаемости вложений |         |                                | По спекулятивной ценности |         |                                                                                  |
|-------------------------|---------|--------------------------------|---------------------------|---------|----------------------------------------------------------------------------------|
| S&P                     | Moody's | Определение                    | S&P                       | Moody's | Определение                                                                      |
| AAA                     | Aaa     | Высшего качества               | BB+                       | Ba1     | Высокая вероятность выполнения обязательств; нормальный уровень неопределенности |
|                         |         |                                | BB                        | Ba2     |                                                                                  |
|                         |         |                                | BB–                       | Ba3     |                                                                                  |
| AA+                     | Aa1     | Высокого качества              | B+                        | B1      | Облигации с высоким уровнем риска                                                |
| AA                      | Aa2     |                                | B                         | B2      |                                                                                  |
| AA–                     | Aa3     |                                | B–                        | B3      |                                                                                  |
| A+                      | A1      | Надежная платежеспособность    | CCC+                      | Ca      | Высокая вероятность дефолта                                                      |
| AA                      | A2      |                                | CCC                       |         |                                                                                  |
| AA–                     | A3      |                                | CCC–                      |         |                                                                                  |
| BBB+                    | Baa1    | Достаточная платежеспособность | C                         | Ca      | В состоянии банкротства, дефолта и т.п.                                          |
| BBB                     | Baa2    |                                | D                         | D       |                                                                                  |
| BBB–                    | Baa3    |                                |                           |         |                                                                                  |

<sup>2</sup> Как будто специально для того, чтобы еще усложнить жизнь, в США существует соглашение о добавлении к прейскурантной цене пропорциональной купонной ставки (*prorate coupon*) между моментом последней купонной выплаты и датой приобретения. Сумма этих двух величин называется *фактурной ценой* (*invoice price*) облигации и является фактической стоимостью приобретения облигации на данный момент. В этой главе фактурная цена именуется рыночной ценой.

При дефолте облигации ее держатели обычно получают некоторую сумму в качестве возмещения, хотя она, конечно, меньше обещанной купонной ставки и основной суммы. Процент от номинальной стоимости облигации, выплачиваемый в случае дефолта, будем называть *компенсационным (recovery percentage)*.

## 23.2. Расчет ожидаемого дохода в рамках одного периода

Очевидно, доход к получению до срока погашения (*yield to maturity*) не является ожидаемым доходом по облигации, поскольку на величину среднего ожидаемого дохода должны влиять как рейтинг облигации, так и ожидаемая величина компенсационной выплаты в случае дефолта. При прочих равных условиях следует ожидать, что если две только что выпущенные облигации имеют один и тот же срок погашения, то облигация с более низким рейтингом (т.е. с большей вероятностью дефолта) должна иметь более высокую ставку купона. Аналогично следует ожидать, что выпущенная на рынок и продаваемая там облигация, рейтинг которой идет на понижение, должна пострадать в цене. Можно предположить также, что чем меньший компенсационный процент получают держатели в случае дефолта, тем ниже окажется средний ожидаемый доход по облигации.

В качестве простого иллюстративного примера мы рассчитали средний ожидаемый доход по облигации, имеющей годичный срок погашения, которая может претерпеть дефолт на момент ее погашения. Используются следующие обозначения:

$F$  — номинальная стоимость облигации;

$P$  — цена облигации;

$Q$  — годовая ставка купона по облигации;

$\pi$  — вероятность того, что в конце года *не случится* дефолт;

$\lambda$  — доля стоимости облигации, которую держатель получит в случае дефолта.

Средний ожидаемый денежный поток по облигации в конце года составит  $\pi(1 + Q)F + (1 - \pi)\lambda F$ , а *средний ожидаемый доход* вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \text{Ожидаемый доход} &= \frac{\text{Ожидаемый поток в конце года}}{P} - 1 = \\ &= \frac{\pi(1 + Q)F + (1 - \pi)\lambda F}{P} - 1. \end{aligned}$$

Этот расчет показан в следующей таблице.

|    | A                                              | B      | C                              | D | E | F |
|----|------------------------------------------------|--------|--------------------------------|---|---|---|
| 1  | <b>ОЖИДАЕМЫЙ ДОХОД ПО ОДНОЛЕТНЕЙ ОБЛИГАЦИИ</b> |        |                                |   |   |   |
| 2  | <b>С ПОПРАВКОЙ НА ВЕРОЯТНОСТЬ ДЕФОЛТА</b>      |        |                                |   |   |   |
| 3  |                                                |        |                                |   |   |   |
| 4  | Номинал, F                                     | 100    |                                |   |   |   |
| 5  | Рыночная цена, P                               | 98     |                                |   |   |   |
| 6  | Годовая купонная ставка, Q                     | 16%    |                                |   |   |   |
| 7  | Вероятность не-дефолта, π                      | 90%    |                                |   |   |   |
| 8  | Компенсация при дефолте, λ                     | 80%    |                                |   |   |   |
| 9  |                                                |        |                                |   |   |   |
| 10 | Ожидаемый денежный поток                       | 112,4  | <-- =B7*(1+B6)*B4+(1-B7)*B8*B4 |   |   |   |
| 11 | Ожидаемый доход                                | 14,69% | <-- =B10/B5-1                  |   |   |   |

### 23.3. Задача для марковской цепи с несколькими периодами и состояниями

Введем в задачу фактор наличия нескольких расчетных периодов. В этом разделе предлагается базовая модель, основанная на очень простой рейтинговой системе, в отличие от сложной системы, приведенной в разделе 23.1. А вот в разделе 23.5 будут использоваться уже более близкие к реальности исходные данные и предположения.

Предполагаем, что в любой момент существует четыре возможных уровня рейтинга для облигации.

- Высочайший рейтинг (A).
- Высокий рейтинг (B).
- Первый дефолт облигации, при котором выплачивается доля λ от номинала (D).
- В предыдущем периоде уже был дефолт, поэтому в текущем и последующих периодах выплачивается 0; обозначается этот рейтинг как E.

Определяется следующая матрица переходных вероятностей Π:

$$\Pi = \begin{bmatrix} \pi_{AA} & \pi_{AB} & \pi_{AD} & 0 \\ \pi_{BA} & \pi_{BB} & \pi_{BD} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Величина  $\pi_{ij}$  описывает вероятность изменения рейтинга облигации с  $i$  на  $j$  в течение одного периода. В вычислительном примере раздела 23.4 будет использоваться следующая матрица Π:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0,99 & 0,01 & 0 & 0 \\ 0,03 & 0,96 & 0,01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Каков смысл этой матрицы?

- Пусть облигация имеет рейтинг А в текущем периоде; тогда с вероятностью 0,99 она будет иметь тот же рейтинг А и в следующем. Существует вероятность 0,01, что она в следующем периоде изменит свой рейтинг на В, но *совершенно невозможно*, чтобы облигация, в настоящее время котирующаяся с рейтингом А, получила бы рейтинг D или Е в следующий период. В то время как рейтинги А и В могут смениться на любой из рейтингов А, В или D, ни один из рейтингов А и В не может измениться на Е. Это утверждение, очевидно, справедливо, поскольку рейтинг Е означает, что *в предыдущем периоде* уже имел место дефолт.
- В примере матрицы П облигация с начальным рейтингом В может в следующий период изменить его на А (с вероятностью 0,03), сохранить рейтинг В (с вероятностью 0,96) или получить оценку D с вероятностью 0,01, оказавшись в состоянии дефолта.
- Облигация, находящаяся в настоящее время в состоянии D (первого дефолта), обязательно окажется в состоянии Е в следующем периоде. Поэтому третья строка нашей матрицы П всегда будет иметь вид [0 0 0 1].
- Получив рейтинг Е, облигация останется с ним навсегда. Поэтому четвертая строка матрицы П также всегда будет иметь вид [0 0 0 1].

### 23.3.1. Матрица перехода за несколько периодов

Матрица П задает переходные вероятности для одного периода. Переходные вероятности за два периода вычисляются перемножением двух матриц П (произведение матриц и функции массивов рассматриваются в главе 27).

$$\begin{aligned}
 &\text{Переходные вероятности для двух периодов} = \\
 &= \mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0,99 & 0,01 & 0 & 0 \\ 0,03 & 0,96 & 0,01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,99 & 0,01 & 0 & 0 \\ 0,03 & 0,96 & 0,01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} 0,9804 & 0,0195 & 0,0001 & 0 \\ 0,0585 & 0,9219 & 0,0096 & 0,0100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Таким образом, если облигация в настоящий момент имеет рейтинг В, то с вероятностью 5,85% она через два периода получит рейтинг А, с вероятностью 92,19% сохранит рейтинг В, с вероятностью 0,96% окажется в состоянии дефолта (с рейтингом D) и с вероятностью 1% получит рейтинг Е. В последнем случае, разумеется, облигация предварительно испытала дефолт в предыдущем периоде.

Для вычисления матриц переходных вероятностей за несколько лет можно воспользоваться функцией МУМНОЖ (MMult) среды Excel, рассмотренной в главе 27.

|    | A                                   | B      | C      | D      | E |
|----|-------------------------------------|--------|--------|--------|---|
| 1  | ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИИ МУМНОЖ (MMULT)   |        |        |        |   |
| 2  |                                     |        |        |        |   |
| 3  | Матрица перехода для одного периода |        |        |        |   |
| 4  | 0,9900                              | 0,0100 | 0,0000 | 0,0000 |   |
| 5  | 0,0300                              | 0,9600 | 0,0100 | 0,0000 |   |
| 6  | 0,0000                              | 0,0000 | 0,0000 | 1,0000 |   |
| 7  | 0,0000                              | 0,0000 | 0,0000 | 1,0000 |   |
| 8  |                                     |        |        |        |   |
| 9  |                                     |        |        |        |   |
| 10 | Матрица перехода для двух периодов  |        |        |        |   |
| 11 | 0,9804                              | 0,0195 | 0,0001 | 0,0000 |   |
| 12 | 0,0585                              | 0,9219 | 0,0096 | 0,0100 |   |
| 13 | 0,0000                              | 0,0000 | 0,0000 | 1,0000 |   |
| 14 | 0,0000                              | 0,0000 | 0,0000 | 1,0000 |   |
| 15 |                                     |        |        |        |   |
| 16 | Ячейки A11:D14 содержат формулу     |        |        |        |   |
| 17 | {=МУМНОЖ(A4:D7,A4:D7)}              |        |        |        |   |
| 18 |                                     |        |        |        |   |
| 19 | Матрица перехода для трех периодов  |        |        |        |   |
| 20 | 0,9712                              | 0,0285 | 0,0002 | 0,0001 |   |
| 21 | 0,0856                              | 0,8856 | 0,0092 | 0,0196 |   |
| 22 | 0,0000                              | 0,0000 | 0,0000 | 1,0000 |   |
| 23 | 0,0000                              | 0,0000 | 0,0000 | 1,0000 |   |
| 24 |                                     |        |        |        |   |
| 25 | Ячейки A20:D23 содержат формулу     |        |        |        |   |
| 26 | {=МУМНОЖ(A4:D7,A11:D14)}            |        |        |        |   |
| 27 |                                     |        |        |        |   |

В общем случае матрица переходных вероятностей за  $t$  лет представляет собой матрицу  $\Pi$  в  $t$ -й степени. Вычисление такой матрицы способом, показанным в предыдущей таблице, слишком громоздко, поэтому вначале напишем функцию на VBA для вычисления степеней матриц.

```
Function matrixpower(matrix, n)
    If n = 1 Then matrixpower = matrix
    Else: matrixpower =
        Application.Mmult(matrixpower(matrix, n - 1), matrix)
    End If
End Function
```

Применение этой функции показано в следующей таблице. Функция `Matrixpower` позволяет вычислить степень любой матрицы переходных вероятностей за один шаг расчета.

|    | A                                   | B      | C      | D      |
|----|-------------------------------------|--------|--------|--------|
| 1  | ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИИ MATRIXPOWER      |        |        |        |
| 2  |                                     |        |        |        |
| 3  | Матрица перехода для одного периода |        |        |        |
| 4  | 0,9900                              | 0,0100 | 0,0000 | 0,0000 |
| 5  | 0,0300                              | 0,9600 | 0,0100 | 0,0000 |
| 6  | 0,0000                              | 0,0000 | 0,0000 | 1,0000 |
| 7  | 0,0000                              | 0,0000 | 0,0000 | 1,0000 |
| 8  |                                     |        |        |        |
| 9  | t                                   | 10     |        |        |
| 10 |                                     |        |        |        |
| 11 | Матрица перехода для t периодов     |        |        |        |
| 12 | 0,9159                              | 0,0802 | 0,0007 | 0,0032 |
| 13 | 0,2405                              | 0,6754 | 0,0070 | 0,0771 |
| 14 | 0,0000                              | 0,0000 | 0,0000 | 1,0000 |
| 15 | 0,0000                              | 0,0000 | 0,0000 | 1,0000 |
| 16 |                                     |        |        |        |
| 17 |                                     |        |        |        |
| 18 | Ячейки A12:D15 содержат формулу     |        |        |        |
| 19 | {=MATRIXPOWER(A4:D7,B9)}            |        |        |        |
| 20 |                                     |        |        |        |

Из этого примера следует, что если в начальный момент облигация А имеет рейтинг А, то существует вероятность 0,3%, что по прошествии 10 периодов облигацию постигнет дефолт, а также вероятность 0,07%, что это случится до десятого периода.

### 23.3.2. Вектор выплат по облигации

Напоминаем, что ставка купона обозначена как  $Q$ , а процент от номинала, составляющий компенсационную выплату в случае дефолта, обозначен как  $\lambda$ . Вектор выплат по облигации зависит от того, идет ли в настоящее время последний период  $N$  или  $t < N$ .

$$\text{Выплаты}(t) = \begin{cases} \begin{bmatrix} Q \\ Q \\ \lambda \\ 0 \end{bmatrix} & \text{при } t < N \\ \begin{bmatrix} 1+Q \\ 1+Q \\ \lambda \\ 0 \end{bmatrix} & \text{при } t = N \end{cases}$$

Первые два элемента обозначают процент выплаты в состояниях нормальной платежеспособности, третий ( $\lambda$ ) — в состоянии с рейтингом D, а четвертый (0) — в состоянии с рейтингом E. Различия между двумя векторами, разумеется, определяются возможностью выплаты основной суммы в конце периода.

Прежде чем определить ожидаемые выплаты, необходимо ввести еще один вектор; назовем его *начальным состоянием облигации*. Этот вектор состояния содержит единицу на месте текущего рейтинга облигации и нули в остальных позициях. Например, если облигация имеет рейтинг А в момент 0, то начальное состояние описывается вектором  $[1 \ 0 \ 0 \ 0]$ , а если рейтинг В, то вектором  $[0 \ 1 \ 0 \ 0]$ .

Теперь можно определить ожидаемую выплату по облигации в периоде  $t$ :

$$E[\text{Выплаты}(t)] = \text{Начальное состояние} \times \Pi^t \times \text{Выплаты}(t)$$

### 23.4. Пример расчета

Здесь будет использоваться та же матрица  $\Pi$ , которая приводилась в предыдущем разделе в качестве примера. Положим  $\lambda = 0,8$ , т.е. предположим, что по облигации будет выплачено 80% ее номинала в первом периоде дефолта. Считаем, что облигация обладает следующими характеристиками.

- Текущий рейтинг — В.
- Ставка купона  $Q = 8\%$ .
- Остается пять лет до срока погашения.
- Текущая рыночная цена облигации составляет 98% от ее номинальной стоимости.

В приведенной далее таблице учитываются все эти факты, а также векторы выплат по облигации до срока погашения (в ячейках F4:F7) и в срок погашения (ячейки I4:I7). Матрица переходных вероятностей приведена в ячейках C10:F13, а вектор начального состояния — в B15:E15<sup>3</sup>.

Ожидаемые выплаты по облигации показаны в ячейках B19:G19. Прежде чем рассмотреть, как именно они вычислялись, следует отметить важный факт экономической теории: *средний ожидаемый доход по облигации* вычисляется по формуле ВСД(B19:G19,0). Как показано в ячейке B20, этот доход составляет 7,2447%<sup>4</sup>.

|    | A                                                | B                 | C      | D                                                                                                                                                                        | E           | F            | G      | H           | I          | J      |
|----|--------------------------------------------------|-------------------|--------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|--------------|--------|-------------|------------|--------|
| 1  | <b>ВЫЧИСЛЕНИЕ ОЖИДАЕМОГО ДОХОДА ПО ОБЛИГАЦИИ</b> |                   |        |                                                                                                                                                                          |             |              |        |             |            |        |
| 2  |                                                  |                   |        |                                                                                                                                                                          |             |              |        |             |            |        |
| 3  | Курс облигации                                   | 98,00%            |        |                                                                                                                                                                          |             | Выплаты(t<N) |        |             | Выплаты(N) |        |
| 4  | Купонная ставка, Q                               | 7%                |        |                                                                                                                                                                          | Яч. F4:F7   | 7%           |        | Яч. I4:I7   | 107%       |        |
| 5  | Компенсационный процент, λ                       | 80%               |        |                                                                                                                                                                          | в строке 19 | 7%           |        | в строке 19 | 107%       |        |
| 6  | Срок облигации, N                                | 5                 |        |                                                                                                                                                                          | именуются   | 80%          |        | именуются   | 80%        |        |
| 7  | Начальный рейтинг                                | B                 |        |                                                                                                                                                                          | "payoff1"   | 0            |        | "payoff2"   | 0          |        |
| 8  |                                                  |                   |        |                                                                                                                                                                          |             |              |        |             |            |        |
| 9  |                                                  |                   | A      | B                                                                                                                                                                        | D           | E            |        |             |            |        |
| 10 | Матрица переход. вероятн.                        | A                 | 0,9990 | 0,0010                                                                                                                                                                   | 0,0000      | 0,0000       |        |             |            |        |
| 11 |                                                  | B                 | 0,0300 | 0,9600                                                                                                                                                                   | 0,0100      | 0,0000       |        |             |            |        |
| 12 |                                                  | D                 | 0,0000 | 0,0000                                                                                                                                                                   | 0,0000      | 1,0000       |        |             |            |        |
| 13 |                                                  | E                 | 0,0000 | 0,0000                                                                                                                                                                   | 0,0000      | 1,0000       |        |             |            |        |
| 14 |                                                  |                   |        |                                                                                                                                                                          |             |              |        |             |            |        |
| 15 | Начальный вектор                                 | 0                 | 1      | 0                                                                                                                                                                        | 0           |              |        |             |            |        |
| 16 |                                                  | =ЕСЛИ(B7="A",1,0) |        | =ЕСЛИ(B7="B",1,0)                                                                                                                                                        |             |              |        |             |            |        |
| 17 |                                                  |                   |        |                                                                                                                                                                          |             |              |        |             |            |        |
| 18 | Год                                              | 0                 | 1      | 2                                                                                                                                                                        | 3           | 4            | 5      | 6           | 7          | 8      |
| 19 | Ожидаемые выплаты                                | -0,9800           | 0,0773 | 0,0763                                                                                                                                                                   | 0,0754      | 0,0744       | 1,0274 | 0,0000      | 0,0000     | 0,0000 |
| 20 | Ожидаемый доход                                  | 7,2447%           |        |                                                                                                                                                                          |             |              |        |             |            |        |
| 21 |                                                  |                   |        |                                                                                                                                                                          |             |              |        |             |            |        |
| 22 |                                                  |                   |        |                                                                                                                                                                          |             |              |        |             |            |        |
| 23 |                                                  | =ВСД(B19:AN19,0)  |        | =ЕСЛИ(C18>bondterm,0;<br>ЕСЛИ(C18=bondterm;МУМНОЖ(initial;МУМНОЖ(matrixpower(transition;C18);payoff2));<br>МУМНОЖ(initial;МУМНОЖ(matrixpower(transition;C18);payoff1)))) |             |              |        |             |            |        |
| 24 |                                                  |                   |        |                                                                                                                                                                          |             |              |        |             |            |        |
| 25 |                                                  |                   |        |                                                                                                                                                                          |             |              |        |             |            |        |
| 26 |                                                  |                   |        |                                                                                                                                                                          |             |              |        |             |            |        |

### 23.4.1. Вычисление ожидаемых выплат

Как указано в предыдущем разделе, средние ожидаемые выплаты по облигации в  $t$ -м периоде вычисляются по формуле  $E[\text{Выплаты}(t)] = \text{Начальное состояние} \times \Pi^t \times \text{Выплаты}(t)$ . Формула в строке 19 является реализацией именно этой формулы с применением двух операторов ЕСЛИ:

```
=ЕСЛИ(C18>bondterm,0,
ЕСЛИ(C18=bondterm,МУМНОЖ(initial,МУМНОЖ
(matrixpower(transition,C18),payoff2)),
МУМНОЖ(initial,МУМНОЖ(matrixpower(transition,C18),payoff1))))
```

Ниже описано, что означают эти операторы.

<sup>3</sup> Обратите внимание на использование оператора ЕСЛИ (IF) для перевода начального рейтинга облигации (ячейка B7) в начальный вектор, представленный в ячейках B15:E15. Чтобы избежать недоразумений, можно было бы доработать используемую конструкцию: ЕСЛИ(ПРОПИСН(B7)="A",1,0) и т.д. Таким образом гарантируется, что даже если рейтинг записан строчной буквой, вектор начальных состояний будет вычислен правильно.

<sup>4</sup> Фактически в ячейке B20 записана формула ВСД(B19:AN19). Благодаря этому ВСД (внутренняя ставка доходности) облигации вычисляется для облигаций со сроком погашения до 40 лет.

- Первый ЕСЛИ: если текущий год превосходит по номеру срок погашения облигации  $N$  (в нашем примере  $N = 5$ ), то выплата по облигации составляет 0.
- Второй ЕСЛИ: если текущий год равен по номеру сроку погашения облигации  $N$ , то ожидаемая выплата по облигации равна  $\text{МУМНОЖ}(\text{initial}, \text{МУМНОЖ}(\text{matrixpower}(\text{transition}, \text{C18}), \text{payoff2}))$ , где  $\text{transition}$  — условное обозначение матрицы переходных вероятностей в ячейках C10:F13, а  $\text{payoff2}$  — имя диапазона ячеек I4:I7.
- Если текущий год  $n$  меньше по номеру, чем срок погашения облигации, то средняя ожидаемая выплата вычисляется по формуле  $\text{МУМНОЖ}(\text{initial}, \text{МУМНОЖ}(\text{matrixpower}(\text{transition}, \text{C18}), \text{payoff1}))$ , где  $\text{payoff1}$  — условное имя для ячеек F4:F7.

Скопировав эту формулу, получим весь вектор средних ожидаемых выплат по облигации.

### 23.5. Источники статистической информации

Процесс дефолта по облигациям широко исследуется и фиксируется организацией Standard & Poor, поэтому по их информации можно легко вычислить средние вероятности изменения рейтинга.

| Рейтинг в конце года |        |        |        |        |        |        |        |        |
|----------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Начальный рейтинг    | AAA    | AA     | A      | BBB    | BB     | B      | CCC    | D      |
| AAA                  | 0,9050 | 0,0859 | 0,0074 | 0,0006 | 0,0011 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| AA                   | 0,0076 | 0,9074 | 0,0762 | 0,0064 | 0,0007 | 0,0014 | 0,0002 | 0,0000 |
| A                    | 0,0009 | 0,0262 | 0,9069 | 0,0547 | 0,0078 | 0,0028 | 0,0001 | 0,0006 |
| BBB                  | 0,0003 | 0,0027 | 0,0615 | 0,8653 | 0,0536 | 0,0131 | 0,0014 | 0,0020 |
| BB                   | 0,0003 | 0,0016 | 0,0070 | 0,0738 | 0,8040 | 0,0924 | 0,0096 | 0,0113 |
| B                    | 0,0000 | 0,0008 | 0,0034 | 0,0053 | 0,0658 | 0,8384 | 0,0370 | 0,0494 |
| CCC                  | 0,0015 | 0,0000 | 0,0046 | 0,0109 | 0,0163 | 0,1148 | 0,6730 | 0,1790 |
| D                    | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |
| E                    | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 | 0,0000 |

Существует также большой объем данных о процентах компенсационных выплат при банкротстве в различных отраслях экономики. Далее приводится таблица из статьи Э. Олмана (Edward Altman) и В. Кишора (Velor M. Kishore)<sup>5</sup>, из которой можно видеть, что усредненный процент компенсации при банкротстве по всем отраслям составляет 41%.

<sup>5</sup> E. Altman, V.M. Kishore, “Almost Everything You Wanted to Know about Recoveries on Defaulted Bonds”, *Financial Analyst Journal*, ноябрь-декабрь 1996 г., с. 57–64, табл. 3.

**Проценты компенсационных выплат по отраслям экономики при дефолте облигаций, 1971–1995 гг.**

| <i>Отрасль экономики</i>                                                | <i>Процент компенсации</i> |                              |                |                              |                          |                                          |
|-------------------------------------------------------------------------|----------------------------|------------------------------|----------------|------------------------------|--------------------------|------------------------------------------|
|                                                                         | <i>Трехзначный SIC-код</i> | <i>Количество наблюдений</i> | <i>Средний</i> | <i>Взвешенное наблюдение</i> | <i>Медианное среднее</i> | <i>Взвешенное стандартное отклонение</i> |
| Коммунальное хозяйство                                                  | 490                        | 56                           | 70,47          | 65,48                        | 79,07                    | 19,46                                    |
| Химическая промышленность (химикаты, резина, пластмассы, нефтепродукты) | 280, 290, 300              | 35                           | 62,73          | 80,39                        | 71,88                    | 27,10                                    |
| Машиностроение, приборостроение и смежные отрасли                       | 350, 360, 380              | 36                           | 48,74          | 44,75                        | 47,50                    | 20,13                                    |
| Сфера услуг — для предприятий и личного потребления                     | 470, 632, 720, 730         | 14                           | 46,23          | 50,01                        | 41,50                    | 25,03                                    |
| Пищевая и смежные отрасли                                               | 200                        | 18                           | 45,28          | 37,40                        | 41,50                    | 21,67                                    |
| Оптовая и розничная торговля                                            | 500, 510, 520              | 12                           | 44,00          | 48,90                        | 37,32                    | 22,14                                    |
| Производство товаров широкой номенклатуры                               | 390, 998                   | 20                           | 42,29          | 29,49                        | 33,88                    | 24,98                                    |
| Казино, гостиницы, места отдыха                                         | 770, 790                   | 21                           | 40,15          | 39,74                        | 28,00                    | 25,66                                    |
| Строительные материалы, металлы, сборные изделия                        | 320, 330, 340              | 68                           | 38,76          | 29,64                        | 37,75                    | 22,86                                    |
| Транспорт и транспортное оборудование                                   | 370, 410, 420, 450         | 52                           | 38,42          | 41,12                        | 37,13                    | 27,98                                    |

**Проценты компенсационных выплат по отраслям экономики при дефолте облигаций, 1971–1995 гг. (окончание)**

| <i>Отрасль экономики</i>                                            | <i>Процент компенсации</i>   |                              |                |                              |                          |                                          |
|---------------------------------------------------------------------|------------------------------|------------------------------|----------------|------------------------------|--------------------------|------------------------------------------|
|                                                                     | <i>Трехзначный SIC-код</i>   | <i>Количество наблюдений</i> | <i>Средний</i> | <i>Взвешенное наблюдение</i> | <i>Медианное среднее</i> | <i>Взвешенное стандартное отклонение</i> |
| Связь, телерадиовещание, кино, пресса, книгоиздательство            | 270, 480, 780                | 65                           | 37,08          | 39,34                        | 34,50                    | 20,79                                    |
| Финансовые учреждения                                               | 600, 610, 620, 630, 670      | 66                           | 35,69          | 35,44                        | 32,15                    | 25,72                                    |
| Строительство и недвижимость                                        | 150, 650                     | 35                           | 35,27          | 28,58                        | 24,00                    | 28,69                                    |
| Универсальные магазины                                              | 530, 540, 560, 570, 580, 000 | 89                           | 33,16          | 29,35                        | 30,00                    | 20,47                                    |
| Горно- и нефтедобывающая промышленность                             | 100, 103                     | 45                           | 33,02          | 31,83                        | 32,00                    | 18,01                                    |
| Текстильная промышленность                                          | 220, 230                     | 31                           | 31,66          | 33,72                        | 31,13                    | 15,24                                    |
| Целлюлозно-бумажное, деревообрабатывающее и кожевенное производство | 240, 250, 260, 310           | 11                           | 29,77          | 24,30                        | 18,25                    | 24,38                                    |
| Лечебные и гуманитарные учреждения                                  | 700–890                      | 22                           | 26,49          | 19,61                        | 16,00                    | 22,65                                    |
| <b>Итого</b>                                                        |                              | <b>696</b>                   | <b>41,00</b>   | <b>39,11</b>                 | <b>36,25</b>             | <b>25,56</b>                             |

Пользуясь данными Олмана–Кишора и Standard & Poor, можно выполнить расчет по таблице, приведенной ниже.

|    | A                                                            | B       | C       | D        | E        | F                  | G        | H              | I      | J      |
|----|--------------------------------------------------------------|---------|---------|----------|----------|--------------------|----------|----------------|--------|--------|
| 1  | <b>ВЫЧИСЛЕНИЕ ОЖИДАЕМОГО ДОХОДА ПО СТАТИСТИЧЕСКИМ ДАННЫМ</b> |         |         |          |          |                    |          |                |        |        |
| 2  |                                                              |         |         |          |          |                    |          |                |        |        |
| 3  |                                                              |         |         |          |          | Выплаты( $t < N$ ) |          | Выплаты( $N$ ) |        |        |
| 4  | Курс облигации                                               | 99,00%  |         |          | AAA      | 11%                |          | AAA            | 111%   |        |
| 5  | Купонная ставка, $Q$                                         | 11,00%  |         |          | AA       | 11%                |          | AA             | 111%   |        |
| 6  | Компенсационный процент, $\lambda$                           | 41%     |         |          | A        | 11%                |          | A              | 111%   |        |
| 7  | Срок облигации, $N$                                          | 5       |         |          | BBB      | 11%                |          | BBB            | 111%   |        |
| 8  | Начальный рейтинг                                            | B       |         |          | BB       | 11%                |          | BB             | 111%   |        |
| 9  |                                                              |         |         |          | B        | 11%                |          | B              | 111%   |        |
| 10 |                                                              |         |         |          | CCC      | 11%                |          | CCC            | 111%   |        |
| 11 |                                                              |         |         |          | D        | 41%                |          | D              | 41%    |        |
| 12 |                                                              |         |         |          | E        | 0                  |          | E              | 0%     |        |
| 13 |                                                              |         |         |          |          |                    |          |                |        |        |
| 14 | <b>Матрица переход. вероятн.</b>                             |         |         |          |          |                    |          |                |        |        |
| 15 |                                                              |         |         |          |          |                    |          |                |        |        |
| 16 |                                                              |         |         |          |          |                    |          |                |        |        |
| 17 | Начальный рейтинг                                            | AAA     | AA      | A        | BBB      | BB                 | B        | CCC            | D      | E      |
| 18 | AAA                                                          | 0,9050  | 0,0859  | 0,0074   | 0,0006   | 0,0011             | 0,0000   | 0,0000         | 0,0000 | 0,0000 |
| 19 | AA                                                           | 0,0076  | 0,9074  | 0,0762   | 0,0064   | 0,0007             | 0,0014   | 0,0002         | 0,0000 | 0,0000 |
| 20 | A                                                            | 0,0009  | 0,0262  | 0,9069   | 0,0547   | 0,0078             | 0,0028   | 0,0001         | 0,0006 | 0,0000 |
| 21 | BBB                                                          | 0,0003  | 0,0027  | 0,0615   | 0,8653   | 0,0536             | 0,0131   | 0,0014         | 0,0020 | 0,0000 |
| 22 | BB                                                           | 0,0003  | 0,0016  | 0,0070   | 0,0738   | 0,8040             | 0,0924   | 0,0096         | 0,0113 | 0,0000 |
| 23 | B                                                            | 0,0000  | 0,0008  | 0,0034   | 0,0053   | 0,0658             | 0,8384   | 0,0370         | 0,0494 | 0,0000 |
| 24 | CCC                                                          | 0,0015  | 0,0000  | 0,0046   | 0,0109   | 0,0163             | 0,1148   | 0,6730         | 0,1790 | 0,0000 |
| 25 | D                                                            | 0,0000  | 0,0000  | 0,0000   | 0,0000   | 0,0000             | 0,0000   | 0,0000         | 0,0000 | 1,0000 |
| 26 | E                                                            | 0,0000  | 0,0000  | 0,0000   | 0,0000   | 0,0000             | 0,0000   | 0,0000         | 0,0000 | 1,0000 |
| 27 |                                                              |         |         |          |          |                    |          |                |        |        |
| 28 |                                                              | AAA     | AA      | A        | BBB      | BB                 | B        | CCC            | D      | E      |
| 29 | Начальный вектор                                             | 0       | 0       | 0        | 0        | 0                  | 1        | 0              | 0      | 0      |
| 30 |                                                              |         |         |          |          |                    |          |                |        |        |
| 31 |                                                              |         |         |          |          |                    |          |                |        |        |
| 32 |                                                              |         |         |          |          |                    |          |                |        |        |
| 33 | Год                                                          | 0       | 1       | 2        | 3        | 4                  | 5        | 6              | 7      | 8      |
| 34 | Ожидаемые выплаты                                            | -99,00% | 0,12483 | 0,119207 | 0,113183 | 0,107173147        | 0,872328 | 0              | 0      | 0      |
| 35 | Ожидаемый доход                                              | 7,726%  |         |          |          |                    |          |                |        |        |
| 36 |                                                              |         |         |          |          |                    |          |                |        |        |
| 37 |                                                              |         |         |          |          |                    |          |                |        |        |
| 38 |                                                              |         |         |          |          |                    |          |                |        |        |
| 39 |                                                              |         |         |          |          |                    |          |                |        |        |

В этом конкретном примере вычисляется средний ожидаемый доход по облигации с текущим рейтингом B, до срока погашения которой остается пять лет. Ставка купона по ней составляет 11%, а текущая рыночная цена — 99% от номинала. Используется предположение о том, что в случае дефолта компенсационная выплата составит 41%, т.е. среднюю величину по данным Олмана–Кишора<sup>6</sup>.

## 23.6. Перерасчет ожидаемого дохода на случай неравных периодов

В таблице Excel из предыдущего раздела средний ожидаемый доход рассчитывается уже с поправкой на вероятность дефолта и процент компенсационной выплаты, но одна важная проблема там все еще не решена. А именно, пред-

<sup>6</sup> Приведенная здесь матрица переходных вероятностей основана на переработанной статистике общедоступных данных от Standard & Poor. Данные S&P не содержат никакой информации о переходах в состоянии ниже CCC; поэтому в нашем примере предполагается, что переходы ниже CCC происходят в состояние дефолта D. Обработка данных выполнялась автором, а не S&P, и исключительно в иллюстративно-учебных целях.



полагается, что выплаты по облигациям осуществляются через равные периоды, т.е. от текущей даты до следующей выплаты по купону пройдет один полный период, до следующей после нее — еще один и т.д., тогда как на практике до первой выплаты по купону часто проходит менее одного полного периода. Как говорилось в главе 20, данную проблему легко решить. Покажем это решение в таблице Excel, приведенной далее, которая содержит простую модификацию по сравнению с предыдущей.

|    | A                                                            | B                                                                                                | C        | D        | E                              | F                           | G        | H          | I        | J      |
|----|--------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|----------|--------------------------------|-----------------------------|----------|------------|----------|--------|
| 1  | <b>ВЫЧИСЛЕНИЕ ОЖИДАЕМОГО ДОХОДА ПО СТАТИСТИЧЕСКИМ ДАННЫМ</b> |                                                                                                  |          |          |                                |                             |          |            |          |        |
| 2  | <b>С поправкой на неравные периоды</b>                       |                                                                                                  |          |          |                                |                             |          |            |          |        |
| 3  |                                                              |                                                                                                  |          |          |                                | Выплаты(t<N)                |          | Выплаты(N) |          |        |
| 4  | Курс облигации                                               | 102,00%                                                                                          |          |          | AAA                            | 12%                         |          | AAA        | 112%     |        |
| 5  | Купонная ставка, Q                                           | 12%                                                                                              |          |          | AA                             | 12%                         |          | AA         | 112%     |        |
| 6  | Компенсационный процент, λ                                   | 55%                                                                                              |          |          | A                              | 12%                         |          | A          | 112%     |        |
| 7  | Срок облигации, N                                            | 7                                                                                                |          |          | BBB                            | 12%                         |          | BBB        | 112%     |        |
| 8  | Начальный рейтинг                                            | B                                                                                                |          |          | BB                             | 12%                         |          | BB         | 112%     |        |
| 9  | Срок до первой выплаты                                       | 0,8                                                                                              |          |          | B                              | 12%                         |          | B          | 112%     |        |
| 10 |                                                              |                                                                                                  |          |          | CCC                            | 12%                         |          | CCC        | 112%     |        |
| 11 |                                                              |                                                                                                  |          |          | D                              | 55%                         |          | D          | 55%      |        |
| 12 |                                                              |                                                                                                  |          |          | E                              | 0                           |          | E          | 0%       |        |
| 13 |                                                              |                                                                                                  |          |          |                                |                             |          |            |          |        |
| 14 | <b>Матрица переход. вероятн.</b>                             |                                                                                                  |          |          |                                |                             |          |            |          |        |
| 15 |                                                              |                                                                                                  |          |          |                                | <b>Рейтинг в конце года</b> |          |            |          |        |
| 16 | <b>Начальный рейтинг</b>                                     | AAA                                                                                              | AA       | A        | BBB                            | BB                          | B        | CCC        | D        | E      |
| 17 | AAA                                                          | 0,9050                                                                                           | 0,0859   | 0,0074   | 0,0006                         | 0,0011                      | 0,0000   | 0,0000     | 0,0000   | 0,0000 |
| 18 | AA                                                           | 0,0076                                                                                           | 0,9074   | 0,0762   | 0,0064                         | 0,0007                      | 0,0014   | 0,0002     | 0,0000   | 0,0000 |
| 19 | A                                                            | 0,0009                                                                                           | 0,0262   | 0,9069   | 0,0547                         | 0,0078                      | 0,0028   | 0,0001     | 0,0006   | 0,0000 |
| 20 | BBB                                                          | 0,0003                                                                                           | 0,0027   | 0,0615   | 0,8653                         | 0,0536                      | 0,0131   | 0,0014     | 0,0020   | 0,0000 |
| 21 | BB                                                           | 0,0003                                                                                           | 0,0016   | 0,0070   | 0,0738                         | 0,8040                      | 0,0924   | 0,0096     | 0,0113   | 0,0000 |
| 22 | B                                                            | 0,0000                                                                                           | 0,0008   | 0,0034   | 0,0053                         | 0,0658                      | 0,8384   | 0,0370     | 0,0494   | 0,0000 |
| 23 | CCC                                                          | 0,0015                                                                                           | 0,0000   | 0,0046   | 0,0109                         | 0,0163                      | 0,1148   | 0,6730     | 0,1790   | 0,0000 |
| 24 | D                                                            | 0,0000                                                                                           | 0,0000   | 0,0000   | 0,0000                         | 0,0000                      | 0,0000   | 0,0000     | 0,0000   | 1,0000 |
| 25 | E                                                            | 0,0000                                                                                           | 0,0000   | 0,0000   | 0,0000                         | 0,0000                      | 0,0000   | 0,0000     | 0,0000   | 1,0000 |
| 26 |                                                              |                                                                                                  |          |          |                                |                             |          |            |          |        |
| 27 |                                                              |                                                                                                  |          |          |                                |                             |          |            |          |        |
| 28 |                                                              | AAA                                                                                              | AA       | A        | BBB                            | BB                          | B        | CCC        | D        | E      |
| 29 | Начальный вектор                                             | 0                                                                                                | 0        | 0        | 0                              | 0                           | 1        | 0          | 0        | 0      |
| 30 |                                                              |                                                                                                  |          |          |                                |                             |          |            |          |        |
| 31 |                                                              | =B4/(1+B35)^(1-B9)                                                                               |          |          | =ЕСЛИ(ПРОПИСН(\$B\$8)=D28;1;0) |                             |          |            |          |        |
| 32 |                                                              |                                                                                                  |          |          |                                |                             |          |            |          |        |
| 33 | Год                                                          | 0                                                                                                | 1        | 2        | 3                              | 4                           | 5        | 6          | 7        | 8      |
| 34 | Ожидаемые выплаты                                            | -100,24%                                                                                         | 0,141257 | 0,135058 | 0,128264                       | 0,121405499                 | 0,114779 | 0,10853548 | 0,802214 | 0      |
| 35 | Ожидаемый доход                                              | 9,092%                                                                                           |          |          |                                |                             |          |            |          |        |
| 36 |                                                              |                                                                                                  |          |          |                                |                             |          |            |          |        |
| 37 |                                                              | =ЕСЛИ(E33>\$B\$7;0;                                                                              |          |          |                                |                             |          |            |          |        |
| 38 |                                                              | ЕСЛИ(E33=\$B\$7;МУМНОЖ(\$B\$29:\$J\$29;МУМНОЖ(matrixpower(\$B\$17:\$J\$25;E33);\$I\$4:\$I\$12)); |          |          |                                |                             |          |            |          |        |
| 39 |                                                              | МУМНОЖ(\$B\$29:\$J\$29;МУМНОЖ(matrixpower(\$B\$17:\$J\$25;E33);\$F\$4:\$F\$12)))                 |          |          |                                |                             |          |            |          |        |

В этой таблице вычисляется средний ожидаемый доход по облигации с рейтингом B, ставкой купона 12%, рыночной ценой 102% от номинала и компенсационной выплатой в случае дефолта в размере 55%. По облигации предстоит еще сделать семь выплат, причем последняя из них — это проценты плюс основная сумма (равная здесь единице)<sup>7</sup>. До первой выплаты по облигации остается всего 0,8 года.

<sup>7</sup> Во всех примерах этой главы выплаты по облигациям предполагаются ежегодными. Но фактически выплаты по многим корпоративным облигациям делаются раз в полгода или даже раз в квартал. Внести в таблицу соответствующие поправки очень легко. По облигации с купоном 11% раз в полгода выплачивается 5,5% номинала. Поэтому в основу всех расчетов следует брать цифру 5,5%, а под периодом понимать полугодичный срок.

### 23.7. Вычисление коэффициентов “бета”

Вычисление коэффициентов “бета” для облигаций является утомительной и малоприятной задачей в теории расчета финансов предприятий. Представленная здесь модель облегчает эту задачу. Напомним, что линия рынка ценных бумаг (ЛРЦБ) в ценовой модели рынка капитала вычисляется по формуле

$$E(r_d) = r_f + \beta_d[E(r_m) - r_f],$$

где  $E(r_d)$  — ожидаемый доход по долговому обязательству;  $r_f$  — доход по безрисковому долговому обязательству;  $E(r_m)$  — доход от рыночного портфеля ценных бумаг.

Зная средний ожидаемый доход по долговому обязательству, можно вычислить  $\beta$  и ожидаемую рыночную ставку доходности  $E(r_m)$ . Предположим для примера, что рыночная премия за риск составляет  $E(r_m) - r_f = 8,4\%$  и что  $r_f = 7\%$ . Тогда облигация со средним ожидаемым доходом 8% будет иметь коэффициент  $\beta$ , равный 0,119.

|   | A                                       | B     | C               | D |
|---|-----------------------------------------|-------|-----------------|---|
| 1 | <b>ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОКАЗАТЕЛЯ “БЕТА”</b>     |       |                 |   |
| 2 |                                         |       |                 |   |
| 3 | Рыночная премия за риск, $E(r_m) - r_f$ | 8,40% |                 |   |
| 4 | $r_f$                                   | 7%    |                 |   |
| 5 | Ожидаемый доход по облигации            | 8,00% |                 |   |
| 6 | Коэффициент “бета” для облигации        | 0,119 | <-- =(B5-B4)/B3 |   |

Введя поправку на налог к ЛРЦБ по Беннинге–Саригу (раздел 2.7), получим линию облигации в виде  $r_d = \text{стоимость долгового обязательства} = r_f + \beta_{\text{долг}}[E(r_m) - r_f(1 - T_C)]$ . Коэффициент “бета” получается таким, как показано ниже.

|    | A                                               | B     | C                           | D | E |
|----|-------------------------------------------------|-------|-----------------------------|---|---|
| 8  | <b>ЛРЦБ по Беннинге-Саригу (см. раздел 2.7)</b> |       |                             |   |   |
| 9  | Рыночная премия за риск, $E(r_m) - r_f$         | 8,40% |                             |   |   |
| 10 | $r_f$                                           | 7%    |                             |   |   |
| 11 | Ставка налога на прибыль, $T_c$                 | 40%   |                             |   |   |
| 12 | Ожидаемый доход по облигации                    | 8,00% |                             |   |   |
| 13 | Коэффициент “бета” для облигации                | 0,089 | <-- =(B12-B10)/(B9+B10*B11) |   |   |

### Упражнения

- Новая облигация со сроком погашения в один год имеет цену 100, равную номиналу. Ставка купона равна 15%; вероятность дефолта через год составляет 35%, а компенсация в случае дефолта — 65% номинала. Вычислите средний ожидаемый доход по облигации.
- Рассмотрим случай пяти возможных рейтингов: А, В, С, D и Е. Рейтинги А, В и С соответствуют начальным состояниям облигаций; D — это первый дефолт, а Е — дефолт, произошедший в предыдущем периоде. Пусть матрица переходных вероятностей имеет следующий вид:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,06 & 0,90 & 0,03 & 0,01 & 0 \\ 0,02 & 0,05 & 0,88 & 0,05 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Облигация с рейтингом А, выпущенная в настоящий момент на 10 лет и продаваемая по номиналу, имеет ставку купона 7%.

- а) Пусть облигация имеет рейтинг В, продается по номиналу, и в случае дефолта по ней будет выплачено 50% компенсации; какую нужно установить ставку купона, чтобы средний ожидаемый доход составил те же 7%?
  - б) Пусть облигация имеет рейтинг С, продается по номиналу, и в случае дефолта по ней будет выплачено 50% компенсации; какую нужно установить ставку купона, чтобы средний ожидаемый доход снова составил 7%?
3. Облигация корпорации XYZ имеет следующие характеристики:
- рыночная цена — 108,32% номинальной стоимости;
  - ставка купона — 15%;
  - количество оставшихся ежегодных выплат (включая выплату основной стоимости) — 15;
  - срок до первой выплаты — 8 месяцев.

Долговые обязательства корпорации XYZ в настоящее время имеют рейтинг ССС. Рассчитайте средний ожидаемый доход по ее облигациям с помощью модели из раздела 23.5. Компенсационная выплата в случае дефолта составляет  $\lambda = 78\%$ .

4. Компания-распорядитель облигаций выпускает новую облигацию рейтинга В на семь лет со ставкой купона 9%. Пусть ожидаемая ставка дохода по облигации составляет 8%; какой процент компенсационной выплаты  $\lambda$  в случае дефолта заложен в данную облигацию? Используйте матрицу переходных вероятностей из раздела 23.5.
5. Компания-распорядитель облигаций выпускает новую облигацию сроком на семь лет, класса ССС. В случае дефолта предполагается выплатить 55% номинала. Какова должна быть ставка купона, чтобы средний ожидаемый доход по облигации составил 9%? Используйте матрицу переходных вероятностей из раздела 23.5.



---

## 24 Дюрация и задача дешевой поставки

---

### 24.1. Введение

В этой главе рассматривается задача дешевой поставки (*cheapest-to-deliver problem*) для фьючерсного контракта на долгосрочные казначейские облигации<sup>1</sup>. Этой задаче уделяется много внимания в финансовой литературе. Интерес к ней вызван тем, что фьючерсный контракт на облигации государственного казначейства — один из наиболее широко торгуемых из всех фьючерсных финансовых контрактов — допускает поставку самых разных государственных облигаций, а также тем, что формирование цены доставки таких облигаций слабо связано с разницей рыночных цен.

Обширная литература, существующая по задаче дешевой поставки при постоянной временной структуре, грешит одним общим заблуждением: в ней предполагается, что решение задачи целиком основано на расчете дюрации. С помощью Excel мы покажем, что это не всегда так и что целый ряд экономически актуальных сценариев является исключением из этого правила<sup>2</sup>.

---

### 24.2. Общая модель дешевой поставки

В этом разделе строится общая модель для решения задачи дешевой поставки при любой модели временной структуры. Для удобства примем предположение, что временная структура содержит один коэффициент; обобщение на случай нескольких коэффициентов выполняется тривиально. Введем следующие обозначения.

- Коэффициент дисконтирования (переоценки) в момент  $t$  для платежа в один доллар при  $\tau \geq t$  и мгновенной процентной ставке  $r$  в тот же момент  $t$  обозначим  $v(t, \tau, r)$ .
- Множество всех облигаций казначейства, доступных для поставки, предполагается выпуклым; по облигациям выплачивают проценты с непрерывным начислением. Обозначение  $\{c, M\}$  будет относиться к облигации с непрерывной купонной ставкой  $c$  и сроком погашения  $M$ .

---

<sup>1</sup> Глава написана совместно с Цви Винером (Zvi Wiener) из Еврейского университета в Иерусалиме (Израиль).

<sup>2</sup> Нам не удалось достоверно проследить истоки этого заблуждения. По-видимому, впервые утверждение, будто дюрация является определяющим фактором в выборе дешевой поставки, встречается в работе Jones (1985), но расчеты этой работы основаны на публикациях Kilcollin (1982) и Kane, Marcus (1984). Аналогичные утверждения встречаются и в учебниках (например, Edwards & Ma, 1992), а также в служебных руководствах ряда инвестиционных банков.

- Запись  $g(t, T, c, M, r)$  обозначает *форвардный контракт* на конкретную облигацию в момент  $t$ ; по контракту поставляется облигация  $\{c, M\}$  в момент  $T$ .
- Мы пренебрегаем влиянием переоценивания активов в связи с текущими рыночными ценами на стоимость фьючерсного контракта. Это предположение позволяет нам рассматривать только форвардные контракты<sup>3</sup>.
- *Текущая цена* облигации казначейства с купонной ставкой  $c$  и сроком погашения  $M$  вычисляется по формуле

$$\text{Цена}(c, M) = \int_t^M c \cdot v(t, \tau, r) d\tau + v(t, M, r).$$

- Величина  $CF(c, M, T)$  — коэффициент преобразования для облигации со сроком погашения  $M$  и купонной ставкой  $c$  с поставкой в момент  $T$  по форвардному контракту — вычисляется по непрерывному варианту формулы Чикагской товарной биржи (Chicago Board of Trade — CBOT):

$$\begin{aligned} CF(c, M, T) &= \int_0^{M-T} c \cdot e^{-0,08\tau} d\tau + e^{-0,08(M-T)} = \\ &= \frac{ce^{-0,08\tau}}{-0,08} \Big|_0^{M-T} + e^{-0,08(M-T)} = \frac{c(1 - e^{-0,08(M-T)})}{0,08} + e^{-0,08(M-T)}. \end{aligned}$$

#### 24.2.1. Неопционные форвардные контракты

Предположим, нам предлагают неопционный форвардный контракт на конкретную облигацию  $\{c, M\}$  в момент времени  $t$ . Пусть форвардная цена этого контракта равна  $g(t, T, c, M, r)$ <sup>4</sup>. Обозначим через  $f(t, T, c, M)$  прибыль от приобретения конкретной облигации  $\{c, M\}$  в текущий момент и удерживания ее на руках для поставки по форвардному контракту. Очевидно, что цена форвардного контракта будет складываться так, чтобы прибыль его участников равнялась нулю:

$$\begin{aligned} f(t, T, c, M, r) &= v(t, T, r) g(t, T, c, M, r) CF(c, M, T) - \\ &\quad - \left[ \int_T^M c \cdot v(t, \tau, r) d\tau + v(t, M, r) \right] = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow g(t, T, c, M, r) &= \frac{\int_t^M c \cdot v(t, \tau, r) d\tau + v(t, M, r)}{v(t, T, r) CF(c, M, T)}. \end{aligned}$$

На некоторое время допустим, что множество поставляемых облигаций выпукло и компактно. Свойство выпуклости подразумевает, что если  $\{c_1, M_1\}$

<sup>3</sup> Хотя переоценивание активов в соответствии с рыночными ценами в принципе является фактором, вносящим отличия в ценообразование по фьючерсным и форвардным контрактам (см., например, Cox, Ingersoll, Ross, 1981; Jagrow, Oldfield, 1981; Richard, Sundaresan, 1981), тем не менее, существует общепринятое мнение, что такое переоценивание не является существенным для формирования цены на фьючерсный финансовый контракт. См. работы Sundaresan (1991), Benninga, Protopapadakis (1994), Hanweck (1995).

<sup>4</sup> Контракт  $g(t, T, c, M)$  представляет собой вариант стандартного контракта по облигациям с выкупом (“репо”).

и  $\{c_2, M_2\}$  — купонные ставки и сроки погашения некоторых двух облигаций, то  $\{\lambda c_1 + (1 - \lambda)c_2, \lambda M_1 + (1 - \lambda)M_2\}$  — также совокупность параметров некоторой пригодной для поставки по контракту облигации<sup>5</sup>.

Во фьючерсных контрактах на казначейские облигации поставляемую ценную бумагу выбирает сторона, продающая авансом. Это означает, что форвардная цена  $g(t, T, c, M, r)$ , минимизирующая предыдущую функцию по всем пригодным для поставки бумагам  $\{c, M\}$ , будет рыночной форвардной ценой.

В следующих двух разделах рассматривается вопрос об облигации для оптимальной поставки при указанной форвардной цене.

### 24.3. Экстремальная купонная ставка как общее решение задачи дешевой поставки

Обозначим  $g^*(t, T)$  минимум функции  $g(t, T, c, M, r)$  по всем  $\{c, M\}$ . Предположим, что этот минимум достигается при  $c^*(t, T, r)$  и  $M^*(t, T, r)$ ; там, где это не вызовет путаницы, будем писать  $\{c^*, M^*\}$ . Приведенная далее теорема 1 утверждает, что  $\{c^*, M^*\}$  всегда достигается при самой высокой или самой низкой (т.е. экстремальной) купонной ставке, независимо от предположения о временной структуре процентных ставок<sup>6</sup>.

**Теорема 1.** При заданном сроке погашения  $M$  минимум  $g^*(t, T, r) = \min_{\{c, M\}} g(t, T, c, M, r)$  достигается при экстремальном значении  $c$ .

Согласно теореме 1, облигацией с самой дешевой поставкой *всегда* (независимо от временной структуры процентных ставок) будет облигация с самой высокой либо самой низкой процентной купонной ставкой из всего множества облигаций, пригодных для поставки.

### 24.4. Выбор оптимального срока погашения для дешевой поставки: случай постоянной временной структуры

В разделе 24.3 было показано, что независимо от модели временной структуры процентных ставок облигация с оптимальной поставкой соответствует самой низкой или самой высокой купонной ставке. В этом разделе будет рассмотрен оптимальный срок погашения для случая постоянной временной структуры. Можно показать, что все реально встречающиеся в экономике временные структуры практически постоянны при больших сроках погашения. Поскольку фьючерсные

<sup>5</sup> Предположение о выпуклости и компактности множества пригодных для поставки облигаций стандартно для литературы по задаче дешевой поставки, хотя и не всегда делается в явном виде. Компактность в данном случае — довольно безобидная гипотеза, а вот утверждение о выпуклости не всегда тривиально. Для примера рассмотрим выпуклую линейную комбинацию двух облигаций. Если у них один и тот же срок погашения, но разные купонные ставки, их комбинация будет облигацией с промежуточной ставкой; однако если у облигаций одна и та же купонная ставка, но разные сроки погашения, их комбинация не будет облигацией с промежуточным сроком погашения.

<sup>6</sup> Доказательство приведенных здесь теорем можно найти в работе Benninga & Wiener (1999).

контракты по казначейским облигациям выписываются на долгосрочные займы, можно утверждать, что предположение о постоянной структуре процентных ставок — достаточно хорошее приближение реальных структур.

Предварительно докажем следующую теорему, обобщающую утверждение теоремы 1 на случай постоянной (или примерно постоянной) временной структуры процентных ставок.

**Теорема 2.** Предположим, что временная структура долгосрочных процентных ставок примерно постоянна и что долгосрочная процентная ставка равна  $r_L$ . Тогда при  $r_L > 8\%$  для поставки облигаций по контракту выбирается *наименьшая* процентная ставка  $c$ , а при  $r_L < 8\%$  — *наибольшая*.

Теорема 2 утверждает, что при постоянной временной структуре ставок оптимальной будет поставка облигации с самой низкой купонной ставкой, если процентные ставки выше 8%, и с самой высокой — если ниже. Далее в табл. 24.1 и теореме 3 дается характеристика оптимального выбора параметров  $\{c, M\}$  для случая постоянной временной структуры ставок.

**Теорема 3.** Если временная структура постоянна, то минимум  $g * (t, T, r) = \min_{\{c, M\}} g(t, T, c, M, r)$  определяется по табл. 24.1.

Подводя итоги этого и предыдущего разделов, можно сказать, что независимо от модели временной структуры процентных ставок облигация, поставляемая по фьючерсным контрактам казначейских облигаций, характеризуется либо максимальной, либо минимальной купонной ставкой. При постоянной структуре можно полностью охарактеризовать оптимальный срок погашения облигации; было показано, что он всегда вычисляется по одному из четырех вариантов. В следующем разделе выполняется сравнение нашей характеристики с общепринятыми в литературе правилами расчета дюрации.

## 24.5. Графики оптимальной поставки и дюрации в Excel

Некоторые авторы (например, Jones, 1985; Kane, Marcus, 1984, с.236; Edwards, Ma, 1992, с.333) утверждают, что решение задачи об облигациях с дешевой поставкой при постоянной во времени структуре процентных ставок дается облигацией со следующими характеристиками:

- максимальной дюрацией при рыночной процентной ставке выше 8%;
- минимальной дюрацией при рыночной процентной ставке менее 8%.

В этом разделе рассматривается данное правило, основанное на принятии дюрации в качестве критерия, в сравнении с характеристикой задачи оптимальной поставки, задаваемой теоремами 1–3. Мы покажем, что критерий дюрации *неверен* в трех из четырех случаев, перечисленных в табл. 24.1. Для наглядности изложения в табл. 24.2 показана характеристика оптимальной поставки и ее сравнение с критерием дюрации.



Таблица 24.1. Характеризация оптимальной поставки облигаций

| Случай | Характеризация     | Оптимальная<br>купонная ставка | Оптимальный срок $M$                                                                                             |
|--------|--------------------|--------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1      | $\max c < r < 8\%$ | Максимальная $c$               | Минимальный $M$ (возможен еще один локальный минимум, но это маловероятно, поскольку $M$ обычно не менее 50 лет) |
| 2      | $r < 8\%$          | Максимальная $c$               | Минимальный $M$                                                                                                  |
| 3      | $r > 8\%$          | Минимальная $c$                | Максимальный $M$                                                                                                 |
|        | $\min c > 8\%$     |                                |                                                                                                                  |
| 4      | $\min c < 8\% < r$ | Минимальная $c$                | $\min M \leq M^* \leq \max M$ , с возможностью внутреннего минимума                                              |

Таблица 24.2. Сравнение оптимальной поставки и критерия дюрации

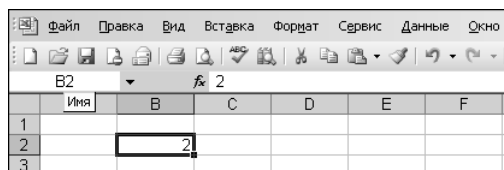
| Случай | Ставки                               | Оптимальная<br>купонная ставка | Оптимальный срок $M$                                                      | По критерию<br>дюрации  | Наличие<br>соответствия                             |
|--------|--------------------------------------|--------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|-------------------------|-----------------------------------------------------|
| 1      | $\max c < r < 8\%$                   | Максимальная $c$               | В целом минимальный $M$                                                   | Минимальная<br>дюрация  | Для большинства<br>экономически<br>реальных случаев |
| 2      | $r < 8\%$                            | $r < \max c$                   | Максимальная $c$                                                          | Минимальный $M$         | Всегда                                              |
| 3      | $r > 8\%$                            | Минимальная $c$                | Максимальный $M$                                                          | Максимальная<br>дюрация | Не всегда                                           |
| 4      | $\min c > 8\%$<br>$\min c < 8\% < r$ | Минимальная $c$                | $\min M \leq M^* \leq \max M$ ,<br>с возможностью<br>внутреннего минимума | Максимальная<br>дюрация | Не всегда                                           |

### 24.5.1. Таблица Excel

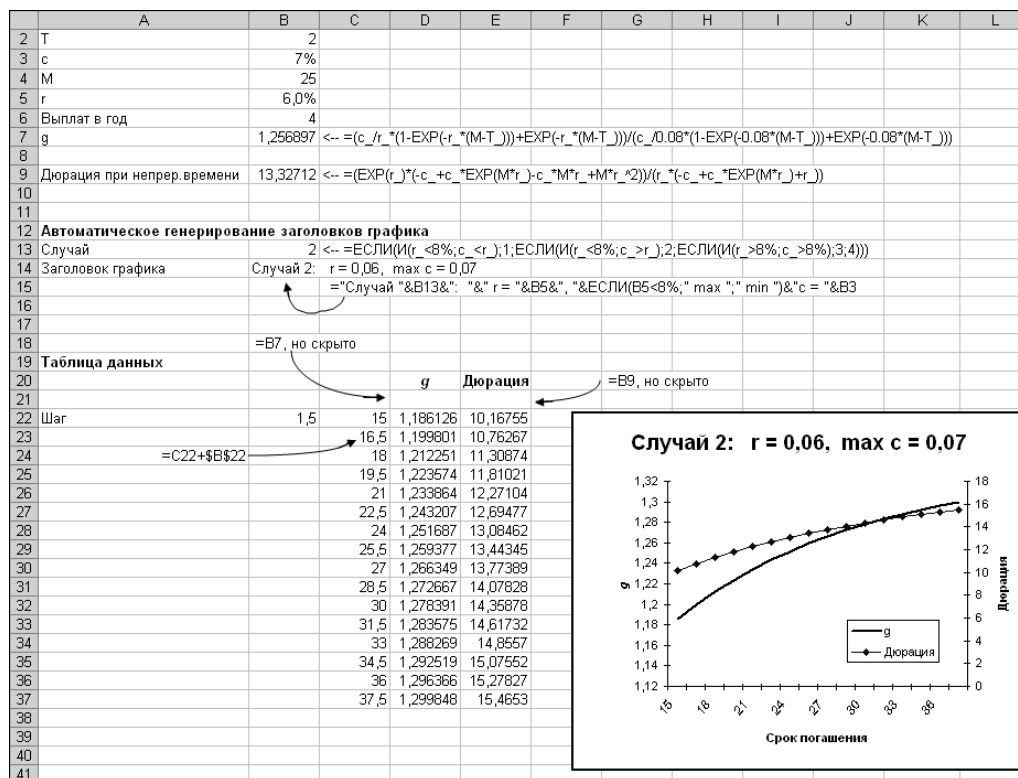
Для иллюстрации результатов, представленных в табл. 24.2, мы используем моделирование данных с помощью Excel. Соответствующая таблица Excel показана далее, а здесь перечислим некоторые ее особенности.

- Для упрощения чтения формул используется средство Имя (Name). Ссылкам на ячейку B2 присвоено имя **Т\_** (знак подчеркивания введен затем, чтобы избежать путаницы со столбцом под той же буквой), ссылкам на ячейку B3 — имя **с\_** и т.д.

Существует несколько способов наименования ячеек в Excel. Можно выбрать команду меню Вставка⇒Имя⇒Присвоить (Insert⇒Name⇒Define) или же (вначале заблокировав диапазон B2:C5) команду Вставка⇒Имя⇒Создать (Insert⇒Name⇒Create). Можно также навести курсор на ячейку B2, перейти в *поле имени* в начале строки формул, щелкнуть на этом поле и ввести желаемое имя.



- Ячейка B14 используется для автоматического генерирования правильных заголовков графика. В ней используется сцепление текста и содержимого ячейки (обратите внимание на знак амперсанда [&] для объединения элементов ячейки).
- График генерируется с помощью таблицы данных, заголовки которой (в ячейках D21 и E21) скрыты.

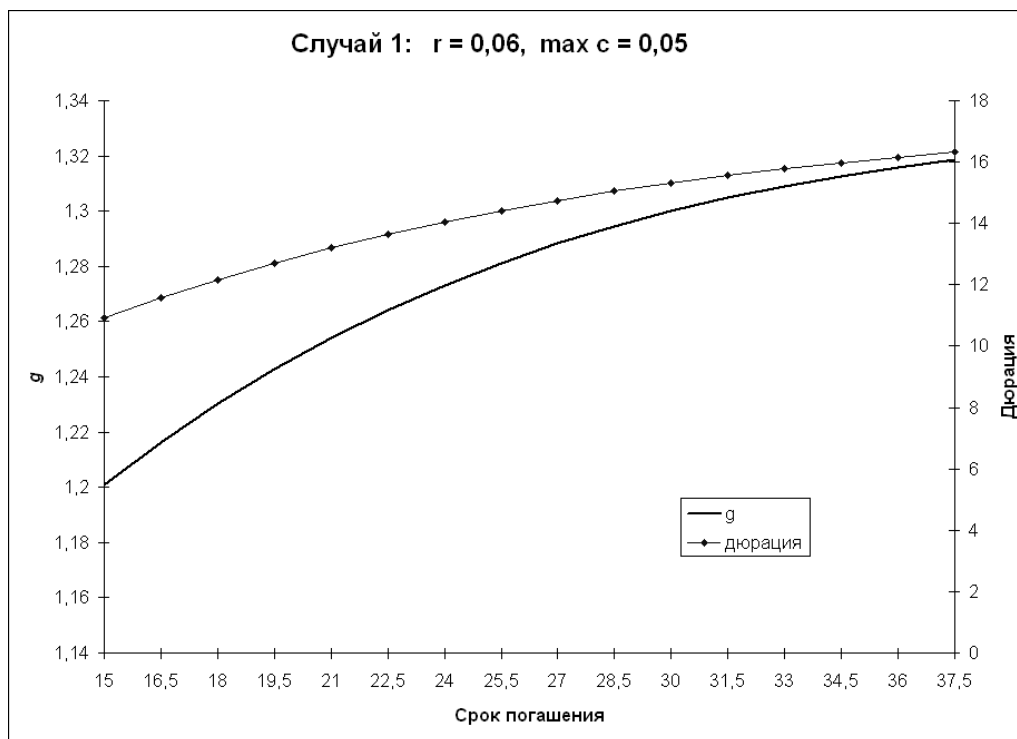


### 24.5.2. Результаты численного моделирования

Перейдем к демонстрации результатов.

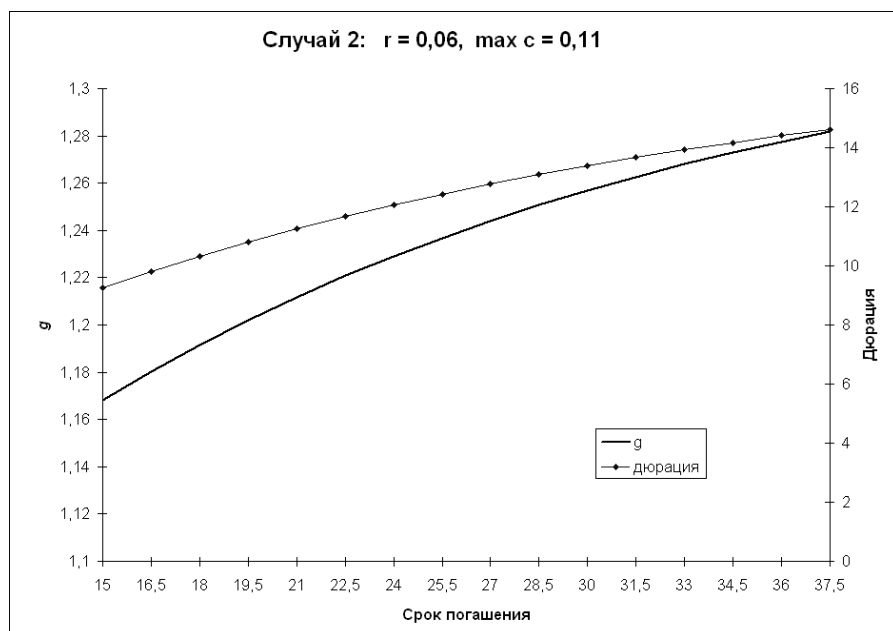
**Случай 1.** Здесь  $\max c < r < 8\%$ . При  $r < 8\%$  оптимальное решение — выбор самой большой из доступных купонных ставок для поставляемой облигации. Если эта ставка менее  $8\%$  (что малоинтересно для рассмотрения, поскольку почти не бывает так, чтобы не было в наличии пригодных для поставки облигаций с купонной ставкой менее  $8\%$ ), то, как показано здесь, оптимальное решение — выбрать минимальный из доступных сроков  $M$ . Критерий дюрации для этого случая гласит, что нужно выбрать облигацию с минимальной дюрацией. Правило дюрации пригодно для большинства ситуаций, соответствующих этому случаю.

На следующем графике показан случай с  $r = 6\%$  и  $\max c = c^* = 5\%$ .

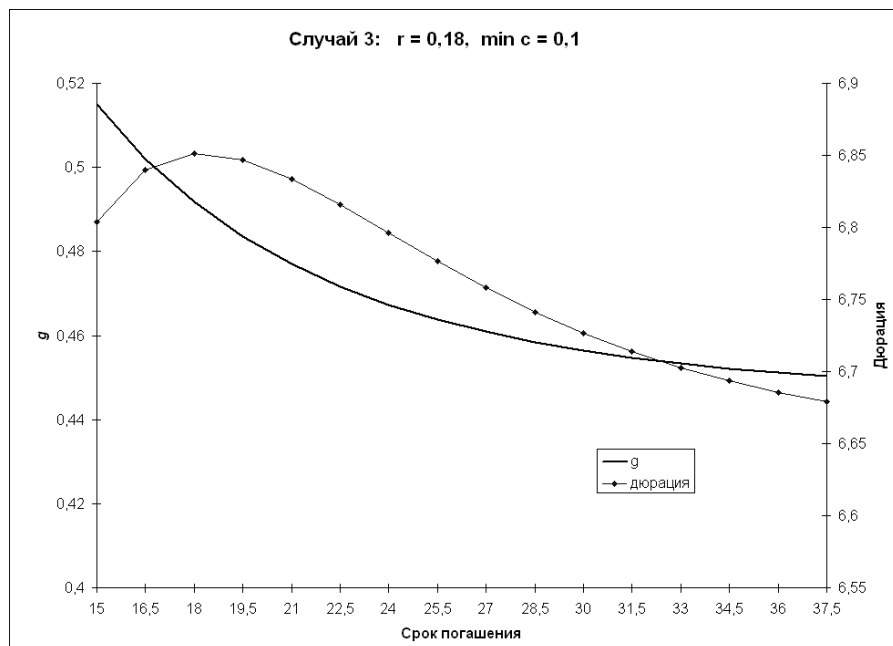


Подчеркиваем, что в этом случае критерий дюрации правильно срабатывает не всегда. Легко построить пример, в котором  $\max c < r < 8\%$ , но дюрация имеет внутренний максимум и поэтому два локальных минимума. Как показано в работе Benninga, Wiener (1999), для того, чтобы внутренний максимум имел место при сроках погашения менее 30 лет, ставка  $r$  должна превышать 8%. Таким образом, интуитивное правило верно для этого случая при условии, что не существует пригодных для поставки казначейских облигаций со сроками погашения менее 30 лет. Если существуют облигации с очень длинными сроками погашения, то может случиться, что минимальное значение  $g$  и минимальная дюрация не совпадут.

**Случай 2.**  $r < 8\%$ ,  $r < \max c$ . При  $r < 8\%$  оптимальное решение — выбор максимальной купонной ставки для поставляемых облигаций. Если эта ставка выше 8%, то, как мы показываем, оптимальным решением является минимальный существующий срок  $M$ . Для этого случая дюрация увеличивается вместе с возрастанием срока погашения облигации (см., например, работу Bierwag, Kaufman, Toevs, 1983). Поэтому оптимальным решением будет выбор облигации с минимальной дюрацией. На следующем графике показан случай  $r = 6\%$  и  $\max c = c^* = 11\%$ .

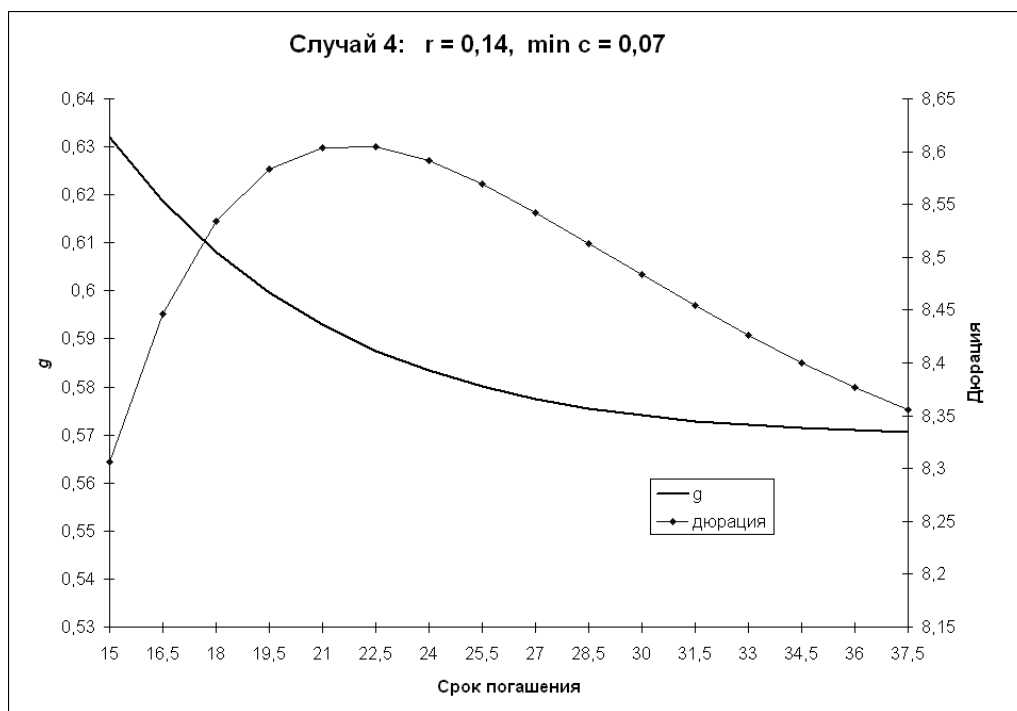


**Случай 3.**  $r > 8\%$ ,  $\min c > 8\%$ . При  $r > 8\%$  оптимальное решение — минимальная купонная ставка по поставляемой облигации. В литературе обычно утверждается, что в этом случае таким же оптимальным решением будет выбрать облигацию с максимальной дюрацией. Однако далее приведен контрпример (в котором  $r = 18\%$  и  $\min c = c^* = 10\%$ ), для которого это утверждение неверно.



Рассуждая интуитивно в связи с этим результатом, можно предположить, что хотя дюрация облигации с однократной выплатой со временем убывает, она может вначале возрастать с увеличением срока погашения. Поэтому дюрация может иметь внутренний максимум, тогда как в нашем случае — как показано в теореме 3 — функция  $g$  имеет минимум при максимальном сроке погашения.

**Случай 4.**  $\min c < 8\% < r$ . При  $r > 8\%$  оптимальное решение — выбор наименьшей из имеющихся купонных ставок по поставляемой облигации. Если эта ставка меньше 8%, то выбор максимальной дюрации не оптимален. Как будет показано, легко построить примеры, в которых значение  $M$ , соответствующее максимальной дюрации, отличается от значения  $M$ , соответствующего минимуму  $g$  (а именно последнее значение определяет оптимальность поставляемой облигации). В нашем примере  $r = 14\%$  и  $\min c = c^* = 7\%$ <sup>7</sup>.



Исходя из вышесказанного можно сделать вывод, что в случае постоянной временной структуры процентных ставок критерий дюрации (который в нашем случае заставил бы нас выбирать для поставки облигацию с максимальной дюрацией) неверен. Критерий дюрации не всегда справедлив в случае, когда  $r < 8\%$  и оптимальная купонная ставка  $c^* < r$ .

<sup>7</sup> Для наглядности графика выбрано достаточно большое значение  $r$ , но можно построить и другие примеры с меньшими  $r$ .

## 24.6. Заключение

В этой главе с помощью Excel исследована задача оптимальной ценной бумаги, поставляемой по фьючерсному контракту на облигации государственного казначейства. Выводы из нашего исследования можно сформулировать следующим образом.

1. Облигация с самой дешевой поставкой всегда имеет либо максимальную (при рыночной процентной ставке менее 8%), либо минимальную купонную ставку из всех пригодных для поставки облигаций. Этот результат основан на предположении о выпуклости множества всех подходящих облигаций, но не зависит от конкретной временной структуры.
2. Срок погашения облигации с дешевой поставкой является минимальным среди всех подходящих для поставки облигаций, если рыночная процентная ставка составляет менее 8%. Если же она превышает 8%, то срок погашения оптимальной облигации — это максимальный срок среди подходящих облигаций при оптимальной купонной ставке более 8%; если оптимальная ставка — менее 8%, то существует возможность, что срок поставки оптимальной облигации не является ни максимумом, ни минимумом (т.е. возможен внутренний экстремум).
3. В противоположность бытующим (и опубликованным) представлениям облигация с самой дешевой поставкой *не является* облигацией с экстремальным значением дюрации.





---

## **V Технические вопросы**

В главах 25–30 рассматриваются различные технические вопросы, понимание которых необходимо для изучения этой книги. Глава 25 посвящена генерированию случайных чисел, которое широко используется в главе 15 для имитации логнормального распределения курсов акций и в главе 17 для моделирования страхования портфелей ценных бумаг. В главе 26 рассматриваются таблицы данных Excel. Это важное средство используется для построения сложных таблиц чувствительности данных к различным факторам; его применения встречаются на протяжении всей книги. Глава 27 посвящена матрицам, которые в книге применяются при оптимизации инвестиционных портфелей (главы 7–12). В главе 28 представлено описание итерационного метода Гаусса–Зейделя для решения систем уравнений. Этот метод, хотя и не используется в книге в явном виде, лежит в основе гипотетических моделей из глав 3 и 4. В главе 29 собраны краткие сведения о функциях Excel, используемых в книге; особое место занимает рассмотрение функций, применяемых к массивам (раздел 29.3). В главе 30 рассматривается множество полезных приемов работы с Excel, которые находят самые разные применения. Это и быстрое копирование, и создание автоматически обновляемых заголовков на графиках, и ячейки из нескольких строк, и вставка греческих букв, нижних и верхних индексов в тексты таблиц Excel, и присвоение имен ячейкам, и сокрытие ячеек.



---

# 25 Случайные числа

---

## 25.1. Введение

Генератором случайных чисел на компьютере называют функцию, которая выдает последовательность чисел, на первый взгляд никак не связанных между собой. Вопрос, *что же такое* случайное число — скорее философский, чем технический<sup>1</sup>. В этой главе философия игнорируется, а внимание фокусируется на некоторых простейших генераторах случайных чисел — большей частью на генераторе среды Excel СЛЧИС (Rand) и генераторе Rnd языка Visual Basic for Applications.

Чтобы представить себе набор равномерно распределенных случайных чисел, вообразим урну, наполненную маленькими шариками в количестве 1000 штук с номерами 000, 001, 002, ..., 999. Проведем следующий эксперимент: встряхнув урну и перемешав тем самым шарики, вытащим один шарик и запишем его номер. Затем вернем шарик в урну, тщательно ее встряхнем, чтобы снова перемешать шары, и вытащим следующий. Последовательность чисел, полученных многократным повторением этой процедуры, должна быть *равномерно распределена* между 000 и 999.

Компьютерный генератор случайных чисел (программная функция) имитирует описанную процедуру. Генераторы случайных чисел, рассматриваемые в этой главе, иногда называются *генераторами псевдослучайных чисел*, поскольку фактически они реализуют детерминированные процессы, результаты которых тем не менее нельзя отличить от случайных. Все генераторы псевдослучайных чисел содержат циклы (т.е. со временем начинают повторяться). Все, что нужно, — это построить генератор с достаточно длинным циклом повторения. Функция Excel СЛЧИС (Rand) имеет очень длинный цикл и потому считается хорошим генератором случайных чисел.

В главах 13–19 этой книги, посвященных опционам, генераторы случайных чисел используются для имитации курсов акций. Если вам еще не приходилось пользоваться генератором случайных чисел, откройте таблицу Excel и введите =СЛЧИС (=Rand) в любую ячейку. Появится 15-значное число между 0,000000000000000 и 0,999999999999999. При каждом пересчете листа (путем нажатия клавиши <F9>, например) это число будет изменяться. Последовательность полученных таким образом чисел будет (по выражению автора работы, цитируемой в сноске 1) “непредсказуемой для непосвященного наблюдателя”.

---

<sup>1</sup> Д. Кнут (Knuth, 1981, с.142) приводит следующую цитату: “Последовательность случайных чисел — это не вполне четко определенное понятие, в котором содержится идея такой последовательности, что каждый элемент ее непредсказуем для непосвященного наблюдателя, и к тому же числа из нее удовлетворяют целому ряду критериев, традиционных для статистики и зависящих в определенной степени от того, какое применение ожидает указанную последовательность”. (D.H. Lehmer, 1951.)

В этой главе будут рассматриваться два типа случайных генераторов: вначале генераторы равномерно распределенных чисел, включенные в состав Excel и VBA, а затем генераторы нормально распределенных чисел<sup>2</sup>.

## 25.2. Тестирование генератора Excel

Предположим, нам необходимо просто сгенерировать список случайных чисел. Один из способов сделать это — скопировать формулу с функцией СЛЧИС (Rand) в диапазон ячеек.

|    | A                                       | B      | C      | D      | E           |
|----|-----------------------------------------|--------|--------|--------|-------------|
| 1  |                                         |        |        |        |             |
| 2  | 0,6637                                  | 0,2432 | 0,6461 | 0,9289 | <-- СЛЧИС() |
| 3  | 0,6840                                  | 0,6004 | 0,6769 | 0,0154 |             |
| 4  | 0,4899                                  | 0,2773 | 0,6033 | 0,4360 |             |
| 5  | 0,9163                                  | 0,7316 | 0,2668 | 0,1408 |             |
| 6  | 0,8202                                  | 0,5464 | 0,7352 | 0,2354 |             |
| 7  | 0,6696                                  | 0,8545 | 0,7306 | 0,6557 |             |
| 8  | 0,1768                                  | 0,3410 | 0,8619 | 0,3604 |             |
| 9  | 0,8903                                  | 0,3009 | 0,8391 | 0,4420 |             |
| 10 | 0,0070                                  | 0,8110 | 0,6506 | 0,7855 |             |
| 11 |                                         |        |        |        |             |
| 12 | Каждая ячейка содержит функцию СЛЧИС(). |        |        |        |             |
| 13 | При каждом обновлении листа или         |        |        |        |             |
| 14 | нажатии F9 блок ячеек генерирует        |        |        |        |             |
| 15 | новый набор случайных чисел.            |        |        |        |             |

Другой способ основан на применении функции Rnd языка VBA, показанном в следующей программе randomlist:

```
Sub randomlist() 'Генерирует простой список случайных чисел
    Range("output").Range(Cells(1, 1), Cells(250, 1)).Clear
    N = Range("runs").Value

    For Index = 1 To N
        Range("output").Cells(Index, 1) = Rnd
    Next Index
End Sub
```

Имена runs (“количество выполнений”) и output (“выходные данные”) соответствуют именованным диапазонам таблицы, в которую включена программа. В приведенном далее примере выходных данных имя runs относится к ячейке B4, а output — к ячейкам B7:B16<sup>3</sup>. Вторая строка программы уничтожает результаты предыдущих выполнений процедуры (до 250 результатов).

<sup>2</sup> Для нормально распределенных случайных чисел часто употребляют термин “случайные отклонения”. И только в этой области знания возможно такое выражение, как “нормальные отклонения”!

<sup>3</sup> О том, как давать имена диапазонам ячеек, рассказано в главе 30.

|    | A        | B                                                       | C                                                                                                                       | D | E | F | G |
|----|----------|---------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|
| 1  |          | <b>ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ СЛУЧАЙНЫЙ СПИСОК</b>                    |                                                                                                                         |   |   |   |   |
| 2  |          | Для запуска VBA-программы "randomlist" нажмите <Ctrl+q> |                                                                                                                         |   |   |   |   |
| 3  |          |                                                         |                                                                                                                         |   |   |   |   |
| 4  | Запусков | 10                                                      |                                                                                                                         |   |   |   |   |
| 5  |          |                                                         |                                                                                                                         |   |   |   |   |
| 6  |          | Результаты                                              |                                                                                                                         |   |   |   |   |
| 7  |          | 0,410073221                                             | <-- Ячейке присвоено имя "output",<br>которое используется в<br>программе на VBA для очистки<br>предыдущих результатов. |   |   |   |   |
| 8  |          | 0,412766814                                             |                                                                                                                         |   |   |   |   |
| 9  |          | 0,712730467                                             |                                                                                                                         |   |   |   |   |
| 10 |          | 0,326206207                                             |                                                                                                                         |   |   |   |   |
| 11 |          | 0,63317889                                              |                                                                                                                         |   |   |   |   |
| 12 |          | 0,207561135                                             |                                                                                                                         |   |   |   |   |
| 13 |          | 0,18601352                                              |                                                                                                                         |   |   |   |   |
| 14 |          | 0,583359003                                             |                                                                                                                         |   |   |   |   |
| 15 |          | 0,080714643                                             |                                                                                                                         |   |   |   |   |
| 16 |          | 0,457971454                                             |                                                                                                                         |   |   |   |   |

Сам по себе этот результат интересен, хотя и не слишком информативен. Действительно ли числа из списка, полученного таким образом, распределены равномерно? Чтобы проверить это, можно, генерируя каждое число, проверять его на принадлежность интервалам  $[0; 0,1)$ ,  $[0,1; 0,2)$ ,  $\dots$ ,  $[0,9; 1)$ . (Здесь запись  $[a; b)$  обозначает *полуоткрытый* интервал от  $a$  до  $b$ , т.е. диапазон чисел  $x$ , таких, что  $a \leq x < b$ .) Если список чисел действительно распределен равномерно, то в каждый из десяти подынтервалов будет попадать примерно поровну чисел.

Проверку равномерности можно реализовать таким образом: сгенерировать список чисел на листе таблицы, скопировав функцию СЛЧИС (Rand) в большое количество ячеек, а затем применить функцию ЧАСТОТА (Frequency)<sup>4</sup>. Этот метод проиллюстрирован таблицей Excel на приведенном ниже рисунке.

|    | A                                                 | B | C       | D       | E                           | F | G |
|----|---------------------------------------------------|---|---------|---------|-----------------------------|---|---|
| 1  | <b>ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФУНКЦИИ EXCEL "ЧАСТОТА"</b>      |   |         |         |                             |   |   |
| 2  |                                                   |   |         |         |                             |   |   |
| 3  | Случайные                                         |   |         |         |                             |   |   |
| 4  | числа                                             |   | Интерв. | Частота |                             |   |   |
| 5  | 0,4919                                            |   | 0,1     | 2       |                             |   |   |
| 6  | 0,0407                                            |   | 0,2     | 0       |                             |   |   |
| 7  | 0,8330                                            |   | 0,3     | 0       |                             |   |   |
| 8  | 0,4268                                            |   | 0,4     | 0       |                             |   |   |
| 9  | 0,8966                                            |   | 0,5     | 2       | <-- =ЧАСТОТА(A5:A14;C5:C14) |   |   |
| 10 | 0,0602                                            |   | 0,6     | 1       |                             |   |   |
| 11 | 0,5730                                            |   | 0,7     | 1       |                             |   |   |
| 12 | 0,7538                                            |   | 0,8     | 1       |                             |   |   |
| 13 | 0,6608                                            |   | 0,9     | 2       |                             |   |   |
| 14 | 0,9127                                            |   | 1       | 1       |                             |   |   |
| 15 |                                                   |   |         |         |                             |   |   |
| 16 | Каждая ячейка в диапазоне A5:A14 содержит формулу |   |         |         |                             |   |   |
| 17 | СЛЧИС(). Нажатие F9 дает новый набор              |   |         |         |                             |   |   |
| 18 | случайных чисел и частот.                         |   |         |         |                             |   |   |

Этот метод, очевидно, малоэффективен (и даже трудно реализуем) при проверке генератора на равномерность распределения большого количества случайных чисел. В следующей программе на VBA генерируется много чисел, которые затем размещаются по подынтервалам:

```
Sub uniformRandom()  
'Распределение случайных чисел по подынтервалам  
Application.screenupdating = False
```

<sup>4</sup> Функции, генерирующие массивы, рассматриваются в главе 29.

```

Range("starttime") = Time
N = Range("runs").Value 'количество чисел

Dim distribution(10) As Long 'подынтервалы подсчета
ReDim sample(N) As Double

For k = 1 To N
    draw = Rnd
    distribution(Int(draw * 10) + 1) = _
        distribution(Int(draw * 10) + 1) + 1
Next k

For Index = 1 To 10
    Range("output").Cells(Index, 1) = distribution(Index)
Next Index

Range("stoptime") = Time

End Sub

```

Программа порождает набор выходных данных, показанных на нижеприведенном рисунке.



Вот что следует отметить в отношении программы uniformrandom.

- С помощью оператора `Application.screenupdating = False` программа запрещает Excel обновление экрана во время выполнения кода (экран автоматически обновляется после завершения работы программы; если необходимо обновление экрана в процессе, используйте выражение `Application.screenupdating = True`).

- В программе имеются “часы” для измерения времени, уходящего на ее выполнение. В начале программы с помощью оператора `Range("starttime") = Time` в ячейку с меткой Starttime (“Время начала”) помещается текущее время. В конце программы оператор `Range("stoptime") = Time` фиксирует время окончания работы в ячейке “Время окончания”. В ячейке “Прошло времени” содержится формула `=Stoptime-Starttime`. Заметьте, что для того, чтобы соответствующие ячейки выглядели привычно, к ним нужно применить команду **Формат**⇒**Ячейки**⇒**Число**⇒**Время** (**Format**⇒**Cells**⇒**Number**⇒**Time**).
- В основном ядре программы используется функция `Int(draw * 10) + 1`; умножение случайных чисел на 10 дает числа с первыми цифрами 0, 1, ..., 9. Функция VBA под названием `Int` выдает соответствующее, усеченное до целого число. `Distribution` — это массив VBA с индексами от 1 до 10, где `Distribution(1)` — количество случайных чисел в интервале  $[0; 0,1)$ , `Distribution(2)` — в интервале  $[0,1; 0,2)$  и т.д. Таким образом, число `Int(draw * 10) + 1` — это как раз индекс в `Distribution` для помещения текущего случайного числа.

### 25.3. Генерирование случайных чисел с нормальным распределением

В предыдущих разделах выполнялось генерирование случайных чисел, распределенных по равномерному закону. Теперь необходимо сгенерировать числа, подчиняющиеся закону нормального распределения. Один из способов сделать это — воспользоваться командой меню **Excel Сервис**⇒**Анализ данных**⇒**Генерация случайных чисел** (**Tools**⇒**Data Analysis**⇒**Random Number Generation**). На приведенном ниже рисунке показано, как с помощью Excel мы получили 1000 случайных чисел, распределенных по нормальному закону (с  $\mu = 1$  и  $\sigma = 1$ ) в столбце G.

|    | A | B | C | D | E | F | G        | H | I | J | K |
|----|---|---|---|---|---|---|----------|---|---|---|---|
| 1  |   |   |   |   |   |   | -0,30023 |   |   |   |   |
| 2  |   |   |   |   |   |   | -1,27768 |   |   |   |   |
| 3  |   |   |   |   |   |   | 0,244257 |   |   |   |   |
| 4  |   |   |   |   |   |   | 1,276474 |   |   |   |   |
| 5  |   |   |   |   |   |   | 1,19835  |   |   |   |   |
| 6  |   |   |   |   |   |   | 1,733133 |   |   |   |   |
| 7  |   |   |   |   |   |   | -2,18359 |   |   |   |   |
| 8  |   |   |   |   |   |   | -0,23418 |   |   |   |   |
| 9  |   |   |   |   |   |   | 1,095023 |   |   |   |   |
| 10 |   |   |   |   |   |   | -1,0867  |   |   |   |   |
| 11 |   |   |   |   |   |   | -0,6902  |   |   |   |   |
| 12 |   |   |   |   |   |   | -1,69043 |   |   |   |   |
| 13 |   |   |   |   |   |   | -1,84691 |   |   |   |   |
| 14 |   |   |   |   |   |   | -0,97763 |   |   |   |   |
| 15 |   |   |   |   |   |   | -0,77351 |   |   |   |   |
| 16 |   |   |   |   |   |   | -2,11793 |   |   |   |   |
| 17 |   |   |   |   |   |   | -0,56792 |   |   |   |   |
| 18 |   |   |   |   |   |   | -0,40405 |   |   |   |   |
| 19 |   |   |   |   |   |   | 0,134853 |   |   |   |   |
| 20 |   |   |   |   |   |   | -0,36549 |   |   |   |   |
| 21 |   |   |   |   |   |   | -0,32699 |   |   |   |   |
| 22 |   |   |   |   |   |   | -0,37024 |   |   |   |   |

Если необходимо проверить, действительно ли результат распределен по нормальному закону, можно построить распределение частот — с помощью функции

ЧАСТОТА (Frequency) или же команды Сервис⇒Анализ данных⇒Гистограмма (Tools⇒Data Analysis⇒Histogram). В результате получается график, показанный ниже.



Хотя это и простой способ получения нормально распределенных чисел, он не слишком эффективен, особенно если нужно сгенерировать очень много чисел. Выход заключается в использовании программы на VBA. Программа normalSimulation генерирует нормальные отклонения по следующему алгоритму.

- Генерируем два случайных числа (в программе они называются rand1 и rand2).
- Полагаем  $S1 = rand1^2 + rand2^2$ .
- Если  $S1 > 1$ , то генерируем два новых случайных числа. В противном случае полагаем  $S2 = [-2 * \text{Log}(S1)/S1]^{1/2}$ . (Здесь Log обозначает натуральный логарифм, который записывается в Excel как Ln, но в VBA — именно как Log.)
- Полагаем два нормальных отклонения равными  $X1 = rand1 * S2$  и  $X2 = rand2 * S2$ .

```
Sub normalSimulation()
Range("sstarttime") = Time
Application.screenupdating = False
ReDim sample(2 * N) As Double
Dim distribution(-30 To 30) As Integer
N = Range("rruns").Value
```



```

For Index = 1 To N
start:
    Static rand1, rand2, S1, S2, X1, X2
    rand1 = 2 * Rnd - 1
    rand2 = 2 * Rnd - 1
    S1 = rand1 ^ 2 + rand2 ^ 2
    If S1 > 1 Then GoTo start
    S2 = Sqr(-2 * Log(S1) / S1)
    X1 = rand1 * S2
    X2 = rand2 * S2

    If X1 < -3 Then
        distribution(-30) = distribution(-30) + 1
    ElseIf X1 > 3 Then
        distribution(30) = distribution(30) + 1
    Else distribution(Int(X1 / 0.1)) = _
        distribution(Int(X1 / 0.1)) + 1
    End If

    If X2 < -3 Then
        distribution(-30) = distribution(-30) + 1
    ElseIf X2 > 3 Then
        distribution(30) = distribution(30) + 1
    Else distribution(Int(X2 / 0.1)) = _
        distribution(Int(X2 / 0.1)) + 1
    End If
Next Index

For Index = -30 To 30
    Range("output").Cells(Index + 31, 1) = _
        distribution(Index) / (2 * N)
Next Index

Range("sstoptime") = Time
End Sub

```

В отношении этой программы следует сделать несколько замечаний.

- Обратите внимание на возврат в начало программы в случае  $S1 > 1$ . Вот первые несколько строк соответствующей части программы normalSimulation:

```

For Index = 1 To N
start:
    Static rand1, rand2, S1, S2, X1, X2
    rand1 = 2 * Rnd - 1
    rand2 = 2 * Rnd - 1
    S1 = rand1 ^ 2 + rand2 ^ 2
    If S1 > 1 Then GoTo start
    . . . .

```

Обозначив меткой start нужную точку, можно ссылаться на нее из оператора проверки.

- Большая часть результатов генерирования нормального распределения заключена между  $-3$  и  $+3$ . В программе результаты распределяются по подынтервалам  $(-\infty; -2, 9]$ ,  $(-2, 9; -2, 8]$ , ...,  $(-2, 9; \infty]$ . Для этого вначале организуется массив `distribution(-30 To 30)` с 61 индексом. Чтобы отнести какое-либо из случайных чисел (скажем,  $X1$ ) к той или иной позиции в массиве, используется следующая функция:

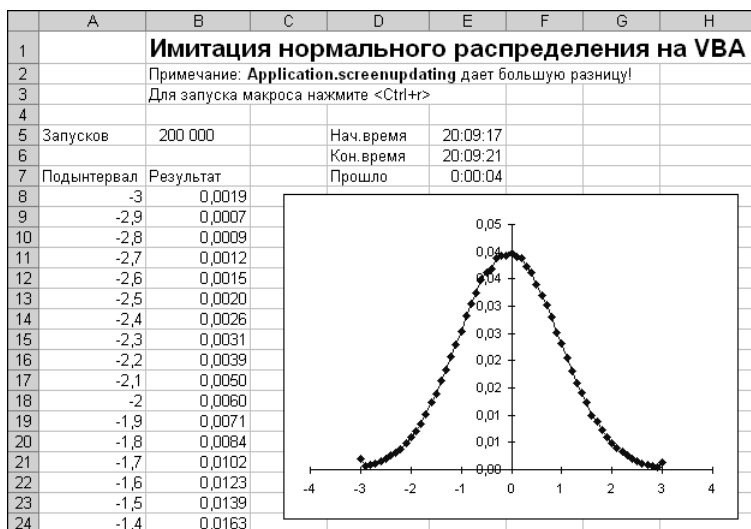
```
If X1 < -3 Then
    distribution(-30) = distribution(-30) + 1
ElseIf X1 > 3 Then
    distribution(30) = distribution(30) + 1
Else distribution(Int(X1 / 0.1)) = _
    distribution(Int(X1 / 0.1)) + 1
```

- Программа `normalSimulation` строит не гистограмму (т.е. *счетчик* попаданий чисел в подынтервалы), а *распределение частот*. Это делается путем деления числа на  $2N$ , удвоенное количество выполнений (при каждом успешном выполнении генерируются два случайных числа), перед выводом чисел в таблицу:

```
For Index = -30 To 30
    Range("output").Cells(Index + 31, 1) = _
        distribution(Index) / (2 * N)
Next Index
```

- Наконец, следует заметить, что команда `Application.ScreenUpdating = False` играет большую роль в работе программы. Она предотвращает обновление данных как в ячейках, так и на графике. Попробуйте запустить программу на выполнение с ней и без нее, и вы сами увидите разницу.

Результаты работы программы показаны на приведенном ниже рисунке.



Обратите внимание, что у графика имеются “толстые хвосты”. Это происходит потому, что все числа меньше  $-3$  отправляются в крайний левый подынтервал, а все числа больше  $+3$  — в крайний правый.

## Упражнения

1. Создайте список из 200 случайных чисел с помощью программы `randomlist` из раздела 25.2. Постройте гистограмму результатов с помощью функции Excel ЧАСТОТА (Frequency).
2. Следующий генератор случайных чисел легко реализовать самостоятельно.
  - а) Начинаем с некоторого числа — инициализатора  $S$ .
  - б) Полагаем  $X_1 = S + \pi$ , а также  $X_2 = e^{5 + \ln(X_1)}$ .
  - в) Первым случайным числом становится  $R = X_2 \text{Int}(X_2)$ , где  $\text{Int}(X_2)$  — целая часть  $X_2$ .

г) Повторяем процесс, полагая  $S = R$ .

Реализуйте этот генератор в виде программы VBA, аналогичной `randomlist`, и сгенерируйте список из 50 случайных чисел.

3. Определим операцию  $A \bmod B$  как *взятие остатка от деления  $A$  на  $B$* . Например,  $36 \bmod 25 = 11$ . В среде Excel эта функция есть, и записывается она как ОСТАТ( $A, B$ ) (или  $\text{Mod}(A, B)$ ). В связи с этим рассмотрим еще один генератор случайных чисел.
  - а) Полагаем  $X_0 = 1$ .
  - б) Полагаем  $X_{n+1} = 7X_n \bmod 10^8$ .
  - в) Полагаем  $U_{n+1} = X_{n+1}/10^8$ .

Список чисел  $U_1, U_2, \dots$  содержит псевдослучайные числа, сгенерированные описываемым генератором. (Одним из многих, описанных в Abramowitz, Stegun, 1972.) Реализуйте этот генератор на языке VBA и используйте его в программе, аналогичной `uniformrandom`.

4. Во многих штатах США существует ежедневная лотерея, в которую играют так. В течение дня вы покупаете лотерейный билет, на котором продавец отмечает выбранный вами номер — от 000 до 999. Вечером на телевидении происходит розыгрыш — вытягивают трехзначное число. Если номер, на который вы поставили, совпадает с этим числом, вы выигрываете и получаете 500 долл. (за свою ставку в один доллар). Если проигрываете, не получаете ничего.
  - а) Напишите функцию Excel, выдающую случайное число от 000 до 999. *Подсказка:* воспользуйтесь стандартными функциями СЛЧИС (Rand) и ЦЕЛОЕ (Int).
  - б) Напишите функцию на VBA, которая бы воспроизводила 250 тиражей ежедневной лотереи. (Это примерно календарный год, если по выходным и праздникам тиражей не проводить.) Предполагая, что каждый билет стоит 1 долл. и что каждый день вы ставите на одно и то же число, сколько денег можно выиграть в течение года?

5. Запрограммируйте процедуру `normalSimulation`, но на этот раз увеличьте количество подынтервалов. (Можно ли сделать так, чтобы количество подынтервалов и их длины вводились из таблицы?) Исчезла ли проблема “толстых хвостов” распределения?
6. Хорошо известно, что если  $Z$  — стандартная нормальная случайная величина (т.е. она имеет среднее  $\mu = 0$  и стандартное отклонение  $\sigma = 1$ ), то величина  $X = aZ + b$  распределена по нормальному закону с параметрами  $\mu = b$  и  $\sigma = a$ . Внесите такие изменения в программу `normalSimulation`, чтобы она выдавала нормальное, но не стандартное распределение, причем брала бы среднее и стандартное отклонение с листа таблицы.

---

## 26 Таблицы данных

---

### 26.1. Введение

Набор команд, связанных с таблицами данных — это мощный инструмент для сложного анализа чувствительности. Excel предоставляет возможность создавать таблицы, в которых варьированию подвергается только одна переменная либо сразу две. Таблицы данных Excel — это функции, порождающие массивы; соответственно, они динамически изменяются при внесении правок в соответствующие ячейки листа.

В этой главе рассказывается, как создавать одно- и двумерные таблицы данных на листах Excel.

---

### 26.2. Пример

Рассмотрим проект, имеющий начальную стоимость 1150 долл. и семь ожидаемых ежегодных поступлений денежных средств. Они возрастают с коэффициентом  $g$  в течение 1–7-го года, так что денежное поступление, или поток (ДП), в году номер  $t$  равно  $ДП_t = ДП_{t-1} \cdot (1 + g)$ . Зная ставку дисконтирования  $r$ , получаем чистую приведенную стоимость проекта (ЧПС):

$$ЧПС = -1150 + \frac{ДП_1}{(1+r)^1} + \frac{ДП_1(1+g)}{(1+r)^2} + \frac{ДП_1(1+g)^2}{(1+r)^3} + \dots + \frac{ДП_1(1+g)^6}{(1+r)^7}.$$

Внутренняя ставка доходности (ВСД)  $i$  — это ставка дисконтирования, при которой ЧПС равна 0:

$$0 = -1150 + \frac{ДП_1}{(1+i)^1} + \frac{ДП_1(1+g)}{(1+i)^2} + \frac{ДП_1(1+g)^2}{(1+i)^3} + \dots + \frac{ДП_1(1+g)^6}{(1+i)^7}.$$

Этот расчет легко выполняется в Excel. В следующем примере первое денежное поступление равно 234, темп роста составляет  $g = 10\%$ , а ставка дисконтирования  $r = 15\%$ .

|   | A               | B        | C                       | D                | E      | F                | G      | H      | I      |
|---|-----------------|----------|-------------------------|------------------|--------|------------------|--------|--------|--------|
| 1 | ДП <sub>1</sub> | 234      |                         |                  |        |                  |        |        |        |
| 2 | Темп роста      | 10%      |                         |                  |        |                  |        |        |        |
| 3 | Ставка диск.    | 15%      |                         |                  |        |                  |        |        |        |
| 4 |                 |          |                         | $=C6*(1+\$B\$2)$ |        | $=D6*(1+\$B\$2)$ |        |        |        |
| 5 | Год             | 0        | 1                       | 2                | 3      | 4                | 5      | 6      | 7      |
| 6 | Поступление     | -1150,00 | 234,00                  | 257,40           | 283,14 | 311,45           | 342,60 | 376,86 | 414,55 |
| 7 |                 |          |                         |                  |        |                  |        |        |        |
| 8 | ЧПС             | 101,46   | $<-- =B6+ЧПС(B3,C6:I6)$ |                  |        |                  |        |        |        |
| 9 | ВСД             | 17,60%   | $<-- =ВСД(B6:I6,0)$     |                  |        |                  |        |        |        |

Обратите внимание на адреса ячеек, содержащих темп роста, ставку дисконтирования, ЧПС и ВСД. Они понадобятся нам в дальнейших расчетах.

### 26.3. Пример

Предположим, необходимо узнать, как на ЧПС и ВСД повлияет изменение темпа роста. Это можно легко выяснить с помощью команды Таблица подстановки (Table) в меню Данные (Data). Первым шагом будет создание структуры таблицы. В следующем примере формулы для ЧПС и ВСД помещаются в верхней строке, а варьируемая переменная (в данном случае темп роста) — в первом столбце. На этом этапе таблица выглядит так, как показано ниже.

|    | F     | G     | H      | I      | J |
|----|-------|-------|--------|--------|---|
| 10 |       |       |        |        |   |
| 11 |       | $=B8$ |        | $=B9$  |   |
| 12 |       |       |        |        |   |
| 13 |       |       | ЧПС    | ВСД    |   |
| 14 |       |       | 101,46 | 17,60% |   |
| 15 |       |       | 0      |        |   |
| 16 | Темп  |       | 5%     |        |   |
| 17 | роста |       | 10%    |        |   |
| 18 |       |       | 15%    |        |   |
| 19 |       |       |        |        |   |

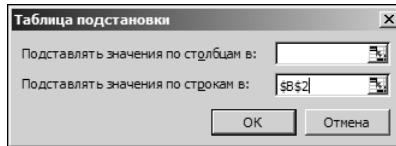
Фактическая рабочая таблица (без заголовков строк и столбцов) отмечена жирной рамкой. Числа, стоящие непосредственно под метками “ЧПС” и “ВСД”, получены по соответствующим формулам с предыдущего рисунка. Так, если ячейка B8 содержит расчет ЧПС, то ячейка под буквами “ЧПС” содержит формулу  $=B8$ . Аналогично, если ячейка B9 содержит расчет ВСД, то ячейка под заголовком “ВСД” в таблице данных содержит формулу  $=B9$ .

Следует понимать, что лист, содержащий таблицу данных, состоит из двух логических частей.

1. Основного примера.
2. Таблицы, выполняющей анализ чувствительности основного примера. В нашем случае первая строка таблицы содержит ссылки на расчет, выполняемый в основном примере. Существуют и другие способы работы с таблицами данных, но приведенная структура является одновременно типичной и простой для понимания.

Теперь выполните следующие действия.

1. Выделите область таблицы (обведенную жирной черной рамкой).
2. Выберите в меню Данные (Data) команду Таблица подстановки (Table). Откроется диалоговое окно, в котором вас попросят указать подстановку значений по столбцам и/или строкам.



В нашем случае переменная, которую нужно изменять, находится в левом столбце таблицы, так что мы оставляем поле Подставлять значения по столбцам в (Row Input Cell)<sup>1</sup> незаполненным и указываем ячейку B2, содержащую в нашем примере темп роста, в поле Подставлять значения по строкам в (Column Input Cell). Результат выполнения данной операции показан ниже.

|    | F     | G   | H      | I       | J     |
|----|-------|-----|--------|---------|-------|
| 10 |       |     |        |         |       |
| 11 |       | =B8 |        |         | =B9   |
| 12 |       |     |        |         |       |
| 13 |       |     | ЧПС    | ВСД     |       |
| 14 |       |     | 101,46 | 17,60%  |       |
| 15 |       |     | 0      | -176,46 | 9,71% |
| 16 | Темп  | 5%  | -47,82 | 13,67%  |       |
| 17 | роста | 10% | 101,46 | 17,60%  |       |
| 18 |       | 15% | 274,35 | 21,50%  |       |
| 19 |       |     |        |         |       |

## 26.4. Построение двухмерной таблицы данных

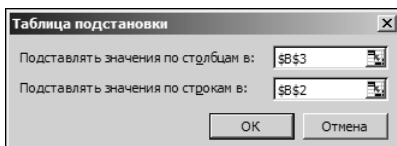
С помощью описанной команды можно варьировать *одну* формулу, изменяя в ней *два* параметра. Предположим, например, что необходимо вычислить ЧПС денежных поступлений для различных темпов роста и ставок дисконтирования. Для этого создадим таблицу, показанную на приведенном ниже рисунке.

|    | E | F     | G      | H  | I   | J                      | K |
|----|---|-------|--------|----|-----|------------------------|---|
| 19 |   |       |        |    |     |                        |   |
| 20 |   | =B8   |        |    |     |                        |   |
| 21 |   |       |        |    |     |                        |   |
| 22 |   |       |        |    |     | Ставка дисконтирования |   |
| 23 |   |       | 101,46 | 7% | 10% | 12%                    |   |
| 24 |   | Темп  | 0      |    |     |                        |   |
| 25 |   | роста | 5%     |    |     |                        |   |
| 26 |   |       | 10%    |    |     |                        |   |
| 27 |   |       | 15%    |    |     |                        |   |

<sup>1</sup> Именно так, это не путаница при переводе. В английской версии Excel в окне написано "row", в русской — "по столбцам", и наоборот. Вероятно, этому есть смысловое объяснение. — *Примеч. пер.*

В верхнем левом углу таблицы находится формула =B8, содержащая ссылку на основной пример.

Теперь снова воспользуемся командой Таблица подстановки (Table). На этот раз заполним как поле Подставлять значения по столбцам в (Row Input Cell), указав в нем ячейку B3 — место хранения ставки дисконтирования, так и поле Подставлять значения по строкам в (Column Input Cell), в котором укажем ячейку B2.



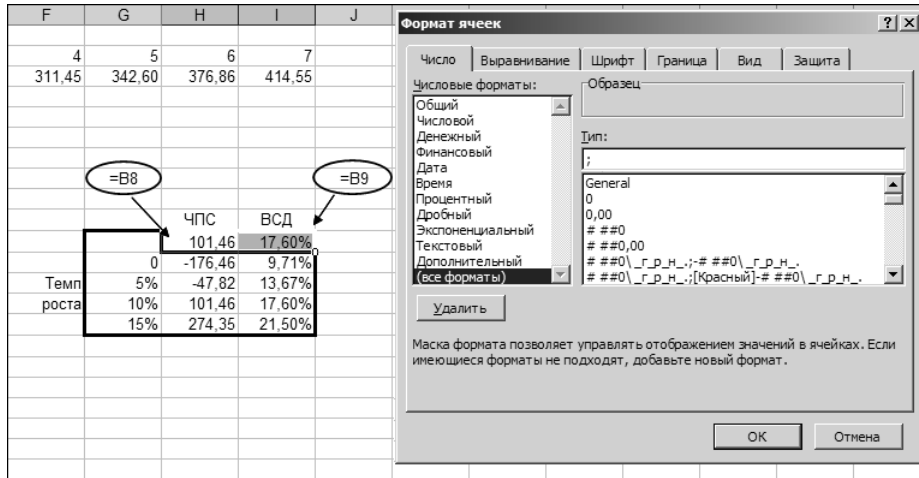
Что получилось в результате, показано ниже.

|    | E | F     | G                      | H      | I      | J      | K |
|----|---|-------|------------------------|--------|--------|--------|---|
| 19 |   |       |                        |        |        |        |   |
| 20 |   |       |                        |        |        |        |   |
| 21 |   | =B8   |                        |        |        |        |   |
| 22 |   |       | Ставка дисконтирования |        |        |        |   |
| 23 |   | Темп  | 101,46                 | 7%     | 10%    | 12%    |   |
| 24 |   | роста | 0                      | 111,09 | -10,79 | -82,08 |   |
| 25 |   |       | 5%                     | 297,62 | 150,74 | 65,13  |   |
| 26 |   |       | 10%                    | 515,79 | 339,09 | 236,44 |   |
| 27 |   |       | 15%                    | 770,34 | 558,25 | 435,41 |   |

## 26.5. Замечание по оформлению: сокрытие ячеек с формулами

Таблицы данных иногда имеют странный вид, потому что вычисляемая формула отображается в самой таблице (в наших примерах — в верхней строке первой таблицы и в левом верхнем углу второй таблицы). Чтобы убрать из таблиц лишнее, можно *скрыть* ячейки с формулами. Для этого выделите нежелательные ячейки и выберите команду **Формат**⇒**Ячейки** (Format⇒Cells) или щелкните правой кнопкой мыши, чтобы открыть окно **Формат ячеек** (Format Cells) одноименной командой. Затем перейдите на вкладку **Число** (Number), выберите (все форматы) (Custom) и введите точку с запятой в поле **Тип** (Type). Теперь экран для предыдущего примера будет выглядеть так, как показано ниже.





Содержимое ячеек будет скрыто, и в результате получится следующее.

|    | F     | G   | H   | I       | J      |
|----|-------|-----|-----|---------|--------|
| 10 |       |     |     |         |        |
| 11 |       | =B8 |     |         | =B9    |
| 12 |       |     |     |         |        |
| 13 |       |     | ЧПС | ВСД     |        |
| 14 |       |     |     |         |        |
| 15 |       |     | 0   | -176,46 | 9,71%  |
| 16 | Темп  |     | 5%  | -47,82  | 13,67% |
| 17 | роста |     | 10% | 101,46  | 17,60% |
| 18 |       |     | 15% | 274,35  | 21,50% |
| 19 |       |     |     |         |        |

## 26.6. Таблицы данных Excel как массивы

Таблицы данных Excel поддерживают динамическую связь с основным примером. Если изменить параметр в исходном примере, изменится и соответствующий столбец или строка таблицы данных. Например, если изменить первое поступление средств с 234 на 300, в приведенной ранее таблице произойдут изменения.

|     | ЧПС    | ВСД    |
|-----|--------|--------|
| 0   | 98,13  | 17,80% |
| 5%  | 263,06 | 21,92% |
| 10% | 454,43 | 26,01% |
| 15% | 676,09 | 30,07% |

## Упражнения

1. а) Воспользуйтесь таблицей данных для построения графика функции  $f(x) = 3x^2 - 2x - 15$ .  
б) С помощью средства Поиск решения (Solver) или Подбор параметра (Goal Seek) из меню Сервис (Tools) найдите два значения  $x$ , для которых  $f(x) = 0$ .
2. В главе 29 рассматривается функция ПС(ставка;кпер;плт;бс;тип), которая вычисляет приведенную стоимость постоянных взносов в счет долга (в английской версии Excel она называется PV). Например, ПС(15%;15;-10) = 58,47. (Обратите внимание, что взнос введен в отрицательном виде; в противном случае программа Excel выдала бы отрицательный результат! Это небольшое неудобство обсуждается в главах 1 и 29.) С помощью таблицы данных постройте график приведенной стоимости как функции ставки дисконтирования.
3. Рассмотрим проект, нынешняя стоимость которого составляет 500 долл., обещающий денежные поступления в течение ближайших пяти лет в размере \$100, \$100·(1+g), \$100·(1+g)<sup>2</sup>, ..., \$100·(1+g)<sup>4</sup>. С помощью таблицы данных выполните анализ чувствительности ЧПС проекта, варьируя ставку дисконтирования в диапазоне 0, 3, ..., 21%, а темп роста — в диапазоне 0, 3, ..., 12%.
4. С помощью таблицы данных постройте график функции  $\sin(x \cdot y)$  для  $x = 0; 0,2; 0,4; \dots 1,8; 2$ . Выберите тип графика Поверхность (Surface), чтобы получить трехмерный график функции.

# 27 Матрицы

## 27.1. Введение

В главе 9 для расчета эффективных портфелей ценных бумаг широко используется матричный аппарат. В настоящей главе содержится достаточно сведений о матрицах и операциях с ними, чтобы вы могли следить за изложением (и выполнять расчеты) по анализу таких портфелей.

Матрица — это прямоугольный массив чисел. Ниже приведено несколько примеров матриц на листе электронной таблицы.

|    | A                              | B  | C  | D | E                            | F  | G  | H | I         | J |
|----|--------------------------------|----|----|---|------------------------------|----|----|---|-----------|---|
| 1  | МАТРИЦЫ В EXCEL                |    |    |   |                              |    |    |   |           |   |
| 2  |                                |    |    |   |                              |    |    |   |           |   |
| 3  |                                |    |    |   |                              |    |    |   | Матрица C |   |
| 4  |                                |    |    |   |                              |    |    |   | (вектор-  |   |
| 5  | Матрица A (вектор-строка)      |    |    |   | Матрица B (квадратная 3 x 3) |    |    |   | столбец)  |   |
| 6  | 2                              | 3  | 4  |   | 13                           | -8 | -3 |   | 13        |   |
| 7  |                                |    |    |   | -8                           | 10 | -1 |   | -8        |   |
| 8  |                                |    |    |   | -3                           | -1 | 11 |   | -3        |   |
| 9  |                                |    |    |   |                              |    |    |   |           |   |
| 10 | Матрица D (размерностью 4 x 3) |    |    |   |                              |    |    |   |           |   |
| 11 | 13                             | -8 | -3 |   |                              |    |    |   |           |   |
| 12 | -8                             | 10 | -1 |   |                              |    |    |   |           |   |
| 13 | -3                             | -1 | 11 |   |                              |    |    |   |           |   |
| 14 | 0                              | 13 | 3  |   |                              |    |    |   |           |   |

Матрица, состоящая из одной строки, называется также *вектором-строкой*, а матрица из одного столбца — *вектором-столбцом*. Матрица с одинаковым количеством строк и столбцов называется *квадратной*.

Матрицы или векторы часто обозначают одной буквой, используя, например, такую запись:  $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ , где  $b_{ij}$  обозначает элемент матрицы, стоящий в строке  $i$  и столбце  $j$ . Для вектора можно записать  $\mathbf{A} = [a_i]$  или  $\mathbf{C} = [c_i]$ . Таким образом, в представленных выше примерах

$$a_3 = 4; \quad b_{22} = 10; \quad c_1 = 13; \quad d_{41} = 0.$$

Матрица  $\mathbf{B}$  *симметрична*, что по определению означает  $b_{ij} = b_{ji}$ .

## 27.2. Матричные операции

### 27.2.1. Умножение на скаляр

При умножении матрицы на скаляр каждый ее элемент умножается на этот скаляр. Соответствующий пример приведен ниже.

|    | A                   | B   | C   | D   | E              | F |
|----|---------------------|-----|-----|-----|----------------|---|
| 3  | Умножение на скаляр |     |     |     |                |   |
| 4  |                     |     |     |     |                |   |
| 5  | Скаляр              | 6   |     |     |                |   |
| 6  |                     |     |     |     |                |   |
| 7  | Матрица В           | 13  | -8  | -3  |                |   |
| 8  |                     | -8  | 10  | -1  |                |   |
| 9  |                     | -3  | -1  | 11  |                |   |
| 10 |                     |     |     |     |                |   |
| 11 | Скаляр * Матрица В  |     |     |     |                |   |
| 12 |                     | 78  | -48 | -18 | <-- =D7*\$B\$5 |   |
| 13 |                     | -48 | 60  | -6  |                |   |
| 14 |                     | -18 | -6  | 66  |                |   |

### 27.2.2. Сложение

Две матрицы можно сложить при условии, что в обеих должно быть одинаковое количество строк и столбцов. Два вектора или две матрицы складываются путем сложения их отдельных элементов друг с другом. Таким образом, если  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$  и  $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ , то  $\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}]$ .

|    | A               | B  | C         | D    | E     | F           | G     | H            | I | J |
|----|-----------------|----|-----------|------|-------|-------------|-------|--------------|---|---|
| 17 | Сложение матриц |    |           |      |       |             |       |              |   |   |
| 18 |                 |    |           |      |       |             |       |              |   |   |
| 19 | Матрица А       |    | Матрица В |      |       | Сумма А + В |       |              |   |   |
| 20 | 1               | 3  |           | 0,1  | 0     | 1,1         | 3     | <-- =B20+E20 |   |   |
| 21 | 3               | 0  |           | 23   | 0     | 26          | 0     |              |   |   |
| 22 | 6               | -9 |           | 8    | -33,4 | 14          | -42,4 |              |   |   |
| 23 | 5               | 11 |           | -15  | 0     | -10         | 11    |              |   |   |
| 24 | 7               | 12 |           | 2,33 | 1,2   | 9,33        | 13,2  |              |   |   |

### 27.2.3. Транспонирование

Транспонирование — это операция, в ходе которой строки матрицы становятся ее столбцами, и наоборот, т.е. для матрицы **Е** имеет место следующее.

|    | A                       | B | C  | D  | E | F                                    | G  | H  | I                                                                                                                                                                                        | J | K |
|----|-------------------------|---|----|----|---|--------------------------------------|----|----|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| 27 | Транспонирование матриц |   |    |    |   |                                      |    |    |                                                                                                                                                                                          |   |   |
| 28 |                         |   |    |    |   |                                      |    |    |                                                                                                                                                                                          |   |   |
| 29 | Матрица Е               |   |    |    |   | Транспонированная Е = Е <sup>Т</sup> |    |    |                                                                                                                                                                                          |   |   |
| 30 | 1                       | 2 | 3  | 4  |   | 1                                    | 0  | 16 | Область в рамке содержит функцию работы с массивами =ТРАНСП(А30:Д32) . Для ее использования: отметьте всю область; впишите формулу, затем для завершения нажмите [Ctrl]+[Shift]+[Enter]. |   |   |
| 31 | 0                       | 3 | 88 | -9 |   | 2                                    | 3  | 7  |                                                                                                                                                                                          |   |   |
| 32 | 16                      | 7 | 7  | 2  |   | 3                                    | 88 | 2  |                                                                                                                                                                                          |   |   |
| 33 |                         |   |    |    |   | 4                                    | -9 |    |                                                                                                                                                                                          |   |   |
| 34 |                         |   |    |    |   |                                      |    |    |                                                                                                                                                                                          |   |   |
| 35 |                         |   |    |    |   |                                      |    |    |                                                                                                                                                                                          |   |   |
| 36 |                         |   |    |    |   |                                      |    |    |                                                                                                                                                                                          |   |   |

В этом примере используется функция для работы с массивами ТРАНСП (Transpose). Каждая ячейка в транспонированной матрице содержит формулу {=ТРАНСП(А30:Д32)}, где А30:Д32 — это диапазон ячеек, содержащий матрицу **Е**. Заметим, что для корректного использования этой формулы необходимо:

- охватить рамкой и выделить целую область, в которую будут помещены результаты (например, ячейки F30:G33);
- ввести формулу = ТРАНСП(А30:D32);
- закончив ввод, нажать комбинацию клавиш <Ctrl+Shift+Enter>, чтобы Excel автоматически добавила скобки; после этого в ячейках появится выражение {=ТРАНСП(А30:D32)}.

#### 27.2.4. Умножение матриц

Пусть  $\mathbf{X}$  — вектор-строка, а  $\mathbf{Y}$  — вектор-столбец, и пусть оба имеют одинаковое количество компонент,  $n$ :

$$\mathbf{X} = [x_1 \cdots x_n], \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Тогда *произведение*  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{Y}$  определяется как

$$\mathbf{XY} = [x_1 \cdots x_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Теперь предположим, что  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  — две матрицы и что у  $\mathbf{A}$  —  $n$  столбцов и  $p$  строк, а у  $\mathbf{B}$  —  $n$  строк и  $m$  столбцов:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & & \ddots & \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{bmatrix} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & \cdots & b_{2m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix}.$$

Тогда произведение этих двух матриц, обозначаемое  $\mathbf{AB}$ , определяется матрицей

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \sum_{h=1}^n a_{1h} b_{h1} & \sum_{h=1}^n a_{1h} b_{h2} & \cdots & \sum_{h=1}^n a_{1h} b_{hm} \\ & \vdots & & \vdots \\ \sum_{h=1}^n a_{ph} b_{h1} & \cdots & \sum_{h=1}^n a_{ph} b_{hm} \end{bmatrix}.$$

На  $(i, j)$ -м месте в этой матрице стоит элемент  $\sum_{h=1}^n a_{ih} b_{hj}$ . Обратите внимание, что  $(i, j)$ -я компонента матрицы  $\mathbf{AB}$  — это просто произведение  $i$ -й строки матрицы  $\mathbf{A}$  на  $j$ -й столбец матрицы  $\mathbf{B}$ . Возьмем следующие две матрицы:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ -9 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 6 & 9 & -12 \\ -5 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Их произведение будет равно

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 42 & 6 & -48 \\ -69 & -75 & 120 \end{bmatrix}.$$

Порядок множителей в произведении имеет важное значение. Умножение матриц некоммукативно, т.е.  $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ . Как показывает пример, возможность умножить  $\mathbf{A}$  на  $\mathbf{B}$  даже не гарантирует, что произведение  $\mathbf{BA}$  вообще определено и существует.

Чтобы перемножить матрицы в Excel, используется функция МУМНОЖ (MMult), принимающая и порождающая массивы.

|    | A                | B   | C   | D                          | E | F   |
|----|------------------|-----|-----|----------------------------|---|-----|
| 39 | Умножение матриц |     |     |                            |   |     |
| 40 |                  |     |     |                            |   |     |
| 41 | Матрица A        |     |     |                            |   |     |
| 42 | 2                | -6  |     | 6                          | 9 | -12 |
| 43 | -9               | 3   |     | -5                         | 2 | 4   |
| 44 |                  |     |     |                            |   |     |
| 45 |                  |     |     |                            |   |     |
| 46 | Произведение AB  |     |     |                            |   |     |
| 47 | 42               | 6   | -48 | <--Массив содержит формулу |   |     |
| 48 | -69              | -75 | 120 | =МУМНОЖ(A42:B43,D42:F43)   |   |     |

Чтобы иметь возможность перемножить две матрицы, количество столбцов в первой матрице должно равняться количеству строк во второй. Поэтому можно умножить  $\mathbf{A}$  на  $\mathbf{B}$ , но нельзя умножить  $\mathbf{B}$  на  $\mathbf{A}$ . Если вы попытаетесь проделать это в Excel, функция МУМНОЖ выдаст сообщение об ошибке.

|    | A                               | B                            | C | D |
|----|---------------------------------|------------------------------|---|---|
| 52 | Произведение BA -- не работает! |                              |   |   |
| 53 | #ЗНАЧ!                          | <-- =МУМНОЖ(D42:F43,A42:B43) |   |   |

### 27.3. Обращение матриц

Квадратная матрица  $\mathbf{I}$  называется *единичной*, если все ее недиагональные элементы равны нулю, а все диагональные — единице. Таким образом:

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Легко удостовериться, что умножение любой матрицы  $\mathbf{A}$  на единичную матрицу соответствующей размерности оставит матрицу  $\mathbf{A}$  неизменной. Если  $\mathbf{I}_n$  — единичная матрица размером  $n \times n$ , а  $\mathbf{A}$  — матрица размером  $n \times m$ , то  $\mathbf{IA} = \mathbf{A}$ . Аналогично, если  $\mathbf{I}_m$  — единичная матрица размером  $m \times m$ , то  $\mathbf{AI} = \mathbf{A}$ .

Теперь предположим, что у нас есть *квадратная* матрица **A** размерности  $n$ . Матрица  $A^{-1}$  размерности  $n \times n$  называется *обратной* к **A**, если  $A^{-1}A = AA^{-1} = I$ . Вычисление обратной матрицы — дело нелегкое; к счастью, в Excel есть функция МОБР (MInverse), которая делает всю работу за нас. Пример ее применения показан ниже.

|    | A                                                                 | B        | C            | D           | E | F                                 | G       | H       | I       |
|----|-------------------------------------------------------------------|----------|--------------|-------------|---|-----------------------------------|---------|---------|---------|
| 1  | <b>ОБРАЩЕНИЕ МАТРИЦ</b>                                           |          |              |             |   |                                   |         |         |         |
| 2  |                                                                   |          |              |             |   |                                   |         |         |         |
| 3  | Матрица A                                                         |          |              |             |   | Обратная к A: функция МОБР(A4:D7) |         |         |         |
| 4  | 1                                                                 | -9       | 16           | 1           |   | -0,0217                           | 1,8913  | 0,5362  | -1,1449 |
| 5  | 3                                                                 | 3        | 2            | 3           |   | 0,0000                            | -1,0000 | -0,1667 | 0,6667  |
| 6  | 2                                                                 | 4        | 0            | -2          |   | 0,0652                            | -0,6739 | -0,1087 | 0,4348  |
| 7  | 5                                                                 | 7        | 3            | 4           |   | -0,0217                           | -0,1087 | -0,2971 | 0,1884  |
| 8  |                                                                   |          |              |             |   |                                   |         |         |         |
| 9  | <b>Контроль обращения</b>                                         |          |              |             |   |                                   |         |         |         |
| 10 | Умножаем A на обр. A: ячейки содержат функцию МУМНОЖ(A4:D7,F4:I7) |          |              |             |   |                                   |         |         |         |
| 11 | 1                                                                 | 1,07E-15 | -2,22045E-16 | -9,4369E-16 |   |                                   |         |         |         |
| 12 | 0                                                                 | 1        | -1,11022E-16 | 2,22045E-16 |   |                                   |         |         |         |
| 13 | 6,94E-18                                                          | 8,33E-17 | 1            | 5,55112E-16 |   |                                   |         |         |         |
| 14 | 1,39E-17                                                          | 1,17E-15 | -4,44089E-16 | 1           |   |                                   |         |         |         |

Как показано в таблице, с помощью функции МУМНОЖ можно проверить, что произведение исходной и обратной матриц действительно дает единичную матрицу (выражения наподобие  $1,07E-15$  обозначают  $1,07 \cdot 10^{-15}$ , что фактически равняется нулю).

Квадратная матрица, имеющая обратную, называется *невырожденной*. Условия невырожденности матрицы **A** размерности  $n$  формулируются следующим образом. Можно показать, что  $A = [a_{ij}]$  невырождена тогда и только тогда, когда единственным решением системы уравнений

$$\sum_i a_{ij}x_i = 0, j = 1, \dots, n,$$

является нулевой вектор  $x_i = 0, i = 1, \dots, n$ .

Обращение матрицы — это непростая математическая задача. Если существует решение показанной выше системы в виде вектора **X**, компоненты которого практически равны нулю, то соответствующая матрица называется *плохо обусловленной*, и для нее бывает очень трудно найти точную обратную матрицу.

## 27.4. Решение систем линейных уравнений

Система из  $n$  линейных уравнений с  $m$  неизвестными записывается в общем виде таким образом:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m &= y_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m &= y_n \end{aligned}$$

Обозначив матрицу коэффициентов как  $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ , вектор-столбец неизвестных —  $\mathbf{X} = [x_j]$ , а вектор-столбец правой части —  $\mathbf{Y} = [y_j]$ , можно переписать эту систему в матричной форме как  $\mathbf{AX} = \mathbf{Y}$ .

Не всякая система линейных уравнений имеет решение, к тому же не всякое существующее решение бывает единственным. Однако известно, что система  $\mathbf{AX} = \mathbf{Y}$  *всегда* имеет единственное решение, если ее матрица  $\mathbf{A}$  — квадратная и невырожденная. В этом случае решение можно получить, домножив обе части системы в ее матричном виде  $\mathbf{AX} = \mathbf{Y}$  слева на матрицу, обратную к  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{AX} = \mathbf{Y} \Rightarrow \mathbf{A}^{-1}\mathbf{AX} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Y} \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Y}.$$

Приведем пример такого расчета. Предположим, нужно решить следующую систему уравнений размерности  $3 \times 3$ :

$$3x_1 + 4x_2 + 66x_3 = 16$$

$$-33x_2 + x_3 = 77$$

$$42x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12$$

Запишем и решим эту систему в Excel так, как показано ниже.

|    | A                                | B  | C   | D                    | E                          | F  | G                           |
|----|----------------------------------|----|-----|----------------------|----------------------------|----|-----------------------------|
| 1  | <b>РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ</b> |    |     |                      |                            |    |                             |
| 2  |                                  |    |     |                      |                            |    |                             |
| 3  |                                  |    |     |                      | Вектор-                    |    | Решение                     |
| 4  | Матрица коэффициентов A          |    |     |                      | столбец Y                  |    | $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{Y}$ |
| 5  |                                  | 3  | 4   | 66                   |                            | 16 | 0,4343                      |
| 6  |                                  | 0  | -33 | 1                    |                            | 77 | -2,3223                     |
| 7  |                                  | 42 | 3   | 2                    |                            | 12 | 0,3634                      |
| 8  |                                  |    |     |                      |                            |    |                             |
| 9  |                                  |    |     |                      | =МУМНОЖ(МОБР(A5:C7),E5:E7) |    |                             |
| 10 |                                  |    |     |                      |                            |    |                             |
| 11 |                                  |    |     |                      |                            |    |                             |
| 12 | Контроль правильности решения    |    |     |                      |                            |    |                             |
| 13 |                                  |    | 16  |                      |                            |    |                             |
| 14 |                                  |    | 77  | Используется функция |                            |    |                             |
| 15 |                                  |    | 12  | =МУМНОЖ(A5:C7,G5:G7) |                            |    |                             |
| 16 |                                  |    |     |                      |                            |    |                             |

В ячейках B13:B15 выполняется проверка, действительно ли получено правильное решение системы. Для этого матрица  $\mathbf{A}$  умножается на вектор-столбец G5:G7.

## Упражнения

1. Выполните следующие матричные операции с помощью Excel:

а)  $\begin{bmatrix} 2 & 12 & 6 \\ 4 & 8 & 7 \\ 1 & 0 & -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 8 & 0 & -23 \\ 1 & 7 & 3 \end{bmatrix};$

б)  $\begin{bmatrix} 2 & -9 \\ 5 & 0 \\ 6 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix};$



$$\text{в) } \begin{bmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 4 & 8 & 7 \\ 1 & 0 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 8 & 0 & -2 \\ 1 & 7 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Найдите матрицы, обратные к следующим:

$$\text{а) } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 & 9 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 7 \\ 5 & -2 & 1 & 6 \end{bmatrix};$$

$$\text{б) } \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 3 \\ 7 & 4 & 3 \end{bmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{bmatrix} 20 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & 10 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 40 & 9 \\ -3 & -2 & 9 & 33 \end{bmatrix}.$$

3. Решите систему уравнений  $\mathbf{AX} = \mathbf{Y}$ , где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 13 & -8 & -3 \\ -8 & 10 & -1 \\ -3 & -1 & 11 \end{bmatrix}, \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 20 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

4. Плохо обусловленной матрицей называется такая матрица, которая “почти не имеет” обратной. Характерным примером является набор так называемых гильбертовых матриц;  $n$ -мерная гильбертова матрица выглядит следующим образом:

$$\mathbf{H}_n = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & \dots & 1/n \\ 1/2 & 1/3 & \dots & 1/(n-1) \\ \vdots & & & \\ 1/n & 1/(n+1) & \dots & 1/(2n-1) \end{bmatrix}.$$

а) Найдите обратные матрицы для  $\mathbf{H}_2$ ,  $\mathbf{H}_3$  и  $\mathbf{H}_8$ .

б) Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\mathbf{H}_n \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 1/2 + \dots + 1/n \\ 1/2 + 1/3 + \dots + 1/(n+1) \\ \vdots \\ 1/n + 1/(n+1) + \dots + 1/(2n-1) \end{bmatrix}.$$

Найдите ее решение путем подбора.

в) А теперь решите систему  $\mathbf{H}_n \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Y}$  для  $n = 2, 8, 14$ . Как вы можете объяснить разницу?



## 28 Метод Гаусса–Зейделя

### 28.1. Введение

Многие системы уравнений можно решить *итерационными методами*. Общая схема этих методов такова, что решение одного уравнения последовательно подставляется в следующее, пока не будет получено решение, общее для всей системы. Итерационный метод *Гаусса–Зейделя* часто показывает свою эффективность при решении сложных систем уравнений. В главе 3 он использовался для решения задач по гипотетической финансовой ведомости предприятия (конечно, всю вычислительную работу проделывает за нас Excel).

### 28.2. Простой пример

Предположим, необходимо решить следующую систему уравнений:

$$2x + 3y = 10$$

$$x - 4y = 2$$

Решение первого уравнения относительно  $x$  дает  $x = (10 - 3y)/2$ , а из второго уравнения получаем  $y = (x - 2)/4$ . Чтобы запустить метод Гаусса–Зейделя, нужно установить некоторое начальное значение для  $y$ ; например,  $y$  можно сделать равным 0. Если  $y = 0$ , то  $x = (10 - 3 \cdot 0)/2 = 5$ . Но если  $x = 5$ , то  $y = (x - 2)/4 = (5 - 2)/4 = 0,75$ . Продолжая процесс, мы в конце концов обнаружим, что значения  $x$  и  $y$  сходятся к общему для двух уравнений решению. Вот как эту задачу можно записать и решить в Excel.

|    | A                                             | B | C           | D        | E        | F | G | H              |
|----|-----------------------------------------------|---|-------------|----------|----------|---|---|----------------|
| 1  | МЕТОД ГАУССА-ЗЕЙДЕЛЯ–ИТЕРАЦИОННАЯ ПОДСТАНОВКА |   |             |          |          |   |   |                |
| 2  |                                               |   |             |          |          |   |   |                |
| 3  |                                               |   |             | y        | x        |   |   |                |
| 4  |                                               |   |             | 0        | 5        |   |   |                |
| 5  |                                               |   | $=(E4-2)/4$ | 0,75     | 3,875    |   |   | $=(10-3*D5)/2$ |
| 6  |                                               |   |             | 0,46875  | 4,296875 |   |   |                |
| 7  |                                               |   |             | 0,574219 | 4,138672 |   |   |                |
| 8  |                                               |   |             | 0,534668 | 4,197998 |   |   |                |
| 9  |                                               |   |             | 0,5495   | 4,175751 |   |   |                |
| 10 |                                               |   |             | 0,543938 | 4,184093 |   |   |                |
| 11 |                                               |   |             | 0,546023 | 4,180965 |   |   |                |
| 12 |                                               |   |             | 0,545241 | 4,182138 |   |   |                |
| 13 |                                               |   |             | 0,545535 | 4,181698 |   |   |                |
| 14 |                                               |   |             | 0,545425 | 4,181863 |   |   |                |
| 15 |                                               |   |             | 0,545466 | 4,181801 |   |   |                |

Как видите, значения неизвестных сходятся. Сам способ перестройки системы и последовательного вычисления значений создает условия для сходимости промежуточных значений к решению.

### 28.3. Строгое решение

Более точный и строгий метод решения той же задачи — это создание такой таблицы, как показано ниже.

|   | A                     | B  | C | D                                | E | F |
|---|-----------------------|----|---|----------------------------------|---|---|
| 1 | МЕТОД ГАУССА--ЗЕЙДЕЛЯ |    |   |                                  |   |   |
| 2 |                       |    |   |                                  |   |   |
| 3 | Маркер                | 4  |   | =ЕСЛИ(маркер<>0, маркер*(х-2)/4) |   |   |
| 4 | y                     | 4  |   |                                  |   |   |
| 5 | x                     | -1 |   |                                  |   |   |
| 6 |                       |    |   |                                  |   |   |
| 7 |                       |    |   | =(10-3*y)/2                      |   |   |
| 8 |                       |    |   |                                  |   |   |

В ячейке B3 установлено значение “маркера”, переменная  $x$  вычисляется в ячейке B5, а переменная  $y$  — в ячейке B4. Формула для  $y$  гласит, что если маркер не равен нулю, то  $y = (x - 2)/4$ . Формула для  $x$  очевидна.

Как работает этот метод? Если сделать маркер не равным нулю, то, как это показано на рисунке выше,  $x = 4$ , а  $y = -1$ . Как только маркер устанавливается равным нулю, запускается итерационный процесс, и если решение существует, то Excel его найдет<sup>1</sup>. Решение задачи приведено ниже.

|   | A                     | B        | C | D                                | E | F |
|---|-----------------------|----------|---|----------------------------------|---|---|
| 1 | МЕТОД ГАУССА--ЗЕЙДЕЛЯ |          |   |                                  |   |   |
| 2 |                       |          |   |                                  |   |   |
| 3 | Маркер                | 0        |   | =ЕСЛИ(маркер<>0, маркер*(х-2)/4) |   |   |
| 4 | y                     | 0,545383 |   |                                  |   |   |
| 5 | x                     | 4,181925 |   |                                  |   |   |
| 6 |                       |          |   |                                  |   |   |
| 7 |                       |          |   | =(10-3*y)/2                      |   |   |
| 8 |                       |          |   |                                  |   |   |

### 28.4. Заключение

Метод Гаусса–Зейделя — не самый удобный метод решения систем уравнений. Он не всегда сходится к решению, и его сходимость может зависеть от того, вычисляется ли первым  $x$  или  $y$ . Преимущество же метода состоит в том, что его математический смысл во многом совпадает со смыслом и способом построения наших финансовых моделей, в которых мы просто составляем соотношения между переменными, не беспокоясь о способе их нахождения. Если в модели наблюдается сходимость, значит, решение существует. Модели из глав 3 и 4 являются хорошими примерами, демонстрирующими потенциальные возможности метода Гаусса–Зейделя.

<sup>1</sup> Чтобы обеспечить пересчет листа, следует выбрать команду Сервис⇒Параметры⇒Вычисления (Tools⇒Options⇒Calculation) и установить флажок Итерации (Iteration). Подробнее об этом см. в разделе 3.2.

---

**Упражнение**

Решите следующую систему методом Гаусса–Зейделя:

$$13x - 8y - 3z = 20$$

$$-8x + 10y - z = -5$$

$$-3x - y + 11z = 0$$

Возможно, чтобы получить решение, вам придется несколько раз нажать клавишу <F9> для пересчета листа. Как только числа на экране перестанут изменяться, решение получено.



---

# 29 Функции Excel

---

## 29.1. Введение

В рабочем арсенале Excel имеется несколько сотен функций. В разделах 29.2–29.6 дается обзор функций, используемых в этой книге, а в разделе 29.7 упоминается еще ряд функций, которые могут оказаться полезными.

- В разделе 29.2 рассматриваются некоторые финансовые функции Excel. Многие из них уже встречались в главе 1.
- В разделе 29.3 обсуждаются функции для работы с массивами. Они используются особенно широко в главах, посвященных моделированию портфелей ценных бумаг (см. главы 7–12).
- В разделе 29.4 дается обзор некоторых статистических функций.
- В разделе 29.5 показано, как работать с регрессией в Excel. Регрессия используется в главах 2, 10 и 22.
- В разделе 29.6 рассматриваются три условные функции Excel.
- В разделе 29.7 приводится пример работы с функциями ранжирования.

---

## 29.2. Финансовые функции

### 29.2.1. ЧПС()

Определение функции расчета чистой приведенной стоимости ЧПС (англ. NPV) в Excel несколько отличается от стандартного определения в литературе по финансам. Согласно стандартному определению, чистая приведенная стоимость (*net present value*) ряда потоков денежных средств  $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$ , со ставкой дисконтирования  $r$  определяется выражением

$$\sum_{t=0}^n \frac{C_t}{(1+r)^t} \text{ или } C_0 + \sum_{t=0}^n \frac{C_t}{(1+r)^t}.$$

Во многих случаях величина  $C_0$  представляет стоимость приобретенных активов, а потому является отрицательной.

В определении ЧПС в среде Excel всегда предполагается, что первое движение средств происходит после первого финансового периода. Поэтому пользователь, который хочет рассчитать ЧПС по стандартному определению, должен вычислить величину ЧПС( $r, \{C_1, \dots, C_n\} + C_0$ ). Пример такого расчета приведен ниже.

|   | A                          | B       | C                  | D  | E  | F  | G  |
|---|----------------------------|---------|--------------------|----|----|----|----|
| 1 | <b>ФУНКЦИЯ ЧПС В EXCEL</b> |         |                    |    |    |    |    |
| 2 |                            |         |                    |    |    |    |    |
| 3 | Ставка дисконт.            | 10%     |                    |    |    |    |    |
| 4 | Год                        | 0       | 1                  | 2  | 3  | 4  | 5  |
| 5 | Движение средств           | -100    | 35                 | 33 | 34 | 25 | 16 |
| 6 |                            |         |                    |    |    |    |    |
| 7 | ЧПС                        | \$11,65 | <-- =ЧПС(B3:G5)+B5 |    |    |    |    |

### 29.2.2. ВСД()

*Внутренняя ставка доходности (internal rate of return — IRR)* ряда потоков денежных средств  $C_0, C_1, C_2, \dots, C_n$  по определению является такой процентной ставкой  $r$ , что соответствующая чистая приведенная стоимость этого ряда равна нулю:

$$\sum_{t=0}^n \frac{C_t}{(1+r)^t} = 0.$$

В синтаксисе Excel функция ВСД() (англ. IRR) записывается так: ВСД(*денежные поступления; начальное приближение*). Здесь *денежные поступления* представляют весь ряд потоков денежных средств, включая первое  $C_0$ , а *начальное приближение* — это отправная точка алгоритма, вычисляющего ВСД.

Вначале рассмотрим простой пример с потоками, заданными ранее. Обратите внимание, что если значение ВСД единственно, то в начальном приближении нет необходимости (см. ячейку B14).

|    | A                          | B      | C                   | D  | E  | F  | G  |
|----|----------------------------|--------|---------------------|----|----|----|----|
| 9  | <b>ФУНКЦИЯ ВСД В EXCEL</b> |        |                     |    |    |    |    |
| 10 | Год                        | 0      | 1                   | 2  | 3  | 4  | 5  |
| 11 | Движение средств           | -100   | 35                  | 33 | 34 | 25 | 16 |
| 12 |                            |        |                     |    |    |    |    |
| 13 | ВСД                        | 15,00% | <-- =ВСД(B11:G11,0) |    |    |    |    |
| 14 |                            | 15,00% | <-- =ВСД(B11:G11)   |    |    |    |    |

Выбор начального приближения имеет большое значение, если ВСД вычисляется неоднозначно, т.е. существует несколько ее значений. Рассмотрим ряд денежных поступлений.

|    | A                         | B   | C        | D                    | E | F | G | H |
|----|---------------------------|-----|----------|----------------------|---|---|---|---|
| 1  | <b>НЕЕДИНСТВЕННАЯ ВСД</b> |     |          |                      |   |   |   |   |
| 2  |                           |     |          |                      |   |   |   |   |
| 3  |                           |     | Движение |                      |   |   |   |   |
| 4  |                           | Год | средств  |                      |   |   |   |   |
| 5  |                           | 0   | -11 000  |                      |   |   |   |   |
| 6  |                           | 1   | 15 000   |                      |   |   |   |   |
| 7  |                           | 2   | 15 000   |                      |   |   |   |   |
| 8  |                           | 3   | 15 000   |                      |   |   |   |   |
| 9  |                           | 4   | 15 000   |                      |   |   |   |   |
| 10 |                           | 5   | 15 000   |                      |   |   |   |   |
| 11 |                           | 6   | 15 000   |                      |   |   |   |   |
| 12 |                           | 7   | 15 000   |                      |   |   |   |   |
| 13 |                           | 8   | 15 000   |                      |   |   |   |   |
| 14 |                           | 9   | 15 000   |                      |   |   |   |   |
| 15 |                           | 10  | -135 000 |                      |   |   |   |   |
| 16 |                           |     |          |                      |   |   |   |   |
| 17 |                           | ВСД | 1,86%    | <-- =ВСД(C5:C15,0.1) |   |   |   |   |
| 18 |                           | ВСД | 135,99%  | <-- =ВСД(C5:C15,2)   |   |   |   |   |





График (построенный на основе таблицы данных, не показанной на рисунке) отчетливо показывает существование двух значений ВСД для заданных условий задачи, поскольку кривая ЧПС пересекает ось  $x$  дважды. Для нахождения обоих ВСД следует изменить начальное приближение (хотя точное его значение по-прежнему не играет особой роли). В примере, приведенном ниже, мы изменили оба начальных приближения и получили те же ответы.

|    | В   | С       | Д   | Е                |
|----|-----|---------|-----|------------------|
| 17 | ВСД | 1.86%   | <-- | =ВСД(С5:С15,0,1) |
| 18 | ВСД | 135.99% | <-- | =ВСД(С5:С15,0,8) |

*Примечание.* Заданный ряд движений денежных средств имеет более одной внутренней ставки доходности в том случае, если знак движений изменяется более одного раза. В предыдущем примере первоначальное движение средств имеет знак “минус”, а  $ДС_1 - ДС_9$  — знак “плюс”; это уже одна смена знака. Затем  $ДС_{10}$  снова отрицательно, что дает вторую смену знака. Если есть подозрение, что ряд движений средств имеет не одну внутреннюю ставку доходности, первым делом нужно построить график ЧПС в Excel, как это сделано на приведенном выше рисунке. Количество пересечений оси  $x$  графиком ЧПС соответствует количеству значений ВСД. С графика можно также взять их приближенные значения.

### 29.2.3. ПС()

Функция ПС (англ. PV) вычисляет приведенную стоимость ренты или аннуитета (ряда фиксированных периодических выплат или поступлений). Соответствующий пример приведен ниже.

|   | А                               | В        | С   | Д             |
|---|---------------------------------|----------|-----|---------------|
| 1 | <b>ФУНКЦИЯ ПС</b>               |          |     |               |
| 2 |                                 |          |     |               |
| 3 | <b>Выплаты в конце периодов</b> |          |     |               |
| 4 | Процентная ставка               | 10%      |     |               |
| 5 | Кол-во периодов                 | 10       |     |               |
| 6 | Выплата                         | 100      |     |               |
| 7 | Приведенная стоимость           | (614.46) | <-- | =ПС(В4,В5,В6) |

Таким образом,  $\$614,46 = \sum_{t=1}^{10} \frac{100}{(1,10)^t}$ . В связи с функцией ПС() рекомендуется иметь в виду следующее.

- В записи ПС(В4;В5;В6) подразумевается, что выплаты производятся по датам 1, 2, ..., 10. Если же на самом деле выплаты следуют графику 0, 1, 2, ..., 9, то следует записать так, как показано ниже.

|    | А                                | В        | С   | Д                  | Е |
|----|----------------------------------|----------|-----|--------------------|---|
| 10 | <b>Выплаты в начале периодов</b> |          |     |                    |   |
| 11 | Процентная ставка                | 10%      |     |                    |   |
| 12 | Кол-во периодов                  | 10       |     |                    |   |
| 13 | Выплата                          | 100      |     |                    |   |
| 14 | Приведенная стоимость            | (675.90) | <-- | =ПС(В11,В12,В13,1) |   |

- Функция ПС() (как и ПЛТ()), рассматриваемая в следующем разделе) дает отрицательный ответ, что несколько раздражает. В этом есть своя логика, но объяснять ее сейчас ни к чему. Решение проблемы очевидно: следует либо писать -ПС(В4;В5;В6), либо сделать объем выплаты отрицательным: ПС(В4;В5;-В6).

## 29.2.4. ПЛТ()

Функция ПЛТ (англ. PMT) вычисляет объем постоянной периодической выплаты для возврата займа за фиксированное количество периодов. Например, первый расчет в следующей далее таблице показывает, что для возвращения займа в 1000 долл. в течение десяти лет при процентной ставке 8% требуется ежегодно выплачивать по 149,03 долл. в качестве процентов и возврата основной суммы. Выполняемый расчет представляет собой решение следующего уравнения:

$$\sum_{t=1}^n \frac{X}{(1+r)^t} = \text{Первоначальная сумма займа.}$$

|    | A                  | B                                | C        | D                        | E | F |
|----|--------------------|----------------------------------|----------|--------------------------|---|---|
| 1  | <b>ФУНКЦИЯ ПЛТ</b> |                                  |          |                          |   |   |
| 2  |                    |                                  |          |                          |   |   |
| 3  |                    | <b>Выплаты в конце периодов</b>  |          |                          |   |   |
| 4  |                    | Процентная ставка                | 8%       |                          |   |   |
| 5  |                    | Кол-во периодов                  | 10       |                          |   |   |
| 6  |                    | Основная сумма                   | 1000     |                          |   |   |
| 7  |                    | Сумма выплаты                    | (149,03) | <-- =ПЛТ(C4,C5,C6)       |   |   |
| 8  |                    |                                  |          |                          |   |   |
| 9  |                    |                                  |          |                          |   |   |
| 10 |                    | <b>Выплаты в начале периодов</b> |          |                          |   |   |
| 11 |                    | Процентная ставка                | 8%       |                          |   |   |
| 12 |                    | Кол-во периодов                  | 10       |                          |   |   |
| 13 |                    | Основная сумма                   | 1000     |                          |   |   |
| 14 |                    | Сумма выплаты                    | (137,99) | <-- =ПЛТ(C11,C12,C13,,1) |   |   |

С помощью функции ПЛТ() можно обсчитывать таблицы возврата средств по займам. Эти таблицы, подробно рассмотренные в главе 1, показывают разбиение каждой выплаты на проценты и выплату основной суммы долга. В каждом периоде выплаты по займу (рассчитанные с помощью функции ПЛТ()) разбиваются следующим образом.

- Вначале вычисляются проценты, причитающиеся за данный период по основной сумме долга, оставшейся на начало периода. В следующей таблице в конце 1-го года мы должны 80 долл. (8% от 1000 долл.) процентов от основной суммы, оставшейся на начало 1-го года.
- Остальная часть платежа (в 1-м году это 69,03 долл.) используется для возврата основной суммы.

|    | A                               | B                         | C              | D                           | E                        |
|----|---------------------------------|---------------------------|----------------|-----------------------------|--------------------------|
| 1  | <b>Таблица возврата средств</b> |                           |                |                             |                          |
| 2  |                                 |                           |                |                             |                          |
| 3  |                                 | Процентная ставка         | 8%             |                             |                          |
| 4  |                                 | Кол-во периодов           | 10             |                             |                          |
| 5  |                                 | Основная сумма            | 1 000          |                             |                          |
| 6  |                                 | Ежегодная выплата         | 149,03         | <-- =ПЛТ(B3,B4,B5)          |                          |
| 7  |                                 |                           |                |                             |                          |
| 8  |                                 | <b>Осн.сумма в начале</b> |                | <b>Распределение выплат</b> |                          |
| 9  |                                 |                           |                |                             |                          |
| 10 | <b>Год</b>                      | <b>года</b>               | <b>Выплата</b> | <b>Проценты</b>             | <b>Возврат осн.суммы</b> |
| 11 | 1                               | 1 000,00                  | 149,03         | 80,00                       | 69,03                    |
| 12 | 2                               | 930,97                    | 149,03         | 74,48                       | 74,55                    |
| 13 | 3                               | 856,42                    | 149,03         | 68,51                       | 80,52                    |
| 14 | 4                               | 775,90                    | 149,03         | 62,07                       | 86,96                    |
| 15 | 5                               | 688,95                    | 149,03         | 55,12                       | 93,91                    |
| 16 | 6                               | 595,03                    | 149,03         | 47,60                       | 101,43                   |
| 17 | 7                               | 493,60                    | 149,03         | 39,49                       | 109,54                   |
| 18 | 8                               | 384,06                    | 149,03         | 30,73                       | 118,30                   |
| 19 | 9                               | 265,76                    | 149,03         | 21,26                       | 127,77                   |
| 20 | 10                              | 137,99                    | 149,03         | 11,04                       | 137,99                   |

Обратите внимание, что в конце десятилетнего срока объем выплаты по основной сумме в точности совпадает с основной суммой на начало 10-го года, т.е. заем выплачивается полностью.

### 29.3. Функции для работы с массивами

Функции для работы с массивами — это специальные средства Excel, используемые для операций над матрицами и векторами (сплошными прямоугольными областями ячеек). В этом разделе мы рассмотрим функции ТРАНСП (Transpose), МУМНОЖ (MMult), МОБР (MInverse) и ЧАСТОТА (Frequency).

Предположим, необходимо вычислить обратную матрицу к матрице размера  $4 \times 2$  (4 строки и 2 столбца), записанную в ячейках В4:С7 листа электронной таблицы.

|   | A                          | B                | C  | D |
|---|----------------------------|------------------|----|---|
| 1 | ФУНКЦИИ РАБОТЫ С МАССИВАМИ |                  |    |   |
| 2 |                            |                  |    |   |
| 3 |                            | Исходная матрица |    |   |
| 4 |                            | 3                | 2  |   |
| 5 |                            | 1                | -9 |   |
| 6 |                            | 5                | 7  |   |
| 7 |                            | 2                | 19 |   |

В Excel для этой цели есть функция ТРАНСП (Transpose), однако ее использование, как и всех функций работы с массивами, требует осторожности.

- Вначале выделите блок ячеек Е4:Н5, в который должна помещаться транспонированная матрица. Конечно, для этой цели можно пользоваться обычными приемами работы в Excel (указывая диапазоны мышью или вводя имена с клавиатуры).
- Введите =ТРАНСП(В4:С7). Введенный текст появится в левом верхнем углу выделенного блока ячеек. В этот момент лист будет выглядеть так, как показано ниже.

| ИНДЕКС | A                          | B                | C  | D | E                         | F | G | H |
|--------|----------------------------|------------------|----|---|---------------------------|---|---|---|
| 1      | ФУНКЦИИ РАБОТЫ С МАССИВАМИ |                  |    |   |                           |   |   |   |
| 2      |                            |                  |    |   |                           |   |   |   |
| 3      |                            | Исходная матрица |    |   | Транспонированная матрица |   |   |   |
| 4      |                            | 3                | 2  |   | =ТРАНСП(В4:С7)            |   |   |   |
| 5      |                            | 1                | -9 |   |                           |   |   |   |
| 6      |                            | 5                | 7  |   |                           |   |   |   |
| 7      |                            | 2                | 19 |   |                           |   |   |   |

- Закончив ввод формулы, *не нажимайте клавишу <Enter>!* Вместо нее следует нажать комбинацию клавиш <Ctrl+Shift+Enter>. В результате формула (с использованием матричной функции) будет введена во все ячейки, входящие в блок. Вот что получится в результате.

|   | A                          | B                | C | D  | E                         | F  | G | H  |
|---|----------------------------|------------------|---|----|---------------------------|----|---|----|
| 1 | ФУНКЦИИ РАБОТЫ С МАССИВАМИ |                  |   |    |                           |    |   |    |
| 2 |                            |                  |   |    |                           |    |   |    |
| 3 |                            | Исходная матрица |   |    | Транспонированная матрица |    |   |    |
| 4 |                            |                  | 3 | 2  | 3                         | 1  | 5 | 2  |
| 5 |                            |                  | 1 | -9 | 2                         | -9 | 7 | 19 |
| 6 |                            |                  | 5 | 7  |                           |    |   |    |
| 7 |                            |                  | 2 | 19 |                           |    |   |    |

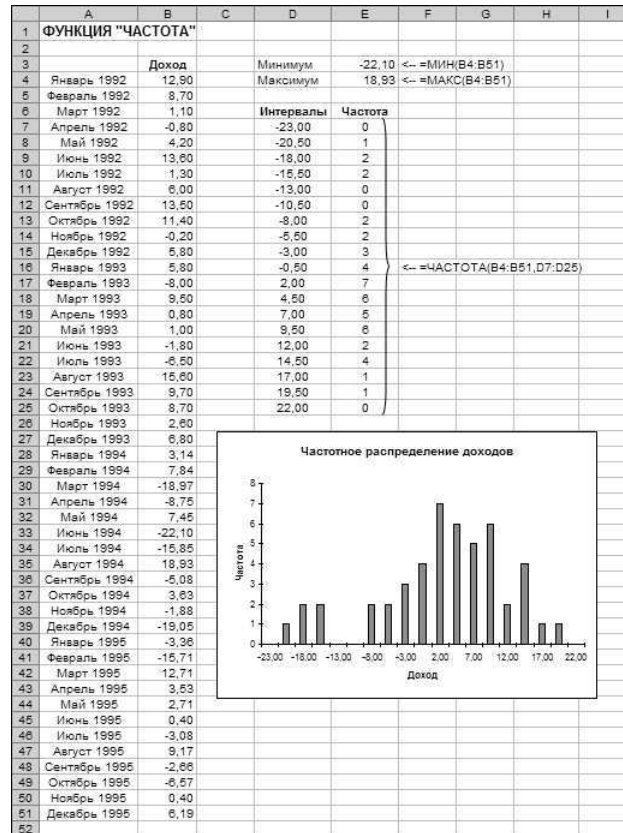
Кроме функции ТРАНСП, в этой книге используются также матричные функции, описанные ниже.

- МУМНОЖ(массив1;массив2) умножает матрицу в блоке ячеек массив1 на матрицу массив2. Конечно, эта функция работает только в том случае, если количество столбцов в матрице массив1 совпадает с количеством строк в матрице массив2. (Ее название в английской версии Excel — Mmult.)
- МОБР(массив) вычисляет матрицу, обратную к записанной в блоке ячеек массив. Блок массив должен быть квадратным. (Название функции в английской версии Excel — Minverse.)

Иллюстрации к применению этих функций см. в главе 27.

### 29.3.1. ЧАСТОТА()

Функция Excel ЧАСТОТА(массив\_данных; массив\_интервалов) позволяет получить частотное распределение набора числовых данных. В приведенной далее таблице показаны данные о ежемесячных доходах с некоего финансового актива в течение четырех лет. В столбце D расставлены интервалы, причем так, чтобы первый интервал находился *ниже* минимального месячного дохода за весь период, а последний — *выше* максимального. Диапазон ячеек E7:E25 содержит функцию ЧАСТОТА(B4:B51;D7:D25). Из результатов работы этой функции можно увидеть, например, что за четырехлетний период было зафиксировано три ежемесячных дохода в диапазоне  $-5,5$ — $-3\%$ , а также шесть доходов между 7 и 9,5%.



В английской версии Excel эта функция называется Frequency.

### 29.3.2. ИНДЕКС()

Иногда необходимо извлечь из массива отдельное число. В следующем примере блок ячеек B3:D5 содержит имена и числа вперемешку. Для извлечения из этого блока отдельного элемента мы используем функцию =ИНДЕКС(B3:D5;номер\_строки;номер\_столбца), где номера строки и столбца указываются относительно самого блока. Таким образом, имя "Хауи" стоит во 2-й строке и 3-м столбце диапазона B3:D5.

|   | A                           | B      | C                      | D    | E |
|---|-----------------------------|--------|------------------------|------|---|
| 1 | ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИИ "ИНДЕКС" |        |                        |      |   |
| 2 |                             |        |                        |      |   |
| 3 |                             | a      | b                      | 3    |   |
| 4 |                             | Саймон | 6                      | Хауи |   |
| 5 |                             | q      | 7                      | Джек |   |
| 6 |                             |        |                        |      |   |
| 7 |                             | Хауи   | <-- =ИНДЕКС(B3:D5,2,3) |      |   |

В разделе 29.5.2 функция ИНДЕКС будет использоваться для выбора отдельного элемента из массива ЛИНЕЙН. Аналогичное применение встречается также в разделе 20.3.

## 29.4. Статистические функции

В программе Excel имеется большое количество статистических функций. Их применение иллюстрируется следующей таблицей с набором данных.

|    | A                                          | B          | C        | D        | E                            | F | G |
|----|--------------------------------------------|------------|----------|----------|------------------------------|---|---|
| 1  | <b>ОСНОВНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ</b>     |            |          |          |                              |   |   |
| 2  |                                            |            |          |          |                              |   |   |
| 3  |                                            | Наблюдения | X        | Y        |                              |   |   |
| 4  |                                            | 1          | 35,3     | 10,98    |                              |   |   |
| 5  |                                            | 2          | 29,7     | 11,13    |                              |   |   |
| 6  |                                            | 3          | 30,8     | 12,51    |                              |   |   |
| 7  |                                            | 4          | 58,8     | 8,4      |                              |   |   |
| 8  |                                            | 5          | 61,4     | 9,27     |                              |   |   |
| 9  |                                            | 6          | 71,3     | 8,73     |                              |   |   |
| 10 |                                            | 7          | 74,4     | 6,36     |                              |   |   |
| 11 |                                            | 8          | 76,7     | 8,5      |                              |   |   |
| 12 |                                            | 9          | 70,7     | 7,82     |                              |   |   |
| 13 |                                            | 10         | 57,5     | 9,14     |                              |   |   |
| 14 |                                            |            |          |          |                              |   |   |
| 15 | Среднее                                    |            | 56,6600  | 9,2840   | <-- =СРЗНАЧ(D4:D13)          |   |   |
| 16 | Дисперсия выборки                          |            | 334,1493 | 3,2342   | <-- =ДИСП(D4:D13)            |   |   |
| 17 | Дисперсия генеральной совокупности         |            | 300,7344 | 2,9108   | <-- =ДИСПР(D4:D13)           |   |   |
| 18 | Станд. отклонение выборки                  |            | 18,2798  | 1,7984   | <-- =СТАНДОТКЛОН(D4:D13)     |   |   |
| 19 | Станд. отклонение генеральной совокупности |            | 17,3417  | 1,7061   | <-- =СТАНДОТКЛОНП(D4:D13)    |   |   |
| 20 |                                            |            |          |          |                              |   |   |
| 21 | Корреляция                                 |            |          | -0,9049  | <-- =КОРРЕЛ(D4:D13,C4:C13)   |   |   |
| 22 | Ковариация                                 |            |          | -26,7746 | <-- =КОВАР(D4:D13,C4:C13)    |   |   |
| 23 |                                            |            |          |          |                              |   |   |
| 24 | Отрезок регрессии                          |            |          | 14,3285  | <-- =ОТРЕЗОК(D4:D13,C4:C13)  |   |   |
| 25 | Наклон (угл. коэфф.) регрессии             |            |          | -0,0890  | <-- =НАКЛОН(D4:D13,C4:C13)   |   |   |
| 26 | R-квадрат регрессии                        |            |          | 0,8189   | <-- =КВПИРСОН(D4:D13,C4:C13) |   |   |

Функции ДИСП() и СТАНДОТКЛОН() вычисляют дисперсию и стандартное отклонение генеральной совокупности, тогда как ДИСП() и СТАНДОТКЛОН() — соответственно дисперсию и стандартное отклонение выборки данных. Разница между ними состоит в том, что ДИСПР подразумевает охват всей генеральной совокупности данных, и поэтому в знаменателе у нее стоит количество точек данных, тогда как при вычислении ДИСП предполагается, что данные являются выборкой из распределения<sup>1</sup>:

<sup>1</sup> В этой связи нельзя не процитировать прекрасную книгу *Numerical Recipes (Численные методы на практике)*, которую написали У.Г. Пресс (W.H. Press), Б.П. Фланнери (B.P. Flannery), С.П. Тьюкольски (S.P. Teukolsky) и У.Т. Веттерлинг (W.T. Vetterling), выпущенную в издательстве Cambridge University Press в 1986 г. “Долго объяснять, почему в знаменателе [функции дисп] стоит  $N - 1$  вместо  $N$ . Если вы никогда не слышали этого объяснения, поищите его в любом хорошем учебнике математической статистики. Здесь же мы ограничимся замечанием, что  $N - 1$  необходимо заменить на  $N$ , если приходится вычислять дисперсию распределения, среднее значение которого известно заранее, а не вычисляется по наблюдаемым данным. (Можно также заметить, что если различие между  $N$  и  $N - 1$  действительно играет большую роль, то вы занимаетесь безнадежным делом — например, пытаетесь обосновать сомнительную гипотезу на основе скудных данных.)”

$$\text{ДИСПР}(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [x_i - \text{СРЗНАЧ}(x_1, \dots, x_N)]^2,$$

$$\text{СТАНДОТКЛОНП}(x_1, \dots, x_N) = \sqrt{\text{ДИСПР}(x_1, \dots, x_N)},$$

$$\text{ДИСП}(x_1, \dots, x_N) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N [x_i - \text{СРЗНАЧ}(x_1, \dots, x_N)]^2,$$

$$\text{СТАНДОТКЛОН}(x_1, \dots, x_N) = \sqrt{\text{ДИСП}(x_1, \dots, x_N)}.$$

Пример использования этих функций приведен ниже.

|    | A                             | B        | C                                       | D   | E                |
|----|-------------------------------|----------|-----------------------------------------|-----|------------------|
| 1  | <b>СРАВНЕНИЕ ДИСП И ДИСПР</b> |          |                                         |     |                  |
| 2  |                               |          |                                         |     |                  |
| 3  | Наблюдения                    | X        | (X <sub>i</sub> - среднее) <sup>2</sup> |     |                  |
| 4  | 1                             | 35,3     | 456,2496                                | <-- | =(B4-\$B\$15)^2  |
| 5  | 2                             | 29,7     | 726,8416                                |     |                  |
| 6  | 3                             | 30,8     | 668,7396                                |     |                  |
| 7  | 4                             | 58,8     | 4,5796                                  |     |                  |
| 8  | 5                             | 61,4     | 22,4676                                 |     |                  |
| 9  | 6                             | 71,3     | 214,3296                                |     |                  |
| 10 | 7                             | 74,4     | 314,7076                                |     |                  |
| 11 | 8                             | 76,7     | 401,6016                                |     |                  |
| 12 | 9                             | 70,7     | 197,1216                                |     |                  |
| 13 | 10                            | 57,5     | 0,7056                                  |     |                  |
| 14 |                               |          |                                         |     |                  |
| 15 | Среднее                       | 56,66    |                                         |     |                  |
| 16 | ДИСП                          | 334,1493 | 334,1493                                | <-- | =СУММ(C4:C13)/9  |
| 17 | ДИСПР                         | 300,7344 | 300,7344                                | <-- | =СУММ(C4:C13)/10 |

## 29.5. Регрессия в Excel

Существует несколько способов построить среднеквадратичную регрессию (скользящее среднее) в Excel. Мы продемонстрируем два метода с использованием данных из предыдущего раздела.

В первом методе используются функции НАКЛОН (Slope), ОТРЕЗОК (Intercept) и КВПИРСОН (Rsq), которые дают необходимые параметры для простой регрессии данных в столбце D по столбцу C.

|    | A                              | B          | C       | D                            | E | F |
|----|--------------------------------|------------|---------|------------------------------|---|---|
| 1  | <b>РЕГРЕССИЯ В EXCEL</b>       |            |         |                              |   |   |
| 2  |                                |            |         |                              |   |   |
| 3  |                                | Наблюдения | X       | Y                            |   |   |
| 4  |                                | 1          | 35,3    | 10,98                        |   |   |
| 5  |                                | 2          | 29,7    | 11,13                        |   |   |
| 6  |                                | 3          | 30,8    | 12,51                        |   |   |
| 7  |                                | 4          | 58,8    | 8,4                          |   |   |
| 8  |                                | 5          | 61,4    | 9,27                         |   |   |
| 9  |                                | 6          | 71,3    | 8,73                         |   |   |
| 10 |                                | 7          | 74,4    | 6,36                         |   |   |
| 11 |                                | 8          | 76,7    | 8,5                          |   |   |
| 12 |                                | 9          | 70,7    | 7,82                         |   |   |
| 13 |                                | 10         | 57,5    | 9,14                         |   |   |
| 14 |                                |            |         |                              |   |   |
| 15 | Отрезок регрессии              |            | 14,3285 | <-- =ОТРЕЗОК(D4:D13,C4:C13)  |   |   |
| 16 | Наклон (угл. коэфф.) регрессии |            | -0,0890 | <-- =НАКЛОН(D4:D13,C4:C13)   |   |   |
| 17 | R-квадрат регрессии            |            | 0,8189  | <-- =КВПИРСОН(D4:D13,C4:C13) |   |   |

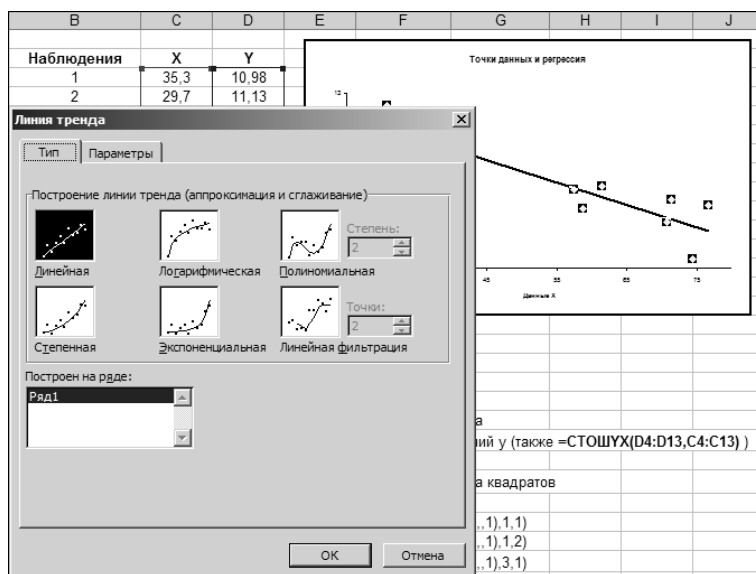
С учетом этих параметров наилучшим представлением соотношения между  $y$  и  $x$  является следующее:

$$y = 14,3285 - 0,089x.$$

Примерно 82% вариации данных объясняется этим линейным соотношением.

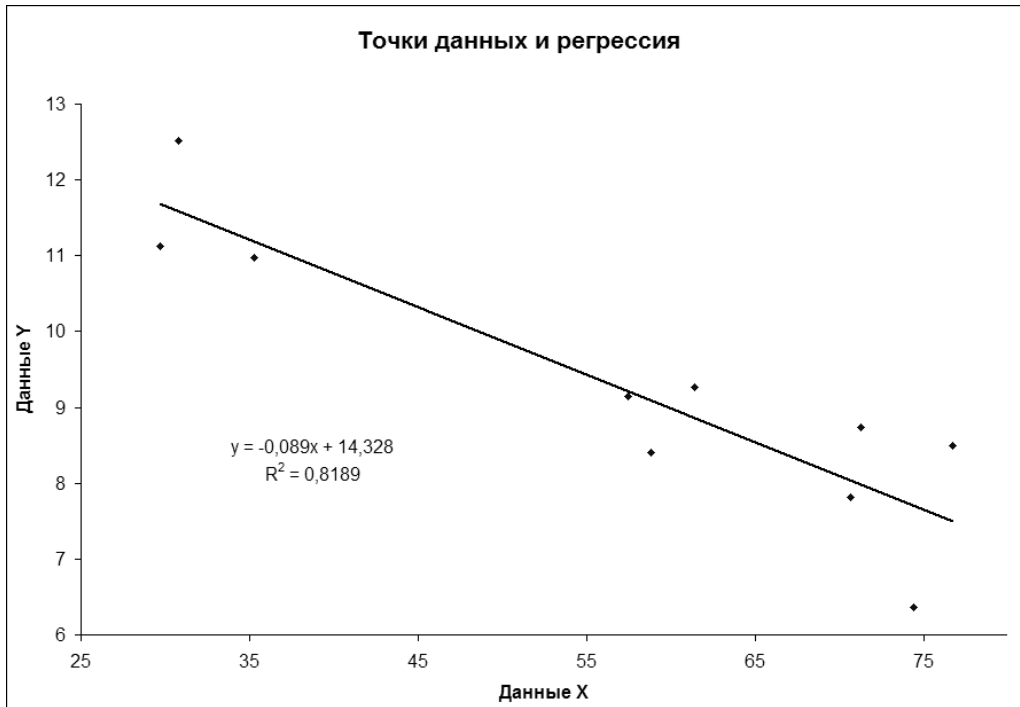
Другой способ для построения простой регрессии — это вначале построить график данных, а затем предоставить Excel вычислить коэффициенты простой среднеквадратичной регрессии.

1. Постройте график данных.
2. Щелкните на данных, чтобы выделить их, затем щелкните правой кнопкой мыши и выберите Добавить линию тренда (Insert Trendline). Когда откроется изображенное ниже окно, выберите в нем один из нескольких возможных типов регрессии.





Выбрав Линейная (Linear), получим показанный ниже график. Уравнение и величину достоверности аппроксимации  $R^2$  можно отобразить на экране, установив соответствующие флажки на вкладке Параметры (Options) данного диалогового окна.



### 29.5.1. Использование функции ЛИНЕЙН ( )

В Excel есть функция ЛИНЕЙН (Linest) для работы с массивами, результат работы которой состоит из ряда регрессионных статистик для обыкновенной средне-квадратичной регрессии<sup>2</sup>. Ниже показаны лист электронной таблицы и диалоговое окно параметров функции ЛИНЕЙН.

<sup>2</sup> В Excel есть также функция ЛГРФПРИБЛ (Logest), по синтаксису полностью совпадающая с функцией ЛИНЕЙН. С ее помощью вычисляют параметры приближения данных экспоненциальной кривой.

| В                        | С    | Д                    | Е | Ф | Г | Н | И | Ж | К | Л | М |
|--------------------------|------|----------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| <b>РЕГРЕССИЯ В EXCEL</b> |      |                      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| Наблюдения               | Х    | У                    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 1                        | 35,3 | 10,98                |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 2                        | 29,7 | 11,13                |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 3                        | 30,8 | 12,51                |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 4                        | 58,8 | 8,4                  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 5                        | 61,4 | 9,27                 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 6                        | 71,3 | 8,73                 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 7                        | 74,4 | 6,36                 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 8                        | 76,7 | 8,5                  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 9                        | 70,7 | 7,82                 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| 10                       | 57,5 | 9,14                 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|                          |      | 14,3285 <-- =ОТРЕЗОК |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|                          |      | -0,0890 <-- =НАКЛОН  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|                          |      | 0,8189 <-- =КВПИРС   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
| =ЛИНЕЙН(D4:D13;C4:C13)   |      |                      |   |   |   |   |   |   |   |   |   |

**Аргументы функции**

ЛИНЕЙН

Известные\_значения\_у: D4:D13 = {10,98;11,13;12,51}

Известные\_значения\_х: C4:C13 = {35,3;29,7;30,8;58,8}

Конст: = логическое

Статистика: = логическое

= {-0,0890;0,8189;14,3285;23,8377;5,2705}

Возвращает параметры линейного приближения по методу наименьших квадратов.

Известные\_значения\_х: необязательное множество значений х, для которых, возможно, уже известно соотношение  $y = mx + b$ .

Справка по этой функции      Значение: -0,0890

OK      Отмена

Имея эти данные, получаем следующие результаты работы функции.

|    | А                                                                  | В                     | С                       | Д       | Е                                         | Ф                                                            | Г | Н | И |
|----|--------------------------------------------------------------------|-----------------------|-------------------------|---------|-------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|---|---|---|
| 19 |                                                                    |                       | Результат работы ЛИНЕЙН |         |                                           |                                                              |   |   |   |
| 20 |                                                                    |                       | наклон                  | отрезок |                                           |                                                              |   |   |   |
| 21 | Наклон (такоже =НАКЛОН(D4:D13,C4:C13)) -->                         |                       | -0,0890                 | 14,3285 | -->                                       | Отрезок                                                      |   |   |   |
| 22 | Среднекв. погреш. отрезка -->                                      |                       | 0,0148                  | 0,8770  | -->                                       | Среднекв. погреш. отрезка                                    |   |   |   |
| 23 | R <sup>2</sup> (такоже =КВПИРСОН(D4:D13,C4:C13)) -->               |                       | 0,8189                  | 0,8117  | -->                                       | Среднекв. погреш. значений у (такоже =СТОШУХ(D4:D13,C4:C13)) |   |   |   |
| 24 | F статистика -->                                                   |                       | 38,1825                 | 8       | -->                                       | Степеней свободы                                             |   |   |   |
| 25 | SS <sub>у</sub> = Наклон*(сумма произв. наблюд. минус средние) --> |                       | 23,8377                 | 5,2705  | -->                                       | SSE = Остаточная сумма квадратов                             |   |   |   |
| 26 |                                                                    |                       |                         |         |                                           |                                                              |   |   |   |
| 27 |                                                                    | Наклон                | -0,0890                 | -->     | =ИНДЕКС(ЛИНЕЙН(D4:D13,C4:C13),1,1)        |                                                              |   |   |   |
| 28 |                                                                    | Отрезок               | 14,3285                 | -->     | =ИНДЕКС(ЛИНЕЙН(D4:D13,C4:C13),1,2)        |                                                              |   |   |   |
| 29 |                                                                    | R <sup>2</sup>        | 0,8189                  | -->     | =ИНДЕКС(ЛИНЕЙН(D4:D13,C4:C13),3,1)        |                                                              |   |   |   |
| 30 |                                                                    |                       |                         |         |                                           |                                                              |   |   |   |
| 31 |                                                                    | Наклон                | -0,0890                 | -->     | =ИНДЕКС(ЛИНЕЙН(D4:D13,C4:C13,ИСТИНА),1,1) |                                                              |   |   |   |
| 32 |                                                                    | Ср. кв. погр. наклона | 0,0148                  | -->     | =ИНДЕКС(ЛИНЕЙН(D4:D13,C4:C13,ИСТИНА),2,1) |                                                              |   |   |   |
| 33 |                                                                    | t-статистика          | -6,0152                 | -->     | =C31/C32                                  |                                                              |   |   |   |

В качестве результата функция ЛИНЕЙН заполняет блок ячеек, не добавляя заголовки строк или столбцов для пояснения. В справочной системе Excel смысл результатов объясняется достаточно хорошо; на предыдущем рисунке мы добавили комментарии в таблицу вручную.

Обратите внимание на синтаксис функции: ЛИНЕЙН (известные\_значения\_у; известные\_значения\_х; конст; статистика). Параметр известные\_значения\_у представляет диапазон ячеек со значениями зависимой переменной, а известные\_значения\_х — значения независимой переменной. Если параметр конст опущен (как в данном случае) или для него установлено значение ИСТИНА, то регрессия вычисляется обычным образом; если этот параметр установлен равным нулю, то отрезок регрессии принудительно устанавливается равным нулю. Если для параметра статистика задано значение ИСТИНА (как в данном случае), то вычисляется дополнительная регрессионная статистика, в противном же случае — только отсекаемый отрезок и угловой коэффициент (наклон).

Напомним сведения из раздела 29.3, посвященного функциям работы с массивами, о том, как помещать результаты в блок ячеек.

1. Выделите область C20:D24, в которую будет помещен результат работы функции ЛИНЕЙН.
2. Впишите формулу =ЛИНЕЙН(D4:D13;C4:C13;;ИСТИНА). Как уже демонстрировалось, для указания диапазонов ячеек можно воспользоваться диалоговым окном функции.
3. Нажмите комбинацию клавиш <Ctrl+Shift+Enter>.

### 29.5.2. Выборка отдельных результатов ЛИНЕЙН() с помощью функции ИНДЕКС()

Отдельные числа из результатов работы функции ЛИНЕЙН() можно выбирать с помощью функции ИНДЕКС(). Предположим, например, что необходимо выполнить простую  $t$ -проверку углового коэффициента (наклона); для этого значение наклона делится на его стандартную среднеквадратичную погрешность. На приведенном ниже рисунке показано, как это сделать с помощью функции ИНДЕКС().

|    | A                                                                   | B | C                       | D       | E                                                                  | F | G | H | I |
|----|---------------------------------------------------------------------|---|-------------------------|---------|--------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|
| 19 |                                                                     |   | Результат работы ЛИНЕЙН |         |                                                                    |   |   |   |   |
| 20 |                                                                     |   | наклон                  | отрезок |                                                                    |   |   |   |   |
| 21 | Наклон (также =НАКЛОН(D4:D13,C4:C13)) -->                           |   | -0,0890                 | 14,3285 | <-- Отрезок                                                        |   |   |   |   |
| 22 | Среднеквадр. погреш. отрезка -->                                    |   | 0,0148                  | 0,8770  | <-- Среднеквадр. погреш. отрезка                                   |   |   |   |   |
| 23 | R <sup>2</sup> (также =КВПИРСОН(D4:D13,C4:C13)) -->                 |   | 0,8189                  | 0,8117  | <-- Среднеквадр. погреш. значений y (также =СТОШУХ(D4:D13,C4:C13)) |   |   |   |   |
| 24 | F-статистика -->                                                    |   | 36,1825                 | 8       | <-- Степень свободы                                                |   |   |   |   |
| 25 | SS <sub>xy</sub> = Наклон*(сумма произв. наблюд. минус средние) --> |   | 23,8377                 | 5,2705  | <-- SSE = Остаточная сумма квадратов                               |   |   |   |   |
| 26 |                                                                     |   | Наклон                  | -0,0890 | <-- =ИНДЕКС(ЛИНЕЙН(D4:D13,C4:C13),1,1)                             |   |   |   |   |
| 27 |                                                                     |   | Отрезок                 | 14,3285 | <-- =ИНДЕКС(ЛИНЕЙН(D4:D13,C4:C13),1,2)                             |   |   |   |   |
| 28 |                                                                     |   | R <sup>2</sup>          | 0,8189  | <-- =ИНДЕКС(ЛИНЕЙН(D4:D13,C4:C13),1,3,1)                           |   |   |   |   |

### 29.5.3. Многомерная регрессия

Функция ЛИНЕЙН() применима также для построения многомерной регрессии, как в следующем примере.

|    | A                                                | B          | C                     | D                     | E       | F           | G |
|----|--------------------------------------------------|------------|-----------------------|-----------------------|---------|-------------|---|
| 1  | МНОГОМЕРНАЯ РЕГРЕССИЯ С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИИ "ЛИНЕЙН" |            |                       |                       |         |             |   |
| 2  |                                                  |            |                       |                       |         |             |   |
| 3  |                                                  | Наблюдения | X <sub>1</sub>        | X <sub>2</sub>        | Y       |             |   |
| 4  |                                                  | 1          | 35,3                  | 81,2                  | 10,98   |             |   |
| 5  |                                                  | 2          | 29,7                  | 22,5                  | 11,13   |             |   |
| 6  |                                                  | 3          | 30,8                  | 77,3                  | 12,51   |             |   |
| 7  |                                                  | 4          | 58,8                  | 34,8                  | 8,4     |             |   |
| 8  |                                                  | 5          | 61,4                  | 55,1                  | 9,27    |             |   |
| 9  |                                                  | 6          | 71,3                  | 124,8                 | 8,73    |             |   |
| 10 |                                                  | 7          | 74,4                  | 18,5                  | 6,36    |             |   |
| 11 |                                                  | 8          | 76,7                  | 234,6                 | 8,5     |             |   |
| 12 |                                                  | 9          | 70,7                  | 22,5                  | 7,82    |             |   |
| 13 |                                                  | 10         | 57,5                  | 123,3                 | 9,14    |             |   |
| 14 |                                                  |            |                       |                       |         |             |   |
| 15 |                                                  |            | коэфф. x <sub>2</sub> | коэфф. x <sub>1</sub> | отрезок |             |   |
| 16 | Наклон -->                                       |            | 0,0089                | -0,0987               | 14,1705 | <-- Отрезок |   |
| 17 | Среднеквадр. погреш. -->                         |            | 0,0030                | 0,0110                | 0,6271  |             |   |
| 18 | R <sup>2</sup> -->                               |            | 0,9196                | 0,5783                | #Н/Д    |             |   |
| 19 | F-статистика -->                                 |            | 40,0228               | 7,0000                | #Н/Д    |             |   |
| 20 | SS <sub>xy</sub> -->                             |            | 26,7674               | 2,3408                | #Н/Д    |             |   |
| 21 |                                                  |            |                       |                       |         |             |   |
| 22 |                                                  |            |                       |                       |         |             |   |
| 23 |                                                  |            |                       |                       |         |             |   |
| 24 |                                                  |            |                       |                       |         |             |   |
| 25 |                                                  |            |                       |                       |         |             |   |
| 26 |                                                  |            |                       |                       |         |             |   |

=ЛИНЕЙН(E4:E13,C4:D13,ИСТИНА)

## 29.6. Функции проверки условий и поиска

Функции ЕСЛИ (If), ВПР (VLookup) и ГПР (HLookup) позволяют строить в таблицах условные операторы и выражения.

Оператор ЕСЛИ имеет следующий синтаксис: ЕСЛИ(*лог\_выражение*; *значение\_если\_истина*; *значение\_если\_ложь*). В следующем примере, если заданное в ячейке В3 число меньше или равно 3, то результат должен равняться 15. Если число, заданное в ячейке В3, больше 3, результат должен быть равен 0.

|   | A                  | B                        | C | D |
|---|--------------------|--------------------------|---|---|
| 1 | ФУНКЦИЯ "ЕСЛИ"     |                          |   |   |
| 2 |                    |                          |   |   |
| 3 | Исходное число     | 2                        |   |   |
| 4 | Выражение с "если" | 15 <-- =ЕСЛИ(В3<=3,15,0) |   |   |

С помощью функции ЕСЛИ можно также выводить текст, заключив его в операторе в кавычки.

|   | A                  | B                                                                   | C | D | E | F | G |
|---|--------------------|---------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|---|
| 6 | Исходное число     | 2                                                                   |   |   |   |   |   |
| 7 | Выражение с "если" | Меньше или равно 3 <-- =ЕСЛИ(В6<=3,"Меньше или равно 3","Больше 3") |   |   |   |   |   |

Функции ВПР и ГПР имеют одинаковую структуру и аналогичны по выполняемым операциям, поэтому здесь мы рассмотрим только ВПР, а ГПР вы изучите самостоятельно. Функция ВПР позволяет задать в листе таблицы поиск по диапазону ячеек. Рассмотрим пример. Пусть предельная ставка подоходного налога задается приведенной ниже таблицей (т.е. для дохода ниже 8000 долл. предельная ставка составляет 0%; для доходов выше 8000 долл. это 15% и т.д.). В ячейке В11 показано, как с помощью функции ВПР найти в таблице нужную ставку налогообложения.

|    | A             | B                         | C | D |
|----|---------------|---------------------------|---|---|
| 1  | ФУНКЦИЯ ВПР   |                           |   |   |
| 2  |               |                           |   |   |
| 3  |               | Ставка                    |   |   |
| 4  | Доход         | налога                    |   |   |
| 5  | 0             | 0%                        |   |   |
| 6  | 8 000         | 15%                       |   |   |
| 7  | 14 000        | 25%                       |   |   |
| 8  | 25 000        | 38%                       |   |   |
| 9  |               |                           |   |   |
| 10 | Доход         | 15 000                    |   |   |
| 11 | Ставка налога | 25% <-- =ВПР(В10,А5:В8,2) |   |   |

Эта функция имеет синтаксис ВПР(*искомое\_значение*; *таблица*; *номер\_столбца*). Первый столбец таблицы, А5:А8, должен быть упорядочен по возрастанию. По *искомому\_значению* (в данном случае по размеру дохода в 15 тыс. долл.) в таблице разыскивается соответствующая строка — первая, число в которой меньше или равно заданному *искомому\_значению*. В нашем случае это строка, которая содержит число 14 000. Параметр *номер\_столбца* указывает, из какого столбца найденной строки следует брать ответ; в данном случае ставки налогообложения находятся во втором столбце заданного диапазона.

## 29.7. Функции ранжирования

Хотя функции этого типа не использовались в нашей книге, они могут оказаться полезными для финансового аналитика. Функция **НАИБОЛЬШИЙ**(массив; k) возвращает  $k$ -й по величине элемент из заданного массива, а **РАНГ**(число; массив) — ранг, т.е. порядковый номер числа по величине в массиве. (Названия их английских версий — соответственно Large и Rank.)

Примеры применения этих функций показаны ниже.

|    | A                                                    | B     | C                            | D | E | F |
|----|------------------------------------------------------|-------|------------------------------|---|---|---|
| 1  | <b>НАИБОЛЬШИЙ, РАНГ, ПЕРСЕНТИЛЬ, ПРОЦЕНТНЫЙ РАНГ</b> |       |                              |   |   |   |
| 2  |                                                      |       |                              |   |   |   |
| 3  | Данные                                               |       |                              |   |   |   |
| 4  | 10,98                                                |       |                              |   |   |   |
| 5  | 11,13                                                |       |                              |   |   |   |
| 6  | 12,51                                                |       |                              |   |   |   |
| 7  | 8,4                                                  |       |                              |   |   |   |
| 8  | 9,27                                                 |       |                              |   |   |   |
| 9  | 8,73                                                 |       |                              |   |   |   |
| 10 | 6,36                                                 |       |                              |   |   |   |
| 11 | 8,5                                                  |       |                              |   |   |   |
| 12 | 7,82                                                 |       |                              |   |   |   |
| 13 | 9,14                                                 |       |                              |   |   |   |
| 14 |                                                      |       |                              |   |   |   |
| 15 | Порядковый номер, k                                  | 3     |                              |   |   |   |
| 16 | K-й по величине                                      | 10,98 | <-- =НАИБОЛЬШИЙ(A4:A13,B15)  |   |   |   |
| 17 |                                                      |       |                              |   |   |   |
| 18 | Заданное число                                       | 9,27  |                              |   |   |   |
| 19 | Ранг сверху                                          | 4     | <-- =РАНГ(B18,A4:A13)        |   |   |   |
| 20 | Ранг снизу                                           | 7     | <-- =РАНГ(B18,A4:A13,1)      |   |   |   |
| 21 |                                                      |       |                              |   |   |   |
| 22 | Процентный ранг                                      | 0,8   |                              |   |   |   |
| 23 | Перцентиль (персентиль)                              | 11,01 | <-- =ПЕРСЕНТИЛЬ(A4:A13,B22)  |   |   |   |
| 24 |                                                      |       |                              |   |   |   |
| 25 | Заданное число                                       | 9,27  |                              |   |   |   |
| 26 | Процентный ранг                                      | 0,666 | <-- =ПРОЦЕНТРАНГ(A4:A13,B25) |   |   |   |

Таким образом, третье по величине число в диапазоне ячеек A4:A13 равно 10,98, а четвертое в том же диапазоне равно 9,27. Если задать в функции РАНГ дополнительный параметр упорядочения, как это сделано в ячейке B20, то окажется, что 9,27 — седьмое снизу по величине число из диапазона ячеек A4:A13.

Как показано в таблице, в Excel имеются аналогичные функции для процентиля (персентиля): ПЕРСЕНТИЛЬ (Percentil) и ПРОЦЕНТРАНГ (PercentRank).



---

## 30 Некоторые приемы работы с Excel

---

### 30.1. Введение

В этой главе рассматривается ряд приемов, применяемых в Excel для реализации различных общих задач, с которыми пользователи сталкиваются время от времени. Глава ни в коей мере не претендует на систематичность и полноту изложения. В ней рассмотрены следующие вопросы:

- автозаполнение и быстрое копирование ячеек;
- создание заголовков графиков, изменяющихся при изменении данных;
- создание многострочных ячеек (вставка разрывов строк в ячейках, создание связанных заголовков графиков);
- ввод греческих символов;
- ввод нижних и верхних индексов (но не тех и других одновременно);
- присваивание имен ячейкам;
- сокрытие ячеек.

---

### 30.2. Быстрое копирование: ввод данных в соседний столбец

Обычно мы копируем ячейки, перемещая указатель заполнения ячейки с формулой. Но есть и способ, который иногда оказывается проще. Рассмотрим ниже-приведенный рисунок.

|    | A                            | B          | C | D | E |
|----|------------------------------|------------|---|---|---|
| 1  | АВТОЗАПОЛНЕНИЕ / КОПИРОВАНИЕ |            |   |   |   |
| 2  |                              |            |   |   |   |
| 3  | 1                            | 2          |   |   |   |
| 4  | 2                            | 5 <-- B3+3 |   |   |   |
| 5  | 3                            |            |   |   |   |
| 6  | 4                            |            |   |   |   |
| 7  | 5                            |            |   |   |   |
| 8  | 6                            |            |   |   |   |
| 9  | 7                            |            |   |   |   |
| 10 | 8                            |            |   |   |   |

Теперь дважды щелкните на “указателе заполнения” (показанном на следующем рисунке крестиком). После этого диапазон ячеек B5:B10 автоматически заполнится формулой из ячейки B4.

|    | A                            | B | C          | D | E |
|----|------------------------------|---|------------|---|---|
| 1  | АВТОЗАПОЛНЕНИЕ / КОПИРОВАНИЕ |   |            |   |   |
| 2  |                              |   |            |   |   |
| 3  |                              | 1 | 2          |   |   |
| 4  |                              | 2 | 5 <-- B3+3 |   |   |
| 5  |                              | 3 |            |   |   |
| 6  |                              | 4 |            |   |   |
| 7  |                              | 5 |            |   |   |
| 8  |                              | 6 |            |   |   |
| 9  |                              | 7 |            |   |   |
| 10 |                              | 8 |            |   |   |

Результат этой операции показан ниже.

|    | A                                                                                | B | C          | D | E | F | G | H |
|----|----------------------------------------------------------------------------------|---|------------|---|---|---|---|---|
| 1  | АВТОЗАПОЛНЕНИЕ / КОПИРОВАНИЕ                                                     |   |            |   |   |   |   |   |
| 2  |                                                                                  |   |            |   |   |   |   |   |
| 3  |                                                                                  | 1 | 2          |   |   |   |   |   |
| 4  |                                                                                  | 2 | 5 <-- B3+3 |   |   |   |   |   |
| 5  |                                                                                  | 3 |            |   |   |   |   |   |
| 6  |                                                                                  | 4 |            |   |   |   |   |   |
| 7  |                                                                                  | 5 |            |   |   |   |   |   |
| 8  |                                                                                  | 6 |            |   |   |   |   |   |
| 9  |                                                                                  | 7 |            |   |   |   |   |   |
| 10 |                                                                                  | 8 |            |   |   |   |   |   |
| 11 |                                                                                  |   |            |   |   |   |   |   |
| 12 | Двойной щелчок на "маркере заполнения" ячейки поможет заполнить остаток столбца, |   |            |   |   |   |   |   |
| 13 | если рядом с ним есть заполненные ячейки.                                        |   |            |   |   |   |   |   |

### 30.3. Многострочные ячейки

Иногда бывает полезно вставить в ячейку разрыв строки, создавая тем самым многострочную ячейку. Для этого следует нажать комбинацию клавиш <Alt+Enter> в том месте, куда необходимо вставить разрыв.

|   | A                                                                                             | B |
|---|-----------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| 1 | ВСТАВКА РАЗРЫВОВ СТРОК В ЯЧЕЙКИ                                                               |   |
| 2 |                                                                                               |   |
| 3 | Это многострочная ячейка. Разрыв строки вставлен путем нажатия [Alt]+[Enter] в нужных местах. |   |
| 4 |                                                                                               |   |

### 30.4. Текстовые функции

В Excel можно представить значение формулы в виде текста. Соответствующий пример приведен ниже.

|    | A                                 | B            | C                              | D | E |
|----|-----------------------------------|--------------|--------------------------------|---|---|
| 1  | ТЕКСТОВЫЕ ФУНКЦИИ                 |              |                                |   |   |
| 2  |                                   |              |                                |   |   |
| 3  | Доход                             | 15 000       |                                |   |   |
| 4  | Ставка налога                     | 35%          |                                |   |   |
| 5  | Задолженность по налогам          | 5 250        | <-- =B4*B3                     |   |   |
| 6  |                                   |              |                                |   |   |
| 7  |                                   |              |                                |   |   |
| 8  | Ставка налога в текстовом формате | 35,00%       | <-- =ТЕКСТ(B4,"0,00%")         |   |   |
| 9  |                                   | 0,4          | <-- =ТЕКСТ(B4,"0,0")           |   |   |
| 10 |                                   |              |                                |   |   |
| 11 | Доход в формате даты              | 00. 24, 1941 | <-- =ТЕКСТ(B3;"ммм. дд, гггг") |   |   |



Отметим, что содержимое ячейки B4 можно представить в разных текстовых форматах. Так, в ячейке B8 ставка налога представлена в процентном формате с двумя десятичными цифрами после запятой, тогда как в ячейке B9 — как десятичное число с одной цифрой после запятой, отчего произошло округление.

Обращаем ваше внимание также на глуповатый пример в ячейке B11. Поскольку даты в Excel — это просто числа, выражающие количество дней, которые прошли с 1 января 1900 г., доход в размере 15 тыс. долл. можно отобразить в ячейке B3 в формате даты.

### 30.5. Обновляемые заголовки графиков

Пусть необходимо изменять заголовок графика всякий раз, когда в таблице изменится какой-нибудь параметр. Например, в следующей таблице заголовок графика должен показывать темп роста в процентах.



Необходимо, чтобы после выполнения некоторых операций изменение в темпе роста отражалось как на графике, так и в его заголовке.



Выполните следующие действия, чтобы сделать заголовок графика автоматически обновляемым.

- Создайте нужный график в таком формате, какой требуется. Дайте графику временный заголовок — неважно, какой именно, поскольку он вводится только на короткое время. На этом этапе график выглядит примерно так, как показано ниже.



- Сформируйте нужный заголовок в какой-нибудь ячейке. Вданномпримере-ячейка D21 содержит формулу ="График денежных потоков при темпе роста ="&ТЕКСТ(B3; "0.0%")
- Щелкните на заголовке графика, чтобы выделить его, затем перейдите в строку формул и вставьте знак равенства, обозначив тем самым содержимое ячейки как формулу. Затем укажите мышьюячейку D21 с формулой и нажмите <Enter>. На рисунке, приведенном ниже, показан выделенный заголовок и текст ="Раздел 30.5"!021" в строке формул, который обозначает содержание заголовка.



### 30.6. Вставка греческих букв

Как ввести в таблицу Excel греческие буквы?

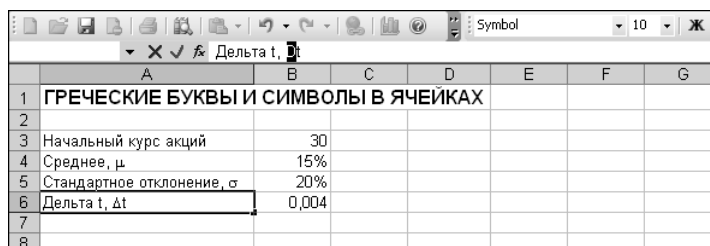
|   | A                                | B     |
|---|----------------------------------|-------|
| 3 | Начальный курс акций             | 30    |
| 4 | Среднее, $\mu$                   | 15%   |
| 5 | Стандартное отклонение, $\sigma$ | 20%   |
| 6 | Дельта $t$ , $\Delta t$          | 0,004 |

Эта задача довольно проста, если знать эквиваленты греческих букв. Например,  $\mu$  и  $\sigma$  — это буквы  $m$  и  $s$  в нижнем регистре, а  $\Sigma$  и  $\Delta$  — буквы  $S$  и  $D$  в верхнем регистре. Поэтому вначале следует ввести в ячейку A6 текст "Дельта  $t$ ,  $\Delta t$ ", а затем выделить букву D в строке формул.

Дельта  $t$ ,  $\Delta t$

|   | A                                          | B     | C | D | E | F | G |
|---|--------------------------------------------|-------|---|---|---|---|---|
| 1 | <b>ГРЕЧЕСКИЕ БУКВЫ И СИМВОЛЫ В ЯЧЕЙКАХ</b> |       |   |   |   |   |   |
| 2 |                                            |       |   |   |   |   |   |
| 3 | Начальный курс акций                       | 30    |   |   |   |   |   |
| 4 | Среднее, $\mu$                             | 15%   |   |   |   |   |   |
| 5 | Стандартное отклонение, $\sigma$           | 20%   |   |   |   |   |   |
| 6 | Дельта $t$ , $\Delta t$                    | 0,004 |   |   |   |   |   |
| 7 |                                            |       |   |   |   |   |   |
| 8 |                                            |       |   |   |   |   |   |

Затем нужно изменить гарнитуру шрифта выделенной буквы с Arial на Symbol.

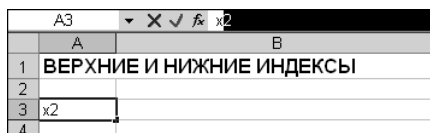


|   | A                                   | B     | C | D | E | F | G |
|---|-------------------------------------|-------|---|---|---|---|---|
| 1 | ГРЕЧЕСКИЕ БУКВЫ И СИМВОЛЫ В ЯЧЕЙКАХ |       |   |   |   |   |   |
| 2 |                                     |       |   |   |   |   |   |
| 3 | Начальный курс акций                | 30    |   |   |   |   |   |
| 4 | Среднее, $\mu$                      | 15%   |   |   |   |   |   |
| 5 | Стандартное отклонение, $\sigma$    | 20%   |   |   |   |   |   |
| 6 | Дельта t, $\Delta t$                | 0,004 |   |   |   |   |   |
| 7 |                                     |       |   |   |   |   |   |
| 8 |                                     |       |   |   |   |   |   |

Нажав клавишу <Enter>, получаем искомый результат.

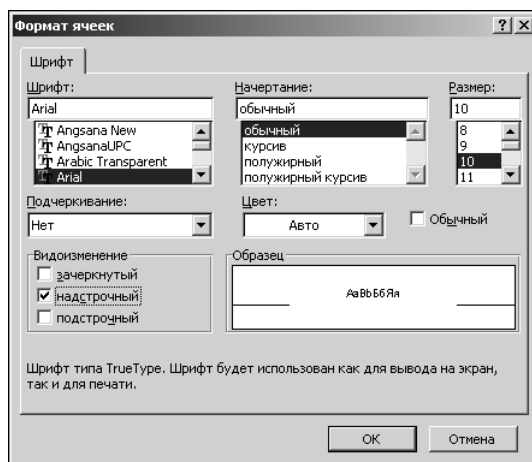
### 30.7. Верхние и нижние индексы

Ввести в таблицу Excel верхний или нижний индекс не составляет никакого труда. Введите текст в ячейку, а затем выделите символы, которые следует превратить в индексы.



|   | A                        | B |
|---|--------------------------|---|
| 1 | ВЕРХНИЕ И НИЖНИЕ ИНДЕКСЫ |   |
| 2 |                          |   |
| 3 | x2                       |   |
| 4 |                          |   |

Выберите команду меню Формат⇒Ячейки (Format⇒Cells).



Получим результат, приведенный на рисунке.



|   | A                        | B |
|---|--------------------------|---|
| 1 | ВЕРХНИЕ И НИЖНИЕ ИНДЕКСЫ |   |
| 2 |                          |   |
| 3 | x <sup>2</sup>           |   |

Заметим, что нельзя одновременно создать нижний и верхний индекс к одной и той же букве, например  $x_i^2$ . Максимум того, что можно сделать, показан на нижеприведенном рисунке.

|   | A       | B                                                                    |
|---|---------|----------------------------------------------------------------------|
| 5 | $x_i^2$ | Нельзя разместить верхний и нижний<br>нижний индексы в один столбец. |

### 30.8. Именованные ячейки

Иногда бывает полезно присвоить ячейке удобное имя. Соответствующий пример показан ниже.

|   | A                  | B      | C          | D |
|---|--------------------|--------|------------|---|
| 1 | ИМЕНОВАННЫЕ ЯЧЕЙКИ |        |            |   |
| 2 |                    |        |            |   |
| 3 | Доход              | 15 000 |            |   |
| 4 | Ставка налога      | 33%    |            |   |
| 5 | Уплаченный налог   | 4 950  | <-- =B4*B3 |   |

Желательно иметь возможность ссылаться на ячейку B4 по имени “tax” (“налог”). Для этого нужно выделить ячейку и перейти в поле имени на панели инструментов.

| B4 33% |                    |        |             |   |
|--------|--------------------|--------|-------------|---|
|        | A                  | B      | C           | D |
| 1      | ИМЕНОВАННЫЕ ЯЧЕЙКИ |        |             |   |
| 2      |                    |        |             |   |
| 3      | Доход              | 15 000 |             |   |
| 4      | Ставка налога      | 33%    |             |   |
| 5      | Уплаченный налог   | 4 950  | <-- =tax*B3 |   |
| 6      |                    |        |             |   |

Если ввести имя tax вместо показанного на рисунке текста B4, можно далее ссылаться на эту ячейку по имени в любом месте книги Excel.

|   | A                  | B      | C           | D |
|---|--------------------|--------|-------------|---|
| 1 | ИМЕНОВАННЫЕ ЯЧЕЙКИ |        |             |   |
| 2 |                    |        |             |   |
| 3 | Доход              | 15 000 |             |   |
| 4 | Ставка налога      | 33%    |             |   |
| 5 | Уплаченный налог   | 4 950  | <-- =tax*B3 |   |

Иногда в Excel можно использовать имена ячеек, даже не проделывая описанную процедуру. В следующем примере Excel позволяет взять заголовки столбцов в качестве имен ячеек.

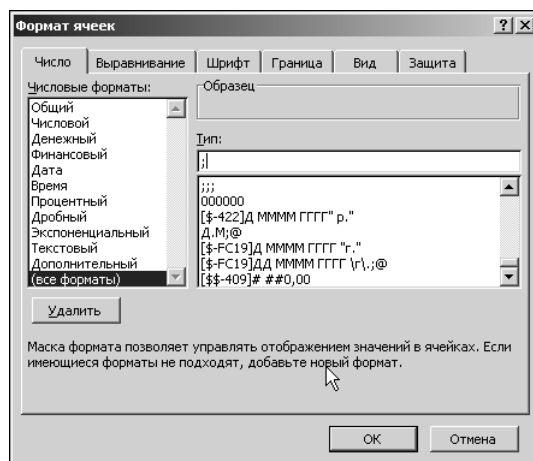
|    | A           | B     | C       | D                      | E | F |
|----|-------------|-------|---------|------------------------|---|---|
| 8  | Объем сбыта | Маржа | Прибыль |                        |   |   |
| 9  | 1000        | 20%   | 200     | <-- =Объем сбыта*Маржа |   |   |
| 10 | 5000        | 30%   | 1500    | <-- =Объем сбыта*Маржа |   |   |

### 30.9. Скрытые ячейки

На рисунках и в таблицах этой книги содержимое таких ячеек, как заголовки таблиц данных, нередко скрывается. (О таблицах данных см. в главе 26.) Возьмем для примера простую таблицу данных.

|    | A                      | B        | C                      | D                                 | E | F | G |
|----|------------------------|----------|------------------------|-----------------------------------|---|---|---|
| 1  | <b>СКРЫТЫЕ ЯЧЕЙКИ</b>  |          |                        |                                   |   |   |   |
| 2  |                        |          |                        |                                   |   |   |   |
| 3  | Выплата                | 100      |                        |                                   |   |   |   |
| 4  | Кол-во выплат          | 15       |                        |                                   |   |   |   |
| 5  | Ставка дисконтирования | 15%      |                        |                                   |   |   |   |
| 6  | Приведенная стоимость  | \$584,74 | <-- =ПС(B5,B4,-B3)     |                                   |   |   |   |
| 7  |                        |          |                        |                                   |   |   |   |
| 8  |                        |          | <b>ПС серии выплат</b> |                                   |   |   |   |
| 9  | <b>Таблица данных</b>  |          | \$584,74               | <-- Заголовок таблицы данных, =B6 |   |   |   |
| 10 |                        | 0%       | \$1 500,00             |                                   |   |   |   |
| 11 |                        | 3%       | \$1 193,79             |                                   |   |   |   |
| 12 |                        | 6%       | \$971,22               |                                   |   |   |   |
| 13 |                        | 9%       | \$806,07               |                                   |   |   |   |
| 14 |                        | 12%      | \$681,09               |                                   |   |   |   |
| 15 |                        | 15%      | \$584,74               |                                   |   |   |   |
| 16 |                        | 18%      | \$509,16               |                                   |   |   |   |
| 17 |                        | 21%      | \$448,90               |                                   |   |   |   |

Заголовок таблицы данных в ячейке C9 необходим для работы таблицы, но он невыразителен и может внести путаницу при копировании таблицы в другие документы. Чтобы скрыть содержимое ячейки C9, выделите ее и выберите команду меню **Формат⇒Ячейки (Format⇒Cell)** или воспользуйтесь контекстным меню.



В поле Тип (Type), которое соответствует строке (все типы) (Custom), на странице Число (Number) этого диалогового окна мы поставили точку с запятой. Благодаря этому содержимое ячейки сохраняется, но не отображается на экране. При копировании ячеек таблицы получится следующее.

|     | ПС серии<br>выплат |
|-----|--------------------|
| 0%  | \$1 500,00         |
| 3%  | \$1 193,79         |
| 6%  | \$971,22           |
| 9%  | \$806,07           |
| 12% | \$681,09           |
| 15% | \$584,74           |
| 18% | \$509,16           |
| 21% | \$448,90           |

Советуем всегда снабжать таблицы примечаниями и пояснениями, иначе, если вы вернетесь к этой таблице через несколько недель или месяцев, можете и забыть, что в ячейке C9 что-то есть.

И последнее замечание. Чтобы скрыть ячейку, содержащую ссылку на другую ячейку, в которой находится формула, могут понадобиться три точки с запятой (;;;). В таблице, показанной далее, ячейка B5 содержит функцию ЕСЛИ (IF). Ячейка B7 ссылается на эту ячейку. Чтобы скрыть ячейку B7, требуются три точки с запятой, а не одна. Какая в этом логика и есть ли она — лично нам неизвестно.

|   | А                                         | В   | С                               |
|---|-------------------------------------------|-----|---------------------------------|
| 1 | СКРЫТИЕ ЯЧЕЙКИ, ССЫЛАЮЩЕЙСЯ<br>НА ФОРМУЛУ |     |                                 |
| 2 |                                           |     |                                 |
| 3 | a                                         | 33  |                                 |
| 4 | b                                         | 8   |                                 |
| 5 | c                                         | bbb | <-- =ЕСЛИ(B4+B3<15,"aaa","bbb") |
| 6 |                                           |     |                                 |
| 7 | Скрываемая ячейка -->                     |     | <-- =B5                         |





---

## VI Введение в Visual Basic for Applications

В главах 31–35, написанных Бенъямином Чачкесом (Benjamin Czaczkcs), рассматриваются основные средства программирования на языке Visual Basic for Applications (VBA), применяемые в этой книге. Хотя эти главы отнюдь не составляют полного справочника по программированию на VBA, по ним можно научиться вполне компетентно программировать функции для финансовых расчетов.

В главе 31 дается введение в VBA и рассказывается, как писать определяемые пользователем функции. Такие функции уже неоднократно использовались в этой книге, в том числе в главе 16 (для расчета цены опционов по модели Блэка–Скоулза) и в главах 20 и 21 (для определения дюрации). В главе 32 рассматриваются типы и циклы. Примером функции с использованием циклов может служить функция для расчета подразумеваемой волатильности опциона в главе 16. Глава 33 посвящена макросам и средствам взаимодействия с пользователем, благодаря которым программы могут запрашивать данные — в основном посредством диалогового окна на странице таблицы, которое пользователю нужно заполнить. В главе 34 рассказывается о работе с массивами VBA (которые использовались в моделировании логнормального распределения в главе 15). Наконец, в главе 35 рассматривается использование объектов VBA.



---

# 31 Функции, определяемые пользователем

---

## 31.1. Введение

В следующих нескольких главах рассматриваются вопросы применения программирования на языке Visual Basic for Applications (VBA). VBA — это полнофункциональный язык и полноценная среда программирования, полностью интегрированные в Excel и другие программы Microsoft Office. В этой главе дается введение в функции, определяемые пользователем, которые используются в различных местах этой книги.

Приведенные программы разрабатывались в среде Excel 2000, хотя совместимы со всеми версиями Excel, в которых используется VBA, т.е. начиная с версии 5. (Рисунки подготовлены для русскоязычного интерфейса среды Excel 2003. — *Примеч. ред.*)

---

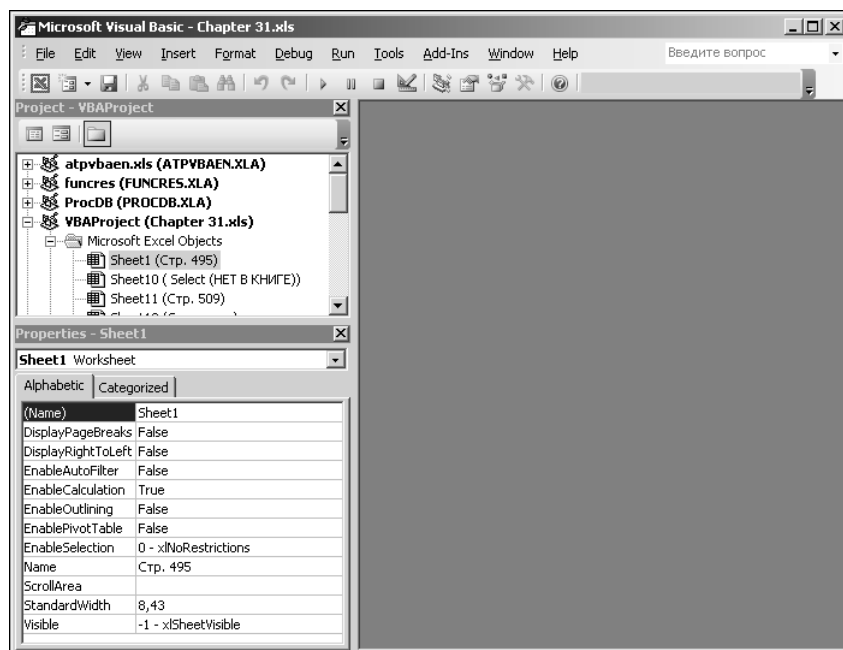
## 31.2. Ввод функции в редакторе VBA

Функция — это хранимый список инструкций, которые выполняет Excel для вычисления некоторого значения. Как только пользователь определил и сохранил новую функцию, ее можно использовать в таблице Excel на равных правах с другими функциями<sup>1</sup>.

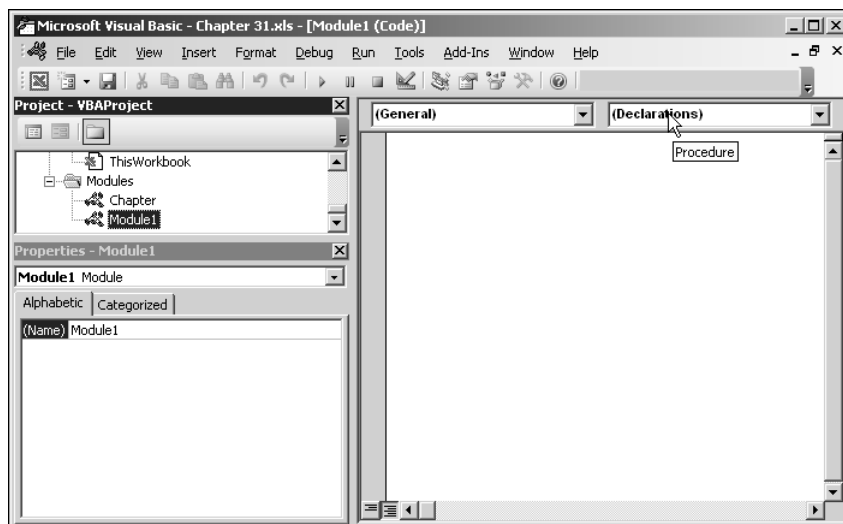
В этом разделе мы напишем нашу первую функцию. Прежде чем сделать это, необходимо открыть окно редактора VBA. Это можно сделать либо из меню Excel, выбрав команду Сервис⇒Макрос⇒Редактор Visual Basic (Tools⇒Macro⇒Visual Basic Editor), либо нажатием комбинации клавиш <Alt+F11>. В обоих случаях откроется новое окно — примерно такое, как на приведенном ниже рисунке.

---

<sup>1</sup> Функции, определяемые пользователями, обычно включаются в состав какой-либо конкретной книги (файла таблицы) и доступны только тогда, когда книга открыта в Excel.



Функцию, определяемую пользователем, необходимо сохранить в модуле. Чтобы открыть новый модуль, выберите команду меню **Insert**⇒**Module** (**Вставка**⇒**Модуль**) в среде редактора VBA. Откроется окно, показанное на следующем рисунке.



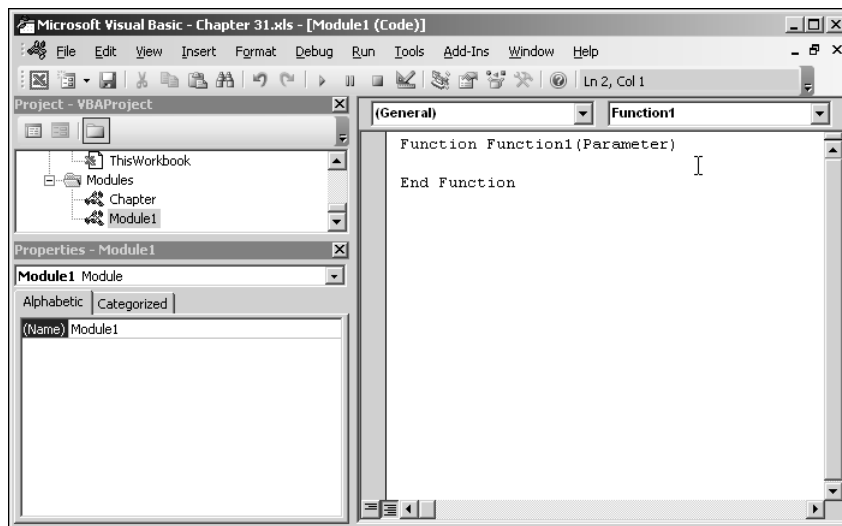
Теперь можно приступать к написанию функции. Функция Excel, определяемая пользователем, содержит три обязательных элемента.

1. Заголовок с именем функции и списком ее параметров.
2. Замыкающая строка (которую обычно автоматически вставляет среда VBA).
3. Несколько строк кода между заголовком и замыкающей строкой.

Напишем первую строку функции:

```
function Function1 (Parameter)
```

Как только вы закончите набирать строку и нажмете клавишу <Enter> в конце ее, редактор сам позаботится о дополнительных служебных операциях. Изменится цвет всех слов, распознаваемых средой VBA как элементы языка (это *служебные*, или *зарезервированные*, слова), и первые буквы этих слов будут преобразованы в верхний регистр. Будет вставлена замыкающая строка функции, и курсор окажется в промежуточном положении готовности к дальнейшему набору кода — между заголовком и замыкающей строкой.



Введем первую действительно рабочую строку кода функции, которая будет выполнять какие-то операции<sup>2</sup>. Наша первая функция будет умножать переменную на три и прибавлять единицу:

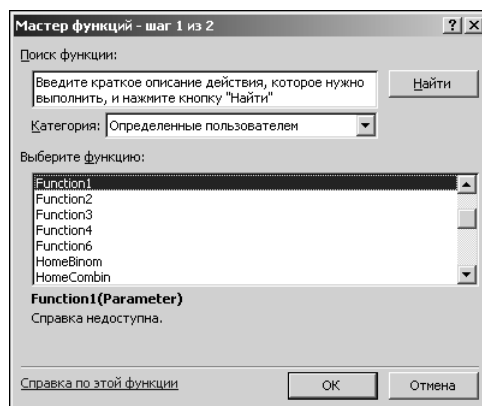
```
Function Function1 (Parameter)
    Function1 = Parameter * 3 + 1
End Function
```

<sup>2</sup> Отступ строк в коде VBA не требуется правилами языка, но облегчает чтение и восприятие кода.

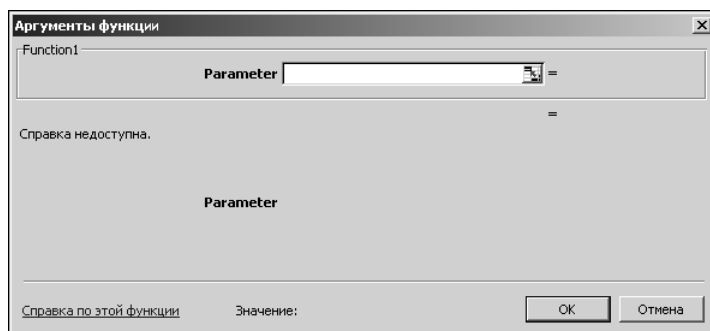
Теперь этой функцией можно пользоваться на листе таблицы Excel.

|   | A                     | B    | C                           | D |
|---|-----------------------|------|-----------------------------|---|
| 1 | <b>Работа функций</b> |      |                             |   |
| 2 |                       |      |                             |   |
| 3 | Параметр              | 1,25 |                             |   |
| 4 | Функция               | 4,75 | =<math>Function1(B3)</math> |   |

Этой функцией можно также пользоваться с помощью мастера функций (Function Wizard) среды Excel. Для этого щелкните на пиктограмме с надписью **fx** на панели инструментов и, выбрав из списка категорию **Определенные пользователем** (User Defined), выделите в открывшемся списке функцию **Function1**.



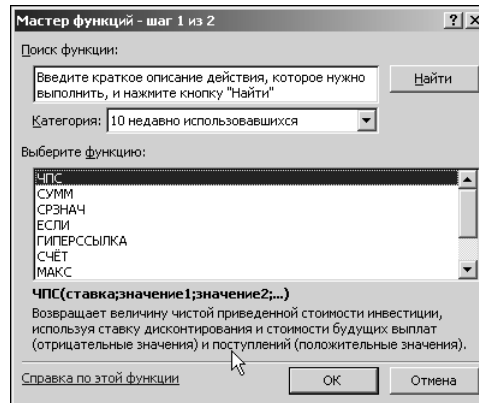
Выбрав из списка элемент **Function1** и щелкнув на кнопке **OK**, вы увидите, что Excel воспринимает эту функцию так же, как и любую другую, открывая диалоговое окно для выбора местонахождения или значения ее **Параметра** (Parameter).



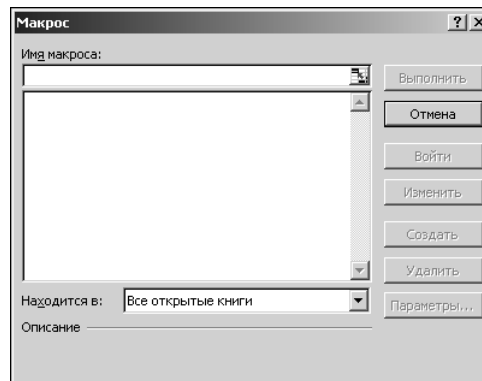
Обратите внимание, что пояснения или справка по этой функции на данном этапе недоступны. В следующем разделе описано, как решается эта проблема, хотя всего лишь частично и в своей простейшей части.

### 31.3. Добавление справки в мастер функций

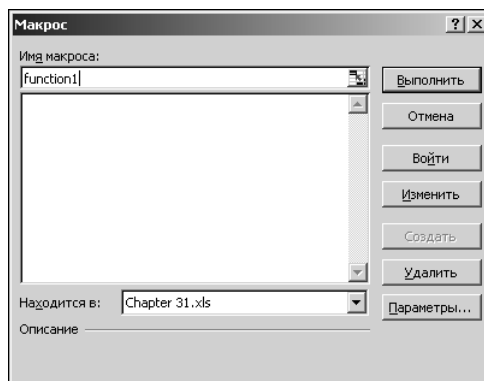
Диалоговое окно мастера функций Excel содержит краткую справку о назначении той или иной функции в виде строки-комментария. Встроенные функции Excel комментируются следующим образом.



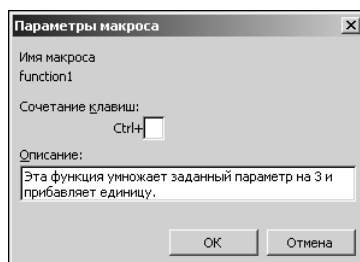
Чтобы добавить к функции Function1 текстовое описание, откройте диалоговое окно выбора макроса. Для этого либо выберите из меню Сервис команду Макрос⇒Макросы (Macro⇒Macros), либо нажмите комбинацию клавиш <Alt+F8>.



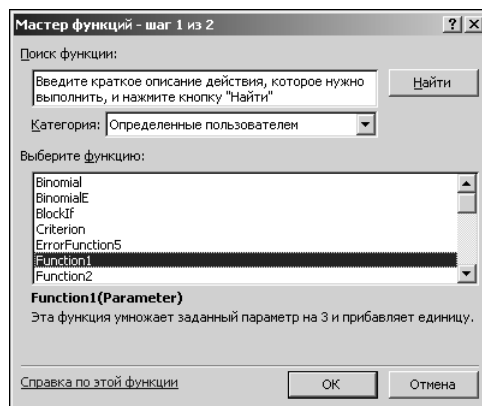
Перейдите в поле имени макроса и введите в нем имя функции. Отметим, что имени функции в диалоговом окне макросов нет; его придется ввести вручную.



Щелкните на кнопке Параметры (Options).



Введите краткое описание функции в поле Описание (Description). Щелкните на кнопке ОК и закройте окно выбора макросов с помощью кнопки Отмена (Cancel) либо стандартной кнопки с изображением крестика в верхнем правом углу окна. Теперь функция Function1 будет иметь строку-комментарий.



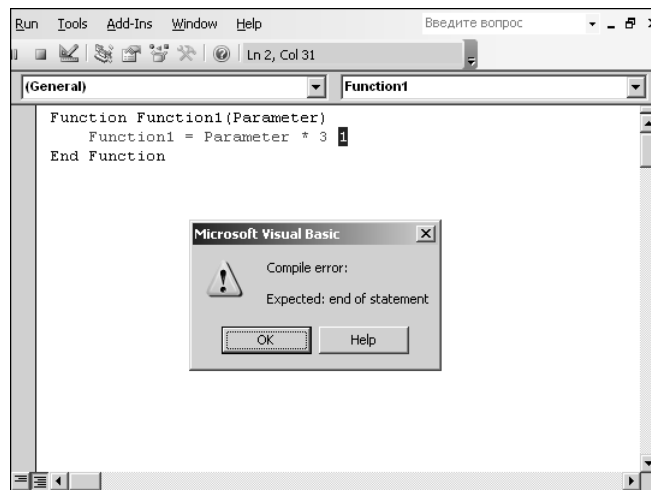


## 31.4. Исправление ошибок в VBA

С самого начала работы в среде VBA ошибки неизбежны. В этом разделе демонстрируется несколько видов самых распространенных ошибок и способов их исправления. Их перечень не претендует на полноту — мы выбрали только некоторые ошибки, типичные для начинающих пользователей VBA.

### 31.4.1. Ошибка 1: неправильный синтаксис

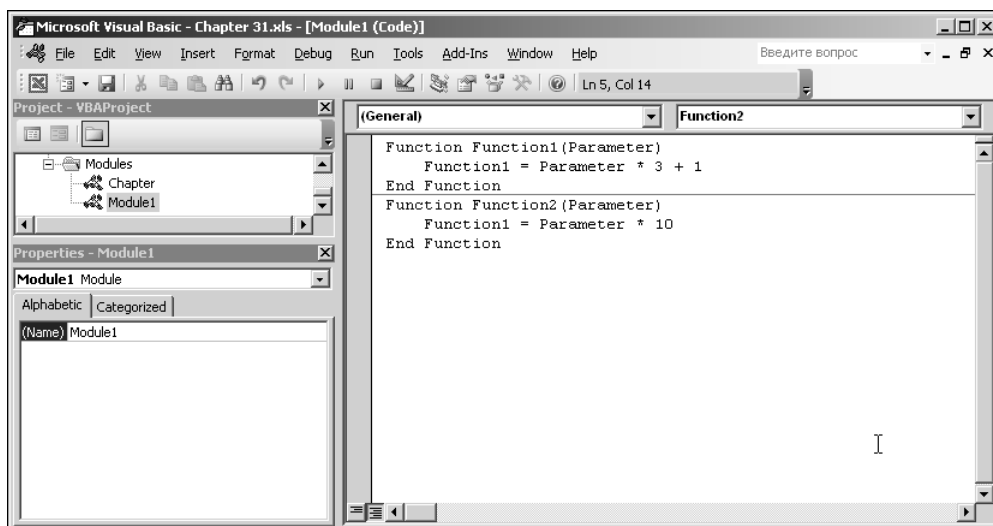
Предположим, что при написании функции `Function1` вы забыли поставить знак “плюс” между выражением `Parameter*3` и единицей (напомним, что задача этой функции — вычисление выражения `Parameter*3+1`). После нажатия клавиши `<Enter>` появится сообщение об ошибке.



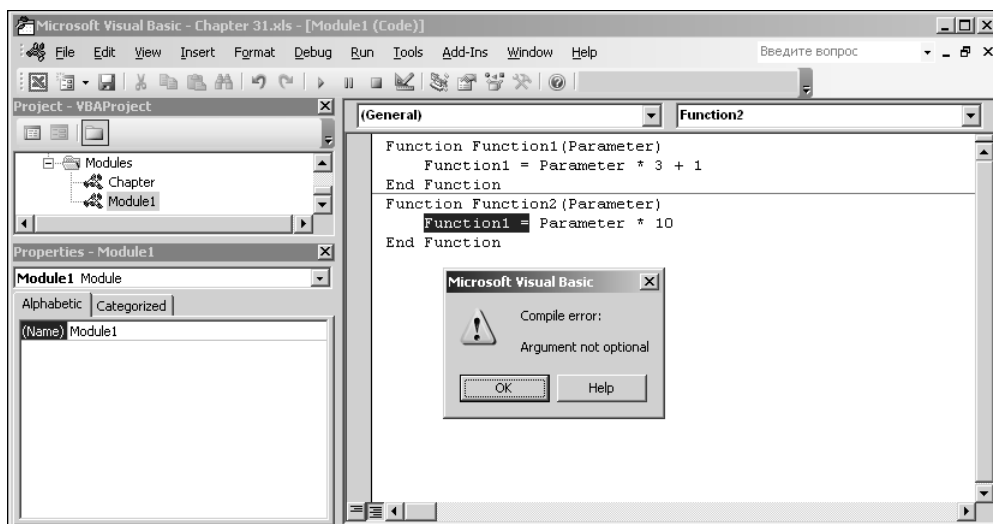
Щелкнув на кнопке `OK`, вы позволяете исправить эту ошибку автоматически.

### 31.4.2. Ошибка 2: правильный синтаксис с опечаткой

Бывает довольно легко сделать такую опечатку, которая будет замечена только при выполнении функции. В нашем примере мы определили две функции: `Function1` и `Function2`. К сожалению, строка кода функции `Function2` по ошибке ссылается на функцию `Function1`.



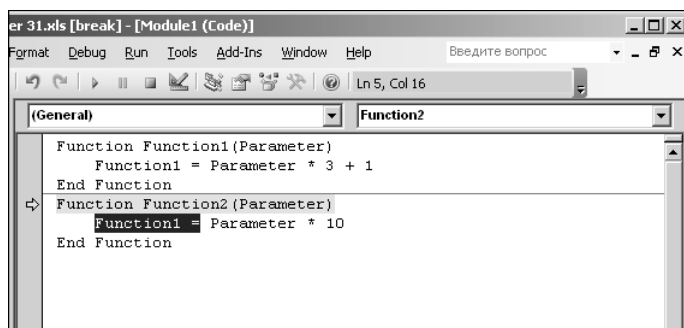
Редактор VBA не распознает такую ошибку<sup>3</sup>. Только при попытке вызова функции из листа таблицы Excel сообщит, что произошла ошибка. Будет выполнен автоматический переход в окно редактора VBA.



Распознав ошибку, ее можно исправить. Можно также попробовать воспользоваться справочной системой VBA, щелкнув на кнопке Help. (Учтите, что во многих случаях справочная система дает слишком сложные и запутанные пояснения.)

Предположим, вы поняли, в чем состоит ошибка. После щелчка на кнопке OK вы готовы внести исправления, т.е. заменить слово Function1 словом Function2. В этот момент экран будет выглядеть так, как показано ниже.

<sup>3</sup> Правда, только в том случае, если не используется оператор Option Explicit, который рассматривается в разделе 32.3.



Отметим следующие важные моменты.

- В строке заголовка фигурирует слово “break” (обозначающее остановку выполнения функции).
- Идентификатор-виновник ошибки выделен фоновым цветом.
- Заголовок функции отмечен фоновым цветом и стрелкой на полях.

Поскольку исполнительная система VBA обнаружила ошибку при попытке выполнить функцию, она перешла в специальный режим выполнения, именуемый *отладочным режимом с остановом (debug-break mode)*. Пока что нам достаточно всего лишь знать, как выйти из этого режима, чтобы продолжить работу. Для этого щелкните на соответствующем значке на панели инструментов VBA (черном квадратике). Теперь можно исправить текст функции и пользоваться ею.

## 31.5. Условное выполнение: оператор If

В этом разделе описаны разновидности оператора If, имеющиеся в VBA. Не все в нашей жизни происходит линейно, по порядку; иногда нужно стоять на распутье и принимать решения. В языке VBA выбор выполняется с помощью оператора If.

### 31.5.1. Однострочный оператор If

Однострочный оператор If — это простейший способ управления выполнением программы в зависимости от условия. Если условие истинно, выполняется один оператор, а если ложно — другой. И условие, и оба оператора должны находиться в одной строке. Например:

```
Function SimpleIf(Parameter)
    If Parameter > 5 Then SimpleIf = 1 Else SimpleIf = 15
End Function
```

Теперь функцию SimpleIf можно использовать в Excel. Если значение параметра больше пяти, функция возвращает единицу.

|   | A                   | B  | C                 | D |
|---|---------------------|----|-------------------|---|
| 1 | Простой оператор If |    |                   |   |
| 2 |                     |    |                   |   |
| 3 | Параметр            | 12 |                   |   |
| 4 | Значение функции    | 1  | <-- =SimpleIf(B3) |   |

Если значение параметра (Parameter) меньше или равно пяти, функция SimpleIf возвращает 15.

|   | A                   | B  | C                 | D |
|---|---------------------|----|-------------------|---|
| 1 | Простой оператор If |    |                   |   |
| 2 |                     |    |                   |   |
| 3 | Параметр            | 3  |                   |   |
| 4 | Значение функции    | 15 | <-- =SimpleIf(B3) |   |

В однострочном операторе If даже часть Else является необязательной. Следующая функция, SimpleIf2, возвращает нуль, если не выполняется условие “параметр больше пяти”:

```
Function SimpleIf2(Parameter)
    If Parameter > 5 Then SimpleIf2 = 1
End Function
```

### 31.5.2. Хороший стиль: инициализация значения функции

Чтобы продемонстрировать хороший стиль программирования в предыдущих функциях, следовало бы присвоить значение имени функции еще до оператора If:

```
Function SimpleIf3(Parameter)
    SimpleIf3 = -16
    If Parameter > 5 Then SimpleIf3 = 1
End Function
```

Теперь мы точно знаем, что значение SimpleIf3 по умолчанию равно -16, если условие на значение Parameter не выполняется.

|   | A                   | B   | C                  | D |
|---|---------------------|-----|--------------------|---|
| 1 | Простой оператор If |     |                    |   |
| 2 |                     |     |                    |   |
| 3 | Параметр            | 3   |                    |   |
| 4 | SimpleIf            | 15  | <-- =SimpleIf(B3)  |   |
| 5 | SimpleIf2           | 0   | <-- =SimpleIf2(B3) |   |
| 6 | SimpleIf3           | -16 | <-- =SimpleIf3(B3) |   |

### 31.5.3. Оператор If...ElseIf

Если требуется выполнить условным образом несколько операторов, на помощь приходит блочный оператор If...ElseIf. В нем используется следующий синтаксис:

```
If Условие0 Then
    Операторы
ElseIf Условие1 Then
    Операторы
[... Еще ElseIf ...]
```

```
Else
    Операторы
End If
```

Конструкции Else и ElseIf являются необязательными. Можно использовать сколько угодно блоков ElseIf после If, но их наличие не допускается после Else.

Операторы If можно использовать внутри друг друга. Например:

```
Function BlockIf(Parameter)
    If Parameter < 0 Then
        BlockIf = -1
    ElseIf Parameter = 0 Then
        BlockIf = 0
    Else
        BlockIf = 1
    End If
End Function
```

А как эта функция работает в Excel, показано ниже.

|   | A                    | B  | C            |
|---|----------------------|----|--------------|
| 1 | Функция с блочным If |    |              |
| 2 |                      |    |              |
| 3 | Параметр             |    |              |
| 4 | -3                   | -1 | =BlockIf(A4) |
| 5 | 0                    | 0  | =BlockIf(A5) |
| 6 | 13                   | 1  | =BlockIf(A6) |

### 31.5.4. Конструкции с вложенными операторами If

Как указывалось в предыдущем подразделе, операторы If можно использовать в операторах, входящих в состав других операторов If. Такие операторы называются *вложенными*. Каждый отдельный оператор If в подобной конструкции должен быть полностью законченным, причем можно использовать как однострочные, так и блочные операторы.

В следующей функции демонстрируется использование вложенных операторов If:

```
Function NestedIf(P1, P2)
    If P1 > 10 Then
        If P2 > 5 Then NestedIf = 1 Else _
            NestedIf = 2
    ElseIf P1 < -10 Then
        If P2 > 5 Then
            NestedIf = 3
        Else
            NestedIf = 4
        End If
    Else
        If P2 > 5 Then
            If P1 = P2 Then NestedIf = 5 Else _
                NestedIf = 6
        End If
    End If
End Function
```

```

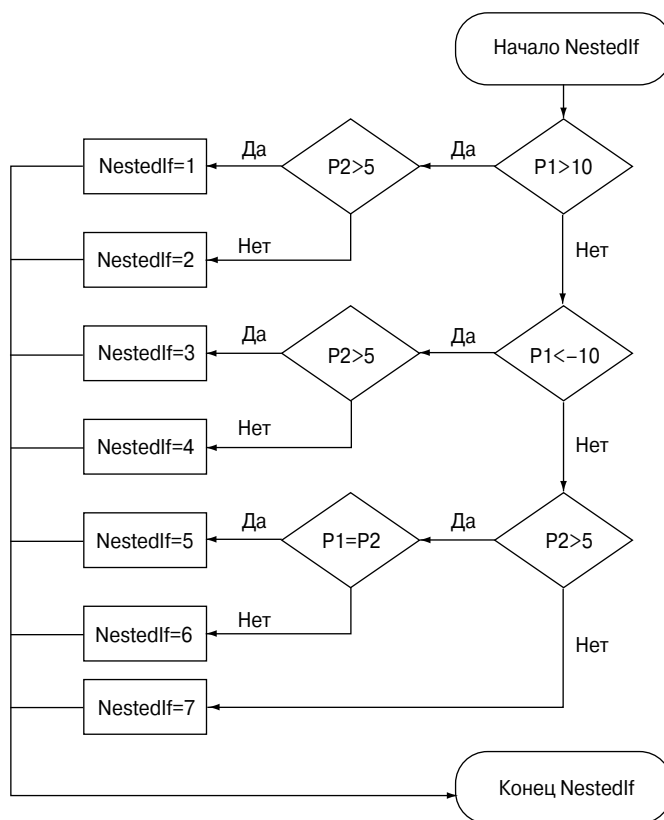
Else
    NestedIf = 7
End If
End If
End Function

```

Как эта функция работает в таблице Excel, показано ниже.

|    | A                      | B  | C                | D                |
|----|------------------------|----|------------------|------------------|
| 1  | Функция с вложенным If |    |                  |                  |
| 2  |                        |    |                  |                  |
| 3  | P1                     | P2 | NestedIf(P1, P2) |                  |
| 4  | 11                     | 6  | 1                | =NestedIf(A4,B4) |
| 5  | 22                     | 3  | 2                |                  |
| 6  | -22                    | 6  | 3                |                  |
| 7  | -57,3                  | 4  | 4                |                  |
| 8  | 6                      | 6  | 5                |                  |
| 9  | -5                     | 7  | 6                |                  |
| 10 | 4                      | 3  | 7                |                  |

Алгоритм, реализованный в функции, показан на следующей блок-схеме.



### 31.6. Оператор Select Case

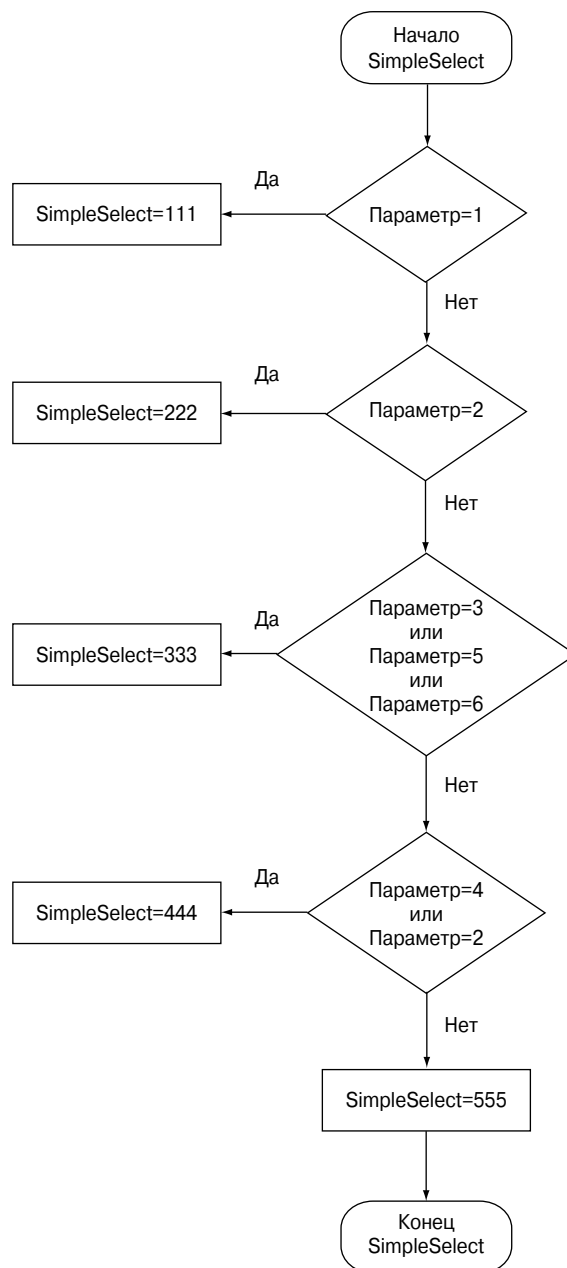
Оператор Select Case используется для выполнения одной из нескольких групп операторов в зависимости от значения некоторого выражения. Следующая функция демонстрирует его использование для очень простого случая. Подробности можно узнать в справочной системе VBA.

```
Function SimpleSelect(Parameter)
    Select Case Parameter
    Case 1
        SimpleSelect = 111
    Case 2
        SimpleSelect = 222
    Case 3, 5, 6
        SimpleSelect = 333
    Case 4, 2
        SimpleSelect = 444
    Case Else
        SimpleSelect = 555
    End Select
End Function
```

В Excel эта функция работает так, как показано ниже.

|    | A                                    | B              | C                               |
|----|--------------------------------------|----------------|---------------------------------|
| 1  | <b>Демонстрация оператора выбора</b> |                |                                 |
| 2  |                                      |                |                                 |
| 3  | <b>Параметр</b>                      | <b>Функция</b> |                                 |
| 4  | 0                                    | 555            | =simpleselect(A4)               |
| 5  | 1                                    | 111            |                                 |
| 6  | 2                                    | 222            | <-- Заметьте, что 222, а не 444 |
| 7  | 3                                    | 333            |                                 |
| 8  | 3,5                                  | 555            |                                 |
| 9  | 4                                    | 444            |                                 |
| 10 | 5                                    | 333            |                                 |
| 11 | 6                                    | 333            |                                 |

Ниже показана блок-схема работы функции.





### 31.7. Использование функций Excel в VBA

В программах на VBA можно активно использовать функции рабочих таблиц Excel. Покажем это на примере реализации биномиального распределения (несмотря на то, что такая функция уже есть в Excel). Распределение вероятностей биномиальной случайной величины определяется следующим образом:

$$\text{бином}(p, n, x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x},$$

где  $p$  — вероятность успешного исхода;  $x$  — количество успешных исходов;  $n$  — количество попыток. Биномиальный коэффициент, дающий количество различных сочетаний по  $x$  элементов из общего количества  $n$ , равен

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{(n-x)!x!}.$$

Для пояснения понятия сочетания предположим, что нужно выбрать группу из двух человек из числа восьми кандидатов, и зададимся вопросом, сколько различных групп можно сформировать таким образом. Формула даст следующий ответ:

$$\binom{8}{2} = \frac{8!}{6!2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \times 2 \cdot 1} = 28.$$

Этот расчет можно выполнить с помощью функции Excel ЧИСЛКОМБ (Combin), задав параметры: ЧИСЛКОМБ(8, 2). Данная функция используется в следующей функции на языке VBA:

```
Function Binomial(p, n, x)
    Binomial = Application.Combin(n, x) _
        * p ^ x * p ^ (n - x)
End Function
```

Как обычно, эту функцию можно использовать на листе таблицы.

|   | A                                            | B           | C                       | D |
|---|----------------------------------------------|-------------|-------------------------|---|
| 1 | <b>Вычисление биномиальных коэффициентов</b> |             |                         |   |
| 2 |                                              |             |                         |   |
| 3 | p                                            | 0,5         |                         |   |
| 4 | n                                            | 10          |                         |   |
| 5 | x                                            | 6           |                         |   |
| 6 | Функция                                      | 0,205078125 | <-- =Binomial(B3,B4,B5) |   |

Обратите внимание, что для вычисления биномиального коэффициента используется выражение Application.Combin(n, x). Как можно догадаться из названия (Application означает “приложение” — т.е. “программа” в контексте системы Windows), функция является встроенной и вызывается из таблицы Excel. Большинство функций Excel можно использовать в программах на VBA точно так же. В следующих разделах будут приведены некоторые примеры такого использования. Полный список функций можно найти в справочной системе.

Следует обратить внимание на знак подчеркивания (  ) в сочетании с пробелом перед ним в конце второй строки. Если набираемая строка становится слишком длинной, ее можно продолжить этим способом на новой строке. Что такое “слишком длинная” строка? Это вопрос личных предпочтений и стиля, но для наших целей, как правило, 70–80 символов уже слишком много. Вторая и третья строки функции Binomial с точки зрения синтаксиса VBA являются единой строкой.

Предположим, мы захотим вычислить с помощью нашей функции Binomial выражение Binomial(0,5,10,15). Эта попытка будет безуспешной, как показано ниже.

|   | A                                            | B      | C                       | D |
|---|----------------------------------------------|--------|-------------------------|---|
| 1 | <b>Вычисление биномиальных коэффициентов</b> |        |                         |   |
| 2 |                                              |        |                         |   |
| 3 | p                                            | 0,5    |                         |   |
| 4 | n                                            | 10     |                         |   |
| 5 | x                                            | 15     |                         |   |
| 6 | Функция                                      | #ЗНАЧ! | <-- =Binomial(B3,B4,B5) |   |

Причина проблемы заключается в том, что при вычислении биномиального коэффициента  $\binom{n}{x}$  необходимо, чтобы  $x < n$ . В этом случае Excel по инициативе VBA выдает сообщение об ошибке — #ЗНАЧ! (#VALUE!). Сообщения об ошибках в Excel составляют отдельную, довольно сложную тему, которая по этой причине рассматривается в приложении к главе.

### 31.8. Использование своих функций внутри аналогичных

Свои собственные (т.е. определенные пользователем) функции можно использовать в других пользовательских функциях точно так же, как и стандартные функции Excel. Следующая функция служит заменой стандартной функции COMBIN (или ЧИСЛКОМБ). Ее определение таково:

$$c(n, x) = \frac{n!}{(n-x)!x!}.$$

Восклицательный знак  $n!$  обозначает функцию факториала, которая определена для всякого  $n \geq 0$  следующим образом:  $0! = 1$ ; при  $n > 0$   $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1$ .

Теперь напомним наши VBA-версии двух функций: факториала и функции ЧИСЛКОМБ (COMBIN).

```

1  Function HomeFactorial(n)
2      If Int(n) <> n Then
3          HomeFactorial = CVErr(xlErrValue)
4      ElseIf n < 0 Then
5          HomeFactorial = CVErr(xlErrNum)
6      ElseIf n = 0 Then
```

```

7         HomeFactorial = 1
8     Else
9         HomeFactorial = HomeFactorial(n - 1) * n
10    End If
11 End Function

```

Во второй строке проверяется, является ли введенное число целым, путем сравнения целой части  $n$  с самим  $n$ . Функция `Int` входит в число стандартных средств VBA. Если мы допустим ошибку, например выполним вызов функции в виде `HomeFactorial(3,3)`, то третья строка укажет Excel, что необходимо вернуть значение `#ЗНАЧ!` (`#VALUE!`). Аналогично, в четвертой и пятой строках выполняется проверка на неотрицательность; если введенное число отрицательно, в пятой строке возвращается значение `#ЧИСЛО!` (`#NUM!`). Более подробно работа с сообщениями об ошибках рассматривается в приложении к этой главе.

В девятой строке мы видим нечто новое: для вычисления возвращаемого значения функция вызывает сама себя. Этот прием называется рекурсией. Пример нашей функции в работе показан ниже.

|   | A                            | B                | C | D                        | E |
|---|------------------------------|------------------|---|--------------------------|---|
| 1 | <b>Демонстрация рекурсии</b> |                  |   |                          |   |
| 2 |                              |                  |   |                          |   |
| 3 | <b>N</b>                     | <b>Факториал</b> |   | <b>HomeFactorial(n)</b>  |   |
| 4 | 0                            | 1 <-- 1          |   | 1 <-- =HomeFactorial(A4) |   |
| 5 | 1                            | 1 <-- =B4*A5     |   | 1 <-- =HomeFactorial(A5) |   |
| 6 | 2                            | 2 <-- =B5*A6     |   | 2                        |   |
| 7 | 3                            | 6 <-- =B6*A7     |   | 6                        |   |
| 8 | 4                            | 24 <-- =B7*A8    |   | 24                       |   |
| 9 | 5                            | 120 <-- =B8*A9   |   | 120                      |   |

С помощью `HomeFactorial` уже можно написать VBA-версию функции `ЧИСЛКОМБ` (`COMBIN`), которую мы назовем `HomeCombin`:

```

Function HomeCombin(n, x)
    HomeCombin = HomeFactorial(n) / _
        (HomeFactorial(n - x) * _
        HomeFactorial(x))
End Function

```

И наконец, с помощью `HomeCombin` создаем VBA-версию функции биномиального распределения:

```

Function HomeBinom(n, x)
    If n < 0 Then
        HomeBinom = CVErr(xlErrValue) 'Возвращаем #ЗНАЧ!
    ElseIf x > n Or x < 0 Then
        HomeBinom = CVErr(xlErrNum) 'Возвращаем #ЧИСЛО!
    Else
        HomeBinom = HomeCombin(n, x) _
            * 0.5 ^ x * 0.5 ^ (n - x)
    End If
End Function

```

В этой функции продемонстрировано добавление комментариев в код. Комментарии в VBA начинаются с апострофа. Все, что идет после апострофа до конца строки, игнорируется. Не забудьте начинать каждую новую строку комментария с нового апострофа.

## Упражнения

1. Напишите функцию на языке VBA для вычисления  $f(x) = x^2 - 3$ .

|   | A                   | B | C                     | D |
|---|---------------------|---|-----------------------|---|
| 1 | <b>Упражнение 1</b> |   |                       |   |
| 2 |                     |   |                       |   |
| 3 | X                   |   |                       |   |
| 4 |                     | 1 | -2 <-- =Exercise1(A4) |   |
| 5 |                     | 2 | 1 <-- =Exercise1(A5)  |   |
| 6 |                     | 3 | 6 <-- =Exercise1(A6)  |   |

2. Напишите VBA-функцию для вычисления  $f(x) = \sqrt{2x^2} + 2x$ . Заметьте, что для вычисления корня есть два способа: функция Sqr языка VBA и операция возведения в степень  $^{\wedge}$ . Попробуйте оба способа.

|   | A                   | B             | C                    |
|---|---------------------|---------------|----------------------|
| 1 | <b>Упражнение 2</b> |               |                      |
| 2 |                     |               |                      |
| 3 | X                   | Exercise2     |                      |
| 4 |                     | 1 3,414213562 | <-- =Exercise2(A10)  |
| 5 |                     | 2 6,828427125 | <-- =Exercise2(A10)  |
| 6 |                     | 1 3,414213562 | <-- =Exercise2a(A12) |
| 7 |                     | 2 6,828427125 | <-- =Exercise2a(A13) |

3. Пусть некоторая акция имеет курс  $P_0$  в момент времени 0 и  $P_1$  в момент 1. В таком случае непрерывно начисляемая ставка дохода равна  $\ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right)$ . Реализуйте эту функцию на VBA. Есть два способа выполнить данный расчет: применить функцию Application.Ln либо функцию VBA Log.

|   | A                   | B   | C       | D                        |
|---|---------------------|-----|---------|--------------------------|
| 1 | <b>Упражнение 3</b> |     |         |                          |
| 2 |                     |     |         |                          |
| 3 | P0                  | P1  |         |                          |
| 4 | 100                 | 110 | 0,09531 | <-- =Exercise3(A21,B21)  |
| 5 | 100                 | 200 | 0,69315 | <-- =Exercise3(A22,B22)  |
| 6 | 100                 | 110 | 0,09531 | <-- =Exercise3a(A23,B23) |
| 7 | 100                 | 200 | 0,69315 | <-- =Exercise3a(A24,B24) |

4. Банк предлагает клиентам различные годовые процентные ставки в зависимости от суммы вклада:
- для вкладов до 1000 долл. — 5,5%;
  - для вкладов от 1000 до 10 000 долл. — 6,3%;
  - для вкладов от 10 000 до 100 000 долл. — 7,3%;
  - для всех остальных вкладов — 7,8%.

Напишите функцию `Interest(Deposit)`, т.е. вычисление процентной ставки в зависимости от величины вклада, на Visual Basic. Для этой цели подойдет как блочный оператор `If`, так и `Select Case`.

|    | A                   | B     | C                   |
|----|---------------------|-------|---------------------|
| 1  | <b>Упражнение 4</b> |       |                     |
| 2  |                     |       |                     |
| 3  | Вклад               |       |                     |
| 4  | -1                  | #3НАЧ | <-- =Interest(A34)  |
| 5  | 100                 | 5,50% | <-- =Interest(A35)  |
| 6  | 1100                | 6,30% |                     |
| 7  | 9999,99             | 6,30% |                     |
| 8  | 10000               | 6,30% |                     |
| 9  | 10000,001           | 7,30% |                     |
| 10 | 100000,001          | 7,80% |                     |
| 11 | -1                  | #3НАЧ | <-- =Interesta(A41) |
| 12 | 100                 | 5,50% | <-- =Interesta(A42) |
| 13 | 1100                | 6,30% |                     |
| 14 | 9999,99             | 6,30% |                     |
| 15 | 10000               | 6,30% |                     |
| 16 | 10000,001           | 7,30% |                     |
| 17 | 100000,001          | 7,80% |                     |

5. Используя функцию из упражнения 4, напишите функцию `NewDFV(Deposit, Years)`, которая бы возвращала будущую стоимость заданного вклада в банке (параметр `Deposit`) по прошествии заданного срока в годах (параметр `Years`) в предположении, что накопленные проценты также помещаются в банк. Например, значение `NewDev(10000, 10)` равно  $10000 \times (1,063)^{10}$ .

|   | A                   | B    | C        | D                    |
|---|---------------------|------|----------|----------------------|
| 1 | <b>Упражнение 5</b> |      |          |                      |
| 2 |                     |      |          |                      |
| 3 | Вклад               | Годы |          |                      |
| 4 | 10000               | 10   | 18421,82 | <-- =NewDFV(A54,B54) |
| 5 | 10000,001           | 10   | 20230,06 | <-- =NewDFV(A55,B55) |

6. Инвестиционная компания предлагает облигации, привязанные к индексу FT100. В срок погашения облигации компания возвращает ее номинальную стоимость плюс большую из следующих двух сумм: (а) номинальную стоимость, умноженную на величину колебания индекса; (б) 5% годовых с ежемесячным начислением. Например, если вложить в облигации сумму в 100 долл. в момент, когда индекс был равен 110, а через год погасить эти облигации при значении индекса 125, то по схеме (а) будет выплачена сумма  $100 + 100 \times (125 - 110)/110 = 113,636$ ; по схеме (б) получается меньшая сумма, которая составляет  $100 \times (1 + 0,05/12)^{12} = 105,116$ . Напишите на языке VBA функцию для расчета таких выплат под именем `Bond(Deposit, Years, FT0, FT1)`, где `Deposit` — сумма вклада; `Years` — срок в годах; `FT0` и `FT1` — начальное и конечное значения индекса.

|   | A                   | B    | C   | D      | E         | F                          |
|---|---------------------|------|-----|--------|-----------|----------------------------|
| 1 | <b>Упражнение 6</b> |      |     |        |           |                            |
| 2 |                     |      |     |        |           |                            |
| 3 | Вклад               | Годы | FT0 | FT1    |           |                            |
| 4 | 100                 | 1    | 110 | 125    | 113,636   | <-- =Bond(A67,B67,C67,D67) |
| 5 | 100                 | 1    | 110 | 100    | 105,116   | <-- =Bond(A68,B68,C68,D68) |
| 6 | 100                 | 12   | 110 | 125    | 181,985   | <-- =Bond(A69,B69,C69,D69) |
| 7 | 100                 | 12   | 110 | 1387,5 | 1 261,391 | <-- =Bond(A70,B70,C70,D70) |
| 8 | 100                 | 12   | 110 | 1387,5 | 1 261,395 | <-- =Bond(A71,B71,C71,D71) |

7. Напишите на языке VBA функцию ChooseBond(Deposit, Years, FT0, FT1), которая бы возвращала значение 1, если больший доход дает вклад в банк из упражнения 5, и значение 2, если его превосходит доход по облигациям упражнения 6.

|    | A                   | B    | C   | D      | E | F                                |
|----|---------------------|------|-----|--------|---|----------------------------------|
| 1  | <b>Упражнение 7</b> |      |     |        |   |                                  |
| 2  |                     |      |     |        |   |                                  |
| 3  | Вклад               | Годы | FT0 | FT1    |   |                                  |
| 4  | 100                 | 1    | 110 | 125    | 2 | <-- =ChooseBond(A79,B79,C79,D79) |
| 5  | 100                 | 1    | 110 | 110    | 1 |                                  |
| 6  | 100                 | 1    | 110 | 116,04 | 1 |                                  |
| 7  | 100                 | 1    | 110 | 116,05 | 2 |                                  |
| 8  | 100000              | 1    | 110 | 125    | 2 | <-- =ChooseBond(A83,B83,C83,D83) |
| 9  | 100000              | 1    | 110 | 110    | 1 |                                  |
| 10 | 100000              | 1    | 110 | 118,02 | 1 |                                  |
| 11 | 100000              | 1    | 110 | 118,03 | 2 |                                  |

8. Банк предлагает вкладчикам следующую сберегательную программу: взнос одной и той же суммы первого числа каждого месяца в течение заданного количества лет. Первого числа следующего за последним вкладом месяца деньги возвращаются вкладчику вместе с накопленными процентами. Банк декларирует годовую процентную ставку, но начисляет ее как сложный процент ежемесячно. Предлагается восемь различных ставок в зависимости от суммы ежемесячного взноса и срока сберегательной программы.

В следующей таблице расписана предлагаемая схема процентных ставок.

|                       | Суммы $\leq$ \$100/мес. | Суммы $>$ \$100/мес. |
|-----------------------|-------------------------|----------------------|
| На двухлетний срок    | 3,5%                    | 3,9%                 |
| На трехлетний срок    | 3,7%                    | 4,5%                 |
| На четырехлетний срок | 4,2%                    | 5,1%                 |
| На пятилетний срок    | 4,6%                    | 5,6%                 |

Напишите функцию двух аргументов DFV(Deposit, Years) для вычисления будущей стоимости такого капиталовложения.

|   | A                   | B    | C                 | D                 |
|---|---------------------|------|-------------------|-------------------|
| 1 | <b>Упражнение 8</b> |      |                   |                   |
| 2 |                     |      |                   |                   |
| 3 | Вклад               | Годы | Будущая стоимость |                   |
| 4 | 1                   | 1    | #ЧИСЛО!           | <-- =DFV(A43,B43) |
| 5 | 14,79846406         | 5    | 1000              | <-- =DFV(A44,B44) |
| 6 | 19,10180565         | 4    | 1000              | <-- =DFV(A45,B45) |
| 7 | 99,999999           | 2    | 2489,488348       | <-- =DFV(A46,B46) |
| 8 | 100,000001          | 2    | 2499,973424       | <-- =DFV(A47,B47) |

9. Используя данные из упражнения 8, напишите функцию двух аргументов `DEP(DfV, Years)`, которая бы возвращала сумму ежемесячного взноса, необходимого для накопления заданной суммы в будущем (через два, три, четыре или пять лет). *Примечание:* эта задача интереснее предыдущих; не забудьте, что процентная ставка зависит от суммы взноса.

|   | A                 | B    | C       | D                 |
|---|-------------------|------|---------|-------------------|
| 1 | Упражнение 9      |      |         |                   |
| 2 |                   |      |         |                   |
| 3 | Будущая стоимость | Годы | Вклад   |                   |
| 4 | -1000             | 2    | -40,169 | <-- =DEP(A53,B53) |
| 5 | 1000              | 5    | 14,7985 | <-- =DEP(A54,B54) |
| 6 | 1000              | 4    | 19,1018 | <-- =DEP(A55,B55) |
| 7 | 2489,488348       | 2    | 100     | <-- =DEP(A56,B56) |
| 8 | 2499,973424       | 2    | 100     | <-- =DEP(A57,B57) |

10. Числа Фибоначчи, названные в честь выдающегося средневекового итальянского математика Леонардо Фибоначчи (Leonardo Fibonacci, 1170–1230 гг.), определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}
 F(0) &= 0, \\
 F(1) &= 1, \\
 F(2) &= F(0) + F(1) = 1, \\
 F(3) &= F(1) + F(2) = 2, \\
 F(4) &= F(2) + F(3) = 3 \text{ и т.д.}
 \end{aligned}$$

Общая формула такова:  $F(n) = F(n - 2) + F(n - 1)$ .

## Приложение

Для сообщений об ошибках в Excel используются специальные кодовые значения. В состав библиотеки языка VBA входит функция `CVErr()`. Она преобразует передаваемое в нее значение в один из особых кодов, которыми в Excel обозначают ошибки. В Excel имеется несколько таких кодовых значений, с помощью которых можно сигнализировать о проблемных ситуациях. Например, приведенная ниже функция `NewMistake(x, y)` возвращает результат операции  $x/y$ . Однако если  $y = 0$ , то функция возвращает малопонятное сообщение об ошибке вида `#ДЕЛ/0! (#DIV/0!)`.

```

Function NewMistake(x, y)
    If y <> 0 Then NewMistake = x / y Else _
        NewMistake = CVErr(xlErrDiv0)
End Function

```

Во избежание путаницы все коды ошибок в VBA записываются в виде `xlErr...`. Поскольку печатная буква l (строчная L) по написанию похожа на цифру 1, было бы легче различать их, если бы разработчики из Microsoft писали заглавными буквами: `XLerr`. Но увы...

Результат работы функции `NewMistake` в Excel показан ниже.

|   | A                              | B | C          | D                          |
|---|--------------------------------|---|------------|----------------------------|
| 1 | <b>Демонстрация NewMistake</b> |   |            |                            |
| 2 |                                |   |            |                            |
| 3 | X                              | Y | NewMistake |                            |
| 4 | 1                              | 2 |            | 0,5 <-- =NewMistake(A4,B4) |
| 5 | 2                              | 1 |            | 2 <-- =NewMistake(A5,B5)   |
| 6 | 0                              | 1 |            | 0 <-- =NewMistake(A6,B6)   |
| 7 | 1                              | 0 | #ДЕЛ/0!    | <-- =NewMistake(A7,B7)     |

Коды ошибок и их описания приведены в следующей таблице. Для каждой ошибки приведен краткий пример в виде одного из рисунков после таблицы.

| <i>Код ошибки</i> | <i>Имя в VBA</i>        | <i>Возможные причины</i>                                            |
|-------------------|-------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| #ПУСТО! (#NULL!)  | <code>xlErrNull</code>  | В формуле задано пересечение двух непересекающихся областей таблицы |
| #ДЕЛ/0! (#DIV/0!) | <code>xlErrDiv0</code>  | Деление на ноль в формуле                                           |
| #ЗНАЧ! (#VALUE!)  | <code>xlErrValue</code> | Использование неправильного типа аргумента                          |
| #ССЫЛКА! (#REF!)  | <code>xlErrRef</code>   | Неправильная, несуществующая ссылка на ячейку                       |
| #ИМЯ? (#NAME?)    | <code>xlErrName</code>  | Microsoft Excel не распознает текстовый идентификатор в формуле     |
| #ЧИСЛО! (#NUM!)   | <code>xlErrNum</code>   | Какая-либо проблема с числовым значением в формуле или функции      |
| #Н/Д (#N/A)       | <code>xlErrNA</code>    | Недоступность значения для использования в функции или формуле      |



Ниже показаны распространенные примеры ошибок, перечисленных выше.

|    | A                           | B | C       | D                                      |
|----|-----------------------------|---|---------|----------------------------------------|
| 9  |                             |   |         |                                        |
| 10 | <b>Демонстрация #ПУСТО!</b> |   |         | Внимание: по ошибке пропущена запятая. |
| 11 |                             |   |         |                                        |
| 12 | 1                           | 4 | #ПУСТО! | <-- =СУММ(A12:A14,B12:B14)             |
| 13 | 2                           | 5 |         | 21 <-- =СУММ(A12:A14,B12:B14)          |
| 14 | 3                           | 6 |         | 21 <-- =СУММ(A12:B14)                  |

|    | A                          | B | C      | D                   |
|----|----------------------------|---|--------|---------------------|
| 17 | <b>Демонстрация #ЗНАЧ!</b> |   |        |                     |
| 18 |                            |   |        |                     |
| 19 | Ben                        |   | #ЗНАЧ! | <-- =A19+A20+A21    |
| 20 | 3                          |   |        | 5 <-- =SUM(A19:A21) |
| 21 | 2                          |   |        |                     |

|    | A                            | B        | C                         |
|----|------------------------------|----------|---------------------------|
| 47 | <b>Демонстрация #ССЫЛКА!</b> |          |                           |
| 48 |                              |          |                           |
| 49 |                              | #ССЫЛКА! | <-- =Лист1!B1             |
| 50 |                              |          |                           |
| 51 |                              |          |                           |
| 52 |                              |          | Лист1 в книге отсутствует |
| 53 |                              |          |                           |

|    | A                         | B     | C                    |
|----|---------------------------|-------|----------------------|
| 24 | <b>Демонстрация #ИМЯ!</b> |       |                      |
| 25 |                           |       |                      |
| 26 |                           | #ИМЯ? | <-- =Benny+3         |
| 27 |                           |       |                      |
| 28 |                           |       | Меня здесь не знают! |
| 29 |                           |       |                      |

|    | A                           | B       | C                     |
|----|-----------------------------|---------|-----------------------|
| 32 | <b>Демонстрация #ЧИСЛО!</b> |         |                       |
| 33 |                             |         |                       |
| 34 |                             | #ЧИСЛО! | <-- =ВСД(A34:A36,0,1) |

|    | A                        | B    | C                            |
|----|--------------------------|------|------------------------------|
| 38 | <b>Демонстрация #Н/Д</b> |      |                              |
| 39 |                          |      |                              |
| 40 | 3                        | #Н/Д | <-- =ВПР(2,A39:A42,1)        |
| 41 | 4                        |      | 2 <-- =ВПР(2,A39:A42,1,ЛОЖЬ) |
| 42 | 1                        | #Н/Д | <-- =ВПР(2,A39:A42,1,ИСТИНА) |
| 43 | 2                        |      |                              |



---

## 32 Типы и циклы

---

### 32.1. Введение

В этой главе речь пойдет о типах переменных и функций. С помощью типизированных переменных и функций программу можно сделать более удобочитаемой, быстродействующей и экономичной в смысле использования памяти. (Термин “типизированная” означает “имеющая определенный, заданный тип”.) В разделе 32.5 рассматриваются циклические программные структуры, с помощью которых программа может выполнять те или иные операции повторно, по несколько раз.

---

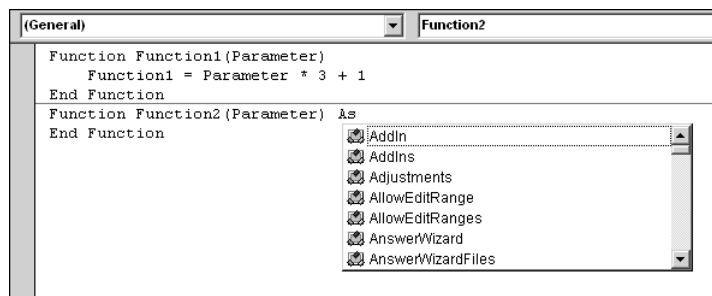
### 32.2. Использование типа

При вызове функции из листа электронной таблицы результатом ее работы является некоторое значение. С помощью средств VBA можно отнести это значение к определенной категории (*типу*) данных, чтобы в дальнейшем функция возвращала только данные этого типа. Все значения в VBA имеют определенный тип, получая его либо явным образом, либо по умолчанию. Значение, возвращаемое из функции, по умолчанию имеет тип *Variant*. Это категория значений, включающая в себя все остальные категории. Если же заранее известно, какого типа значения должна возвращать функция, то, следуя хорошему стилю программирования, желательно объявить этот тип явно. Благодаря этому функция работает быстрее и расходует меньше памяти.

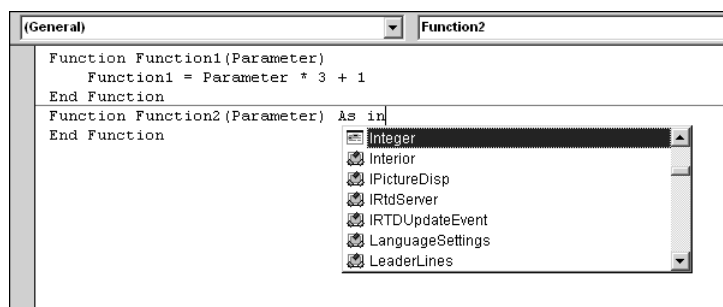
Чтобы функция возвращала значение определенного типа, следует добавить в конец строки объявления функции ключевое слово *As* и название типа после него. Для примера перепишем функцию *Function1* из главы 31 так, чтобы она возвращала только значения целого типа. (Эта функция умножает свой аргумент на три и прибавляет единицу.) Начнем с первой строки:

```
function Function2(Parameter) as
```

Как только после слова “*as*” вводится пробел, редактор VBA открывает список для выбора типа среди всех, ему известных.



По мере набора текста список вариантов выбора автоматически сужается.



Если в окне выбора выделено искомое ключевое слово, нажмите клавишу <Пробел>, и оно будет вставлено в текст автоматически. Обратите внимание, что мы не набираем ключевые слова Function и As с прописной буквы; редактор VBA сделает это сам. Продолжайте набор кода, и вся функция получится у вас такой:

```
Function Function2(Parameter) As Integer
    Function2 = Parameter * 3 + 1
End Function
```

Новую функцию можно использовать в Excel. Сравнивая возвращаемые ею результаты с результатами работы функции Function1 с помощью операции округления, можно заметить, что Function2 возвращает целочисленное значение.

|   | A                           | B       | C                  |
|---|-----------------------------|---------|--------------------|
| 1 | <b>Демонстрация функций</b> |         |                    |
| 2 |                             |         |                    |
| 3 | Параметр                    | Функция |                    |
| 4 | 1,1667                      | 4,5001  | <-- =Function1(A4) |
| 5 | 1,1667                      | 5       | <-- =Function2(A5) |
| 6 | 1,16666                     | 4,49998 | <-- =Function1(A6) |
| 7 | 1,1666                      | 4       | <-- =Function2(A7) |

Список типов Excel и VBA чрезвычайно обширен. Некоторые из наиболее важных типов рассматриваются в следующем разделе.

### 32.3. Переменные и их типы

В этом разделе рассматриваются две разновидности переменных: внутренние по отношению к функции и переменные-параметры. Обратимся к примеру:

```
Function Function3(Parameter)
    Temp = Parameter * 3 + 1
    Function3 = Temp
End Function
```

В функции `Function3` переменная `Parameter` как раз и является переменной-параметром, значение которой передается из приложения, вызывающего функцию (в частности, Excel). Параметры, как и большинство других переменных, распознаются только в функции, в которой они объявлены. А вот переменная `Temp` хранит возвращаемое из функции значение перед его присваиванием имени функции. Эта переменная является *внутренней* по отношению к `Function3`, и ее не может распознать ни Excel, ни другие функции VBA.

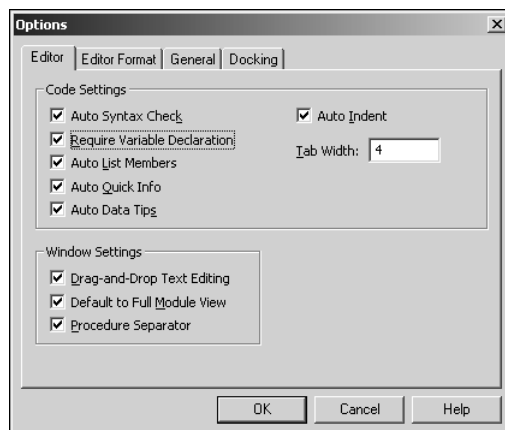
При любом присваивании значения какому-нибудь имени среда VBA автоматически создает соответствующую переменную. Именно это происходит в функции `Function3` — мы просто набираем текст `Temp = Parameter * 3 + 1`, а среда VBA сама создает переменную `Temp`. Однако позволять VBA всегда создавать переменные за вас не следует, поскольку небольшая опечатка может полностью изменить ожидаемый результат работы функции (в качестве примера см. функцию `Function4E` ниже в этом разделе). Намного лучше вначале заявить о своем намерении работать с такой-то переменной, а потом уже браться за ее использование. Переменные объявляются с помощью оператора `Dim`. В следующей функции этот оператор служит для объявления переменной `Temp` до ее использования.

```
Function Function4(Parameter)
    Dim Temp
    Temp = Parameter * 3 + 1
    Function4 = Temp
End Function
```

|    | A                    | B       | C                   |
|----|----------------------|---------|---------------------|
| 10 | Демонстрация функций |         |                     |
| 11 |                      |         |                     |
| 12 | Параметр             | Функция |                     |
| 13 | 1,1667               | 4,5001  | <-- =Function3(A13) |
| 14 | 1,1667               | 4,5001  | <-- =Function4(A14) |

Можно поручить среде VBA выдавать предупреждение в случае использования необъявленной переменной. Для этого следует вставить оператор `Option Explicit` в первую строку модуля. При наличии этого оператора всякое использование необъявленной переменной приведет к ошибке, а не к созданию новой переменной. Оператор `Option Explicit` оказывает действие на все процедуры, включенные в модуль. К сожалению, глобального оператора этого вида не существует, но можно поручить VBA вставлять оператор `Option Explicit` в начало любого нового модуля. Для этого выберите команду `Tools⇒Options`

((Сервис⇒Параметры) в локализованных приложениях MS Office) из меню VBA, установите флажок **Require Variable Declaration** (Обязательное объявление переменных) и щелкните на кнопке **OK**.



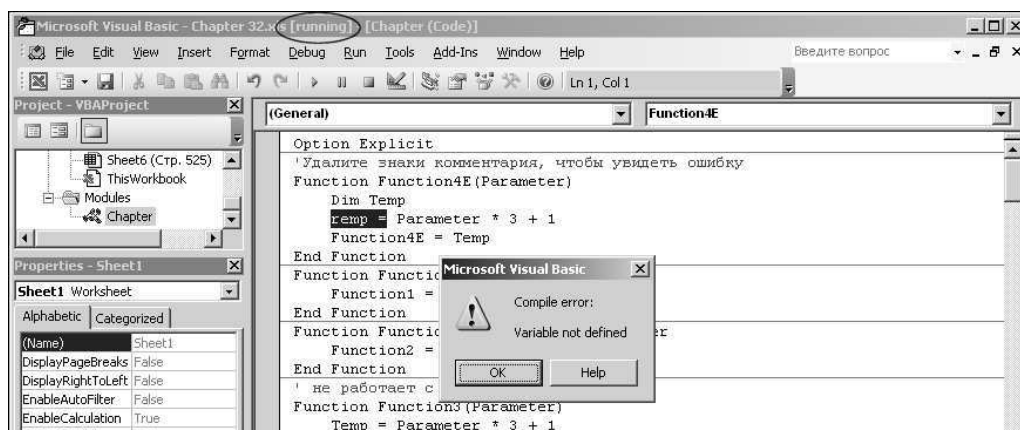
Следующая функция содержит опечатку:

```
Function Function4E(Parameter)
    Dim Temp
    remp = Parameter * 3 + 1
    Function4E = Temp
End Function
```

При отсутствии оператора **Option Explicit** в таблице Excel будет преспокойно показан следующий результат.

|    | A                           | B       | C                    |
|----|-----------------------------|---------|----------------------|
| 17 | <b>Демонстрация функций</b> |         |                      |
| 18 |                             |         |                      |
| 19 | Параметр                    | Функция |                      |
| 20 | 1,1667                      | 4,5001  | <-- =Function4(A20)  |
| 21 | 1,1667                      | 0       | <-- =Function4E(A21) |

Но если вставить оператор **Option Explicit** перед кодом функции и пересчитать лист таблицы, будет выдано следующее сообщение об ошибке выполнения: “Переменная не определена”.



Получив предупреждение о проблеме, можно щелкнуть на кнопке ОК, остановить выполнение и исправить ситуацию, заменив `temp` на `Temp`. (Напомним уже сказанное в главе 31: исправив ошибку в VBA, следует щелкнуть на кнопке с маленьким квадратиком на панели инструментов редактора VBA.)

Как и значения, переменные имеют типы. Переменные, которым не присвоен конкретный тип (как, например, `Temp`), получают по умолчанию тип `Variant`. Работа с переменными и функциями типа `Variant` требует чрезмерного расхода вычислительных ресурсов, поэтому рекомендуется всегда присваивать переменным и функциям определенный тип<sup>1</sup>.

Чтобы объявить переменную определенного типа, следует добавить к ее объявлению ключевое слово `As`. Приведенная далее функция является целочисленной версией функции `Function4`. Ее можно использовать в Excel, сравнивая результаты с работой функций `Function2` и `Function4`.

```
Function Function5(Parameter As Integer)_
    As Integer
    Dim Temp As Integer
    Temp = Parameter * 3 + 1
    Function5 = Temp
End Function
```

|    | A                           | B       | C                   |
|----|-----------------------------|---------|---------------------|
| 24 | <b>Демонстрация функций</b> |         |                     |
| 25 |                             |         |                     |
| 26 | Параметр                    | Функция |                     |
| 27 | 1,1667                      | 5       | <-- =Function2(A27) |
| 28 | 1,1667                      | 4,5001  | <-- =Function4(A28) |
| 29 | 1,1667                      | 4       | <-- =Function5(A29) |
| 30 | 1,16666                     | 4       | <-- =Function2(A30) |
| 31 | 1,16666                     | 4,49998 | <-- =Function4(A31) |
| 32 | 1,16666                     | 4       | <-- =Function5(A32) |

<sup>1</sup> Внимательный читатель заметит, что в нашей книге это правило частенько нарушалось! Увы...

**Краткий список типов VBA**

| <i>Тип данных</i>                                     | <i>Диапазон</i>                                                                                                                                  |
|-------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Byte (байтовый)                                       | От 0 до 255                                                                                                                                      |
| Boolean<br>(логический)                               | True (истина) либо False (ложь)                                                                                                                  |
| Integer (целый)                                       | От -32 768 до 32 767                                                                                                                             |
| Long (длинный<br>целый)                               | От -2 147 483 648 до 2 147 483 647                                                                                                               |
| Single (простой<br>вещественный)                      | От -3.403E38 до -1.401E-45 для отрицательных значений;<br>от 1.401E-45 до 3.403E38 для положительных значений                                    |
| Double (двойной<br>вещественный)                      | От -1.798E308 до -4.941E-324 для отрицательных значений;<br>от 4.941E-324 до 1.798E308 для положительных значений                                |
| Currency (денеж-<br>ный; масштабиро-<br>ванный целый) | От -922 337 203 685 477.5808 до 922 337 203 685 477.5807                                                                                         |
| Decimal<br>(десятичный)                               | ±79 228 162 514 264 337 593 543 950 335 без десятичной<br>точки;<br>±7.9228162514264337593543950 с 28-ю десятичными<br>позициями справа от точки |
| Date (дата)                                           | От 1 января 100 г. до 31 декабря 9999 г.                                                                                                         |
| String (строка<br>переменной длины)                   | От 0 до примерно двух миллиардов                                                                                                                 |
| String (строка<br>постоянной длины)                   | От 1 до примерно 65 400                                                                                                                          |
| Variant<br>(с числами)                                | Любое число в диапазоне вплоть до Double                                                                                                         |
| Variant<br>(с символами)                              | Тот же диапазон, что и для String переменной длины                                                                                               |

**32.4. Операции сравнения и логические операции**

Как правило, выражения-условия в операторе `If` строятся с использованием операций сравнения и/или логических операций. Ниже приведен список распространенных операций сравнения.



| Операция | Значение         |
|----------|------------------|
| <        | Меньше           |
| <=       | Меньше или равно |
| >        | Больше           |
| >=       | Больше или равно |
| =        | Равно            |
| <>       | Не равно         |

В следующей функции с помощью логических операций проверяется одновременное выполнение условий `Parameter1 < 10` и `Parameter2 > 15`:

```
Function AndDemo(Parameter1, Parameter2)
    If (Parameter1 < 10) And (Parameter2 > 15) _
    Then
        AndDemo = 3
    Else
        AndDemo = 12
    End If
End Function
```

Ниже приведены два примера ее работы.

|   | A                           | B                      | C |
|---|-----------------------------|------------------------|---|
| 1 | <b>Демонстрация AndDemo</b> |                        |   |
| 2 |                             |                        |   |
| 3 | Параметр1                   | 3 ? < 10 ?             |   |
| 4 | Параметр2                   | 12 ? > 15 ?            |   |
| 5 | Функция                     | 12 <-- =AndDemo(B3,B4) |   |

|    | A                           | B                     | C |
|----|-----------------------------|-----------------------|---|
| 1  | <b>Демонстрация AndDemo</b> |                       |   |
| 2  |                             |                       |   |
| 8  | Параметр1                   | 3 ? < 10 ?            |   |
| 9  | Параметр2                   | 33 ? > 15 ?           |   |
| 10 | Функция                     | 3 <-- =AndDemo(B8,B9) |   |

Подчеркнем еще раз: функция `AndDemo` проверяет выполнение сразу двух условий *одновременно*. Если оба условия выполняются, функция возвращает значение 3. Если это не так (т.е. если хотя бы одно из условий нарушается), то она возвращает значение 12. Обратите внимание, что оба условия записаны в скобках.

Следующая функция и фрагмент таблицы, в которой она выполняется, демонстрируют все четыре возможных сочетания двух условий и получившиеся составные условия:

```
Function AndDemoTable(Parameter1, Parameter2)
    AndDemoTable = Parameter1 And Parameter2
End Function
```

|    | A                                | B         | C      |
|----|----------------------------------|-----------|--------|
| 13 | <b>Демонстрация AndDemoTable</b> |           |        |
| 14 |                                  |           |        |
| 15 | Параметр1                        | Параметр2 |        |
| 16 | ИСТИНА                           | ИСТИНА    | ИСТИНА |
| 17 | ИСТИНА                           | ЛОЖЬ      | ЛОЖЬ   |
| 18 | ЛОЖЬ                             | ИСТИНА    | ЛОЖЬ   |
| 19 | ЛОЖЬ                             | ЛОЖЬ      | ЛОЖЬ   |

Функция OrDemo, приведенная ниже, проверяет выполнение хотя бы одного из двух условий.

```
Function OrDemo(Parameter1, Parameter2)
    If (Parameter1 < 10) Or (Parameter2 > 15) _
    Then
        AndDemo = 3
    Else
        AndDemo = 12
    End If
End Function
```

|   | A                          | B         | C                     | D |
|---|----------------------------|-----------|-----------------------|---|
| 1 | <b>Демонстрация OrDemo</b> |           |                       |   |
| 2 |                            |           |                       |   |
| 3 | Параметр1                  | Параметр2 |                       |   |
| 4 | 1                          | 1         | 3 <-- =OrDemo(A4,B4)  |   |
| 5 | 1                          | 30        | 3 <-- =OrDemo(A5,B5)  |   |
| 6 | 11                         | 1         | 12 <-- =OrDemo(A6,B6) |   |
| 7 | 11                         | 30        | 3 <-- =OrDemo(A7,B7)  |   |

Что же делает функция OrDemo? Она проверяет, выполняется ли *какое-нибудь* из условий  $Parameter1 < 10$  или  $Parameter2 > 15$ . Функция возвращает значение 12 в том и только в том случае, если не выполняются *сразу оба* условия. В противном случае (т.е. если выполняется хотя бы одно условие) возвращается значение 3. Заметим, что оба условия должны заключаться в скобки.

Следующая функция и таблица, в которой она выполняется, демонстрируют все четыре возможных сочетания двух условий и получившиеся составные условия:

```
Function OrDemoTable(Parameter1, Parameter2)
    OrDemoTable = Parameter1 Or Parameter2
End Function
```

|    | A                               | B         | C      | D                         |
|----|---------------------------------|-----------|--------|---------------------------|
| 10 | <b>Демонстрация OrDemoTable</b> |           |        |                           |
| 11 |                                 |           |        |                           |
| 12 | Параметр1                       | Параметр2 |        |                           |
| 13 | ИСТИНА                          | ИСТИНА    | ИСТИНА | <-- =OrDemoTable(A13,B13) |
| 14 | ИСТИНА                          | ЛОЖЬ      | ИСТИНА | <-- =OrDemoTable(A14,B14) |
| 15 | ЛОЖЬ                            | ИСТИНА    | ИСТИНА | <-- =OrDemoTable(A15,B15) |
| 16 | ЛОЖЬ                            | ЛОЖЬ      | ЛОЖЬ   | <-- =OrDemoTable(A16,B16) |

## 32.5. Циклы

Циклические программные конструкции применяются тогда, когда необходимо выполнить какие-либо операции в режиме повторения. Для достижения желаемого, как правило, существует несколько способов. Вообще говоря, существуют две основные циклические конструкции.

- *Цикл с проверкой условия в начале.* Условие цикла проверяется до того, как выполняются какие бы то ни было операции. Если при входе в цикл обнаруживается ложность условия, то операции не будут выполнены ни разу.
- *Цикл с проверкой условия в конце.* Условие цикла проверяется после каждого выполнения операций цикла. В любом случае операции будут выполнены как минимум один раз.

В языке VBA эти две основные конструкции реализованы во всевозможных вариациях с помощью оператора `Do`. В следующих подразделах для примера будет рассмотрена реализация функции факториала. По своему математическому определению она вычисляется следующим образом:

$$f(0) = 1; \quad f(1) = 1; \quad f(2) = 2 \times f(1) = 2; \dots f(n) = n \times f(n-1)$$

### 32.5.1. Оператор `Do While`

Оператор цикла `Do While` относится к семейству циклов с проверкой в начале. Один или несколько операторов в этом цикле выполняется повторно столько раз, сколько получится (может быть, и ни разу), — пока справедливо заданное условие. Примером служит следующая функция:

```
Function DoWhileDemo(N As Integer) As Integer
    Dim i, j As Integer
    If N < 2 Then
        DoWhileDemo = 1
    Else
        i = 1
        j = 1
        Do While i <= N
            j = j * i
            i = i + 1
        Loop
        DoWhileDemo = j
    End If
End Function
```

|   | A                        | B      | C                      | D |
|---|--------------------------|--------|------------------------|---|
| 1 | Демонстрация DoWhileDemo |        |                        |   |
| 2 |                          |        |                        |   |
| 3 | N                        |        |                        |   |
| 4 | 1                        |        | 1 <-- =DoWhileDemo(A4) |   |
| 5 | 1,4                      |        | 1 <-- =DoWhileDemo(A5) |   |
| 6 | 2                        |        | 2 <-- =DoWhileDemo(A6) |   |
| 7 | 7                        | 5040   | <-- =DoWhileDemo(A7)   |   |
| 8 | 8                        | #3H4C! | <-- =DoWhileDemo(A8)   |   |

Обратите внимание, что нецелые числа округляются до ближайшего целого при передаче их в функции через целочисленные параметры. Следует также заметить, что эта функция не может работать с параметрами больше 7, поскольку (см. раздел 32.3) тип Integer ограничен в своих значениях диапазоном от -32 768 до +32 767. В следующей функции эта проблема решена благодаря использованию типа Long, целочисленный диапазон которого значительно больше.

```
Function DoWhileDemo(N As Integer) As Long
    Dim i As Integer
    Dim j As Long
    If N < 2 Then
        DoWhileDemo = 1
    Else
        i = 1
        j = 1
        Do While i <= N
            j = j * i
            i = i + 1
        Loop
        DoWhileDemo = j
    End If
End Function
```

|   | A                        | B     | C                      | D |
|---|--------------------------|-------|------------------------|---|
| 1 | Демонстрация DoWhileDemo |       |                        |   |
| 2 |                          |       |                        |   |
| 3 | N                        |       |                        |   |
| 4 | 1                        |       | 1 <-- =DoWhileDemo(A4) |   |
| 5 | 1,4                      |       | 1 <-- =DoWhileDemo(A5) |   |
| 6 | 2                        |       | 2 <-- =DoWhileDemo(A6) |   |
| 7 | 7                        | 5040  | <-- =DoWhileDemo(A7)   |   |
| 8 | 8                        | 40320 | <-- =DoWhileDemo(A8)   |   |

### 32.5.2. Оператор Do...Loop While

Оператор Do...Loop While принадлежит к циклам с проверкой условия в конце. Он позволяет выполнить один или несколько операторов несколько раз, пока истинно заданное условие. Примером его работы служит функция

```
Function DoLoopWhileDemo(N As Integer) As Long
    Dim i As Integer
    Dim j As Long
    If N < 2 Then
        DoLoopWhileDemo = 1
```

```

Else
    i = 1
    j = 1
    Do
        j = j * i
        i = i + 1
    Loop While i <= N
    DoLoopWhileDemo = j
End If
End Function

```

|    | A                            | B     | C                           | D |
|----|------------------------------|-------|-----------------------------|---|
| 11 | Демонстрация DoLoopWhileDemo |       |                             |   |
| 12 |                              |       |                             |   |
| 13 | N                            |       |                             |   |
| 14 | 1                            | 1     | 1 <-- =DoLoopWhileDemo(A14) |   |
| 15 | 1,4                          | 1     | 1 <-- =DoLoopWhileDemo(A15) |   |
| 16 | 2                            | 2     | 2 <-- =DoLoopWhileDemo(A16) |   |
| 17 | 7                            | 5040  | <-- =DoLoopWhileDemo(A17)   |   |
| 18 | 8                            | 40320 | <-- =DoLoopWhileDemo(A18)   |   |

### 32.5.3. Оператор Do Until

Оператор Do Until относится к числу операторов с проверкой условия в начале. Такой цикл выполняется, пока заданное условие не является истинным (в частности, ни разу, если оно истинно с самого начала). Примером служит следующая функция:

```

Function DoUntilDemo(N As Integer) As Long
    Dim i As Integer
    Dim j As Long
    If N < 2 Then
        DoUntilDemo = 1
    Else
        i = 1
        j = 1
        Do Until i > N
            j = j * i
            i = i + 1
        Loop
        DoUntilDemo = j
    End If
End Function

```

|    | A                        | B     | C                       | D |
|----|--------------------------|-------|-------------------------|---|
| 21 | Демонстрация DoUntilDemo |       |                         |   |
| 22 |                          |       |                         |   |
| 23 | N                        |       |                         |   |
| 24 | 1                        | 1     | 1 <-- =DoUntilDemo(A24) |   |
| 25 | 1,4                      | 1     | 1 <-- =DoUntilDemo(A25) |   |
| 26 | 2                        | 2     | 2 <-- =DoUntilDemo(A26) |   |
| 27 | 7                        | 5040  | <-- =DoUntilDemo(A27)   |   |
| 28 | 8                        | 40320 | <-- =DoUntilDemo(A28)   |   |

### 32.5.4. Оператор Do...Loop Until

Оператор Do...Loop Until входит в число операторов цикла, условие в которых проверяется в конце. Входящие в цикл операторы повторяются до тех пор, пока заданное условие не станет истинным (как минимум один раз). Пример такого цикла реализован в следующей функции:

```
Function DoLoopUntilDemo(N As Integer) As Long
    Dim i As Integer
    Dim j As Long
    If N < 2 Then
        DoLoopUntilDemo = 1
    Else
        i = 1
        j = 1
        Do
            j = j * i
            i = i + 1
        Loop Until i > N
        DoLoopUntilDemo = j
    End If
End Function
```

|    | A                            | B     | C                               | D |
|----|------------------------------|-------|---------------------------------|---|
| 31 | Демонстрация DoLoopUntilDemo |       |                                 |   |
| 32 |                              |       |                                 |   |
| 33 | N                            |       |                                 |   |
| 34 | 1                            | 1     | 1 <-- =DoLoopUntilDemo(A34)     |   |
| 35 | 1,4                          | 1     | 1 <-- =DoLoopUntilDemo(A35)     |   |
| 36 | 2                            | 2     | 2 <-- =DoLoopUntilDemo(A36)     |   |
| 37 | 7                            | 5040  | 5040 <-- =DoLoopUntilDemo(A37)  |   |
| 38 | 8                            | 40320 | 40320 <-- =DoLoopUntilDemo(A38) |   |

### 32.5.5. Оператор While

Оператор While остался языку VBA в наследство от его предшественника — языка Quick Basic<sup>2</sup>. Этот оператор относится к числу циклов с проверкой условия в начале; операторы цикла выполняются, пока истинно заданное условие. Следующая функция демонстрирует его работу:

```
Function WhileDemo(N As Integer) As Long
    Dim i As Integer
    Dim j As Long
    If N <= 1 Then
        WhileDemo = 1
    Else
        i = 1
        j = 1
        While i <= N
            j = j * i
        End While
    End If
End Function
```

<sup>2</sup> Цитата из файла справочной системы Microsoft VBA: “Подсказка: цикл Do...Loop позволяет реализовать циклическое выполнение операций в более структурированном и удобном стиле”.

```

        i = i + 1
    Wend
    WhileDemo = j
End If
End Function

```

|    | A                      | B     | C                     | D |
|----|------------------------|-------|-----------------------|---|
| 41 | Демонстрация WhileDemo |       |                       |   |
| 42 |                        |       |                       |   |
| 43 | N                      |       |                       |   |
| 44 | 1                      | 1     | 1 <-- =WhileDemo(A44) |   |
| 45 | 1,4                    | 1     | 1 <-- =WhileDemo(A45) |   |
| 46 | 2                      | 2     | 2 <-- =WhileDemo(A46) |   |
| 47 | 7                      | 5040  | 7 <-- =WhileDemo(A47) |   |
| 48 | 8                      | 40320 | 8 <-- =WhileDemo(A48) |   |

### 32.5.6. Цикл For

Последняя разновидность операторов цикла, а именно оператор For, используется в основном для организации циклов, в которых количество повторений известно заранее. Далее приведены примеры функций, реализующих разные варианты цикла For.

```

Function ForDemo1(N As Integer) As Long
    Dim i As Integer
    Dim j As Long
    If N <= 1 Then
        ForDemo1 = 1
    Else
        j = 1
        For i = 1 To N Step 1
            j = j * i
        Next i
        ForDemo1 = j
    End If
End Function

```

|    | A                     | B     | C                    | D |
|----|-----------------------|-------|----------------------|---|
| 51 | Демонстрация ForDemo1 |       |                      |   |
| 52 |                       |       |                      |   |
| 53 | N                     |       |                      |   |
| 54 | 1                     | 1     | 1 <-- =ForDemo1(A54) |   |
| 55 | 1,4                   | 1     | 1 <-- =ForDemo1(A55) |   |
| 56 | 2                     | 2     | 2 <-- =ForDemo1(A56) |   |
| 57 | 7                     | 5040  | 7 <-- =ForDemo1(A57) |   |
| 58 | 8                     | 40320 | 8 <-- =ForDemo1(A58) |   |

Смысловый фрагмент оператора For с ключевым словом Step можно опустить, если (как в нашем случае) приращение равно 1:

```

For i = 1 To N
    j = j * i
Next i

```

Если необходимо, чтобы отсчет в цикле велся в обратном порядке, можно сделать аргумент Step отрицательным, что и показано в следующей функции:

```

Function ForDemo2(N As Integer) As Long
    Dim i As Integer
    Dim j As Long
    If N <= 1 Then
        ForDemo2 = 1
    Else
        j = 1
        For i = N To 1 Step -1
            j = j * i
        Next i
        ForDemo2 = j
    End If
End Function

```

|    | A                            | B     | C                    | D |
|----|------------------------------|-------|----------------------|---|
| 61 | <b>Демонстрация ForDemo2</b> |       |                      |   |
| 62 |                              |       |                      |   |
| 63 | N                            |       |                      |   |
| 64 | 1                            |       | 1 <-- =ForDemo2(A64) |   |
| 65 | 1,4                          |       | 1 <-- =ForDemo2(A65) |   |
| 66 | 2                            |       | 2 <-- =ForDemo2(A66) |   |
| 67 | 7                            | 5040  | <-- =ForDemo2(A67)   |   |
| 68 | 8                            | 40320 | <-- =ForDemo2(A68)   |   |

Из цикла For можно выйти преждевременно с помощью оператора Exit For, как показано в следующей функции:

```

Function ExitForDemo(Parameter1, Parameter2)
    Dim i As Integer
    Dim Sum As Long
    Sum = 0
    For i = 1 To Parameter1
        Sum = Sum + i
        If Sum > Parameter2 Then Exit For
    Next i
    ExitForDemo = Sum
End Function

```

|    | A                               | B         | C                            | D |
|----|---------------------------------|-----------|------------------------------|---|
| 71 | <b>Демонстрация ExitForDemo</b> |           |                              |   |
| 72 |                                 |           |                              |   |
| 73 | Параметр1                       | Параметр2 |                              |   |
| 74 | 5                               | 22        | 15 <-- =ExitForDemo(A74,B74) |   |
| 75 | 6                               | 22        | 21 <-- =ExitForDemo(A75,B75) |   |
| 76 | 7                               | 22        | 28 <-- =ExitForDemo(A76,B76) |   |
| 77 | 8                               | 22        | 28 <-- =ExitForDemo(A77,B77) |   |



## Упражнения

1. Числа Фибоначчи, введенные в упражнении 10 главы 31, определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} F(0) &= 0, \\ F(1) &= 1, \\ F(2) &= F(0) + F(1) = 1, \\ F(3) &= F(1) + F(2) = 2, \\ F(4) &= F(2) + F(3) = 3 \text{ и т.д.} \end{aligned}$$

Общее определение таково:  $F(n) = F(n-2) + F(n-1)$ .

Перепишите функцию из упражнении 10 главы 31, не используя рекурсию.

|   | A               | B                 | C                  |
|---|-----------------|-------------------|--------------------|
| 1 | Числа Фибоначчи |                   |                    |
| 2 |                 |                   |                    |
| 3 | n               | Функция Fibonacci |                    |
| 4 | 1               | 1                 | <-- =Fibonacci(A4) |
| 5 | 2               | 1                 | <-- =Fibonacci(A5) |
| 6 | 3               | 2                 | <-- =Fibonacci(A6) |
| 7 | 6               | 8                 | <-- =Fibonacci(A7) |
| 8 | 12              | 144               | <-- =Fibonacci(A8) |
| 9 | 24              | 46368             | <-- =Fibonacci(A9) |

2. Напишите версию функции HomeFactorial (см. раздел 31.8) без использования рекурсии. *Подсказка:* работу функции факториала можно описать словами примерно как “факториал числа 6 — это произведение всех чисел от единицы до шести”.

|   | A         | B                     | C                       |
|---|-----------|-----------------------|-------------------------|
| 1 | Факториал |                       |                         |
| 2 |           |                       |                         |
| 3 | n         | Функция HomeFactorial |                         |
| 4 | -1        | 0                     | <-- =HomeFactorial(A15) |
| 5 | 0         | 0                     | <-- =HomeFactorial(A16) |
| 6 | 1         | 1                     | <-- =HomeFactorial(A17) |
| 7 | 2         | 2                     | <-- =HomeFactorial(A18) |
| 8 | 3         | 6                     | <-- =HomeFactorial(A19) |
| 9 | 8         | 40320                 | <-- =HomeFactorial(A20) |

3. Напишите функцию NewPV(CF, r), вычисляющую приведенную стоимость (present value — PV) заданного денежного потока CF (от cash flow) при процентной ставке r за пять периодов:

$$\text{NewPV}(CF, r) = \frac{CF}{(1+r)^1} + \frac{CF}{(1+r)^2} + \frac{CF}{(1+r)^3} + \frac{CF}{(1+r)^4} + \frac{CF}{(1+r)^5}.$$

|   | A             | B   | C             | D                   |
|---|---------------|-----|---------------|---------------------|
| 1 | Функция NewPV |     |               |                     |
| 2 |               |     |               |                     |
| 3 | CF            | r   | Функция NewPV |                     |
| 4 | 100,0000      | 10% | 379,0787      | <-- =NewPV(A26,B26) |
| 5 | 50,0000       | 10% | 189,5393      | <-- =NewPV(A27,B27) |
| 6 | 100,0000      | 1%  | 485,3431      | <-- =NewPV(A28,B28) |
| 7 | 50,0000       | 1%  | 242,6716      | <-- =NewPV(A29,B29) |

4. Перепишите функцию из упражнения 3 в виде BetterNewPV(CF, r, n), чтобы новая функция могла работать с  $n$  периодами.

|   | A                   | B   | C  | D                   | E                             |
|---|---------------------|-----|----|---------------------|-------------------------------|
| 1 | Функция BetterNewPV |     |    |                     |                               |
| 2 |                     |     |    |                     |                               |
| 3 | CF                  | r   | n  | Функция BetterNewPV |                               |
| 4 | 100,0000            | 10% | 5  | 379,0787            | <-- =BetterNewPV(A35,B35,C35) |
| 5 | 50,0000             | 10% | 5  | 189,5393            | <-- =BetterNewPV(A36,B36,C36) |
| 6 | 100,0000            | 1%  | 10 | 947,1305            | <-- =BetterNewPV(A37,B37,C37) |
| 7 | 50,0000             | 1%  | 10 | 473,5652            | <-- =BetterNewPV(A38,B38,C38) |

5. Банк предлагает различные варианты процентных ставок по кредитам. Ставка рассчитывается на основании размера периодической выплаты (CF) и следующей таблицы. Перепишите функцию из упражнения 4 в виде BankPV(CF, r, n), чтобы в ней вычислялась приведенная стоимость ссуды, взятой в банке.

Для периодической выплаты,  
меньшей или равной

Процентная ставка равна

100,00  
500,00  
1 000,00  
5 000,00  
1 000 000,00

$r$   
 $r = 0,5\%$   
 $r = 1,1\%$   
 $r = 1,7\%$   
 $r = 2,1\%$

|   | A              | B  | C | D              | E                        |
|---|----------------|----|---|----------------|--------------------------|
| 1 | Функция BankPV |    |   |                |                          |
| 2 |                |    |   |                |                          |
| 3 | CF             | r  | n | Функция BankPV |                          |
| 4 | \$100,00       | 5% | 5 | \$432,95       | <-- =BankPV(A44,B44,C44) |
| 5 | \$100,01       | 5% | 5 | \$439,04       | <-- =BankPV(A45,B45,C45) |
| 6 | \$1 000,00     | 5% | 5 | \$4 464,36     | <-- =BankPV(A46,B46,C46) |
| 7 | \$1 000,01     | 5% | 5 | \$4 540,79     | <-- =BankPV(A47,B47,C47) |
| 8 | \$5 000,00     | 5% | 5 | \$22 703,71    | <-- =BankPV(A48,B48,C48) |
| 9 | \$5 000,01     | 5% | 5 | \$22 964,11    | <-- =BankPV(A49,B49,C49) |

6. Банк предлагает различные варианты процентных ставок по сберегательным счетам. Ставка вычисляется по размеру периодического взноса на счет (CF) и следующей таблице.

Для периодического взноса

Процентная ставка равна

|                  |             |
|------------------|-------------|
| $\leq 100,00$    | $r$         |
| $\leq 500,00$    | $r + 0,5\%$ |
| $\leq 1\,000,00$ | $r + 1,1\%$ |
| $\leq 5\,000,00$ | $r + 1,7\%$ |
| $> 5\,000,00$    | $r + 2,1\%$ |

|   | A              | B  | C | D                                    | E |
|---|----------------|----|---|--------------------------------------|---|
| 1 | Функция BankFV |    |   |                                      |   |
| 2 |                |    |   |                                      |   |
| 3 | CF             | r  | n | Функция BankFV                       |   |
| 4 | \$100,00       | 5% | 5 | \$580,19 <-- =BankFV(A55,B55,C55)    |   |
| 5 | \$100,01       | 5% | 5 | \$588,86 <-- =BankFV(A56,B56,C56)    |   |
| 6 | \$1 000,00     | 5% | 5 | \$5 992,91 <-- =BankFV(A57,B57,C57)  |   |
| 7 | \$1 000,01     | 5% | 5 | \$6 099,47 <-- =BankFV(A58,B58,C58)  |   |
| 8 | \$5 000,00     | 5% | 5 | \$30 497,07 <-- =BankFV(A59,B59,C59) |   |
| 9 | \$5 000,01     | 5% | 5 | \$30 856,78 <-- =BankFV(A60,B60,C60) |   |

7. Другой банк предлагает прибавку процентной ставки по сберегательным счетам на 1%, если баланс счета составляет более 10 тыс. долл. Напишите функцию расчета будущей стоимости Bank1FV(CF, r, n) при реализации такой схемы.

|   | A               | B  | C | D                                     | E |
|---|-----------------|----|---|---------------------------------------|---|
| 1 | Функция Bank1FV |    |   |                                       |   |
| 2 |                 |    |   |                                       |   |
| 3 | CF              | r  | n | Функция Bank1FV                       |   |
| 4 | \$100,00        | 5% | 5 | \$580,19 <-- =Bank1FV(A66,B66,C66)    |   |
| 5 | \$1 000,00      | 5% | 5 | \$5 801,91 <-- =Bank1FV(A67,B67,C67)  |   |
| 6 | \$5 000,00      | 5% | 5 | \$29 691,39 <-- =Bank1FV(A68,B68,C68) |   |

8. Банк (см. упр. 7) изменил свою схему бонусов и теперь предлагает прирост процентной ставки согласно приведенной ниже таблице. Перепишите функцию Bank1FV(CF, r, n), отразив в ней эти изменения.

Баланс

Процентная ставка

|                   |             |
|-------------------|-------------|
| $\leq 1\,000,00$  | $r + 0,2\%$ |
| $\leq 5\,000,00$  | $r + 0,5\%$ |
| $\leq 10\,000,00$ | $r + 1,0\%$ |
| $> 10\,000,00$    | $r + 1,3\%$ |

|   | A               | B  | C | D                                     | E |
|---|-----------------|----|---|---------------------------------------|---|
| 1 | Функция Bank2FV |    |   |                                       |   |
| 2 |                 |    |   |                                       |   |
| 3 | CF              | r  | n | Функция BankFV                        |   |
| 4 | \$1 000,00      | 5% | 5 | \$5 884,33 <-- =Bank2FV(A74,B74,C74)  |   |
| 5 | \$1 000,01      | 5% | 5 | \$5 884,39 <-- =Bank2FV(A75,B75,C75)  |   |
| 6 | \$5 000,00      | 5% | 5 | \$30 033,93 <-- =Bank2FV(A76,B76,C76) |   |
| 7 | \$5 000,01      | 5% | 5 | \$30 033,99 <-- =Bank2FV(A77,B77,C77) |   |



---

## 33 Макросы и взаимодействие с пользователем

---

### 33.1. Введение

Макрос — это созданная пользователем небольшая программа на языке VBA, с помощью которой автоматизируются повторяющиеся либо рутинные операции. Макросы часто называются *подпрограммами* (*subroutines*); оба термина взаимозаменяемы. Некоторые из подпрограмм для взаимодействия с пользователем рассматриваются в разделах 33.3 и 33.4. В конце главы речь пойдет о модулях, кратко упоминавшихся в главе 31.

---

### 33.2. Макроподпрограммы

Первая строка макроса-подпрограммы задает ее имя и список параметров, если таковые предусмотрены, и очень напоминает первую строку функции:

```
Sub ИмяМакроса ( )
```

Последняя строка обозначает окончание макроса и поэтому соответственно выглядит так:

```
End Sub
```

Между первой и последней строками находятся операторы, выполняемые в макросе. Ниже приведен пример очень простого макроса, который выводит на экран сообщение в диалоговом окне.

```
Sub SayHi ( )  
    MsgBox "Привет", , "Это привет"  
End Sub
```

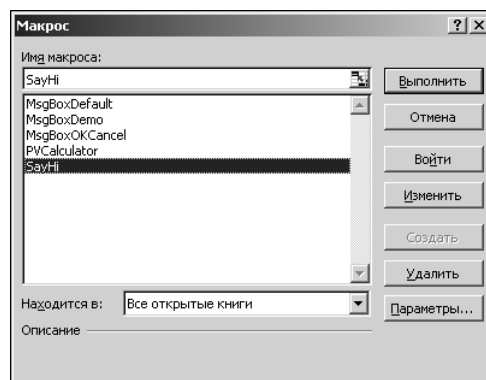
В этом макросе фигурирует встроенный макрос VBA — `MsgBox`, а также показан способ активации (вызова) макроса из программы на языке VBA. Вызов `MsgBox` оформлен в виде команды, после которой идет список аргументов, разделенных запятыми. Обратите внимание на синтаксис:

```
MsgBox "Привет", , "Это привет"
```

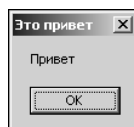
В этой командной строке присутствуют три аргумента.

- Первый аргумент — "Привет" — это выводимое в окне сообщение.
- Второй аргумент — пустой; обратите внимание на пробел между запятыми. С помощью этого аргумента можно задать кнопки для диалогового окна.
- Третий аргумент — слова "Это привет" — выводятся в виде заголовка диалогового окна.

Макрос можно активизировать (запустить) из Excel несколькими способами. Самый простой способ запуска — выбрать соответствующий пункт сервисного меню (Сервис⇒Макрос⇒Макросы или Tools⇒Macro⇒Macros) или нажать комбинацию клавиш <Alt+F8>. И в том и в другом случае откроется окно выбора макросов, в котором все имеющиеся в наличии макросы перечислены в алфавитном порядке. Найдите нужный макрос, щелкните на его имени, а затем на кнопке Выполнить (Run).



На экране появится окно, приведенное ниже.



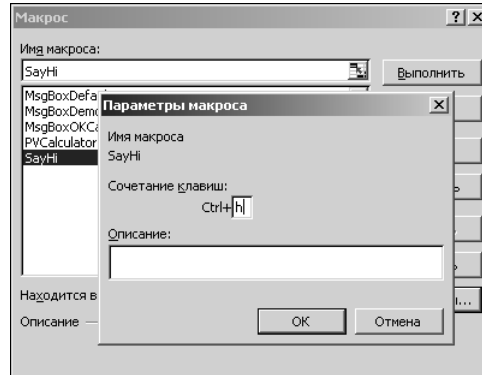
В этот момент работа Excel приостанавливается, и программа становится недоступной. Чтобы вернуться к работе с Excel, щелкните на кнопке ОК.

### 33.2.1. Комбинации клавиш для запуска макросов

Чтобы запускать какой-либо макрос быстрее, чем через окно, ему можно назначить комбинацию клавиш. Для этого выполните следующие действия.

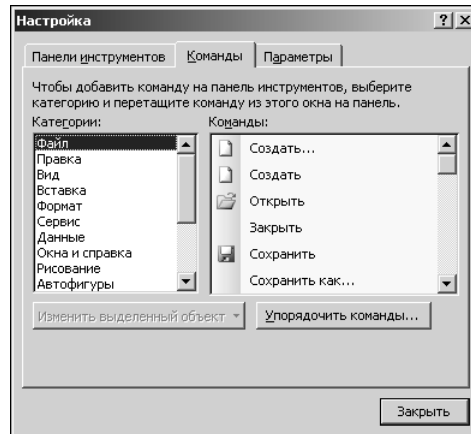
1. Щелкните на кнопке Параметры (Options) в окне выбора макросов.
2. Введите символ в соответствующее поле и щелкните на кнопке ОК.
3. Закройте окно выбора макросов, щелкнув на кнопке с крестиком в верхнем правом углу окна.

Теперь этот макрос можно запускать, нажимая заданную комбинацию клавиш (в нашем случае это <Ctrl+h>).

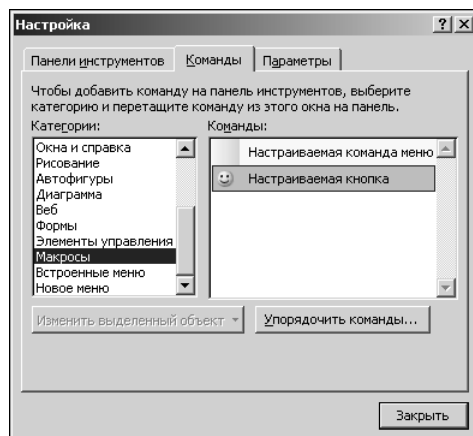


### 33.2.2. Добавление кнопки запуска макроса на панель инструментов

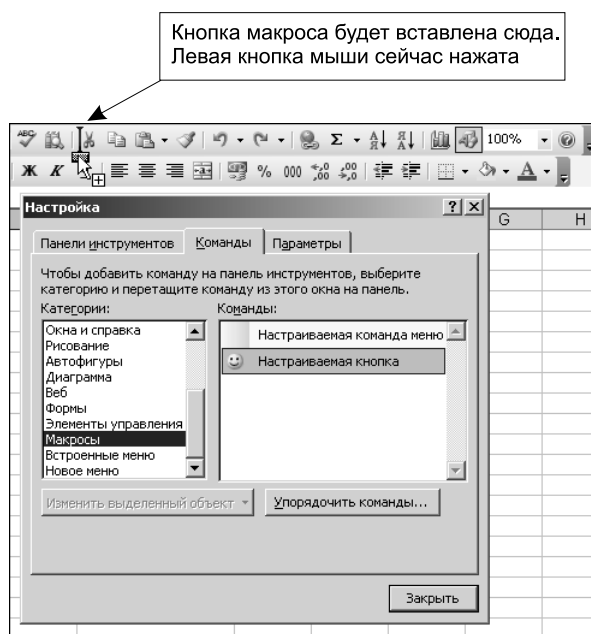
Макрос можно ассоциировать с кнопкой панели инструментов; после того, как это сделано, запуск выполняется с помощью щелчка на этой кнопке. Чтобы ассоциировать макрос SayHi с кнопкой, откройте меню панелей инструментов (Вид⇒Панели инструментов⇒Настройка или View⇒Toolbars⇒Customize) и перейдите на страницу Команды (Commands).



Найдите в списке Категории (Categories) этого окна пункт Макросы (Macros).

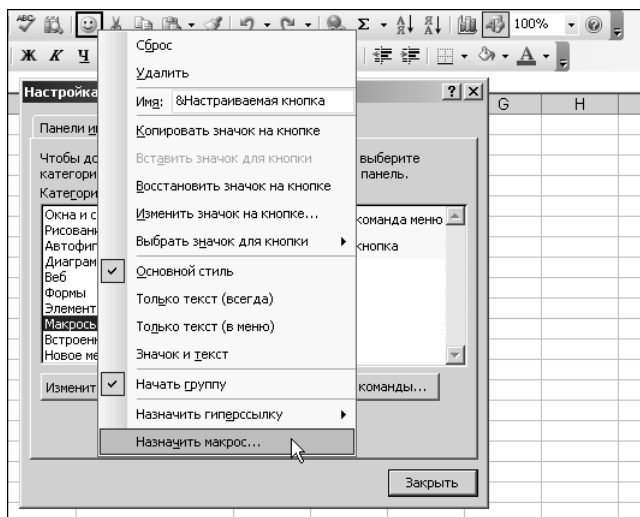


Выберите справа пункт Настраиваемая кнопка (Custom Button) и перетащите его на панель инструментов (т.е. наведите курсор на пункт списка, нажмите левую кнопку мыши и удерживайте ее во время перетаскивания).



Щелкните правой кнопкой мыши на вновь созданной кнопке и выберите из контекстного меню пункт Назначить макрос (Assign Macro).





Выберите из списка наш макрос и щелкните на кнопке ОК. Щелкните на кнопке Закрывать (Close). Теперь кнопка с улыбающейся рожицей на панели инструментов ассоциирована с макросом SayHi.

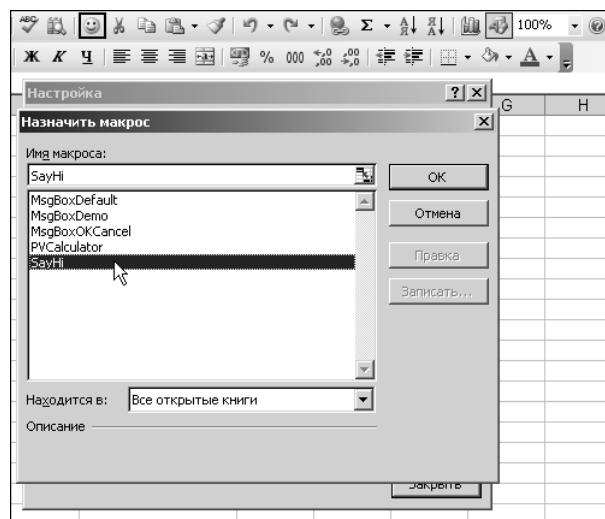
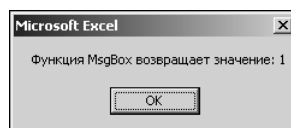
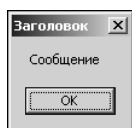


Рисунок на кнопке и всплывающая подсказка, которая появляется при наведении указателя мыши на кнопку, также поддаются настройке. Подробности можно найти в справочной системе Excel.

### 33.3. Вывод данных и функция MsgBox

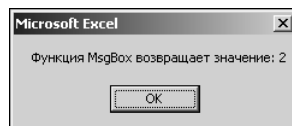
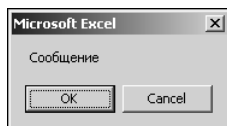
Функция MsgBox выводит на экран диалоговое окно с сообщением и возвращает значение, в зависимости от того, на какой кнопке в этом окне щелкнул пользователь. Некоторые варианты ее использования демонстрируются в приведенных ниже макросах.

```
Sub MsgBoxDefault()  
    Dim Temp As Integer  
    Temp = MsgBox("Сообщение", , _  
        "Заголовок")  
    MsgBox "Функция MsgBox возвращает значение: " _  
        & Temp  
End Sub
```



*Примечание:* по умолчанию диалоговое окно открывается только с одной кнопкой — OK. Заголовок окна по умолчанию — Microsoft Excel. После щелчка на кнопке OK функция MsgBox возвращает единицу.

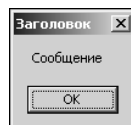
```
Sub MsgBoxOKCancel()  
    Dim Temp As Integer  
    Temp = MsgBox("Сообщение", vbOKCancel)  
    MsgBox "Функция MsgBox возвращает значение: " _  
        & Temp  
End Sub
```



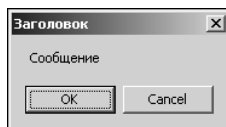
Как отмечалось ранее, второй аргумент MsgBox определяет, какие кнопки отображать в окне. В приведенной выше очередной версии макроса задан аргумент vbOKCancel, отчего в окне фигурируют две кнопки — OK и Cancel (Отмена). Обратите внимание, что после щелчка на кнопке Cancel функция MsgBox возвращает значение 2.

Далее приведен список символических констант, которые можно использовать на месте второго аргумента функции MsgBox, а также порождаемые ими диалоговые окна.

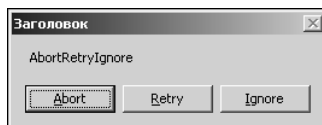
VbOKOnly



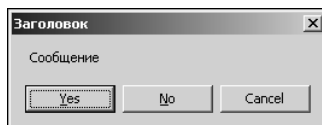
VbOKCancel



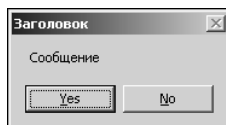
VbAbortRetryIgnore



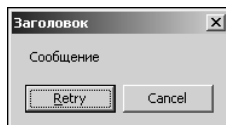
VbYesNoCancel



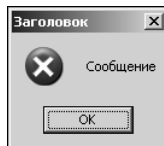
VbYesNo



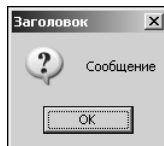
VbRetryCancel



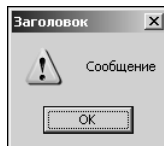
VbCritical



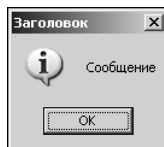
VbQuestion



VbExclamation



VbInformation



Ниже приведен список значений, которые может возвращать функция MsgBox.

| Константа | Значение | Описание                                              |
|-----------|----------|-------------------------------------------------------|
| vbOK      | 1        | Выполнен щелчок на кнопке OK                          |
| vbCancel  | 2        | Выполнен щелчок на кнопке Cancel (Отмена)             |
| vbAbort   | 3        | Выполнен щелчок на кнопке Abort (Завершить)           |
| vbRetry   | 4        | Выполнен щелчок на кнопке Retry (Попробовать еще раз) |
| vbIgnore  | 5        | Выполнен щелчок на кнопке Ignore (Игнорировать)       |
| vbYes     | 6        | Выполнен щелчок на кнопке Yes (Да)                    |
| vbNo      | 7        | Выполнен щелчок на кнопке No (Нет)                    |

### 33.4. Ввод данных и функция InputBox

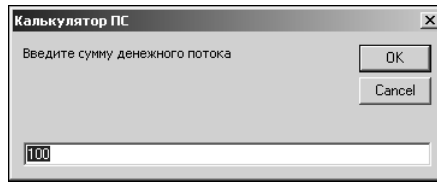
InputBox — это встроенная функция VBA, используемая для получения от пользователя буквенно-цифровой информации, которая затем помещается в переменную подпрограммы (макроса). Работа этой функции демонстрируется в следующем макросе-калькуляторе приведенной стоимости. Макрос PVCalculator вычисляет величину  $\sum_{t=1}^{10} \frac{ДП}{(1,05)^t}$ , где число ДП (CF) вводится пользователем.

```
Sub PVCalculator()
    Dim CF
    CF = InputBox("Введите сумму денежного потока", _
        "Калькулятор ПС", "100")
    MsgBox "Приведенная стоимость: " & CF & _
        " при 5% за 10 периодов равна: " & _
        Round(Application.PV(0.05, 10, -CF), 2), _
        vbInformation, "Калькулятор ПС"
End Sub
```

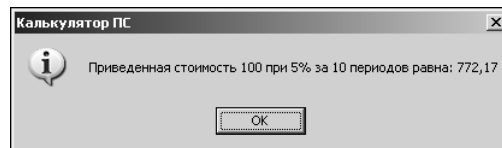
Обратите внимание на следующую конструкцию:

```
CF = InputBox("Введите сумму денежного потока", _
    "Калькулятор ПС", "100")
```

- "Введите ...", первый аргумент функции InputBox, представляет собой отображаемое в окне сообщение.
- Второй аргумент, "Калькулятор ПС", выводится в виде заголовка окна.
- Третий аргумент, "100", представляет собой значение по умолчанию в поле ввода.
- Если не заменить значение по умолчанию на какое-нибудь другое, то при запуске макроса на экран будет выведено окно, показанное ниже.



Сейчас можно заменить число 100 каким-нибудь другим. (В нашем примере мы ничего не меняли.) После щелчка на кнопке OK откроется окно, показанное ниже.



В этом макросе вводится новая операция VBA, обозначаемая знаком &. С ее помощью выполняется сцепление (конкатенация) операндов в одну строку символов. Такая важная операция заслуживает отдельной небольшой демонстрационной функции. Обратите внимание, что нестроковые операнды автоматически преобразуются в строковый формат:

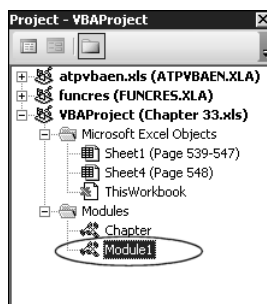
```
Function ConcatDemo(Parameter1, Parameter2)
    ConcatDemo = Parameter1 & Parameter2
End Function
```

|   | A                                      | B         | C         | D                      |
|---|----------------------------------------|-----------|-----------|------------------------|
| 1 | <b>Демонстрация функции ConcatDemo</b> |           |           |                        |
| 2 |                                        |           |           |                        |
| 3 | Параметр1                              | Параметр2 |           |                        |
| 4 | 1                                      | 2         | 12        | <-- =ConcatDemo(A4,B4) |
| 5 | Бен                                    | Джерри    | БенДжерри | <-- =ConcatDemo(A5,B5) |
| 6 | Бен                                    |           | 1 Бен1    | <-- =ConcatDemo(A6,B6) |
| 7 | Джерри                                 |           | 2 Джерри2 | <-- =ConcatDemo(A7,B7) |

### 33.5. Модули

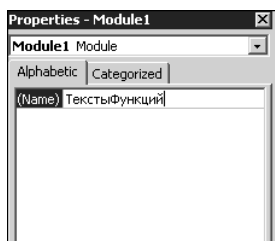
Среда VBA организует созданные пользователем функции и подпрограммы в блоки, именуемые модулями. В проект VBA, т.е. в ту часть книги Excel, которая содержит функции и подпрограммы, можно (а иногда просто необходимо) включить несколько модулей. Модули имеют свои имена; по умолчанию VBA присваивает модулю имя Module с номером, однако бывает полезно дать ему более информативное имя (что мы и сделали с модулем из файла, прилагаемого к настоящей книге).

Чтобы переименовать модуль (в редакторе VBA), выберите модуль в окне обзора структуры проекта (Project Explorer).

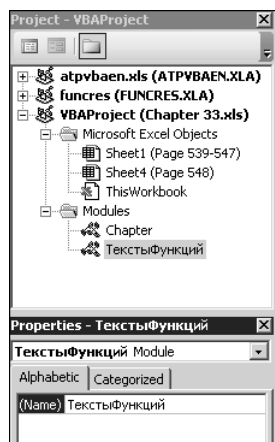


Если это окно отсутствует на экране, выберите пункт Project Explorer из меню View (Вид).

После выбора модуля откроется список его свойств. Щелкните на имени модуля (это единственное свойство в списке) и измените его; имя должно состоять из одного слова, набранного буквами и цифрами.



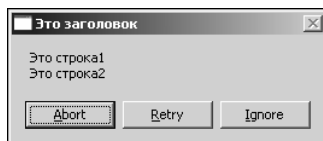
Чтобы имя было изменено, нажмите клавишу <Enter>. Обратите внимание на изменение в окне обзора.



## Упражнения

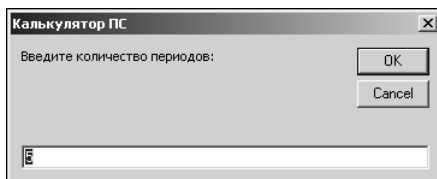
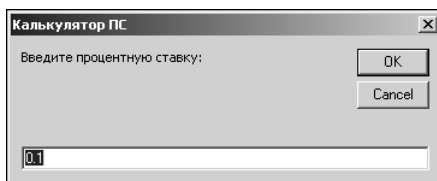
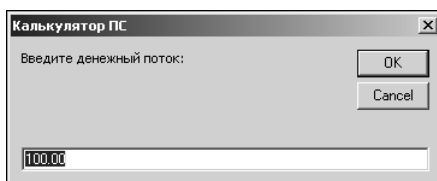
1. Напишите макрос, чтобы открыть следующее диалоговое окно. Окно должно открываться поверх всех остальных окон и не позволять пользователю делать что-либо, пока он не щелкнет на кнопке ОК.

*Подсказка:* придется использовать некоторые параметры функции MsgBox, не рассмотренные в этой главе. Обратитесь к справочной системе VBA.



2. Напишите макрос-калькулятор для расчета приведенной стоимости, аналогичный тому, который был показан в разделе 33.4. Однако, как показано далее, этот калькулятор должен запрашивать у пользователя значение денежного потока, процентную ставку и количество расчетных периодов. Результат расчета должен выводиться в диалоговом окне. Для всех аргументов должны быть подобраны разумные значения по умолчанию. Не используйте функцию Excel PC (PV), вместо нее напишите и используйте свою собственную. Напоминаем формулу:

$$\text{ПС}(\text{ДП}, r, n) = \sum_{i=1}^n \frac{\text{ДП}}{(1+r)^i}.$$



|    | A | B      | C                    | D |
|----|---|--------|----------------------|---|
| 19 |   |        |                      |   |
| 20 |   |        |                      |   |
| 21 |   | 100    |                      |   |
| 22 |   | 10%    |                      |   |
| 23 |   | 5      |                      |   |
| 24 |   | 379,08 | <-- =ПС(B22;B23;B21) |   |
| 25 |   |        |                      |   |
| 26 |   |        |                      |   |
| 27 |   |        |                      |   |
| 28 |   |        |                      |   |
| 29 |   |        |                      |   |
| 30 |   |        |                      |   |
| 31 |   |        |                      |   |

Для проверки правильности макроса можно повторить расчет с помощью функции ПС (PV), как это сделали мы.

3. Перепишите макрос из предыдущего упражнения так, чтобы его интерфейс выглядел, как на приведенных ниже рисунках. Некоторые из функций, необходимых для создания такого макроса, не рассматривались в этой главе. В нашей версии макроса применяются такие функции:

- Val — функция конвертирования строки цифр в число;
- Left — функция извлечения левой части строки;
- Right — функция извлечения правой части строки;
- FormatPercent — функция для форматирования числа;
- FormatCurrency — функция для форматирования числа.

Более подробная информация об этих функциях содержится в справочной системе VBA.

Новый калькулятор ПС

Введите денежный поток:

OK Cancel

100,00

Новый калькулятор ПС

Сумма денежного потока: 100,00

Введите процентную ставку:

OK Cancel

10,00%

Новый калькулятор ПС

Сумма денежного потока: 100,00

Процентная ставка: 10,0000%

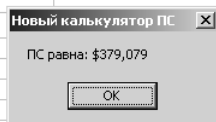
Введите количество периодов:

OK Cancel

5



|    | A | B          | C                    | D |
|----|---|------------|----------------------|---|
| 22 |   |            |                      |   |
| 23 |   |            |                      |   |
| 24 |   |            |                      |   |
| 25 |   |            |                      |   |
| 26 |   | 100,2500   |                      |   |
| 27 |   | 12,4500%   |                      |   |
| 28 |   | 13         |                      |   |
| 29 |   | \$630,0580 | <-- =ПС(B27;B28;B26) |   |



*Примечание:* на вашем компьютере символ денежной единицы может быть другим в зависимости от локализации.

4. Перепишите макрос из предыдущего упражнения так, чтобы он корректно работал с кнопкой **Cancel** (Отмена).

- Простая версия этого макроса должна завершать его работу после щелчка на кнопке **Cancel** на любом этапе работы.
- Более сложная версия должна позволять пользователю при этом ввести данные заново.
- Самая сложная версия нового макроса должна позволять пользователю ввести данные заново, при этом по умолчанию отображая предыдущие введенные значения.

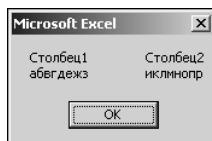
*Примечание:* последняя версия представляет собой упражнение потруднее; она содержит вложенные циклы, т.е. циклы внутри циклов.

5. Напишите макрос-калькулятор для расчета схемы выплат по займу. Макрос должен запрашивать у пользователя такие данные, как сумму займа, количество платежей и процентную ставку. Выплата предполагается *в конце* каждого расчетного периода. Данные, выводимые на экран, должны иметь примерно такой вид, как показано далее.

*Подсказки:*

- можно воспользоваться функцией Excel ПЛТ (PMT);
- может оказаться полезным приведенный ниже макрос для формирования табулированных строк.

```
Sub StringConcat()
    Dim S As String
    s = "Столбец1" & Chr(9) & "Столбец2"
    ' Chr(9) - символ табуляции
    s = s & Chr(13) & "абвгдежз" & Chr(9) & "иклмнопр"
    MsgBox S
End Sub
```



Пример работы макроса, который вам предстоит создать, приведен ниже.

Калькулятор выплат по займу

Введите сумму займа

1000.00

OK Cancel

Калькулятор выплат по займу

Сумма составляет 1000,00  
Введите количество выплат

5

OK Cancel

Калькулятор выплат по займу

Сумма составляет 1000,00  
Количество выплат равно 5  
Введите процентную ставку

5.0%

OK Cancel

Калькулятор выплат по займу

Сумма займа: 1000  
Количество выплат: 5  
Процентная ставка: 5,0000%

| Период | Выплата          |
|--------|------------------|
| 1      | 230,974798128268 |
| 2      | 230,974798128268 |
| 3      | 230,974798128268 |
| 4      | 230,974798128268 |
| 5      | 230,974798128268 |

OK

6. Перепишите макрос для расчета схемы выплат по займу так, чтобы он отображал разбиение выплат на проценты и возврат основной суммы. Диалоговые окна ввода данных здесь не приводятся для краткости.

Калькулятор выплат по займу

Сумма займа: 1000  
Количество выплат: 5  
Процентная ставка: 5,0000%

| Период | Баланс    | Выплата  | %       | Осн.сумма |
|--------|-----------|----------|---------|-----------|
| 1      | \$1000,00 | \$230,97 | \$50,00 | \$180,97  |
| 2      | \$819,03  | \$230,97 | \$40,95 | \$190,02  |
| 3      | \$629,00  | \$230,97 | \$31,45 | \$199,52  |
| 4      | \$429,48  | \$230,97 | \$21,47 | \$209,50  |
| 5      | \$219,98  | \$230,97 | \$11,00 | \$219,98  |

OK

7. Напишите макрос-калькулятор для расчета схемы выплат по займу; макрос должен запрашивать у пользователя сумму займа, сумму разовой выплаты и процентную ставку. Выплата производится в конце каждого расчетного пе-

риода. Макрос должен отображать разбиение выплат на проценты и возврат основной суммы. Очевидно, сумма последнего платежа может быть меньше (но не больше), чем указанная пользователем величина. Выводимые данные должны иметь примерно следующий вид (окна ввода не приведены для экономии места).

| Сумма займа: \$1000,00    Выплата: \$240,00    Процент.ставка: 10,0000% |           |          |          |           |
|-------------------------------------------------------------------------|-----------|----------|----------|-----------|
| Период                                                                  | Баланс    | Выплата  | %        | Ост.сумма |
| 1                                                                       | \$1000,00 | \$240,00 | \$100,00 | \$140,00  |
| 2                                                                       | \$860,00  | \$240,00 | \$86,00  | \$154,00  |
| 3                                                                       | \$706,00  | \$240,00 | \$70,60  | \$169,40  |
| 4                                                                       | \$536,60  | \$240,00 | \$53,66  | \$186,34  |
| 5                                                                       | \$350,26  | \$240,00 | \$35,03  | \$204,97  |
| 6                                                                       | \$145,29  | \$159,81 | \$14,53  | \$145,29  |

8. Несколько более сложная версия макроса из упражнения 7 выводит результаты на экран в показанном ниже, более удобном виде. Напишите эту версию макроса. *Примечание:* с этой целью полезно будет ознакомиться с возможностями функции Format по справочной системе.

| Сумма займа: \$1000,00    Выплата: \$240,00    Процент.ставка: 10,0000% |            |            |            |            |
|-------------------------------------------------------------------------|------------|------------|------------|------------|
| Период                                                                  | Баланс     | Выплата    | %          | Ост.сумма  |
| 1                                                                       | \$1 000,00 | \$0 240,00 | \$0 100,00 | \$0 140,00 |
| 2                                                                       | \$0 860,00 | \$0 240,00 | \$0 086,00 | \$0 154,00 |
| 3                                                                       | \$0 706,00 | \$0 240,00 | \$0 070,60 | \$0 169,40 |
| 4                                                                       | \$0 536,60 | \$0 240,00 | \$0 053,66 | \$0 186,34 |
| 5                                                                       | \$0 350,26 | \$0 240,00 | \$0 035,03 | \$0 204,97 |
| 6                                                                       | \$0 145,29 | \$0 159,81 | \$0 014,53 | \$0 145,29 |

9. Существует схема переменных выплат, согласно которой сумма периодического платежа изменяется на фиксированный процент в течение всего срока займа. Напишите соответствующую версию макроса-калькулятора схемы выплат из упражнения 8. Дополнительно ко всем запрашиваемым ранее данным этот макрос должен запрашивать у пользователя процентное изменение размера выплаты. Ниже показано, как должен выглядеть на экране результат работы макроса.

| Сумма займа: \$10000,00    Выплата: \$2000,00    Ставка: 10,00%    Рост выплат: 10,00% |             |             |             |             |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| Период                                                                                 | Баланс      | Выплата     | %           | Ост.сумма   |
| 1                                                                                      | \$10 000,00 | \$02 000,00 | \$01 000,00 | \$01 000,00 |
| 2                                                                                      | \$09 000,00 | \$02 200,00 | \$00 900,00 | \$01 300,00 |
| 3                                                                                      | \$07 700,00 | \$02 420,00 | \$00 770,00 | \$01 650,00 |
| 4                                                                                      | \$06 050,00 | \$02 662,00 | \$00 605,00 | \$02 057,00 |
| 5                                                                                      | \$03 993,00 | \$02 928,20 | \$00 399,30 | \$02 528,90 |
| 6                                                                                      | \$01 464,10 | \$01 610,51 | \$00 146,41 | \$01 464,10 |



---

# 34 Массивы

---

## 34.1. Введение

Массив — это группа переменных одного и того же типа под единым именем; обращение к отдельным членам такой группы выполняется по этому имени и по номеру-индексу. Хорошими примерами одно- и двумерных массивов служат векторы и матрицы. В начале этой главы мы рассмотрим простые массивы. Динамические массивы (размеры которых можно изменять в ходе выполнения программы) описаны в разделах 34.4–34.6. Заканчивается глава разделом об использовании массивов в качестве параметров и о соотношении между массивами и диапазонами таблиц Excel.

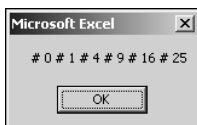
---

## 34.2. Простые массивы

Существует несколько способов объявления массивов, причем во всех используется оператор Dim. Простейший из них — это сообщить среде VBA максимальное значение, которое может принимать индекс массива. Если не указано другое, элементы массивов VBA всегда нумеруются начиная с индекса 0. В следующем макросе массив MyArray (т.е. попросту “мой массив”) содержит 6 элементов под номерами 0, 1, 2, ..., 5:

```
Sub ArrayDemo1()  
    Dim MyArray(5)  
    Dim i As Integer  
    Dim Temp As String  
    For i = 0 To 5  
        MyArray(i) = i * i  
    Next i  
    Temp = ""  
    For i = 0 To 5  
        Temp = Temp & " # " & MyArray(i)  
    Next i  
    MsgBox Temp  
End Sub
```

Выполнив макрос ArrayDemo1 на листе таблицы, получим результат, приведенный ниже.

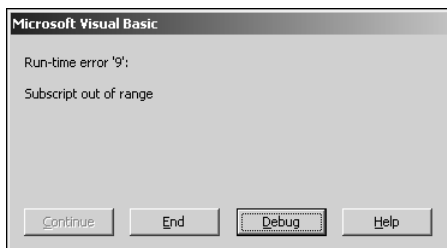


Обратите внимание на перечисленные ниже обстоятельства.

- Массив `MyArray` содержит шесть элементов (переменных), первый из которых — `MyArray(0)`, а последний — `MyArray(5)`. Все массивы в Excel всегда нумеруются начиная с нуля, если не оговорено иное (подробно оператор `Option Base` рассмотрен в разделе 34.2.3).
- Элемент массива воспринимается точно так же, как переменная того же типа, т.е. `MyArray(2)` и `MyArray(i-3)` — нормальные переменные (при условии, что выражение `i-3` — целочисленное, неотрицательное и не больше 5).
- Используется операция конкатенации (сцепления) строк `&`. Эта операция соединяет два своих операнда в одну строку. Если операнд конкатенации не является строкой, он вначале преобразуется в строку, а затем уже выполняется само сцепление.

При попытке обратиться к элементу массива, не входящему в него, VBA отреагирует сообщением об ошибке, как это продемонстрировано в следующем макросе:

```
Sub ArrayDemo2()  
    Dim MyArray(5)  
    Dim i As Integer  
    i = 6  
    MsgBox MyArray(i)  
End Sub
```



Пока что просто щелкните на кнопке **End** (Конец) и попытайтесь исправить ошибку. Полное рассмотрение возможностей отладчика выходит за рамки этой книги.

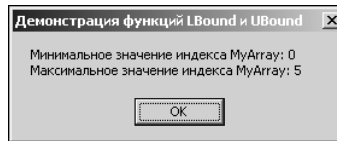
### 34.2.1. Функции `Lbound` и `Ubound`

`Lbound` и `Ubound` — это встроенные функции VBA, очень полезные при работе с массивами. Эти функции возвращают минимальное (`Lbound`) и максимальное (`Ubound`) значения, которые может принимать индекс массива. Их применение демонстрируется в следующем макросе; его диалоговое окно сообщает, что массив `MyArray` имеет нижний индекс 0 и верхний индекс 5:

```

Sub ArrayDemo3()
    Dim MyArray(5)
    MsgBox "Минимальное значение индекса MyArray: " _
        & LBound(MyArray) & Chr(13) _
        & "Максимальное значение индекса MyArray: " _
        & UBound(MyArray), , _
        "Демонстрация функций LBound и UBound"
End Sub

```



Обратите внимание, что перенос строки обозначается символом Chr(13).

### 34.2.2. Явное декларирование диапазонов индексов

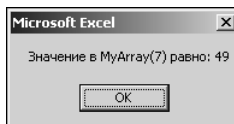
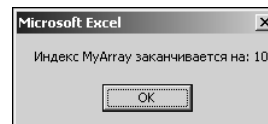
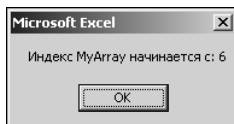
Иногда бывает удобнее создать массив, в котором индекс начинается не с нуля. Для создания такого массива необходимо объявить начальное и конечное значения его индекса, что и продемонстрировано в следующей функции:

```

Sub ArrayDemo4()
    Dim MyArray(6 To 10)
    Dim i As Integer
    MsgBox "Индекс MyArray начинается с: " _
        & LBound(MyArray)
    MsgBox "Индекс MyArray заканчивается на: " _
        & UBound(MyArray)
    For i = LBound(MyArray) To UBound(MyArray)
        MyArray(i) = i * i
    Next i
    MsgBox "Значение в MyArray(7) равно: " _
        & MyArray(7)
End Sub

```

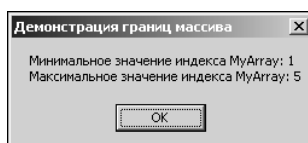
Ниже показаны выводимые макросом сообщения по порядку (чтобы закрыть одно окно и перейти к следующему, щелкните на кнопке OK).



### 34.2.3. Оператор Option Base

Поскольку большинство индексов в Excel (в противоположность VBA) начинаются с единицы, существует параметр модуля, при изменении которого индексы всех создаваемых массивов будут начинаться с единицы, даже если это не указано явно. Эта процедура продемонстрирована в следующем модуле:

```
Option Explicit
Option Base 1
Sub ArrayDemoBase1()
    Dim MyArray(5)
    MsgBox "Минимальное значение индекса MyArray: " & _
        & LBound(MyArray) & Chr(13) & _
        & "Максимальное значение индекса MyArray: " & _
        & UBound(MyArray), , _
        "Демонстрация границ массива"
End Sub
```



Оператор Option Base 1, как и другие операторы задания опций-параметров, должен находиться в модуле перед всеми подпрограммами и функциями. Его область действия распространяется на все макросы и функции модуля.

## 34.3. Многомерные массивы

Массивы могут иметь несколько индексов. В двумерном массиве первый индекс обозначает строки, а второй — столбцы. Количество индексов массива, разрешенное для объявления, формально не ограничено. В следующем макросе показано, как объявляется многомерный массив, а также продемонстрировано, что элементы массива могут (и даже должны) иметь конкретный тип:

```
Sub Matrix1()
    Dim MyMat(2, 2) As Integer
    Dim I, J As Integer
    Dim Temp As String
    For I = 0 To 2
        For J = 0 To 2
            MyMat(I, J) = I * J
        Next J
    Next I
    Temp = ""
    For I = 0 To 2
        For J = 0 To 2
            Temp = Temp & MyMat(I, J) & " # "
        Next J
    Next I
```



```

        Temp = Temp & Chr(13)
    Next I
    MsgBox Temp
End Sub

```

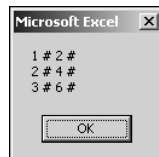


Как это продемонстрировано следующим макросом, любое количество размерностей многомерного массива можно объявить с явным указанием диапазона индексов:

```

Sub Matrix2()
    Dim MyMat1(1 To 3, 1 To 2) As Integer
    Dim I, J As Integer
    Dim Temp As String
    For I = 1 To 3
        For J = 1 To 2
            MyMat1(I, J) = I * J
        Next J
    Next I
    Temp = ""
    For I = 1 To 3
        For J = LBound(MyMat1, 2) To UBound(MyMat1, 2)
            Temp = Temp & MyMat1(I, J) & " # "
        Next J
        Temp = Temp & Chr(13)
    Next I
    MsgBox Temp
End Sub

```



Обратите внимание на использование второго аргумента (необязательного и по умолчанию равного единице) в функциях Ubound и Lbound (12-я строка макроса).

#### 34.4. Динамические массивы и оператор ReDim

Время от времени бывает удобно определить (и переопределить) размер массива прямо в ходе выполнения программы. *Динамическими массивами* называются такие массивы, размеры которых могут изменяться в процессе работы программы.

Динамические массивы объявляются с помощью оператора Dim, но без указания конкретного размера в скобках:

```
Dim ИмяМассива() As ТипМассива
```

Прежде чем пользоваться массивом, необходимо задать его размер с помощью оператора ReDim:

```
ReDim ИмяМассива(ЦелочисленноеВыражение)
```

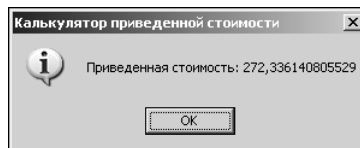
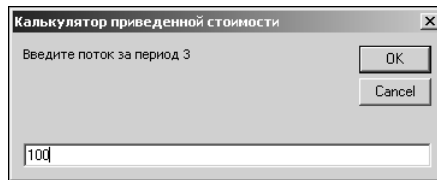
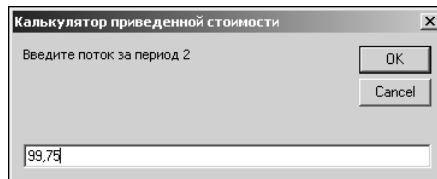
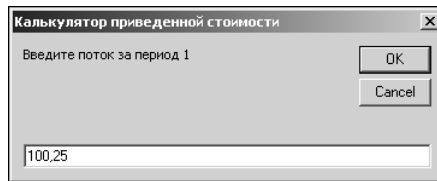
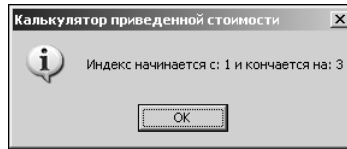
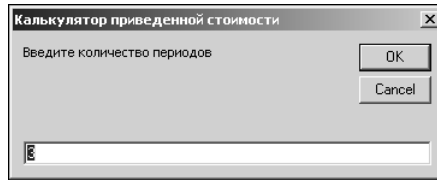
Оператор ReDim можно также использовать для изменения размера динамического массива (да и вообще любого массива). При изменении размера массива все данные, записанные в нем, удаляются. Чтобы сохранить старые данные, воспользуйтесь оператором ReDim Preserve:

```
ReDim Preserve ИмяМассива(ЦелочисленноеВыражение)
```

Следующий макрос вычисляет приведенную стоимость серии будущих денежных потоков. Для упрощения макроса процентная ставка фиксирована и составляет 5% за один расчетный период.

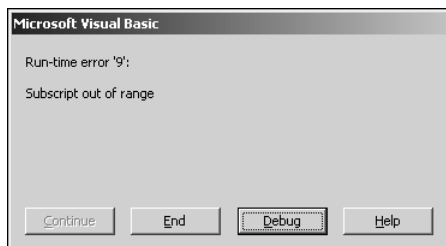
```
Sub DynPV()
    Dim n As Integer ' Кол-во периодов
    Dim CF() As Double ' Массив для ДП
    Dim Temp As Double
    Dim I As Integer
    n = InputBox("Введите количество периодов", _
        "Калькулятор приведенной стоимости", 3)
    ReDim CF(1 To n) ' Изменение размера массива
                        ' Только для демонстрационных целей
    MsgBox "Индекс начинается с: " & LBound(CF) & _
        " и кончается на: " & UBound(CF), _
        vbInformation, _
        "Калькулятор приведенной стоимости"
    For I = 1 To n
        CF(I) = InputBox("Введите поток за период " & _
            I, "Калькулятор приведенной стоимости", 0)
    Next I
    Temp = 0
    For I = 1 To n
        Temp = Temp + CF(I) / 1.05 ^ I
    Next I
    MsgBox "Приведенная стоимость: " & _
        Temp, vbInformation, _
        "Калькулятор приведенной стоимости"
End Sub
```

При запуске макроса на экране одно за другим появятся окна, показанные ниже.



При попытке обратиться к динамическому массиву, который еще не инициализирован, будет получен следующий результат:

```
Sub DynaArrayDemo1()  
    Dim DynArray() As Integer  
    MsgBox DynArray(0)  
End Sub
```



#### 34.4.1. Использование оператора ReDim Preserve

Как указывалось ранее, часть Preserve оператора ReDim предотвращает потерю данных в массиве при изменении его размеров. Использование оператора ReDim с модификатором Preserve подчиняется двум существенным ограничениям:

- невозможно изменить нижний предел индексов массива;
- невозможно изменить размерность массива.

Следующий макрос представляет собой интерактивный калькулятор приведенной стоимости. Он запрашивает у пользователя количество периодов, а затем переопределяет массив так, чтобы в него поместилась информация о денежных потоках за эти периоды. После вычисления приведенной стоимости пользователю предлагается выбор: либо завершить работу макроса, либо вычислить приведенную стоимость еще одной серии денежных потоков. Заодно макрос является демонстрацией работы операторов ReDim и Preserve.

```
Sub MoreDynPV()
    Dim n, OldN As Integer ' Количество периодов
    Dim CF() As Double ' Динамический массив для ДП
    Dim Temp As Double
    Dim I, Temp1 As Integer
    Do '***** Начинается основной цикл программы
        OldN = n
        n = InputBox("Введите количество периодов", _
            "Калькулятор приведенной стоимости", 3)
        Temp1 = MsgBox("Сохранить старые данные?", _
            vbQuestion + vbYesNo, _
            "Калькулятор приведенной стоимости")
        If Temp1 = vbYes Then
            ReDim Preserve CF(1 To n) ' Расширение
            ' массива с сохранением данных
        Else
            ReDim CF(1 To n) ' Расширение массива
            ' без сохранения данных
        End If
        For I = 1 To n
            CF(I) = InputBox("Введите поток за _
```

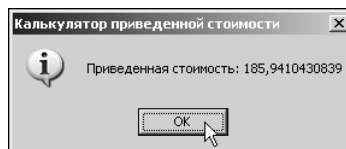
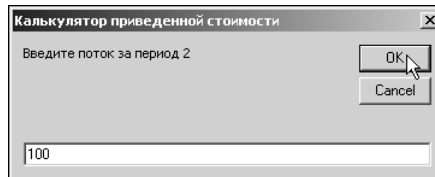
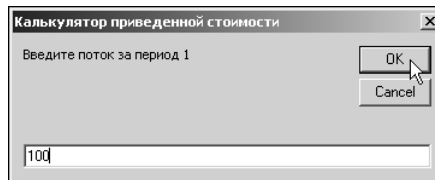
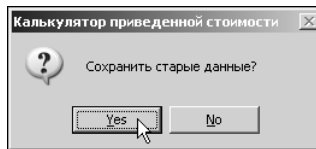
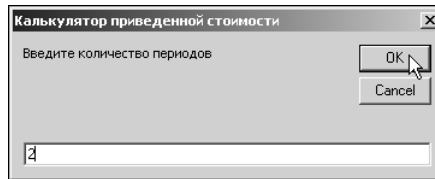
```

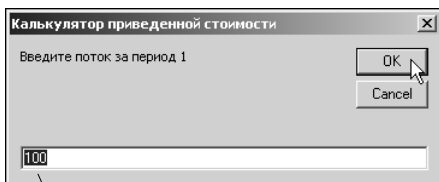
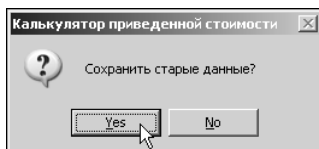
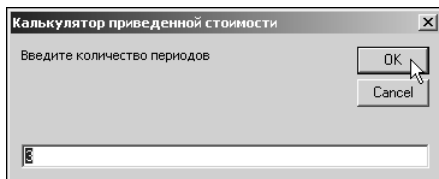
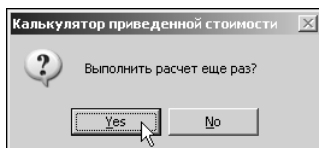
        период " & I, "Калькулятор _
        приведенной стоимости", CF(I))
Next I
Temp = 0
For I = 1 To n
    Temp = Temp + CF(I) / 1.05 ^ I
Next I
MsgBox "Приведенная стоимость: " & Temp, _
    vbInformation, _
    "Калькулятор приведенной стоимости"
Temp1 = MsgBox("Выполнить расчет еще раз?", _
    vbQuestion + vbYesNo, _
    "Калькулятор приведенной стоимости")
Loop While Temp1 = vbYes '***** Конец основного
                        ' цикла программы

End Sub

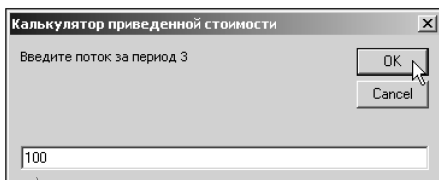
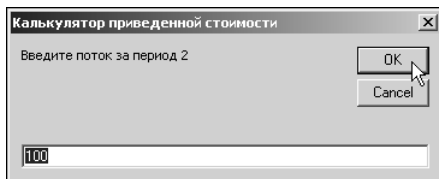
```

Один из возможных вариантов работы макроса показан далее; указатель мыши наведен на кнопку, на которой щелкает пользователь.

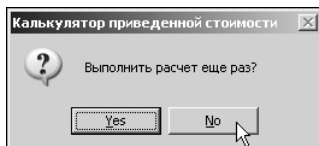
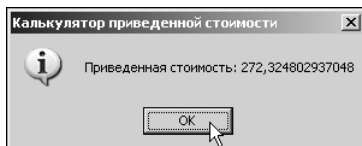




Значение по умолчанию

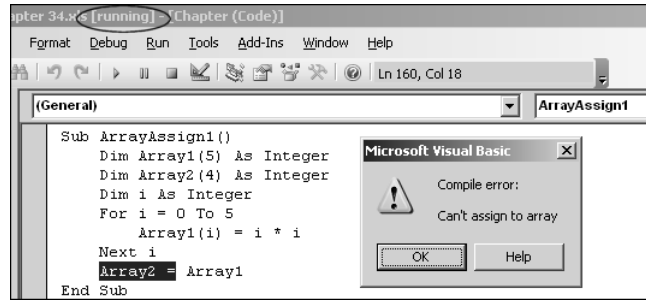


Это введенное значение.  
Значение по умолчанию – 0



### 34.5. Присваивание массивов

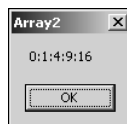
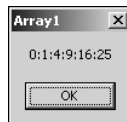
Работая с массивами, легко сделать следующую ошибку: в приведенном далее примере мы пытаемся сообщить среде VBA, что массив Array2 равен Array1. Нам этого сделать не позволят, как показано ниже.



Один из очевидных способов присвоения массивов — последовательно, элемент за элементом в цикле For.

```

Sub ArrayAssign()
    Dim Array1(5), Array2(4), I As Integer
    Dim Temp As String
    Temp = ""
    For I = 0 To 5: Array1(I) = I * I: Next I
    For I = 0 To 5
        Temp = Temp & Array1(I) & ":"
    Next I
    I = Len(Temp)
    Temp = Left(Temp, I - 1)
    MsgBox Temp, , "Array1"
    For I = 0 To 4: Array2(I) = Array1(I): Next I
    Temp = ""
    For I = 0 To 4
        Temp = Temp & Array2(I) & ":"
    Next I
    I = Len(Temp)
    Temp = Left(Temp, I - 1)
    MsgBox Temp, , "Array2"
End Sub
  
```



Обратите внимание на обстоятельства, приведенные ниже.

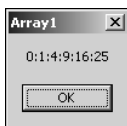
1. Для завершения строки оператора используется двоеточие (строка 5). Таким образом, можно разместить на одной строке два или больше коротких операторов.
2. Для получения длины строки используется функция Len (строка 9).
3. Для извлечения левой части строки используется функция Left (строка 18). Разумеется, существует и функция Right для правой части.

Другой, значительно более короткий, способ присваивания массивов рассматривается в следующем разделе.

### 34.6. Переменные типа Variant, содержащие массивы

Переменная типа Variant может содержать массив. Процедура для работы с ней несколько сложнее, чем при объявлении обычного объявления, но вознаграждение в виде экономичности коллективного присваивания (выраженной в экономии ресурсов памяти) стоит того. Следующий макрос демонстрирует использование переменной Variant, содержащей массив:

```
Sub VarArrayAssign()
    Dim Array1 ' Переменная-Variant
    Dim I As Integer, Temp As String
    Array1 = Array()
    Temp = ""
    ReDim Array1(5) As Integer
    For I = LBound(Array1) To UBound(Array1)
        Array1(I) = I * I
    Next I
    For I = LBound(Array1) To UBound(Array1)
        Temp = Temp & Array1(I) & ":"
    Next I
    I = Len(Temp)
    Temp = Left(Temp, I - 1)
    MsgBox Temp, , "Array1"
End Sub
```



Функция Array() в строке 4 возвращает массив. Операция присваивания в той же строке превращает переменную Array1 в массив (в текущий момент — неинициализированный). Двумя строками ниже оператор ReDim делает из Array1 пятиэлементный массив типа Integer.

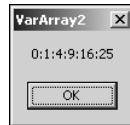
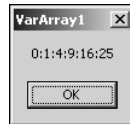
Окончательно операцию присваивания массивов демонстрирует следующий макрос (сравните его с ArrayAssign из предыдущего раздела):



```

Sub VarArrayAssign()
    Dim Array1 'Переменная-Variant
    Dim Array2 'Переменная-Variant
    Dim I As Integer
    Dim Temp As String
    Array1 = Array()
    Temp = ""
    ReDim Array1(5)
    For I = LBound(Array1) To UBound(Array1)
        Array1(I) = I * I
    Next I
    For I = LBound(Array1) To UBound(Array1)
        Temp = Temp & Array1(I) & ":"
    Next I
    I = Len(Temp)
    Temp = Left(Temp, I - 1)
    MsgBox Temp, , "VarArray1"
    Temp = ""
    '*****Внимание!
    Array2 = Array1 'Внимание!
    '*****Внимание!
    For I = LBound(Array2) To UBound(Array2)
        Temp = Temp & Array2(I) & ":"
    Next I
    I = Len(Temp)
    Temp = Left(Temp, I - 1)
    MsgBox Temp, , "VarArray2"
End Sub

```



### 34.7. Массивы как параметры функций

Массивы можно использовать в виде параметров функций. Следующий набор функций и подпрограмм представляет улучшенную версию макроса MoreDynPV. Обратите внимание, насколько легче написать главный макрос NewDynPV после того, как все вспомогательные задачи возложены на отдельные функции и подпрограммы.

Функция `ComputePV(CF(),n)` вычисляет приведенную стоимость серии денежных потоков, перечисленных в массиве чисел типа `Double`.

```
Function ComputePV(CF() As Double, n As Integer) _
    As Double
    Dim Temp As Double, i As Integer
    Temp = 0
    For i = 1 To n
        Temp = Temp + CF(i) / 1.05 ^ i
    Next i
    ComputePV = Temp
End Function
```

Подпрограмма `GetCF(CF(),n)` запрашивает у пользователя значения денежных потоков и помещает их в массив `CF`.

```
Sub GetCf(CF() As Double, n As Integer)
    Dim I As Integer
    For I = 1 To n
        CF(I) = InputBox("Введите поток за период " _
            & I, "Калькулятор приведенной стоимости", _
            CF(I))
    Next I
End Sub
```

Обратите внимание на тот факт, что в `ComputePV` и `GetCF` параметр `CF` приходится объявлять без указания информации об индексе. Эту информацию необходимо передавать в подпрограмму и функцию дополнительно. Вместо этого можно было бы использовать функции `LBound` и `UBound`.

Текст основного макроса таков:

```
Sub NewDynPV()
    Dim n As Integer        ' Количество периодов
    Dim OldN As Integer    ' Старое количество периодов
    Dim CF() As Double     ' Динамический массив для ДП
    Dim Temp As Double
    Dim I As Integer, Temp1 As Integer
    Dim FirstTime As Boolean
    FirstTime = True
    Do '***** Начало главного цикла
        OldN = n
        n = GetN()
        If FirstTime Then
            ReDim CF(1 To n)    ' Расширить массив
                               ' Старых данных нет
            FirstTime = False    ' теперь это не первый раз
        Else
            If KeepOld() Then
                ReDim Preserve CF(1 To n) ' Расширить
                                         'массив с сохранением старых данных
            Else
                ReDim CF(1 To n) ' Расширить массив,
                                ' не сохраняя старые данные
            End If
        End If
    Loop
```

```

        End If
    End If
    GetCf CF(), n
    Temp = ComputePV(CF, n)
    DisplayPV (Temp)
    Loop While AnotherGo() '*** Конец главного цикла
End Sub

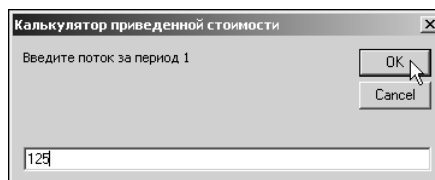
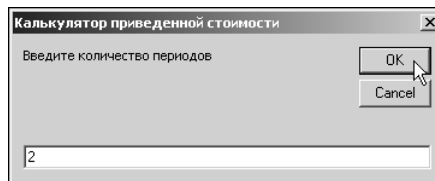
```

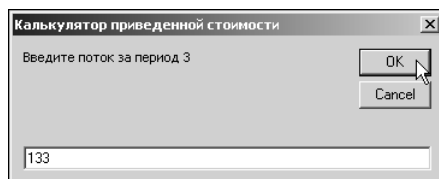
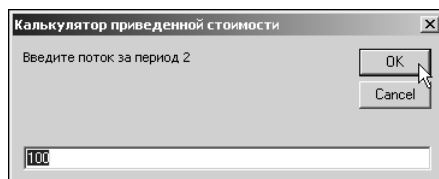
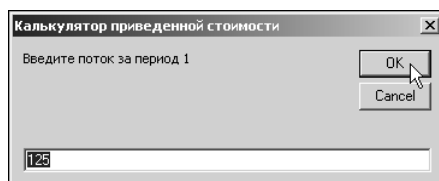
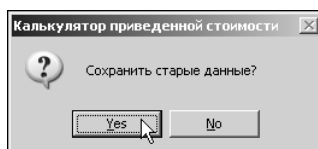
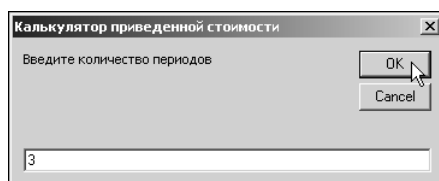
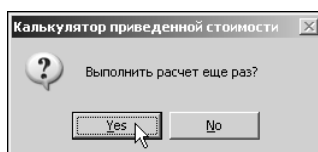
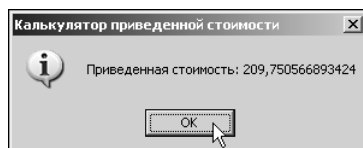
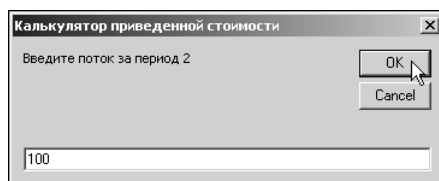
Ниже приведены вспомогательные функции и подпрограммы, выполняющие все служебные задачи.

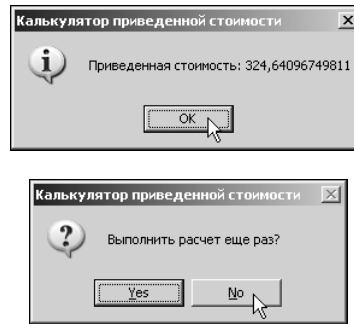
```

Function GetN() As Integer
    GetN = InputBox("Введите количество периодов", _
        "Калькулятор приведенной стоимости", 3)
End Function
Function AnotherGo() As Boolean
    Dim Temp As Integer
    Temp = MsgBox("Выполнить расчет еще раз?", _
        vbQuestion + vbYesNo, _
        "Калькулятор приведенной стоимости")
    AnotherGo = (Temp = vbYes)
End Function
Function KeepOld() As Boolean
    Dim Temp As Integer
    Temp = MsgBox("Сохранить старые данные?", _
        vbQuestion + vbYesNo, _
        "Калькулятор приведенной стоимости")
    KeepOld = (Temp = vbYes)
End Function
Sub DisplayPV(PV As Double)
    MsgBox "Приведенная стоимость: " & PV, _
        vbInformation, _
        "Калькулятор приведенной стоимости"
End Sub

```







### 34.7.1. Массивы из таблиц Excel

Массивы напоминают по структуре диапазоны ячеек в таблицах Excel. Иногда бывает необходимо написать функцию, которая бы принимала диапазон в качестве параметра. К сожалению, указанное сходство очень поверхностно, и для достижения цели необходимы некоторые дополнительные манипуляции. Объекты таблиц Excel — это обширная тема, выходящая за пределы тематики нашей книги, хотя некоторое введение в нее дается в главе 35. Следующая функция (являющаяся переработкой ComputePV из предыдущего раздела) может принимать в качестве параметра столбец-диапазон ячеек, поскольку ее параметр объявлен с типом Variant.

```
Function VarPV(CF As Variant) As Double
    Dim X As Variant, Temp As Double, _
        i As Integer
    X = CF
    Temp = 0
    For i = LBound(X) To UBound(X)
        Temp = Temp + X(i, 1) / 1.05 ^ i
    Next i
    VarPV = Temp
End Function
```

Объявление внутренней переменной X как Variant необходимо, равно как и присваивание X = CF в третьей строке функции.

Как это выглядит в Excel, показано ниже.

|   | A                          | B              | C               | D        | E                  |
|---|----------------------------|----------------|-----------------|----------|--------------------|
| 1 | Демонстрация функции VarPV |                |                 |          |                    |
| 2 |                            |                |                 |          |                    |
| 3 | Параметр CF                | Значение VarPV |                 | ЧПС      |                    |
| 4 | 100                        | 432,9477       | =VarPV(A4:A\$8) | 432,9477 | =ЧПС(0.05,A4:A\$8) |
| 5 | 100                        | 354,5951       | =VarPV(A5:A\$8) | 354,5951 | =ЧПС(0.05,A5:A\$8) |
| 6 | 100                        | 272,3248       | =VarPV(A6:A\$8) | 272,3248 | =ЧПС(0.05,A6:A\$8) |
| 7 | 100                        | 185,9410       | =VarPV(A7:A\$8) | 185,9410 | =ЧПС(0.05,A7:A\$8) |
| 8 | 100                        | #ЗНАЧИ         | =VarPV(A8:A\$8) | 95,2381  | =ЧПС(0.05,A8:A\$8) |

Обратите внимание, что единичная ячейка не является массивом. Диапазон ячеек всегда является двумерным массивом (даже если состоит из одного столбца или строки); его индексы всегда начинаются с единицы, а не с нуля.

Если мы хотим, чтобы наша функция имитировала работу функции Excel ЧПС (NPV), ее необходимо модифицировать:

```
Function VarPV(CF As Variant) As Double
    Dim X As Variant
    Dim Temp As Double
    Dim i As Integer
    X = CF
    Temp = 0
    If IsArray(X) Then
        For i = LBound(X) To UBound(X)
            Temp = Temp + X(i, 1) / 1.05 ^ i
        Next i
    Else
        Temp = X / 1.05
    End If
    VarPV = Temp
End Function
```

|   | A                          | B              | C                   | D        | E                       |
|---|----------------------------|----------------|---------------------|----------|-------------------------|
| 1 | Демонстрация функции VarPV |                |                     |          |                         |
| 2 |                            |                |                     |          |                         |
| 3 | Параметр CF                | Значение VarPV |                     | ЧПС      |                         |
| 4 | 100                        | 432,9477       | <-- =VarPV(A4:A\$8) | 432,9477 | <-- =ЧПС(0.05, A4:A\$8) |
| 5 | 100                        | 354,5951       | <-- =VarPV(A5:A\$8) | 354,5951 | <-- =ЧПС(0.05, A5:A\$8) |
| 6 | 100                        | 272,3248       | <-- =VarPV(A6:A\$8) | 272,3248 | <-- =ЧПС(0.05, A6:A\$8) |
| 7 | 100                        | 185,9410       | <-- =VarPV(A7:A\$8) | 185,9410 | <-- =ЧПС(0.05, A7:A\$8) |
| 8 | 100                        | 95,2381        | <-- =VarPV(A8:A\$8) | 95,2381  | <-- =ЧПС(0.05, A8:A\$8) |

Обратите внимание, как с помощью функции VBA IsArray функция определяет, является ли переменная массивом.

## Упражнения

1. Напишите функцию вычисления приведенной стоимости VarPV(CF()), которая бы работала с диапазонами в строках и столбцах. (Напомним, что исходная версия работает только со столбцами.)

*Подсказка:* помните, что

- диапазоны всегда являются двумерными массивами;
- нижняя граница индексов диапазонов всегда равна 1;
- верхняя граница задает размер массива-диапазона.

|   | A                           | B                  | C   | D      | E                  |
|---|-----------------------------|--------------------|-----|--------|--------------------|
| 1 | Демонстрация функции RCMuPV |                    |     |        |                    |
| 2 |                             |                    |     |        |                    |
| 3 | 100                         | 100                | 100 | 272,32 | <-- =RCMuPV(A3:C3) |
| 4 | 100                         |                    |     |        |                    |
| 5 | 100                         |                    |     |        |                    |
| 6 | 272,3248                    | <-- =RCMuPV(A3:A5) |     |        |                    |

2. Напишите версию функции вычисления приведенной стоимости с двумя процентными ставками — одной для положительных денежных потоков, другой для отрицательных. Функция должна быть ориентирована на использование в таблице Excel и принимать в качестве параметров диапазоны как по строкам, так и по столбцам. Строка объявления функции должна иметь следующий вид:

```
Function MyPV(CF As Variant, PositiveR As Double, NegativeR As Double) As Double
```

|   | A                         | B   | C    | D    | E    | F                                           |
|---|---------------------------|-----|------|------|------|---------------------------------------------|
| 1 | Демонстрация функции MyPV |     |      |      |      |                                             |
| 2 |                           |     |      |      |      |                                             |
| 3 | PositiveR                 | 5%  | 100  | 100  | 100  | 272,3248 <-- =MyPV(C12:E12,\$B\$12,\$B\$13) |
| 4 | NegativeR                 | 10% | -100 | -100 | -100 | -248,685 <-- =MyPV(C13:E13,\$B\$12,\$B\$13) |
| 5 |                           |     | -100 | 100  | 100  | 86,17762 <-- =MyPV(C14:E14,\$B\$12,\$B\$13) |
| 6 |                           |     | -63  |      |      | <-- =MyPV(C12:C14,\$B\$12,\$B\$13)          |

3. Напишите версию функции из упражнения 1 для расчета будущей стоимости.
4. Напишите версию функции из упражнения 2 для расчета будущей стоимости.
5. Банк предлагает различные процентные ставки по займам. Ставка зависит от размера периодической выплаты ( $CF_i$ ) и определяется по приведенной ниже таблице. Напишите функцию расчета приведенной стоимости BankPV(CF, r), которая бы определяла приведенную стоимость кредита в банке. Функция должна работать на листе электронной таблицы. Параметр CF может быть диапазоном как по строкам, так и по столбцам.

Для периодических выплат,  
меньших или равных

Процентная ставка составляет

|              |             |
|--------------|-------------|
| 100,00       | $r$         |
| 500,00       | $r - 0,5\%$ |
| 1 000,00     | $r - 1,1\%$ |
| 5 000,00     | $r - 1,7\%$ |
| 1 000 000,00 | $r - 2,1\%$ |

6. Банк предлагает различные процентные ставки по депозитным счетам. Ставка зависит от размера периодического взноса ( $CF_i$ ) и определяется по приведенной ниже таблице. Напишите функцию расчета будущей стоимости BankFV(CF, r). Функция должна работать на листе электронной таблицы. Параметр CF может быть диапазоном как по строкам, так и по столбцам.

| <i>Для периодических взносов</i> | <i>Процентная ставка составляет</i> |
|----------------------------------|-------------------------------------|
| $\leq 100,00$                    | $r$                                 |
| $\leq 500,00$                    | $r + 0,5\%$                         |
| $\leq 1\,000,00$                 | $r + 1,1\%$                         |
| $\leq 5\,000,00$                 | $r + 1,7\%$                         |
| $> 5\,000,00$                    | $r + 2,1\%$                         |

7. Банк предлагает прибавку в 1% к процентной ставке по сберегательным счетам с балансом, превосходящим 10 000,00. Напишите функцию расчета будущей стоимости  $\text{Bank1FV}(\text{CF}, r)$ , которая бы отражала это предложение. Функция должна работать на листе электронной таблицы. Параметр CF может быть диапазоном как по строкам, так и по столбцам.
8. Банк из упражнения 7 изменил принцип начисления бонуса и теперь предлагает возрастание процентной ставки на основе следующей таблицы. Перепишите функцию  $\text{Bank1FV}(\text{CF}, r)$  так, чтобы она отражала это изменение.

| <i>Баланс</i>     | <i>Процентная ставка</i> |
|-------------------|--------------------------|
| $\leq 1\,000,00$  | $r + 0,2\%$              |
| $\leq 5\,000,00$  | $r + 0,5\%$              |
| $\leq 10\,000,00$ | $r + 1,0\%$              |
| $> 10\,000,00$    | $r + 1,3\%$              |



---

# 35 Объекты

---

## 35.1. Введение

В этой главе рассматриваются некоторые темы повышенной сложности, связанные с Visual Basic for Applications. В начале главы дается введение в объекты таблицы Excel, затем рассматриваются операторы With, коллекции, имена и обозреватель объектов.

---

## 35.2. Объекты таблицы: введение

Объекты являются основными структурными блоками VBA. Большинство операций, выполняемых в VBA, реализуется с помощью объектов, даже если вы не отдадите себе в том отчета. Объект можно представить себе как нечто вроде контейнера с переменными, функциями и подпрограммами внутри него. Все компоненты Excel (книги, листы, диапазоны таблиц и т.д.) представлены своими объектами в объектной иерархии VBA (подробнее об этом — в приложении к этой главе). Данные объекта хранятся в специальных переменных, именуемых свойствами. Обращение к свойствам выполняется с помощью знака точки (.). В следующем макросе используются объектная переменная языка VBA ActiveCell и три из ее свойств: Address, Formula и Value:

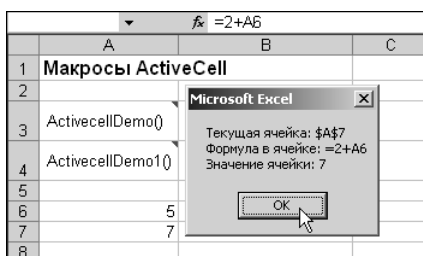
```
Sub ActiveCellDemo()  
    Dim Temp  
    MsgBox "Текущая ячейка: " & ActiveCell.Address & _  
        Chr(13) & "Формула в ячейке: " & _  
        ActiveCell.Formula & _  
        Chr(13) & "Значение ячейки: " & _  
        ActiveCell.Value  
    ActiveCell.Formula = ActiveCell.Formula & "* 2"  
End Sub
```

Этот макрос использует объект ActiveCell для двух целей.

1. С помощью диалогового окна он сообщает содержимое ячейки A2. В процедуре участвуют такие ресурсы, как диалоговое окно (Message Box) языка VBA и свойства ActiveCell.Formula и ActiveCell.Value.
2. С помощью свойства ActiveCell.Formula он изменяет формулу в ячейке. Обратите внимание, как именно это делается: последний элемент формулы умножается на два. Таким образом, если в ячейке A2 находилась формула

$2 + A1$ , то новая формула будет иметь вид  $2 + A1 * 2$ . Если снова запустить макрос применительно к той же ячейке, формула станет равной  $2 + A1 * 2 * 2$ .

Результаты работы макроса показаны ниже.

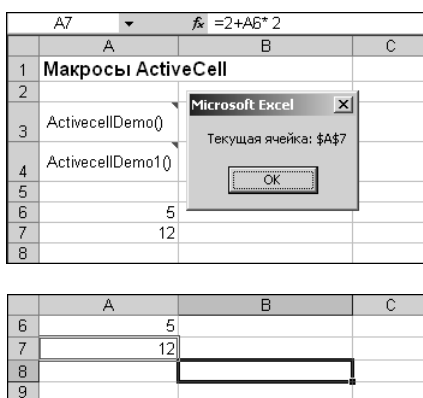


|   | A7 |   |   |
|---|----|---|---|
|   | A  | B | C |
| 6 | 5  |   |   |
| 7 | 12 |   |   |
| 8 |    |   |   |

Функции, содержащиеся внутри объекта, называются *методами*. Они используются для манипуляций с этим объектом. Обращение к ним, как и к свойствам, выполняется с помощью знака точки (.). Граница различия между свойствами и методами довольно расплывчата. Следующий макрос вызывает методы `BorderAround` и `Cells` объекта `ActiveCell`:

```
Sub ActivecellDemo1()
    MsgBox "Текущая ячейка: " & ActiveCell.Address
    ActiveCell.BorderAround xlDouble, xlThick, 3
    ActiveCell.Cells(2, 2).Select
End Sub
```

Результаты его работы показаны на рисунках, приведенных ниже.



Обратите внимание, что в результате выполнения последней строки макроса в таблице выбрана другая активизированная ячейка.

### 35.3. Объект-диапазон Range

У объектов есть типы. Один из самых важных типов объектов в VBA называется Range (“диапазон”). Объектами этого типа являются как отдельная ячейка таблицы, так и диапазон ячеек. Например, к типу Range принадлежит объектная переменная VBA ActiveCell, которую мы рассмотрели в предыдущем разделе. А в этом разделе будут рассмотрены некоторые свойства и методы объектов Range.

#### 35.3.1. Объект Range как параметр функции

Пусть ставка дохода с актива за период определяется формулой  $r_t = \frac{\text{Цена}_t - \text{Цена}_{t-1}}{\text{Цена}_{t-1}}$ , а средняя ставка дохода с актива — формулой  $\tilde{r} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N r_t$ . Функция MeanReturn принимает в качестве параметра диапазон-столбец цен актива и вычисляет среднюю ставку дохода. Для вычисления  $r_t$  используется дополнительная функция AssetReturn.

```
Function AssetReturn(P0 As Variant, P1 As _
    Variant) As Double
    AssetReturn = (P1 - P0) / P0
End Function

Function MeanReturn(Rng As Range) As Double
    Dim NumRows As Integer
    Dim Prices As Variant
    Dim Temp As Double
    Dim i As Integer
    NumRows = Rng.Rows.Count
    Prices = Rng.Value
    Temp = 0
    For i = 2 To NumRows
        Temp = Temp + _
            AssetReturn(Prices(i - 1, 1), _
                Prices(i, 1))
    Next i
    MeanReturn = Temp / (NumRows - 1)
End Function
```

А вот как эта функция выглядит в работе — в таблице Excel.

|   | A                               | B     | C                      | D | E |
|---|---------------------------------|-------|------------------------|---|---|
| 1 | Демонстрация функции MeanReturn |       |                        |   |   |
| 2 |                                 |       |                        |   |   |
| 3 | 100,000                         | 0,160 | <-- =meanreturn(A3:A8) |   |   |
| 4 | 110,000                         | 0,100 | <-- =meanreturn(A3:A5) |   |   |
| 5 | 121,000                         | 0,200 | <-- =meanreturn(A5:A8) |   |   |
| 6 | 145,200                         |       |                        |   |   |
| 7 | 174,240                         |       |                        |   |   |
| 8 | 209,088                         |       |                        |   |   |

Обратите внимание на строки

```
NumRows = Rng.Rows.Count
```

Знак точки применяется здесь два раза. Rng — это наш объект типа Range, Rows — это свойство объекта, так что Rng.Rows — объект типа Collection, представляющий все строки нашего диапазона. Count представляет собой свойство объектов типа Collection, в котором хранится количество объектов коллекции, поэтому Rng.Rows.Count — это переменная, содержащая количество строк в нашем диапазоне.

```
Prices = Rng.Value
```

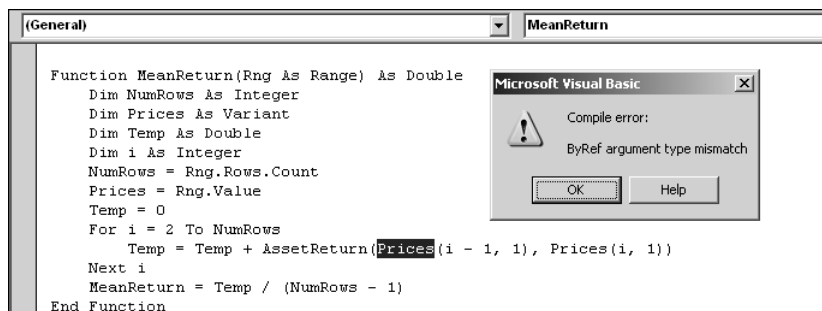
Value — это свойство объекта Range, содержащее значения всех ячеек диапазона. Оно имеет тип Variant. Если диапазон состоит из нескольких ячеек, то Value является двумерным массивом. Первый индекс Value — это индекс строки, начинающийся с единицы, а второй — индекс столбца, также начинающийся с единицы.

### 35.3.2. Соображения типизации параметров

Иногда переменные типа Variant получают свой тип по умолчанию слишком поздно, когда VBA уже не успевает воспользоваться информацией о типе. Иллюстрацией этой проблемы может служить функция AssertReturn из предыдущего подраздела. Лучше было бы объявить эту функцию таким образом:

```
Function AssertReturn(P0 As Double, P1 As _  
Double) As Double
```

К сожалению, при попытке вызвать эту функцию VBA проверит правильность программы. В ходе проверки (перед самым использованием функции) переменные Prices еще не являются массивом вещественных чисел, вследствие чего возникает ошибка несоответствия типов.



### 35.3.3. Свойство Item объекта Range

Свойство Item объекта Range позволяет обратиться к конкретной ячейке таблицы Excel, частью которой является диапазон. Хотя в документации элемент Item назван свойством, он по сути является и свойством, и методом. Приведенная далее функция возвращает формулу в ячейке, находящейся на три строки ниже и два столбца левее от начала заданного аргумента-диапазона.

```
Function TwoLeftThreeDown(Rng As Range) As String
    TwoLeftThreeDown = Rng.Item(4, 3).Formula
End Function
```

|   | A                                     | B | C    | D                         | E | F |
|---|---------------------------------------|---|------|---------------------------|---|---|
| 1 | Демонстрация функции TwoLeftThreeDown |   |      |                           |   |   |
| 2 |                                       |   |      |                           |   |   |
| 3 |                                       |   |      |                           |   |   |
| 4 |                                       |   |      | 8 <-- =3+5                |   |   |
| 5 |                                       |   | =3+5 | <-- =TwoLeftThreeDown(A1) |   |   |
| 6 |                                       |   |      |                           |   |   |

Заметим, что `Rng.Item(1,1)` — это ячейка в верхнем левом углу диапазона `Rng`.

### 35.3.4. Свойство Range

Свойство `Range` — это один из способов обращения к диапазону таблицы. Это свойство имеется во многих объектах Excel. Если оно используется само по себе, как в следующем макросе, то является сокращением записи `ActiveSheet.Range`:

```
Sub RangeDemo()
    Range("A1").Formula = 23
End Sub
```

Как и следовало ожидать, этот макрос записывает в ячейку A1 активизированного листа таблицы формулу “23”. А следующий макрос записывает то же самое во все ячейки диапазона A1:B2 активизированного листа таблицы:

```
Sub RangeDemo1()
    Range("A1:B2").Formula = 23
End Sub
```

Следующий макрос записывает то же самое число 23 в тот же диапазон A1:B2, но вызывает `Range` несколько по-другому. Первый аргумент — это левая верхняя, а второй — нижняя правая ячейка диапазона.

```
Sub RangeDemo2()
    Range("A1", "B2").Formula = 23
End Sub
```

Свойство `Range` имеется также и в объекте `Range`. Диапазон, возвращаемый при вызове `Range` из объекта `Range`, в этом случае отсчитывается относительно диапазона данного объекта. Следующий макрос помещает значение 23 в ячейку C3 активизированной таблицы:

```
Sub RangeDemo3()
    Range("B1").Range("B2").Formula = 23
End Sub
```

*Примечание:* выражение `Range("B1")` дает диапазон (фактически ячейку) B1 активизированной таблицы. Выражение `Range("B1").Range("B2")` дает ячейку B2 из диапазона, начинающегося с ячейки B1 в левом верхнем углу. По отношению ко всей таблице `Range("B1").Range("B2")` дает ячейку C2.

Следующий макрос помещает во все ячейки диапазона C2:D3 активизированного листа таблицы значение 23. Макрос использует ячейку C2 как точку отсчета, а также вызывает Range альтернативным способом.

```
Sub RangeDemo4()
    Range("C2").Range("A1", "B2").Formula = 23
End Sub
```

### 35.4. Оператор With

С помощью оператора With можно выполнить последовательность операторов над некоторым объектом, не указывая всякий раз очевидные данные (т.е. имя объекта и его местонахождение, которые могут образовывать довольно громоздкое выражение). Оператор With — хорошее средство на случай, если необходимо изменить сразу много свойств объекта или вызвать несколько его методов. С помощью этого оператора можно ускорить выполнение процедур и избежать набора лишнего текста. В следующем, довольно искусственном примере макрос устанавливает ряд свойств шрифта в ячейке, находящейся в верхнем левом углу текущей области. Шрифт в ячейке становится полужирным, гарнитуры Arial, красного цвета, размером 15 пунктов.

```
Sub WithoutDemo()
    ActiveCell.CurrentRegion.Range("A1").Font _
        .Bold = True
    ActiveCell.CurrentRegion.Range("A1").Font _
        .ColorIndex = 3
    ActiveCell.CurrentRegion.Range("A1").Font _
        .Name = "Arial"
    ActiveCell.CurrentRegion.Range("A1").Font _
        .Size = 15
End Sub
```

Ниже приведен тот же макрос, переписанный с использованием оператора With.

```
Sub WithDemo()
    With ActiveCell.CurrentRegion.Range("A1").Font
        .Bold = True
        .ColorIndex = 3
        .Name = "Arial"
        .Size = 15
    End With
End Sub
```

Обратите внимание на знак точки перед свойствами объекта в операторе With.

## 35.5. Коллекции

*Коллекция* — это упорядоченный набор элементов, к которому можно обращаться как к единому целому. Объект типа коллекции — это удобный способ работы с взаимосвязанной группой элементов. Элементы, или члены одной коллекции, могут иметь какие угодно типы, не обязательно одинаковые; объединяет их только принадлежность к одной коллекции.

Коллекция создается таким же образом, как и объект вообще. Члены коллекции можно добавлять с использованием метода `Add` и удалять с помощью метода `Remove`. К тому или иному члену коллекции можно обратиться по целочисленному индексу. Количество элементов в коллекции в текущий момент можно узнать с помощью метода `Count`. Мы будем работать с коллекциями только в рамках (весьма широких) объектной модели Excel; к таким коллекциям относится, например, `Rows`, использованная в предыдущем разделе.

### 35.5.1. Оператор `For Each` в применении к массивам

Оператор `For Each` — это вариант цикла `For`, существующий только в языке VBA. У него есть две основные разновидности. В первой разновидности он используется для перебора массива, как показано в следующей функции:

```
Function ForEachSum(Rng As Range) As Double
    Dim Element As Variant
    Dim Sum As Double
    Sum = 0
    For Each Element In Rng.Value
        Sum = Sum + Element
    Next Element
    ForEachSum = Sum
End Function
```

|   | A                               | B | C | D  | E                  |
|---|---------------------------------|---|---|----|--------------------|
| 1 | Демонстрация функции ForEachSum |   |   |    |                    |
| 2 |                                 |   |   |    |                    |
| 3 | 1                               | 4 | 7 | 6  | =ForEachSum(A3:A5) |
| 4 | 2                               | 5 | 8 | 12 | =ForEachSum(A3:C3) |
| 5 | 3                               | 6 | 9 | 45 | =ForEachSum(A3:C5) |

Следует отметить вот что.

- Текущий элемент массива доступен для обращения к операторам внутри цикла через переменную этого цикла (`Element` в нашей функции).
- Переменная цикла должна иметь тип `Variant` независимо от типа перебираемого массива.
- Изменения в переменной `Element` не будут отражены в самом массиве (ситуация “только чтение”).
- Для перебора массива нет необходимости знать его размерность и диапазон индексов. Приведенная выше функция одинаково хорошо работает с диапазонами-столбцами (в ячейке E25), диапазонами-строками (в ячейке E26) и прямоугольными диапазонами (в ячейке E27).

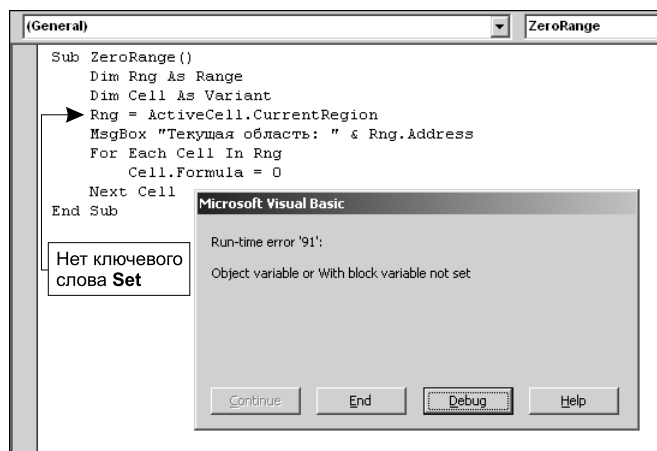
### 35.5.2. Оператор For Each в применении к коллекциям

Вторая разновидность оператора For Each используется для перебора коллекций.

```
Sub ZeroRange()  
    Dim Rng As Range  
    Dim Cell As Variant  
    Set Rng = ActiveCell.CurrentRegion  
    MsgBox "Текущая область: " & Rng.Address  
    For Each Cell In Rng  
        Cell.Formula = 0  
    Next Cell  
End Sub
```

Следует отметить несколько важных моментов.

- Element — это переменная, используемая для перебора *всех* элементов коллекции.
- Переменная Element должна иметь один из следующих типов: Variant, Generic Object (нетипизированный общий объект) или тип тех элементов, из которых состоит коллекция.
- Переменная Element ссылается на фактические элементы коллекции, причем ее изменения отражаются в самой коллекции.
- Используется свойство CurrentRegion объекта Range. Это также объект типа Range, представляющий текущую область. Текущая область — это диапазон, ограниченный любыми сочетаниями пустых строк и пустых столбцов.
- Используется оператор Set. Полное описание этого оператора выходит за рамки нашей книги. Для наших целей достаточно знать, что перед всеми присваиваниями объектов должно стоять ключевое слово Set. Если этого не сделать, можно получить следующее.





### 35.5.3. Коллекция **Workbooks** и объект **Workbook**

Все открытые в текущий момент книги Excel представляются объектами **Workbook** в коллекции **Workbooks**. Следующий макрос выдает список всех открытых книг, записывая его в столбик ячеек, который начинается с активизированной ячейки.

```
Sub ListOpenWorkbooks()
    Dim i As Integer
    Dim Element As Workbook
    ActiveCell.Item(2, 1).Formula = _
        "Список открытых книг"
    ActiveCell.Item(4, 1).Formula = _
        "Создан:" & FormatDateTime(Date, vbLongDate) _
        & " Время: " & FormatDateTime(Time, vbLongTime)
    With ActiveCell.Item(2, 1).Font
        .Bold = True
        .Name = "Arial"
        .Size = 12
    End With
    i = 5
    For Each Element In Workbooks
        ActiveCell.Item(i, 1).Formula = Element.FullName
        i = i + 1
    Next Element
End Sub
```

Рабочая таблица после выполнения макроса показана ниже.

|    | A                                                                                    | B                 | C | D | E |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|---|---|---|
| 13 | <b>Список открытых книг</b>                                                          |                   |   |   |   |
| 14 |                                                                                      |                   |   |   |   |
| 15 | Создан: Tuesday, July 04, 2006                                                       | Время: 6:31:47 AM |   |   |   |
| 16 | D:\Translation\Dialektika\Financial Modeling\Materials\Chapter files\Chapter 35.xls  |                   |   |   |   |
| 17 | D:\Translation\Dialektika\Financial Modeling\Materials\Problem files\Problems 33.xls |                   |   |   |   |
| 18 | D:\Translation\Dialektika\Financial Modeling\Materials\Chapter files\Chapter 34.xls  |                   |   |   |   |

Отметим следующие строки подпрограммы:

```
ActiveCell.Item(4, 1).Formula = _
    "Создан:" & FormatDateTime(Date, vbLongDate) _
    & " Время: " & FormatDateTime(Time, vbLongTime)
```

- Функция **Date** возвращает текущую дату, установленную в системе.
- Функция **Time** возвращает текущее время, установленное в системе.
- Функция **FormatDateTime** форматирует переменные **Date** и **Time** для отображения в таблице.

```
For Each Element In Workbooks
    ActiveCell.Item(i, 1).Formula = Element.FullName
    i = i + 1
Next Element
```

Оператор цикла For перебирает поэлементно всю коллекцию Workbooks. На каждой итерации цикла Element представляет собой один из объектов Workbook из коллекции. FullName (“полное имя”) — это переменная-свойство объекта Workbook, содержащая полное имя файла книги вместе с путем к нему.

В следующем макросе к коллекции Workbooks добавляется новая книга:

```
Sub AddWorkbook()
    Dim Wkbk As Workbook
    Dim OldWkbk As Workbook
    Set OldWkbk = ActiveWorkbook
    Set Wkbk = Workbooks.Add
    OldWkbk.Activate
    MsgBox "Добавлена " & Wkbk.FullName
End Sub
```

При добавлении книги в коллекцию Workbooks новая книга становится активизированной, текущей книгой. При необходимости всегда можно вернуться к старой книге.

### 35.5.4. Коллекция Worksheets и объект Worksheet

Все листы в книге Excel являются объектами типа Worksheet и входят в коллекцию Worksheets, которая является свойством объекта Workbook. Запись Worksheets без указания объекта является сокращением записи ActiveWorkbook.Worksheets.

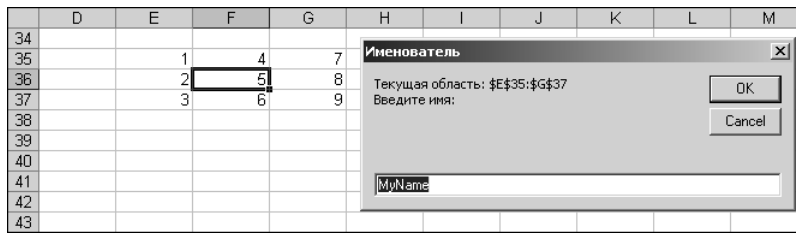
---

## 35.6. Имена

### 35.6.1. Присвоение имени диапазону с помощью макроса

В следующем макросе текущая область таблицы получает имя:

```
Sub NameCurrentRegion()
    Dim Rng As Range
    Dim MyName As String
    Set Rng = ActiveCell.CurrentRegion
    MyName = InputBox("Текущая область: " & _
        Rng.Address & Chr(13) & "Введите имя: ", _
        "Присвоение имени", "MyName")
    Names.Add Name:=MyName, RefersTo:="=" & _
        & Rng.Address
End Sub
```



|    | MyName |   |   |   |   |
|----|--------|---|---|---|---|
|    | D      | E | F | G | H |
| 34 |        |   |   |   |   |
| 35 |        | 1 | 4 | 7 |   |
| 36 |        | 2 | 5 | 8 |   |
| 37 |        | 3 | 6 | 9 |   |
| 38 |        |   |   |   |   |

В этом макросе есть интересная строка:

```
Names.Add Name:=MyName, RefersTo:="=" & Rng.Address
```

`Names` — это коллекция всех имен в активизированной рабочей книге, а `Add` — это метод коллекции `Names`, используемый для добавления элементов в коллекцию. Мы использовали только первых два параметра метода. Первый параметр `MyName` представляет собой имя, которое нужно добавить в коллекцию, а второй — строку, содержащую знак равенства и адрес, на который добавляемое имя будет ссылаться.

### 35.6.2. Поиск определенных имен

Следующая функция разыскивает определенное имя в текущей книге. Функция возвращает логическое значение “истина” (`True`), если указанное имя определено, или “ложь” (`False`), если оно не входит в коллекцию `Names`.

```
Function IsName(Name As String) As Boolean
    Dim Element As Variant
    Dim Flag As Boolean
    Flag = False
    For Each Element In Names
        If Name = Element.Name Then
            Flag = True
            Exit For
        End If
    Next Element
    IsName = Flag
End Function
```

|    | A                           | B               | C                |
|----|-----------------------------|-----------------|------------------|
| 8  | Демонстрация функции IsName |                 |                  |
| 9  |                             |                 |                  |
| 10 | Имя                         | Значение IsName |                  |
| 11 | Бен                         | ИСТИНА          | <-- =IsName(A11) |
| 12 | Шимон                       | ЛОЖЬ            | <-- =IsName(A12) |
| 13 | бен                         | ЛОЖЬ            | <-- =IsName(A13) |

Обратите внимание на следующие моменты:

- в именах должен соблюдаться регистр символов, поскольку они чувствительны к нему;
- в операторе For Each можно использовать оператор Exit For.

### 35.6.3. Ссылки на именованный диапазон

Следующая функция вычисляет средний доход (*mean return*) по заданному именованному диапазону со значениями стоимости активов:

```
Function NamedMeanReturn(RangeName As String) As Double
    Dim Rng As Range
    Dim Prices As Variant
    Dim Temp As Double
    Dim i As Integer
    Set Rng = Range(RangeName)
    Prices = Rng.Value
    Temp = 0
    For i = 2 To UBound(Prices, 1)
        Temp = Temp + _
            (Prices(i, 1) - Prices(i - 1, 1)) / _
            Prices(i - 1, 1)
    Next i
    NamedMeanReturn = Temp / (UBound(Prices, 1) - 1)
End Function
```

|    | A                                    | B       | C      | D                              | E | F |
|----|--------------------------------------|---------|--------|--------------------------------|---|---|
| 25 | Демонстрация функции NamedMeanReturn |         |        |                                |   |   |
| 26 |                                      |         |        |                                |   |   |
| 27 | Актив1                               | Актив2  |        |                                |   |   |
| 28 | 100,000                              | 100,000 | 0,1000 | <-- =meanreturn(A28:A32)       |   |   |
| 29 | 110,000                              | 120,000 | 0,2000 | <-- =meanreturn(B28:B32)       |   |   |
| 30 | 121,000                              | 144,000 | 0,1000 | <-- =NamedMeanReturn("Актив1") |   |   |
| 31 | 133,100                              | 172,800 | 0,2000 | <-- =NamedMeanReturn("Актив2") |   |   |
| 32 | 146,410                              | 207,360 | 0,2000 | <-- =NamedMeanReturn("Актив2") |   |   |

Обратите внимание на новый способ использования свойства Range, введенный в этом макросе:

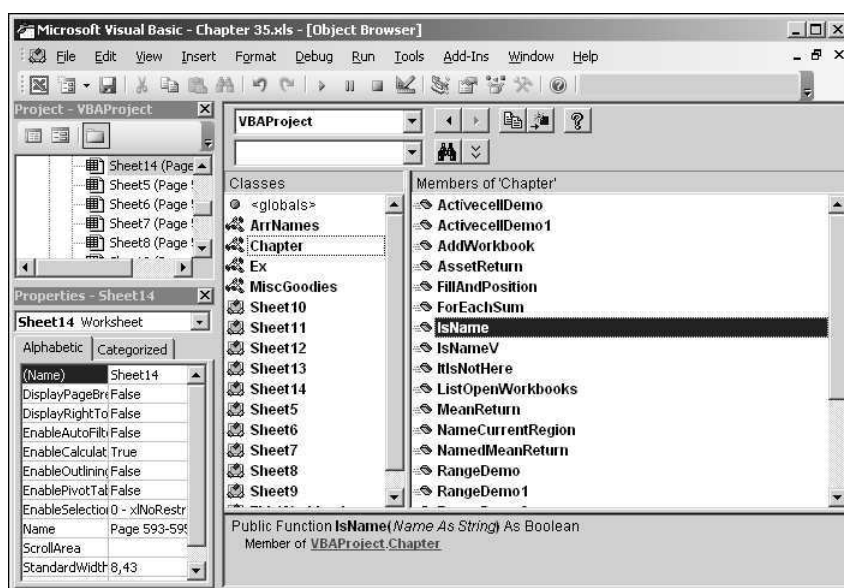
```
Set Rng = Range(RangeName)
```

### 35.7. Обзорщик объектов

Обзорщик, или браузер, объектов (Object Browser) — это удобное средство изучения различных объектов, доступных для использования в среде VBA. Чтобы активизировать обзорщик, щелкните на соответствующей кнопке панели инструментов VBA, как показано на рисунке, или выберите пункт Object Browser меню View (Вид).



Окно браузера объектов состоит из двух панелей, поля выбора и нескольких кнопок. В поле выбора можно выбрать один из двух глобальных наборов объектов для просмотра (два таких набора, VBA и Excel, всегда имеются в наличии). Выберите набор VBA для обзора объектов, внутренних для среды языка VBA. Набор Excel включает объекты, присущие только среде Excel. (Так задумано разработчиками Microsoft: VBA является централизованной средой программирования для многих приложений, а не только Excel.)



Когда выбран глобальный набор объектов, на двух остальных панелях в соответствии с этим выбором изменяется оглавление каталогов. Левая панель отображает список категорий (по алфавиту, в порядке возрастания). Правая панель представляет список свойств или методов, соответствующих объекту, выбранному на левой панели. Щелкнув на кнопке со знаком вопроса, можно получить помощь от справочной системы. Щелкнув на имени, находящемся на правой панели (на рисунке выделено имя IsName), получаем информацию о нем внизу окна.

## Упражнения

1. Пусть имеется таблица Excel с серией чисел и формул.

|    | А       | В        | С              |
|----|---------|----------|----------------|
| 9  | Цена    | Прибыль  |                |
| 10 | 1000,00 |          |                |
| 11 | 1019,66 | 0,019660 | <-- =A11/A10-1 |
| 12 | 1020,79 | 0,001108 | <-- =A12/A11-1 |
| 13 | 1025,36 | 0,004477 | <-- =A13/A12-1 |
| 14 | 1045,42 | 0,019564 | <-- =A14/A13-1 |
| 15 | 1065,90 | 0,019590 | <-- =A15/A14-1 |
| 16 | 1076,74 | 0,010170 | <-- =A16/A15-1 |
| 17 | 1091,68 | 0,013875 | <-- =A17/A16-1 |
| 18 | 1101,61 | 0,009096 | <-- =A18/A17-1 |

Необходимо сделать из этой таблицы такую, как показано ниже.

|    | А       | В        | С                    |
|----|---------|----------|----------------------|
| 9  | Цена    | Прибыль  |                      |
| 10 | 1000,00 |          |                      |
| 11 | 1019,66 | 1,966000 | <-- =(A11/A10-1)*100 |
| 12 | 1020,79 | 0,110821 | <-- =(A12/A11-1)*100 |
| 13 | 1025,36 | 0,447692 | <-- =(A13/A12-1)*100 |
| 14 | 1045,42 | 1,956386 | <-- =(A14/A13-1)*100 |
| 15 | 1065,90 | 1,959021 | <-- =(A15/A14-1)*100 |
| 16 | 1076,74 | 1,016981 | <-- =(A16/A15-1)*100 |
| 17 | 1091,68 | 1,387522 | <-- =(A17/A16-1)*100 |
| 18 | 1101,61 | 0,909607 | <-- =(A18/A17-1)*100 |

Напишите макрос для решения этой задачи. Вот что он должен делать (в основу его в какой-то степени можно положить `ActiveCellDemo` из раздела 35.2):

- вставить дополнительные скобки и умножить содержимое ячейки на 100;
- переместить фокус на одну ячейку вниз (см. `ActiveCellDemo`, раздел 35.2);
- спросить пользователя, хочет ли он продолжить процесс (если ответ — “да”, то продолжить; если ответ — “нет”, то завершить работу).

*Примечание:* скобки должны вставляться после знака равенства (=). Для этой операции можно воспользоваться функцией `Right`.

Информацию о функции `MsgBox` и возвращаемых ею значениях, необходимую для решения задачи, см. в разделе 35.3.

2. Перепишите макрос из упражнения 1 так, чтобы он правильно обрабатывал конец серии. Как вариант, можно сделать так, чтобы на последней ячейке серии макрос не спрашивал о продолжении работы.

*Подсказка:* полезно представить последнюю ячейку серии как ячейку, удовлетворяющую критерию `Cell.Item(2,1).Formula=""` (см. раздел 35.3)

3. Напишите макрос, умножающий все ячейки в текущей области на 2.

4. Перепишите макрос из упражнения 3 так, чтобы его работа зависела от содержимого ячеек.

- Если содержимое ячейки — формула, то она должна быть заменена такой же, умноженной на два.

- Если содержимое ячейки — число, то оно должно заменяться произведением этого числа на два.
- Во всех остальных случаях следует оставить содержимое без изменений.

*Примечание:* можно считать, что формула — это любая строка, начинающаяся со знака равенства (=), а число — это строка, начинающаяся с одной из цифр от 0 до 9.

5. Перепишите макрос из упражнения 4 так, чтобы он вызывал другой метод (правильный) для распознавания формулы в ячейке (т.е. чтобы ответить на вопрос, формула ли там находится). С этой целью изучите различные свойства объекта Range по справочной системе.
6. Аннотации к формулам в этой книге выполнялись с помощью макроса. Пусть, например, этот макрос запускается в следующей таблице (активизированная ячейка B16):

|    | B | C | D |
|----|---|---|---|
| 15 | 1 |   |   |
| 16 | 1 |   |   |
| 17 | 2 |   |   |
| 18 | 4 |   |   |
| 19 | 8 |   |   |

В результате получим следующую таблицу:

|    | B | C                 | D |
|----|---|-------------------|---|
| 15 | 1 |                   |   |
| 16 | 1 | =SUM(\$B\$15:B15) |   |
| 17 | 2 |                   |   |
| 18 | 4 |                   |   |
| 19 | 8 |                   |   |

Обратите внимание, что ширина столбца изменилась. Напишите макрос для создания таких аннотаций. Если ячейка справа от активизированной не пустая, то макрос должен затирать ее только после получения подтверждения от пользователя.

7. Объект Selection представляет текущую выделенную область в листе таблицы. Как правило (а в наших задачах всегда), Selection является объектом типа Range. Перепишите макрос в упражнении 6 так, чтобы он работал с выделенным диапазоном.

Отметим следующее:

- если выделенный диапазон состоит из одной ячейки, следует вызвать макрос из упражнения 6;
  - если выделенный диапазон — строка, аннотации должны размещаться под ней;
  - если выделенный диапазон содержит несколько столбцов или строк, макрос должен завершить работу, выдав соответствующее сообщение.
8. Существуют функции, которые возвращают не одно значение, а целые диапазоны (массивы) значений. Например, функция Excel ТРАНСП (Transpose) возвращает свой матричный аргумент в повернутом на 90° виде, как показано в таблице, приведенной ниже.

|    | D                                    | E | F | G | H | I                      |
|----|--------------------------------------|---|---|---|---|------------------------|
| 16 | <b>Демонстрация транспонирования</b> |   |   |   |   |                        |
| 17 |                                      |   |   |   |   |                        |
| 18 | 1                                    | 2 | 3 | 4 | 1 | <-- =(ТРАНСП(D18:G18)) |
| 19 |                                      |   |   |   | 2 | <-- =(ТРАНСП(D18:G18)) |
| 20 |                                      |   |   |   | 3 | <-- =(ТРАНСП(D18:G18)) |
| 21 |                                      |   |   |   | 4 | <-- =(ТРАНСП(D18:G18)) |

Фигурные скобки не набирались вручную, а добавлялись автоматически средой Excel, чтобы обозначить работу с массивами. Показанная на рисунке таблица создана следующим макросом:

```
Sub TransposeMe()  
    Range("E3:E6").FormulaArray = _  
        "=Transpose(A3:D3)"  
End Sub
```

Следующий макрос является более сложной версией и может справиться с любым размером или положением в строковом диапазоне:

```
Sub TransposeMeToo()  
    Dim R As Integer, C As Integer  
    C = Selection.Columns.Count  
    R = Selection.Rows.Count  
    If C = 1 Then 'Это столбец  
        MsgBox "Не работаем со столбцами"  
    ElseIf R = 1 Then 'Это строка  
        Selection.Cells(1, C + 1).Range("A1:A" & C). _  
            FormulaArray = "=Transpose(" & _  
                & Selection.AddressLocal(False, False) & ")"  
    Else 'А это что такое?  
        MsgBox "Что это такое?"  
    End If  
End Sub
```

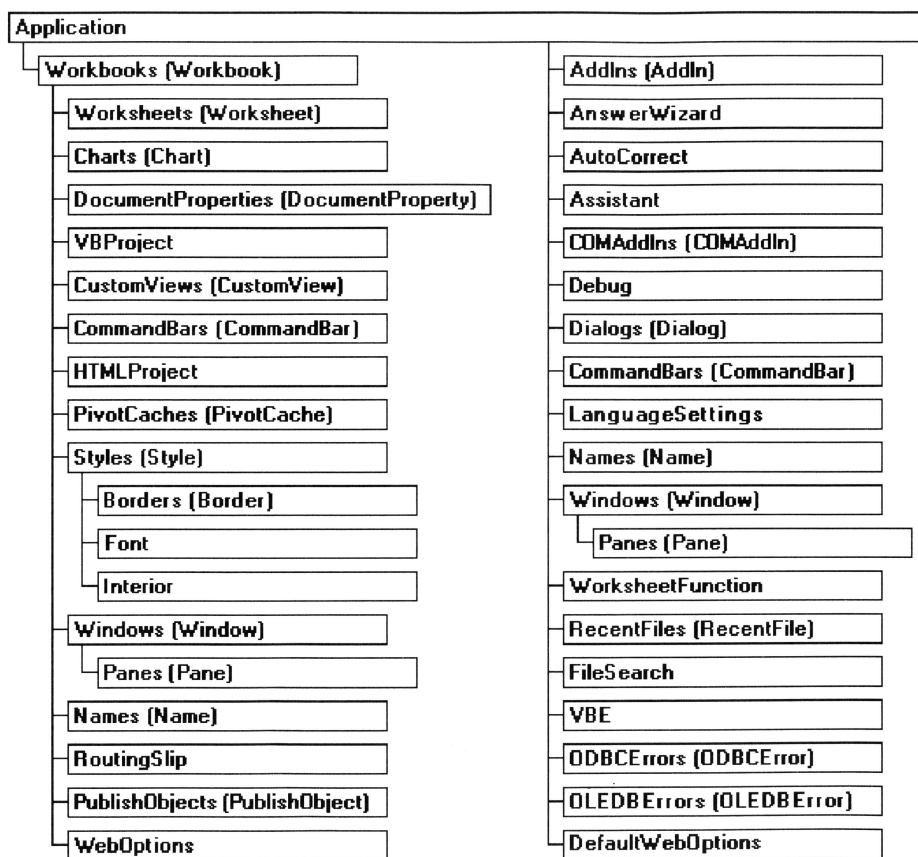
Перепишите макрос TransposeMeToo так, чтобы он мог работать как с диапазонами-строками, так и со столбцами.

9. Перепишите макрос TransposeMeToo из упражнения 8 так, чтобы он мог работать с любыми диапазонами. *Примечание:* это не так просто, как может показаться.

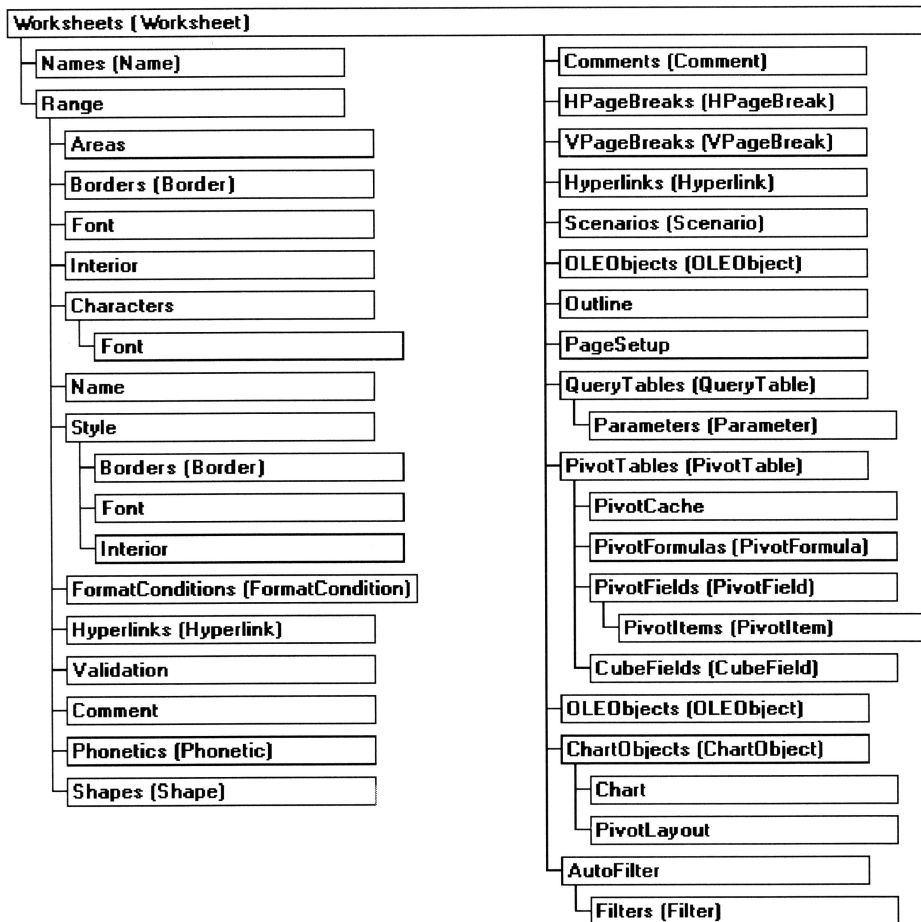


## Приложение. Иерархия объектов Excel

### Объекты Microsoft Excel



## Объекты Microsoft Excel (подобъекты Worksheet)



---

## Список литературы

---

---

### Главы 1–4: финансы и оценивание предприятий

Benninga S.Z., O.H. Sarig. 1997. *Corporate Finance: A Valuation Approach*. New York: McGraw-Hill.

Brealey R.A., S.C. Myers. 1996. *Principles of Corporate Finance*, 5th ed. New York: McGraw-Hill.

Gordon M.J. 1959. "Dividends, Earnings, and Stock Prices". *Review of Economics and Statistics* 41 (May), p. 99–105.

---

### Главы 5–6: арендные отношения

Abdel-Khalik R. 1981. *Economic Effects on Lessees of FASB Statement No.13, Accounting for Leases*. Stamford, CT: Financial Accounting Standards Board.

Brealey R.A., S.C. Myers. 1996. *Principles of Corporate Finance*, 5th ed. New York: McGraw-Hill.

Copeland T.E., J.F. Weston. 1982. "A Note on the Evaluation of Cancelable Operating Leases". *Financial Management* (Summer), p. 68–72.

El-Gazzar S., S. Lilien, V. Pastena. 1986. "Accounting for Leases by Lessees". *Journal of Accounting and Economics* 8, p. 217–237.

Financial Accounting Standards Board. 1976. Statement No.13: Accounting for Leases. Stamford, CT.

Franks J.R., S.D. Hodges. 1978. "Valuation of Financial Lease Contracts: A Note". *Journal of Finance* 33 (May), p. 647–669.

Levy H., M. Samat. 1979. "On Leasing, Borrowing and Financial Risk". *Financial Management* 8 (Winter), p. 47–54.

Lewellen W.G., M.S. Long, J.J. McConnell. 1979. "Asset Leasing in Competitive Capital Markets". *Journal of Finance* 31 (June), p. 787–798.

McConnell J.J., J.S. Schallheim. 1983. "Valuation of Asset Leasing Contracts". *Journal of Financial Economics* 12 (August), p. 237–261.

Miller M.H., C.W. Upton. 1976. "Leasing, Buying, and the Cost of Capital Services". *Journal of Finance* 31 (June), p. 761–786.

Myers S.C., D.A. Dill, A.J. Bautista. 1976. "Valuation of Financial Lease Contracts". *Journal of Finance* 31 (June), p. 799–819.

Nakayama M., S. Lilien, M. Benis. 1981. "Due Process and FASB No.13". *Management Accounting* 52, p. 49–53.

Ofer A.R. 1976. "The Evaluation of the Lease versus Purchase Alternative". *Financial Management* (Summer), p. 67–74.

Ross S.A., R.W. Westerfield, J. Jaffe. 1996. *Corporate Finance*, 4th edition. Burr Ridge, IL: Irwin.

## Главы 7–11: портфели ценных бумаг

Black, F. 1972. "Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing". *Journal of Business* 45 (July), p. 444–455.

Bodie, Z., A. Kane, A.J. Marcus. 1996. *Investments*, 3rd ed. Burr Ridge, IL: Irwin.  
Eiton E.J., M.J. Gruber. 1995. *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, 5th ed. New York: Wiley.

Green R.C. 1986. "Positively Weighted Portfolios on the Minimum-Variance Frontier". *Journal of Finance* 41 (December), p. 1051–1068.

Haugen R.A. 1977. *Modern Investment Theory*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Jensen M.C., ed. 1972. *Studies in the Theory of Capital Markets*. New York: Praeger.

Lintner J. 1965. "The Valuation of Risky Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets". *Review of Economics and Statistics* 47 (February), p. 13–37.

Markowitz H.M. 1952. "Portfolio Selection". *Journal of Finance* 1 (March), p. 77–91.

Merton, R. C. 1973. "An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier". *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 7 (September), p. 1851–1872.

Modigliani F., G.A. Pogue. 1974. "An Introduction to Risk and Return". *Financial Analysts Journal* 30 (March-April), p. 68–80; (May-June), p. 69–88.

Mossin J. 1966. "Equilibrium in a Capital Market". *Econometrica*, October.

Nielsen L.T. 1987. "Positively Weighted Frontier Portfolios: A Note". *Journal of Finance* 42 (June), p. 471.

Roll R. 1977. "A Critique of the Asset Pricing Theory's Tests, Part I: On Past and Potential Testability of the Theory". *Journal of Financial Economics* 4 (March), p. 129–176.

Roll R. 1978. "Ambiguity When Performance Is Measured by the Securities Market Line". *Journal of Finance* 33 (March), p. 129–176.

Sharpe W.F. 1964. "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk". *Journal of Finance* 19 (September), p. 425–442.

Sharpe W.F. 1988. *Investments*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

## Глава 12: стоимость, подверженная риску

Beder T. 1996. "VAR: Seductive but Dangerous". *Financial Analyst Journal*, September-October, p. 12–24.

Grundy B.D., Z. Wiener. 2000. "The Analysis of VAR, Deltas and State Prices: A New Approach". *European Finance Review*.

Hull J.C. 2000. *Options, Futures, and Other Derivatives*. 4th ed. Prentice-Hall.

Jorion P. 1997. *Value at Risk, the New Benchmark for Controlling Market Risk*. New York: McGraw-Hill.

Linsmeier T., N. Pearson. 1996. "Risk Measurement: An Introduction to Value at Risk". Working paper. University of Illinois.

## Главы 13–17: опционы и страхование портфелей

Benninga S., M. Blume. 1985. "On the Optimality of Portfolio Insurance". *Journal of Finance* 40 (December), p. 1341–1352.

Benninga S., R. Steinmetz, J. Stroughair. 1993. "Implementing Numerical Option Pricing Models". *Mathematica Journal*.

Bhaghat S., J. Brickley, U. Loewenstein. 1987. "The Pricing Effects of Interim Cash Tender Offers". *Journal of Finance* 42 (September), p. 965–986.

Billingsley P. 1968. *Convergence of Probability Measures*. New York: Wiley.

Black F., M. Scholes. 1973. "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *Journal of Political Economy* 81 (May-June), p. 637–654.

Bodie Z., A. Kane, A.J. Marcus. 1996. *Investments*, 3rd ed. Burr Ridge, IL: Irwin.

Brealey R., S. Myers. 1996. *Principles of Corporate Finance*, 5th ed. New York: McGraw-Hill.

Brennan M.J., E.S. Schwartz. 1976. "The Pricing of Equity-Linked Life Insurance Policies with an Asset Value Guarantee". *Journal of Financial Economics* 3 (June), p. 195–213.

Brennan M.J., E.S. Schwartz. 1979. "Alternative Investment Strategies for the Issuers of Equity-Linked Life Insurance Policies with an Asset Value Guarantee". *Journal of Business* 52 (January), p. 63–93.

Brennan M.J., R. Solanki. 1981. "Optimal Portfolio Insurance". *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 16 (September), p. 279–300.

Chicago Board of Trade. 1985. *Commodity Trading Manual*.

Copeland T.E., J.F. Weston. 1983. *Financial Theory and Corporate Policy*. Reading, MA: Addison-Wesley.

Cox J., S.A. Ross. 1976. "The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes", *Journal of Financial Economics* 3, p. 145–166.

Cox J., S.A. Ross, M. Rubinstein. 1979. "Option Pricing: A Simplified Approach". *Journal of Financial Economics* 7, p. 229–264.

Cox J., M. Rubinstein. 1985. *Options Markets*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Franke G. 1986. "Exchange Rate Volatility and International Trade: The Option Approach". Manuscript, University of Konstanz.

Gatto M.A., R. Geske, R. Litzenberger, H. Sosin. 1980. "Mutual Fund Insurance". *Journal of Financial Economics* 8 (September), p. 283–317.

Hull J. 1989. *Options, Futures, and Other Derivative Securities*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Jacobs B. 1983. "The Portfolio Insurance Puzzle". *Pensions and Investment Age* (August 22), p. 26.

Jacques W.E. 1987. "Portfolio Insurance or Job Insurance?" *Financial Analysts Journal* (January-February), p. 7.

Jarrow R.A., A. Rudd. 1983. *Option Pricing*. Homewood, IL: Irwin.

Knuth D.E. 1981. *The Art of Computer Programming*, vol. 2: *Seminumerical Algorithms*, 2nd ed. Reading, MA: Addison-Wesley.

Leland H.E. 1980. "Who Should Buy Portfolio Insurance?" *Journal of Finance* 35 (May), p. 581–594.

Leland H.E. 1985. "Option Pricing and Replication with Transaction Costs". *Journal of Finance* 40 (December), p. 1283–1301.

Lessard D.R., ed. 1979. *International Financial Management*. Boston: Warren, Gorham, Lamont.

Merton R. 1973. "Theory of Rational Option Pricing". *Bell Journal of Economics and Management Science* 4 (Spring), p. 141–183.

Merton R. 1976. "Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous". *Journal of Financial Economics* 3 (March), p. 125–144.

Omberg E. 1987. "A Note on the Convergence of Binomial-Pricing and Compound-Option Models". *Journal of Finance* 42 (June), p. 463–469.

Pozen R.C. 1978. "When to Purchase a Protective Put". *Financial Analysts Journal* (July-August), p. 47–60.

Press W.H., B.P. Flannery, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling. 1986. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press.

Rubinstein M. 1985. "Alternative Paths to Portfolio Insurance". *Financial Analysts Journal* (July-August), p. 42–52.

Rubinstein M., H.E. Leland. 1981. "Replicating Options with Positions in Stock and Cash". *Financial Analysts Journal* (July-August), p. 3–12.

Schwartz E.S. 1986–87. "Options and Portfolio Insurance". *Finanzmarkt und Portfolio Management* 1, p. 9–17.

Somes S.P., M.A. Zurack. 1987. "Pension Plans, Portfolio Insurance, and FASB Statement No.87: An Old Risk in a New Light". *Financial Analysts Journal* (January-February), p. 10–13.

---

## Глава 18: опциональные сделки

Amram M., N. Kulatilaka. 1998. *Real Options: Managing Strategic Investment in an Uncertain World*. Boston: Harvard Business School Press.

Dixit A.K., R.S. Pindyck. 1995. "The Options Approach to Capital Investment". *Harvard Business Review*, May-June.

Luehrman T.A. 1998. "Investment Opportunities as Real Options: Getting Started on the Numbers". *Harvard Business Review*, July-August.

Trigeorgis L. 1993. "Real Options and Interactions with Financial Flexibility". *Financial Management*, Autumn.

Trigeorgis L. 1995. *Real Options in Capital Investment: Models, Strategies, and Applications*. Westport, CT: Praeger.

Trigeorgis L. 1996. *Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation*. Cambridge, MA: MIT Press.

## Главы 20–21: дюрация и иммунизация

Altman E. 1989. "Measuring Corporate Bond Mortality and Performance". *Journal of Finance* 44 (September), p. 909–922.

Altman E., V.M. Kishore. 1996. "Almost Everything You Wanted to Know about Recoveries on Defaulted Bonds". *Financial Analysts Journal* (November/December), p. 57–64.

Babcock G. 1985. "Duration as a Weighted Average of Two Factors". *Financial Analysts Journal* (March–April), p. 75–76.

Benninga S., A. Protopapadals. 1986. "General Equilibrium Properties of the Term Structure of Interest Rates". *Journal of Financial Economics* 16 (July), p. 389–410.

Bierwag G.O. 1977. "Immunization, Duration, and the Term Structure of Interest Rates". *Journal of Financial and Quantitative Analysis* (December), p. 725–741.

Bierwag G.O. 1978. "Measures of Duration". *Economic Inquiry* 16 (October), p. 497–507.

Bierwag G.O., G.G. Kaufman, A. Toevs. 1983a. "Duration: Its Development and Use in Bond Portfolio Management". *Financial Analysts Journal* (July–August), p. 15–35.

Bierwag G.O., G.G. Kaufman, A. Toevs. 1983b. *Innovations in Bond Portfolio Management: Duration Analysis and Immunisation*. Greenwich, CT: JAI Press.

Bierwag G.O., G.G. Kaufman, R. Schweitzer, A. Toevs. 1981. "The Art of Risk Management in Bond Portfolios". *Journal of Portfolio Management* (Spring), p. 27–36.

Billingham C.J. 1983. "Strategies for Enhancing Bond Portfolio Returns". *Financial Analysts Journal* (May–June), p. 50–56.

Chance D.M. 1983. "Floating Rate Notes and Immunization". *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 18, p. 365–380.

Chance D.M. 1996. "Duration Convexity, and Time as Components of Bond Returns". *Journal of Fixed Income* 6, p. 88–95.

Chua J.H. 1984. "A Closed-Form Formula for Calculating Bond Duration". *Financial Analysts Journal* (May–June), p. 76–78.

Cooper I.A. 1977. "Asset Values, Interest Rate Changes, and Duration". *Journal of Financial and Quantitative Analysis* (December), p. 701–723.

Cox J., J. Ingersoll, S. Ross. 1979. "Duration and Measurement of Basis Risk". *Journal of Business* (January), p. 51–61.

Cox J.C., J.E. Ingersoll, S.A. Ross. 1985. "A Theory of the Term Structure of Interest Rates". *Econometrica* 53 (March), p. 385–402.

Fisher L., R.L. Weill. 1971. "Coping with the Risk of Market-Rate Fluctuations: Returns to Bondholders from Naïve and Optimal Strategies". *Journal of Business* (October), p. 408–431.

Gultekin B., R.J. Rogalski. 1984. "Alternative Duration Specifications and the Measurement of Basis Risk: Empirical Tests". *Journal of Business* (April), p. 241–264.

Gushee C.H. 1981. "How to Immunize a Bond Investment". *Financial Analysts Journal* (March–April), p. 44–51.

Hicks J. 1939. *Value and Capital*. Oxford: Clarendon Press.



- Ingersoll J.E. Jr., J. Skelton, R.L. Weil. 1978. "Duration Forty Years Later". *Journal of Financial and Quantitative Analysis* (November), p. 627–650.
- Joehnk M.D., H.R. Fogler, C.E. Bradley. 1978. "The Price Elasticity of Discounted Bonds: Some Empirical 'Evidence.'" *Journal of Financial and Quantitative Analysis* (September), p. 559–566.
- Lanstein R., W.F. Sharpe. 1978. "Duration and Security Risk". *Journal of Financial and Quantitative Analysis* (November), p. 653–670.
- Leibowitz M.L., A. Weinberger. 1981. "The Uses of Contingent Immunization". *Journal of Portfolio Management* (Fall), p. 51–55.
- Macaulay F.R. 1938. *Some Theoretical Problems Suggested by Movements of Interest Rates, Bond Yields and Stock Prices in the United States Since 1856*. New York: National Bureau of Economic Research.
- Macaulay F.R. 1983. *The Movement of Interest Rates, Bonds, Yields, and Stock Prices in the United States since 1865*. New York: Columbia University Press.
- McCullogh J.H. 1990. "U.S. Term Structure Data, 1946–1987". *Handbook of Monetary Economics*, vol. 1, p. 672–715. Amsterdam: North-Holland.
- Morgan G.E. 1986. "Floating Rate Securities and Immunization: Some Further Results". *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 21, p. 87–94.
- Ott R.A. Jr. 1986. "The Duration of an Adjustable-Rate Mortgage and the Impact of the Index". *Journal of Finance* 41 (September), p. 923–934.
- Redington F.M. 1952. "Review of the Principle of Life-Office Valuations". *Journal of the Institute of Actuaries* 78, p. 286–340. Reprinted in *Bond Duration and Immunization: Early Developments and Recent Contributions*, ed. G. A. Hawawini. New York: Garland, 1972.
- Samuelson P.A. 1945. "The Effects of Interest Rate Increases on the Banking System". *American Economic Review* 35 (March), p. 16–27.
- Smith D.J. 1998. "A Note on the Derivation of Closed-Form Formulas for Duration and Convexity Statistics on and between Coupon Dates". *Journal of Financial Engineering* 7, p. 177–193.
- Standard & Poor's. 1996. *Standard & Poor's Corporate Ratings Criteria*. New York.
- Standard & Poor's. 1997. *Standard & Poor's Ratings Performance 1996 – Stability & Transition*, February. New York.
- Vasicek O. 1977. "An Equilibrium Characterization of the Term Structure". *Journal of Financial Economics* 5 (November), p. 177–188.
- Weil R.L. 1973. "Macaulay's Duration: An Appreciation". *Journal of Business* (October), p. 589–592.

---

## Глава 22: моделирование временной структуры

- Adams K.J., D.R. Van Deventer. 1994. "Fitting Yield Curves and Forward Rate Curves with Maximum Smoothness". *Journal of Fixed Income* (June), p. 52–62.
- Babbel D.P., C. Merrill, J. Zacharias. 1996. "Teaching Interest Rate Contingent Claims Pricing". *Journal of Financial Education* 22 (Fall), p. 41–59.



Bierwag G.O. 1977. "Immunization, Duration, and the Term Structure of Interest Rates". *Journal of Financial and Quantitative Analysis* (December), p. 725–741.

Bierwag G.O., G.G. Kaufman, C.M. Latta. 1987. "Bond Portfolio Immunization: Tests of Maturity, One- and Two-Factor Duration Matching Strategies". *Financial Review* 22, no.2 (May), p. 203–219.

Bierwag G.O., G.G. Kaufman, A. Toevs. 1983. "Duration: Its Development and Use in Bond Portfolio Management". *Financial Analysts Journal* (July-August), p. 15–35.

Chambers D., W. Carleton, D. Waldman. 1984. "A New Approach to Estimation of Term Structure of Interest Rates". *Journal of Financial and Quantitative Studies* 19 (3), p. 233–252.

Coleman T.S., L. Fisher, R. Ibbotson. 1992. "Estimating the Term Structure of Interest from Data That Include the Prices of Coupon Bonds". *Journal of Fixed Income* (September), p. 85–116.

Coleman T., L. Fisher, R. Ibbotson. *U.S. Treasury Yield Curves, 1926–1994*. New York: Moody's Investor Service.

de Boor C. 1978. *A Practical Guide to Splines*. New York: Springer-Verlag.

Diament P. 1993. "Semi-empirical Smooth Fit to the Treasury Yield Curve". *Journal of Fixed Income* 3 (June), p. 55–70.

Fabozzi F.J. 1996. *Bond Markets, Analysis and Strategies*, 3rd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.

Fisher M., D. Zervos. 1996. "Yield Curve". In *Computational Economics and Finance: Modeling and Analysis with Mathematica*, ed. H.R. Varian, San Francisco: Telos-Springer, p. 269–304.

Ho T.S.Y. 1992. "Key Rate Durations: Measures of Interest Rate Risk". *Journal of Fixed Income* (September), p. 29–44.

Jarrow R.A. 1996. *Modeling Fixed Income Securities and Interest Rate Options*. New York: McGraw-Hill.

Jones F.J. 1991. "Yield Curve Strategies". *Journal of Fixed Income* (September), p. 43–51.

Jordan J.V. 1984. "Tax Effects in Term Structure Estimation". *Journal of Finance* 39 (2), p. 393–406.

Litterman R., J. Scheinkman. 1991. "Common Factors Affecting Bond Returns". *Journal of Fixed Income* 2, p. 54–96.

Mann S.V., P. Ramanlal. 1997. "Relative Performance of Yield Curve Strategies". *Journal of Portfolio Management* 23, no.4 (Summer).

Mann S.V., P. Ramanlal. 1998. "Duration and Convexity Measures When the Yield Curve Changes Shape". *Journal of Financial Engineering* 7, p. 35–58.

McCulloch J.F. 1971. "Measuring the Term Structure of Interest Rates". *Journal of Business* 44, p. 19–31.

McCulloch J.F. 1975. "The Tax-Adjusted Yield Curve". *Journal of Finance* 30, p. 811–830.

McCulloch J.H. "U.S. Term Structure Data, 1946–1987". *Handbook of Monetary Economics*, vol. 1, p. 672–715. Amsterdam: North-Holland.

Nelson C., A. Siegel. 1987. "Parsimonious Modeling of Yield Curves". *Journal of Business* 60 (4), p. 473–489.

- Pascual F.G., [http://haribon.winona.msus.edu/mathematica/cubic\\_splines.html](http://haribon.winona.msus.edu/mathematica/cubic_splines.html).
- Reitano, R. R. 1990. "Non-parallel Yield Curve Shifts and Durational Leverage". *Journal of Portfolio Management* (Summer), p. 62–67.
- Shea G. 1984. "Pitfalls in Smoothing Interest Rate Term Structure Data: Equilibrium Models and Spline Approximations". *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 19, no.3 (September), p. 253–269.
- Shea G. 1985. "Interest Rate Term Structure Estimation with Exponential Splines: A Note". *Journal of Finance* 40 (1), p. 319–325.
- Stigum M., F.L. Robinson. 1996. *Money Market and Bond Calculations*. Chicago: Irwin Professional.
- Suits D.B., A. Mason, L. Chan. 1978. "Spline Functions Fitted by Standard Regression Methods". *Review of Economics and Statistics* 60, p. 132–139.
- Sundaresan S. 1997. *Fixed Income Markets and Their Derivatives*. Cincinnati: South-Western College Publishing.
- Taggart R. 1996. "Some Mathematical Notes on Bond Pricing, Duration and Convexity". Boston University Working Paper, March.
- Taggart R.A. Jr. 1996. *Quantitative Analysis for Investment Management*. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall.
- Tuckman B., 1996. *Fixed-Income Securities*. New York: Wiley.
- Tuckman B. 1995. *Fixed Income Securities*. New York: Wiley.
- Vasicek O. 1977. "An Equilibrium Characterization of the Term Structure". *Journal of Financial Economics* 5, p. 177–188.
- Vasicek O., G. Fong. 1982. "Term Structure Estimation Using Exponential Splines". *Journal of Finance* 38, p. 339–348.
- Wahba G. 1990. *Spline Models for Observational Data*. Philadelphia: SIAM.
- Willner R. 1996. "A New Tool for Portfolio Managers: Level, Slope and Curvature Durations". *Journal of Fixed Income* (June), p. 48–59.

---

## Глава 24: задача дешевой поставки

- Benninga S., A. Protopapadakis. 1983. "Real and Nominal Interest Rates under Uncertainty: The Fisher Theorem and the Term Structure". *Journal of Political Economy* 91 (October), p. 856–867.
- Benninga S., A. Protopapadakis. 1994. "Forward and Future Prices with Markovian Interest Rate Processes". *Journal of Business* 67, p. 401–421.
- Benninga S., Z. Wiener. 1999. "An Investigation of Cheapest to Deliver on Treasury Bond Futures Contracts". *Journal of Computational Finance* 2, p. 39–56.
- Bierwag G.O., G.G. Kaufman, A. Toevs. 1983. "Duration: Its Development and Use in Bond Portfolio Management". *Financial Analysts Journal* (July-August), p. 15–35.
- Boyle P. 1989. "The Quality Option and the Timing Option in Futures Contracts". *Journal of Finance* 44, p. 101–113.
- Cox J.C., J.E. Ingersoll, S.A. Ross. 1981. "The Relation between Forward and Futures Prices". *Journal of Financial Economics* 9, p. 321–346.

- Cox J.C., J.E. Ingersoll, S.A. Ross. 1985. "A Theory of the Term Structure of Interest Rates". *Econometrica* 53, p. 363–384.
- Edwards F.R., C.W. Ma. 1992. *Futures & Options*. New York: McGraw-Hill.
- Hanweck G.A. Jr. 1995. "An Asset Pricing Formula for Interest-Rate Derivative Assets with Application to Eurodollar Futures and Option". *Unpublished working paper*.
- Hegde S. 1988. "An Empirical Analysis of Implicit Delivery Options in the Treasury Bond Futures Contract". *Journal of Banking and Finance* 12, p. 469–492.
- Hemler M.L. 1990. "The Quality Delivery Option in Treasury Bond Futures Contracts". *Journal of Finance* 45 (December), p. 1565–1586.
- Hull J. 1991. *Introduction to Futures and Options Markets*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
- Jarrow R., G. Oldfield. 1981. "Forward Contracts and Futures Contracts". *Journal of Financial Economics* 9, p. 373–382.
- Jones R.A. 1985. "Conversion Factor Risk in Treasury Bond Futures: Comment". *Journal of Futures Markets* 5(1), p. 115–119.
- Kane A., A.J. Marcus. 1984. "Conversion Factor Risk and Hedging in the Treasury-Bond Futures Market". *Journal of Futures Markets* 4, p. 55–64.
- Kilcollin T.E. 1982. "Difference Systems in Financial Futures Markets". *Journal of Finance* 37 (December), p. 1183–1197.
- Lucas R.E. Jr. 1978. "Asset Prices in an Exchange Economy". *Econometrica* 46, p. 1429–1445.
- Richard S., M. Sundaresan. 1981. "A Continuous Time Equilibrium Model of Forward Prices and Futures Prices in a Multigood Economy". *Journal of Financial Economics* 9, p. 321–371.
- Ronn E.I., R.R. Bliss Jr. 1994. "A Nonstationary Trinomial Model for the Valuation of Options on Treasury Bond Futures Contracts". *Journal of Futures Markets* 14, p. 597–617.
- Sundaresan M.S. 1991. "Futures Prices on Yields, Forward Prices, and Implied Forward Prices from Term Structure". *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 26 (3), p. 409–424.
- Vasicek O. 1977. "An Equilibrium Characterization of the Term Structure". *Journal of Financial Economics* 5, p. 177–188.

---

## Глава 25: случайные числа

- Abramowicz M., I.A. Stegun. 1972. *Handbook of Mathematical Functions*. New York: Dover Publications.
- Knuth D.E. 1981. *The Art of Computer Programming*, vol. 2: *Seminumerical Algorithms*, 2nd ed. Reading, MA: Addison-Wesley.



---

## Предметный указатель

### А

Альтернативная стоимость, 23  
Анализ чувствительности, 111  
Аренда, 113  
    имущества, частично приобретен-  
        ного в кредит, 127  
    истинная, 122  
    капитальная, 124

### Б

Блэка–Скоулза модель и формула,  
    291  
Браузер объектов VBA, 561  
Будущая стоимость, 31  
Бэбкока формула, 356

### В

Внутренняя ставка доходности, 25;  
    133; 444  
Волатильность, 354  
    подразумеваемая, 294  
Временная структура, 377

### Г

Гипотеза эффективного рынка, 286  
Гипотетический финансовый отчет,  
    73

### Д

Дефолт, 385  
Дискретный сложный процент, 159  
Доход  
    от портфеля, средний, 149; 170  
    средневзвешенный, 148  
Доходность к погашению, 360; 386

Дюрация, 351

### З

Задача дешевой поставки, 401

### И

Иммунизация портфеля, 367

### К

Квантиль, 213  
Ковариация, 145; 162  
Коллекция, 555  
    Names, 559  
    Workbooks, 557  
    Worksheets, 558  
Компенсационный процент, 387  
Конкатенация, 530  
Консоль, 365  
Коэффициент корреляции, 146

### Л

Линия рынка капитала, 181  
Линия рынка ценных бумаг, 52

### М

Макрос, 513  
Массив, 529  
    динамический, 533  
    многомерный, 532  
Матрица, 431  
    единичная, 434  
    избыточной доходности, 162  
    ковариационная, 152; 216  
    невыврожденная, 435  
    операции, 432

переходных вероятностей, 388  
Мгновенная процентная ставка, 382

## Метод

Add, 555; 559  
Count, 555  
Remove, 555  
в VBA, 550  
Гаусса–Зейделя, 439  
дисконтированных денежных потоков, 45  
многофазный, 136  
эквивалентного займа, 114

## Модель

Блэка–Скоулза, 291  
биномиальная для нескольких периодов, 254  
биномиальная с двумя датами, 251  
Васичека, 382  
Гордона, дивидендная, 46  
гипотетическая, 105  
одного индекса, 166  
рынка капитала, ценовая, 50; 189  
управляемая сбытом, 73

## Н

Непрерывное дисконтирование, 37  
Непрерывное накопление, 36  
Непрерывный сложный процент, 36; 159

## О

Облигация  
с неравномерными выплатами, 358  
терминология, 385  
Обозреватель объектов VBA, 561  
Объект, 549  
ActiveCell, 549  
Workbook, 557  
Worksheet, 558  
Огибающая, 170  
Оператор  
Dim, 497; 529  
Do Loop Until, 506  
Do Loop While, 504  
Do Until, 505  
Do While, 503

For Each, 555  
For, 507  
If ElseIf, 480  
If, 479; 500  
Option Base, 532  
Option Explicit, 497  
ReDim, 534  
ReDim Preserve, 536  
Select Case, 483  
Set, 556  
While, 506  
With, 554  
вложенный, 481

## Операция

логическая, 500  
сравнения, 500

## Опцион

без выигрыша, 236  
включенный в стоимость портфеля, 316  
двойной на повышение (спред), 240  
защитный, 240; 304  
на отказ от проекта, 319  
на продолжение, 320  
опциональная сделка, 319  
примеры из Wall Street Journal, 231  
с выигрышем, 236  
с проигрышем, 236  
схемы прибыли, 235  
терминология, 229

Отрицательный долг, 86; 107

Ошибки в VBA, 479

## П

Переменная-замыкатель, 75  
Перемешивание данных, 219  
Подбор параметра, средство Excel, 33; 119; 328  
Подпрограмма, 515  
Поиск решения, средство Excel, 33; 119; 138; 203; 317; 327  
Портфель  
иммунизация, 367  
подверженных риску активов, 170  
реализуемый, 170

рыночный, 182; 198  
 страхование, 240; 304  
 эффективный, 152; 170; 198  
 Поток  
   разностный, 115  
   свободных средств, 80; 108  
 Предел досрочного исполнения, 333  
   опциона “колл”, 340  
   опциона “пут”, 336  
 Прибыль  
   на акционерный капитал, 94  
 Приведенная стоимость, 24  
 Псевдослучайное число, 415

## Р

Распределение  
   логнормальное, 214; 280  
   нормальное, 212; 419  
 Реализуемое множество, 170  
 Регрессия, 51; 190; 378; 451  
 Рекурсия, 487

## С

Свойство  
   CurrentRegion, 556  
   Item, 552  
   Range, 553  
   Value, 552  
 Случайное число, 415  
 Средневзвешенная стоимость  
   капитала, 45; 58  
 Ставка дисконтирования, 23  
   индивидуальная, 46  
   с поправкой на риск, 46  
 Стоимость  
   альтернативная, 23  
   будущая, 31  
   долга, 54  
   капитала, 23  
     средневзвешенная, 45; 58  
   конечная, 84  
   остаточная, 120  
   подверженная риску, 211  
   приведенная, 24  
   чистая приведенная, 24  
 Страхование портфеля, 304; 313

## Т

Таблица возврата средств, 26  
 Таблица данных, 425  
 Теорема  
   о паритете “пут”-“колл”, 244  
   об арбитражных операциях  
     с опционами, 241  
 Технический анализ курса  
   акций, 285  
 Тип, 517; 500  
   Long, 504  
   Range, 551  
   Variant, 495; 540

## Ф

Функция  
   CVer, 491  
   Date, 557  
   FormatDateTime, 557  
   InputBox, 520  
   Lbound, 530  
   MsgBox, 518  
   Rnd, 416  
   Time, 557  
   Ubound, 530  
 БС, 32  
 ВПР, 456  
 ВСД, 25; 444  
 ДИСП, 450  
 ДИСПР, 144; 189; 450  
 ДЛИТ, 352  
 ЕСЛИ, 456  
 ИНДЕКС, 449; 455  
 КВПИРСОН, 190; 451  
 КОВАР, 145; 189  
 КОРРЕЛ, 146  
 ЛГРФПРИВЛ, 453  
 ЛИНЕЙН, 380; 453  
 Линия тренда, 51; 378  
 ЛОГНОРМОБР, 214  
 МДЛИТ, 352  
 МОБР, 435; 448  
 МУМНОЖ, 151; 164; 389; 434; 448  
 НАКЛОН, 189; 451  
 НОРМОБР, 214  
 НОРМРАСП, 212

НОРМСТОБР, 214  
НОРМСТРАСП, 293  
ОТРЕЗОК, 190; 451  
ПЛТ, 29; 446  
ПС, 445  
СЛУЧМЕЖДУ, 222  
СЛЧИС, 221; 415  
СМЕЩ, 165  
СРЗНАЧ, 144; 189  
СТАНДОТКЛОН, 450  
СТАНДОТКЛОНП, 144; 287; 450  
ТРАНСП, 151; 163; 432; 447  
ЧАСТОТА, 276; 420; 448  
ЧИСЛКОМБ, 261; 485  
ЧИСТВНДОХ, 361  
ЧИСТНЗ, 361  
ЧПС, 443  
VBA, 471  
для работы с массивами, 447  
линия тренда, 146  
ранжирования, 457  
текстовая, 460

## Ц

Цена  
    возможного состояния, 253  
    возможности, 23  
    предприятия, 84  
Ценовая модель рынка капитала, 50;  
    189  
    с нулевым “бета” по Блэку, 173  
Ценовая эластичность, 298  
Ценообразование по арбитражному  
    эквиваленту, 252  
Цикл, 503

## Ч

Чистая приведенная стоимость, 24

## Э

Эластичность, 354  
Эффективная граница, 152; 175; 205



*Научно-популярное издание*

**Шимон Беннинга**  
**Финансовое моделирование с использованием Excel**  
**2-е издание**

|                         |                                            |
|-------------------------|--------------------------------------------|
| Литературный редактор   | <i>И.А. Попова</i>                         |
| Верстка                 | <i>А.В. Назаренко</i>                      |
| Художественный редактор | <i>С.А. Чернокозинский</i>                 |
| Корректоры              | <i>Л.А. Гордиенко, Л.В. Чернокозинская</i> |

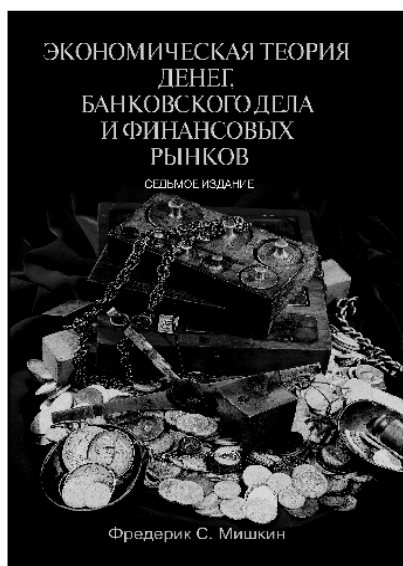
Издательский дом “Вильямс”  
127055, г. Москва, ул. Лесная, д. 43, стр. 1

Подписано в печать 04.12.2006. Формат 70х100/16.  
Гарнитура Times. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 47,73. Уч.-изд. л. 30,61.  
Тираж 3000 экз. Заказ № 0000.

Отпечатано по технологии CtP  
в ОАО “Печатный двор” им. А. М. Горького  
197110, Санкт-Петербург, Чкаловский пр., 15.

# ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДЕНЕГ, БАНКОВСКОГО ДЕЛА И ФИНАНСОВЫХ РЫНКОВ 7-Е ИЗДАНИЕ

**Фредерик С. Мишкин**



[www.williamspublishing.com](http://www.williamspublishing.com)

Один из самых популярных зарубежных учебников в области финансов. В центре внимания автора — влияние денежно-кредитной политики на деятельность финансовых рынков и финансовых учреждений, объем производства товаров и услуг в экономике страны, развитие международной торговли, прибыль предприятий и благосостояние граждан. Книга содержит много практических примеров, богатый справочно-методический материал, вопросы и задания к каждой главе, а также ответы и решения ко многим из них. Особое внимание уделено активному использованию возможностей Интернета при изучении данной проблематики. Для студентов, изучающих теорию денег и финансовых рынков, преподавателей экономики, аналитиков и бизнесменов.

**ISBN 5-8459-0918-X**

**в продаже**

# (НЕ)ПОСЛУШНЫЕ РЫНКИ

## ФРАКТАЛЬНАЯ РЕВОЛЮЦИЯ В ФИНАНСАХ

**Бенуа Мандельброт**  
**Ричард Л. Хадсон**



[www.williamspublishing.com](http://www.williamspublishing.com)

В своей очередной книге автор знаменитой *Фрактальной геометрии природы* (1982 год) Бенуа Мандельброт подрывает устои современной финансовой теории, которую преподают в самых престижных школах бизнеса мира и на которой построена глобальная финансовая система. Это совершенно новый, революционный взгляд на финансы. В книге показано, как в бизнесе действуют авторские концепции скейлинга, долгосрочной зависимости, бурной случайности, мультифрактального анализа и др. *(Не)послушные рынки* просто обязаны прочесть все, кто имеет отношение к финансам, бизнесу, производству. Но не только: любой читатель, интересующийся тем, как устроен наш мир, насколько он упорядочен или хаотичен, надежен или опасен, после прочтения книги посмотрит вокруг себя другими глазами.

**ISBN 5-8459-0922-8**

**в продаже**

# ОСНОВЫ ФИНАНСОВОГО МЕНЕДЖМЕНТА 12-Е ИЗДАНИЕ

***Джеймс К. Ван Хорн  
Джон М. Вахович, мл.***



Книга раскрывает процесс принятия финансовых решений в трех главных сферах ответственности финансового руководителя компании: инвестициях, финансировании и управлении активами компании. Хотя книга задумана как вводный курс в финансовый менеджмент, она вполне может служить в качестве справочника для участников программ повышения квалификации руководящих кадров; соискателей, готовящихся к различным профессиональным экзаменам, и специалистов, занятых в различных областях финансового менеджмента.

[www.williamspublishing.com](http://www.williamspublishing.com)

**ISBN 5-8459-1074-9**

**в продаже**

# ФИНАНСЫ ДЛЯ НЕФИНАНСОВЫХ МЕНЕДЖЕРОВ

## КАК ПОНИМАТЬ ЦИФРЫ ФИНАНСОВЫХ ОТЧЕТОВ

**Карен Берман и Джо Найт  
вместе с Джоном Кейзом**



[www.williamspublishing.com](http://www.williamspublishing.com)

**ISBN 978-5-8459-1175-9**

Книга *Финансы для нефинансовых менеджеров* посвящена анализу основных финансовых показателей компании. Не умея читать финансовые документы, нельзя управлять финансовыми отчетами, своевременно распознавать негативные тенденции и предотвращать финансовые махинации. Именно недостаточное внимание высшего руководства к финансовым отчетам стало причиной краха ряда крупнейших корпораций в последние годы. Книга *Финансы для нефинансовых менеджеров* поможет предпринимателю управлять финансовыми показателями своей фирмы, менеджеру среднего звена — увеличить вклад своего подразделения в работу компании в целом, студенту — получить четкие определения основных финансовых понятий и усвоить основы финансового учета. Книга написана просто и увлекательно и полна занимательных историй из жизни реальных компаний.

**в продаже**

# УРОКИ УОЛЛ-СТРИТ:

## СОВЕТЫ ОТ УОРРЕНА БАФФЕТА, БЕНДЖАМИНА ГРЕХЭМА, ФИЛА ФИШЕРА, РОУ ПРАЙСА И ДЖОРДЖА ТЕМПЛТОНА, КАК РАЗБОГАТЕТЬ НА ФИНАНСОВОМ РЫНКЕ

**Никки Росс**

*Уроки Уолл-стрит* принадлежат к очень популярному за рубежом жанру историй успеха людей, которые сделали себя сами. Уоррен Баффет, Бенджамин Грэхем, Джон Темплтон, Фил Фишер, Томас Прайс входят в число наиболее успешных инвесторов за всю историю фондового рынка США. В этой книге они откровенно рассказывают о секретах своего успеха, многие из которых, возможно, удивят читателей, прочитавших несколько современных учебников по техническому анализу и впавших в уныние от обилия математики. Каждой из героев этой книги внес нечто новое в теорию инвестирования: Бенджамин Грэхем создал теорию выбора недооцененных рынком акций, Фил Фишер разработал новые методы сбора информации о предполагаемом объекте инвестирования, Томас Прайс увязывал выбор ценных бумаг с анализом общего состояния экономики и этапов жизненного цикла отрасли, инвестируя в растущий бизнес; Уоррен Баффет известен своей методикой анализа финансовой отчетности; Джон Темплтон модернизировал теорию инвестирования с учетом глобализации экономики. Возможно, эта книга натолкнет читателя на разгадку секретов уникальной интуиции этих мастеров — подлинных легенд Уолл-стрита.



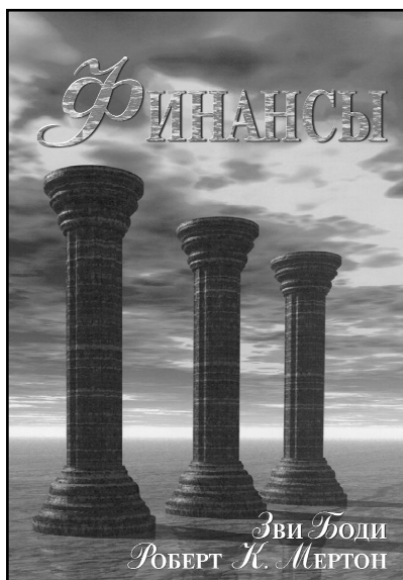
[www.williamspublishing.com](http://www.williamspublishing.com)

**ISBN 5-8459-0789-6**

**в продаже**

# ФИНАНСЫ

*Зви Боди,  
Роберт Мертон*



[www.williamspublishing.com](http://www.williamspublishing.com)

**в продаже**

Авторы книги — университетские профессора: Зви Боди и Роберт Мертон (Нобелевский лауреат по экономике 1997 г.) — детально проанализировали проблемы, с которыми все мы сталкиваемся дома и на работе. В первой части книги дается общий обзор финансовой системы, а также рассматриваются структура и применение финансовых отчетов корпораций для нужд хозяйственного анализа и прогнозирования. Части II, III и IV посвящены концептуальным основам финансов. Упор в них делается на применении финансовых принципов в ходе принятия решений как домохозяйствами (финансовое планирование и вопросы инвестирования на всех этапах жизненного цикла семьи), так и фирмами (экономический анализ эффективности капиталовложений). В части V описана теория и практика оценки активов. Часть VI посвящена базовым вопросам корпоративных финансов.

Теоретические подходы и практические примеры, рассматриваемые в учебнике, применимы для любой страны с рыночной экономикой. Особенно полезной эта книга является для подготовки студентов экономических специальностей в России, Украине и других странах СНГ.

# ФИНАНСОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В EXCEL И VBA: углубленный курс

*Мэри Джексон  
Майк Стонтон*



[www.dialektika.com](http://www.dialektika.com)

Эта уникальная книга демонстрирует, что Excel и VBA могут играть важную роль в анализе результатов численных методов финансового моделирования. В ней рассмотрена оценка акций, опционов на акции и опционов на облигации согласно теориям, разработанным на протяжении периода от начала 1950-х до конца 1990-х годов. Все главы, посвященные анализу этих финансовых инструментов, содержат как стандартный материал, так и более сложные, специальные темы. Используемые модели реализованы в виде электронных таблиц, облегчающих понимание экономического смысла моделей, а также в виде специальных функций VBA.

Книга предназначена как для студентов и аспирантов, так и для экономистов-практиков.

**ISBN 5-8459-0547-8**

**в продаже**



# ХОРОШИЕ ДЕВОЧКИ НЕ СТАНОВЯТСЯ БОГАТЫМИ

**Лоис П. Франкел**



[www.williamspublishing.com](http://www.williamspublishing.com)

Сколько раз вам приходилось отказывать себе в важной покупке или поездке на море, потому что вы должны были залатать дыры в семейном бюджете? Сколько раз вы переносили свой отпуск, боясь, что не оправдаете надежд руководства? Сколько раз вы брались за голову, когда из банка приходил отчет о состоянии вашей кредитной карточки? Все эти симптомы “хорошей девочки” были заложены в вас еще в детстве вместе с противоречивыми родительскими установками об отношении к деньгам и собственному финансовому благополучию. Но все не так плохо, как вам может показаться! Опытный специалист по обучению персонала Лоис П. Франкел поможет вам сформировать навыки, которые приведут вас к богатству. В своей книге она не только развенчивает миф о “принце на белом коне”, но и преподает основы финансового мышления — обязательного условия достижения финансовой независимости.

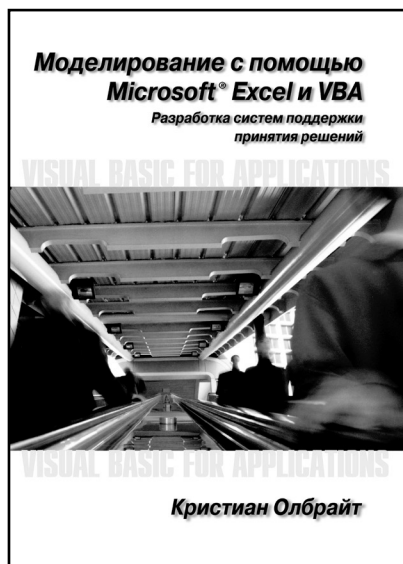
**ISBN 978-5-8459-1177-3**

**в продаже**

# МОДЕЛИРОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ MICROSOFT EXCEL И VBA

## РАЗРАБОТКА СИСТЕМ ПОДДЕРЖКИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

**Кристиан Олбрайт**



[www.williamspublishing.com](http://www.williamspublishing.com)

В этой книге рассказывается о том, как эффективно применять методы моделирования в приложениях электронных таблиц для решения повседневных экономических задач. Книга состоит из двух частей. В первой из них изложены основные концепции и принципы программирования на языке VBA (Visual Basic for Applications), во второй части рассматриваются конкретные приложения и детально анализируется их исходный код. В конце каждой главы приводится ряд упражнений по программированию, которые призваны закрепить или расширить полученные знания и лучше усвоить изученные в главе концепции. Прилагаемый к книге компакт-диск содержит все рабочие книги Excel и другие файлы, о которых речь идет в примерах (в том числе файлы, используемые в упражнениях). Все рабочие книги открываются в Excel 97 или более поздней версии программы. Настоящая книга будет полезна как студентам, так и профессионалам, которые хотят создавать системы поддержки принятия решений с помощью электронных таблиц на основе Microsoft Excel.

**ISBN 5-8459-0858-2**

**в продаже**

# ЭКОНОМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В MICROSOFT EXCEL, 6-Е ИЗДАНИЕ

**Джеффри Мур,  
Лоренс Р. Уэдерфорд**



**[www.williamspublishing.com](http://www.williamspublishing.com)**

Эта книга посвящена основным принципам моделирования, которые можно применить к широкому спектру различных управленческих задач, решаемых с помощью Microsoft Excel. В ней подробно рассматриваются определенные классы моделей, используемые в самых разнообразных ситуациях. Цель книги — не составить сборник готовых "рецептов" моделей, а научить читателя самостоятельно готовить "здоровую пищу" на основе нескольких типов моделей, приведенных в качестве примеров. Она поможет современным менеджерам в их карьерном росте, покажет реальные жизненные ситуации, которые можно смоделировать с помощью электронных таблиц, и представит методы построения и анализа моделей.

Книга предназначена для широкого круга студентов, аспирантов и работающих специалистов.

**в продаже**

# ПРОФЕССИОНАЛЬНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ НА VBA В EXCEL 2003

**Джон Уокенбах**

Данная книга поможет вам разобраться в тонкостях разработки приложений с помощью VBA. В ней описаны многочисленные средства языка VBA, его возможности и среда использования.

Вначале вашему вниманию будет предложен обзор возможностей программы, далее вы перейдете к определению концепций VBA-программирования, а затем познакомитесь с самим языком. Если вы начинающий программист на VBA, то в данном издании вы найдете всю необходимую информацию, которая потребуется для дальнейшей работы. Если вы уже обладаете завидным опытом работы с VBA, то эта книга обогатит и приумножит ваши знания, пополнив их новыми методиками и примерами из реальной жизни.



[www.dialektika.com](http://www.dialektika.com)

**ISBN 5-8459-0771-3**

**в продаже**