В. И. Смирнов

Курс высшей математики

том I

bhv®

В. И. Смирнов

Курс высшей математики

том I

Допущено Научно-методическим советом по математике
Министерства образования и науки Российской Федерации
в качестве учебника для студентов механико-математических
и физико-математических факультетов университетов
и технических высших учебных заведений

Санкт-Петербург
«БХВ-Петербург»
2008

УДК 510(075.8)
ББК 22.1я73
С50

Смирнов В. И.

С50 Курс высшей математики. Том I / Пред. Л. Д. Фаддеева, пред. и прим. Е. А. Грининой: 24-е изд. — СПб.: БХВ-Петербург, 2008. — 624 с.: ил. — (Учебная литература для вузов)

ISBN 978-5-94157-909-9

Фундаментальный учебник по высшей математике, переведенный на множество языков мира, отличается, с одной стороны, систематичностью и строгостью изложения, а с другой — простым языком, подробными пояснениями и многочисленными примерами.

В первом томе изложены функциональная зависимость и теория пределов, понятие о производной и интеграле, ряды и их приложения к приближенным вычислениям, функции нескольких переменных, комплексные числа, начала высшей алгебры и интегрирование функции.

В настоящем, 24-м, издании отмечена устаревшая терминология, сделаны некоторые замечания, связанные с методикой изложения материала, отличающейся от современной, исправлены опечатки.

Для студентов университетов и технических вузов

УДК 510(075.8)
ББК 22.1я73

Предисловие академика РАН Л. Д. Фаддеева

Рецензент: Л. Д. Кудрявцев, член-корреспондент РАН, академик Европейской академии наук, президент Центра современного образования, профессор

Редактор: Е. А. Гринина, канд. физ.-мат. наук

Оригинал-макет подготовлен издательством
Санкт-Петербургского государственного университета

ISBN 978-5-94157-909-9

© Смирнов В. Н., Смирнова Е. В., 2008
© Оформление, издательство "БХВ-Петербург", 2008

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к 24-му изданию 9

ГЛАВА I
ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ И ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

§ 1. Переменные величины 11
1. Величина и ее измерение (11). 2. Число (12). 3. Величины постоянные и переменные (15). 4. Промежуток (16). 5. Понятие о функции (17). 6. Аналитический способ задания функциональной зависимости (20). 7. Неявные функции (22). 8. Табличный способ (23). 9. Графический способ изображения чисел (24). 10. Координаты (26). 11. График и уравнение кривой (28). 12. Линейная функция (30). 13. Приращение. Основное свойство линейной функции (32). 14. График равномерного движения (34). 15. Эмпирические формулы (36). 16. Парабола второй степени (37). 17. Парабола третьей степени (40). 18. Закон обратной пропорциональности (42). 19. Степенна́я функция (44). 20. Обратные функции (47). 21. Многозначность функции (49). 22. Показательная и логарифмическая функции (52). 23. Тригонометрические функции (55). 24. Обратные тригонометрические, или круговые, функции (59).

§ 2. Теория пределов. Непрерывные функции 62
25. Упорядоченное переменное (62). 26. Величины бесконечно малые (65). 27. Предел переменной величины (71). 28. Основные теоремы (76). 29. Величины бесконечно большие (79). 30. Монотонные переменные (81). 31. Признак Коши существования предела (83). 32. Одновременное изменение двух переменных величин, связанных функциональной зависимостью (88). 33. Примеры (93). 34. Непрерывность функции (95). 35. Свойства непрерывных функций (98). 36. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших величин

(102). 37. Примеры (104). 38. Число e (106). 39. Недоказанные предложения (110). 40. Вещественные числа (112). 41. Действия над вещественными числами (116). 42. Точные границы числовых множеств (119). 43. Свойства непрерывных функций (121). 44. Непрерывность элементарных функций (125).

ГЛАВА II

ПОНЯТИЕ О ПРОИЗВОДНОЙ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 3. Производная и дифференциал первого порядка 131
45. Понятие о производной (131). 46. Геометрическое значение производной (134). 47. Производные простейших функций (137). 48. Производные сложных и обратных функций (141). 49. Таблица производных и примеры (146). 50. Понятие о дифференциале (149). 51. Некоторые дифференциальные уравнения (153). 52. Оценка погрешностей (156).

§ 4. Производные и дифференциалы высших порядков 158
53. Производные высших порядков (158). 54. Механическое значение второй производной (161). 55. Дифференциалы высших порядков (162). 56. Разности функций (164).

§ 5. Приложение понятия о производной к изучению функции 167
57. Признаки возрастания и убывания функций (167). 58. Максимумы и минимумы функций (171). 59. Построение графиков (178). 60. Наибольшее и наименьшее значения функций (182). 61. Теорема Ферма (189). 62. Теорема Ролля (190). 63. Формула Лангранжа (192). 64. Формула Коши (196). 65. Раскрытие неопределенностей (197). 66. Различные виды неопределенностей (200).

§ 6. Функция двух переменных 203
67. Основные понятия (203). 68. Частные производные и полный дифференциал функции двух независимых переменных (206). 69. Производные сложных и неявных функций (209).

§ 7. Некоторые геометрические приложения понятия о производных 211
70. Дифференциал дуги (211). 71. Выпуклость, вогнутость и кривизна (214). 72. Асимптоты (218). 73. Построение графиков (220). 74. Параметрическое задание кривой (223). 75. Уравнение Ван-дер-Ваальса (228). 76. Особые точки кривых (230). 77. Элементы кривой (235). 78. Цепная линия (238). 79. Циклоида (239). 80. Эпициклоиды и гипоциклоиды (242). 81. Развертка круга (246). 82. Кривые в полярных координатах (246). 83. Спирали (249). 84. Улитки и кардиоида (251). 85. Овалы Кассини и лемниската (253).

ГЛАВА III

ПОНЯТИЕ ОБ ИНТЕГРАЛЕ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 8. Основные задачи интегрального исчисления и неопределенный интеграл 256
86. Понятие о неопределенном интеграле (256). 87. Определенный интеграл как предел суммы (261). 88. Связь определенного и неопределенного интегралов (268). 89. Свойства неопределенного интеграла (274). 90. Таблица простейших интегралов (276). 91. Правило интегрирования по частям (277). 92. Правило замены переменных. Примеры (279). 93. Примеры дифференциальных уравнений первого порядка (284).

§ 9. Свойства определенного интеграла 288
94. Основные свойства определенного интеграла (288). 95. Теорема о среднем (293). 96. Существование первообразной функции (297). 97. Разрыв подынтегральной функции (300). 98. Бесконечные пределы (305). 99. Замена переменной под знаком определенного интеграла (306). 100. Интегрирование по частям (310).

§ 10. Приложения понятия об определенном интеграле 313
101. Вычисление площадей (313). 102. Площадь сектора (317). 103. Длина дуги (320). 104. Вычисление объемов тел по их поперечным сечениям (329). 105. Объем тела вращения (331). 106. Поверхность тела вращения (333). 107. Определение центров тяжести. Теоремы Гульдина (337). 108. Приближенное вычисление определенных интегралов; формулы прямоугольников и трапеций (342). 109. Формула касательных и формула Понселе (345). 110. Формула Симпсона (346). 111. Вычисление определенного интеграла с переменным верхним пределом (350). 112. Графические способы (352). 113. Площади быстро колеблющихся кривых (355).

§ 11. Дополнительные сведения об определенном интеграле ... 356
114. Предварительные понятия (356). 115. Разбиение промежутка на части и образование различных сумм (358). 116. Интегрируемые функции (362). 117. Свойства интегрируемых функций (367).

ГЛАВА IV

РЯДЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К ПРИБЛИЖЕННЫМ ВЫЧИСЛЕНИЯМ

§ 12. Основные понятия из теории бесконечных рядов 372
118. Понятие о бесконечном ряде (372). 119. Основные свойства бесконечных рядов (174). 120. Ряды с положительными членами. Признаки сходимости (377). 121. Признаки Коши и Даламбера (379).

122. Интегральный признак сходимости Коши (384). 123. Знакопеременные ряды (387). 124. Абсолютно сходящиеся ряды (389). 125. Общий признак сходимости (392).

§ 13. Формула Тейлора и ее приложения 393
126. Формула Тейлора (393). 127. Различные виды формулы Тейлора (399). 128. Ряды Тейлора и Маклорена (400). 129. Разложение e^x (401). 130. Разложение $\sin x$ и $\cos x$ (403). 131. Бином Ньютона (406). 132. Разложение $\log(1+x)$ (413). 133. Разложение $\operatorname{arctg} x$ (417). 134. Приближенные формулы (421). 135. Максимумы, минимумы и точки перегиба (422). 136. Раскрытие неопределенностей (424).

§ 14. Дополнительные сведения из теории рядов 426
137. Свойства абсолютно сходящихся рядов (426). 138. Умножение абсолютно сходящихся рядов (429). 139. Признак Куммера (431). 140. Признак Гаусса (433). 141. Гипергеометрический ряд (436). 142. Двойные ряды (438). 143. Ряды с переменными членами. Равномерно сходящиеся ряды (444). 144. Равномерно сходящиеся последовательности функций (448). 145. Свойства равномерно сходящихся последовательностей (451). 146. Свойства равномерно сходящихся рядов (456). 147. Признаки равномерной сходимости (457). 148. Степенные ряды. Радиус сходимости (460). 149. Вторая теорема Абеля (462). 150. Дифференцирование и интегрирование степенного ряда (464).

ГЛАВА V

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 15. Производные и дифференциалы функции 468
151. Основные понятия (468). 152. О предельно переходе (470). 153. Частные производные и полный дифференциал первого порядка (473). 154. Однородные функции (476). 155. Частные производные высших порядков (478). 156. Дифференциалы высших порядков (481). 157. Неявные функции (484). 158. Пример (487). 159. Существование неявных функций (489). 160. Кривые в пространстве и поверхности (492). .....

§ 16. Формула Тейлора. Максимумы и минимумы функции от нескольких переменных 497
161. Распространение формулы Тейлора на случай функции от нескольких независимых переменных (497). 162. Необходимые условия максимума и минимума функции (499). 163. Исследование максимума и минимума функции двух независимых переменных (501). 164. Примеры (505). 165. Дополнительные замечания о нахождении максимумов и минимумов (507). 166. Наибольшее и наименьшее значения функции (510). 167. Относительные максимумы и минимумы (511). 168. Дополнительные замечания (514). 169. Примеры (519).

ГЛАВА VI

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА, НАЧАЛА ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

§ 17. Комплексные числа 523

170. Комплексные числа (523). 171. Сложение и вычитание комплексных чисел (527). 172. Умножение комплексных чисел (529). 173. Деление комплексных чисел (532). 174. Возвышение в степень (533). 175. Извлечение корня (536). 176. Показательная функция (539). 177. Тригонометрические и гиперболические функции (542). 178. Цепная линия (547). 179. Логарифмирование (553). 180. Синусоидальные величины и векторные диаграммы (554). 181. Примеры (558). 182. Кривые в комплексной форме (562). 183. Представление гармонического колебания в комплексной форме (566).

§ 18. Основные свойства целых многочленов и вычисление их корней 567

184. Алгебраическое уравнение (567). 185. Разложение многочлена на множители (569). 186. Кратные корни (571). 187. Правило Горнера (573). 188. Общий наибольший делитель (577). 189. Вещественные многочлены (578). 190. Зависимость между корнями уравнения и его коэффициентами (580). 191. Уравнение третьей степени (581). 192. Решение кубического уравнения в тригонометрической форме (585). 193. Способ итерации (588). 194. Способ Ньютона (593). 195. Способ простого интерполирования (595).

§ 19. Интегрирование функции 598

196. Разложение рациональной дроби на простейшие (598). 197. Интегрирование рациональной дроби (601). 198. Интеграл от выражений, содержащих радикалы (604). 199. Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ (605). 200. Интегралы вида $\int R(\sin x,\ \cos x)dx$ (610). 201. Интегралы вида $\int e^{ax}[P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx]dx$ (612).

ПРЕДИСЛОВИЕ
к 24-му изданию

Читателю предлагается переиздание первой книги многотомного труда Владимира Ивановича Смирнова «Курс высшей математики».

В чем притягательная сила этого энциклопедического учебника, который выдерживает испытание временем уже более семидесяти лет, переведен на множество языков мира, ссылки на который имеются в научных публикациях самого последнего времени?

Прежде всего это основополагающая идея, выдвинутая выдающимися учеными, академиками В. А. Фоком и В. И. Смирновым, работавшими на физическом факультете Ленинградского университета. Она состояла в том, что для студентов физиков и, даже шире, для естествоиспытателей и инженеров, требуется совсем иное содержание и стиль изложения математики, чем для студентов математиков. Формализованный стиль, основанный на чередовании определений, лемм и теорем, и доведение условий до предельно общих за счет громоздкости доказательства представляется ненужным мышлению физика, использующего эмпирический подход чаще, чем дедуктивный.

Второй составляющей успеха представляемой книги был непревзойденный педагогический дар Владимира Ивановича. До преклонных лет он был одним из любимейших лекторов на физическом факультете. Книги, написанные им, читаются просто и увлекательно, даже те страницы, где проводятся громоздкие вычисления. И все это с сохранением достаточной строгости изложения.

Третьим важным моментом является энциклопедический охват материала. Курс включает как общие разделы математики, читаемые для физиков, химиков, инженеров и т. д., так и более специализированные разделы, например, теорию групп или теорию специальных функций.

При написании раздела по теории групп значительную помощь ему оказал мой отец член-корреспондент Д. К. Фаддеев. В последнем томе курса впервые в советской математике было дано изложение функционального анализа. Часть разделов, связанных с функциональным анализом, была доработана после смерти В. И. Смирнова академиком О. А. Ладыженской.

Несколько слов надо сказать о личности Владимира Ивановича. Он был очень скромным, открытым человеком, никогда не требовавшим от университетского начальства ни отдельного кабинета, ни личной секретарши. Однако он был тверд и решителен, когда выступал в защиту гонимых по тем или иным причинам математиков, когда отстаивал научные принципы университетского образования. Ту же О. А. Ладыженскую он неоднократно спасал от административного произвола, сохранив для математики выдающегося ученого. Авторитет Владимира Ивановича как в Ленинградском математическом сообществе, так и в мировой науке был чрезвычайно высок.

До сих пор курс В. И. Смирнова используется как основное учебное пособие на физическом факультете Санкт-Петербургского государственного университета. На младших курсах одним из лекторов по высшей математике была Е. А. Гринина, которая и подготовила данное переиздание к печати.

академик РАН *Л. Д. Фаддеев*

Общая цель сделанных комментариев состоит в том, чтобы упростить современному студенту использование данной книги и как единого учебного пособия, и как справочного материала при работе с другими изданиями. Мною отмечена устаревшая терминология, даны замечания по поводу опущенных вычислений. Также сделаны некоторые замечания, связанные с методикой изложения материала, отличающейся от принятой в большинстве современных лекционных курсов. В ходе работы были исправлены опечатки, допущенные в предыдущем издании.

канд. физ.-мат. наук *Е. А. Гринина*

ГЛАВА I

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ И ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

§ 1. ПЕРЕМЕННЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

1. Величина и ее измерение. Математический анализ имеет основное значение в ряде наук и, в частности, в естественных науках и технике. В отличие от остальных наук, из которых каждая интересуется лишь некоторой определенной стороной окружающего нас мира, математика имеет дело с самыми общими свойствами, присущими всем доступным для научного исследования явлениям.

Одним из основных понятий является понятие о *величине и ее измерении*. Характерное свойство величины заключается в том, что она может быть измерена, т. е. тем или иным путем сравнена с некоторой определенной величиной того же рода, которая принимается *за единицу меры*. Самый процесс сравнения зависит от свойства исследуемой величины и называется *измерением*. В результате же измерения получается *число*, выражающее отношение рассматриваемой величины к величине, принятой за единицу меры. Всякий закон природы дает нам соотношение между величинами или, вернее, между числами, выражающими эти величины. Предметом исследования математики и являются как раз числа и различные соотношения между ними, независимо от конкретного характера тех величин или законов, которые привели нас к этим числам и соотношениям.

Итак, *каждой величине соответствует измеряющее ее число.* Но число это существенно зависит от принятой при измерении единицы или *масштаба.* При увеличении этой единицы будет уменьшаться число, измеряющее данную величину, и, обратно, число это будет увеличиваться при уменьшении единицы. Выбор масштаба обусловливается характером исследуемой величины и обстоятельствами, при которых производится измерение. Величина масштаба при измерении одной и той же величины может меняться в самых широких пределах, — например, при измерении *длины* в точных оптических исследованиях принимают за единицу длины один *ангстрем* (одну десятимиллионную долю миллиметра, 10^{-7} мм); в астрономии же употребляют единицу длины, называемую *световым годом*, т. е. расстояние, проходимое светом в течение одного года (за одну секунду свет проходит примерно 300 000 км).

2. Число. Число, которое получается в результате измерения, может быть *целым* (если единица содержится целое число раз в измеряемой величине), *дробным*, или *рациональным* (если существует другая единица, которая содержится целое число раз в измеряемой величине, так и в выбранной раньше единице, — короче, когда измеряемая величина *соизмерима* с единицей меры), и, наконец, *иррациональным* (когда такой общей меры не существует, т. е. данная величина оказывается *несоизмеримой* с единицей меры).

Так, например, в элементарной геометрии доказывается, что диагональ квадрата несоизмерима с его стороной, так что если мы будем измерять диагональ квадрата, приняв за единицу длины его сторону, то полученное при измерении число $\sqrt{2}$ будет иррациональным. Иррациональным же оказывается и число π, измеряющее длину окружности, диаметр которой принят за единицу.

Для уяснения понятия об иррациональном числе полезно обратиться к десятичным дробям. Всякое рациональное число, как известно из арифметики, может быть представлено или в виде конечной десятичной дроби, или в виде бесконечной десятичной дроби, причем в последнем случае бесконечная дробь будет периодической (чистой периодической или смешанной периодической). Так, например, производя деление числителя на знаменатель по правилу деления десятичных дробей, мы получим

$$\frac{5}{33} = 0,151515\cdots = 0(15),\ \frac{5}{18} = 0,2777\cdots = 0,2(7).$$

Наоборот, как известно из арифметики, всякая периодическая десятичная дробь выражает рациональное число.

При измерении величины, несоизмеримой с принятой единицей, мы можем сначала подсчитать, сколько раз полная единица заключается в измеряемой величине, затем сколько раз десятая доля единицы заключается в полученном остатке величины, затем сколько раз сотая доля единицы заключается в новом остатке и т. д. Таким путем при измерении величины, несоизмеримой с единицей, будет образовываться некоторая бесконечная непериодическая десятичная дробь. Всякому иррациональному числу соответствует такая бесконечная дробь и, наоборот, всякой бесконечной непериодической десятичной дроби соответствует некоторое иррациональное число. Если в этой бесконечной десятичной дроби оставить лишь несколько первых десятичных знаков, то получится приближенное значение по недостатку иррационального числа, представляемого этой дробью. Так, например, извлекая квадратный корень по обычному правилу до третьего десятичного знака, получим

$$\sqrt{2} = 1,414\ldots$$

Числа 1,414 и 1,415 будут приближенными значениями $\sqrt{2}$ с точностью до одной тысячной по недостатку и по избытку.

Пользуясь десятичными знаками, можно иррациональные числа сравнивать по величине друг с другом и с рациональными числами.

Во многих случаях приходится рассматривать величины разных знаков: положительные и отрицательные (температура выше и ниже 0° и т. п.). Такие величины выражаются соответственно положительными и отрицательными числами. Если a и b — положительные числа и $a > b$, то $-a < -b$, и любое положительное число, включая нуль, больше любого отрицательного числа.

Все рациональные и иррациональные числа располагаются в некотором определенном порядке по своей величине. Все эти числа образуют совокупность *вещественных чисел*.

Отметим одно обстоятельство, связанное с представлением вещественных чисел десятичными дробями. Вместо любой конечной десятичной дроби мы можем написать бесконечную десятичную дробь с девяткой в периоде. Так, например: $3,16 = 3,1599\ldots$ Если не пользоваться конечными десятичными дробями, то получится точное биоднозначное* соответствие между вещественными числами и бесконечными десятичными дробями, т. е. всякому вещественному числу соответствует бесконечная десятичная дробь и всякой бесконечной десятичной дроби соответствует вещественное число. Отрицательным числам соответствуют бесконечные десятичные дроби с предшествующим им знаком минус.

В области вещественных чисел выполнимы первые четыре действия, кроме деления на нуль. Корень нечетной степени из любого вещественного числа имеет всегда одно определенное значение. Корень четной степени из положительного числа имеет два значения, которые различаются только знаком. Корень четной степени из отрицательного вещественного числа не имеет смысла в области вещественных чисел

$$(\sqrt[n]{0} = 0).$$

Строгая теория вещественных чисел и действий над ними будет нами изложена в [40].

Арифметическим, или абсолютным, значением числа a называется само число a, если a — положительное число или нуль, и число $-a$, если a — отрицательное число. Абсолютное значение числа a обозначается символом $|a|$, так что $|\mathrm{a}| = a$, если $a \geqslant 0$, и $|a| = -a$, если $a < 0$. Так, например, $|5| = 5$ и $|-5| = 5$ и вообще $|a| = |-a|$. Нетрудно видеть, что абсолютное значение суммы $|a+b|$ будет равно сумме абсолютных значений слагаемых, т. е. равно $|a| + |b|$ только в том случае, если слагаемые имеют одинаковый знак, а при разных знаках слагаемых $|a+b| < |a| + |b|$, так что во всех случаях

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|.$$

* «Биоднозначное» означает взаимооднозначное.

Так, например, при $a = -3$ и $b = -7$ мы имеем знак равенства, а при $a = 3$ и $b = -7$ имеем $|3 + (-7)| = 4$ и $|3| + |-7| = 10$, т. е. знак неравенства.

Точно так же легко видеть что

$$|a - b| \geqslant |a| - |b|,$$

причем считается, что $|a| \geqslant |b|$. При $|a| < |b|$ неравенство также справедливо, ибо слева стоит положительная величина, а справа — отрицательная.

Абсолютное значение произведения равно произведению абсолютных значений сомножителей, и абсолютное значение частного (делитель отличен от нуля) равно частному абсолютных значений делимого и делителя, т. е.

$$|abc| = |a| \cdot |b| \cdot |c| \text{ и } \left|\frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a}{b}\right|.$$

3. Величины постоянные и переменные. Величины, исследуемые в математике, разделяются на два класса: постоянные и переменные.

Постоянной величиной называется величина, которая при данном исследовании сохраняет одно и то же, неизменное, значение. Ей соответствует, таким образом, при фиксированной единице меры определенное число.

Переменной величиной называется такая величина, которая по тем или иным причина может принимать различные значения при данном исследовании.

Из этих определений ясно, что понятие о постоянной и переменной величине в значительной мере условно и зависит от обстоятельств, при которых изучается данное явление. Одна и та же величина, которая при одних условиях могла рассматриваться как постоянная, при других условиях может стать переменной, и наоборот.

Так, например, при измерении веса тел важно знать, производится ли взвешивание в одном и том же месте земной поверхности или в разных: если измерение производится в одном и том же месте, то ускорение силы тяжести, от которой и зависит вес, будет

оставаться величиной постоянной, и различие в весе между разными телами будет зависеть только от их массы; если же измерения производятся в разных местах земной поверхности, то ускорение силы тяжести не может считаться постоянным, так как оно зависит от центробежной силы вращения Земли; благодаря этому одно и то же тело на экваторе весит меньше, чем на полюсе, что и можно обнаружить, если производить взвешивание не на рычажных, а на пружинных весах.

Равным образом при грубых технических расчетах можно считать, что длина входящих в конструкцию стержней есть величина неизменная; при более же точных, когда приходится принимать во внимание действие изменения температуры, длина стержней оказывается переменной, что, конечно, значительно усложняет все расчеты.

4. Промежуток. Характер изменения переменной величины может быть самым разнообразным. Переменная величина может принимать либо всевозможные вещественные значения, без всяких ограничений (например время t, отсчитываемое от некоторого определенного начального момента, может принимать всевозможные, как положительные, так и отрицательные, значения), либо значения ее ограничиваются некоторыми неравенствами (например абсолютная температура T°, которая должна быть больше — 273 ℃); наконец, переменная величина может принимать лишь некоторые, а не всевозможные значения (только целые — число жителей данного города, число молекул в данном объеме газа — или только соизмеримые с данной единицей и т. п.).

Укажем некоторые, наиболее распространенные в теоретических исследованиях и на практике способы изменения переменных величин.

Если переменная величина x может принимать все вещественные значения, удовлетворяющие условию $a \leqslant x \leqslant b$, где a и b — заданные вещественные числа, то говорят, что x *изменяется в промежутке* (a, b). Такой промежуток, со включенными концами, называют иногда *замкнутым промежутком.* Если переменная x может принимать все значения из промежутка (a, b), кроме его концов, т. е. $a < x < b$, то говорят, что x *изменяется внутри промежут-*

ка (a, b). Такой промежуток с исключенными концами называется *открытым промежутком*. Кроме того, областью изменения x может быть и промежуток, замкнутый с одной стороны и открытый с другой: $a \leqslant x < b$ или $a < x \leqslant b$.

Если область изменения x определяется неравенством $a \leqslant x$, то говорят, что x изменяется в промежутке $(a, +\infty)$, который замкнут слева и открыт справа. Точно так же при неравенстве $x \leqslant b$ мы имеем промежуток $(-\infty, b)$, открытый слева и замкнутый справа. Если x может принимать любые вещественные значения, то говорят, что x изменяется в промежутке $(-\infty, +\infty)$, открытом с обеих сторон.

В дальнейшем через (a, b) мы всегда будем обозначать замкнутый промежуток. Часто для замкнутого промежутка пользуются обозначением $[a, b]$*. Исключение одного или обоих концов из промежутка мы будем оговаривать особо.

5. Понятие о функции. Чаще всего в приложениях приходится иметь дело не с одной переменной величиной, а с несколькими сразу. Рассмотрим, например, 1 *кг* воздуха. Переменные величины, определяющие его состояние, будут: давление p(*кг*/*м*^{2}), под которым он находится; объем v(*м*^{3}), который он занимает; температура его t(°C). Предположим пока, что температура воздуха поддерживается равной 0 °C. Число t есть в данном случае постоянная, равная нулю. Остаются переменные p и v. Если менять p, то будет меняться и v; например, если воздух сжимать, то объем уменьшается. Давление p мы можем менять произвольно (по крайней мере, в пределах, доступных технике), а потому мы можем называть p *независимой переменной*; при каждой фиксированной величине давления газ, очевидно, должен занимать вполне определенный объем; стало быть, должен существовать такой закон, который позволяет при каждом значении p найти соответствующее ему значение v. Этот закон хорошо известен — это закон Бойля-Мариотта, который гласит, что объем, занимаемый газом при постоянной температуре, обратно пропорционален давлению.

* В математической литературе, как правило, обозначение (a, b) используется именно для открытого промужетка, а $[a, b]$ для замкнутого. На это следует обратить внимание при использовании этой книги одновременно с другими источниками.

Применяя этот закон к нашему килограмму воздуха, можно найти зависимость между v и p в виде уравнения

$$v = \frac{273 \cdot 29,27}{p}.$$

Переменная величина v называется в данном случае *функцией* независимой переменной p.

Отвлекаясь от этого частного примера, мы можем сказать, что, теоретически говоря, *для независимой переменной характерным является множество ее возможных значений, и мы можем по произволу выбирать для нее любое значение из этого множества ее возможных значений.* Так, например, множеством значений независимой переменной x может служить какой-либо промежуток (a, b) или внутренность этого промежутка, т. е. независимая переменная x может, например, принимать любые значения, удовлетворяющие неравенству $a \leqslant x \leqslant b$ или неравенству $a < x < b$. Может случиться, что x принимает любые целочисленные значения и т. д. В указанном выше примере роль независимой переменной играло p, и объем v был функцией p. Дадим теперь определение функции.

Определение. *Величина y называется функцией независимой переменной x, если любому определенному значению x (из множества ее возможных значений) соответствует определенное значение y.*

Если, например, y есть функция от x, определенная в промежутке (a, b), то это значит, что любому значению x из этого промежутка соответствует определенное значение y.

Вопрос о том, какую из двух величин, x или y, считать независимой переменной, есть часто вопрос только удобства. В нашем примере мы могли бы, меняя произвольно объем v и определяя каждый раз давление p, считать независимой переменной v, а давление p рассматривать как функцию от v. Решая написанное выше уравнение относительно p, получим формулу, выражающую функцию p через независимую переменную:

$$p = \frac{273 \cdot 29,27}{v}.$$

Сказанное о двух переменных без труда распространяется и на случай какого угодно числа переменных; и здесь мы можем отличить переменные независимые от зависимых, или функций.

Возвращаясь к нашему примеру, положим, что температура t не будет уже 0 °C, а может меняться. Закон Бойля—Мариотта должен быть при этом заменен более сложной зависимостью Клапейрона:

$$pv = 29,27(273 + t),$$

которая показывает, что при изучении состояния газа можно менять произвольно лишь две из величин p, v и t, а третья будет полностью определена, если даны значения этих двух. Мы можем принять за независимые переменные, например, p и t, тогда v будет функцией от них:

$$v = \frac{29,27(273 + t)}{p},$$

либо же независимыми переменными можно считать v и t, а p будет функцией от них.

Приведем другой пример. Площадь S треугольника выражается через длины сторон a, b, c по формуле

$$S = \sqrt{p\,(p - a)(p - b)(p - c)},$$

где p — полупериметр треугольника:

$$p = \frac{a + b + c}{2}.$$

Стороны a, b, c можно менять произвольно, лишь бы только каждая сторона была больше разности и меньше суммы двух других. Таким образом, переменные a, b, c *будут независимыми переменными, ограниченными неравенствами, S — функцией от них.*

Мы можем также задать произвольно две стороны, например a, b, и площадь S треугольника; пользуясь формулой

$$S = \frac{1}{2}\,ab \sin C,$$

где C — угол между сторонами a, b, мы можем тогда вычислить C. Здесь уже величины a, b, S будут независимыми переменными, C —

функцией. При этом переменные a, b, S должны быть ограничены неравенством

$$\sin C = \frac{2S}{ab} \leqslant 1.$$

Следует заметить, что в этом примере мы получаем для C *два значения*, смотря по тому, возьмем ли мы для C острый или тупой из двух углов, имеющих один и тот же синус

$$\sin C = \frac{2S}{ab}.$$

Мы приходим здесь к понятию о *многозначной функции*, о котором подробнее будем говорить ниже.

6. Аналитический способ задания функциональной зависимости. Всякий закон природы, дающий связь одних явлений с другими, устанавливает *функциональную зависимость* между величинами. Существует много способов для изображения функциональных зависимостей, но самое важное значение имеют три способа: 1) *аналитический*, 2) *способ таблиц* и 3) *графический, или геометрический.*

Мы говорим, что функциональная зависимость между величинами или, проще, *функция изображена аналитически*, если величины эти связаны между собой *уравнениями*, в которые они входят, подвергаясь различным математическим операциям: сложению, вычитанию, делению, логарифмированию и т. д. К аналитическому изображению функций мы приходим, когда исследуем вопрос *теоретически*, т. е., установив основные предпосылки, мы применяем математический анализ и получаем результат в виде некоторой математической формулы.

Если мы имеем, непосредственное выражение функции (т. е. зависимой переменной) при помощи математических действий над другими, независимыми переменными, то говорят, что функция аналитически задана явно. Примером явного задания функции может служить выражение объема газа v при постоянной температуре через давление (явная функция одной независимой перемен-

ной):

$$v = \frac{273 \cdot 29,27}{p}$$

или выражение площади S треугольника через стороны:

$$S = \sqrt{p\,(p-a)(p-b)(p-c)}$$

(явная функция от трех независимых переменных). Выпишем еще пример явного задания функции от одной независимой переменной x:

$$y = 2x^2 - 3x + 7. \tag{1}$$

Часто бывает неудобно или невозможно выписывать формулу, которая выражает функцию через независимые переменные. При этом пишут коротко так:

$$y = f(x).$$

Эта запись обозначает, что y есть функция независимой переменной x, и f есть символический знак зависимости y от x. Вместо f можно, конечно, употреблять и другие буквы. Если мы рассматриваем разные функции от x, то должны употреблять и разные буквы для символической записи зависимости от x:

$$f(x),\ F(x),\ \phi(x) \text{ и т. д.}$$

Такой символической записью пользуются не только в том случае, когда функция задана аналитически, но и в самом общем случае функциональной зависимости, которую мы определили в [5].

Аналогичной короткой записью пользуются и для функций от нескольких независимых переменных:

$$v = F(x,\ y,\ z).$$

Здесь v есть функция переменных x, y, z.

Частное значение функции получим, придав независимым переменным частные же значения и выполнив действия, указанные

знаками $f, F, \ldots$ Так, например, частное значение функции (1) при $x = \frac{1}{2}$ будет

$$y = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{2} + 7 = 6.$$

Вообще частное значение некоторой функции $f(x)$ при $x = x_0$ обозначается $f(x_0)$. Аналогично — для функции от нескольких переменных.

Не надо смешивать общего понятия функции, которое было нами дано в [5], с понятием аналитического выражения y через x. В общем определении функции говорится лишь о некотором законе, согласно которому любому значению переменной x из множества ее возможных значений соответствует определенное значение y. При этом не предполагается никакое аналитическое выражение (формула) y через x.

Отметим еще, что можно определить функцию различными аналитическими выражениями на разных участках изменения независимой переменной x. Так, например, мы можем определить функцию y на промежутке $(0,\ 3)$ следующим образом: $y = x + 5$ при $0 \leqslant x \leqslant 2$ и $y = 11 - 2x$ при $2 < x \leqslant 3$. При таком задании любому значению x из промежутка $(0,\ 3)$ соответствует определенное значение y, что и соответствует определению функции.

7. Неявные функции. Функция называется, *неявной*, если мы имеем не непосредственное аналитическое выражение ее через переменные независимые, а только *уравнение*, которое связывает ее значение со значениями переменных, независимых. Так, например, если переменная величина y связана с переменной величиной x уравнением

$$y^3 - x^2 = 0,$$

то y есть *неявная* функция независимой переменной x; с другой стороны, можно и x считать неявной функцией независимой переменной x.

Неявная функция v от нескольких независимых переменных $x, y, z, \ldots$ определяется вообще из *уравнения*

$$F(x,\ y,\ z,\ \ldots,\ v) = 0.$$

Вычислять значения этой функции мы можем тогда, когда разрешим уравнение относительно v и тем самым представим v в виде явной функции от $x, y, z, \ldots$:

$$v = \varphi(x,\ y,\ z,\ \ldots).$$

В приведенном выше примере y выражается через x в виде

$$y = \sqrt[3]{x^2}.$$

Однако для получения различных, свойств функции v совсем нет необходимости решать уравнение, и очень часто бывает, что удается достаточно хорошо изучить неявную функцию по самому уравнению, которым она определяется, не решая его.

Например, объем газа v есть неявная функция давления p и температуры t, определяемая уравнением

$$pv = R(273 + t).$$

Угол C между сторонами a и b треугольника площади S есть неявная функция a, b и S, определяемая уравнением

$$ab \sin C = 2S.$$

8. Табличный способ. Аналитический способ представления функций применяется главным образом при теоретических исследованиях. На практике же, когда приходится на самом деле вычислять много частных значений различных функций, аналитический способ представления часто оказывается неудобным, так как он требует в каждом случае производства всех необходимых вычислений.

Чтобы избежать этого, вычисляются частные значения наиболее употребительных функций, при большом числе частных значений независимых переменных, и составляются *таблицы*. Таковы, например, таблицы значений функций

$$y = x^2,\ \frac{1}{x},\ \sqrt{x},\ \pi x,\ \frac{1}{4}\pi x^3,\ \log_{10} x,\ \log_{10} \sin x,\ \text{и т. д.}$$

с которыми постоянно приходится иметь дело на практике. Существуют и другие таблицы, более сложных функций, которые тоже приносят большую пользу: таблицы бесселевых функций, эллиптических и т. д. Существуют таблицы и для функций от нескольких переменных, простейший пример которых представляет обыкновенная *таблица умножения*, т. е. таблица значений функций $z = xy$ при различных целых значениях x и y.

Иногда приходится вычислять значения функций при таких частных значениях независимых переменных, которых в таблицах нет, а есть только соседние к ним значения; для того, чтобы можно было пользоваться таблицами и в этом случае, существуют различные правила *интерполяции*; одно из таких правил было дано еще в курсе средней школы при пользовании таблицами логарифмов (partes proportionales).

Важное значение имеют таблицы тогда, когда при их помощи изображаются функции, аналитическое выражение которых нам *неизвестно*; с этим приходится иметь дело, когда производится *эксперимент*. Всякое опытное исследование имеет целью обнаружить скрытые для нас функциональные зависимости, и результат всякого опыта представляется в виде *таблицы*, связывающей между собой соответствующие значения исследуемых при этом опыте величин.

9. Графический способ изображения чисел. Переходя к графическому способу изображения функциональной зависимости, мы начнем со случая графического изображения одной переменной.

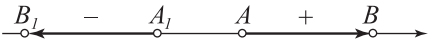

Рис. 1.

Всякое число x может быть изображено некоторым отрезком. Для этого достаточно, условившись раз и навсегда в выборе единицы длины, построить отрезок, длина которого равна как раз данному числу x. Таким образом, всякая величина не только может быть выражена *числом*, но также и геометрически изображена *отрезком*.

Для того чтобы можно было таким путем изобразить и отрицательные числа, условимся откладывать отрезки на одной и той же прямой линии, приписав ей притом определенное направление

(рис. 1). Условимся, далее, обозначать всякий отрезок знаком $\overline{AB}$, причем точку A будем называть началом, B — концом отрезка.

Если направление от A к B совпадает с направлением прямой, отрезок изображает число положительное; если же направление от A к B противоположно направлению прямой, то отрезок изобразит число отрицательное (A_1B_1 на рис. 1). *Абсолютное же значение* рассматриваемого числа выражается длиной изображающего его отрезка независимо от направления.

Длину отрезка $\overline{AB}$ будем обозначать через $|\overline{AB}|$; если отрезок $\overline{AB}$ изображает число x, то будем писать просто

$$x = \overline{AB}, \ |x| = |\overline{AB}|.$$

Для большей определенности можно раз навсегда условиться помещать начало всех отрезков в заранее выбранную точку O прямой. Тогда всякий отрезок $\overline{OA}$, а потому и изображаемое им число x, будет вполне определяться *точкой* A, концом отрезка (рис. 2). Обратно, задав число x, можем и по величине и по направлению определить отрезок $\overline{OA}$, а потому и конец его A. Точке O (начало) соответствует $x = 0$.

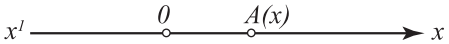

Рис. 2.

Итак, *если провести направленную прямую $X'X$ (ось) и отметить на ней неподвижную точку O (начало), то каждому вещественному числу x будет соответствовать определенная точка A этой прямой, такая, что отрезок $\overline{OA}$ измеряется числом x. Обратно, всякой точке A оси соответствует вполне определенное вещественное число x, измеряющее отрезок $\overline{OA}$. Это число x называется абсциссой точки A; если нужно указать, что точка A имеет абсциссу x, то пишут $A(x)$.*

Если число x меняется, то изображающая его точка A передвигается по оси. Установленное выше понятие о промежутке при таком *графическом изображении числа* x становится совершенно наглядным, а именно: если x меняется в промежутке $a \leqslant x \leqslant b$, то соответствующая точка на оси $X'X$ будет находиться в отрезке, концы которого имеют абсциссы a и b.

Если бы мы ограничились одними рациональными числами, то точке A не соответствовало бы никакой абсциссы, если отрезок $\overline{OA}$ несоизмерим с принятой единицей, т. е., иначе говоря, одни рациональные числа не заполняют всех точек прямой. Это заполнение достигается введением иррациональных чисел. Основным положением при графическом изображении одной переменной величины является указанное выше положение: всякой точке оси $X'X$ соответствует определенное вещественное число и, наоборот, всякому вещественному числу соответствует определенная точка оси $X'X$.

Возьмем на оси $X'X$ две точки: точку A_1 с абсциссою x_1 и точку A_2 с абсциссою x_2. При этом отрезку $\overline{OA_1}$ будет соответствовать число x_1, а отрезку $\overline{OA_2}$ — число x_2. Нетрудно показать, рассматривая всевозможные взаимные расположения точек A_1 и A_2, что отрезку $\overline{A_1A_2}$ будет соответствовать число x_2-x_1 так что длина этого отрезка будет равна абсолютному значению разности $(x_2 - x_1)$:

$$\overline{|A_1A_2|} = |x_2 - x_1|.$$

Если, например, $x_1 = -3$ и $x_2 = 7$, то точка A_1 лежит слева от O на расстоянии, равном 3, а точка A_2 лежит справа от O на расстоянии, равном 7. Отрезок $\overline{A_1A_2}$ будет иметь длину 10 и будет направлен так же, как ось $X'X$, т. е. ему будет соответствовать число $10 = 7 - (-3) = x_2 - x_1$. Предоставляем читателю разобрать другие возможности расположения точек A_1и A_2.

10. Координаты. Выше мы видели, что положение точки на прямой $X'X$ может быть определено вещественным числом x. Покажем теперь аналогичный способ определении положения точки на плоскости. Проведем на плоскости две взаимно перпендикулярные оси $X'X$и $Y'Y$ и возьмем за начало на каждой из них их точку пересечения O (рис. 3). Положительные направления на осях указаны стрелками. Точкам оси

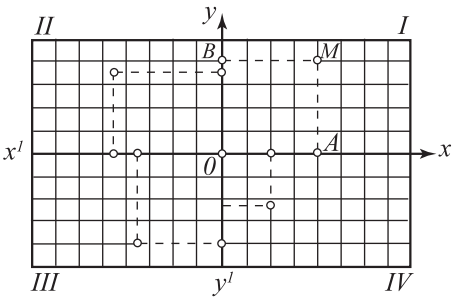

Рис. 3.

$X'X$ соответствуют вещественные числа, которые мы обозначим буквой x. Точкам оси $Y'Y$ также соответствуют вещественные числа, которые мы будем обозначать буквой y. Если нам заданы определенные значения x и y, то мы имеем определенные точки A и B на осях $X'X$ и $Y'Y$; зная точки A и B, можем построить точку M пересечения прямых, параллельных осям и проведенных через точки A и B.

Каждой паре значений величин x, y соответствует одно вполне определенное положение точки M на плоскости чертежа.

Обратно, каждой точке M плоскости соответствует вполне определенная пара значений величин x, y, отвечающих точкам пересечения A, B прямых, проведенных через точку M параллельно осям, с осями $X'X$и $Y'Y$.

При указанных на рис. 3 направлениях осей $X'X, Y'Y$ надо x считать положительным, если точка A лежит направо, и отрицательным, если она лежит налево от точки O; y будет положительным, если точка B лежит сверху, отрицательным, — если снизу от точки O.

Величины x, y, определяющие положение точки M на плоскости и в свою очередь определяемые положением точки M, называются координатами точки M. Оси $X'X, Y'Y$; называются координатными осями, плоскость чертежа — координатной плоскостью XOY, точка O — началом координат.

Величина x называется абсциссой, y — ординатой точки M. Задавая точку M ее координатами, пишут $M(x,\ y)$.

Самый способ изображения называется способом прямоугольных координат.

Знаки координат точки M при различных ее положениях в различных координатных углах (I–IV) (рис. 3) можно представить такой таблицей:

M	I	II	III	IV
x	+	—	—	+
y	+	+	—	—

Совершенно ясно, что координаты x и y точки M равны расстояниям точки M до осей координат, взятым с соответствующими знаками. Отметим, что точки оси $X'X$ имеют координаты $(x,\ 0)$, а точки оси $Y'Y$ — координаты $(0,\ y)$. Начало координат O имеет координаты $(0,\ 0)$.

11. График и уравнение кривой. Возвратимся к величинам x и y, которые изображает точка M. Пусть x и y связаны функциональной зависимостью; это значит, что, меняя по произволу x (или y), мы будем получать каждый раз соответствующее значение y (или

x). Каждой такой паре значений x и y соответствует определенное положение точки M на плоскости XOY; если же значения эти будут меняться, то точка M будет передвигаться по плоскости и при движении своем опишет некоторую линию (рис. 4), которая

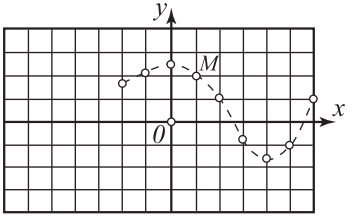

Рис. 4.

называется *графическим изображением* (или, проще, *графиком* или *диаграммой*) *рассматриваемой функциональной зависимости.*

Если зависимость задана *аналитически* в виде *уравнения* в явной форме

$$y = f(x)$$

или в неявной форме

$$F(x,\ y) = 0,$$

то уравнение это называется *уравнением кривой*, а кривая — *графиком уравнения* или *графиком функции.* Кривая и ее уравнение суть лишь различные способы выражения одной и той же функциональной зависимости, т. е. *все точки, координаты которых удовлетворяют уравнению кривой, лежат на этой кривой и, обратно, координаты всех точек, лежащих на кривой, удовлетворяют ее уравнению.*

Если дано уравнение кривой, можно, пользуясь листом графленой бумаги, построить, более или менее точно, самую кривую (вернее, можно построить *какое угодно число точек*, лежащих на этой кривой); чем больше таких точек построим, тем яснее будет для нас форма кривой; такой способ называется *построением кривой по точкам.*

Выбор *масштаба* имеет существенное значение при построении кривых; при этом можно выбирать *разные* масштабы при построении x и y. При одинаковых масштабах для x и y плоскость уподобляется листу бумаги, разграфленному на *квадраты*, при разных же масштабах — на *прямоугольники*. В дальнейшем будет подразумеваться, что масштабы для x и y одинаковы.

Читателям рекомендуется здесь же построить по точкам несколько графиков простейших функций, меняя притом масштабы для x и y.

Введенные выше понятия о координатах точки M, об уравнении кривой и графике уравнения устанавливают тесную связь между алгеброй и геометрией. С одной стороны, мы получаем возможность наглядным геометрическим путем изображать и исследовать аналитические зависимости, с другой стороны, оказывается возможным сводить решение геометрических вопросов к чисто алгебраическим действиям, в чем и заключается основная задача *аналитической геометрии*, разработанной впервые Декартом.

Ввиду чрезвычайной важности формулируем еще раз факты, лежащие в основе аналитической геометрии. Если на плоскости отметить две координатные оси, *то всякой точке плоскости будет соответствовать пара вещественных чисел — абсцисса и ордината этой точки, и, наоборот, всякой паре чисел будет соответствовать определенная точка плоскости, имеющая первое число своей абсциссой и второе число своей ординатой. Кривой на плоскости соответствует функциональная зависимость между x и y, или, что то же, уравнение, содержащее переменные x и y, которое удовлетворяется в том и лишь в том случае, если вместо x и y подставить координаты какой-либо из точек кривой. Наоборот, уравнению, содержащему две переменные x и y, соответствует кривая, состоящая из тех точек плоскости, координаты которых, будучи подставлены вместо x и y в уравнение, удовлетворяют ему.*

В дальнейшем мы рассмотрим основные примеры графиков функций, а теперь приведем некоторые общие соображения. Пусть мы имеем уравнение в явной форме: $y = f(x)$, где $f(x)$ — *однозначная функция*, определенная, например, в промежутке $(a,\ b)$, т. е. такая функция, что любому x из $(a,\ b)$ соответствует одно определен-

ное значение $f(x)$; график указанной функциональной зависимости состоит из точек $(x,\ y)$, полученных указанным только что способом. Перпендикуляр к оси OX, проведенный через любую точку этой оси, абсцисса которой принадлежит $(a,\ b)$, встретит график в одной точке (однозначность $f(x)$). В случае уравнения $F(x,\ y) = 0$ в неявной форме дело обстоит сложнее. Может случиться, что уравнению не соответствует ни одной точки. Это имеет место, например, для уравнения $x^2 + y^2 + 3 = 0$, ибо при любых вещественных x и y левая часть положительна. Уравнению $(x-3)^2 - (y-5)^2 = 0$ соответствует, очевидно, только одна точка $(3,\ 5)$.

Построение графика совершается автоматически в самопишущих приборах; переменной x является обычно время; y — величина, изменение которой с течением времени нас интересует, например барометрическое давление (барограф), температура (термограф). Важное значение имеет индикатор, который записывает зависимость между объемом и давлением газа, заключенного в цилиндре парового или газового двигателя.

12. Линейная функция. Простейшая функции, которая вместе с тем имеет важные приложения, — двучлен первой степени:

$$y = ax + b, \tag{2}$$

где a и b — данные числа. Эта функция называется *линейной функцией.* Мы покажем, что ее график — прямая линия. Рассмотрим сначала тот случай, когда число b равно нулю. При этом функция (2) имеет вид:

$$y = ax. \tag{3}$$

Она выражает тот факт, что переменная y прямо пропорциональна переменной x, и число a называется коэффициентом пропорциональности. Значения

$$x = 0,\ y = 0$$

удовлетворяют уравнению (3), т. е. соответствующий этому уравнению график проходит через начало координат O.

Обращаясь к чертежу (рис. 5), мы видим, что уравнение (3) выражает следующее геометрическое свойство исследуемого графика: какую бы точку M на нем мы ни взяли, отношение ординаты

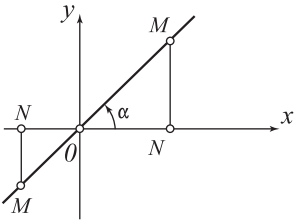

Рис. 5.

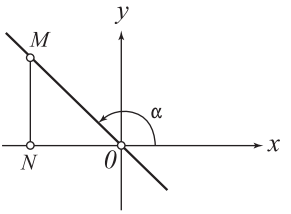

Рис. 6.

$y = \overline{NM}$ этой точки к ее абсциссе $x = \overline{ON}$ есть постоянная величина a. Так как, с другой стороны, это отношение равно тангенсу угла α, образуемого отрезком $\overline{OM}$ с осью OX, то отсюда видно, что геометрическое место точек M есть *прямая, проходящая через начало координат* O под углом α (или $\pi + \alpha$) к оси OX. Мы считаем α от оси OX до прямой против часовой стрелки.

Одновременно с этим обнаруживается и важное геометрическое значение коэффициента a в уравнении (3): *a есть тангенс угла α, который образует прямая, соответствующая этому уравнению, с осью OX*, вследствие чего a называется *угловым коэффициентом прямой*. Заметим, что если a — число отрицательное, то угол α будет тупой и соответствующая прямая будет расположена так, как указано на рис. 6.

Обратимся теперь к общему случаю линейной функции, а именно к уравнению (2). Ординаты y графика этого уравнения отличаются от соответствующих ординат графика уравнения (3) постоянным слагаемым b. Таким образом, мы получим непосредственно график уравнения (2), если график уравнения (3), изображенный на рис. 5 (при $a > 0$), передвинем параллельно оси OY на отрезок b: наверх, если b положительно, и вниз, если оно отрицательно. Таким образом, мы получим прямую, параллельную исходной прямой и отсекающую на оси OY отрезок $\overline{OM}_0 = b$ (рис. 7).

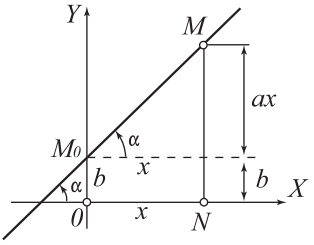

Рис. 7.

Итак, график функции (2) есть прямая линия, причем коэффициент a равен тангенсу угла, образованного этой прямой с осью OX, а свободный член b равен отрезку, отсекаемому этой прямой на оси OY, считая от начала O.

Коэффициент a иногда называют просто *уклоном* прямой, а b — *начальной ординатой* этой прямой. Наоборот, если нам дана какая-нибудь прямая L, не параллельная оси OY, то нетрудно написать уравнение вида (2), соответствующее этой прямой. Согласно предыдущему, достаточно взять коэффициент a равным тангенсу угла наклона этой прямой к оси OX и b равным отрезку, отсекаемому этой прямой на оси OY.

Отметим один частный случай, который представляет известную особенность. Пусть $a = 0$. Уравнение (2) дает нам при всяком x:

$$y = b, \tag{2_1}$$

т. е. получается такая «функция» от x, которая при всех значениях x сохраняет одно и то же значение b. Нетрудно видеть, что графиком уравнения (2_1) будет прямая, параллельная оси OX и отстоящая от этой оси на расстоянии $|b|$ (сверху, если $b > 0$, и снизу, если $b < 0$). Чтобы не делать специальных оговорок, мы будем говорить, что уравнение (2_1) также определяет функцию от x.

13. Приращение. Основное свойство линейной функции. Установим одно новое важное понятие, с которым часто приходится иметь дело при исследовании функциональной зависимости.

Приращением независимой переменной величины x при переходе от начального значения x_1 к конечному x_2 называется разность между конечным и начальным значениями: $x_2 - x_1$. Соответствующим приращением функции $y = f(x)$ называется разность между конечным и начальным значениями функции:

$$y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$$

Эти приращения часто обозначают так:

$$\Delta x = x_2 - x_2, \ \Delta y = y_2 - y_1.$$

Заметим при этом, что приращение может быть как положительной, так и отрицательной величиной, так что величина, получив «приращение», не обязательно должна увеличиться.

Обратим внимание на то, что запись Δx надо рассматривать как единое целое для обозначения приращения x.

Обратимся к случаю линейной функции:

$$y_2 = ax_2 + b \text{ и } y_1 = ax_1 + b.$$

Вычитая почленно, получим

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1) \tag{4}$$

или

$$\Delta y = a\Delta x.$$

Равенство это показывает, что линейная функция $y = ax + b$ *обладает тем свойством, что приращение функции* $(y_2 - y_1)$ *пропорционально приращению независимой переменной* $(x_2 - x_1)$, *причем коэффициент пропорциональности равен* a, т. е. *угловому коэффициенту, или уклону графика функции.*

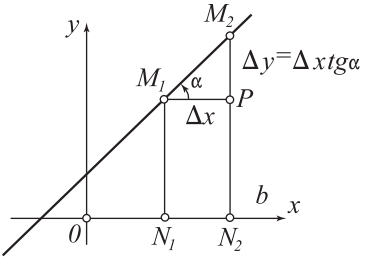

Рис. 8.

Если мы обратимся к самому графику (рис. 8), то приращению независимой переменной соответствует отрезок $\overline{M_1P} = \Delta x = x_2 - x_1$ и приращению функции — отрезок $\overline{PM_2} = \Delta_y = y_2 - y_1$, и формула (4) непосредственно вытекает из рассмотрения треугольника M_1PM_2.

Положим теперь, что некоторая функция обладает указанным выше свойством пропорциональности приращений независимой переменной и функции, выражаемым формулой (4). Из этой формулы следует

$$y_2 = a(x_2 - x_1) + y_1$$

или

$$y_2 = ax_2 + (y_1 - ax_1).$$

Будем считать исходные значения переменных x_1 и y_1 вполне определенными и обозначим разность $(y_1 - ax_1)$ одной буквой b:

$$y_1 = ax_1 + b.$$

Так как окончательные значения переменных x_2 и y_2 мы можем брать любыми, то вместо букв x_2 и y_2 можно просто писать буквы x и y, и предыдущее равенство перепишется в виде

$$y = ax + b,$$

т. е. *всякая функция, обладающая указанным выше свойством пропорциональности приращений, есть линейная функция $y = ax + b$, причем a есть коэффициент пропорциональности.*

Итак, линейная функция и график ее, прямая линия, могут служить для изображения всякого закона природы, в котор ом имеет место пропорциональность между приращениями исследуемых величин, что случается весьма часто.

14. График равномерного движения. Наиболее важное приложение, которое дает *механическое* истолкование уравнения прямой и его коэффициентов, — это *график равномерного движения.* Если точка P движется по некоторому пути (траектории), положение ее вполне определяется расстоянием, отсчитываемым по траектории в ту или иную сторону от некоторой данной ее точки A до точки P. Это расстояние, т. е. дуга AP, называется пройденным путем и обозначается буквой s, причем s может быть и положительным и отрицательным: значения s в одну сторону от начальной точки A считаются положительными, а в другую — отрицательными.

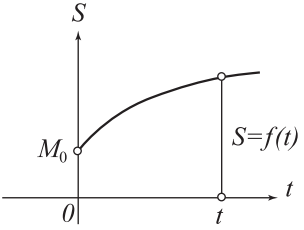

Рис. 9.

Пройденный путь s есть некоторая функция от времени t, приняв которое за независимую переменную, можем построить *график движения*, т. е. график функциональной зависимости (рис. 9)

$$s = f(t);$$

его не следует смешивать с самой *траекторией* движения.

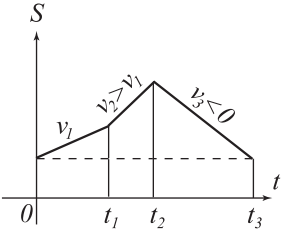

Рис. 10.

Движение называется *равномерным*, если путь, проходимый точкой за любой промежуток времени, пропорционален этому промежутку, другими словами, если отношение

$$\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

пути, пройденного за промежуток времени от t_1 до t_2, к величине этого промежутка есть постоянная величина, которая называется *скоростью* движения и обозначается через v.

В силу сказанного выше, *уравнение графика равномерного движения имеет вид*

$$s = vt + s_0;$$

самый график есть прямая, угловой коэффициент которой равен скорости движения, начальная же ордината s_0 есть значение s при $t = 0$.

На рис. 10 изображен график движения точки P, которая двигалась с постоянной скоростью v_1 в положительном направлении от момента 0 до момента t_1 (угол с осью t острый), затем с постоянной же, но большей скоростью v_2, в том же направлении (угол острый, но больший) до момента t_2, а затем с постоянной, но отрицательной скоростью v_3 (в обратном направлении, угол тупой) до начального своего положения. В случае, когда приходится иметь дело с многими точками, движущимися по одной и той же траектории (например при составлении расписания движения поездов или трамваев), такой *графический способ* является единственно удобным на

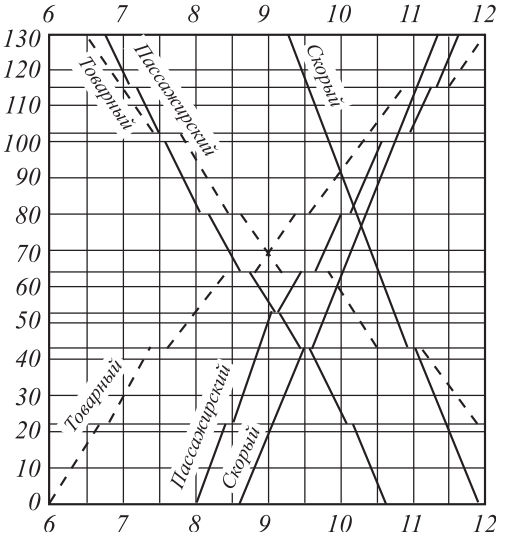

Рис. 11.

практике средством для определения встреч движущихся точек и вообще для обозрения всего движения (рис. 11).

15. Эмпирические формулы. Простота построения прямой и выражаемого ею закона пропорциональности приращения функции и независимой переменной делает график прямой весьма удобным средством при нахождении *эмпирических формул,* т. е. таких, которые выводятся непосредственно из данных опыта, без особого теоретического исследования.

Изобразив графически полученную из опыта таблицу на листе миллиметровой бумаги, мы найдем ряд точек, и если мы желаем получить приближенную эмпирическую формулу для изучаемой функциональной зависимости в виде *линейной* функции, нам остается провести *прямую*, которая если и не проходит сразу через все построенные точки (что, конечно, почти никогда невозможно), то, по крайней мере, проходит между этими точками и при этом так, чтобы по возможности одинаковое число точек оказалось как по одну, так и по другую сторону от прямой, и все они лежали достаточно к ней близко. В теории ошибок и обработки наблюдений изучаются более точные способы как для построения указанной прямой, так и для суждения о совершаемой при таком приближенном представлении погрешности.

Но при менее точных исследованиях, с которыми приходится иметь дело в технике, построение эмпирической прямой проще всего произво-

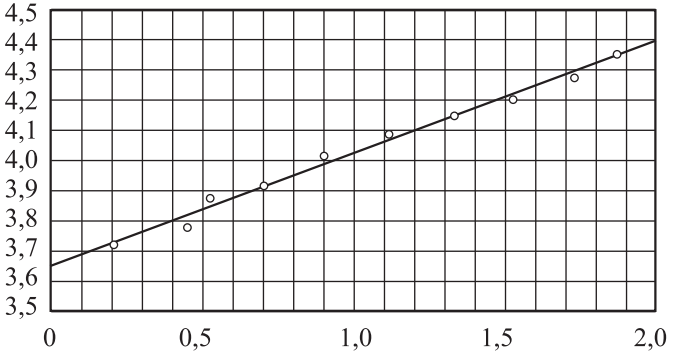

Рис. 12.

дить по способу «натянутого шнурка», сущность которого ясна из самого названия. Построив прямую, с помощью непосредственного измерения определяем ее уравнение

$$y = ax + b,$$

которое и дает искомую эмпирическую формулу. При выводе этой формулы надлежит иметь в виду, что очень часто масштабы для величин x и y бывают различны, т. е. *одна и та же длина, отложенная на осях OX и OY, изображает разные числа.* В этом случае угловой коэффициент a не будет равен тангенсу угла, образуемого прямой с осью OX, но будет отличаться от него множителем, равным численной величине отношения между единицами длины, принятыми при изображении величин x и y.

Пример (рис. 12).

x	0,212	0,451	0,530	0,708	0,901	1,120	1,341	1,520	1,738	1,871
y	3,721	3,779	3,870	3,910	4,009	4,089	4,150	4,201	4,269	4,350

Отв.

$$y \approx 0,375x + 3,65.$$

(Знаком $\approx$ мы обозначаем здесь и в дальнейшем *приближенное равенство.)*

16. Парабола второй степени. Линейная функция

$$y = ax + b$$

есть частный случай *целой функции n-й степени* или *многочлена (полинома) n-й степени:*

$$y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$

простейший случай которого после линейной функции есть *трехчлен второй степени* ($n = 2$);

$$y = ax^2 + bx + c;$$

график этой функции называется *параболой второй степени* или просто *параболой.*

Пока мы будем исследовать лишь простейший случай параболы:

$$y = ax^2, \tag{5}$$

Кривая эта без труда может быть построена по точкам. На рис. 13 изображены кривые $y = x^2$ $(a = 1)$ и $y = -x^2$ $(a = -1)$. Кривая, соответствующая уравнению (5), расположена целиком над осью OX при $a > 0$ и под осью OX при $a < 0$. Ордината этой кривой возрастает по абсолютному значению, когда x возрастает по абсолютному значению, и тем быстрее, чем больше абсолютная величина a. На рис. 14 изображен ряд графиков функции (5) при различных значениях a, которые проставлены на чертеже при соответствующих этим значениям параболах.

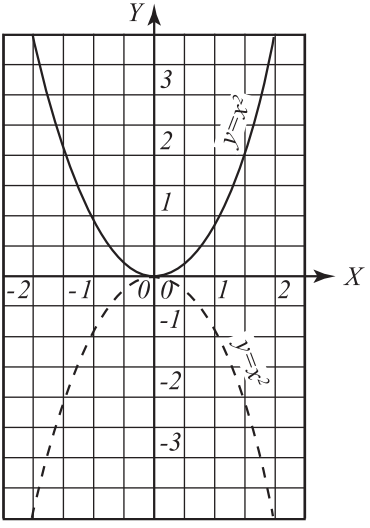

Рис. 13.

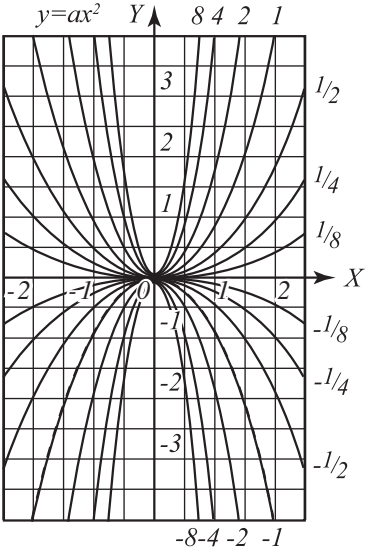

Рис. 14.

Уравнение (5) содержит только x^2, а потому не меняется при замене x на $(-x)$, т. е. если некоторая точка (x, y) лежит на параболе (5), то и точка $(-x, y)$ лежит на той же параболе. Две точки (x, y) и $(-x, y)$, очевидно, симметричны относительно оси OY, т. е. одна

из них является зеркальным изображением другой относительно этой оси. Таким образом, если повернуть правую часть плоскости на 180° вокруг оси OY и совместить ее с левой частью, то часть параболы, лежащая справа от оси OY, совпадает с частью параболы, лежащей слева от этой оси. Иначе говоря, ось OY *есть ось симметрии параболы* (5).

Начало координат оказывается самой низкой точкой кривой при $a > 0$ и самой высокой при $a < 0$ и называется *вершиной параболы.*

Коэффициент a вполне определяется, если задать одну точку $M_0(x_0, y_0)$ параболы, отличную от вершины, так как тогда имеем

$$y_0 = ax_0^2,\ a = \frac{y_0}{x_0^2},$$

после чего уравнение параболы (5) примет вид

$$y = y_0\Big(\frac{x}{x_0}\Big)^2. \tag{6}$$

Существует весьма простой *графический* способ построения какого угодно числа n точек параболы при заданных вершине, оси симметрии и любой ее точке M_0, отличной от вершины. Абсциссу и ординату данной точки $M_0(x_0,\ y_0)$ делим на n равных частей (рис. 15) и через начало координат проводим лучи к точкам деления ординаты. Пересечение этих лучей с прямыми, проведенными через точки деления абсциссы параллельно оси OY, и дает точки параболы. Действительно, по построению мы имеем (рис. 15):

$$x_1 = x_0 \cdot \frac{n-1}{n}, \quad y' = y_0 \cdot \frac{n-1}{n},$$
$$y_1 = y' \cdot \frac{n-1}{n} = y_0\Big(\frac{n-1}{n}\Big)^2 = y_0\Big(\frac{x_1}{x_0}\Big)^2,$$

т. е. на основании (6) точка $M_1(x_1,\ y_1)$ также лежит на параболе. Доказательство для других точек аналогично.

Если имеются две функции:

$$y = f_1(x) \text{ и } y = f_2(x)$$

и соответствующие им графики, то координаты точек пересечения этих графиков удовлетворяют обоим написанным уравнениям, т. е.

абсциссы этих точек пересечения суть решения уравнения

$$f_1(x) = f_2(x).$$

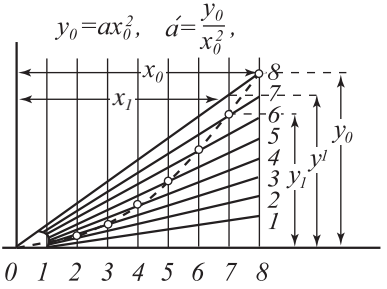

Рис. 15.

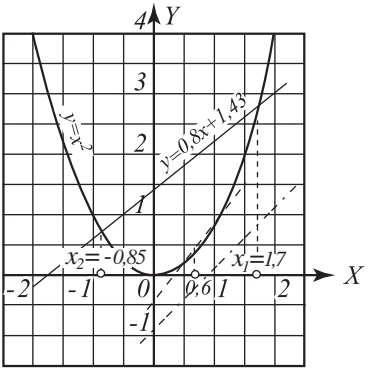

Рис. 16.

Указанное обстоятельство легко использовать для приближенного решения квадратного уравнения. Построив на отдельном листе миллиметровой бумаги, по возможности точнее, график параболы

$$y = x^2, \tag{6_1}$$

мы можем рассматривать корни квадратного уравнения

$$x^2 = px + q, \tag{7}$$

как абсциссы точек пересечения параболы (6_1) и прямой $y = px + q$, так что решение уравнения (7) сводится к нахождению на чертеже упомянутых точек пересечения. На рис. 16 изображены три случая, когда таких точек будет две, одна (касание прямой с параболой) и ни одной.

17. Парабола третьей степени. Многочлен 3-й степени

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

имеет своим графиком кривую, называемую *параболой третьей степени.* Мы рассмотрим эту кривую в простейшем случае

$$y = ax^3. \tag{8}$$

При положительном a знаки x и y одинаковы, а при отрицательном a — различны. В первом случае кривая расположена в первом и третьем координатных углах, а во втором случае — во втором и четвертом углах. На рис. 17 изображен вид этой кривой при различных значениях a.

Если x и y одновременно заменить на $(-x)$ и $(-y)$, то обе части уравнения (8) изменят знак, и уравнение по существу не изменится, т. е. если точка $x,\ y$ лежит на их кривой (8), то и точка $(-x,\ -y)$ также лежит на этой кривой; точки $(x,\ y)$ и $(-x,\ -y)$ лежат, очевидно, симметрично относительно начала O, т. е. отрезок, их соединяющий, делится началом O пополам. Из предыдущего следует, что всякая хорда кривой (8), проходящая через начало координат O, делится этим началом пополам. Иначе это выражают так: *начало координат O есть центр кривой* (8).

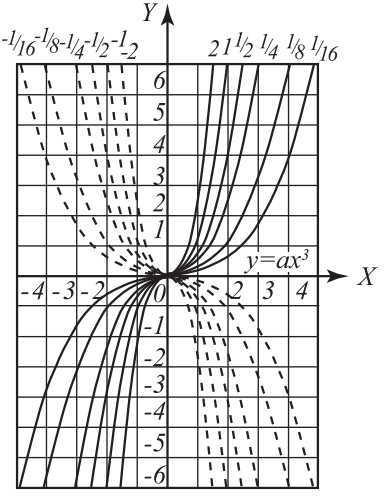

Рис. 17.

Отметим еще один частный случай параболы третьей степени:

$$y = ax^3 + cx. \tag{9}$$

Правая часть этого уравнения есть сумма двух слагаемых, и, следовательно, для построения этой кривой достаточно провести прямую

$$y = cx \tag{10}$$

и взять сумму соответствующих ординат линий (8) и (10) непосредственно из чертежа. Различные виды, которые может при этом принять кривая (9) (при $a = 1$ и различных c), изображены на рис. 18.

Построив кривую

$$y = x^3,$$

получим удобный (при небольшой точности вычислений) *графический способ для решения уравнения 3-й степени*

$$x^3 = px + q,$$

так как корни этого уравнения суть не что иное, как абсциссы точек пересечения кривой

$$y = x^3$$

с прямой

$$y = px + q.$$

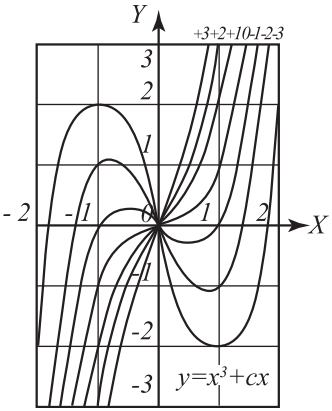

Рис. 18.

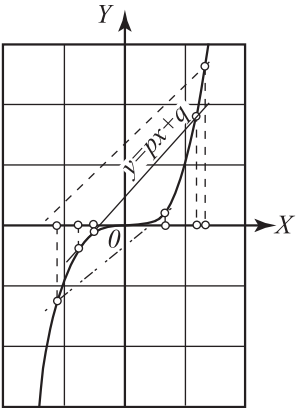

Рис. 19.

Чертеж нам покажет (рис. 19), что таких точек пересечения может быть одна, две или три, но одна — наверно, т, е. *уравнение 3-й степени имеет по крайней мере один вещественный корень.* Строго доказано это будет впоследствии.

18. Закон обратной пропорциональности. Функциональная зависимость

$$y = \frac{m}{x} \tag{11}$$

выражает закон обратной пропорциональности между переменными x и y. При увеличении x в несколько раз y уменьшается во столько же раз. При $m > 0$ переменные x и y одного и того же знака, т. е. график расположен в первом и третьем координатных углах, а при $m < 0$ — во втором и четвертом. При x, близких к нулю, дробь $\frac{m}{x}$ велика по абсолютной величине. Наоборот, при больших по абсолютной величине значениях x дробь $\frac{m}{x}$ мала по абсолютной величине.

Непосредственное построение этой кривой по точкам приведет нас к рис. 20, на котором изображены кривые (11) при различных значениях m, причем сплошной линией начерчены кривые, соответствующие случаю $m > 0$, пунктирной — случаю $m < 0$, и у каждой кривой проставлено соответствующее ей значение m. Мы видим, что каждая из построенных кривых, которые называются *равнобочными гиперболами*, имеет *бесконечные ветви,* приближающиеся к осям координат OX и OY при беспредельном увеличений абсциссы x или ординаты y точки на рассматриваемой ветви. Эти прямые называются *асимптотами* гиперболы.*

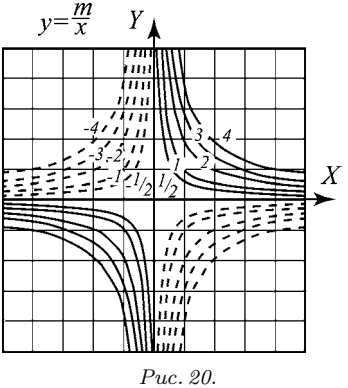

Рис. 20.

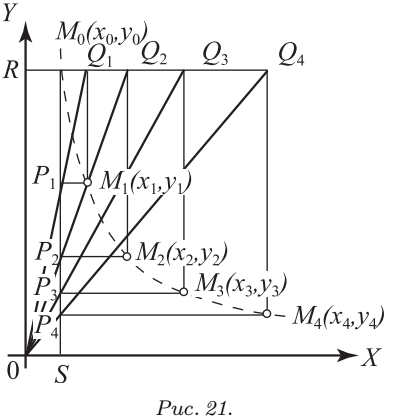

Рис. 21.

Коэффициент m в уравнении (11) определяется вполне, если задать любую точку $M_0(x_0,\ y_0)$ изучаемой кривой, так как тогда

$$x_0 y_0 = m;$$

* В [72] будет дано определение асимптоты.

уравнение же (11) перепишется в виде

$$xy = x_0 y_0, \tag{12}$$

или

$$\frac{y}{x_0} = \frac{y_0}{x}.$$

Отсюда вытекает *графический способ* построения какого угодно числа точек равнобочной гиперболы, если заданы ее асимптоты и какая-нибудь ее точка $M_0(x_0,\ y_0)$. Приняв асимптоты за оси координат, проведем из начала координат произвольные лучи $OP_1,\ OP_2,\ \ldots$ и отметим точки пересечения этих лучей с прямыми $y = y_0$ и $x = x_0$.

Проводя через каждые две такие точки, лежащие на одном луче, прямые, параллельные осям координат, получим в пересечении этих прямых точки гиперболы (рис. 21). Это вытекает из подобия треугольников ORQ_1 и OSP_1:

$$\frac{\overline{SP_1}}{\overline{OS}} = \frac{\overline{OR}}{\overline{RQ_1}} \quad \text{или} \quad \frac{y_1}{x_0} = \frac{y_0}{x_1},$$

т. е. точка $M_1(x_1,\ y_1)$ лежит на кривой (12).

19. Степенна́я функция. Функция $y = ax,\ y = ax^2,\ y = ax^3$ и $y = \frac{m}{x}$, которые мы выше исследовали, суть частные функции вида

$$y = ax^n, \tag{13}$$

где a и n — какие угодно постоянные. Функция (13) вообще называется *степенной функцией.* При построении кривой мы ограничимся лишь положительными значениями x и случаем $a = 1$. На рис. 22 и 23 изображены графики, соответствующие различным значениям n.

Для всех значений n уравнение $y = x^n$ дает $y = 1$ при $x = 1$, т. е. все кривые проходят через точку (1, 1). При положительных значениях n кривые при $x > 1$ подымаются вверх тем круче, чем больше величина n (рис. 22). При отрицательных n (рис. 23) функция $y = x^n$ равносильна дроби. Например, вместо $y = x^{-2}$ можно написать $y = \frac{1}{x^2}$. В этих случаях при возрастании x ординаты y, наоборот, убывают.

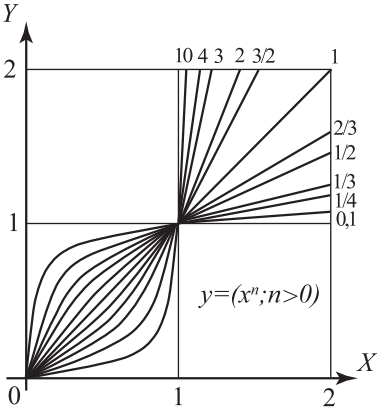

Рис. 22.

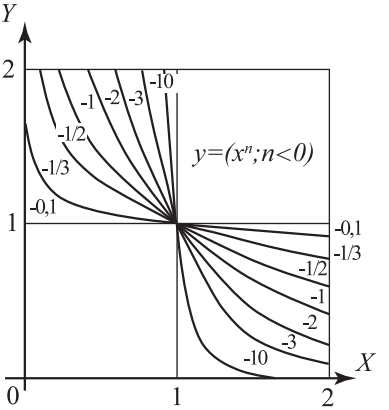

Рис. 23.

Заметим при этом, что при дробном n с четным знаменателем мы считаем значение радикала положительным; например, $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ считаем положительным (при $x > 0$).

Две постоянные a и n, входящие в уравнение (13), определятся, если задать две точки кривой $M_1(x_1,\ y_1)$ и $M_2(x_2,\ y_2)$, после чего окажется

$$y_1 = ax_1^n,\ y_2 = ax_2^n; \tag{14}$$

деля одно уравнение на другое, исключаем a:

$$\frac{y_1}{y_2} = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^n,$$

затем, логарифмируя, находим n по формуле

$$n = \frac{\log\ y_1 - \log\ y_2}{\log\ x_1 - \log\ x_2};$$

найдя n, из любого из уравнений (14) получим a.

Графический способ построения какого угодно числа точек кривой (13) по двум заданным ее точкам $M_1(x_1,\ y_1)$ и $M_2(x_2,\ y_2)$ изображен на рис. 24. Проводим через точку O два произвольных луча под углом α к оси OX и β к оси OY; из данных точек M_1 и M_2 опускаем перпендикуляры на координатные оси до пересечения их с лучами в точках S_1, S_2; $T_1,\ T_2$ и с осями в точках Q_1, Q_2; R_1, R_2. Через точку R_2 проводим R_2T_3

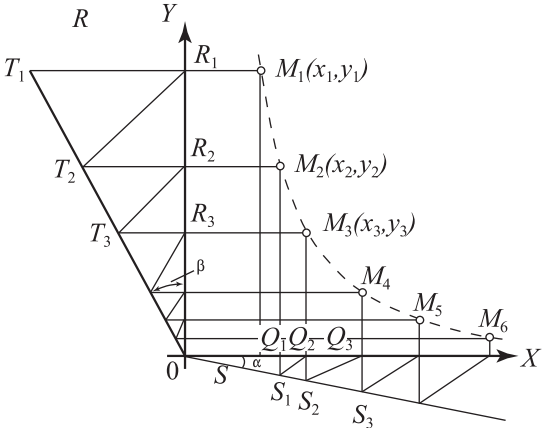

Рис. 24.

параллельно R_1T_2 и через точку S_2 проводим S_2Q_3 параллельно S_1Q_2. Проводя, наконец, через T_3 и Q_3 прямые, параллельные соответственно осям OX и OY, получим в их пересечении точку $M_3(x_3,\ y_3)$ кривой. Действительно, из подобия треугольников находим

$$\frac{\overline{OQ_3}}{\overline{OQ_2}} = \frac{\overline{OS_2}}{\overline{OS_1}}, \quad \frac{\overline{OS_2}}{\overline{OS_1}} = \frac{\overline{OQ_2}}{\overline{OQ_1}},$$

т.е.

$$\frac{\overline{OQ_3}}{\overline{OQ_2}} = \frac{\overline{OQ_2}}{\overline{OQ_1}} \quad \text{или} \quad \frac{x_3}{x_2} = \frac{x_2}{x_1},$$

откуда

$$x_3 = \frac{x_2^2}{x_1},$$

и точно так же можно показать, что

$$y_3 = \frac{y_2^2}{y_1}.$$

Принимая во внимание (14), находим

$$y_3 = \frac{(ax_2^n)^2}{ax_1^n} = a\left(\frac{x_2^2}{x_1}\right)^n = ax_3^n,$$

т. е. точка $(x_3,\ y_3)$ лежит действительно на кривой (13), что и требовалось доказать.

20. Обратные функции. Для исследования дальнейших элементарных функций введем новое понятие, а именно понятие об обратной функции. Как мы уже упоминали в [5], при исследовании функциональной зависимости между переменными x и y, вопрос о выборе независимой переменной находится в нашем распоряжении и решается исключительно соображениями удобства. Пусть имеется некоторая функция $y = f(x)$, причем x играет роль независимой переменной.

Функция, которая определяется из той же функциональной зависимости $y = f(x)$, если в ней рассматривать y как независимую переменную, а x как функцию

$$x = \varphi(y),$$

называется обратной по отношению к данной функции $f(x)$, а эта последняя функция часто называется прямой.

Обозначения для переменных не играют существенной роли и, обозначая в обоих случаях независимую переменную буквою x, мы можем сказать, что $\varphi(x)$ будет обратной функцией для функции $f(x)$. Так, например, если прямые функции суть

$$y = ax + b, \quad y = x^n,$$

то обратные будут

$$y = \frac{x-b}{a}, \quad y = \sqrt[n]{x}.$$

Нахождение обратной функции по уравнению прямой функции называется ее *обращением*.

Пусть мы имеем график прямой функции $y = f(x)$. Нетрудно видеть, что этот же график может служить и графиком обратной функции $x = \varphi(y)$. Действительно, оба уравнения $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ дают одну и ту же функциональную зависимость между x и y. В прямой функции произвольно задается x. Откладывая на оси OX от начала O отрезок, соответствующий числу x, и восставляя*

* То есть восстанавливая.

из конца этого отрезка перпендикуляр к оси OX до пересечения с графиком, мы получаем, взяв длину этого перпендикуляра с соответствующим знаком, значение y, отвечающее взятому, значению x. Для обратной функции $x = \varphi(y)$ мы должны только откладывать заданное значение y по оси OY от начала O и восставлять из конца этого отрезка перпендикуляр к оси OY до пересечения с графиком. Длина этого перпендикуляра с соответствующим знаком дает нам значение x, отвечающее взятому значению y.

При этом возникает неудобство, что в первом случае независимая переменная x откладывается по одной оси, а именно оси OX, а во втором случае независимая переменная y откладывается по другой оси, а именно по оси OY. Иначе говоря, при переходе от прямой функции $y = f(x)$ к обратной $x = \varphi(y)$ мы можем оставить тот же график, но должны помнить, что при этом переходе ось для изображения значений независимой переменной становится осью значений функции, и наоборот.

Чтобы избежать этого неудобства, мы должны при упомянутом переходе повернуть плоскость как целое таким образом, чтобы оси OX и OY поменялись местами. Для этого, очевидно, достаточно повернуть плоскость чертежа вместе с графиком на $180°$ вокруг биссектрисы первого координатного угла. При этом повороте оси поменяются местами, и обратную функцию $x = \varphi(y)$ надо уже писать в обычном виде: $y = \varphi(x)$. Итак, *если прямая функция $y = f(x)$ задана графически, то для получения графика обратной функции $y = \varphi(x)$ достаточно повернуть плоскость графика на $180°$ вокруг биссектрисы первого координатного угла.*

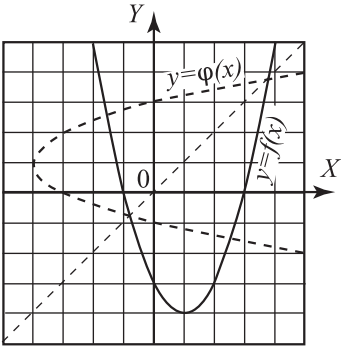

Рис. 25.

На рис. 25 график прямой функции изображен сплошной линией, а график обратной функции — пунктиром. Пунктиром же изображена биссектриса первого координатного угла, вокруг которой надо повернуть всю плоскость чертежа для получения пунктирной кривой из сплошной кривой.

21. Многозначность функции. Во всех графиках элементарных, функций, которые мы рассмотрели выше, характерным был тот факт, что прямые перпендикулярные оси OX, пересекали график не больше, чем в одной точке, и большею частью именно в одной точке. Это значит, что у функции, определяемой этим графиком, заданному значению x соответствует одно определенное значение y. Иначе про такую функцию говорят, что она *однозначна*.

Если же прямые, перпендикулярные оси OX, пересекают график в нескольких точках, то это значит, что заданному x соответствует несколько ординат графика, т. е. несколько значений y. Такие функции называются *многозначными*.* Мы уже упоминали о многозначных функциях раньше [5].

Если прямая функция $y = f(x)$ однозначна, то обратная функция $y = \varphi(x)$ может оказаться и многозначной. Это видно, например, из рис. 25.

Разберем подробнее один элементарный случай. На рис. 13 изображен сплошной линией график функции $y = x^2$. Если повернуть чертеж вокруг биссектрисы первого координатного угла на $180°$, то получится график обратной функции $y = \sqrt{x}$ (рис. 26).

Рассмотрим его подробнее. При отрицательных x (левее оси OY) прямые, перпендикулярные оси OX, вовсе не пересекают графика, т. е. функция $y = \sqrt{x}$ не определена при $x < 0$. Это соответствует тому факту, что корень квадратный отрицательного числа не имеет вещественных значений. Наоборот, при любом положительном x прямая, перпендикулярная оси OX, пересекает график в двух точках, т. е. при заданном положительном x мы имеем две ординаты графика: $\overline{MN}$ и $\overline{MN_1}$. Первая ордината дает для y некоторое положительное значение, а вторая дает такое же по абсолютной величине отрицательное значение. Это соответствует тому факту, что корень квадратный из положительного числа имеет два значения, равные по абсолютной величине и обратные по знаку. Из чертежа видно также, что при $x = 0$ мы имеем одно только значение $y = 0$. Итак, функция $y = \sqrt{x}$ определена при $x \geqslant 0$, имеет два значения при $x > 0$ и одно при $x = 0$.

* Вообще говоря, поняте «однозначности» функции содержится уже в самом ее определении, данном в [5], и в этом смысле кривая, изображенная на рис. 26, графиком какой-либо функции не является.

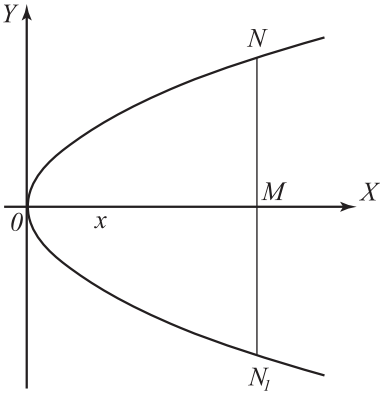

Рис. 26.

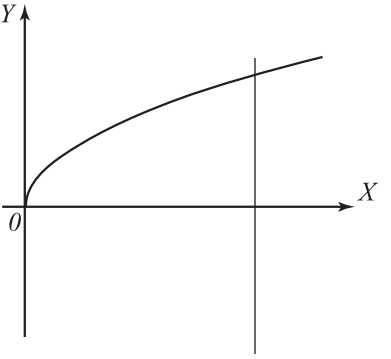

Рис. 27.

Заметим, что мы можем сделать нашу функцию $y = \sqrt{x}$ однозначной, взяв лишь часть графика на рис. 26. Возьмем, например, только ту часть графика, которая находится в первом координатном угле (рис. 27). Это соответствует тому, что мы рассматриваем лишь положительные значения квадратного корня. Отметим также, что часть графика функции $y = \sqrt{x}$, изображенная на рис. 27, получается из той части графика прямой функции $y = x^2$ (рис. 13), которая лежит правее оси OY. Часть графика функции

$$y = \sqrt{x} \quad \text{или} y = x^{\frac{1}{2}},$$

лежащая в первом координатном угле, уже была изображена нами на рис. 22.

Займемся теперь тем случаем, когда обращение однозначной прямой функции приводит к однозначной же обратной функции. Для этого нам придется ввести новое понятие.

*Функция $y = F(x)$ называется возрастающей, если при увеличении независимой переменной x соответствующие значения y возрастают, т. е. если из неравенства $x_2 > x_1$ следует $f(x_2) > (x_1)$.**

* Подчеркнем, что неравенство $f(x_2) > f(x_1)$ должно быть выполнено для любой пары x_1, x_2, таких что $x_2 > x_1$, из промежутка (a, b) на котором задана функция.

При том расположении осей OX и OY, которым мы пользуемся, возрастанию x соответствует перемещение по оси OX вправо, а возрастанию y — движение по оси OY вверх. Характерной особенностью графика возрастающей функции является тот факт, что при движении вдоль кривой в сторону возрастающих x (вправо) мы движемся и в сторону возрастающих y (вверх).

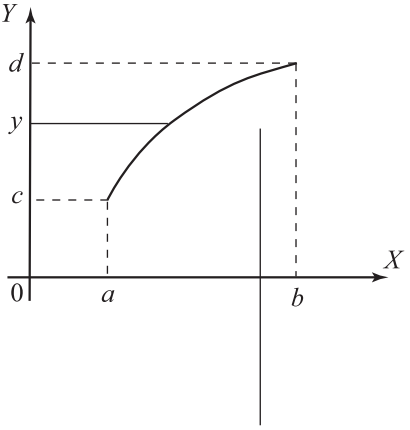

Рис. 28.

Рассмотрим график какой-нибудь однозначной возрастающей функции, определенной в промежутке $a \leqslant x \leqslant b$ (рис. 28). Пусть $f(a) = c$ и $f(b) = d$, причем, очевидно, в силу возрастания функции $c < d$. Если мы возьмем какое-нибудь значение y из промежутка $c \leqslant y \leqslant d$ и в соответствующей точке восставим перпендикуляр к оси OY, то этот перпендикуляр встретит наш график в одной точке, т. е. всякому y из промежутка $c \leqslant y \leqslant d$ отвечает одно определенное значение x. Иначе говоря, *функция, обратная возрастающей функции, будет однозначной.*

Нетрудно видеть из чертежа, что и эта обратная функция будет возрастающей.

Аналогичным образом, *функция $y = f(x)$ называется убывающей, если при увеличении независимой переменной x соответствующие значения y, наоборот, убывают, т. е. если из неравенства $x_2 < x_2$ следует $f(x_1) > f(x_2)$.* Как и выше, можно утверждать, что функция, обратная убывающей функции, будет однозначной убывающей функцией. Отметим еще одно важное обстоятельство. Во всех рассуждениях мы предполагаем всегда, что *график функции представляет собою сплошную кривую без разрывов.* Этот факт равносилен особому аналитическому свойству функции $f(x)$, а именно *непрерывности этой функции.* Строгое математическое определение непрерывности функции и исследование

непрерывных функций будет нами дано в § 2. Целью настоящей главы являются лишь предварительное ознакомление с основными понятиями, систематическое изучение которых будет дано в следующих главах.

В отношении терминологии заметим, что когда мы говорим о функции без упоминания о ее многозначности, то мы подразумеваем всегда однозначную функцию.

22. Показательная и логарифмическая функции. Возвращаемся теперь к исследованию элементарных функций. *Показательная функция* определяется уравнением

$$y = a^x, \tag{15}$$

причем мы считаем, что основание a есть заданное положительное число (отличное от единицы). При целом положительном x значение a^x очевидно. При дробном положительном x выражение a^x определяется как радикал $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$, причем, в случае четного q, мы условливаемся брать положительное значение радикала. Не входя сейчас в подробное рассмотрение значений a^x при иррациональном x, заметим только, что мы получим приближенные значения a^x при иррациональном x все с большей степенью точности, если заменим иррациональное x его приближенными значениями так, как это было указано выше [2]. Например, приближенными значениями $a^{\sqrt{2}}$, где, как известно, $\sqrt{2 = 1,414213}\ldots$, будут

$$a^1 = a,\ a^{1,4} = \sqrt[10]{a^{14}},\ a^{1,41} = \sqrt[100]{a^{141}},\ \ldots$$

Вычисление a^x при отрицательном x сводится к вычислению a^x при положительном x в силу формулы: $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$, являющейся определением степени при отрицательном показателе. Из упомянутого выше соглашения считать радикалы в выражении $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ всегда положительными вытекает, что функция a^x при любых вещественных x всегда положительна. Кроме того, можно показать, на чем мы не останавливаемся, что при $a > 1$ функция a^x — возрастающая функция, а при $0 < a < 1$ — убывающая функция. Более подробное исследование этой функции будет нами дано дальше [44].

На рис. 29 изображены графики функции (15) при различных значениях a. Отметим некоторые особенности графиков на рис. 29.

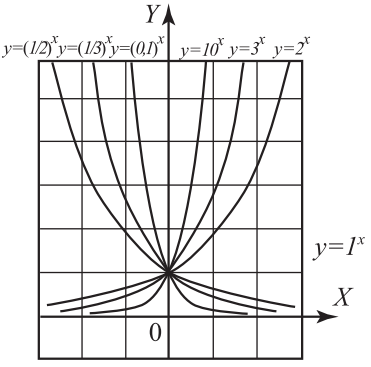

Рис. 29.

Прежде всего, при любом $a \neq 0$ мы имеем по определению $a^0 = 1$ и, следовательно, при любом a график функции (15) проходит через точку $y = 1$ на оси OY, т. е. через точку с координатами $(0, 1)$. Если $a > 1$, то кривая идет слева направо (в сторону возрастающих x), поднимаясь беспредельно вверх, а при движении влево кривая беспредельно приближается к оси OX, нигде ее не достигая. При $a < 1$ расположение кривой относительно осей будет иным. При движении направо кривая беспредельно приближается к оси OX, а при движении влево беспредельно уходит вверх. Так как a^x всегда положительно, то график, конечно, всегда расположен над осью OX. Заметим еще, что график функции $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ можно получить из графика функции $y = a^x$, поворачивая чертеж вокруг оси OY на $180°$. Это вытекает непосредственно из того, что при упомянутом повороте x переходит в $(-x)$, а $a^{-x} = \left(\frac{1}{a}\right)^x$.

Заметим еще, что если $a = 1$, то $y = 1^x$ и при всяком значении x мы имеем $y = 1$ [12].

Логарифмическая функция определяется уравнением

$$y = \log_a x. \tag{16}$$

По определению логарифма функция (16) будет обратной для функции (15). Мы можем, таким образом, получить график логарифмической функции (рис. 30) из графика показательной, повернув кривые рис. 29 на $180°$ вокруг биссектрисы первого координатного угла.

Ввиду возрастания функции (15) при $a > 1$ обратная функция (16) будет также однозначной возрастающей функцией от x, причем, как это видно из рис. 29, функция (16) определена лишь при

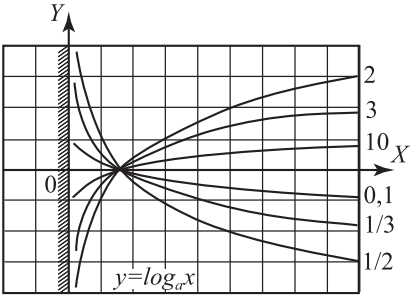

Рис. 30.

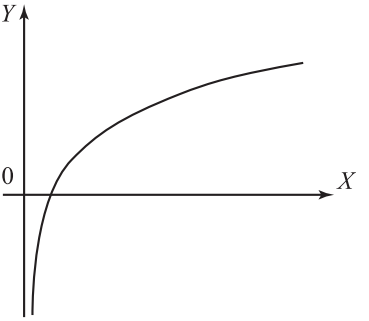

Рис. 31.

$x > 0$ (отрицательные числа не имеют логарифмов). Все графики рис. 30, соответствующие различным значениям a, пересекают ось OX в точке $x = 1$. Это соответствует тому факту, что логарифм единицы при любом основании равен нулю. На рис. 31 изображен для ясности один график функции (16) при $a > 1$.

С понятием о логарифмической функции тесно связаны понятия о *логарифмической шкале* и теория *логарифмической линейки.*

Логарифмической шкалой называется такая шкала, нанесенная на данной прямой, длина делений которой соответствует не самому числу, обозначающему деление, а его логарифму, обыкновенно по основанию 10 (рис. 32). Таким образом, если при некотором делении шкалы стоит число x, то длина отрезка $\overline{1x}$ равна не x, а $\log_{10} x$. Длина отрезка между двумя точками шкалы, обозначенными, через x и y, будет равняться (рис. 32)

$$\overline{1y} - \overline{1x} = \log_{10} y - \log_{10} x = \log_{10} \frac{y}{x};$$

для получения же логарифма произведения xy достаточно к отрезку $\overline{1x}$ прибавить отрезок $\overline{1y}$, так как полученный таким путем отрезок будет

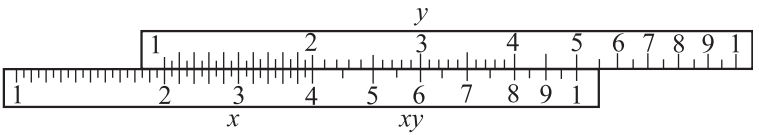

Рис. 32.

равен

$$\log_{10} x + \log_{10} y = \log_{10}(xy).$$

Таким образом, имея логарифмическую шкалу, можно приводить умножение и деление чисел просто к сложению и вычитанию отрезков на шкале,
что проще всего осуществляется на практике с помощью двух тождественных шкал, из коих одна может скользить вдоль другой (рис. 32 и 33). В этом и заключается основная идея устройства логарифмической линейки.

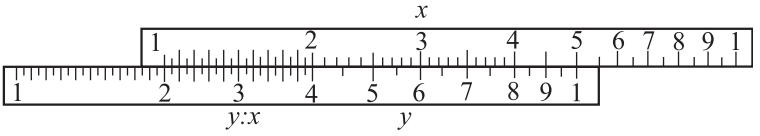

Рис. 33.

Для вычислений часто употребляется *логарифмическая бумага,* которая представляет собой разграфленный лист, причем, однако, точки деления на осях OX и OY соответствуют не обыкновенной, а логарифмической шкале.

23. Тригонометрические функции. Мы остановимся лишь на четырех основных тригонометрических функциях:

$$y = \sin x, \quad y = \cos x,$$
$$y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{ctg} x,$$

причем независимую переменную x будем выражать в радианной мере, т. е. за единицу угла примем центральный угол, которому соответствует дуга окружности, по длине равная радиусу.

График функции $y = \sin x$ изображен на рис. 34. Из формулы

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

ясно, что график функции $y = \cos x$ (рис. 35) может быть получен из графика функции $y = \sin x$ простым передвижением его вдоль оси OX налево на отрезок $\frac{\pi}{2}$.

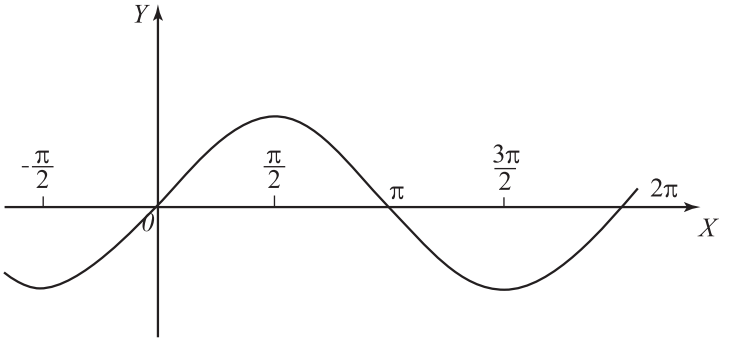

Рис. 34.

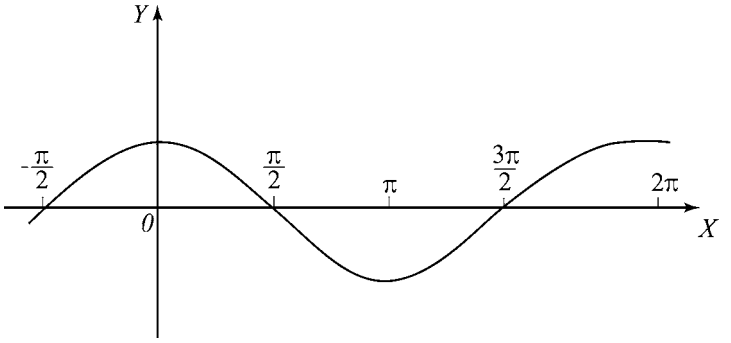

Рис. 35.

На рис. 36 представлен график функции $y = \operatorname{tg} x$. Кривая состоит из ряда одинаковых отдельных бесконечных ветвей. Каждая ветвь помещается в вертикальной полосе ширины π и представляет собою возрастающую функцию от x. Наконец, на рис. 37 представлен график функции $y = \operatorname{ctg} x$, также состоящий из отдельных бесконечных ветвей.

При передвижении графиков функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ вдоль оси OX направо или налево на отрезок 2π эти графики совмещаются сами с собой, что соответствует тому факту, что функции $\sin x$ и $\cos x$ имеют период 2π, т. е.

$$\sin(x \pm 2\pi) = \sin x \text{ и } \cos(x \pm 2\pi) = \cos x$$

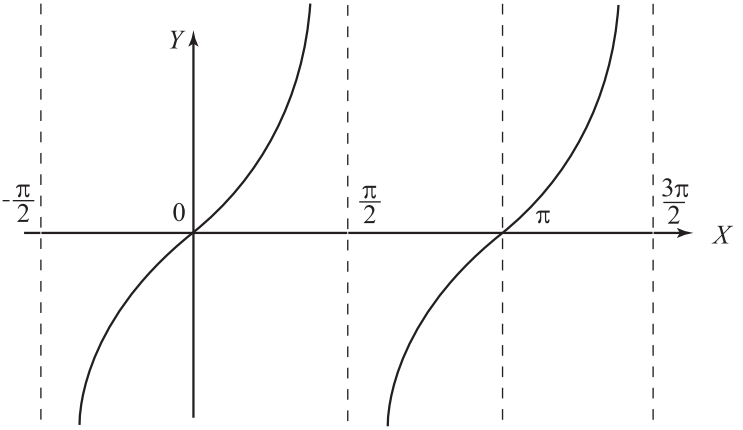

Рис. 36.

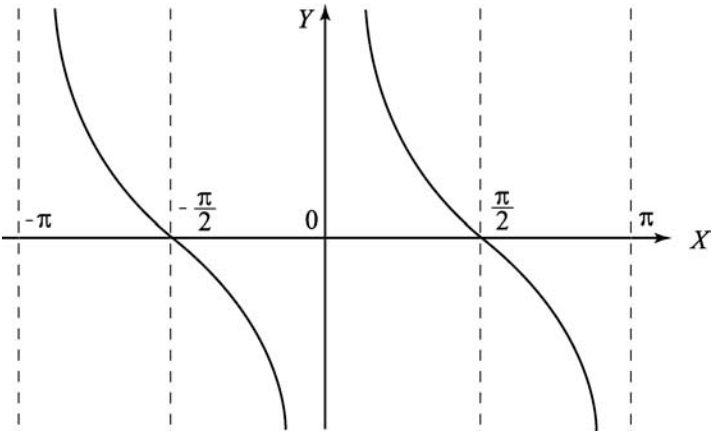

Рис. 37.

при любом x. Совершенно так же графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ совмещаются сами с собой при передвижении их вдоль оси OX на отрезок π.

Графики функций

$$y = A \sin ax, \ y = A \cos ax \ (A > 0, \ a > 0) \tag{17}$$

весьма схожи с графиками функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$. Чтобы получить, например, график первой из функций (17) из графика $y = \sin x$, надо длины всех ординат этого последнего графика умножить на A и изменить масштаб по оси OX так, чтобы точка с абсциссой x попала бы в точку с абсциссой $\frac{x}{a}$. Функции (17) также периодические, но имеют период $\frac{2\pi}{a}$.

Графики более сложных функций

$$y = A\,\sin(ax + b), \quad y = A\,\cos(ax + b), \tag{18}$$

которые называются *простыми гармоническими кривыми,* получаются из графиков функций (17) передвижением вдоль оси OX на отрезок $\frac{b}{a}$ влево (мы считаем $b > 0$). Функции (18) имеют также период $\frac{2\pi}{a}$.

Графики функций вида

$$y = A_1 \sin a_1 x + B_1 \cos a_1 x + A_2 \sin a_2 x + B_2 \cos a_2 x,$$

представляющих собою сумму нескольких слагаемых типа (17), можно строить, например, складывая ординаты графиков отдельных слагаемых. Полученные таким образом кривые называются обычно *сложными гармоническими кривыми.* На рис. 38 указано

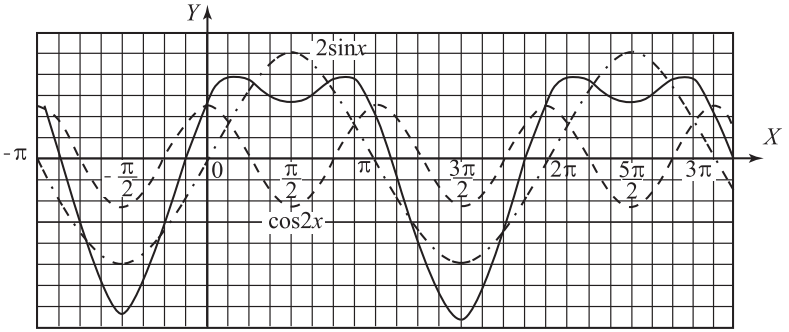

Рис. 38.

построение графика функции

$$y = 2\,\sin x + \cos 2x$$

Заметим при этом, что функция

$$y = A_1\,\sin a_1 x + B_1\,\cos a_1 x \tag{19}$$

может быть представлена в виде (18) и изображает простое гармоническое колебание.

Действительно, положим

$$m = \frac{A_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}},\ n = \frac{B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}, \quad A = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}.$$

Мы имеем, очевидно,

$$A_1 = mA, \quad B_1 = nA \tag{20}$$

и, кроме того,

$$m^2 + n^2 = 1, \quad |m| \leqslant 1, |n| \leqslant 1,$$

а потому, как известно из тригонометрии, всегда можно найти такой угол b_1, чтобы было

$$\cos b_1 = m, \quad \sin b_1 = n. \tag{21}$$

Подставив в (19) вместо A_1 и B_1 их выражения (20) и пользуясь равенствами (21), получим

$$y = A(\cos b_1 \cdot \sin a_1 x + \sin b_1 \cdot \cos a_1 x),$$

т. е.

$$y = A \sin(a_1 x + b_1).$$

24. Обратные тригонометрические, или круговые, функции. Эти функции получаются при обращении тригонометрических функций:

$$y = \sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{ctg} x$$

и обозначаются, соответственно, символами

$$y = \arcsin x,\ \arccos x,\ \operatorname{arctg} x,\ \operatorname{arcctg} x,$$

что представляет собою не что иное, как сокращенное обозначение названий: угол (или дуга), синус, косинус, тангенс или котангенс которого соответственно равен x.

Остановимся на функции

$$y = \arcsin x. \tag{22}$$

График этой функции (рис. 39) получается из графика функции $y = \sin x$ по правилу, указанному в [20]. Весь этот график расположен в вертикальной полосе ширины два, опирающейся на отрезок $-1 \leqslant x \leqslant +1$ оси OX, т. е. функция (22) определена лишь в промежутке $-1 \leqslant x \leqslant +1$. Далее, уравнение (22) равносильно уравнению $\sin y = x$, и, как известно из тригонометрии, при заданном x мы получаем бесчисленное множество значений для угла y. Из графика мы видим, действительно, что прямые, перпендикулярные к оси OX в точках промежутка $-1 \leqslant x \leqslant +1$, имеют с графиком бесчисленное множество общих точек, т. е. функция (22) есть многозначная функция.

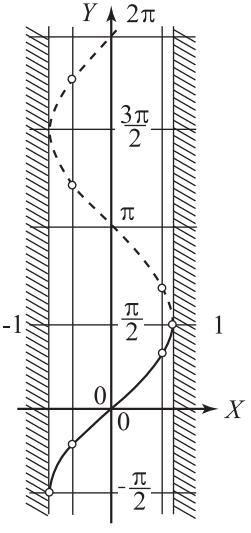

Рис. 39.

Непосредственно из рис. 39 мы видим, что функция (22) станет однозначной, если мы вместо всего графика ограничимся лишь его частью, начерченной более жирно сплошной линией, что соответствует условию — рассматривать только те значения угла y, имеющего данный $\sin y = x$, которые лежат в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$.

На рис. 40 и 41 указаны графики функций $y = \arccos x$ и $y = \operatorname{arctg} x$ и отмечены жирно сплошной линией те части графика, которые надо оставить, чтобы сделать функцию однозначной (чертеж для $\operatorname{arcctg} x$ предоставляется сделать читателям). Заметим при

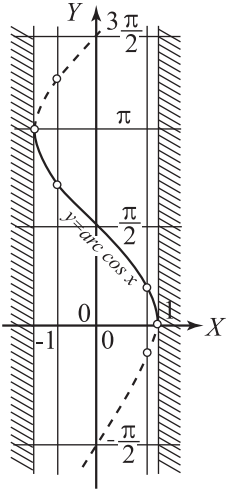

Рис. 40.

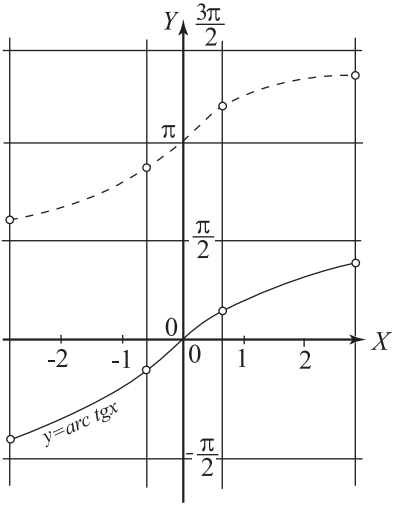

Рис. 41.

этом, что функции $y = \operatorname{arc\,tg} x$ и $y = \operatorname{arc\,ctg} x$ определены при всех вещественных значениях x.

Отмечая из чертежа интервал изменения y на отмеченной жирно части кривой, мы получаем таблицу ограничений, при которых функции становятся однозначными:

y	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\operatorname{arc\,tg} x$	$\operatorname{arc\,ctg} x$
Неравенства для y	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$	$0 < y < \pi$	$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$	$0 < y < \pi$

Нетрудно показать, что определенные таким образом функции, которые называются главными значениями круговых функций, удовлетворяют соотношениям

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x = \frac{\pi}{2}. \tag{23}$$

§ 2. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

25. Упорядоченное переменное. Когда мы говорили о независимой переменной x, для нас было важно лишь множество тех значений, которые может принимать x. Например, это могло быть множество значений, удовлетворяющих неравенству $0 \leqslant x \leqslant 1$. Сейчас мы будем рассматривать переменную величину x, принимающую последовательно бесчисленное множество значений, т. е. сейчас для нас является важным не только множество значений x, но и тот порядок, в котором она принимает эти значения. Точнее говоря, предполагается следующее: 1) если x' и x'' два значения переменной величины x, то имеется возможность отличить среди них предыдущее и последующее, причем если x' предшествует x'', а x'' предшествует x''', то x' предшествует x'''; 2) никакое значение x не является последним, т. е. какое бы значение переменной величины x мы ни взяли, существует бесчисленное множество значений, следующих за ним. Такую переменную величину называют *упорядоченной переменной.* В дальнейшем мы для краткости просто будем говорить *переменная величина.* Отвлекаясь, как всегда, от конкретного характера величины (длина, вес и т. д.) термином «упорядоченная переменная величина» или просто «переменная величина» обозначают всю бесконечную последовательность ее значений, т. е. бесконечную последовательность чисел.

Важным частным случаем упорядоченной переменной величины является тот случай, когда имеется возможность пронумеровать всю ее последовательность значений (первое, второе, третье и т. д.):

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots,$$

так что из двух значений x_p и x_q то является последующим, которое имеет больший значок.* В качестве примера положим, что общий член последовательности x_n определяется формулой $x_n = \frac{1}{2^n}$ ($n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$), так что последовательность имеет вид

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \ldots,\ \frac{1}{2^n},\ \ldots \tag{1}$$

* Такую упорядоченную переменную обычно называют числовой последовательностью.

Пусть, далее, $x_n = \overbrace{0,11\ldots1}^{n}$, т. е. x_n есть, десятичная дробь, у которой целая часть равна нулю, а после запятой стоит n единиц; получим последовательность

$$0,1;\ 0,11;\ 0,111,\ \ldots,\ \overbrace{0,11\ldots1}^{n},\ \ldots \tag{2}$$

Вставляя между двумя числами последовательности (1) число нуль, получим новую последовательность

$$\frac{1}{2},\ 0,\frac{1}{4},\ 0,\frac{1}{8},\ 0,\ \frac{1}{16},\ \ldots \tag{3}$$

для которой $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = \frac{1}{4}$, $x_4 = 0$, $x_5 = \frac{1}{8}$ и т. д. Среди значений этой переменной величины встречаются и одинаковые, а именно $x_p = 0$ при четном p. Отметим, что переменная (1) убывающая, т. е. всякое ее значение меньше всех предшествующих значений, а переменная (2) возрастающая, т. е. всякое ее значение больше всех предшествующих. Переменная (3) не является ни убывающей, ни возрастающей.

Укажем теперь примеры упорядоченной переменной, значения которой нельзя пронумеровать. Положим, что переменная величина x принимает все различные значения, удовлетворяющие неравенству $a-k \leqslant x < a$, где a и k — некоторые числа и $k > 0$. При этом считается, что из двух значений x' и x'' последующим является большее. Иначе говоря, переменная величина x возрастает, принимая все значения из промежутка $a - k \leqslant x < a$, замкнутого слева и открытого справа. Она принимает любые значения из этого промежутка меньшие a, но не принимает значения a. Первым значением переменной является значение $x = a - k$, а дальнейшая нумерация значений переменной невозможна. Если мы положим, что возрастающая переменная удовлетворяет не неравенству $a - k \leqslant x < a$, а неравенству $a - k < x < a$, то при этом нет и первого значения переменной x. Совершенно аналогично можно рассматривать и убывающую переменную x на промежутке $a < x \leqslant a + k$ или на промежутке $a < x < a + k$.

Укажем теперь пример, аналогичный предыдущим, но в котором переменная не является ни возрастающей, ни убывающей. Пе-

ременная величина x принимает все различные значения, удовлетворяющие неравенству $a-k \leqslant x \leqslant a+k$, кроме значения $x=a$. Если x' и x'' — различные значения x, у которых абсолютные величины разностей $|x'-a|$ и $|x''-a|$ различны, то последующим считается то, у которого эта абсолютная величина меньше (то, которое ближе на оси OX к a), а если $x'-a$ и $x''-a$ отличаются лишь знаком (x' и x'' одинаково удалены от a, но находятся на оси OX с разных сторон от a), то последующим считается то, у которого указанная разность отрицательна (то, которое на оси OX лежит слева от a). В этом примере переменная x приближается к a на промежутке $a-k \leqslant x \leqslant a+k$ с разных сторон, принимая все значения, кроме $x=a$; первое значение переменной $x=a+k$, второе $x=a-k$, а дальнейшая нумерация невозможна. Если вместо промежутка $a-k \leqslant x \leqslant a+k$ взять промежуток $a-k<x<a+k$ при прежнем определении порядка изменения x, то нет возможности указать и первое значение x.

В дальнейшем мы часто будем иметь дело с переменными величинами, связанными функциональной зависимостью. Пусть переменная x есть функция переменной t. В соответствии с этим введем обозначение $x(t)$. Пусть t — некоторое упорядоченное переменное. Этим создается и упорядоченность значений $x(t)$, а именно, если t' и t'' принадлежат последовательности значений t и t' предшествует t'', то считаем, что среди значений $x(t)$ значение $x(t')$ предшествует $x(t'')$. В дальнейшем мы будем иметь в основном те случаи, когда среди значений упорядоченной переменной t нет одинаковых. Но $x(t)$ может принимать и одинаковые значения при различных t. Естественно сказать, что упорядоченное переменное t упорядочивает переменную $x(t)$ или является упорядочивающей переменной для $x(t)$. Отметим, что для пронумерованной переменной $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots$ роль t играет значок $1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, т. е. в этом случае t принимает последовательные значения $1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ и таким образом нумерует значения переменной x.

Возникает вопрос о действиях над упорядоченными переменными. Если, например, x и y — упорядоченные переменные, то без предварительных соглашений неясно, что обозначает сумма $x+y$ или произведение xy, ибо как x, так и y принимают бесчисленное множество значений, и остается неясным, какие значения x и y

надо складывать или перемножить, чтобы получить новую переменную $x+y$ или xy. Если x и y — пронумерованные переменные, а $x_1,\ x_2,\ \ldots$ и $y_1,\ y_2,\ \ldots$ — последовательные значения x и y, то сумма $x+y$ определяется как пронумерованное переменное, имеющее последовательность значений

$$x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ x_3+y_3,\ \ldots$$

В общем случае для определения действия над упорядоченными переменными необходимо, чтобы они имели одну и ту же упорядочивающую переменную. Пусть переменные x и y — функции $x(t)$ и $y(t)$ одной и той же упорядоченной переменной t, которая упорядочивает $x(t)$ и $y(t)$. Сумма x и y определяется как упорядоченная переменная $x(t)+y(t)$, которая упорядочивается той же переменной t.

Для явлений, происходящих во времени, последовательность значений переменной величины может естественно устанавливаться их последовательностью во времени, и часто пользуются схемою времени и применяют термины «до» и «после» вместо «предыдущее» и «последующее» значения.

Настоящий параграф посвящен в основном теории пределов, являющейся основою современного математического анализа. В этой теории рассматриваются некоторые основные случаи изменения величин.

26. Величины бесконечно малые. Каждому значению переменной величины x соответствует точка K на числовой оси OX, имеющая абсциссу x, и изменение x изобразится перемещением точки K по оси OX. Положим, что все различные положения точки K при изменении x остаются внутри некоторого конечного отрезка оси OX. Это равносильно тому, что длина отрезка $\overline{OK}$, где O — начало координат на оси OX, остается меньше определенного положительного числа M. В этом случае переменная величина x называется *ограниченной.* Принимая во внимание, что длина $\overline{OK}$ есть $|x|$, мы приходим к следующему определению.

Определение. *Переменная величина x называется ограниченной, если существует такое положительное число M, что $|x|<M$ для всех значений x.*

Примером ограниченной величины может служить $\sin t$, где t — любая упорядоченная переменная. В этом примере M есть любое число, большее единицы.

Рассмотрим теперь тот случай, когда точка K, последовательно перемещаясь, беспредельно приближается к началу координат. Точнее говоря, положим, что точка K при своем последовательном перемещении попадает внутрь любого наперед заданного малого отрезка $S'S$ оси OX с серединой O* и при дальнейшем движении остается внутри этого отрезка. В этом случае говорят, что *величина x стремится к нулю*, или есть *величина бесконечно малая.*

Обозначим длину отрезка $\overline{S'S}$ через 2ε. Буквой ε мы обозначили тем самым любое заданное положительное число. Если точка K находится внутри $\overline{S'S}$, то длина $\overline{OK} < \varepsilon$ и, наоборот, если длина $\overline{OK} < \varepsilon$, то точка K находится внутри $S'S$. Мы можем, таким образом, высказать следующее определение:

Определение. *Переменная величина x стремится к нулю или есть бесконечно малая, если при любом заданном положительном числе ε существует такое значение величины x, что для всех последующих значений выполнено неравенство $|x| < \varepsilon$.*

Ввиду важности понятия бесконечно малой величины дадим другую формулировку того же определения:

Определение. *Величина x называется стремящейся к нулю или бесконечно малой, если $|x|$ при последовательном изменении x делается и при дальнейшем изменении остается меньше любого наперед заданного малого положительного числа ε.*

Термином «бесконечно малая величина» мы обозначаем вышеописанный характер изменения переменной величины, и не надо смешивать понятия бесконечно малой величины с часто употребляющимся в практике понятием *очень малой величины.*

Положим, что при измерении длины некоторого участка мы получили 1000 *м* с каким-то остатком, который считаем очень малым по сравнению со всей длиной и им пренебрегаем. Длина этого остатка выражается определенным положительным числом, и термин «бесконечно малый» в данном случае, очевидно, неприменим. Если бы в другом, более точном измерении мы встретились с такою

* Подчеркнем, что этот отрезок может быть сколь угодно малым.

же длиной, то перестали бы уже считать ее очень малой и приняли бы ее во внимание. Мы видим, таким образом, что понятие малой величины есть понятие относительное, связанное с практическим характером измерения.

Положим, что переменная величина x принимает последовательно значения

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

и пусть ε есть любое заданное положительное число. Чтобы убедиться в том, что x есть величина бесконечно малая, нам надо показать, что $|x_n|$, начиная с некоторого значения n, меньше ε, т. е. нам надо установить существование такого целого числа N, чтобы было

$$|x_n| < \varepsilon \quad \text{при условии} \quad n > N.$$

Это число N зависит от ε.

Рассмотрим в качестве примера бесконечно малой величины величину, принимающую последовательно значения

$$q,\ q^2,\ q^3,\ \ldots,\ q^n,\ \ldots\ (0 < q < 1). \tag{4}$$

Нам надо удовлетворить неравенству

$$q^n < \varepsilon \quad \text{или} \quad n \log_{10} q < log_{10}\varepsilon \quad (0 < \varepsilon < 1).$$

Принимая во внимание, что $\log_{10} q$ отрицателен, можем переписать предыдущее неравенство в виде

$$n > \frac{\log_{10} \varepsilon}{\log_{10} q},$$

ибо при делении на отрицательное число смысл неравенства меняется, и, следовательно, за N мы можем принять наибольшее целое число, заключающееся в частном $\log_{10} \varepsilon : \log_{10} q$. Таким образом, рассматриваемая величина, или, как обычно говорят, *последовательность* (4), стремится к нулю.

Если мы в последовательности (4) заменим q на $(-q)$, то разница будет лишь в том, что у нечетных степеней появится знак минус,

абсолютные же величины членов этой последовательности останутся прежними, а потому и в этом случае мы будем иметь величину бесконечно малую.

Если величина x бесконечно малая (x стремится к нулю), то это обычно обозначают следующим образом: $\lim x = 0$, или для пронумерованной переменной: $\lim x_n = 0$, где $\lim$ — начальные буквы латинского слова limes, что по-русски значит предел. В дальнейших доказательствах мы, кроме первой теоремы, будем проводить доказательство для пронумерованных переменных. В первой теореме мы проведем доказательство как для пронумерованных переменных, так и в общем случае.

Докажем два свойства бесконечно малых величин.

1. *Сумма нескольких (определенного числа) бесконечно малых есть также бесконечно малая величина.*

Рассмотрим, например, сумму $w = x + y + z + y + z$ трех бесконечно малых величин. Пусть эти переменные пронумерованы и

$$x_1,\ x_2,\ x_3, \ldots;\ y_1, y_2, y_3, \ldots;\ z_1,\ z_2,\ z_3,\ \ldots$$

— их последовательные значения. Для w получаем последовательные значения

$$w_1 = x_1 + y_1 + z_1,\ w_2 = x_2 + y_2 + z_2,\ w_3 = x_3 + y_3 + z_3,\ \ldots$$

Пусть ε — любое заданное положительное число. Принимая во внимание, что x, y и z — бесконечно малые, можем утверждать: существует такое N_1, что $|x_n| < \frac{\varepsilon}{3}$ при $n > N_1$; такое N_2, что $|y_n| < \frac{\varepsilon}{3}$ при $n > N_2$; такое N_3, что $|z_n| < \frac{\varepsilon}{3}$ при $n > N_3$. Обозначая через N наибольшее из чисел $N_1,\ N_2,\ N_3$, можем утверждать, что

$$|x_n| < \frac{\varepsilon}{3},\ |y_n| < \frac{\varepsilon}{3},\ |z_n| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{при} \quad n > N$$

и, следовательно,

$$|w_n| \leqslant |x_n| + |y_n| + |z_n| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{при} \quad n > N,$$

т. е. $|w_n| < \varepsilon$ при $n > N$, откуда и следует, что w — величина бесконечно малая.

Рассмотрим теперь общий случай, когда x, y, z суть функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ одной и той же упорядочивающей переменной t и $w(t) = x(t) + y(t) + z(t)$. Принимая во внимание, что x, y, z — бесконечно малые, можем утверждать: существует такое значение $t = t'$, что $|x(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$ для всех последующих значений t; существует такое значение $t = t''$, что $|y(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$ для всех последующих значений t; существует такое значение t''', что $|z(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$ для всех последующих значений t. Обозначая через t_0 такое из трех значений t', t'', t''' переменной t, что два других или предшествует ему или совпадают с ним, можем утверждать, что

$$|x(t)| < \frac{\varepsilon}{3},\ |y(t)| < \frac{\varepsilon}{3},\ |z(t)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

для всех t, следующих за t_0, и потому

$$|w(t)| \leqslant |x_n(t)| + |y_n(t)| + |z_n(t)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon;$$

$|w(t)| < \varepsilon$ для всех t, следующих за t_0, т. е. w — бесконечно малая.

2. *Произведение величины, ограниченной на величину бесконечно малую, есть величина бесконечно малая.*

Рассмотрим произведение xy пронумерованных переменных, где величина x — ограниченная и y — бесконечно малая. Из этого условия следует: существует такое положительное число M, что $|x_n| < M$ при любом n; существует такое N, что $|y_n| < \frac{\varepsilon}{M}$ при $n > N$. При этом

$$|x_n y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} \text{ при } n > N,$$

т. е. $|x_n y_n| < \varepsilon$ при $n > N$, откуда и следует, что произведение xy — бесконечно малая.

Заметим, что последнее свойство остается подавно справедливым, если $x = C$ — постоянная величина. При этом роль числа M может играть любое число, большее, чем C, т. е. произведение постоянной величины на бесконечно малую есть величина бесконечно малая. В частности, если x — бесконечно малая, то и $(-x)$ — бесконечно малая.

Ввиду основного значения понятия бесконечно малой величины для дальнейшего мы остановимся еще на этом понятии и приведем некоторые дополнительные замечания.

Считая $0 < q < 1$, вставим между двумя членами последовательности (4) число нуль. Получим последовательность

$$q,\ 0,\ q^2,\ 0, q^3,\ 0, \ldots$$

Нетрудно видеть, что и эта, переменная стремится к нулю, но при этом она бесчисленное множество раз принимает значение нуль. Это не противоречит определению величины, стремящейся к нулю. Предположим, что все последовательные значения «переменной» равны нулю. Для пронумерованной переменной это значит, что $x_n = 0$ при всяком n, а в случае $x(t)$, где t — упорядоченная переменная, это значит, что $x(t) = 0$ при всех значениях t. Такая «переменная», по существу, есть постоянная величина, но она формально подходит под определение бесконечно малой величины. Например, для пронумерованной переменной ($x_n = 0$ при любом n) $|x_n| < \varepsilon$ для любого заданного положительного ε при всех n. Если $x_n = C$ при всех n и C — число, отличное от нуля, то такая последовательность не есть, очевидно, бесконечно малая величина.

Возьмем те три примера упорядоченной переменной из [25], в которых нельзя пронумеровать переменную, и положим в этих примерах $a = 0$. Первый из них — возрастающая переменная, принимающая все значения из промежутка $-k \leqslant x < 0$. При заданном $\varepsilon > 0$ для всех значений этой переменной, следующих после значения $x = -\varepsilon$, если $\varepsilon \leqslant k$, имеем $|x| < \varepsilon$. Если же $\varepsilon > k$, то $|x| < \varepsilon$ для всех значений x. Таким образом, x стремится к нулю (от меньших значений). Совершенно аналогично x стремится к нулю и в остальных двух случаях: когда x — убывающая переменная, принимающая все значения из промежутка $0 < x \leqslant k$, и когда x принимает все значения (различные) из промежутка $-k \leqslant x \leqslant +k$, кроме $x = 0$, с определением последовательности значений, указанной в [25]. Для переменной x с указанными выше способами стремления к нулю введем специальные обозначения: в первом случае будем писать $x \to -0$ (x стремится к нулю от меньших значений); во втором $x \to +0$ (x стремится к нулю от больших значений); в третьем случае $x \to \pm 0$ (x стремится к нулю с двух сторон).

Имеется, конечно, бесчисленное множество способов, какими пронумерованная или не пронумерованная переменная x может

стремиться к нулю. Во всех этих случаях мы будем писать $x \to 0$. В указанных выше трех случаях мы у нуля пишем знаки. Характерная особенность первого из этих трех случаев состоит в том, что x, возрастая, принимает все значения, меньшие нуля и достаточно близкие к нулю. Во втором случае тот же характер изменения x связан с убыванием x. В третьем случае x принимает все значения, достаточно близкие к нулю, как меньшие, так и большие, кроме значения нуль. Из двух значений x' и x'', не одинаково удаленных от нуля (т. е. $|x'| \neq |x''|$), последующим считается то, которое ближе к нулю, а из двух значений, одинаково удаленных от нуля ($x'' = -x'$), последующим считается отрицательное значение.

Сделаем еще одно замечание. Из определения бесконечно малой величины следует, что *при доказательстве того, что переменная x — бесконечно малая, достаточно ограничиться рассмотрением лишь тех значений x, которые следуют после какого-либо определенного значения $x = x_0$, причем это последнее значение можно выбирать произвольно.*

В связи с этим полезно в теории пределов сделать добавление к определению ограниченной величины, а именно не надо требовать, чтобы для всех значений величины y выполнялось неравенство $|y| < M$, а достаточно дать такое более общее

Определение. *Величина y называется ограниченной, если существует такое положительное число M и такое значение y_0, что для всех последующих значений выполняется неравенство $|y| < M$.*

При таком определении ограниченной величины доказательство второго свойства бесконечно малых остается без изменения. Для пронумерованного переменного из второго определения ограниченной величины следует первое, так что второе определение не является более общим. Действительно, если $|x_n| < M$ при $n > N$, то, обозначая через M' наибольшее из чисел:

$$|x_1|,\ |x_2|,\ \ldots,\ |x_N| \quad \text{и} \quad M,$$

мы можем утверждать, что $|x_n| < M' + 1$ при всяком n.

27. Предел переменной величины. Переменную величину мы назвали бесконечно малой, если соответствующая

ей движущаяся по оси OX точка K обладает тем свойством, что длина отрезка $\overline{OK}$ при последовательном изменении K' становилась и при дальнейшем изменении K оставалась меньше любого заданного положительного числа ε. Положим теперь, что это свойство выполняется не для отрезка $\overline{OK}$, а для отрезка $\overline{AK}$, где A есть определенная точка на оси OX с абсциссой a (рис. 42). В этом случае промежуток $\overline{S'S}$ длины 2ε будет иметь середину не в начале координат, а в точке A с абсциссой $x = a$, и точка K при своем последовательном перемещении должна попасть внутрь этого промежутка и там при дальнейшем перемещении оставаться. В этом случае говорят, что постоянное число a есть *предел переменной величины* x, или что переменная величина x *стремится к* a.

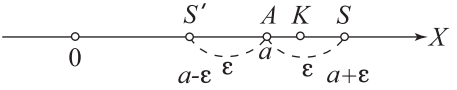

Рис. 42.

Учитывая, что длина отрезка $\overline{AK}$ есть $|x - a|$ [9], мы можем сформулировать следующее определение.

Определение. *Пределом переменной величины x называется такое число a, что разность $x - a$ есть величина бесконечно малая.*

Отметим, что при этом и величина $a - x$ есть величина бесконечно малая. Принимая во внимание определение бесконечно малой величины, можно сформулировать определение предела a следующим образом.

Определение. *Пределом переменной величины x называется такое число a, что имеет место следующее свойство: при любом заданном положительном числе ε существует такое значение переменной x, что, для всех последующих значений выполняется неравенство $|x - a| < \varepsilon$ (или, что то же, $|a - x| < \varepsilon$).*

В случае пронумерованного множества $x_1,\ x_2, x_3, \ldots$ при любом заданном положительном числе ε надо установить существование такого целого положительного числа N, что $|x_n - a| < \varepsilon$ (или $|a - x_n| < \varepsilon$) при $n > N$.*

* Это есть определение предела числовой последовательности.

Если a есть предел x (x стремится к a), то пишут:

$$\lim x = a, \quad \text{или} \quad x \to a.$$

В случае пронумерованной переменной: $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots$ говорят также, что a есть предел указанной последовательности (последовательность стремится к a) и пишут:

$$\lim x_n = a, \quad \text{или} \quad x_n \to a$$

Обратим внимание на некоторые непосредственно ясные следствия определения предела, на доказательстве которых мы не останавливаемся.

1. *Переменная величина не может стремиться к различным пределам, т. е. или вовсе не имеет предела, или имеет один определенный предел.*

2. *Переменная величина, имеющая предел, равный нулю, есть бесконечно малая величина, и, наоборот, всякая бесконечно малая величина имеет предел, равный нулю.*

3. *Если две переменные x_n и y_n ($n = 1,\ 2, 3, \ldots$) или $x(t)$ и $y(t)$ имеют пределы a и b и удовлетворяют при своем последовательном изменении неравенствам $x_n \leqslant y_n$ ($n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$) или $x(t) \leqslant y(t)$, то и $a \leqslant b$.*

Заметим, что если переменные удовлетворяют неравенству $x_n < y_n$, то для их пределов может получиться и знак равенства, т. е. $a \leqslant b$.

4. *Если три переменные x_n, y_n и z_n удовлетворяют неравенству $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$, а x_n и z_n стремятся к одному и тому же пределу a, то и переменная y_n стремится к пределу a.*

Существование предела a у переменной x равносильно тому, что разность $x - a = \alpha$ есть бесконечно малая, причем упорядоченность α определяется упорядоченностью x. Для пронумерованной переменной: $x_n - a = \alpha_n$. Отсюда следует, что

5. *Существование предела a у переменной x равносильно тому, что x можно представить в виде суммы числа a и бесконечно малой величины, т. е. $x = a + \alpha$ или $x_n = a + \alpha_n$, где α или α_n — бесконечно малые.*

6. *При определении предела a переменной x достаточно ограничиться рассмотрением лишь тех значений x, которые следуют после какого-либо определенного значения $x = x_0$, причем это последнее значение можно выбирать произвольно, т. е. можно не обращать внимания на значения, предшествующие x_0.*

7. *Если последовательность x_1, x_2, x_3, ... стремится к a, то всякая бесконечная частичная подпоследовательность x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, ..., выделенная из вышеуказанной, также стремится к a.* В частичной подпоследовательности значки n_1, n_2, n_3, ... образуют какую-либо возрастающую последовательность целых положительных чисел.

Для непронумерованной переменной x, стремящейся к a, аналогичное свойство имеет место при некоторой оговорке. Положим, что из последовательности значений x мы исключили некоторые значения (возможно, бесчисленное множество значений), но сделали это так, что для любого фиксированного значения $x = x_0$ оставшаяся последовательность значений x содержит значения, для которых $x = x_0$ есть предшествующее значение. При этом оставшаяся последовательность значений при прежнем упорядочивании значений есть упорядоченная переменная, стремящаяся к a.

В качестве примера рассмотрим пронумерованную переменную

$$x_1 = 0,1,\ x_2 = 0,11, \ldots,\ x_n = \overbrace{0,11\ \ldots\ 1}^{n},\ \ldots$$

и докажем, что ее предел равен $\frac{1}{9}$. Составим разность

$$\frac{1}{9} - x_1 = \frac{1}{90},\ \frac{1}{9} - x_2 = \frac{1}{900},\ \ldots,\ \frac{1}{9} - x_n = \frac{1}{9 \cdot 10^n},\ \ldots$$

Неравенство $\frac{1}{9 \cdot 10^n} < \varepsilon$ равносильно неравенству

$$9 \cdot 10^n > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{или} \quad n > \log_{10} \frac{1}{\varepsilon} - \log_{10} 9,$$

и за N можно принять наибольшее целое число, содержащееся в разности $\log_{10} \frac{1}{\varepsilon} - \log_{10} 9$ (считаем $\varepsilon < \frac{1}{9}$).

Рассмотрим теперь сумму первых n членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

$$S_n = b + bq + bq^2 + \cdots + bq^{n-1} \quad (0 < |q| < 1).$$

Как известно,

$$S_n = \frac{b - bq^n}{1 - q},$$

и, придавая n значения $1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, получим последовательность

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ \ldots$$

Из выражения S_n имеем

$$\frac{b}{1-q} - S_n = \frac{b}{1-q} q^n.$$

Правая часть является произведением постоянного множителя $\frac{b}{1-q}$ и бесконечно малого множителя q^n [26]. В силу второго свойства бесконечно малых [26] разность $\frac{b}{1-q} - S_n$ есть величина бесконечно малая и, следовательно, число $\frac{b}{1-q}$ есть предел последовательности $S_1,\ S_2,\ \ldots$

Вернемся к непронумерованной переменной величине x из [25], определяемой неравенствами: $a - k \leqslant x < a$, или $a < x \leqslant a + k$, или $a - k \leqslant x \leqslant a + k$ кроме $x = a$, с указанной в [25] последовательностью значений. Эта переменная x имеет, очевидно, во всех трех случаях предел a, и мы будем обозначать эти три случая изменения x следующим образом: $x \to a-0,\ x \to a+0,\ x \to a \pm 0$ [ср. 26]. Отметим, что это обозначение не связано с величиною положительного числа k, ибо, как указано выше, при определении предела можно не обращать внимания на значения, предшествующие какому-либо значению x.

Сделаем еще несколько замечаний и приведем примеры. Упорядоченная «переменная» величина x, все значения которой равны числу a, подходит под определение величины, стремящейся к a. Например, для пронумерованной переменной ($x_n = a$ при любом n) $|x_n - a| = 0$ меньше любого заданного положительного ε при всех n [ср. 26]. Такое рассмотрение постоянной величины как частного случая переменной будет нам удобно впоследствии.

Отметим еще, что если переменная x имеет предел, например a, то $|x - a| < \varepsilon$ при заданном $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого значения x, и, следовательно, при этом $|x| < |a| + \varepsilon$, *т. е. x величина ограниченная* (см. замечание в [26]).

Переменная величина, как мы уже упоминали, не всегда имеет предел. Возьмем, например, пронумерованную переменную $x_1 = 0,1,\ x_2 = 0,11,\ x_3 = 0,111,\ldots$, имеющую предел $\frac{1}{9}$, и переменную $y_1 = \frac{1}{2},\ y_2 = \frac{1}{2^2},\ y_3 = \frac{1}{2^3},\ \ldots$, имеющую предел нуль. Пронумерованная переменная $z_1 = 0,1,\ z_2 = \frac{1}{2},\ z_3 = 0,11,\ z_4 = \frac{1}{2^2},\ z_5 = 0,111,\ z_6 = \frac{1}{2^3},\ \ldots$ не имеет предела. Последовательность ее значений $z_1,\ z_3,\ z_5,\ \ldots$ имеет предел $\frac{1}{9}$, а последовательность значений $z_2,\ z_4,\ z_6,\ \ldots$ имеет предел нуль.

Возьмем указанную выше последовательность $y_1 = \frac{1}{2},\ y_2 = \frac{1}{2^2},\ y_3 = \frac{1}{2^3},\ \ldots$, имеющую предел нуль, и вставим между двумя ее членами числа $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \ldots$, которые вдвое больше предыдущего числа. Эта последняя последовательность также стремится к нулю. Получится последовательность, стремящаяся к нулю:

$$\frac{1}{2},\ 1, \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^3},\ \frac{1}{2^2},\ \ldots$$

Члены этой последовательности, приближаясь беспредельно к нулю от положительных значений, не всегда убывают: второй больше первого, четвертый больше третьего и т. д.

Рассмотрим непронумерованную переменную, которая, убывая на промежутке $(1 < x \leqslant 5)$, стремится к единице, т. е. $x \to 1+0$. Если мы исключим значения x, удовлетворяющие условию $3 < x \leqslant 4$, то оставшееся множество значений x при прежнем упорядочивании (убывание) также будет стремиться к единице. Если мы исключим значения x, удовлетворяющие условию $1 < x \leqslant 2$, то при прежнем порядке (убывание) оставшееся множество будет упорядоченным, но будет стремиться не к единице, а к двум. Если же мы исключим значения x, удовлетворяющие условию $1 < x < 2$, то оставшееся множество значений x при прежнем порядке (убывание) не будет упорядоченным, ибо будет иметь последнее значение $x = 2$. Этот пример связан с тем замечанием, которое мы сделали выше об исключении значений из непронумерованной упорядоченной переменной.

28. Основные теоремы. Дальнейшие теоремы мы будем проводить для пронумерованных переменных. В общем случае доказательство совершенно аналогично [ср. 26].

1. *Если слагаемые алгебраической суммы нескольких (определенного числа) переменных имеют пределы, то их сумма имеет предел, и этот предел равен сумме пределов слагаемых.*

Рассмотрим алгебраическую сумму $x - y + z$ и положим, что пронумерованные переменные x_n, y_n и z_n $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ имеют пределы a, b и c. В силу этого имеем

$$x_n = a + \alpha_n,\ y_n = b + \beta_n,\ z_n = c + \gamma_n,$$

где α_n, β_n и γ_n — величины бесконечно малые. Для последовательных значений суммы $x - y + z$ имеем

$$x_n - y_n + z_n = (a + \alpha_n) - (b + \beta_n) + (c + \gamma_n) = \\ = (a - b + c) + (\alpha_n - \beta_n + \gamma_n).$$

Первая скобка в правой части есть постоянная, а вторая — бесконечно малая величина [26]. Следовательно [27],

$$x_n - y_n + z_n \to a - b + c,$$

то есть

$$\lim(x - y + z) = a - b + c = \lim x - \lim y + \lim z.$$

2. *Если сомножители произведения нескольких переменных имеют пределы, то и произведение имеет предел и этот предел равен произведению пределов сомножителей.*

Рассмотрим произведение двух сомножителей xy и положим, что пронумерованные переменные x_n, y_n $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ имеют пределы a и b. В силу этого имеем

$$x_n = a + a_n,\ y_n = b + \beta_n,$$

где α_n и β_n — величины бесконечно малые. Для последовательных значений произведения $x_n y_n$ имеем

$$x_n y_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + (a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n).$$

Сумма, стоящая в правой части в скобках, есть сумма бесконечно малых. Действительно, первые два слагаемые ее суть произведения постоянных a и b на бесконечно малые, а в третьем слагаемом

первый множитель $\alpha_n \to 0$ и потому есть ограниченная величина, а второй множитель β_n — бесконечно малая величина. Таким образом, в правой части первое слагаемое ab есть постоянная, а второе (скобка) — бесконечно малая [26]. Следовательно, $x_n y_n \to ab$, то есть

$$\lim(xy) = ab = \lim x \cdot \lim y.$$

3. *Если делимое и делитель — переменные величины, имеющие пределы, и предел делителя отличен от нуля, то и частное имеет предел и этот предел равен частному пределов делимого и делителя.*

Рассмотрим частное x/y и положим, что пронумерованные переменные $x_n,\ y_n$ $(n = 1,\ 2, 3,\ \ldots)$ имеют пределы a и b, причем $b \neq 0$. Докажем, что $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}$. Для этого достаточно показать, что разность $\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}$ есть бесконечно малая. По условию

$$x_n = a + \alpha_n,\ y_n = b + \beta_n,$$

где α_n и β_n — бесконечно малые. Имеем

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a + \alpha_n}{b + \beta_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{b(b + \beta_n)}(b\alpha_n - a\beta_n).$$

Знаменатель дроби, стоящей в правой части, состоит из двух множителей и, в силу предыдущих двух теорем, стремится к b^2. Следовательно, начиная с некоторого значения n, знаменатель будет больше $\frac{b^2}{2}$ $(b \neq 0)$, и дробь $\frac{1}{(b+\beta_n)}$ будет, начиная с указанного значения n, заключаться между нулем и $\frac{2}{b^2}$, т. е. будет величиной ограниченной. Величина $(b\alpha_n - a\beta_n)$ есть бесконечно малая. Итак, разность $\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}$ есть бесконечно малая. Следовательно, $\frac{x_n}{y_n} \to \frac{a}{b}$, то есть

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{a}{b} = \frac{\lim x}{\lim y} \quad (\lim y \neq 0).$$

Отметим некоторые следствия доказанных теорем. Если x стремится к пределу a, то переменная bx^k, где b — постоянная и k — целое положительное число, будет стремиться, согласно теореме 2, к пределу ba^k.

Рассмотрим многочлен

$$f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_kx^{m-k} + \cdots + a_{m-1}x + a_m,$$

где коэффициенты a_k — постоянные. Применяя теорему 1 и пользуясь только что сделанным замечанием, можно утверждать, что при стремлении x к a этот многочлен будет стремиться к пределу

$$\lim f(x) = f(a) = a_0a^m + a_1a^{m-1} + \cdots + \\ + a_ka^{m-k} + \cdots + a_{m-1}a + a_m.$$

Точно так же мы можем утверждать, что при указанном изменении x рациональная дробь

$$\varphi(x) = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m}{b_0x^p + b_1x^{p-1} + \cdots + b_{p-1}x + b_p}$$

будет стремиться к пределу

$$\lim \varphi(x) = \varphi(a) = \frac{a_0a^m + a_1a^{m-1} + \cdots + a_{m-1}a + a_m}{b_0a^p + b_1a^{p-1} + \cdots + b_{p-1}a + b_p},$$

если

$$b_0a^p + b_1a^{p-1} + \cdots + b_{p-1}a + b_p \neq 0.$$

Все эти утверждения имеют место при любом способе стремления x к пределу a.

Вместо многочленов, расположенных по степеням одной переменной, мы мог ли бы, конечно, рассматривать многочлены, расположенные по степеням нескольких переменных, стремящихся к пределам.

Так, например, для пронумерованных переменных, если $\lim x_n = a$ и $\lim y_n = b$, то

$$\lim(x_n^2 + x_ny_n + y_n^2) = a^2 + ab + b^2.$$

29. Величины бесконечно большие. Если переменная величина x стремится к пределу, то она, как мы упоминали, очевидно, ограничена.

Теперь мы рассмотрим некоторые случаи изменения неограниченных величин.

Как и раньше, вместе с величиной x мы будем рассматривать соответствующую ей точку K, перемещающуюся по оси OX. Пусть эта точка K перемещается так, что какой бы большой отрезок $\overline{T'T}$ с серединой в начале координат мы ни взяли, точка K при своем последовательном перемещении окажется вне этого отрезка и при дальнейшем перемещении будет оставаться вне его. В этом случае говорят, что x есть величина бесконечно большая, или стремится к бесконечности. Пусть $2M$ — длина отрезка $\overline{T'T}$. Принимая во внимание, что длина отрезка $\overline{OK} = |x|$, можем высказать следующее определение:

Величина x называется бесконечно большой, или стремящейся к бесконечности, если $|x|$, при последовательном изменении x, делается и при дальнейшем изменении остается больше любого заданного положительного числа M. Иначе говоря: величина x называется бесконечно большой при соблюдении следующего условия: *при любом заданном положительном числе M существует такое значение переменной x, что для всех последующих значений соблюдается неравенство $|x| > M$.*

В частности, если бесконечно большая величина x при своем последовательном изменении, начиная с некоторого своего значения, остается постоянно положительной (точка K справа от точки O), то говорят, что x стремится к плюс бесконечности ($+\infty$). Если же величина x остается отрицательной (точка K слева от точки O), то говорят, что x стремится к минус бесконечности ($-\infty$).

Для обозначения бесконечно большой величины употребляют символы: $\lim x = \infty$, $\lim x = +\infty$, $\lim x = -\infty$. Вместо $\lim x = \infty$ можно, очевидно писать $\lim |x| = +\infty$.

Термин «бесконечно большой» служит лишь для краткого обозначения вышеуказанного характера изменения переменной величины x, и здесь, как и в понятии бесконечно малой величины, надо отличать понятие бесконечно большой величины от понятия *очень большой величины.*

Если, например, величина x принимает последовательно значения $1, 2, 3, \ldots$, то, очевидно, $\lim x = +\infty$. Если ее последовательные значения будут: $-1, -2, -3, \ldots$, то $\lim x = -\infty$, и, наконец, если эти

значения будут: –1, 2, –3, 4, ..., то мы можем написать: $\lim x = \infty$.

Рассмотрим еще в качестве примера величину, принимающую последовательно значения

$$q,\ q^2,\ \ldots,\ q^n,\ \ldots\ (q > 1), \tag{5}$$

и пусть $M > 1$ — любое заданное число. Неравенство

$$q^n > M$$

равносильно следующему:

$$n > \frac{\log_{10} M}{\log_{10} q},$$

и, следовательно если N есть наибольшее целое число, заключающееся в частном $\log_{10} M : \log_{10} q$, то будем иметь

$$q^n > M \quad \text{при условии} \quad n > N,$$

т. е. рассматриваемая переменная стремится к $+\infty$.

Если в последовательности (5) заменим q на $(-q)$, то изменятся лишь знаки при нечетных степенях q, абсолютные же значения членов последовательности останутся прежними и, следовательно, при отрицательных значениях q, по абсолютному значению бóльших единицы, последовательность (5) стремится к бесконечности.

В дальнейшем, когда мы будем говорить, что переменная величина стремится к пределу, то будем подразумевать, что этот предел конечен. Иногда говорят, что «переменная величина стремится к бесконечному пределу», обозначая этими словами бесконечно большую величину.

Из предыдущих определений непосредственно вытекает такое следствие: если переменная x стремится к нулю, то переменная $\frac{m}{x}$, где m — заданная постоянная, отличная от нуля, стремится к бесконечности, а если x стремится к бесконечности, то $\frac{m}{x}$ стремится к нулю.

30. Монотонные переменные. При рассмотрении переменной величины мы часто не в состоянии найти ее предел, но нам

важно знать, что этот предел существует, т. е. что переменная стремится к пределу. Укажем один важный признак существования предела.

Положим, что переменная величина x постоянно возрастает (точнее говоря, никогда не убывает) или постоянно убывает (точнее говоря, никогда не возрастает). В первом случае всякое значение величины не меньше всех предыдущих и не больше всех последующих. Во втором случае оно не больше всех предыдущих и не меньше всех последующих. В этих случаях говорят, что *величина меняется монотонно.*

Соответствующая ей точка K на оси OX будет тогда перемещаться в одном направлении — в положительном, если переменная возрастает, и в отрицательном, если она убывает. Непосредственно ясно, что могут представиться лишь две возможности: или точка K беспредельно удаляется по прямой ($x \to +\infty$ или $-\infty$), или точка K беспредельно приближается к некоторой определенной точке A (рис. 43), т. е. переменная x стремится к пределу. Если, кроме монотонности изменения, известно еще, что величина x ограничена, то первая возможность отпадает, и можно утверждать, что величина стремится к пределу.

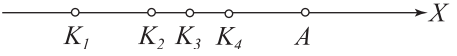

Рис. 43.

Рассуждение это, основанное на интуиции, очевидно, не имеет доказательной силы. Строгое доказательство мы приведем позже.

Указанный признак существования предела обычно формулируют так: *если переменная величина ограничена и меняется монотонно, то она стремится к пределу.*

Рассмотрим в качестве примера последовательность

$$u_1 = \frac{x}{1},\ u_2 = \frac{x^2}{2!},\ u_3 = \frac{x^3}{3!},\ \ldots,\ u_n = \frac{x^n}{n!}\ \ldots^{1}, \tag{6}$$

где x есть данное положительное число. Мы имеем

$$u_n = u_{n-1}\frac{x}{n}. \tag{7}$$

[1]Символ $n!$ есть сокращенное обозначение произведения $1 \cdot 2 \cdot 3\ \ldots\ n$ и называется «факториал n».

При значении $n > x$ дробь $\frac{x}{n}$ будет меньше единицы и $u_n < u_{n-1}$, переменная u_n, начиная с некоторого своего значения, при увеличении n будет постоянно убывать, оставаясь больше нуля. Согласно признаку существования предела, эта переменная будет стремиться к некоторому пределу u. Будем в равенстве (7) беспредельно увеличивать целое число n. В пределе мы получим

$$u = u \cdot 0 \quad \text{или} \quad u = 0,$$

то есть

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0. \tag{8}$$

Если мы в последовательности (6) заменим x на $(-x)$, то изменится лишь знак у членов с нечетным значком n, и эта последовательность по-прежнему будет стремиться к нулю, т. е. равенство (8) справедливо при любом заданном значении x как положительном, так и отрицательном.

В этом примере мы вычислили предел u, предварительно убедившись, что он существует. Если бы этого последнего мы не сделали, то примененный нами метод мог бы привести и к ошибочному результату. Рассмотрим, например, последовательность

$$u_1 = q,\ u_2 = q^2,\ \ldots,\ u_n = q^n,\ \ldots\ (q > 1).$$

Имеем, очевидно,

$$u_n = u_{n-1} q.$$

Не заботясь о существовании предела u_n, обозначим его буквою u. Переходя в написанном равенстве к пределу, получим.

$$u = uq, \quad \text{т. е.} \quad u(1 - q) = 0$$

и, следовательно,

$$u = 0.$$

Но это неверно, ибо при $q > 1$, как известно, $\lim q^n = +\infty$ [29].

31. Признак Коши существования предела. Указанный в [30] признак существования предела является лишь достаточным,

но не необходимым условием существования предела, ибо, как мы знаем [27], переменная величина может стремиться к пределу, меняясь и не монотонно.

Французский математик Коши дал необходимое и достаточное условие существования предела, которое мы сейчас и сформулируем. Если предел известен, то характерным для него является тот факт, что, начиная с некоторого значения переменной, абсолютное значение разности между пределом и переменной меньше любого заданного положительного ε. Согласно признаку Коши, для существования предела необходимо и достаточно, чтобы, начиная с некоторого значения переменной, разность между любыми двумя последующими значениями переменной была меньше любого заданного положительного ε. Дадим точную формулировку признака Коши.

Признак Коши. *Для того чтобы переменная x имела предел, необходимо и достаточно выполнение следующего условия: при любом заданном положительном числе ε существует такое значение x, что для любых последующих значений x' и x'' выполняется неравенство: $|x' - x''| < \varepsilon$.*

Положим, что мы имеем пронумерованную переменную

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n, \ldots$$

Согласно признаку Коши, необходимое и достаточное условие существования предела у этой последовательности состоит в следующем: при любом заданном положительном ε существует такое N (зависящее от ε), что

$$|x_m - x_n| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad m \text{ и } n > N. \tag{9}$$

Необходимость этого условия доказывается очень просто. Если наша последовательность имеет предел a, то напишем $x_m - x_n = (x_m - a) + (a - x_n)$, откуда следует

$$|x_m - x_n| \leqslant |x_m - a| + |a - x_n|.$$

Но, в силу определения предела, существует такое N, что $|x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|a - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, если m и $n > N$, и, тем самым, $|x_m - x_n| < \varepsilon$, если m

и $n > N$. Короче говоря, если значения x становятся сколь угодно близкими к a, то они становятся сколь угодно близкими и друг к другу.

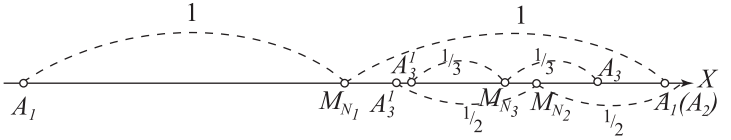

Рис. 44.

Не приводя пока строгого доказательства достаточности условия Коши, дадим ему наглядное пояснение (рис. 44).

Пусть M_s — точка координатной оси, соответствующая числу x_s. Положим, что условие (9) выполнено. Согласно этому условию существует такое значение $N = N_1$, что

$$|x_s - x_{N_1}| < 1 \quad \text{при} \quad s > N_1,$$

т. е. все точки M_s при $s > N_1$ находятся внутри отрезка $\overline{A_1'A_1}$, длина которого равна двум и середина которого есть точка с абсциссой x_{N_1}.

Точно так же существует значение $N = N_2$, такое, что

$$|x_s - x_{N_2}| < \frac{1}{2} \quad \text{при } s > N_2,$$

причем можно считать, что $N_2 \geqslant N_1$. Из сказанного, следует, что все точки x_s при $s > N_2$ находятся внутри отрезка I, длина которого равна единице и середина которого есть точка с абсциссой x_{N_2}. С другой стороны, все эти точки должны находиться внутри отрезка $\overline{A_1'A_1}$, откуда следует, что отрезки I и $\overline{A_1'A_1}$ должны иметь общую часть. Пусть $\overline{A_2'A_2}$ — эта общая часть. В силу сказанного выше точки M_s при $s > N_2$ должны находиться внутри отрезка $\overline{A_2'A_2}$.

Точно так же существует $N = N_3 \geqslant N_2$ такое, что $|x_s - x_{N_3}| < \frac{1}{3}$ при $s > N_3$. Аналогично предыдущему, построим отрезок $\overline{A_3'A_3}$, длина которого не превосходит $\frac{2}{3}$ и который принадлежит отрезку $\overline{A_2'A_2}$, причем все точки M_s при $s > N_3$ будут находиться внутри

него. Полагая $\varepsilon = \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, получим, таким образом, ряд отрезков $\overline{A'_n A_n}$, из которых каждый последующий заключается в предыдущем и длины которых стремятся к нулю. Концы этих отрезков будут, очевидно, стремиться к одной и той же точке A,* и число a, соответствующее этой точке, и будет пределом переменной величины x, так как из описанного выше построения следует, что при достаточно большом значении s все точки M_s будут сколь угодно близки к точке A.

В качестве приложения признака Коши рассмотрим уравнение Кеплера, которое служит для определения положения планеты на своей орбите. Уравнение это имеет вид

$$x = q \sin x + a,$$

где a и q — данные числа, из которых второе заключено между нулем и единицей, а x — неизвестное. Возьмем любое число x_0 и построим последовательность чисел

$$x_1 = q \sin x_0 + a, \quad x_2 = q \sin x_1 + a, \ldots,$$
$$x_n = q \sin x_{n-1} + a, \quad x_{n+1} = q \sin x_n + a, \ldots$$

Вычитая из второго из этих равенств почленно первое, получим

$$x_2 - x_1 = q(\sin x_1 - \sin x_0) = 2q \sin \frac{x_1 - x_0}{2} \cos \frac{x_1 + x_0}{2}.$$

Принимая во внимание, что $|\sin \alpha| \leqslant |\alpha|$ и $|\cos \alpha| \leqslant 1$, получим

$$|x_2 - x_1| \leqslant 2q \frac{|x_1 - x_0|}{2} = q|x_1 - x_0|. \tag{10}$$

Совершенно так же можем получить следующее неравенство:

$$|x_3 - x_1| \leqslant q|x_2 - x_1|,$$

или, пользуясь неравенством (10), можем написать

$$|x_3 - x_2| \leqslant q^2 |x_1 - x_0|.$$

* Этот факт вообще говоря, требует доказательства, что и будет сделано позже в [], здесь же можно ограничиться геометрической иллюстрацией.

Продолжая подобные вычисления, получим при всяком n неравенство

$$|x_{n+1} - x_n| \leqslant q^n |x_1 - x_0|. \tag{11}$$

Рассмотрим теперь разность $x_m - x_n$, считая для определенности $m > n$:

$$x_m - x_n = x_m - x_{m-1} + x_{m-1} - x_{m-2} + x_{m-2} - x_{m-3} + \cdots + x_{n+1} - x_n.$$

Пользуясь неравенством (11) и формулой для суммы членов геометрической прогрессии, будем иметь

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| \leqslant |x_m - x_{m-1}| + |x_{m-1} - x_{m-2}| + \\ + |x_{m-2} - x_{m-3}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n| \leqslant \\ \leqslant (q^{m-1} + q^{m-2} + q^{m-3} + \cdots + q^n)|x_1 - x_0| = q^n \frac{1 - q^{m-n}}{1 - q} |x_1 - x_0|. \end{aligned}$$

При беспредельном увеличении n множитель q^n стремится к нулю [26], множитель $|x_1 - x_0|$ постоянный: дробь $\frac{1-q^{m-n}}{1-q}$ всегда заключается между нулем и $\frac{1}{1-q}$, т. е. ограничена, ибо, при $m > n$, q^{m-n} заключается между нулем и единицей. Таким образом, при беспредельном увеличении n и любом $m > n$ разность $x_m - x_n$ стремится к нулю, и условие (9) выполнено. Мы можем, согласно условию Коши, утверждать, что существует предел

$$\lim x_n = \xi.$$

В равенстве

$$x_{n+1} = q \sin x_n + a$$

будем беспредельно увеличивать n. Пользуясь тем, что $\lim \sin x_n = \sin \xi$ при $\lim x_n = \xi$ как это мы покажем в [34], в пределе получим

$$\xi = q \sin \xi + a, \tag{12}$$

т. е. предел ξ переменной x_n есть корень уравнения Кеплера.

При построении последовательности x_n мы исходили из произвольного числа x_0. Однако покажем, что уравнение Кеплера не может иметь двух различных корней, откуда следует, что $\lim x_n$ не зависит от выбора x_0 и равняется единственному корню уравнения Кеплера.

Положим, что кроме ξ оно имеет еще корень ξ_1, и покажем, что $\xi_1 = \xi$. По условию, кроме (12) имеем

$$\xi_1 = q \sin \xi_1 + a.$$

Вычитая из этого равенства почленно равенство (12), получим

$$\xi_1 - \xi = q(\sin\xi_1 - \sin\xi) = 2q\sin\frac{\xi_1 - \xi}{2}\cos\frac{\xi_1 + \xi}{2},$$

откуда

$$|\xi_1 - \xi| \leqslant 2q\left|\sin\frac{\xi_1 - \xi}{2}\right|.$$

Но $|\sin\alpha| \leqslant |\alpha|$ при любом угле α, и последнее неравенство приводит к следующему:

$$|\xi_1 - \xi| \leqslant q|\xi_1 - \xi|.$$

В силу $0 < q < 1$ последнее неравенство может иметь место только при $|\xi_1 - \xi| = 0$, т. е. $\xi_1 = \xi$, откуда и следует, что уравнение Кеплера имеет только один корень.

32. Одновременное изменение двух переменных величин, связанных функциональной зависимостью. Пусть имеется функция $y = f(x)$, определяемая на некотором множестве значений x, например в некотором промежутке. Используя значения x из указанного множества, мы можем строить различные упорядоченные множества значений переменной x и при этом будем получать соответствующие упорядоченные множества значений переменной $y = f(x)$ [25]. Упорядоченная переменная x является упорядочивающей для $f(x)$. Мы рассмотрим в этом параграфе один важный случай такого процесса.

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором промежутке, содержащем точку $x = c$ внутри. Выбирая, достаточно малое положительное k, можем считать, что тем самым $f(x)$ определена на промежутке $c - k \leqslant x \leqslant c + k$. Рассмотрим три случая упорядочивания значений x: $x \to c - 0$, $x \to c + 0$; $x \to c \pm 0$ — и соответствующую этим случаям упорядоченную переменную $f(x)$. Пусть в первом случае эта переменная имеет предел. Обозначим его буквою A_1. В этом случае пишут:

$$\lim_{x\to c-0} f(x) = A_1. \tag{13}$$

Совершенно аналогично во втором случае, при наличии предела (обозначим его буквою A_2), пишут:

$$\lim_{x\to c+0} f(x) = A_2. \tag{14}$$

Часто пределы (13) и (14) обозначают символами $f(c-0)$ и $f(c+0)$, так что

$$\lim_{x\to c-0} f(x) = f(c-0), \qquad \lim_{x\to c+0} f(x) = f(c+0).$$

Отметим, что это — пределы $f(x)$ при стремлении x к c слева и справа. В третьем случае x стремится к c с двух сторон и существование предела

$$\lim_{x\to c\pm 0} f(x) = B \tag{15}$$

равносильно, очевидно, следующему: существуют пределы (13) и (14), и они равны ($A_1 = A_2$). При этом $B = A_1 = A_2$.

Не следует смешивать символы $f(c-0)$ и $f(c+0)$ с $f(c)$, т. е. со значением $f(x)$ при $x = c$. Выше мы совершенно не пользовались этим значением, и при предыдущих рассуждениях $f(x)$ может быть и не определена при $x = c$. Если функция определена при $x = c$ и $f(c-0) = f(c+0) = f(c)$, т. е.

$$\lim_{x\to c\pm 0} f(x) = f(c),$$

то говорят, что *функция непрерывна при* $x = c$ (в точке c). Пользуясь определением предела для x и $f(x)$, легко указать условия, равносильные существованиям пределов (13), (14) и (15). Существование предела (13) равносильно, очевидно, тому, что $f(x)$ становится сколь угодно близким к A_1, когда x достаточно приближается к числу c, оставаясь меньше c. Точнее говоря, (13) равносильно следующему: при любом заданном положительном числе ε существует такое положительное число η, что

$$|f(x) - A_1| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad 0 < c - x < \eta. \tag{13_1}$$

При этом η зависит от выбора ε. Совершенно аналогично, (14) равносильно следующему: при любом заданном положительном числе ε существует такое положительное число η, что

$$|f(x) - A_2| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad 0 < x - c < \eta, \tag{14_1}$$

и (15) равносильно следующему: при любом заданном положительном числе ε существует такое положительное число η, что

$$|f(x) - B| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad |x - c| < \eta. \tag{15_1}$$

Отметим еще следующий очевидный факт: *если существует предел* (15), *то* $f(x)$ *при любом законе стремления упорядоченной переменной* x *к* c *имеет предел* B. Аналогичное замечание имеет место и для пределов (13) и (14) при стремлении x к c слева и справа.

В дальнейшем мы подробно рассмотрим понятие непрерывности и свойства непрерывных функций. Сейчас мы обратимся к тем случаям, когда x или $f(x)$ стремятся к бесконечности [29]. Предыдущие определения легко обобщаются и на эти случаи. Нетрудно, например, видеть, что

$$\lim_{x\to c-0}\frac{1}{x-c}=-\infty,\qquad \lim_{x\to c+0}\frac{1}{x-c}=+\infty,$$
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\operatorname{tg}x=+\infty,\qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0}\operatorname{tg}x=-\infty.$$

Положим, что $f(x)$ определена при всех достаточно больших x и что упорядоченная переменная x любым образом стремится к $+\infty$ [29]. При этом $f(x)$ есть также упорядоченная переменная, и может существовать для нее конечный предел

$$\lim_{x\to+\infty}F(x)=A. \tag{16}$$

Это равносильно следующему: при любом заданном положительном числе ε существует такое число M, что

$$|f(x)-A|<\varepsilon,\quad \text{если}\quad x>M. \tag{16_1}$$

В частности, упорядоченность x может состоять в том, что x беспредельно возрастает, принимая все достаточно большие вещественные значения. Совершенно аналогично можно рассмотреть случай $x\to-\infty$.

Если $f(x)$ определена при всех x, достаточно больших по абсолютной величине, и упорядоченное переменное x стремится к ∞ [29], то может аналогично предыдущему существовать конечный предел

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A,$$

что равносильно следующему: при любом заданном положительном числе ε существует такое положительное число M, что

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad |x| > M.$$

В частности, x может стремиться к ∞, принимая все различные значения, достаточно большие по абсолютной величине. Их можно упорядочить так же, как это мы делали в [25] для ненумерованной переменной x, удовлетворяющей условию $a - k \leqslant x < a + k$ (кроме $x = a$). Отметим, что для пронумерованной переменной $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots$, имеющей предел a, вместо $\lim x_n = a$ часто пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. В этом случае $n \to \infty$ обозначает, что n возрастает, принимая все целые положительные значения.

Можно говорить и о бесконечных пределах $f(x)$. В частности,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

обозначает, что при любом заданном отрицательном числе M_1* такое число M, что $f(x) < M_1$, если $x > M$. Аналогично можно определить и другие случаи бесконечного предела.

Нетрудно проверить справедливость следующих равенств:

$$\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty,$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0, \qquad \lim_{x\to\infty} x^2 = +\infty,$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 1}{3x^2 + x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2 - \frac{1}{x^2}}{3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{2}{3},$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x + 5}{x^2 + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{3}{x} + \frac{5}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 0.$$

Рассмотрим еще один физический пример. Положим, что мы нагреваем некоторое твердое тело, и пусть t_0 его начальная температура. При нагревании температура тела будет повышаться, пока

* Подчеркнем, что число M_1 можно взять сколь угодно большим по своему абсолютному значению.

не достигнет точки плавления. При дальнейшем нагревании температура будет оставаться неизменной до тех пор, пока тело не перейдет целиком в жидкое состояние, а затем опять начнется повышение температуры образовавшейся жидкости. Аналогичная картина произойдет и при превращении жидкости в газообразное состояние. Будем рассматривать количество сообщенного телу тепла, Q как функцию температуры. На рис. 45 изображен график этой функции, причем на горизонтальной оси откладывается температура, а на вертикальной — количество поглощенного тепла. Пусть t — температура, при которой тело начинает переходить в жидкое, состояние, и t_2 — температура, при которой жидкость начинает переходить в газообразное состояние. Очевидно:

$$\lim_{t\to t_1-0} Q = \text{орд. } \overline{AB} \text{ и } \lim_{t\to t_1+0} Q = \text{орд. } \overline{AC}.$$

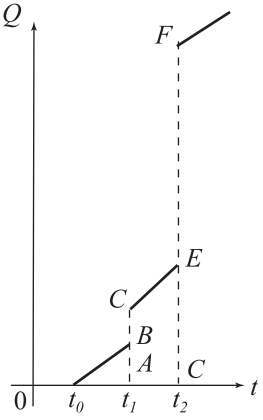

Рис. 45.

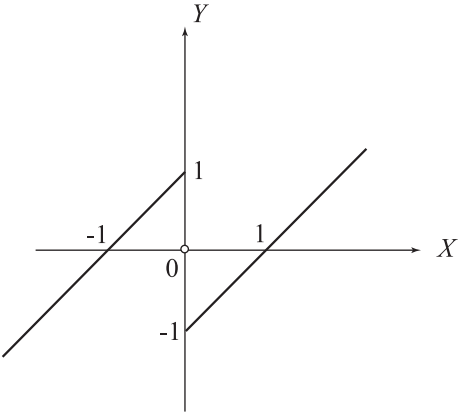

Рис. 46.

Величина отрезка $\overline{BC}$ дает скрытую теплоту плавления, а величина отрезка $\overline{EF}$ — скрытую теплоту парообразования.

Если пределы $f(c-0)$ и $f(c+0)$ существуют и различны, то разность $f(c+0)-f(c-0)$ называется разрывом, или скачком, функции $f(x)$ при $x=c$ (в точке $x=c$).

Функция $y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x-c}$ имеет при $x = c$ скачок π. Только что рассмотренная функция $Q(t)$ имеет в точке плавления $t = t_1$ скачок, равный скрытой теплоте плавления.

При определении предела $f(x)$ при стремлении x к c мы считали, что x стремится к c, никогда с ним не совпадая. Эта оговорка существенна, потому что значение $f(x)$ при $x = c$ иногда или не существует, или не имеет ничего общего со значениями $f(x)$ при x, близких к c. Так, например, функция $Q(t)$ не определена при $t = t_1$.

Рассмотрим еще пример для пояснения сказанного. Положим, что на промежутке $(-1, +1)$ функция определена следующим образом:

$$y = x + 1 \quad \text{при} \quad -1 \leqslant x < 0;$$
$$y = x - 1 \quad \text{при} \quad 0 < x \leqslant 1;$$
$$y = 0 \quad \text{при} \quad x = 0.$$

На рис. 46 воспроизведен график этой функции, состоящий из двух отрезков прямых, из которых исключены конечные точки (при $x = 0$), и одной отдельной точки — начала координат. В этом случае

$$\lim_{x\to-0} f(x) = 1, \ \lim_{x\to+0} f(x) = -1, \ f(0) = 0.$$

33. Примеры. 1. Известно, что при любом x имеет место неравенство $|\sin x| \leqslant |x|$ и знак равенства имеет место лишь при $x = 0$. Напомним, что величина x при этом выражается в радианах. Из сказанного следует, что для любого заданного положительного числа ε мы имеем $|\sin x| < \varepsilon$, если $|x| < \varepsilon$, т. е.

$$\lim_{x\to\pm0} \sin x = 0.$$

2. Далее, имеем

$$1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2} \leqslant 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2},$$

т. е. $0 \leqslant 1 - \cos x \leqslant \frac{x^2}{2}$, откуда следует, что [27]

$$\lim_{x\to\pm0} \cos x = 1.$$

3. Рассмотрим частное

$$y = \frac{\sin x}{x}.$$

Эта функция определена при всех x кроме $x = 0$, ибо при $x = 0$ и числитель и знаменатель обращаются в нуль и дробь теряет смысл. Исследуем изменение y при $x \to \pm 0$. При изменении знака x величина y не меняется,* так что достаточно предполагать, что $x \to +0$. Покажем, что $y \to 1$ при $x \to +0$. Тот же предел получится и при $x \to -0$. Отметим, что теорему о пределе частного применить нельзя, ибо и числитель и знаменатель стремятся к нулю при $x \to +0$.

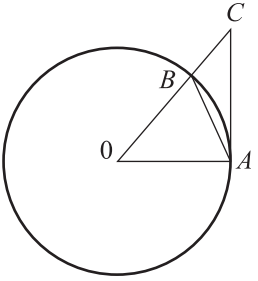

Рис. 47.

Будем рассматривать x, как центральный угол в круге радиуса единица (рис. 47). Принимая во внимание, что пл. $\triangle AOB <$ пл. сектора AOB $<$ пл. $\triangle AOC$, получим

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}tgx \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right),$$

откуда, деля на $\frac{1}{2}\sin x$, получим

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

или

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x. \tag{17}$$

Но $\cos x \to 1$ при $x \to +0$, откуда

$$\lim_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

и в силу сказанного выше,

$$\lim_{x \to \pm 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

* $\frac{\sin x}{x}$ является четной функцией.

Определим для данного случая число η, которое входит в условие (15_1). Вычитая, из единицы три части неравенства (17), получим

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right),$$

откуда следует, что

$$\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon,$$

если $1 - \cos x < \varepsilon$. Но, как мы видели выше, $1 - \cos x < \frac{x^2}{2}$, и достаточно выбрать $\frac{x^2}{2} < \varepsilon$, т. е. $|x| < \sqrt{2\varepsilon}$. Итак, в данном случае $\sqrt{2\varepsilon}$ может играть роль числа η.

34. Непрерывность функции. Приведем еще раз определение непрерывности функции $f(x)$ в точке $x = c$, если эта функция определена в этой точке и вблизи нее слева и справа.

Определение. *Функция $f(x)$, определенная при $x = c$ и всех значениях x, достаточно близких к c, называется непрерывной при $x = c$* (в точке c), *если существует предел $f(x)$* при $x \to c \pm 0$ и *этот предел равен $f(c)$*:

$$\lim_{x \to c \pm 0} f(x) = f(c). \tag{18}$$

Напомним, что это равносильно тому, что *существуют пределы $f(c-0)$ и $f(c+0)$ слева и справа и что эти пределы равны между собою и равны $f(c)$, т. е. $f(c-0) = f(c+0) = f(c)$.*

Из сказанного в [32] следует, что это равносильно также следующему: *при любом заданном положительном числе ε существует такое положительном число η, что*

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |x - c| < \eta \tag{19}$$

Не нужно оговаривать, что $x \neq c$, ибо $f(x) - f(c) = 0$ при $x = c$. Иначе это можно формулировать так: $f(x) - f(c) \to 0$ при $x - c \to \pm 0$. Разность $x - c$ есть приращение независимой переменной, а разность $f(x) - f(c)$ — соответствующее приращение функции. Поэтому указанное выше определение непрерывности часто формулируют так:

Функция называется непрерывной в точке $x = c$, если бесконечно малому приращению независимой переменной (от начального значения $x = c$) соответствует бесконечно малое приращение функции.

Заметим, что свойство непрерывности, выражаемое равенством (18), сводится к возможности находить предел функции простой подстановкой вместо независимой переменной ее предела.

Из формул, приведенных в конце [28], мы видим, что целый многочлен от x и частное таких многочленов, т. е. рациональная функция от x, суть функции, непрерывные при любом, значении x, кроме тех значений, при которых знаменатель рациональной функции обращается в нуль.

Непрерывной, очевидно, будет и функция $y = b$, сохраняющая при всяком x одно и то же значение [12].

Все элементарные функции, рассмотренные нами в первой главе (степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические и обратные круговые), непрерывны при всех значениях x, при которых они существуют, кроме тех значений, при которых они обращаются в бесконечность.

Так, например, $\log_{10} x$ есть непрерывная функция от x при всех положительных значениях x; $\operatorname{tg} x$ есть непрерывная функция от x при всех значениях x, кроме значений

$$x = (2k+1)\frac{\pi}{2},$$

где k есть любое целое число.

Отметим еще функцию u^v, где u и v суть непрерывные функции от x, причем предполагается, что u не принимает отрицательных значений. Такая функция называется *степенно-показательной.* Она точно так же обладает свойством непрерывности, исключая те значения x, при которых u и v одновременно равны нулю или $u = 0$ и $v < 0$.

Высказанное нами утверждение о непрерывности элементарных функций нуждается, конечно, в доказательстве, но мы примем это без доказательства. В дальнейшем мы рассмотрим этот вопрос подробнее. Докажем только непрерывность функции $\sin x$ при любом

$x = c$, пользуясь определением (19). Мы имеем [ср. 31]

$$\sin x - \sin c = 2 \sin \frac{x-c}{2} \cos \frac{x+c}{2},$$

откуда следует

$$|\sin x - \sin c| = 2\left|\sin \frac{x-c}{2}\right|\left|\cos \frac{x+c}{2}\right| \leqslant 2\left|\sin \frac{x-c}{2}\right|.$$

Но $|\sin \alpha| \leqslant |\alpha|$ при любом угле α, и, следовательно,

$$|\sin x - \sin c| \leqslant |x - c|.$$

Чтобы иметь $|\sin x - \sin c| \leqslant \varepsilon$, где ε — заданное положительное число, достаточно считать, что $|x-c| < \varepsilon$, т. е. роль η в определении (19) может играть число ε.

Нетрудно показать, что *сумма или произведение произвольного конечного числа непрерывных функций есть также непрерывная функция; то же относится и к частному двух непрерывных функций за исключением тех значений независимой переменной, при которых знаменатель обращается в нуль.*

Рассмотрим лишь случай частного. Положим, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны при $x = a$ и что $\psi(a) \neq 0$. Составим функцию

$$f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}.$$

Пользуясь теоремой о пределе частного, получим

$$\lim_{x \to a} f(x) = \frac{\lim_{x \to a} \varphi(x)}{\lim_{x \to a} \psi(x)} = \frac{\varphi(a)}{\psi(a)} = f(a),$$

что и доказывает непрерывность частного $f(x)$ при $x = a$.

Отметим один простой пример. Раз $y = \sin x$ есть непрерывная функция от x, то $y = b \sin x$, где b — постоянная, также будет непрерывной функцией, так как она является произведением непрерывных функций $y = b$ (см. выше) и $y = \sin x$.

Вернемся теперь еще к функции $y = \frac{\sin x}{x}$. При $x = 0$ эта функция неопределенна, но мы знаем, что $\lim\limits_{x \to \pm 0} y = 1$. Поэтому, если

мы положим $y = 1$ при $x = 0$, то y будет непрерывной функцией в точке $x = 0$.

Подобное нахождение предела функции при стремлении x к ее точке неопределенности называется *раскрытием неопределенности,* а самый предел, если он существует, называют иногда *истинным значением* функции в ее упомянутой точке неопределенности. В дальнейшем мы будем иметь много примеров раскрытия неопределенностей.

35. Свойства непрерывных функций. Выше мы определили свойство непрерывности функции при заданном значении x. Положим теперь, что функция определена в конечном промежутке $a \leqslant x \leqslant b$. *Если она непрерывна при любом значении x из этого промежутка, то говорят, что она непрерывна в промежутке* (a, b). Заметим при этом, что непрерывность функции на концах промежутка $x = a$ и $x = b$ состоит в следующем:

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a), \qquad \lim_{x \to b-0} f(x) = f(b).$$

Все непрерывные функции обладают следующими свойствами:

1. *Если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $(a,\ b)$, то существует в этом промежутке по крайней мере одно такое значение x, при котором $f(x)$ принимает свое наибольшее значение и по крайней мере одно такое значение x, при котором функция принимает свое наименьшее значение.*

2. *Если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке (a, b), причем $f(a) = m$ и $f(b) = n$, и если k — любое число, заключающееся между m и n, то существует в промежутке (a, b) по крайней мере одно такое значение x, при котором значение $f(x)$ равно k; в частности, если $f(a)$ и $f(b)$ разных значков, то существует внутри промежутка (a, b) по крайней мере одно такое значение x, при котором $f(x)$ обращается в нуль.*

Эти два свойства становятся непосредственно ясными, если принять во внимание, что в случае непрерывности функции соответствующий ей график будет представлять собою непрерывную кривую. Это замечание не может, конечно, служить доказательством. Самое понятие о непрерывной кривой, наглядное с первого взгляда,

оказывается чрезвычайно сложным при ближайшем его рассмотрении. Строгое доказательство указанных двух свойств, так же как и следующего, третьего, основано на теории иррациональных чисел. Мы примем эти свойства без доказательства.

В последних номерах настоящего параграфа мы выясним основы теории иррациональных чисел и связь этой теории с теорией пределов и свойствами непрерывных функций. Заметим, что второе свойство непрерывных функций можно еще формулировать так: при непрерывном изменении x от a до b непрерывная функция $f(x)$ проходит по крайней мере один раз через все числа, лежащие между $f(a)$ и $f(b)$.

На рис. 48 и 49 изображен график непрерывной в промежутке (a, b) функции, у которой $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$. На рис. 48 график один раз пересекает ось OX, и при соответствующем значении x функция $f(x)$ обращается в нуль. В случае рис. 49 таких значений будет не одно, а три.

Мы переходим теперь к третьему свойству непрерывных функций, которое является менее наглядным, чем два предшествующих.

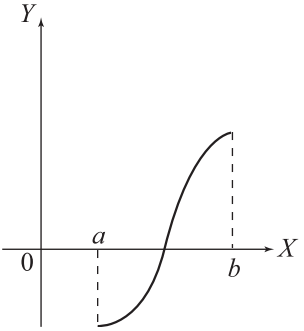

Рис. 48.

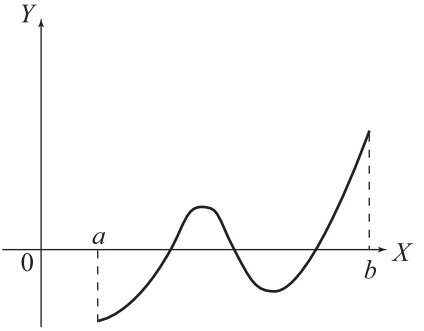

Рис. 49.

3. Если $f(x)$ непрерывна в промежутке (a, b) и если $x = x_0$ есть некоторое значение x из этого промежутка, то в силу условия (19) [34] (заменяя c на x_0) для любого заданного положительного ε существует такое η, зависящее, очевидно, от ε, что

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon, \text{ если } |x - x_0| < \eta,$$

причем мы считаем, конечно, x также принадлежащим промежутку $(a,\ b)$. (Если, например, $x_0 = a$, то x обязательно больше a, а если $x_0 = b$, то $x < b$.) Но число η может зависеть не только от ε, но и от того, какое именно значение $x = x_0$ из промежутка (a, b) мы рассматриваем. Третье свойство непрерывных функций заключается в том, что на самом деле для любого заданного ε существует одно и то же η для всех значений x_0 из промежутка $(a,\ b)$. Иными словами, *если $f(x)$ непрерывна в промежутке $(a,\ b)$, то для любого заданного положительного ε существует такое положительное η, что*

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon \tag{20}$$

для любых двух значений x' и x'' из промежутка $(a,\ b)$, удовлетворяющих неравенству

$$|x'' - x'| < \eta. \tag{21}$$

Это свойство называется *равномерной непрерывностью.* Таким образом, если *функция непрерывна в промежутке $(a,\ b)$, то она будет равномерно непрерывна в этом промежутке.**

Отметим еще раз, что мы предполагаем функцию $f(x)$ непрерывной не только для всех x, лежащих внутри промежутка $(a,\ b)$, но и, для значений $x = a$ и $x = b$.

Мы поясним свойства равномерной непрерывности еще на одном простом примере. Предварительно перепишем предыдущие неравенства в другом виде, заменяя букву x' на x и x'' на $(x + h)$. При этом $x'' - x' = h$ представляет собою приращение независимой переменной и $f(x + h) - f(x)$ — соответствующее приращение функции. Свойство равномерной непрерывности запишется так:

$$|f(x + h) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad |h| < \eta,$$

где x и $(x + h)$ — любые две точки из промежутка $(a,\ b)$.

Для примера рассмотрим функцию

$$f(x) = x^2.$$

* Особо подчеркнем, что речь идет именно о замкнутом промежутке. Это утверждение также называется теоремой Кантора.

В данном случае мы имеем

$$f(x+h)-f(x)=(x+h)^2-x^2=2xh+h^2.$$

При любом заданном значении x выражение $(2xh+h^2)$, дающее приращение нашей функции, стремится, очевидно, к нулю, если приращение независимой переменной стремится к нулю. Этим еще раз подтверждается [34], что взятая функция непрерывна при всяком значении x. Тем самым она будет непрерывна, например, в промежутке $-1 \leqslant x \leqslant 2$. Покажем, что она будет равномерно непрерывна в этом промежутке. Нам надо удовлетворить неравенству

$$|2xh+h^2|<\varepsilon \tag{22}$$

соответствующим подбором числа η в неравенстве $|h|<\eta$, причем x и $(x+h)$ должны принадлежать промежутку $(-1,\ 2)$. Мы имеем

$$|2xh+h^2| \leqslant |2xh|+h^2=2|x||h|+h^2.$$

Но наибольшее значение $|x|$ в промежутке $(-1,\ 2)$ равно двум, и потому мы можем заменить предыдущее неравенство более сильным:

$$|2xh+h^2| \leqslant 4|h|+h^2.$$

Будем считать во всяком случае $|h|<1$. При этом $h^2<|h|$, и мы можем переписать предыдущее неравенство в виде:

$$|2xh+h^2|<4|h|+|h| \quad \text{или} \quad |2xh+h^2|<5|h|.$$

Неравенство (22) будет, наверное, удовлетворено, если мы подчиним $|h|$ условию $5|h|<\varepsilon$. Таким образом, h должно удовлетворять двум неравенствам

$$|h|<1 \quad \text{и} \quad |h|<\frac{\varepsilon}{5}.$$

Следовательно, за число η мы можем взять наименьшее из двух чисел 1 и $\frac{\varepsilon}{5}$. При малых ε (а именно при $\varepsilon<5$) мы должны взять $\eta=\frac{\varepsilon}{5}$, и во всяком случае очевидно, что найденное η будет, при заданном ε, одним и тем же для всех x из промежутка $(-1,\ 2)$.

Указанные свойства могут уже не иметь места в случае разрывных функций или функций, непрерывных только внутри промежутка. Рассмотрим функцию, график которой изображен на рис. 46. Она, определена на промежутке $(-1,\ +1)$ и имеет разрыв при $x=0$. Среди ее значений имеются сколь угодно близкие к единице, но она не принимает значения, равного единице, и значений, бóльших единицы. Таким

образом, среди значений этой функции нет наибольшего. Точно так же среди этих значений нет и наименьшего. Элементарная функция $y = x$ не принимает внутри промежутка (0, 1) ни наибольшего, ни наименьшего значения. Если рассматривать эту же функцию в замкнутом промежутке (0, 1), то она будет достигать своего наименьшего значения при $x = 0$ и наибольшего при $x = 1$. Рассмотрим еще функцию $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, непрерывную в промежутке $0 < x \leqslant 1$, открытом слева. При стремлении x к нулю аргумент $\frac{1}{x}$ беспредельно растет, и $\sin\frac{1}{x}$ колеблется между (–1) и (+1) и не имеет предела при $x \to +0$. Покажем, что указанная функция не обладает равномерной непрерывностью в промежутке $0 < x \leqslant 1$. Рассмотрим два значения: $x' = \frac{1}{n\pi}$ и $x'' = \frac{2}{(4n+1)\pi}$, где n — целое положительное число. Оба они принадлежат упомянутому промежутку при любом выборе n. Далее, мы имеем,

$$f(x') = \sin n\pi = 0,\ \ f(x'') = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Таким образом,

$$f(x'') - f(x') = 1 \quad \text{и} \quad x'' - x' = \frac{2}{(4n+1)\pi} - \frac{1}{n\pi}.$$

При беспредельном возрастании целого положительного числа n разность $x'' - x'$ стремится к нулю, а разность $f(x'') - f(x')$ остается равной единице. Отсюда видно, что не существует положительного η для промежутка $0 < x \leqslant 1$ такого, что из (21) следует $|f(x'') - f(x')| < 1$; это соответствует выбору $\varepsilon = 1$ в формуле (20).

Возьмем функцию $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$. При $x \to +0$ первый множитель x стремится к нулю, а второй $\sin\frac{1}{x}$ не превышает единицы по абсолютной величине, а потому [32] $f(x) \to 0$ при $x \to +0$. При $x = 0$ второй множитель не имеет смысла, но если мы дополним определение нашей функции, положив $f(0) = 0$, т. е. будем считать $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$ при $0 < x \leqslant 1$ и $f(0) = 0$, то получим функцию, непрерывную в замкнутом промежутке (0, 1). Функции $\sin\frac{1}{x}$ и $x\sin\frac{1}{x}$ обладают, очевидно, непрерывностью при любом x, отличном от нуля.

36. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших величин. В дальнейшем буквами α и β мы будем обозначать упорядоченные переменные, которые имеют одну и ту же упорядочивающую переменную (значок n или переменную t), так что мы можем производить элементарные действия над этими переменными.

Если переменные α и β стремятся к нулю, то к их частному $\frac{\beta}{\alpha}$ теорема о пределе частного неприменима и мы без дополнительных исследований ничего не можем сказать о существовании предела у этого частного.

Положим, что α и β стремятся к нулю, но не принимают в процессе изменения значения нуль и что отношение $\frac{\beta}{\alpha}$ стремится к пределу a, конечному и отличному от нуля. При этом отношение $\frac{\alpha}{\beta}$ стремится к пределу $\frac{1}{a}$, конечному и отличному от нуля. В этом случае говорят, что α и β — *бесконечно малые одного и того же порядка.*

Если предел отношения $\frac{\beta}{\alpha}$ равен нулю, то говорят, что β — *бесконечно малая высшего порядка по сравнению с α или что α — бесконечно малая низшего порядка по сравнению с β.* Если отношение $\frac{\beta}{\alpha}$ стремится к бесконечности, то $\frac{\alpha}{\beta}$ стремится к нулю, т. е. β будет низшего порядка по сравнению с α и α высшего порядка по сравнению с β. Легко показать, что *если α и β бесконечно малые одного и того же порядка и γ бесконечно малая высшего порядка по отношению к α, то она бесконечно малая высшего порядка и по отношению к β.* По условию $\frac{\gamma}{\alpha} \to 0$, и отношение $\frac{\alpha}{\beta}$ имеет предел, конечный и отличный от нуля. Из очевидного равенства $\frac{\gamma}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\beta}$, в силу теоремы о пределе произведения, непосредственно следует, что $\frac{\gamma}{\beta} \to 0$, что и доказывает наше утверждение.

Отметим важный частный случай бесконечно малых одного и того же порядка. Если $\frac{\alpha}{\beta} \to 1$ $\left(\text{при этом и } \frac{\beta}{\alpha} \to 1\right)$, то бесконечно малые α и β называются *эквивалентными.* Из равенства $\frac{\beta-\alpha}{\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} - 1$ непосредственно следует, что *эквивалентность α и β равносильна тому, что разность $\beta - \alpha$ есть бесконечно малая высшего порядка по отношению к α.* Из равенства $\frac{\beta-\alpha}{\beta} = 1 - \frac{\alpha}{\beta}$ точно также следует, что эквивалентность равносильна тому, что $\beta - \alpha$ есть бесконечно малая высшего порядка по отношению к β.

Если отношение $\frac{\beta}{\alpha^k}$, где k — постоянное положительное число, стремится к пределу, конечному и отличному от нуля, то говорят, что *β бесконечно малая порядка k по сравнению с α.* Если $\frac{\beta}{\alpha^k} \to c$, где c — число, отличное от нуля, то $\frac{\beta}{c\alpha^k} \to 1$, т. е. β и $c\alpha^k$ — эквивалентные бесконечно малые, и, следовательно, разность $\gamma = \beta - c\alpha^k$ есть бесконечно малые высшего порядка по сравнению с β (или

по сравнению с α^k). Если принять α за основную бесконечно малую, то равенство $\beta = c\alpha^k + \gamma$, где γ — бесконечно малая высшего порядка по сравнению с α^k, представляет собой выделение из бесконечно малой β бесконечно малого слагаемого $c\alpha^k$ (простейшего вида по отношению к α), так что остаток γ есть уже бесконечно малая высшего порядка по сравнению с β (или по сравнению с α^k).

Аналогичным образом производится сравнение бесконечно больших величин u и v. Если $\frac{v}{u}$ стремится к пределу, конечному и отличному от нуля, то говорят, что u и v бесконечно большие величины одного и того же порядка. Если $\frac{v}{u} \to 0$, то $\frac{u}{v} \to \infty$. В этом случае говорят, что v бесконечно большая низшего порядка по сравнению с u или что u бесконечно большая высшего порядка по сравнению с v. Если $\frac{v}{u} \to 1$, то бесконечно большие называются эквивалентными. Если $\frac{v}{u^k}$, где k — постоянное положительное число, имеет предел, конечный и отличный от нуля, то говорят, что v бесконечно большая k-го порядка по сравнению с u. Все сказанное выше о бесконечно малых имеет место и для бесконечно больших.

Отметим еще, что если отношение $\frac{\beta}{\alpha}$ или $\frac{v}{u}$ вовсе не имеет предела, то соответствующие бесконечно малые или бесконечно большие называются несравнимыми.

37. Примеры.

1. Выше мы видели, что

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

т. е. $\sin x$ и x суть эквивалентные бесконечно малые, и, следовательно, разность $\sin x - x$ есть бесконечно малая высшего порядка по отношению к x. Дальше мы увидим, что эта разность эквивалентна $-\frac{1}{6}x^3$, т. е. является бесконечно малой третьего порядка по сравнению с x.

2. Покажем, что разность $1 - \cos x$ есть бесконечно малая второго порядка по отношению к x. Действительно, применяя известную тригонометрическую формулу и элементарные преобразования, получим

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2.$$

Если $x \to 0$, то $\alpha = \frac{x}{2}$ также стремится к нулю, и, как мы показали,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \lim_{\alpha\to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1, \text{ и, следовательно, } \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

т. е. действительно, $1 - \cos x$ бесконечно малая второго порядка по сравнению с x.

3. Из формулы*

$$\sqrt{1+x} - 1 = \frac{x}{\sqrt{1+x}+1}$$

следует

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1},$$

откуда

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{2},$$

т. е. $\sqrt{1+x} - 1$ и x суть бесконечно малые одного порядка, причем $\sqrt{1+x} - 1$ эквивалентна $\frac{1}{2}x$.

4. Докажем, что многочлен степени m есть бесконечно большая порядка m по сравнению с x. Действительно,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x + a_m}{x^m} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_{m-1}}{x^{m-1}} + \frac{a_m}{x^m}\right) = a_0.$$

Нетрудно видеть, что два многочлена одной и той же степени, при $x \to \infty$, суть бесконечно большие одного и того же порядка. Их отношение имеет пределом отношение их старых коэффициентов. Например,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+x-3}{7x^2+2x+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{5+\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}}{7+\frac{2}{x}+\frac{4}{x^2}} = \frac{5}{7}.$$

Если степени двух многочленов различны, то при $x \to \infty$ тот из них будет бесконечно большой высшего порядка по сравнению с другим, степень которого больше.

---

* Чтобы получить правую часть этого выражения необходимо левую его часть домножить и поделить на $\sqrt{1+x}+1$ и воспользоваться в числителе формулой разности квадратов.

38. Число *e*. Рассмотрим один важный для дальнейшего пример переменной величины, а именно рассмотрим переменную, принимающую значения,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

где n, возрастая, принимает целые положительные значения и стремится, таким образом, к $+\infty$. Применяя формулу бинома Ньютона, получим

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+\frac{n}{1}\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\\ &+\dots+\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k}+\dots+\\ &+\frac{n(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1}{n!}\frac{1}{n^n}=\\ &=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\dots+\\ &+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\dots+\\ &+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).\end{aligned}$$

Написанная сумма содержит $(n+1)$ положительных слагаемых. При увеличении целого числа n, во-первых, увеличится число слагаемых и, во-вторых, каждое из прежних слагаемых также увеличится, так как в выражении общего члена[2]

$$\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

k остается без изменения, а разности, стоящие в круглых скобках, увеличатся при увеличении n. Таким образом, мы видим, что рассматриваемая переменная при увеличении n увеличивается, и для

[2]Произведение $\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$ получается из дроби

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^k},$$

если каждый из k сомножителей, стоящих в числителе, разделить на n, принимая во внимание, что число сомножителей n в знаменателе также равно k.

того, чтобы убедиться в существовании предела этой переменной, достаточно доказать, что она ограничена.

Заменим в выражении общего члена каждую из упомянутых разностей единицей, а все множители, входящие в $k!$, начиная с 3, заменим на 2. От такой замены общий член увеличится, и мы будем иметь, применяя формулу для суммы членов геометрической прогрессии

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{k-1}}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}} = \\ = 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 3-\frac{1}{2^{n-1}} < 3,$$

т. е. переменная $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ограничена. Обозначим предел этой переменной буквой e:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \text{ (n— целое положительное).} \tag{23}$$

Этот предел не может быть, очевидно, больше 3. В формуле (23) целое n может, очевидно, стремиться к $+\infty$ любым образом.

Докажем теперь, что выражение $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ стремится к тому же пределу e, если $x\to+\infty$, принимая любые значения.

Пусть n — наибольшее целое число, заключающееся в x, т. е.

$$n \leqslant x < n+1.$$

Число n стремится, очевидно, вместе с x к $+\infty$. Принимая во внимание, что при увеличении положительного основания, большего единицы, и показателя степени увеличивается и сама степень, можем написать

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \tag{24}$$

Но, в силу равенства (23),

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e$$

и

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=e\cdot 1=e.$$

Таким образом, крайние члены неравенства (24) стремятся к пределу e, а потому к тому же пределу должен стремиться и средний член, т. е.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e. \tag{25}$$

Рассмотрим теперь тот случай, когда x стремится к $-\infty$. Введем вместо x новую переменную y, полагая

$$x=-1-y,\quad \text{откуда}\quad y=-1-x.$$

Из последнего равенства видно, что, при стремлении x к $-\infty$ y стремится к $+\infty$.

Совершая в выражении $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ замену переменных и принимая во внимание равенство (25), получим

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{-y}{-1-y}\right)^{-1-y}=\lim_{y\to+\infty}\left(\frac{1+y}{y}\right)^{1+y}=$$
$$=\lim_{y\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\left(1+\frac{1}{y}\right)\right]=e\cdot 1=e.$$

Если x стремится к ∞, имея любые знаки, т. е. $|x|\to+\infty$, то из предыдущего следует, что и в этом случае

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e. \tag{26}$$

Впоследствии мы покажем удобный путь для вычисления числа e с любой степенью точности. Число это, как оказывается, есть число иррациональное и с точностью до седьмого десятичного знака оно выражается так: $e=2,7182818\ldots$

Нетрудно теперь найти предел выражения $\left(1+\frac{k}{x}\right)^x$, где k — данное число. Пользуясь непрерывностью степенной функции, получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{x}{k}}\right)^{\frac{x}{k}}\right]^k=\lim_{y\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^k=e^k,$$

где буквою y обозначено частное $\frac{x}{k}$, стремящееся к бесконечности одновременно с x.

Выражения вида $\left(1+\frac{k}{n}\right)^n$ встречаются в теории так называемых сложных процентов. Предположим, что приращение капитала происходит ежегодно. Если капитал a отдан из p процентов годовых, то по истечении года наращенный капитал будет $a(1+k)$, где $k=\frac{p}{100}$; по прошествии второго года он будет $a(1+k)^2$, и, вообще, по прошествии m лет он будет $a(1+k)^m$.

Положим теперь, что приращение капитала происходит через $\frac{1}{n}$ часть года. При этом число k уменьшится в n раз, так как процентная такса p рассчитана на год, а число промежутков времени увеличится в n раз, и наращенный капитал через m лет будет

$$a\left(1+\frac{k}{n}\right)^{mn}.$$

Пусть, наконец, n увеличивается беспредельно, т. е. приращение капитала происходит через все меньшие промежутки времени и в пределе — непрерывно. По прошествии m лет наращенный капитал будет

$$\lim_{n\to\infty}a\left(1+\frac{k}{n}\right)^{mn}=\lim_{n\to\infty}a\left[\left(1+\frac{k}{n}\right)^n\right]^m=ae^{km}.$$

Примем число e за основание логарифмов. Такие логарифмы называются *натуральными логарифмами* и их обычно обозначают просто знаком log (или ln) без указания основания.*

При стремлении переменной x к нулю в выражении $\frac{\log(1+x)}{x}$ числитель и знаменатель стремятся к нулю. Раскроем эту неопределен-

* В современной математической литературе натуральный логарифм обозначается символом ln.

ность. Введем новую переменную y, полагая

$$x = \frac{1}{y}, \quad \text{т. е.} \quad y = \frac{1}{x},$$

откуда видно, что при $x \to 0$, y стремится к бесконечности. Введя эту новую переменную и пользуясь непрерывностью функции $\log x$ при $x > 0$ и формулой (26), получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{y\to\infty} y \log\left(1 + \frac{1}{y}\right) = \lim_{y\to\infty} \log\left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = \log e = 1.$$

Из этого ясна целесообразность сделанного выбора основания логарифмов. Точно так же как при радианном измерении углов, истинное значение выражения $\frac{\sin x}{x}$ при $x = 0$ равно единице, *в случае натуральных логарифмов истинное значение выражения* $\frac{\log(1+x)}{x}$ *при* $x = 0$ *тоже равно единице.*

Из определения логарифмов вытекает следующее соотношение:

$$N = a^{\log_a N}.$$

Логарифмируя это соотношение по основанию e, получим

$$\log N = \log_a N \cdot \log a \quad \text{или} \quad \log_a N = \log N \cdot \frac{1}{\log a}.$$

Соотношение это выражает логарифм числа N при любом основании a через его натуральный логарифм. Множитель $M = \frac{1}{\log a}$ называется *модулем* системы логарифмов с основанием a; при $a = 10$ он выражается с точностью до седьмого десятичного знака так:

$$M = 0,4342945\ldots$$

39. Недоказанные предложения. При изложении теории пределов мы оставили недоказанными несколько предложений, которые сейчас перечислим: существование предела у монотонной ограниченной переменной [30], необходимое и достаточное условие существования предела (признак Коши) [31] и три свойства непрерывных в замкнутом промежутке функций [35]. Доказательство

этих предложений основывается на теории вещественных чисел и действий над ними. Изложению этой теории и доказательству упомянутых выше предложений будут посвящены следующие номера.

Введем еще одно новое понятие и сформулируем еще одно предложение, которое также будет доказано ниже. Если мы имеем множество, состоящее из конечного числа вещественных чисел (например, мы имеем тысячу вещественных чисел), то среди них будет как наибольшее, так и наименьшее. Если же мы имеем бесконечное множество вещественных чисел и даже таких, что все эти числа принадлежат определенному промежутку, то все же не всегда среди этих чисел будет наибольшее и наименьшее. Например, если мы рассмотрим множество всех вещественных чисел, заключающихся между 0 и 1, но не будем причислять к этому множеству самих чисел 0 и 1, то среди этого множества чисел нет ни наибольшего, ни наименьшего. Какое бы число, близкое к единице, но меньше ее, мы ни взяли, найдется другое число, лежащее между взятым числом и единицей. В данном случае числа 0 и 1, не принадлежащие к взятому множеству чисел, обладают по отношению к нему следующим свойством: среди чисел нашего множества нет чисел, бо́льших единицы, но при любом заданном положительном числе ε есть числа, бо́льшие $(1-\varepsilon)$. Точно так же среди чисел нашего множества нет чисел, меньших нуля, но при любом заданном положительном числе ε есть числа, меньшие $(0+\varepsilon)$. Эти числа 0 и 1 называются *точной нижней* и *точной верхней границами* указанного выше множества вещественных чисел.

Перейдем от этого примера к общему случаю.

Пусть имеется некоторое множество E вещественных чисел. Говорят, что оно *ограничено сверху,* если существует такое число M, что все числа, принадлежащие множеству E, не превосходят M. Точно так же говорят, что множество *ограничено снизу,* если существует такое число m, что все числа, принадлежащие множеству E, не менее, чем m. Если множество ограничено сверху и снизу, то его просто, называют *ограниченным.*

Определение. *Точной верхней границей множества E называют такое число β (если оно существует), что среди чисел, принадлежащих E, нет чисел, бо́льших β, но при любом заданном положительном ε есть числа, бо́льшие $(\beta-\varepsilon)$. Точной нижней*

границей множества E называется такое число α (если оно существует), что среди чисел, принадлежащих E, нет чисел, меньших α, но при любом заданном положительном ε есть числа, меньшие $(\alpha+\varepsilon)$.

Если множество E не ограничено сверху, т. е. существуют числа из E, бóльшие любого заданного числа, то множество не может иметь точной верхней границы. Точно так же, если множество E не ограничено снизу, то оно не может иметь точной нижней границы. Если среди чисел множества есть наибольшее, то оно, очевидно, и является точной верхней границей множества. Точно так же, если среди чисел множества есть наименьшее, то оно и является точной нижней границей множества E. Но, как мы видели, не всегда среди чисел бесконечного множества есть наибольшее или наименьшее. Однако можно показать, что *у множества, ограниченного сверху, всегда имеется точная верхняя граница, а у множества, ограниченного снизу, — точная нижняя граница.* Отметим еще, что из определения точных границ непосредственно следует, что точная верхняя и точная нижняя граница может быть только одна.

Указанными в настоящем номере предложениями мы будем часто пользоваться в дальнейшем.

Следующие номера, напечатанные мелким шрифтом, могут быть пропущены при первом чтении.

40. Вещественные числа. Начнем с изложения теории вещественных чисел. Мы исходим из множества всех рациональных чисел, целых и дробных, как положительных, так и отрицательных. Все эти рациональные числа можно себе представить расположенными в порядке их возрастания. При этом если a и b два любых различных рациональных числа, то между ними можно вставить сколько угодно рациональных чисел. Действительно, пусть $a<b$, и введем положительное рациональное число $r=\frac{b-a}{n}$, где n — какое-нибудь целое положительное число. Рациональные числа $a+r,\ a+2r,\ \ldots,\ a+(n-1)r$, лежат между a и b, и, ввиду произвольности в выборе целого положительного числа n, наше утверждение доказано.

Назовем *сечением в области рациональных чисел* всякое разделение всех рациональных чисел на такие два класса, что любое число одного (первого) класса меньше любого числа другого (второго) класса. При этом, очевидно, если некоторое число находится в первом классе, то и

всякое меньшее его число также находится в первом классе, и если некоторое число находится во втором классе, то и всякое большее число также находится во втором классе.

Положим, что среди чисел первого класса есть наибольшее число. При этом, в силу упомянутого свойства совокупности рациональных чисел, можно утверждать, что среди чисел второго класса нет наименьшего числа. Точно так же, если среди чисел второго класса есть наименьшее, то среди чисел первого класса нет наибольшего. Назовем сечение — *сечением первого рода,* если среди чисел первого класса есть наибольшее или среди чисел второго класса есть наименьшее. Легко построить такие сечения. Возьмем какое-нибудь рациональное число b и отнесем к первому классу все рациональные числа, меньшие b, ко второму классу — все рациональные числа, бóльшие b, а само число b отнесем или к первому классу (оно будет там наибольшим), или ко второму классу (оно будет там наименьшим). Беря за b всевозможные рациональные числа, мы получим таким образом всевозможные сечения первого рода. Мы будем говорить, что такое сечение первого рода определяет то рациональное число b, которое является наибольшим в первом или наименьшим во втором классе.

Но существуют и *сечения второго рода,* у которых в первом классе нет наибольшего числа, а во втором классе нет наименьшего числа. Построим пример такого сечения. Отнесем к первому классу все отрицательные рациональные числа, нуль и те положительные рациональные числа, квадрат которых меньше двух, а ко второму классу отнесем все те рациональные положительные числа, квадрат которых больше двух. Так как не существует рационального числа, квадрат которого равен двум, то все рациональные числа окажутся распределенными, и мы будем иметь некоторое сечение. Покажем, что в первом классе нет наибольшего числа. Для этого достаточно показать, что если число a принадлежит первому классу, то есть числа, бóльшие a, также принадлежащие первому классу. Если a отрицательно или нуль, то это очевидно; положим, что $a > 0$. По условию составления первого класса $a^2 < 2$. Введем положительное рациональное число $r = 2 - a^2$ и покажем, что можно определить настолько малое положительное рациональное число x, чтобы $(a + x)$ также принадлежало первому классу, т. е. чтобы имелось неравенство

$$2 - (a + x)^2 > 0 \quad \text{или} \quad r - 2ax - x^2 > 0,$$

т. е. дело сводится к нахождению такого положительного рационального числа, которое удовлетворяет неравенству $x^2 + 2ax < r$. Считая $x < 1$, имеем $x^2 < x$, и, следовательно, $x^2 + 2ax < x + 2ax = (2a + 1)x$, т. е. нам

достаточно удовлетворить неравенству $(2a+1)x < r$, таким образом, x определяется из двух неравенств

$$x < 1 \quad \text{и} \quad x < \frac{r}{2a+1}.$$

Очевидно, можно найти сколько угодно таких положительных рациональных x, которые удовлетворяют обоим этим неравенствам. Совершенно так же можно показать, что во втором классе построенного сечения нет наименьшего числа. Итак, мы построили пример сечения второго рода. Основным моментом теории является следующее соглашение: мы считаем, что *всякое сечение второго рода определяет некоторый новый объект — иррациональное число.* Разные сечения второго рода определяют разные иррациональные числа. Нетрудно догадаться, что построенный выше пример сечения второго рода определяет то иррациональное число, которое мы обычно обозначаем $\sqrt{2}$.

Можно расставить теперь все введенные таким образом иррациональные числа вместе с прежними рациональными в порядке возрастания, который интуитивно изображается для нас точками направленной оси OX. Если α есть некоторое иррациональное число, то мы обозначим через $\mathrm{I}(\alpha)$ и $\mathrm{II}(\alpha)$ первый и второй классы того сечения, которое определяет иррациональное число α. Мы считаем число α бóльшим, чем любое число из $\mathrm{I}(\alpha)$, и меньшим, чем любое число из $\mathrm{II}(\alpha)$. Таким образом, любое иррациональное число сравнивается с любым рациональным. Остается определить понятия больше и меньше для любых двух различных иррациональных чисел α и β. Поскольку α и β различны, классы $\mathrm{I}(\alpha)$ и $\mathrm{I}(\beta)$ не совпадают, и один из классов заключается в другом. Положим, что $\mathrm{I}(\alpha)$ заключается в $\mathrm{I}(\beta)$, т. е. всякое число из $\mathrm{I}(\alpha)$ принадлежит $\mathrm{I}(\beta)$, но есть числа из $\mathrm{I}(\beta)$, принадлежащие $\mathrm{II}(\alpha)$. При этом мы по определению считаем $\alpha < \beta$. Таким образом, совокупность всех рациональных и иррациональных чисел, т. е., иначе говоря, *совокупность всех вещественных чисел расположена в порядке.* При этом, пользуясь данными выше определениями, нетрудно показать, что если a, b и c — вещественные числа $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.

Отметим прежде всего одно элементарное следствие из указанных определений. Пусть α — некоторое иррациональное число. Поскольку в классе $\mathrm{I}(\alpha)$ нет наибольшего, а в классе $\mathrm{II}(\alpha)$ нет наименьшего числа, то непосредственно очевидно, что между α и любым рациональным числом a можно вставить сколько угодно рациональных чисел. Пусть теперь $\alpha < \beta$ — два различных иррациональных числа. Часть рациональных чисел из $\mathrm{I}(\beta)$ входит в $\mathrm{II}(\alpha)$, и отсюда непосредственно следует, что между α и β также можно вставить сколько угодно рациональных чисел,

т. е. вообще, *между двумя различными вещественными числами можно вставить сколько угодно рациональных чисел.*

Мы переходим теперь к доказательству основной теоремы теории иррациональных чисел. Рассмотрим совокупность всех вещественных чисел и произведем в ней какое-нибудь сечение, т. е. распределим все вещественные числа (не только рациональные, но и иррациональные) на два класса I и II так, чтобы любое число из I было меньше любого числа из II. Докажем, что при этом обязательно или в классе I будет наибольшее число, или в классе II будет наименьшее число (одно исключает другое, как и выше для сечения в области рациональных чисел). Для этого обозначим через I' совокупность всех рациональных чисел из I и через II' — совокупность всех рациональных чисел из II. Классы $(\mathrm{I}', \mathrm{II}')$ определяют некоторое сечение в области рациональных чисел, и это сечение определит вещественное число α (рациональное или иррациональное). Положим для определенности, что это число α принадлежит классу I при упомянутом выше распределении всех вещественных чисел на два класса. Покажем, что α должно быть наибольшим числом из класса I. Действительно, если бы это было не так, то существовало бы в классе I вещественное число β, большее α. Возьмем некоторое рациональное число r, лежащее между α и β, т. е. $\alpha < r < \beta$. Оно должно принадлежать классу I и, следовательно, классу I'.

Таким образом, в первом классе сечения $(\mathrm{I}', \mathrm{II}')$, определяющего числа α, находится число r, большее, чем α. Этого быть не может, и, следовательно, наше предположение, что α не наибольшее число класса I неправильно. Совершенно так же можно показать, что если α попадает в класс II, то оно должно быть там наименьшим числом.

Итак, мы доказали следующую основную теорему:

Основная теорема. *В любом сечении, произведенном в области вещественных чисел, обязательно: или первый класс содержит наибольшее число, или второй класс содержит наименьшее число.*

Всем рассуждениям настоящего номера легко придать простой геометрический смысл. Сначала мы рассматриваем на оси OX только точки с рациональными абсциссами. Сечению в области рациональных чисел соответствует разрез прямой OX на две полупрямые. Если разрез происходит в точке с рациональной абсциссой, то получается сечение первого рода, причем абсцисса той точки, в которой происходит разрез, причисляется сама или к первому или ко второму классу. Если же разрез производится в точке, которой не соответствует рациональная абсцисса, то получается сечение второго рода, определяющее иррациональное число, которое и принимается за абсциссу той точки, в которой произведен раз-

рез. После заполнения таких пустых точек иррациональными абсциссами всякое рассечение прямой происходит уже в точке с некоторой вещественной абсциссой. Все это является лишь геометрической иллюстрацией и не имеет доказательной силы. Нетрудно, пользуясь данным определением иррационального числа α, образовать бесконечную десятичную дробь, соответствующую этому числу [2]. Всякий конечный отрезок этой дроби должен принадлежать $\mathrm{I}(\alpha)$, но если мы увеличим на единицу последнюю цифру этого отрезка, то соответствующее рациональное число должно находиться в $\mathrm{II}(\alpha)$.

41. Действия над вещественными числами. Теория иррациональных чисел, кроме данных выше определений и основной теоремы, содержит еще определение действий над иррациональными числами и исследование свойств этих действий. При определении действий мы будем руководствоваться сечениями в области рациональных чисел, и, поскольку эти сечения определяют не только иррациональные, но и рациональные числа (сечения первого рода), определение действий будет годиться вообще для всех вещественных чисел, причем для рациональных чисел они будут совпадать с известными. При изложении настоящего номера мы ограничимся только общими указаниями.

Сделаем предварительно одно замечание. Пусть α — некоторое вещественное число. Возьмем какое-нибудь (малое) рациональное положительное число r, затем рациональное a из $\mathrm{I}(\alpha)$ и составим арифметическую прогрессию

$$a,\ a+r,\ a+2r,\ \ldots,\ a+nr,\ \ldots$$

При больших n числа $(a+nr)$ попадут в $\mathrm{II}(\alpha)$, и, следовательно, будет существовать такое целое положительное k, что $[a+(k-1)r]$ принадлежит $\mathrm{I}(\alpha)$ и $(a+kr)$ принадлежит $\mathrm{II}(\alpha)$, т. е.:

Замечание: *В любом сечении рациональных чисел существуют в разных классах числа, отличающиеся на любое заданное положительное рациональное число r, как бы мало оно ни было.*

Перейдем теперь к определению сложения. Пусть α и β — два вещественных числа. Пусть a — любое число из $\mathrm{I}(\alpha)$, a' — из $\mathrm{II}(\alpha)$, b — из $\mathrm{I}(\beta)$ и b' — из $\mathrm{II}(\beta)$. Составим всевозможные суммы $(a+b)$ и $(a'+b')$. Во всяком случае имеем: $a+b<a'+b'$. Составим новое сечение рациональных чисел, относя ко второму классу все рациональные числа, бóльшие всех $(a+b)$, и относя к первому классу все остальные рациональные числа. При этом любое число первого класса меньше любого числа, второго класса, все числа $(a+b)$ отходят в первый класс и все

числа $(a' + b')$ — во второй класс. Составленное новое сечение определит некоторое вещественное число, которое мы и назовем суммой $(\alpha + \beta)$. Это число, очевидно, больше или равно всем $(a + b)$ и меньше или равно всем $(a' + b')$. Принимая во внимание, что, в силу сделанного выше замечания, числа a и a', а также b и b' могут отличаться друг от друга на любое малое положительное рациональное число, нетрудно показать, что может существовать только одно число, удовлетворяющее указанным выше неравенствам. Непосредственно проверяется, что сложение удовлетворяет обычным законам, известным для рациональных чисел

$$\alpha + \beta = \beta + \alpha,\ (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma),\ \alpha + 0 = \alpha.$$

Например, чтобы получить $(\beta+\alpha)$, нам надо будет составлять вместо сумм $(a + b)$ и $(a' + b')$ суммы $(b + a)$ и $(b' + a')$, но эти суммы совпадают с прежними, так как переместительный закон сложения для рациональных чисел известен.

Пусть α — некоторое вещественное число. Определим число $(-\alpha)$ следующим сечением: в первый класс относим все рациональные числа из класса $\mathrm{II}(\alpha)$ с измененным знаком, а во второй класс — все числа из $\mathrm{I}(\alpha)$ с измененным знаком. Таким образом, получится действительно сечение в области рациональных чисел, и для числа $(-\alpha)$ как нетрудно проверить, имеем

$$-(-\alpha) = \alpha, \quad \alpha + (-\alpha) = 0.$$

Нетрудно видеть, что если $\alpha > 0$, то $(-\alpha) < 0$, и наоборот. Назовем абсолютным значением числа α, отличного от нуля, то из двух чисел α и $(-\alpha)$, которое больше нуля. Обозначим, как и раньше, абсолютное значение числа α символом $|\alpha|$.

Переходим теперь к умножению. Пусть α и β — два положительных вещественных числа, т. е. $\alpha > 0$ и β. Пусть a — любое *положительное число* из $\mathrm{I}(\alpha)$, b — любое *положительное число* из $\mathrm{I}(\beta)$, a' и b' — любые числа из $\mathrm{II}(\alpha)$ и $\mathrm{II}(\beta)$ (они уже обязательно положительны). Составляем новое сечение, относя, ко второму классу все рациональные числа, бóльшие всех произведений ab, и к первому классу — остальные рациональные числа. Все ab попадут в первый класс и все $a'b'$ — во второй класс. Новое сечение определит некоторое вещественное число, которое мы и назовем произведением $\alpha\beta$. Это число больше или равно всем ab и не превосходит всех $a'b'$, и только одно это вещественное число удовлетворяет этим неравенствам.

Если одно из чисел α, β или оба — отрицательны, то мы приводим умножение к предыдущему случаю, вводя в определение умножения

обычное правило знаков, т. е. мы полагаем $\alpha\beta = \pm|\alpha||\beta|$, причем берем знак $(+)$, если числа α и β оба меньше нуля, и берем знак $(-)$, если одно из чисел больше нуля, а другое меньше нуля.

При умножении на нуль принимаем определение, что $\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$. Непосредственно проверяются основные законы умножения:

$$\alpha\beta = \beta\alpha,\ (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma),\ a(\beta+\gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma,$$

и произведение нескольких сомножителей может равняться нулю в том и только в том случае, если хоть один из сомножителей равен нулю.

Вычитание определяется как действие, обратное сложению, т. е. $\alpha - \beta = x$ равносильно $x + \beta = \alpha$. Добавляя к обеим частям этого равенства $(-\beta)$, получим, в силу упомянутых выше свойств сложения: $x = \alpha + (-\beta)$, т. е. разность должна обязательно определяться по этой формуле, и действие вычитания сводится к сложению. Остается проверить, что полученное выражение для x действительно удовлетворяет условию $x + \beta = \alpha$, но это непосредственно вытекает из свойств сложения. Отметим справедливость обычного свойства: неравенство $\alpha > \beta$ равносильно $\alpha - \beta > 0$. Прежде чем переходить к делению, определим число, обратное данному. Если a есть рациональное число, отличное от нуля, то обратным называют число $\frac{1}{a}$. Пусть α — вещественное число, отличное от нуля. Пусть сначала $\alpha > 0$, и пусть a' — любое число из $\mathrm{II}(\alpha)$ (оно — рационально и положительно). Определим число, обратное α, следующим сечением: к первому классу отнесем все отрицательные числа, нуль и числа $\frac{1}{a'}$, а ко второму классу — остальные числа. Пусть некоторое положительное число c_1 принадлежит первому классу нового сечения. Это значит, что $c_1 = \frac{1}{a_1'}$, где a_1' — из $\mathrm{II}(\alpha)$. Возьмем любое положительное рациональное число $c_2 < c_1$. Его можно представить в виде $c_2 = \frac{1}{a_2'}$, где a_2' — рационально и $a_2' > a_1'$, т. е. a_2' также принадлежит $\mathrm{II}(\alpha)$. Иначе говоря, если некоторое положительное число принадлежит первому классу нового сечения, то всякое меньшее рациональное положительное число также принадлежит этому первому классу. Туда же входят по условию все отрицательные числа и нуль. Отсюда видно, что сечение, определяющее число, обратное α, произведено нами с соблюдением того основного условия, что любое число второго класса больше любого числа первого класса. Это число, обратное α, обозначим символом $\frac{1}{\alpha}$.

Если $\alpha < 0$, то мы определим обратное число формулой $\frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{|\alpha|}$. Пользуясь определением умножения, получим $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1$.

Переходим теперь к делению. Это есть действие, обратное умножению, т. е. $\alpha : \beta = x$ равносильно $x\beta = \alpha$, и, как при вычитании, нетрудно

показать, что если $\beta \neq 0$, то получается единственное частное: $x = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$, и, таким образом, деление сводится к умножению. Деление на нуль невозможно.

Возведение в целую положительную степень сводится к умножению. Извлечение корня определяется как действие, обратное возведению в степень. Пусть α — вещественное положительное число и n — некоторое целое, большее единицы. Произведем следующее сечение рациональных чисел: к первому классу отнесем все отрицательные числа, нуль и все положительные числа, n-е степени которых меньше α, а ко второму классу — остальные числа. Пользуясь определением умножения, нетрудно показать, что положительное число β, определяемое этим сечением, удовлетворяет условию: $\beta^n = \alpha$, т. е. β является арифметическим значением корня $\sqrt[n]{\alpha}$. Если n — четное, то вторым значением будет $(-\beta)$. Аналогично определяется корень нечетной степени из вещественного отрицательного числа (один ответ). Более подробно о показательной функции будет сказано потом. Отметим еще следующий важный результат: *раз справедливы основные законы действий, то тем самым будут справедливы и все правила и тождества алгебры, если под буквами разуметь вещественные числа.*

42. Точные границы числовых множеств. Признаки существования предела. Докажем теперь теорему о точных границах множества вещественных чисел, которую мы формулировали в [39].

Теорема. *Если множество E вещественных чисел ограничено сверху, то оно имеет точную верхнюю границу, и если E ограничено снизу, то оно имеет точную нижнюю границу.*

Ограничимся доказательством первой части теоремы. По условию все числа из E меньше некоторого числа M. Произведем сечение вещественных чисел следующим образом: ко второму классу отнесем все числа, большие всех чисел из E, а к первому — остальные вещественные числа. Во второй класс попадут, например, все числа $(M + p)$, где $p \geqslant 0$, а в первый класс попадут, например, все числа из E. Пусть β — вещественное число, определенное произведенным сечением. По основной теореме [40] оно будет наибольшим в первом классе или наименьшим во втором. Покажем, что β и есть точная верхняя граница E. Во-первых, среди E нет чисел, бóльших β, ибо, все числа E попали в первый класс. Далее, наверно существуют числа E, бóльшие $(\beta - \epsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$, ибо если бы таких чисел не было, то число $\left(\beta - \frac{\varepsilon}{2}\right)$ было бы больше всех чисел E и должно было бы попасть во второй класс, а в действительности оно

меньше β и находится в первом классе. Теорема, таким образом, доказана. Очевидно, что если β принадлежит E, то оно будет наибольшим из чисел E.

Докажем теперь существование предела у монотонной ограниченной переменной [30]. Итак, пусть переменная x все время возрастает или, по крайней мере, не убывает, т. е. всякое ее значение не меньше любого предыдущего. Пусть, корме того, x ограничено, т. е. существует такое число M, что все значения x меньше M. Рассмотрим совокупность всех значений x. По доказанной теореме существует точная верхняя граница β для этой совокупности. Покажем, что β и есть предел x. Пусть ε — произвольное положительное число. По определению точной верхней границы найдется значение x, большее $(\beta - \epsilon)$. Тогда, в силу монотонности, и все последующие значения x будут больше $(\beta - \varepsilon)$, но, с другой стороны, они не могут быть больше β, и, в силу произвольности ε, мы видим, что $\beta = \lim x$. Точно так же можно разобрать и случай убывающей переменной.

Прежде чем переходить к доказательству признака Коши [31], докажем одну теорему, которой мы будем пользоваться.

Теорема. *Пусть имеется последовательность конечных промежуков*

$$(a_1,\ b_1),\ (a_2,\ b_2),\ \ldots,\ (a_n,\ b_n),\ \ldots$$

причем каждый следующий промежуток заключается в предыдущем, т. е. $a_{n+1} \geqslant a_n$, *и* $b_{n+1} \leqslant b_n$, *и пусть длины этих промежутков стремятся к нулю,* т. е. $(b_n - a_n) \to 0$. *При этом концы промежутков* a_n *и* b_n *стремятся к общему пределу при возрастании* n.

По условию теоремы мы имеем $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots$ и, кроме того, $a_n < b_1$ при любом n. Таким образом, последовательность $a_1,\ a_2,\ \ldots$ будет монотонной и ограниченной, а потому будет иметь предел: $a_n \to a$. Из условия $(b_n - a_n) \to 0$ вытекает $b_n = a_n + \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n \to 0$, и, следовательно, b_n имеет предел, также равный a.

Перейдем теперь к доказательству признака Коши. Ограничимся случаем переменной, значения которой можно пронумеровать:

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots \tag{27}$$

Надо доказать, что необходимое и достаточное условие существования предела последовательности (27) заключается в следующем: для любого заданного положительного ε существует такой значок N, что

$$|x_m - x_n| < \varepsilon \quad \text{при} \quad m \text{ и } n > N. \tag{28}$$

Покажем, что это условие достаточно, т. е. что при выполнении этого условия последовательность (27) имеет предел. Из наших прежних рассуждений [31] вытекает, что если условие выполнено, то можно построить последовательность промежутков

$$(a_1,\ b_1),\ (a_2,\ b_2),\ \ldots,\ (a_k,\ b_k),\ \ldots$$

со следующими свойствами: каждый следующий заключается в предыдущем, длины $(b_k - a_k)$ стремятся к нулю и всякому интервалу $(a_k,\ b_k)$ соответствует такое целое положительное число N_k, что все x_s при $s > N_k$ принадлежат $(a_k,\ b_k)$. Эти интервалы $(a_k,\ b_k)$ суть отрезки $A'_k A_k$ из [31]. По доказанной выше теореме имеется общий предел:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = a. \tag{29}$$

Покажем, что a и есть предел последовательности (27). Пусть задано положительное число ε. В силу (29) существует такое целое положительное l, что промежуток $(a_l,\ b_l)$ и все следующие промежутки лежат внутри промежутка $(a - \epsilon,\ a + \varepsilon)$.

Отсюда следует, что и все числа x_s при $s > N_l$ принадлежат этому же промежутку, т. е. $|a - x_s| < \varepsilon$ при $s > N_l$. Ввиду произвольности ε мы видим, что a есть предел последовательности (27), и достаточность условия (28) доказана. Необходимость этого условия была доказана нами раньше [31]. Доказательство остается в силе и для не пронумерованной переменной.

43. Свойства непрерывных функций. Переходя к доказательству формулированных раньше [35] свойств непрерывных функций, начнем с доказательства вспомогательной теоремы.

Теорема I. *Если $f(x)$ непрерывна в промежутке $(a,\ b)$ и задано какое-нибудь положительное число ε, то этот промежуток можно таким образом разбить на конечное число новых промежутков, что $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$, если только x_1 и x_2 принадлежат одному и тому же новому промежутку.*

Будем доказывать от обратного. Предположим, что теорема несправедлива и придем к нелепости. Итак, пусть невозможно разбить $(a,\ b)$ на части указанным образом. Делим наш промежуток средней точкой на два промежутка: $\left(a,\ \frac{a+b}{2}\right)$ и $\left(\frac{a+b}{2},\ b\right)$. Если бы теорема была справедлива для каждого из этих двух промежутков, то она, очевидно, была бы справедлива и для всего промежутка $(a,\ b)$. Итак, мы должны считать, что по крайней мере один из двух полученных промежутков нельзя

разбить на части указанным в теореме образом. Берем ту половину промежутка, для которой теорема не выполняется, и делим его опять на две равные части. Как и выше, по крайней мере для одной из новых половинок теорема не выполняется. Берем эту половинку, делим ее опять пополам и т. д. Таким образом, мы получаем последовательность промежутков.

$$(a,\ b),\ (a_1,\ b_1),\ (a_2,\ b_2),\ \ldots,\ (a_n,\ b_n),\ \ldots,$$

из которых каждый следующий есть половина предыдущего, так что длина $(b_n - a_n)$, равная $\frac{b-a}{2^n}$, стремится к нулю при возрастании n. Кроме того, для всякого промежутка $(a_n,\ b_n)$ теорема не выполняется, т. е. нельзя никакой $(a_n,\ b_n)$ разбить на новые промежутки так, чтобы $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$, если только x_1 и x_2 принадлежат одному и тому же новому промежутку. Покажем, что это нелепо.

По теореме из [42] a_n и b_n имеют общий предел:

$$\lim a_n = \lim b_n = \alpha, \tag{30}$$

причем этот предел, как и все числа a_n и b_n, принадлежит промежутку $(a,\ b)$. Положим сначала, что α — внутри $(a,\ b)$. По условию, $f(x)$ непрерывна при $x = \alpha$, и, следовательно [34], при заданном в теореме ε существует такое η, что для всех x из промежутка $(\alpha - \eta,\ \alpha + \eta)$ выполняется неравенство

$$|f(\alpha) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{31}$$

Если x_1 и x_2 — два любых значения из промежутка $(\alpha - \eta,\ \alpha + \eta)$, то мы имеем

$$f(x_2) - f(x_1) = f(x_2) - f(\alpha) + f(\alpha) - f(x_1),$$

откуда

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant |f(x_2) - f(\alpha)| + |f(\alpha) - f(x_1)|,$$

и, в силу (31),

$$|f(x_2) - f(x_1)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2},$$

т. е.

$$|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon \tag{32}$$

для любых x_1 и x_2 из промежутка $(\alpha - \eta,\ \alpha + \eta)$. Но, в силу (30), будет существовать промежуток $(a_l,\ b_l)$ принадлежащий промежутку $(\alpha - \eta,\ \alpha + \eta)$. Поэтому неравенство (32) и подавно будет выполняться для любых x_1 и x_2 из этого промежутка $(a_l,\ b_l)$, т. е. для промежутка $(a_l,\ b_l)$ теорема выполняется даже без всякого его подразделения на части. Это противоречит тому, что, как мы видели выше, для всякого промежутка

$(a_n,\ b_n)$ теорема не выполняется. Таким образом, теорема доказана, если α — *внутри промежутка* $(a,\ b)$. Если α совпадает, например, с левым концом промежутка, т. е. $\alpha = a$, то доказательство будет таким же, но вместо промежутка $(\alpha-\eta,\ \alpha+\eta)$ надо будет взять промежуток $(\alpha,\ \alpha+\eta)$.

Перейдем теперь к доказательству третьего свойства из [35].

Теорема II. *Если $f(x)$ непрерывна в промежутке $(a,\ b)$, то она равномерно непрерывна в этом промежутке, т. е. при любом заданном положительном ε существует такое положительное η, что $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$ для любых значений x' и x'' из $(a,\ b)$, удовлетворяющих неравенству $|x'' - x'| < \eta$.*

В силу теоремы I мы можем подразделить $(a,\ b)$ на конечное число новых промежутков так, чтобы $|f(x_2) - f(x_1)| < \frac{\varepsilon}{2}$, если только x_1 и x_2 принадлежат одному и тому же новому промежутку. Пусть η — длина самого короткого из новых промежутков. Покажем, что именно при этом числе η наша теорема выполняется. Действительно, если x' и x'' — два значения из (a, b) удовлетворяющих неравенству $|x'' - x'| < \eta$, то или x' и x'' принадлежат одному и тому же новому промежутку, или они находятся в двух прилегающих друг к другу новых промежутках. В первом случае, по построению новых промежутков, имеем: $|f(x'') - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}$, а потому и подавно $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$. Переходя ко второму случаю, обозначим через γ точку, в которой соприкасаются те два прилегающих друг к другу промежутка, к которым принадлежат x' и x''. В данном случае мы можем написать

$$f(x'') - f(x') = f(x'') - f(\gamma) + f(\gamma) - f(x'),$$

т. е.

$$|f(x'') - f(x')| \leqslant |f(x'') - f(\gamma)| + |f(\gamma) - f(x')|. \tag{33}$$

Но

$$|f(x'') - f(\gamma)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad |f(\gamma) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{34}$$

так как точки x'' и γ, а также γ и x' находятся в одном и том же новом промежутке. Неравенства (33) и (34) дают нам $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$, и теорема доказана.

Теорема I приводит нас также к такому следствию:

Следствие. *Функция, непрерывная в промежутке $(a,\ b)$, ограничена сверху и снизу, т. е. просто ограничена в этом промежутке.* Иными словами, существует такое число M, что для всех значений x из $(a,\ b)$ выполняется неравенство $|f(x)| < M$. Действительно, возьмем некоторое определенное $\varepsilon_0 > 0$, и пусть n_0 — число тех новых промежутков, на которые надо разбить $(a,\ b)$, чтобы удовлетворить теореме I при

взятом значении $\varepsilon = \varepsilon_0$. Для любых двух точек, принадлежащих одному и тому же новому промежутку, мы имеем $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon_0$. Отсюда непосредственно следует, что для любого x из промежутка $(a,\ b)$ мы имеем $|f(x) - f(a)| < n_0\varepsilon_0$, т. е. все значения $f(x)$ заключаются между $f(a) - n_0\varepsilon_0$ и $f(a) + n_0\varepsilon_0$.

Поскольку совокупность всех значений $f(x)$ в промежутке $(a,\ b)$ ограничена сверху и снизу, она имеет точную верхнюю границу и точную нижнюю границу [42]. Обозначим первую через β, а вторую через α. Докажем теперь первое свойство из [35].

Теорема III. *Непрерывная в промежутке $(a,\ b)$ функция достигает в этом промежутке своего наибольшего и наименьшего значения.*

Нам надо доказать, что в промежутке $(a,\ b)$ существует такое значение x, при котором $f(x)$ равно β, и такое значение x, при котором $f(x)$ равно α. Ограничимся доказательством первого утверждения и будем доказывать от обратного. Положим, что $f(x)$ ни при каком x из $(a,\ b)$ не равно β (следовательно, всегда меньше β). Составим новую функцию

$$\varphi(x) = \frac{1}{\beta} - f(x).$$

Поскольку знаменатель не обращается в нуль, новая функция также будет непрерывной в промежутке $(a,\ b)$ [34]. С другой стороны, из определения точной верхней границы следует, что при произвольном $\varepsilon > 0$ существуют для $a \leqslant x \leqslant b$ значения $f(x)$, лежащие между $(\beta - \varepsilon)$ и β. При этом: $0 < \beta - f(x) < \varepsilon$ и $\varphi(x) > \frac{1}{\varepsilon}$. Поскольку ε можно брать произвольно малым, мы видим, что непрерывная в промежутке $(a,\ b)$ функция $\varphi(x)$ не ограничена сверху, что противоречит указанному выше следствию теоремы I.

Докажем, наконец, второе свойство из [35]. Пусть $f(x)$ непрерывна в $(a,\ b)$ и k — некоторое число, лежащее между $f(a)$ и $f(b)$. Для определенности положим, что $f(a) < k < f(b)$. Составим новую функцию

$$E(x) = f(x) - k,$$

непрерывную в промежутке $(a,\ b)$. Ее значения на концах промежутка будут

$$F(a) = f(a) - k < 0, \quad F(b) = f(b) - k > 0,$$

т. е. значения $F(x)$ на концах промежутка — разных знаков. Если мы докажем, что внутри $(a,\ b)$ есть такое значение x_0, при котором $F(x_0) = 0$, то при этом $f(x_0) - k = 0$, т. е. $f(x_0) = k$, и второе свойство будет доказано. Итак, достаточно доказать следующую теорему:

Теорема IV. *Если $f(x)$ непрерывна в промежутке $(a,\ b)$, а $f(a)$ и $f(b)$ разных знаков, то внутри промежутка существует по крайней мере одно такое значение x_0, при котором $f(x_0) = 0$.*

Доказываем от обратного, как и теорему III. Пусть $f(x)$ нигде в промежутке $(a,\ b)$ не обращается в нуль. При этом новая функция

$$\varphi(x) = \frac{1}{f(x)} \tag{35}$$

будет также непрерывной в промежутке $(a,\ b)$ [34]. Пусть задано какое-нибудь $\varepsilon > 0$. В силу теоремы I мы можем расставить внутри промежутка $(a,\ b)$ конечное число точек так, что, причисляя к этим точкам еще концы промежутка, мы будем иметь разность значений $f(x)$ в любых двух соседних расставленных точках, по абсолютной величине меньшую, чем ε. Принимая во внимание, что $f(a)$ и $f(b)$ разных знаков, мы можем утверждать, что найдутся такие две соседние из вышеупомянутых точек ξ_1 и ξ_2, в которых $f(x)$ разных знаков. Итак, с одной стороны, $f(\xi_1)$ и $f(\xi_2)$ разных знаков и, с другой стороны, $|f(\xi_2) - f(\xi_1)| < \varepsilon$. Но если у двух вещественных чисел разных знаков абсолютное значение разности меньше ε, то каждое из этих чисел по абсолютному значению меньше ε, т. е. например, $|f(\xi_1)| < \varepsilon$. Но тогда, в силу (35), $|\varphi(\xi_1)| > \frac{1}{\varepsilon}$, и ввиду того, что ε можно брать произвольно малым, мы видим, что непрерывная в промежутке $(a,\ b)$ функция $\varphi(x)$ — не ограничена в этом промежутке, что нелепо. Теорема, таким образом, доказана.

44. Непрерывность элементарных функций. Мы показали раньше непрерывность многочлена и рациональной функции [34]. Рассмотрим теперь показательную функцию

$$y = a^x \quad (a > 0), \tag{36}$$

причем для определенности будем считать $a > 1$. Эта функция вполне определена при всех рациональных положительных значениях x. Для отрицательных x она определяется формулой:

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}}, \tag{37}$$

и, кроме того, $a^0 = 1$. Таким образом, она определена при всех рациональных x. Из алгебры известны также правила сложения и вычитания показателей при умножении и делении.

Если x есть положительное рациональное число $\frac{p}{q}$, то

$$a^x = \sqrt[q]{a^p},$$

где радикал считается арифметическим. Очевидно, что $a^p > 1$, и из определения корня вытекает, что $a^x > 1$ при $x > 0$ (применить определения из [41]). Из (37) вытекает, что $0 < a^x < 1$ при $x < 0$. Покажем, теперь, что $a^{x_2} > a^{x_1}$, если $x_2 > x_1$, т. е. что a^x — возрастающая функция. Действительно,

$$a^{x_2} - a^{x_1} = a^{x_1}(a^{x_2 - x_1} - 1),$$

причем $x_2 - x_1 > 0$, и, следовательно, оба сомножителя справа положительны. Покажем еще, что $a^x \to 1$, если $x \to 0$, принимая рациональные значения. Положим сначала, что $x \to 0$ через все рациональные значения, убывая (справа). При этом a^x убывает, но остается больше единицы, и, следовательно, имеет предел, который мы обозначим через l. При упомянутом выше изменении x переменная $2x$ также стремится справа к нулю по всем рациональным значениям. Мы имеем, очевидно,

$$a^{2x} = (a^x)^2,$$

и, переходя к пределу, получим

$$l = l^2 \quad \text{или} \quad l(l-1) = 0,$$

т. е. $l = 1$ или $l = 0$. Но вторая возможность отпадает ввиду $a^x > 1$. Итак, $a^x \to 1$, если $x \to 0$ справа. Из (37) вытекает, что тот же предел будет и тогда, когда $x \to 0$ слева. Итак, вообще: $a^x \to 1$, если $x \to 0$, принимая рациональные значения. Отсюда вытекает непосредственно, что если x, принимая рациональные значения, стремится к рациональному пределу b, то $a^x \to a^b$. Действительно,

$$a^x - a^b = a^b(a^{x-b} - 1).$$

Разность $(x - b)$ стремится к нулю и $(a^{x-b} - 1)$, по доказанному, также стремится к нулю.

Определим теперь функцию (36) при иррациональных x. Пусть α — некоторое иррациональное число, а $\mathrm{I}(\alpha)$ и $\mathrm{II}(\alpha)$ — первый и второй классы сечения в области рациональных чисел, определяющих α. Положим, что $x \to \alpha$, возрастая и проходя через все рациональные числа из $\mathrm{I}(\alpha)$. Переменная a^x возрастает, но остается ограниченной, а именно она меньше, чем $a^{x''}$, где x'' — любое число из $\mathrm{II}(\alpha)$. Таким образом, при упомянутом изменении x переменная a^x имеет предел, который мы пока

обозначим через L. Точно так же, если $x \to \alpha$, убывая и пробегая рациональные числа из $\mathrm{II}\,(\alpha)$, то a^x также имеет предел. Покажем, что этот предел также равен L. Пусть x' — из $\mathrm{I}\,(\alpha)$ и x'' — из $\mathrm{II}\,(\alpha)$. Мы имеем

$$a^{x''} - a^{x'} = a^{x'}(a^{x''-x'} - 1) < L(a^{x''-x'} - 1),$$

т. е.

$$0 < a^{x''} - a^{x'} < L(a^{x''-x'} - 1).$$

Для x' и x'', близких к α, разность $(x'' - x')$ сколько угодно близка к нулю и, в силу написанного неравенства, то же можно сказать и о разности $(a^{x''} - a^{x'})$, откуда и вытекает наше утверждение о совпадении пределов. Мы принимаем по определению a^α равным упомянутому пределу L, т. е. *a^α есть предел, к которому стремится a^x, когда $x \to \alpha$ через рациональные значения.* Теперь функция (36) определена при всех вещественных x. На основании сказанного выше легко доказать, что это будет возрастающая функция, т. е. $a^{x_2} > a^{x_1}$, если x_1 и x_2 — любые *вещественные числа,* удовлетворяющие неравенству $x_2 > x_1$. При доказательстве надо рассмотреть отдельно случаи, когда x_1 и x_2 — оба иррациональны или одно из них рационально. Остается еще доказать, что эта функция будет непрерывна при всяком вещественном x. Сначала надо показать, что $a^x \to 1$ при $x \to 0$, причем считаются допустимыми все вещественные значения x. Это можно показать совершенно так же, как выше это было сделано для рациональных x. Далее, как и выше, пользуясь формулой

$$a^x - a^\alpha = a^\alpha(a^{x-\alpha} - 1),$$

мы можем показать, что $a^x \to a^\alpha$ при $x \to \alpha$, что и дает непрерывность a^x при любом вещественном x.

Нетрудно проверить, что все основные свойства показательной функции справедливы при любых вещественных показателях. Пусть, например, α и β — два иррациональных числа и пусть $x \to \alpha$ и $y \to \beta$, причем переменные x и y, меняясь, одновременно принимают рациональные значения. Для рациональных показателей мы имеем

$$a^x a^y = a^{x+y}.$$

Переходя к пределу и пользуясь доказанной непрерывностью показательной функции, получим то же свойство для иррациональных показателей:

$$a^\alpha a^\beta = a^{\alpha+\beta}.$$

Докажем еще правило перемножения показателей при возвышении степени в степень:

$$(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}.$$

Если $\beta = n$ есть целое положительное, то написанная формула непосредственно вытекает из правила сложения показателей при умножении. Если $\beta = \frac{p}{q}$ есть рациональное положительное число, то

$$(a^\alpha)^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(a^\alpha)^p} = \sqrt[q]{(a^\alpha)^p} = a^{\alpha\frac{p}{q}}.$$

Для рациональных отрицательных чисел указанное правило непосредственно вытекает из формулы (37). Положим теперь, что β иррационально, и пусть рациональные числа r стремятся к β. Мы имеем, по доказанному выше,

$$(a^\alpha)^r = a^{\alpha r}.$$

Переходя к пределу и пользуясь непрерывностью показательной функции, причем слева принимаем a^α за основание, мы и получим $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$.

Прежде чем переходить к логарифмической функции, сделаем некоторые замечания об обратных функциях, о чем мы уже говорили коротко во введении [20]. Если $y = f(x)$ — возрастающая непрерывная функция в промежутке $(a,\ b)$, причем $f(a) = A$ и $f(b) = B$, то, в силу второго свойства непрерывных функций, при возрастании x от a до b через все вещественные значения $f(x)$ будет возрастать от A до B, проходя через все промежуточные значения. Таким образом, всякому, значению y из промежутка $(A,\ B)$ будет соответствовать определенное x из $(a,\ b)$, и обратная функция $x = \varphi(y)$ будет однозначной и возрастающей. Если $x = x_0$ находится внутри $(a,\ b)$, $y_0 = f(x_0)$ и x пробегает малый промежуток $(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)$, то y будет пробегать некоторый промежуток $(y_0 - \eta_1,\ y_0 + \eta_2)$. Обозначая через δ наименьшее из двух положительных чисел η_1 и η_2, мы можем утверждать, что если y принадлежит промежутку $(y_0 - \delta,\ y_0 + \delta)$, составляющему лишь часть промежутка $(y_0 - \eta_1,\ y_0 + \eta_2)$, то соответствующие значения x тем более принадлежат прежнему промежутку $(x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon)$, т. е. $|\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon$, если только $|y - y_0| < \delta$. Ввиду произвольности ε это дает нам непрерывность функции $x = \varphi(y)$ в точке $y = y_0$. Если x_0 совпадает, например, с концом a, то в предыдущих рассуждениях вместо $(x_0 - \epsilon,\ x_0 + \varepsilon)$ надо взять промежуток $(x_0,\ x_0 + \varepsilon)$. Аналогично можно разобрать случай убывающей непрерывной функции $f(x)$.

Вернемся к функции (36). Раз $a > 1$, то $a = 1+b$, где $b > 0$, и формула бинома Ньютона дает при целом положительном $n > 1$:

$$a^n = (1+b)^n > 1 + nb,^*$$

откуда видно, что a^x беспредельно возрастает при беспредельном возрастании x. Далее, из (37) следует, что $a^x \to 0$ при $x \to -\infty$. Принимая во внимание сказанное выше об обратных функциях, можем утверждать, что функция

$$x = \log_a y, \tag{38}$$

обратная (36), будет однозначной, возрастающей непрерывной функцией при $y > 0$. Такие же результаты получаются и для случая $0 < a < 1$, но только функции (36) и (38) будут убывающими.

Введем теперь новое понятие о *сложной функции*. Пусть $y = f(x)$ есть функция, непрерывная в промежутке $a \leqslant x \leqslant b$, причем ее значения принадлежат промежутку $(c,\ d)$. Пусть, далее, $z = F(y)$ есть функция, непрерывная в промежутке $c \leqslant y \leqslant d$. Понимая под y указанную выше функцию от x, мы получим сложную функцию от x:

$$z = F(y) = F(f(x)).$$

Говорят, что эта функция зависит от x через посредство y. Она определена в промежутке $a \leqslant x \leqslant b$. Нетрудно видеть, что она будет и непрерывной в этом промежутке. Действительно, бесконечно малому приращению x соответствует бесконечно малое приращение y в силу непрерывности $f(x)$, а бесконечно малому приращению y соответствует бесконечно малое приращение z в силу непрерывности $F(y)$.

Рассмотрим теперь степенную функцию

$$z = x^b \tag{39}$$

с любым вещественным показателем b, причем переменную x мы считаем положительной. Из рассуждений с показательной функцией непосредственно следует, что функция (39) имеет определенное значение при всяком $x > 0$. Пользуясь определением логарифма и применяя, например, натуральные логарифмы, мы можем написать вместо (39):

$$z = e^{b \log x}.$$

---

* Формула бинома Ньютона $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$, где C_n^k — число сочетаний из n по k. В случае $(1+b)^n$, $b > 0$, оценка получается отбрасыванием всех слагаемых из разложения в бином Ньютона, кроме первых двух, при этом учитывается, что все слагаемые положительны.

Полагая $y = b \log x$ и $z = e^{\nu}$, мы можем рассматривать эту функцию как сложную функцию от x, и непрерывность показательной и логарифмической функций докажет нам непрерывность функции (39) при всяком $x > 0$.

Мы доказали выше [34] непрерывность функции $\sin x$ при всех значениях x. Так же доказывается непрерывность функции $\cos x$ при всех x. Из формул

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

непосредственно следует [34] непрерывность $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ при всех x, кроме тех, при которых знаменатель обращается в нуль.

Функция $y = \sin x$ есть непрерывная возрастающая функция в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Пользуясь сказанным выше об обратных функциях, можем утверждать, что главное значение функции $x = \arcsin y$ будет непрерывной возрастающей функцией в промежутке $-1 \leqslant y \leqslant 1$. Аналогично доказывается непрерывность и остальных обратных круговых функций.

ГЛАВА II

ПОНЯТИЕ О ПРОИЗВОДНОЙ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 3. ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

45. Понятие о производной. Рассмотрим движущуюся по направлению прямой линии точку. Пройденный ею путь s, отсчитываемый от определенной точки прямой, есть, очевидно, функция времени t:

$$s = f(x),$$

так что всякому определенному моменту времени t соответствует определенное значение s. Придадим t приращение Δt, и тогда новому моменту времени $t + \Delta t$ будет соответствовать путь $s + \Delta s$. В случае равномерного движения, приращение пути пропорционально приращению времени, и в этом случае отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ выражает постоянную скорость движения. В общем случае это отношение зависит как от выбранного момента времени t, так и от приращения Δt и выражает *среднюю скорость* движения за промежуток времени от t до $t + \Delta t$. Эта средняя скорость есть скорость воображаемой точки, которая, двигаясь равномерно, за промежуток времени Δt проходит путь Δs. Например, в случае равномерно ускоренного

движения мы будем иметь

$$s = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t^*$$

и

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2 + v_0(t+\Delta t) - \frac{1}{2}gt^2 - v_0 t}{\Delta t} = gt + v_0 + \frac{1}{2}g\Delta t.$$

Чем меньше промежуток времени Δt, тем с большим правом мы можем считать движение рассматриваемой точки за этот промежуток времени равномерным, и предел отношения $\frac{\Delta s}{\Delta t}$, при стремлении Δt к нулю, определяет *скорость v в данный момент t*:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Так, в случае равномерно ускоренного движения

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(gt + v_0 + \frac{1}{2}\, g\Delta t\right) = gt + v_0.$$

Скорость v есть так же, как и путь s, функция от t; функция эта называется *производной* функции $f(t)$ по t; таким образом, *скорость есть производная от пути по времени.*

Положим, что некоторое вещество вступает в химическую реакцию. Количество этого вещества x, вступившее уже в реакцию к моменту времени t, есть функция от t. Приращению времени Δt будет соответствовать приращение Δx величины x, и отношение $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ выражает *среднюю скорость химической реакции* за промежуток времени Δt, а предел этого отношения, при стремлении Δt к нулю, выражает *скорость химической реакции в данный момент времени t.*

Отвлечемся теперь от примеров и дадим общее определение производной. Положим, что функция $y = f(x)$ определена при некотором фиксированном значении x и при всех значениях к нему достаточно близких, т. е. при всех значениях вида $x + h$, где h — любое

*Здесь g — постоянное ускорение, v_0 — начальная скорость движения в момент $t = 0$.

положительное или отрицательное число достаточно малое по абсолютному значению. Величину h называют обычно приращением независимой переменной x. Вместо h пишут часто Δx. Соответствующее приращение функции будет: $\Delta y = f(x+h) - f(x)$. Составим отношение этих приращений:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{1}$$

Это отношение определено при всех значениях h, достаточно малых по абсолютной величине, т. е. в некотором промежутке $-k \leqslant h \leqslant +k$ кроме $h = 0$. Поскольку x фиксировано, отношение (1) является функцией только от h.

Определение. *Если отношение* (1) *имеет предел (конечный) при стремлении h к нулю* ($h \to \pm 0$), *то этот предел называется производной функции $f(x)$ при заданном x.*

Иначе говоря, производной данной функции $f(x)$ при заданном значении x называется предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ приращения Δy функции к соответствующему приращению Δx независимого переменного, когда это последнее стремится к нулю ($\Delta x \to \pm 0$), если упомянутый предел существует. Для обозначения производной пишут y', или $f'(x)$:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to \pm 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Операция нахождения производной называется *дифференцированием функции.*

Дробь (1) при $h \to \pm 0$ может и не иметь предела, и тогда производная при заданном значении x не существует. Существование предела $f'(x)$ равносильно следующему [32]: *при любом заданном числе $\varepsilon > 0$ существует такое число $\eta > 0$, что*

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) \right| < \varepsilon, \quad \text{если } |h| < \eta \quad \text{и } h \neq 0.$$

Предполагая, что производная существует, можем написать

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) + \beta,^*$$

где $\beta \to 0$ при $h \to \pm 0$. Далее, имеем

$$f(x+h) - f(x) = [f'(x) + \beta]h,$$

откуда следует, что $f(x+h) - f(x) \to 0$ при $h \to \pm 0$, т. е. *если при некотором значении x производная $f'(x)$ существует, то при этом значении x функция $f(x)$ непрерывна.* Обратное утверждение неправильно, при непрерывности функции при заданном x еще нельзя утверждать, что при этом значении x существует производная.

Обратим внимание на то, что при отыскании производной у непрерывной функции мы имеем дробь (1), у которой и числитель и знаменатель стремится к нулю, причем знаменатель h в нуль не обращается. Отметим один частный случай. Если $y = cx$, то числитель дроби есть $c(x+h) - cx = ch$, а вся дробь равна c, т. е. не зависит от h. Ее предел при $h \to \pm 0$ также равен c.

При фиксированном x значения $f(x)$ и $f'(x)$ суть числа. Если функция и производная существует при всех x внутри некоторого промежутка, то $f'(x)$ является функцией от x внутри этого промежутка. В рассмотренном выше случае $f(x) = cx$ производная $f'(x)$ равна числу c при всех x.

46. Геометрическое значение производной. Для выяснения геометрического значения производной обратимся к графику функции $y = f(x)$. Возьмем на нем точку M с координатами $(x,\ y)$ и близкую к ней, тоже лежащую на кривой, точку N с координатами $(x + \Delta x,\ y + \Delta y)$. Проведем ординаты $\overline{M_1M}$ и $\overline{N_1N}$ этих точек и из точки M проведем прямую, параллельную оси OX. Мы будем иметь (рис. 50):

$$\overline{MP} = \overline{M_1N_1} = \Delta x,\ \overline{M_1M} = y,\ \overline{N_1N} = y + \Delta y,\ \overline{PN} = \Delta y. \qquad (2)$$

Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ равно, очевидно, тангенсу угла α_1, образованного секущей MN с положительным направлением оси OX. При стремлении Δx к нулю точка N будет, оставаясь на кривой, стремиться к точке M; предельным положением секущей MN будет *касательная MT* к кривой в точке M, и, следовательно, производная *$f'(x)$ равна тангенсу угла α, образованного касательной к кривой*

в точке $M(x,\ y)$ с положительным направлением к оси OX, т. е. *равна угловому коэффициенту этой касательной.*

При вычислении отрезков по формулам (2) надо принимать во внимание правило знаков и помнить, что приращения Δx и Δy могут быть как положительными, так и отрицательными.

Точка N, лежащая на кривой, может стремиться к M с любой стороны. На рис. 50 мы придали касательной определенное направление. Если бы мы придали ей прямо противоположное направление, то это привело бы к изменению угла α на величину π и не повлияло на величину тангенса этого угла. В дальнейшем мы вернемся еще к вопросу о направлении касательной. Сейчас для нас это не существенно.

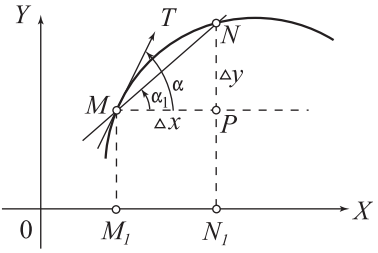

Рис. 50.

Мы видим таким образом, что существование производной связано с существованием касательной к кривой, соответствующей уравнению $y = f(x)$, причем угловой коэффициент касательной $\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$ должен быть конечным. Иными словами, касательная не должна быть параллельна оси OY. В этом последнем случае $\alpha = \frac{\pi}{2}$ или $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, и тангенс такого угла равен бесконечности.

Непрерывная кривая может в отдельных точках вовсе не иметь касательной или иметь касательную, параллельную оси OY (рис. 51), и при соответствующих значениях x функция $f(x)$ не имеет производной. Таких исключительных точек может быть сколько угодно много на кривой. Доказывается также, что существуют такие непрерывные функции, которые не имеют производной ни при одном значении x. Кривая, соответствующая такой функции, недоступна нашим геометрическим представлениям.

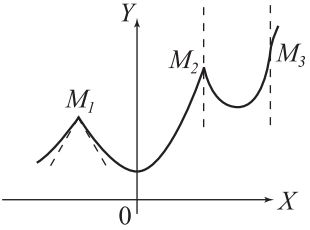

Рис. 51.

Остановимся несколько подробнее на тех случаях, которые представлены на рис. 51.

Предварительно введем понятия о производной справа и производной слева. Положим, что h стремится к нулю не произвольным образом, а со стороны отрицательных значений или со стороны положительных значений, т. е. $h \to -0$ или $h \to +0$. Если при этом отношение (1) имеет предел (конечный), то он обозначается обычно символом $f'(x-0)$ или, соответственно, $f'(x+0)$ и называется *производной слева* или, соответственно, *производной справа*. Существование производной $f'(x)$ равносильно тому, что существуют производные $f'(x-0)$ и $f'(x+0)$ и что они равны. При этом $f'(x) = f'(x-0) = f'(x+0)$.

Если существуют различные производные $f'(x-0)$ и $f'(x+0)$, то это соответствует тому случаю, когда в соответствующей точке x существуют слева и справа касательные, не параллельные оси OY (предельные положения секущей), но эти касательные различны, т. е. они не лежат на одной прямой, проходящей через точку с абсциссой x. Этот случай представлен точкой M_1 на рис. 51. В точках M_2 и M_3 отношение (1) при $h \to -0$ и $h \to +0$ стремится к бесконечности. Обратим внимание на знак этой бесконечности.

Для точек N, лежащих на кривой слева от M_2, величина $h < 0$ и $f(x+h) - f(x) < 0$ при h, достаточно близких к нулю, так как ордината слева меньше ординаты в точке M_2. Таким образом, в этом случае (1) положительно, и при $h \to -0$ оно стремится к $(+\infty)$ (касательная слева параллельна оси OY). Справа от M_2 величина $h > 0$ и по-прежнему $f(x+h) - f(x) < 0$, т. е. отношение (1) отрицательно и оно стремится к $(-\infty)$ при $h \to +0$. Переходим к точке M_3. Здесь слева $h < 0$ и $f(x+h) - f(x) < 0$, а справа $h > 0$ и $f(x+h) - f(x) > 0$, т. е. слева и справа отношение (1) положительно и оно стремится к $(+\infty)$ как при $h \to -0$, так и при $h \to +0$, т. е. в этом случае отношение (1) стремится к $(+\infty)$ при $h \to \pm 0$.

Отметим, что при определении производной мы требовали, чтобы отношение (1) стремилось к конечному пределу при $h \to \pm 0$. Если этот предел при $h \to \pm 0$ равен $(+\infty)$ или $(-\infty)$, то мы все же не говорим, что при соответствующем значении x существует производная, равная $(+\infty)$ или $(-\infty)$.

Возможны, конечно, и такие точки на кривой $y = f(x)$, в которых нет и производных $f'(x-0)$ и $f'(x+0)$. Такая кривая изображена на рис. 52. Она не имеет указанных производных при $x = c$.

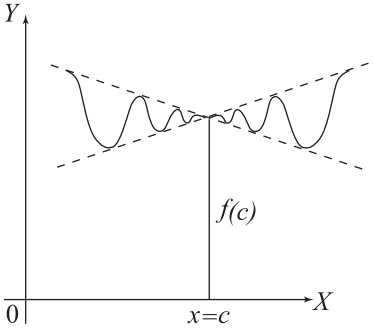

Рис. 52.

Если непрерывная функция задана только на промежутке $(a,\ b)$, то при $x = a$ мы имеем возможность образовать только правую производную $f'(a+0)$, а при $x = b$ — только левую производную $f'(b-0)$. Когда говорят, что $f(x)$ *имеет в промежутке* $(a,\ b)$ *(замкнутом) производную* $f'(x)$, то во внутренних точках промежутка эту производную надо понимать в обычном смысле, а на концах промежутка в только что указанном смысле.

Если $f(x)$ определена в промежутке $(A,\ B)$, более широком, чем $(a,\ b)$, т. е. $A < a$ и $B > b$, и имеет внутри $(A,\ B)$ обычную производную $f'(x)$, то тем более она будет производной в указанном смысле и на промежутке $(a,\ b)$.

47. Производные простейших функций. Из понятия производной следует, что *для определения производной надо составить приращение функции, разделить его на соответствующее приращение независимой переменной и найти предел этого отношения при стремлении приращения независимой переменной к нулю.* Применим это правило к некоторым простейшим функциям.

I. $y = b$ (постоянная) [12].

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{b-b}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0,$$

т. е. *производная постоянной равна нулю.*

II. $y = x^n$ (n — целое положительное число).*

*Здесь воспользовались формулой бинома Ньютона и учли, что $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Также воспоплльзовались тем, что $n! = n\cdot(n-1)! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)!$ и т. д.

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{x^n + nhx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}h^2x^{n-2} + \dots + h^n - x^n}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}hx^{n-2} + \dots + h^{n-1}\right] = nx^{n-1}.$$

В частности, если $y = x$, то $y' = 1$. В дальнейшем мы обобщим это правило дифференцирования степенной функции на любые значения показателя n.

III. $y = \sin x$.*

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \cos\left(x + \frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = \cos x,$$

так как при стремлении $\frac{h}{2}$ к нулю $\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \to 1$ [33].

IV. $y = \cos x$.

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} -\frac{2\sin\left(x + \frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h} =$$
$$= -\lim_{h\to 0} \sin\left(x + \frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = -\sin x.$$

V. $y = \log x$ $(x > 0)$.

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{x}\frac{\log\left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} = \frac{1}{x},$$

*Здесь и далее используются теоремы об арифметических действиях с пределами, рассмотренные в [28]. Соответствующие пределы существуют так как по предположению существуют производные у функций $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$.

так как при $h \to 0$ переменная $\alpha = \frac{h}{x}$ также стремится к нулю и $\frac{\log(1+\alpha)}{\alpha} \to 1$ [38].

VI. $y = cu(x)$, где c — постоянная и $u(x)$ есть функция от x.

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{cu(x+h) - cu(x)}{h} = c \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = cu'(x),$$

т. е. *производная от произведения постоянной величины на переменную равна произведению этой постоянной на производную от переменного сомножителя*, или, другими словами, *постоянный множитель можно выносить за знак производной.*

VII. $y = \log_a x$.

Как мы знаем, $\log_a x = \log x \cdot \frac{1}{\log a}$ [38]. Применяя правило VI, получим

$$y' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log a}.$$

VIII. Рассмотрим производную от суммы нескольких функций; для определенности ограничимся тремя слагаемыми:

$$\begin{aligned} y &= u(x) + v(x) + w(x), \\ y' &= \lim_{h\to 0} \frac{[u(x+h) + v(x+h) + w(x+h)] - [u(x) + v(x) + w(x)]}{h} = \\ &= \lim_{h\to 0} \left[\frac{u(x+h) - u(x)}{h} + \frac{v(x+h) - v(x)}{h} + \frac{w(x+h) - w(x)}{h}\right] = \\ &= u'(x) + v'(x) + w'(x), \end{aligned}$$

т. е. *производная суммы нескольких функций равна сумме производных этих функций.*

IX. Рассмотрим теперь производную от произведения двух функций:

$$\begin{aligned} y &= u(x) \cdot v(x), \\ y' &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h}. \end{aligned}$$

Прибавляя к числителю величину $u(x+h)v(x)$ и вычитая из него ту же величину, получим

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x+h)v(x) + u(x+h)v(x) - u(x)v(x)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} u(x+h)\frac{v(x+h)-v(x)}{h} + \lim_{h\to 0} v(x)\frac{u(x+h)-u(x)}{h} =$$
$$= u(x)v'(x) + v(x)u'(x),$$

т. е. для случая двух сомножителей мы показали, что *производная произведения равна сумме произведений производных каждого из сомножителей на остальные.*

Докажем справедливость этого правила для трех сомножителей, соединяя два сомножителя в одну группу и применяя правило к случаю двух сомножителей:

$$y = u(x)v(x)w(x),$$
$$y' = \{[u(x)v(x)]w(x)\}' = [u(x)v(x)]w'(x) + w(x)[u(x)v(x)]' =$$
$$= u(x)v(x)w'(x) + u(x)v'(x)w(x) + u'(x)v(x)w(x).$$

Применяя известный метод математической индукции, нетрудно распространить это правило на случай любого конечного числа сомножителей.

X. Пусть теперь y есть частное:

$$y = \frac{u(x)}{v(x)},$$
$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{u(x+h)}{v(x+h)} - \frac{u(x)}{v(x)}}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{v(x)v(x+h)} \frac{u(x+h)v(x) - v(x+h)u(x)}{h}.$$

Вычитая и прибавляя к числителю второй из дробей произведение $u(x)v(x)$, получим, принимая во внимание непрерывность $v(x)$:

$$y' = \lim_{h\to 0} \frac{1}{v(x)v(x+h)} \cdot \frac{u(x+h)v(x) - u(x)v(x) + u(x)v(x) - v(x+h)u(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{v(x)v(x+h)} \left[v(x)\frac{u(x+h)-u(x)}{h} - u(x)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}\right] =$$
$$= \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{[v(x)]^2},$$

т. е. *производная дроби* (частного) *равна производной числителя, умноженной на знаменатель, минус производная знаменателя, умноженная на числитель, все разделенное на квадрат знаменателя.*

XI. $y = \operatorname{tg} x$.

$$y' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

XII. $y = \operatorname{ctg} x$.

$$y' = \left(\frac{cosx}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - (\sin x)' \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

При выводе правил VI, VIII, IX и X мы предполагали, что функции $u(x)$, $v(x)$, $w(x)$ имеют производные, и доказали существование производной у функции y.

48. Производные сложных и обратных функций. Напомним понятие о сложной функции [44]. Пусть $y = f(x)$ — функция, непрерывная в некотором промежутке $a \leqslant x \leqslant b$, причем ее значения принадлежат промежутку $c \leqslant y \leqslant d$. Пусть далее, $z = F(y)$ — функция, непрерывная в промежутке $c \leqslant y \leqslant d$. Понимая под y вышеуказанную функцию от x, мы получим сложную функцию от x:

$$z = F(y) = F(f(x)).$$

Говорят, что эта функция зависит от x через посредство y. Нетрудно видеть, что эта функция будет непрерывна в промежутке $a \leqslant x \leqslant b$. Действительно, бесконечно малому приращению x соответствует бесконечно малое приращение y в силу непрерывности функции $f(x)$, а бесконечно малому приращению y соответствует бесконечно малое приращение z в силу непрерывности $f(y)$.

Прежде чем переходить к выводу правила дифференцирования сложной функции сделаем одно замечание. Если $z = F(y)$ имеет производную при $y = y_0$, то, согласно сказанному в [45], мы можем написать

$$\Delta z = F(y_0 + \Delta y) - F(y_0) = [F'(y_0) + \alpha]\Delta y, \tag{3}$$

где переменная α есть функция Δy, определенная при всех Δy, достаточно близких к нулю и отличных от нуля, причем $\alpha \to 0$, если $\Delta y \to 0$, оставаясь отличным от нуля. Равенство (3) остается справедливым для $\Delta y = 0$ при любом выборе α, ибо при $\Delta y = 0$ и $\Delta z = 0$. В силу сказанного выше естественно положить $\alpha = 0$ при $\Delta y = 0$. При таком соглашении мы можем считать, что в формуле (3) $\alpha \to 0$, если $\Delta y \to 0$ любым образом, даже и принимая значение, равное нулю. Формулируем теперь теорему о производной сложной функции.

Теорема. *Если $y = f(x)$ имеет в точке $x = x_0$ производную $f'(x_0)$ и $z = F(y)$ имеет в точке $y_0 = f(x_0)$ производную $F'(y_0)$, то сложная функция $F(f(x))$ имеет в точке $x = x_0$ производную, равную произведению $F'(y_0)f'(x_0)$.*

Пусть Δx — приращение (отличное от нуля), которое мы придаем значению x_0 независимой переменной x, и $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ — соответствующее приращение переменной y (оно может оказаться и равным нулю). Пусть, далее, $\Delta z = F(y_0 + \Delta y) - F(y_0)$. Производная от сложной функции $z = F(f(x))$ по x при $x = x_0$ равна, очевидно, пределу отношения $\frac{\Delta z}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$, если этот предел существует. Разделим обе части (3) на Δx:

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = [F'(y_0) + \alpha]\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

При стремлении Δx к нулю и $\Delta y \to 0$, в силу непрерывности функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$, а потому, как мы указали выше, $\alpha \to 0$. Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ стремится при этом к производной $f'(x_0)$, и, переходя в написанном выше равенстве к пределу, получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta x} = F'(y_0)f'(x_0),$$

что и доказывает теорему. Отметим, что непрерывность $f(x)$ при $x = x_0$ вытекает из предположенного существования производной $f'(x_0)$ [45].

Доказанная теорема может быть формулирована в виде следующего правила дифференцирования сложных функций: *производная сложной функции равна произведению производной по промежу-*

точной переменной на производную от промежуточной переменной по независимой переменной:

$$z'_x = F'(y)f'(x).^*$$

Переходим к правилу дифференцирования обратных функций. Если $y = f(x)$ непрерывна и возрастает в промежутке $(a,\ b)$ (т. е. бóльшим значением x соответствует и бóльшие y), причем $A = f(a)$ и $B = f(b)$, то, как мы знаем [21 и 44], в промежутке $(A,\ B)$ существует однозначная и непрерывная обратная, а также возрастающая функция $x = \varphi(y)$. В силу возрастания, если $\Delta x \neq 0$, то и $\Delta y \neq 0$, и наоборот, и в силу непрерывности из $\Delta x \to 0$ следует $\Delta y \to 0$, и наоборот. (Совершенно аналогично рассматривается случай убывающих функций.)

Теорема. *Если $f(x)$ имеет в точке x_0 производную $f'(x_0)$, отличную от нуля, то обратная функция $\varphi(y)$ имеет в точке $y_0 = f(x_0)$ производную*

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{4}$$

Обозначая через Δx и Δy соответствующие приращения x и y, т. е.

$$\Delta x = \varphi(y_0 + \Delta y) - \varphi(y_0),$$
$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

и принимая во внимание, что оба они отличны от нуля, можем написать:

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Как мы видели выше, Δx и Δy одновременно стремятся к нулю, и последнее равенство в пределе и приводит к (4). Доказанная теорема может быть формулирована в виде следующего правила дифференцирования обратных функций: *производная обратной функции равна единице, деленной на производную первоначальной функции в соответствующей точке.*

---

*Можно сказать, что производная сложной функции равна произведению производной внешней функции по своему аргументу на производную внутренней функции.

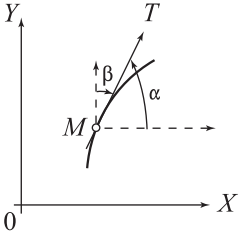

Рис. 53.

Правило дифференцирования обратных функций имеет простое геометрическое истолкование [21]. Функции $x = \varphi(y)$ и $y = f(x)$ имеют один и тот же график на плоскости XOY с той лишь разницей, что для функции $x = \varphi(y)$ ось независимой переменной есть ось OY, а не OX (рис. 53). Проводя касательную MT и вспоминая геометрическое значение производной, получим

$$f'(x) = \operatorname{tg}(OX,\ MT) = \operatorname{tg}\alpha,$$
$$\varphi'(y) = \operatorname{tg}(OY,\ MT) = \operatorname{tg}\beta,$$

причем на рис. 53 угол β, как и угол α, считается положительным. Но, очевидно, $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, и, следовательно,

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}, \quad \text{т. е.} \quad \varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Если $x = \varphi(y)$ есть функция, обратная $y = f(x)$, то, очевидно, и наоборот — функцию $y = f(x)$ можно считать обратной функции $x = \varphi(y)$.

Применим правило дифференцирования обратных функций к показательной функции.

XIII. $y = a^x \quad (a > 0)$.

Обратная функция в данном случае будет

$$x = \varphi(y) = \log_a y,$$

и, в силу VII,

$$\varphi'(y) = \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{\log a},$$

откуда по правилу дифференцирования обратных функций

$$y' = \frac{1}{\varphi'(y)} = y \log a \quad \text{или} \quad (a^x)' = a^x \log a.$$

В частном случае при $a = e$ имеем

$$(e^x)' = e^x.$$

Полученная формула, вместе с правилом дифференцирования сложных функций, даст нам возможность вычислить производную от степенной функции.

XIV. $y = x^n$ ($x > 0$; n — любое вещественное число).

Эта функция при всех $x > 0$ определена и имеет положительные значения [19].

Пользуясь определением логарифма, мы можем представить нашу функцию в виде сложной функции

$$y = x^n = e^{n \log x}.$$

Дифференцируя по правилу дифференцирования сложных функций, получим

$$y' = e^{n \log x} \frac{n}{x} = x^n \frac{n}{x} = nx^{n-1}.$$

Этот результат нетрудно обобщить и на случай отрицательных значений x, если только сама функция при этом существует, например, $y = x^{1/3} = \sqrt[3]{x}$

Применим правило дифференцирования обратных функций к нахождению производных обратных круговых функций.

XV. $y = \arcsin x$.

Мы рассматриваем главное значение [24] этой функции, т. е. ту дугу, которая находится в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2},\ +\frac{\pi}{2}\right)$. Функцию эту можно рассматривать как обратную функцию по отношению к функции $x = \sin y$ и, согласно правилу дифференцирования обратных функций, имеем

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

причем у радикала надо брать знак $(+)$, так как $\cos y$ имеет знак $(+)$ в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$. Точно так же можно получить

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

причем рассматривается главное значение $\arccos x$, т. е. та дуга, которая заключается в промежутке $(0, \pi)$.

XVI. $y = \operatorname{arc\,tg} x$.

Главное значение $\operatorname{arc\,tg} x$ заключается в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, и функцию эту можно рассматривать как обратную по отношению к функции $x = \operatorname{tg} y$; следовательно,

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Точно так же получим

$$(\operatorname{arc\,ctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

XVII. Рассмотрим еще дифференцирование функций вида:

$$y = u^v,$$

где u и v — функции от x (степенно-показательная функция).

Мы можем написать

$$y = e^{v \log u},$$

и, применяя правило дифференцирования сложных функций, получим

$$y' = e^{v \log u} \cdot (v \log u)'.$$

Применяя правило дифференцирования произведения и дифференцируя $\log u$, как сложную функцию от x, будем иметь окончательно

$$y' = e^{v \log u}\left(v' \log u + \frac{v}{u} u'\right)$$

или

$$y' = u^v\left(v' \log u + \frac{v}{u} u'\right).$$

49. Таблица производных и примеры. Приведем таблицу всех выведенных нами правил дифференцирования.

1. $(c)' = 0$.
2. $(cu)' = cu'$.

3. $(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)' = u_1' + u_2' + \ldots + u_n'$.
4. $(u_1 u_2 \ldots u_n)' = u_1' u_2 u_3 \ldots u_n + u_1 u_2' u_3 \ldots u_n + \ldots + u_1 u_2 u_3 \ldots u_n'$.
5. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.
6. $(x^n) = nx^{n-1}$ и $(x)' = 1$.
7. $(\log_a x)' = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log a}$ и $(\log x)' = \frac{1}{x}$.
8. $(e^x) = e^x$ и $(a^x)' = a^x \log a$.
9. $(\sin x)' = \cos x$.
10. $(\cos x)' = -\sin x$.
11. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
12. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
13. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
14. $(\arccos x)' = -\frac{1}{1-x^2}$.
15. $(\operatorname{arc\,tg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$.
16. $(\operatorname{arc\,ctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.
17. $(u^v)' = vu^{v-1}u' + u^v \log u v'$.
18. $y_x' = y_u' \cdot u_x'$ (y зависит от x через посредство u).
19. $x_y' = \frac{1}{y_x'}$.

Применим выведенные правила к нескольким примерам.
1. $y = x^3 - 3x^2 + 7x - 10$.
Применяя правила 3, 6 и 2, получим

$$y' = 3x^2 - 6x + 7.$$

2. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = x^{-\frac{2}{3}}$.
Применяя правило 6, получим

$$y' = -\frac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}}.$$

3. $y = \sin^2 x$.
Полагая $u = \sin x$, применим правила 18, 6 и 9:

$$y' = 2u \cdot u' = 2\sin x \cos x = \sin 2x.$$

4. $y = \sin x^2$.
Полагая $u = \sin x$, применим те же правила:

$$y' = \cos u \cdot u' = 2x\cos(x^2).$$

5. $y = \log(x + \sqrt{x^2+1})$.

Полагая сначала $u = x + \sqrt{x^2+1}$ и затем $v = x^2+1$, применим два раза правило 18, а также правила 7, 3 и 6:

$$y' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}(x+\sqrt{x^2+1})' = \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\Big[1+(\sqrt{x^2+1})'\Big] =$$
$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\Big[1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}(x^2+1)'\Big] =$$
$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\Big(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\Big) =$$
$$= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\cdot\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

6. $y = \left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$.

Положим $u = \frac{x}{2x+1}$ и применим правила 18, 6 и 5:

$$y' = n\Big(\frac{x}{2x+2}\Big)^{n-1}\Big(\frac{x}{2x+1}\Big)' = n\Big(\frac{x}{2x+1}\Big)^{n-1}\frac{2x+1-2x}{(2x+1)^2} = \frac{nx^{n-1}}{(2x+1)^{n+1}}.$$

7. $y = x^x$.

Применяя правило 17, получим

$$y' = x^{x-1}\cdot x + x^x\log x = x^x(1+\log x).$$

8. Функция y задана уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0, \tag{5}$$

как неявная функция от x. Требуется найти производную y.

Если бы мы решили данное уравнение относительно y, то получили бы $y = f(x)$, левая часть уравнения после подстановки $y = f(x)$, очевидно, обращается тождественно в нуль. Но производная от нуля как производная от постоянной равна нулю, а потому если мы продифференцируем левую часть данного уравнения по x, считая, что y есть заданная этим уравнением функция от x, то должны получить нуль:

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}y' = 0, \quad \text{откуда} \quad y' = -\frac{b^2x}{a^2y}.$$

В этом случае, как мы видим, y' выражается не только через x, но и через y, но зато нам не пришлось для отыскания производной решать уравнение (5) относительно y, т. е. находить явное выражение функции.

Как известно из аналитической геометрии, уравнению (5) соответствует эллипс, и найденное выражение y' дает угловой коэффициент касательной к этому эллипсу в точке с координатами $(x,\ y)$.

50. Понятие о дифференциале. Пусть Δx — произвольное приращение независимой переменной, которое мы считаем уже не зависящим от x. * Мы будем называть его *дифференциалом независимой переменной* и обозначить знаком Δx либо dx. Знак этот ни в коем случае не является произведением d на x, а служит лишь символом для обозначения *произвольной, не зависящей от x величины.*

Дифференциалом функции называется произведение ее производной на дифференциал независимой переменной.

Дифференциал функции $y = f(x)$ обозначают символом dy или $df(x)$:

$$dy = df(x) = f'(x)dx. \tag{6}$$

Из этой формулы естественно получается выражение производной в виде частного двух дифференциалов:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Подчеркнем, что дифференциал dx независимого переменного, входящий в определение дифференциала функции и в формулу (6), может принимать совершенно произвольные значения. Фиксируя какое-либо значение dx, мы по формуле (6) получаем соответствующее значение dy при заданном x. Если мы считаем dx приращением независимого переменного x, то надо, чтобы не только x, но и $x+dx$ принадлежали промежутку, на котором определена функция. Но и при этом дифференциал функции dy не совпадает, кроме исключительных случаев, с приращением функции, соответствующим приращению dx независимого переменного.

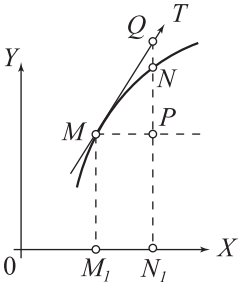

Рис. 54.

* Это означает, что все рассмотрения проводятся для фиксированной точки x.

Чтобы выяснить разницу между этими понятиями, обратимся к графику функции. Возьмем на нем некоторую точку $M(x,\ y)$ и другую точку N. Проведем касательную MT, ординаты, соответствующие точкам M и N, и прямую MP параллельно OX (рис. 54). Мы будем иметь

$$\overline{MP} = \overline{M_1N_1} = \Delta x \quad (\text{или } dx),$$
$$\overline{PN} = \Delta y \quad (\text{приращение } y),$$
$$\operatorname{tg} \angle PMQ = f'(x),$$

отсюда

$$dy = f'(x)dx = \overline{MP} \operatorname{tg} \angle PMQ = \overline{PQ}.$$

Дифференциал функции изображается отрезком $\overline{PQ}$, не совпадающим с отрезком $\overline{PN}$, который изображает приращение функции. Отрезок $\overline{PQ}$ изображает то приращение, которое получилось бы, если бы в промежутке $(x,\ x + dx)$ мы заменили отрезок $\overline{MN}$ кривой отрезком $\overline{MQ}$ касательной, т. е. если бы мы считали, что в этом промежутке приращение функции пропорционально приращению независимой переменной, и коэффициент пропорциональности взяли бы равным угловому коэффициенту касательной MT, или, что то же, равным производной $f'(x)$.

Разность между дифференциалом и приращением изображается отрезком $\overline{NQ}$. Покажем, что если $\overline{NQ}$ стремится к нулю, то разность эта есть величина бесконечно малая высшего порядка по сравнению с Δx [36].

Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ в пределе дает производную, а потому [27]

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon,$$

где ε есть величина бесконечно малая одновременно с Δx. Из этого равенства получим

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \varepsilon \Delta x$$

или

$$\Delta y = dy + \varepsilon \Delta x,$$

откуда видно, что разность между dy и Δy равна $(-\varepsilon\Delta x)$. Но отношение $(-\varepsilon\Delta x)$ к Δx, равное $(-\varepsilon)$, стремится к нулю вместе с Δx, т. е. разность между dy и Δy есть величина бесконечно малая высшего порядка по сравнению с Δx. Заметим, что знак этой разности может быть любым. На нашем чертеже и Δx и эта разность имеют знак $(+)$. *

Формула (6) дает правило нахождения дифференциала функции. Применим его к некоторым частным случаям.

I. Если c есть постоянная, то

$$dc = (c)'dx = 0 \cdot dx = 0,$$

т. е. *дифференциал постоянной равен нулю.*

II. $$d[cu(x)] = [cu(x)]'dx = cu'(x)dx = c\,du(x),$$

т. е. *постоянный множитель можно выносить за знак дифференциала.*

III. $$\begin{aligned} d[u(x)+v(x)+w(x)] &= [u(x)+v(x)+w(x)]'dx = \\ &= [u'(x)+v'(x)+w'(x)]dx = u'(x)dx + v'(x)dx + w'(x)dx = \\ &= du(x) + dv(x) + dw(x), \end{aligned}$$

т. е. *дифференциал суммы равен сумме дифференциалов слагаемых.*

IV. $$\begin{aligned} d[u(x)v(x)w(x)] &= [u(x)v(x)w(x)]'dx = \\ &= v(x)w(x)u'(x)dx + u(x)w(x)v'(x)dx + u(x)v(x)w'(x)dx = \\ &= v(x)w(x)du(x) + u(x)w(x)dv(x) + u(x)v(x)dw(x), \end{aligned}$$

т. е. *дифференциал произведения равен сумме произведений дифференциалов каждого из сомножителей на все остальные сомножители.*

Мы ограничились случаем трех сомножителей. Тот же вывод годится и для любого конечного числа сомножителей.

---

*Можно говорить, что дифференциал есть линейная по Δx часть приращения функции.

$$\text{V. } d\frac{u(x)}{v(x)} = \left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' dx = \frac{v(x)u'(x)dx - u(x)v'(x)dx}{[v(x)]^2} = \\ = \frac{v(x)du(x) - u(x)dv(x)}{[v(x)]^2},$$

т. е. *дифференциал частного (дроби) равен произведению дифференциала числителя на знаменатель минус произведение дифференциала знаменателя на числитель, все деленное на квадрат знаменателя.*

VI. Рассмотрим сложную функцию $y = f(u)$, где u есть функция от x. Определим dy, предполагая y зависящим от x:

$$dy = y'_x dx = f'(u) \cdot u'_x dx = f'(u)du,$$

т. е. *дифференциал сложной функции имеет тот же вид, какой он имел бы в том случае, если бы вспомогательная функция и была независимой переменной.* *

Рассмотрим численный пример для сравнения величины приращения функции с ее дифференциалом. Возьмем функцию

$$y = f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 10$$

и рассмотрим ее приращение

$$f(2,01) - f(2) = 2,01^3 + 2 \cdot 2,01^2 + 4 \cdot 2,01 + 10 - (2^3 + 2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 10).$$

Производя все действия, получим для приращения величину

$$\Delta y = f(2,01) - f(2) = 0,240801.$$

Несравненно проще вычислить дифференциал функции. В данном случае $dx = 2,01 - 2 = 0,01$ и дифференциалом функции будет

$$dy = (3x^2 + 4x + 4)dx = (3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 + 4) \cdot 0,01 = 0,24.$$

Сравнивая dy и Δy, видим, что они совпадают до третьего десятичного знака.

---

*В связи с этим говорят об инвариантности первого дифференциала.

51. Некоторые дифференциальные уравнения. Мы показали, что, заменяя в промежутке $(x,\ x+dx)$ приращение функции ее дифференциалом, мы применяем закон прямой пропорциональности между приращениями функции и независимой переменной с соответствующим коэффициентом пропорциональности, и что такая замена приводит к ошибке, которая является бесконечно малой высшего порядка по сравнению с dx. На этом основано применение анализа бесконечно малых к исследованию явлений природы.

Наблюдая некоторый процесс, стараются разбить его на малые элементы, к каждому из которых, пользуясь его малостью, применяют закон прямой пропорциональности. В пределе получают таким образом уравнение, представляющее собою соотношение между независимой переменной, функцией и их дифференциалами (или производной). *Уравнение это называется дифференциальным уравнением*, соответствующим рассматриваемому процессу. Задача нахождения самой функции по дифференциальному уравнению есть задача *интегрирования дифференциального уравнения.*

Итак, при применении анализа бесконечно малых к изучению какого-либо закона природы, необходимо составить дифференциальное уравнение рассматриваемого закона природы и проинтегрировать его. Эта последняя задача обычно бывает гораздо труднее первой, и о ней мы будем говорить впоследствии. В дальнейших примерах выведем дифференциальные уравнения, соответствующие некоторым простейшим явлениям природы.

1. *Барометрическая формула.* Давление атмосферы p, рассчитываемое на единицу площади, есть, очевидно, функция высоты h над поверхностью земли. Рассмотрим вертикальный цилиндрический столб воздуха с площадью поперечного сечения, равной единице. Проведем два поперечных сечения A и A_1 на высотах h и $h+dh$. При переходе от сечения A к сечению A_1 давление p уменьшится (если $dh>0$) на величину, равную весу воздуха, который заключается в части цилиндра между A и A_1. Если dh мала, можем приближенно считать плотность ρ воздуха в этой части цилиндра постоянной. Площадь основания столбика AA_1 равна единице, его высота dh и, следовательно, объем dh, а искомый вес $\rho\ dh$. Итак, уменьшение p (при $dh>0$) равно $\rho\ dh$:

$$dp=-\rho\ dh.$$

Согласно закону Бойля—Мариотта, плотность ρ пропорционально давлению p:

$$\rho=cp \quad (c \text{ — постоянная}),$$

и мы окончательно получаем дифференциальное уравнение:

$$dp = -cp\,dh \quad \text{или} \quad \frac{dp}{dh} = -cp.$$

2. *Химические реакции первого порядка.* Пусть некоторое вещество, масса которого есть a, вступает в химическую реакцию. Обозначим буквой x ту часть этой массы, которая уже вступила в реакцию к моменту времени t, отсчитываемому от начала реакции. Очевидно, x есть функция от t. Для некоторых реакций можно приближенно считать, что количество вещества dx, вступившее в реакцию за промежуток времени от момента t до момента $t + dt$, при малом dt пропорционально dt и количеству вещества, которое к моменту t оставалось не вступившим в реакцию:

$$dx = c(a - x)dt \quad \text{или} \quad \frac{dx}{dt} = c(a - x).$$

Преобразуем это дифференциальное уравнение, вводя вместо x новую функцию $y = a - x$, где y обозначает массу, которая остается не вступившей в реакцию к моменту времени t. Принимая во внимание, что a есть постоянная, получим

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{dx}{dt},$$

и дифференциальное уравнение химической реакции первого порядка может быть переписано в виде

$$\frac{dy}{dt} = -cy.$$

3. *Закон охлаждения.* Положим, что некоторое тело, нагретое до высокой температуры, помещается в среду, имеющую постоянную температуру 0°. При охлаждении тела его температура θ будет функцией времени t, которое мы будет отсчитывать от момента помещения тела в среду. Количество тепла dQ, отданного телом за промежуток времени dt, будем приближенно считать пропорциональным длительности dt этого промежутка и разности температур тела и среды к моменту времени t (закон охлаждения Ньютона). Мы можем тогда написать

$$dQ = c_1\theta dt \quad (c_1 \text{ — постоянная}).$$

Обозначив буквой k теплоемкость тела, имеем

$$dQ = -k\,d\theta,$$

где мы пишем знак $(-)$, так как $d\theta$ в рассматриваемом случае отрицательно (температура понижается). Сравнивая эти два выражения dQ, получим

$$d\theta = -c\theta dt \quad \left(c = \frac{c_1}{k}\right) \quad \text{или} \quad \frac{d\theta}{dt} = -c\theta;$$

c есть величина постоянная, если мы будем считать теплоемкость k постоянной. Выведенные нами дифференциальные уравнения имеют одинаковую форму. Все они выражают то свойство, что производная пропорциональна самой функции с отрицательным коэффициентом пропорциональности $(-c)$.

В [38] мы показали, что при непрерывных процентах с основного капитала a через t лет образуется наращенный капитал ae^{kt}, где k — процентная такса, выраженная в сотых долях:

$$y = ae^{kt}. \tag{7}$$

Вычисляя производную, получим

$$y' = ake^{kt} = ky, \tag{8}$$

т. е. в этом случае мы получаем то же свойство пропорциональности производной и самой функции, благодаря чему свойство это называют *законом сложных процентов*. Впоследствии мы покажем, что функция (7) дает *все* решения дифференцированного уравнения (8) при *произвольном* значении постоянной a, вместо которой будем писать C.

Таким образом, решения наших уравнений могут быть представлены в виде (заменяя k на $-c$):

$$p(h) = Ce^{-ch},\ y(t) = Ce^{-ct},\ \theta(t) = Ce^{-ct}, \tag{9}$$

где C — постоянная. Определим теперь физическое значение постоянной c в каждой из предыдущих формул. Подставляя в первую из формул $h = 0$, получим

$$C = p(0) = p_0,$$

где p_0 есть, таким образом, давление атмосферы при $h = 0$, т. е. на поверхности земли. Вторая из формул при $t = 0$ даст нам

$$C = y(0),$$

т. е. C есть масса, не вступившая в реакцию в начальный момент времени, и ее мы раньше обозначали буквою a. Наконец, подставляя $t = 0$ в третью

из формул (9), убедимся также, что C есть начальная температура θ_0 тела в момент его помещения в среду. Итак, окончательно имеем

$$p(h) = p_0 e^{-ch},\ y(t) = ae^{-ct},\ \theta(t) = \theta_0 e^{-ct}. \tag{10}$$

52. Оценка погрешностей. При практическом определении или неточном вычислении какой-либо величины x получается ошибка Δx, которая называется *абсолютной ошибкой* или *абсолютной погрешностью* наблюдения или вычисления. Она не характеризует точности наблюдения. Например, ошибка около 1 *см* при определении длины комнаты практически допустима, а такая же ошибка при определении расстоянии двух близких предметов (например, свечи от экрана фотометра) указывает на большую неточность измерения. Поэтому вводят еще понятие об *относительной погрешности*, которая равна абсолютной величине отношения $\left|\frac{\Delta x}{x}\right|$ абсолютной погрешности к значению самой измеряемой величины.

Положим теперь, что некоторая величина y определяется из уравнения $y = f(x)$. Ошибка Δx при определении величины x повлечет за собой ошибку Δy. При малых значениях Δx можно заменить приближенно Δy дифференциалом dy, так что относительная погрешность при определении величины y выражается формулой

$$\left|\frac{dy}{y}\right|.$$

Примеры. **1**. Сила тока i определяется, как известно, по тангенс-гальванометру из формулы:

$$i = c \operatorname{tg} \varphi.$$

Пусть $d\varphi$ — ошибка при отсчете угла φ:

$$di = \frac{c}{\cos^2 \varphi} d\varphi, \quad \frac{di}{i} = \frac{c}{\cos^2 \varphi \cdot c \operatorname{tg} \varphi} d\varphi = \frac{2}{\sin 2\varphi} d\varphi,$$

откуда видно, что относительная ошибка $\left|\frac{di}{i}\right|$ при определении i будет тем меньше, чем ближе φ к $45°$.

2. Рассмотрим произведение uv:

$$d(uv) = vdu + udv, \quad \frac{d(uv)}{uv} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v},$$

и, следовательно,

$$\left|\frac{d(uv)}{uv}\right| \leqslant \left|\frac{du}{u}\right| + \left|\frac{dv}{v}\right|,$$

т. е. *относительная ошибка произведения не больше суммы относительных ошибок сомножителей.*

То же правило получаем и для частного, так как

$$d\frac{u}{v} = \frac{vdu - udv}{v^2},$$

$$\frac{d\frac{u}{v}}{\frac{u}{v}} = \frac{du}{u} - \frac{dv}{v}, \quad \left|\frac{d\frac{u}{v}}{\frac{u}{v}}\right| \leqslant \left|\frac{du}{u}\right| + \left|\frac{dv}{v}\right|.$$

3. Рассмотрим формулу для площади круга:

$$Q = \pi r^2,\ dQ = 2\pi r\,dr,\ \frac{dQ}{Q} = \frac{2\pi r\,dr}{\pi r^2} = 2\frac{dr}{r},$$

т. е. относительная ошибка при определении площади круга по написанной выше формуле равна удвоенной относительной ошибке при определении радиуса.

4. Положим, что определяется угол φ по логарифму его синуса и тангенса. Согласно правилам дифференцирования имеем

$$d(\log_{10}\sin\varphi) = \frac{\cos\varphi d\varphi}{\log 10\cdot\sin\varphi},\ d(\log_{10}\ \mathrm{tg}\,\varphi) = \frac{d\varphi}{\log 10\cdot\ \mathrm{tg}\,\varphi\cdot\cos^2\varphi},$$

откуда

$$d\varphi = \frac{\log 10\cdot\sin\varphi}{\cos\varphi}d(\log_{10}\sin\varphi),\ d\varphi = \log 10\cdot\sin\varphi\cos\varphi d(\log_{10}\ \mathrm{tg}\ \varphi). \quad (11)$$

Предположим, что при определении $\log_{10}\sin\varphi$ и $\log_{10}\ \mathrm{tg}\,\varphi$ мы сделали одну и ту же ошибку (эта ошибка зависит от числа десятичных знаков в той таблице логарифмов, которой мы пользуемся). Первая из формул (11) даст для $d\varphi$ величину по абсолютному значению большую, чем вторая из формул (11), так как в первой формуле произведение $\log 10\cdot\sin\varphi$ делится, а во второй формуле умножается на $\cos\varphi$, а $\left|\cos\varphi\right| < 1$. Таким образом, при вычислении углов выгоднее пользоваться таблицей для $\log_{10}\ \mathrm{tg}\,\varphi$.

§ 4. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

53. Производные высших порядков. Производная $f'(x)$ функции $y = f(x)$ есть, как мы знаем, также функция от x. Дифференцируя ее, мы получаем новую функцию, которая называется *второй производной*, или *производной второго порядка*, первоначальной функции $f(x)$ и обозначаются так:

$$y'', \quad \text{или} \quad f''(x).$$

Дифференцируя вторую производную, получаем *производную третьего порядка*, или *третью производную*:

$$y''', \quad \text{или} \quad f'''(x).$$

Применяя таким образом, операцию дифференцирования, получим *производную любого n-го порядка* $y^{(n)}$, или $f^{(n)}(x)$.

Рассмотрим несколько примеров.

1. $y = e^{ax},\ y' = ae^{ax},\ y'' = a^2e^{ax}, \ldots, y^{(n)} = a^ne^{ax}$.

2. $y = (ax+b)^k,\ y' = ak(ax+b)^{k-1}$,

$y'' = a^2k(k-1)(ax+b)^{k-2}, \ldots,$

$y^{(n)} = a^nk(k-1)(k-2)\ldots(k-n+1)(ax+b)^{k-n}$.

3. Мы знаем, что

$$(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),\ (\cos x) = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

т. е. дифференцирование $\sin x$ и $\cos x$ приводится к прибавлению числа $\frac{\pi}{2}$ к аргументу, а потому

$$(\sin x)'' = \left[\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right] = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{\pi}{2}\right)' = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right),$$

и, вообще,

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{и} \quad (\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

4. $y = \log(1+x),\ y' = \frac{1}{1+x},\ y'' = -\frac{1}{(1+x)}^2, y''' = \frac{1\cdot 2}{(1+x)^3}, \ldots$
$y^{(n)} = (1-)^{n+1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$.
5. Рассмотрим сумму функций

$$y = u + v + w$$

Применяя правило дифференцирования суммы и считая, что соответствующие производные функции u, v и w существуют, получим

$$y' = u' + v' + w',\ y'' = u'' + v'' + w'',\ \ldots,\ y^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)} + w^{(n)},$$

т. е. *производная любого порядка от суммы равна сумме производных того же порядка.* Например,

$$y = x^3 - 4x^2 + 7x + 10;\ y' = 3x^2 - 8x + 7,\ y'' = 6x - 8;\ y''' = 6,$$
$$y^{(4)} = 0 \text{ и, вообще, } y^{(n)} = 0 \text{ при } n > 3.$$

Таким же путем можно показать, вообще, что *производная n-го порядка от многочлена m-й степени равна 0, если $n > m$.*

Рассмотрим теперь произведение двух функций $y = uv$. Применяя правила дифференцирования произведения и суммы, получим

$$\begin{aligned} y' &= u'v + uv', \\ y'' &= u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2u'v' + uv'', \\ y''' &= u'''v + u''v' + 2u''v' + 2u'v'' + u'v'' + uv''' = \\ &= u'''v + 3u''v' + 3u'v'' + uv'''. \end{aligned}$$

Мы подмечаем следующий закон составления производных: *чтобы составить производную n-го порядка от произведения uv,* надо $(u+v)^n$ *разложить по формуле бинома Ньютона и в полученном разложении заменить показатели степеней y и* и v *указателями порядка производных, причем нулевые степени* ($u^0 = v^0 = 1$), *входящие в крайние члены разложения, заменить самими функциями.*

Правило это называется *правилом Лейбница* и символически его записывают в следующем виде:

$$y^{(n)} = (u+v)^{(n)}.$$

Докажем справедливость этого правила, пользуясь способом доказательства по индукции. Положим, что для n-й производной это правило справедливо, т. е.

$$y^{(n)} = (u+v)^{(n)} = u^{(n)}v + \frac{n}{1}u^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \dots + \\ + \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \dots + uv^{(n)}. \quad (1)$$

Чтобы получить $y^{(n+1)}$, надо написанную сумму продифференцировать по x. При этом произведение $u^{(n-k)}v^{(k)}$ в общем члене суммы, согласно правилу дифференцирования произведения, заменится суммой $u^{(n-k+1)}v^{(k)} + u^{(n-k)}v^{(k+1)}$. Но в символических обозначениях эту сумму можно написать в виде

$$u^{n-k}v^k(u+v).$$

Действительно, раскрывая скобки и заменяя показатели степеней указателями порядка производных, мы и получим сумму $u^{(n-k+1)}v^{(k)} + u^{(n-k)}v^{(k+1)}$. Мы видим, таким образом, что для получения $y^{(n+1)}$ надо каждое слагаемое в сумме (1), а потому и всю эту сумму, помножить символически на $(u+v)$, и, следовательно,

$$y^{(n+1)} = (u+v)^{(n)} \cdot (u+v) = (u+v)^{(n+1)}.$$

Мы показали, что если правило Лейбница справедливо для некоторого n, то оно справедливо и для $(n+1)$. Но непосредственно мы убедились, что оно справедливо для $n = 1,\ 2$ и 3, а следовательно, оно справедливо и для всех значений n.

Рассмотрим в качестве примера

$$y = e^x(3x^2 - 1)$$

и найдем $y^{(100)}$:

$$y^{(100)} = (e^x)^{(100)}(3x^2-1) + \\ + \frac{100}{1}(e^x)^{(99)}(3x^2-1)' + \frac{100\cdot 99}{1\cdot 2}(e^x)^{(98)}(3x^2-1)'' + \\ + \frac{100\cdot 99\cdot 98}{1\cdot 2\cdot 3}(e^x)^{(97)}(3x^2-1)''' + \cdots + e^x(3x^2-1)^{(100)}.$$

Все производные многочлена второй степени, начиная с третьей, равны тождественно нулю и $(e^x)^{(n)} = e^x$, вследствие чего мы получим

$$y^{(100)} = e^x(3x^2-1) + 100e^x\cdot 6x + 4950e^x\cdot 6 = e^x(3x^2+600x+29\,699).$$

54. Механическое значение второй производной. Рассмотрим прямолинейное движение точки:

$$s = f(t),$$

где, как всегда, t есть время и s — путь, отсчитываемый от определенной точки прямой. Дифференцируя один раз по t, получим *скорость* движения:

$$v = f'(t).$$

Составим вторую производную, которая представляет собою предел отношения $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ при стремлении Δt к нулю. Отношение $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ характеризует быстроту изменения скорости за промежуток времени Δt и дает среднее ускорение за этот промежуток времени, а предел этого отношения при стремлении Δt к нулю дает *ускорение* w рассматриваемого движения в момент времени t:

$$w = f''(t).$$

Положим, что $f(t)$ есть многочлен второй степени:

$$s = at^2 + bt + c,\ v = 2at + b,\ w = 2a,$$

т. е. ускорение w постоянно и коэффициент $a = \frac{1}{2}w$. Подставляя $t = 0$, получим $b = v_0$, т. е. коэффициент b равен начальной скорости, и $c = s_0$, т. е. c равно расстоянию точки в момент времени $t = 0$ от начала координат на прямой. Подставляя найденные значения a, b и c в выражение для s, получим формулу для пути в равномерно ускоренном ($w > 0$) или равномерно замедленном ($w < 0$) движении:

$$s = \frac{1}{2}wt^2 + v_0t + s_0.$$

Вообще, зная закон изменения пути, мы можем, два раза дифференцируя по t, определить ускорение w, а следовательно, и силу f, производящую движение, так как, согласно второму закону Ньютона, $f = mw$, где m — масса движущейся точки.

Все сказанное годится лишь для прямолинейного движения. В случае криволинейного движения, как доказывается в механике, $f''(t)$ дает лишь проекцию вектора ускорения на касательную к траектории.

Рассмотрим для примера случай гармонического колебательного движения точки M, когда рассмотрение s этой точки от некоторой определенной точки O на прямой, по которой движется точка M, определяется по формуле:

$$s = a \sin\left(\frac{2\pi}{\tau}t + \omega\right),$$

где a — амплитуда, τ — период колебания и ω — фаза суть величины постоянные. Определим, дифференцируя, скорость v и силу f:

$$v = \frac{2\pi a}{\tau}\cos\left(\frac{2\pi}{\tau}t+\omega\right),\ f = mw = -\frac{4\pi^2 m}{\tau^2}a\sin\left(\frac{2\pi}{\tau}t+\omega\right) = -\frac{4\pi^2 m}{\tau^2}s,$$

т.е. сила по величине пропорциональна длине отрезка $\overline{OM}$ и направлена в противоположную сторону. Иными словами, сила направлена всегда от точки M к точке O и пропорциональна удалению точки M от точки O.

55. Дифференциалы высших порядков. Введем теперь понятие о дифференциалах высших порядков функции $y = f(x)$. Ее дифференциал

$$dy = f'(x)dx$$

является, очевидно, функцией от x, но не надо забывать при этом, что дифференциал независимой переменной dx считается уже независящим от x [50] и при дальнейшем дифференцировании выносится за знак производной как постоянный множитель. Рассматривая dy как функцию от x,* можно составить дифференциал этой функ-

*Вообще говоря, дифференциал является функцией двух переменных x и dx.

ции; он называется *дифференциалом второго порядка* первоначальной функции $f(x)$ и обозначается символами d^2y, или $d^2f(x)$:

$$d^2y = d(dy) = [f'(x)dx]'dx = f''(x)dx^2.$$

Составляя опять дифференциал полученной функции от x, придем к *дифференциалу третьего порядка*:

$$d^3y = d(d^2y) = [f''(x)dx^2]'dx = f'''(x)dx^3$$

и, вообще, составляя последовательно дифференциалы, придем к понятию о *дифференциале n-го порядка* функции $f(x)$ и получим для него выражение:

$$d^nf(x), \quad \text{или} \quad d^ny = f^{(n)}(x)dx^n. \tag{2}$$

Эта формула позволяет представить производную n-го порядка в виде частного:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}. \tag{3}$$

Рассмотрим теперь случай сложной функции $y = f(u)$, где u — функция некоторой независимой переменной. Мы знаем [50], что первый дифференциал этой функции имеет тот же вид, как и в том случае, когда u — независимая переменная:

$$dy = f'(u)du$$

При определении дифференциалов высших порядков мы получим формулы, отличные по виду от формулы (2), ибо мы не имеем уже права считать du величиной постоянной, так как u не является независимой переменной. Так, например, для дифференциала второго порядка будем иметь, применяя правило для нахождения дифференциала произведения, выражение

$$d^2y = d[f'(u)du] = dud[f'(u)] + f'(u)d(du) = f''(u)du^2 + f'(u)d^2u,$$

которое содержит, по сравнению с формулой (2), добавочное слагаемое $f'(u)d^2u$.

Если u есть независимая переменная, то du надо считать величиной постоянной и $d^2u = 0$. Положим теперь, что u есть линейная функция независимой переменной t, т. е.

$$u = at + b.$$

При этом $du = adt$, т. е. du есть опять величина постоянная, а потому дифференциалы высших порядков сложной функции будут выражены по формуле (2):

$$d^n f(u) = f^{(n)}(u) du^n,$$

т. е. *выражение* (2) *для дифференциалов высших порядков годится в том случае, если x есть независимая переменная или линейная функция независимой переменной.*

56. Разности* функций. Обозначим буквою h приращение независимой переменной. Соответственное приращение функции $y = f(x)$ будет

$$\Delta y = f(x + h) - f(x). \tag{4}$$

Его называют иначе *разностью первого порядка* функции $f(x)$. Эта разность есть, в свою очередь, функция от x, и мы можем найти разность этой функции, вычисляя значение этой функции при $x+h$ и x и вычитая из первого результата второй. Эта разность называется *разностью второго порядка* первоначальной функции $f(x)$ и обозначается символом $\Delta^2 y$. Нетрудно выразить $\Delta^2 y$ через значения самой функции $f(x)$:

$$\Delta^2 y = \Delta(\Delta y) = [f(x + 2h) - f(x + h)] - [f(x + h) - f(x)] = \\ = f(x + 2h) - 2f(x + h) + f(x). \tag{5}$$

Эта разность второго порядка также есть функция от x, и, определяя разность этой функции, получим *разность третьего порядка* $\Delta^3 y$ первоначальной функции $f(x)$. Заменяя в правой части равенства (5) x на $x+h$ и вычитая из полученного результата правую часть равенства (5), будем иметь выражение для $\Delta^3 y$:

*В современной математической литературе обычно используется термин «приращение функций».

$$\Delta^3 y = [f(x+3h) - 2f(x+2h) + f(x+h)] - \\ - [f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)] = \\ = f(x+3h) - 3f(x+2h) + 3f(x+h) - f(x).$$

Таким образом, можно последовательно определить разность любого порядка, и *разность n-го порядка* $\Delta^n y$ будет иметь следующее выражение через значения функции $f(x)$:

$$\Delta^n y = f(x+nh) - \frac{n}{1} f(x + \overline{n-1}h) + \frac{n(n-1)}{2!} f(x + \overline{n-2}h) - \\ - \dots + (-1)^k \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} f(x + \overline{n-k}h) + \\ + \dots + (-1)^n f(x). \quad (6)$$

Выше мы убедились в справедливости этой формулы при $n = 1, 2$ и 3. Для ее полного доказательства надо применить обычный способ доказательства от n к $(n+1)$. Заметим, что для вычисления $\Delta^n y$ надо знать $(n+1)$ значения функции $f(x)$ при значениях аргумента: x, $x+h$, $x+2h, \dots, x+nh$. Эти значения аргумента образуют арифметическую прогрессию с разностью h; или, как говорят, являются равноотстоящими значениями.

При малых значениях $h = dx$ разность Δy мало отличается от дифференциала dy. Точно так же разности высших порядков будут давать приближенные значения дифференциалов соответствующих порядков, и наоборот. Если, например, функция задана таблично при равноотстоящих значениях аргумента, то мы, не имея аналитического выражения функции, не в состоянии точно вычислить значения ее производных различных порядков, но вместо точной формулы (3) можем получить приближенное значение производных, вычисляя отношение $\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}$. Составим для примера таблицу разностей и дифференциалов функции $y = x^3$ в промежутке (2, 3), принимая:

$$\Delta x = h = 0,1.$$

Для составления этой таблицы были вычислены последовательные значения функции $y = x^3$, из них при помощи вычитания, согласно формуле (4), были получены значения Δy, из них также при помощи вычитания получились значения $\Delta^2 y$ и т. д. Такой

способ последовательного вычисления разностей, конечно, проще, чем вычисление по формуле (6). Дифференциалы вычисляются по известным формулам, указанным наверху таблицы, причем надо положить $dx = h = 0,1$.

Сравним точное и приближенное значения второй производной y'' при $x = 2$. В рассматриваемом случае $y'' = 6x$ и $y'' = 12$ при $x = 2$. Приближенно эта производная выражается отношением $\frac{\Delta^2 y}{h^2}$, и при $x = 2$ мы получим

$$\frac{0,126}{(0,1)^2} = 12,6.$$

Если $f(x)$ есть многочлен от x:

$$y = f(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \cdots + a_{m-1}x + a_m,$$

то, вычисляя Δy по формуле (4), получим для Δy выражение в виде целого многочлена $m-1$-й степени со старшим членом ma_0hx^{m-1}, что нетрудно проверить. Таким образом, в случае $y = x^3$, Δy будет многочленом второй степени от x, $\Delta^2 y$ — многочленом первой

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$dy = 3x^2dx$	$d^2y = 6xdx^2$	$d^3y = 6dx^3$	d^4y
2	8,000	1,261	0,126	0,006	0	1,200	0,120	0,006	0
2,1	9,261	1,387	0,132	0,006	0	1,323	0,126	0,006	0
2,2	10,648	1,519	0,138	0,006	0	1,452	0,132	0,006	0
2,3	12,167	1,657	0,144	0,006	0	1,587	0,138	0,006	0
2,4	13,824	1,801	0,150	0,006	0	1,728	0,144	0,006	0
2,5	15,625	1,951	0,156	0,006	0	1,875	0,150	0,006	0
2,6	17,576	2,107	0,162	0,006	0	2,028	0,156	0,006	0
2,7	19,683	2,269	0,168	0,006	—	2,187	0,162	0,006	—
2,8	21,952	2,437	0,174	—	—	2,352	0,168	—	—
2,9	24,389	2,611	—	—	—	2,523	—	—	—
3	27,000	—	—	—	—	—	—	—	—

степени, $\Delta^3 y$ — постоянной и $\Delta^4 y$ — нулем (см. таблицу). Предлагаем читателю в качестве упражнения показать, что значения $d^2 y$ должны в рассматриваемом примере на одну ступень запаздывать по сравнению с $\Delta^2 y$, что видно из таблицы.

§ 5. ПРИЛОЖЕНИЕ ПОНЯТИЯ О ПРОИЗВОДНОЙ К ИЗУЧЕНИЮ ФУНКЦИИ

57. Признаки возрастания и убывания функций. Знание производной дает возможность изучать различные свойства функций. Мы начнем с наиболее простого и основного вопроса, а именно с вопроса о возрастании и убывании функции.

Функция $f(x)$ называется возрастающей в некотором промежутке, если в этом промежутке бóльшим значениям независимой переменной соответствуют и большие значения функции, т. е. *если*

$$f(x+h) - f(x) > 0 \quad \textit{при} \quad h > 0.$$

Наоборот, если мы имеем:

$$f(x+h) - f(x) < 0 \quad \textit{при} \quad h > 0,$$

то функция называется убывающей.

Если мы обратимся к графику функции, то промежутки возрастания будут соответствовать тем частям графика, на которых бóльшим абсциссам соответствуют и бóльшие ординаты. Если мы, как это сделано на рис. 55, направим ось OX вправо и ось OY наверх, то промежутку возрастания функции будут соответствовать такие части графика, что при движении вдоль кривой вправо в направлении возрастающих абсцисс мы подымаемся вверх. Наоборот, промежуткам убывания соответствуют части кривой, опускающиеся вниз при движении вдоль

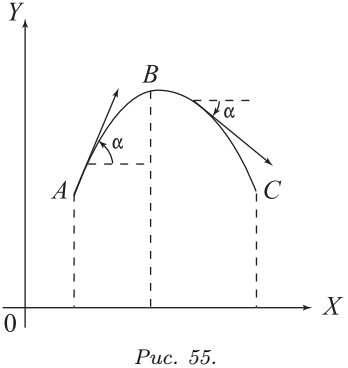

Рис. 55.

кривой вправо. На рис. 55 часть графика AB соответствует промежутку возрастания, а часть BC — промежутку убывания. Из чертежа непосредственно ясно, что на первом участке касательная образует с направлением оси OX угол α, отсчитываемый от оси OX до касательной, тангенс которого положителен. Но тангенс этого угла есть как раз первая производная $f'(x)$. Наоборот, на участке BC направление касательной образует с направлением OX угол α (в четвертой четверти), тангенс которого отрицателен, т. е. для этого случая $f'(x)$ будет величиной отрицательной. Сопоставляя полученные результаты, мы приходим к следующему правилу: *те промежутки, в которых* $f'(x) > 0$, *суть промежутки возрастания функции, а те промежутки, в которых* $f'(x) < 0$, *суть промежутки убывания функции.*

Мы пришли к этому правилу, пользуясь чертежом. В дальнейшем дадим для него строгое аналитическое доказательство. Сейчас же мы применим полученное правило к некоторым примерам.

1. Докажем неравенство

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6} \text{ при } z > 0.$$

Для этого составим разность

$$f(x) = \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right).$$

Определим производную $f'(x)$:

$$f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} - (1 - \cos x) = \frac{x^2}{2} - 2\sin^2\frac{x}{2} = \\ = 2\left[\left(\frac{x}{2}\right)^2 - \left(\sin\frac{x}{2}\right)^2\right].$$

Принимая во внимание, что по абсолютной величине сама дуга больше своего синуса, можем утверждать, что $f'(x) > 0$ возрастает, но $f(0) = 0$, и потому

$$f(x) = \sin x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right) > 0 \text{ при } x > 0,$$

т. е.

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6} \text{ при } x > 0.$$

2. Точно так же можно доказать неравенство

$$x > \log(1+x) \text{ при } x > 0.$$

Составим разность

$$f(x) = x - \log(1+x),$$

откуда

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x}.$$

Из этого выражения видно, что при $x > 0$ и $f'(x) > 0$ т. е. $f(x)$ возрастает в промежутке $(0, +\infty)$, но $f(0) = 0$, и, следовательно,

$$f(x) = x - \log(1+x) > 0 \text{ при } x > 0,$$

т. е.

$$x > \log(1+x) \text{ при } x > 0.$$

3. Рассмотрим уравнение Кеплера, о котором мы говорили в [31]:

$$x = q \sin x + a \quad (0 < q < 1).$$

Мы можем переписать его в виде

$$f(x) = x - q \sin x - a = 0.$$

Составляя производную $f'(x)$, получим

$$f'(x) = 1 - q \cos x.$$

Принимая во внимание, что произведение $q \cos x$ по абсолютному значению меньше единицы, так как по условию q заключается между нулем и единицей, можем утверждать, что $f'(x) > 0$ при любом значении x, а потому $f(x)$ возрастает в промежутке $(-\infty, +\infty)$ и, следовательно, не может обратиться более одного раза в нуль, т. е. уравнение Кеплера не может иметь более одного вещественного корня.

Если постоянная a кратна π, т. е. $a = k\pi$, где k — целое число, то, непосредственно подставляя $x = k\pi$, получим $f(k\pi) = 0$, и $x = k\pi$ будет единственным корнем уравнения Кеплера. Если a не кратно π, то можно найти такое целое число k, что

$$k\pi < a < (k+1)\pi.$$

Подставляя $x = k\pi$ и $(k+1)\pi$, получим

$$f(k\pi) = k\pi - a < 0,$$
$$f(\overline{k+1}\pi) = (k+1)\pi - a > 0.$$

Но если $f(k\pi)$ и $f(\overline{k+1}\pi)$ разных знаков, то $f(x)$ должно обращаться в нуль внутри промежутка $(k\pi, \overline{k+1}\pi)$ [35], т. е. внутри этого промежутка будет находиться единственный корень уравнения Кеплера.

4. Рассмотрим уравнение

$$f(x) = 3x^5 - 25x^3 + 60x + 15 = 0.$$

Составим производную $f'(x)$ и приравняем ее нулю:

$$f'(x) = 15x^4 - 75x^2 + 60 = 15(x^4 - 5x^2 + 4) = 0.$$

Решая это биквадратное уравнение, получим, что $f'(x)$ обращается в нуль при

$$x = -2, \quad -1, \quad +1 \text{ и } +2.$$

Таким образом, весь промежуток $(-\infty, +\infty)$ мы можем разбить на пять промежутков:

$$(-\infty, -2),\ (-2, -1),\ (-1, 1),\ (1, 2),\ (2, +\infty),$$

внутри которых $f'(x)$ сохраняет уже неизменный знак, а потому $f(x)$ меняется монотонно, т. е. или возрастает или убывает, и не может поэтому внутри каждого из этих промежутков иметь более одного корня. Если на концах какого-либо из этих промежутков $f(x)$ имеет разные знаки, то уравнение $f(x) = 0$ имеет внутри такого промежутка один корень, а если эти знаки одинаковые, то внутри соответствующего промежутка корней нет. Таким образом, для определения числа корней уравнения остается определить знаки $f(x)$ на концах каждого из пяти указанных промежутков.

Для определения знака $f(x)$ при $x = \pm\infty$ представим $f(x)$ в виде

$$f(x) = x^5\left(3 - \frac{25}{x^2} + \frac{60}{x^4} + \frac{15}{x^5}\right).$$

При стремлении x к $(-\infty)$, $f(x)$ стремится к $(-\infty)$, ибо x^5 при этом стремится к $(-\infty)$, а выражение, стоящее в круглых скобках, — к 3. Точно так же убедимся в том, что при стремлении x к $(+\infty)$ и $f(x)$ стремится

к $(+\infty)$. Подставляя значения $x = -2$, -1, 1 и 2, получим следующую таблицу:

x	$-\infty$	-2	-1	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$

Оказывается, что $f(x)$ имеет разные знаки только на концах промежутка $(-1, +1)$, и, следовательно, рассматриваемое уравнение имеет только один вещественный корень, заключающийся внутри этого промежутка.

Выше мы определили возрастание и убывание функции в промежутке. Иногда говорят, что функция возрастает или убывает в точке $x = x_0$. Это значит следующее: функция возрастает при $x = x_0$, если $f(x) < f(x_0)$ при $x < x_0$ и $f(x) > f(x_0)$ при $x > x_0$, причем x считается достаточно близким к x_0. Аналогично определяется убывание функции в точке. Из понятия производной непосредственно вытекает достаточное условие возрастания и убывания в точке x_0, а именно, если $f'(x_0) > 0$, то функция возрастает в точке x_0. Действительно, если, например, $f'(x_0) > 0$, то отношение

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

имеющее предел $f'(x_0)$, будет также положительным при всех h, достаточно малых по абсолютной величине, т. е. числитель и знаменатель будут одинаковых знаков. Иначе говоря, будет: $f(x_0+h) - f(x_0) > 0$ при $h > 0$ и $f(x_0 + h) - f(x_0) < 0$ при $h < 0$, что и дает возрастание в точке x_0.

58. Максимумы и минимумы функций. Обратимся вновь к рассмотрению графика некоторой функции $f(x)$ (рис. 56). На этом графике мы имеем последовательное чередование промежутков возрастания и убывания функции. Дуга AM_1 соответствует промежутку возрастания. Следующая за ней дуга M_1M_2 — промежутку убывания, следующая M_2M_3 — опять промежутку возрастания и т. д. Те точки кривой, которые отделяют промежутки возрастания от промежутков убывания, являются вершинами кривой. Рассмотрим, например, вершину M_1. Ордината в этой вершине больше всех ординат кривой, достаточно близких к рассматрива-

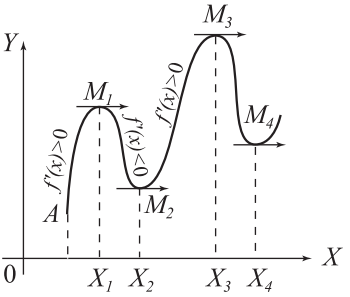

Рис. 56.

емой и лежащих как слева, так и справа от нее. Говорят, что такой вершине соответствует максимум функции $f(x)$.

Это приводит к следующему общему аналитическому определению: *функция $f(x)$ достигает максимума в точке $x = x_1$, если ее значение $f(x_1)$ в этой точке больше всех ее значений в ближайших точках, т. е. если приращение функции*

$$f(x_1 + h) - f(x_1) < 0$$

*при всяких h как положительных, так и отрицательных, достаточно малых по абсолютному значению.**

Обратимся к рассмотрению вершины M_2. В этой вершине, наоборот, ордината меньше всех соседних с ней ординат, лежащих как слева, так и справа, и говорят, что этой вершине соответствует минимум функции; аналитическое определение будет: *функция $f(x)$ достигает минимума в точке $x = x_2$, если*

$$f(x_2 + h) - f(x_2) > 0$$

при всяких h, как положительных, так и отрицательных, достаточно малых по абсолютному значению.

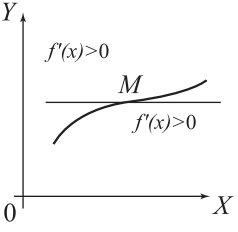

Рис. 57.

Из чертежа мы видим, что как в вершинах, соответствующих максимуму функции, так и в вершинах, соответствующих минимуму, касательная параллельна оси OX, т. е. ее угловой коэффициент $f'(x)$ равен нулю. При этом предполагается, конечно, что касательная и тем самым производная существуют. Но параллельность касательной оси OX может иметь место и не только в вершинах кривой. Так, например, на рис. 57 мы имеем точку кривой M, которая

*Можно утверждать, что существует окрестность точки x_1, такая, что во всех точках этой окрестности значения функции меньше, чем в точке x_1. Аналогично для понятия минимума.

не является вершиной и в которой все же касательная параллельна оси OX.

Положим, что $f'(x)$ обращается в нуль при некотором значении $x = x_0$, т. е. в соответствующем месте графика касательная параллельна оси OX. Исследуем знак $f'(x)$ при значениях x, близких к x_0. Рассмотрим следующие три случая.

I. При значениях x, меньших x_0 и достаточно близких к x_0, $f'(x)$ положительна, а при значениях x, бóльших x_0 и достаточно близких к x_0, $f'(x)$ отрицательна, т. е., иными словами, $f'(x)$ при переходе x через x_0 переходит через нуль от положительных значений к отрицательным.

В этом случае мы имеем слева от $x = x_0$ промежуток возрастания и справа — промежуток убывания, т. е. значению $x = x_0$ соответствует вершина кривой, дающая максимум функции $f(x)$ (рис. 56).

II. При значениях x, меньших x_0, $f'(x)$ отрицательна, а при значениях x, бóльших x_0, положительна, т. е. $f'(x)$ при переходе через нуль идет от отрицательных значений к положительным.

В этом случае слева от $x = x_0$ мы имеем промежуток убывания, а справа — промежуток возрастания, т. е. значению $x = x_0$ соответствует вершина кривой, дающая минимум функции (рис. 56).

III. При значениях x как меньших, так и больших x_0, $f'(x)$ имеет один и тот же знак. Положим например, что это есть знак $(+)$.

В этом случае соответствующая точка графика лежит внутри промежутка возрастания и вовсе не является вершиной (рис. 57).

Сказанное приводит нас к следующему правилу нахождения тех значений x, при которых $f(x)$ достигает максимума или минимума:

1) *нужно составить* $f'(x)$;

2) *найти те значения* x, *при которых* $f'(x)$ *обращается в нуль, т. е. решить уравнение* $f'(x) = 0$;

3) *исследовать изменения знака* $f'(x)$ *при переходе через эти значения по следующей схеме*:

x	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$	$f(x)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	максимум
	$-$		$+$	минимум
	$+$		$+$	возрастает
	$-$		$-$	убывает

Обозначения $x_0 - h$ и $x_0 + h$ в приведенной таблице показывают, что нужно определить знаки функции $f'(x)$ при значениях x, меньших и бóльших x_0, но достаточно близких, так что h считается достаточно малым положительным числом.

При этом исследовании предполагается, что $f'(x_0) = 0$, но при всех x, достаточно близких к x_0 и отличных от x_0, $f'(x)$ отлична от нуля.

Обратим еще внимание, что в случае рис. 57 касательная в точке M с абсциссою x_0 находится по разные стороны от кривой в окрестности этой точки. В данном случае $f'(x_0) = 0$ и $f'(x) > 0$ при всех x, близких к x_0 и отличных от x_0, и весь участок кривой с точкой x_0 внутри дает промежуток возрастания, несмотря на то, что $f'(x_0) = 0$.

Иногда вместо указанного выше определения максимума дают несколько другое, а именно: *функция $f(x)$ достигает максимума в точке $x = x_1$, если ее значение $f(x_1)$ в этой точке не меньшее ее значений в ближайших точках, т. е. если приращение функции $f(x_1+h)-f(x_1) \leqslant 0$ при всяких h, как положительных, так и отрицательных, достаточно малых по абсолютной величине. Аналогично минимум в точке x_2 можно определить неравенством* $f(x_2+h)-f(x_2) \geqslant 0$. Если при этом определении функция имеет в точке максимума или минимума производную, то эта производная должна, как и выше, обращаться в нуль.*

Рассмотрим пример. Пусть требуется найти максимумы и минимумы функции

$$f(x) = (x-1)^2(x-2)^3.$$

Составим первую производную

$$f'(x) = 2(x-1)(x-2)^3 + 3(x-1)^2(x-2)^2 =$$
$$= (x-1)(x-2)^2(5x-7) = 5(x-1)(x-2)^2\left(x - \frac{7}{5}\right).$$

Из последнего выражения видно, что $f'(x)$ обращается в нуль при следующих значениях независимой переменной: $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{7}{5}$ и $x_3 = 2$.

*Условие равенства нулю производной является таким образом, необходимым условием экстремума (т. е. максимума или минимума).

Переходим к их исследованию. При $x = 1$ множитель $(x-2)^2$ имеет знак плюс, множитель $\left(x - \frac{7}{5}\right)$ — знак минус. При всех значениях x, как меньших, так и бóльших единицы, но достаточно близких к единице, знаки этих множителей будут те же самые и, следовательно, произведение этих двух множителей имеет безусловный знак минус при всех значениях x, достаточно близких к единице. Обратимся, наконец, к рассмотрению последнего множителя $(x-1)$, который как раз обращается в нуль при $x = 1$. В случае $x < 1$ он имеет знак минус, а при $x > 1$ — знак плюс. Таким образом, все произведение, т. е. $f'(x)$, имеет при $x < 1$ знак плюс и при $x > 1$ знак минус. Откуда следует, что значению $x = 1$ соответствует максимум функции $f(x)$. Подставляя значение $x = 1$ в выражение самой функции $f(x)$, мы получим величину найденного максимума, т. е. ординату соответствующей вершины графика функции

$$f(1) = 0^2 \cdot (-1)^3 = 0.$$

Повторяя аналогичные рассуждения и для остальных значений $x_2 = \frac{7}{5}$ и $x_3 = 2$, мы получим следующую табличку:

x	$1-h$	1	$1+h$	$\frac{7}{5}-h$	$\frac{7}{5}$	$\frac{7}{5}+h$	$2-h$	2	$2+h$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	$+$	0	$+$
$f(x)$	возр.	0 макс.	убывает		$-\frac{108}{3125}$ миним.	возрастает			

В указанном нами способе исследования максимумов и минимумов функции представляется несколько затрудненным, особенно в более сложных примерах, определение знака $f'(x)$ при значениях x как меньших, так и бóльших испытуемого. Во многих случаях этого можно избегнуть, если ввести в рассмотрение вторую производную $f''(x)$. Положим, что нам надо испытать значение $x = x_0$ в выражении второй производной и положим, что мы получили положительную величину, т. е. $f''(x_0) > 0$. Если принять $f'(x)$ за основную функцию, то $f''(x)$ будет ее производной и положительность этой производной в точке $x = x_0$ показывает, что сама основная функция $f'(x)$ возрастает в соответствующей точке, т. е. $f'(x)$ при переходе через нуль в точке $x = x_0$ должна идти от отрицательных значений к положительным. Таким образом, *в случае $f''(x_0) > 0$ в точке $x = x_0$ функция $f(x)$ будет достигать минимума. Точно так же*

можно показать, что в случае $f''(x_0) < 0$ *в точке* $x = x_0$ *функция* $f(x)$ *достигает максимума.* Если, наконец, при подстановке $x = x_0$ в выражение $f''(x)$ мы получим нуль, т. е. $f''(x_0) = 0$, то пользование второй производной не дает возможности исследовать значение $x = x_0$, и приходится обращаться к непосредственному исследованию знака $f'(x)$. Мы получаем, таким образом, изображенную в таблице схему:

x	$f'(x)$	$f''(x)$	$f(x)$
x_0	0	$-$	максимум
		$+$	минимум
		0	сомнительный случай

Из приведенных рассуждений непосредственно следует, что при наличии производной второго порядка необходимым условием максимума является неравенство $f''(x) \leqslant 0$, а необходимым условием минимума — неравенство $f''(x) \geqslant 0$. При этом мы можем определять максимум условием $f(x_1 + h) - f(x_1) \leqslant 0$ и минимум — условием $f(x_2 + h) - f(x_2) \geqslant 0$, как мы об этом говорили выше.

Пример. Требуется найти максимумы и минимумы функции

$$f(x) = \sin x + \cos x.$$

Эта функция имеет период 2π, т. е. не меняется при замене x на $x + 2\pi$. Достаточно исследовать промежуток изменения x от 0 до 2π. Составим производные первого и второго порядка

$$f'(x) = \cos x - \sin x, \quad f''(x) = -\sin x - \cos x.$$

Приравнивая первую производную нулю, получим уравнение

$$\cos x - \sin x = 0 \text{ или } \operatorname{tg} x = 1.$$

Корни этого уравнения из промежутка $(0, 2\pi)$ будут

$$x_1 = \frac{\pi}{4} \text{ и } x_2 = \frac{5\pi}{4}.$$

Исследуем эти значения x по знаку $f''(x)$:

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} = -\sqrt{2} < 0; \quad \text{максимум } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2};$$

$$f''\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sin\frac{5\pi}{4} - \cos\frac{5\pi}{4} = \sqrt{2} > 0; \text{ минимум } f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}.$$

В заключение обратим внимание на одно обстоятельство, которое иногда имеет место при нахождении максимумов и минимумов. Может случиться, что на графике функции имеются такие точки, в которых касательной или вовсе нет, или она параллельна оси OY (рис. 58). В точках первого рода производная $f'(x)$ вовсе не будет существовать, а в точках второго рода она будет равна бесконечности, так как угловой коэффициент прямой, параллельной оси OY, равен бесконечности. Но, как непосредственно видно из чертежа, в таких точках может встретиться максимум или минимум функции. Таким образом, мы должны, строго говоря, дополнить предыдущее правило нахождения максимумов и минимумов следующим указанием: *максимум и минимум функции $f(x)$ может встретиться не только в тех точках, где $f'(x)$ обращается в нуль, но и в тех точках, где она не существует или обращается в бесконечность.* Исследование таких точек надо производить по первой из схем, указанных выше, а именно — путем определения знака $f'(x)$ при значениях, меньших и больших исследуемого.

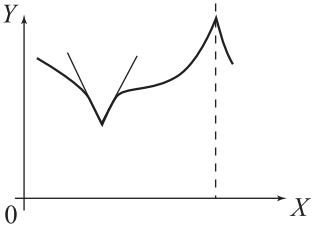

Рис. 58.

Во всем предыдущем мы занимались простейшим случаем непрерывной функции $f(x)$ с непрерывной производной, имеющей конечное число нулей в исследуемом промежутке. При последнем замечании отсутствие производной допускается также в конечном числе точек. Вообще настоящий и следующие два параграфа имеют целью быть наглядным введением в исследование свойств функции. Далее мы вернемся к строгому аналитическому изложению.

Пример. Требуется найти максимумы и минимумы функции

$$f(x) = (x-1)\sqrt[3]{x^2}.$$

Составим первую производную

$$f'(x) = \sqrt[3]{x^2} + \frac{2(x-1)}{3\sqrt[3]{x}} = \frac{5}{3}\,\frac{x-\frac{2}{5}}{\sqrt[3]{x}}.$$

Она обращается в нуль при $x = \frac{2}{5}$ и в бесконечность при $x = 0$. Исследуем последнее значение: числитель написанной выше дроби имеет при $x = 0$

знак минус и при всех значениях x, как бóльших, так и меньших нуля, но близких к нему, он будет иметь тот же знак. Знаменатель дроби при $x < 0$ имеет знак минус, а при $x > 0$ знак плюс. Следовательно, вся дробь имеет при $x < 0$ и близких к нулю знак плюс, а при $x > 0$ — знак минус, т. е. при $x = 0$ мы имеем максимум $f(0) = 0$. В точке $x = \frac{2}{5}$ будем иметь минимум

$$f\left(\frac{2}{5}\right) = -\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{4}{25}} = -\frac{3}{25}\sqrt[3]{20}.$$

59. Построение графиков. Разыскание максимумов и минимумов функции $f(x)$ существенным образом облегчает построение графика этой функции. Выясним на некоторых примерах простейшую схему построения графиков функций.

1. Пусть требуется построить график функции

$$y = (x-1)^2(x-2)^3,$$

исследованной нами в предыдущем номере. Мы получили там две вершины этой кривой, а именно максимум $(1, 0)$ и минимум $\left(\frac{7}{5}, -\frac{108}{3125}\right)$. Отметим эти точки на чертеже. Кроме того, полезно отметить и следы* искомой кривой на осях. При $x = 0$ мы имеем $y = -8$, т. е. след на оси OY будет $y = -8$.

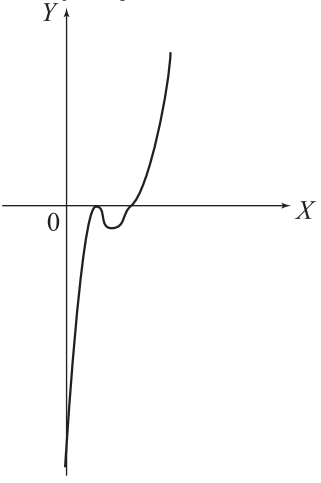

Рис. 59.

Приравнивая y нулю, т. е.

$$(x-1)^2(x-2)^3 = 0,$$

мы получим следы на оси OX. Один из них, $x = 1$, как мы уже выяснили, является вершиной, а другой, $x = 2$, как это было выяснено в предыдущем номере, вершиной не является, но в соответствующей точке графика касательная параллельна оси OX. Искомая кривая изображена на рис. 59.

2. Вычертим кривую

$$y = e^{-x^2}.$$

Составим первую производную

$$y' = -2xe^{-x^2}.$$

*Имеются в виду точки пересечения кривой с осями координат.

Приравнивая y' нулю, получим значение $x = 0$, которому, как нетрудно видеть, соответствует вершина (максимум) кривой с ординатой $y = 1$. Эта же точка дает и след кривой на оси OY. Приравнивая y нулю, получим уравнение $e^{-x^2} = 0$, которое не имеет решений, т. е. следов на оси OX кривая не имеет. Заметим, кроме того, что при стремлении x к $(+\infty)$ или $(-\infty)$ показатель степени у e^{-x^2} стремится к $(-\infty)$, и все выражение стремится к нулю, т. е. при беспредельном удалении направо и налево кривая беспредельно приближается к оси OX. Соответствующая всем полученным данным кривая изображена на рис. 60.

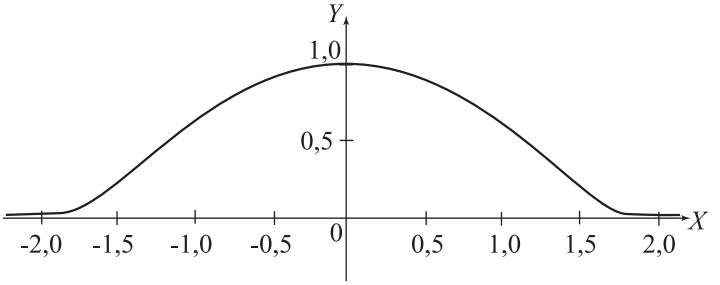

Рис. 60.

3. Построим кривую

$$y = e^{-ax} \sin bx \quad (a > 0),$$

которая дает график так называемого *затухающего колебания.* Множитель $\sin bx$ по абсолютному значению не превышает единицы, и вся кривая будет расположена между двумя кривыми

$$y = e^{-ax} \quad \text{и} \quad y = -e^{-ax}.$$

При стремлении x к $(+\infty)$ множитель e^{-ax}, а следовательно, и все произведение $e^{-ax} \sin bx$ будет стремиться к нулю, т. е. при беспредельном удалении направо кривая будет безгранично приближаться к оси OX. Следы кривой на оси OX определятся из уравнения

$$\sin bx = 0,$$

т. е. будут

$$x = \frac{k\pi}{b} \qquad (k \text{ — целое число}).$$

Определим первую производную

$$y' = -ae^{-ax}\sin bx + be^{-ax}\cos bx = e^{-ax}(b\cos bx - a\sin bx).$$

Но выражение, стоящее в круглых скобках, может быть, как известно, представлено в виде

$$b\cos bx - a\sin bx = K\sin(bx + \varphi_0),$$

где K и φ_0 — постоянные. Приравнивая первую производную нулю, получим уравнение

$$\sin(bx + \varphi_0) = 0,$$

которое дает

$$bx + \varphi_0 = k\pi, \quad \text{т. е.} \quad x = \frac{k\pi - \varphi_0}{b} \qquad (k \text{ — целое число}). \tag{1}$$

Когда x переходит через эти значения, $\sin(bx + \varphi_0)$ будет всякий раз менять свой знак. То же можно, очевидно, сказать и относительно производной y', так как

$$y' = Ke^{-ax}\sin(bx + \varphi_0),$$

а множитель e^{-ax} знака не меняет. Следовательно, этим корням соответствуют поочередно максимумы и минимумы функции. В случае отсутствия показательного множителя e^{-ax} мы имели бы синусоиду

$$y = \sin bx,$$

и абсциссы ее вершин получились бы из уравнения

$$\cos bx = 0,$$

т. е.

$$x = \frac{(2k-1)\pi}{2b} \quad (k \text{ — целое число}). \tag{1_1}$$

Мы видим, таким образом, что показательный множитель не только уменьшает амплитуды колебаний, но и смещает абсциссы вершин кривой. Сравнивая уравнения (1) и (1_1), нетрудно видеть, что это смещение равно постоянной величине $\left(-\frac{\pi}{2b} - \frac{\varphi_0}{b}\right)$. На рис. 61 изображен график затухающего колебания при $a = 1$ и $b = 2\pi$. Вершины кривой не находятся на пунктирных линиях, соответствующих уравнениям $y = \pm e^{-ax}$. Это происходит вследствие указанного выше смещения вершин.

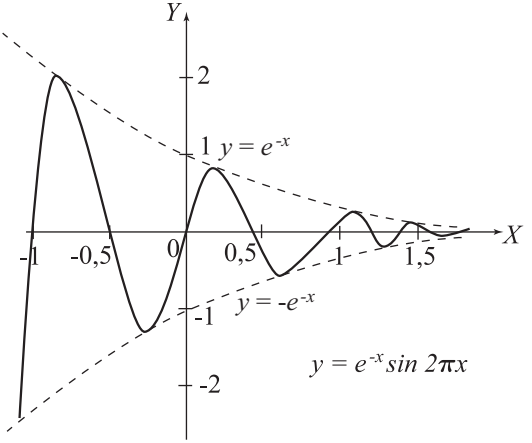

Рис. 61.

4. Построим кривую

$$y = \frac{x^3 - 3x}{6}.$$

Составляем производные первого и второго порядка

$$y' = \frac{x^2 - 1}{2}, \quad y'' = x.$$

Приравнивая первую производную нулю, получим значения $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$. Подставляя эти значения во вторую производную, убедимся, что первому значению будет соответствовать минимум, а второму — максимум. Подставляя эти значения в выражение для y, определим соответствующие вершины кривой:

$$\left(-1, \frac{1}{3}\right), \quad \left(1, -\frac{1}{3}\right).$$

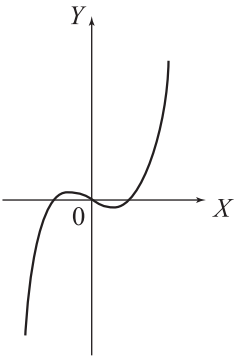

Рис. 62.

Полагая $x = 0$, получим $y = 0$, т. е. начало координат $(0, 0)$ лежит на кривой. Наконец, приравнивая y нулю, получим, кроме $x = 0$, еще два значения $x = \pm\sqrt{3}$, т. е. окончательно точки пересечения кривой с осями координат будут $(0, 0)$, $(\sqrt{3}, 0)$ и $(-\sqrt{3}, 0)$.

Отметим еще, что при одновременной замене x и y на $(-x)$ и $(-y)$ обе части уравнения кривой меняют лишь знак, т. е. начало координат есть центр симметрии кривой (рис. 62).

60. Наибольшее и наименьшее значения функций. Пусть рассматриваются значения функции $f(x)$ при значениях независимой переменной x из промежутка (a, b), т. е. при $a \leqslant x \leqslant b$, и пусть требуется найти наибольшее и наименьшее из этих значений. При указанном условии функция $f(x)$ будет достигать наибольшего и наименьшего значения [35], т. е. соответствующий этой функции график будет иметь в упомянутом промежутке наибольшую и наименьшую ординаты. Согласно приведенным выше правилам, мы сможем найти все максимумы и минимумы функции, заключающиеся внутри промежутка (a, b). Если функция $f(x)$ имеет свою наибольшую ординату внутри этого промежутка, то эта наибольшая ордината будет, очевидно, совпадать с наибольшим максимумом функции внутри промежутка (a, b). Но может оказаться, что наибольшая ордината находится не внутри промежутка, а на одном из его концов $x = a$ и $x = b$. Поэтому для нахождения, например, наибольшего значения функции недостаточно сравнить все ее максимумы внутри промежутка и взять наибольший, но необходимо также принять во внимание и значение функции на концах промежутка. Точно так же для определения наименьшего значения функции надо взять все ее минимумы, лежащие внутри промежутка, и граничные значения функции при $x = a$ и $x = b$. Заметим при этом, что максимумы и минимумы могут вовсе отсутствовать, а наибольшее и наименьшее значения у непрерывной функции в ограниченном промежутке (a, b) обязательно будут существовать.

Отметим некоторые частные случаи, когда нахождение наименьших и наибольших значений производится наиболее просто. Если, например, функция $f(x)$ возрастает в промежутке (a, b), то очевидно, что при $x = a$ она будет принимать наименьшее, а при $x = b$ наибольшее значение. Для убывающей функции картина будет противоположной.

Если функция имеет внутри промежутка один максимум и не имеет минимумов, то этот единственный максимум и дает наибольшее значение функции (рис. 63), так что в этом случае для

определения наибольшего значения функции вовсе не надо определять значений функций на концах промежутка. Точно так же, если функция имеет внутри промежутка один минимум и не имеет вовсе максимумов, то упомянутый единственный минимум и дает наименьшее значение функции. Указанные только что обстоятельства будут иметь место в первых из четырех изложенных ниже задач.

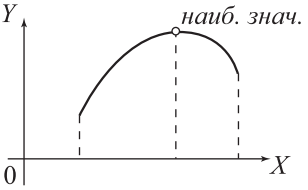

Рис. 63.

1. *Дан отрезок длины l. Требуется разделить его на две части так, чтобы площадь прямоугольника, построенного на них, была наибольшей.*

Пусть x — длина одной из частей отрезка, $(l-x)$ — длина другой его части. Принимая во внимание, что площадь прямоугольника равна произведению его соседних сторон, видим, что задача сводится к нахождению тех значений x, при которых функция

$$f(x) = x(l-x)$$

достигает наибольшего значения в промежутке $(0, l)$ изменения x. Составим производные первого и второго порядка

$$f'(x) = (l-x) - x = l - 2x, \quad f''(x) = -2 < 0.$$

Приравнивая первую производную нулю, получим единственное значение $x = \frac{l}{2}$, которому и соответствует максимум, так как $f''(x)$ постоянно отрицательна. Таким образом, наибольшая площадь будет у квадрата со стороною $\frac{l}{2}$.

2. *Из круга радиуса R вырезается сектор и из оставшейся части круга склеивается конус. Требуется определить угол вырезанного сектора так, чтобы объем конуса был наибольшим.*

Примем за независимую переменную x не угол вырезанного сектора, а его дополнение до 2π, т. е. угол оставшегося сектора. При значениях x, близких к 0 и 2π, объем конуса будет близок к нулю, и, очевидно, внутри промежутка $(0, 2\pi)$ будет существовать такое значение x, при котором этот объем будет наибольшим.

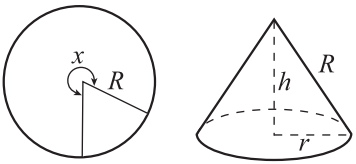

Рис. 64.

При склеивании оставшейся части круга в конус (рис. 64) получится такой конус, у которого образующая равна R, длина окружности основания равна Rx, радиус основания $r = \frac{Rx}{2\pi}$ и высота

$$h = \sqrt{R^2 - \frac{R^2x^2}{4\pi^2}} = \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2}.$$

Объем этого конуса будет

$$v(x) = \frac{1}{3}\pi\frac{R^2x^2}{4\pi^2}\cdot\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2} = \frac{R^3}{24\pi^2}x^2\sqrt{4\pi^2 - x^2}.$$

При отыскании наибольшего значения этой функции мы можем не обращать внимания на постоянный множитель $\frac{R^3}{24\pi^2}$. Оставшееся произведение $x^2\sqrt{4\pi^2 - x^2}$ положительно и, следовательно, будет достигать наибольшего значения при тех же значениях x, при которых достигает наибольшего значения его квадрат. Таким образом, мы можем рассматривать функцию

$$f(x) = 4\pi^2x^4 - x^6$$

внутри промежутка $(0, 2\pi)$. Составляем первую производную

$$f'(x) = 16\pi^2x^3 - 6x^5.$$

Она существует при всех значениях x. Приравнивая ее к нулю, получим три значения:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}, \quad x_3 = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Первые два значения *не лежат внутри* промежутка $(0, 2\pi)$. Остается единственное значение $x_3 = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$, лежащее внутри этого промежутка; но выше мы видели, что наибольшее значение внутри этого промежутка должно встретиться, а следовательно, и не исследуя значения x_3, можем утверждать, что ему будет соответствовать наибольший объем конуса.

3. *Прямою L плоскость разделена на две части (среды) I и II. Точка двигается в среде I со скоростью v_1, в среде II — со скоростью v_2. По какому пути должна двигаться точка, чтобы возможно скорее попасть из точки A среды I в точку B среды II?*

Пусть AA_1 и BB_1 — перпендикулярны из точек A и B на прямую L. Введем следующие обозначения: $\overline{AA_1} = a$, $\overline{BB_1} = b$, $\overline{A_1B_1} = c$, и на прямой L будем отсчитывать абсциссы в направлении $\overline{A_1B_1}$ (рис. 65).

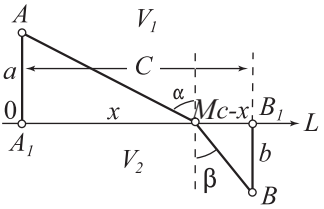

Рис. 65.

Ясно, что как в среде I, так и в среде II путь точки должен быть прямолинейным, но путь по прямой AB не будет, вообще говоря, «скорейшим путем». Итак, «скорейший путь» будет состоять из двух прямолинейных отрезков $\overline{AM}$ и $\overline{MB}$, причем точка M должна лежать на прямой L. За независимую переменную x выберем абсциссу точки M: $x = \overline{A_1M}$. Время t, наименьшее значение которого ищется, определится по формуле

$$t = f(x) = \frac{AM}{v_1} + \frac{MB}{v_2} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (c - x)^2}}{v_2}$$

в промежутке $(-\infty, +\infty)$. Составим производные первого и второго порядков:

$$f'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c - x}{v_2\sqrt{b^2 + (c - x)^2}},$$

$$f''(x) = \frac{a^2}{v_1(a^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{b^2}{v_2[b^2 + (c - x)^2]^{3/2}}.$$

Обе производные существуют при всех значениях x, и $f''(x)$ всегда имеет знак $(+)$. Следовательно, $f'(x)$ возрастает в промежутке $(-\infty, +\infty)$ и не может обратиться в нуль более одного раза. Но

$$f'(0) = -\frac{c}{v_2\sqrt{b^2 + c^2}} < 0$$

и

$$f'(c) = \frac{c}{v_1\sqrt{a^2 + c^2}} > 0,$$

а потому уравнение

$$f'(x) = 0$$

имеет единственный корень x_0 между 0 и c, которому соответствует единственный минимум функции $f(x)$, так как $f''(x) > 0$. Абсциссы 0 и c соответствуют точкам A_1 и B_1, а потому искомая точка M будет находиться между точками A_1 и B_1, что можно было бы показать и из элементарных геометрических соображений.

Поясним геометрический смысл полученного решения. Обозначим через α и β углы, составленные отрезками $\overline{AM}$ и $\overline{BM}$ с перпендикуляром, восставленным из точки M к L. Абсцисса x искомой точки M должна обращать в нуль $f'(x)$, т. е. должна удовлетворять уравнению

$$\frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{c-x}{v_2\sqrt{b^2+(c-x)^2}},$$

которое можно переписать так:

$$\frac{A_1M}{v_1AM} = \frac{MB_1}{v_2BM}$$

или

$$\frac{\sin\alpha}{v_1} = \frac{\sin\beta}{v_2}, \text{ т. е. } \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2};$$

«скорейший путь» будет тот, при котором отношение синусов углов α и β будет равно отношению скоростей в средах I и II. Результат этот дает нам известный закон преломления света, и, следовательно, преломление света совершается так, как будто луч света выбирает «скорейший путь» из точек одной среды в точки другой.

4. Положим, что экспериментально определяется величина x, и n одинаково тщательно произведенных наблюдений дают для нее n значений

$$a_1, a_2, \ldots, a_n,$$

неодинаковых ввиду неточности инструментов. «Наиболее вероятным» значением величины x будем считать то, при котором сумма квадратов ошибок будет наименьшей. Таким образом, нахождение этого значения приводится к нахождению x из условия наименьшего значения функции

$$f(x) = (x-a_1)^2 + (x-a_2)^2 + \cdots + (x-a_n)^2$$

в промежутке $(-\infty, +\infty)$. Составляем производные первого и второго порядков

$$f'(x) = 2(x-a_1) + 2(x-a_2) + \cdots + 2(x-a_n),$$
$$f''(x) = 2 + 2 + \cdots + 2 = 2n > 0.$$

Приравнивая первую производную нулю, получим единственное значение

$$x = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},$$

которому будет соответствовать минимум ввиду положительности второй производной. Таким образом *«наиболее вероятным» значением x является среднее арифметическое значений, полученных из наблюдений.*

5. *Найти кратчайшее расстояние точки M до окружности.*

Примем за начало координат центр окружности O, за ось OX — прямую OM. Пусть $OM = a$ и пусть R есть радиус окружности. Уравнение окружности будет

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

а расстояние точки M с координатами $(a, 0)$ до любой точки окружности

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2}.$$

Будем искать наибольшее значение квадрата этого расстояния. Подставив вместо y^2 его выражение $R^2 - x^2$ из уравнения окружности, мы получим функцию

$$f(x) = (x-a)^2 + (R^2 - x^2) = -2ax + a^2 + R^2,$$

где независимая переменная x может изменяться в промежутке $(-R \leqslant x \leqslant R)$. Так как первая производная

$$f'(x) = -2a$$

отрицательна при всех значениях x, то функция $f(x)$ убывает и достигает, следовательно, наименьшего значения при $x = R$ на правом конце промежутка. Кратчайшим расстоянием будет длина отрезка $\overline{PM}$ (рис. 66).

6. *В прямой круговой конус вписать прямой круговой цилиндр (с основанием, лежащим в основании конуса) так, чтобы его полная поверхность была наибольшей.*

Обозначим радиус основания и высоту конуса буквами R и H а радиус основания и высоту цилиндра — буквами r и h. Функция, наибольшее значение которой ищется, будет в данном случае

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$

Переменные величины r и h связаны между собой тем условием, что цилиндр вписан в данный конус. Из подобия треугольников ABD и AMN имеем (рис. 67):

$$\frac{MN}{AN} = \frac{BD}{AD}, \text{ или } \frac{h}{R-r} = \frac{H}{R},$$

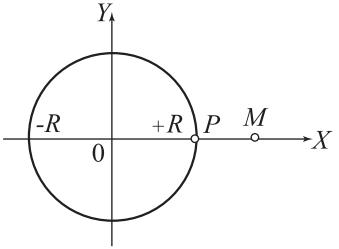

Рис. *66.*

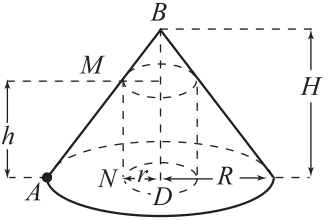

Рис. 67.

откуда

$$h = \frac{R-r}{R}H.$$

Подставляя это значение h в выражение для S, получим

$$S = 2\pi\left[r^2 + rH\left(1 - \frac{r}{R}\right)\right].$$

Таким образом, S оказывается функцией одной независимой переменной r, которая может изменяться в промежутке $0 \leqslant r \leqslant R$. Составим производные первых двух порядков:

$$\frac{dS}{dr} = 2\pi\left(2r + H - \frac{2r}{R}H\right), \quad \frac{d^2S}{dr^2} = 4\pi\left(1 - \frac{H}{R}\right).$$

Приравнивая нулю $\frac{dS}{dr}$, получим для r одно значение

$$r = \frac{HR}{2(H-R)}. \tag{2}$$

Для того чтобы это значение находилось внутри промежутка $(0, R)$, необходимо выполнение неравенств

$$0 < \frac{HR}{2(H-R)} \text{ и } \frac{HR}{2(H-R)} < R. \tag{3}$$

Первое из этих неравенств равносильно тому, что H должно быть больше R. Умножая обе части второго неравенства на положительную величину $2(H-R)$, получим

$$R < \frac{H}{2}.$$

При выполнении этого условия $\frac{d^2S}{dr^2}$ имеет знак $(-)$; значению (2) соответствуют единственный максимум функции S и наибольшая величина

поверхности цилиндра. Эту величину можно легко определить, подставляя значение r из (2) в выражение для S.

Предположим теперь, что значение (2) не лежит внутри промежутка $(0, R)$, т. е. что не выполнено одно из неравенств (3). При этом могут представиться две возможности: или $H \leqslant R$ или $H > R$, но $R \geqslant \frac{H}{2}$. Обе они могут быть охарактеризованы одним неравенством

$$H \leqslant 2R. \tag{4}$$

Преобразуем выражение для $\frac{dS}{dr}$:

$$\frac{dS}{dr} = 2\pi\left(2r + H - \frac{2r}{R}H\right) = \frac{2\pi}{R}[(2R - H)r + H(R - r)].$$

Из этого выражения видно, что при выполнении условия (4) $\frac{dS}{dr} > 0$ при $0 < r < R$, т. е. функция S возрастает в промежутке $(0, R)$, а потому достигает наибольшего значения при $r = R$. При этом значении r, очевидно, $h = 0$, и полученное решение можно рассматривать как сплющенный цилиндр, основание которого совпадает с основанием конуса и вся поверхность которого приводится к $2\pi R^2$.

61. Теорема Ферма. Выше мы изложили, пользуясь элементарными геометрическими соображениями, способы исследования возрастания и убывания функций, нахождения их максимумов и минимумов, а также наибольших и наименьших значений. Сейчас мы переходим к строгому аналитическому изложению некоторых теорем и формул, которые дадут нам аналитическое доказательство справедливости приведенных выше правил, а также позволят продвинуть исследование функций еще несколько дальше. В дальнейшем изложении мы будем уже вполне отчетливо и подробно перечислять все условия, при которых соответствующие теоремы и формулы имеют место.

Теорема Ферма. *Если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке (a, b), в каждой точке внутри этого промежутка имеет производную и в некоторой точке $x = c$ внутри промежутка достигает наибольшего (или наименьшего) значения, то в этой точке $x = c$ первая производная равна нулю, т. е. $f'(c) = 0$.*[*]

[*] Часто теорема Ферма формулируется для точек максимумов и минимумов как необходимое условие существования экстремума.

Итак, положим для определенности, что значение $f(c)$ является наибольшим значением функции. Для этого случая, когда это есть наименьшее значение, доказательство может быть проведено совершенно аналогичным образом. Итак, согласно условию, точка $x = c$ лежит внутри промежутка и разность $f(c+h)-f(c)$ будет отрицательной или, во всяком случае, не положительной, при любом h как положительном, так и отрицательном:

$$f(c+h) - f(c) \leqslant 0.$$

Составим отношение

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

Числитель написанной дроби, как сказано, меньше или равен нулю, а потому

$$\left.\begin{aligned} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} &\leqslant 0 \quad \text{при} \quad h > 0, \\ \frac{f(c+h) - f(c)}{h} &\geqslant 0 \quad \text{при} \quad h < 0, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Точка $x = c$ лежит внутри промежутка, и в ней по условию существует производная, т. е. написанная выше дробь стремится к определенному пределу $f'(c)$, если h стремится к нулю со стороны положительных значений. При этом, переходя к пределу в первом из неравенств (5), получим

$$f'(c) \leqslant 0.$$

Точно так же переход к пределу при $h \to 0$ во втором неравенстве (5) дает

$$f'(c) \geqslant 0.$$

Сопоставляя эти неравенства, мы получим требуемый результат:

$$f'(c) = 0.$$

62. Теорема Ролля. *Если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке (a, b), имеет производную в каждой точке внутри этого*

промежутка и значения функции на концах этого промежутка равны, т. е. $f(a) = f(b)$, то внутри промежутка существует по крайней мере одно такое значение $x = c$, при котором производная обращается в нуль, т. е. $f'(c) = 0$.

Непрерывная функция $f(x)$ должна достигать в рассматриваемом промежутке наименьшего значения m и наибольшего значения M. Если бы оказалось, что эти наименьшее и наибольшее значение одинаковы, т. е. $m = M$, то отсюда следовало бы, очевидно, что функция во всем промежутке сохраняет постоянное значение, равное m (или M). Но, как известно, производная от постоянной равна нулю, и, следовательно, в этом простом случае во всякой точке внутри промежутка производная была бы равна нулю. Обращаясь к рассмотрению общего случая, мы можем, следовательно, считать, что $m < M$. Так как значения функции на концах по условию одинаковы, т. е. $f(a) = f(b)$, то по крайней мере одно из чисел m или M отлично от этого общего значения на концах. Положим, например, что это будет M, т. е. что наибольшее значение функции достигается не на концах, а внутри промежутка. Пусть $x = c$ будет та точка, где это значение достигается. Согласно теореме Ферма, мы будем иметь в этой точке $f'(c) = 0$, что и доказывает теорему Ролля.

В частном случае, если $f(a) = f(b) = 0$, можно теорему Ролля формулировать кратко так: *между двумя корнями функции заключается по крайней мере один корень первой производной.*

Теорема Ролля имеет простое геометрическое значение. По условию, $f(a) = f(b)$, т. е. ординаты кривой $y = f(x)$, соответствующие концам промежутка, равны, и внутри этого промежутка существует производная, т. е. кривая имеет определенную касательную. Теорема Ролля утверждает, что при этом внутри промежутка будет существовать по крайней мере одна такая точка, в которой производная будет равна нулю, т. е. в которой касательная будет параллельна оси OX (рис. 68).

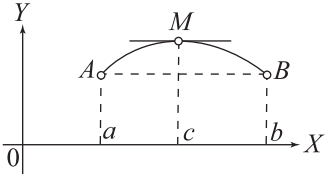

Рис. 68.

З а м е ч а н и е. Если не выполнено условие теоремы Ролля о существовании производной $f'(x)$ во всех точках внутри промежутка, то теорема может оказаться и неверной.

Так, например, функция

$$f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$$

непрерывна в промежутке $(-1, +1)$ и $f(-1) = f(1) = 0$, но производная

$$f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

внутри промежутка в нуль не обращается. Происходит это от того, что $f'(x)$ не существует (обращается в бесконечность) при $x = 0$ (рис. 69). Другой пример дает кривая, изображенная на рис. 70. В этом случае мы имеем кривую $y = f(x)$, у которой $f(a) = f(b) = 0$. Однако из чертежа видно, что касательная внутри промежутка

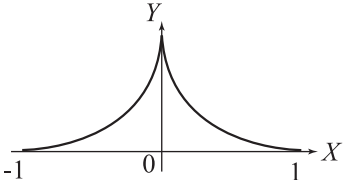

Рис. 69.

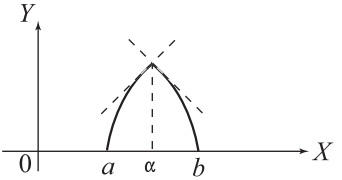

Рис. 70.

(a, b) не может быть параллельна оси OX, т. е. $f'(x)$ не обращается в нуль. Происходит это от того, что кривая в точке $x = \alpha$ имеет две различные касательные, справа и слева от этой точки, и, следовательно, в этой точке не существует определенной производной, и условие теоремы Ролля о существовании во всех точках внутри промежутка не выполнено.

63. Формула Лангранжа. Положим, что функция $f(x)$ непрерывна в промежутке (a, b) и имеет внутри этого промежутка производную, но условие $f(a) = f(b)$ теоремы Ролля может быть не выполнено. Составим функцию

$$F(x) = f(x) + \lambda x,$$

где λ — постоянная, которую мы определим так, чтобы новая функция $F(x)$ удовлетворяла упомянутому условию теоремы Ролля, т. е.

потребуем, чтобы

$$F(a) = F(b)$$

или

$$f(a) + \lambda a = f(b) + \lambda b,$$

откуда

$$\lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Применяя теперь к $F(x)$ теорему Ролля, можем утверждать, что между a и b будет находиться такое значение $x = c$, при котором

$$F'(c) = f'(c) + \lambda = 0 \quad (a < c < b),$$

откуда, подставляя найденное выше значение λ,

$$f'(c) = -\lambda \quad \text{или} \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Последнее равенство можно переписать так:

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Равенство это называется *формулой Лангранжа*. Значение c заключается между a и b, а потому отношение $\frac{c-a}{b-a} = \theta$ заключается между нулем и единицей, и мы можем написать

$$c = a + \theta(b - a) \quad (0 < \theta < 1),$$

и формула Лангранжа перепишется в виде:

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(a + \theta(b - a)) \quad (0 < \theta < 1).$$

Полагая $b = a + h$, получим еще следующий вид формулы:

$$f(a + h) - f(a) = hf'(a + \theta h).$$

Формула Лагранжа дает точное выражение для приращения $f(b) - f(a)$ функции $f(x)$, а потому называется также *формулой конечных приращений.*[*]

[*] То есть утверждается, что существует такая точка c ($c = a + \theta(b - a)$), что такое равенство имеет место.

Мы знаем, что производная постоянной равна нулю. Из формулы Лангранжа мы можем вывести обратное предложение: *если производная $f'(x)$ во всех точках промежутка (a, b) равна нулю, то функция $f(x)$ постоянна в этом промежутке.*

В самом деле, возьмем произвольное значение x из промежутка (a, b) и, применяя формулу Лангранжа к промежутку (a, x), получим:

$$f(x) - f(a) = (x - a)f'(\xi) \quad (a < \xi < x);$$

но по условию $f'(\xi) = 0$ и, следовательно,

$$f(x) - f(a) = 0, \quad \text{т. е.} \quad f(x) = f(a) = \text{постоянной}.$$

Относительно величины c, входящей в формулу Лангранжа, мы знаем только то, что она заключается между a и b, и поэтому формула Лангранжа не дает возможности точного вычисления приращения функции через производную, но с ее помощью можно произвести оценку той ошибки, которую мы делаем, заменяя приращение функции ее дифференциалом.

Пример. Пусть

$$f(x) = \log_{10} x.$$

Производная

$$f'(x) = \frac{1}{x}\frac{1}{\log 10} = \frac{M}{x} \quad (M = 0,43429\ldots),$$

и формула Лангранжа даст

$$\log_{10}(a + h) - \log_{10} a = h\frac{M}{a + \theta h} \qquad (0 < \theta < 1)$$

или

$$\log_{10}(a + h) = \log_{10} a + h\frac{M}{a + \theta h}.$$

Заменяя приращение дифференциалом, получим приближенную формулу

$$\log_{10}(a + h) - \log_{10} a = h\frac{M}{a}, \qquad \log_{10}(a + h) = \log_{10} a + h\frac{M}{a}.$$

Сравнивая это приближенное равенство с точным, полученным по формуле Лангранжа, увидим, что ошибка

$$h\frac{M}{a} - h\frac{M}{a + \theta h} = \frac{\theta h^2 M}{a(a + \theta h)}.$$

Полагая $a = 100$ и $h = 1$, получим приближенное равенство

$$\log_{10} 101 = \log_{10} 100 + \frac{M}{100} = 2,00434\ldots$$

с ошибкой

$$\frac{\theta M}{100(100+\theta)} \quad (0 < \theta < 1).$$

Заменяя в числителе этой дроби θ единицей, а в знаменателе нулем, увеличим дробь и можем поэтому сказать, что ошибка вычисленного значения $\log_{10} 101$ меньше

$$\frac{M}{100^2} = 0,00004\ldots$$

Перепишем формулу Лангранжа в виде:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c) \quad (a < c < b).$$

Обращаясь к графику функции $y = f(x)$ (рис. 71), заметим, что отношение

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \operatorname{tg}\angle CAB$$

дает угловой коэффициент хорды AB, а $f'(c)$ дает угловой коэффициент касательной в некоторой точке M дуги AB кривой. Таким образом, формула Лангранжа равносильна следующему утверждению: *на дуге кривой имеется такая точка, в которой касательная параллельна хорде.* Частным случаем этого утверждения, когда хорда параллельна оси OX, т. е. $f(a) = f(b)$, является теорема Ролля.

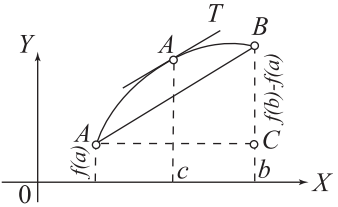

Рис. 71.

З а м е ч а н и е. Из формулы Лангранжа непосредственно вытекают те признаки возрастания и убывания, которые были установлены нами выше из чертежа. Действительно, положим, что внутри некоторого промежутка первая производная $f'(x)$ положительна и пусть x и $x+h$ — две точки из этого промежутка. Из формулы Лангранжа:

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x+\theta h) \quad (0 < \theta < 1)$$

видно, что при положительных h разность, стоящая слева, будет величиной положительной, так как оба множителя в произведении, стоящем справа, в этом случае положительны. Таким образом, предполагая положительность производной в некотором промежутке, мы получили

$$f(x+h) - f(x) > 0,$$

т. е. функция возрастает в этом промежутке. Точно так же из написанной формулы вытекает и признак убывания.

Заметим здесь же, что рассуждения, приведенные нами при доказательстве теоремы Ферма, остаются вполне применимыми и для того случая, когда в рассматриваемой точке функция достигает не обязательно наибольшего или наименьшего значения, а только лишь максимума или минимума. Эти рассуждения докажут, что в таких точках первая производная должна быть равна нулю, если она существует.

64. Формула Коши. Положим, что функция $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в промежутке (a, b) и в каждой точке внутри этого промежутка имеют производную, причем производная $\varphi'(x)$ ни в одной из точек внутри промежутка не обращается в нуль. Применяя к функции $\varphi(x)$ формулу Лангранжа, получим

$$\varphi(b) - \varphi(a) = (b-a)\varphi'(c_1) \quad (a < c_1 < b);$$

но по условию $\varphi'(c_1) \neq 0$ и, следовательно,

$$\varphi(b) - \varphi(a) \neq 0.$$

Составим функцию

$$F(x) = f(x) + \lambda\varphi(x),$$

где λ — постоянная, которую мы определим так, чтобы было

$$F(a) = F(b),$$

то есть

$$f(a) + \lambda\varphi(a) = f(b) + \lambda\varphi(b),$$

откуда

$$\lambda = -\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)}.$$

При таком выборе λ к функции $F(x)$ приложима теорема Ролля, и, следовательно, будет существовать такое значение $x = c$, при котором

$$F'(c) = f'(c) + \lambda\varphi'(c) = 0 \quad (a < c < b).$$

Это уравнение дает

$$\frac{f'(c)}{\varphi(c)} = -\lambda \quad (\varphi'(c) \neq 0),$$

откуда, подставляя найденное для λ значение, получим

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \quad (a < c < b)$$

или

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'[a + \theta(b - a)]}{\varphi'[a + \theta(b - a)]} \quad (0 < \theta < 1), \tag{6}$$

или

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{\varphi(a + h) - \varphi(a)} = \frac{f'(a + \theta h)}{\varphi'(a + \theta h)}.$$

Это и есть *формула Коши*. Полагая в этой формуле $\varphi(x) = x$, будем иметь $\varphi'(x) = 1$, и формула примет вид:

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c),$$

т. е. мы получили формулу Лангранжа как частный случай формулы Коши.

65. Раскрытие неопределенностей. Положим, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны при $a < x \leqslant a + k$, k — некоторое положительное число, имеют непрерывные производные и $\psi'(x)$ не обращается в нуль при указанных значениях x. Положим, кроме того, что $\lim \varphi(x) = 0$ и $\lim \psi(x) = 0$ при $x \to a + 0$ [26]. Полагая $\varphi(a) = \psi(a) = 0$, мы получим функции, непрерывные вплоть до

$x = a$, т. е. при $a \leqslant x \leqslant a + k$. При $x \to a + 0$ к частному $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, которое при $x = a$ представляет собою неопределенность вида $\frac{0}{0}$, не применима теорема о пределе частного. Укажем способ раскрытия такой неопределенности, т. е. способ нахождения предела $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ при $x \to a + 0$.

Докажем предварительно следующему теорему: *если при сделанных выше предположениях отношение $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ стремится к пределу b при $x \to a + 0$, то к тому же пределу стремится и отношение функций $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$.*

Принимая во внимание, что

$$\varphi(a) = \psi(a) = 0,$$

и применяя формулу Коши [64], получим

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\psi(x) - \psi(a)} = \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)} \quad (\xi \text{ между } a \text{ и } x). \tag{7}$$

Заметим, что при сделанных относительно $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ предположениях применима формула Коши.

Если $x \to a + 0$, то ξ, заключающееся между a и x и зависящее от x, стремится к a. При этом, по условию, правая часть равенства (7) стремится к пределу b, а потому и левая часть имеет тот же предел. Отметим, что этот предел может быть и бесконечным. Таким образом приходим к правилу:

При разыскании предела частного $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ в случае неопределенности $\frac{0}{0}$ можно заменить отношение функций отношением их производных и отыскивать предел этого нового отношения.

Правило это дано французским математиком Лопиталем и называется обычно его именем.

Если отношение производных $\frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)}$ также приводит к неопределенности $\frac{0}{0}$ и функции $\varphi'(x)$ и $\psi'(x)$ удовлетворяют тем условиям, которые мы выше формулировали для $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, то и к отношению $\frac{\varphi'(x)}{\psi(x)}$ можно применить правило Лопиталя, и т. д.

Мы рассмотрели случай $a < x \leqslant a + k$. Совершенно аналогично рассматривается случай $a - k \leqslant x < a$, т. е. $x \to a - 0$. В дальнейших

примерах предел не зависит от того, стремится ли x справа или слева, и мы пишем $x \to a$.

Мы рассмотрели тот случай, когда x стремится к конечному пределу a. Правило справедливо и для того случая, когда x стремится к бесконечности. На доказательстве этого мы не останавливаемся.

Приложим правило Лопиталя к нескольким примерам.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^n - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{n(1+x)^{n-1}}{1} = n;$

2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{6x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x}{6} = \dfrac{1}{6},$

т. е. разность $x - \sin x$ есть бесконечно малая третьего порядка по сравнению с x.

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - x\cos x}{x - \sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos x + x\sin x}{1 - \cos x} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x + \sin x + x\cos x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos x + \cos x - x\cos x}{\cos x} = 3.$$

Результат этого примера приводит к практически удобному способу *спрямления дуги окружности.*

Рассмотрим окружность, радиус которой примем за единицу. За ось OX выберем один из диаметров этой окружности, а за ось OY — касательную в конце этого диаметра (рис. 72). Возьмем некоторую дугу OM и пусть на оси OY имеется отрезок ON, равный дуге OM, и проведем прямую NM. Пусть P — точка ее пересечения с осью OX. Обозначим через u длину дуги OM (радиус принят за единицу). Уравнение прямой NM в отрезках имеет вид:

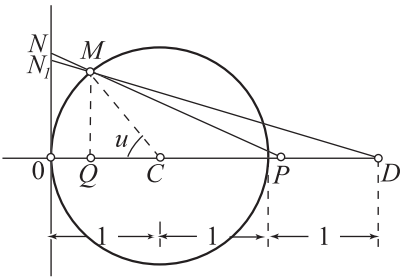

Рис. 72.

$$\frac{x}{OP} + \frac{y}{u} = 1.$$

Для вычисления длины отрезка OP заметим, что на прямой NM лежит точка M с координатами

$$x = OQ = 1 - \cos u, \quad y = QM = \sin u.$$

Эти координаты должны удовлетворять написанному уравнению:

$$\frac{1 - \cos u}{OP} + \frac{\sin u}{u} = 1, \quad \text{откуда} \quad OP = \frac{u - u\cos u}{u - \sin u}.$$

Результат примера 3 показывает, что, при $OP \to 3$ $u \to 0$, т. е. точка P на оси OX будет стремиться к точке D, расстояние которой от начала координат равно утроенному радиусу окружности. Отсюда получается простой способ приближенного спрямления дуги окружности. Для спрямления дуги OM надо отложить от точки O отрезок OD, равный трем радиусам окружности, и провести прямую DM. Отрезок ON_1, отсекаемый этой прямой на оси OY, и даст приближенно длину дуги OM. Способ этот приводит к очень хорошим результатам, особенно для небольших дуг; но даже для дуги $\pi/2$ относительная ошибка составляет приблизительно 5%.

66. Различные виды неопределенностей. Доказанное в [65] правило применимо и к случаю неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$. В дальнейшем мы не будем отличать стремление x к a слева или справа и будем писать для краткости $x \to a$. Предположим, что при этом непрерывные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ стремятся к $(+\infty)$ или $(-\infty)$. Для определенности пусть

$$\lim_{x\to a} \varphi(x) = \lim_{x\to a} \psi(x) = +\infty \tag{8}$$

и

$$\lim_{x\to a} \frac{\varphi'(x)}{\psi'(x)} = b. \tag{9}$$

Покажем, что отношение $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ стремится к тому же пределу b, причем предполагается, что $\psi'(x)$ не обращается в нуль при значениях x, близких к a.

Рассмотрим два значения независимой переменной x и x_0, близкие к a и такие, что x заключаются между x_0 и a. По формуле Коши будем иметь

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)} \qquad (\xi \text{ между } x \text{ и } x_0),$$

но, с другой стороны,

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \frac{1 - \frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}}{1 - \frac{\psi(x_0)}{\psi(x)}}.$$

Отметим, что из (8) непосредственно следует, что $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ отличны от нуля при значениях x, близких к a. Сравнивая эти два выражения, получим

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\frac{1-\frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}}{1-\frac{\psi(x_0)}{\psi(x)}}=\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}$$

или

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\varphi'(\xi)}{\psi'(\xi)}\frac{1-\frac{\psi(x_0)}{\psi(x)}}{1-\frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}}, \tag{10}$$

где ξ заключается между x и x_0 и, следовательно, между a и x_0. Возьмем x_0 достаточно близким к a; тогда, в силу условия (9), мы можем считать, что первый множитель в правой части равенства (10) будет сколь угодно мало отличаться от b при любом выборе x между x_0 и a. Закрепив, таким образом, значение x_0, будем приближать x к a. Тогда в силу условия (8) второй множитель в правой части равенства (10) будет стремиться к единице, а потому мы можем утверждать, что отношение $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, стоящее в левой части равенства (10), при значениях x, близких к a, будет сколь угодно мало отличаться от b, т. е.

$$\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=b.$$

Из доказанной теоремы следует, что правило Лопиталя применимо и для раскрытия неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Отметим еще некоторые виды неопределенностей. Рассмотрим произведение $\varphi(x)\psi(x)$, и пусть

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=0$$

и

$$\lim_{x\to a}\psi(x)=\infty.$$

Это будет неопределенность вида $0\cdot\infty$. Нетрудно привести ее к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\varphi(x)\psi(x)=\frac{\varphi(x)}{\frac{1}{\psi(x)}}=\frac{\psi(x)}{\frac{1}{\varphi(x)}}.$$

Рассмотрим, наконец, выражение $\varphi(x)^{\psi(x)}$ и пусть

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=1 \text{ и } \lim_{x\to a}\psi(x)=\infty.$$

Это будет случай неопределенности вида 1^∞. Рассмотрим логарифм данного выражения

$$\log[\varphi(x)^{\psi(x)}]=\psi(x)\log\varphi(x),$$

который приводится к неопределенности вида $0\cdot\infty$. Раскрывая эту неопределенность, т. е. находя предел логарифма данного выражения, мы тем самым будем знать и предел самого выражения. Совершенно так же раскрываются неопределенности вида ∞^0 и 0^0.

Рассмотрим теперь примеры.

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1}=+\infty,$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty.$$

Совершенно так же можно убедиться в том, что отношение $\frac{e^x}{x^n}$ при любом положительном значении n стремится к бесконечности, когда $x\to+\infty$, т. е. *показательная функция e^x возрастает быстрее любой положительной степени x* при беспредельном возрастании x.

2. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{nx^n}=0\quad(n>0),$

т. е. $\log x$ *возрастает медленнее любой положительной степени x*.

3. $\displaystyle\lim_{x\to+0}x^n\log x=\lim_{x\to+0}\frac{\log x}{\frac{1}{x^n}}=\lim_{x\to+0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-n}{x^{n+1}}}=$

$$=-\lim_{x\to+0}\frac{x^n}{n}=0\quad(n>0).$$

4. Найдем предел x^x при стремлении x к $(+0)$. Логарифмируя это выражение, получим неопределенность вида $0\cdot\infty$. Эта неопределенность в силу примера 3 даст в пределе нуль, а следовательно,

$$\lim_{x\to+0}x^x=1.$$

5. Найдем предел отношения

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x}.$$

Числитель и знаменатель написанного отношения стремятся к бесконечности. Заменяя по правилу Лопиталя отношение функций отношением производных, получим

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1+\cos x}{1}.$$

Но $1+\cos x$ при беспредельном возрастании x ни к какому пределу не стремится, ибо $\cos x$ будет все время колебаться между $(+1)$ и (-1); однако нетрудно видеть, что само данное отношение стремится к пределу

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sin x}{x} = \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{\sin x}{x}\right) = 1.$$

Итак, в этом случае неопределенность раскрывается, но правило Лопиталя ничего не дает. Этот результат не противоречит доказанной теореме, ибо в теореме утверждалось лишь то, что если отношение производных стремится к пределу, то к тому же пределу стремится и отношение функций, но не наоборот.

6. Отметим еще неопределенность вида $(\infty \pm \infty)$. Она приводится обычно к неопределенности вида $\frac{0}{0}$. Например,

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x+x^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x+x^2-\sin x}{(x+x^2)\sin x}.$$

Последнее выражение представляет собою неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Раскрывая ее указанным выше способом, получим

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x+x^2}\right) = 1.$$

§ 6. ФУНКЦИЯ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

67. Основные понятия. До сих пор мы рассматривали функцию одной независимой переменной. Рассмотрим теперь функцию двух независимых переменных $u = f(x, y)$.

Для определения частных значений такой функции должны быть заданы значения независимых переменных: $x = x_0$, $y = y_0$. Каждой такой паре значений x и y соответствует определенная точка M_0 на координатной плоскости с координатами (x_0, y_0), и вместо того, чтобы говорить о значении функции при $x = x_0$, $y = y_0$,

можно говорить о значении функции в точке $M_0(x_0, y_0)$ плоскости. Функция может быть определена *на всей плоскости* или только в некоторой ее части, *в некоторой области*. Если $f(x, y)$ есть целый многочлен от x, y, например,

$$u = f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x + 3y + 7,$$

то можно считать, что эта формула определяет функцию на всей плоскости. Формула

$$u = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$$

определяет функцию внутри окружности $x^2 + y^2 = 1$ с центром в начале координат и радиусом единица и на самой окружности, где $u = 0$. Аналогом промежутка на плоскости является область, определяемая неравенствами $a_1 \leqslant x \leqslant b_1$, $a^2 \leqslant y \leqslant b_2$. Это — прямоугольник со сторонами, параллельными осям, причем граница этого прямоугольника также включается в область. Неравенства $a_1 < x < b_1$, $a_2 < y < b_2$ определяют только внутренние точки прямоугольника. Если граница области причисляется к ней, то область называется *замкнутой*. Если граница не причисляется к области, то область называется *открытой* [ср. 4]. Определим понятие предела для функции $f(x,\ y)$ двух переменных [ср. 32]. Положим, что функция определена во всех точках $M(x,\ y)$, достаточно близких к точке $M_0(a,\ b)$.

Определение. *Говорят, что число A есть предел $f(x, y)$ при стремлении $M(x,\ y)$ к $M_0(a,\ b)$, и пишут*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x,\ y) = A, \quad \text{или} \quad \lim_{M \to M_0} f(x,\ y) = A,$$

если для любого заданного положительного числа ε существует такое положительное число η, что

$$|A - f(x,\ y)| < \varepsilon, \quad \textit{если} \quad |x - a| < \eta \quad \textit{и} \quad |y - b| < \eta.^*$$

---

*Заметим, что x и y стремятся к своим предельным значениям a и b независимо друг от друга.

При этом предполагается, что исключена пара значений $x = a$, $y = b$ (M не совпадает с M_0). Если точка M_0 лежит на границе той области, в которой определена $f(x,\ y)$, то M, стремящаяся к M_0, должна принадлежать области, в которой определена функция $f(x,\ y)$. Пусть имеется какая-либо пронумерованная последовательность точек $M_n(x_n,\ y_n)$, стремящаяся к $M_0(a,\ b)$, т. е. такая, что последовательность x_n имеет предел a, а последовательность y_n — предел b. Можно доказать, что если последовательность чисел $u_n = f(x_n,\ y_n)$ для любой такой последовательности точек $M_n(x_n,\ y_n)$ имеет один и тот же предел A, то A есть предел $f(x, y)$ при стремлении $M(x,\ y)$ к $M_0(a,\ b)$ в смысле сформулированного выше определения.

Положим, что $f(x,\ y)$ определена в точках $M_0(a,\ b)$ и во всех точках, достаточно близких к $M_0(a,\ b)$ [ср. 32].

Определение. *Функция $f(x,\ y)$ называется непрерывной в точке $M_0(a,\ b)$*, если

$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}} f(x,\ b), \quad \text{или} \quad \lim_{M\to M_0} f(x,\ y) = f(a,\ b).$$

Функция называется непрерывной в некоторой области, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Так, например, функция $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ непрерывна внутри круга, в котором она определена. Про нее можно также сказать, что она остается непрерывной, если мы к кругу присоединим и его границу, т. е. окружность, на которой $u = 0$.

Пусть B — ограниченная замкнутая область на плоскости и $f(x,\ y)$ — непрерывная в B функция (непрерывная внутри B и вплоть до границы B). Такая функция обладает свойствами, аналогичными свойствам функции одной независимой переменной, непрерывной в конечном замкнутом промежутке [35]. Доказательства этих свойств, по существу, те же, что и доказательства из [43]. Сформулируем лишь результаты.

1. *Функция $f(x,\ y)$ равномерно непрерывна в B, т. е. при любом заданном положительном числе ε существует такое положительное число η, что*

$$|f(x_2,\ y_2) - f(x_1,\ y_1)| < \varepsilon,$$

если $(x_1,\ y_1)$ *и* $(x_2,\ y_2)$ *принадлежат* B *и*

$$|x_2 - x_1| < \eta, \quad |y_2 - y_1| < \eta.$$

2. *Функция* $f(x, y)$ *ограничена в* B, *т. е. существует такое положительное число* M, *что* $|f(x,\ y)| < M$ *для всех* $(x,\ y)$, *принадлежащих* B.

3. *Функция* $f(x,\ y)$ *достигает в* B *наибольшего и наименьшего значений.*

Обратим внимание на одно следствие, которое вытекает из определений непрерывности функций. Если $f(x,\ y)$ непрерывна в точке $(a,\ b)$ и если мы положим $y = b$, то функция $f(x,\ b)$ одной переменной x непрерывна при $x = a$. Аналогично, $f(a,\ y)$ непрерывна при $y = b$.

68. Частные производные и полный дифференциал функции двух независимых переменных. Допустим, что у функции $u = f(x,\ y)$ переменная y сохраняет постоянное значение и меняется только x, то есть u становится функцией одного x и можно вычислить ее приращение и производную. Обозначим через $\Delta_x u$ приращение u, которое эта функция получает, когда y остается постоянным, а x получает приращение Δx:

$$\Delta_x u = f(x + \Delta x,\ y) - f(x,\ y).$$

Производную получим, найдя предел

$$\lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to \pm 0} \frac{f(x + \Delta x,\ y) - f(x,\ y)}{\Delta x}.$$

Производная эта, вычисленная в предположении, что y остается постоянным, называется *частной производной функции* u *по* x и обозначается так: $\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial x}$, или $f'_x(x,\ y)$, или $\frac{\partial u}{\partial x}$.

Заметим, что $\frac{\partial u}{\partial x}$ нельзя толковать как дробь, но лишь как символ для обозначения частной производной. Если $f(x, y)$ имеет частную производную по x, то она является непрерывной функцией x при фиксированном y.

Точно так же определяется приращение $\Delta_y u$ и *частная производная от u по y*, вычисленная в предложении, что x не меняется:

$$\frac{\partial f(x,\ y)}{\partial y} = f'_y(x,\ y) = \frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to \pm 0} \frac{\Delta_y u}{\Delta y} =$$
$$= \lim_{\Delta y \to \pm 0} \frac{f(x,\ y+\Delta y) - f(x,\ y)}{\Delta y}.$$

Если, например, $u = x^2 + y^2$, то $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$.

Рассмотрим уравнение Клапейрона

$$pv = RT.$$

С помощью этого уравнения одна из величин p, v и T может быть определена в зависимости от двух других, причем эти последние должны уже считаться независимыми переменными. Мы получим следующую таблицу:

Независимые переменные	$T,\ p$	$t,\ v$	$p,\ v$
Функции	$v = \frac{RT}{p}$	$p = \frac{RT}{v}$	$T = \frac{pv}{R}$
Частные производные	$\frac{\partial v}{\partial T} = \frac{R}{p},\ \frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{RT}{p^2}$	$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{R}{v},\ \frac{\partial p}{\partial v} = -\frac{RT}{v^2}$	$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{v}{R},\ \frac{\partial T}{\partial v} = \frac{p}{R}$

Отсюда получается следующее соотношение

$$\frac{\partial v}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial v} = -1.$$

Если бы в левой части равенства мы произвели сокращение, то получили бы не (-1), а $(+1)$. Но в этом равенстве частные производные вычислены при различных предположениях: $\frac{\partial v}{\partial T}$ — в предложении, что p постоянно; $\frac{\partial T}{\partial p}$ — при v постоянном; $\frac{\partial p}{\partial v}$ — при T постоянном, а потому упомянутое сокращение недопустимо.

Обозначим через Δu *полное приращение функции*, получаемое при одновременном изменении как x, так и y:

$$\Delta u = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x,\ y).$$

Прибавляя и вычитая $f(x,\ y + \Delta y)$ можем написать

$$\Delta u = [f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x,\ y + \Delta y)] + [f(x,\ y + \Delta y) - f(x,\ y)].$$

В первой квадратной скобке мы имеем приращение функции u при неизменном значении $(y+\Delta y)$ переменной y, во второй квадратной скобке — приращение той же функции при неизменном значении x.

Положим, $f(x,\ y)$ определена внутри некоторой области B, что точка $(x,\ y)$ находится внутри B и что Δx и Δy взяты настолько малыми по абсолютной величине, что прямоугольник с центром (x, y) и длиной сторон $2|\Delta x|$ и $2|\Delta y|$ также находится внутри B. Предположим, кроме того, что $f(x,\ y)$ имеет внутри B частные производные. Применяя к каждому из приращений, входящих в выражение Δu, формулу Лангранжа, что мы можем сделать, так как в каждом случае меняется только одна независимая переменная, получим

$$\Delta u = f'_x(x+\theta\Delta x,\ y+\Delta y)\Delta x + f'_y(x,\ y+\theta_1\Delta y)\Delta y,$$

где θ и θ_1 заключаются между нулем и единицей. Предполагая непрерывность частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$, мы можем утверждать, что при стремлении Δx и Δy к нулю, коэффициент при Δx будет стремиться к $f'_x(x,\ y)$, а коэффициент при Δy — к $f'_y(x, y)$, а потому имеем

$$\Delta u = [f'_x(x,\ y)+\varepsilon]\Delta x + [f'_y(x,\ y)+\varepsilon_1]\Delta y$$

или

$$\Delta u = f'_x(x,\ y)\Delta x + f'_y(x,\ y)\Delta y + \varepsilon\Delta x + \varepsilon_1\Delta y, \tag{1}$$

где ε и ε_1 — величины бесконечно малые одновременно с Δx и Δy. Формула эта аналогична формуле

$$\Delta y = y'\Delta x + \varepsilon\Delta x,$$

доказанной нами в случае функции одной независимой переменной [50]. Произведения $\varepsilon\Delta x$ и $\varepsilon_1\Delta y$ будут бесконечно малыми высших порядков по сравнению соответственно с Δx и Δy.

Напомним, что в предыдущих рассуждениях мы исходили из предположения не только существования, но и непрерывности частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ в некоторой области, содержащей точку $(x,\ y)$ внутри себя.

В сумме первых двух слагаемых в правой части формулы (1) заменим Δx и Δy произвольными величинами dx и dy (дифференциалами независимых переменных). Мы получим таким путем выражение

$$du = f'_x(x,\ y)dx + f'_y(x,\ y)dy,$$

или

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy, \tag{2}$$

которое называется *полным дифференциалом функции* u [ср. 50].

Ввиду вышеуказанных свойств $\varepsilon\Delta x$ и $\varepsilon_1\Delta y$ можно сказать, что *при малых значениях* $|dx|$ *и* $|dy|$ *полный дифференциал* du *дает приближенное значение полного приращения* Δu, *соответствующее приращениям* dx *и* dy *независимых переменных* [50].

С другой стороны, очевидно, что произведения $\frac{\partial u}{\partial x}dx$ и $\frac{\partial u}{\partial y}dy$ дают приближенную величину приращений $\Delta_x u$ и $\Delta_y u$, и, таким образом, *при малых приращениях независимых переменных полное приращение функции приближенно равно сумме ее частных приращений*

$$\Delta u \sim du \sim \Delta_x u + \Delta_y u.$$

Равенство (2) выражает весьма важное свойство функций от нескольких независимых переменных, которое можно назвать «свойством наложимости малых действий». Сущность его заключается в том, что соединенный эффект от нескольких малых действий Δx и Δy с достаточной точностью может быть заменен суммой эффектов от каждого малого действия в отдельности.

69. Производные сложных и неявных функций. Положим теперь что функция $u = f(x,\ y)$ зависит через посредство x и y от одной независимой переменной t, т. е. допустим, что x и y суть не независимые переменные, но функции независимой переменной t, и определим производную $\frac{du}{dt}$ от u по t.

Если независимая переменная t получит приращение Δt, то функции x и y получат соответственно приращения Δx и Δy, а u получит приращение Δu:

$$\Delta u = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x,\ y).$$

В [68] мы видели, что приращение можно написать в виде:

$$\Delta u = f'_x(x + \theta\Delta x, y + \Delta y)\Delta x + f'_y(x,\ y + \theta_1\Delta y)\Delta y.$$

Разделим обе части этого равенства на Δt:

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = f'_x(x + \theta\Delta x,\ y + \Delta y)\frac{\Delta x}{\Delta t} + f'_y(x,\ y + \theta_1\Delta y)\frac{\Delta y}{\Delta t}.$$

Мы предполагали, что x и y допускают производную по t, а следовательно, и подавно будут непрерывными функциями от t. Поэтому при стремлении Δt к нулю Δx и Δy также будут стремиться к нулю, и, в силу предполагаемой непрерывности $\frac{du}{dx}$ и $\frac{du}{dy}$, написанное равенство в пределе даст нам

$$\frac{du}{dt} = f'_x(x,\ y)\frac{dx}{dt} + f'_y(x, y)\frac{dy}{dt}. \tag{3}$$

Равенство это выражает *правило дифференцирования сложной функции в случае функции нескольких переменных.*

Предположим, в частности, что роль независимой переменной t играет переменная x, т. е. что функция $u = f(x,\ y)$ зависит от независимой переменной x как непосредственно, так и через посредство переменной y, которая является функцией от x. Принимая во внимание, что $\frac{dx}{dx} = 1$, получим на основании равенства (3)

$$\frac{du}{dx} = f'_x(x,\ y) + f'_y(x,\ y)\frac{dy}{dx}. \tag{4}$$

Производная $\frac{du}{dx}$ называется *полной производной* от u по x в отличие от *частной* производной $f'_x(x,\ y)$.

Доказанное правило дифференцирования сложных функций применяется для нахождения *производной неявной функции.* Положим, что уравнение

$$F(x,\ y) = 0 \tag{5}$$

определяет y как неявную функцию от x, имеющую производную

$$y' = \varphi'(x).$$

Подставляя $y = \varphi(x)$ в уравнение (5), мы должны были бы получить тождество $0 = 0$, так как $y = \varphi(x)$ есть решение уравнения (5). Мы видим, таким образом, что постоянную нуль можно рассматривать как сложную функцию от x, которая зависит от x как непосредственно, так и через посредство $y = \varphi(x)$. Производная по x от этой постоянной должна равняться нулю; применяя правило (4), получим

$$F'_x(x,\ y) + F'_y(x,\ y)y' = 0,$$

откуда

$$y' = -\frac{F'_x(x,\ y)}{F'_y(x,\ y)}.$$

В полученное таким образом выражение для y' может войти как x, так и y, и если нужно получить выражение y' только через независимую переменную x, то придется решить уравнение (5) относительно y.

§ 7. НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ПОНЯТИЯ О ПРОИЗВОДНЫХ

70. Дифференциал дуги. В интегральном исчислении будет показано, каким образом находится длины дуги кривой, будет выведено выражение для дифференциала длины дуги и будет доказано, что отношение длины хорды к длине стягиваемой ею дуги стремится к единице, когда дуга беспредельно сжимается к точке.

Пусть дана некоторая кривая $y = f(x)$, и будем отсчитывать на ней длину дуги от некоторой фиксированной точки A в определенном направлении (рис. 73). Пусть s — длина дуги AM от точки A до переменной точки M. Величина s, как и ордината y, является функцией абсциссы x точки M. Если направление AM совпадает с принятым направлением

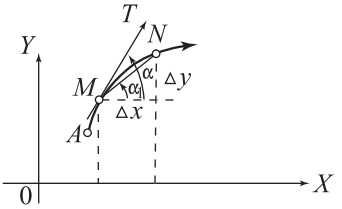

Рис. 73.

кривой, то $s > 0$, а в противном случае $s < 0$. Пусть $M(x,\ y)$ и $N(x + \Delta x,\ y + \Delta y)$ — две точки кривой и Δs — разность длин дуг AN и AM, т. е. приращение длины дуги при переходе из M в N. Абсолютное значение Δs есть длина дуги MN, взятая со знаком плюс. Из прямоугольного треугольника имеем

$$(\overline{MN})^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2,$$

откуда

$$\frac{(\overline{MN})^2}{\Delta x^2} = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$$

или

$$\left(\frac{\overline{MN}}{\Delta s}\right)^2 \left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2.$$

Касательная $\overline{MT}$, если она существует, является предельным положением секущей $\overline{MN}$ при стремлении N к M вдоль кривой, т. е. при $\Delta x \to \pm 0$.

Переходя к пределу в предыдущем равенстве (предполагается существование касательной), получим, принимая во внимание, что, в силу сказанного выше $\left(\frac{\overline{MN}}{\Delta s}\right)^2 \to 1$:

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

или

$$\frac{ds}{dx} = \pm\sqrt{1 + y'^2}. \tag{1}$$

Мы должны брать знак $(+)$, если при возрастании x и s возрастает, и знак $(-)$, если s убывает при возрастании x. Будем для определенности считать, что имеет место первый случай (изображенный на рис. 73). Из формулы (1) при этом следует

$$ds = \sqrt{1 + y'^2}dx \quad \text{или, в силу} \quad y' = \frac{dy}{dx},$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}, \quad \text{т. е.} \quad ds^2 = dx^2 + dy^2. \tag{2}$$

Если радикал считается положительным, то получается арифметическое значение ds. Формула (2) является, по существу, иной записью предыдущей формулы или формулы (1). Она, как мы увидим

в дальнейшем, удобна для приложений. Более подробнее рассмотрение длины дуги будет дано в [103].

Естественным параметром при определении положения точки M на кривой является длина s дуги AM. Эту величину s можно принять за независимую переменную, и при этом координаты $(x,\ y)$ точки M будут функциями s:

$$x = \varphi(s), \quad y = \psi(s).$$

Более подробно мы будем говорить о «параметрическом задании кривой» в [74]. Теперь мы выясним геометрический смысл производных от x и y по s.

Положим, что точка N расположена так, что направление дуги MN совпадает с принятым направлением кривой, т. е. $\Delta s > 0$. При стремлении N к M направление секущей $\overline{MN}$ в пределе дает определенное направление касательной к кривой в точке M. Это направление касательной мы назовем положительным направлением касательной. Оно связано с принятым направлением самой кривой.

Пусть α_1 — угол, образованный направлением $\overline{MN}$ с положительным направлением оси OX. Приращение Δx абсциссы x есть проекция отрезка $\overline{MN}$ на ось OX, и, следовательно,

$$\Delta x = \overline{MN} \cdot \cos\alpha_1 \quad (\overline{MN} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}),$$

причем в этом равенстве $\overline{MN}$ считается положительным. Деля обе части этого равенства на длину дуги MN, равную Δs, получим

$$\frac{\Delta x}{\Delta s} = \frac{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}{\Delta s} \cos\alpha_1.$$

По условию $\Delta s > 0$, а потому при стремлении N к M отношение $\frac{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}{\Delta s}$ стремится к $(+1)$, а угол α_1 стремится к углу α, образованному положительным направлением касательной $\overline{MT}$ с положительным направлением оси OX. Написанное выше равенство даст нам в пределе

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}.$$

Точно так же, проектируя $\overline{MN}$ на ось OY, получим

$$\sin\alpha = \frac{dy}{ds}.$$

71. Выпуклость, вогнутость и кривизна. Случаи выпуклости и вогнутости кривой в сторону положительных ординат представлены на рис. 74 и 75.

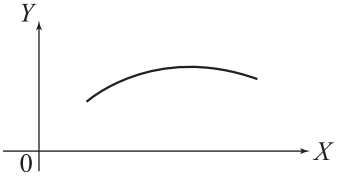

Рис. 74.

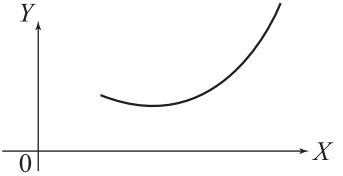

Рис. 75.

Одна и та же кривая $y = f(x)$ может, конечно, состоять и из выпуклых и из вогнутых частей (рис. 76). *Точки, отделяющие выпуклые части кривой от ее вогнутых частей, называются точками перегиба.* Если будем, двигаясь по кривой в сторону возрастания x, следить за изменением угла α, образуемого касательной с положительным направлением оси OX, то увидим (рис. 76), что *на участках выпуклости этот угол убывает, а на участках вогнутости возрастает.* Такое же изменение, следовательно, будет претерпевать и $\operatorname{tg}\alpha$, т. е. производная $f'(x)$, так как с увеличением (уменьшением) угла α и $\operatorname{tg}\alpha$ увеличивается (уменьшается). Но промежутки убывания $f'(x)$ суть те промежутки, где производная этой функции отрицательна, т. е. $f''(x) < 0$, и точно так же промежутки возрастания $f'(x)$ суть те промежутки, где $f''(x) > 0$. Мы получим, таким образом, теорему:

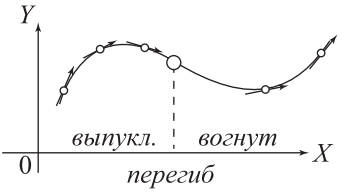

Рис. 76.

Кривая обращена выпуклостью в сторону положительных ординат на тех участках, где $f''(x) < 0$, и вогнутостью на тех, где

$f''(x) > 0$. *Точки перегиба суть те ее точки, при переходе через которые* $f''(x)$ *меняет знак.*[*]

Из этой теоремы мы путем рассуждений, аналогичных приведенным раньше рассуждениям [58], получаем правило нахождения точек перегиба кривой: *чтобы найти точки перегиба кривой, надо определить те значения* x, *при которых* $f''(x)$ *обращается в нуль или не существует, и исследователь изменение знака* $f''(x)$ *при переходе через эти значения* x, *пользуясь следующей таблицей*:

$f''(x)$	точка перегиба		нет точки перегиба	
	$+-$	$-+$	$--$	$++$
	вогн. вып.	вып. вогн.	выпукл.	вогн.

Наиболее естественное представление об искривлении кривой мы получим, если будем следить за изменением угла α, составляемого касательной с осью OX при движении по кривой. Из двух дуг одинаковой длины Δs та дуга будет более искривлена, для которой касательная повернется на больший угол, т. е. для которой приращение $\Delta\alpha$ будет больше. Эти соображения приводят нас к понятию о средней кривизне Δs и о кривизне в данной точке: *средней кривизной дуги* Δs *называется абсолютная величина отношения угла* $\Delta\alpha$ *между касательными в концах этой дуги к длине* Δs *дуги. Предел этого отношения при стремлении* Δs *к нулю называется кривизной кривой в данной точке* (рис. 77).

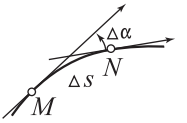

Рис. 77.

Таким образом, для кривизны C мы получаем выражение:

$$C = \left|\frac{d\alpha}{ds}\right|.$$

Но $\operatorname{tg}\alpha$ есть первая производная y', т. е.

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} y',$$

откуда, дифференцируя по x сложную функцию $\operatorname{arc\,tg} y'$:

$$d\alpha = \frac{y''}{1+y'^2}dx.$$

[*]Также принято говорить о выпуклости вверх и о выпуклости вниз.

Как мы только что показали

$$ds = \pm\sqrt{1+y'^2}dx.$$

Деля $d\alpha$ на ds, получим окончательно выражение для кривизны

$$C = \pm\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}. \tag{5}$$

На участках выпуклости надо брать знак $(-)$, а на участках вогнутости знак $(+)$ для того, чтобы C получило положительное значение.

В тех точках кривой, где не существует производных y' или y'', не существует и кривизны. Вблизи тех точек, где y'' обращается в нуль, и, следовательно, кривизна обращается в нуль, кривая походит на прямую. Это будет, например, вблизи точек перегиба.

Положим, что координаты x, y точек кривой выражены через длину дуги s. В этом случае, как мы видели

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \sin\alpha = \frac{dy}{ds}.$$

Угол α будет также функцией s, и, дифференцируя написанные равенства по s, получим

$$-\sin\alpha\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d^2x}{ds^2}, \quad \cos\alpha\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d^2y}{ds^2}.$$

Возводя обе части этих равенств в квадрат и складывая, будем иметь

$$\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 \quad \text{или} \quad C^2 = \left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2,$$

откуда

$$C = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2}.$$

Величина $\frac{1}{C}$, обратная кривизне, называется *радиусом кривизны*. Для радиуса кривизны R мы будем иметь, в силу (5), следующее выражение

$$R = \left|\frac{ds}{d\alpha}\right| = \pm\frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}, \tag{6}$$

или

$$R = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2}},$$

причем значение корня берется положительным.

В случае прямой линии y есть многочлен первой степени от x, а потому y'' тождественно равна нулю, т. е. вдоль всей прямой кривизна равна нулю, а радиус кривизны — бесконечности.

В случае окружности радиуса r будем иметь, очевидно (рис. 78):

$$\Delta s = r\Delta\alpha \quad \text{и} \quad R = \lim \frac{\Delta s}{\Delta\alpha} = r,$$

т. е. радиус кривизны вдоль всей окружности постоянен. Впоследствии мы увидим, что таким свойством обладает только окружность.

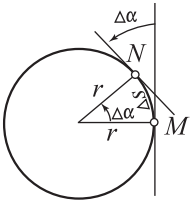

Рис. 78.

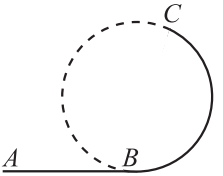

Рис. 79.

Заметим, что изменение радиуса кривизны совсем не так наглядно, как изменение касательной. Рассмотрим линию, состоящую из отрезка AB прямой и дуги BC окружности, касательной к отрезку в конце B (рис. 79). На участке AB радиус кривизны равен бесконечности, на участке же BC он равен радиусу окружности r и, таким образом, в точке B он терпит разрыв непрерывности, хотя при этом направление касательной меняется непрерывно. Этим обстоятельством объясняются толчки вагонов на поворотах. Допустим, что величина скорости движения вагона v остается неизменной. В этом случае, как известно из механики, сила будет направлена по нормали к траектории и равна $m\frac{v^2}{R}$, где m есть масса движущегося тела и R — радиус кривизны траектории. Отсюда видно, что в точках разрыва непрерывности радиуса кривизны и сила будет претерпевать разрыв непрерывности, что и обусловливает толчок.

72. Асимптоты. Перейдем теперь к изучению *бесконечных ветвей кривой*, на которых одна из координат x или y или обе вместе беспредельно возрастают. Гипербола и парабола дают нам примеры кривых с бесконечными ветвями.

Асимптотой кривой с бесконечной ветвью называется такая прямая, что расстояние точек кривой до этой прямой при беспредельном удалении по бесконечной ветви стремится к нулю.

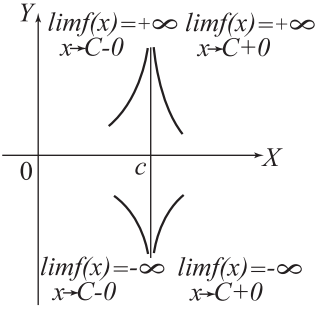

Рис. 80.

Покажем сначала, как находить асимптоты кривой, параллельные оси OY. Уравнение такой асимптоты должно иметь вид:

$$x = c$$

где c — постоянная, и в этом случае при движении по соответствующей бесконечной ветви x должно стремиться к c, а y — к бесконечности (рис. 80). Мы получаем, таким образом, следующее правило.

Все асимптоты кривой

$$y = f(x),$$

параллельные оси OY, можно получить, найдя те значения $x = c$ при приближении к которым $f(x)$ стремится к бесконечности.

Для исследования того, как расположена кривая относительно асимптоты, надо определить знак $f(x)$ при стремлении x к c слева и справа.

Перейдем теперь к нахождению асимптот, непараллельных оси OY. В этом случае уравнение асимптоты должно иметь вид

$$\eta = a\xi + b$$

где ξ, η — текущие координаты асимптоты, в отличие от X, Y — текущих координат кривой.

Пусть ω есть угол, образованный асимптотой с положительным направлением оси OX, $\overline{MK}$ — расстояние точки кривой до асимптоты и $\overline{MK}_1$ — разность ординат кривой и асимптоты при одинаковой абсциссе x (рис. 81). Из прямоугольного треугольника будем иметь

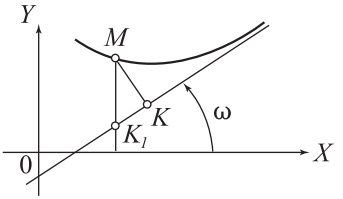

Рис. 81.

$$|\overline{MK}_1| = \frac{|\overline{MK}|}{|\cos\omega|} \quad \left(\omega \neq \frac{\pi}{2}\right),$$

и, следовательно, условие

$$\lim \overline{MK} = 0$$

мы можем заменить условием

$$\lim \overline{MK}_1 = 0. \tag{7}$$

В случае асимптоты, непараллельной оси OY, при движении по соответствующей бесконечной ветви x стремится к бесконечности. Принимая во внимание, что $\overline{MK}_1$ есть разность ординат кривой и асимптоты при одинаковых абсциссах, можем переписать условие (7) так:

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - ax - b] = 0, \tag{8}$$

откуда мы и должны получить значения a и b.

Условие (8) можно переписать в виде:

$$\lim_{x\to\infty} x\left[\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x}\right] = 0.$$

Но первый множитель x стремится к бесконечности, а потому выражение, стоящее в квадратных скобках, должно стремится к нулю

$$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x}\right] = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - a = 0,$$

то есть

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Найдя a, мы определим b из основного условия (8), которое можно переписать в виде:

$$b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - ax].$$

Итак, *для существования асимптоты, непараллельной оси OY, у кривой*

$$y = f(x)$$

необходимо и достаточно, чтобы при движении по бесконечной ветви x беспредельно возрастало и чтобы существовали пределы

$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - ax],$$

и тогда уравнение асимптоты будет

$$\eta = a\xi + b.$$

Для исследования расположения кривой относительно асимптоты, надо отдельно разобрать случаи стремления x к $(+\infty)$ и $(-\infty)$ и в каждом из этих случаев определить знак разности

$$f(x) - (ax + b).$$

Если он будет $(+)$, то кривая расположена над асимптотой, а если $(-)$, то под асимптотой. Если же эта разность при беспредельном возрастании x не будет сохранять неизменного знака, то кривая будет колебаться около асимптоты (рис. 82).

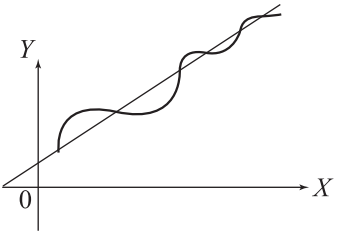

Рис. 82.

73. Построение графиков. Укажем теперь схему действий, которые надо проделать при построении кривой

$$y = f(x),$$

более полную, чем это сделано в [59].

Для этого нужно:

а) определить промежуток изменения независимой переменной x;

б) определить точки пересечения кривой с осями координат;

в) определить вершины кривой;

г) определить выпуклость, вогнутость и точки перегиба кривой;

д) определить асимптоты кривой;

е) выяснить симметричность кривой относительно осей координат, если таковая существует.

Для более точного вычерчивания кривой полезно также наметить еще ряд точек кривой. Координаты этих точек можно вычислить, пользуясь уравнением кривой.

1. Вычертим кривую

$$y = \frac{(x-3)^2}{4(x-1)}.$$

а) x может изменяться в промежутке $(-\infty,\ +\infty)$;

б) полагая $x = 0$, получим $y = -\frac{9}{4}$; полагая $y = 0$,, получим $x = 3$, т. е. кривая пересекается с осями координат в точках $\left(0,\ -\frac{9}{4}\right)$ и $(3,\ 0)$;

в) составляя первую и вторую производные

$$f'(x) = \frac{(x-3)(x+1)}{4(x-1)^2},\ \ f''(x) = \frac{2}{(x-1)^3}.$$

Применяя обычное правило, получим вершины $(3,\ 0)$ — минимум, $(-1,\ -2)$ — максимум;

г) из выражения второй производной видно, что она положительна при $x > 1$ и отрицательна при $x < 1$, т. е. промежуток $(1,\ \infty)$ есть промежуток вогнутости кривой, а промежуток $(-\infty,\ 1)$ есть промежуток выпуклости. Точек перегиба нет, так как $f''(x)$ меняет знак лишь при $x = 1$, а этому значению x соответствует, как мы сейчас увидим, асимптота, параллельная оси OY;

д) при $x = 1$ y обращается в бесконечность, и кривая имеет асимптоту

$$x = 1.$$

Будем теперь искать асимптоты, непараллельные оси OY:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{(x-3)^2}{4(x-1)x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1-\frac{3}{x}\right)^2}{4\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{4},$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x-3)^2}{4(x-1)} - \frac{x}{4}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{-5x+9}{4(x-1)} =$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-5+\frac{9}{x}}{4\left(1-\frac{1}{x}\right)} = -\frac{5}{4},$$

т. е. асимптота будет

$$y = \frac{1}{4} \quad x - \frac{5}{4}$$

Предлагаем читателю исследовать расположение кривой относительно асимптоты;

е) симметрии не имеется.

Нанося все полученные данные на чертеж, получим кривую (рис. 83).

2. Исследуем кривые:

$$y = c(a^2 - x^2)(5a^2 - x^2),\ y_1 = c(a^2 - x^2)^2,\ (c < 0),$$

которые дают форму тяжелой балки, изгибающейся под влиянием собственного веса, причем первая кривая относится к тому случаю, когда концы балки могут свободно поворачиваться, а вторая — когда они заделаны наглухо. Общая длина балки $2a$, начало координат в середине балки и ось OY направлена вертикально вверх.

1. Очевидно, нас интересует изменение x лишь в промежутке $(-a,\ +a)$.

2. Полагая $x = 0$, получим $y = 5ca^4$ и $y_1 = ca^4$, т. е. в первом случае прогиб середины балки в пять раз больше, чем во втором. При $x = \pm a$, $y = y_1 = 0$, что соответствует концам балки.

3. Определим производные

$$y' = -4cx(3a^2 - x^2), \quad y'' = -12c(a^2 - x^2),$$
$$y_1' = -4cx(a^2 - x^2), \quad y_1'' = -4c(a^2 - 3x^2).$$

В обоих случаях в промежутке $(-a,\ +a)$ будет существовать минимум при $x = 0$, что соответствует прогибу середины балки, о котором мы говорили выше.

4. В первом случае $y'' > 0$ в промежутке $(-a,\ +a)$, т. е. в первом случае вся балка обращена вогнутостью вверх. Во втором случае y_1'' обращается в нуль при $x = \pm\frac{a}{\sqrt{3}}$ и меняет притом знак, т. е. соответствующие точки будут точками перегиба балки.

5. Бесконечных ветвей нет.

6. В обоих случаях уравнение не меняется при замене x на $(-x)$, т. е. в обоих случаях кривая симметрична относительно оси OY.

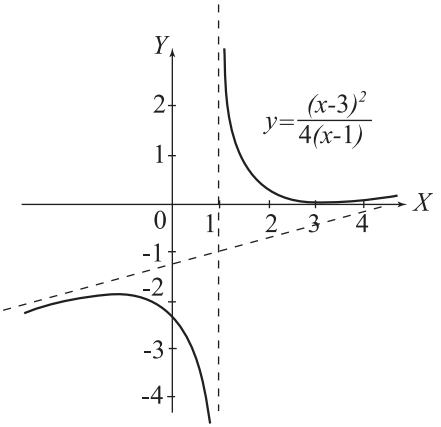

Рис. 83.

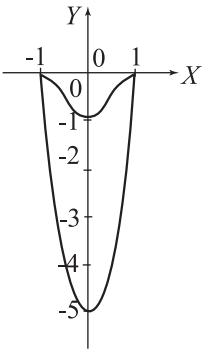

Рис. 84.

На рис. 84 изображены обе кривые. Для простоты нами взят случай $a = 1$, $c = -1$; на практике длина балки значительно больше ее прогиба, т. е. a значительно больше c, так что внешний вид кривой прогиба будет несколько иной (какой?).

Предлагаем читателю найти точки перегиба кривой

$$y = e^{-x^2}$$

и сравнить с рис. 60, на котором изображен соответствующий график.

74. Параметрическое задание кривой. При отыскании уравнения геометрического места по данному его свойству не всегда бывает удобно или возможно выразить это свойство непосредственно в виде уравнения, связывающего текущие координаты x, y. В таком случае бывает полезно ввести третью, вспомогательную переменную величину, через которую можно выразить отдельно абсциссу x и ординату y любой точки геометрического места.

Совокупность двух полученных таким путем уравнений

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \tag{9}$$

также может служить для построения и исследования кривой, так

как при каждом значении t она определяет положение соответствующей точки кривой.

Такой способ задания кривой называется *параметрическим*, вспомогательная же переменная t — *параметром*. Для получения уравнения кривой в обычном (явном или неявном) виде как зависимости, связывающей x и y, нужно из двух уравнений (9) *исключить* параметр t, что можно сделать, хотя бы решив одно из этих уравнений относительно t и подставив полученный результат в другое.

С параметрическим заданием кривых особенно часто приходится иметь дело в механике, при исследовании траектории движущейся точки, положение которой зависит от времени t, а потому и координаты суть функции от t. Определив эти функции, мы и получим параметрическое задание траектории.

Так, например, параметрическое уравнение окружности с центром в точке $(x_0,\ y_0)$ и радиусом r будет

$$x = x_0 + r\cos t, \quad y = y_0 + r\sin t. \tag{10}$$

Перепишем эти уравнения:

$$x - x_0 = r\cos t, \quad y - y_0 = r\sin t.$$

Возведя обе части в квадрат и складывая, исключим параметр t и получим обычное уравнение окружности

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

Точно так же непосредственно ясно, что

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t \tag{11}$$

есть параметрическое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Положим, что y, как функция от x, определена параметрически формулами (9).

Приращение параметра Δt вызовет соответствующие приращения Δx и Δy, и мы получим, деля числитель и знаменатель дроби $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ на Δt, следующее выражение для производной от y по x:

$$y'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}{}^*$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \tag{12}$$

Составим вторую производную от y по x:

$$y'' = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}.$$

Применяя правило нахождения дифференциала частного, получим [50]

$$y'' = \frac{d^2y dx - d^2x dy}{(dx)^3}. \tag{13}$$

Но, в силу (9),

$$dx = \varphi'(t)dt, \quad d^2x = \varphi''(t)dt^2,$$
$$dy = \psi'(t)dt, \quad d^2y = \psi''(t)dt^2.$$

Подставляя это в (13) и сокращая на dt^3, получим окончательно

$$y'' = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}. \tag{14}$$

Заметим, что выражение y'' по формуле (13) отличается от выражения той же производной по формуле (3) из [55] (при $n = 2$)

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \tag{15}$$

*При $\Delta x \to 0$ выполнено $\Delta t \to 0$, следовательно можно перейти к пределу по $\Delta t \to 0$ и воспользоваться теоремой о пределе частного, учитывая, что производные $\psi'(t)$ и $\varphi'(t)$ существуют.

потому что это последняя формула выведена лишь в том предположении, что x есть независимая переменная, а при параметрическом представлении (9) независимой переменной является t. Если x есть независимая переменная, то dx считается уже постоянным [50], т. е. не зависящим от x, и $d^2x = d(dx) = 0$ как дифференциал постоянной. При этом формула (13) переходит в (15).

Имея возможность определить y' и y'', мы тем самым можем решить вопрос о направлении касательной к кривой, о выпуклости и вогнутости кривой и т. д.

В качестве примера рассмотрим кривую, заданную уравнением

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0 \quad (a > 0) \tag{16}$$

и называемую «листом Декарта».

Введем переменный параметр t, полагая

$$y = tx, \tag{17}$$

и рассмотрим точки пересечения прямой (17) с переменным угловым коэффициентом t и кривой (16). Подставляя в уравнение (16) выражение y из уравнения (17) и сокращая на x^2, получим

$$x = \frac{3at}{1+t^3},$$

а уравнение (17) даст нам тогда

$$y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

Эти уравнения дают параметрическую форму представления листа Декарта. Определим производные от x и y по t:

$$\left.\begin{aligned} x'_t &= 3a\frac{(1+t^3) - 3t^2t}{(1+t^3)^2} = \frac{6a\left(\frac{1}{2} - t^3\right)}{(1+t^3)^2}, \\ y'_t &= 3a\frac{2t(1+t^3) - 3t^2t^2}{(1+t^3)^2} = \frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2}. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Для исследования изменения x и y разобьем весь промежуток $(-\infty,\ +\infty)$ изменения t на такие отдельные части, внутри которых производные x'_t и y'_t сохраняют неизменный знак и не обращаются в бесконечность. Для этого нам придется отметить значения:

$$t = -1, \quad 0, \quad \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \quad \text{и} \quad \sqrt[3]{2},$$

при которых эти производные обращаются в нуль или бесконечность. Знаки x'_t и y'_t внутри этих промежутков определяются без труда по формулам (18); вычислив значения x и y на концах промежутков, мы получим, таким образом, приведенную ниже таблицу.

Промежуток t	x'_t	$y't$	x	y
$(-\infty,\ -1)$	$+$	$-$	возрастает от 0 до $+\infty$	убывает от 0 до $-\infty$
$(-1,\ 0)$	$+$	$-$	возрастает от $-\infty$ до 0	убывает от $+\infty$ до 0
$\left(0,\ \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$	$+$	$+$	возрастает от 0 до $\sqrt[3]{4}a$	возрастает от 0 до $\sqrt[3]{2}a$
$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}, \sqrt[3]{2}\right)$	$-$	$+$	убывает от $\sqrt[3]{4}a$ до $\sqrt[3]{2}a$	возрастает от $\sqrt[3]{2}a$ до $\sqrt[3]{4}a$
$(\sqrt[3]{2},\ +\infty)$	$-$	$-$	убывает от $\sqrt[3]{2}a$ до 0	убывает от $\sqrt[3]{4}a$ до 0

В соответствии с этой схемой мы получим кривую, изображенную на рис. 85.

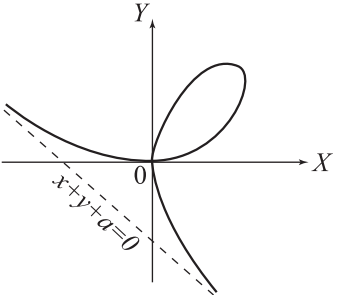

Рис. 85.

Для вычисления углового коэффициента касательной имеем формулу

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{t(2-t^3)}{2\left(\frac{1}{2}-t^3\right)}. \qquad (19)$$

Обратим внимание на то, что x и y обращаются в нуль при $t=0$ и $t=\infty$, и кривая, как это видно из чертежа, пересекает сама себя в начале координат.

Формула (19) дает нам

$$y'_x = 0 \quad \text{при} \quad t=0,$$

$$y'_x = \lim_{t\to\infty} \frac{t(2-t^3)}{2\left(\frac{1}{2}-t^3\right)} = \lim_{t\to\infty} \frac{t\left(\frac{2}{t^3}-1\right)}{2\left(\frac{1}{2t^3}-1\right)} = \infty \quad \text{при} \quad t=\infty,$$

т. е. две ветви кривой, взаимно пересекающиеся в начале координат, касаются — одна оси OX и другая оси OY.

При стремлении t к (-1) x и y стремятся к бесконечности, и кривая имеет бесконечную ветвь. Определим асимптоту:

угловой коэффициент асимптоты равен

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y}{x}=\lim_{t\to-1}\frac{3at^2(1+t^3)}{3at(1+t^3)}=-1,$$

$$b=\lim_{t\to-1}(y+x)=\lim_{t\to-1}\frac{3at^2+3at}{1+t^3}=\lim_{t\to-1}\frac{6at+3a}{3t^2}=-a,$$

т. е. уравнение асимптоты будет

$$y=-x-a \quad \text{или} \quad x+y+a=0.$$

75. Уравнение Ван-дер-Ваальса. Если считать, что газ точно следует законам Бойля — Мариотта и Гей-Люссака, то получается, как известно, следующая зависимость между упругостью газа p, его объемом v и абсолютной температурой T:

$$pv=RT,$$

где R — постоянная, одна и та же для всех газов, если рассматривать одну «грамм-молекулу» газа, т. е. число граммов газа, равное его молекулярному весу.

Существующие газы не подчиняются строго указанной зависимости, и Ван-дер-Ваальсом была дана другая формула, гораздо более точно выражающая явление. Формула эта имеет вид:

$$\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b)=RT,$$

где a и b — положительные постоянные, различные для различных газов. Решая уравнение относительно p, получим

$$p=\frac{RT}{v-b}-\frac{a}{v^2}.$$

Исследуем зависимость p от v, считая T постоянным, т. е. рассматривая случай изотермического изменения состояния газа. Найдем первую производную от p по v:

$$\frac{dp}{dv}=-\frac{RT}{(v-b)^2}+\frac{2a}{v^3}=\frac{1}{(v-b)^2}\left[\frac{2a(v-b)^2}{v^3}-RT\right]. \tag{21}$$

Мы будем рассматривать только значения $v>b$. По поводу физического смысла этого условия, а также кривых, которые будут получены,

отсылаем читателя к курсам физики. Приравнивая производную нулю, получим уравнение

$$\frac{2a(v-b)^2}{v^3} - RT = 0. \tag{22}$$

Исследуем изменение левой части этого уравнения при изменении v от b до $(+\infty)$ и для этого определим ее производную по v, помня, что произведение RT по условию постоянно:

$$\left[\frac{2a(v-b)^2}{v^3}\right]' = 2a\frac{2(v-b)v^3 - 3v^2(v-b)^2}{v} = \frac{-2a(v-b)(v-3b)}{v^4},$$

откуда видно, что эта производная положительна при $b < v < 3b$ и отрицательна при $v > 3b$, т. е. левая часть уравнения (22) возрастает в промежутке $(b,\ 3b)$ и убывает при дальнейшем увеличении v, а потому при $v = 3b$ она достигает максимума, равного

$$\frac{8a}{27b} - RT.$$

Непосредственной подстановкой нетрудно также убедиться, что левая часть уравнения (22) при $v = b$ и $v = +\infty$ обращается в $(-RT)$ и, следовательно, имеет знак $(-)$. Если найденный максимум ее также отрицателен, т. е. если

$$RT > \frac{8a}{27b},$$

то левая часть уравнения (22) постоянно отрицательна, а в этом случае из выражения (21) видно, что производная $\frac{dp}{dv}$ постоянно отрицательна, т. е. p убывает с возрастанием v.

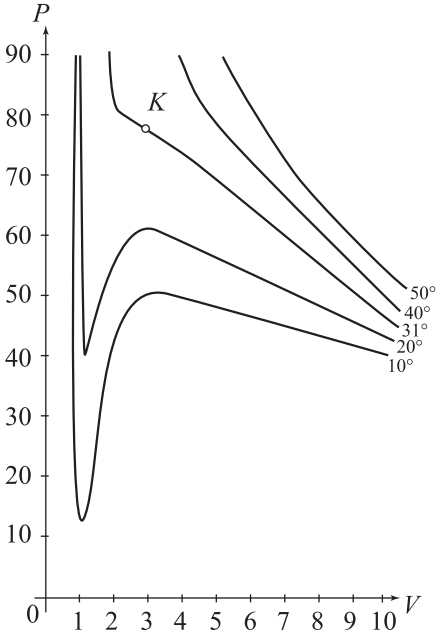

Рис. 86.

Наоборот, если

$$RT < \frac{8a}{27b},$$

то левая часть уравнения (22) достигает положительного максимума при $v = 3b$, и уравнение (22) имеет один корень v_1 в промежутке $(b,\ 3b)$ и другой корень v_2 в промежутке $(3b,\ +\infty)$. При переходе v через значение v_1 левая часть уравнения (22) и, следовательно, $\frac{dp}{dv}$ переходит от знака $(-)$ к знаку $(+)$, т. е. этому значению v соответствует минимум p. Точно так же убедимся, что значению $v = v_2$ соответствует максимум p.

Если, наконец,

$$RT = \frac{8a}{27b}, \tag{23}$$

то максимум левой части уравнения (22) равен нулю, значения $v = v_1$ и $v = v_2$ сливаются в одно значение $v = 3b$, при переходе через это значение левая часть уравнения (22) и $\frac{dp}{dv}$ сохраняют знак $(-)$, т. е. p постоянно убывает с возрастанием v, и значению $v = 3b$ соответствует точка перегиба K кривой. Соответствующие этой точке перегиба значения $v = v_k$, $p = p_k$ и значение температуры $T = T_k$, определяемое из условия (23), называются критическим объемом, упругостью и температурой газа. На рис. 86 указан вид кривых, соответствующих трем рассмотренным случаям.

76. Особые точки кривых. Рассмотрим уравнение кривой в неявной форме

$$F(x,\ y) = 0. \tag{24}$$

Угловой коэффициент касательной к такой кривой определяется по формуле [69]

$$y' = -\frac{F'_x(x,\ y)}{F'_y(x,\ y)}, \tag{25}$$

где $(x,\ y)$ — координаты точки касания.

Рассмотрим тот частный случай, когда $F(x,\ y)$ есть целый многочлен от x и y. В этом случае кривая (24) называется алгебраической. Частные производные $F'_x(x,\ y)$ и $F'_y(x,\ y)$ будут иметь вполне определенные значения, если вместо x и y подставить координаты любой точки M кривой (24), и уравнение (25) даст нам определенный угловой коэффициент касательной, во всех случаях, кроме тех, когда координаты точки $(x,\ y)$ обращают в нуль частные производные $F'_x(x,\ y)$ и $F'_y(x,\ y)$. Такая точка M называется особой точкой кривой (24).

Особой точкой алгебраической кривой (24) *называется точка, координаты которой удовлетворяют уравнению* (24) *и уравнениям*

$$F'_x(x,\ y) = 0, \quad F'_y(x,\ y) = 0. \tag{26}$$

Для эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

условие (26) даст нам $x = y = 0$, но точка $(0,\ 0)$ не лежит на эллипсе, а потому эллипс особых точек не имеет. То же можно утверждать и относительно гиперболы и параболы.

В случае листа Декарта

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

условия (26) будут иметь вид:

$$3x^2 - 3ay = 0 \quad \text{и} \quad 3y^2 - 3ax = 0,$$

и непосредственно видно, что начало координат $(0,\ 0)$ является особой точкой кривой. При исследовании листа Декарта мы показали, что в начале координат кривая пересекает сама себя, и две ветви кривой, пересекающиеся в этой точке, имеют в ней различные касательные: для одной из ветвей касательной является ось OX, для другой — ось OY.

Особая точка, в которой пересекаются различные ветви кривой так, что каждая ветвь имеет свою особую касательную, называется узловой точкой кривой. Таким образом, начало координат является узловой точкой листа Декарта.

Укажем еще на примерах некоторые типы особых точек алгебраических кривых.

1. Рассмотрим кривую

$$y^2 - ax^3 = 0 \quad (a > 0),$$

называемую *полукубической параболой.* Нетрудно проверить, что координаты $(0,\ 0)$ обращают в нуль левую часть этого уравнения и ее частные производные по x и y, и, следовательно, начало координат является особой точкой кривой. Для исследования вида кривой вблизи этой особой точки построим эту кривую. Ее уравнение в явной форме будет

$$y = \pm\sqrt{ax^3}.$$

Для построения кривой достаточно исследовать ту ее часть, которая соответствует знаку $(+)$, ибо часть кривой, соответствующая знаку $(-)$, будет симметрична с первой частью относительно оси OX. Из уравнения видно, что x не может быть меньше нуля и что при возрастании x от 0 до $(+\infty)$ и y возрастает от 0 до $(+\infty)$.

Определим производные первых двух порядков:

$$y' = \frac{3}{2}\sqrt{ax}, \quad y'' = \frac{3\sqrt{a}}{4\sqrt{x}}.$$

При $x = 0$ и $y' = 0$, и заметив, что x может стремиться к нулю, принимая лишь положительные значения, можем утверждать, что ось OX будет касательной к кривой справа в начале координат. Кроме того видно, что для исследуемой части кривой y'' сохраняет неизменный знак $(+)$ в промежутке $(0, +\infty)$, т. е. эта часть обращена вогнутостью в сторону положительных ординат.

На рис. 87 изображена исследуемая кривая (при $a = 1$). *В начале координат встречаются, не продолжаясь дальше, две ветви кривой, причем обе ветви в точке встречи имеют одну и ту же касательную и расположены по разные стороны от этой касательной вблизи особой*

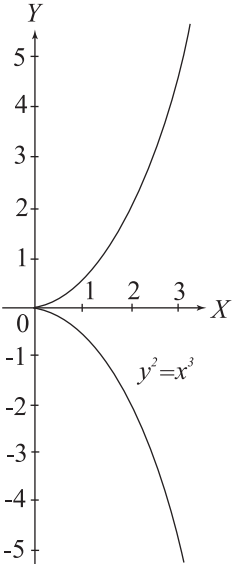

Рис. 87.

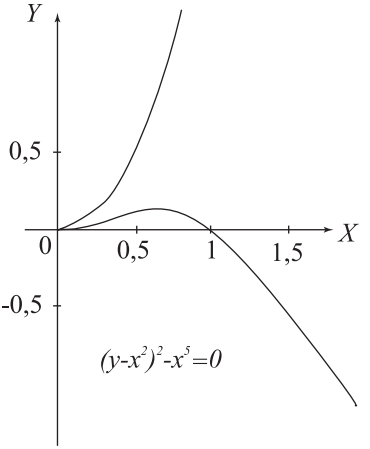

Рис. 88.

точки (в данном случае — везде). Такая особая точка называется *точкой возврата первого ряда.*

2. Рассмотрим кривую

$$(y - x^2)^2 - x^5 = 0.$$

Нетрудно проверить, что начало координат является особой точкой кривой. Уравнение кривой в явной форме будет

$$y = x^2 \pm \sqrt{x^5}.$$

Из этого уравнения видно, что x может изменяться от 0 до $(+\infty)$. Определим производные двух первых порядков:

$$y' = 2x \pm \frac{5}{2}\sqrt{x^3}, \quad y'' = 2 \pm \frac{15}{4}\sqrt{x}$$

и исследуем отдельно обе ветви кривой, соответствующие знакам $(+)$ и $(-)$.

Заметим, прежде всего, что в обоих случаях, при $x = 0$ и $y' = 0$ и так же, как в предыдущем примере, ось OX будет для обеих ветвей касательной справа.

Исследуя обе ветви обычным способом, получим следующие результаты: для первой ветви при возрастании x от 0 до $(+\infty)$ и y возрастает от 0 до $(+\infty)$, и кривая вогнута; на второй ветви имеется вершина (максимум) при $x = \frac{16}{25}$, точка перегиба при $x = \frac{6}{225}$ и точка пересечения с осью OX при $x = 1$.

Принимая во внимание все указанное, получим кривую, изображенную на рис. 88.

В начале координат встречаются, не продолжаясь дальше, две ветви кривой, причем обе ветви в точке встречи имеют одну и ту же касательную и расположены по одну сторону от этой касательной вблизи особой точки. Такая особая точка называется *точкой возврата второго рода.*

3. Исследуем кривую

$$y^2 - x^4 + x^6 = 0.$$

Начало координат есть особая точка кривой. Уравнение кривой в явной форме будет

$$y = \pm x^2\sqrt{1 - x^2}.$$

Уравнение кривой в неявной форме содержит только четные степени x и y, а потому оси координат суть оси симметрии кривой, и достаточно исследовать часть кривой, соответствующую положительным значениям

x и y. Из уравнения кривой в явной форме видно, что x может изменяться от (-1) до 1. Ограничимся вычислением первой производной

$$y' = \frac{x(2-3x^2)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

При $x = 0$ и $y = y' = 0$, т. е. в начале координат, касательная совпадает с осью OX, а при $x = 1$, $y = 0$ и $y' = \infty$, т. е. в точке $(1,\ 0)$, касательная параллельна оси OY. По обычным правилам найдем, что кривая будет иметь вершину при $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$. Принимая во внимание все сказанное и, в частности, симметричность кривой, получим кривую, изображенную на рис. 89. В начале координат *две ветви кривой*, соответствующие знакам $(+)$ и $(-)$ перед корнем, *взаимно касаются*. Такая особая точка называется *точкой соприкосновения*.

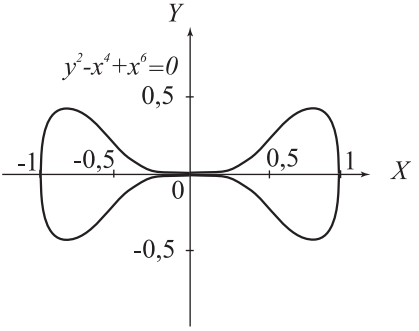

Рис. 89.

4. Исследуем кривую

$$y^2 - x^2(x-1) = 0.$$

Начало координат есть особая точка кривой. Явное уравнение кривой будет

$$y = \pm\sqrt{x^2(x-1)}.$$

Принимая во внимание, что подкоренное выражение не может быть отрицательным, можем утверждать, что либо $x = 0$, либо $x \geqslant 1$. При $x = 0$ и $y = 0$. Исследуем теперь ветвь кривой, соответствующую знаку $(+)$. При увеличении x от 1 до $(+\infty)$ y увеличивается от 0 до $(+\infty)$. Из выражения первой производной

$$y' = \frac{3x-2}{2\sqrt{x-1}}$$

видно, что, при $x = 1$, y' обращается в бесконечность, т. е. в точке $(1,\ 0)$ касательная параллельна оси OY. Вторая ветвь кривой, соответствующая знаку $(-)$, будет симметрична с исследованной относительно оси OX.

Принимая все это во внимание, получим кривую, изображенную на рис. 90. В рассматриваемом случае координаты точки O (0, 0) удовлетворяют уравнению кривой, *но вблизи нее нет других точек кривой. В этом случае особая точка называется изолированной точкой.*

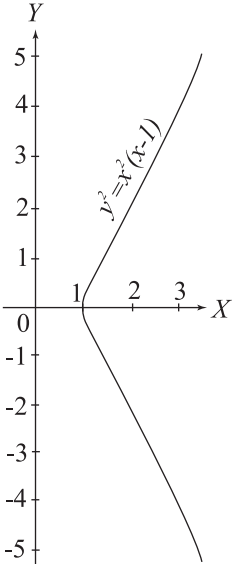

Рис. 90.

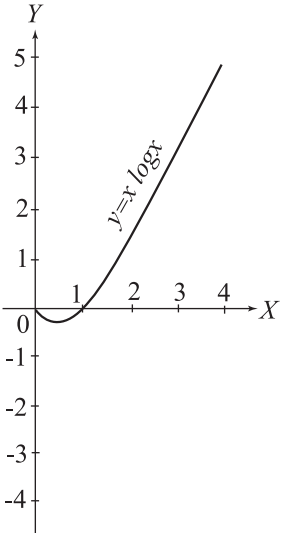

Рис. 91.

Указанными выше типами особых точек исчерпываются всевозможные случаи особых точек алгебраических кривых, но может случиться, что в некоторой точке алгебраической кривой произойдет совпадение особых точек, одинаковых или разных типов.

Кривые не алгебраические называются *трансцендентными.*

Предлагаем читателю показать, что уравнению

$$y = x \log x$$

соответствует кривая, изображенная на рис. 91. Начало координат является *точкой прекращения кривой.*

77. Элементы кривой. Приведем основные формулы, связанные с понятием касательной к кривой и ее кривизны, и введем

еще некоторые новые понятия, связанные с понятием касательной.

Если уравнение кривой имеет вид:

$$y = f(x), \tag{27}$$

то угловой коэффициенты касательной есть производная $f'(x)$ от y по x, и уравнение касательной может быть написано в виде:

$$Y - y = y'(X - x) \quad (y' = f'(x)), \tag{28}$$

где (x, y) — координаты точки касания и (X, Y) — текущие координаты касательной. *Нормалью к кривой в точке (x, y) кривой называют прямую, проведенную через эту точку перпендикулярно к касательной в этой точке.* Как известно из аналитической геометрии, угловые коэффициенты перпендикулярных прямых обратны по величине и по знаку, т. е. угловой коэффициент нормали будет $\left(-\frac{1}{y'}\right)$, и уравнение нормали можно написать так:

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x),$$

или

$$(X - x) + y'(Y - y) = 0. \tag{29}$$

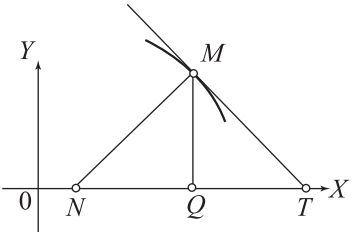

Рис. 92.

Пусть M есть некоторая точка кривой, T и N — точки пересечения касательной и нормали кривой в точке M с осью OX, Q — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на ось OX (рис. 92). *Отрезки QT и QN, лежащие на оси OX, называются подкасательной и поднормалью кривой в точке* M, и отрезкам этим соответствуют определенные числа, положительные или отрицательные, смотря по направлению этих отрезков на оси OX. Длины отрезков MT и MN *называются длиною касательной и длиною нормали кривой в точке* M, причем длины эти мы будем считать всегда положительными. Абсцисса точки Q на оси OX равна, очевидно, абсциссе x точки M. Точки T и N суть

точки пересечения касательной и нормали с осью OX, а потому для определения абсцисс этих точек надо положить в уравнении касательной и нормали $Y = 0$ и полученные уравнения разрешить относительно X. Мы получим, таким образом, для абсциссы точки T выражение $\left(x - \frac{y}{y'}\right)$, а для абсциссы точки N — выражение $(x + yy')$. Нетрудно теперь определить величину подкасательной и поднормали:

$$\left.\begin{aligned} \overline{QT} &= \overline{OT} - \overline{OQ} = x - \frac{y}{y'} - x = -\frac{y}{y'}, \\ \overline{QN} &= \overline{ON} - \overline{OQ} = x + yy' - x = yy'. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Из прямоугольных треугольников MQT и MQN можно определить теперь длины касательной и нормали:

$$\left.\begin{aligned} |\overline{MT}| &= \sqrt{\overline{MQ^2} + \overline{QT^2}} = \sqrt{y^2 + \frac{y^2}{y'^2}} = \pm\frac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2}, \\ |\overline{MN}| &= \sqrt{\overline{MQ^2} + \overline{QN^2}} = \sqrt{y^2 + y^2y'^2} = \pm y\sqrt{1 + y'^2}, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

причем знак $\pm$ надо выбирать так, чтобы выражения в правой части оказались положительными.

Напомним еще формулу для радиуса кривизны кривой [71]:

$$R = \pm\frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}. \tag{32}$$

Обозначая длину нормали буквою n, получим из второй из формул (31):

$$\sqrt{1 + y'^2} = \pm\frac{n}{y},$$

и, подставляя это значение $\sqrt{1 + y'^2}$ в формулу (32), будем иметь еще следующее выражение для радиуса кривизны:

$$R = \pm\frac{n^3}{y^3y''}. \tag{32$_1$}$$

Если кривая задана параметрически

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

то первая и вторая производные y' и y'' от y по x выражаются по формулам [74]

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},$$
$$y'' = \frac{d^2y dx - d^2x dy}{dx^3} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{[\varphi'(t)]^3}. \qquad (33)$$

В частности, подставляя эти выражения в формулу (32), получим выражения радиуса кривизны в рассматриваемом случае:

$$R = \pm\frac{(dx^2 + dy^2)^{3/2}}{d^2y dx - d^2x dy} = \pm\frac{\{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2\}^{3/2}}{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)} = \pm\frac{ds}{d\alpha}, \qquad (34)$$

где α есть угол, образуемый касательной с осью OX.

Если кривая задана неявно

$$F(x, y) = 0,$$

то в силу формулы (25) получим следующее уравнение касательной

$$F'_x(x, y)(X - x) + F'_y(x, y)(Y - y) = 0. \qquad (35)$$

78. Цепная линия. *Цепной линией* называется кривая, которая при соответствующем выборе координатных осей имеет уравнение:

$$y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) \quad (a > 0).$$

Кривая эта дает форму равновесия тяжелой нити, подвешенной за два конца. Ее нетрудно построить по правилам, указанным в [73], и вид ее указан на рис. 93. Определим первую и вторую производные от y:

$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right), \quad y'' = \frac{1}{2a}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right) = \frac{y}{a^2},$$

откуда

$$1 + y'^2 = 1 + \frac{\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}{4} =$$

$$= \frac{4 + e^{\frac{2x}{a}} - 2 + e^{-\frac{2x}{a}}}{4} = \frac{\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2}{4} = \frac{y^2}{a^2}.$$

Подставляя это выражение $(1 + y'^2)$ во вторую из формул (31), получим для длины нормали кривой

$$n = \frac{y^2}{a},$$

и подставляя выражение для n и y'' в формулу (32_1), получим

$$R = \frac{y^6 a^2}{a^3 y^3 y} = \frac{y^2}{a} = n,$$

т. е. *радиус кривизны цепной линии равен длине нормали* MN. При $x = 0$ ордината y цепной линии принимает наименьшее значение $y = a$, и соответствующая точка A кривой называется ее *вершиною*.

На рис. 93 указаны еще некоторые вспомогательные линии, которые нам понадобятся впоследствии. При замене x на $(-x)$ уравнение цепной линии не меняется, т. е. ось OY есть ось симметрии цепной линии.

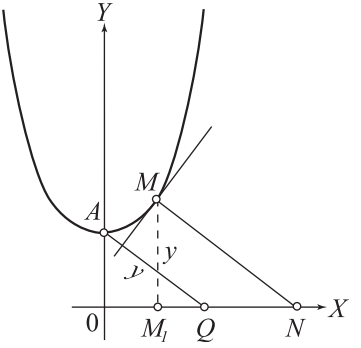

Рис. 93.

79. Циклоида. Вообразим круг радиуса a, который катится без скольжения по неподвижной прямой. Геометрическое место, описанное при таком движении некоторой точкой M окружности круга, называется *циклоидой*.

Примем прямую, по которой катится круг, за ось OX; за начало координат примем начальное положение точки M, когда окружность касается в ней оси OX, и через t обозначим угол поворота окружности. Обозначим далее: через C — центр окружности, через N — точку касания окружности в ее некотором положении с осью OX, через Q — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на ось OX, и через R — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на диаметр NN_1 окружности (рис. 94).

Принимая во внимание, что ввиду отсутствия скольжения

$$\overline{ON} = \text{дуге } NM = at,$$

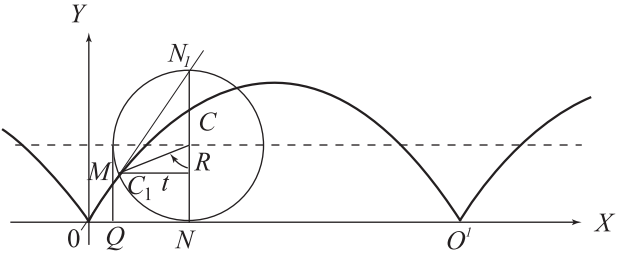

Рис. 94.

можем выразить координаты точки M, описывающей циклоиду, через параметр $t = \angle NCM$:

$$x = \overline{OQ} = \overline{ON} - \overline{QN} = at - a\sin t = a(t - \sin t),$$
$$x = \overline{QM} = \overline{NC} - \overline{RC} = a - a\cos t = a(1 - \cos t).$$

Это и дает нам параметрическое представление циклоиды.

Заметим прежде всего, что достаточно рассмотреть изменение t в промежутке $(0, 2\pi)$, который соответствует полному обороту окружности. После этого полного оборота точка M опять совпадает с точкой касания O' окружности и оси OX, но только передвинется на отрезок $\overline{OO'} = 2\pi a$. Часть кривой, которая получится при дальнейшем движении, будет тождественна с дугой OO' и получится, если мы перенесем эту дугу на отрезок $2\pi a$ вправо, и т. д. Вычислим теперь первые и вторые производные от x и y по t:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = \varphi'(t) = a(1 - \cos t), && \frac{dy}{dt} = \psi'(t) = a\sin t, \\ &\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi''(t) = a\sin t, && \frac{d^2y}{dt^2} = \psi''(t) = a\cos t. \end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

Угловой коэффициенты касательной в силу первой из формул (33) будет:

$$y' = \frac{a\sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\sin^2\frac{t}{2}} = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$$

Формула эта приводит к простому способу построения касательной к циклоиде. Соединим точку N_1 с точкой M кривой. Угол MN_1N есть вписанный угол, опирающийся на дугу $NM = t$, и, следовательно, он

равен $\frac{t}{2}$. Из прямоугольного треугольника RMN_1 получим (рис. 94):

$$\angle RMN_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}, \quad \operatorname{tg} \angle RMN_1 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t}{2}\right) = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}.$$

Сравнивая это выражение с выражением для y', видим, что прямая MN_1 и есть касательная к циклоиде, то есть:

Чтобы построить касательную к циклоиде в ее точке M, достаточно соединить эту точку с концом N_1 того диаметра катящегося круга, другой конец которого находится в точке касания окружности и оси OX.

Прямая MN, соединяющая точку M с другим концом только что упомянутого диаметра, перпендикулярна к прямой MN_1, так как угол N_1MN опирается на диаметр, и мы можем поэтому утверждать, что прямая MN *есть нормаль к циклоиде.* Длина нормали $n = \overline{MN}$ определится непосредственно из прямоугольного треугольника N_1MN:

$$n = 2a \sin\frac{t}{2}.$$

Радиус кривизны циклоиды получим, пользуясь формулой (34) и выражениями (36):

$$R = \pm\frac{[a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t]^{3/2}}{a\cos t \cdot a(1-\cos t) - a\sin t \cdot a\sin t} = \pm\frac{a(2-2\cos t)^{3/2}}{\cos t - 1} =$$
$$= a \cdot 2^{3/2}(1-\cos t)^{1/2} = 4a\sin\frac{t}{2}.$$

В последнем выражении мы оставляем лишь знак $(+)$, так как для первой ветви циклоиды t заключается в промежутке $(0, 2\pi)$, и $\sin\frac{t}{2}$ не может быть величиной отрицательной.

Сравнивая это выражение с выражением для длины нормали n, будем иметь $R = 2n$, т. е. *радиус кривизны циклоиды равен удвоенной длине нормали* ($\overline{MC_1}$ на рис. 94).

Если бы точка M, которая описывала циклоиду, лежала не на окружности круга, а внутри или вне ее, то при качении круга она описала бы кривую, которая соответственно называется *укороченной* или *удлиненной циклоидой* (иногда обе эти кривые называют *трохоидой*).

Назовем через h расстояние CM точки M от центра катящегося круга. Остальные обозначения оставим те же. Разберем сначала случай

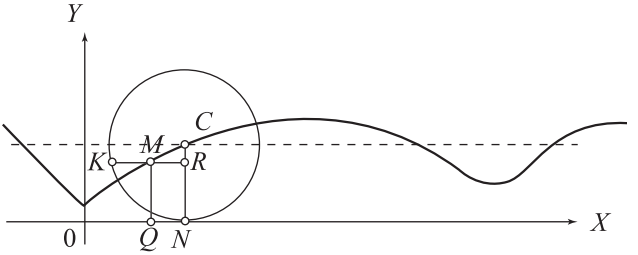

Рис. 95.

$h < a$, т. е. тот случай, когда точка M находится внутри круга (рис. 95). Непосредственно из чертежа имеем:

$$x = \overline{OQ} = \overline{ON} - \overline{QN} = at - h\sin t, \quad y = \overline{QM} = \overline{NC} - \overline{RC} = a - h\cos t.$$

В случае $h > a$ уравнения будут те же, но кривая примет вид, указанный на рис. 96.

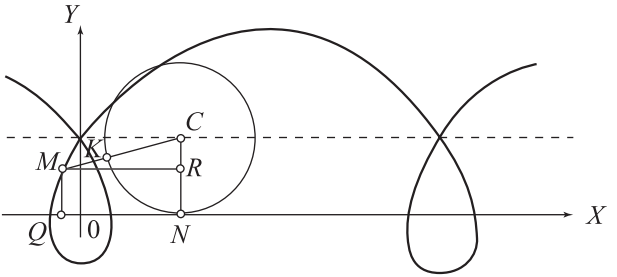

Рис. 96.

80. Эпициклоиды и гипоциклоиды. Если круг, с окружностью которого связана точка M, катится не по прямой OX, а по некоторой неподвижной окружности, то получатся два обширных класса кривых: *эпициклоиды*, если катящийся круг расположен *вне* неподвижного; *гипоциклоиды*, если катящийся круг расположен *внутри* неподвижного.

Выведем уравнение *эпициклоид*. Поместим начало координат в центр неподвижного круга; ось OX направим по прямой, соединяющий этот центр O с точкой K, которая является начальным положением точки M, когда обе окружности касались друг друга в этой точке. Обозначим

буквою a радиус катящейся окружности и примем за параметр t угол, образуемый с осью OX радиусом ON неподвижной окружности, проведенным в точку касания окружностей, когда подвижная окружность повернулась на угол $\varphi = \angle NCM$ (рис. 97).

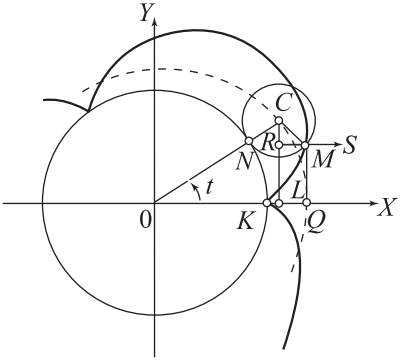

Рис. 97.

Ввиду того, что качение окружности происходит без скольжения, можем написать

$$\text{дуга } KN = \text{дуге } NM,$$

т. е.

$$bt = a\varphi, \quad \varphi = \frac{bt}{a}.$$

Из чертежа непосредственно находим

$$\left.\begin{aligned} x &= \overline{OQ} = \overline{OL} + \overline{LQ} = \overline{OC}\cos\angle KOC - \overline{CM}\cos\angle SMC = \\ &= (a+b)\cos t - a\cos(t+\varphi) = (a+b)\cos t - a\cos\frac{a+b}{a}t, \\ y &= \overline{QM} = \overline{LC} - \overline{RC} = \overline{OC}\sin\angle KOC - \overline{CM}\sin\angle SMC = \\ &= (a+b)\sin t - a\sin(t+\varphi) = (a+b)\sin t - a\sin\frac{a+b}{a}t. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Кривая состоит из ряда одинаковых дуг, каждая из которых соответствует полному обороту подвижного круга, т. е. увеличению угла φ на 2π, а угла t на $\frac{2a\pi}{b}$. Таким образом, концы этих дуг соответствуют значениям

$$t = 0, \quad \frac{2a\pi}{b}, \quad \frac{4a\pi}{b}, \ldots, \frac{2pa\pi}{b}, \ldots$$

Для того чтобы когда-нибудь мы пришли в начальную точку кривой K, необходимо и достаточно, чтобы один из этих концов совпал с K, т. е. чтобы существовали целые числа p и q, удовлетворяющие условию

$$\frac{2pa\pi}{b} = 2q\pi,$$

ибо точке K соответствует некоторое число полных оборотов около точки O. Предыдущее условие может быть написано так:

$$\frac{a}{b} = \frac{q}{p}.$$

Такие числа p и q будут существовать тогда и только тогда, когда a и b — отрезки, соизмеримые между собою; в противном же случае отношение $\frac{a}{b}$ есть число иррациональное и не может сделаться равным отношению двух целых чисел.

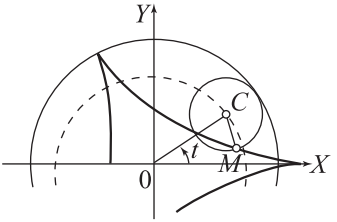

Рис. 98.

Отсюда следует, что эпициклоида представляет замкнутую кривую тогда и только тогда, когда радиусы подвижного и неподвижного кругов соизмеримы; в противном же случае кривая эта незамкнутая и, выйдя из точки K, в нее никогда больше не возвратится.

Это замечание относится и к *гипоциклоидам* (рис. 98), уравнение которых может быть получено из уравнения эпициклоид простой заменой a на $(-a)$:

$$\left.\begin{aligned} x &= (b-a)\cos t + a\cos\frac{b-a}{a}t, \\ y &= (b-a)\sin t - a\sin\frac{b-a}{a}t. \end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

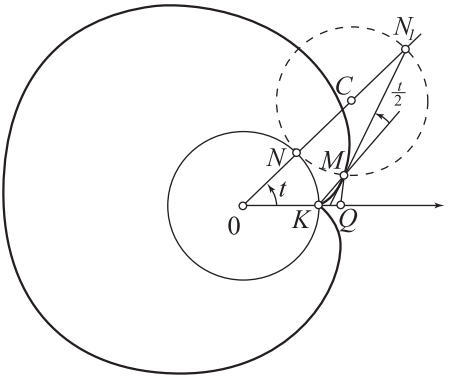

Рис. 99.

Отметим некоторые частные случаи. Положим, что в случае эпициклоиды $b = a$, т. е. радиусы неподвижного и подвижного кругов равны. Мы получим в этом случае кривую, состоящую из одной ветви (рис. 99), и, подставив в уравнения (37) $b = a$, получим уравнения этой кривой:

$$x = 2a\cos t - a\cos 2t,$$
$$y = 2a\sin t - a\sin 2t.$$

Кривая эта называется *кардиоидой*.

Определим расстояние r точек $M(x, y)$ этой кривой до точки K, имеющей координаты $(a, 0)$, и для этого приведем к более удобному виду выражения для $(x - a)$ и y:

$$x - a = 2a\cos t - a(\cos^2 t - \sin^2 t) - a = 2a\cos t - 2a\cos^2 t =$$

$$= 2a\cos t(1-\cos t),$$
$$y = 2a\sin t - 2a\sin t\cos t = 2a\sin t(1-\cos t),$$

откуда

$$r = |\overline{KM}| = \sqrt{(x-a)^2+y^2} =$$
$$= \sqrt{4a^2\cos^2 t(1-\cos t)^2 + 4a^2\sin^2 t(1-\cos t)^2} = 2a(1-\cos t).$$

Разность $(x-a)$ и y суть проекции отрезка KM на оси OX и OY, но из написанных выше выражений видно, что $(x-a)$ и y равны произведению длины отрезка $\overline{KM}$ соответственно на $\cos t$ и $\sin t$, и мы можем поэтому утверждать, что отрезок KM образует угол t с положительным направлением оси OX, т. е. параллелен радиусу ON. Результат этот будет для нас важен в дальнейшем при выводе правила построения касательной к кардиоиде.

Введем угол $\theta = \pi - t$, образованный отрезком KM с отрицательным направлением оси OX. Для r мы получим тогда

$$r = 2a(1+\cos\theta).$$

Уравнение это является уравнением кардиоиды в полярных координатах, и мы более подробно исследуем эту кривую, когда будем говорить о полярных координатах.

Отметим теперь некоторые частные случаи гипоциклоид. Полагая в уравнениях (38) $b = 2a$, получим

$$x = 2a\cos t = b\cos t, \quad y = 0,$$

т. е. если радиус неподвижного круга вдвое больше радиуса подвижного круга, то точка M двигается по диаметру неподвижного круга.

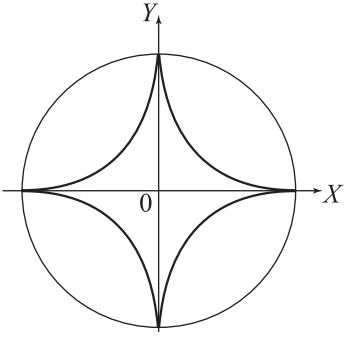

Рис. 100.

Положим теперь, что $b = 4a$. В этом случае гипоциклоида будет состоять из четырех ветвей (рис. 100), и в этом частном случае она называется *астроидой*. Уравнения (38) при $b = 4a$ дадут нам

$$x = 3a\cos t + a\cos 3t = 3a\cos t + a(4\cos^3 t - 3\cos t) = 4a\cos^3 t = b\cos^3 t,$$
$$x = 3a\sin t - a\sin 3t = 3a\sin t - a(3\sin t - 4\sin^3 t) = 4a\sin^3 t = b\sin^3 t.$$

Возведя обе части уравнений в степень 2/3 и складывая почленно полученные уравнения, исключим параметр t и получим уравнение астроиды в неявной форме

$$x^{2/3} + y^{2/3} = b^{2/3}.$$

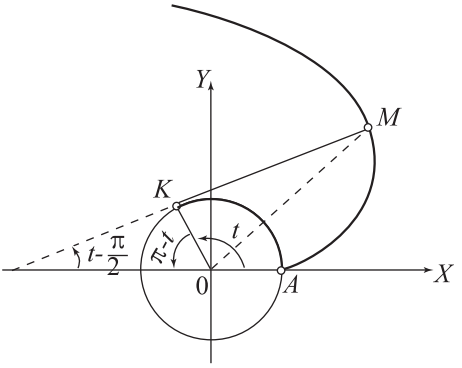

Рис. 101.

81. Развертка круга. *Разверткой круга* называется кривая, которую описывает конец M гибкой нити, постепенно сматывающейся с неподвижной окружности радиуса a, и притом так, что в точке K, где нить отделяется от окружности, она остается касательной к окружности (рис. 101).

Приняв за параметр угол t, образуемый с положительным направлением оси OX радиусом, проведенным в точку K, и принимая во внимание, что $\overline{KM} =$ дуге $AK = at$, получим уравнение развертки круга в параметрической форме:

$$x = \text{пр}_{OX}\overline{OM} = \text{пр}_{OX}\overline{OK} + \text{пр}_{OX}\overline{KM} = a\cos t + at\sin t,$$
$$x = \text{пр}_{OY}\overline{OM} = \text{пр}_{OY}\overline{OK} - \text{пр}_{OY}\overline{KM} = a\sin t + at\cos t.$$

Определим, пользуясь первой из формул (33), угловой коэффициент касательной:

$$y' = \frac{a\cos t - a\cos t + at\sin t}{-a\sin t + a\sin t + at\cos t} = \operatorname{tg} t.$$

Угловой коэффициенты нормали к развертке круга будет, следовательно, равен

$$-\operatorname{ctg} t = \operatorname{tg}\left(t - \frac{\pi}{2}\right),$$

откуда видно, что прямая MK и будет нормалью к развертке круга. Свойство это, как мы увидим впоследствии, имеет место и для разверток любых кривых.

82. Кривые в полярных координатах. Положение точки M на плоскости (рис. 102) определяется в *полярных координатах*:

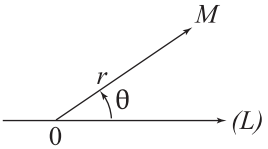

Рис. 102.

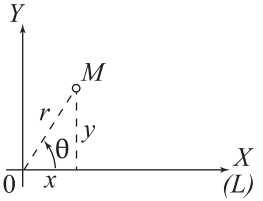

Рис. 103.

1) ее расстоянием r от некоторой данной точки O (*полюс*) и 2) углом θ, который образует направление отрезка OM с данным направлением (L) (*полярная ось*). Часто называют r — *радиусом-вектором* и θ — *полярным углом*. Если принять полярную ось за OX, а полюс — за начало координат, то имеем, очевидно (рис. 103):

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta. \tag{39}$$

Данному положению точки M соответствует одно определенное положительное значение r и бесчисленное множество значений θ, которые отличаются слагаемым, кратным 2π. Если M совпадает с O, то $r = 0$ и θ — совершенно неопределенно.

Всякая функциональная зависимость вида $r = f(\theta)$ (явная) или $F(r, \theta) = 0$ (неявная) имеет в полярной системе координат свой график. Чаще приходится иметь дело с явным уравнением

$$r = f(\theta). \tag{40}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать не только положительные, но и отрицательные значения r, причем если некоторому значению θ соответствует отрицательное значение r, то условимся откладывать это значение r в направлении, прямо противоположном тому направлению, которое определяется значением θ.

Считая, что на некоторой заданной кривой r есть функция θ, мы видим, что уравнения (39) представляют собой параметрическую форму уравнения этой кривой, причем x и y зависят от параметра θ как непосредственно, так и через посредство r. Мы можем поэтому прилагать в данном случае формулы (33) и (34) [77]. Обозначая через α угол, составленный касательной с осью OX, будем иметь,

применяя первую из формул (33),

$$\operatorname{tg}\alpha = y' = \frac{r'\sin\theta + r\cos\theta}{r'\cos\theta - r\sin\theta},$$

где через r' мы обозначаем производную от r по θ.

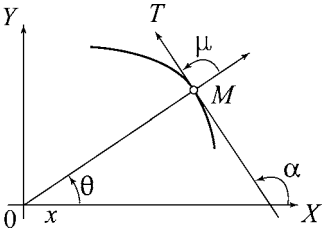

Рис. 104.

Введем еще в рассмотрение угол μ между положительными направлениями радиус-вектора и касательной к кривой (рис. 104). Мы имеем:

$$\mu = \alpha - \theta,$$

и, следовательно,

$$\cos\mu = \cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta,$$
$$\sin\mu = \sin\alpha\cos\theta - \cos\alpha\sin\theta.$$

Дифференцируя равенства (39) по s* и принимая во внимание, что $\frac{dx}{ds}$ и $\frac{dy}{ds}$ соответственно равны $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$, получим

$$\cos\alpha = \cos\theta\frac{dr}{ds} - r\sin\theta\frac{d\theta}{ds}, \quad \sin\alpha = \sin\theta\frac{dr}{ds} + r\cos\theta\frac{d\theta}{ds}.$$

Подставляя эти выражения $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ в написанные выше выражения для $\cos\mu$ и $\sin\mu$, будем иметь

$$\cos\mu = \frac{dr}{ds}, \quad \sin\mu = \frac{rd\theta}{ds} \tag{41}$$

и, следовательно,

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{rd\theta}{dr} = \frac{r}{\frac{dr}{d\theta}} = \frac{r}{r'}. \tag{41$_1$}$$

Из (39) следует

$$dx = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta,$$
$$dy = \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta,$$

*См. [70].

а потому

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(dr)^2 + r^2(d\theta)^2}, \tag{42}$$

и равенство $\alpha = \mu + \theta$ дает нам, если мы разделим числитель и знаменатель на $d\theta$:

$$R = \pm\frac{ds}{d\alpha} = \frac{[(dr^2) + r^2(d\theta)^2]^{1/2}}{d\mu + d\theta} = \pm\frac{(r^2 + r'^2)^{1/2}}{1 + \frac{d\mu}{d\theta}}.$$

Из формулы же (41_1) имеем

$$\mu = \operatorname{arctg}\frac{r}{r'}, \quad \frac{d\mu}{d\theta} = \frac{1}{1 + \left(\frac{r}{r'}\right)^2} \cdot \frac{r'^2 - r''}{r'^2} = \frac{r'^2 - rr''}{r^2 + r'^2},$$

где r' и r'' — производные первого и второго порядка от r по θ. Подставляя полученные выражения производных в предыдущую формулу, будем иметь для радиуса кривизны:

$$R = \pm\frac{(r^2 + r'^2)^{3/2}}{r^2 + 2r'^2 - rr''}. \tag{43}$$

83. Спирали. Разберем три вида спиралей:

спираль Архимеда: $r = a\theta$,

спираль гиперболическую: $r\theta = a$, $\quad (a > 0;\ b > 0)$,

спираль логарифмическую: $r = be^{a\theta}$.

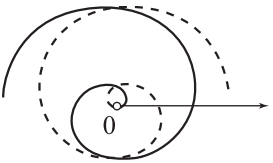

Рис. 105.

Спираль Архимеда имеет вид, изображенный на рис. 105, причем пунктир соответствует части кривой при $\theta < 0$. Отрицательным значениям θ соответствуют и отрицательные значения r, и их над откладывать в направлении, противоположном тому направлению, которое определяется значением θ.

Всякий радиус-вектор встречает кривую бесчисленное множество раз, причем расстояние между каждыми двумя последовательными точками пересечения есть величина постоянная, равная $2a\pi$. Это видно из того, что направление радиуса-вектора, соответствующее некоторому

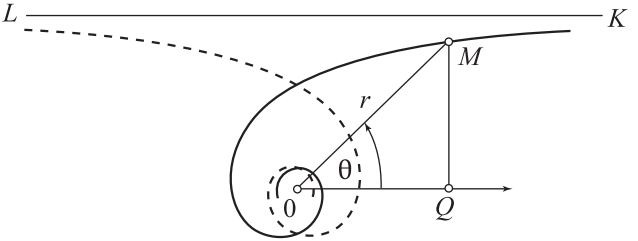

Рис. 106.

данному значению θ, не меняется, если к θ прибавить 2π, $4\pi\ldots$; длина же r, определяемая из уравнения $r = a\theta$, будет получать приращения $2a\pi$, $4a\pi, \ldots$

Гиперболическая спираль изображена на рис. 106. Предполагая $\theta > 0$, исследуем, что будет происходить с кривой, когда θ стремится к нулю. Уравнением

$$r = \frac{a}{\theta}$$

показывает, что r будет стремиться при этом к бесконечности. Возьмем некоторую точку M на кривой при достаточно малом значении θ и опустим перпендикуляр MQ на полярную ось X. Из прямоугольного треугольника MOQ получим (рис. 106):

$$\overline{QM} = r\sin\theta = \frac{a\sin\theta}{\theta},$$

а при стремлении θ к нулю

$$\lim_{\theta\to 0}\overline{QM} = \lim_{\theta\to 0} a\frac{\sin\theta}{\theta} = a.$$

Итак, расстояние между точкой M кривой и полярной осью, при стремлении θ к нулю, стремятся к a, и кривая будет иметь асимптоту LK, параллельную полярной оси и проведенную на расстоянии a от нее.

Далее, видим, что r не обращается в нуль ни при каких конечных значениях θ, а только стремится к нулю, когда θ стремится к бесконечности. Кривая будет поэтому беспредельно приближаться к полюсу O, закручиваясь около него, но никогда не пройдет через O в противоположность спирали Архимеда. Такая точка называется, вообще, *асимптотической точкой* кривой.

Логарифмическая спираль изображена на рис. 107.

При $\theta = 0$, $r = b$ и при стремлении θ к $(+\infty)$ и r стремится к $(+\infty)$, а при стремлении θ к $(-\infty)$ r стремится к нулю, никогда не обращаясь в нуль. В рассматриваемом случае

$$r' = abe^{a\theta} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}\mu = \frac{r}{r'} = \frac{1}{a},$$

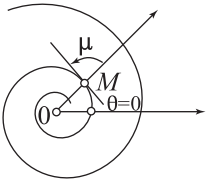

Рис. 107.

т. е. *радиус-вектор образует с касательной к логарифмической спирали постоянный угол* μ.

84. Улитки и кардиоида. Построим круг на диаметре $OA = 2a$ (рис. 108); из точки O, лежащей на окружности, будем проводить радиусы-векторы и на каждом из них будем откладывать постоянную величину $h = \overline{DM}$ от точки пересечения D этой прямой с окружностью. Геометрическое место точек M называется вообще *улиткою.*

Замечая, что

$$\overline{OD} = 2a\cos\theta \quad \text{и} \quad \overline{OM} = r,$$

находим уравнение улитки

$$r = 2a\cos\theta + h.$$

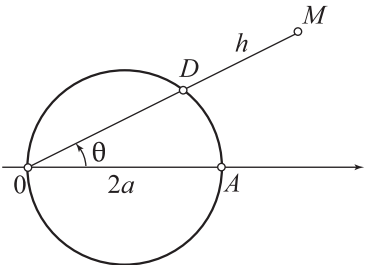

Рис. 108.

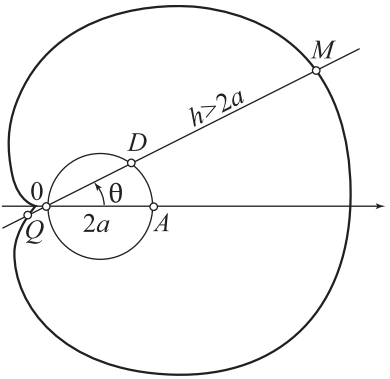

Рис. 109.

Если $h > 2a$, то уравнение это дает для r только положительные значения, и соответствующая кривая изображена на рис. 109. Если $h < 2a$,

то r будет принимать и отрицательные значения, кривая имеет вид, изображенный на рис. 110. В точке O кривая пересекает самое себя. Наконец, при $h = 2a$ уравнение улитки будет

$$r = 2a(1 + \cos\theta),$$

т. е. в этом случае улитка представляет собою кардиоиду [80], которая только иначе расположена, чем в [80] (рис. 111). Значению $\theta = \pi$ будет соответствовать $r = 0$, т. е. кривая пройдет через точку O.

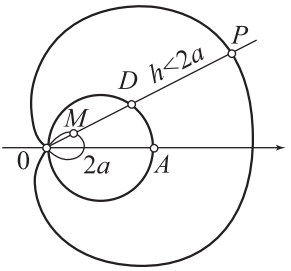

Рис. 110.

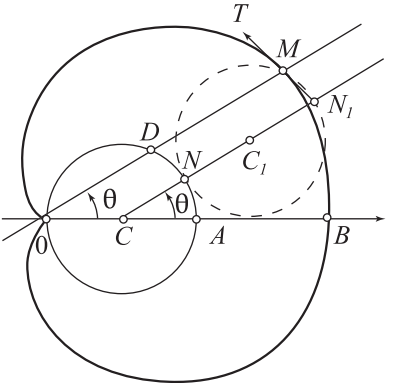

Рис. 111.

Определим первую и вторую производные от r по θ:

$$r' = -2a\sin\theta, \quad r'' = -2a\cos\theta.$$

Вычислим $\operatorname{tg}\mu$:

$$\operatorname{tg}\mu = \frac{r}{r'} = \frac{2a(1+\cos\theta)}{-2a\sin\theta} = -\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}\right),$$

то есть

$$\mu = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}. \tag{44}$$

Как было показано раньше [80], кардиоиду можно себе представить как кривую, описанную точкой круга, катящегося по упомянутому выше кругу с диаметром $OA = 2a$, причем диаметр катящегося круга равен диаметру неподвижного круга. Пусть C — центр неподвижного круга, M — некоторая точка кардиоиды, N — точка касания катящегося круга

в его положении, соответствующем этой точке, с неподвижным кругом, и NN_1 — диаметр подвижного круга (рис. 111). Выше [80] мы видели, что прямые OM и CN_1 — параллельны[3], т. е. угол $ACN = \theta$ и, следовательно,

$$\text{дуга } NM = \text{дуге } ON = \pi - \theta.$$

Угол MN_1N, как вписанный, опирающийся на дугу NM, равен $\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}$, и, наконец, угол, образованный направлениями OM и N_1M, равен

$$\pi - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2} = \mu,$$

откуда видно, что N_1M и есть касательная к кардиоиде в точке M. Мы получаем, таким образом, следующее правило:

Чтобы построить касательную к кардиоиде в ее точке M, достаточно соединить эту точку с концом N_1 того диаметра катящегося круга, другой конец которого находится в точке касания катящегося круга с неподвижным; нормаль пройдет по прямой MN.

Выведенное выше правило построения касательной к кардиоиде получается просто из кинематических соображений. Известно, что вообще движение неизменяемой системы на плоскости в каждый данный момент сводится к вращению вокруг неподвижной точки (мгновенного центра), причем, вообще говоря, положение этой точки меняется с течением времени. В случае качения, указанного на рис. 111, мгновенный центр есть точка соприкосновения N катящегося круга с неподвижным, и, следовательно, скорость движущейся точки M, направленная по касательной к кардиоиде, перпендикулярна к лучу NM, т. е. этот луч есть нормаль к кардиоиде, а перпендикулярная к нему прямая N_1M — касательная к кардиоиде. Из этих соображений следует, что приведенное правило построения касательной годится, вообще, для кривых, описанных некоторой точкой окружности, катящейся без скольжения по неподвижной кривой.

85. Овалы Кассини и лемниската. *Овалы Кассини* получаются как геометрическое место точек M, для которых произведение расстояний от двух данных точек F_1 и F_2 есть величина постоянная:

$$\overline{F_1M} \cdot \overline{F_2M} = b^2.$$

Обозначим длину $\overline{F_1F_2}$ через $2a$, направим полярную ось по линии $\overline{F_1F_2}$ и полюс O поместим в середине отрезка $\overline{F_1F_2}$. Из треугольников

[3] В [80] эти две прямые были KM и ON_1 (рис. 99).

OMF_1 и OMF_2 (рис. 112) находим

$$\overline{F_1M^2} = r^2 + a^2 + 2ar\cos\theta, \quad \overline{F_2M^2} = r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta.$$

Подставляя эти выражения в уравнение овалов и возводя его обе части в квадрат, получим после элементарных преобразований

$$r^4 - 2a^2r^2\cos 2\theta + a^4 - b^4 = 0,$$

откуда

$$r^2 = a^2\cos 2\theta \pm \sqrt{a^4\cos^2 2\theta - (a^4 - b^4)}.$$

Случаи, соответствующие $a^2 < b^2$ и $a^2 > b^2$, изображены на рис. 112, причем второму случаю соответствует кривая, состоящая из двух отдельных замкнутых кривых. Мы рассмотрим более подробно лишь тот важный случай, когда $a^2 = b^2$. Соответствующая кривая называется *лемнискатой*, и ее уравнение будет

$$r^2 = 2a^2\cos 2\theta$$

Уравнение это дает вещественные значения для r, только когда $\cos 2\theta \geqslant 0$, т. е. когда θ лежит в одном из промежутков

$$\left(0, \frac{\pi}{4}\right), \quad \left(\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right), \quad \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right),$$

причем r обращается в нуль при

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \quad \frac{3\pi}{4}, \quad \frac{5\pi}{4}, \quad \frac{7\pi}{4}.$$

Нетрудно на основании этих соображений построить кривую (рис. 113).

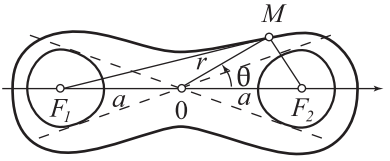

Рис. 112.

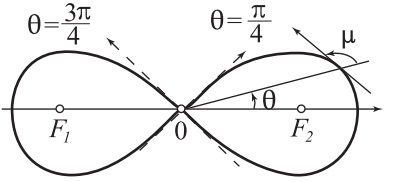

Рис. 113.

В точке O кривая будет пересекать самое себя, и пунктирные прямые представляют собою касательные к двум ветвям кривой, пересекающимся в точке O. Дифференцируя обе части уравнения лемнискаты по θ, получим

$$2rr' = -4a^2 \sin 2\theta \quad \text{или} \quad r' = -\frac{2a^2 \sin 2\theta}{r},$$

откуда

$$\operatorname{tg} \mu = \frac{r}{r'} = -\frac{r^2}{2a^2 \sin 2\theta} = -\frac{2a^2 \cos 2\theta}{2a^2 \sin 2\theta} = -\operatorname{ctg} 2\theta = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + 2\theta\right),$$
$$\mu = \frac{\pi}{2} + 2\theta.$$

Переходя от полярных координат к прямоугольным, из формулы (39) имеем

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \cos\theta = \frac{x}{r}, \quad \sin\theta = \frac{y}{r}.$$

Уравнение лемнискаты можно написать в виде

$$r^2 = 2a^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta);$$

подставляя предыдущие выражения, получим уравнение лемнискаты в прямоугольных координатах

$$x^2 + y^2 = 2a^2 \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad \text{или} \quad (x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2),$$

откуда видно, что лемниската есть алгебраическая кривая четвертого порядка.

ГЛАВА III

ПОНЯТИЕ ОБ ИНТЕГРАЛЕ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 8. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

86. Понятие о неопределенном интеграле. Одной из основных задач дифференциального исчисления является задача нахождения производной или дифференциала данной функции.

Первой основной задачей интегрального исчисления является обратная задача — отыскание функции по заданной ее производной или дифференциалу.

Пусть дана производна

$$y' = f(x)$$

или дифференциал

$$dy = f'(x)dx$$

неизвестной функции y.

Функция $F(x)$, имеющая данную функцию $f(x)$ своей производной или $f(x)dx$ своим дифференциалом, называется первообразной данной функции $f(x)$.

Если, например,

$$f(x) = x^2,$$

то первообразной функцией будет, например, $F(x) = \frac{1}{3}x^3$. Действительно,

$$\left(\frac{1}{3}x^3\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2.$$

Допустим, что мы нашли какую-нибудь первообразную $F(x)$ функцию данной функции $f(x)$, которая имеет $f(x)$ своей производной, т. е. удовлетворяет соотношению

$$F'(x) = f(x).$$

Так как производная от произвольной постоянной C равна нулю, мы имеем также

$$[F(x) + C]' = F'(x) = f(x),$$

т. е. наряду с $F(x)$ и функция $F(x) + C$ есть также первообразная функция для $f(x)$.

Отсюда следует, что если задача нахождения первообразной функции имеет хоть одно решение, то она имеет и бесчисленное множество других решений, отличающихся от упомянутого на произвольное постоянное слагаемое. Можно, однако, показать, что этим и исчерпываются все решения задачи, а именно:

Если $F(x)$ есть какая-либо из первообразных функций для данной функции $f(x)$, то любая другая первообразная функция имеет вид

$$F(x) + C,$$

*где C есть произвольная постоянная.**

В самом деле, пусть $F_1(x)$ есть любая функция, имеющая $f(x)$ своей производной. Мы имеем

$$F_1'(x) = f(x).$$

С другой стороны, и рассматриваемая функция $F(x)$ имеет $f(x)$ своей производной, т. е.

$$F'(x) = f(x).$$

* Заметим, что если функция имеет одну первообразную, то она имеет бесконечно много первообразных, отличающихся друг от друга на константу.

Вычитая это равенство из предыдущего, получаем

$$F_1'(x) - F'(x) = [F_1(x) - F(x)]' = 0,$$

откуда, в силу известной теоремы [63],

$$F_1(x) - F(x) = C,$$

где C есть постоянная, что и требовалось доказать.

Полученный нами результат можно еще формулировать так: если производные (или дифференциалы) двух функций тождественно равны, то сами функции отличаются лишь постоянным слагаемым.

Самое общее выражение для первообразной функции называется также неопределенным интегралом от данной функции $f(x)$ или от данного дифференциала $f(x)dx$ и обозначается символом

$$\int f(x)dx,$$

причем функция $f(x)$ называется подынтегральной функцией, а $f(x)dx$ — подынтегральным выражением.

Найдя какую-нибудь первообразную функцию $F(x)$, в силу доказанного выше можем написать

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где C есть произвольная постоянная.*

Приведем механическое и геометрическое истолкование неопределенного интеграла. Пусть у нас имеется закон аналитической зависимости скорости от времени:

$$u = f(t)$$

и требуется найти выражение пути s от времени. Так как скорость движения точки по заданной траектории есть производная $\frac{ds}{dt}$ от

* Также говорят, что неопределенным интегралом от данной функции называется совокупность всех ее первообразных.

пути по времени, то задача сводится к нахождению первообразной данной функции $f(t)$, т. е.

$$s = \int f(t)dt.$$

Мы получаем бесчисленное множество решений, отличающихся на постоянное слагаемое. Эта неопределенность ответа имеет место вследствие того, что мы не фиксировали того места, от которого отсчитываем пройденный пусть s. Если, например, $u = gt + u_0$ (равномерно ускоренное движение), то для s мы получим выражение

$$s = \frac{1}{2}gt^2 + u_0 t + C, \tag{1}$$

ибо, как нетрудно проверить, производная выражения (1) по t совпадает с заданным выражением $u = gt + u_0$. Если мы согласимся отсчитывать s от той точки, которая соответствует значению $t = 0$, т. е. если согласимся считать $s = 0$ при $t = 0$, то мы должны будем в формуле (1) положить постоянную $C = 0$. В предыдущих рассуждениях мы обозначили независимую переменную не буквой x, а буквой t, что, конечно, не имеет существенного значения.

Перейдем теперь к геометрическому истолкованию задачи нахождения первообразной функции. Соотношение $y' = f(x)$ показывает, что график искомой первообразной функции, или, как говорят, *интегральная кривая*

$$y = F(x),$$

есть кривая, касательная к которой при любом значении x имеет заданное направление, определяемое угловым коэффициентом

$$y' = f(x). \tag{2}$$

Иными словами, при любом значении независимой переменной x соотношением (2) задано направление касательной к

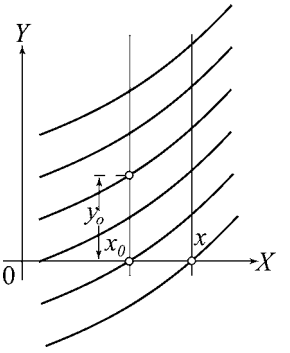

Рис. 114.

кривой и требуется найти эту кривую. Если построена одна такая интегральная кривая, то все кривые, которые мы получим, передвигая ее на любой отрезок параллельно оси OY, будут иметь при одно и том же значении x параллельные касательные с тем же угловым коэффициентом $y' = f(x)$ (рис. 114), что и исходная кривая. Упомянутый параллельный перенос равносилен прибавлению к ординатам кривой постоянного слагаемого C, и общее уравнение кривых, отвечающих задаче, будет

$$y = F(x) + C. \tag{3}$$

Для того чтобы вполне определить положение искомой интегральной кривой, т. е. выражение искомой первообразной функции, нужно задать еще какую-нибудь точку, через которую интегральная кривая должна пройти, хотя бы точку пересечения ее с некоторой прямой

$$x = x_0,$$

параллельной оси OY. Такое задание равносильно заданию начального значения y_0 искомой функции $y = F(x)$, которое она должна иметь при заданном значении $x = x_0$. Подставляя эти начальные значения в уравнение (3), мы получим уравнение для определения произвольной постоянной C:

$$y_0 = F(x_0) + C,$$

и окончательно первообразная функция, удовлетворяющая поставленному начальному условию, будет иметь вид:

$$y = F(x) + [y_0 - F(x_0)].$$

Прежде чем выяснить свойства неопределенного интеграла и способы нахождения первообразной функции, мы изложим вторую основную задачу интегрального исчисления и выясним ее связь сформулированной уже нами первой задачей — задачей нахождения первообразной функции. Существенным для дальнейшего является новое понятие, а именно понятие определенного интеграла. Для того чтобы естественно прийти к этому новому понятию, мы будем исходить из интуитивного представления площади. Оно же

будет служить нам и для выяснения связи между понятием определенного интеграла и понятием первообразной функции. Таким образом, рассуждения следующих двух номеров, основанные на интуитивном представлении площади, не являются строгими доказательствами новых фактов. Логически строгая схема построения основ интегрального исчисления указана в конце [88]. Она приведена полностью в конце настоящей главы.

87. Определенный интеграл как предел суммы. Отметим на плоскости XOY график функции $f(x)$, причем мы считаем, что этот график представляет собою непрерывную кривую, лежащую целиком над осью OX, т. е. считаем, что все ординаты этого графика положительны. Рассмотрим площадь S_{ab}, ограниченную осью OX, этим графиком и двумя ординатами $x = a$ и $x = b$ (рис. 115), и постараемся найти величину этой площади. Разобьем для этого промежуток (a, b) на n частей в точках

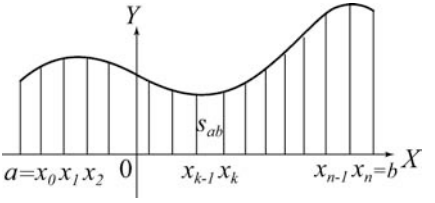

Рис. 115.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Рассматриваемая площадь S_{ab} разобьется на n вертикальных полос, причем k-я полоса имеет основание длины $(x_k - x_{k-1})$. Обозначим через m_k и M_k соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ в промежутке (x_{k-1}, x_k), т. е. наименьшую и наибольшую ординаты нашего графика в этом промежутке. Площадь полоски лежит между площадями двух прямоугольников с общим основанием (x_{k-1}, x_k) (рис. 116) и с высотами m_k и M_k. Эти прямоугольники являются входящим и выходящим прямоугольниками для k-й полоски. Таким образом, величина k-й полоски заключается между площадями упомянутых двух прямоугольников, т. е. между двумя числами

$$m_k(x_k - x_{k-1}) \quad \text{и} \quad M_k(x_k - x_{k-1}),$$

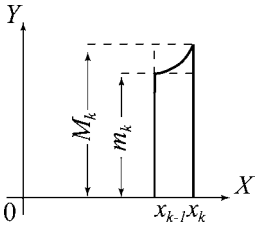

Рис. 116.

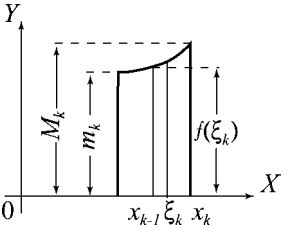

Рис. 117.

а потому вся рассматриваемая площадь S_{ab} будет лежать между суммами площадей упомянутых входящих и выходящих прямоугольников, т. е. вся площадь S_{ab} будет лежать между суммами

$$\begin{aligned} s_n = m_1(x_1 - x_0) + m_2(x_2 - x_1) + \ldots + m_k(x_k - x_{k-1}) + \ldots + \\ + m_{n-1}(x_{n-1} - x_{n-2}) + m_n(x_n - x_{n-1}), \\ S_n = M_1(x_1 - x_0) + M_2(x_2 - x_1) + \ldots + M_k(x_k - x_{k-1}) + \ldots + \\ + M_{n-1}(x_{n-1} - x_{n-2}) + M_n(x_n - x_{n-1}). \end{aligned} \tag{4}$$

Таким образом, мы имеем неравенство

$$s_n \leqslant S_{ab} \leqslant S_n. \tag{5}$$

Построим теперь вместо входящего и выходящего прямоугольников для каждой полоски какой-либо средний прямоугольник, принимая, как всегда, за основание $(x_k - x_{k-1})$ и взяв за высоту какую-либо ординату $f(\xi_k)$ нашего графика, соответствующую любой точке ξ_k из промежутка (x_{k-1}, x_k) (рис. 117). Рассмотрим сумму площадей этих *средних* прямоугольников

$$\begin{aligned} S'_n = f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + \\ + \ldots + f(\xi_{n-1})(x_{n-1} - x_{n-2}) + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}). \end{aligned} \tag{6}$$

Она, так же как и площадь S_{ab}, будет заключаться между суммами площадей входящих и выходящих прямоугольников, т. е. мы будем иметь неравенство

$$s_n \leqslant S'_n \leqslant S_n. \tag{7}$$

Будем теперь беспредельно увеличивать число n делений промежутка (a, b) и притом так, чтобы наибольшая из разностей $(x_k - x_{k-1})$,* стремилась к нулю. Так как функция $f(x)$ по условию непрерывна, то разность $(M_k - m_k)$ между наибольшим и наименьшим ее значениями в промежутке (x_{k-1}, x_k) будет стремиться к нулю при беспредельном уменьшении длины этого промежутка, независимо от его положения в основном промежутке (a, b) (свойство непрерывной функции [35]). Таким образом, если мы обозначим через ε_n наибольшую из разностей

$$(M_1 - m_1),\ (M_2 - m_2), \ldots, (M_k - m_k), \ldots, (M_{n-1} - m_{n-1}),\ (M_n - m_n),$$

то, в силу сказанного, при упомянутом выше предельном переходе число ε_n будет стремиться к нулю. Определим теперь разность между суммой площадей выходящих прямоугольников и суммой площадей входящих прямоугольников:

$$\begin{aligned} S_n - s_n = (M_1 - m_1)(x_1 - x_0) + (M_2 - m_2)(x_2 - x_1) + \ldots + \\ + (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) + \ldots + (M_n - m_n)(x_n - x_{n-1}), \end{aligned}$$

откуда, заменяя все разности $(M_k - m_k)$ наибольшей ε_n и помня, что все разности $(x_k - x_{k-1})$ — положительны:

$$\begin{aligned} S_n - s_n \leqslant \varepsilon_n(x_1 - x_0) + \varepsilon_n(x_2 - x_1) + \ldots + \varepsilon_n(x_k - x_{k-1}) + \ldots + \\ + \varepsilon_n(x_n - x_{n-1}), \end{aligned}$$

то есть

$$\begin{aligned} S_n - s_n \leqslant \varepsilon_n[(x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \ldots + (x_k - x_{k-1}) + \ldots + \\ + (x_n - x_{n-1})] = \varepsilon_n(x_n - x_0) = \varepsilon_n(b - a). \end{aligned}$$

Мы можем, таким образом, написать

$$0 \leqslant S_n - s_n \leqslant \varepsilon_n(b - a),$$

* В математической литературе такая величина часто называется рангом дробления.

то есть

$$\lim_{n\to\infty}(S_n - s_n) = 0. \tag{8}$$

С другой стороны, при всяком n мы имели

$$s_n \leqslant S_{ab} \leqslant S_n \tag{9}$$

и величина площади S_{ab} есть определенное число. Из формул (8) и (9) непосредственно следует, что величина площади S_{ab} является общим пределом s_n и S_n, т. е. площадей выходящих и входящих прямоугольников:

$$\lim s_n = \lim S_n = S_{ab}.$$

Так как, с другой стороны, сумма средних прямоугольников S'_n, как мы видели, лежит между s_n и S_n, то и она должна стремиться к площади S_{ab}, т. е.

$$\lim S'_n = S_{ab}.$$

Эта сумма S'_n является более общей по сравнению с суммами s_n и S_n, так как в ней мы можем произвольно выбирать ξ_k из промежутка (x_{k-1}, x_k) и, в частности, можем брать $f(\xi_k)$ равной наименьшей ординате m_k или наибольшей M_k. При таком выборе сумма S'_n превращается в суммы s_n и S_n.

Предыдущие рассуждения приводят нас к следующему:

Если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке (a, b) и если мы, разбив этот промежуток на n частей в точках

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

и обозначив через $x = \xi_k$ любое значение из промежутка (x_{k-1}, x_k), вычислим соответствующее значение функции $f(\xi_k)$ и составим сумму[4]

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}), \tag{10}$$

то при беспредельном возрастании числа делений n промежутка и беспредельном уменьшении наибольшей из разностей $(x_k - x_{k-1})$

[4] Знак $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ есть сокращенное обозначение суммы (6).

эта сумма стремится к определенному пределу. Предел этот равен площади, ограниченной осью OX, графиком функции $f(x)$ и двумя ординатами: $x = a$, $x = b$.

Упомянутый предел называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$, взятым по переменной x между нижним пределом $x = a$ и верхним $x = b$, и обозначается следующим символом

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Заметим, что существование предела I суммы (10) при беспредельном уменьшении наибольшей из разностей $(x_k - x_{k-1})$, сводится к следующему утверждению: при любом заданном положительном числе ε существует такое положительное число η, что

$$\left| I - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| < \varepsilon$$

при любом разбиении и выборе точек ξ_k из промежутка (x_{k-1}, x_k), если наибольшая из (положительных) разностей $x_k - x_{k-1} < \eta$. Этот предел I и является определенным интегралом.

Отметим, что множество значений сумм (10) при всевозможных разбиениях промежутка (a, b) на части и всевозможном выборе ξ_k нельзя упорядочить так, чтобы образовалась упорядоченная переменная. Предел суммы надо понимать лишь так, как это указано выше (с помощью ε и η).

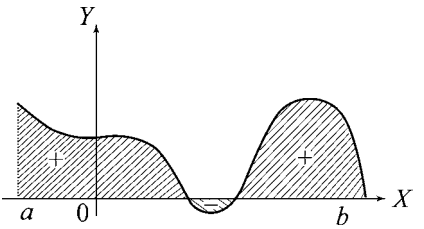

Рис. 118.

Выше мы предполагали, что график функции $f(x)$ находится целиком под осью OX, т. е. что все ординаты этого графика положительны. Рассмотрим теперь общий случай, при котором некоторые части этого графика находятся над осью, а другие под осью OX (рис. 118).

Если мы и в этом случае составим сумму (6), то слагаемые $f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$, соответствующие частям графика, лежащим под

осью OX, будут отрицательными, так как разность $(x_k - x_{k-1})$ положительна и ордината $f(\xi_k)$ отрицательна.

После перехода к пределу получится определенный интеграл, который будет учитывать площади, находящиеся над осью OX со знаком $(+)$ и под осью OX со знаком $(-)$, т. е. в этом общем случае *определенный интеграл*

$$\int\limits_b^a f(x)dx$$

будет давать алгебраическую сумму площадей, заключенных между осью OX, графиком функции $f(x)$ и ординатами $x = a$ и $x = b$. При этом площади над осью OX будут получаться с положительным знаком, а под осью OX — с отрицательным.

Как мы увидим в дальнейшем, мы приходим к нахождению предела суммы вида (6) не только в вопросе вычисления площади, но и во многих, весьма разнообразных, других задачах естествознания. Приведем только один пример. Пусть некоторая точка M передвигается по оси OX от абсциссы $x = a$ к абсциссе $x = b$, и на нее действует некоторая сила T, направленная также по оси OX. Если сила T постоянная, то работа, которую она совершает при передвижении точки из положения $x = a$ в положение $x = b$, определяется произведением $R = T(b - a)$, т. е. произведением величины силы на пройденный точкой путь. Если сила T — переменная, то написанная формула больше неприменима. Положим, что величина силы зависит от положения точки на оси OX, т. е. является функцией абсциссы точки $T = f(x)$.

Чтобы вычислить работу в этом случае, разобьем весь путь, пройденный точкой, на определенные части

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

и рассмотрим одну из этих частей (x_{k-1}, x_k). С ошибкой тем меньшей, чем меньше длина $(x_k - x_{k-1})$, мы можем считать, что сила, действовавшая на точку при передвижении ее от x_{k-1} к x_k, постоянна и совпадает со значением этой силы $f(\xi_k)$ в некоторой точке ξ_k из промежутка (x_{k-1}, x_k). Поэтому для работы на участке

(x_{k-1}, x_k) мы получим приближенное выражение

$$R_k \sim f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}),$$

и для всей работы будем иметь приближенное пока выражение вида:

$$R \sim \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

При беспредельном увеличении числа делений n и беспредельном уменьшении наибольшей из разностей $(x_k - x_{k-1})$ мы получим в пределе определенный интеграл, дающий точную величину искомой работы:

$$R = \int_a^b f(x)dx.$$

Отвлекаясь от каких бы то ни было геометрических или механических истолкований, мы можем теперь установить понятие об определенном интеграле от функции $f(x)$ по промежутку $a \leqslant x \leqslant b$ как о пределе суммы вида (6). Второй основной задачей интегрального исчисления и является изучение свойств определенного интеграла и, прежде всего, его вычисление. Если $f(x)$ — заданная функция, а $x = a$ и $x = b$ — заданные числа, то определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)dx$$

есть некоторое определенное число. Знак $\int$ представляет собою измененную букву S и должен напоминать о той сумме, которая при предельном переходе дала величину определенного интеграла. Подынтегральное выражение $f(x)dx$ должно напоминать о виде слагаемых этой суммы, а именно о $f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$. Буква x, стоящая под знаком определенного интеграла, называется обычно *переменной интегрирования*. Отметим по поводу этой буквы одно важно обстоятельство. Величина интеграла, как мы уже упомянули, есть определенное число, не зависящее, конечно, от обозначения

переменной интегрирования x, и мы можем в определенном интеграле обозначать переменную интегрирования любой буквой. Это не будет иметь, очевидно, никакого влияния на величину интеграла, которая зависит лишь от того, каковы ординаты графика $f(x)$ и пределы интегрирования a и b. Итак, обозначенные независимой переменной никакой роли не играет, т. е., например,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

Вторая задача интегрального исчисления — вычисление определенного интеграла — представляет собою на первый взгляд довольно сложную задачу составления суммы вида (6) и затем перехода к пределу. Заметим, что при этом предельном переходе число слагаемых в упомянутой сумме будет беспредельно расти, а каждое из них будет стремиться к нулю. Кроме того, на первый взгляд эта вторая задача интегрального исчисления не имеет никакой связи с первой задачей о нахождении первообразной функции для заданной функции $f(x)$. В следующем номере мы покажем, что обе задачи тесно связаны одна с другой и что вычисление определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ совершается весьма просто, если известна первообразная функция для $f(x)$.

88. Связь определенного и неопределенного интегралов. Рассмотрим опять площадь S_{ab}, ограниченную осью OX, графиком функции $f(x)$ и ординатами $x = a$ и $x = b$. Вместе с этой площадью рассмотрим и часть ее, ограниченную левой ординатой $x = a$ и некоторой подвижной ординатой, отвечающей переменному значению x (рис.119). Величина этой площади S_{ax} будет, очевидно, зависеть от того, в каком месте мы поставим правую ординату, т. е. будет функцией от x. Эта величина будет изображаться определенным интегралом от функции $f(x)$, взятым от нижнего предела a до верхнего предела x. Так как буква x занята для обозначения верхнего предела, то мы для избежания путаницы будем обозначать переменную интегрирования другой буквой, а именно буквой

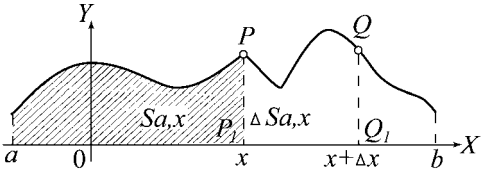

Рис. 119.

t. Таким образом, мы можем написать:

$$S_{ax} = \int\limits_a^x f(t)dt. \tag{11}$$

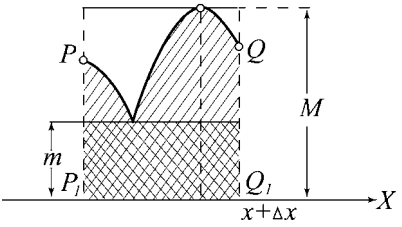

Рис. 120.

Здесь мы имеем определенный интеграл с переменным верхним пределом x, и его величина есть, очевидно, функция этого предела. Покажем, что эта функция является одной из первообразных функций для $f(x)$. Для вычисления производной от этой функции рассмотрим сперва ее приращение ΔS_{ax}, соответствующее приращению Δx независимой переменной x. Очевидно, имеем (рис. 120):

$$\Delta S_{ax} = \text{ площ. } P_1PQQ_1.$$

Обозначим через m и M, соответственно, наименьшую и наибольшую ординаты графика $f(x)$ в промежутке $(x, x + \Delta x)$. Криволинейная фигура P_1PQQ_1, начерченная в большом масштабе на рис. 120, будет целиком лежать внутри прямоугольника с высотой M и основанием Δx и будет заключать внутри себя прямоугольник с высотой m и тем же основанием, а потому

$$m\Delta x \leqslant \Delta S_{ax} \leqslant M\Delta x,$$

или, разделив на Δx:

$$m \leqslant \frac{\Delta S_{ax}}{\Delta x} \leqslant M.$$

Когда $\Delta x \to 0$, обе величины m и M в силу непрерывности функции $f(x)$ стремятся к общему пределу — ординате $P_1P = f(x)$ кривой в точке x, а потому

$$\lim \frac{\Delta S_{ax}}{\Delta x} = f(x),^*$$

что мы и хотели доказать. Полученный результат мы можем формулировать следующим образом: *определенный интеграл с переменным верхним пределом*

$$\int\limits_a^x f(t)dt$$

есть функция этого верхнего предела, производная от которой равна подынтегральной функции $f(x)$ при верхнем пределе. Иначе говоря, *определенный интеграл с переменным верхним пределом есть первообразная функция для подынтегральной функции.*

Установив связь между понятиями определенного и неопределенного интегралов, покажем теперь, каким образом можно вычислять величину определенного интеграла

$$\int\limits_a^b f(x)dx,$$

если известна какая-либо первообразная функция $F(x)$ для $f(x)$. Как мы показали, определенный интеграл с переменным верхним пределом есть тоже первообразная функция для $f(x)$, и в силу [86] можем написать

$$\int\limits_a^x f(t)dt = F(x) + C, \tag{12}$$

где C есть некоторая постоянная. Для определения этой постоянной заметим, что если у площади S_{ax} правая ордината совпадает

* Здесь, вообще говоря, неявно используется предположение о непрерывности функции $f(x)$.

с левой, т. е. $x = a$, то величина площади обращается, очевидно, в нуль, т. е. левая часть в формуле (12) обращается в нуль при $x = a$. Следовательно, тождество это при $x = a$ дает

$$0 = F(a) + C, \quad \text{т. е.} \quad C = -F(a).$$

Подставляя найденное значение C в (12), получим

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Наконец, полагая здесь $x = b$, будем иметь

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \quad \text{или} \quad \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).^* \tag{13}$$

Разность вида $[F(b) - F(a)]$ будем в дальнейшем обозначать символом $F(x)\Big|_a^b$.

Мы приходим, таким образом, к следующему основному правилу, выражающему величину определенного интеграла через значение первообразной функции: *величина определенного интеграла равна разности значений первообразной функции для подынтегральной функции при верхнем и нижнем пределах интегрирования.*

Формулированное правило показывает, что нахождение первообразной функции, т. е. решение первой задачи интегрального исчисления, решает и вторую задачу, т. е. вычисление определенного интеграла, и освобождает, таким образом, нас при вычислении определенного интеграла от сложных операций образования суммы (6) и перехода к пределу.

В качестве примера найдем определенный интеграл

$$\int_0^1 x^2 dx.$$

* Эта формула часто называется формулой Ньютона—Лейбница.

Первообразной функцией для x^2 является функция $\frac{1}{3}x^3$ [86].

Пользуясь выведенным нами правилом, будем иметь

$$\int\limits_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{3}\cdot 0^3 = \frac{1}{3}.$$

Если бы мы, не пользуясь первообразной функцией, стали вычислять предложенный определенный интеграл непосредственно из его определения как предела суммы, то пришли бы к гораздо более сложному вычислению, которое вкратце воспроизведем. Разобьем промежуток $(0,1)$ на n равных частей точками

$$0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \ldots < \frac{n-1}{n} < 1.$$

В данном случае мы имеем n следующих промежутков:

$$\left(0, \frac{1}{n}\right),\ \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right),\ \left(\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\right), \ldots, \left(\frac{n-1}{n}, 1\right),$$

длина каждого из которых равна $\frac{1}{n}$. При составлении суммы (6) примем за ξ_k левый конец промежутка, т. е.

$$\xi_1 = 0, \quad \xi_2 = \frac{1}{n}, \quad \xi_3 = \frac{2}{n}, \ldots, \xi_n = \frac{n-1}{n}.$$

Все разности $x_k - x_{k-1} = \frac{1}{n}$, и, замечая, что значения подынтегральной функции $f(x) = x^2$ на левых концах промежутков будут:

$$f(\xi_1) = 0, \quad f(\xi_2) = \frac{1}{n^2}, \quad f(\xi_3) = \frac{2^2}{n^2}, \ldots, f(\xi_n) = \frac{(n-1)^2}{n^2},$$

можем написать

$$\int\limits_0^1 x^2 dx = \lim_{n\to\infty}\left[0\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n} + \frac{2^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n} + \ldots + \frac{(n-1)^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2}{n^3}. \quad (14)$$

Для вычисления суммы, стоящей в числителе, напишем ряд очевидных равенств:

$$(1+1)^3 = 1 + 3\cdot 1 + 3\cdot 1^2 + 1^3$$
$$(1+2)^3 = 1 + 3\cdot 2 + 3\cdot 2^2 + 2^3$$
$$(1+3)^3 = 1 + 3\cdot 3 + 3\cdot 3^2 + 3^3$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$[1+(n-1)]^3 = 1 + 3(n-1) + 3(n-1)^2 + (n-1)^3.$$

Складывая почленно, получим

$$2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (n-1) + 3[1 + 2 + \ldots + (n-1)] + \\ + 3[1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2] + 1^3 + 2^3 + \ldots + (n-1)^3.$$

Производя сокращения и применяя формулу суммы арифметической прогрессии, можем написать

$$n^3 = (n-1) + 3\frac{n(n-1)}{2} + 3[1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2] + 1,$$

откуда

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2 = \frac{n^3 - n}{3} - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

Подставив полученное выражение в (14), имеем

$$\int_0^1 x^2 dx = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3} = \frac{1}{6}\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Уяснив основные задачи интегрального исчисления и связь между ними, мы посвятим следующий номер дальнейшему рассмотрению первой задачи интегрального исчисления, а именно задаче выяснения свойств неопределенного интеграла и его разыскания.

Наши предыдущие рассуждения об определенном интеграле основывались на чисто геометрических соображениях, а именно на

рассмотрении площадей S_{ab} и S_{ax}. В частности, доказательство основного факта, что сумма (6) имеет предел, исходило из допущения, что для всякой непрерывной кривой имеется определенная площадь S_{ab}. При всей наглядности такого допущения оно не является строго обоснованным, и единственно математически строгий путь был бы обратный: не опираясь на геометрическую интерпретацию, доказать непосредственно аналитическим путем существование предела S суммы

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}),$$

каковой потом уже принять за определение площади S_{ab}. Это доказательство мы приведем в конце настоящей главы и притом при более общих предположениях относительно функции $f(x)$, чем ее непрерывность.

Заметим еще, что геометрическая интерпретация являлась существенным моментом и при доказательстве того основного предложения, что при непрерывности подынтегральной функции производная от определенного интеграла по верхнему пределу равна подынтегральной функции при верхнем пределе. В следующем параграфе настоящей главы мы приведем и строгое аналитическое доказательство этого предложения. Оно, совместно с доказательством существования определенного интеграла от непрерывной функции, позволяет утверждать, что для всякой непрерывной функции имеется первообразная, т. е. неопределенный интеграл. Дальше мы выясним основные свойства неопределенного интеграла, и будем считать, что имеем дело лишь с непрерывными функциями.

При изложении свойств определенного интеграла мы строго докажем основную формулу (13). Таким образом, единственным недоказанным фактом останется факт существования предела суммы (10) для непрерывной функции $f(x)$. Это доказательство, как мы уже сказали, приводится в конце главы.

89. Свойства неопределенного интеграла. В [86] мы видели, что две первообразные функции для одной и той же функции

отличаются лишь постоянным слагаемым. Это приводит нас к первому свойству неопределенного интеграла.

I. *Если две функции или два дифференциала тождественны, то неопределенные интегралы от них могут отличаться лишь на постоянное слагаемое.*

Наоборот, *чтобы проверить, что две функции отличаются постоянным слагаемым, достаточно показать, что их производные (или дифференциалы) тождественны.*

Следующие свойства II и III непосредственно вытекают из понятия о неопределенном интеграле как первообразной функции, т. е. из того, что *неопределенный интеграл*

$$\int f(x)dx$$

есть такая функция, производная которой по x равна подынтегральной функции $f(x)$, или дифференциал которой равен подынтегральному выражению $f(x)dx$.

II. *Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, а дифференциал — подынтегральному выражению:*

$$\left(\int f(x)dx\right)'_x = f(x), \quad d\int f(x)dx = f(x)dx. \tag{15}$$

III. Одновременно с (15) мы имеем

$$\int F'(x)dx = F(x) + C,$$

и эту формулу можно еще переписать так [50]:

$$\int dF(x) = F(x) + C, \tag{16}$$

что в соединении со свойством II дает: *рядом стоящие знаки d и $\int$, в каком бы порядке они не следовали, взаимно уничтожаются*, если условиться отбрасывать произвольную постоянную в равенстве между неопределенными интегралами.

IV. *Постоянный множитель можно выносить из-под знака интеграла:*

$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx + C^5.$$

V. *Интеграл от алгебраической суммы равен алгебраической сумме интегралов от каждого слагаемого:*

$$\int (u+v-w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx + C. \tag{18}$$

Правильность формул (17) и (18) нетрудно обнаружить, дифференцируя обе части и убеждаясь в тождественности полученных производных. Например, для равенства (17):

$$\left(\int Af(x)dx\right)' = Af(x),$$

$$\left(A\int f(x)dx + C\right)' = A\left(\int f(x)dx\right)' = Af(x).$$

90. Таблица простейших интегралов. Для получения этой таблицы достаточно прочесть в обратном порядке таблицу простейших производных [49], после чего мы получим

$$\int dx = x + C,$$

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, \quad \text{если} \quad m \neq -1,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \log|x| + C,$$

[5]Иногда не пишут произвольного постоянного слагаемого после неопределенного интеграла, подразумевая, что неопределенный интеграл уже содержит такое слагаемое. Равенство (17) при этом будет

$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx.$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C, \qquad \int e^x dx = e^x + C,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \qquad \int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C, \qquad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C, \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

Для проверки этой таблицы достаточно установить, что производная правой части равенства тождественна с подынтегральной функцией левой части. Вообще, зная ту функцию, от которой данная функция $f(x)$ есть производная, мы тем самым получаем ее неопределенный интеграл. Но обыкновенно, даже в самых простых случаях, заданные функции не находятся в таблице интегралов, что и делает задачу интегрального исчисления гораздо более трудной, чем задачу дифференциального исчисления. Все дело приводится к преобразованию данного интеграла к таким, которые заключаются в таблице простейших.

Преобразование это требует навыка и практики и облегчается применением нижеследующих основных правил интегрального исчисления, а также свойств IV, V из [89].

91. Правило интегрирования по частям. Мы знаем, что если x, v — две какие угодно функции от x с непрерывными производными, то [50]

$$d(uv) = udv + vdu, \quad \text{или} \quad udv = d(uv) - vdu.$$

В силу свойств I, V и III мы заключаем отсюда

$$\int udv = \int [d(uv) - vdu] + C = \int d(uv) - \int vdu + C = uv - \int vdu + C,$$

что и дает формулу интегрирования по частям:

$$\int udv = uv - \int vdu. \tag{19}$$

Она сводит вычисление интеграла $\int udv$ к вычислению интеграла $\int vdu$, причем этот последний может оказаться более простым.

Примеры.

1. $\displaystyle\int \log x dx.$

Полагая здесь

$$u = \log x, \quad dx = dv,$$

имеем прежде всего

$$du = \frac{dx}{x}, \quad v = x,$$

откуда, в силу (19),

$$\int \log x dx = x \log x - \int x \frac{dx}{x} = x \log x - x + C.$$

На практике отдельные преобразования выписывать не нужно; все действия производятся по возможности в уме.

2. $\displaystyle\int e^x x^2 dx = \int x^2 \cdot e^x dx = \int x^2 de^x = x^2 e^x - \int e^x dx^2 = x^2 e^x - 2\int e^x x dx,$*

$$\int e^x x dx = \int x de^x = xe^x - \int e^x dx = e^x x - e^x,$$

что дает окончательно

$$\int e^x x^2 dx = e^x [x^2 - 2x + 2] + C.$$

3. $\displaystyle\int \sin x \cdot x^3 dx = \int x^3 \cdot \sin x dx = \int x^3 d(-\cos x) =$ (1)

$\displaystyle= -x^3 \cos x - \int (-\cos x) dx^3 = -x^3 \cos x + 3\int x^2 \cdot \cos x dx =$ (2)

$\displaystyle= -x^3 \cos x + 3\int x^2 d \sin x = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x - 3\int \sin x dx^2 =$ (3)

$\displaystyle= -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x - 6\int x \sin x dx =$ (4)

---

* Здесь использовано так называемое внесение под дифференциал $e^x dx = de^x$. Это делается по формуле $f'(x)dx = df(x)$ с учетом того, что $(e^x)' = e^x$. Этот прием используется и в последующих примерах.

$$= -x^3\cos x + 3x^2\sin x - 6\int x d(-\cos x) = \tag{5}$$

$$= -x^3\cos x + 3x^2\sin x + 6x\cos x - 6\int \cos x dx = \tag{6}$$

$$= -x^3\cos x + 3x^2\sin x + 6x\cos x - 6\sin x + C. \tag{7}$$

Способ, показанный в этих примерах, применяется, вообще, при вычислении интегралов типа:

$$\int e^{ax}x^m dx, \quad \int \sin bx \cdot x^m dx, \quad \int \cos bx \cdot x^m dx,$$

где m есть любое целое положительное число; нужно заботиться лишь о том, чтобы при последовательных преобразованиях степень x все время понижалась, пока не дойдет до нулевой.

92. Правило замены переменных. Примеры. Интеграл $\int f(x)dx$ часто можно упростить, введя вместо x новую переменную t, положив

$$x = \varphi(t). \tag{20}$$

Для преобразования неопределенного интеграла к новой переменной t по формуле (20) достаточно преобразовать к новой переменной его подынтегральное выражение:

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt + C. \tag{21}$$

Для доказательства в силу свойства I [89] нам достаточно установить совпадение между дифференциалами от левой и правой частей формулы (21). Произведя дифференцирование, имеем

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx = f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt,$$

$$d\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right) = f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Часто вместо подстановки (20) употребляют обратную

$$t = \psi(x)$$

и

$$\psi'(x)dx = dt.$$

Примеры.

1. $\int (ax+b)^m dx \quad (\text{при } m \neq -1).$

Для упрощения интеграла полагаем

$$ax + b = t, \quad adx = dt, \quad dx = \frac{dt}{a}.$$

Подставив это в данный интеграл, находим

$$\int (ax+b)^m dx = \frac{1}{a}\int t^m dt = \frac{1}{a}\frac{t^{m+1}}{m+1} + C = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{m+1}}{m+1} + C.$$

2. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{a}\log t + C = \frac{\log(ax+b)}{a} + C.$

3. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{dx}{a^2\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$

$\left(\text{подстановка } t = \frac{x}{a}\right).$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}.$

Для вычисления этого интеграла употребляется подстановка Эйлера, о которой более подробно сказано ниже. Новая переменная t вводится здесь по формуле

$$\sqrt{x^2+a} = t - x, \quad t = x + \sqrt{x^2+a}.$$

Для определения x и dx возвышаем в квадрат:

$$x^2 + a = t^2 - 2tx + x^2, \quad x = \frac{t^2-a}{2t} = \frac{1}{2}\left(t - \frac{a}{t}\right),$$

$$\sqrt{x^2+a} = t - \frac{t^2-a}{2t} = \frac{t^2+a}{2t}, \quad dx = \frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{t^2}\right)dt = \frac{1}{2}\frac{t^2+a}{t^2}dt.$$

Подставив все это в данный интеграл, имеем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \int \frac{2t}{t^2+a} \cdot \frac{1}{2} \frac{t^2+a}{t^2} dt =$$
$$= \int \frac{dt}{t} = \log t + C = \log\left(x + \sqrt{x^2+a}\right) + C.$$

6. Интеграл

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2}$$

вычисляется при помощи особого приема, с которым мы познакомимся подробнее позже, а именно при помощи *разложения подынтегральной функции на простейшие дроби.*

Разложив знаменатель подынтегральной функции на множители:

$$x^2 - a^2 = (x-a)(x+a),$$

представим ее в виде суммы более простых дробей:

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x+a}.$$

Для определения постоянных A и B освобождаемся от знаменателя, что дает тождество

$$1 = A(x+a) + B(x-a) = (A+B)x + a(A-B),$$

которое должно иметь место при всех значениях x. Оно будет выполнено, если определим A и B из условий

$$a(A-B) = 1, \quad A+B = 0, \quad A = -B = \frac{1}{2a}.^*$$

Итак, имеем

$$\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right],$$
$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left[\int \frac{dx}{x-a} - \int \frac{dx}{x+a}\right] =$$
$$= \frac{1}{2a}[\log(x-a) - \log(x+a)] + C = \frac{1}{2a}\log\frac{x-a}{x+a} + C.$$

* Здесь использован метод неопределенных коэффициентов. Коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа приравниваются, при этом получается система уравнений для неизвестных коэффициентов.

7. Интегралы более общего вида:

$$\int \frac{mx+n}{x^2+px+q}dx$$

приводятся к разобранным уже раньше, если в знаменателе подынтегральной функции *выделить полный квадрат.* Имеем

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}.$$

Полагаем далее

$$x+\frac{p}{2}=t, \quad x=t-\frac{p}{2}, \quad dx=dt,$$

что дает

$$mx+n=m\left(t-\frac{p}{2}\right)+n=At+B,$$

где мы положили $A=m$ и $B=n-\frac{mp}{2}$. Положив, наконец,

$$q-\frac{p^2}{4}=\pm a^2,$$

где знак $(+)$ или $(-)$ нужно взять в зависимости от знака левой части этого равенства и a считается положительным, мы можем переписать данный интеграл в виде:

$$\int \frac{mx+n}{x^2+px+q}dx=\int \frac{At+B}{t^2\pm a^2}dt=A\int \frac{tdt}{t^2\pm a^2}+B\int \frac{dt}{t^2\pm a^2}.$$

Первый из этих интегралов вычисляется сразу, если положить

$$t^2\pm a^2=z, \quad 2tdt=dz,$$

что дает

$$\int \frac{tdt}{t^2\pm a^2}=\frac{1}{2}\int \frac{dz}{z}=\frac{1}{2}\log z=\frac{1}{2}\log(t^2\pm a^2).$$

Второй же интеграл имеет вид, разобранный в примерах 3 $(+)$ и 6 $(-)$.

8. Интегралы вида:

$$\int \frac{mx+n}{\sqrt{x^2+px+q}}dx$$

приводятся к разобранным выше тем же приемом выделения полного квадрата. Применяя обозначения примера 7, можем переписать данный интеграл в виде:

$$\int \frac{mx+n}{\sqrt{x^2+px+q}}dx = \int \frac{At+B}{\sqrt{t^2+b}}dt =$$
$$= A\int \frac{tdt}{\sqrt{t^2+b}} + B\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+b}} \left(b = \pm a^2 = q - \frac{p^2}{4}\right).$$

Первый из этих интегралов вычисляется при помощи подстановки

$$t^2 + b = z^2, \quad 2tdt = 2zdz,$$

которая дает

$$\int \frac{tdt}{\sqrt{t^2+b}} = \int \frac{zdz}{z} = \int dz = z = \sqrt{t^2+b}.$$

Второй интеграл уже разобран в примере 5 и равен $\log(t + \sqrt{t2+b})$.

9. Аналогичным приемом выделения полного квадрата интеграл

$$\int \frac{mx+n}{\sqrt{q+px-x^2}}dx$$

можно привести к виду:

$$A_1\int \frac{tdt}{\sqrt{a^2-t^2}} + B_1\int \frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}},$$

и имеем

$$\int \frac{tdt}{\sqrt{a^2-t^2}} = -\sqrt{a^2-t^2} + C$$

при помощи подстановки $a^2 - t^2 = z^2$. Второй интеграл разобран в примере 4.

10. $$\int \sin^2 xdx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C =$$
$$= \frac{1}{2}(x - \sin x\cos x) + C.$$
$$\int \cos^2 xdx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C =$$
$$= \frac{1}{2}(x + \sin x\cos x) + C.$$

11. Интеграл

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx$$

приводится к разобранному уже при помощи интегрирования по частям:

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = x\sqrt{x^2+a} - \int x\cdot d\sqrt{x^2+a} =$$
$$= x\sqrt{x^2+a} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}dx.$$

Прибавив и вычтя a в числителе подынтегральной функции последнего интеграла, перепишем предыдущее равенство в виде:

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = x\sqrt{x^2+a} - \int \sqrt{x^2+a}\,dx + a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}},$$

или

$$2\int \sqrt{x^2+a}\,dx = x\sqrt{x^2+a} + a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}},$$

откуда окончательно

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}[x\sqrt{x^2+a} + a\log(x+\sqrt{x^2+a})] + C.$$

93. Примеры дифференциальных уравнений первого порядка. В [51] мы рассматривали простейшие дифференциальные уравнения. Самое общее дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид:

$$F(x, y, y') = 0.$$

Это есть соотношение, связывающее независимую переменную x, неизвестную функцию y и ее первую производную y'. Обыкновенно можно решить это уравнение относительно y' и переписать его в виде:

$$y' = f(x, y),$$

где $f(x, y)$ есть известная функция от x и y.

Не рассматривая этого уравнения в общем случае, что будет сделано во втором томе, остановимся лишь на некоторых простейших примерах.

Уравнение с разделяющимися переменными, — когда функция $f(x, y)$ представляется в виде отношения двух функций, из которых одна зависит только от x, а другая только от y:

$$y' = \frac{\varphi(x)}{\psi(y)}.^* \tag{22}$$

Помня, что $y' = \frac{dy}{dx}$, можем переписать это уравнение в виде:

$$\psi(y)dy = \varphi(x)dx,$$

так что в одну часть уравнения входит только буква x, в другую — только буква y; это преобразование и называется *разделением переменных*. Так как

$$\psi(y)dy = d\int \psi(y)dy, \quad \varphi(x)dx = d\int \varphi(x)dx,$$

в силу свойства I [89] получаем

$$\int \psi(y)dy = \int \varphi(x)dx + C, \tag{23}$$

откуда и можно, взяв интегралы, определить искомую функцию y.

Примеры **1.** *Химические реакции первого порядка.* Обозначив через a количество вещества, имевшегося к началу реакции, через x — количество вещества, вступившего в реакцию к моменту t, мы имеем [51] уравнение

$$\frac{dx}{dt} = c(a - x), \tag{24}$$

где c — постоянная реакции. Сверх того мы имеем условие

$$x\Big|_{t=0} = 0. \tag{25}$$

Разделяя переменные, находим

$$\frac{dx}{a - x} = cdt,$$

или, интегрируя

$$\int \frac{dx}{a - x} = \int cdt + C_1; \quad -\log(a - x) = ct + C_1,$$

*Уравнение вида $y' = \varphi(x) \cdot \psi(y)$ также является уравнением с разделяющимися переменными и решается теми же приемами.

где C_1 — произвольная постоянная. Отсюда выводим

$$a - x = e^{-ct-C_1} = Ce^{-ct},$$

где $C = e^{-C_1}$ есть также произвольная постоянная. Ее можно определить из условия (25), в силу которого предыдущее равенство при $t = 0$ дает $a = C$, и окончательно

$$x = a(1 - e^{-ct}).$$

2. *Химические реакции второго порядка.* Пусть в растворе содержатся два вещества, количества которых к началу реакции, выраженные в грамм-молекулах, суть a и b. Допустим, что к моменту t в реакцию вступают равные количества обоих веществ, которые мы обозначим через x, так что количества оставшихся веществ будут $a - x$ и $b - x$.

По основному закону химических реакций второго порядка скорость течения реакции пропорциональна произведению этих оставшихся количеств, т. е.

$$\frac{dx}{dt} = k(a - x)(b - x).$$

Нужно интегрировать это уравнение, присоединив к нему еще начальное условие

$$x\Big|_{t=0} = 0.$$

Разделяя переменные, имеем

$$\frac{dx}{(a - x)(b - x)} = kdt,$$

или, интегрируя,

$$\int \frac{dx}{(a - x)(b - x)} = kt + C_1, \tag{26}$$

где C_1 — произвольная постоянная.

Для вычисления интеграла в левой части мы применим способ разложения на простейшие дроби (пример 6) [92]:

$$\frac{1}{(a - x)(b - x)} = \frac{A}{a - x} + \frac{B}{b - x},$$

$$1 = A(b - x) + B(a - x) = -(A + B)x + (Ab + Ba),$$

что дает

$$-(A + B) = 0; \quad Ab + Ba = 1,$$

откуда

$$A = -B = \frac{1}{b - a},$$

так что

$$\int \frac{dx}{(a-x)(b-x)} = \frac{1}{b-a}\left[\int \frac{dx}{a-x} - \int \frac{dx}{b-x}\right] = \frac{1}{b-a}\log\frac{b-x}{a-x}.$$

Подставляя в (26), имеем:

$$\log\frac{b-x}{a-x} = (b-a)kt + (b-a)C_1,$$
$$\frac{b-x}{a-x} = Ce^{(b-a)kt},$$

где $C = e^{(b-a)C_1}$. Искомая функция x определяется отсюда без всякого труда.

Предлагаем читателю разобрать случай $a = b$, когда предыдущие формулы теряют смысл.

3. *Найти все кривые, пересекающие под данным постоянным углом радиусы-векторы, проведенные из начала координат*[6]) (рис. 121).

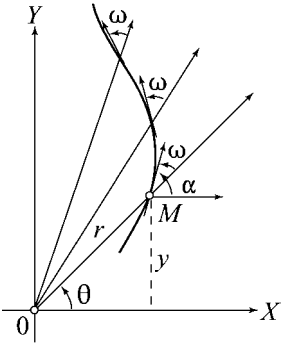

Рис. 121.

Пусть $M(x, y)$ есть точка искомой кривой. Из чертежа мы имеем

$$\omega = \alpha - \theta,$$

$$\operatorname{tg}\omega = \operatorname{tg}(\alpha-\theta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\theta} = \frac{y' - \frac{y}{x}}{1 + y'\frac{y}{x}}.$$

Обозначив для удобства вычислений

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{1}{a}$$

и освобождаясь от знаменателей, перепишем полученное дифференциальное уравнение в виде

$$x + yy' = a(y'x - y)$$

или, умножив обе части на dx,

$$xdx + ydy = a(xdy - ydx). \tag{27}$$

[6]Вообще, углом между двумя кривыми называется угол между касательными к ним, проведенными в точке пересечения кривых.

Это уравнение интегрируется весьма просто, если перейти от прямоугольных координат x, y к полярным r, θ, приняв ось OX за полярную ось и начало координат O за полюс. Мы имеем [82]

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad \theta = \operatorname{arctg} \frac{y}{x},$$

что дает

$$xdx + ydy = rdr, \quad d\theta = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} d\frac{y}{x} = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2.}$$

Уравнение (27) перепишется после этого в виде:

$$rdr = ar^2 d\theta, \text{ или } \frac{dr}{r} = ad\theta.$$

Интегрируя, имеем

$$\log r = a\theta + C_1, \text{ т. е. } r = Ce^{a\theta}, \text{ где } C = e^{C_1}.$$

Полученные кривые называются логарифмическими спиралями.

§ 9. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

94. Основные свойства определенного интеграла. Мы уже говорили, что определенный интеграл

$$I = \int_a^b f(x)dx, \quad a < b, \tag{1}$$

где (a, b) — конечный промежуток и $f(x)$ — непрерывная в нем функция, есть предел сумм вида [87]

$$\int_a^b f(x)dx = \lim \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}). \tag{2}$$

Этот предел надо понимать следующим образом: при любом заданном положительном ε существует такое положительное число η, что

$$\left| I - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1)} \right| < \varepsilon$$

при любом разбиении и выборе точек ξ_k из промежутков (x_{k-1,x_k}), если набольшая из (положительных) разностей $x_k - x_{k-1} < \eta$.

Кратко говоря, интеграл (1) есть предел сумм (2) при любом выборе ξ_k и стремлении наибольшей из разностей $x_k - x_{k-1}$ к нулю.

Отметим, что при этом число слагаемых суммы (2) беспредельно возрастает. Строго говоря, определение упомянутого предела (2) надо понимать так, как это указано выше (с помощь ε и η).

В конце главы мы докажем существование упомянутого предела сумм (2) для непрерывных функций и некоторых классов разрывных функций. В дальнейшем, если не оговорено особо, мы будем считать подынтегральную функцию непрерывной на промежутке интегрирования.

Мы предполагали, что нижний предел a интеграла меньше верхнего предела b. Если $a = b$, то из толкования интеграла как площади следует, что естественно считать

$$\int\limits_a^a f(x)dx = 0. \tag{3}$$

Это равенство является определением интеграла для того случая, когда верхний предел равен нижнему.

При $a > b$ принимается следующее определение:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx. \tag{4}$$

В интеграле, стоящем в правой части, нижний предел b меньше верхнего a и интеграл понимается обычным образом, как указано выше. Если бы мы для интеграла, стоящего слева, построили сумму (2), то для нее $(a > b)$ мы получим

$$a = x_0 > x_1 > x_2 > \cdots > x_{k-1} > x_k > \cdots > x_{n-1} > x_n = b,$$

и все разносит $(x_k - x_{k-1})$ отрицательны. Если мы перейдем к интегралу, стоящему в правой части равенства (4), т. е. будем считать

a верхним пределом и b нижним, то промежуточные точки x_k надо будет считать в обратном порядке, и в сумме (2) все разности переменят знак. Эти соображения делают естественным определение (4) в том случае, когда $a > b$.

Отметим еще очевидное равенство

$$\int_a^b dx = \int_a^b 1dx = b - a. \tag{5}$$

Действительно, раз подынтегральная функция при всех x равна единице, то

$$\int_a^b dx = \lim[(x_1 - a) + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + \\ + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (b - x_{n-1})].$$

Но сумма, стоящая в квадратных скобках, равна постоянной $(b-a)$.

Переходим к перечислению и доказательству свойств определенного интеграла. Первые два из них суть определения, выраженные равенствами (3) и (4).

I. *Определенный интеграл с одинаковыми верхним и нижним пределами считается равным нулю.*

II. *При перестановке между собой верхнего и нижнего пределов определенный интеграл, сохраняя абсолютное значение, меняет лишь знак:*

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

III. *Величина определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

Это уже было выяснено в [87].

IV. *Если дан ряд чисел*

$$a, b, c, \ldots, k, l,$$

Уравнение вида $y'\varphi(x) \cdot \psi(y)$ также является уравнением с разделяющимися переменными и решается теми же приемами. *расположенных в каком угодно порядке, то*

$$\int\limits_a^l f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx + \cdots + \int\limits_k^l f(x)dx. \qquad (6)$$

Эту формулу достаточно установить для случая трех чисел a, b, c, после чего нетрудно распространить доказательство на какое угодно число слагаемых.

Допустим сперва, что $a < b < c$. Из определения вытекает, что

$$\int\limits_a^c f(x)dx = \lim \sum_{l=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),$$

причем предел этот будет один и тот же, каким бы мы способом ни разбивали на части промежуток (a, c), лишь бы только наибольшая из разностей $(x_1 - x_{i-1})$ стремилась к нулю. Мы можем условиться разбивать промежуток (a, c) так, чтобы точка b, лежащая между a и c, каждый раз оказывалась одной из точек деления. Но тогда сумма

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

разобьется на две такого же типа, с той лишь разницею, что при составлении одной мы будем разбивать на части промежуток (a, b), при составлении же другой — промежуток (b, c), и притом так, что в обоих случаях наибольшая из разностей $(x_i - x_{i-1})$ стремится к нулю. Каждая из этих сумм будет стремиться соответственно к

$$\int\limits_a^b f(x)dx, \quad \int\limits_b^c f(x)dx,$$

и мы получим, фиксируя последовательность разбиений и числа ξ_i,

$$\int\limits_a^c f(x)dx = \lim \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx,$$

что и требовалось доказать.

Пусть теперь b лежит вне промежутка (a, c), например $a < c < b$. По доказанному сейчас мы можем написать

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx,$$

откуда

$$\int\limits_a^c f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx - \int\limits_c^b f(x)dx.$$

Но в силу свойства II имеем

$$-\int\limits_c^b f(x)dx = \int\limits_b^c f(x)dx,$$

т. е. опять

$$\int\limits_a^c f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_b^c f(x)dx.$$

Аналогичным путем можно рассмотреть и все остальные возможные случаи взаимного расположения точек.

V. *Постоянный множитель можно выносить из-под знака определенного интеграла,* т. е.

$$\int\limits_a^b Af(x)dx = A\int\limits_a^b f(x)dx,$$

ибо

$$\int_a^b Af(x)dx = \lim \sum_{i=1}^n Af(\xi_i)(x_1 - x_{i-1}) =$$

$$= A \lim \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = A \int_a^b f(x)dx.$$

VI. *Определенный интеграл от алгебраической суммы равен алгебраической сумме определенных интегралов от каждого слагаемого, ибо, например,*

$$\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]dx = \lim \sum_{i=1}^n [f(\xi_i) - \varphi(\xi_i)](x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \lim \sum_{i=1}^n f(\xi_1)(x_i - x_{i-1}) - \lim \sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \int_a^b f(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx.^*$$

95. Теорема о среднем. VII. *Если в промежутке* (a, b) *функции* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *удовлетворяют условию*

$$f(x) \leqslant \varphi(x), \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{7}$$

то и

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)dx \quad (b > a), \tag{8}$$

короче говоря, *неравенства можно интегрировать.*

* Это верно в том случае если оба интеграла в правой части существуют. Это утверждение является, фактически, следствием теоремы об арифметических действиях с пределами.

Составим разность

$$\int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b [\varphi(x) - f(x)]dx =$$

$$= \lim \sum_{i=1}^{n} [\varphi(\xi_i) - f(\xi_i)](x_i - x_{i-1}).$$

В силу неравенства (7) слагаемые, стоящие под знаком суммы, положительны или, по крайней мере, неотрицательны. Следовательно, то же можно сказать о всей сумме и ее пределе, что и приводит к неравенству (8).

Приведем еще геометрическое пояснение сказанного. Допустим сперва, что обе кривые

$$y = f(x), \quad y = \varphi(x)$$

лежат над осью OX (рис. 122). Тогда фигура, ограниченная кривой $y = f(x)$, осью OX и ординатами $x = a$ и $x = b$, лежит целиком внутри аналогичной фигуры, ограниченной кривой $y = \varphi(x)$, а потому площадь первой фигуры не превосходит площади второй, т. е.

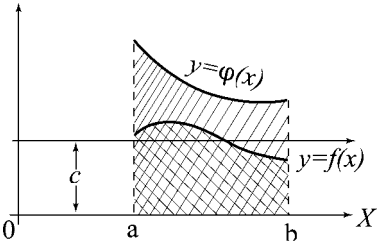

Рис. 122.

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)dx.$$

Общий случай какого угодно расположения данных кривых относительно оси OX при сохранении условия (7) приводится к предыдущему, если передвинуть чертеж настолько кверху, чтобы обе кривые оказались над осью OX; это передвижение прибавит к каждой функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ одно и то же слагаемое c.

Легко показать, что если в (7) имеет место знак $<$, то и в (8) имеет знак $<$. Напомним, что функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ считаются непрерывными.

Следствие. *Если в промежутке* (a, b)

$$|f(x)| \leqslant \varphi(x) \leqslant M, \tag{9}$$

то

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b \varphi(x)dx \leqslant M(b-a), \quad b < a. \tag{10}$$

В самом деле, условия (9) равносильны следующим:

$$-M \leqslant -\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant +M.$$

Интегрируя эти неравенства в пределах от a до b (свойство VII) и пользуясь (5), получаем

$$-M(b-a) \leqslant -\int_a^b \varphi(x)dx \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b \varphi(x)dx \leqslant M(b-a),$$

что равносильно неравенствам (10).

Полагая $\varphi(x) = |f(x)|$, получаем из (10) важное неравенство:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx, \tag{10_1}$$

которое является обобщением на случай интеграла известного свойства суммы: абсолютная величина суммы меньше или равна сумме абсолютных величин слагаемых. В написанной формуле знак равенства имеет место, как нетрудно понять, лишь в том случае, когда $f(x)$ не меняет знака в промежутке (a, b).

Из того же свойства VII вытекает весьма важная теорема.

Теорема о среднем. Если функция $\varphi(x)$ сохраняет знак в промежутке (a, b), то

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)dx, \tag{11}$$

где ξ есть некоторое значение, принадлежащее промежутку (a, b).

Будем для определенности считать $\varphi(x) \geqslant 0$ в промежутке (a, b) и обозначим через m и M соответственно наименьшее и наибольшее значения $f(x)$ в промежутке (a, b). Так как, очевидно,

$$m \leqslant f(x) \leqslant M$$

(причем оба знака равенства имеют место одновременно, только когда $f(x)$ постоянна) и $\varphi(x) \geqslant 0$, то

$$m\varphi(x) \leqslant f(x)\varphi(x) \leqslant M\varphi(x),$$

и в силу свойства VII, считая $b > a$,

$$m \int\limits_a^b \varphi(x)dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx \leqslant M \int\limits_a^b \varphi(x)dx.$$

Отсюда ясно, что существует такое число P, удовлетворяющее неравенству $m \leqslant P \leqslant M$, что

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx = P \int\limits_a^b \varphi(x)dx. \tag{12}$$

Так как функция $f(x)$ непрерывна, она принимает в промежутке (a, b) все значения, лежащие между наименьшим m и наибольшим M, в том числе и значение P [35]. Поэтому найдется такое значение ξ внутри промежутка (a, b), для которого

$$f(\xi) = P,$$

что и доказывает формулу (11).

Если $\varphi(x) \leqslant 0$ в промежутке (a, b), то $-\varphi(x) \geqslant 0$ в промежутке (a, b). Применяя к ней доказанную теорему, получим

$$\int\limits_a^b f(x)[-\varphi(x)]dx = f(\xi) \int\limits_a^b [-\varphi(x)]dx;$$

вынося знак $(-)$ за знак интеграла и умножая обе части на (-1), придем к формуле (11).

Точно так же, если $b < a$, то из предыдущего следует формула:

$$\int_b^a f(x)\varphi(x)dx = f(\xi)\int_b^a \varphi(x)dx.$$

Переставляя в обеих частях пределы интегралов и умножая на (-1), придем к формуле (11), которая доказана, таким образом, во всей общности.

В частности, полагая $\varphi(x) = 1$, получим *важный частный случай теоремы о среднем*:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)\int_a^b dx = f(\xi)(b-a). \tag{13}$$

Значение определенного интеграла равно произведению длины промежутка интегрирования на значение подынтегральной функции при некотором промежуточном значении независимой переменной.

Если $a > b$, эту длину нужно взять со знаком $(-)$. Геометрически предложение это равносильно тому, что, рассматривая площадь, ограниченную любой кривой, осью OX и двумя ординатами $x = a$, $x = b$, всегда можно найти равновеликий ей прямоугольник с тем же основанием $(b-a)$ и с высотой, *равной одной из ординат кривой в промежутке* (a, b) (рис. 123).

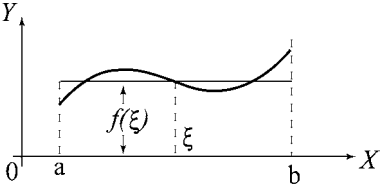

Рис. 123.

Нетрудно показать, что число ξ, входящее в формулу (11) или (13), всегда можно считать лежащим внутри промежутка (a, b).

96. Существование первообразной функции. VIII. *Если верхний предел определенного интеграла есть величина перемен-*

*ная, то производная интеграла по верхнему пределу равна значению подынтегральной функции при этом верхнем пределе.**

Заметим, что величина интеграла

$$\int\limits_a^b f(x)dx$$

при данной подынтегральной функции $f(x)$ зависит от пределов интегрирования a и b. Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_a^x f(t)dt$$

с постоянным нижним пределом a и переменным верхним пределом x, причем переменную интегрирования мы обозначаем буквою t в отличие от верхнего предела x. Величина этого интеграла будет функцией верхнего предела x:

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt \tag{14}$$

и, надо доказать, что

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

Для доказательства вычислим производную функцию $F(x)$, исходя из определения производной [45]:

$$\frac{dF(x)}{dx} = \lim_{h\to\pm 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}.$$

Мы имеем

$$F(x+h) = \int\limits_a^{x+h} f(t)dt = \int\limits_a^x f(t)dt + \int\limits_x^{x+h} f(t)dt$$

* Это утверждение справедливо, если подинтегральная функция является непрерывной.

(в силу свойства IV), откуда

$$F(x+h) = F(x) + \int\limits_x^{x+h} f(t)dt,$$

причем

$$F(a) = \int\limits_a^a f(t)dt = 0.$$

Применяя (13), имеем

$$F(x+h) - F(x) = \int\limits_x^{x+h} f(t)dt = f(\xi)h,$$

где h может быть как положительным, так и отрицательным, если $a < x < b$; $h > 0$ при $x = a$ и $h < 0$ при $x = b$. Число ξ принадлежит промежутку, концы которого суть x и $x+h$, так что если h стремится к нулю, то ξ стремится к x и $f(\xi)$ — к $f(x)$ в силу непрерывности этой функции. Из последней формулы непосредственно следует, что $F(x)$ — непрерывная функция при $a \leqslant x \leqslant b$, т. е. *определенный интеграл, рассматриваемый как функция верхнего предела, есть непрерывная функция в промежутке* (a, b). Деля обе части последней формулы на h:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(\xi)$$

и устремляя h к нулю ($h \to +0$ при $x = a$ и $h \to -0$ при $x = b$), получим

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \lim_{\xi \to x} f(\xi) = f(x).$$

Об определении производной на концах замкнутого промежутка мы уже говорили в [46].

Из предыдущего следует также, что:

IX. *Всякая непрерывная функция $f(x)$ имеет первообразную функцию или неопределенный интеграл.*

Функция (14) есть та первообразная функция для $f(x)$, которая обращается в нуль при $x = a$.

Если $F_1(x)$ *есть одно из выражений первообразной функции, то*, как мы видели в [88],

$$\int_a^b f(x)dx = F_1(b) - F_1(a). \tag{15}$$

97. Разрыв подынтегральной функции. Во всех предыдущих рассуждениях предполагалось, что подынтегральная функция $f(x)$ непрерывна во всем промежутке интегрирования (a, b).

Введем теперь понятие интеграла и для некоторых разрывных функций.

Если в промежутке (a, b) имеется точка c, в которой подынтегральная функция $f(x)$ терпит разрыв, но при этом интегралы

$$\int_a^{c-\varepsilon'} f(x)dx, \qquad \int_{c+\varepsilon''}^b f(x)dx \quad (a < b)$$

стремятся к определенным пределам, когда положительные числа ε' и ε'' стремятся к нулю, то эти пределы называются определенными интегралами от функции $f(x)$, взятыми соответственно между пределами (a, c) и (c, b), т. е.

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{\varepsilon' \to +0} \int_a^{c-\varepsilon'} f(x)dx,$$

$$\int_c^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon'' \to +0} \int_{c+\varepsilon'}^b f(x)dx,$$

если эти пределы существуют.

Мы положим в этом случае

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Функция $F(x)$, определенная формулой (14), обладает, как нетрудно видеть, следующими свойствами:

$F'(x) = f(x)$ во всех точках (a, b), кроме $x = c$, и $F(x)$ непрерывна во всем промежутке (a, b), включая $x = c$.

Если точка c совпадает с одним из концов промежутка (a, b), надо рассматривать вместо двух только один из пределов:

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx \quad \text{или} \quad \lim_{\varepsilon\to+0}\int\limits_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Наконец, если точек разрыва c в промежутке (a, b) не одна, а несколько, то нужно разбить промежуток на части, в каждой из которых будет уже только по одной точке разрыва.

При сделанном выше соглашении о смысле символа

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$$

свойство IX *и формула* (15)

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = F_1(b) - F_1(a)$$

будут наверно иметь место, если $F_1'(x) = f(x)$ во всех точках (a, b), кроме $x = c$, и $F_1(x)$ непрерывна во всем промежутке (a, b), включая $x = c$.

Утверждение это достаточно доказать для случая одной точки разрыва c внутри промежутка (a, b), так как случай нескольких точек разрыва и случай, когда $c = a$ или b, исследуются совершенно аналогичным образом.

Так как в промежутках $(a, c-\varepsilon')$, $(c+\varepsilon'', b)$ функция $f(x)$ также непрерывна, то к этим промежутками применима формула (15), и

мы имеем

$$\int\limits_a^{c-\varepsilon'} f(x)dx = F_1(c-\varepsilon') - F_1(a),$$

$$\int\limits_{c+\varepsilon''}^{b} f(x)dx = F_1(b) - F_1(c+\varepsilon'').$$

В силу непрерывности $F_1(x)$ мы можем написать

$$\int\limits_a^{c} f(x)dx = \lim_{\varepsilon'\to+0}[F_1(c-\varepsilon') - F_1(a)] = F_1(c) - F_1(a),$$

$$\int\limits_c^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon''\to+0}[F_1(b) - F_1(c+\varepsilon'')] = F_1(b) - F_1(c),$$

т. е.

$$\int\limits_a^{b} f(x)dx = \int\limits_a^{c} f(x)dx + \int\limits_c^{b} f(x)dx =$$
$$= [F_1(c) - F_1(a)] + [F_1(b) - F_1(c)] = F_1(b) - F_1(a),$$

что и требовалось доказать.

С точки зрения геометрической, рассмотренный случай встречается всегда, когда кривая $y = f(x)$ имеет разрыв в точке c, но так, что *площадь* кривой все же существует. Рассмотрим, например, график функции, определенной следующим образом:

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x < 2,$$
$$f(x) = x \quad \text{при} \quad 2 \leqslant x \leqslant 3$$

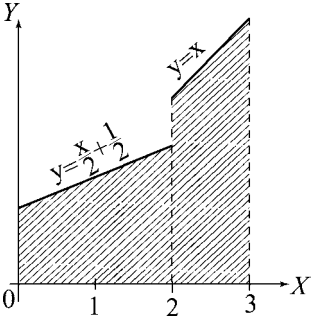

Рис. 124.

(рис. 124). Площадь, ограниченная этой кривой, осью OX, ординатой $x = 0$ и переменной ординатой $x = x_1$, есть

непрерывная функция от x, несмотря на то, что функция $f(x)$ терпит разрыв при $x = 2$. С другой стороны, нетрудно найти первообразную функцию для $f(x)$, которая была бы непрерывна во всем промежутке $(0, 3)$. Это будет, например функция $F_1(x)$, определяемая следующим образом:

$$F_1(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant 2,$$
$$F_1(x) = \frac{x^2}{2} \quad \text{при} \quad 2 \leqslant x \leqslant 3.$$

Действительно, дифференцируя, убеждаемся, что

$$F_1'(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}$$

в промежутке $(0, 2)$ и $F_1'(x) = x$ в промежутке $(2, 3)$. Кроме того, оба написанных выражения $F_1(x)$ при $x = 2$ дают одну и ту же величину 2, что и обеспечивает непрерывность $F_1(x)$. Площадь, ограниченная нашей кривой, осью OX и ординатами $x = 0$, $x = 3$, выразится формулой

$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^2 f(x)dx + \int_2^3 f(x)dx = F_1(3) - F_1(0) = \frac{9}{2},$$

в чем нетрудно убедиться и непосредственным рассмотрением чертежа.

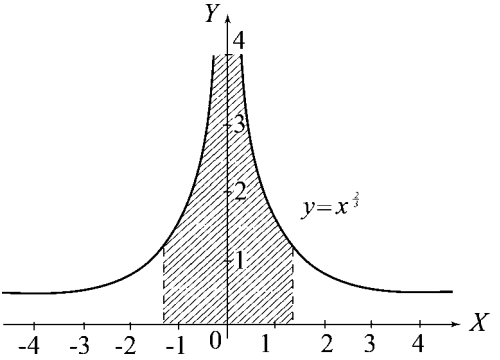

Рис. 125.

Рассмотрим еще функцию $y = x^{-2/3}$ (рис. 125). Она обращается в бесконечность при $x = 0$, но ее первообразная функция $3x^{1/3}$ остается

непрерывной при этом значении x, а потому можем написать

$$\int_{-1}^{+1} x^{-2/3}dx = 3x^{1/3}\Big|_{-1}^{+1} = 6;$$

другими словами, хотя рассматриваемая кривая при приближении x к нулю уходит в бесконечность, тем не менее она имеет совершенно определенную площадь между ординатами $x = -1$ и $x = 1$.

Для функции $\frac{1}{x^2}$ первообразная функция $\left(-\frac{1}{x}\right)$ обращается сама в бесконечность при $x = 0$, формула (15) неприменима к этой функции в том случае, когда точка 0 лежит внутри промежутка (a, b); кривая $\frac{1}{x^2}$ в таком промежутке конечной площади не имеет.

Заметим, что интегралы от разрывных функций в конечном промежутке (a, b) в некоторых случаях имеют смысл и непосредственно, как пределы сумм, указанных в начале [94]. Это будет иметь, например, место в том случае, когда $f(x)$ имеет конечное число точек разрыва в промежутке (a, b) и ограничена в нем, т. е. существует такое положительное число M, что $|f(x)| < M$ при всех x из (a, b). Значения в точках разрыва не влияют при этом на величину интеграла. Мы будем говорить об этом в [116]. Если же функция не ограничена, т. е. $|f(x)|$ принимает сколь угодно большие значения, то непосредственное определение интеграла как предела суммы невозможно. Это имеет место для примера, соответствующего рис. 125. Здесь необходимо определять интеграл как интеграл по укороченному промежутку с дальнейшим переходом к пределу

$$\int_{-1}^{+1} x^{-\frac{2}{3}}dx = \lim_{\varepsilon'\to-0}\int_{-1}^{\varepsilon'} x^{-\frac{2}{3}}dx + \lim_{\varepsilon''\to+0}\int_{\varepsilon''}^{1} x^{-\frac{2}{3}}dx.$$

Такие интегралы называются обычно *несобственными*.

Для функции $\frac{1}{x^2}$ не существует конечного предела

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{x^2}dx = +\infty.$$

Такие интегралы называются *расходящимися*. Указанный выше интеграл от $x^{-2/3}$ называется *сходящимся*, поскольку указанные выше пределы при $\varepsilon' \to -0$ и $\varepsilon'' \to +0$ существуют.

В следующем параграфе мы рассмотрим несобственные интегралы по бесконечному промежутку. В этом последнем случае непосредственное определение интеграла как предела суммы невозможно и интеграл по существу несобственный.

98. Бесконечные пределы. Предыдущие рассуждения можно распространить и на случай *бесконечного промежутка* и положить

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)dx, \tag{16}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^b f(x)dx; \tag{17}$$

если эти пределы существуют.

Условие это наверно выполнено, если первообразная функция $F_1(x)$ стремится к определенным пределам, когда x стремится к $(+\infty)$ или к $(-\infty)$. Обозначив эти пределы просто через $F_1(+\infty)$ и $F_1(-\infty)$, будем иметь

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} [F_1(b) - F_1(a)] = F_1(+\infty) - F_1(a), \tag{18}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} [F_1(b) - F_1(a)] = F_1(b) - F_1(-\infty), \tag{19}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_a^{\infty} f(x)dx = F_1(+\infty) - F_1(-\infty), \tag{20}$$

что и является обобщением формулы (15) на случай бесконечного промежутка.

Часто соотношение (16) пишут в виде

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)dx.$$

С точки зрения геометрической, при выполнении предыдущего условия можно сказать, что бесконечная ветвь кривой $y = f(x)$, которая соответствует $x \to \pm\infty$, имеет площадь.

Если пределы (16) или (17) существуют, то говорят, что соответствующие интегралы *сходятся* или что это — сходящиеся интегралы. В противном случае говорят, что интегралы *расходятся*.

Пример. Кривая $y = \frac{1}{1+x^2}$, уходящая в бесконечность при $x = \pm\infty$, все же ограничивает с осью OX конечную площадь (рис. 126), так как

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

При вычислении этого интеграла следует помнить, что для функции $\operatorname{arctg} x$ нужно брать не любое значение этой многозначной функции, а именно то, которое было определено в [24], для того чтобы она сделалась

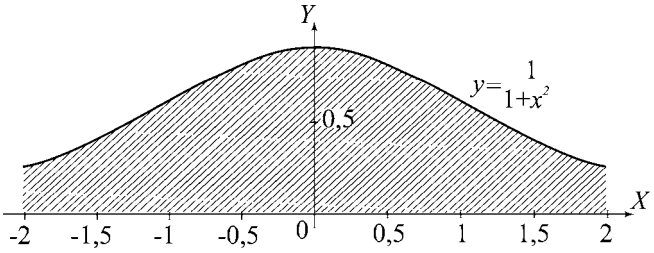

Рис. 126.

однозначной, т. е. между $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ и $\left(+\frac{\pi}{2}\right)$; в противном случае предыдущая формула теряет смысл.

99. Замена переменной под знаком определенного интеграла. Пусть $f(x)$ — непрерывна в промежутке (a, b) или даже в более широком промежутке (A, B), о котором будет сказано ниже.

Пусть далее функция $\varphi(t)$ однозначна, непрерывна и имеет непрерывную производную $\varphi'(t)$ в промежутке (α, β), причем

$$\varphi(\alpha) = a \quad \text{и} \quad \varphi(\beta) = b. \tag{21}$$

Положим далее, что значения $\varphi(t)$ при изменении t в промежутке (α, β) не выходят из промежутка (a, b) или из того более широкого промежутка (A, B), в котором $f(x)$ — непрерывна. При этом сложная функция $f[\varphi(t)]$ есть непрерывная функция t в промежутке (α, β).

При высказанных предположениях, если ввести вместо x новую переменную интегрирования t:

$$x = \varphi(t), \tag{22}$$

то определенный интеграл преобразуется по формуле

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt. \tag{23}$$

В самом деле, введем вместо рассматриваемых интегралов — интегралы с переменными пределами

$$F(x) = \int\limits_a^x f(y)dy, \quad \Psi(t) = \int\limits_\alpha^t f[\varphi(z)]\varphi'(z)dz.$$

В силу (22) $F(x)$ есть сложная функция t:

$$F(x) = F[\varphi(t)] = \int\limits_a^{\varphi(t)} f(y)dy.$$

Вычисляя ее производную по правилу дифференцирования сложных функций, имеем

$$\frac{dF(x)}{dt} = \frac{dF(x)}{dx}\frac{dx}{dt},$$

но, в силу свойства VIII [96],

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x);$$

из формулы же (22) следует

$$\frac{dx}{dt} = \varphi'(t),$$

откуда

$$\frac{dF(x)}{dt} = f(x)\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\varphi'(t).$$

Вычислим теперь производную от функции $\Psi(t)$. В силу свойства VIII и сделанных нами предположений имеем

$$\frac{d\Psi(t)}{dt} = f[\varphi(t)]\varphi'(t).$$

Функции $\Psi(t)$ и $F(x)$, рассматриваемые как функции от t, имеют, таким образом, одинаковые производные в промежутке (α, β), а потому [89] могут отличаться лишь на постоянное слагаемое, но при $t = \alpha$ мы имеем

$$x = \varphi(\alpha) = a, \quad F(x)\Big|_{t=\alpha} = F(a) = 0, \quad \Psi(\alpha) = 0,$$

т. е. эти две функции равны при $t = \alpha$ а потому и при всех значениях t в промежутке (α, β). В частности, при $t = \beta$ имеем

$$F(x)\Big|_{t=\beta} = F(b) = \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt,$$

что и требовалось доказать.

Весьма часто вместо подстановки (22):

$$x = \varphi(t)$$

употребляют обратную

$$t = \psi(x). \tag{24}$$

Тогда пределы α и β определяются сразу по формулам

$$\alpha = \psi(a), \quad \beta = \psi(b),$$

но нужно здесь иметь в виду, что *выражение* (22) *для* x, *которое получим, если решим уравнение* (24) *относительно* x, *должно удовлетворять всем указанным выше условиям,* в частности, функция $\varphi(t)$ должна быть *однозначной* функцией от t. Если это свойство $\varphi(t)$ не соблюдено, то формула (23) может оказаться неверной.

Введя в интеграле

$$\int\limits_{-1}^{+1} dx = 2$$

вместо x новую независимую переменную t по формуле

$$t = x^2,$$

в правой части формулы (23) получим интеграл с одинаковыми пределами $+1$, $+1$, равный, следовательно, нулю, что невозможно. Ошибка происходит вследствие того, что выражение x через t:

$$x = \pm\sqrt{t}$$

есть функция многозначная.

Пример. Функция $f(x)$ называется *четной функцией* x, если $f(-x) = f(x)$, и *нечетной функцией*, если $f(-x) = -f(x)$. Например, $\cos x$ есть четная функция и $\sin x$ — нечетная.

Покажем, что

$$\int\limits_{-a}^{+a} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)dx,$$

если $f(x)$ — четная, и

$$\int\limits_{-a}^{+a} f(x)dx = 0,$$

если $f(x)$ — нечетная.

Разобьем интеграл на два [94, IV]:

$$\int\limits_{-a}^{+a} f(x)dx = \int\limits_{-a}^{0} f(x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx.$$

В первом интеграле совершим замену переменной $x = -t$ и воспользуемся свойствами II и III [94]:

$$\int\limits_{-a}^{0} f(x)dx = -\int\limits_{a}^{0} f(-t)dt = \int\limits_{0}^{a} f(-t)dt = \int\limits_{0}^{a} f(-x)dx,$$

откуда, подставляя в предыдущую формулу,

$$\int\limits_{-a}^{+a} f(x)dx = \int\limits_{0}^{a} f(-x)dx + \int\limits_{0}^{a} f(x)dx = \int\limits_{0}^{a} [f(-x) + f(x)]dx.$$

Если $f(x)$ — четная функция, то сумма $[f(-x) + f(x)]$ равна $2f(x)$, а если $f(x)$ — нечетная, то эта сумма равна нулю, что и доказывает наше утверждение.

100. Интегрирование по частям. *Формула интегрирования по частям* [91] *для определенных интегралов может быть написана в виде:*

$$\int\limits_{a}^{b} u(x)dv(x) = u(x)v(x)\Big|_{a}^{b} - \int\limits_{a}^{b} v(x)du(x). \tag{25}$$

Действительно, интегрируя почленно тождество [91]

$$u(x)dv(x) = d[u(x)v(x)] - v(x)du(x),$$

получим

$$\int\limits_{a}^{b} u(x)dv(x) = \int\limits_{a}^{b} d[u(x)v(x)] - \int\limits_{a}^{b} v(x)du(x),$$

то в силу свойства IX [96],

$$\int\limits_{a}^{b} d[u(x)v(x)] = \int\limits_{a}^{b} \frac{d[u(x)v(x)]}{dx}dx = u(x)v(x)\Big|_{a}^{b},$$

что и дает формулу (25). Считается, конечно, что $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные в промежутке (a, b).

Пример. Вычислить интегралы

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x dx, \quad \int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x dx.$$

Положим

$$I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x dx.$$

Интегрируя по частям, имеем

$$I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \sin x dx = -\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x d\cos x =$$

$$= -\sin^{n-1} x \cos x\Big|_0^{\pi/2} + \int\limits_0^{\pi/2} (n-1)\sin^{n-2} x \cos x \cdot \cos x dx =$$

$$= (n-1)\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx = (n-1)\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)dx =$$

$$=(n-1)\int\limits_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x dx - (n-1)\int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x dx=(n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,$$

т. е.

$$I_n = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,$$

откуда, решая относительно I_n:

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}. \tag{26}$$

Формула эта называется *формулой приведения*, так как приводит вычисление интеграла I_n к такому же интегралу, но с меньшим значком $(n-2)$.

Различим теперь два случая в зависимости от того, если n число четное или нечетное.

1. $n = 2k$ (четное). Имеем, в силу (26),

$$I_{2k}=\frac{2k-1}{2k}I_{2k-2}=\frac{(2k-1)(2k-3)}{2k\cdot(2k-2)}I_{2k-4}=\ldots=\frac{(2k-1)(2k-3\ldots3)\cdot1}{2k(2k-2)\ldots4\cdot2}I_0,$$

и так как

$$I_0=\int\limits_0^{\pi/2}dx=\frac{\pi}{2},$$

то окончательно

$$I_{2k}=\frac{(2k-1)(2k-3)\ldots3\cdot1}{2k(2k-2)\ldots4\cdot2}\frac{\pi}{2}.$$

2. $n = 2k + 1$ (нечетное). Аналогично предыдущему находим

$$I_{2k+1}=\frac{2k(2k-2)\ldots4\cdot2}{(2k+1)(2k-1)\ldots5\cdot3}I_1,\quad I_1=\int\limits_0^{\pi/2}\sin x dx=-\cos x\Big|_0^{\pi/2}=1,$$

а потому

$$I_{2k+1}=\frac{2k(2k-2)\ldots4\cdot2}{(2k+1)(2k-1)\ldots5\cdot3}.$$

Интеграл

$$\int\limits_0^{\pi/2}\cos^n x dx$$

можно вычислить таким же путем, но проще привести его к предыдущему, заметив, что

$$\int\limits_0^{\pi/2}\cos^n x dx=\int\limits_0^{\pi/2}\sin^n\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx,$$

откуда, положив

$$\frac{\pi}{2}-x=t,\quad x=\frac{\pi}{2}-t,$$

на основании формулы (23) и свойства II [94], имеем

$$\int\limits_0^{\pi/2}\cos^n x dx=-\int\limits_{\pi/2}^{0}\sin^n t dt=\int\limits_0^{\pi/2}\sin^n t dt.$$

Объединяя полученные результаты, можем написать

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2k} x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2k} x dx = \frac{(2k-1)(2k-3)\ldots 3\cdot 1}{2k(2k-2)\ldots 4\cdot 2}\frac{\pi}{2}, \tag{27}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2k+1} x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2k+1} x dx = \frac{2k(2k-2)\ldots 4\cdot 2}{(2k+1)(2k-1)\ldots 5\cdot 3}. \tag{28}$$

§ 10. ПРИЛОЖЕНИЯ ПОНЯТИЯ ОБ ОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

101. Вычисление площадей. Мы переходим к приложениям понятия определенного интеграла к вычислению площадей, объемов и длин дуг. При этом мы будем руководствоваться во многом наглядными соображениями. Точное определение площади и объема с разных точек зрения будет нами дано в последующих томах.

В [87] мы видели, что площадь, ограниченная кривой $y = f(x)$, осью OX и двумя ординатами $x = a$ и $x = b$, выражается определенным интегралом

$$\int_a^b f(x)dx \quad (a < b).$$

Этот интеграл, как мы видели, дает алгебраическую сумму площадей, в которой каждая площадь, расположенная под осью OX, входит со знаком $(-)$. Для того чтобы получить сумму площадей в обычном смысле, нужно вычислить

$$\int_a^b |f(x)|dx.$$

Так, сумма заштрихованных на рис. 127 площадей равна

$$\int_a^c f(x)dx - \int_c^g f(x)dx + \int_g^h f(x)dx - \int_h^k f(x)dx + \int_k^b f(x)dx.$$

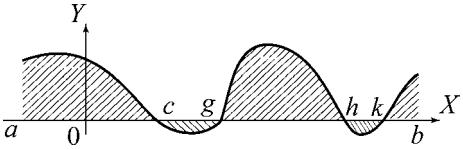

Рис. 127.

Площадь, заключенная между двумя кривыми

$$y = f(x), \quad y = \varphi(x) \tag{1}$$

и двумя ординатами

$$x = a, \quad x = b,$$

в том случае, когда одна кривая лежит над другой, т. е.

$$f(x) \geqslant \varphi(x)$$

в промежутке (a, b), *выражается определенным интегралом*

$$\int_a^b [f(x) - \varphi(x)]dx. \tag{2}$$

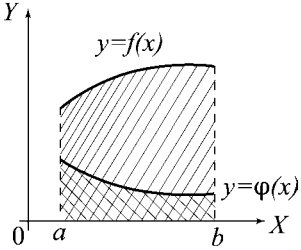

Рис. 128.

Допустим сперва, что обе кривые лежат над осью OX. Непосредственно из рис. 128 видно, что искомая площадь S равна разности площадей, ограниченных данными кривыми с осью OX

$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx =$$

$$= \int_a^b [f(x) - \varphi(x)]dx,$$

что и требовалось доказать. Общий случай какого угодно расположения кривых относительно оси OX приводится к разобранному,

если передвинуть ось OX настолько книзу, чтобы обе кривые оказались над осью OX; это передвижение равносильно прибавлению к обеим функциям $f(x)$ и $\varphi(x)$ одного и того же постоянного слагаемого, причем разность $f(x) - \varphi(x)$ остается без изменения.

Предлагаем в виде упражнения доказать, что *если данные две кривые пересекаются так, что одна кривя лежит частью ниже, а частью выше другой, то сумма площадей, лежащих между ними и ординатами $x = a$, $x = b$, равна*

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|dx. \tag{3}$$

Часто вычисление определенного интеграла называют *квадратурой*. Это связано с тем, что определение площади, как указано выше, сводится к вычислению определенного интеграла.

Примеры. **1.** Площадь, ограниченная параболой второй степени

$$y = ax^2 + bx + c,$$

осью OX и двумя ординатами, расстояние между которыми есть h, равна

$$\frac{h}{6}(y_1 + y_2 + 4y_0), \tag{4}$$

где y_1 и y_2 означают крайние ординаты кривой, y_0 — ординату, равноотстоящую от крайних.

При этом предполагается, что кривая лежит над осью OX.

При доказательстве формулы (4) мы можем, не ограничивая общности, считать, что крайняя ордината слева направлена по оси OY (рис. 129), так как передвижение всего чертежа параллельно оси OX не изменяет ни величины рассматриваемой площади, ни взаимного расположения крайних и средней ординат, ни величин этих ординат. Но при этом предположении, допустив, что уравнение параболы имеет вид $y = ax^2 +$

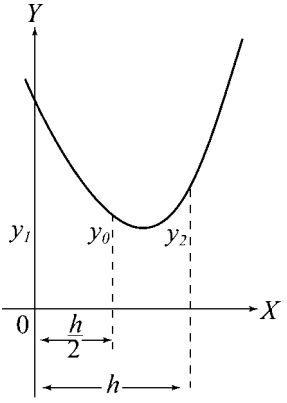

Рис. 129.

$bx+c$, мы выразим искомую площадь S в виде определенного интеграла

$$S=\int\limits_0^h (ax^2+bx+c)dx = a\frac{x^3}{3}+b\frac{x^2}{2}+cx\Big|_0^h =$$

$$= a\frac{h^3}{3}+b\frac{h^2}{2}+ch=\frac{h}{6}(2ah^2+3bh+6c).$$

При наших обозначениях мы имеем

$$y_0=ax^2+bx+c\Big|_{x=\frac{h}{2}}=\frac{1}{4}ah^2+\frac{1}{2}bh+c,$$

$$y_1=ax^2+bx+c\Big|_{x=0}=c,\quad y_2=ax^2+bx+c\Big|_{x=h}=ah^2+bh+c,$$

откуда следует

$$y_1+y_2+4y_0=2ah^2+3bh+6c,$$

что и доказывает наше утверждение.

2. Площадь эллипса. Эллипс, уравнение которого

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

симметричен относительно координатных осей, а потому искомая площадь S равна учетверенной площади той части эллипса, которая лежит в первом координатном углу, т. е.

$$S=4\int\limits_0^a y dx$$

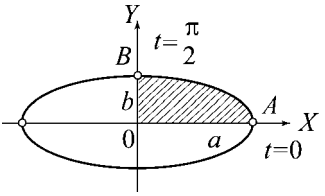

Рис. 130.

(рис. 130). Вместо того, чтобы определить y из уравнения эллипса и подставить полученное выражение и подынтегральную функцию, мы воспользуемся параметрическим представлением эллипса:

$$x=a\cos t,\quad y=b\sin t, \tag{5}$$

и введем вместо x новую переменную t; y выразится тогда сразу вторым из уравнений (5). Когда x меняется от

0 до a, t меняется от $\frac{\pi}{2}$ до 0, и так как все условия правила замены переменных [99] в данном случае выполнены, то

$$S = 4\int\limits_{\pi/2}^{0} b\sin t\, d(a\cos t) = -4ab\int\limits_{\pi/2}^{0} \sin^2 t dt = 4ab\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^2 t dt.$$

По формуле (27) [100] при $k = 1$ мы имеем

$$\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin^2 t dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4},$$

откуда находим окончательно

$$S = \pi ab. \tag{6}$$

При $a = b$, когда эллипс обращается в круг радиуса a, получим известное выражение πa^2 для площади круга.

3. Вычислить площадь, заключенную между двумя кривыми

$$y = x^2, \quad x = y^2.$$

Данные кривые (рис. 131) пересекаются в двух точках $(0, 0)$, $(1, 1)$, координаты которых мы получим, решая совместно уравнения этих кривых. Так как в промежутке $(0, 1)$ имеем $\sqrt{x} \geqslant x^2$, то искомая площадь S в силу (2) выражается формулой

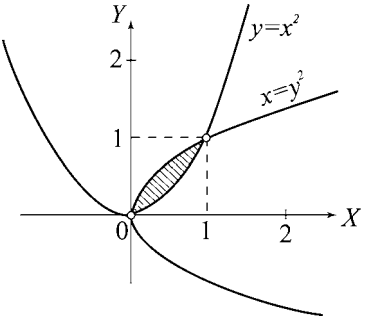

Рис. 131.

$$S = \int\limits_{0}^{1} \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx = \left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

102. Площадь сектора. *Площадь сектора, ограниченная кривой, уравнение которой в полярных координатах есть*

$$r = f(\theta), \tag{7}$$

и двумя радиусами-векторами

$$\theta = \alpha, \quad \theta = \beta, \tag{8}$$

проведенными из полюса под углами α и β к полярной оси, выражается формулой

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta. \tag{9}$$

Для вывода формулы (9) разобьем рассматриваемую площадь (рис. 132) на малые элементы, разделив угол между радиусами-векторами (8) на n частей. Рассмотрим площадь одного из таких малых секторов, ограниченного лучами θ и $\theta + \Delta\theta$. Обозначив через ΔS его площадь, через m и M — наименьшее и наибольшее значения функции $r = f(\theta)$ в промежутке $(\theta, \theta + \Delta\theta)$, мы видим, что ΔS заключается между площадями двух круговых секторов того же растворения $\Delta\theta$, но радиусов m и M, т. е.

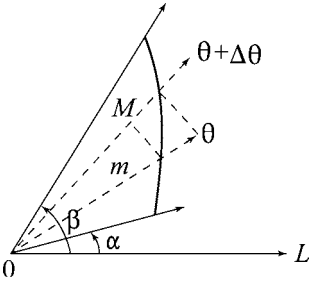

Рис. 132.

$$\frac{1}{2} m^2 \Delta\theta \leqslant \Delta S \leqslant \frac{1}{2} M^2 \Delta\theta,$$

а потому, обозначив через P некоторое число, лежащее между m и M, можем написать

$$\Delta S = \frac{1}{2} P^2 \Delta\theta.$$

Так как непрерывная функция $f(\theta)$ в промежутке $(\theta, \theta + \Delta\theta)$ принимает все значения между m и M, то в этом промежутке наверное найдется такое значение θ', при котором

$$f(\theta') = P,$$

а тогда

$$\Delta S = \frac{1}{2} [f(\theta')]^2 \Delta\theta. \tag{10}$$

Если теперь будем увеличивать число элементарных секторов ΔS так, что наибольшее из значений $\Delta\theta$ стремится к нулю, и если

вспомним сказанное в [87], то в пределе получим

$$S = \lim \sum \frac{1}{2}[f(\theta')]^2 \Delta\theta = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}[f(\theta)]^2 d\theta = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta,$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что основная идея приведенного доказательства формулы (9) заключается в замене площади сектора ΔS площадью кругового сектора того же растворения $\Delta\theta$ и радиуса $f(\theta')$. Приняв вместо *точного* выражения (10) *приближенное*:

$$\Delta S = \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta,$$

где $r = f(\theta'')$ и θ'' — любое значение из промежутка $(\theta, \theta + \Delta\theta)$, для площади этого сектора мы получим в пределе тот же результат:

$$\lim \sum \frac{1}{2}[f(\theta'')]^2 \Delta\theta = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 d\theta. \qquad (11)$$

При таком выводе подынтегральное выражение в формуле (11) получает простой геометрический смысл: $\frac{1}{2}r^2 d\theta$ есть приближенное выражение площади элементарного сектора растворения $d\theta$ и потому называется просто *элементом площади в полярных координатах.*

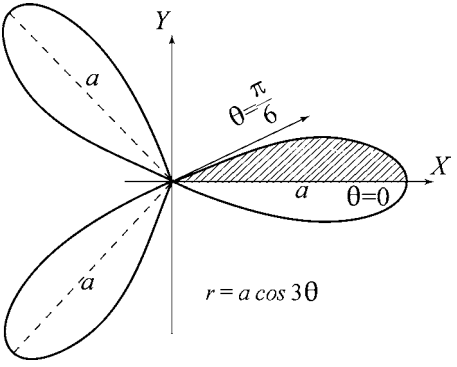

Рис. 133.

Пример. Найти площадь, ограниченную замкнутой кривой

$$r = a\cos 3\theta \quad (a > 0).$$

Кривая эта, построение которой по точкам не представляет никакого труда, изображена на рис. 133 и называется *трилистником.* Полная площадь, ею ограниченная, равна шестикратной площади

заштрихованной части, соответствующей изменению θ от 0 до $\frac{\pi}{6}$, так что по формуле (9) имеем

$$S = 6\int\limits_0^{\pi/6} \frac{1}{2}a^2\cos^2 3\theta d\theta = a^2\int\limits_0^{\pi/6}\cos^2 3\theta d(3\theta) = a^2\int\limits_0^{\pi/2}\cos^2 t dt = \frac{\pi a^2}{4}.$$

103. Длина дуги. Пусть имеется дуга AB некоторой кривой. Впишем в нее ломаную линию (рис. 134) и будем увеличивать число сторон этой ломаной так, чтобы наибольшая из длин сторон стремилась к нулю. Если при этом периметр ломаной будет стремиться к определенному пределу, не зависящему от того, какие именно ломаные мы вписываем, то дуга называется *спрямляемой*, а упомянутый предел называется *длиной этой дуги*. Это же определение длины годится и для замкнутой кривой.

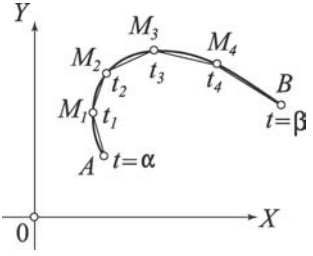

Рис. 134.

Пусть кривая задана явным уравнением $y = f(x)$, причем точкам A и B соответствуют значения $x = a$ и $x = b$ $(a < b)$, и пусть $f(x)$ имеет непрерывную производную в промежутке $a \leqslant x \leqslant b$, которому и соответствует дуга AB. Мы покажем, что при этих условиях дуга AB спрямляема и что ее длина выражается определенным интегралом.

Пусть $AM_1M_2\ldots M_{n-1}B$ — вписанная ломаная, причем ее вершинам соответствуют значения

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

и обозначим $y_i = f(x_i)$. Принимая во внимание формулу для длины отрезка из аналитической геометрии, для периметра ломаной получим следующую формулу

$$p = \sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1})]^2}.$$

Пользуясь формулой конечных приращений

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \quad (x_{i-1} < \xi_i < x_i),$$

получим для длины отдельной стороны ломаной выражение

$$\sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}(x_i - x_{i-1}),$$

из которого мы видим, что требование того, чтобы наибольшая из сторон стремилась к нулю, равносильно требованию, чтобы наибольшая из разностей $(x_i - x_{i-1})$ стремилась к нулю. Для периметра ломаной получаем выражение

$$p = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}(x_i - x_{i-1}),$$

а оно действительно имеет предел, равный интегралу

$$\int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx.$$

Таким образом, длина l дуги AB выражается формулой

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx. \tag{12}$$

Пусть $x' < x''$ — какие-либо два значения из промежутка (a, b), а M' и M'' — соответствующие точки на дуге AB. Применяя теорему о среднем, получаем следующую формулу для длины l' дуги $M'M''$:

$$l' = \int_{x'}^{x''} \sqrt{1 + f'^2(x)}dx = \sqrt{1 + f'^2(\xi_1)}(x'' - x') \quad (x' < \xi_1 < x'').$$

Для длины хорды $M'M''$, пользуясь формулой конечных приращений, получаем формулу

$$M'M'' = \sqrt{(x''-x')^2 + [f(x'')-f(x')]^2} = \\ = \sqrt{1+f'^2(\xi_2)}(x''-x') \quad (x' < \xi_2 < x'').$$

Отсюда следует

$$\frac{M'M''}{l'} = \frac{\sqrt{1+f'^2(\xi^2)}}{\sqrt{1+f'^2(\xi^1)}}.$$

Если точки M' и M'' стремятся к точке M с абсциссой x, то x' и $x'' \to x$, а тем самым ξ_1 и $\xi_2 \to x$, и из последней формулы мы получаем

$$\frac{M'M''}{l'} \to 1.$$

Этим мы пользовались в [70].

Положим теперь, что кривая задана параметрически

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

причем точкам A и B соответствуют значения $t = \alpha$ и $t = \beta$ ($\alpha < \beta$). Мы предполагаем, что значениям t из промежутка $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ соответствуют точки кривой AB так, что различным t соответствуют различные точки этой кривой, которая сама себя не пересекает и не замкнута (рис. 134). Далее мы предполагаем, что в промежутке $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ существуют непрерывные производные $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$.

Пусть, как и выше, $AM_1M_2\ldots M_{n-1}B$ — вписанная ломаная и $t_0 = \alpha < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = \beta$ — соответствующие значения параметра t. Для периметра ломаной получим выражение

$$p = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{[\varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1})]^2 + [\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})]^2}$$

или, применяя формулу конечных приращений,

$$p = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\varphi'^2(\tau_i) + \psi'^2(\tau_i')}(t_i - t_{i-1}) \quad (t_{i-1} < \tau_i \text{ и } \tau_i' < t_i). \qquad (13)$$

Можно показать, что требование того, чтобы наибольшая из сторон ломаной стремилась к нулю, равносильно требованию того, чтобы наибольшая из разностей $(t_i - t_{i-1})$ стремилась к нулю. Это может быть доказано и без предположения существования производных $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$.

Выражение (13) отличается от суммы, дающей в пределе интеграл

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt, \tag{14}$$

ввиду того, что аргументы τ_i и τ_i', вообще говоря, различны.

Введем сумму

$$q = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\varphi'^2(\tau_i) + \psi'^2(\tau_i)}(t_i - t_{i-1}),$$

которая в пределе дает интеграл (14). Для того чтобы доказать, что и сумма (13) стремится к пределу (14), надо показать, что разность

$$p - q = \sum_{i=1}^{n} \left[\sqrt{\varphi'^2(\tau_i) + \psi'^2(\tau_i')} - \sqrt{\varphi'^2(\tau_i) + \psi'^2(\tau_i)}\right](t_i - t_{i-1})$$

стремится к нулю.

Умножая и деля на сумму радикалов, получим

$$p - q = \sum_{i=1}^{n} \frac{\psi'(\tau_i') + \psi'(\tau_i)}{\sqrt{\varphi'^2(\tau_i) + \psi'^2(\tau_i')} + \sqrt{\varphi'^2(\tau_i) + \psi'^2(\tau_i)}} \times$$
$$\times [\psi'(\tau_i') - \psi'(\tau_i)](t_i - t_{i-1}).$$

Так как

$$[\psi'(\tau_i') + \psi'(\tau_i)] \leqslant \sqrt{\varphi'^2(\tau_i) + \psi'^2(\tau_i')} + \sqrt{\varphi'^2(\tau_i) + \psi'^2(\tau_i)},$$

то

$$|p - q| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\psi'(\tau_i') - \psi'(\tau_i)|(t_i - t_{i-1}).$$

Числа τ_i и τ_i' принадлежат промежутку (t_{i-1}, t_i), и, в силу равномерной непрерывности $\psi'(t)$ в промежутке $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$,* можно утверждать, что наибольшая из величин $|\psi'(\tau_i') - \psi'(\tau_i)|$, которую мы обозначим через δ, стремится к нулю, если наибольшая из разностей $(t_i - t_{i-1})$ стремится к нулю. Но из предыдущей формулы следует:

$$|p - q| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \delta(t_i - t_{i-1}) = \delta \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = \delta(\beta - \alpha),$$

откуда очевидно, что $p - q \to 0$. Таким образом, сумма (13), выражающая периметр вписанной ломаной, стремится к интегралу (14), т. е.

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt. \tag{15}$$

Эта формула для длины l остается справедливой и в случае замкнутой кривой. Чтобы убедиться в этом, достаточно, например, разбить замкнутую кривую на две незамкнутые, к каждой применить формулу (16) и сложить полученные значения l. Точно так же, если некоторая кривая L состоит из конечного числа кривых L_k, каждая из которых имеет параметрическое представление, удовлетворяющее указанным выше условиям, то, вычисляя по формуле (15) длину каждой кривой L_k и складывая эти длины, получим длину кривой L.

Рассмотрим переменное значение t из промежутка (α, β), которому соответствует переменная точка M дуги AB. Длина дуги AM будет функцией от t и будет выражаться формулой

$$s(t) = \int_{\alpha}^{t} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt. \tag{16}$$

Принимая во внимание правило дифференцирования интеграла по

* Если функция непрерывна на замкнутом интервале, то она обладает и свойством равномерной непрерывности на этом интервале.

верхнему пределу, получим

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}, \tag{17}$$

то есть

$$ds = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt,$$

откуда, принимая во внимание, что

$$\varphi'(t) = \frac{dx}{dt}, \quad \psi'(t) = \frac{dy}{dt},$$

получаем формулу для дифференциала дуги [70]

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2},$$

а формула (15) может быть, без указания переменной интегрирования, переписана в виде

$$l = \int\limits_{(A)}^{(B)} ds = \int\limits_{(A)}^{(B)} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}.$$

Пределы (A) и (B) указывают на начальную и конечную точки линии.

Если $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) > 0$ при всех t из (α, β), то, согласно (17), мы получим производную от параметра t по s:

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}}.$$

Наличие непрерывных производных $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ при условии $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) > 0$ гарантирует нам непрерывно изменяющуюся касательную вдоль AB.

Если кривая задана в полярных координатах уравнением

$$r = f(\theta),$$

то, введя прямоугольные координаты x и y, связанные с полярными r и θ соотношениями

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \tag{18}$$

[82], мы можем рассматривать эти уравнения, как параметрическое задание кривой с параметром θ.

Мы имеем тогда

$$dx = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta,$$
$$dy = \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta,$$
$$dx^2 + dy^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2,$$

откуда

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(dr)^2 + r^2(d\theta)^2}, \tag{19}$$

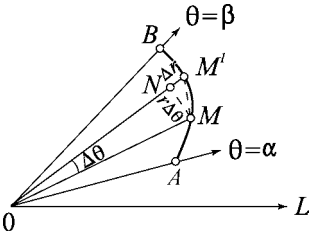

Рис. 135.

и если точкам A и B соответствуют значения α и β полярного угла θ (рис. 135), то формула (15) даст нам

$$s = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta. \tag{20}$$

Выражение для ds (19), которое называется *дифференциалом дуги в полярных координатах*, можно получить и непосредственно из чертежа, заменив бесконечно малую дугу MM' ее хордой и вычислив последнюю, как гипотенузу прямоугольного треугольника MNM', катеты которого $\overline{MN}$ и $\overline{NM'}$ приближенно равны, соответственно, $rd\theta$ и dr.

Примеры. **1.** Длина дуги s параболы $y = x^2$, отсчитываемой от вершины $(0, 0)$ до переменной точки с абсциссой x, по формуле (12) выражается интегралом

$$s = \int\limits_0^x \sqrt{1 + y'^2}dx = \int\limits_0^x \sqrt{1 + 4x^2}dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2x} \sqrt{1 + t^2}dt \tag{21}$$

(мы положили $t = 2x$).

В силу примера 11 [92] имеем

$$\int \sqrt{1 + t^2}dt = \frac{1}{2}\left[t\sqrt{l + t^2} + \log(t + \sqrt{1 + t^2})\right] + C.$$

Подставив это в (21), получим без труда

$$s = \frac{1}{4}\left[2x\sqrt{1+4x^2} + \log(2x + \sqrt{1+4x^2})\right].$$

2. Длина эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

в силу симметричности его относительно осей координат, равна учетверенной длине той его части, которая лежит в первом координатном углу. Представив эллипс параметрически уравнениями

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t$$

и заметив, что точкам A и B соответствуют значения параметра 0 и $\frac{\pi}{2}$, мы получим для искомой длины l следующее выражение по формуле (15):

$$l = 4\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}dt. \tag{22}$$

Интеграл этот не может быть вычислен в конечном виде; для него можно указать только способ приближенного вычисления, который будет приведен ниже.

3. Длина дуги логарифмической спирали

$$r = Ce^{\alpha\theta}$$

[83], отсекаемой радиусами-векторами $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$, в силу (20) выражается интегралом

$$\int\limits_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}d\theta = C\sqrt{1+a^2}\int\limits_\alpha^\beta e^{a\theta}d\theta = \frac{C\sqrt{1+a^2}}{a}(e^{a\beta} - e^{a\alpha}).$$

4. В [78] мы рассматривали цепную линию, пусть $M(x, y)$ есть какая-либо ее точка. Вычислим длину дуги AM (рис. 93). Принимая во внимание выражение для $(1 + y'^2)$ из [78], получим

$$AM = \int\limits_0^x \sqrt{1+y'^2}dx = \int\limits_0^x \frac{y}{a}dx = \frac{1}{2}\int\limits_0^x \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)dx = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right) = ay',$$

откуда

$$a^2 + (\text{дуга } AM)^2 = a^2 + a^2 y'^2 = a^2(1 + y'^2) = y^2,$$

т. е. длина дуги AM равна катету прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна ординате точки M, и другой катет которого равен a. Мы получаем, таким образом, следующее правило построения дуги AM:

Из вершины A цепной линии, как центра, надо описать окружность радиусом, равным ординате точки M; отрезок $\overline{OQ}$ оси OX от начала координат O до точки пересечения Q оси OX с упомянутой окружностью и будет представлять собою спрямленную дугу AM (рис. 93).

В предыдущих формулах при выборе знаков мы руководились тем обстоятельством, что для точек, лежащих на правой части цепной линии, y' имеет знак $(+)$.

5. Для циклоиды, рассмотренной в [79], определим длины дуги l ветви OO' (рис. 94) и площадь S, ограниченную этой ветвью и осью OX:

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}dt =$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}dt =$$

$$= 2a\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 8a,$$

т. е. длина дуги одной ветви циклоиды равна учетверенному диаметру катящегося круга:

$$S = \int_0^{2\pi a} ydx = \int_0^{2\pi} \psi(t)\varphi'(t)dt = a^2\int_0^{2\pi}(1-\cos t)^2 dt =$$

$$= a^2\int_0^{2\pi}(1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt = 2\pi a^2 - 2a^2[\sin t]_0^{2\pi} + a^2\left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{2\pi} =$$

$$= 2\pi a^2 + \pi a^2 = 3\pi a^2,$$

т. е. *площадь, ограниченная одной ветвью циклоиды и той неподвижной прямой, по которой катится круг, равна утроенной площади катящегося круга.*

Вычисляя l, при извлечении корня $\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}$, мы должны выбрать арифметическое значение корня, что и сделали, ибо при изменении t от 0 до 2π функция $\sin\frac{t}{2}$ — положительна.

6. Кардиоида, рассмотренная в [84], симметрична относительно полярной оси (рис. 111), а потому для вычисления ее длины l достаточно вычислить длину дуги при изменении θ в промежутке $(0, \pi)$ и полученный результат удвоить:

$$l = 2\int_0^\pi \sqrt{r^2 + r'^2}d\theta = 2\int_0^\pi \sqrt{4a^2(1+\cos\theta)^2 + 4a^2\sin^2\theta}d\theta =$$

$$= 8a\int_0^\pi \cos\frac{\theta}{2}d0 = 8a\left[2\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^\pi = 16a,$$

т. е. *длина дуги кардиоиды в восемь раз больше диаметра катящегося (или неподвижного) круга.*

104. Вычисление объемов тел по их поперечным сечениям. Вычисление объема данного тела сводится также к вычислению определенного интеграла, если мы умеет определять площадь поперечных сечений тела, перпендикулярных данному направлению.

Обозначим через V объем данного тела (рис. 136) и допустим, что нам известны площади всех поперечных сечений тела плоскостями, перпендикулярных данному направлению, которое мы примем за ось OX. Всякое поперечное сечение определится абсциссой x точки пересечения его с осью OX, а потому площадь этого поперечного сечения будет функцией от x, которую мы обозначим через $S(x)$ и будем считать известной.

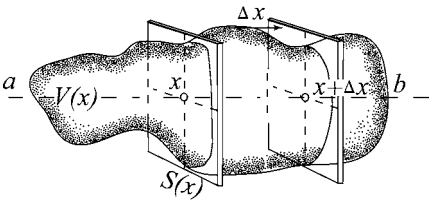

Рис. 137.

Пусть, далее, a и b означают абсциссы крайних сечений тела. Для вычисления объема V разобьем его на элементы рядом поперечных сечений, начиная от $x = a$ и кончая $x = b$; рассмотрим один из таких эле-

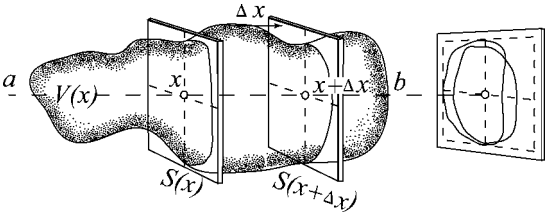

Рис. 136.

ментов ΔV, образованный сечениями с абсциссами x и $x + \Delta x$. Заменяем объем ΔV объемом прямого цилиндра, высота которого равна Δx, а основание совпадает с поперечным сечением нашего тела, соответствующим абсциссе x (рис.137). Объем такого цилиндра выразится произведением $S(x)\Delta x$, и, таким образом, мы получим следующее приближенное выражение для нашего объема V:

$$\sum S(x)\Delta x,$$

где суммирование распространено на все те элементы, на которые разбито наше тело поперечными сечениями. В пределе, когда число элементов беспредельно возрастает и наибольшее из Δx стремится к нулю, написанная сумма превращается в определенный интеграл, который и дает точное значение объема V, что приводит к следующему предложению.

Если для данного тела известны все его поперечные сечения плоскостями, перпендикулярными некоторому данному направлению, принятому за ось OX, то объем тела V выражается формулой*

$$V = \int_a^b S(x)dx, \tag{23}$$

где $S(x)$ означает площадь поперечного сечения с абсциссой x, а и b — абсциссы крайних сечений тела.

* Иными словами, площадь поперечного сечения является функцией переменной x.

Пример. Объем «цилиндрического отрезка», отсекаемый от прямого кругового полуцилиндра плоскостью, проведенной через диаметр его основания (рис. 138). Примем диаметр $\overline{AB}$ за ось OX, точку A — за начало координат; обозначим радиус основания цилиндра через r, угол, образуемый верхним сечением отрезка с его основанием, через α.

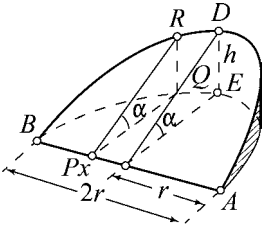

Рис. 138.

Поперечное сечение, перпендикулярное диаметру $\overline{AB}$, имеет вид прямоугольного треугольника PQR, и его площадь выражается формулой

$$S(x) = \frac{1}{2}\overline{PQ} \cdot \overline{QR} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\overline{PQ}^2.$$

Далее, по известному свойству окружности, отрезок $\overline{PQ}$ есть среднее геометрическое между отрезками $\overline{AP}$, $\overline{PB}$ диаметра AB, а потому

$$\overline{PQ}^2 = \overline{AP} \cdot \overline{PB} = x(2r - x),$$

и окончательно

$$S(x) = \frac{1}{2}x(2r - x)\operatorname{tg}\alpha.$$

Применяя формулу (23), для искомого объема V получим

$$V = \int\limits_0^{2r} S(x)dx = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\int\limits_0^{2r} x(2r - x)dx = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\left(rx^3 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{2r} =$$

$$= \frac{2}{3}r^3\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{3}r^2h,$$

если ввести «высоту» отрезка $h = r\operatorname{tg}\alpha$.

105. Объем тела вращения. В случае, когда рассматриваемое тело получается от вращения данной кривой $y = f(x)$ вокруг оси OX, поперечные его сечения будут круги радиуса y (рис. 139), а потому

$$S(x) = \pi y^2,$$

$$V(x) = \int\limits_a^b \pi y^2 dx,$$

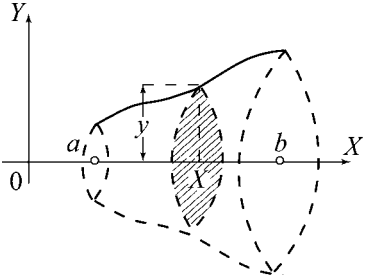

Рис. 139.

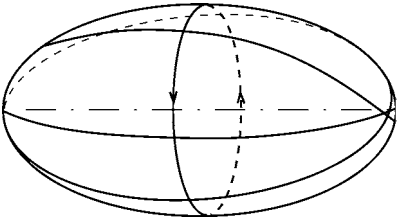

Рис. 140.

т. е. объем тела, получаемого при вращении вокруг оси OX части кривой

$$y = f(x),$$

заключенной между ординатами $x = a$, $x = b$, выражается формулой

$$V = \int_a^b \pi y^2 dx. \tag{24}$$

Пример. Объем эллипсоида вращения. При вращении эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

вокруг большой оси получается тело, называемое *удлиненным эллипсоидом вращения* (рис. 140). Крайние значения абсциссы x в рассматриваемом случае будут $(-a)$ и $(+a)$, а потому формула (24) дает

$$V_{\text{удл}} = \pi \int_{-a}^{+a} y^2 dx = \pi \int_{-a}^{+a} b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi b^2 \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right) \Big|_{-a}^{+a} = \frac{4}{3}\pi a b^2. \tag{25}$$

Точно так же мы сможем вычислить и объем *сжатого эллипсоида вращения*, который получается при вращении нашего эллипса вокруг малой оси. Нужно только переставить между собой буквы x, y, a и b, что дает

$$V_{\text{сж}} = \pi \int_{-b}^{+b} x^2 dy = \pi \int_{-b}^{+b} a^2 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) dy = \frac{4}{3}\pi b a^2. \tag{26}$$

В случае $a = b$ оба эллипсоида обращаются в шар радиуса a, объем которого равен $\frac{4}{3}\pi a^3$.

106. Поверхность тела вращения. *Площадью поверхности, получаемой при вращении кривой в плоскости XOY вокруг оси OX, называется предел, к которому стремится площадь поверхности, получаемой при вращении вокруг той же оси ломаной, вписанной в данную кривую, когда число сторон этой ломаной беспредельно увеличивается, а наибольшая из длин сторон стремится к нулю (рис. 141). Если вращается часть кривой, заключенная между точками A и B, то поверхность F тела вращения выражается формулой*

$$F = \int\limits_{(A)}^{(B)} 2\pi y ds, \tag{27}$$

где ds есть дифференциал дуги данной кривой, т. е.

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}.$$

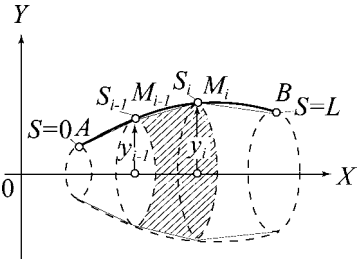

Рис. 141.

В этой формуле кривая может быть задана как угодно, в явной или в параметрической форме; символы (A) и (B) показывают, что нужно интегрировать между теми пределами для независимой переменной, которые соответствуют данным точкам кривой A и B.

Будем считать, что уравнение кривой задано в параметрической форме, причем роль параметра играет длина дуги s кривой, отсчитываемая от точки A, и обозначим через l длину всей кривой AB. Эта кривая, конечно, считается спрямляемой. Мы имеем: $x = \varphi(s)$, $y = \psi(s)$. Разобьем, как всегда, промежуток $(0, l)$ изменения s на частичные промежутки

$$0 = s_0 < s_1 < s_2 < \cdots < s_{n-1} < s_n = l.$$

Пусть значению $s = s_i$ соответствует точка M_i кривой, причем, очевидно, M_0 совпадает с A и M_n — с B. Обозначим через q_i дли-

ну отрезка $\overline{M_{i-1}M_i}$ через Δs_i — длину дуги $M_{i-1}M_i$ и положим $y_i = \psi(s_i)$. Используя формулу для поверхности усеченного конуса, находим следующую формулу для поверхности, получаемой от вращения ломаной $AM_1M_2\ldots M_{n-1}B$:

$$Q = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \frac{y_{i-1}+y_i}{2} q_i$$

или

$$Q = 2\pi \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}q_i + \pi \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_{i-1})q_i.$$

Пусть δ — наибольшее из абсолютных значений $|y_i - y_{i-1}|$. В силу равномерной непрерывности функции $\psi(s)$ в промежутке $0 \leqslant s \leqslant l$ величина δ стремится к нулю, если наибольшая из разностей $(s_i - s_{i-1})$ стремится к нулю. Но мы имеем

$$\left| \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_{i-1})q_i \right| \leqslant \delta \sum_{i=1}^{n} q_i \leqslant \delta l,$$

откуда следует, что второе слагаемое в выражении Q стремится к нулю Исследуем первое слагаемое, для чего перепишем его в виде

$$2\pi \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}q_i = 2\pi \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}\Delta s_i - 2\pi \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}(\Delta s_i - q_i).$$

Покажем, что вычитаемое в этом выражении стремится к нулю. Для этого заметим, что непрерывная в промежутке $(0, l)$ функция $y = \psi(s)$ ограничена, и, следовательно, существует такое положительное число m, что $|y_{i-1}| \leqslant m$ при всех i. Поэтому

$$\left| \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}(\Delta s_i - q_i) \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} m(\Delta s_i - q_i) = m\left(l - \sum_{i=1}^{n} q_i\right).$$

Но если наибольшая из разностей $(s_i - s_{i-1})$ стремится к нулю, то и наибольшая из длин хорд q_i стремится к нулю, и периметр вписанной ломаной стремится к длине дуги

$$\sum_{i=1}^{n} q_i \to l,$$

откуда

$$2\pi \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}(\Delta s_i - q_i) \to 0.$$

Таким образом, в выражении Q остается исследовать лишь слагаемое

$$2\pi \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}\Delta s_i = 2\pi \sum_{i=1}^{n} \psi(s_{i-1})(s_i - s_{i-1}).$$

Но предел этой суммы и приводит нас к интегралу (27). Таким образом, мы и получаем эту формулу. Если кривая задана параметрически через любой параметр t, то мы имеем [ср. 103]

$$F = \int_{\alpha}^{\beta} 2\pi\psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt, \tag{28$_1$}$$

и в случае явного уравнения $y = f(x)$ линии AB:

$$F = \int_{a}^{b} 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}dx. \tag{28$_2$}$$

Пример. Поверхность эллипсоида вращения, удлиненного и сжатого. Рассмотрим сперва поверхность удлиненного эллипсоида вращения. Применяя обозначения примера [105], по формуле (28) имеем

$$F_{\text{удл}} = 2\pi \int_{-a}^{a} y\sqrt{1 + y'^2}dx = 2\pi \int_{-a}^{a} \sqrt{y^2 + (yy')^2}dx.$$

Из уравнения эллипса мы имеем:

$$y^2 = b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right), \quad yy' = -\frac{b^2 x}{a^2},$$

откуда

$$(yy')^2 = \frac{b^4 x^2}{a^4},$$

$$F_{\text{удл}} = 2\pi \int_{-a}^{a} \sqrt{b^2 - \frac{b^2x^2}{a^2} + \frac{b^4x^2}{a^4}}dx = 2\pi b \int_{-a}^{a} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}\left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)}dx.$$

Вводя сюда выражение для эксцентриситета эллипса

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2},$$

имеем (см. пример [99])

$$F_{\text{удл}} = 2\pi b \int\limits_{-a}^{a} \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2 x^2}{a^2}} dx = 4\pi b \int\limits_{0}^{a} \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2 x^2}{a^2}} dx =$$

$$= \frac{4\pi ba}{\varepsilon} \int\limits_{0}^{a} \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon x}{a}\right)^2} d\left(\frac{\varepsilon x}{a}\right) = \frac{4\pi ab}{\varepsilon} \int\limits_{0}^{\varepsilon} \sqrt{1 - t^2} dt.$$

Интегрируя по частям, имеем (ср. пример 11 [92])

$$\int \sqrt{1 - t^2} dt = t\sqrt{1 - t^2} + \int \frac{t^2}{\sqrt{1 - t^2}} dt =$$

$$= t\sqrt{1 - t^2} - \int \sqrt{1 - t^2} dt + \int \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}},$$

откуда

$$\int \sqrt{1 - t^2} dt = \frac{1}{2}[t\sqrt{1 - t^2} + \arcsin t],$$

и окончательно

$$F_{\text{удл}} = 2\pi ab \left[\sqrt{1 - \varepsilon^2} + \frac{\arcsin \varepsilon}{\varepsilon}\right]. \tag{29}$$

Эта формула годится в пределе и для $\varepsilon = 0$, т. е. когда $b = a$, и эллипсоид превращается в шар радиуса a. В скобках при этом оказывается неопределенное выражение, раскрывая которое [65], имеем

$$\left.\frac{\arcsin \varepsilon}{\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \left.\frac{\frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}}{1}\right|_{\varepsilon=0} = 1.$$

Перейдем теперь к сжатому эллипсоиду вращения. Переставив между собой буквы x и y, a и b, мы находим:

$$F_{\text{сж}} = 2\pi \int\limits_{-b}^{b} \sqrt{x^2 + (xx')^2} dy,$$

где x считается функцией от y. Но из уравнения эллипса имеем

$$x^2 = a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right), \quad xx' = -\frac{a^2 y}{b^2}, \quad (xx')^2 = \frac{a^4 y^2}{b^4},$$

откуда

$$F_{\text{сж}} = 2\pi a \int\limits_{-b}^{b} \sqrt{1 + \frac{y^2}{b^2}\left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)}\,dy = 4\pi a \int\limits_{0}^{b} \sqrt{1 + \frac{y^2 a^2 \varepsilon^2}{b^4}}\,dy =$$

$$= \frac{4\pi b^2}{\varepsilon} \int\limits_{0}^{\frac{a\varepsilon}{b}} \sqrt{1 + t^2}\,dt = \frac{2\pi b^2}{\varepsilon}[t\sqrt{1+t^2} + \log(t + \sqrt{1+t^2})]\Big|_0^{\frac{a\varepsilon}{b}} =$$

$$= \frac{2\pi b^2}{\varepsilon}\left[\frac{a^\varepsilon}{b}\sqrt{1 + \frac{a^2\varepsilon^2}{b^2}} + \log\left(\frac{a\varepsilon}{b} + \sqrt{1 + \frac{a^2\varepsilon^2}{b^2}}\right)\right] =$$

$$= \frac{2\pi b}{\varepsilon}\left[\frac{a\varepsilon}{b}\sqrt{\frac{a^3}{b^2}} + \log\left(\frac{a\varepsilon}{b} + \sqrt{\frac{a^2}{b^2}}\right)\right] = 2\pi a^2 + \frac{2\pi b^2}{\varepsilon}\log\frac{a(1+\varepsilon)}{b},$$

и окончательно

$$F_{\text{сж}} = 2\pi a^2 + \frac{2\pi b^2}{\varepsilon}\log\frac{a(1+\varepsilon)}{b}. \tag{30}$$

107. Определение центров тяжести. Теоремы Гульдина. Если дана система n материальных точек

$$M_1(x_1, y_1), \quad M_2(x_2, y_2), \ldots, M_n(x_n, y_n),$$

массы которых равны, соответственно,

$$m_1, m_2, \ldots, m_n,$$

то *центром тяжести* системы G называется точка, координаты которой x_G, y_G удовлетворяют условиям

$$Mx_G = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i, \quad My_G = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i, \tag{31}$$

где M означает полную массу системы

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i.$$

При определении центра тяжести можно каким угодно образом группировать точки системы, разбивая их на частные системы с тем, чтобы при вычислении координат центра тяжести Q всей системы заменять всю группу точек, вошедших в какую угодно частную систему, одной точкой, а именно ее центром тяжести, приписав ей массу, равную сумме масс вошедших в нее точек.

Мы не будем останавливаться на доказательстве этого общего принципа, которое не представляет труда и легко может быть проверено на простейших частных случаях системы с тремя, четырьмя и т. д. точками.

В дальнейшем мы будем иметь дело не с системами точек, а с тем случаем, когда масса заполняет лишь некоторую плоскую фигуру (область) или линию.

Для простоты ограничимся рассмотрением лишь однородных тел, плотность которых примем за единицу, так что масса такой фигуры будет равняться ее длине, если она имеет вид линии, и площади, если она имеет вид плоской области.

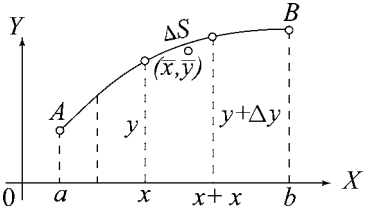

Рис. 142.

Пусть сперва нужно определить *центр тяжести дуги* кривой AB (рис. 142), длина которой s. Следуя предыдущему общему принципу, разобьем дугу AB на n малых элементов Δs. Центр тяжести всей системы можно вычислить, заменив каждый из этих элементов одной точкой, центром тяжести рассматриваемого элемента, сосредоточив в ней всю массу элемента $\Delta m = \Delta s$[7].

Рассмотрим один из таких элементов Δs и обозначим координаты его концов через (x, y), $(x + \Delta x, y + \Delta y)$; координаты же его центра тяжести обозначим через $(\bar{x}, \bar{y})$. При достаточном уменьшении элемента Δs, можем считать, что точка $(\bar{x}, \bar{y})$ сколь угодно мало отстоит от точки (x, y).

[7]Центр тяжести каждого такого элемента, вообще говоря, не лежит на кривой, хотя и будет тем ближе к ней, чем меньше элемент, что и указано схематически на рис. 142.

По формулам (31) имеем, как и в [104],

$$Mx_G = sx_G = \sum \bar{x}\Delta m = \sum \bar{x}\Delta s = \lim \sum x\Delta s = \int\limits_{(A)}^{(B)} xds, \quad (32)$$

$$My_G = sy_G = \sum \bar{y}\Delta m = \sum \bar{y}\Delta s = \lim \sum y\Delta s = \int\limits_{(A)}^{(B)} yds, \quad (33)$$

откуда, вычислив s по формуле

$$s = \int\limits_{(A)}^{(B)} ds = \int\limits_{(A)}^{(B)} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2},$$

и определим координаты центра тяжести G.

Из формул (32) и (33) вытекает важная теорема:

Теорема I Гульдина. *Площадь поверхности, полученной при вращении дуги данной плоской кривой вокруг некоторой оси, лежащей в ее плоскости и не пересекающей ее, равняется произведению длины вращающейся дуги на длину пути, описанного при этом вращении центром тяжести дуги.*

В самом деле, приняв ось вращения за ось OX, для поверхности F тела, описанного при вращении дуги AB, имеем (27) [106]

$$F = 2\pi \int\limits_{(A)}^{(B)} yds = 2\pi y_G \cdot s$$

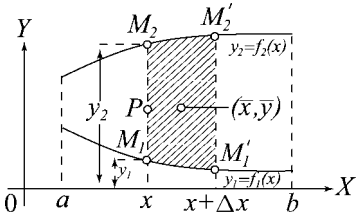

Рис. 143.

[в силу (33)], что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь некоторую плоскую область S (площадь которой обозначим также через S). Допустим для простоты, что эта область (рис. 143) ограничена двумя кривыми, ординаты которых обозначим через

$$y_1 = f_1(x), \quad y_2 = f_2(x).$$

Следуя общему принципу, указанному в начале этого номера, разобьем фигуру на n вертикальных полосок ΔS* прямыми, параллельными оси OY. При вычислении координат центра тяжести G фигуры мы можем заменить каждую такую полоску ее центром тяжести, сосредоточив в нем массу полосок $\Delta m = \Delta S$. Рассмотрим одну из таких полосок; обозначим через x и $x + \Delta x$ абсциссы ограничивающих ее прямых M_1M_2 и $M_1'M_2'$, через $\bar{x}$, $\bar{y}$ — координаты центра тяжести.

При достаточном сужении полоски, т. е. при уменьшении ее ширины Δx, точка $(\bar{x}, \bar{y})$ сколь угодно мало будет отстоять от середины P отрезка прямой M_1M_2, вследствие чего можем писать приближенные равенства

$$\bar{x} \sim x, \quad \bar{y} \sim \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Далее, масса Δm полоски, равная ее площади ΔS, может быть приравнена площади прямоугольника с основанием Δx и высотой, сколь угодно мало отличающейся от длины отрезка $\overline{M_1M_2} = y_2 - y_1$, т. е.

$$\Delta m \sim (y_2 - y_1)\Delta x.$$

Применяя формулу (31), можем написать

$$Mx_G = Sx_G = \sum \bar{x}\Delta m = \lim \sum [x(y_2 - y_1)]\Delta x = \\ = \int_a^b x(y_2 - y_1)dx, \quad (34)$$

$$My_G = Sy_G = \sum \bar{y}\Delta m = \lim \sum \left(\frac{y_2 + y_1}{2}\right)(y_2 - y_1)\Delta x = \\ = \lim \sum \left[\frac{1}{2}(y_2^2 - y_1^2)\right]\Delta x = \int_a^b \frac{1}{2}(y_2^2 - y_1^2)dx. \quad (35)$$

Из формулы (35) вытекает

* Площадь каждой вертикальной полоски будет ΔS.

Теорема II Гульдина. *Объем тела, получаемого при вращении плоской фигуры вокруг некоторой оси, лежащей в ее плоскости и не пересекающей ее, равен произведению площади вращающейся фигуры на длину пути, описанного ее центром тяжести при вращении.*

В самом деле, приняв ось вращения за ось OX, нетрудно заметить, что объем рассматриваемого тела вращения V равен разности объемов тел, получаемых при вращении кривой y_2 и кривой y_1, а потому, согласно (24) [105],

$$V = \pi \int\limits_a^b y_2^2 dx - \pi \int\limits_a^b y_1^2 dx = \pi \int\limits_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx = 2\pi y_G \cdot S,$$

в силу (35), что и требовалось доказать.

Полученные две теоремы Гульдина весьма полезны как при определении поверхности или объема фигур вращения, когда известно положение центра тяжести вращающейся фигуры, так и обратно — при определении центра тяжести фигуры, когда известны объем или поверхность производимой ею фигуры вращения.

Примеры. **1.** Найти объем V кольца (*тора*), получаемого при вращении круга радиуса r (рис. 144) вокруг оси, лежащей в его плоскости на расстоянии a от центра (причем $r < a$, т. е. ось вращения не пересекает окружность).

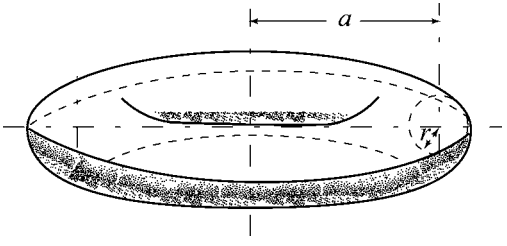

Рис. 144.

Центр тяжести вращающегося круга находится, очевидно, в его центре, а потому длина пути, описываемого центром тяжести при вращении,

равна $2\pi a$. Площадь вращающейся фигуры равна πr^2, а потому по теореме II Гульдина имеем

$$V = \pi r^2 \cdot 2\pi a = 2\pi^2 a r^2. \tag{36}$$

2. Найти поверхность F кольца, рассмотренного в примере 1.

Длина вращающейся окружности равна $2\pi r$; центр тяжести попрежнему совпадает с центром окружности, а потому в силу теоремы I Гульдина имеем

$$F = 2\pi r \cdot 2\pi a = 4\pi^2 a r. \tag{37}$$

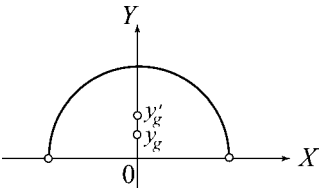

Рис. 145.

3. Найти центр тяжести G *полукруга* радиуса a. Примем основание полукруга за ось OX и направим ось OY по перпендикуляру к OX, восстановленному в центре (рис. 145); в силу симметричности фигуры относительно оси OY ясно, что центр тяжести G лежит на оси OY. Остается найти только y_G. Для этой цели применим теорему II Гульдина. Тело, получаемое при вращении полукруга вокруг оси OX, есть шар радиуса a, и его объем равен $\frac{3}{4}$. Площадь S вращающейся фигуры равна $\frac{\pi}{2}a^2$, а потому

$$\frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{\pi}{2}a^2 \cdot 2\pi y_G, \quad y_G = \frac{4}{3}\frac{a}{\pi}.$$

4. Найти центр тяжести G' *полуокружности* радиуса a.

Выбирая координатные оси, как и в предыдущем примере, видим опять, что искомый центр G' лежит на оси OY, так что остается найти $y_{G'}$. Применяя теорему I Гульдина и заметив, что поверхность тела вращения F в данном случае равна $4\pi a^2$, длина $s = \pi a$, получим

$$4\pi a^2 = \pi a \cdot 2\pi y_{G'}, \quad y_{G'} = 2\frac{a}{\pi}.$$

Как и следовало ожидать, центр тяжести полуокружности лежит ближе к ней, чем центр тяжести ограничиваемого ею полукруга.

108. Приближенное вычисление определенных интегралов; формулы прямоугольников и трапеций. Вычисление определенных интегралов на основании формулы (15) [96] с помощью первообразной функции не всегда возможно, так как, хотя первообразная функция и существует, если подынтегральная функция непрерывна, одна она далеко не всегда может быть найдена фактически, и даже тогда, когда ее

можно найти, она имеет часто весьма сложный и неудобный для вычислений вид. Поэтому важное значение имеют способы приближенного вычисления определенных интегралов.

Бóльшая часть их основывается на истолковании определенного интеграла как площади и как предела суммы

$$\int_a^b f(x)dx = \lim \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}). \tag{38}$$

Во всем дальнейшем мы условимся раз навсегда делить промежуток (a, b) на n *равных* частей; длину каждой части обозначим через h, так что

$$h = \frac{b-a}{n}, \quad x_i = a + ih \quad (x_0 = a; \quad x_n = a + nh = b).$$

Обозначим далее через y_i значение подынтегральной функции $y = f(x)$ при $x = x_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$:

$$y_i = f(x_i) = f(a + ih). \tag{39}$$

Эти величины мы считаем известными; их можно получить непосредственным вычислением, если функция $f(x)$ задана аналитически, или снять прямо с чертежа, если она изображена графически.

Полагая в сумме, стоящей в правой части (38), $\xi_i = x_{i-1}$ или x_i, мы получим две приближенные *формулы прямоугольников*:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}[y_0 + y_1 + \cdots + y_{n-1}], \tag{40}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}[y_1 + y_2 + \cdots + y_n], \tag{41}$$

где знак $(\approx)$ обозначает приближенное равенство.

Чем больше число n, т. е. чем меньше h, тем эти формулы будут точнее и в пределе, при $n \to \infty$ и $h \to 0$, дадут точную величину определенного интеграла.

Таким образом, *погрешности формул* (40) *и* (41) *стремятся к нулю при возрастании числа ординат.* При данном же значении числа ординат верхний предел погрешности особенно просто определяется для того случая, когда данная функция $f(x)$ *монотонна* в промежутке (a, b)

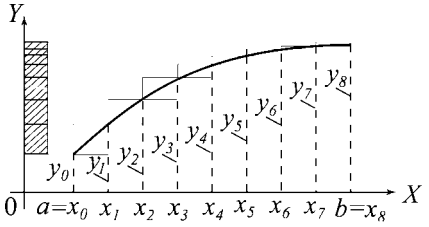

Рис. 146.

(рис. 146). В этом случае ясно непосредственно из чертежа, что *погрешность* каждой из формул (40) и (41) *не превышает* суммы площадей заштрихованных прямоугольников, т. е. *не превышает* площади прямоугольника с тем же основанием $\frac{b-a}{n} = h$ и высотой, равной сумме высот $y_n - y_0$ заштрихованных прямоугольников, т. е. *величины*

$$\frac{b-a}{n}(y_n - y_0). \tag{42}$$

Формулы прямоугольников вводят вместо точного выражения площади кривой $y = f(x)$ приближенное ее выражение — площадь ступенчатой ломаной линии, составленной из горизонтальных и вертикальных отрезков, ограничивающих прямоугольники.

Иные приближенные выражения мы получим, если вместо ступенчатой ломаной линии будем брать другие линии, которые достаточно мало отличаются от данной кривой; чем ближе такая вспомогательная линия подходит к кривой $y = f(x)$, тем меньше будет погрешность, которую мы совершаем, приняв за величину площади — площадь, ограниченную вспомогательной линией.

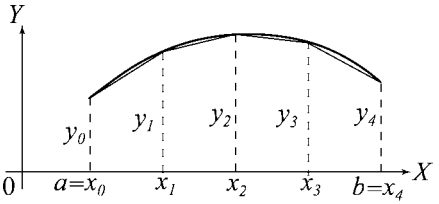

Рис. 147.

Так, например, если мы заменим данную кривую вписанной в нее ломаной линией, ординаты которой при $x = x_i$ совпадают с ординатами данной кривой (рис. 147), другими словами, заменим рассматриваемую площадь суммою площадей вписанных в нее заштрихованных трапеций, то получим приближенную *формулу трапеций*:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h\left[\frac{y_0+y_1}{2} + \frac{y_1+y_2}{2} + \dots + \frac{y_{n-1}+y_n}{2}\right] =$$

$$= \frac{b-a}{2n}[y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots 2y_{n-1} + y_n]. \tag{43}$$

109. Формула касательных и формула Понселе. Увеличим теперь число делений вдвое, подразделив каждое из делений пополам. Мы получим таким путем $2n$ делений (рис. 148):

$$x_0, x_{1/2} = a + \frac{h}{2},$$
$$x_1 = a + h, \ldots, x_i = a + ih,$$
$$x_{i+1/2} = a + \left(i + \frac{1}{2}\right) h, \ldots,$$
$$x_n = b,$$

которым будут соответствовать ординаты:

$$y_0, y_{1/2}, y_1, \ldots, y_i, y_{i+1/2}, \ldots, y_n$$

(ординаты $y_0, y_1, \ldots, y_n$ будем называть *четными*, ординаты $y_{1/2}, y_{3/2}, \ldots, y_{n-1/2}$ — *нечетными*).

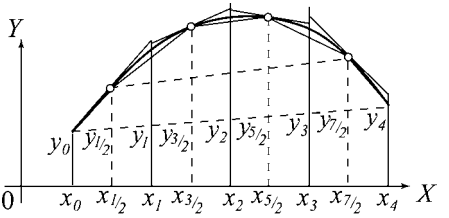

Рис. 148.

В конце каждой нечетной ординаты проведем касательную до пересечения ее с двумя соседними четными ординатами и заменим данную площадь суммою площадей построенных таким путем трапеций. Полученная таким образом приближенная формула называется *формулой касательных*:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}[y_{1/2} + y_{3/2} + \cdots + y_{n-1/2}] = \sigma_1. \qquad (44)$$

Одновременно с предыдущими *описанными* трапециями рассмотрим *вписанные трапеции*, которые получим, соединив хордами концы соседних нечетных ординат; присовокупим к ним еще две крайние трапеции, образованные хордами, соединяющими концы ординат y_0 и $y_{1/2}$, $y_{n-1/2}$ и y_n. Сумму площадей полученных трапеций обозначим через

$$\sigma_2 = \frac{b-a}{2n}\left[\frac{y_0 + y_n}{2} - \frac{y_{1/2} + y_{n-1/2}}{2} + 2y_{1/2} + 2y_{3/2} + \cdots + 2y_{n-1/2}\right].$$

Если кривая $y = f(x)$ в промежутке (a, b) не имеет точек перегиба, т. е. только выпукла или только вогнута, то площадь S кривой заключается между площадями σ_1 и σ_2, и естественно поэтому принять

за приближенное выражение для S среднее арифметическое $\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}$, что дает *формулу Понселе*:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n}\Big[\frac{y_0+y_n}{4} - \frac{y_{1/2}+y_{n-1/2}}{4} + 2y_{1/2} + \\ + 2y_{3/2} + \dots + 2y_{n-1/2}\Big]. \quad (45)$$

Нетрудно видеть, что погрешность этой формулы при сделанном предположении о виде кривой не превосходит абсолютного значения

$$\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2} = \left(\frac{y_{1/2}+y_{n-1/2}}{2} - \frac{y_0+y_n}{2}\right)\frac{b-a}{4n}, \quad (46)$$

причем выражение, стоящее в скобках, равно, как это нетрудно показать из свойства средней линии трапеции, отрезку средней ординаты, отсекаемому хордами, соединяющими между собой концы крайних четных и крайних нечетных ординат.

110. Формула Симпсона. Оставив в силе предыдущее подразделение на четное число частей, заменим данную кривую рядом дуг парабол второй степени, проведя их через концы каждых трех ординат:

$$y_0, y_{1/2}, y_1;\ y_1, y_{3/2}, y_2;\ \dots;\ y_{n-1}, y_{n-1/2}, y_n.$$

Вычисляя площадь каждой из полученных таким путем криволинейных фигур по формуле (4) [101], мы получим приближенную *формулу Симпсона*:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}[y_0 + 4y_{1/2} + 2y_1 + 4y_{3/2} + 2y_2 + \dots + \\ + 2y_{n-1} + 4y_{n-1/2} + y_n]. \quad (47)$$

На выводе погрешности этой формулы, а равно и погрешности формулы трапеций, мы здесь останавливаться не будем. Заметим, вообще, что выражение погрешности в виде определенной формулы имеет скорее теоретическое, чем практическое значение, так как обыкновенно дает слишком грубый предел.

По поводу предыдущего построения заметим, что соответствующим подбором a, b и c в параболе $y = ax^2 + bx + c$ можно всегда заставить ее пройти через заданные три точки плоскости с различными абсциссами.

На практике для точности результата существенное значение имеет плавный ход кривой, и в соседстве с точками, где кривая более или менее резко меняет вид, нужно вести вычисления с большой точностью, для чего необходимо вводить более мелкие подразделения промежутка. Во всяком случае полезно перед вычислением составить себе хотя бы только приблизительное представление о ходе кривой.

Весьма существенное значение при приближенных вычислениях имеет *схема расположения действий.* Для того, чтобы дать представление о ней, а также, чтобы сравнить точность, даваемую различными выведенными выше приближенными формулами, мы приводим следующие примеры:

1. $S = \int\limits_0^{\pi/2} \sin x dx = 1,$

$$n = 10,\ \frac{b-a}{n} = 0,15707963,\ \frac{b-a}{2n} = 0,07853981,\ \frac{b-a}{6n} = 0,02617994$$

y_1	$\sin\ 9^\circ$	0,1564345
y_2	$\sin 18^\circ$	0,3090170
y_3	$\sin 27^\circ$	0,4539905
y_4	$\sin 36^\circ$	0,5877853
y_5	$\sin 45^\circ$	0,7071068
y_6	$\sin 54^\circ$	0,8090170
y_7	$\sin 63^\circ$	0,8910065
y_8	$\sin 72^\circ$	0,9510565
y_9	$\sin 81^\circ$	0,9876883
$\sum_1$		5,8531024

$y_{1/2}$	$\sin\ 4^\circ,5$	0,0784591
$y_{3/2}$	$\sin 13^\circ,5$	0,2334454
$y_{5/2}$	$\sin 22^\circ,5$	0,3826834
$y_{7/2}$	$\sin 31^\circ,5$	0,5224986
$y_{9/2}$	$\sin 40^\circ,5$	0,6494480
$y_{11/2}$	$\sin 49^\circ,5$	0,7604060
$y_{13/2}$	$\sin 58^\circ,5$	0,8526402
$y_{15/2}$	$\sin 67^\circ,5$	0,9238795
$y_{17/2}$	$\sin 76^\circ,5$	0,9723699
$y_{19/2}$	$\sin 85^\circ,5$	0,9969173
$\sum_2$		6,3727474

y_0	$\sin\ 0^\circ$	0,0000000
y_{10}	$\sin 90^\circ$	1,0000000

Формула прямоугольников по недостатку

$\sum_1$	5,8531024
y_0	0,0000000
$\sum$	5,8531024

$\lg \sum$	0,7673861
$\lg \frac{b-a}{n}$	$\bar{1}$,1961198
$\lg S$	$\bar{1}$,9635059

$$S = 0,9194080$$

Формула прямоугольников по избытку

$\sum_1$	5,8531024
y_{10}	1,0000000
$\sum$	6,8531024

$\lg \sum$	0,8358873
$\lg \frac{b-a}{n}$	$\bar{1}$,1961198
$\lg S$	0,0320071

Формула касательных $S \approx 1,0765828$ *Формула трапеций*

$\lg \sum_2$	0,8043267
$\lg \frac{b-a}{n}$	$\bar{1}$,1961198
$\lg S$	0,0004465

$S \approx 1,0010290$

$2\sum_1$	11,7062048
$y_0 + y_{10}$	1,0000000
$\sum$	12,7062048

$\lg \sum$	1,1040158
$\lg \frac{b-a}{2n}$	$\bar{2}$,8950899
$\lg S$	1,9991057

$S \approx 0,9979430$

Формула Понселе

$2\sum_2$	12,7454948
$\frac{1}{4}(y_0 + y_{10})$	0,2500000
$-\frac{1}{4}(y_{1/2} + y_{10/2})$	−0,2688441
$\sum$	12,7266507

$\lg \sum$	1,1047141
$\lg \frac{b-a}{2n}$	$\bar{2}$,8950898
$\lg S$	$\bar{1}$,9998039

$S \approx 0,9995487$

Формула Симпсона

$2\sum_1$	11,7062048
$4\sum_2$	25,4909896
$y_0 + y_{10}$	1,0000000
$\sum$	38,1971944

$\lg \sum$	1,5820314
$\lg \frac{b-a}{6a}$	$\bar{2}$,4179685
$\lg S$	$\bar{1}$,9999999

$S \approx 1,0000000$

2. $S = \int\limits_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{8}\log 2 = 0,2721982613\ldots,$[8]

$$n = 10, \quad \frac{b-a}{2n} = \frac{1}{20}, \quad \frac{b-a}{6n} = \frac{1}{60}.$$

y_1	0,0943665
y_2	0,1753092
y_3	0,2407012
y_4	0,2900623
y_5	0,3243721
y_6	0,3455909
y_7	0,3561263
y_8	0,3584065
y_9	0,3546154
$\sum_1$	2,5395503

$y_{1/2}$	0,0486685
$y_{3/2}$	0,1366865
$y_{5/2}$	0,2100175
$y_{7/2}$	0,2673538
$y_{9/2}$	0,3089926
$y_{11/2}$	0,3364722
$y_{13/2}$	0,3520389
$y_{15/2}$	0,3581540
$y_{17/2}$	0,3571470
$y_{19/2}$	0,3510273
$\sum_2$	2,7265583

y_0	0,0000000
y_{10}	0,3465736

[8] Эта формула будет выведена во втором томе.

Формула Понселе

$2\sum_2$	5,4531166
$\frac{1}{4}(y_0+y_{10})$	0,0866434
$-\frac{1}{4}(y_{1/2}+y_{19/2})$	−0,0999239
$\sum$	5,4398361

$$S=\frac{1}{20}\sum\approx 0,2719918$$

Формула Симпсона

$2\sum_1$	5,0791006
$4\sum_2$	10,9062332
y_0+y_n	0,3465736
$\sum$	16,3319074

$$S=\frac{1}{60}\sum\approx 0,27219846$$

3. $S=\int\limits_0^1\frac{dx}{1+x}=\log 2=0,69314718\ldots$

$$n=20,\quad \frac{b-a}{2n}=\frac{1}{40},\quad \frac{b-a}{6n}=\frac{1}{120}.$$

y_1	0,9523810
y_2	0,9090909
y_3	0,8695653
y_4	0,8333333
y_5	0,8000000
y_6	0,7692307
y_7	0,7407407
y_8	0,7142857
y_9	0,6896552
y_{10}	0,6666667
y_{11}	0,6451613
y_{12}	0,6250000
y_{13}	0,6060606
y_{14}	0,5882353
y_{15}	0,5714287
y_{16}	0,5555556
y_{17}	0,5405405
y_{18}	0,5263146
y_{19}	0,5128205
$\sum_1$	13,1166666

$y_{1/2}$	0,9756097
$y_{3/2}$	0,9302326
$y_{5/2}$	0,8888889
$y_{7/2}$	0,8510638
$y_{9/2}$	0,8163266
$y_{11/2}$	0,7843135
$y_{13/2}$	0,7547169
$y_{15/2}$	0,7272727
$y_{17/2}$	0,7017543
$y_{19/2}$	0,6779661
$y_{21/2}$	0,6557377
$y_{23/2}$	0,6349207
$y_{25/2}$	0,6153846
$y_{27/2}$	0,5970149
$y_{29/2}$	0,5977101
$y_{31/2}$	0,5633804
$y_{33/2}$	0,5479451
$y_{35/2}$	0,5333333
$y_{37/2}$	0,5194806
$y_{39/2}$	0,5063291
$\sum_2$	13,8613816

y_0	1,0000000
y_{20}	0,5000000

Формула трапеций

$2\sum_1$	26,2321332
y_0+y_{20}	1,5000000
$\sum$	27,7321332

$$S=\frac{1}{40}\sum\approx 0,69330333$$

Формула Понселе

$2\sum_2$	27,7227632
$\frac{1}{4}(y_0+y_{20})$	0,375000
$-\frac{1}{4}(y_{1/2}+y_{39/2})$	−0,3704847
$\sum$	27,7272785

$$S=\frac{1}{40}\sum\approx 0,69318196$$

Формула Симпсона

$2\sum_1$	26,2321332
$4\sum_2$	55,4455264
y_0+y_{20}	0,5000000
$\sum$	83,1776596

$$S=\frac{1}{120}\sum\approx 0,69314716$$

111. Вычисление определенного интеграла с переменным верхним пределом. Во многих вопросах приходится вычислять значения определенного интеграла

$$F(x)=\int\limits_a^x f(x)dx$$

при переменном верхнем пределе.

Основываясь на формуле трапеций (43), можно указать следующий способ получения приближенных значений этого интеграла, конечно, не при всех значениях x, а только при тех, которыми подразделен на части промежуток (a,b), т. е.

$$F(a),\quad F(x_1),\quad F(x_2),\ldots,F(x_k),\ldots,F(x_{n-1}),\quad F(b).$$

По формуле (43) мы имеем

$$F(x_k)=\int\limits_a^{a+kh} f(x)dx\approx h\left[\frac{y_0+y_1}{2}+\cdots+\frac{y_{k-1}+y_k}{2}\right], \tag{48}$$

$$F(x_{k+1})=\int\limits_a^{a+(k+1)h} f(x)dx\approx h\left[\frac{y_0+y_1}{2}+\cdots+\frac{y_{k-1}+y_k}{2}+\frac{y_k+y_{k+1}}{2}\right]\approx$$

$$\approx F(x_k)+\frac{1}{2}h(y_k+y_{k+1}). \tag{49}$$

Эта формула дает возможность, вычислив значение $F(x_k)$, перейти к следующему значению $F(x_{k+1})=F(x_k+h)$.

Вычисление это можно располагать по схеме, приведенной на стр. 349.

I	II	III	IV	V	VI
k	x_k	y_k	$s_k = y_k + y_{k+1}$	$\sum\limits_{n=1}^{k} s_n$	$F(x_k) = \frac{1}{2}h \sum\limits_{n=1}^{k} s_n$
0	a	y_0		0	0
			$s_1 = y_0 + y_1$		
1	$a+h$	y_1		s_1	$\frac{1}{2}hs_1$
			$s_2 = y_1 + y_2$		
2	$a+2h$	y_2		$s_1 + s_2$	$\frac{1}{2}h(s_1 + s_2)$
			$s_3 = y_2 + y_3$		
3	$a+3h$	y_3		$s_1 + s_2 + s_3$	$\frac{1}{2}h(s_1 + s_2 + s_3)$
			$s_4 = y_3 + y_4$		
4	$a+4h$	y_4		$s_1 + s_2 + s_3 + s_4$	$\frac{1}{2}h(s_1 + s_2 + s_3 + s_4)$
			$s_5 = y_4 + y_5$		
5	$a+5h$	y_5		$s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5$	$\frac{1}{2}h(s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5)$
			$s_6 = y_5 + y_6$		
6	$a+6h$	y_6		$s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 + s_6$	$\frac{1}{2}h(s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 + s_6)$

112. Графические способы. Эти вычисления можно произвести графически, если дан график кривой $y = f(x)$; мы получим таким путем построение графика интегральной кривой

$$y = \int\limits_a^x f(x)dx = F(x)$$

по графику кривой

$$y = f(x). \tag{50}$$

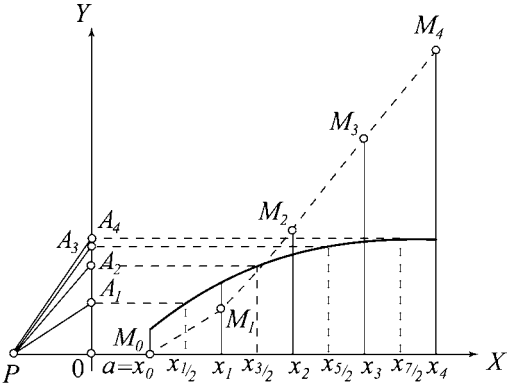

Рис. 149.

Прежде всего, если имеем достаточно делений, то мы можем принять приближенно

$$\frac{s_k}{2} = \frac{y_{k-1} + y_k}{2} = y_{k-1/2}, \tag{51}$$

т. е. если график кривой (50) начерчен, то величины $\frac{s_k}{2}$ получаются непосредственно из чертежа, как ординаты кривой при (рис. 149)

$$x_{k-1/2} = a + \frac{2k-1}{2}h.$$

Наметим на оси OY точки:

$$A_1(y_{1/2}),\ A_2(y_{3/2}),\ A_3(y_{5/2}), \ldots, A_k(y_{k-1/2}).$$

На оси OX влево от точки O построим отрезок OP, равный единице. Проведем лучи

$$PA_1,\ PA_2,\ PA_3, \ldots, PA_k,$$

и через точки M_0, M_1, $M_2, \ldots,$ — им параллельные, так что

$$M_0M_1 \| PA_1,\ M_1M_2 \| PA_2,\ M_2M_3 \| PA_3, \ldots$$

Точки M_0, M_1, $M_2, \ldots$ и будут точками искомой приближенной интегральной кривой, так как нетрудно из чертежа убедиться, что

$$\overline{x_1M_1} = hy_{1/2},\ \overline{x_2M_2} = h(y_{1/2} + y_{3/2}),\ \overline{x_3M_3} = h(y_{1/2} + y_{3/2} + y_{5/2}), \ldots,$$

а это, в силу приближенного равенства (51), показывает

$$\overline{x_k M_k}=h(y_{1/2}+y_{3/2}+\cdots+y_{k-1/2})=h\left(\frac{y_0+y_1}{2}+\cdots+\frac{y_{k-1}+y_k}{2}\right)=F(x_k)$$

в силу формулы (48).

Указанное построение проделано для того случая, когда масштаб для функции $F(x)$ совпадает с масштабом для $f(x)$. Если масштаб для площади другой, то построение остается тем же с тою только разницей, что отрезок $\overline{OP}$ имеет длину не единицу, а l, причем l равно отношению масштаба для $F(x)$ к масштабу для $f(x)$.

Графическое приближенное построение повторного интеграла

$$\Phi(x)=\int\limits_a^x dx\left(\int\limits_a^x f(x)dx\right)^*$$

основано на формуле прямоугольников (40) [108].

Положим, как и раньше, что

$$F(x)=\int\limits_a^x f(x)dx.$$

Рассматривая только значения $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ независимой переменной x, мы по формуле (40) имеем приближенное равенство

$$F(x_1)\approx hy_0,\quad F(x_2)\approx h(y_0+y_1),\ldots,F(x_k)\approx h(y_0+y_1+\cdots+y_{k-1}).$$

Применяя ту же формулу и к функции Φ, имеем

$$\begin{aligned}\Phi(x_k)&=h[F(x_0)+F(x_1)+\cdots+F(x_{k-1})]\approx\\&\approx h^2[y_0+(y_0+y_1)+\cdots+(y_0+y_1+\cdots+y_{k-1})].\end{aligned}\qquad(52)$$

Отсюда вытекает следующее построение ординаты $\Phi(x_k)$ (рис. 150): построив точку P, как и раньше, мы на оси OY откладываем отрезки

$$\overline{OB_1}=y_0,\quad \overline{B_1B_2}=y_1,$$
$$\overline{B_2B_3}=y_2,\ldots,$$
$$\overline{B_{k-1}B_k}=y_{k-1},\ldots$$

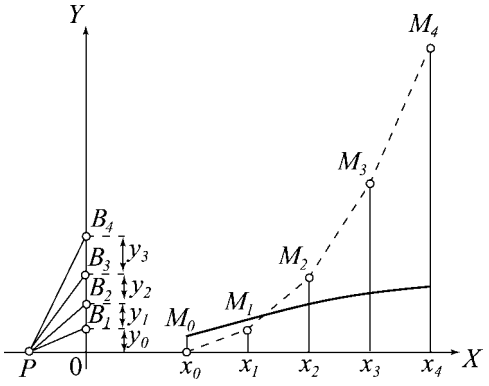

Рис. 150.

Проведя лучи

$$PB_1,\ PB_2,\ PB_3, \ldots, PB_k, \ldots,$$

строим точки

$$M_0,\ M_1,\ M_2, \ldots, M_k, \ldots,$$

проводя

$$M_0M_1 \| PB_1,\ M_1M_2 \| PB_2,\ M_2M_3 \| PB_3, \ldots$$

Эти точки и будут точками искомой приближенной кривой, начерченной, однако, в неизменном масштабе $(1 : h)$, ибо из построения ясно, что

$$\overline{x_1M_1} = hy_0,\ \overline{x_2M_2} = hy_0 + h(y_0 + y_1), \ldots,$$

$$\overline{x_kM_k} = hy_0 + h(y_0 + y_1) + \cdots + h(y_0 + y_1 + \cdots + y_{k-1}) \approx \frac{\Phi(x_k)}{h}$$

в силу (52). Если длина OP есть не единица, а l, то построенная кривая дает ординату кривой $\Phi(x)$, измененную в отношении $1 : lh$. Следует оговорить, что при всем удобстве указанных построений точность их невелика, и их можно употреблять лишь при сравнительно грубых расчетах.

---

* Переменную интегрирования во внутреннем интеграле, вообще говоря, следует обозначить другой буквой, например t.

113. Площади быстро колеблющихся кривых. Выше [110] было указано, что для успешного применения различных приближенных формул, для вычисления определенных интегралов надлежит разбивать кривую, площадь которой определяется на участки, в каждом из которых она имеет плавную форму. Это требование весьма затруднительно для кривых, ведущих себя неправильно, имеющих много колебаний вверх и вниз. Для определения площадей таких кривых по предыдущим правилам приходится вводить слишком много подразделений, что значительно усложняет вычисления.

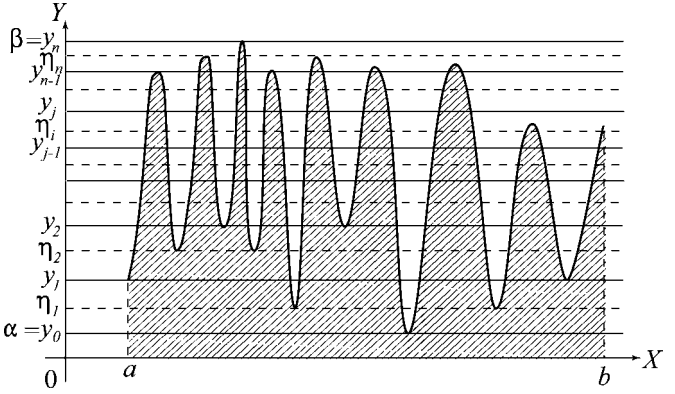

Рис. 151.

В таких случаях полезно применять другой способ, а именно разбивать площадь на полоски, параллельные не оси OY, а оси OX: для приближенного определения площади кривой, изображенной на рис. 151, откладываем на оси OY наименьшую и наибольшую ординаты α и β кривой и разделяем промежуток (α, β) на n частей в точках

$$y_0 = \alpha,\ y_1, \ldots, y_{i-1},\ y_i, \ldots, y_{n-1},\ y_n = \beta.$$

Проведя через точки деления прямые, параллельные оси OX, мы разобьем всю площадь на полоски, состоящие из отдельных частей; за приближенное выражение площади i-й полоски мы можем принять произведение ее основания $(y_i - y_{i-1})$ на сумму длин l_i отрезков любой прямой

$$y = \eta_i \quad (y_{i-1} \leqslant \eta_i \leqslant y_i),$$

заключенных внутри рассматриваемой площади; сумма эта непосредственно может быть определена на чертеже. Обозначив эту сумму через

l_i, мы получаем для искомой площади S приближенное выражение вида

$$y_0(b-a)+(y_1-y_0)l_1+(y_2-y_1)l_2+\cdots+(y_n-y_{n-1})l_n,$$

которое будет тем точнее, чем больше число делений и чем круче колебания кривой.

Надлежащее развитие основной идеи этого способа привело к понятию об интеграле Лебега, значительно более общему, чем изложенное выше понятие об интеграле Римана [94, 116].

§ 11. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

114. Предварительные понятия. Последние номера настоящей главы будут посвящены строгому аналитическому рассмотрению понятия интеграла, и в дальнейшем мы докажем существование определенного предела у суммы вида:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k-x_{k-1})$$

не только для случая непрерывных функций. Для этого нам необходимо ввести некоторые новые понятия, связанные с рассмотрением разрывных функций.

Пусть функция $f(x)$ определена в некотором конечном промежутке (a,b). Мы будем рассматривать только ограниченные функции, т. е. такие функции, все значения которых в упомянутом промежутке остаются по абсолютной величине меньшими некоторого определенного положительного числа, т. е. *функция $f(x)$ называется ограниченной в промежутке (a,b), если существует такое положительное число B, что при всяком x из упомянутого промежутка мы имеем:*

$$|f(x)|\leqslant B.$$

Если функция $f(x)$ непрерывна, то, как мы уже упоминали [35], она достигает в этом промежутке наибольшего и наименьшего значений, а потому, очевидно, будет и ограниченной. Наоборот, разрывные функции могут быть как ограниченными, так и неограниченными. В дальнейшем мы будем рассматривать только ограниченные разрывные функции. Положим, например, что функция

$f(x)$ имеет график, изображенный на рис. 152. В точке $x = c$ мы имеем разрыв непрерывности функции, и значение функции в самой точке $x = c$, т. е. $f(c)$, должно быть определено каким-нибудь образом путем дополнительного условия. В остальных точках промежутка, включая концы a и b, функция непрерывна. Кроме того, при стремлении переменной x к значению $x = c$ от меньших значений, т. е. слева, ордината $f(x)$ стремится к определенному пределу, геометрически изображаемому отрезком $\overline{NM_1}$.

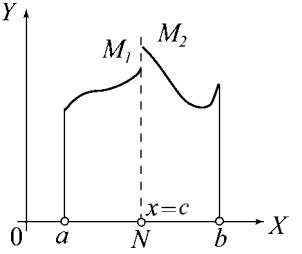

Рис. 152.

Точно так же при стремлении x к c от больших значений, т. е. справа, $f(x)$ стремится тоже к определенному пределу, изображаемому отрезком $\overline{NM_2}$, но этот последний предел отличен от упомянутого выше предела слева. Упомянутый предел слева обозначают обычно символом $f(c-0)$, а предел справа — символом $f(c+0)$ [32]. Этот наиболее простой *разрыв непрерывности функции, при котором существуют конечные определенные пределы как слева, так и справа, называется обычно разрывом первого рода.* Значение функции в самой точке $x = c$, т. е. $f(c)$, будет, вообще говоря, отличным как от $f(c-0)$, так и от $f(c+0)$ и должно быть определенно дополнительно. Если функция непрерывна в промежутке (a, b), включая концы, за исключением конечного числа точек, в которых она имеет разрывы первого рода, то график такой функции состоит из конечного числа кривых, непрерывных вплоть до своих концов, и из отдельных точек в местах разрыва непрерывности (рис. 153). Такая функция, несмотря на свою разрывность, будет, очевидно, ограниченной во всем промежутке. Но, конечно, функции и с более сложными разрывами могут быть ограниченными.

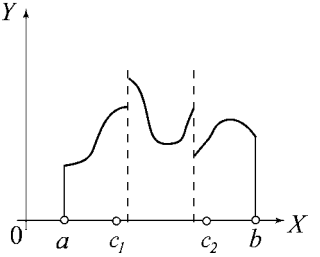

Рис. 153.

В дальнейшем мы часто будем рассматривать множества всех значений, которые некоторая функция $f(x)$ принимает на каком-либо заданном промежутке изменения независимой пере-

менной. Если взятая функция ограничена в рассматриваемом промежутке, то множество ее значений в этом промежутке ограничено сверху и снизу, а потому это множество имеет точную верхнюю и точную нижнюю границы [39]. Если, например, $f(x)$ непрерывна в рассматриваемом промежутке (замкнутом), то, как известно [35], она достигает в этом промежутке наибольшего и наименьшего значений. В данном случае эти наибольшее и наименьшее значения функции и будут точными верхней и нижней границами значений $f(x)$ в рассматриваемом промежутке.

Рассмотрим другой пример. Если функция $f(x)$ есть возрастающая функция, то она принимает наибольшее значение на правом конце промежутка и наименьшее — на левом. Эти значения, так же как и в предыдущем случае, будут точными верхней и нижней границами значений $f(x)$. В обоих рассмотренных примерах точные границы значений функции сами являлись частными значениями функции, т. е. сами принадлежали к рассматриваемой совокупности значений функции. В более сложных случаях разрывной функции точные границы значений функции могут сами и не являться значениями функции, т. е. могут и не принадлежать к множеству значений функции.

Пусть m — точная нижняя граница множества значений ограниченной функции $f(x)$ на некотором конечном промежутке (a, b) и M — точная верхняя граница. Возьмем новый промежуток (a', b'), который является частью (a, b).

Пусть m' и M' — точные нижняя и верхняя границы множества значений $f(x)$ на (a', b'). Так как множество значений $f(x)$ на (a', b') содержится в множестве значений $f(x)$ на более широком промежутке (a, b), то можно утверждать, что $m' \geqslant m$ и $M' \leqslant M$, т. е. имеет место

Лемма 1. *Если некоторый промежуток заменить его частью, то точная верхняя граница значений $f(x)$ не может увеличиться, а точная нижняя граница не может уменьшиться.*

115. Разбиение промежутка на части и образование различных сумм. Пусть конечный промежуток (a, b) разбит на конечное число частей промежуточными значениями x:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_{n-1} < x_n = b. \qquad (1)$$

Такое разбиение будем обозначать одной буквой δ; значения x_k называются точками деления δ. У различных разбиений число частичных промежутков и точки деления x_k, вообще говоря, различны. Длины частичных промежутков для разбиения (1) обозначим: $\delta_k = x_k - x_{k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Пусть $f(x)$ — ограниченная функция, заданная на промежутке (a, b). Напишем сумму, соответствующую разбиению δ (1), предел которой, если он существует, дает определенный интеграл от $f(x)$ по промежутку (a, b):

$$\sigma(\delta, \xi_k) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\delta_k. \tag{2}$$

Она зависит от δ и выбора точек ξ_k. Рассмотрим множество значений $f(x)$ в промежутке (x_{k-1}, x_k). В силу ограниченности функции $f(x)$, это — ограниченное множество. Обозначим через m_k точную нижнюю и через M_k — точную верхнюю границы значений $f(x)$ в промежутке (x_{k-1}, x_k) $(k = 1, 2, \ldots, n)$ и в слагаемых суммы (2) заменим $f(\xi_k)$ на m_k, а также на M_k. Мы получим две суммы, зависящие только от разбиения δ промежутка (a, b):

$$s(\delta) = \sum_{k=1}^{n} m_k\delta_k; \quad S(\delta) = \sum_{k=1}^{n} M_k\delta_k.^{*} \tag{3}$$

Из определения m_k и M_k непосредственно следует

$$m_k \leqslant f(\xi_k) \leqslant M_k,$$

откуда ввиду положительности δ_k будем иметь

$$s(\delta) \leqslant \sigma(\delta, \xi_k) \leqslant S(\delta). \tag{4}$$

Пусть, как и выше, m и M — точные нижняя и верхняя границы значений $f(x)$ на всем промежутке (a, b). Используя лемму 1, нетрудно видеть, что имеют место неравенства

$$m \leqslant m_k \leqslant M_k \leqslant M, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{5}$$

* Эти суммы часто называют нижней и верхней суммами Дарбу соответственно.

и, кроме того, очевидно

$$\sum_{k=1}^{n} \delta_k = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = b - a.$$

Умножая неравенства (5) на положительные числа δ_k и суммируя по k от $k = 1$ до $k = n$, получим

$$m(b-a) \leqslant s(\delta) \leqslant M(b-a),$$
$$m(b-a) \leqslant S(\delta) \leqslant M(b-a),$$

т. е. множество значений $s(\delta)$ и $S(\delta)$ при всевозможных разбиениях δ ограничено сверху и снизу. Обозначим буквою i точную верхнюю границу множества значений $s(\delta)$ и буквою I — точную нижнюю границу значений $S(\delta)$ при всевозможных разбиениях δ:

$$s_\delta \leqslant i, \quad S_\delta \geqslant I. \tag{6}$$

Отметим, что неотрицательная разность $M - m$ называется обычно *колебанием функции* $f(x)$ на промежутке (a, b). Разность $M_k - m_k$ есть колебания функции $f(x)$ на промежутке (x_{k-1}, x_k).

Введем теперь некоторые новые понятия. Разбиение δ' промежутка (a, b) назовем продолжением разбиения δ, если всякая точка деления δ есть и точка деления δ', т. е. δ' получается из δ добавлением новых точек деления (если δ' не совпадает с δ). Если δ_1 и δ_2 — два разбиения, то произведением их назовем такое разбиение (a, b), точки деления которого получаются объединением точек деления как δ_1, так и δ_2. Произведение разбиений обозначим символом $\delta_1\delta_2$. Это понятие применимо и для нескольких сомножителей. Разбиение $\delta_1\delta_2$ является, очевидно, продолжением как разбиения δ_1, так и разбиения δ_2.

Лемма 2. *Если разбиение δ' есть продолжение разбиения δ, то $s(\delta) \leqslant s(\delta')$ и $S(\delta) \geqslant S(\delta')$.*

При переходе от δ к δ' каждый из промежутков (x_{k-1}, x_k) подразделения δ может разбиться на части. Положим, например, что этот промежуток разбился на три части (x_{k-1}, α_k), (α_k, β_k), (β_k, x_k), длины которых $\delta_k^{(1)} = \alpha_k - x_{k-1}$, $\delta_k^{(2)} = \beta_k - \alpha_k$, $\delta_k^{(3)} = x_k - \beta_k$, и

пусть $M_k^{(1)}$, $M_k^{(2)}$, $M_k^{(3)}$ — точные верхние границы множества значений $f(x)$ в указанных промежутках. В силу леммы 1: $M_k^{(1)}$, $M_k^{(2)}$ и $M_k^{(3)} \leqslant M_k$, и сумма $\delta_k^{(1)} + \delta_k^{(2)} + \delta_k^{(3)} = \delta_k = x_k - x_{k-1}$. Слагаемое $M_k\delta_k$ суммы $S(\delta)$ при переходе к δ' заменяется суммой трех слагаемых:

$$M_k^{(1)}\delta_k^{(1)} + M_k^{(2)}\delta_k^{(2)} + M_k^{(3)}\delta_k^{(3)}$$

и, в силу сказанного выше,

$$M_k^{(1)}\delta_k^{(1)} + M_k^{(2)}\delta_k^{(2)} + M_k^{(3)}\delta_k^{(3)} \leqslant M_k(\delta_k^{(1)} + \delta_k^{(2)} + \delta_k^{(3)}) = M_k\delta_k,$$

т. е. при переходе от δ к δ' каждое слагаемое $M_k\delta_k$ суммы или заменяется конечной суммой, которая меньше или равна $M_k\delta_k$, или остается без изменения. Отсюда и следует, что $S(\delta) \geqslant S(\delta')$. Совершенно аналогично доказывается, что $s(\delta) \leqslant s(\delta')$, и лемма доказана.

Принимая во внимание, что $m_k \leqslant M_k$ и δ_k положительны, легко видеть, что при одном и том же δ мы имеем $s(\delta) \leqslant S(\delta)$. Покажем, что такое же неравенство имеет место и для любых различных разбиений.

Лемма 3. *Если δ_1 и δ_2 — любые два разбиения, то $s(\delta_1) \leqslant S(\delta_2)$.*

Рассмотрим произведение $\delta_1\delta_2$ разбиений δ_1 и δ_2. Поскольку $\delta_1\delta_2$ есть продолжение δ_1 и δ_2, из леммы 2 следует, что $s(\delta_1\delta_2) \geqslant s(\delta_1)$ и $S(\delta_1\delta_2) \leqslant S(\delta_2)$, и пользуясь неравенством $s(\delta_1\delta_2) \leqslant S(\delta_1\delta_2)$, получаем $s(\delta_1) \leqslant S(\delta_2)$. Лемма доказана.

Из этой леммы непосредственно следует, что верхняя грань i множества значений $s(\delta)$ при всевозможных разбиениях δ и нижняя грань I для $S(\delta)$ удовлетворяют неравенствам

$$s(\delta) \leqslant i \leqslant I \leqslant S(\delta). \tag{7}$$

Займемся теперь суммами $\sigma(\delta, \xi_k)$, которые удовлетворяют неравенствам (4). При фиксированном разбиении δ, в силу определения m_k и M_k, можно при любом k выбрать ξ_k так, чтобы $f(\xi_k)$ было сколько угодно близко к M_k или даже (в некоторых случаях) совпадало с M_k, т. е. можно выбрать ξ_k так, чтобы сумма $\sigma(\delta, \xi_k)$ была сколь угодно близкой к $S(\delta)$ или даже в некоторых случаях, чтобы $\sigma(\delta, \xi_k)$ совпадало с $S(\delta)$. С другой стороны, в силу (4),

$\sigma(\delta, \xi_k) \leqslant S(\delta)$. Отсюда следует, что $S(\delta)$ есть точная верхняя граница значений $\sigma(\delta, \xi_k)$ при всевозможных выборах ξ_k. Аналогично доказывается, что $s(\delta)$ есть точная нижняя граница значений $\sigma(\delta, \xi_k)$, т. е. имеет место

Лемма 4. *При фиксированном разбиении δ величина $s(\delta)$ есть точная нижняя граница значений $\sigma(\delta, \xi_k)$ при всевозможных выборах ξ_k, а $S(\delta)$ есть точная верхняя граница множества значений $\sigma(\delta, \xi_k)$ при тех же условиях.*

116. Интегрируемые функции. Укажем теперь необходимое и достаточное условие существования интеграла у ограниченной функции $f(x)$ или, как говорят, необходимое и достаточное условие интегрируемости $f(x)$. Через $\mu(\delta)$ в дальнейшем будем обозначать наибольшую из длин частичных промежутков, входящих в подразделение δ.

Теорема. *Необходимое и достаточное условие интегрируемости ограниченной функции $f(x)$ на конечном промежутке (a, b) состоит в том, чтобы разность*

$$S(\delta) - s(\delta) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\delta_k \tag{8}$$

стремилась к нулю, если $\mu(\delta)$ стремится к нулю.

Иначе говоря, это условие, назовем его условием A, состоит в следующем: при любом заданном положительном числе ε существует такое положительное число η, что неотрицательна разность:

$$S(\delta) - s(\delta) < \varepsilon, \text{ если } \mu(\delta) < \eta.$$

Достаточность. Положим, что условие А теоремы выполнено, т. е. $S(\delta) - s(\delta) \to 0$ при $\mu(\delta) \to 0$. При этом из (7) следует, что $i = I$ и что $s(\delta)$ и $S(\delta)$ стремятся к I при $\mu(\delta) \to 0$. Отсюда следует, в силу (4), что и сумма $\sigma(\delta, \xi_k)$ стремится к I при $\mu(\delta) \to 0$ и любом выборе ξ_k. Точнее говоря: $|I - \sigma(\delta, \xi_k)| < \varepsilon$ при $\mu(\delta) < \eta$, причем $\eta > 0$ определяется заданием $\varepsilon > 0$. Таким образом, доказано, что $f(x)$ интегрируема и число I есть величина интеграла. Достаточность условия А доказана.

Необходимость. Положим, что $f(x)$ интегрируема. Докажем, что выполнено условие А. Обозначим I_0 величину интеграла от $f(x)$. Из его определения следует: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta > 0$, что

$$|\sigma(\delta, \xi_k) - I_0| < \frac{\varepsilon}{4}, \text{ если } \mu(\delta) < \eta \tag{9}$$

при любом выборе ξ_k. В силу леммы 4, при любом фиксированном δ, возможен такой выбор $\xi_k = \xi'_k$ и $\xi_k = \xi''_k$, что

$$|\sigma(\delta, \xi'_k) - s(\delta)| < \frac{\varepsilon}{4} \text{ и } |\sigma(\delta, \xi''_k) - S(\delta)| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{10}$$

Мы можем написать

$$S(\delta) - s(\delta) = [S(\delta) - \sigma(\delta, \xi''_k)] + [\sigma(\delta, \xi''_k) - I_0] + \\ + [I_0 - \sigma(\delta, \xi'_k)] + [\sigma(\delta, \xi_k) - s(\delta)],$$

откуда, в силу (9) и (10), получаем при $\mu(\delta) < \eta$

$$|S(\delta) - s(\delta)| \leqslant |S(\delta) - \sigma(\delta, \xi''_k)| + |\sigma(\delta, \xi''_k) - I_0| + |I_0 - \sigma(\delta, \xi'_k)| + \\ + |\sigma(\delta, \xi'_k) - s(\delta)| \leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon,$$

т. е. $|S(\delta) - s(\delta)| < \varepsilon$ при $\mu(\delta) < \eta$, а это и есть условие А. Необходимость условия доказана.

Замечание 1. Из доказательства достаточности следует, что $i = I$ при выполнении условия А, и при этом величина интеграла равна I. Поэтому из необходимости условия А следует, что равенство $i = I$ является необходимым условием интегрируемости.

Замечание 2. Можно показать, что для любой ограниченной функции $f(x)$ будет: $s(\delta) \to i$ и $S(\delta) \to I$ при $\mu(\delta) \to 0$. Отсюда следует, что если $i = I$, то $(S(\delta) - s(\delta)) \to 0$ при $\mu(\delta) \to 0$, и потому равенство $i = I$ не только необходимо, но и достаточно для интегрируемости $f(x)$.

I. Если $f(x)$ непрерывна на замкнутом промежутке (a, b), то она равномерно непрерывна на нем. Кроме того, на каждом из промежутков (x_{k-1}, x_k) она достигает своего наименьшего значения m_k и

наибольшего M_k. В силу равномерной непрерывности $f(x)$ при любом заданном $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta > 0$, что $0 \leqslant M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a}$, если $\mu(\delta) < \eta$. При этом

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\delta_k < \sum_{k=1}^{n}\frac{\varepsilon}{b-a}\delta_k = \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\delta_k = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon,$$

т. е. $S(\delta) - s(\delta) < \varepsilon$, если $\mu(\delta) < \eta$. Таким образом, условие А выполнено, и, следовательно, *всякая непрерывная функция интегрируема.*

II. Положим теперь, что ограниченная функция $f(x)$ имеет конечное число точек разрыва. Для определенности будем считать, что $f(x)$ имеет одну точку разрыва $x = c$, лежащую внутри (a, b). Отметим прежде всего, что разности $M_k - m_k$ на любом частичном промежутке не превосходят колебания $M - m$ функции на всем промежутке (a, b):

$$M_k - m_k \leqslant M - m, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{11}$$

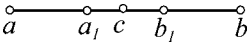

Рис. 154.

Пусть задано положительное число ε. Выделим точку c из промежутка (a, b) малым фиксированным промежутком (a_1, b_1) (рис. 154), таким, что $a < a_1 < c < b_1 < b$ и $b_1 - a_1 < \varepsilon$. На замкнутых промежутках (a, a_1) и (b_1, b) функция $f(x)$ непрерывна, а тем самым и равномерно непрерывна. Поэтому для каждого из этих двух промежутков существует такое число η, что $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$, если x' и x'' принадлежат (a, a_1) или (b_1, b) и $|x'' - x'| < \eta$. Числа η могут оказаться разными для (a, a_1) и (b_1, b), но если мы возьмем наименьшее из этих двух чисел η, то оно будет годиться для обоих промежутков. Пусть δ — любое такое разбиение (a, b), что соответствующее ему $\mu(\delta)$ меньше чисел η и ε:

$$\mu(\delta) < \eta \text{ и } \mu(\delta) < \varepsilon, \tag{12}$$

т. е. меньше наименьшего из двух чисел η и ε.

Оценим соответствующую таком δ сумму (8), состоящую из неотрицательных слагаемых. Промежутки (x_{k-1}, x_k), принадлежащие δ, разобьем на два класса. К первому отнесем те, которые целиком укладываются в (a, a_1) или (b_1, b), а ко второму классу остальные частичные промежутки разбиения δ. Это будут те промежутки

(x_{k-1}, x_k), которые или принадлежат (a_1, b_1) или частью налегают на этот промежуток. Сумма длин δ_k промежутков первого класса, очевидно, меньше $(b-a)$, а эта сумма для промежутков второго класса меньше 3ε. Это вытекает из неравенства $b_1 - a_1 < \varepsilon$, второго из неравенств (12) и того факта, что число частью налегающих на (a_1, b_1) промежутков разбиения δ не больше двух. Далее, для промежутков первого класса, в силу непрерывности $f(x)$ на (a, a_1) и (b_1, b), первого из неравенств (12) и определения числа η, имеем $M_k - m_k < \varepsilon$. Для промежутков второго класса используем неравенство (11). Таким образом, имеем для суммы по промежуткам первого класса

$$\sum_{\mathrm{I}} (M_k - m_k)\delta_k < \varepsilon \sum_{\mathrm{I}} \delta_k < \varepsilon(b-a)$$

и для промежутков второго класса

$$\sum_{\mathrm{II}} (M_k - m_k)\delta_k \leqslant (M-m) \sum_{\mathrm{II}} \delta_k < (M-m)3\varepsilon.$$

Окончательно

$$\sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\delta_k < \varepsilon[(b-a) + 3(M-m)], \tag{13}$$

если $\mu(\delta)$ удовлетворяет неравенствам (12). Квадратная скобка в правой части (13) есть определенное число, и принимая во внимание возможность произвольного выбора малого положительного числа ε, мы можем утверждать, что выполнено условие А, т. е. *всякая ограниченная функция $f(x)$, имеющая конечное число точек разрыва непрерывности, интегрируема.*

III. Рассмотрим тот случай, когда $f(x)$ — монотонная ограниченная на конечном промежутке (a, b) функция. Для определенности будем считать, что $f(x)$ не убывает, т. е. $f(c_1) \leqslant f(c_2)$, если $c_1 < c_2$. При этом на каждом промежутке (x_{k-1}, x_k) мы имеем $m_k = f(x_{k-1})$ и $M_k = f(x_k)$. Отсюда следует

$$S(\delta) - s(\delta) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)\delta_k = \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - f(x_{k-1})]\delta_k.$$

Но $\delta_k \leqslant \mu(\delta)$ и разности $f(x_k) - f(x_{k-1})$ неотрицательны, и, следовательно,

$$S(\delta) - s(\delta) \leqslant \mu(\delta) \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - f(x_{k-1})].$$

Принимая во внимание, что

$$\sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - f(x_{k-1})] = [f(x_1) - f(a)] + \\ + [f(x_2) - f(x_1)] + \cdots + [f(b) - f(x_{n-1})] = f(b) - f(a),$$

получаем

$$S(\delta) - s(\delta) \leqslant [f(b) - f(a)]\mu(\delta),$$

откуда следует, что

$$S(\delta) - s(\delta) < \varepsilon, \text{ если } \mu(\delta) < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \text{ при } f(b) > f(a).$$

Если $f(b) = f(a)$, то $f(x)$ — постоянная.

Таким образом, *всякая монотонная ограниченная функция интегрируема.*

Заметим, что монотонная функция может иметь и бесчисленное множество точек разрыва, так что случай (III) не исчерпывается случаем (II). В качестве примера можем привести функцию, равную нулю при $0 \leqslant x < \frac{1}{2}$, равную $\frac{1}{2}$ при $\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{2}{3}$, равную $\frac{2}{3}$ при $\frac{2}{3} \leqslant x < \frac{3}{4}$, и т. д. и, наконец, равную 1 при $x = 1$. У этой неубывающей функции точками разрыва будут на промежутке $(0, 1)$ значения

$$x = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$$

Упомянем о том, что монотонная ограниченная функция должна иметь во всякой точке разрыва $x = c$ пределы $f(c-0)$ и $f(c+0)$. Это непосредственно следует из существования предела у монотонной и ограниченной последовательности чисел [30].

При выводе условий интегрируемости мы всегда предполагали $f(x)$ ограниченной. Можно доказать, что это условие является

необходимым условием интегрируемости, т. е. существования определенного предела у суммы (2). Если это условие ограниченности не выполнено, то все же в некоторых случаях можно определить интеграл от $f(x)$ по промежутку (a, b), но уже не как предел суммы (2). В этом случае интеграл называется *несобственным*. Основы учения о несобственном интеграле выяснены нами в [97]. Более подробно это будет изложено во втором томе.

Если промежуток интегрирования (a, b) бесконечен в одну или в обе стороны, то понятие об определенном интеграле по такому промежутку также не приводится непосредственно к пределу суммы вида (2). В этом случае мы имеем тоже несобственный интеграл (см. [98] и второй том).

117. Свойства интегрируемых функций. Пользуясь найденным выше необходимым и достаточным условием интегрируемости, нетрудно выяснить основные свойства интегрируемых функций.

I. *Если $f(x)$ интегрируема в промежутке (a, b), и мы изменим произвольно значения $f(x)$ в конечном числе точек из (a, b), то новая функция будет также интегрируема в (a, b) и величина интеграла от этого не изменится.*

Ограничимся рассмотрением того случая, когда мы изменили значение $f(x)$ в одной точке, например в точке $x = a$. Новая функция $\varphi(x)$ везде совпадет с $f(x)$, кроме $x = a$, а $\varphi(a)$ берем произвольно. Пусть m и M — точные нижняя и верхняя границы $f(x)$ в (a, b). Точная нижняя граница $\varphi(x)$ будет, очевидно, больше или равна m, если $\varphi(a) \geqslant m$, и будет $\varphi(a)$, если $\varphi(a) < m$. Точно так же точная верхняя граница $\varphi(x)$ будет меньше или равна M, если $\varphi(a) \leqslant M$, и будет $\varphi(a)$, если $\varphi(a) > M$. Сравнивая сумму (12) для $f(x)$ и $\varphi(x)$, замечаем, что разница может быть только в первом слагаемом (при $k = 1$). Но это первое слагаемое, очевидно, для $f(x)$ и $\varphi(x)$ стремится к нулю, так как $\delta_1 \to 0$ и $(M_1 - m_1)$ ограничено. Сумма остальных слагаемых, кроме первого, также, очевидно, стремится к нулю, так как $f(x)$ интегрируема, и вся сумма (8) для $f(x)$ должна стремиться к нулю. Интегрируемость $\varphi(x)$ доказана. Совпадение значений интеграла для $f(x)$ и $\varphi(x)$ очевидно, ибо при составлении сумм (2) мы всегда можем считать ξ_1, отличным от

a, а значения $f(x)$ и $\varphi(x)$ во всех точках, кроме $x = a$, совпадают.

II. *Если $f(x)$ интегрируема в промежутке (a, b), то она интегрируема в любом промежутке (c, d), составляющем часть (a, b).*

Это легко следует из того, что сумма (8), состоящая из неотрицательных слагаемых, для промежутка (c, d) не больше, чем эта сумма для (a, b), при условии, что в этой последней сумме $x = c$ и $x = d$ суть точки деления. В силу интегрируемости $f(x)$ на (a, b) сумма (8) для (a, b) стремится к нулю при $\mu(\delta) \to 0$ при любых точках деления. Тем более и сумма для (c, d) стремится к нулю, если $\mu(\delta) \to 0$ для частичных промежутков из (c, d), т. е. $f(x)$ интегрируема на (c, d). Заметим, что c может совпадать с a, а d может совпадать с b. Совершенно так же, как и в [94], доказывается равенство

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (a < c < b).$$

III. *Если $f(x)$ интегрируема в (a, b), то и $cf(x)$, при любом постоянном c, также интегрируема в (a, b).*

Считая, например, $c > 0$, можно утверждать, что для функции $cf(x)$ надо заменить прежние m_k и M_k на cm_k и cM_k. Сумма (8) приобретает лишь множитель c и будет по-прежнему стремиться к нулю. Свойство V из [94], очевидно, сохраняется и доказывается по-прежнему.

IV. *Если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — функции, интегрируемые в (a, b), то их сумма*

$$\varphi(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

также интегрируема в (a, b).

Пусть m'_k, M'_k, m''_k, M''_k — точные нижние и верхние границы $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в промежутке (x_{k-1}, x_k). Таким образом, все значения $f_1(x)$ в промежутке (x_{k-1}, x_k) больше или равны m'_k, а все значения $f_2(x)$ там же больше или равны m''_k. Отсюда $\varphi(x) \geqslant m'_k + m''_k$ в промежутке (x_{k-1}, x_k).

Точно так же доказывается, что $\varphi(x) \leqslant M'_k + M''_k$ в промежутке (x_{k-1}, x_k). Обозначая через m_k и M_k точную нижнюю и точную

верхнюю границы $\varphi(x)$ в промежутке (x_{k-1}, x_k), имеем, таким образом,

$$m_k \geqslant m'_k + m''_k \text{ и } M_k \leqslant M'_k + M''_k,$$

откуда следует неравенство

$$M_k - m_k \leqslant (M'_k + M''_k) - (m'_k + m''_k),$$

то есть

$$M_k - m_k \leqslant (M'_k - m'_k) + (M''_k - m''_k).$$

Составляя сумму (8) для $\varphi(x)$, получим

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\delta_k \leqslant \sum_{k=1}^{n}(M'_k - m'_k)\delta_k + \sum_{k=1}^{n}(M''_k - m''_k)\delta_k.$$

Обе суммы, стоящие справа, стремятся к нулю при $\mu(\delta) \to 0$, так как функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ по условию интегрируемы. Следовательно, сумма (8) для $\varphi(x)$, т. е. сумма

$$\sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\delta_k,$$

и подавно стремится к нулю, т. е. $\varphi(x)$ также интегрируема. Доказательство распространяется легко на случай алгебраической суммы любого конечного числа слагаемых. Свойство VI из [94] доказывается, как и раньше.

Аналогично предыдущему доказываются следующие свойства:

V. *Произведение $f_1(x)f_2(x)$ двух функций, интегрируемых в (a, b), будет функция, также интегрируемая в (a, b).*

VI. *Если $f(x)$ интегрируема в (a, b) и точные нижняя и верхняя границы m и M функции $f(x)$ в (a, b) одного и того же знака, то и $\frac{1}{f(x)}$ есть функция, интегрируемая в (a, b).*

VII. *Если $f(x)$ интегрируема в (a, b), то и ее абсолютное значение $|f(x)|$ также есть функция, интегрируемая в (a, b).*

Неравенство (10) из [95] может быть доказано, как и выше. Совершенно так же остается справедливым и свойство VII из [95], если $f(x)$ и $\varphi(x)$ — интегрируемые функции. Теорема о среднем читается так:

Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ интегрируемы в промежутке (a,b) и $\varphi(x)$ сохраняет знак в этом промежутке, то

$$\int\limits_a^b f(x)\varphi(x)dx = \mu \int\limits_a^b \varphi(x),$$

где μ — некоторое число, удовлетворяющее неравенству $m \leqslant \mu \leqslant M$, а m и M — точные нижняя и верхняя границы $f(x)$ в (a,b). В частности,

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \mu(b-a).$$

Доказательство будет таким же, что и раньше [95]. Пользуясь этой формулой, нетрудно установить, что

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$$

есть непрерывная функция от x, и $F'(x) = f(x)$ при всех значениях x, где $f(x)$ непрерывна. Наконец, установим *основную формулу интегрального исчисления* для интегрируемых функций. Пусть $F_1(x)$ — непрерывная в промежутке (a,b) функция, и при любом значении x внутри промежутка (a,b) имеется производная $F_1'(x) = f(x)$, где $f(x)$ — интегрируемая в (a,b) функция.

При этом имеет место основная формула

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F_1(b) - F_1(a).$$

Разбивая промежуток на части и применяя к каждой части (x_{k-1}, x_k) формулу конечных приращений [63], можем написать

$$F_1(x_k) - F_1(x_{k-1}) = F_1'(\xi_k)\delta_k = f(\xi_k)\delta_k \quad (x_{k-1} < \xi_k < x_k). \qquad (14)$$

Далее, суммируя по k и принимая во внимание, что (III из [116])

$$\sum_{k=1}^n [F_1(x_k) - F_1(x_{k-1})] = F_1(b) - F_1(a),$$

мы получим

$$F_1(b) - F_1(a) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\delta_k.$$

Равенство это справедливо при любом разбиении промежутка (a, b) на части ввиду специального выбора точек ξ_k, определяемого формулой конечных приращений (14). Переходя к пределу, получим вместо суммы интеграл

$$F_1(b) - F_1(a) = \int_a^b f(x)dx,$$

что и требовалось доказать. Заметим, что при определении интеграла значения $f(x)$ на концах промежутка (a, b) не играют роли, в силу свойства I настоящего номера.

ГЛАВА IV

РЯДЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К ПРИБЛИЖЕННЫМ ВЫЧИСЛЕНИЯМ

§ 12. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ИЗ ТЕОРИИ БЕСКОНЕЧНЫХ РЯДОВ

118. Понятие о бесконечном ряде. Пусть дана бесконечная последовательность чисел

$$u_1,\ u_2,\ u_3, \ldots,\ u_n, \ldots \tag{1}$$

Составив сумму n первых членов последовательности

$$s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \tag{2}$$

мы получим, таким образом, другую бесконечную последовательность чисел

$$s_1, \quad s_2, \quad \ldots, \quad s_n, \quad \ldots$$

Если эта последовательность стремится к пределу (конечному):

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n,$$

говорят, что бесконечный ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{3}$$

сходится и имеет сумму s, и пишут:

$$s = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{4}$$

Если же s_n не стремится к пределу, то говорят, что бесконечный ряд (3) *расходится.**

Иначе говоря, *бесконечный ряд* (3) *называется сходящимся, если сумма его первых n слагаемых при беспредельном возрастании n по всем целым положительным значениям стремится к пределу, и этот предел называется суммою ряда.*

О сумме бесконечного ряда можно говорить только тогда, когда он сходится и тогда сумма первых членов ряда s_n является приближенные выражением для суммы ряда s. Погрешность r_n этого приближенного выражения, т. е. разность

$$r_n = s - s_n,$$

называется *остатком* ряда.

Очевидно, что остаток r_n есть в свою очередь сумма бесконечного ряда, который получается из данного ряда (1), если в нем отбросить первые n членов с начала:

$$r_n = u_{n+1} + u_{n-2} + \ldots + u_{n+p} + \ldots$$

Точная величина этого остатка в большинстве случаев остается неизвестной, и потому особенно важной является *приближенная оценка* этого остатка.

Простейший пример бесконечного ряда представляет геометрическая прогрессия

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots \quad (a \neq 0). \tag{5}$$

Рассмотрим отдельно случаи

$$|q| < 1, \quad |q| > 1, \quad q = 1, \quad q = -1.$$

Мы знаем [27], что при $|q| < 1$ геометрическая прогрессия имеет конечную сумму $s = \frac{a}{1-q}$, и потому оказывается сходящимся рядом;

* Суммы S_n называются частичными суммами ряда.

действительно, при этом

$$s_n = a + aq + \ldots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1 - q},$$
$$s - s_n = \frac{a}{1-q} - \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{aq^n}{1-q},$$

и $s - s_n \to 0$ при $n \to \infty$, так как $q^n \to 0$ при $|q| < 1$ [26]. При $|q| > 1$ из выражения s_n видно, что $s_n \to \infty$ при $n \to \infty$, так как $q^n \to \infty$ при $|q| > 1$ [29]. При $q = 1$ мы имеем $s_n = an$, и, очевидно, также $s_n \to \infty$, так что при $|q| > 1$ и $q = 1$ геометрическая прогрессия оказывается расходящимся рядом. При $q = -1$ мы получаем ряд

$$a - a + a - a + \ldots$$

Сумма s_n первых n его членов равна нулю, если n четное, и равна a, если n нечетное, т. е. s_n не стремится к пределу, и ряд расходится; однако при всех значениях n эта сумма в отличие от предыдущего случая остается ограниченной, так как принимает только значения 0 и a.

Если абсолютная величина s_n — суммы n первых членов ряда (3) — *стремится к бесконечности при беспредельном возрастании n, то ряд* (3) *называется собственно расходящимся.* В дальнейшем, говоря о собственно расходящемся ряде, мы для краткости будем говорить просто *расходящийся ряд.*

119. Основные свойства бесконечных рядов. Сходящиеся бесконечные ряды обладают некоторыми свойствами, которые позволяют действовать с ними, как с конечными суммами.

I. *Если ряд*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

имеет сумму s, то ряд

$$au_1 + au_2 + \ldots + au_n + \ldots, \tag{6}$$

получаемый из предыдущего умножением всех членов на одно и то же число a, имеет сумму as, ибо сумма σ_n первых n членов ряда (6) есть

$$\sigma_n = au_1 + au_2 + \ldots + au_n = as_n,$$

а потому

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} as_n = a \lim_{n\to\infty} s_n = as.$$

II. *Сходящиеся ряды можно почленно складывать и вычитать, т. е. если*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = s,$$
$$v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots = \sigma,$$

то ряд

$$(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \ldots + (u_n \pm v_n) + \ldots \tag{7}$$

также сходится и сумма его равна $s \pm \sigma$, ибо сумма первых членов ряда

$$(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \ldots + (u_n \pm v_n) = s_n \pm \sigma_n.$$

Другие свойства суммы, например независимость суммы от порядка слагаемых, правило перемножения двух сумм и т. п., в применении к бесконечным рядам будут рассмотрены ниже в § 14. Заметим пока, что они справедливы не для всякого ряда. Сочетательный закон справедлив, очевидно, для любого сходящегося ряда, т. е. можно объединять в группы любые рядом стоящие слагаемые. Это сводится к тому, что вместо всех $s_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$ мы берем последовательность s_{n_k}, что не меняет предела s [27].

III. *Свойство сходимости или расходимости ряда не нарушится, если в ряде отбросить или приписать к нему любое конечное число членов с начала.*

Действительно, рассмотрим два ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots,$$
$$u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + \ldots$$

Второй получается из первого отбрасыванием первых двух слагаемых. Если обозначить через s_n сумму первых n членов первого ряда, а через σ_n — то же для второго ряда, то, очевидно

$$\sigma_{n-2} = s_n - (u_1 + u_2), \quad s_n = \sigma_{n-2} + (u_1 + u_2),$$

причем если $n \to \infty$, то и значок $(n-2) \to \infty$. Отсюда видно, что если s_n имеет предел, то и σ_{n-2} имеет предел, и наоборот. Эти

пределы s и σ, т. е. суммы взятых двух рядов, будут, конечно, различны, а именно

$$\sigma = s - (u_1 + u_2).$$

IV. *Общий член u_n сходящегося ряда стремится к нулю при беспредельном возрастании n:*

$$\lim u_n = 0, \tag{8}$$

ибо очевидно, что

$$u_n = s_n - s_{n-1},$$

и если ряд сходится и имеет сумму s, то

$$\lim s_{n-1} = \lim s_n = s,$$

откуда

$$\lim u_n = \lim s_n - \lim s_{n-1} = s - s = 0.$$

Таким образом, условие (8) необходимо для сходимости ряда, но оно не достаточно: общий член ряда может стремиться к нулю, и ряд все же может быть расходящимся.

Пример. Гармонический ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}. \tag{9}$$

Здесь мы имеем

$$u_n = \frac{1}{n} \to 0 \quad \text{при} n \to \infty.$$

Нетрудно, однако, показать, что сумма n первых членов ряда (9) беспредельно возрастает. Для этого сгруппируем слагаемые, начиная со второго, в группы из 1, 2, 4, 8, ... членов:

$$1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{16}\right) + \ldots,$$

так что в k-й группе будет 2^{k-1} членов. Если в каждой группе заменим все члены последним, наименьшим членом группы, то получится ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 4 + \frac{1}{16} \cdot 8 + \ldots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \ldots, \tag{10}$$

сумма первых n членов которого, равная $\left[1+\frac{1}{2}(n-1)\right]$, стремится, очевидно, к $(+\infty)$.* Взяв достаточно больше число членов ряда (9), мы можем получить какое угодно число n групп, и сумма этих членов будет еще больше, чем $\left[1+\frac{1}{2}(n-1)\right]$, и отсюда видно, что для ряда (9) $s_n \to +\infty$.

120. Ряды с положительными членами. Признаки сходимости. Особенное значение имеют ряды с положительными (не отрицательными) членами, для которых все числа

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots \quad \geqslant 0.$$

Для них мы установим ряд признаков сходимости и расходимости.

1. *Ряд с положительными членами может быть только либо сходящимся, либо же собственно расходящимся; для такого ряда*

$$s_n \to s \quad \text{или} \quad s_n \to +\infty.$$

Для того чтобы ряд с положительными членами был сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы сумма s_n его первых членов при всяком n оставалась меньше некоторой постоянной A, не зависящей от n.

Действительно, для такого ряда сумма s_n не убывает при возрастании n, так как при этом добавляются новые положительные (неотрицательные) слагаемые, и все наши утверждения вытекают из разобранных раньше свойств возрастающих переменных [30].

Для суждения о сходимости или расходимости рядов с положительными членами часто полезно бывает сравнить их с другими, более простыми рядами, чаще всего с геометрической прогрессией.

Для этого мы установим признак

2. *Если каждый член ряда с положительными членами*

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{11}$$

* Мы получаем, что последовательность частичных сумм гармонического ряда ограничена снизу числовой последовательностью, члены которой неограниченно возрастают с ростом n.

начиная с некоторого члена, не превосходит соответствующего члена сходящегося ряда

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots, \tag{12}$$

то и ряд (11) *также сходится.*

Если же, наоборот, каждый член ряда (11), *начиная с некоторого n, не меньше соответствующего члена расходящегося ряда* (12) *с положительными членами, то и ряд* (11) *также расходится.**

Допустим сперва, что мы имеем

$$u_n \leqslant v_n, \tag{13}$$

причем ряд (12) сходится. Не ограничивая общности, мы можем считать, что это неравенство выполняется при всех значениях n, отбросив, в случае надобности, те первые члены, для коих оно не выполняется (свойство III [119]). Обозначив через s_n сумму n первых членов ряда (11), через σ_n — аналогичную сумму для ряда (12), мы имеем, в силу (13),

$$s_n \leqslant \sigma_n.$$

Но ряд (12) по условию сходится, и, обозначив через σ сумму ряда (12), имеем

$$\sigma_n \leqslant \sigma,$$

а потому и

$$s_n \leqslant \sigma,$$

откуда, в силу 1, вытекает сходимость ряда (11).

Пусть теперь выполняется неравенство

$$u_n \geqslant v_n. \tag{14}$$

Мы имеем, очевидно,

$$s_n \geqslant \sigma_n; \tag{15}$$

* Любое конечное число первых членов ряда не влияет на его сходимость.

но ряд (12) теперь расходится, и сумма σ_n первых его n членов может быть сделана больше сколь угодно большого данного наперед числа; тем же свойством, в силу (15), обладает и s_n, т. е. ряд (11) будет также расходящимся.

Замечание. Из сходимости (или расходимости) ряда (12) вытекает и сходимость (или расходимость) ряда

$$kv_1 + kv_2 + kv_3 + \ldots + kv_n + \ldots,$$

где k — какое угодно постоянное положительное число.

Действительно, из сходимости ряда Σv_n вытекает и сходимость ряда Σkv_n в силу I [119]. Наоборот, если Σv_n расходится, то и ряд Σkv_n должен быть расходящимся, ибо, если бы он сходился, то, умножая его члены на $\frac{1}{k}$, мы, в силу I [119], имели бы и сходимость ряда Σv_n. Из сказанного вытекает:

Ряд (11) *сходится, если*

$$u_n \leqslant kv_n, \tag{16}$$

причем ряд Σv_n — *сходящийся и* k — *какое-нибудь положительное число; ряд* (11) *расходится, если*

$$u_n \geqslant kv_n, \tag{17}$$

причем ряд Σv_n — *расходящийся.*

Сравнивая данный ряд с геометрической прогрессией, мы получим два основных признака сходимости рядов с положительными членами.

121. Признаки Коши и Даламбера. 3. Признак Коши. *Если общий член ряда с положительными членами* (11)

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots,$$

начиная с некоторого значения n, *удовлетворяет неравенству*

$$\sqrt[n]{u_n} \leqslant q < 1, \tag{18}$$

где q *не зависит от* n, *то ряд сходится.*

Если же, наоборот, начиная с некоторого значения, имеем

$$\sqrt[n]{u_n} \geqslant 1, \tag{19}$$

то ряд (11) *расходится.*

Не ограничивая общности, можем допустить, что неравенства (18) или (19) выполняются при всех значениях n (свойство III [119]). Если выполнено (18), то

$$u_n \leqslant q^n,$$

т. е. общий член данного ряда не превосходит соответствующего члена бесконечной убывающей геометрической прогрессии, а потому, в силу 2, ряд будет сходящимся. В случае же (19) имеем

$$u_n \geqslant 1,$$

и ряд (11), общий член которого не стремится к нулю (больше единицы), не может быть сходящимся (свойство IV [119]).

4. Признак Даламбера. *Если отношение последующего члена ряда к предыдущему* $\frac{u_n}{u_{n-1}}$, *начиная с некоторого значения* n, *удовлетворяет неравенству*

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} \leqslant q < 1, \tag{20}$$

где q *не зависит от* n, *то ряд* (11) *сходится.*

Если же, наоборот, начиная с некоторого значения n, *имеем*

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} \geqslant 1, \tag{21}$$

то данный ряд расходится.

Допустив, как и раньше, что неравенства (20) или (21) выполняются при всех значениях n в случае (20), мы имеем

$$u_n \leqslant u_{n-1}q, \quad u_{n-1} \leqslant u_{n-2}q, \quad u_{n-2} \leqslant u_{n-3}q, \quad \ldots, \quad u_2 \leqslant u_1 q,$$

откуда, перемножая почленно и сокращая общие множители,

$$u_n \leqslant u_1 q^{n-1},$$

т. е. члены ряда меньше членов убывающей геометрической прогрессии

$$u_1 + u_1 q + u_1 q^2 + \ldots + u_1 q^{n-1} + \ldots + \ldots \quad (0 < q < 1),$$

и, в силу 2, ряд (11) сходится. В случае же (21)

$$u_1 \leqslant u_2 \leqslant u_3 \leqslant \ldots \leqslant u_{n-1} \leqslant u_n \leqslant \ldots,$$

т. е. члены ряда не убывают по мере удаления от начала, следовательно, u_n не стремится к нулю при $n \to \infty$, и ряд сходиться не может (свойство IV [119]).

Следствие. *Если при беспредельном возрастании n*

$$\sqrt[n]{u_n} \quad \textit{или} \quad \frac{u_n}{u_{n-1}} \tag{22}$$

стремится к конечному пределу r, то ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

*сходится при условии $r < 1$ и расходится при условии $r > 1$.**

Пусть сперва $r < 1$. Выберем число ε настолько малым, чтобы было также и

$$r + \varepsilon < 1.^{**}$$

При больших значениях n величина $\sqrt[n]{u_n}$ или $\frac{u_n}{u_{n-1}}$ будет отличаться от своего предела r не больше, чем на ε, т. е. мы, начиная с некоторого достаточно большого значения n, будем иметь

$$r - \varepsilon \leqslant \sqrt[n]{u_n} \leqslant r + \varepsilon < 1 \tag{23_1}$$

или

$$r - \varepsilon \leqslant \frac{u_n}{u_{n-1}} \leqslant r + \varepsilon < 1. \tag{23_2}$$

Применяя признаки Коши или Даламбера при $q = r + \varepsilon < 1$, в силу (23_1) или (23_2), сразу заключаем о сходимости данного ряда.

* При $r = 1$ признак не дает ответа на вопрос о сходимости ряда.

** Такое ε всегда найдется так как r строго меньше 1.

Аналогичным образом доказывается и расходимость его при условии $r > 1$ или если хоть одно из выражений (22) стремится к $(+\infty)$.

Примеры. **1**. Ряд

$$1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \ldots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \tag{24}$$

Применяя признак Даламбера

$$u_{n+1} = \frac{x^n}{n!}, \quad u_n = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

а потому данный ряд сходится при всех конечных значениях x (положительных).

2. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}. \tag{25}$$

Здесь мы имеем

$$u_n = \frac{x^n}{n}, \quad u_{n-1} = \frac{x^{n-1}}{n-1}, \quad \frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{n-1}{n} x \to x,$$

а потому, по признаку Даламбера, данный ряд сходится при $0 \leqslant x < 1$ и расходится при $x > 1$.

3. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin^2 n\alpha \quad (r > 0). \tag{26}$$

Применяя признак Коши, имеем

$$u_n = r^n \sin^2 n\alpha, \quad \sqrt[n]{u_n} = r \sqrt[n]{\sin^2 n\alpha} \leqslant r,$$

а потому данный ряд сходится, если $r < 1$.

Признак Даламбера в данном случае не дает никакого результата, ибо отношение

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = r \left[\frac{\sin n\alpha}{\sin(n-1)\alpha} \right]^2$$

не стремится ни к какому пределу и даже не остается все время < 1 или $\geqslant 1$.

Вообще, можно показать, что признак Коши сильнее признака Даламбера, т. е. он может применяться во всех случаях, когда применяется признак Даламбера, но сверх того и в некоторых других, когда последний не может применяться. Но зато пользование им сложнее, чем признаком Даламбера, в чем нетрудно убедиться хотя бы на первых двух из разобранных выше примерах.

Заметим, далее, что бывают случаи, когда и признак Коши и признак Даламбера применяться не могут; это случается, например, всякий раз, когда

$$\sqrt[n]{u_n} \quad \text{и} \quad \frac{u_n}{u_{n-1}} \to 1,$$

т. е. когда $r = 1$. Мы имеем тогда дело с *сомнительным* случаем, когда вопрос о сходимости или расходимости должен быть разрешен каким-либо иным путем.

Так, например, для гармонического ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

который, как мы видели в [119], есть ряд расходящийся, мы имеем

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \frac{n-1}{n} \to 1, \qquad \sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\log\frac{1}{n}} \to 1^{9},$$

и, таким образом, вопрос о сходимости или расходимости гармонического ряда не мог быть решен с помощью признаков Коши или Даламбера.

С другой стороны, дальше мы докажем, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$$

есть ряд сходящийся.

Но для него мы имеем опять

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \to 1, \qquad \sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \left(\sqrt[n]{\frac{1}{n}}\right)^2 \to 1,$$

[9] В предыдущих вычислениях существенно обратить внимание на то, что если положить $x = \frac{1}{n}$, то $x \to 0$ и $\frac{1}{n}\log\frac{1}{n} = x\log x \to 0$ [66]. Отсюда, логарифмируя выражение $\sqrt[n]{\frac{1}{n}}$, убеждаемся, что оно стремится к единице.

т. е. опять-таки сомнительный случай, если применять признаки Коши или Даламбера.

122. Интегральный признак сходимости Коши. Предположим, что члены данного ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{27}$$

положительны и не возрастают, т. е.

$$u_1 \geqslant u_2 \geqslant \ldots \geqslant u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \ldots > 0. \tag{28}$$

Изобразим члены ряда графически, откладывая по оси абсцисс независимую переменную n, принимающую пока только целые значения, а по оси ординат — соответствующие значения u_n (рис. 155). Всегда можно найти такую непрерывную функцию $y = f(x)$, которая при целых значениях $x = n$ принимает как раз значения u_n; для этого достаточно провести непрерывную кривую через все построенные точки; будем при этом считать, что и функция $y = f(x)$ не возрастающая.*

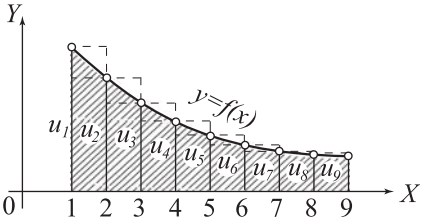

Рис. 155.

При таком графическом изображении сумма n первых членов данного ряда

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$$

представится как сумма площадей «выходящих» прямоугольников, которая заключает внутри себя площадь фигуры, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью OX и ординатами $x = 1$, $x = n + 1$, а потому

$$s_n \geqslant \int\limits_1^{n+1} f(x)dx. \tag{29}$$

* Обычно эта функция может быть получена путем замены n в формуле общего члена ряда на x. Например $U_n = \frac{1}{(2n+3)^2}$, $f(x) = \frac{1}{(2x+3)^2}$.

С другой стороны, та же фигура заключает внутри себя все «входящие» прямоугольники, сумма площадей которых равна

$$u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_{n+1} = s_{n+1} - u_1, \tag{30}$$

а потому

$$s_{n+1} - u_1 \leqslant \int\limits_1^{n+1} f(x)dx. \tag{31}$$

Эти неравенства приводят нас к следующему признаку.

5. Интегральный признак Коши. *Ряд* (27)

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots, \quad u_n = f(n),$$

члены которого положительны и не возрастают при возрастании n, сходится или собственно расходится, смотря по тому, имеет ли интеграл

$$I = \int\limits_1^{\infty} f(x)dx \tag{32}$$

конечное значение или равен бесконечности.

Напомним при этом, что $f(x)$ должна убывать при возрастании x.

Пусть сперва интеграл I имеет конечное значение, т. е. кривая $y = f(x)$ имеет конечную площадь [98]. Из положительности $f(x)$ вытекает

$$\int\limits_1^{n+1} f(x)dx < \int\limits_1^{\infty} f(x)dx,$$

а потому, в силу (31),

$$s_n < s_{n+1} \leqslant u_1 + I,$$

т. е. сумма s_n остается ограниченной при всех значениях n, и на основании признака I [120] ряд (27) будет сходящимся.

Пусть теперь $I = \infty$, т. е. интеграл

$$\int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx$$

при увеличении n может быть сделан больше любого заданного наперед числа N. Тогда в силу (29) и сумма s_n может быть сделана больше N, т. е. ряд (27) будет собственно расходящимся.

Аналогичным путем можно показать, что *остаток ряда* (27) *не превосходит интеграла*

$$\int\limits_{n}^{\infty} f(x)dx.$$

Замечание. *При применении признака Коши в интеграле* (32) *нижний предел, равный единице, можно заменить любым числом a, большим единицы, так как интегралы с нижним пределом единица и a одновременно или сходятся или расходятся* [98].

Примеры. **1.** Гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Здесь мы имеем

$$f(n) = \frac{1}{n},$$

а потому можно положить

$$f(x) = \frac{1}{x};$$

тогда

$$I = \int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{x} = \log x\Big|_{1}^{\infty}$$

и интеграл расходится, ибо $\log x \to +\infty$ при $x \to +\infty$; данный ряд, как мы уже знаем, расходящийся.

2. Более общий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \tag{33}$$

где p — любое число, большее нуля (при $p \leqslant 1$ ряд, очевидно, расходящийся). Здесь мы имеем

$$f(n) = \frac{1}{n^p}, \quad f(x) = \frac{1}{x^p}, \quad I = \int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-p} x^{1-p}\Big|_1^\infty, & \text{если} \quad p \neq 1, \\ \log x\Big|_1^\infty, & \text{если} \quad p = 1. \end{cases}$$

Отсюда ясно, что интеграл расходится, если $p \leqslant 1$, и сходится и равен $\frac{1}{p-1}$, если $p > 1$. Действительно, в последнем случае показатель $1-p < 0$, $x^{1-p} = \frac{1}{x^{p-1}} \to 0$ при $x \to +\infty$, и, следовательно,

$$\frac{1}{1-p} x^{1-p}\Big|_1^\infty = 0 - \frac{1}{1-p} = \frac{1}{p-1}.$$

Следовательно, в силу признака Коши, ряд (33) *будет сходящимся, если $p > 1$, и расходящимся, если $p \leqslant 1$.*

123. Знакопеременные ряды. Переходя к рядам с какими угодно членами, мы рассмотрим прежде всего ряды *знакопеременные*, у которых члены попеременно положительны и отрицательны. Такие ряды удобнее писать не так, как раньше, а в виде

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 \ldots \pm u_n \mp u_{n+1} \ldots, \tag{34}$$

причем числа

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots, u_n, \quad \ldots,$$

считаются положительными[10].

Относительно знакопеременных рядов можно доказать следующее предложение:

Для того чтобы знакопеременный ряд сходился, достаточно, чтобы абсолютные значения его членов убывали и стремились к нулю при возрастании n. Остаток такого ряда по абсолютному значению не превосходит абсолютного значения первого из отброшенных членов.

Рассмотрим сперва суммы четного числа членов ряда

$$s_{2n} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + u_{2n-1} - u_{2n}.$$

[10] Здесь мы считаем, что первый член ряда положительный; если он отрицательный, то ряд запишется в виде $-u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \ldots$.

Так как по условию абсолютные значения членов ряда убывают (лучше сказать, не возрастают) при возрастании n, то, вообще,

$$u_k \geqslant u_{k+1} \quad \text{и} \quad u_{2n+1} - u_{2n+2} \geqslant 0,$$

а потому

$$s_{2n+2} = s_{2n} + (u_{2n+1} - u_{2n+2}) \geqslant s_{2n},$$

т. е. переменная s_{2n} — *не убывающая.* С другой стороны, мы имеем

$$s_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \ldots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} \leqslant u_1,$$

так как все разности в скобках неотрицательны, т. е. переменная s_{2n} остается *ограниченной* при всех значениях n. Отсюда следует, что, при беспредельном возрастании n, s_{2n} стремится к конечному пределу [30], который мы обозначим через s:

$$\lim_{n\to\infty} s_{2n} = s.$$

Далее, мы имеем

$$s_{2n+1} = s_{2n} + u_{2n+1} \to s \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

так как по условию $u_{2n+1} \to 0$.

Мы видим, таким образом, что как сумма четного, так и сумма нечетного числа членов ряда (34) стремится к одному и тому же пределу s, т. е. ряд (34) сходящийся и имеет сумму s.

Остается еще оценить остаток r_n ряда. Мы имеем

$$r_n = \pm u_{n+1} \mp u_{n+2} \pm u_{n+3} \mp u_{n+4} \pm \ldots,$$

причем одновременно надо брать верхние или нижние знаки. Иначе

$$r_n = \pm(u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+4} + \ldots),$$

откуда, рассуждая как и раньше, имеем

$$|r_n| = (u_{n+1} - u_{n+2}) + (u_{n+3} - u_{n+4}) + \ldots =$$

$$= u_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3}) - (u_{n+4} - u_{n+5}) - \ldots \leqslant u_{n+1},$$

что и требовалось доказать.

Из формулы

$$r_n = \pm[(u_{n+1} - u_{n+2}) + (u_{n+3} - u_{n+4}) + \ldots],$$

в квадратных скобках которой стоят неотрицательные количества, следует, что знак r_n совпадает с тем знаком, который надо брать перед квадратной скобкой, т. е. совпадает со знаком $\pm u_{n+1}$. Итак, *при указанных в теореме условиях знак остатка знакопеременного ряда совпадает со знаком первого из отброшенных членов.*

Пример. Ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

есть знакопеременный ряд, абсолютные значения членов которого беспредельно убывают при $n \to \infty$, а потому он будет сходящимся. Мы увидим в дальнейшем, что его сумма равна $\log 2$. Однако для действительного вычисления $\log 2$ этот ряд не годится, так как для того чтобы остаток его был меньше 0,0001, нужно взять 10 000 его членов:

$$|r_n| < \frac{1}{n+1} \leqslant 0,0001; \quad n \geqslant 10\,000.$$

Итак, ряд этот хотя и сходится, *но сходится очень медленно*; для того чтобы иметь с такими рядами дело на практике, нужно предварительно преобразовать их из медленно сходящихся в быстро сходящиеся, или, как говорят, улучшить сходимость.

124. Абсолютно сходящиеся ряды. Из прочих рядов с какими угодно членами мы остановимся лишь на рядах абсолютно сходящихся.

Ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{35}$$

сходится, если сходится ряд, составленный из абсолютных значений членов данного ряда, т. е. *ряд*

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots \tag{36}$$

*Такие ряды называются абсолютно сходящимися рядами.**

Итак, допустим, что ряд (36) сходится, и положим

$$v_n = \frac{1}{2}(|u_n| + u_n), \quad w_n = \frac{1}{2}(|u_n| - u_n).$$

Оба числа v_n и w_n, наверно, неотрицательны, так как очевидно

$$v_n = \begin{cases} u_n, & \text{если } u_n \geqslant 0, \\ 0 & \text{если } u_n \leqslant 0, \end{cases} \quad w_n = \begin{cases} 0, & \text{если } u_n \geqslant 0, \\ |u_n|, & \text{если } u_n \leqslant 0. \end{cases}$$

С другой стороны, как v_n, так и w_n не превосходят $|u_n|$, т. е. общего члена сходящегося ряда (36), а потому, в силу признака 2 сходимости рядов с положительными членами [120], оба ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} w_n$$

будут сходящимися.

Так как мы имеем

$$u_n = v_n - w_n,$$

то будет сходиться и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (v_n - w_n) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n - \sum_{n=1}^{\infty} w_n,$$

который получается вычитанием ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w_n$ из ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ [119].

Сходящиеся ряды с положительными членами представляют частный случай абсолютно сходящихся рядов, признаки сходимости которых получаются непосредственно из признаков сходимости рядов с положительными членами.

Признаки сходимости 1–5, выведенные в [120, 121, 122] *для рядов с положительными членами, применяются и к рядам с какими угодно членами, если только условиться заменить везде u_n на $|u_n|$. При этом условии останутся в силе и признаки расходимости 3 и 4 и следствие из них* [121].

* Если ряд сходится, но абсолютной сходимости нет, ряд называется сходящимся условно. Из абсолютной сходимости следует условная.

В частности, в формулировках признаков Коши и Даламбера нужно заменить

$$\sqrt[n]{u_n} \quad \text{и} \quad \frac{u_n}{u_{n-1}} \quad \text{на} \quad \sqrt[n]{|u_n|} \quad \text{и} \quad \left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right|.$$

Так, например, если $\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| < q < 1$, т. е. $\frac{|u_n|}{|u_{n-1}|} < q < 1$, то согласно признаку Даламбера [121], ряд с положительными членами (36) сходится, а следовательно, ряд (35) сходится абсолютно. Если же $\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| \geqslant 1$, т. е. $|u_n| \geqslant |u_{n-1}|$, то, при возрастании n, члены u_n не убывают по абсолютному значению, а потому не могут стремиться к нулю, и ряд (35) расходится. Отсюда, как и в следствии [121], следует, что если $\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| \to r < 1$, то ряд (35) абсолютно сходится; если же $\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| \to r > 1$, то ряд (35) расходится.

Замечание. Заметим еще, что *если члены некоторого ряда* (35) *по абсолютному значению не больше некоторых положительных чисел* $|u_n| \leqslant a_n$ *и ряд* $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ *из этих чисел сходится, то ряд* (36) *и подавно сходится* [120], т. е. *ряд* (35) *абсолютно сходится.*

Примеры. **1.** Ряд (пример [121])

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

абсолютно сходится при всех конечных значениях x как положительных, так и отрицательных, ибо

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{|x|}{n} \to 0$$

при всех конечных значениях x.

2. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

абсолютно сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$, так как

$$\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| = \frac{n-1}{n}|x| \to |x|.$$

3. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\alpha$$

абсолютно сходится при $|r| < 1$, ибо для него

$$\sqrt[n]{|u_n|} = \sqrt[n]{|r^n||\sin n\alpha|} \leqslant \sqrt[n]{|r|^n} = |r| < 1.$$

Необходимо заметить, что далеко не всякий сходящийся ряд есть вместе с тем и абсолютно сходящийся, т. е. остается сходящимся, если каждый член ряда заменить его абсолютным значением. Так, например, знакопеременный ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots,$$

как мы видели, — сходящийся; если же заменить каждый член его абсолютным значением, получим расходящийся гармонический ряд:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

Абсолютно сходящиеся ряды обладают многими замечательными свойствами, которые изложены в § 14. Так, например, только они обладают свойством конечных сумм — независимостью суммы от порядка слагаемых.

125. Общий признак сходимости. В заключение настоящего параграфа упомянем о необходимом и достаточном условии сходимости ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

Сходимость эта по определению равносильна существованию предела у последовательности

$$s_1, \quad s_2, \quad s_3, \quad \ldots, \quad s_n \ldots,$$

где s_n — сумма n первых членов ряда. Но для существования этого предела мы имеем следующее необходимое и достаточное условие Коши [**31**]:

для любого заданного положительного ε существует такое N, что

$$|s_m - s_n| < \varepsilon$$

при всяких m и $n > N$. Положим для определенности, что $m > n$ и пусть $m = n+p$, где p — любое целое положительное число. Заметив, что тогда

$$s_m - s_n = s_{n+p} - s_n = (u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}) - \\ - (u_1 + u_2 + \ldots + u_n) = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p},$$

мы можем высказать следующий общий признак сходимости ряда.

Для сходимости бесконечного ряда

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого заданного положительного ε существовало такое число N, что при всяком $n > N$ и при всяком положительном p выполняется неравенство

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon,$$

т. е. *сумма какого угодно числа последовательных членов ряда, начиная с u_{n+1}, остается по абсолютному значению меньше ε, коль скоро $n > N$.*

Необходимо заметить, что при всей теоретической важности этого общего признака сходимости ряда, применение его на практике обычно затруднительно.

§ 13. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

126. Формула Тейлора. Рассмотрим многочлен n-й степени:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n;$$

придадим x приращение h и вычислим соответствующее значение функции $f(x+h)$. Это значение, очевидно, можно разложить по степеням h, раскрывая различные степени $(x+h)$ по формуле бинома Ньютона и располагая окончательный результат по степеням h. Коэффициенты при различных степенях h будут многочленами, зависящими от x:

$$f(x+h) = A_0(x) + hA_1(x) + h^2A_2(x) + \ldots + \\ + h^kA_k(x) + \ldots + h^nA_n(x), \quad (1)$$

и нужно только определить многочлены:

$$A_0(x), \quad A_1(x), \quad \ldots, \quad A_n(x).$$

Для этого мы изменим обозначения, написав в тождестве (1) a вместо x и вместо $x+h$ просто x. Тогда окажется

$$h = x - a,$$

и, вместо (1), мы получим

$$f(x) = A_0(a) + (x-a)A_1(a) + (x-a)^2A_2(a) + \ldots + \\ + (x-a)^kA_k(a) + \ldots + (x-a)^nA_n(a). \quad (2)$$

Для определения $A_0(a)$ положим в этом тождестве $x = a$, что даст

$$f(a) = A_0(a).$$

Для определения $A_1(a)$ продифференцируем тождество (2) по x и затем

положим $x = a$:

$$f'(x) = 1 \cdot A_1(a) + 2(x-a)A_2(a) + \ldots + k(x-a)^{k-1}A_k(a) + \\ + \ldots + n(x-a)^{n-1}A_n(a),$$

$f'(a) = 1 \cdot A_1(a)$.

Дифференцируя еще одни раз по x и полагая затем $x = a$, получим $A_2(a)$

$$f''(x) = 2 \cdot 1A_2(a) + \ldots + k(k-1)(x-a)^{k-2}A_k(a) + \\ + \ldots + n(n-1)(x-a)^{n-2}A_n(a),$$

$f''(a) = 2 \cdot 1A_2(a)$.

Продолжая эту операцию, дифференцируя k раз и полагая затем $x = a$, мы получим

$$f^{(k)}(x) = k(k-1)\ldots 2\cdot 1A_k(a) + \ldots + \\ + n(n-1)\ldots(n-k+1)(x-a)^{n-k}A_n(a),$$

$f^{(k)}(a) = k!A_k(a)$.

Итак, мы имеем

$$A_0(a) = f(a), \quad A_1(a) = \frac{f'(a)}{1!}, \quad A_2(a) = \frac{f''(a)}{2!}, \quad \ldots, \\ A_k(a) = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \quad \ldots, \quad A_n(a) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!},$$

после чего формула (2) примет вид

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \quad (3)$$

Эта формула верна только в том случае, когда $f'(x)$ есть многочлен степени не выше n, и она дает разложение такого многочлена по степеням разности $(x-a)$.

Положим теперь, что $f(x)$ — не многочлен, а какая-либо функция, определенная внутри некоторого промежутка I и имеющая непрерывные производные до порядка $(n+1)$. Пусть значение $x = a$ находится внутри I. В дальнейшем считаем, что x принадлежит I.

Обозначим через $R_n(x)$ разность между $f(x)$ и правой частью формулы (3), т. е. положим

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \\ + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x). \quad (4)$$

Дифференцируем последовательно это тождество:

$$\left.\begin{aligned}
f'(x) &= f'(a) + \frac{f''(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \\
&\qquad + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n'(x), \\
f''(x) &= f''(a) + \frac{f'''(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \\
&\qquad + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-2)}(x-a)^{n-2} + R_n''(x), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f^{(n)}(x) &= f^{(n)}(a) + R^{(n)}(x).
\end{aligned}\right\} \qquad (4_1)$$

Полагая в (4) и последних тождествах $x = a$, получаем

$$R_n(a) = 0, \quad R_n'(a) = 0, \quad \ldots, \quad R_n^{(n)}(a) = 0. \qquad (5)$$

Дифференцируя последнее из равенств (4_1) еще один раз, найдем

$$R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x). \qquad (6)$$

Из соотношений (5) и (6) мы без труда получим выражение для $R_n(x)$, ибо по основной формуле интегрального исчисления

$$R_n(x) - R_n(a) = \int\limits_a^x R_n'(t)dt,$$

откуда, принимая во внимание (5) и интегрируя по частям, выводим последовательно

$$R_n(x) = \int\limits_a^x R_n'(t)dt = -\int\limits_a^x R_n(t)d(x-1) =$$

$$= -R_n'(t)(x-t)\Big|_a^x + \int\limits_a^x R_n''(t)(x-t)dt =$$

$$= -\int\limits_a^x R_n''(t) d\frac{(x-t)^2}{2!} =$$

$$= -R_n''(t)\frac{(x-t)^2}{2!}\Bigg|_a^x + \int\limits_a^x R_n'''(t)\frac{(x-t)^2}{2!}dt =$$

$$= -\int\limits_a^x R_n'''(t) d\frac{(x-t)^3}{3!} =$$

$$= -R_n'''(t)\frac{(x-t)^3}{3!}\Bigg|_a^x + \int\limits_a^x R_n^4(t)\frac{(x-t)^3}{3!}dt = \ldots =$$

$$= \int\limits_a^x R_n^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}dt = \frac{1}{n!}\int\limits_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

Для уяснения сделанных преобразований заметим следующее. Переменная интегрирования обозначена буквой t, так что x под знаком интеграла надо считать постоянным и дифференциал x равным нулю, и потому, например,

$$d\frac{(x-t)^3}{3!} = \frac{3(x-t)^2}{3!}d(x-t) = -\frac{(x-t)^2}{2!}dt$$

и, вообще,

$$d\frac{(x-t)^k}{k!} = \frac{k(x-t)^{k-1}}{k!}d(x-t) = -\frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!}dt.$$

Точно так же выражение

$$R_n^{(k)}(t)\frac{(x-t)^k}{k!}\Bigg|_a^x \quad (k \leqslant n)$$

обращается в нуль, так как при подстановке $t = x$ обращается в нуль множитель $(x-t)^k$, а при подстановке $t = a$ множитель $R_n^{(k)}(a) = 0$ в силу (5).

Мы получаем таким путем следующее важное предложение:

Формула Тейлора. *Всякая функция $f(x)$, имеющая внутри некоторого промежутка, содержащего точку $x = a$ внутри себя, непрерывные производные до $(n+1)$-го порядка включительно, при всех значениях x внутри этого промежутка может быть разложена по степеням разности $(x-a)$ в виде*

$$f(x) = f(a) + (x-a)\frac{f'(a)}{1!} + (x-a)^2\frac{f''(a)}{2!} + \ldots + \\ + (x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + R_n(x), \quad (7)$$

где $R_n(x)$, остаточный член формулы, имеет вид

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int\limits_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt. \quad (8)$$

Весьма часто в приложениях встречается другая форма остаточного члена, которая непосредственно получается из (8) при применении теоремы о среднем [**95**]. Под знаком интеграла в правой части формулы (8) функция $(x-t)^n$ сохраняет знак, а потому по теореме о среднем мы имеем

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\int\limits_a^x (x-t)^n dt = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\Bigg|_a^x\right].$$

Подставляя верхний и нижний пределы, получим

$$-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\Bigg|_a^x = \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1},$$

так как при $t = x$ написанное выражение обращается в нуль. Подставляя это в предыдущую формулу, будем иметь

$$R_n(x) = (x-a)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}, \quad (9)$$

где ξ есть некоторое среднее значение, лежащее между a и x. Эта форма остаточного члена называется *остаточным членом в форме Лагранжа*, и формула Тейлора с остаточным членом Лагранжа

будет

$$f(x) = f(a) + (x-a)\frac{f'(a)}{1!} + (x-a)^2\frac{f''(a)}{2!} + \ldots + \\ + (x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + (x-a)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \quad (7_1)$$

(ξ между a и x).

127. Различные виды формулы Тейлора. При $n = 0$ мы получаем из (7_1) выведенную раньше [63] формулу конечных приращений Лагранжа:

$$f(x) - f(a) = (x-a)f'(\xi);$$

формула Тейлора является, таким образом, непосредственным обобщением формулы конечных приращений.

Переходя к прежним обозначениям и написав x вместо a и $x+h$ вместо x, перепишем формулу Тейлора (7) в виде

$$f(x+h) - f(x) = \frac{hf'(x)}{1!} + \frac{h^2f''(x)}{2!} + \ldots + \frac{h^nf^{(n)}(x)}{n!} + R_n(x), \quad (10)$$

так как при новых обозначениях $(x-a)$ надо заменить на h. Значение ξ, лежащее при прежних обозначениях между a и x, будет лежать между x и $(x+h)$, и его можно обозначить через $(x+\theta h)$, где $0 < \theta < 1$. В силу (9) остаточный член формулы (10) можно, таким образом, написать в виде:

$$R_n(x) = h^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(x+\theta h)}{(n+1)!}(0 < \theta < 1). \quad (11)$$

Левая часть формулы (10) есть приращение Δy функции $y = f(x)$, соответствующее приращению или, что то же, дифференциалу h независимой переменной. Вспомнив выражения для дифференциалов высших порядков [55], мы имеем

$$dy = y'dx = f'(x)h, \quad d^2y = y''(dx)^2 = f''(x)h^2, \quad \ldots,$$

$$d^n y = y^{(n)}(dx)^n = f^{(n)}(x)h^n,$$

откуда

$$\Delta y = \frac{dy}{1!} + \frac{d^2y}{2!} + \ldots + \frac{d^ny}{n!} + \frac{d^{n+1}y}{(n+1)!}\bigg|_{x+\theta h}, \tag{12}$$

причем символ $\frac{d^{n+1}y}{(n+1)!}\Big|_{x+\theta h}$ обозначает результат подстановки в выражение $\frac{d^{n+1}y}{(n+1)!}$ вместо x суммы $x+\theta h$.

В этом виде формула Тейлора особенно интересна тогда, когда приращение h независимой переменной есть величина бесконечно малая. Формула (12) дает тогда возможность выделить из приращения функции Δy бесконечно малые слагаемые различных порядков относительно h.

В частном случае, когда исходное значение a независимой переменной есть нуль, формула Тейлора (7) принимает вид

$$f(x) = f(0) + x\frac{f'(0)}{1!} + x^2\frac{f''(0)}{2!} + \ldots + x^n\frac{f^{(n)}(0)}{n!} + R_n(x), \tag{13}$$

где

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int\limits_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt = \frac{x^{n+1}f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \tag{14}$$

и ξ, лежащее между 0 и x, можно обозначить θx, где θ, зависящее от x, удовлетворяет неравенству $0 < \theta < 1$. Формула (13) называется *формулой Маклорена.*

128. Ряды Тейлора и Маклорена. Если $f(x)$ имеет при $x = a$ и x близких к a производные всех порядков, то мы можем написать формулу Тейлора при любом значении n. Перепишем формулу Тейлора в виде:

$$f(x) - S_{n+1}(x) = R_n(x),$$

где

$$S_{n+1}(x) = f(a) + (x-a)\frac{f'(a)}{1!} + \ldots + (x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!},$$

т. е. $S_{n+1}(x)$ есть сумма первых $(n+1)$ членов бесконечного ряда

$$f(a) + (x-a)\frac{f'(a)}{1!} + \ldots + (x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \ldots$$

Если при некотором значении x и беспредельном возрастании n

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0, \tag{15}$$

то, в силу сказанного в [118], указанный выше бесконечный ряд сходится при указанном значении x и его сумма равна $f(x)$. Таким образом, получается *разложении функции $f(x)$ в бесконечный степенной ряд Тейлора:*

$$f(x) = f(a) + (x-a)\frac{f'(a)}{1!} + \ldots + (x-a)^n \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \ldots \tag{16}$$

по степеням разности $(x-a)$.

В дальнейшем мы всегда будем иметь дело с тем случаем, когда условие (15) имеет место не для отдельного значения x, а для всех x из некоторого промежутка.

Таким же образом формула Маклорена дает нам при соблюдении условия (15) *разложение $f(x)$ в ряд Маклорена*

$$f(x) = f(0) + x\frac{f'(0)}{1!} + \ldots + x^n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \ldots \tag{17}$$

Оценка $R_n(x)$ имеет важное значение для приближенного вычисления значений функции $f(x)$ при помощи разложения ее в степенной ряд.

Применим предыдущие соображения к разложению и приближенному вычислению простейших функций.

129. Разложение e^x. Прежде всего мы имеем

$$f(x) = e^x, \quad f'(x) = e^x, \quad \ldots, \quad f^{(k)}(x) = e^x, \quad \ldots,$$

а потому

$$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(k)}(0) = 1,$$

и формула Маклорена с остаточным членом (14) дает

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x} \quad (0 < \theta < 1).$$

Мы видели (пример [121]), что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

есть абсолютно сходящийся при всех конечных значениях x, а потому при всяком x имеем

$$\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

так как это выражение есть общий член сходящегося ряда[11]. С другой стороны, множитель $e^{\theta x}$ в выражении остаточного члена, наверно, не превосходит e^x при $x > 0$ и единицы при $x < 0$, а потому остаточный член стремится к нулю при всех значениях x, и мы получим разложение

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \tag{18}$$

которое имеет место при всех значениях x.

В частности, при $x = 1$ получаем выражение для e, весьма удобное для вычисления e с любой степенью точности

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$$

Пользуясь этой формулой, вычислим число e с шестью десятичными знаками. Если мы приближенно положим

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!},$$

[11] См. также пример в [34].

то ошибка будет

$$\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\ldots=\frac{1}{(n+1)!}\Big[1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\ldots\Big]<$$
$$<\frac{1}{(n+1)!}\Big[1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots\Big]=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n!n},$$

причем знак ($<$) поставлен потому, что в знаменателе дробей множители $(n+2)$, $(n+3)$, $(n+4)$, ... заменены меньшим числом $(n+1)$, отчего все дроби увеличились.

Можно поэтому указать следующие пределы, между которыми заключается число e:

$$2+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}<e<2+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{n!n}.$$

Если желаем получить для e приближенное значение, отличающееся от истинного не более, чем на 0,000 001, положим $n=10$; тогда

$$e\approx 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{10!},$$

и ошибка не превзойдет $\frac{1}{10!10}<3\cdot 10^{-8}$. В этой формуле первые два слагаемых вычисляются точно; остальные восемь слагаемых нужно вычислить с семью знаками, так как при этом ошибка каждого слагаемого не больше 0,5 единицы седьмого знака, т. е. $0,5\cdot 10^{-7}$, а вся ошибка не больше

$$10^{-7}\cdot 0,5\cdot 8=4\cdot 10^{-7},$$

т. е. четырех единиц седьмого знака, а потому общая ошибка по абсолютному значению не будет превышать $4,3\cdot 10^{-7}$. Мы имеем

Значение e с 12 знаками есть 2,718 281 828 459.

130. Разложение $\sin x$ и $\cos x$. Мы имеем [53]:

$$f(x)=\sin x,\quad f'(x)=\sin\Big(x+\frac{\pi}{2}\Big),\quad \ldots,\quad f^{(n)}(x)=\sin\Big(x+k\frac{\pi}{2}\Big),$$

откуда

$$f(0)=0,\quad f'(0)=1,\quad f''(0)=0,\quad f'''(0)=-1,\quad \ldots,$$
$$f^{(2m)}(0)=0,\quad f^{(2m+1)}(0)=(-1)^m,$$

$2 = 2,000\,000$	0 (точно)
$\frac{1}{2!} = \frac{1}{2} = 0,500\,000$	0 „
$\frac{1}{3!} = \frac{1}{2!3} = 0,166\,666$	7 (по избытку)
$\frac{1}{4!} = \frac{1}{3!4} = 0,041\,666$	7 „ „
$\frac{1}{5!} = \frac{1}{4!5} = 0,008\,333$	3 (по недостатку)
$\frac{1}{6!} = \frac{1}{5!6} = 0,001\,388$	9 (по избытку)
$\frac{1}{7!} = \frac{1}{6!7} = 0,000\,198$	4 (по недостатку)
$\frac{1}{8!} = \frac{1}{7!8} = 0,000\,024$	8 „ „
$\frac{1}{9!} = \frac{1}{8!9} = 0,000\,002$	8 (по избытку)
$\frac{1}{10!} = \frac{1}{9!10} = 0,000\,000$	3 „ „

$e \approx 2,7182818.$

после чего формула (13) дает

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!} \sin\left[\theta x + \frac{(2n+3)\pi}{2}\right].$$

В остаточном члене множитель $\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}$, как мы видели выше, стремится к нулю при $n \to \infty$, а абсолютное значение синуса не превышает единицы, и, следовательно, остаточный член стремится к нулю при всех конечных значениях x, т. е. разложение

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \tag{19}$$

имеет место *при всех значениях* x.

Аналогичным образом мы можем доказать, что разложение

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \tag{20}$$

имеет место *при всех значениях* x.

Ряды (19) и (20) весьма удобны для вычисления значений функций $\sin x$ и $\cos x$ при малых значениях угла x. При всех значениях x, как положительных, так и отрицательных, они знакопеременные, так что если мы взяли такое число членов, что дальнейшие

идут убывая, то ошибка по абсолютному значению не превосходит первого из отброшенных членов [123].

При больших значениях x ряды (19) и (20) также сходятся, но медленно и для вычисления неудобны. На рис. 156 показано взаимное расположение *точной кривой* $\sin x$ и первых *трех приближений:*

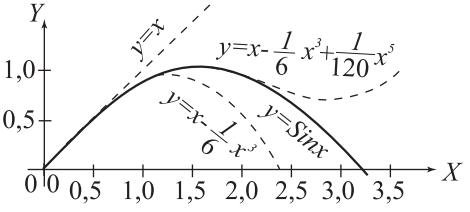

Рис. 156.

$$x, \quad x - \frac{x^3}{6}, \quad x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}.$$

Чем больше членов взято в приближенной формуле, тем в большем промежутке приближенная кривая близка к точной. Заметим, что во всех написанных формулах угол x выражается в дуговой мере, т. е. в радианах [33].

Пример. Вычислить $\sin 10^\circ$ с точностью до 10^{-5}. Прежде всего переводим градусную меру в дуговую

$$\text{arc}10^\circ = \frac{2\pi}{360} \cdot 10 = \frac{\pi}{18} = 0,17\ldots$$

Остановившись на приближенной формуле

$$\sin\frac{\pi}{18} \approx \frac{\pi}{18} - \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3,$$

мы делаем ошибку, не превосходящую

$$\frac{1}{120} \cdot (0,2)^5 < 4 \cdot 10^{-6} \quad \left(\frac{\pi}{18} < 0,2\right).$$

В правой части предыдущей формулы $\sin\frac{\pi}{18}$ надлежит вычислять каждое слагаемое с шестью знаками, так как тогда полная ошибка будет не больше

$$2 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6} = 5 \cdot 10^{-6}.$$

С указанной точностью мы имеем

$$\frac{\pi}{18} = 0,174\,533, \quad \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3 = 0,000\,886, \quad \sin\frac{\pi}{18} = 0,173\,647,$$

причем за первые четыре знака можно ручаться.

131. Бином Ньютона. Здесь мы имеем, считая $x > -1$, т. е. $1 + x > 0$:

$$f(x) = (1+x)^m, \quad f'(x) = m(1+x)^{m-1}, \quad \ldots,$$
$$f^{(k)}(x) = m(m-1)\ldots(m-k+1)(1+x)^{m-k},$$
$$f(0) = 1, \quad f'(0) = m, \quad \ldots, \quad f^{(k)}(0) = m(m-1)\ldots(m-k+1),$$

где m — любое вещественное число, так что формула (13) дает нам:

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \\ + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + R_n(x), \quad (21)$$

где остаточный член может быть определен по формуле (8) при $a = 0$:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int\limits_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n dt.$$

Принимая во внимание, что в данном случае

$$f^{(n+1)}(t) = m(m-1)\ldots(m-n)(1+t)^{m-n-1},$$

можем написать

$$R_n(x) = \frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{n!}\int\limits_0^x (x-t)^n(1+t)^{m-n-1}dt. \quad (22)$$

Применяя к интегралу теорему о среднем (13) из [95] и обозначая через θx, где $0 < \theta < 1$, значение t, лежащее между 0 и x и входящее в упомянутую теорему о среднем, получим

$$R_n(x) = \frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{n!}(x-\theta x)^n(1+\theta x)^{m-n-1}\int\limits_0^x dt =$$
$$= \frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-n)}{n!}x^n\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n(1+\theta x)^{m-1}mx. \quad (23)$$

Если $R_n \to 0$, то ряд

$$1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots \quad (24)$$

должен быть сходящимся [118]. Мы имеем

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{m-n+1}{n}x\right| \to |x| \quad \text{при} \quad n\to\infty,$$

а потому ряд сходится (абсолютно) при $|x|<1$ и расходится при $|x|>1$ [124]. Хотя ряд (24) и сходится при $|x|<1$, однако еще неясно, что при этом его сумма равна $(1+x)^m$, и приходится еще доказывать, что $R_n(x)\to 0$ при $|x|<1$. Множитель

$$\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-n)}{n!}x^n$$

в выражении (23) для $R_n(x)$ будет общим членом *сходящегося* ряда (24), в котором m заменено на $(m-1)$, а потому [118] стремится к нулю при $n\to\infty$.

Множитель $\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$ не превосходит единицы при всех значениях n. В самом деле, в рассматриваемом случае $-1<x<+1$, а потому как при положительных, так и при отрицательных значениях x будет $0<1<\theta<1+\theta x$, откуда

$$0<\frac{1-\theta}{1+\theta x}<1 \quad \text{и} \quad 0<\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)<1.$$

Последний множитель $mx(1+\theta x)^{m-1}$ также остается ограниченным, так как число $(1+\theta x)$ лежит между 1 и $1+x$, и $mx(1+\theta x)^{m-1}$ лежит между пределами mx и $mx(1+x)^{m-1}$, не зависящими от n.

Из сказанного ясно, что $R_n(x)$ по формуле (23) представляется в виде произведения трех множителей, из которых один стремится к нулю, а два других остаются ограниченными при беспредельном возрастании n, а потому и

$$R_n(x)\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Итак, разложение

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \\ + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots \quad (25)$$

имеет место *при всех значениях x, удовлетворяющих условию*

$$|x| < 1.$$

Когда показатель m есть число целое и положительное, то ряд (25) заканчивается на члене $n = m$ и превращается в элементарную формулу бинома Ньютона. В общем же случае *разложение* (25) *дает обобщение бинома Ньютона для какого угодно показателя m.*

Полезно отметить некоторые частные случае бинома:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots, \quad (26)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \ldots, \quad (27)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 - \ldots \quad (28)$$

Заметим, что функция $(1+x)^m$ при всяких $x > -1$ имеет положительные значения [19, 44], т. е. сумма ряда (24) при $-1 < x < +1$ положительна. В частности, например, ряд (27) дает в этом промежутке положительное значение $\sqrt{1+x}$.

Примеры. **1.** Извлечение корней. Формула (25) особенно удобна для извлечения корней с любой степенью точности. Пусть нужно извлечь корень m-й степени из целого числа A. Всегда можно подобрать целое число a так, чтобы m-я степень a была, по возможности, ближе к A, так что, положив $A = a^m + b$, причем $|b| < a^m$, мы имели бы

$$\sqrt[m]{A} = \sqrt[m]{a^m + b} = a\sqrt[m]{1 + \frac{b}{a^m}}.$$

Так как здесь $\left|\frac{b}{a^m}\right| < 1$, то обозначив отношение $\frac{b}{a^m}$ через x, мы можем вычислить $\sqrt{1+\frac{b}{a^m}}$ по формуле бинома Ньютона, причем ряд будет сходиться тем лучше, чем меньше абсолютное значение рассматриваемого отношения.

Вычислим, например, $\sqrt[5]{1000}$ с точностью до 10^{-5}. Мы имеем

$$\sqrt[5]{1000} = \sqrt[5]{1024-24} = 4\left(1-\frac{3}{128}\right)^{1/5} =$$
$$= 4\left[1-\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{128}-\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{10}\left(\frac{3}{128}\right)^2-\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{9}{15}\left(\frac{3}{128}\right)^3-\dots\right].$$

Остановимся на написанных членах и оценим ошибку, подставляя в формулу (23)

$$m=\frac{1}{5},\quad n=3,\quad x=-\frac{3}{128}.$$

Множитель $\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n$, как было указано, заключается между нулем и единицей. Множитель $(1+\theta x)^{m-1}$ будет

$$\left(1-\theta\frac{3}{128}\right)^{-4/5} < \left(1-\frac{3}{128}\right)^{-4/5} = \left(\frac{125}{128}\right)^{4/5} < \left(\frac{6}{5}\right)^{4/5} = \left(\sqrt[5]{\frac{6}{5}}\right)^{4/5} < \left(\frac{4}{3}\right)^4,$$

ибо

$$\sqrt[5]{\frac{6}{5}} < \frac{6}{5} < \frac{4}{3}.$$

Окончательно из формулы (23) получим

$$4|R_n| < \frac{4}{1\cdot2\cdot3}\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{9}{5}\cdot\frac{14}{5}\left(\frac{4}{128}\right)^4 <$$
$$< 2\cdot0,2\cdot0,8\cdot0,6\cdot2,8\cdot(0,03)^4 < 5\cdot10^{-7}.$$

Вычисление оставшихся членов нужно вести с шестью знаками, так как тогда полная ошибка не превзойдет

$$4\cdot3\cdot0,5\cdot10^{-6}+5\cdot10^{-7} = 6,5\cdot10^{-6} < 10^{-5}.$$

Вычисление можно расположить следующим образом:

$\frac{1}{5} = 0,2$	$\times \frac{3}{128} = 0,023\,4375 \times 0,2 = 0,004\,687$
$\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{10} = 0,08$	$\times \frac{3}{128}^2 = 0,000\,549 \times 0,08 = 0,000\,044$
$\frac{1}{5} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{9}{15} = 0,048$	$\times \frac{3}{128}^3 = 0,000\,013 \times 0,048 = 0,000\,001$

$$0{,}004\,732$$

$$\begin{aligned} 1 - 0,004\,732 &= 0,995\,268 \\ &\qquad\quad \times 4 \\ \hline &\quad 3,981\,072 \end{aligned}$$

2. Приближенное вычисление длины эллипса. В [**103**] было получено следующее выражение для длины l эллипса с полуосями a и b:

$$l = 4\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}\,dt = 4a \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^2 t + \frac{b^2}{a^2}\cos^2 t}\,dt$$

[формула (22)]. Вводя в рассмотрение эксцентриситет ε эллипса

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}, \quad \frac{b^2}{a^2} = 1 - \varepsilon^2,$$

получаем:

$$l = 4a \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t}\,dt. \tag{29}$$

Интеграл этот точно вычислить нельзя, но его можно вычислить с какой угодно степенью точности, разложив[12] подынтегральную функцию в ряд по степеням ε:

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \cos^2 t + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)}{1 \cdot 2}\varepsilon^4 \cos^4 t - \\ - \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right)\left(\frac{1}{2} - 2\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\varepsilon^6 \cos^6 t + \ldots = \\ = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \cos^2 t - \frac{1}{8}\varepsilon^4 \cos^4 t - \frac{1}{16}\varepsilon^6 \cos^6 t + R_3, \end{aligned}$$

[12] Разложение это, наверно, возможно, так как для эллипса $\varepsilon < 1$, и потому слагаемое $-\varepsilon^2 \cos^2 t$, которое играет здесь роль x в формуле бинома Ньютона, по абсолютному значению меньше единицы при этом разложении вообще говоря подразумевается, что ε мало.

причем ошибка R_3, если ее оценить по формуле (23) при $n = 3$, удовлетворяет неравенству

$$|R_3| = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}}{1\cdot 2\cdot 3}\varepsilon^8\cos^8 t\Big(\frac{1-\theta}{1-\theta\varepsilon^2\cos^2 t}\Big)^3(1-\theta\varepsilon^2\cos^2 t)^{\frac{1}{2}-1} < \\ < \frac{5}{32}\frac{\varepsilon^8\cos^8 t}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \quad (30)$$

так как

$$0 < \Big(\frac{1-\theta}{1-\theta\varepsilon^2\cos^2 t}\Big)^3 < 1$$

и

$$(1-\theta\varepsilon^2\cos^2 t)^{\frac{1}{2}-1} < (1-\varepsilon^2\cos^2 t)^{-\frac{1}{2}}.$$

Подставив это выражение в (29) для l, интегрируя и вспомнив формулы (27) [100], находим

$$l = 4a\Big[\int_0^{\pi/2} dt - \frac{1}{2}\varepsilon^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 t dt - \frac{1}{8}\varepsilon^4\int_0^{\pi/2}\cos^4 t dt - \frac{1}{16}\varepsilon^6\int_0^{\pi/2}\cos^6 t dt + \int_0^{\pi/2} R_3 dt\Big] = \\ = 2\pi a\Big[1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 - \frac{3}{64}\varepsilon^4 - \frac{5}{256}\varepsilon^6 + \rho\Big], \quad (31)$$

где, в силу формулы (10_1) [95] и неравенства (30),

$$|\rho| = \Big|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} R_3 dt\Big| < \frac{5}{32}\frac{\varepsilon^8}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos^8 t dt = \frac{175}{2^{12}}\frac{\varepsilon^8}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} < \frac{0,05\varepsilon^8}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

Формула (31) сама по себе удобна для вычисления длины эллипса, особенно для малых эксцентриситетов. Основываясь на ней, можно указать простое геометрическое построение приближенного выражения для длины эллипса, при котором нужно иметь дело только с окружностями.

Обозначим через l_1 и l_2, соответственно, среднее арифметическое и среднее геометрическое полуосей эллипса:

$$l_1 = \frac{a+b}{2}, \quad l_2 = \sqrt{ab}$$

и сравним длину l эллипса с длинами $2\pi l_1$, $2\pi l_2$ двух окружностей радиусов l_1 и l_2.

Замечая, что

$$b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}, \quad \frac{a+b}{2} = \frac{a}{2}[1+\sqrt{1-\varepsilon^2}], \quad \sqrt{ab} = a\sqrt[4]{1-\varepsilon^2},$$

и разлагая в ряды по формуле бинома Ньютона, получим без труда следующие выражения:

$$2\pi l_1 = 2\pi a\Big[1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 - \frac{1}{16}\varepsilon^4 - \frac{1}{32}\varepsilon^6 + \rho_1\Big], \tag{32}$$

$$2\pi l_2 = 2\pi a\Big[1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 - \frac{3}{32}\varepsilon^4 - \frac{7}{128}\varepsilon^6 + \rho_2\Big], \tag{33}$$

причем ошибки ρ_1 и ρ_2, если их оценить по формуле (23), удовлетворяют неравенствам:

$$|\rho_1| < \frac{5}{32}\frac{\varepsilon^8}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \quad |\rho_2| < \frac{77}{512}\frac{\varepsilon^8}{(1-\varepsilon^2)^{3/4}}.$$

Отсюда ясно, что при малом эксцентриситете, *когда можно пренебречь высшими степенями ε по сравнению с ε^2, можно принять за длину эллипса длину любой из двух окружностей, радиусы которых равны среднему арифметическому или среднему геометрическому полуосей.* Если желательна бóльшая точность, составим выражение

$$\alpha \cdot 2\pi l_1 + \beta \cdot 2\pi l_2, \tag{34}$$

подобрав множители α и β так, чтобы по возможности большее число членов в выражениях (31) и (34) совпадали между собой. Так как первые два члена каждого из выражений (31), (32) и (33) совпадают, то, прежде всего, должно быть

$$\alpha + \beta = 1.$$

Приравнивая, далее, между собой коэффициенты при ε^4 в выражениях (31) и (34), получаем

$$\frac{\alpha}{16} + \frac{3\beta}{32} = \frac{3}{64} \quad \text{или} \quad 4\alpha + 6\beta = 3.$$

Решая полученные два уравнения относительно α и β, находим

$$\alpha = \frac{3}{2}, \quad \beta = -\frac{1}{2}.$$

Подставив это в (34), имеем

$$\alpha \cdot 2\pi l_1 + \beta \cdot 2\pi l_2 = 2\pi\Big(\frac{3}{2}l_1 - \frac{1}{2}l_2\Big) =$$
$$= 2\pi a\Big(1 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 - \frac{3}{64}\varepsilon^4 - \frac{5}{256}\varepsilon^6 + \frac{3}{2}\rho_1 - \frac{1}{2}\rho_2\Big), \tag{35}$$

т. е. оказывается, что совпадают члены не только с ε^4, но и с ε^6, и расхождение формул (31) и (35) начинается только с членов с ε^8. Приняв во внимание найденные выше оценки для ρ, ρ_1 и ρ_2 и заметив, что

$$\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon_2}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{(1-\varepsilon^2)^{3/4}} < \frac{1}{1-\varepsilon^2}, \quad \frac{175}{2^{12}} + \frac{5}{32}\cdot\frac{3}{2} + \frac{77}{512}\cdot\frac{1}{2} < 0,4,$$

можем окончательно сказать: *с ошибкой, не превосходящей* $\frac{0,4\varepsilon^8}{1-\varepsilon^2}$, *за длину эллипса с полуосями* a, b *и эксцентриситетом* ε *можно принять длину окружности радиуса* r, причем

$$r = \frac{3}{2}\frac{a+b}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{ab}.$$

132. Разложение $\log(1+x)$.[13] Это разложение можно получить из общей теории, но мы применим другой способ, который с успехом употребляется и во многих других случаях.

Выразим $\log(1+x)$ в виде определенного интеграла. Мы имеем, очевидно, при $x > -1$:

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \log(1+t)\Big|_0^x = \log(1+x) - \log 1 = \log(1+x),$$

то есть

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t}.$$

Но имеет место тождество

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + \frac{(-1)^n t^n}{1+t},$$

которое непосредственно получается, если делить единицу на $1+t$ и остановиться на остатке $(-1)^n t^n$. Таким образом,

[13] Функция $\log x$ не может быть разложена в ряд по степеням x, так как при $x = 0$ она сама и ее производные терпят разрыв непрерывности и обращаются в бесконечность.

$$\log(1+x) = \int\limits_0^x \frac{dt}{1+t} =$$

$$= \int\limits_0^x \Big[1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^{n-1}t^{n-1} + \frac{(-1)^n t^n}{1+t}\Big]dt =$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + R_n(x),$$

где

$$R_n(x) = (-1)^n \int\limits_0^x \frac{t^n dt}{1+t}. \tag{36}$$

Ряд

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \ldots,$$

для которого

$$\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| = \frac{n-1}{n}|x| \to |x| \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

наверно расходящийся при $|x| > 1$ (следствие [121]), а потому нужно рассматривать только случай $|x| < 1, \quad x = \pm 1$. При этом случай $x = -1$ также должен быть отброшен, ибо при $x = -1$ функция $\log(1+x)$ обращается в бесконечность.

Итак, остаются случаи: 1) $|x| < 1$ и 2) $x = 1$. В случае 1), применяя к выражению (36) для $R_n(x)$ теорему о среднем [95] и принимая во внимание, что t^n не меняет знака при изменении t от 0 до x, имеем

$$R_n(x) = \frac{(-1)^n}{1+\theta x}\int\limits_0^x t^n dt = \frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)} \quad (0 < \theta < 1), \tag{37}$$

откуда, в силу условия $|x| < 1$, следует

$$|R_n(x)| < \frac{1}{n+1}\frac{1}{1+\theta x}.$$

Множитель $\frac{1}{1+\theta x}$ в правой части предыдущего неравенства остается ограниченным при всех значениях n, так как заключается между пределами 1 и $\frac{1}{1+x}$, не зависящими от n, а потому при рассматриваемых значениях x

$$R_n(x) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Тот же результат мы получим и в случае 2), когда $x = 1$. Та же формула (37) при $x = 1$ показывает

$$|R_n(1)| = \frac{1}{n+1}\frac{1}{1+\theta} < \frac{1}{n+1},$$

т. е. опять

$$R_n(1) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Итак, разложение

$$\log(1+x) = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + \ldots \tag{38}$$

имеет место *при всех значениях x, удовлетворяющих неравенствам*

$$-1 < x \leqslant +1. \tag{39}$$

В частности, при $x = 1$ имеем равенство

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \ldots,$$

о котором уже было упомянуто выше [123]. Формула (38) непосредственно для вычисления логарифмов не годится, так как в ней предполагается, что x удовлетворяет неравенствам (39) и, кроме того, ряд в правой части ее сходится недостаточно быстро. Ее можно преобразовать в более удобный для вычислений вид. Для этого подставим в равенство

$$\log(1+x) = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots$$

$(-x)$ вместо x, что дает

$$\log(1-x) = -x - \frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots \quad (|x| < 1),$$

и вычтем почленно. Мы получим

$$\log\frac{1+x}{1-x} = 2\Big(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots\Big) \quad (|x| < 1).$$

Положив здесь

$$\frac{1+x}{1-x} = 1 + \frac{z}{a} = \frac{a+z}{a}, \quad x = \frac{z}{2a+z}, \tag{40}$$

мы имеем

$$\log\frac{a+z}{a} = 2\left[\frac{z}{2a+z} + \frac{1}{3}\cdot\frac{z^3}{(2a+z)^3} + \frac{1}{5}\frac{z^5}{(2a+z)^5} + \dots\right],$$

или

$$\log(a+z) = \log a + 2\left[\frac{z}{2a+z} + \frac{1}{3}\frac{z^3}{(2a+z)^3} + \dots\right]. \tag{41}$$

Эта формула годится уже при всех положительных значениях a и z, так как при этом $x = \frac{z}{2a+z}$ заключается между нулем и единицей. Она тем более удобна для вычисления, чем меньше дробь $\frac{z}{2a+z}$, или, что то же, чем меньше z по сравнению с a.

Формула (41) весьма полезна для вычисления логарифмов. Хотя фактически таблица логарифмов была вычислена не с помощью рядов, которые во времена Непера и Бригга были еще неизвестны, все же формула (41) может с успехом применяться для проверки и для быстрого вычисления таблицы логарифмов. Положим в (41) $z = 1$ и возьмем последовательно $a = 15$, 24, 80, мы получим

$$\log 16 - \log 15 = 2\left[\frac{1}{31} + \frac{1}{3\cdot 31^3} + \dots\right] = 2P,$$
$$\log 25 - \log 24 = 2\left[\frac{1}{49} + \frac{1}{3\cdot 49^3} + \dots\right] = 2Q,$$
$$\log 81 - \log 80 = 2\left[\frac{1}{161} + \frac{1}{3\cdot 161^3} + \dots\right] = 2R,$$

где ряды, обозначенные через P, Q, R, сходятся весьма быстро. Эти равенства дают нам уравнения

$$4\log 2 - \log 3 - \log 5 = 2P,$$
$$-3\log 2 - \log 3 + 2\log 5 = 2Q,$$

$$-\log 2 + 4\log 3 - \log 5 = 2R$$

для определения чисел $\log 2$, $\log 3$, $\log 5$, решая которые, найдем без труда

$$\begin{aligned}\log 2 &= 14P + 10Q + 6R,\\ \log 3 &= 22P + 16Q + 10R,\\ \log 5 &= 32P + 24Q + 14R.\end{aligned}$$

Полученные таким путем логарифмы будет натуральными; с их помощью мы находим модуль M десятичной системы логарифмов:

$$M = \frac{1}{\log 10} = 0,434\,294\,4819\ \ldots,$$

зная который, можем от натуральных логарифмов переходить к десятичным по формуле

$$\log_{10} x = M \log x.$$

Аналогичным путем, пользуясь разложениями на множители

$$\begin{aligned}
a &= 2400 = 100 \cdot 2^8 \cdot 3, & a + z &= 2\,401 = 7^4,\\
a &= 9800 = 100 \cdot 2 \cdot 7^2, & a + z &= 9\,801 = 3^4 \cdot 11^2,\\
a &= 123\,200 = 100 \cdot 2^4 \cdot 7 \cdot 11, & a + z &= 123\,201 = 3^6 \cdot 13^2,\\
a &= 2\,600 = 100 \cdot 2 \cdot 13, & a + z &= 2601 = 3^2 \cdot 17^2,\\
a &= 28\,899 = 3^2 \cdot 13^2 \cdot 19 & a + z &= 28\,900 = 100 \cdot 17^2,
\end{aligned}$$

мы вычислим $\log 7$, $\log 11$, $\log 13$, $\ldots$

Определив логарифмы простых чисел, мы уже без помощи рядов, а только одними сложениями и умножениями на целые множители определим и логарифмы составных чисел, которые, как известно, всегда можно разложить на простые множители.

133. Разложение arctg x. Здесь мы будем поступать так же, как и при разложении $\log(1 + x)$. Мы имеем

$$d \operatorname{arctg} t = \frac{dt}{1 + t^2}.$$

Получаем, интегрируя,

$$\int\limits_0^x \frac{dt}{1 + t^2} = \operatorname{arctg} t\Big|_0^x = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 0 = \operatorname{arctg} x,$$

где $\operatorname{arctg} x$, как и в примере из [98], имеет главное значение. Мы имеем, следовательно,

$$\operatorname{arctg} x = \int\limits_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int\limits_0^x \left[1 - t^2 + t^4 - \ldots + (-1)^{n-1} t^{2n-2} + \right.$$
$$\left. + \frac{(-1)^n t^{2n}}{1+t^2}\right] dt = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1} + R_n(x),$$

где

$$R_n(x) = (-1)^n \int\limits_0^x \frac{t^{2n} dt}{1+t^2}. \tag{42}$$

Ряд

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots,$$

для которого отношение

$$\left|\frac{u_n}{u_{n-1}}\right| = \frac{2n-3}{2n-1} x^2 \to x^2 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

наверно, расходится при $x^2 > 1$; нам поэтому достаточно ограничиться случаем $x^2 \leqslant 1$, т. е.

$$-1 \leqslant x \leqslant +1. \tag{43}$$

Считая сначала $0 < x \leqslant 1$, из формулы (42), в силу VII [95], получим:

$$|R_n(x)| = \int\limits_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt < \int\limits_0^x t^{2n} dt = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \leqslant \frac{1}{2n+1} \to 0 \ (n \to \infty),$$

так как, очевидно,

$$\frac{t^{2n}}{1+t^2} < t^{2n}.$$

Если $x < 0$, то, вводя вместо t новую переменную, $t = -\tau$, получим

$$R_n(x) = (-1)^{n+1} \int_0^{-x} \frac{\tau^{2n}}{1+\tau^2} d\tau.$$

Здесь верхний предел $(-x)$ уже положителен, а потому опять имеет место указанная выше оценка для $|R_n(x)|$, т. е. разложение

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots \tag{44}$$

имеет место *при всех значениях x, не превосходящих единицу по абсолютному значению.*

В частности, при $x = 1$ получаем

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots$$

Ряд этот, ввиду весьма медленной сходимости, непригоден для вычисления числа π. Ряд (44) сходится тем быстрее, чем меньше x. Положим, например,

$$x = \frac{1}{5} \quad \text{и} \quad \varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5}.$$

Мы имеем

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\frac{2}{5}}{1 - \frac{1}{25}} = \frac{5}{12}, \quad \operatorname{tg} 4\varphi = \frac{\frac{5}{6}}{1 - \frac{25}{144}} = \frac{120}{119}.$$

Так как $\operatorname{tg} 4\varphi$ мало отличается от единицы, то угол 4φ мало отличается от $\frac{\pi}{4}$. Введем эту малую разность

$$\psi = 4\varphi - \frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{4} = 4\varphi - \psi.$$

Отсюда выводим

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg}\left(4\varphi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} 4\varphi - \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}}{1 + \operatorname{tg} 4\varphi \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{120}{119} - 1}{1 + \frac{120}{119}} = \frac{1}{239},$$

что дает

$$\frac{\pi}{4} = 4\varphi - \psi = 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{5} - \operatorname{arctg} \frac{1}{239} =$$

$$= 4\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5^7} + \ldots\right] - \left[\frac{1}{239} - \ldots\right].$$

Оба ряда в скобках — знакопеременные [123], а потому, ограничившись в каждом из них лишь написанными членами, мы сделаем ошибку, не превосходящую

$$\frac{4}{9\cdot 5^9} + \frac{1}{3\cdot 239^3} < 0,5\cdot 10^{-6}.$$

Желая получить π с точностью до 10^{-5}, мы будем вычислять отдельные члены с семью знаками, так как тогда ошибка при определении $\frac{\pi}{4}$ не превзойдет

$$4\cdot 4\cdot 0,5\cdot 10^{-7} + 0,5\cdot 10^{-7} + 0,5\cdot 10^{-6} < 2\cdot 10^{-6},$$

а ошибка при определении π не превзойдет $8\cdot 10^{-6}$.

Вычисление будем производить по следующей схеме:

$\frac{1}{5} = 0,200\,000\,0$	$\frac{1}{3\cdot 5^8} = 0,002\,666\,7$	
$\frac{1}{5\cdot 5^5} = 0,000\,064\,0$	$\frac{1}{7\cdot 5^7} = 0,000\,001\,8$	
$+0,200\,064\,0$	$-0,002\,668\,5$	$0,197\,395\,5$
		$\times\quad 4$
	$-\frac{1}{239} =$	$0,789\,582\,0$
		$-0,004\,184\,1$
		$0,785\,397\,9$
		$\times\quad 4$
	π	$\approx \mathbf{3,141\,5916}$

Значение числа π с восьмью знаками есть 3,141 591 65.

Можно получить при $|x| \leqslant 1$ разложение

$$\arcsin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \ldots + \\ + \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots\quad 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots \qquad (45)$$

134. Приближенные формулы. Ряд Маклорена, в случае его сходимости, дает возможность приближенно вычислять функцию $f(x)$, заменяя ее конечным числом членов разложения:

$$f(0) + \frac{xf'(0)}{1!} + \frac{x^2 f''(0)}{2!} + \dots$$

Чем меньше x, тем меньше членов можно брать в этом разложении для вычисления $f(x)$ с желаемой точностью. Если x весьма мало, то достаточно ограничиться только первыми двумя членами, отбросив все остальные. Таким образом получается *весьма простая приближенная формула для* $f(x)$, которая при малых x вполне может заменить часто весьма сложное точное выражение для $f(x)$.

Приведем такие приближенные формулы для наиболее важных функций:

$$\begin{aligned}
&\sqrt[n]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{n}, && \sin x \approx x,\\
&\frac{1}{\sqrt[n]{1+x}} \approx 1 - \frac{x}{n}, && \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2},\\
&(1+x)^n \approx 1 + nx, && \operatorname{tg} x \approx x,\\
&a^x \approx 1 + x\log a, && \log(1+x) \approx x.
\end{aligned}$$

Пользуясь этими приближенными формулами при x, близких к нулю (положительных или отрицательных), можно значительно упрощать сложные выражения.*

Примеры.

1. $$\left(\frac{1+\frac{m}{n^2}x}{1-\frac{n-m}{n^2}x}\right)^n = \frac{\left(1+\frac{m}{n^2}x\right)^n}{\left(1-\frac{n-m}{n^2}x\right)^n} \approx \left(1+\frac{m}{n}x\right)\left(1+\frac{n-m}{n}x\right) \approx$$
$$\approx 1 + \frac{m}{n}x + \frac{n-m}{n}x = 1 + x.$$

* Эти выражения принято называть соотношениями эквивалентности. Бесконечно малые величины стоящие слева и справа от знака приближенного равенства являются эквивалентными [36].

2. $\log\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} = \dfrac{1}{2}\log(1-x) - \dfrac{1}{2}\log(1+x) \approx -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}x = -x.$

3. Определить увеличение объема тела при нагревании (объемное расширение), когда известен коэффициент линейного расширения α. Если одни из линейных размеров тела при 0° есть l_0, то при нагревании до t° он будет

$$l = l_0(1+\alpha t).$$

α, коэффициент расширения, для большинства тел — весьма малая величина ($< 10^{-5}$). Так как объемы относятся, как кубы линейных размеров, можем писать

$$\frac{v}{v_0} = \frac{(1+\alpha t)^3}{1}; \quad v = v_0(1+\alpha t)^3 \approx v_0(1+3\alpha t),$$

т. е. число 3α дает нам коэффициент объемного расширения. Для плотности ρ, которая обратно пропорциональна объему, найдем аналогичную зависимость:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{(1+\alpha t)^3}, \quad \rho = \rho_0(1+\alpha t)^{-3} \approx \rho_0(1-3\alpha t).$$

Понятно, что все эти приближенные формулы годятся только при достаточно малых x, в противном же случае они оказываются уже неточными, и необходимо привлекать к рассмотрению дальнейшие члены разложения.

135. Максимумы, минимумы и точки перегиба. Формула Тейлора позволяет сделать существенное дополнение к правилу нахождения максимума и минимума функций, изложенному в [58]. В дальнейшем мы считаем, что $f(x)$ имеет непрерывные производные до порядка n в точке $x = x_0$ и ее окрестности.

Если при $x = x_0$ обращаются в нуль $(n-1)$ первых производных функции $f(x)$:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

причем n-я производная $f^{(n)}(x_0)$ отлична от нуля, значение x_0 соответствует вершине кривой, если n, т. е. порядок первой не обращающейся в нуль производной, есть число четное, и притом:

$$\textit{максимум, если} \quad f^{(n)}(x_0) < 0,$$

$$\textit{минимум, если} \quad f^{(n)}(x_0) > 0;$$

если же n есть число нечетное, то значение x_0 соответствует не вершине, а точке перегиба.

Для доказательства нужно рассмотреть разности

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \quad \text{и} \quad f(x_0 - h) - f(x_0),$$

где h — достаточно малое положительное число. По самому определению максимума и минимума [58] в точке x_0 будет максимум, если обе эти разности меньше нуля, минимум, если обе они больше нуля. Если же эти разности при сколь угодно малых положительных h будут разных знаков, то при x_0 не будет ни максимума, ни минимума. Разности же эти могут быть вычислены по формуле Тейлора, если подставить туда x_0 вместо a и $\pm h$ вместо[14]) h:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!}f'(x_0) + \ldots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0) + \\ + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0 + \theta h),$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - \frac{h}{1!}f'(x_0) + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(x_0) + \\ + \frac{(-1)^n h^h}{n!}f^{(n)}(x_0 - \theta_1 h)$$

$$(0 < \theta < 1 \quad \text{и} \quad 0 < \theta_1 < 1).$$

По условию:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0;$$

значит,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0 + \theta h),$$

[14]Остаточный член мы берем в форме Лагранжа; число θ, лежащее между нулем и единицей, при $(+h)$ и $(-h)$ не одно и то же, почему мы написали θ_1 во второй формуле.

$$f(x_0-h)-f(x_0)=\frac{(-1)^n h^n}{n!}f^{(n)}(x_0-\theta_1 h).$$

При достаточно малом положительном h множители $f^{(n)}(x_0+\theta h)$ и $f^{(n)}(x_0-\theta_1 h)$, в силу предполагаемой непрерывности $f^{(n)}(x)$, имеют одинаковый знак, а именно знак числа $f^{(n)}(x_0)$, отличного от нуля.

Мы видели, что точка x_0 может быть вершиной тогда и только тогда, когда обе разности $f(x_0\pm h)-f(x_0)$ одинакового знака, и в силу сказанного сейчас это может случиться только, если n число четное, ибо только тогда выражения $f(x_0\pm h)-f(x_0)$ будут иметь одинаковые знаки; в противном же случае, когда n нечетное, множители h^n и $(-1)^n h^n$ будут разных знаков, и исследуемые разности также будут разных знаков.

Допустим теперь, что n четное; тогда общий знак разностей $f(x_0\pm h)-f(x_0)$ совпадает со знаком $f^{(n)}(x_0)$. Если $f^{(n)}(x_0)<0$, то $f(x_0\pm h)-f(x_0)<0$, и мы имеем максимум; если же $f^{(n)}(x_0)>0$, то $f(x_0\pm h)-f(x_0)>0$, и получаем минимум.

Если n — число нечетное, то, во всяком случае, $n\geqslant 3$, для второй производной $f''(x)$ мы получаем из формулы Тейлора выражение:

$$f''(x_0+h)=\frac{h^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n)}(x_0+\theta_2 h),$$
$$f''(x_0-h)=\frac{(-1)^{n-2}h^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n)}(x_0-\theta_3 h),$$

откуда, рассуждая таким же образом, как и раньше, убеждаемся, что ввиду нечетности $(n-2)$ функция $f''(x)$, обращаясь в нуль при $x=x_0$, меняет знак, т. е. значение x_0 соответствует точке перегиба [71], что и требовалось доказать.

136. Раскрытие неопределенностей. Пусть имеем отношение функций

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)},$$

которые при $x=a$ обращаются в нуль. Для раскрытия неопреде-

ленного выражения

$$\left.\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right|_{x=a}$$

при $\varphi(a)=\psi(a)=0$ разлагаем числитель и знаменатель по формуле Тейлора:

$$\varphi(x)=(x-a)\varphi'(a)+\frac{(x-a)^2\varphi''(a)}{2!}+\ldots+\frac{(x-a)^n\varphi^{(n)}(a)}{n!}+ \\ +\frac{(x-a)^{n+1}\varphi^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!},$$

$$\psi(x)=(x-a)\psi'(a)+\frac{(x-a)^2\psi''(a)}{2!}+\ldots+\frac{(x-a)^n\psi^{(n)}(a)}{n!}+ \\ +\frac{(x-a)^{(n+1)}\psi^{(n+1)}(\xi_1)}{(n+1)!}$$

и, по сокращении рассматриваемого отношения на некоторую степень $(x-a)$, полагаем $x=a$.

Примеры.

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{e^{3x}-1-3x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\left(1-\dfrac{4x^2}{2}+\dfrac{16x^4}{24}+\ldots\right)}{\left(1+3x+\dfrac{9x^2}{2}+\dfrac{27}{6}x^3+\ldots\right)-1-3x}= \\ =\lim_{x\to 0}\frac{2-\dfrac{16}{24}x^2+\ldots}{\dfrac{9}{2}+\dfrac{27}{6}x+\ldots}=\frac{4}{9}.$$

Тот же прием приносит пользу и при раскрытии неопределенностей других видов. Рассмотрим один пример.

2. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^3-5x^2+1}-x)$.

Здесь мы имеем неопределенность вида $(\infty-\infty)$. Мы имеем

$$\sqrt[3]{x^3-5x^2+1}-x=x\left[\sqrt[3]{1-\frac{5x^2-1}{x^3}}-1\right]=$$

$$= x\left\{\left[1-\left(\frac{5}{x}-\frac{1}{x^3}\right)\right]^{1/3}-1\right\}.$$

При достаточно больших, по абсолютному значению, x разность $\left(\frac{5}{x}-\frac{1}{x^3}\right)$ близка к нулю, и мы можем применить формулу бинома Ньютона (25) при $m=\frac{1}{3}$, заменяя x на $-\left(\frac{5}{x}-\frac{1}{x^3}\right)$:

$$\left[1-\left(\frac{5}{x}-\frac{1}{x^3}\right)\right]^{1/3}=1-\frac{1}{3}\left(\frac{5}{x}-\frac{1}{x^3}\right)+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{5}{x}-\frac{1}{x^3}\right)^2+\ldots$$

Подставляя это в фигурную скобку и сокращая единицы, получим

$$\sqrt[3]{x^3-5x^2+1}-x=x\left[-\frac{1}{3}\left(\frac{5}{x}-\frac{1}{x^3}\right)+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{5}{x}-\frac{1}{x^3}\right)^2+\ldots\right]=$$
$$=\left(-\frac{5}{3}+\frac{1}{3x^2}\right)+\ldots,$$

где все невыписанные члены содержат только отрицательные степени x, т. е. в пределе при $x\to\infty$ обращаются в нуль, и, следовательно,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3-5x^2+1}-x\right)=-\frac{5}{3}.$$

Возможность предельных переходов в бесконечных рядах, которые мы применяем в настоящем номере, легко может быть оправдана, на чем мы не останавливаемся.

§ 14. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ РЯДОВ

137. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Понятие об абсолютно сходящемся ряде было дано в [124]. Теперь мы установим важнейшие его свойства:

Сумма абсолютно сходящегося ряда никак не зависит от порядка слагаемых.

Докажем это предложение сперва для рядов с неотрицательными членами, которые, как мы знаем [120], могут быть только или сходящимися (а потому и абсолютно сходящимися), или собственно расходящимися.

Итак, пусть дан сходящийся ряд с положительными (неотрицательными) членами

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{1}$$

Обозначим через s_n сумму его n первых членов, через s — его сумму. Мы имеем, очевидно,

$$s_n \leqslant s.$$

Переставив члены ряда (1) каким угодно образом, мы получим другое распределение членов, которому будет соответствовать ряд

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots, \tag{2}$$

состоящий из тех же членов, что и (1), но в другом порядке, так что каждый член из ряда (1) имеет определенный номер в ряде (2), и наоборот. Обозначим через σ_n сумму n первых членов ряда (2). При любом значении n можно найти настолько большое число m, чтобы все члены, входящие в сумму σ_n, вошли в s_m, а потому

$$\sigma_n \leqslant s_m \leqslant s.$$

Таким образом, показано существование постоянного числа s, не зависящего от n, такого, что при всех значениях n имеем

$$\sigma_n \leqslant s,$$

откуда [120] вытекает сходимость ряда (2). Обозначим через σ его сумму. Очевидно, что

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \sigma_n \leqslant s.$$

Переставив в предыдущих рассуждениях ряды (1) и (2), мы таким же путем покажем, что

$$s \leqslant \sigma,$$

и из неравенств $\sigma \leqslant s$, $s \leqslant \sigma$ вытекает

$$s = \sigma.$$

Обратимся теперь к рядам с какими угодно членами. Так как по условию ряд (1) абсолютно сходящийся, то ряд с положительными членами

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots = \sum_{n-1}^{\infty} |u_n| \tag{3}$$

сходится и по доказанному сумма его s' не зависит от порядка слагаемых. С другой стороны, оба ряда

$$\sum_{n-1}^{\infty} \frac{1}{2}(|u_n| + u_n), \quad \sum_{n-1}^{\infty} \frac{1}{2}(|u_n| - u_n)$$

(ср. [124]) также имеют положительные члены и также сходятся, так как общий член каждого из них не превосходит $|u_n|$, т. е. общего члена сходящегося ряда (3).

В силу доказанного каждый из них не зависит от порядка членов; не будет зависеть от порядка членов и разность их, которая совпадает с суммой ряда (1), что и требовалось доказать.

Следствие. *В абсолютно сходящемся ряде можно каким угодно образом группировать слагаемые и складывать их затем уже по группам*, ибо такая группировка приводит к перемене порядка слагаемых, отчего сумма ряда не изменится.

Замечание. Если из абсолютно сходящегося ряда выделить любую последовательность его членов, то полученный таким путем ряд также будет абсолютно сходящимся, так как такому выделению соответствует выделение последовательности членов в ряде (3) с положительными членами, что, очевидно, не нарушает сходимости этого ряда. В частности, будут сходящимися ряды, составленные в отдельности из положительных и отрицательных членов сходящегося ряда. Обозначим через s' сумму ряда, составленного из положительных членов, и через $(-s'')$ — сумму ряда, составленного из отрицательных членов. При беспредельном возрастании n сумма S_n первых n членов всего ряда может содержать сколь угодно много членов из обоих упомянутых рядов, и в пределе, очевидно, получим

$$s = \lim s_n = s' - s''.$$

Нетрудно показать, что когда ряд сходится не абсолютно, то ряды, составленные из его положительных и отрицательных членов, являются собственно расходящимися. Так, например, для неабсолютно сходящегося ряда [124]

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

ряды

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \dots \quad \text{и} \quad -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} - \dots$$

расходятся. Сумма n первых членов первого ряда стремится к $(+\infty)$, а второго ряда — к $(-\infty)$ при беспредельном возрастании n. Пользуясь указанным выше обстоятельством, Риман показал, что, меняя надлежащим

образом порядок членов неабсолютно сходящегося ряда, можно сделать его сумму равной какому угодно числу. Таким образом, оказывается, что понятие об абсолютно сходящемся ряде тождественно с понятием о ряде, сумма которого не зависит от порядка слагаемых.

Заметим еще, что если мы в каком-нибудь сходящемся (не обязательно абсолютно сходящемся) ряде переставим местами конечное число слагаемых, то суммы первых n членов s_n останутся при всех достаточно больших n теми же, т. е. сходимость ряда не нарушится, и сумма ряда останется прежней. Предыдущее же рассуждение и результаты относятся и к тому случаю, когда переставляют бесконечное число слагаемых.

138. Умножение абсолютно сходящихся рядов. *При перемножении двух абсолютно сходящихся бесконечных рядов можно применять правило умножения конечных сумм: произведение равно суме ряда, который получим, если каждый член одного ряда умножим на каждый член другого и полученные произведения сложим. Порядок слагаемых здесь безразличен, так как построенный таким путем ряд будет также абсолютно сходящимся.*

Данные абсолютно сходящиеся ряды пусть будут

$$\left.\begin{aligned} s &= u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \\ \sigma &= v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots \end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

Рассмотрим сперва частный случай, когда оба они с положительными членами, и притом когда само умножение совершается следующим порядком:

$$u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + u_1v_3 + u_2v_2 + u_3v_1 + \ldots + \\ + u_1v_n + u_2v_{n-1} + \ldots + u_nv_1 + \ldots \tag{5}$$

Покажем, прежде всего, что ряд (5), все члены которого также положительны, сходится, а затем уже, что его сумма S равна $s\sigma$.

Обозначим через S_n сумму n первых членов ряда (5). Можно всегда выбрать настолько большое число m, чтобы все члены, входящие в состав S_n, вошли и в произведение сумм:

$$s_m = u_1 + u_2 + \ldots + u_m, \quad \sigma_m = v_1 + v_2 + \ldots + v_m,$$

т. е. чтобы оказалось $S_n \leqslant s_m\sigma_m$, т. е.

$$S_n \leqslant s\sigma, \tag{6}$$

так как $s_m \leqslant s$, $\sigma_m \leqslant \sigma$, откуда и следует сходимость ряда (5) [120].

Обозначив сумму ряда (5) через S, из неравенства (6), очевидно, имеем

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n \leqslant s\sigma.$$

Рассмотрим теперь произведение $s_n\sigma_n$. При данном n, очевидно, можно найти настолько большое m, чтобы все члены, входящие в состав произведения сумм s_n и σ_n, вошли в сумму S_m; мы получим тогда

$$s_n\sigma_n \leqslant S_m \leqslant S,$$

а потому и в пределе, $n \to \infty$,

$$s_n\sigma_n \to s\sigma \leqslant S. \tag{7}$$

Неравенство это в соединении с (6) дает $S = s\sigma$, что и требовалось доказать.

Пусть теперь ряды (4) — абсолютно сходящиеся, но с какими угодно членами. Следовательно, сходятся ряды с положительными членами

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots \quad \text{и} \quad |v_1| + |v_2| + \ldots + |v_n| + \ldots,$$

а потому, в силу только что доказанного, сходится и ряд

$$|u_1||v_1| + |u_2||v_1| + |u_1||v_2| + |u_2||v_2| + \ldots + \\ + |u_1||v_n| + \ldots + |u_n||v_1| + \ldots$$

Отсюда видно, что составленный по предыдущему правилу ряд (5) будет в этом случае абсолютно сходящимся. Обозначим теперь через

$$a_1',\ a_2',\ \ldots,\ a_n',\ \ldots;\ a_1'',\ a_2'',\ \ldots,\ a_n'',\ \ldots,$$
$$b_1',\ b_2',\ \ldots,\ b_n',\ \ldots;\ b_1'',\ b_2'',\ \ldots,\ b_n''\ldots$$

соответственно положительные члены рядов (4) и абсолютные значения отрицательных членов. Мы знаем (замечание [137]), что ряды, составленные из этих членов, сходятся; положим

$$s' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n', \quad \sigma' = \sum_{n=1}^{\infty} b_n', \quad s'' = \sum_{n=1}^{\infty} a_n'', \quad \sigma'' = \sum_{n=1}^{\infty} b_n''. \tag{8}$$

Как известно [137], мы имеем

$$s = s' - s'', \quad \sigma = \sigma' - \sigma''.$$

Как показано, ряды (8) с положительными членами можно почленно перемножать между собой; сумма произведений рядов

$$s'\sigma', \quad s''\sigma'', \quad -s'\sigma'', \quad -s''\sigma'$$

содержит как раз те и только те члены, которых входят в ряд (5), а потому имеем

$$S = s'\sigma' + s''\sigma'' - s'\sigma'' - s''\sigma' = (s' - s'')(\sigma' - \sigma'') = s\sigma,$$

что и требовалось доказать.

Пример. Ряд

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + \ldots = \frac{1}{1-q}$$

сходится абсолютно при $|q| < 1$, а потому

$$\frac{1}{(1-q)^2} = (1 + q + \ldots + q^{n-1} + \ldots)(1 + q + \ldots + q^{n-1} + \ldots) = \\ = 1 + 2q + 3q^2 + \ldots + nq^{n-1} + \ldots$$

139. Признак Куммера. Признаки Коши и Даламбера сходимости и расходимости рядов [121], при всей их практической важности, все же являются весьма частными и неприменимы во многих даже сравнительно простых случаях. Проводимый ниже признак обладает гораздо большей общностью.

Признак Куммера. *Ряд с положительными членами*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \tag{9}$$

сходится, если существует такая последовательность положительных чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$, что, начиная с некоторого значения n, было всегда

$$\alpha_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - \alpha_{n+1} \geqslant \alpha > 0, \tag{10}$$

где α — некоторое положительное число, не зависящее от n; ряд (9) расходится, если при тех же значениях n:

$$\alpha_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - \alpha_{n+1} \leqslant 0, \tag{11}$$

и, кроме того, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n}$ — *расходящийся.*

Не ограничивая общности, мы можем считать, что условия теоремы выполняются, уже начиная с $n = 1$. Пусть сперва выполнено условие (10). Мы выводим из него, положив $n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$

$$\alpha_1 u_1 - \alpha_2 u_2 \geqslant \alpha u_2,\ \alpha_2 u_2 - \alpha_3 u_3 \geqslant \alpha u_3,\ \ldots,\ \alpha_{n-1} u_{n-1} - \alpha_n u_n \geqslant \alpha u_n,$$

откуда, складывая почленно и приводя подобные члены, находим

$$\alpha(u_2 + \ldots + u_n) \leqslant \alpha_1 u_1 - \alpha_n u_n < \alpha_1 u_1.$$

Мы видим отсюда, что ряд (9) с положительными членами, сумма n первых членов которого без u_1 остается меньше постоянного числа $\frac{\alpha_1 u_1}{\alpha}$, не зависящего от n, сходится [120].

Пусть теперь выполнено условие (11). Оно дает нам

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{\dfrac{1}{\alpha_{n+1}}}{\dfrac{1}{\alpha_n}},$$

т. е. отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ не меньше соответствующего отношения членов расходящегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n}.$$

Расходимость ряда (9) будет следовать тогда из следующей леммы о рядах с положительными членами:

Дополнение к признаку Даламбера. *Если, начиная с некоторого значения n, отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ не превосходит соответствующего отношения $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ членов сходящегося ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n, \tag{12}$$

то и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{13}$$

сходится. Если же отношение $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ остается не меньшим соответствующего отношения членов расходящегося ряда (12), *то и ряд* (13) — *расходящийся.*

Действительно, пусть сперва имеем

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{v_{n+1}}{v_n},$$

причем ряд (12) сходится. Мы имеем последовательно

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} \leqslant \frac{v_n}{v_{n-1}}, \ \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \leqslant \frac{v_{n-1}}{v_{n-2}}, \ \ldots \ \frac{u_2}{u_1} \leqslant \frac{v_2}{v_1},$$

откуда, перемножая, находим

$$\frac{u_n}{u_1} \leqslant \frac{v_n}{v_1}, \quad \text{или} \quad u_n \leqslant \frac{u_1}{v_1} v_n.$$

Из последнего равенства и замечания в [120] $\left(\text{при } k = \frac{u_1}{v_1}\right)$ следует сходимость ряда (13). Аналогичным образом можно доказать и расходимость его, в случае, если $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$ и ряд (12) расходится.

140. Признак Гаусса. Весьма важные применения имеет и следующий

Признак Гаусса[15]. *Если в ряде с положительными членами* (9)

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

отношение $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ *можно представить в виде*

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{\mu}{n} + \frac{\omega_n}{n^p}, \quad \text{где} \quad p > 1 \quad \text{и} \quad |\omega_n| < A, \tag{14}$$

причем A не зависит от n, т. е. величина ω_n остается ограниченной, то ряд (9) сходится, если $\mu > 1$, и расходится, если $\mu \leqslant 1$.

Заметим, что во всех случаях, исчерпываемых этим признаком, признак Даламбера неприменим [121]. Сама же формула (14) получается при разложении отношения $\frac{u_n}{u_{n+1}}$ по степеням $\frac{1}{n}$, т. е. при выделении членов различных порядков малости относительно $\frac{1}{n}$, конечно, если это возможно.

Переходя к доказательству, мы исследует отдельно случаи: 1) $\mu \neq 1$ и 2) $\mu = 1$. В случае 1) мы положим в признаке Куммера $\alpha_n = n$, причем заметим, что $\alpha_n > 0$ и ряд $\sum \frac{1}{n}$ расходится [119]. Мы имеем, очевидно, в данном случае

$$\lim_{n\to\infty} \left[\alpha_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - \alpha_{n+1}\right] = \lim_{n\to\infty} \left[n\left(1 + \frac{\mu}{n} + \frac{\omega_n}{n^p}\right) - n - 1\right] = \mu - 1.$$

[15] В сущности, обобщение признака, действительно установленного Гауссом.

Если $\mu > 1$, то, начиная с некоторого значения n, будем иметь

$$\alpha_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - \alpha_{n+1} > \alpha > 0,$$

где α — любое положительное число, меньшее $\mu - 1$, и ряд (9) будет сходящимся. Если же $\mu < 1$, то, начиная с некоторого значения n, мы будем иметь

$$\alpha_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - \alpha_{n+1} < 0,$$

т. е. ряд (9) будет расходящимся [139]. В случае 2) мы имеем

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\omega_n}{n^p}.$$

Положим в признаке Куммера $\alpha_n = n \log n$ и составим ряд

$$\sum \frac{1}{\alpha_n} = \sum \frac{1}{n \log n}, \tag{15}$$

где суммирование можно начинать с любого целого положительного n, так как первые слагаемые не влияют на сходимость [118]. Докажем расходимость написанного ряда, пользуясь интегральным признаком Коши [122]. Нам надо доказать расходимость интеграла

$$\int\limits_{\alpha}^{\infty} \frac{dx}{x \log x} \quad (\alpha > 1).$$

Но мы имеем

$$\int\limits_{\alpha}^{\infty} \frac{dx}{x \log x} = \int\limits_{\alpha}^{\infty} \frac{d(\log x)}{\log x} = \int\limits_{\log \alpha}^{\infty} \frac{dt}{t} = \log(\log x)\Big|_{\alpha}^{\infty},$$

и функция $\log(\log x)$ беспредельно возрастает при возрастании x, т. е. написанный выше интеграл действительно расходится, а потому и ряд (15) расходится. Составим теперь разность $\alpha_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - \alpha_{n+1}$, пользуясь (14):

$$\alpha_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - \alpha_{n+1} = n\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{\omega_n}{n^p}\right) \log n - (n+1) \log(n+1) =$$

$$= (n+1) \log n + \frac{\omega_n \log n}{n^{p-1}} - (n+1) \log(n+1) =$$

$$= \frac{\omega_n \log n}{n^{p-1}} + (n+1)\log\left(1 - \frac{1}{n+1}\right). \quad (16)$$

Множитель ω_n остается по условию ограниченным, отношение же $\frac{\log n}{n^{p-1}}$ стремится к нулю при $n \to \infty$, так как по условию $p - 1 > 0$, и $\log n$ возрастает слабее любой положительной степени n (пример 2 из [66]). Если положить $\frac{1}{n+1} = -x$, то $x \to 0$, и второе слагаемое справа будет

$$(n+1)\log\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = -\frac{\log(1+x)}{x},$$

т. е. оно стремится к (-1) [38]. Мы видим, таким образом, что в данном случае ряд $\sum \frac{1}{\alpha_n}$ расходится и $\left(\alpha_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - \alpha_{n+1}\right) \to -1$ при $n \to \infty$, а потому, при достаточно больших n, будет: $\alpha_n \frac{u_n}{u_{n+1}} - \alpha_{n+1} < 0$, т. е. ряд (9) будет расходящимся [139], что и требовалось доказать.

Приведенные выше признаки сходимости могут применяться и к рядам с какими угодно членами, если заменить в них u_n на $|u_n|$. Но в этом случае они дают только возможность сказать, будет ли данный ряд *абсолютно сходящимся* или не будет таковым. Из них можно будет извлечь, вообще говоря, условие *абсолютной сходимости*, но не условие *расходимости*, так как мы знаем, что ряд может быть не абсолютно сходящимся, но и не расходящимся [124]. Таким путем мы получаем:

Дополнение к признаку Гаусса. *Ряд*

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \quad (17)$$

с какими угодно членами, для которого

$$\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| = 1 + \frac{\mu}{n} + \frac{\omega_n}{n^p}, \quad (18)$$

где $p > 1$ и $|\omega_n| < A$, будет абсолютно сходящимся при $\mu > 1$.

Нетрудно показать, что он будет расходящимся при $\mu < 0$. В самом деле, в этом случае мы имеем, принимая во внимание ограниченность ω_n,

$$\frac{\omega_n}{\mu n^{p-1}} \to 0, \quad 1 + \frac{\omega_n}{\mu n^{p-1}} \to 1 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

а потому, начиная с некоторого значения n, в силу условия $\mu < 0$,

$$\frac{\mu}{n} + \frac{\omega_n}{n^p} = \frac{\mu}{n}\left(1 + \frac{\omega_n}{\mu n^{p-1}}\right) < 0 \quad \text{и} \quad \left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| < 1,$$

т. е., начиная с этого значения n, члены ряда возрастают по абсолютному значению, и общий член ряда u_n не может стремиться к нулю при $n \to \infty$, т. е. ряд (17) будет расходящимся.

141. Гипергеометрический ряд. Применим предыдущие общие соображения к так называемому *гипергеометрическому ряду*, или *ряду Гаусса*:

$$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1!\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)}x^2 + \ldots + \\ + \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}x^n + \ldots \quad (19)$$

Некоторые функции, встречающиеся в приложениях, приводятся к таким рядам. Непосредственной подстановкой чисел α, β и γ легко проверить, например, следующие равенства

$$F(1,\ \beta,\ \beta;\ x) = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{1}{1-x},$$

$$F(-m,\ \beta,\ \beta;\ x) = (1+x)^m,$$

$$\left.\frac{F(\alpha,\ \beta,\ \beta;-x) - 1}{\alpha}\right|_{\alpha=0} = \log(1+x). \quad (20)$$

Для исследования сходимости ряда (19) составим отношение последующего члена к предыдущему

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)}x \to x \quad \text{при} \quad n \to \infty, \quad (21)$$

т. е. по следствию из [121] ряд (19) сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$. Остаются только случаи: 1) $x = 1$ и 2) $x = -1$. Заметим еще, что при всех достаточно больших n множители $(\alpha+n)$, $(\beta+n)$ и $(\gamma+n)$ будут положительными, так что при $x = 1$ все члены ряда при достаточно большом n имеют один и тот же знак, а при $x = -1$ получится при больших n знакопеременный ряд.

В первом случае имеем, разлагая по формуле прогрессии (считая n достаточно большим) и перемножая полученные абсолютно сходящиеся ряды почленно [138]:

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{(n+1)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)}{\left(1+\frac{\alpha}{n}\right)\left(1+\frac{\beta}{n}\right)} =$$

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\gamma}{n}\right)\left(1-\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha^2}{n^2}-\frac{\alpha^3}{n^3}+\ldots\right)\left(1-\frac{\beta}{n}+\frac{\beta^2}{n^2}-\frac{\beta^3}{n^3}+\ldots\right) =$$
$$= 1+\frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n}+\frac{\omega_n}{n^2},$$

где величина ω_n остается ограниченной. Далее, в рассматриваемом случае, отбросив достаточно большое число начальных членов в ряде

$$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ 1) = 1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}+\ldots+$$
$$+\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}+\ldots,$$

мы получим ряд с членами одного знака, применяя к которому признак Гаусса, получаем *абсолютную сходимость при*

$$\gamma-\alpha-\beta+1>1, \quad \text{т. е.} \quad \gamma-\alpha-\beta\leqslant 0,$$

и расходимость при

$$\gamma-\alpha-\beta+1\leqslant 1, \quad \text{т. е.} \quad \gamma-\alpha-\beta\leqslant 0.$$

Во втором случае, при $x=-1$, мы получаем знакопеременный, начиная с некоторого члена, ряд

$$1-\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)}-\ldots+$$
$$+(-1)^n\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}+\ldots$$

Мы имеем здесь, как и раньше

$$\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| = 1+\frac{\gamma-\alpha-\beta+1}{n}+\frac{\omega_n}{n^2},$$

а потому, применяя дополнение к признаку Гаусса, получаем *сходимость при*

$$\gamma-\alpha-\beta+1>1, \quad \text{т. е.} \quad \gamma-\alpha-\beta>0,$$

и расходимость при

$$\gamma-\alpha-\beta+1<0, \quad \text{т. е.} \quad \gamma-\alpha-\beta<-1.$$

В случае

$$\gamma-\alpha-\beta=-1$$

можно показать, что общий член ряда стремится к пределу, отличному от нуля, т. е. ряд будет *расходящимся* [119]. Наконец, в случае

$$-1 < \gamma - \alpha - \beta \leqslant 0$$

можно доказать, что абсолютные значения членов ряда, убывая, стремятся к нулю при $n \to \infty$, т. е. [123] ряд будет *сходящимся*, но не абсолютно. На доказательстве этих двух последних утверждений мы останавливаться не будем.

Применяя это к разложению бинома

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \\ + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots,$$

которое получается из (19) ($\beta = \gamma$ — произвольно) заменой α на $(-m)$ и x на $(-x)$ и которое, как мы знаем, сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$, получим, что написанный ряд будет:

абсолютно сходиться	при $m > 0$,	если $x = -1$,
расходиться	при $m \leqslant 0$,	если $x = -1$,
абсолютно сходиться	при $m > 0$,	если $x = 1$,
не абсолютно сходиться	при $-1 < m \leqslant 0$,	если $x = 1$,
расходиться	при $m \leqslant -1$,	если $x = 1$,
обращаться в полином	при $m =$ целому	числу $\geqslant 0$.

Мы покажем дальше [149], что если ряд бинома сходится при $x = \pm 1$, то сумма его равна $(1 \pm 1)^m$, т. е., соответственно, 2^m или 0.

Заметим, что в предыдущем мы считали α, β и γ отличными от нуля и целого отрицательного числа. Для γ это важно, так как в противном случае члены ряда теряют смысл (знаменатель обращается в нуль), а если α или β есть нуль или целое отрицательное число, то ряд обрывается и превращается в конечную сумму.

142. Двойные ряды. Рассмотрим прямоугольную таблицу чисел, ограниченную сверху и слева, но уходящую в бесконечности направо и вниз

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad \ldots \quad n \quad \ldots$$

$$
\begin{array}{c|cccccc}
1 & u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} & \dots \\
2 & u_{21} & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} & \dots \\
3 & u_{31} & u_{32} & u_{33} & \dots & u_{3n} & \dots \\
. & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\mathrm{m} & u_{m1} & u_{m2} & u_{m3} & \dots & u_{mn} & \dots \\
. & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}
\tag{22}
$$

Она содержит бесчисленное множество *строк*, номера которых указываются первым значком, и *столбцов*, номера которых даются вторым значком при букве u. Таким образом u_{ik} означает число, стоящее в пересечении i-й строки с k-м столбцом таблицы.

Допустим сперва, что все числа u_{ik} *положительны.*

Для того чтобы определить понятие о сумме всех чисел таблицы (22), наметим в плоскости чертежа точки с целыми положительными координатами $M\ (i,\ k)$ и проведем ряд кривых

$$C_1,\ C_2,\ C_n,\ \dots,$$

пересекающих координатные оси в первом координатном углу и подчиненных лишь тому условию, чтобы *каждая* точка M при достаточно большом n попала внутрь площади (C_n), ограниченной кривой C_n и координатными осями (рис. 157), и чтобы площадь (C_n) заключалась внутри (C_{n+1}). Составим сумму S_n всех чисел U_{ik}, соответствующих точкам, попавшим внутрь площади (C_n). При возрастании n эта сумма, очевидно, будет возрастать, и поэтому могут представиться лишь два случая: или 1) сумма S_n остается ограниченной при всех значениях n, и тогда существует конечный предел

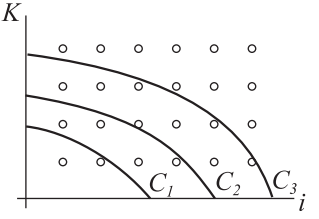

Рис. 157.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

или 2) сумма S_n при возрастании n беспредельно возрастает.

В случае 1) говорят, что двойной ряд

$$\sum_{i,\ k=1}^{\infty} u_{ik} \tag{23}$$

сходится и имеет сумму S. В случае 2) двойной ряд (23) называется расходящимся.

Сумма сходящегося ряда (23) с положительными членами не зависит от способа суммирования, т. е. от выбора кривых C_n, и может быть получена также путем суммирования ряда по строкам или столбцам

$$S = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_{ik}\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} u_{ik}\right), \tag{24}$$

т. е. вычислением сперва суммы всех членов каждой строки (или каждого столбца) таблицы, а затем сложением полученных сумм.

В самом деле, построим какую-нибудь другую систему кривых C'_1, C'_2, $\ldots$, C'_n, $\ldots$, обладающих тем же свойством, что C_1, C_2, $\ldots$, C_n $\ldots$. Обозначим через S'_n сумму всех чисел таблицы, соответствующих точкам, попавшим внутрь площади (C'_n). При заданном n можно всегда выбрать настолько большое m, чтобы площадь (C'_n) оказалась внутри (C_m), и тогда

$$S'_n \leqslant S_m \leqslant S,$$

т. е. в силу предыдущего существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} S'_n = S' \leqslant S.$$

Переменив роли кривых C_n и C'_n, мы точно так же докажем, что

$$S \leqslant S',$$

что возможно лишь при условии

$$S = S'.$$

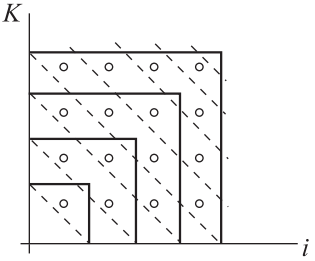

Рис. 158.

Сумму двойного ряда (23) можно получить, хотя бы взяв за C_n ломаные, составленные из отрезков прямых (рис. 158):

$$i = \text{const}, \quad k = \text{const}.$$

Мы получим таким путем суммирование «по квадратам»:

$$S = u_{11} + (u_{12} + u_{22} + u_{21}) + \ldots +$$
$$+ (u_{1n} + u_{2n} + \ldots + u_{nn} + u_{n,n-1} + \ldots + u_{n1} + \ldots$$

Суммируя же «по диагоналям», получим

$$S = u_{11} + (u_{12} + u_{21}) + (u_{13} + u_{22} + u_{31}) + \ldots + \\ + (u_{1n} + u_{2,n-1} + \ldots + u_{n1}) + \ldots \quad (25)$$

Для доказательства формул (24) заметим прежде всего, что сумма какого угодно числа членов таблицы (22) меньше S, а потому и сумма членов, стоящих в любой строке или в любом столбце, также всегда меньше S, откуда вытекает сходимость каждого из рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{ik} = s'_i \quad \sum_{k=1}^{\infty} u_{ik} = s''_k.$$

Мы имеем сверх того для любых конечных значений чисел m и n:

$$\left.\begin{aligned} s'_1 + s'_2 + \ldots + s'_m &= \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} u_{ik} \Big) \leqslant S \\ s''_1 + s''_2 + \ldots + s''_n &= \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} u_{ik} \Big) \leqslant S. \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

В самом деле, будем рассматривать только первые m строк таблицы (22). Взяв из них элементы первых p столбцов, мы имеем, очевидно,

$$\sum_{k=1}^{p} \Big(\sum_{i=1}^{m} u_{ik} \Big) \leqslant S.$$

По правилу сложения рядов [119] имеем

$$s'_1 + s'_2 + \ldots + s'_m = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{i=1}^{m} u_{ik} \Big) = \lim_{p \to \infty} \sum_{k=1}^{p} \Big(\sum_{i=1}^{m} u_{ik} \Big) \leqslant S,$$

так как выражение, стоящее под знаком предела, не больше S.

Аналогичным образом доказывается и второе из неравенств (26). Неравенства (26) показывают, что оба ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} u_{ik} \Big) = \sum_{i=1}^{\infty} s'_i = \sigma', \quad \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{i=1}^{\infty} u_{ik} \Big) = \sum_{k=1}^{\infty} s''_k = \sigma''$$

сходятся и имеют суммы, не превосходящие S, т. е.

$$\sigma' \leqslant S \quad \text{и} \quad \sigma'' \leqslant S.$$

С другой стороны, ясно, что при любом выборе системы кривых C_r, все члены, входящие в состав суммы S_r, войдут в состав обеих сумм

$$s_1' + s_2' + \ldots + s_m', \quad s_1'' + s_2'' + \ldots + s_m'',$$

при достаточно большом m, т. е.

$$S_r \leqslant s_1' + \ldots + s_m' \leqslant \sigma', \quad S_r \leqslant s_1'' + \ldots + s_m'' \leqslant \sigma'',$$

а потому и в пределе

$$S = \lim_{r\to\infty} S_r \leqslant \sigma' \quad \text{и} \quad S \leqslant \sigma''.$$

Ввиду $\sigma' \leqslant S$ и $\sigma'' \leqslant S$, это возможно лишь при условии

$$\sigma' = \sigma'' = S,$$

что и требовалось доказать.

Из двойных рядов с какими угодно членами мы остановимся только на *абсолютно сходящихся рядах,* т. е. таких, *для которых двойной ряд, составленный из абсолютных значений*

$$\sum_{i,\,k=1}^{\infty} |u_{ik}|,$$

сходится.

Применяя рассуждения, аналогичные рассуждениям [124], можем показать, что и *для таких рядов существует сумма*

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{i=1}^{\infty}\Big(\sum_{k=1}^{\infty} u_{ik}\Big) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{i=1}^{\infty} u_{ik}\Big), \tag{27}$$

которая также не зависит от способа суммирования и, в частности, может быть получена суммированием по строкам и по столбцам.

Замечание. Многие свойства абсолютно сходящихся простых рядов распространяются и на двойные абсолютно сходящиеся ряды; в частности, замечание из [124]: *если каждый член двойного ряда по абсолютному значению не превосходит члена сходящегося двойного ряда с положительными членами, то данный ряд абсолютно сходящийся.*

Точно так же распространяется свойство 2) из [120].

Примеры. **1.** Ряд

$$\sum_{i,\,k=1}^{\infty} \frac{1}{i^{\alpha} k^{\beta}} \tag{28}$$

сходится при $\alpha > 1$, $\beta > 1$, ибо, суммируя по квадратам, мы имеем

$$S_n = \sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{i^\alpha k^\beta}\Big) = \Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^\alpha}\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\beta}\Big) < AB,$$

где A и B обозначают сумму рядов

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^\alpha}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^\beta},$$

сходящихся при $\alpha > 1$, $\beta > 1$ [122].

2. Ряд

$$\sum_{i,\,k=1}^{\infty}\frac{1}{(i+k)^\alpha} \tag{29}$$

сходится при $\alpha > 2$ и расходится при $\alpha \leqslant 2$, так как, суммируя по диагоналям, мы имеем

$$S_n = \frac{1}{2^\alpha} + 2\cdot\frac{1}{3^\alpha} + \ldots + (n-1)\cdot\frac{1}{n^\alpha} = \\ = \frac{1}{2^{\alpha-1}}\left(1-\frac{1}{2}\right) + \ldots + \frac{1}{n^{\alpha-1}}\left(1-\frac{1}{n}\right),$$

откуда, подставляя вместо $\left(1-\frac{1}{n}\right)$ сначала $\frac{1}{2}$, т. е. меньшее число, а затем 1, т. е. большее число, находим

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right] < S_n < \frac{1}{2^{\alpha-1}} + \ldots + \frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

Сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha-1}}$ при $\alpha > 2$ и расходимость его при $\alpha \leqslant 2$ доказывают наше утверждение.

3. *Если a и c положительны* и $b^2 - ac < 0$, *то ряд*

$$\sum_{i,\ k=1}^{\infty}\frac{1}{(ai^2+2bik+ck^2)^p} \tag{30}$$

сходится при $p > 1$ и *расходится при $p \leqslant 1$.*

Пусть сперва $b \geqslant 0$. Так как, очевидно,

$$i^2 + k^2 \geqslant 2ik,^*$$

* Следует из того, что $(i-k)^2 = i^2 - 2ik + k^2 \geqslant 0$.

то, обозначив через A_1 меньшее из чисел a и c, через A_2 — большее из чисел a, b, c, имеем

$$2A_1ik \leqslant ai^2 + 2bik + ck^2 \leqslant A_2(i+k)^2,$$

откуда, ограничиваясь единственно интересным случаем $p > 0$, выводим

$$\frac{1}{A_2^p}\frac{1}{(i+k)^{2p}} \leqslant \frac{1}{(ai^2+2bik+ck^2)^p} \leqslant \frac{1}{(2A_1)^p}\frac{1}{i^pk^p},$$

что в силу примеров 1 и 2 сделанного выше замечания дает сходимость при $p > 1$ и расходимость при $p \leqslant 1$, причем существенно отметить, что множители $\frac{1}{A_2^p}$ и $\frac{1}{(2A_1)^p}$ от i и k не зависят.

Пусть теперь $b < 0$. Обозначив через A_0 большее из чисел a, c, $|b|$, в силу очевидного неравенства $(\sqrt{ai})^2 + (\sqrt{ck})^2 \geqslant 2\sqrt{acik}$:

$$2(b+\sqrt{ac})ik \leqslant ai^2 + 2bik + ck^2 < A_0(i+k)^2,$$

причем $b+\sqrt{ac} > 0$, так как по условию $|b| < \sqrt{ac}$. Дальше доказательство проводится так же, как и в случае $b > 0$.

143. Ряды с переменными членами. Равномерно сходящиеся ряды. Формулы Тейлора и Маклорена представляют примеры рядов, члены которых зависят от переменной x. Во второй части курса мы познакомимся с весьма важными *тригонометрическими* рядами, которые имеют вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

члены которых зависят также не только от n, но и от переменной x.

Мы займемся теперь, вообще, рядами с переменными членами, зависящими от некоторой независимой переменной x.

Пусть имеется бесконечная последовательность функций

$$u_1(x),\ u_2(x),\ u_3(x),\ \ldots,\ u_n(x), \ldots, \tag{31}$$

определенных в промежутке $(a,\ b)$. Составим из них ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{32}$$

Он может сходиться для каких-либо значений x из $(a,\ b)$ и расходиться для других x. Сумма первых n членов ряда (32) $s_n(x)$ есть, очевидно,

функция от x. Для значений x, при которых ряд (32) сходится, мы можем говорить о его сумме $s(x)$ и остатке $r_n(x) = s(x) - s_n(x)$. При этом

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x). \tag{33}$$

Если ряд (32) сходится при всех x из $(a,\ b)$, т. е. при $a \leqslant x \leqslant b$, то говорят, что он сходится в промежутке $(a,\ b)$.

Если ряд (32) сходится в промежутке $(a,\ b)$ и имеет сумму $s(x)$, то это значит, что при каждом данном значении x из (a, b), задав произвольно положительное число ε, можно найти такое число N, чтобы при всех значениях $n > N$ мы имели $|r_n(x)| < \varepsilon$ при $n > N$, причем, очевидно, это число N будет зависеть от выбора ε. Необходимо, однако, отметить, что N будет, вообще говоря, зависеть еще от выбранного значения x, т. е. может иметь различные значения при заданном ε и различном выборе x из промежутка $(a,\ b)$, и его мы будем обозначать через $N(x)$. *Если при любом данном положительном ε можно найти такое число N, не зависящее от x, чтобы при любом значении x из промежутка $(a,\ b)$ выполнялось неравенство*

$$|r_n(x)| < \varepsilon \tag{34}$$

при всех $n > N$, то ряд (32) *называют равномерно сходящимся в промежутке $(a,\ b)$.**

Рассмотрим, например, ряд

$$\frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)(x+2)} - \frac{1}{(x+2)(x+3)} - \ldots - \\ - \frac{1}{(x+n-1)(x+n)} - \ldots, \tag{35}$$

причем x меняется в промежутке $(0,\ a)$, где a — любое данное положительное число.

Нетрудно видеть, что ряд можно переписать так:

$$\frac{1}{x+1} - \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) - \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) - \ldots - \\ - \left(\frac{1}{x+n-1} - \frac{1}{x+n}\right) - \ldots,$$

так что в данном случае

$$s_n(x) = \frac{1}{x+n}, \quad s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = 0, \quad r_n(x) = -\frac{1}{x+n},$$

* Подчеркнем, что промежуток (a, b) является замкнутым.

и если мы хотим сделать

$$|r_n(x)| = \frac{1}{x+n} < \varepsilon, \tag{36}$$

то достаточно взять

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - x = N(x). \tag{37}$$

Если теперь мы хотим, чтобы неравенство (36) выполнялось при всех значениях x в промежутке $(0,\ a)$, при условии $n > N$, независимо от взятого значения x, то достаточно положить $N = \frac{1}{\varepsilon} \geqslant N(x)$, так как тогда неравенство (37), а потому и (36), при условии $n > N$, будет выполнено наверное при всех значениях x в промежутке $(0,\ a)$. Итак, ряд (35) будет равномерно сходящимся в промежутке $(0,\ a)$.

Не всякий ряд обладает свойством равномерной сходимости, так как не для всякого ряда можно указать не зависящее от x число N, которое было бы не меньше всех $N(x)$ в промежутке (a, b).

Рассмотрим, например, в промежутке $0 \leqslant x \leqslant 1$ ряд

$$x + x(x-1) + x^2(x-1) + \ldots + x^{n-1}(x-1) + \ldots \tag{38}$$

Сумма первых n членов будет

$$s_n(x) = x + (x^2 - x) + (x^3 - x^2) + \ldots + (x^n - x^{n-1}),$$

то есть

$$s_n(x) = x^n,$$

и, следовательно [26],

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x < 1$$

и

$$r_n(x) = s(x) - s_n(x) = -x^n \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x < 1.$$

При $x = 1$ мы имеем, подставляя в (38) $x = 1$, ряд

$$1 + 0 + 0 + \ldots,$$

то есть

$$s_n(x) = 1, \quad s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = 1, \quad r_n(x) = s(x) - s_n(x) = 0$$

при $x = 1$ и при любом n. Ряд (38) сходится во всем промежутке $0 \leqslant x \leqslant 1$, но в этом промежутке сходимость неравномерна. Действительно,

в силу $r_n(x) = -x^n$ при $0 \leqslant x < 1$, если мы хотим, чтобы выполнялось неравенство (34) $|r_n(x)| < \varepsilon$, то должно быть $x^n < \varepsilon$, т. е. $n \log x < \log \varepsilon$, или, деля на отрицательное число $\log x$, получим

$$n > \frac{\log \varepsilon}{\log x}.$$

Итак, в данном случае $N(x) = \frac{\log \varepsilon}{\log x}$ и не может быть заменено меньшим.

При приближении x к единице, $\log x \to 0$, функция $N(x)$ возрастает беспредельно, и нельзя указать такое значение N, чтобы неравенство (34) выполнялось при $n > N$ во всем промежутке $(0,\ 1)$. Вследствие этого обстоятельства, хотя ряд (38) и сходится во всем промежутке $(0,\ 1)$, в том числе и при $x = 1$, однако сходимость его будет все медленнее при приближении x к единице; для достаточного приближения к сумме ряда нужно будет брать все больше членов, чем ближе x будет к единице. Заметим, однако, что при самом значении $x = 1$ ряд просто обрывается на втором члене.

Укажем теперь другое определение равномерной сходимости, равносильное прежнему определению. Выше мы формулировали [125] необходимое и достаточное условие сходимости ряда. В рассматриваемом случае оно формулируется так: для сходимости ряда (32) в промежутке $(a,\ b)$ необходимо и достаточно, чтобы при любом заданном положительном ε и любом x из $(a,\ b)$ существовало такое N, что

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon \tag{39}$$

при $n > N$ и любом целом положительном p. Это N при заданном ε может зависеть еще от выбора x. *Если же при любом заданном положительном ε существует число N одно и то же для всех x из $(a,\ b)$ такое, что при $n > N$ и любом целом положительном p выполняется* (39), *то говорят, что ряд* (32) *сходится равномерно в промежутке* $(a,\ b)$.

Надо показать, что это новое определение равномерной сходимости равносильно прежнему определению, т. е. если ряд равномерно сходится в прежнем смысле, то он равномерно сходится и в новом смысле, и наоборот. Итак, пусть сначала ряд равномерно сходится в прежнем смысле, т. е. $|r_n(x)| < \varepsilon$ при $n > N$, где x — любое значение из $(a,\ b)$ и N не зависит от x. Мы имеем, очевидно

$$u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x) = r_n(x) - r_{n+p}(x) \tag{40}$$

и, следовательно,

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| \leqslant |r_n(x)| + |r_{n+p}(x)|,$$

что при $n > N$ и, следовательно, $n + p > N$ дает

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < 2\varepsilon. \tag{41}$$

Ввиду произвольного выбора ε мы видим, что ряд равномерно сходится в новом смысле. Положим теперь, что ряд равномерно сходится в новом смысле, т. е. что выполнено неравенство (39) при $n > N$, не зависящем от x, любом целом положительном p и любом x из $(a,\ b)$. Из этого следует, что ряд сходится, и мы можем образовать

$$r_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots = \lim_{p\to\infty}[u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)],$$

причем из неравенства (39) при $p \to \infty$ получаем в пределе $|r_n(x)| \leqslant \varepsilon$ при $n > N$, т. е. из нового определения равномерной сходимости, в силу произвольности ε, вытекает прежнее, и равносильность обоих определений доказана.

Отметим, что при первом определении равномерной сходимости (34) мы используем $r_n(x)$ и тем самым уже дополнительно предполагаем, что ряд сходится. Второе определение равномерной сходимости (39) включает и самый факт сходимости ряда.

144. Равномерно сходящиеся последовательности функций. Последовательность функций

$$s_1(x), \quad s_2(x), \quad s_n(x), \ \ldots, \tag{42}$$

которую мы рассматривали выше, была определена с помощью ряда (32); $s_n(x)$ означала сумму n первых членов ряда. Но можно рассматривать последовательность (42) саму по себе, считая ее данной, и уже по ней построить ряд, суммой n первых членов которого является n-й член последовательности $s_n(x)$. Члены этого ряда определяются, очевидно, по формулам:

$$u_1(x) = s_1(x),\ u_2(x) = s_2(x) - s_1(x),\ \ldots,\ u_n(x) = s_n(x) - s_{n-1}(x),\ \ldots \tag{43}$$

Очень часто последовательность (42) бывает проще (43), как это имело место и в рассмотренных примерах.

Таким путем мы приходим к понятиям о сходящейся и равномерно сходящейся последовательности функций:

Если дана последовательность функций (42):

$$s_1(x), \quad s_2(x), \quad \ldots, \quad s_n(x), \ \ldots, \tag{44}$$

определенных в промежутке $(a,\ b)$, *и если при каждом значении* x *в этом промежутке существует предел*

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x), \tag{44}$$

то последовательность (42) называется сходящейся в промежутке $(a,\ b)$, *функция же* $s(x)$ *называется предельной функцией последовательности* (42).*[18]

Если, сверх того, при любом данном наперед положительном ε *существует такое число* N, *не зависящее от* x, *что неравенство:*

$$|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon \tag{45}$$

имеет место при всех значениях $n > N$ *во всем промежутке* $(a,\ b)$, *то последовательность* (42) *называется равномерно сходящейся в промежутке* $(a,\ b)$. *Условие (45) можно заменить равносильным ему*

$$|s_m(x) - s_n(x)| < \varepsilon \tag{46}$$

при m *и* $n > N$.

Условие равномерной сходимости последовательности (42) *равносильно условию равномерной сходимости ряда*

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots, \tag{47}$$

где (43):

$$u_1(x) = s_1(x),\ u_2(x) = s_2(x) - s_1(x),\ \ldots,\ u_n(x) = s_n(x) - s_{n-1}(x),\ \ldots$$

Равносильность условий (45) и (46) при исследовании равномерной сходимости последовательностей может быть доказана совершенно так же, как выше была установлена равносильность условий (35) и (36) для бесконечных рядов. Отметим еще, что из равномерной сходимости $s_n(x)$ в промежутке $(a,\ b)$ непосредственно следует и равномерная сходимость в любой части $(a,\ b)$.

Понятие о равномерной сходимости последовательностей может быть истолковано и геометрически. Если мы изобразим графически функции $s(x)$ и $s_n(x)$ при различных значениях n, то для равномерно сходящейся последовательности наибольший отрезок ординаты, заключенной между

[18]* В данном случае речь идет о поточечной сходимости функциональной последовательности так как предел (44) рассматривается при каждом значении переменной x как предел обычной числовой последовательности.

кривыми $s_n(x)$ и $s(x)$, должен стремиться к нулю, при $n \to \infty$ для всех x из $(a,\ b)$; для неравномерно сходящейся последовательности это условие не будет выполнено.

Обстоятельство это наглядно проверяется на рис. 159 и 160, сделанных [16] для разобранных выше примеров:

$$s_n(x) = \frac{1}{x+n}, \quad s_n(x) = x^n.$$

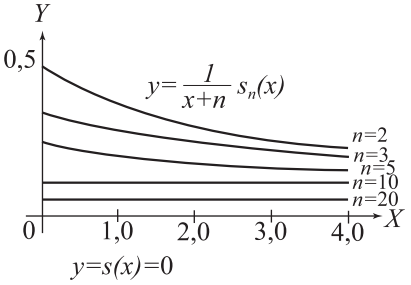

Рис. 159.

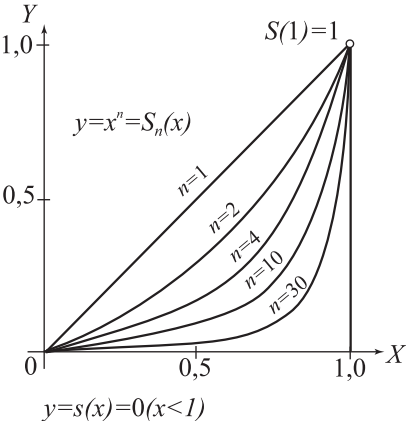

Рис. 160.

В случае рис. 160 предельная функция $s(x)$ графически изображается отрезком $(0,\ 1)$ оси OX, исключая точку 1, и отдельной точкой с координатами $(1,\ 1)$.

Правда, в последнем примере предельная функция $s(x)$ не непрерывна. Но нетрудно привести пример сходящейся последовательности, предельная функция которой непрерывна, но которая тем не менее сходится неравномерно. Таким свойством обладает хотя бы последовательность (рис. 161)

$$s_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \quad (0 \leqslant x \leqslant a). \tag{48}$$

Мы имеем, очевидно, при $x \neq 0$:

$$\frac{nx}{1+n^2x^2} = \frac{1}{n}\frac{x}{\frac{1}{n^2}+x^2}$$

[16] Для большей наглядности рис. 159 и 160 выполнены в разных масштабах для x и y.

и, при $n \to \infty$, первый множитель справа $\frac{1}{n} \to 0$, а второй стремится к $\frac{1}{x}$, т. е. $s_n(x) \to 0$ при $x \neq 0$. При $x = 0$, очевидно, $s_n(0) = 0$ при всяком n, и, следовательно, при всех x из $(0,\ a)$, где a — некоторое положительное число,

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = 0.$$

Однако максимальная величина отрезка ординаты между кривыми $s_n(x)$ и $s(x)$, которая в рассматриваемом случае приводится просто к ординате кривой $s_n(x)$ так как $s(x) = 0$, будет $\frac{1}{2}$ $\left(\text{и будет соответствовать значению } x = \frac{1}{n}\right)$. Так как она не стремится к нулю при $n \to \infty$, то последовательность (48) не будет равномерно сходящейся в промежутке $(0,\ a)$; и, действительно, если мы хотим, чтобы было

$$|s(x) - s_n(x)| = \frac{nx}{1 + n^2x^2} < \varepsilon,$$

то, решая относительно n неравенство 2-й степени

$$0 < 1 - \frac{x}{\varepsilon}n + x^2n^2$$

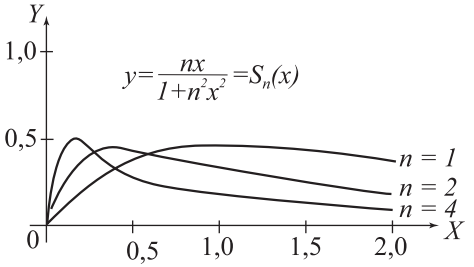

Рис. 161.

и считая ε достаточно малым, получим

$$n > \frac{1}{2x\varepsilon}[1 + \sqrt{1 - 4\varepsilon^2}] = N(x).$$

Функция эта возрастает беспредельно при $x \to 0$, что и обуславливает неравномерную сходимость последовательности.

Заметим, наконец, что те же рис. 160 и 161 показывают, что последовательность x^n равномерно сходится в промежутке $(0,\ q)$, где q — любое положительное число, меньшее единицы, а последовательность $\frac{nx}{1+n^2x^2}$ равномерно сходится в промежутке $(q,\ a)$, где $0 < q < a$, в чем нетрудно убедиться и непосредственным вычислением.

145. Свойства равномерно сходящихся последовательностей. 1. *Предельная функция равномерно сходящейся в промежутке* $(a,\ b)$ *последовательности непрерывных функций также непрерывна.*

Пусть

$$s_1(x), \quad s_2(x), \ldots, \quad s_n(x), \quad \ldots$$

— данная последовательность функций, причем все они непрерывны в промежутке $(a,\ b)$, и пусть

$$s(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$$

ее предельная функция. Нам нужно доказать, что, задав наперед сколь угодно малое положительное число ε, можно найти такое число δ, чтобы было [35]:

$$|s(x+h) - s(x)| < \varepsilon, \quad \text{если} \quad |h| < \delta, \tag{49}$$

при условии, что оба числа x и $x+h$ лежат в промежутке $(a,\ b)$. Мы можем писать при любом n:

$$\begin{aligned} &|s(x+h) - s(x)| = \\ &\quad = |[s(x+h) - s_n(x+h)] + [s_n(x+h) - s_n(x)] + [s_n(x) - s(x)]| \leqslant \\ &\qquad \leqslant |s(x+h) - s_n(x+h)| + |s(x) - s_n(x)| + |s_n(x+h) - s_n(x)|. \end{aligned}$$

В силу определения равномерной сходимости мы можем выбрать n настолько большим, чтобы во всем промежутке $(a,\ b)$, в том числе и при значениях x и $x+h$, было

$$|s(x+h) - s_n(x+h)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |s(x) - s_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Выбрав так n и фиксировав его, в силу непрерывности функции $s_n(x)$ [35], мы можем найти такое число δ, чтобы было

$$|s_n(x+h) - s_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{если} \quad |h| < \delta.$$

Сопоставив все эти неравенства, мы и получим неравенство (49).

Если последовательность функций сходится неравномерно, то предельная функция может и не быть непрерывной, примером чего может служить хотя бы последовательность x^n в промежутке $(0,\ 1)$.

Обратное утверждение, однако, неверно, — и для неравномерно сходящейся последовательности предельная функция может быть непрерывной, например, для последовательности:

$$\frac{nx}{1+n^2x^2}.$$

2. *Если*

$$s_1(x), \quad s_2(x), \quad \ldots, \quad s_n(x), \quad \ldots$$

есть равномерно сходящаяся последовательность непрерывных в промежутке $(a,\ b)$ *функций и* $(\alpha,\ \beta)$ — *любой промежуток, лежащий в* $(a,\ b)$, *то*

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} s_n(x)dx \to \int\limits_{\alpha}^{\beta} s(x)dx, \quad n \to \infty \tag{50}$$

или, иначе,

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\alpha}^{\beta} s_n(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \lim_{n\to\infty} s_n(x)dx. \tag{51}$$

Если пределы интегрирования переменные, например, $\beta = x$, *то последовательность функций*

$$\int\limits_{\alpha}^{x} s_n(t)dt \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots) \tag{52}$$

также сходится равномерно в промежутке $(a,\ b)$. Процесс этот называется *переходом к пределу под знаком интеграла.**

Заметим прежде всего, что в силу свойства 1) предельная функция $s(x)$ также непрерывна. Рассмотрим теперь разность

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} s(x)dx - \int\limits_{\alpha}^{\beta} s_n(x)dx = \int\limits_{\alpha}^{\beta} [s(x) - s_n(x)]dx.$$

Задав число ε, мы можем, в силу равномерной сходимости, найти такое число N, чтобы при всех значениях $n > N$, во всем промежутке $(a,\ b)$ мы имели

$$|s(x) - s_n(x)| < \varepsilon,$$

а потому [95], (10_1)

$$\Big|\int\limits_{\alpha}^{\beta} [s(x) - s_n(x)]dx\Big| \leqslant \int\limits_{\alpha}^{\beta} |s(x) - s_n(x)|dx| < \int\limits_{\alpha}^{\beta} \varepsilon dx = \varepsilon(\beta - \alpha) \leqslant \varepsilon(b - a).$$

Итак, для любого промежутка $(\alpha,\ \beta)$, заключающегося в $(a,\ b)$, имеем

$$\Big|\int\limits_{\alpha}^{\beta} s(x)dx - \int\limits_{\alpha}^{\beta} s_n(x)dx\Big| < \varepsilon(b - a)$$

* Такое действие также называется перестановкой знаков предела и интеграла.

при $n > N$. Правая часть неравенства не зависит от α и β и стремится к нулю, если $\varepsilon \to 0$. Ввиду произвольности ε мы можем формулировать результат так: при любом заданном положительном ε_1 существует N, не зависящее от α и β, такое, что

$$\Big|\int\limits_{\alpha}^{\beta} s(x)dx - \int\limits_{\alpha}^{\beta} s_n(x)dx\Big| < \varepsilon_1$$

при $n > N$. Отсюда непосредственно вытекает формула (50). Полагая $\beta = x$ и принимая во внимание независимость N от β, видим, что последовательность (52) сходится равномерно для всех x из $(a,\ b)$.

Для неравномерно сходящихся последовательностей эта теорема может оказаться и неверной. Пусть, например,

$$s_n(x) = nxe^{nx^2} \ \ (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

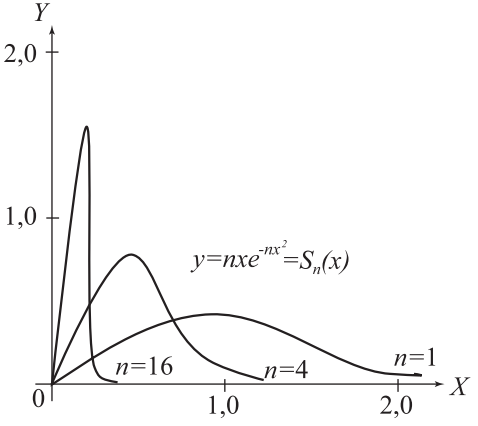

Рис. 162.

(рис. 162). Нетрудно показать, разбирая отдельно случаи $x > 0$ и $x = 0$, что при всяком x в промежутке $(0,\ 1)$

$$s_n(x) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

так что здесь $s(x) = 0$. Последовательность эта, однако, не может быть равномерно сходящейся, так как наибольшая ордината кривой $y = s_n(x)$, или, что то же самое, наибольшая величина разности $s_n(x) - s(x)$, которая получается при $x = \frac{1}{\sqrt{2n}}$, возрастает беспредельно при $n \to \infty$.

С другой стороны, мы имеем

$$\int\limits_0^1 s_n(x)dx = n\int_0^1 xe^{-nx^2}dx = -\frac{1}{2}e^{-nx^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1 - e^{-n}) \to \frac{1}{2},$$

в то время как

$$\int_0^1 s(x)dx = 0.$$

3. *Если функции последовательности*

$$s_1(x), \quad s_2(x), \quad \ldots, \quad s_n(x), \quad \ldots$$

имеют непрерывные производные

$$s_1'(x), \quad s_2'(x), \quad \ldots, \quad s_n'(x), \quad \ldots$$

в промежутке $(a,\ b)$, *причем последовательность* $s_n'(x)$ *равномерно сходится к предельной функции* $\sigma(x)$, *а последовательности* $s_n(x)$ *сходится к предельной функции* $s(x)$,* *то* $s_n(x)$ *также сходится равномерно и*

$$\sigma(x) = \frac{ds(x)}{dx}, \tag{53}$$

или иначе

$$\lim_{n\to\infty} \frac{ds_n(x)}{dx} = \frac{d\lim_{n\to\infty} s_n(x)}{dx}. \tag{54}$$

Процесс этот называется *переходом к пределу под знаком производной.*

Пусть α — любое постоянное, x — переменное значение на промежутке $(a,\ b)$. В силу свойства 2) мы имеем

$$\lim_{n\to\infty} \int_\alpha^x s_n'(x)dx = \int_\alpha^x \sigma(x)dx.$$

Но

$$\int_\alpha^x s_n'(x)dx = s_n(x) - s_n(\alpha) \to s(x) - s(\alpha),$$

а потому предыдущая формула дает

$$s(x) - s(\alpha) = \int_\alpha^x \sigma(x)dx.$$

* То есть сходится поточечно.

Дифференцируя это равенство и пользуясь известными свойствами определенного интеграла (свойство VII) [95], мы имеем

$$\frac{ds(x)}{dx} = \sigma(x),$$

что и требовалось доказать. Остается доказать равномерную сходимость последовательности $s_n(x)$. Имеем

$$s_n(x) = s_n(\alpha) + \int\limits_{\alpha}^{x} s_n'(x)dx.$$

Последовательность $s_n(\alpha)$ сходится и вовсе не содержит x. Последовательность $\int\limits_{\alpha}^{x} s_n'(x)dx$ сходится равномерно в силу свойства 2). Отсюда и вытекает равномерная сходимость $s_n(x)$, так как из определения равномерной сходимости непосредственно вытекает, что сумма двух равномерно сходящихся последовательностей есть также равномерно сходящаяся последовательность. Кроме того, всякая сходящаяся последовательность, члены которой не содержат x, как, например, $s_n(\alpha)$, подходит под определение равномерно сходящейся последовательности.

Заметим еще, что мы доказали равномерную сходимость $s_n(x)$ во всем промежутке $(a,\ b)$, используя лишь равномерную сходимость $s_n'(x)$ и сходимость $s_n(\alpha)$, и, следовательно, при формулировке последнего свойства достаточно потребовать сходимости $s_n(x)$ в одной точке $x = a$. Отсюда, как мы уже сказали, будет вытекать равномерная сходимость $s_n(x)$ во всем промежутке $(a,\ b)$.

146. Свойства равномерно сходящихся рядов. Если в предыдущих предложениях мы будем считать $s_n(x)$ суммой n первых членов данного ряда

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots,$$

а $s(x)$ — суммой всего ряда, то непосредственно получим аналогичные предложения для рядов с переменными членами.

1. *Если члены ряда*

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \tag{55}$$

непрерывные в промежутке $(a,\ b)$ *функции и ряд сходится равномерно, то и сумма его* $s(x)$ *есть непрерывная функция в промежутке* $(a,\ b)$.

2. *Если члены ряда (55) непрерывные в промежутке* $(a,\ b)$ *функции и ряд сходятся равномерно, то его можно почленно интегрировать между какими угодно пределами* $\alpha,\ \beta$, *лежащими в промежутке* $(a,\ b)$, *т. е.*

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\alpha}^{\beta} u_n(x)dx. \tag{56}$$

Если пределы интегрирования переменные, например, $\beta = x$, *то ряд, который получается почленным интегрированием*

$$\int\limits_{\alpha}^{x} u_1(x)dx + \int\limits_{\alpha}^{x} u_2(x)dx + \ldots + \int\limits_{\alpha}^{x} u_n(x)dx + \ldots, \tag{57}$$

также равномерно сходится в промежутке $(a,\ b)$.

3. *Если ряд* (55) *сходится в промежутке* $(a,\ b)$ *и его члены имеют непрерывные в промежутке* $(a,\ b)$ *производные* $u_1'(x),\ \ldots,\ u_n'(x),\ \ldots$, *причем ряд, составленный из производных*

$$u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots + u_n'(x) + \ldots,$$

сходится равномерно в промежутке $(a,\ b)$, *то и данный ряд сходится равномерно и его можно дифференцировать почленно, т. е.*

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{du_n(x)}{dx}.$$

При выводе эти предложений из теорем [145] надо только иметь в виду, что *указанные в предложениях свойства имеют*, как мы уже знаем, *место в случае конечного числа слагаемых.* Так, например, *если члены ряда* $u_n(x)$ *суть непрерывные функции, то и функции*

$$s_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$$

непрерывны при любом n [34].

147. Признаки равномерной сходимости. Укажем некоторые достаточные условия равномерной сходимости.

Ряд функций, определенных в промежутке $(a,\ b)$:

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots,$$

сходится равномерно в промежутке $(a,\ b)$, *если выполнено одно из следующих условий:*

(А) *Можно найти последовательность положительных постоянных*

$$M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_n,\ \ldots$$

таких, что

$$|u_n(x)| \leqslant M_n \quad \text{в промежутке} \quad (a,\ b) \tag{59}$$

и ряд

$$M_1 + M_2 + \ldots + M_n + \ldots \tag{60}$$

сходящийся (признак Вейерштрасса).

(Б) *Функции* $u_n(x)$ *могут быть представлены в виде*

$$u_n(x) = a_n v_n(x), \tag{61}$$

где $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$ *суть постоянные, такие, что ряд*

$$a_1 + a_2 + \ldots a_n + \ldots \tag{62}$$

сходится; функции же $v_1(x),\ \ldots,\ v_n(x),\ \ldots$ *все неотрицательны, остаются меньше постоянного положительного числа* M *и при каждом значении* x *в промежутке* $(a,\ b)$*:*

$$v_1(x) \geqslant v_2(x) \geqslant \ldots \geqslant v_n(x) \geqslant \ldots, \quad 0 \leqslant v_n(x) \leqslant M \tag{63}$$

(признак Абеля).

Доказательство (А). Так как ряд (60) сходится, то при данном ε можно найти такое число N, чтобы при всех $n > N$ и при всех p мы имели [125]:

$$M_{n+1} + M_{n+2} + \ldots + M_{n+p} < \varepsilon;$$

в силу же неравенств (59) и

$$|u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| \leqslant M_{n+1} + \ldots + M_{n+p} < \varepsilon,$$

откуда [143] и вытекает равномерная сходимость ряда (55).

Доказательство (Б). Положим

$$\sigma_p' = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} \quad (p = 1,\ 2, \ldots),$$

откуда непосредственно следует

$$a_{n+1} = \sigma_1' \quad \text{и} \quad a_{n+k} = \sigma_k' - \sigma_{k-1}' \quad (k > 1).$$

Оценим выражение

$$u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x) = \\ = a_{n+1}v_{n+1}(x) + a_{n+2}v_{n+2}(x) + \ldots + a_{n+p}v_{n+p}(x).$$

Подставляя вместо a_{n+k} их выражения через σ'_k и собирая члены с одинаковым σ'_k, получим

$$a_{n+1}v_{n+1}(x) + a_{n+2}v_{n+2}(x) + \ldots + a_{n+p}v_{n+p}(x) = \\ = \sigma'_1 v_{n+1}(x) + (\sigma'_2 - \sigma'_1)v_{n+2}(x) + \ldots + (\sigma'_p - \sigma'_{p-1})v_{n+p}(x) = \\ = \sigma'_1[v_{n+1}(x) - v_{n+2}(x)] + \ldots + \\ + \sigma'_{p-1}[v_{n+p-1}(x) - v_{n+p}(x)] + \sigma'_p v_{n+p}(x).$$

Принимая во внимание, что $v_{n+p}(x)$ и все разности $v_{n+k-1}(x) - v_{n+k}(x)$ по условию неотрицательны, можем написать

$$|u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| \leqslant \\ \leqslant |\sigma'_1|[v_{n+1}(x) - v_{n+2}(x)] + \ldots + |\sigma'_{p-1}|[v_{n+p-1}(x) - v_{n+p}(x)] + |\sigma'_p| v_{n+p(x)},$$

или, обозначая через σ' наибольшее из абсолютных значений $|\sigma'_1|,\ |\sigma'_2|,\ \ldots,\ |\sigma'_p|$

$$|u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| \leqslant \\ \leqslant \sigma'\{[v_{n+1}(x) - v_{n+2}(x)] + \ldots + [v_{n+p-1}(x) - v_{n+p}(x)] + v_{n+p}(x)\}$$

получаем, производя сокращения,

$$|u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| \leqslant \sigma' v_{n+1}(x). \tag{64}$$

Из определения σ'_k и сходимости ряда (62) вытекает, что для любого заданного положительного ε существует такое N, что при $n > N$ и всяком k мы имеем

$$|\sigma'_k| < \frac{\varepsilon}{M}, \quad \text{а потому и} \quad \sigma' < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Принимая во внимание еще, что по условию $0 \leqslant v_{n+p}(x) \leqslant M$, получаем в силу (64),

$$|u_{n+1}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon$$

при $n > N$ и любом p. Так как N не зависит от x, то отсюда и вытекает равномерная сходимость ряда (55) в промежутке $(a,\ b)$.

Примеры.

1. Ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^p}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^p} \quad (p > 1) \tag{65}$$

сходятся равномерно во всяком промежутке, так как при всяком x имеем:

$$\left|\frac{\cos nx}{n^p}\right| \leqslant \frac{1}{n^p}, \quad \left|\frac{\sin nx}{n^p}\right| \leqslant \frac{1}{n^p},$$

и ряд $\sum \frac{1}{n^p}$ при $p > 1$ сходящийся [122] (признак Вейерштрасса).

2. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} \tag{66}$$

равномерно сходится в промежутке $(0 \leqslant x \leqslant l)$ при любом l, так как, положив здесь

$$v_n(x) = \frac{1}{n^x},$$

удовлетворим всем условиям признака Абеля.

148. Степенные ряды. Радиус сходимости. Весьма важный пример приложения изложенной выше теории рядов с переменными членами представляют *степенные ряды*, т. е. ряды вида:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots, \tag{67}$$

с которыми мы уже встретились при исследовании формулы Маклорена. Подробное изучение свойств этих рядов относится к теории функций комплексной переменной, а потому здесь мы укажем только самые основные свойства.

Первая теорема Абеля. *Если степенной ряд* (67) *сходится при некотором значении $x = \xi$, то он сходится абсолютно при всех значениях x, для которых*

$$|x| < |\xi|. \tag{68}$$

Наоборот, *если он расходится при $x = \xi$, то расходится и при всех значениях x, для которых*

$$|x| > |\xi| = r. \tag{69}$$

Пусть сперва ряд

$$a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \ldots + a_n\xi^n + \ldots$$

сходится, тогда общий член сходящегося ряда должен стремиться к нулю, т. е.

$$a_n\xi^n \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

а потому можно найти такую постоянную M, чтобы при всех значениях n мы имели

$$|a_n\xi^n| \leqslant M.$$

Придадим теперь x любое значение, удовлетворяющее условию (68), и положим

$$q = \left|\frac{x}{\xi}\right| < 1.$$

Мы имеем, очевидно,

$$|a_n x^n| = \left|a_n\xi^n\frac{x^n}{\xi^n}\right| = |a_n\xi^n|\left|\frac{x}{\xi}\right|^n \leqslant Mq^n,$$

т. е. общий член ряда (67) при рассматриваемом значении x по абсолютной величине не превосходит общего члена бесконечно убывающей геометрической прогрессии, а потому ряд (67) сходится абсолютно [124].

Вторая часть теоремы очевидна, так как если бы ряд (67) сходился при некотором значении x, удовлетворяющим условию (69), то по доказанному сейчас он должен был бы сходиться при всяком ξ, для которого $|\xi| < |x|$, что противоречит условию.

Следствие. *Существует вполне определенное число R, которое называется радиусом сходимости ряда (67) и которое обладает следующими свойствами:*

ряд (67) сходится абсолютно при $|x| < R$,
ряд (67) расходится при $|x| > R$.

В частности, может оказаться, что $R = 0$, и тогда ряд (67) расходится при всех значениях x, отличных от нуля, или же $R = \infty$, и тогда ряд (67) сходится при всех значениях x.

Отбросив первый случай, рассмотрим такое положительное значение $x = \xi$, при котором ряд (67) сходится. Такое значение, наверное, существует, если, вообще, существуют значения $x \neq 0$, при которых ряд (67) сходится. Если мы будем увеличивать число ξ, то могут встретиться лишь два случая: или все время ряд (67) будет оставаться сходящимся

при $x = \xi$, даже когда ξ увеличивается беспредельно; тогда мы имеем, очевидно, $R = \infty$; или же будет существовать такое постоянное число A, которое обладает тем свойством, что при всех $\xi < A$ ряд (67) сходится, но при $\xi > A$ ряд делается расходящимся.

Существование такого числа A интуитивно-геометрически вполне очевидно, так как на основании первой теоремы Абеля, если ряд при каком-нибудь значении ξ сделается расходящимся, то он будет расходиться и при всех больших значениях. Строгое доказательство существования числа A может быть проведено на основании теории иррациональных чисел. Очевидно, что это число A и будет радиусом сходимости R ряда (67).

Проведем доказательство существования R. Разобьем все вещественные числа на два класса следующим образом: к первому классу отнесем все отрицательные числа, нуль и такие положительные числа ξ, что ряд (67) сходится при $|x| = \xi$, а ко второму классу отнесем все остальные вещественные числа. В силу доказанной теоремы любое число первого класса меньше любого числа второго класса, т. е. мы произвели сечение в области вещественных чисел, а потому или в первом классе есть наибольшее число, или во втором есть наименьшее число [40]. Нетрудно видеть, что это число и будет радиусом сходимости R ряда. Если все числа попадут в первый класс, то надо считать $R = \infty$.

149. Вторая теорема Абеля. *Если R есть радиус сходимости ряда* (67), *то ряд сходится не только абсолютно, но и равномерно в любом промежутке* $(a,\ b)$, *лежащем целиком внутри промежутка* $(-R,\ +R)$, *т. е. для которого*

$$-R < a < b < R.$$

Если же ряд сходится и при $x = R$ или $x = -R$, то он будет равномерно сходящимся и в промежутке $(a,\ R)$ *или* $(-R,\ b)$.

Заметим, прежде всего, что не нарушая общности, мы можем считать $R = 1$, введя вместо x новую независимую переменную t по формуле

$$x = Rt,$$

после чего ряд (67) превратится в степенной ряд относительно переменной t, а промежуток $(-R,\ +R)$ перейдет в $(-1,\ 1)$.

Если $R = 1$, то, по определению радиуса сходимости, ряд (67) будет сходиться абсолютно при всяком значении $x = \xi$, для которого $|\xi| < 1$. Рассмотрим теперь любой промежуток $(a,\ b)$, лежащий внутри $(-R,\ R)$, так что

$$-1 < a < b < 1.$$

Выберем за ξ любое число, лежащее внутри $(-1,\ 1)$, но по абсолютному значению большее $|a|$ и $|b|$. При всяком x в промежутке $(a,\ b)$ имеем

$$|a_n x^n| < |a_n \xi^n|,$$

и так как ряд

$$a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \ldots + a_n\xi^n + \ldots$$

сходится абсолютно и члены его не зависят от x, то по признаку Вейерштрасса ряд (67) сходится равномерно в промежутке $(a,\ b)$.

Допустим теперь, что ряд (67) сходится и при $x = 1$, т. е. что ряд

$$a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

сходится. Полагая

$$v_n(x) = x^n,$$

мы можем применить к ряду (67) признак Абеля, который покажет, что ряд (67) будет равномерно сходиться во всем промежутке $(a,\ 1)$, где a — любое число, большее –1.

Случай, когда ряд (67) сходится при $x = -1$, приводится к предыдущему, если заменить x на $(-x)$.

Обозначим через $f(x)$ сумму ряда (67). Она существует, конечно, лишь при тех значениях x, при которых ряд сходится. Пусть R — радиус сходимости ряда. Принимая во внимание равномерную сходимость ряда во всяком промежутке $(a,\ b)$, для которого

$$-R < a < b < R, \tag{70}$$

и свойство 1) из [146], можем утверждать, *что сумма ряда $f(x)$ есть непрерывная функция во всяком из указанных промежутков $(a,\ b)$. Иначе говорят, что $f(x)$ непрерывна внутри промежутка $(-R,\ +R)$.* Дальше мы увидим, что эта функция имеет сколько угодно производных внутри промежутка $(-R,\ +R)$. Если ряд (67) сходится и при $x = R$, то в силу доказанной равномерной сходимости во всяком промежутке $(a,\ R)$, где $a > -R$, $f(x)$, будет непрерывной функцией в этом промежутке, и, в частности, $f(R)$ будет пределом $f(x)$ при стремлении x к R слева [35]:

$$f(R) = \lim_{x \to R-0} f(x). \tag{71}$$

Аналогично при сходимости ряда для $x = -R$.

Выше мы видели, что разложение бинома Ньютона [131]

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots$$

имеет радиус сходимости $R = 1$ и в некоторых случаях сходится при $x = \pm 1$. В силу только что доказанного можно утверждать, что если, например, ряд сходится при $x = 1$, то его сумма при этом равна

$$\lim_{x \to 1-0} (1+x)^m = 2^m.$$

150. Дифференцирование и интегрирование степенного ряда. Пусть R — радиус сходимости ряда

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \tag{72}$$

Интегрируя его почленно от 0 до x и дифференцируя его, мы получим два других степенных ряда

$$a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \ldots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \ldots \tag{73}$$

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots \tag{74}$$

Покажем, что они имеют тот же радиус сходимости R. Для этого надо показать, что они сходятся, если $|x| < R$, и расходятся, если $|x| > R$.

По доказанному, ряд (72) сходится равномерно во всяком промежутке $(-R_1,\ +R_1)$, где $0 < R_1 < R$, и в силу свойства 2) из [146] его можно в этом промежутке интегрировать почленно от 0 до x, т. е. можно утверждать, что ряд (73) сходится при любом x, для которого $|x| < R$, и что при этом сумма ряда (73) равна

$$\int_0^x f(x)dx,$$

где $f(x)$ — сумма ряда (72). Покажем теперь, что и ряд (74) сходится, если $|x| < R$. Возьмем такое x, выберем какое-нибудь число ξ, лежащее между $|x|$ и R, т. е.

$$|x| < \xi < R, \tag{75}$$

и положим

$$q = \frac{|x|}{\xi} < 1.$$

Для членов ряда (74) получаем оценку

$$|n a_n x^{n-1}| = \left| n a_n \xi^n \frac{x^{n-1}}{\xi^{n-1}} \cdot \frac{1}{\xi} \right|,$$

и, в силу предыдущего,

$$|na_n x^{n-1}| \leqslant nq^{n-1}\frac{1}{\xi}|a_n\xi^n|.$$

Применяя к ряду Σnq^{n-1} признак Даламбера, нетрудно показать, что он сходится при $0 < q < 1$ и, следовательно [119],

$$nq^{n-1} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{76}$$

а потому, при всех достаточно больших n:

$$|na_n x^{n-1}| < |a_n\xi^n|.$$

Но в силу (75), ряд $\Sigma a_n\xi^n$ сходится абсолютно, а потому и ряд (74) сходится абсолютно при взятом значении x. Итак, оба ряда (73) и (74) сходятся, если $|x| < R$, т. е. при почленном интегрировании и дифференцировании степенного ряда его радиус сходимости не может уменьшиться. Но отсюда непосредственно следует, что он не может и увеличиться. Действительно, если бы, например, радиус сходимости ряда (73) был R', причем $R' > R$, то при дифференцировании ряда (73) мы получили бы ряд (72), и его радиус сходимости должен быть не меньше R', а по условию он равен R, причем $R < R'$. Итак, ряды (73) и (74) имеют тот же радиус сходимости, что и ряд (72). Дифференцируем ряд (74) еще раз, получим, в силу доказанного выше, степенной ряд

$$2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + \ldots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \ldots$$

с тем же радиусом сходимости R и т. д. То же будем иметь и при повторном почленном интегрировании ряда (73) от 0 до x. Все полученные от почленного дифференцирования и от почленного интегрирования от 0 до x ряды равномерно сходятся во всяком промежутке $(a,\ b)$, удовлетворяющем условию (70). Вспоминая свойства 1), 2) и 3) из [146], можем сформулировать следующий результат.

Сумма степенного ряда

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots, \tag{77}$$

радиус сходимости которого есть R, есть непрерывная внутри промежутка $(-R,\ +R)$, т. е. при $-R < x + R$, функция, имеющая внутри этого промежутка производные всех порядков. Эти производные могут быть получены почленным дифференцированием ряда (77). Последовательное почленное интегрирование от 0 до x при $-R < x < +R$ также

может производиться почленным интегрированием ряда (77). Почленное дифференцирование и интегрирование степенного ряда не меняют его радиуса сходимости.

Отметим, что промежуток $(-R,\ +R)$ может быть и открытым промежутком $(-\infty,\ +\infty)$, т. е. все сказанное справедливо и для того случая, когда радиус сходимости ряда (77) равен бесконечности.

Полагая

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots, \tag{78}$$

мы получаем, таким образом,

$$\begin{gathered} f'(x) = a_1 + 2a_2x + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots, \\ f''(x) = 2a_2 + 6a_3x + \ldots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f^{(n)}(x) = n!a_n + (n+1)n\ldots 3\cdot 2a_{n+1}x + \ldots, \end{gathered}$$

откуда следует при $x = 0$,

$$a_0 = f(0),\ a_1 = \frac{f'(0)}{1!},\ a_2 = \frac{f''(0)}{2!},\ \ldots,\ a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\ldots$$

Подставив эти выражения для a_0, a_1, a_2, $\ldots$, a_n в (78), получим

$$f(x) = f(0) + \frac{xf'(0)}{1!} + \frac{x^2f''(0)}{2!} + \ldots + \frac{x^nf^{(n)}(0)}{n!} + \ldots (-R < x < +R),$$

т. е. *степенной ряд совпадает с разложением своей суммы по формуле Маклорена.*

Изложенная теория степенных рядов распространяется без труда на степенные ряды вида

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots \tag{79}$$

Везде роль x будет играть разность $(x-a)$. Радиус сходимости R ряда (79) определяется из того условия, что ряд сходится при $|x-a| < R$ и расходится при $|x-a| > R$. Если обозначить через $f(x)$ сумму ряда (79) в промежутке

$$-R < x - a < R, \tag{80}$$

то для коэффициентов a_n получаем выражение

$$a_0 = f(a),\ a_1 = \frac{f'(a)}{1!},\ \ldots,\ a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!},\ \ldots,$$

т. е. *ряд (79) в промежутке (80) совпадает с разложением своей суммы в ряд Тейлора.*

Мы вернемся еще к теории степенных рядов в третьем томе при изложении теории функций комплексной переменной.

В качестве примера предлагается вывести из теории степенных рядов разложения функций $\log(1+x)$, $\operatorname{arctg} x$, $\arcsin x$, заметив, что

$$\log(1+x) = \int\limits_0^x \frac{dx}{1+x},$$

$$\operatorname{arctg} x = \int\limits_0^x \frac{dx}{1+x^2},$$

$$\arcsin x = \int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

и исследовать область применимости полученных разложений.

ГЛАВА V

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 15. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ФУНКЦИИ

151. Основные понятия. В § 6 главы II, посвященном функциям двух переменных, мы начали с изложения основных понятий, касающихся таких функций. Сейчас мы будем говорить о функциях многих переменных и, кроме того, более подробно остановимся на понятии предела.

Функцию $f(x, y)$ мы считаем определенной или на всей плоскости или в некоторой области. Таким образом, всякой точке (x, y) из этой области соответствует определенное значение $f(x, y)$. Если рассматриваются только внутренние точки области, то такая область называется *открытой*. Если к области причисляется ее контур, то область называется *замкнутой*.

Аналогичным образом, если ввести прямолинейную, прямоугольную систему координат OX, OY, OZ в пространстве, то, вместо тройки чисел (x, y, z) мы можем говорить о точке M пространства с координатами (x, y, z). Будем считать, что функция $f(x, y, z)$ определена во всем пространстве или в некоторой области пространства, которая может быть открытой или замкнутой. В наиболее простых случаях границами области (их может быть и несколь-

ко) будут некоторые поверхности. Так, например, неравенства

$$a_1 \leqslant x \leqslant a_2, \quad b_1 \leqslant y \leqslant b_2, \quad c_1 \leqslant z \leqslant c_2$$

определяют замкнутый прямоугольный параллелепипед, ребра которого параллельны координатным осям. Неравенства

$$a_1 < x < a_2, \quad b_1 < y < b_2, \quad c_1 < z < c_2$$

определяют открытый параллелепипед. Неравенство

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \leqslant r^2$$

определяет замкнутую сферу с центром (a, b, c) и радиусом r. Если исключить знак равенства и оставить только знак $<$, то получится открытая сфера. Понятие предела и непрерывности для функции трех переменных определяют совершенно так же, как и [67] для двух переменных.

Для функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ многих переменных при $n > 3$ уже теряется геометрическая наглядность пространства, однако и в этом случае часто сохраняют геометрическую терминологию. Последовательность n вещественных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называют точкой. Множество всех точек образуют n-мерное пространство. Области такого пространства определяются неравенствами. Так, например, неравенства

$$c_1 \leqslant x_1 \leqslant d_1, \quad c_2 \leqslant x_2 \leqslant d_2, \ldots, c_n \leqslant x_n \leqslant d_n,$$

определяют n-мерный параллелепипед или, как иногда говорят, n-мерный промежуток. Неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - a_k)^2 \leqslant r^2$$

определяет n-мерный шар. *Окрестностью* точки $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ называется множество точек, определенных последним неравенством при некотором выборе r или неравенствами $|x_k - a_k| \leqslant \rho$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, где ρ — некоторое положительное число.

Если функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определена в окрестности точки $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, то говорят, что $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ стремится к пределу A при стремлении точки $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ к точке $M_0(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, и пишут

$$\lim_{x_k \to a_k} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A \text{ или } \lim_{M \to M_0} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A,^*$$

если для любого заданного положительного числа ε существует такое положительное η, что $|A - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)| < \varepsilon$, если только $|a_k - x_k| < \eta$ при $k = 1, 2, \ldots, n$, причем считается, что точка $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не совпадает с $M_0(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ определена и в точке $M_0(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, то непрерывность в этой точке определяется равенством [ср. 67]:

$$\lim_{x_k \to a_k} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Справедливы указанные в [67] свойства функции, непрерывной в замкнутой области.

Как в случае функции одного переменного [34], справедливы утверждения о непрерывности суммы, произведения и частного непрерывных функций. Последнее — в том случае, когда знаменатель отличен от нуля в точке $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

152. О предельно переходе. Остановимся более подробно на понятии предела, ограничиваясь случаем функции двух переменных. Если существует

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = A, \tag{1}$$

то будем говорить, что *существует предел по обеим переменным.* Как мы знаем [67], это значим, что $f(x, y)$ стремится к пределу A при любом законе стремления точки $M(x, y)$ к $M_0(a, b)$. В частности

$$\lim_{x \to a} f(x, b) = A \quad \text{и} \quad \lim_{y \to b} f(a, y) = A. \tag{2}$$

В первом случае $M(x, y)$ стремится к $M_0(a, b)$ по прямой, параллельной оси OX, а во втором случае — по прямой, параллельной оси OY. Отметим, что из существования пределов (2) и их равенства еще не вытекает

* Все переменные x_k стремятся к своим значениям a_k независимо друг от друга.

существование предела (1). В качестве примера рассмотрим функцию

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$$

и положим $a=0$ и $b=0$. Мы имеем

$$\lim_{x\to 0} f(x,0)=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot 0}{x^2+0^2}=\lim_{x\to 0} 0=0 \quad \text{и} \quad \lim_{y\to 0} f(0,y)=0,$$

а предел (1) в этом случае не существует. Действительно, полагая $\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\alpha$, можем переписать нашу функцию в виде

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\sin\alpha\cos\alpha. \tag{3}$$

Если точка $M(x,y)$ стремится к $M(0,0)$ по прямой, проходящей через начало и образующей угол α_0 с осью OX, то $f(x,y)$, выражаемая формулой (3), остается постоянной, и ее величина зависит от выбора α_0, откуда и следует, что предел (1) не существует в рассматриваемом примере. Отметим, что формула (3) не определяет функцию в самой точке $M(0,0)$.

Кроме предельного перехода (1), можно рассматривать еще *повторные пределы*, соответствующие предельному переходу сначала по x при постоянном y, отличном от b, а затем по y, или наоборот:

$$\lim_{x\to a}\left[\lim_{y\to b} f(x,y)\right] \quad \text{или} \quad \lim_{y\to b}\left[\lim_{x\to a} f(x,y)\right]. \tag{4}$$

Может оказаться, что оба повторных предела существуют, но различны. Так, например, для функции

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2+x^3+y^3}{x^2+y^2}$$

мы имеем, как нетрудно проверить,

$$\lim_{x\to 0}\left[\lim_{y\to 0} f(x,y)\right]=1, \quad \lim_{y\to 0}\left[\lim_{x\to 0} f(x,y)\right]=-1.$$

Но имеет место

Теорема. *Если существует предел по обеим переменным (1), и при всяком x, достаточно близком к a и отличном от a, существует предел*

$$\lim_{y\to b} f(x,y)=\varphi(x), \tag{5}$$

то существует первый повторный предел (4) *и он равен* A, т. е.

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=A. \tag{6}$$

Из существования предела (1) следует [67], что для любого заданного положительного ε существует такое положительное η, что

$$|A-f(x,y)|<\varepsilon \quad \text{при} \quad |x-a|<\eta \quad \text{и} \quad |y-b|<\eta, \tag{7}$$

причем (x,y) не совпадает с (a,b). Фиксируем x, отличное от a, так, чтобы иметь $|x-a|<\eta$. Принимая во внимание (5) и переходя в неравенстве (7) к пределу по y, получим

$$|A-\varphi(x)|\leqslant\varepsilon \quad \text{при} \quad |x-a|<\eta \quad \text{и} \quad x\neq a,$$

откуда, ввиду произвольности ε, следует равенство (6).

Замечание. Совершенно так же, если мы предположим, что существует предел (1) и что при всяком y, достаточно близком к b и отличном от b, существует предел

$$\lim_{x\to a}f(x,y)=\psi(y),$$

то существует второй повторный предел (4) и он равен A, т. е.

$$\lim_{y\to b}\psi(y)=A.$$

Если предел (1) существует и равен $f(a,b)$, т. е. $A=f(a,b)$, то функция $f(x,y)$ непрерывна в точке (a,b) или, как говорят, непрерывна по обеим переменным в точке (a,b). При этом, в силу (2),

$$\lim_{x\to a}f(x,b)=f(a,b), \quad \lim_{y\to b}f(a,y)=f(a,b),$$

т. е. функция непрерывна по каждой переменной в отдельности в точке (a,b), о чем мы говорили и раньше [67]. Наоборот, из непрерывности по каждой переменной еще не вытекает непрерывности по обеим переменным. Действительно, определим функцию формулой (3) вне начала координат и положим $f(0,0)=0$. Как мы упоминали выше, мы имеем при этом

$$\lim_{x\to 0}f(x,0)=0 \quad \text{и} \quad \lim_{y\to 0}f(0,y)=0,$$

т. е. функция непрерывна по каждой переменной в точке $(0,0)$. Но она не является непрерывной по обеим переменным, ибо, как мы видели,

не существует определенного предела $f(x,y)$ при стремлении $M(x,y)$ к $M_0(0,0)$.

Если $f(x,y)$ имеет в некоторой области, содержащей точку (x,y) внутри себя, частные производные, то, как мы показали [68], имеет место формула

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)=f'_x(x+\theta\Delta x, y+\Delta y)\Delta x + f'_y(x, y+\theta_1\Delta y)\Delta y$$
$$(0<\theta \quad \text{и} \quad \theta_1<1).$$

Положим, что частные производные ограничены в упомянутой области, т. е. по абсолютной величине не превышают некоторого числа M. При этом написанная формула дает

$$|f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)| \leqslant M(|\Delta x|+|\Delta y|),$$

и правая часть этого неравенства стремится к нулю при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, откуда следует

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y),$$

т. е. *если $f(x,y)$ имеет внутри некоторой области ограниченные частные производные, то она непрерывна внутри этой области.*

Функция (3) при дополнительном соотношении $f(0,0)=0$ равна нулю на всей оси OX и на всей оси OY и в точке $M_0(0,0)$ она имеет, очевидно, частные производные, равные нулю. В остальных точках она также имеет частные производные:

$$f'_x(x,y)=\frac{y^3-x^2y}{(x^2+y^2)^2}, \quad f'_y(x,y)=\frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2},$$

т. е. указанная выше функция имеет частные производные на всей плоскости. Все же она, как мы видели, не обладает непрерывностью в точке $(0,0)$. Это объясняется тем, что частные производные могут принимать сколь угодно больше по абсолютной величине значения при приближении точки (x,y) к началу координат.

153. Частные производные и полный дифференциал первого порядка. В [68] мы ввели понятие о частных производных и полном дифференциале функции двух переменных. Эти понятия могут быть распространены и на случай функции любого числа

переменных. Для примера рассмотрим функцию четырех переменных

$$w = f(x, y, z, t).$$

Частной производной от этой функции по x называется предел

$$\lim_{h \to \pm 0} \frac{f(x+h, y, z, t) - f(x, y, z, t)}{h},$$

если он существует, и для обозначения это частной производной употребляют символы

$$f'_x(x, y, z, t), \quad \text{или} \quad \frac{\partial f(x, y, z, t)}{\partial x}, \quad \text{или} \quad \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Аналогично определяются частные производные и по другим переменным.

Полным дифференциалом функции называется сумма ее частных дифференциалов:

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz + \frac{\partial w}{\partial t} dt,$$

где dx, dy, dz, dt — дифференциалы независимых переменных (произвольные величины, не зависящие от x, y, z, t).

Дифференциал есть главная часть приращения функции:

$$\Delta w = f(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt) - f(x, y, z, t),$$

а именно (ср. [68]):

$$\Delta w = dw + \varepsilon_1 dx + \varepsilon_2 dy + \varepsilon_3 dz + \varepsilon_4 dt,$$

где ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 стремятся к нулю, если dx, dy, dz, dt стремятся к нулю, причем предполагается, что функция w имеет непрерывные частные производные внутри некоторой области, содержащей точку (x, y, z, t) внутри себя.

Точно так же может быть обобщено и правило дифференцирования сложных функций. Предположим, например, что x, y и z суть не независимые переменные, но функции независимой переменной

t. Функция w будет в этом случае зависеть от t как непосредственно, так и через посредство x, y, z, и *полная производная* от w по t будет иметь выражение

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}. \tag{8}$$

Мы не останавливаемся на доказательстве этого правила, так как оно состоит в буквальном повторении того, что мы говорили в [69]. Если переменные x, y, z зависят, кроме t, и от других независимых переменных, то в правой части формулы (8) мы должны вместо $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ писать частные производные $\frac{\partial x}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}$, $\frac{\partial z}{\partial t}$. В этом случае и функция w будет, кроме t, зависеть и от других независимых переменных, и в левой части равенства (8) мы также должны $\frac{dw}{dt}$ заменить на $\frac{\partial w}{\partial t}$. Но эта последняя частная производная отлична от частной производной $\frac{\partial w}{\partial t}$, стоящей в правой части равенства (8) и вычисленной лишь поскольку w непосредственно зависит от t; для отличия эту частную производную, вычисленную непосредственно по t, заключают иногда в скобки, так что равенство (8) принимает в рассматриваемом случае вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right) + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}. \tag{9}$$

В случае функций от одной переменной, мы видели, что *выражение ее первого дифференциала не зависит от выбора независимой переменной* [50]. *Покажем, что это свойство остается справедливым и в случае функции от нескольких переменных.*

Рассмотрим для определенности случай функции от двух переменных

$$z = \varphi(x, y).$$

Положим, что x и y суть функции независимых переменных u и v. Согласно правилу дифференцирования сложных функций, имеем

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Полный дифференциал функции по определению равен

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv.$$

Подставляя выражения частных производных, получим

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv\right).$$

Но выражения, стоящие в круглых скобках, суть полные дифференциалы x и y, и мы можем написать

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy,$$

т. е. *дифференциал сложной функции имеет то же выражение, которое он имел бы, если x, y были независимыми переменными.*

Свойство это позволяет распространить правило нахождения дифференциала суммы, произведения и частного на случай функции от нескольких переменных:

$$d(u+v) = du + dv, \quad d(uv) = vdu + udv, \quad d\frac{u}{v} = \frac{vdu - udv}{v^2},$$

где u и v — функции нескольких независимых переменных. Действительно, пользуясь доказанным свойством, мы можем, например, написать

$$d(uv) = \frac{\partial(uv)}{\partial u}du + \frac{\partial(uv)}{\partial v}dv = vdu + udv.$$

154. Однородные функции. Дадим определение однородной функции нескольких переменных: *функция нескольких переменных называется однородной функцией этих переменных степени m, если при умножении этих переменных на произвольную величину t функция умножается на t^m, т. е. имеет место тождество*

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y) \quad \text{или} \quad f(tx, ty, tz) = t^m f(x, y, z) \tag{10}$$

при любых допустимых значениях переменных x, y, z, t. Число m может быть любым фиксированным вещественным числом. Если, например, $m = \frac{1}{2}$, то $t^m = \sqrt{t}$ и t должны быть положительными. Положим, что функция $f(x, y)$ выражает некоторый объем, что x

и y суть длины некоторых линий и что в выражении $f(x, y)$, кроме этих линий, входят отвлеченные числа. Умножение x и y на t (положительное число) равносильно уменьшению линейного масштаба в t раз (при $t > 1$ или увеличению при $t < 1$), и, очевидно, что при этом функция $f(x, y)$, выражающая объем, должна умножаться на t^3, т. е. в рассматриваемом случае функция $f(x, y)$ будет однородной функцией третьей степени. Так, например, объем конуса выражается через радиус его основания x и высоту y по формуле $v = \frac{1}{3}\pi x^2 y$. Эта функция будет однородной третьей степени при всех вещественных x, y и t. Такой же функцией будет и любой однородный многочлен от x и y третьей степени, т. е. такой многочлен, в каждом члене которого сумма показателей* x и y равна трем:

$$f(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3.$$

Дроби

$$\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, \quad \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad \frac{x + y}{x^2 + y^2}$$

суть однородные функции степеней соответственно 1, 0 и (-1). Отметим, что $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, где радикал считается арифметическим, будет однородной функцией первой степени при всех вещественных x и y и при всех $t > 0$. Действительно,

$$\sqrt{(tx)^2 + (ty)^2} = t\sqrt{x^2 + y^2},$$

причем оба радикала считаются положительными.

Дифференцируя тождество (10) по t и применяя правило дифференцирования сложной функции, получим, полагая $u = tx$ и $v = ty$:

$$xf'_u(u, v) + yf'_v(u, v) = mt^{m-1}f(x, y).$$

Полагая $t = 1$, находим

$$xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = mf(x, y), \tag{11}$$

что выражает следующую теорему Эйлера об однородных функциях:

* Сумма показателей степеней.

Сумма произведений частных производных однородной функции не соответствующие переменные равна произведению самой этой функции на степень ее однородности.

При доказательстве мы считаем естественно, что функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные при соответствующих значениях переменных, которыми мы пользовались при доказательстве.

Если $m = 0$, то, положив в тождестве (10) $t = \frac{1}{x}$, мы получим

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) \quad \text{или} \quad f(x, y, z) = f\left(1, \frac{y}{x}, \frac{z}{x}\right),$$

т. е. *однородная функция нулевой степени есть функция отношения всех переменных, кроме одной, к этой последней переменной.* Часто однородную функцию нулевого измерения называют просто *однородной.*

155. Частные производные высших порядков. Частные производные функции от нескольких переменных суть в свою очередь функции тех же переменных, и мы можем определить их частные производные. Таким образом мы получим *частные производные второго порядка* первоначальной функции, которые также будут функциями тех же переменных, и их дифференцирование приведет к частным производным третьего порядка первоначальной функции, и т. д. Так, например, в случае функции $u = f(x, y)$ от двух переменных, дифференцируя каждую из частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ еще раз по x и y, получим четыре производные второго порядка, которые обозначаются так:

$$f''_{x^2}(x, y), \quad f''_{xy}(x, y), \quad f''_{yx}(x, y), \quad f''_{y^2}(x, y),$$

или

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2},$$

или, наконец,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Производные $f''_{xy}(x,y)$ и $f''_{yx}(x,y)$ отличаются лишь порядком дифференцирования. В первом случае дифференцирование производится сначала по x и потом по y, а во втором случае — в обратном порядке. Покажем, что эти две производные тождественны между собою, т. е. что *результат дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования.*

Составим выражение

$$\omega = f(x+h, y+k) - f(x+h, y) - f(x, y+k) + f(x, y).$$

Полагая

$$\varphi(x,y) = f(x+h, y) - f(x, y),$$

можем написать выражение ω в виде

$$\omega = [f(x+h, y+k) - f(x, y+k)] - [f(x+h, y) - f(x, y)] = \\ = \varphi(x, y+k) - \varphi(x, y).$$

Применяя два раза формулу Лагранжа [63], получим

$$\omega = k\varphi'_y(x, y+\theta_1 k) = k[f'_y(x+h, y+\theta_1 k) - f'_y(x, y+\theta_1 k)] = \\ = khf''_{yx}(x+\theta_2 h, y+\theta_1 k).$$

Буквы θ с различными значками означают числа, лежащие между 0 и 1. Знаком $f'_y(x+h, y+\theta_1 k)$ мы обозначаем частную производную функции $f(x,y)$ по ее второму аргументу y, когда туда вместо x и y подставлены, соответственно, $x+h$ и $y+\theta_1 k$. Аналогичные обозначения применяются и для других частных производных.

Точно так же, полагая

$$\psi(x,y) = f(x, y+k) - f(x, y),$$

можем написать

$$\omega = [f(x+h, y+k) - f(x+h, y)] - [f(x, y+k) - f(x, y)] = \\ = \psi(x+h, y) - \psi(x, y) = h\psi'_x(x+\theta_3 h, y) = \\ = h[f'_x(x+\theta_3 h, y+k) - f'_x(x+\theta_3 h, y)] = hkf''_{xy}(x+\theta_3 h, y+\theta_4 k).$$

Сравнивая оба выражения, полученных для ω, будем иметь

$$hkf''_{yx}(x+\theta_2 h, y+\theta_1 k) = hkf''_{xy}(x+\theta_3 h, y+\theta_4 k),$$

или

$$f''_{yx}(x+\theta_2 h, y+\theta_1 k) = f''_{xy}(x+\theta_3 h, y+\theta_4 k).$$

Предполагая непрерывность написанных производных второго порядка и устремляя h и k к нулю, получим

$$f''_{yx}(x,y) = f''_{xy}(x,y).$$

Это рассуждение приводит к следующей теореме.

Теорема. *Если $f(x,y)$ имеет внутри некоторой области непрерывные производные $f''_{yx}(x,y)$ и $f''_{xy}(x,y)$, то во всех точках внутри упомянутой области указанные производные равны.*

Рассмотрим теперь две производные третьего порядка

$$f'''_{x^2y}(x,y) \quad \text{и} \quad f'''_{yx^2}(x,y),$$

отличающиеся лишь порядком дифференцирования. Принимая во внимание, что по доказанному результат *двукратного* дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования, можем написать

$$f'''_{x^2y}(x,y) = \frac{\partial^2 f'_x(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f'_x(x,y)}{\partial y \partial x} = f'''_{xyx}(x,y) = \\ = f'''_{yxx}(x,y) = f'''_{yx^2}(x,y),$$

т. е. и в этом случае результат дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования. Это свойство без труда обобщается на производные любого порядка и на случай функции любого числа переменных, и мы можем высказать общую теорему: *результат дифференцирования не зависит от порядка, в котором производится дифференцирование.*

Заметим, что при доказательстве мы пользовались не только *существованием производных, но и их непрерывностью внутри некоторой области.*

В дальнейшем мы будем всегда предполагать непрерывность производных, о которых мы будем говорить, и в силу доказанной теоремы для производных высших порядков надо лишь указывать порядок производной n, те переменные, по которым производится дифференцирование, и число дифференцирований по каждой переменной.

Так, например, в случае функции $w = f(x, y, z, t)$, пользуются следующим обозначением:

$$\frac{\partial^n f(x,y,z,t)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma \partial t^\delta}, \quad \text{или} \quad \frac{\partial^n w}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma \partial t^\delta} (\alpha + \beta + \gamma + \delta = n),$$

которое показывает, что взята производная n-го порядка, причем дифференцирование произведено α раз по x, β раз по y, γ раз по z и δ раз по t.

156. Дифференциалы высших порядков. Полный дифференциал du функции от нескольких переменных есть в свою очередь функция тех же переменных, и мы можем определить полный дифференциал этой последней функции. Таким образом мы получим *дифференциал второго порядка* d^2u первоначальной функции u, который также будет функцией тех же переменных, а его полный дифференциал приведет нас к дифференциалу третьего порядка d^3u первоначальной функции и т. д.

Рассмотрим подробнее случай функции $u = f(x, y)$ двух переменных x и y и будем предполагать, что переменные x и y суть независимые переменные. По определению

$$du = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy. \tag{12}$$

При вычислении d^2u будем принимать во внимание, что дифференциалы dx и dy независимых переменных надо рассматривать как величины постоянные, а потому их можно выносить за знак дифференциала

$$d^2u = d\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx\right] + d\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy\right] =$$

$$= dx \cdot d\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + dy \cdot d\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} =$$

$$= dx \cdot \left[\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}dy\right] +$$

$$+dy\left[\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x}dx + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\right] =$$

$$= \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}dy^2.$$

Вычисляя точно так же d^3u, мы получим

$$d^3u = \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy +$$
$$+ 3\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y^3}dy^3.$$

Эти выражения d^2u и d^3u приводят нас к следующей *символической формуле для дифференциала любого порядка*:

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{(n)} f, \tag{13}$$

причем формулу эту надо понимать так: сумму, стоящую в круглых скобках, надо возвысить в степень n, применяя формулу бинома Ньютона, после чего показатели степеней у $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$ надо считать указателями порядка производных по x и y от функции f.

Мы убедились в справедливости формулы (13) при n, равном 1, 2 и 3. Для полного ее доказательства необходимо применить обычный способ доказательства от n к $(n+1)$. Положим, что формула (13) справедлива при некотором n. Определим дифференциал $(n+1)$-го порядка:

$$d^{n+1}u = d(d^n u) = \frac{\partial(d^n u)}{\partial x}dx + \frac{\partial(d^n u)}{\partial y}dy = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)d^n u,$$

где символом

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)\varphi$$

мы обозначаем, вообще:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy.$$

Принимая во внимание, что для $d^n u$ формула (13) считается доказанной, можем написать

$$d^{n+1}u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{(n)} f\right] = \\ = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{(n+1)} f,$$

т. е. формула доказана и для $d^{n+1}u$.

Формула (13) обобщается без труда и на случай функции любого числа независимых переменных. Формула (13) справедлива, как мы знаем [153], не только в том случае, когда x и y суть независимые переменные. Но при выводе выражения d^2u существенным было считать dx и dy величинами постоянными, и формула (13) справедлива лишь в тех случаях, когда dx и dy могут считаться постоянными.

Это будет справедливо, если x и y суть независимые переменные. Положим теперь, что x и y суть линейные функции независимых переменных z и t:

$$x = az + bt + c, \quad y = a_1 z + b_1 t + c_1,$$

где коэффициенты и свободные члены — постоянные. Для dx и dy получим выражения

$$dx = adz + bdt, \quad dy = a_1 dz + b_1 dt.$$

Но dz и dt, как дифференциалы независимых переменных, должны считаться постоянными; то же можно сказать, следовательно, в этом случае и относительно dx и dy; мы можем поэтому утверждать, что *символическая формула (13) справедлива как в случае, когда x и y суть независимые переменные, так и в том*

случае, когда они суть линейные функции (целые многочлены первой степени) независимых переменных.

Если dx и dy нельзя считать постоянными, то формула (13) уже не будет справедливой. Разберем выражение d^2u в этом общем случае. При вычислении

$$d\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx\right) \quad \text{и} \quad d\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy\right)$$

мы уже не имеем права выносить dx и dy за знак дифференциала, как это делали выше, то должны применять формулу для дифференциала произведения [153].

Мы получим, таким образом:

$$d^2u = dxd\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + dyd\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}d^2x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}d^2y.$$

Сумма первых двух слагаемых в правой части этого равенства даст нам выражение, которое мы имели выше для d^2u, и окончательно получим

$$d^2u = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}dy^2 + \\ + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}d^2x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}d^2y, \quad (14)$$

т. е. в рассматриваемом общем случае выражение для d^2u будет содержать добавочные слагаемые, зависящие от d^2x и d^2y.

157. Неявные функции. Укажем сейчас правила дифференцирования функций, заданных неявно. При этом мы будем предполагать, что написанные уравнения действительно определяют некоторую функцию, имеющую соответствующие производные. В [159] при некоторых условиях мы докажем это. Если y есть неявная функция от x:

$$F(x,y) = 0 \quad (15)$$

то первая производная y' этой функции определяется, как мы знаем, из уравнения [69]:

$$F'_x(x,y) + F'_y(x,y)y' = 0 \quad (16)$$

Уравнение (16) мы получали, предполагая в равенстве (15) y функцией от x и дифференцируя обе части этого тождества по x. Поступая так же с (16), получим уравнение для определения второй производной y'':

$$F''_{x^2}(x,y) + 2F''_{xy}(x,y)y' + F''_{y^2}(x,y)y'^2 + F'_y(x,y)y'' = 0. \qquad (17)$$

Дифференцируя еще раз по x, получим уравнение для определения третьей производной y''' и т. д.

Обратим внимание на то, что в получаемых таким образом уравнениях коэффициент при искомых производных неявной функции будет один и тот же, а именно $F'_y(x,y)$, и потому, если при некоторых значениях x и y, удовлетворяющих уравнению (15), этот коэффициент отличен от нуля, то при этих значениях указанный выше прием даст вполне определенные значения для производных любого порядка неявной функции. При этом, конечно, предполагается существование частных производных от левой части уравнения (15).

Рассмотрим уравнение еще с тремя переменными

$$\Phi(x,y,z) = 0.$$

Такое уравнение определяет z как неявную функцию от независимых переменных x и y, и если заменить в левой части этого уравнения z именно этой функцией от x и y, то левая часть уравнения станет равна тождественно нулю. Таким образом, дифференцируя левую часть этого уравнения по независимым переменным x и y в предположении, что z есть функция от них, мы должны получить нуль:

$$\Phi'_x(x,y,z) + \Phi'_z(x,y,z)z'_x = 0,$$
$$\Phi'_y(x,y,z) + \Phi'_z(x,y,z)z'_y = 0.$$

Из этих уравнений определятся частные производные первого порядка z'_x и z'_y. Дифференцируя первое из написанных соотношений еще раз по x, получим уравнение для определения частной производной z''_{x^2} и т. д. Во всех получаемых уравнениях коэффициент при искомой производной будет $\Phi'_z(x,y,z)$. Рассмотрим теперь

систему уравнений

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0. \tag{17_1}$$

Будем считать, что эта система определяет y и z как неявные функции от x. Дифференцируя оба уравнения системы по x в предположении, что y и z суть функции от x, получим систему уравнений первой степени для определения производных y' и z' от y и z по x:

$$\begin{aligned}
&\varphi'_x(x, y, z) + \varphi'_y(x, y, z) \cdot y' + \varphi'_z(x, y, z) \cdot z' = 0,\\
&\psi'_x(x, y, z) + \psi'_y(x, y, z) \cdot y' + \psi'_z(x, y, z) \cdot z' = 0.
\end{aligned}$$

Дифференцируя эти соотношения еще раз по x, получим систему уравнений для определения вторых производных y'' и z''. Дифференцируя еще раз по x, получим систему уравнений для определения y''' и z''' и т. д.

Производные n-го порядка $y^{(n)}$ и $z^{(n)}$ будут при это определяться из системы вида:

$$\begin{aligned}
&\varphi'_y(x, y, z) \cdot y^{(n)} + \varphi'_z(x, y, z) \cdot z^{(n)} + A = 0,\\
&\psi'_y(x, y, z) \cdot y^{(n)} + \psi'_z(x, y, z) \cdot z^{(n)} + B = 0,
\end{aligned}$$

где A и B — выражения, содержащие производные порядка ниже n. Такая система, как это известно из элементарной алгебры, будет давать одно определенное решение, если выполнено условие:

$$\varphi'_y(x, y, z) \cdot \psi'_z(x, y, z) - \varphi'_z(x, y, z) \cdot \psi'_y(x, y, z) \neq 0.$$

При всех тех значениях x, y и z, удовлетворяющих системе (17_1), при которых это условие выполнено, описанный выше прием приведет к вполне определенным значениям производных.

Если имеется система m уравнений с $(m + n)$ переменным, то такая система определяет, вообще говоря, m переменных как неявные функции остальных n переменных, и производные этих неявных функций могут быть получены указанным выше приемом последовательного дифференцирования уравнений по независимым переменным.

158. Пример. Рассмотрим в качестве примера уравнение

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1, \tag{18}$$

которое определяет z как функцию от x и y. Дифференцируя по x, получим

$$ax + cz \cdot z'_x = 0, \tag{19}$$

и точно так же, дифференцируя по y, получим

$$by + cz \cdot z'_y = 0, \tag{19_1}$$

откуда

$$z'_x = -\frac{ax}{cz}, \quad z'_y = -\frac{by}{cz}.$$

Дифференцируя соотношение (19) по x и y, а соотношение (19_1) по y, получим

$$a + cz'^2_x + czz''_{x^2} = 0, \quad cz'_x z'_y + czz''_{xy} = 0, \quad b + cz'^2_y + czz''_{y^2} = 0,$$

откуда

$$z''_{x^2} = -\frac{a + cz'^2_x}{cz} = -\frac{a + c\frac{a^2x^2}{c^2z^2}}{cz} = -\frac{acz^2 + a^2x^2}{c^2z^3},$$
$$z''_{xy} = -\frac{z'_x z'_y}{z} = -\frac{abxy}{c^2z^3},$$
$$z''_{y^2} = -\frac{b + cz'^2_y}{cz} = -\frac{bcz^2 + b^2y^2}{c^2z^3}.$$

Покажем теперь другой способ вычисления частных производных, основанный на применении выражения полного дифференциала функции. Докажем предварительно вспомогательную теорему. Пусть нам удалось каким-нибудь образом получить выражение полного дифференциала dz функции двух независимых переменных x и y в виде

$$dz = pdx + qdy.$$

С другой стороны, мы знаем, что

$$dz = z'_x dx + z'_y dy.$$

Сравнивая эти два выражения, получим

$$pdx + qdy = z'_x dx + z'_y dy.$$

Но dx и dy, как дифференциалы независимых переменных, суть величины произвольные. Полагая $dx = 1$ и $dy = 0$ или $dx = 0$ и $dy = 1$, получим

$$p = z' \quad \text{и} \quad q = z'_y.$$

Итак, *если полный дифференциал функции z двух независимых переменных x и y может быть представлен в виде*

$$dz = pdx + qdy,$$

то $p = z'_x$ и $q = z'_y$.

Теорема эта справедлива и для функции любого числа независимых переменных. Совершенно так же можно показать, что *если дифференциал второго порядка может быть представлен в виде*

$$d^2z = rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2,$$

то $r = z''_{x^2}$, $s = z''_{xy}$ *и* $t = z''_{y^2}$.

Вернемся теперь к рассмотренному примеру. Вместо того, чтобы определять производные левой части соотношения (18) по x и y, определим ее дифференциал, помня, что выражение первого дифференциала не зависит от выбора независимых переменных [153]:

$$axdx + bydy + czdz = 0, \tag{20}$$

откуда

$$dz = -\frac{ax}{cz}dx - \frac{by}{cz}dy,$$

и, следовательно, в силу доказанной теоремы,

$$z'_x = -\frac{ax}{cz} \quad \text{и} \quad z'_y = -\frac{by}{cz}.$$

Определим теперь дифференциал левой части соотношения (20), принимая во внимание, что dx и dy должны считаться при этом постоянными:

$$adx^2 + bdy^2 + cdz^2 + czd^2z = 0$$

или

$$d^2z = -\frac{a}{cz}dx^2 - \frac{b}{cz}dy^2 - \frac{1}{z}dz^2 = -\frac{a}{cz}dx^2 - \frac{b}{cz}dy^2 - \frac{1}{z}\left(\frac{ax}{cz}dx + \frac{by}{cz}dy\right)^2 =$$
$$= -\frac{acz^2 + a^2x^2}{a^2z^3}dx^2 - 2\frac{abxy}{x^2z^3}dxdy - \frac{bcz^2 + b^2y^2}{c^2z^3}dy^2,$$

и, следовательно

$$z''_{x^2} = -\frac{acz^2 + a^2x^2}{c^2z^3}, \quad z''_{xy} = -\frac{abxy}{c^2z^3}, \quad z''_{y^2} = -\frac{bcz^2 + b^2y^2}{c^2z^3}.$$

Таким образом, определив дифференциал некоторого порядка, мы получим все частные производные соответствующего порядка.

159. Существование неявных функций. Наши рассуждения носили формальный характер. Мы предполагали во всех случаях, что соответствующее уравнение или система уравнений определяют неявным образом некоторую функцию, имеющую производную. Сейчас докажем основную теорему существования неявных функций.

Рассмотрим уравнение

$$F(x, y) = 0 \tag{21}$$

и укажем те условия, при которых оно определяет единственным образом y как функцию от x, непрерывную и имеющую производную.

Теорема. *Пусть $x = x_0$ и $y = y_0$ — решение уравнения* (21), т. е.

$$F(x_0, y_0) = 0; \tag{22}$$

пусть $F(x, y)$ и ее частные производные первого порядка по x и y — непрерывные функции при всех x и y, достаточно близких к x_0 и y_0, и пусть, наконец, частная производная $F'_y(x, y)$ отлична от нуля при $x = x_0$, $y = y_0$. При этом существует при всех x, достаточно близких к x_0, одна определенная функция $y(x)$, удовлетворяющая уравнению (21), *непрерывная, имеющая производную и удовлетворяющая условию: $y(x_0) = y_0$.*

Положим для определенности, что $F'_y(x, y) > 0$ при $x = x_0$, $y = y_0$. Так как по условию эта производная непрерывна, то она будет положительной и при всех значениях x и y, достаточно близких к x_0 и y_0, т. е. существует такое положительное число l, что $F(x, y)$ и ее частные производные непрерывны и

$$F'_y(x, y) > 0 \tag{23}$$

при всех x и y, удовлетворяющие условию

$$|x - x_0| \leqslant l, \quad |y - y_0| \leqslant l. \tag{24}$$

Далее, функция $F(x_0, y)$ одной переменной y обращается в нуль при $y = y_0$, в силу (22). И есть возрастающая функция от y в промежутке

$(y_0 - l,\ y_0 + l)$, в силу (23) и (24). Таким образом, числа $F(x_0,\ y_0 - l)$ и $F(x_0,\ y_0 + l)$ будут разных знаков: первое — отрицательное, а второе — положительное. Принимая во внимание непрерывность функции $F(x, y)$, мы можем утверждать [67], что $F(x,\ y_0 - l)$ будет отрицательным, а $F(x,\ y_0 + l)$ — положительным при всех x, достаточно близких к x_0, т. е. существует такое положительное число l_1, что

$$F(x, y_0 - l) > 0 \quad \text{и} \quad F(x, y_0 + l) > 0 \tag{25}$$

при $|x - x_0| \leqslant l_1$. Обозначим через m наименьшее из двух чисел: l и l_1. Принимая во внимание (24) и (25), мы можем утверждать, что выполнены неравенства (23) и (25), если x и y удовлетворяют неравенствам

$$|x - x_0| \leqslant m, \quad |y - y_0| \leqslant l. \tag{26}$$

Если возьмем какое-нибудь определенное x, лежащее в промежутке $(x_0 - m,\ x_0 + m)$, т. е. удовлетворяющее первому из неравенств (26), то $F(x, y)$, как функция от y, будет в силу (23) возрастающей функцией в промежутке $(y_0 - l,\ y_0 + l)$, и, в силу (25), будет разных знаков на концах этого промежутка. Следовательно, она будет обращаться в нуль при одном определенном значении y из этого промежутка. В частности, если $x + x_0$, то, в силу (22), это значение y будет $y = y_0$. Мы доказали, таким образом, существование в промежутке $(x_0 - m,\ x_0 + m)$ определенной функции $y(x)$, являющейся решением уравнения (21) и удовлетворяющей условию $y(x_0) = y_0$. Иначе говоря, из предыдущих рассуждений следует, что при всяком фиксированном x из промежутка $(x_0 - m,\ x_0 + m)$ уравнение (21) имеет единственный корень, лежащий внутри промежутка $(y_0 - l,\ y_0 + l)$.

Покажем теперь, что найденная функция $y(x)$ будет непрерывной при $x = x_0$. Действительно, при любом заданном малом положительном ε числа $F(x_0,\ y_0 - \varepsilon)$ и $F(x_0,\ y_0 + \varepsilon)$ будут, в силу (25), разных знаков, а следовательно, будет существовать такое положительное η, что $F(x, y_0 - \varepsilon)$ и $F(x,\ y_0 + \varepsilon)$ — разных знаков, если только $|x - x_0| < \eta$, т. е. иначе говоря, при $|x - x_0| < \eta$ корень уравнения (21), т. е. значение найденной функции $y(x)$, удовлетворяет условию $|y - y_0| < \varepsilon$, что доказывает непрерывность $y(x)$ при $x = x_0$.

Покажем теперь существование производной $y'(x)$ при $x = x_0$. Пусть $\Delta x = x - x_0$ и пусть $\Delta y = y - y_0$ есть соответствующее приращение y. Следовательно, $x = x_0 + \Delta x$ и $y = y_0 + \Delta y$ удовлетворяют уравнению (21), т. е. $F(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) = 0$, и в силу (22) можем написать

$$F(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta y) - F(x_0,\ y_0) = 0.$$

Принимая во внимание непрерывность частных производных, можем переписать это равенство так [68]:

$$[F'_{x_0}(x_0, y_0) + \varepsilon_1]\Delta x + [F'_{y_0}(x_0, y_0) + \varepsilon_2]\Delta y = 0, \tag{27}$$

где ε_1 и $\varepsilon_2 \to 0$, если Δx и $\Delta y \to 0$, и где мы обозначили через $F'_{x_0}(x_0,\ y_0)$ и $F'_{y_0}(x_0, y_0)$ значения частных производных при $x = x_0$, $y = y_0$. Из доказанной выше непрерывности следует, что $\Delta y \to 0$, если $\Delta x \to 0$.

Уравнение (27) дает нам

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F'_{x_0}(x_0, y_0) + \varepsilon_1}{F'_{y_0}(x_0, y_0) + \varepsilon_2};$$

переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим

$$y'(x_0) = -\frac{F'_{x_0}(x_0, y_0)}{F'_{y_0}(x_0, y_0)}.$$

Мы доказали непрерывность и существование производной функции $y(x)$ только при $x = x_0$. Если мы возьмем какое-либо другое значение x из промежутка $(x_0 - m,\ x_0 + m)$ и соответствующее значение y из промежутка $(y_0 - l,\ y_0 + l)$, являющееся корнем уравнения (21), то для этой пары значений x, y опять выполнены все условия нашей теоремы, и в силу доказанного $y(x)$ будет непрерывной и будет иметь производную при взятом значении x из упомянутого промежутка.

Совершенно так же, как и выше, формулируется и доказывается теорема о существовании неявной функции $z(x, y)$, определяемой уравнением

$$\Phi(x, y, z) = 0.$$

Рассмотрим теперь систему

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0, \tag{28}$$

определяющую y и z как функции от x.

Для этого случая имеет место

Теорема. *Пусть $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ — решение системы* (28), *пусть $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$ и их частные производные первого порядка — непрерывные функции (x, y, z) при всех значениях этих переменных, достаточно близких к (x_0, y_0, z_0), и пусть выражение*

$$\varphi'_y(x, y, z)\psi'_z(x, y, z) - \varphi'_z(x, y, z)\psi'_y(x, y, z)$$

отлично от нуля при $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$. *При этом существует при всех значениях* x, *достаточно близких к* x_0, *одна определенная система двух функций* $y(x)$, $z(x)$, *удовлетворяющая уравнениям* (28) *непрерывных, имеющих производные первого порядка и удовлетворяющих условию* $y(x_0) = y_0$, $z(x_0) = z_0$.

На доказательстве этой теоремы мы останавливаться не будем. В третьем томе мы рассмотрим общий случай любого числа функций с любым числом переменных.

160. Кривые в пространстве и поверхности. Начнем с указания некоторых фактов, известных из аналитической геометрии. Пусть трехмерное пространство отнесено к прямолинейным прямоугольным осям OX, OY, OZ, так что всякая точка определяется координатами x, y, z. Пусть a, b, c — какая-либо тройка чисел, причем по крайней мере одно из чисел отлично от нуля. Такой тройке чисел соответствует два прямо противоположных направления в пространстве, у которых *направляющие косинусы* (косинусы углов, образованных этими направлениями с осями OX, OY, OZ) пропорциональны числам (a, b, c).

Упомянутые косинусы выражаются формулами:

$$\cos\alpha = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad \cos\beta = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}},$$
$$\cos\gamma = \frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Выбор знака у радикала (верхнего или нижнего) определяет одно из прямо противоположных направлений.

Пусть имеются две тройки чисел (a, b, c) и (a_1, b_1, c_1). Равенство

$$aa_1 + bb_1 + cc_1 = 0$$

выражает *условие перпендикулярности* соответствующих этим тройкам чисел направлений.*

Как известно из аналитической геометрии, всякому уравнению с тремя переменными

$$F(x, y, z) = 0 \tag{29}$$

* Имеются в виду вектора с координатами (a, b, c) и (a_1, b_1, c_1).

или в явной форме

$$z = f(x, y) \tag{30}$$

соответствует, вообще говоря, некоторая поверхность в пространстве, отнесенном к прямоугольным осям OX, OY, OZ.

Линия в пространстве может быть рассматриваема, как пересечение некоторых двух поверхностей, и может быть, следовательно, определена совокупностью двух уравнений

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0. \tag{31}$$

Иначе кривую можно определить в параметрической форме уравнениями:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \omega(t). \tag{32}$$

Длина дуги кривой, как и в случае плоской кривой, определяется как предел периметров ломаных линий, вписанных в эту дугу, при беспредельном уменьшении каждой из сторон этой ломаной. Рассуждения, которые мы не будем приводить, так как они совершенно аналогичны рассуждениям [103] в случае плоской кривой, показывают, что длина дуги выражается определенным интегралом

$$s = \int\limits_{(m_1)}^{(M_2)} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \omega'^2(t)}dt, \tag{33}$$

где t_1 и t_2 суть значения параметра t, соответствующие концам M_1 и M_2 дуги, и дифференциал дуги имеет выражение

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}. \tag{34}$$

Если роль параметра t играет длина дуги s кривой, отсчитываемая от некоторой определенной точки ее, что совершенно так же, как это мы делали в случае плоской кривой [70], можно показать, что производные $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ равны направляющим косинусам касательной к кривой, т. е. равны косинусам углов, образованных положительным направлением этой касательной с осями координат.

Принимая во внимание (32) и (33), мы получаем для этих косинусов формулы:

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{\varphi'(t)}{\pm\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}},\\ \cos\beta &= \frac{\psi'(t)}{\pm\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}},\\ \cos\gamma &= \frac{\omega'(t)}{\pm\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}}\end{aligned}\right\} \tag{35}$$

при соответствующем выборе знака у радикала, зависящем от выбора направления касательной.

Выше мы считали, что функции (32) имеют непрерывные производные и по крайней мере одна из них отлична от нуля. Таким образом, направляющие косинусы касательной к кривой в точке (x, y, x) пропорциональны $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\omega'(t)$ или dx, dy, dz и уравнение касательной может быть написано в виде

$$\frac{X-x}{dx} = \frac{Y-y}{dy} = \frac{Z-z}{dz}, \tag{36$_1$}$$

или

$$\frac{X-x}{\varphi'(t)} = \frac{Y-y}{\psi'(t)} = \frac{Z-z}{\omega'(t)}. \tag{36$_2$}$$

Введем теперь новое понятие, а именно понятие касательной плоскости к поверхности

$$F(x, y, z) = 0. \tag{37}$$

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — некоторая точка этой поверхности и L — линия (32), лежащая на поверхности и проходящая через точку M_0, так что при некотором $t = t_0$ имеем $x_0 = \varphi(t_0)$, $y_0 = \psi(t_0)$, $z_0 = \omega(t_0)$. Предполагаем, что у функции (37) в точке M_0 и ее окрестности имеются непрерывные частные производные по x, y и z, причем по крайней мере одна из этих производных отлична от нуля. Пусть аналогичное свойство имеют и функции (32) при $t = t_0$ и в окрестности этого значения.

Если подставим (32) в левую часть уравнения (37), то получим тождество по t, поскольку L лежит на поверхности (37). Дифференцируя это тождество по t, получим

$$F_x(x,y,z)\varphi'(t) + F_y(x,y,z)\psi'(t) + F_z(x,y,z)\omega'(t) = 0,$$

где вместо x, y, z надо подставить функции (32), и в точке M_0

$$F_x(x_0,y_0,z_0)\varphi'(t_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)\psi'(t_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)\omega'(t_0)=0. \quad (38)$$

Как мы видели, $\varphi'(t_0)$, $\psi'(t_0)$, $\omega'(t_0)$ пропорциональны направляющим косинусам касательной к линии L в точке M_0, и равенство (38) показывает, что касательная в точке M_0 к любой линии L, лежащей на поверхности (37) и проходящей через точку M_0, перпендикулярна к некоторому определенному, не зависящему от выбора L направлению, у которого направляющие косинусы пропорциональны числам, $F_x(x_0,y_0,z_0)$, $F_y(x_0,y_0,z_0)$, $F_z(x_0,y_0,z_0)$. Мы видим, таким образом, что касательные в точке M_0 ко всем линиям, лежащим на поверхности и проходящим через точку M_0, лежат в одной и той же плоскости. Эта плоскость называется *касательной плоскостью* к поверхности (37) в точке M_0. Она проходит, очевидно, через точку M_0. Пусть

$$A(X-x_0) + B(Y-y_0) + C(Z-z_0) = 0 \quad (39)$$

— уравнение этой плоскости. Как известно из аналитической геометрии, коэффициенты A, B, C должны быть пропорциональны направляющим косинусам нормали к этой плоскости, т. е. в данном случае пропорциональны $F_x(x_0,y_0,z_0)$, $F_y(x_0,y_0,z_0)$, $F_z(x_0,y_0,z_0)$. В дальнейшем вместо точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ мы применим общее обозначение точки $M(x,y,z)$. Таким образом, A, B и C должны быть пропорциональны $F'_x(x_0,y_0,z_0)$, $F'_y(x_0,y_0,z_0)$, $F'_z(x_0,y_0,z_0)$, и, следовательно, уравнение касательной плоскости окончательно может быть написано в виде:

$$F'_x(x,y,z)(X-x) + F'_y(x,y,z)(Y-y)+ \\ + F'_z(x,y,z)(Z-z) = 0, \quad (40)$$

где X, Y, Z — текущие координаты касательной плоскости, а x, y, z — координаты точки касания M.

Нормаль к касательной плоскости, проходящей через точку касания M, называется *нормалью к поверхности*. Ее направляющие косинусы пропорциональны, как мы сейчас видели, частным производным $F'_x(x,y,z)$, $F'_y(x,y,z)$, $F'_z(x,y,z)$, и уравнение ее, следовательно, будет

$$\frac{X-x}{F'_x(x,y,z)} = \frac{Y-y}{F'_y(x,y,z)} = \frac{Z-z}{F'_z(x,y,z)}. \tag{41}$$

Если поверхность задана уравнением в явной форме: $z = f(x,y)$, то уравнение (37) будет иметь вид

$$F(x,y,z) = f(x,y) - z = 0,$$

и, следовательно,

$$F'_x(x,y,z) = f'_x(x,y), \quad F'_y(x,y,z) = f'_y(x,y), \quad F'_z(x,y,z) = -1.$$

Обозначая, как это обыкновенно делается, частные производные $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$, буквами p и q, получим уравнение касательной плоскости

$$p(X-x) + q(Y-y) - (Z-z) = 0 \tag{42}$$

и нормали к поверхности

$$\frac{X-x}{p} = \frac{Y-y}{q} = \frac{Z-z}{-1}. \tag{43}$$

Для эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

уравнение касательной плоскости в некоторой его точке (x,y,z) будет

$$\frac{2x}{a^2}(X-x) + \frac{2y}{b^2}(Y-y) + \frac{2z}{c^2}(Z-z) = 0$$

или

$$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} + \frac{zZ}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}.$$

Правая часть этого уравнения равна единице, так как координаты (x, y, z) точки касания должны удовлетворять уравнению эллипсоида, и окончательно уравнение касательной плоскости будет

$$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} + \frac{zZ}{c^2} = 1.$$

§ 16. ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА. МАКСИМУМЫ И МИНИМУМЫ ФУНКЦИИ ОТ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

161. Распространение формулы Тейлора на случай функции от нескольких независимы переменных. Для простоты письма ограничимся случаем функции $f(x, y)$ от двух независимых переменных. *Формула Тейлора* даст разложение $f(a+h,\ b+k)$ по степеням h и k приращений независимых переменных [**127**]. Введем новую независимую переменную t, полагая

$$x = a + ht,\ y = b + kt. \tag{1}$$

Мы получим, таким образом, функцию одной независимой переменной t:

$$\varphi(t) = f(x, y) = f(a + ht,\ b + kt),$$

причем

$$\varphi(0) = f(a, b) \quad \text{и} \quad \varphi(1) = f(a + h,\ b + k). \tag{2}$$

Пользуясь формулой Маклорена с остаточным членом Лагранжа, можем написать [127]:

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(0)}{1!} + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \ldots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} + \frac{\varphi^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} (0 < \theta < 1). \tag{3}$$

Выразим теперь производные $\varphi^{(p)}(0)$ и $\varphi^{(n+1)}(\theta)$ через функцию $f(x, y)$. Из формулы (1) мы видим, что x и y суть линейные функции независимой переменной t и

$$dx = hdt, \quad dy = kdt.$$

Мы можем поэтому пользоваться символической формулой при определении дифференциала любого порядка функции $\varphi(t)$ [156]:

$$d^p\varphi(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{(p)} f(x,y) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(p)} f(x,y)dt^p,$$

откуда

$$\varphi^{(p)}(t) = \frac{dp_\varphi(t)}{dt^p} = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(p)} f(x,y).$$

При $t = 0$ имеем $x = a$ и $y = b$, при $t = \theta$ имеем $x = a + \theta h$ и $y = b + \theta k$, а потому

$$\varphi^{(p)}(0) = \left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b}\right)^{(p)} f(a,b) = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(p)} f(x,y)\Big|_{\substack{x=a\\y=b}},$$

$$\varphi^{(n+1)}(\theta) = \left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b}\right)^{(n+1)} f(a+\theta h, b+\theta k).$$

Подставляя эти выражения в формулу (3) и пользуясь еще формулами (2), получим окончательно *формулу Тейлора*

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + \left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b}\right)f(a,b) +$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b}\right)^{(2)} f(a,b) + \ldots + \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b}\right)^{(n)} f(a,b) +$$
$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b}\right)^{(n+1)} f(a+\theta h, b+\theta k). \quad (4)$$

Заменяя в этой формуле a на x, b на y и обозначая приращения h и k независимых переменных через dx и dy, а приращение функции, т. е. $f(x+dx, y+dy) - f(x,y)$, через $\Delta f(x,y)$, можем написать формулу в следующем виде:

$$\Delta f(x,y) = df(x,y) + \frac{d^2f(x,y)}{2!} + \ldots + \frac{d^nf(x,y)}{n!} + \left[\frac{d^{n+1}f(x,y)}{(n+1)!}\right]_{\substack{x+\theta dx\\y+\theta dy}}.$$

Правая часть этой формулы содержит дифференциалы различных порядков функции $f(x, y)$, а в последнем члене указаны те значения независимых переменных, которые надо подставить в производные $(n+1)$-го порядка, входящие в этот член. Аналогично случаю функции от одной независимой переменной формула Маклорена, дающая разложение функции $f(x, y)$ по степеням x, y, выводится из формулы Тейлора (4), если положить там

$$a = 0,\ b = 0; \quad h = x,\ k = y.$$

При выводе формулы (4) мы предполагали, что функция $f(x,\ y)$ имеет непрерывные частные производные до порядка $(n+1)$ в некоторой открытой области, содержащей отрезок прямой, соединяющий точки $(a,\ b)$ и $(a+h,\ b+k)$. При изменении t от нуля до единицы переменная точка $x = a + ht,\ y = b + kt$ описывает упомянутый отрезок. При $n = 0$ получаем формулу конечных приращений

$$f(a+h,\ b+k) - f(a,\ b) = hf'_a(a+\theta h,\ b+\theta k) + kf'_b(a+\theta h,\ b+\theta k).$$

Отсюда, как и в [63], непосредственно следует, что *если внутри некоторой области частные производные первого порядка равны везде нулю, то функция сохраняет внутри упомянутой области постоянное значение.*

162. Необходимые условия максимума и минимума функции. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в точке (a, b) и некоторой ее окрестности. Аналогично случаю одной независимой переменной мы будем говорить, что *функция $f(x, y)$ двух независимых переменных достигает максимума в точке (a, b), если значение $f(a, b)$ не меньше всех смежных значений функции*, т. е. *если*

$$\Delta f = f(a+h,\ b+k) - f(a, b) \leqslant 0, \tag{5}$$

*при всех h и k достаточно малых по абсолютной величине.**

* Также, как и в случае функции одной переменной, существует окрестность точки (a, b), во всех точках которой, значения функции меньше, чем в точке (a, b).

Точно так же мы будем говорить, что *функция $f(x, y)$ достигает минимума при $x = a$* и $y = b$, если

$$\Delta f = f(a + h,\ b + k) - f(a,\ b) \geqslant 0 \qquad (5_1)$$

при всех значениях h и k достаточно малых по абсолютной величине.

Итак, пусть $x = a$, $y = b$ — значения независимых переменных, при которых функция $f(x,\ y)$ достигает максимума или минимума. Рассмотрим функцию $f(x, b)$ одной независимой переменной x. По условию она должна достигать максимума или минимума при $x = a$, а потому ее производная по x при $x = a$ должна или обращаться в нуль или же не существовать [58]. Таким же рассуждением убедимся, что и производная функция $f(a,\ y)$ по y должна или обращаться в нуль или не существовать при $y = b$. Мы приходим, таким образом, к следующему необходимому условию существования максимума или минимума: *функция $f(x, y)$ двух независимых переменных может достигать максимума или минимума лишь при тех значениях x и y, при которых частные производные первого порядка $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ и $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y)}$ обращаются в нуль или не существуют.*

Совершенно так же, меняя только x или только y, мы можем, пользуясь сказанным в [58], утверждать, что при наличии производных второго порядка необходимым условием максимума являются неравенства $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} \leqslant 0$ и $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \leqslant 0$, а необходимым условием минимума — неравенства $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} \geqslant 0$ и $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} \geqslant 0$.

Предыдущие рассуждения остаются в силе и в случае функции любого числа независимых переменных. Мы можем высказать, таким образом, следующее общее правило:

Функция нескольких независимых переменных может достигать максимума или минимума лишь при тех значениях независимых переменных, при которых частные производные первого порядка обращаются в нуль или не существуют. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением того случая, когда указанные частные производные существуют.

Дифференциал первого порядка равен сумме произведений частных производных по независимым переменным на дифференциалы соответствующих независимых переменных [153], и мы мо-

жем поэтому утверждать, что *при значениях независимых переменных, при которых функция имеет максимум или минимум, ее дифференциал первого порядка должен обращаться в нуль.* Эта форма необходимого условия удобная, потому что выражения первого дифференциала не зависят от выбора переменных [153]. Приравнивая нулю частные производные первого порядка, мы получаем систему уравнений, откуда определяются те значения независимых переменных, при которых функция может достигать максимума или минимума. Для полного решения вопроса необходимо еще произвести исследование полученных значений для того, чтобы решить, достигает ли функция действительно при этих значениях независимых переменных максимума или минимума, а если достигает, то чего именно — максимума или минимума. В следующем номере мы покажем, как производится это исследование в случаях функции двух независимых переменных.

163. Исследование максимума и минимума функции двух независимых переменных. Пусть система уравнений

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0, \tag{6}$$

выражающая необходимое условие максимума или минимума, дала нам значения $x = a$ и $y = b$, которые надо исследовать. Предположим, что $f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка в точке (a,b) и некоторой ее окрестности.

Согласно формуле Тейлора (4), при $n = 2$ можем написать

$$f(a+h,\ b+k) = f(a,b) + \frac{\partial f(a,b)}{\partial a}h + \frac{\partial f(a,b)}{\partial b}k + \\ + \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}hk + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}k^2\right]_{\substack{x=a+\theta h \\ y=b+\theta k}}.$$

Принимая во внимание, что $x = a$ и $y = b$ являются решением системы (6), можем переписать это равенство так:

$$\Delta f = f(a+h,\ b+k) - f(a,b) =$$

$$= \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}h^2 + 2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}hk + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}k^2\right]_{\substack{x=a+\theta h\\ y=b+\theta k}}. \quad (7)$$

Положим

$$r = \sqrt{h^2+k^2}, \quad h = r\cos\alpha, \quad k = r\sin\alpha.$$

При малых по абсолютному значению h и k, и r будет мало, и наоборот, и условия h и $k \to 0$, с одной стороны, и $r \to 0$, с другой — между собой равносильны.

Формула (7) имеет вид

$$\Delta f = \frac{r^2}{2!}\left[\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}\cos^2\alpha + 2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}\cos\alpha\sin\alpha + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}\sin^2\alpha\right]_{\substack{x=a+\theta h\\ y=b+\theta k}}. \quad (8)$$

Принимая во внимание непрерывность производных второго порядка и считая h и k или, что то же, r бесконечно малыми, можем утверждать, что производные в правой части формулы (8), вычисленные при значениях $a+\theta h$, $b+\theta k$, бесконечно мало отличающихся от a, b, сами бесконечно мало отличаются от чисел

$$\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial a^2} = A, \quad \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial a \partial b} = B, \quad \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial b^2} = C,$$

а потому коэффициенты при $\cos^2\alpha$, $\cos\alpha\sin\alpha$, $\sin^2\alpha$ в квадратной скобке формулы (8) можно заменить соответственно на $A+\varepsilon_1$, $2B+\varepsilon_2$, $C+\varepsilon_3$, где ε_1, ε_2, ε_3 суть величины, бесконечно малые одновременно с h и k (или с r).

Формулу (8) можно после этого переписать так:

$$\Delta f = \frac{r^2}{2!}\left[A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha + \varepsilon\right], \quad (9)$$

где

$$\varepsilon = \varepsilon_1\cos^2\alpha + 2\varepsilon_2\cos\alpha\sin\alpha + \varepsilon_3\sin^2\alpha$$

есть величина, бесконечно малая одновременно с h и k (или с r).

Из определения максимума и минимума следует, что если правая часть равенства (9) при всех достаточно малых значениях r сохраняет знак $(-)$, то значениям $x = a$ и $y = b$ соответствует максимум функции $f(x, y)$; если она сохраняет знак $(+)$, то указанным значениям будет соответствовать минимум функции; если же, наконец, при сколь угодно малых значениях r правая часть равенства (9) может иметь как знак $(+)$, так и знак $(-)$, то значениям функции $x = a$ и $y = b$ не соответствуют ни максимум, ни минимум функции.

При исследовании знака правой части равенства (9) могут представиться следующие четыре случая:

I. Если трехчлен

$$A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha \tag{10}$$

не обращается в нуль ни при одном значении α, то как непрерывная функция от α он сохраняет неизменный знак [**55**]. Пусть это будет знак $(+)$. В промежутке $(0,\ 2\pi)$ эта непрерывная функция достигает своего наименьшего (положительного) значения m. В силу периодичности $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ это же наименьшее значение m будет иметь место и для любых значений α. Величина $|\varepsilon|$ при всех достаточно малых значениях r меньше m, и при этом знак правой части равенства (9) определяется знаком трехчлена (10), т. е. будет $(+)$; в этом случае мы будем иметь минимум.

II. Положим теперь, что трехчлен (10), не обращаясь ни при каких значениях α в нуль, сохраняет знак $(-)$. Пусть — m наименьшее (отрицательное) значение этого трехчлена в промежутке $(0,\ 2\pi)$ изменения α. Величина $|\varepsilon|$ при достаточно малых значениях r меньше m, и при этом знак правой части равенства (9) будет постоянно $(-)$, т. е. в этом случае мы будем иметь максимум.

III. Положим теперь, что трехчлен (10) меняет знак. Пусть при $\alpha = \alpha_1$ он равен положительному числу $+m_1$, а при $\alpha = \alpha_2$ — отрицательному числу — m_2. При всех достаточно малых значениях r $|\varepsilon|$ будет меньше m_1 и m_2. При таких значениях r и при $\alpha = \alpha_1$ и α_2 знак правой части равенства (9) будет определяться знаком трехчлена (10), т. е. будет $(+)$ при $\alpha = \alpha_1$ и $(-)$ при $\alpha = \alpha_2$. Таким образом, в рассматриваемом случае знак правой части равенства

(9) может быть и (+) и (–) при сколь угодно малых значениях r, т. е. в этом случае мы не будем иметь ни максимума, ни минимума.

IV. Положим, наконец, что трехчлен (10), сохраняя неизменный знак, может обращаться в нуль при некоторых значениях α. В этом случае без дальнейшего исследования знака ε мы не можем сделать никаких заключений о знаке правой части равенства (9), и этот случай остается сомнительным в нашем исследовании.

Итак, все свелось к исследованию знака трехчлена (10) при изменении α, и мы укажем простые признаки, позволяющие судить, с каким из указанных четырех случаев мы имеем дело.

1. Положим сначала, что $A \neq 0$. Трехчлен (10) мы можем представить в виде:

$$\frac{(A\cos\alpha + B\sin\alpha)^2 + (AC - B^2)\sin^2\alpha}{A}. \tag{11}$$

Если $AC - B^2 > 0$, то числитель написанной дроби представляет собою сумму двух положительных слагаемых, которые не могут обратиться в нуль одновременно. Действительно, второе слагаемое обращается в нуль, только если $\sin\alpha = 0$, но при этом $\cos\alpha = \pm 1$, и первое слагаемое обращается в $A^2 \neq 0$. Таким образом, в рассматриваемом случае знак выражения (11) совпадает со знаком A, и, следовательно, при $A > 0$ будем иметь случай (I), т. е. минимум, а при $A < 0$ — случай (II), т. е. максимум.

2. Предполагая по-прежнему $A \neq 0$, положим, что $AC - B^2 < 0$. Числитель дроби (11) будет иметь знак (+) при $\sin\alpha = 0$ и знак (–) при $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{B}{A}$, а потому при указанных условиях мы будем иметь случай (III), т. е. не будет ни максимума, ни минимума.

3. Если при $A \neq 0$ мы положим, что $AC - B^2 = 0$, то числитель дроби (11) приводится к первому слагаемому и, сохраняя неизменный знак (+), обращается в нуль при $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{B}{A}$, т. е. при этих условиях мы имеем дело с сомнительным случаем (IV).

4. Положим, что $A = 0$, но $B \neq 0$. Трехчлен (10) имеет тогда вид: $\sin\alpha(2B\cos\alpha + C\sin\alpha)$. При значениях α, близких к нулю, выражение, стоящее в круглых скобках, сохраняет неизменный знак, совпадающий со знаком B, а первый множитель $\sin\alpha$ имеет разные знаки, смотря по тому, будет ли α больше или меньше нуля, т. е. имеет место случай (III) — ни максимума, ни минимума.

5. Предположим, наконец, что $A = B = 0$. Тогда трехчлен (10) приведется к одному слагаемому $C \sin^2 \alpha$ и, следовательно, не меняя знака, может обращаться в нуль, т. е. мы имеем дело с сомнительным случаем.

Принимая во внимание, что в случае 4 будет $AC - B^2 < 0$, в случае 5 имеем $AC - B^2 = 0$, можем высказать следующее правило: *для нахождения максимумов и минимумов внутри области при предположении, что функция $f(x, y)$ непрерывна там и имеет непрерывные производные до второго порядка, надо составить частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(a, y)$ и решить систему уравнений*

$$f'_x(x, y) = 0, \quad f'_y(x, y) = 0.$$

Пусть $x = a$, $y = b$ — *какое-нибудь решение этой системы. Положив*

$$\frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial a^2} = A, \quad \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial a \partial b} = B, \quad \frac{\partial^2 f(a, b)}{\partial b^2} = C,$$

производим исследование решения по следующей схеме:

<table>
<tr><td>$AC - B^2$</td><td colspan="2">$+$</td><td>$-$</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">A</td><td>$+$</td><td>$-$</td><td rowspan="2">ни мин.
ни макс.</td><td rowspan="2">сомнит.
случай</td></tr>
<tr><td>мин.</td><td>макс.</td></tr>
</table>

164. Примеры. 1. Рассмотрим поверхность $z = f(x, y)$. Уравнение касательной плоскости к ней будет [160]:

$$p(X - x) + q(Y - y) - (Z - z) = 0,$$

где p и q обозначают частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$.

Если при некоторых значениях $x = a$ и $y = b$ функция z достигает максимума или минимума, то соответствующая точка называется *вершиною* поверхности: в такой точке касательная плоскость должна быть параллельна плоскости XY, т. е. частные производные p и q должны обращаться в нуль, и поверхность должна быть расположена по одну сторону от касательной плоскости, вблизи точки касания (рис. 163).

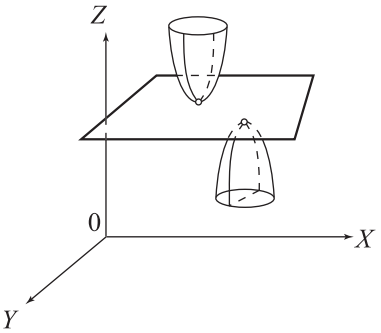

Рис. 163.

Но может случиться, что p и q в некоторой точке обращаются в нуль, т. е. касательная плоскость параллельна плоскости XY, но поверхность вблизи этой точки расположена по обе стороны от касательной плоскости, и в этом случае при соответствующих значениях x и y функция z не будет достигать ни максимума, ни минимума.

Укажем на еще одну возможность, которая может осуществиться в случае, названном нами в предыдущем сомнительным. Положим, что при $x = a$, $y = b$ касательная плоскость параллельная плоскости XY, и поверхность расположена по одну сторону от касательной плоскости, но имеет с нею общую линию, проходящую через точку касания. В этом случае разность

$$f(a+h,\ b+k) - f(a,\ b),$$

не меняя знака при достаточно малых по абсолютному значению h и k, будет обращаться в нуль при h и k, отличных от нуля. Нетрудно осуществить этот случай, представив себе, например, круговой цилиндр, ось которого параллельна плоскости XY. В этом случае также говорят, что функция $f(x, y)$ имеет максимум или минимум при $x = a$ и $y = b$ [162].

Поверхность

$$2z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

есть гиперболический параболоид. Приравнивая нулю частные производные от z по x и y, получим $x = y = 0$, и касательная плоскость к поверхности в начале координат будет совпадать с плоскостью XY. Составим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{b^2},$$

и, следовательно,

$$AC - B^2 = -\frac{1}{a^2 b^2} < 0,$$

т. е. при $x = y = 0$ функция z не достигает ни максимума, ни минимума, и вблизи начала координат поверхность расположена по обе стороны от касательной плоскости (рис. 164).

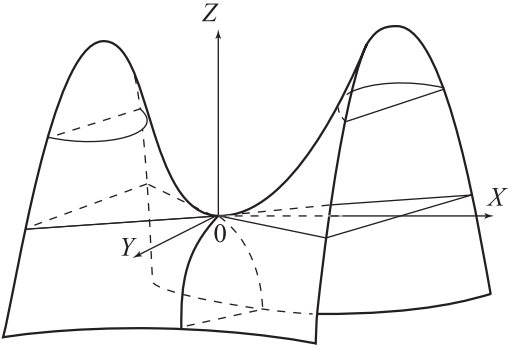

Рис. 164.

2. На плоскости даны n точек $M_i(a_i,\ b_i)(i = 1, 2,\ \ldots,\ n)$. Требуется найти точку M такую, чтобы сумма произведений данных положительных чисел m_i на квадраты расстояний ее до точек M_i достигала минимума. Пусть (x, y) — координаты искомой точки M. Упомянутая выше сумма будет:

$$w = \sum_{i=1}^{n} m_i[(x - a_i)^2 + (y - b_i)^2].$$

Приравнивая нулю частные производные w'_x и w'_y, получаем

$$x = \frac{m_1a_1 + m_2a_2 + \ldots + m_na_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}, \quad y = \frac{m_1b_1 + m_2b_2 + \ldots + m_nb_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}. \quad (12)$$

Нетрудно проверить, что в рассматриваемом случае A и $AC - B^2$ будут больше нуля, и, следовательно, найденным значениям x и y действительно будет соответствовать минимум w. Этот минимум является наименьшим значением w на плоскости (x, y), ибо $w \to +\infty$ при беспредельном удалении точки (x, y).

Если M_i — материальные точки и m_1 — их массы, то *формула* (12) *определяет координаты центра тяжести системы точек* M_i.

165. Дополнительные замечания о нахождении максимумов и минимумов. Предыдущие рассуждения распространяются и на случай большего числа независимых переменных. Пусть, например, дана функция трех независимых переменных $f(x, y, z)$. Для нахождения тех значений независимых переменных, при которых эта функция достигает максимума или минимума, надо решить систему трех уравнений с тремя неизвестными [162]

$$f'_x(x, y, z) = 0, \quad f'_y(x, y, z) = 0, \quad f'_z(x, y, z) = 0. \quad (13)$$

Пусть $x = a$, $y = b$, $z = c$ — одно из решений этой системы. Наметим кратко путь для исследования этих значений. Формула Тейлора дает нам приращение функции в виде суммы однородных полиномов, расположенных по степеням приращений независимых переменных:

$$\Delta f = h\frac{\partial f(a,b,c)}{\partial a} + k\frac{\partial f(a,b,c)}{\partial b} + l\frac{\partial f(a,b,c)}{\partial c} + \\ + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b} + l\frac{\partial}{\partial c}\right)^{(2)} f(a,b,c) + \ldots + \\ + \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b} + l\frac{\partial}{\partial c}\right)^{(n+1)} f(a+\theta h, b+\theta k, c+\theta l) (0<\theta<1). \quad (14)$$

Значения $x = a$, $y = b$, $z = c$ удовлетворяют уравнениям (13). Поэтому

$$h\frac{\partial f(a,b,c)}{\partial a} + k\frac{\partial f(a,b,c)}{\partial b} + l\frac{\partial f(a,b,c)}{\partial c} = 0.$$

Если совокупность членов второй степени относительно h, k, l

$$\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial a} + k\frac{\partial}{\partial b} + l\frac{\partial}{\partial c}\right)^{(2)} f(a,b,c) \quad (15)$$

обращается в нуль только при $h = k = l = 0$, то знак правой части (14) при h, k, l, достаточно малых по абсолютному значению, совпадает со знаком выражения (15), и если этот знак $(+)$, то $f(a,b,c)$ является минимумом функции $f(x,y,z)$, если же $(-)$, то мы имеем дело с максимумом. Если выражение (15) может иметь разные знаки, то $f(a,b,c)$ не является ни максимумом, ни минимумом функции. Если же, наконец, выражение (15), не меняя знака, обращается в нуль при некоторых значениях h, k, l, отличных от $h = k = l = 0$, то этот случай остается сомнительным и требуется исследование тех членов правой части (14), которые содержат h, k и l в степени выше второй.

Приведем полное исследование этого сомнительного случая в частном примере функции двух независимых переменных

$$u = x^2 - 2xy + y^2 + x^3 + y^3.$$

Значения $x = y = 0$ обращают в нуль частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$. Кроме того, имеем

$$A = \frac{\partial^2 u}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=0\\y=0}} = 2, \quad B = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\bigg|_{\substack{x=0\\y=0}} = -2, \quad C = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\bigg|_{\substack{x=0\\y=0}} = 2,$$

$$AC - B^2 = 0,$$

т. е. мы имеем дело с сомнительным случаем. Характерная особенность этого случая состоит в том, что совокупность членов второго измерения в выражении функции u представляет собою полный квадрат, и мы можем в рассматриваемом примере написать

$$u = (x - y)^2 + (x^3 + y^3).$$

При $x = y = 0$ и u обращается в нуль. Для исследования знака u при x и y, близких к нулю, введем полярные координаты

$$x = r\cos\alpha, \quad y = r\sin\alpha.$$

Подставляя эти значения x и y, получим

$$u = r^2[(\cos\alpha - \sin\alpha)^2 + r(\cos^3\alpha + \sin^3\alpha)].$$

При любом значении α в промежутке $(0,\ 2\pi)$, отличном от $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{5\pi}{4}$,

$$\cos\alpha - \sin\alpha \neq 0,$$

и, следовательно, для всякого такого значения α можно выбрать такое положительное число r_0, что при $r < r_0$ знак выражения, стоящего в квадратных скобках, будет $(+)$. При $\alpha = \frac{\pi}{4}$ этот знак также будет $(+)$, но при $\alpha = \frac{5\pi}{4}$ мы получим знак $(-)$, и, следовательно, при $x = y = 0$ функция u не будет иметь ни максимума, ни минимума.

Рассмотрим еще одну функцию

$$u = (y - x^2)^2 - x^5.$$

Нетрудно проверить, что при $x = y = 0$ частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}$ обращаются в нуль, и что мы имеем дело с сомнительным случаем. Выбирая для x сколь угодно малое значение и полагая $y = x^2$, мы видим, что функция u приведется к $(-x^5)$ и ее знак будет зависеть от знака x, т. е. при $x = y = 0$ функция u не будет достигать ни максимума, ни минимума. Вводя полярные координаты, мы получили бы

$$u = r^2(\sin^2\alpha - 2r\cos^2\alpha\sin\alpha + r^2\cos^4\alpha - r^3\cos^5\alpha),$$

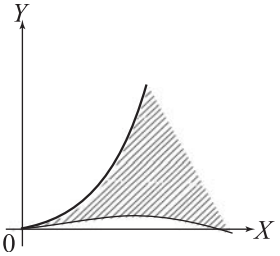

Рис. 165.

и из этого выражения видно, что при всяком значении α, не исключая и значений $\alpha = 0$ и π, можно найти такое положительное число r_0, чтобы было $u > 0$ при $r < r_0$, т. е. на всякой полупрямой, выходящей из начала координат, функция u имеет знак $(+)$ вблизи начала координат. Однако, как мы видим, это не влечет за собой минимума в начале координат, где $u = 0$, ибо нельзя найти упомянутое число r_0 так, чтобы оно было *одно и то же* для всех значений α.

В [76] мы построили кривую $(y - x^2)^2 - x^5 = 0$ и видели, что она в начале координат имеет точку возврата второго рода, а левая часть этого уравнения имеет знак $(-)$ вблизи начала координат, если рассматривать ее значения в точках, заключающихся в заштрихованной области между двумя ветвями кривой (рис. 165).

166. Наибольшее и наименьшее значения функции. Положим, что требуется найти наибольшее значение некоторой функции $f(x, y)$, заданной в определенной области. Указанный в [163] прием позволяет нам найти все максимумы функции *внутри* этой области, т. е. те точки внутри области, в которых значения функции не меньше, чем в соседних с ними точках. Для нахождения наибольшего значениях функции надо принять во внимание значения функции на *границе* (контуре) данной области и сравнить ее максимумы внутри области со значениями на контуре. Наибольшее из всех этих значений и будет *наибольшим значением функции в данной области.* Аналогично находится и *наименьшее* значение функции в данной области. Для разъяснения сказанного рассмотрим пример.

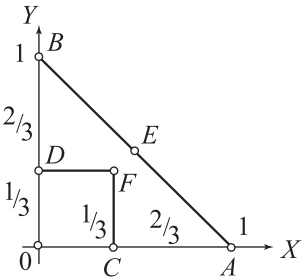

Рис. 166.

На плоскости дан треугольник OAB (рис. 166), *образованный осями OX и OY и прямой*

$$x + y - 1 = 0. \tag{16}$$

Требуется найти такую точку этого треугольника, для которой сумма квадратов ее расстояний до вершин треугольника была бы наименьшей.

Принимая во внимание, что вершины A и B имеют координаты $(1, 0)$ и $(0,\ 1)$, мы

можем написать выражение для вышеупомянутой суммы квадратов расстояний переменой точки (x, y) до вершин треугольника:

$$z = 2x^2 + 2y^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2.$$

Приравнивая нулю частные производные первого порядка, получим $x = y = {}^1/_3$, и нетрудно показать, что этим значениям соответствует минимум $z = {}^4/_3$. Исследует теперь значения z на контуре треугольника. Для исследования z на стороне OA надо в выражении для z положить $y = 0$:

$$z = 2x^2 + (x-1)^2 + 1,$$

причем x может меняться в промежутке $(0,\ 1)$.* Поступая согласно [60], убедимся, что z на стороне OA принимает наименьшее значение $z = {}^5/_3$ в точке C, для которой $x = {}^1/_3$. Точно так же и на стороне OB наименьшее значение z будет равно ${}^5/_3$ и будет достигаться в точке D, для которой $y = {}^1/_3$. Для исследования значений z на стороне AB надо, согласно уравнению (16), в выражении z положить $y = 1 - x$:

$$z = 3x^2 + 3(x-1)^2,$$

причем x может меняться в промежутке $(0,\ 1)$. В данном случае наименьшее значение z будет $z = {}^3/_2$ и будет достигаться в точке E, для которой $x = y = {}^1/_2$. Мы получаем, таким образом, следующую таблицу возможных наименьших значений функции:

$x,\ y$	$\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3},\ 0$	$0,\ \frac{1}{3}$	$\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}$
z	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{3}{2}$

Из этой таблицы мы видим, что наименьшее значение $z = {}^4/_3$ будет достигаться в точке $({}^1/_3,\ {}^1/_3)$. Рассматриваемая задача может быть также решена и для любого треугольника, и искомая точка является центром тяжести треугольника.

167. Относительные максимумы и минимумы. До сих пор мы рассматривали максимумы и минимумы функции, предполагая,

* Функция двух переменных, суженая на отрезок, оказывается функцией одной переменной.

что те переменные, от которых функция зависит, суть независимые переменные. В подобных случаях максимумы и минимумы называются *абсолютными*. Перейдем теперь к рассмотрению того случая, когда переменные, от которых зависит функция, связаны некоторыми соотношениями. В подобных случаях максимумы и минимумы называются *относительными*.*

Пусть требуется найти максимумы и минимумы функции

$$f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m,\ x_{m+1},\ \ldots,\ x_{m+n})$$

от $(m+n)$ переменных x_i, которые связаны n соотношениями

$$\varphi_1(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_m,\ x_{m+1},\ x_{m+n}) = 0 \tag{17}$$

$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

В дальнейшем для сокращения письма мы не будем писать аргументов у функций. Разрешая n соотношений (17) относительно n переменных, например,

$$x_{m+1},\ x_{m+2},\ \ldots,\ x_{m+n},$$

мы выразим их через остальные m независимых переменных

$$x_1,\ x_2, \ldots,\ x_m;$$

подставляя эти выражения в функцию f, получим функцию от m независимых переменных, т. е. придем к задаче отыскания *абсолютных* максимумов и минимумов. Но такое разрешение системы (17) часто бывает практически затруднительным и даже невыполнимым, и мы укажем другой способ решения задачи, *способ множителей Лагранжа*.

Пусть в некоторой точке $M(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{m+n})$ функция f достигает относительного максимума или минимума. Предполагая существование производных в точке M, можем утверждать, что полный дифференциал функции f должен обращаться в нуль в точке M [162]:

$$\sum_{s=1}^{m+n} \frac{\partial f}{\partial x_s} dx_s = 0. \tag{18}$$

* В математической литратуре такие максимумы и минимумы часто называются условными.

С другой стороны, дифференцируя соотношения (17), получим в той же точке M следующие n равенств:

$$\sum_{s=1}^{m+n} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_s} dx = 0 \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots\ n).$$

Умножим эти последние уравнения на неопределенные пока множители

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_n$$

и сложим их все почленно друг с другом и соотношением (18):

$$\sum_{s=1}^{m+n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_s} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_s} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_s} + \ldots + \lambda_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_s} \right) dx_s = 0. \tag{19}$$

Определим эти n множителей так, чтобы коэффициенты при n дифференциалах

$$dx_{m+1},\ dx_{m+2},\ \ldots,\ dx_{m+n}$$

зависимых переменных были равны нулю, т. е. определим λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_n из n равенств

$$\frac{\partial f}{\partial x_s} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_s} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_s} + \ldots + \lambda_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_s} = 0 \tag{20}$$

$$(s = m+1,\ m+2,\ \ldots, m+n).$$

Тогда в левой части соотношения (19) останутся лишь члены, содержащие дифференциалы независимых переменных

$$dx_1,\ dx_2,\ \ldots,\ dx_m,$$

то есть

$$\sum_{s=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_s} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_s} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_s} + \ldots + \lambda_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_s} \right) dx_s = 0. \tag{21}$$

Но дифференциалы dx_1, dx_2, $\ldots$, dx_m независимых переменных суть величины произвольные. Приравнивая один из них единице, а

остальные нулю, мы видим, что из равенства (21) вытекает, что все коэффициенты этого неравенства должны быть равны нулю [158], то есть

$$\frac{\partial f}{\partial x_s} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_s} + \lambda_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_s} + \ldots + \lambda_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_s} = 0 \quad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ m). \quad (22)$$

Надо считать, что во всех предыдущих формулах, начиная с (18), переменные x_s заменены координатами той точки M, в которой f достигает, по предположению, относительного максимума или минимума. В частности, это относится и к уравнениям (20), из которых должны быть определены $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$.

Таким образом, уравнения (22), (20) и (17) выражают необходимое условие того, что в точке $(x_1, x_2, \ldots, x_{m+n})$ достигается относительный максимум или минимум.

Уравнения (22), (20) *и* (17) *дадут нам* $(m + 2n)$ *уравнений для определения* $(m + n)$ *переменных* x_s *и* n *множителей* λ_i.

Из системы (22) *и* (20) *видно, что для определения тех значений переменных* x_s, *при которых функция* f *достигает относительного максимума или минимума, надо приравнять нулю частные производные по всем* x_s *от функции* Φ, *определяемой равенством*

$$\Phi = f + \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 + \ldots + \lambda_n \varphi_n,$$

считая $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ *постоянными, и присоединить* n *уравнений связи* (17).

В следующем параграфе мы кратко изложим вопрос о достаточных условиях.

Отметим, что при выводе указанного правила мы предположили не только существование производных у функций f и φ_i, но и возможность определения множителей $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ из уравнения (20). В связи с этим указанное правило может не дать нам некоторых значений $(x_1, x_2, \ldots, x_{m+n})$, для которых достигается относительный максимум или минимум. Мы выясним сейчас более подробно это обстоятельство в простейших случаях и уточним теорию.

168. Дополнительные замечания. Пусть ищутся относительные максимумы и минимумы функции $f(x, y)$ при одном дополнительном

условии

$$\varphi(x, y) = 0, \tag{23}$$

и предположим, что, например, относительный максимум достигается в точке (x_0, y_0), так что $\varphi(x_0, y_0) = 0$. Пусть $\varphi(x, y)$ имеет непрерывные частные производные первого порядка в точке (x_0, y_0) и ее некоторой окрестности, и предположим, кроме того, что

$$\varphi'_{y_0}(x_0, y_0) \neq 0. \tag{24}$$

При этом уравнение (23) определит единственным образом в окрестности $x = x_0$ функцию $y = \omega(x)$, непрерывную, с непрерывной производной и такую, что $y_0 = \omega(x_0)$ [157]. Подставляя $y = \omega(x)$ в функцию $f(x, y)$, мы можем утверждать, что функция $f[x, \omega(x)]$ одного переменного x должна достигать максимума при $x = x_0$, и, следовательно, ее полная производная по x должна обращаться в нуль при $x = x_0$, то есть

$$f'_{x_0}(x_0, y_0) + f'_{y_0}(x_0, y_0)\omega'(x_0) = 0.$$

Подставляя $y = \omega(x)$ в (23) и дифференцируя по x, получим в точке (x_0, y_0) [69]:

$$\varphi'_{x_0}(x_0, y_0) + \varphi'_{y_0}(x_0, y_0)\omega'(x_0) = 0.$$

Умножая второе уравнение на λ и складывая почленно с первым, получим

$$(f'_{x_0} + \lambda\varphi'_{x_0}) + (f'_{y_0} + \lambda\varphi'_{y_0})\omega'(x_0) = 0.$$

Определяя λ из условия $f'_{y_0} + \lambda\varphi'_{y_0} = 0$, что возможно, в силу (24), будем иметь $f'_{x_0} + \lambda\varphi'_{x_0} = 0$, т. е. придем к двум уравнениям

$$f'_{x_0} + \lambda\varphi'_{x_0} = 0; \quad f'_{y_0} + \lambda\varphi'_{y_0} = 0, \tag{25}$$

к которым надо присоединить еще уравнение $\varphi(x_0, y_0) = 0$, чем и оправдывается способ множителей. Если условие (24) не выполнено, т. е. $\varphi'_{y_0}(x_0, y_0) = 0$, но $\varphi'_{x_0}(x_0, y_0) \neq 0$, то можно повторить все предыдущие рассуждения, меняя x и y ролями. Если в точке (x_0, y_0) мы имеем

$$\varphi'_{x_0}(x_0, y_0) = 0 \quad \text{и} \quad \varphi'_{y_0}(x_0, y_0) = 0, \tag{26}$$

то мы не можем доказать, что точка (x_0, y_0) получается при помощи правила множителей.

Равенства (26) показывают, что точка (x_0, y_0) является особой точкой кривой (23) [76]. Дадим сейчас пример такой задачи, для которой имеют место условия (26) в точке относительного минимума.

Пусть требуется найти кратчайшее расстояние от точки $(-1,\ 0)$ до точек, лежащих на полукубической параболе $y^2 - x^3 = 0$, изображенной на рис. 87 [76]. Таким образом, ищется минимум функции $f = (x+1)^2 + y^2$ при условии $\varphi = y^2 - x^3 = 0$. Геометрически очевидно, что минимум достигается в точке $(0,\ 0)$, лежащей на полукубической параболе, причем эта точка является особой точкой параболы. Способ множителей приведет нас к следующим двум уравнениям:

$$2(x+1) - 3\lambda x^2 = 0, \quad 2y + 2\lambda y = 0.$$

При подстановке $x = 0$, $y = 0$ первое уравнение приводит к нелепому равенству $2 = 0$, а второе — удовлетворено при любом λ. В данном случае способ множителей не приведет нас к точке $(0, 0)$, в которой достигается относительный минимум.

Совершенно аналогично можно показать, что если в точке (x_0, y_0, z_0) функция достигает максимума или минимума, при одном дополнительном условии $\varphi(x, y, z) = 0$, и притом по крайней мере одна из частных производных первого порядка функции φ отлична от нуля в точке (x_0, y_0, z_0), то эта точка может быть получена по способу множителей.

Аналогичны рассуждения и в более общих случаях, но при этом приходится ссылаться на теорему существования неявных функций для систем уравнений, о чем мы упоминали в [157]. Пусть, например, функция $f(x, y, z)$ достигает относительного максимума в точке (x_0, y_0, z_0) при двух дополнительных условиях

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0 \tag{27}$$

и при обычных предположениях существования и непрерывности производных, и пусть мы имеем

$$\varphi'_{y_0}(x_0, y_0, z_0)\psi'_{z_0}(x_0, y_0, z_0) - \varphi'_{z_0}(x_0, y_0, z_0)\psi'_{y_0}(x_0, y_0, z_0) \neq 0. \tag{28}$$

При этом уравнения (27) определяют единственным образом функции: $y = \omega_1(x)$; $z = \omega_2(x)$ такие, что $y_0 = \omega_1(x_0)$, $z_0 = \omega_2(x_0)$. Подставляя эти функции в функцию f, получим функцию одного x, которая имеет максимум при $x = x_0$, откуда следует

$$f'_{x_0}(x_0, y_0, z_0) + f'_{y_0}(x_0, y_0, z_0)\omega'_1(x_0) + f'_{z_0}(x_0, y_0, z_0)\omega'_2(x_0) = 0.$$

Подставляя указанные функции в (27) и дифференцируя по x в точке (x_0, y_0, z_0), получим

$$\varphi'_{x_0} + \varphi'_{y_0}\omega'_1(x_0) + \varphi'_{z_0}\omega'_2(x_0) = 0, \quad \psi'_{x_0} + \psi'_{y_0}\omega'_1(x_0) + \psi'_{z_0}\omega'_2(x_0) = 0.$$

Умножаем эти равенства на λ_1, λ_2 и складываем с предыдущим

$$(f'_{x_0}+\lambda_1\varphi'_{x_0}+\lambda_2\psi'_{x_0})+(f'_{y_0}+\lambda_1\varphi'_{y_0}+\lambda_2\psi'_{y_0})+(f'_{z_0}+\lambda_1\varphi'_{z_0}+\lambda_2\psi'_{z_0}) = 0. \quad (29)$$

Принимая во внимание (28), можем утверждать, что из двух уравнений

$$f'_{y_0} + \lambda_1\varphi'_{y_0} + \lambda_2\psi'_{y_0} = 0, \quad f'_{z_0} + \lambda_1\varphi'_{z_0} + \lambda_2\psi'_{z_0} = 0 \quad (30)$$

мы сможем определить λ_1 и λ_2, и уравнение (29) после этого приведет нас к равенству

$$f'_{x_0} + \lambda_1\varphi'_{x_0} + \lambda_2\psi'_{x_0} = 0, \quad (31)$$

чем и оправдывается способ множителей для данного случая. К уравнениям (30) и (31) надо добавить еще

$$\varphi(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad \text{и} \quad \psi(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

Вместо условия (28) мы могли бы поставить аналогичное условие, дифференцируя не по y_0 и z_0, а по x_0 и y_0 или по x_0 и z_0. Но если не только выражение, стоящее в левой части (28), но и два других аналогичных выражения, которые получаются при дифференцировании по x_0 и y_0 или по x_0 и z_0 равны нулю, то мы не сможем оправдать способ множителей для точки (x_0, y_0, z_0). Можно показать, что во всех рассмотренных в следующем номере примерах мы не можем иметь такого случая. Так, например, в примере I мы имеем одно дополнительное условие (32), и в левой части этого условия по крайней мере одно из чисел A, B и C отлично от нуля. Если, например, $C \neq 0$, то производная левой части (32) по z равна числу C и, следовательно, отлична от нуля во всякой точке (x, y, z). Это и указывает на то, что в рассматриваемом случае всякий ответ должен получаться по способу множителей.

Приведем теперь короткие указания о достаточных условиях относительного максимума или минимума, ограничиваясь тем случаем, когда мы имеем две независимые переменные. Пусть ищутся относительные максимумы и минимумы функции $f(x, y, z)$ при наличии одной связи $\varphi(x, y, z) = 0$. Составляем функцию $\Phi = f + \lambda\varphi$. Положим, что, приравнивая нулю ее производные первого порядка по x, y, z и учитывая уравнение связи, мы получали значения $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$, $\lambda = \lambda_0$. Мы должны испытать полученные значения переменных, т. е. определить знак разности $f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0)$ при всех (x, y, z), достаточно близких к (x_0, y_0, z_0) и удовлетворяющих уравнению связи $\varphi(x, y, z) = 0$. Введем функцию $\psi(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda_0\varphi(x, y, z)$. Из уравнения связи непосредственно следует, что вместо разности $f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0)$

можно взять разность $\psi(x,y,z)-\psi(x_0,y_0,z_0)$ и исследовать ее знак. Частные производные первого порядка функции $\psi(x,y,z)$ в точке (x_0,y_0,z_0) обращаются по условию в нуль. Разлагая последнюю разность по формуле Тейлора и ограничиваясь членами со вторыми производными, получим выражение вида [ср. 165]:

$$\psi(x,y,z)-\psi(x_0,y_0,z_0)=a_{11}dx^2+a_{22}dy^2+a_{33}dz^2+ \\ +2a_{12}dxdy+2a_{13}dxdz+2a_{23}dydz+\ldots,$$

где через a_{ik} мы обозначим значения соответствующих частных производных второго порядка функции $\psi(x,y,z)$ в точке (x_0,y_0,z_0) и через dx,dy,dz — приращения переменных. Положим, что $\varphi'_{z_0}(x_0,y_0,z_0)\neq 0$, так что уравнение связи определяет $z=\omega(x,y)$, причем $z_0=\omega(x_0,y_0)$. Из уравнения связи получаем

$$\varphi'_x(x,y,z)dx+\varphi'_y(x,y,z)dy+\varphi'_z(x,y,z)dz=0.$$

Подставляя значения $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$, выражаем dz через dx и dy:

$$dz=-\frac{\varphi'_{x_0}(x_0,y_0,z_0)}{\varphi'_{z_0}(x_0,y_0,z_0)}dx-\frac{\varphi'_{y_0}(x_0,y_0,z_0)}{\varphi'_{z_0}(x_0,y_0,z_0)}dy.$$

Подставляя это выражение dz в предыдущую формулу и собирая подобные члены, получим

$$\psi(x,y,z)-\psi(x_0,y_0,z_0)=Adx^2+2Bdxdy+Cdy^2+\ldots$$

Теперь можно использовать признак максимума и минимума из [163]. Так, например, если $AC-B^2>0$ и $A>0$, то в точке (x_0,y_0,z_0) функция $f(x,y,z)$ имеет относительный минимум. Из рассуждений, приведенных в [163], непосредственно следует, что для обоснования указанного правила достаточно предположить, что функции $f(x,y,z)$ и $\varphi(x,y,z)$ имеют в точке (x_0,y_0,z_0) и ее окрестности непрерывные производные до второго порядка.

Мы не останавливаемся более подробно на вопросе о достаточных условиях относительного максимума и минимума. Существенными в предыдущих рассуждениях являлись замена разности $f(x,y,z)-f(x_0,y_0,z_0)$ разностью $\psi(x,y,z)-\psi(x_0,y_0,z_0)$, у которой производные первого порядка в точке (x_0,y_0,z_0) равны нулю, а также факт, что дифференциал dz зависимого переменного определялся через дифференциалы dx, dy независимых переменных из уравнения первой степени. Аналогичным образом надо поступать для выяснения достаточных условий и при другом числе переменных и связей.

169. Примеры. 1. *Требуется найти кратчайшее расстояние от точки a, b, c до плоскости*

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{32}$$

Квадрат расстояния от данной точки (a, b, c) до переменной точки (x, y, z) выражается формулой

$$r^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2. \tag{33}$$

В данном случае координаты (x, y, z) должны удовлетворять уравнению (32) (точка должна находиться на плоскости). Найдем минимум выражения (33) при условии (32). Составляем функцию

$$\Phi = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 + \lambda_1(Ax + By + Cz + D).$$

Приравнивая нулю ее частные производные по x, y, z, получим

$$x = a - \frac{1}{2}\lambda_1 A, \quad y = b - \frac{1}{2}\lambda_1 B, \quad z = c - \frac{1}{2}\lambda_1 C. \tag{34}$$

Подставляя эти значения в условие (32), можем определить λ_1:

$$\lambda_1 = \frac{2(Aa + Bb + Cc + D)}{A^2 + B^2 + C^2}. \tag{35}$$

Мы получили единственный ответ, и так как наименьшее значение должно существовать, то ему и должны соответствовать найденные значения переменных. Подставляя значения (34) в выражение (33), получаем выражение для квадрата расстояния от точки до плоскости:

$$r_0^2 = \frac{1}{4}\lambda_1^2(A^2 + B^2 + C^2),$$

где λ_1 определяется по формуле (35).

2. *Разложить данное положительное число a на три положительных слагаемых x, y, z так, чтобы выражение*

$$x^m y^n z^p \tag{36}$$

был наибольшим (m,n,p — данные положительные числа).

Найдем максимум выражения (36) при условии

$$x + y + z = a. \tag{37}$$

Вместо максимума выражения (36) можно искать максимум его логарифма

$$m \log x + n \log y + p \log z.$$

Составляем функцию

$$\Phi = m \log x + n \log y + p \log z + \lambda_1 (x + y + z - a).$$

Приравнивая нулю ее частные производные, получим

$$x = -\frac{m}{\lambda_1}, \quad y = -\frac{n}{\lambda_1}, \quad z = -\frac{p}{\lambda_1},$$

и соотношение (37) дает

$$\lambda_1 = -\frac{m+n+p}{a},$$

то есть

$$x = \frac{ma}{m+n+p}, \quad y = \frac{na}{m+n+p}, \quad z = \frac{pa}{m+n+p}, \tag{38}$$

причем найденные значения переменных суть положительные числа. Можно показать, что при поставленных условиях выражение (36) должно иметь наибольшее значение, и единственность ответа показывает, как и в примере 1, что найденным значениям переменных и соответствует, именно, наибольшее значение выражения (36).

Формулы (38) показывают, что для решения задачи число a надо разбить на части, пропорциональные показателям m, n и p.

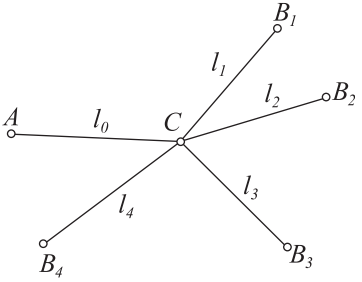

Рис. 167.

Предлагаем читателю в последних двух примерах провести исследование достаточных условий по методу, указанному в предыдущем параграфе.

3. *Проводник длины l_0 разветвляется на одном из своих концов на k отдельных проводников длин $l_s (s = 1, 2, \ldots, k)$, причем сила тока в соответствующих частях проводника есть i_0, i_1, $\ldots$, i_k. Спрашивается, как надо выбрать площади поперечных сечений q_0, q_1, $\ldots$, q_k отдельных частей проводника для того, чтобы при данной разности потенциалов E для цепей (l_0, l_1), (l_0, l_2), $\ldots$, (l_0, l_k) пошло наименьшее количество материала V* (рис. 167).

Обозначим буквою c сопротивление проволоки из данного вещества, длина которой и площадь поперечного сечения равны единице.

Функция V переменных q_0, q_1, ..., q_k, наименьшее значение которой ищется, будет

$$V = l_0 q_0 + l_1 q_1 + \ldots + l_k q_k.$$

Принимая во внимание данную разность потенциалов E, можем написать k соотношений

$$\varphi_s = c\left(\frac{l_0 i_0}{q_0} + \frac{l_s i_s}{q_s}\right) - E = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, k). \tag{39}$$

Составим функцию

$$\Phi = (l_0 q_0 + l_1 q_1 + \ldots + l_k q_k) + \sum_{s=1}^{k} \lambda_s \left[c\left(\frac{l_0 i_0}{q_0} + \frac{l_s i_s}{q_s}\right) - E\right].$$

Приравнивая нулю частные производные от Φ по q_0, q_1, ..., q_k, получим

$$\left.\begin{aligned} &l_0 - \frac{c l_0 i_0}{q_0^2}(\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k) = 0, \\ &l_s - \frac{\lambda_s c l_s i_s}{q_s^2} = 0 \ (s = 1, 2, \ldots, k). \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Из условий (39) получим

$$\frac{l_1 i_1}{q_1} = \frac{l_2 i_2}{q_2} = \ldots = \frac{l_k i_k}{q_k} = \frac{E}{c} - \frac{l_0 i_0}{q_0};$$

обозначив буквою σ общую величину этих отношений, можем написать

$$q_s = \frac{l_s i_s}{\sigma} \quad (s = 1, 2, \ldots, k), \quad \sigma = \frac{E}{c} - \frac{l_0 i_0}{q_0}. \tag{41}$$

Из уравнений (40) имеем

$$\lambda_s = \frac{q_s^2}{c i_s} = \frac{l_s^2 i_s}{c\sigma^2}.$$

Подставив эти выражения λ_s в первое из уравнений (40), получим

$$q_0^2 = \frac{i_0}{\sigma^2}(l_1^2 i_1 + l_2^2 i_2 + \ldots + l_k^2 i_k),$$

или

$$q_0 = \frac{\sqrt{i_0(l_1^2 i_1 + l_2^2 i_2 + \ldots + l_k^2 i_k)}}{\frac{E}{c} - \frac{l_0 i_0}{q_0}},$$

откуда окончательно

$$q_0 = \frac{c}{E}[l_0 i_0 + \sqrt{i_0(l_1^2 i_1 + l_2^2 i_2 + \ldots + l_k^2 i_k)}].$$

Подставляя это выражение q_0 в соотношения (41), получим для q_1, q_2, $\ldots$, q_k:

$$q_s = \frac{c l_s i_s}{E}\Big(1 + \frac{l_0 i_0}{\sqrt{i_0(l_1^2 i_1 + l_2^2 i_2 + \ldots + l_k^2 i_k)}}\Big) \quad (s = 1, 2, \ldots, k).$$

Таким образом, необходимые условия максимума и минимума V дают нам единственную систему положительных значений для q_0, q_1, $\ldots$, q_k; но из физических соображений ясно, что при некотором выборе площадей поперечных сечений должно получаться наименьшее количество материала, и можно утверждать, что полученные значения q_0, q_1,$\ldots$, q_k и дадут решения задачи.

ГЛАВА VI

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА, НАЧАЛА ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

§ 17. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

170. Комплексные числа. Если ограничиваться только вещественными числами, то, как известно, действие извлечения корня не всегда выполнимо; корень четной степени из отрицательного числа не имеет ответа в области вещественных чисел. В связи с этим уже квадратное уравнение с вещественными коэффициентами не всегда имеет вещественные корни. Это обстоятельство приводит, естественно, к расширению понятия о числе, к введению новых чисел более общей природы, частным случаем которых являются вещественные числа. При этом существенно определить эти числа и действия над ними таким образом, чтобы для новых чисел остались в силе все основные законы действий, известные для вещественных чисел. Это, как мы покажем дальше, оказывается возможным.

Не только указанная выше невыполнимость, в некоторых случаях, действия извлечения корня, но и простые геометрические соображения приводят к естественному расширению понятия о числе. Мы и будем руководиться этими геометрическими соображениями при расширении понятия о числе.

Мы знаем, что всякое вещественное число графически можно изобразить или как отрезок, отложенный на данной оси OX, или же как точку на этой оси, если условимся начала всех отрезков помещать в начала координат; обратно — всякому отрезку или точке на оси OX соответствует определенное вещественное число.

Если теперь вместо одной оси OX рассматривать всю *плоскость*, отнесенную к координатным осям OX, OY, то, обобщив надлежащим образом понятие о числе, мы получим возможность каждому *вектору*, лежащему в этой плоскости, или каждой ее точке сопоставить некоторое число, которое мы назовем *комплексным*.

Если условимся не различать между собой векторы, равные по длине и одинаково направленные, то можно сопоставить вещественное число не только всякому вектору на оси OX, но, вообще, всякому вектору, параллельному оси OX. В частности, вектору длины единица, направление которого совпадает с положительным направлением оси OX, соответствует вещественное число единица.

Вектору длины единица, направление которого совпадает с положительным направлением оси OY, сопоставим символ i, называемой мнимой единицей. Всякий вектор $\overline{MN}$ плоскости может быть представлен как сумма двух векторов $\overline{MP}$ и $\overline{PN}$, параллельных осям координат (рис. 168). Вектору $\overline{MP}$, параллельному оси OX, соответствует некоторое вещественное число a. Вектору $\overline{MP}$, параллельному оси OY, пусть соответствует символ bi, где b — вещественное число, абсолютное значение которого равно длине вектора $\overline{PN}$ и которое будет положительным, если направление $\overline{PN}$ совпадает с положительным направлением оси OY, и отрицательным, если направление $\overline{PN}$ противоположно положительному направлению OY. Таким образом, естественно, вектору $\overline{MN}$ сопоставить *комплексное число*, имеющее вид

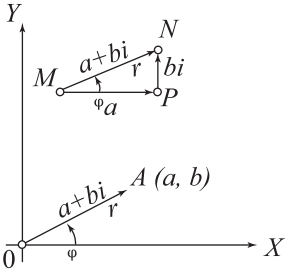

Рис. 168.

$$a + bi.$$

Отметим тот факт, что знак $(+)$ в написанном выражении $a+bi$ не есть знак действия. Это выражение надо рассматривать как еди-

ный символ для обозначения комплексного числа. После определения сложения комплексных чисел мы вернемся к рассмотрению этого знака.

Вещественные числа a и b представляют собой, очевидно, величины проекций вектора $\overline{MN}$ на координатные оси.

Отложим от начала координат вектор $\overline{OA}$ (рис. 168), совпадающий по длине и направлению с вектором $\overline{MN}$. Конец этого вектора A будет иметь координаты (a, b), и этой точке A мы можем сопоставить то же комплексное число $a+bi$, что и векторам $\overline{MN}$ и $\overline{OA}$.

Итак, *всякому вектору плоскости (всякой точке плоскости) соответствует определенное комплексное число $a + bi$. Вещественные числа a и b равны проекциям рассматриваемого вектора на координатные оси (координатам рассматриваемой точки).*

Придавая в выражении $a + bi$ буквам a и b всевозможные вещественные значения, получим совокупность комплексных чисел; a называется *вещественной* и bi — *мнимой частью* комплексного числа.*

В частном случае вектора, параллельного оси OX, комплексное число совпадает со всей вещественной частью:

$$a + 0i = a. \tag{1}$$

Таким образом, вещественное число a мы считаем частным случаем комплексного числа.

Понятие о равенстве двух комплексных чисел вытекает из их геометрической интерпретации. Два вектора считаются равными, если они имеют одинаковую длину и совпадающее направление, т. е. если они имеют одинаковые проекции на координатные оси, а потому *два комплексных числа считаются равными между собой тогда и только тогда, когда в отдельности равны их вещественные и мнимые части, т. е. условие равенства комплексных чисел будет*

$$a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \quad \text{равносильно} \quad a_1 = a_2,\ b_1 = b_2. \tag{2}$$

* Часто мнимой частью комплексного числа называют только b, подчеркивая что и вещественная и мнимая части являются числами вещественными. Это позволяет говорить о комплексном числе, как об упорядоченной паре вещественных чисел.

В частности,

$$a + bi = 0 \quad \text{равносильно} \quad a = 0;\ b = 0.$$

Вместо того, чтобы определить вектор $\overline{MN}$ его проекциями a и b на координатные оси, мы можем определить его двумя другими величинами, а именно: его длиною r и углом φ, который направление $\overline{MN}$ образует с положительным направлением оси OX (рис. 168). Если же мы считаем, что комплексное число $a + bi$ соответствует точке с координатами (a, b)), то r и φ будут, очевидно, полярными координатами этой точки. Как известно, имеют место соотношения:

$$\left.\begin{array}{c} a = r\cos\varphi,\ b = r\sin\varphi,\ r = \sqrt{a^2+b^2}, \\ \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a} \end{array}\right\}. \qquad (3)$$

Положительное число r называется *модулем*, φ — *аргументом* комплексного числа $a + bi$. Аргумент определяется лишь с точностью до слагаемого, кратного 2π, так как всякий вектор $\overline{MN}$ совместится сам с собой, если его повернуть на любое число полных оборотов в ту или иную сторону вокруг точки M. В случае $r = 0$ комплексное число равно нулю, и его аргумент совершенно неопределенен. *Условие равенства* двух комплексных чисел состоит, очевидно, в том, что *модули их должны быть равны, а аргументы могут отличаться лишь слагаемым, кратным* 2π.

Вещественное число имеет аргумент $2k\pi$, если оно положительное, и $(2k+1)\pi$, если оно отрицательное, где k — любое целое число. Если вещественная часть комплексного числа равна нулю, то комплексное число имеет вид bi и называется *чисто мнимым*. Соответствующий такому числу вектор параллелен оси OY, и аргумент чисто мнимого числа bi равен $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, если $b > 0$, и $\left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi\right)$, если $b < 0$.

Модуль вещественного числа совпадает с его абсолютным значением. Для обозначения модуля числа $a + bi$ пишут это число между двумя вертикальными чертами:

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

В дальнейшем мы будем часто обозначать комплексное число одной буквой.* Если α есть комплексное число, то его модуль будет обозначаться символом $|\alpha|$. Пользуясь выражением (3) для a и b, можем выразить комплексное число через его модуль и аргумент в виде

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

В этом случае говорят, что комплексное число написано в *тригонометрической форме.*

171. Сложение и вычитание комплексных чисел. Сумма векторов представляет собою замыкающую многоугольника, составленного из слагаемых векторов. Принимая во внимание, что проекция замыкающей равна сумме проекций составляющих, мы приходим к *следующему определению сложения комплексных чисел:*

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) + \ldots + (a_n + b_n i) = \\ = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)i. \quad (4)$$

Нетрудно видеть, что сумма комплексных чисел не зависит от порядка слагаемых (переместительный закон) и что слагаемые можно объединять в группы (сочетательный закон), ибо такими свойствами обладают сумма вещественных чисел a_k и сумма вещественных чисел b_k.

Как мы упоминали выше, комплексное число $a + 0i$ отождествляется с вещественным числом a. Точно так же число $0 + bi$ записывают просто в виде bi (чисто мнимое число). Пользуясь определением сложения, мы можем утверждать, что комплексное число $a + bi$ есть сумма вещественного числа a и чисто мнимого числа bi, то есть $a + b = (a + 0i) + (0 + bi)$.

Вычитание определяется как действие, обратное сложению, т. е. разность

$$x + yi = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i)$$

* В современных учебниках комплексные числа обычно обозначаются буквой z.

определяется из условия

$$(x + yi) + (a_2 + b_2 i) = a_1 + b_1 i,$$

или, в силу (4) и (2): $x + a_2 = a_1$; $y + b_2 = b_1$, т. е. $x = a_1 - a_2$, $y = b_1 - b_2$, и окончательно получаем

$$(a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i. \qquad (5)$$

Вычитание комплексного числа $(a_2 + b_2 i)$, как мы видим, равносильно сложению уменьшаемого $(a_1 + b_1 i)$ и комплексного числа $(-a_2 - b_2 i)$. Это соответствует следующему: *вычитание векторов сводится к сложению вектора уменьшаемого с вектором, по величине равным вычитаемому, по направлению ему противоположным.*

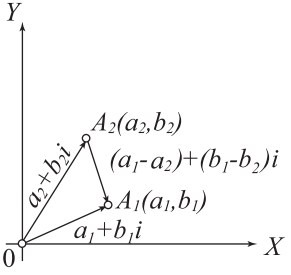

Рис. 169.

Рассмотрим вектор $\overline{A_2A_1}$, начальной точке A_2 которого соответствует комплексное число $a_2 + b_2 i$ и концу A_1 — число $a_1 + b_1 i$. Этот вектор представляет собой, очевидно, разность векторов $\overline{OA_1}$ и $\overline{OA_2}$ (рис. 169) и, следовательно, ему соответствует комплексное число

$$(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i,$$

равное разности комплексных чисел, соответствующих его концу и его началу.

Установим теперь свойства модуля суммы и разности двух комплексных чисел. Принимая во внимание, что модуль комплексного числа равен длине соответствующего этому числу вектора и что одна сторона треугольника короче суммы двух других, получим (рис. 170)

$$|\alpha_1 + \alpha_2| \leqslant |\alpha_1| + |\alpha_2|,$$

причем знак равенства будет иметь место лишь в том случае, когда векторы,

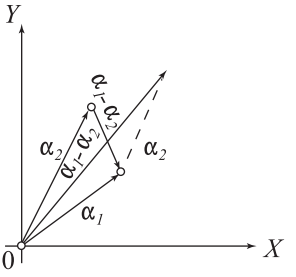

Рис. 170.

соответствующие комплексным числам α_1 и α_2 имеют одинаковое направление, т. е. когда аргументы этих чисел или равны, или отличаются на кратное 2π. Доказанное свойство имеет, очевидно, место и в случае любого числа слагаемых:

$$|\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n| \leqslant |\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_n|,$$

т. е. *модуль суммы меньше или равен сумме модулей слагаемых, причем знак равенства имеет место лишь в том случае, когда аргументы слагаемых равны или отличаются кратным* 2π.

Принимая во внимание, что сторона треугольника больше разности двух других сторон, можем, кроме того, написать

$$|\alpha_1 + \alpha_2| \geqslant |\alpha_1| - |\alpha_2|,$$

т. е. *модуль суммы двух слагаемых больше или равен разности модулей этих слагаемых.* Равенство будет иметь место лишь в том случае, когда направления соответствующих векторов противоположны.

Вычитание векторов и комплексных чисел приводится, как это мы видели выше, к сложению, и для модуля разности двух комплексных чисел будем, как и для модуля суммы, иметь (рис. 170)

$$|\alpha_1| - |\alpha_2| \leqslant |\alpha_1 - \alpha_2| \leqslant |\alpha_1| + |\alpha_2|.$$

172. Умножение комплексных чисел. Произведение двух комплексных чисел мы определяем аналогично произведению вещественных чисел, а именно: произведение рассматривается как число, составленное из множимого, как множитель составлен из единицы. Вектор, соответствующий комплексному числу с модулем r и аргументом φ, может быть получен из *единичного вектора*, длина которого равна единице и направление которого совпадает с положительным направлением оси OX, путем его удлинения в r раз и поворота в положительном направлении на угол φ.

Произведением некоторого вектора $\mathbf{a}_1$ на вектор $\mathbf{a}_2$ назовем вектор, который получится, если к вектору $\mathbf{a}_1$ применить вышеуказанные удлинения и поворот, при помощи которых вектор $\mathbf{a}_2$ получается из единичного вектора, причем последнему соответствует, очевидно, вещественная единица.

Если (r_1, φ_1), (r_2, φ_2) суть модули и аргументы комплексных чисел, соответствующих векторам $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, то произведению этих векторов будет, очевидно, соответствовать комплексное число с модулем $r_1 r_2$ и аргументом $(\varphi_1 + \varphi_2)$. Мы приходим, таким образом, к следующему определению произведения комплексных чисел:

Произведением двух комплексных чисел называется такое комплексное число, модуль которого равен произведению модулей сомножителей и аргумент — сумме аргументов сомножителей.

Таким образом, в том случае, когда комплексные числа написаны в тригонометрической форме, будем иметь

$$r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + isin\varphi_2) = \\ = r_1 r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)]. \quad (6)$$

Выведем теперь правило составления произведения для того случая, когда комплексные числа даны не в тригонометрической форме:

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = x + yi.$$

Пользуясь указанным выше обозначением модулей и аргументов сомножителей, можем написать

$$a_1 = r_1\cos\varphi_1, \quad b_1 = r_1\sin\varphi_1, \quad a_2 = r_2\cos\varphi_2, \quad b_2 = r_2\sin\varphi_2;$$

согласно определению умножения (6):

$$x = r_1 r_2\cos(\varphi_1+\varphi_2), \quad y = r_1 r_2\sin(\varphi_1+\varphi_2),$$

откуда

$$x = r_1 r_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) = \\ = r_1\cos\varphi_1\cdot r_2\cos\varphi_2 - r_1\sin\varphi_1\cdot r_2\sin\varphi_2 = a_1a_2 - b_1b_2, \\ y = r_1 r_2(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2) = r_1\sin\varphi_1\cdot r_2\cos\varphi_2 + \\ + r_1\cos\varphi_1\cdot r_2\sin\varphi_2 = b_1a_2 + a_1b_2,$$

и окончательно получим

$$(a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) = (a_1a_2 - b_1b_2) + (b_1a_2 + a_1b_2)i.^* \quad (7)$$

* Можно было задать эту формулу как правило умножения комплексных чисел по определению.

В случае $b_1 = b_2 = 0$ сомножители являются вещественными числами a_1 и a_2 и произведение приводится к произведению $a_1 a_2$ этих чисел. В случае $a_1 = a_2 = 0$ и $b_1 = b_2 = 1$ равенство (7) дает

$$i \cdot i = i^2 = -1,$$

т. е. *квадрат мнимой единицы равен* (-1).

Вычисляя последовательно целые положительные степени i, получим

$$i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad i^6 = -1, \ldots$$

и вообще, при всяком целом положительном k:

$$i^{4k} = 1, \quad i^{4k+1} = i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i.$$

Правило умножения, выражаемое равенством (7), можно формулировать так: *комплексные числа надо перемножать, как буквенные многочлены, считая* $i^2 = -1$.

Если α есть комплексное число $a+bi$, то комплексное число $a-bi$ называется сопряженным с α, и его обозначают через $\overline{\alpha}$. Согласно формулам (3) имеем $|\alpha|^2 = a^2 + b^2$.

Но из равенства (7) вытекает

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2,$$

а следовательно,

$$|\alpha|^2 = (a + bi)(a - bi) = \alpha\overline{\alpha},$$

т. е. *произведение сопряженных комплексных чисел равно квадрату модуля каждого из них.*

Отметим еще очевидные формулы

$$\alpha + \alpha = 2a, \quad \alpha - \overline{\alpha} = 2bi. \tag{8}$$

Из формул (4) и (7) непосредственно следует, что сложение и умножение комплексных чисел подчиняются переместительному закону, т. е. сумма не зависит от порядка слагаемых, а произведение — от

порядка сомножителей. Нетрудно проверить и справедливость сочетательного и распределительного законов, выражающихся следующими тождествами:

$$(\alpha_1+\alpha_2)+\alpha_3=\alpha_1+(\alpha_2+\alpha_3),\quad (\alpha_1\alpha_2)\alpha_3=\alpha_1(\alpha_2\alpha_3),$$
$$(\alpha_1+\alpha_2)\beta=\alpha_1\beta+\alpha_2\beta.$$

Предоставляем сделать это читателю.

Заметим, наконец, что *произведение нескольких сомножителей будет иметь модуль, равный произведению модулей сомножителей, и аргумент, равный сумме аргументов сомножителей. Таким образом, произведение комплексных чисел будет равно нулю тогда и только тогда, когда по крайней мере один из сомножителей равен нулю.*

173. Деление комплексных чисел. Деление комплексных чисел определяется как действие, обратное умножению. Таким образом, если (r_1,φ_1) — модуль и аргумент делимого, а (r_2,φ_2) — модуль и аргумент делителя, то нетрудно видеть, что деление имеет один определенный результат, если делитель отличен от нуля, и что модуль частного будет $\frac{r_1}{r_2}$, а аргумент его $(\varphi_1-\varphi_2)$. Обозначая частное в виде дроби, можем написать

$$\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)]. \qquad (9)$$

Итак, модуль частного равен частному модулей делимого и делителя, и аргумент частного равен разности аргументов делимого и делителя. Если $r_2=0$, то формула (9) теряет смысл.

Если делимое и делитель даны не в тригонометрической форме, а в виде a_1+b_1i и a_2+b_2i, то, выражая в формуле (9) модули и аргументы через a_1, a_2, b_1, b_2, получим следующее выражение для частного:

$$\frac{a_1+b_1i}{a_1+b_2i}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i,$$

которое можно получить и непосредственно, рассматривая i как иррациональность и умножая числитель и знаменатель на комплекс-

ное число, сопряженное со знаменателем, для того чтобы освободиться от иррациональности в знаменателе

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{(a_1+b_1i)(a_2-b_2i)}{a_2^2+b_2^2}=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(b_1a_2-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2},$$

и окончательно,

$$\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}i. \tag{10}$$

Раньше [172] мы указали на то, что переместительный, сочетательный и распределительный законы сохраняют свою силу и при сложении и умножении комплексных чисел, а потому для выражений, содержащих комплексные числа, оказываются справедливыми все те преобразования, которые являются следствиями этих законов и которые хорошо известны в применении к вещественным числам. Сюда относятся, например: правило вынесения за скобку, раскрытие скобок, простейшие формулы, формула бинома Ньютона в случае целого положительного показателя, формулы, относящиеся к прогрессиям, и т. д.

Отметим еще одно важное свойство выражений, содержащих комплексные числа, связанные знаками первых четырех действий. Из формул (4), (5), (7) и (10) непосредственно вытекает следующее предложение: *если в сумме, разности, произведении и частном заменим все числа сопряженными, то и результаты действий заменятся сопряженными.*

Так, например, заменяя в формуле (7) b_1 и b_2 на $(-b_1)$ и $(-b_2)$, получим

$$(a_1-b_1i)(a_2-b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)-(b_1a_2+a_1b_2)i.$$

Указанное свойство будет, очевидно, справедливым и для любого выражения, содержащего комплексные числа, связанные знаками первых четырех действий.

174. Возвышение в степень. Применяя формулу (6) в случае n равных сомножителей, получаем правило возвышения комплексного числа в целую положительную степень

$$[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi), \tag{11}$$

т. е. *для возвышения комплексного числа в целую положительную степень нужно его модуль возвысить в эту степень и аргумент умножить на показатель степени.*

Полагая в формуле (11) $r = 1$, получаем *формулу Моавра*

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi. \tag{12}$$

Примеры. **1**. Разлагая левую часть равенства (12) по формуле бинома Ньютона и приравнивая вещественные и мнимые части согласно условию (2), получим выражения для $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$ через степени $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ [17]:

$$\begin{gathered}\cos n\varphi = \cos^n\varphi - \tbinom{n}{2}\cos^{n-2}\varphi\sin^2\varphi + \\ + \tbinom{n}{4}\cos^{n-4}\varphi\sin^4\varphi + \ldots + (-1)^k\tbinom{n}{2k}\cos^{n-2k}\varphi\sin^{2k}\varphi + \\ + \ldots + \begin{cases} \nearrow (-1)^{\frac{n}{2}}\sin^n\varphi & (n - \text{четное}) \\ \searrow (-1)^{\frac{n-1}{2}} n\cos\varphi\sin^{n-1}\varphi & (n - \text{нечетное}); \end{cases}\end{gathered} \tag{13}$$

$$\begin{gathered}\sin n\varphi = \tbinom{n}{1}\cos^{n-1}\varphi\sin\varphi - \tbinom{n}{3}\cos^{n-3}\varphi\sin^3\varphi + \tbinom{n}{5}\cos^{n-5}\varphi\sin^5\varphi - \ldots + \\ + (-1)^k\tbinom{n}{2k+1}\cos^{n-2k-1}\varphi\sin^{2k+1}\varphi + \ldots + \\ + \ldots + \begin{cases} \nearrow (-1)^{\frac{n-2}{2}} n\cos\varphi\sin^{n-1}\varphi & (n - \text{четное}) \\ \searrow (-1)^{\frac{n-1}{2}}\sin^n\varphi & (n - \text{нечетное}). \end{cases}\end{gathered}$$

В частности, при $n = 3$ формула (12) после раскрытия скобок будет иметь вид

$$\cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi\sin\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi - i\sin^3\varphi = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi,$$

откуда

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi, \quad \sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi.$$

[17] Символом $\binom{n}{m}$ мы обозначаем число сочетаний из n элементов по m, то есть

$$\tbinom{n}{m} = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1\cdot 2\ldots m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

2. Просуммируем выражения

$$A_n = 1 + r\cos\varphi + r^2\cos 2\varphi + \ldots + r^{n-1}\cos(n-1)\varphi,$$
$$B_n = r\sin\varphi + r^2\sin 2\varphi + \ldots + r^{n-1}\sin(n-1)\varphi.$$

Положим

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

и составим комплексное число

$$A_n + B_n i = 1 + r(\cos\varphi + i\sin\varphi) + r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi) + \ldots + \\ + r^{n-1}[\cos(n-1)\varphi + i\sin(n-1)\varphi].$$

Пользуемся равенством (11) и формулой для суммы геометрической прогрессии

$$A_n + B_n i = 1 + z + z^2 + \ldots + z^{n-1} = \frac{1-z^n}{1-z} = \frac{1 - r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n}{1 - r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \\ = \frac{(1 - r^n\cos n\varphi) - ir^n\sin n\varphi}{(1 - r\cos\varphi) - ir\sin\varphi}.$$

Умножая числитель и знаменатель последней дроби на величину $(1 - r\cos\varphi) + ir\sin\varphi$, сопряженную со знаменателем, получим

$$A_n + B_n i = \frac{[(1 - r^n\cos n\varphi) - ir^n\sin n\varphi][(1 - r\cos\varphi) + ir\sin\varphi]}{(1 - r\cos\varphi)^2 + r^2\sin^2\varphi} = \\ = \frac{(1 - r^n\cos n\varphi)(1 - r\cos\varphi) + r^{n+1}\sin\varphi\sin n\varphi}{r^2 - 2r\cos\varphi + 1} + \\ + \frac{(1 - r^n\cos n\varphi)r\sin\varphi - 1(1 - r\cos\varphi)r^n\sin n\varphi}{r^2 - 2r\cos\varphi + 1} i = \\ = \frac{r^{n+1}\cos(n-1)\varphi - r^n\cos n\varphi - r\cos\varphi + 1}{r^2 - 2r\cos\varphi + 1} + \\ + \frac{r^{n+1}\sin(n-1)\varphi - r^n\sin n\varphi + r\cos\varphi}{r^2 - 2r\cos\varphi + 1} i.$$

Приравнивая вещественные и мнимые части согласно условию (2), будем иметь

$$A_n = 1 + r\cos\varphi + r^2\cos 2\varphi + \ldots + r^{n-1}\cos(n-1)\varphi = \\ = \frac{r^{n+1}\cos(n-1)\varphi - r^n\cos n\varphi - r\cos\varphi + 1}{r^2 - 2r\cos\varphi + 1},$$

$$B_n = r\sin\varphi + r^2\sin 2\varphi + \ldots + r^{n-1}\sin(n-1)\varphi =$$
$$= \frac{r^{n+1}\sin(n-1)\varphi - r^n\sin n\varphi + r\sin\varphi}{r^2 - 2r\cos\varphi + 1}.$$

Считая, что абсолютное значение вещественного числа r меньше единицы, и беспредельно увеличивая n, получим в пределе суммы бесконечных рядов

$$\left.\begin{aligned} 1 + r\cos\varphi + r^2\cos 2\varphi + \ldots &= \frac{1 - r\cos\varphi}{r^2 - 2r\cos\varphi + 1}, \\ r\sin\varphi + r^2\sin 2\varphi + \ldots &= \frac{r\sin\varphi}{r^2 - 2r\cos\varphi + 1}. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

В выражениях A_n и B_n положим $r = 1$, тогда получим

$$1 + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \ldots + \cos(n-1)\varphi = \frac{\cos(n-1)\varphi - \cos n\varphi - \cos\varphi + 1}{2(1-\cos\varphi)} =$$
$$= \frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\varphi + 2\sin^2\frac{\varphi}{2}}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}} = \frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\varphi + \sin\frac{\varphi}{2}}{2\sin\frac{\varphi}{2}} =$$
$$= \frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\cos\frac{(n-1)\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}. \qquad (15_1)$$

Аналогичным образом получим

$$\sin\varphi + \sin 2\varphi + \ldots + \sin(n-1)\varphi = \frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\sin\frac{(n-1)\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}. \qquad (15_2)$$

175. Извлечение корня. *Корнем n-й степени из комплексного числа называется такое комплексное число, n-я степень которого равна подкоренному числу.*

Таким образом, равенство

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$$

равносильно равенству

$$\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Но у равных комплексных чисел должны быть равны и аргументы могут отличаться лишь кратным 2π, т. е.

$$\rho^n = r, \quad n\psi = \varphi + 2k\pi,$$

откуда

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n},$$

где $\sqrt[n]{r}$ есть арифметическое значение корня и k — любое целое число. Таким образом, мы получаем

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \qquad (16)$$

т. е. *для извлечения корня из комплексного числа надо извлечь корень из его модуля, а аргумент разделить на показатель корня.*

В формуле (16) число k может принимать всевозможные целые значения; однако можно показать, что различных значений корня будет только n, и она будут соответствовать значениям

$$k = 0,\ 1,\ 2, \ldots, \quad (n-1). \qquad (17)$$

Чтобы доказать это, заметим, что правые части в формуле (16) будут различными при двух различных значениях $k = k_1$ и $k = k_2$ тогда, когда аргументы $\frac{\varphi+2k_1\pi}{n}$ и $\frac{\varphi+2k_2\pi}{n}$ отличаются не кратным 2π, и будут одинаковыми, если указанные аргументы отличаются кратным 2π.

Но разность $(k_1 - k_2)$ двух чисел из ряда (17) по абсолютному значению меньше n, а потому разность

$$\frac{\varphi + 2k_1\pi}{n} - \frac{\varphi + 2k_2\pi}{n} = \frac{k_1 - k_2}{n}2\pi$$

не может быть кратна 2π, т. е. n значениям k из ряда (17) соответствуют n различных значений корня.

Пусть теперь k_2 — целое число (положительное или отрицательное), не заключающееся в ряде (17). Мы можем представить его в виде

$$k_2 = qn + k_1,$$

где q — целое число и k_1 — одно из чисел ряда (17), а потому

$$\frac{\varphi + 2k_2\pi}{n} = \frac{\varphi + 2k_1\pi}{n} + 2\pi q,$$

т. е. значению k_2 соответствует то же значение корня, что и значению k_1, заключающемуся в ряде (17). Итак, *корень n-й степени из комплексного числа имеет n различных значений.*

Исключение из этого правила представляет лишь частный случай, когда подкоренное число равно нулю, т. е. $r = 0$. В этом случае все указанные выше значения корня равны нулю.

Примеры. **1.** Определим все значения $\sqrt[3]{i}$. Модуль i равен единице и аргумент $\frac{\pi}{2}$, а потому

$$\sqrt[3]{i} = \sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \ (k = 0, 1, 2).$$

Мы получаем следующие три значения для $\sqrt[3]{i}$:

$$\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} + = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$
$$\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.$$

2. Рассмотрим все значения $\sqrt[n]{1}$, т. е. все решения двучленного уравнения

$$z^n = 1.$$

Модуль единицы равен единице и аргумент — нулю, а потому

$$\sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{\cos 0 + i\sin 0} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Обозначим буквой ε то значение этого корня, которое получается при $k = 1$:

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}.$$

Согласно формуле Моавра:

$$\varepsilon^k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n},$$

т. е. все корни уравнения $z^n = 1$ имеют вид

$$\varepsilon^k \ (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

причем надо считать $\varepsilon^0 = 1$.

Рассмотрим теперь двучленное уравнение вида

$$z^n = a$$

Вместо z введем новое неизвестное u, полагая

$$z = u\sqrt[n]{a},$$

где $\sqrt[n]{a}$ есть одно из значений корня n-й степени из a. Подставляя выражение для z в данное уравнение, получим для u уравнение

$$u^n = 1.$$

Отсюда видно, что все корни уравнения $z^n = a$ могут быть представлены в виде

$$\sqrt[n]{a}\varepsilon^k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1),$$

где $\sqrt[n]{a}$ — одно из n значений этого корня и ε^k принимает все значения корня n-й степени из единицы.

176. Показательная функция. Мы рассматривали раньше показательную функцию e^x в случае вещественного показателя x. Обобщим теперь понятие о показательной функции на случай любого комплексного показателя. При вещественном показателе функция e^x может быть представлена в виде ряда [129]

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

Определим аналогичным рядом показательную функцию и в случае чисто мнимого показателя, т. е. *положим*

$$e^{yi} = 1 + \frac{yi}{1!} + \frac{(yi)^2}{2!} + \frac{(yi)^3}{3!} + \ldots$$

Отделяя вещественные и мнимые члены, имеем отсюда

$$e^{yi} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6} + \ldots\right) + i\left(\frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7!} + \ldots\right),$$

откуда, вспомнив разложения $\cos y$ и $\sin y$ в ряд [130], получаем

$$e^{yi} = \cos y + i \sin y. \tag{18}$$

Эта формула и определяет показательную функцию при чисто мнимом показателе. Заменяя y на $(-y)$:

$$e^{-yi} = \cos y - i \sin y \tag{19}$$

и решая уравнения (18) и (19) относительно $\cos y$ и $\sin y$, получим *формулы Эйлера*, выражающие тригонометрические функции через показательные с чисто мнимым показателем:

$$\cos y = \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{yi} - e^{-yi}}{2i}. \tag{20}$$

Формула (18) дает новую *показательную форму комплексного числа*, имеющего модуль r и аргумент φ:

$$r(\cos\varphi + i \sin\varphi) = re^{\varphi i}.$$

Показательную функцию при любом комплексном показателе $x + yi$ определяем формулой

$$e^{x+yi} = e^x \cdot e^{yi} = e^x(\cos y + i \sin y), \tag{21}$$

т. е. *модуль числа* e^{x+yi} *будем считать равным* e^x, *а аргумент равным* y.

Нетрудно обобщить на случай комплексных показателей *правило сложения показателей при умножении.* Пусть $z = x + yi$ и $z_1 = x_1 + y_1 i$:

$$e^z \cdot e^{z_1} = e^x(\cos y + i \sin y) \cdot e^{x_1}(\cos y_1 + i \sin y_1),$$

или, применяя правило умножения комплексных чисел [172],

$$e^z \cdot e^{z_1} = e^{x+x_1}[\cos(y + y_1) + i \sin(y + y_1)].$$

Но выражение, стоящее в правой части этого равенства, согласно определению (21), представляет собою

$$e^{(x+x_1)+(y+y_1)i}, \quad \text{то есть} \quad e^{z+z_1}.$$

Правило вычитая показателей при делении

$$\frac{e^z}{e^{z_1}} = e^{z-z_1}$$

может быть непосредственно проверено путем умножения частного на делитель.

В случае целого положительного n будем иметь

$$(e^z)^n = \underbrace{e^z e^z \ldots e^z}_{n\,\text{раз}} = e^{nz}.$$

Пользуясь формулами Эйлера, мы сможем выразить любую целую положительную степень $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$, а также и произведение таковых степеней, в виде суммы членов, содержащих лишь первые степени синуса или косинуса кратных дуг:

$$\sin^m\varphi = \frac{(e^{\varphi i} - e^{-\varphi i})^m}{2^m i^m}, \quad \cos^m\varphi = \frac{(e^{\varphi i} + e^{-\varphi i})^m}{2^m}. \tag{22}$$

Разложив правые части этих равенств по формуле бинома Ньютона, перемножив их и приведя в полученных разложениях показательные функции к тригонометрическим, согласно формулам (18) и (19), мы получаем искомое выражение.

Примеры. **1.**

$$\cos^4\varphi = \frac{(e^{\varphi i} + e^{-\varphi i})^4}{16} = \frac{e^{4\varphi i}}{16} + \frac{4e^{2\varphi i}}{16} + \frac{6}{16} + \frac{4e^{-2\varphi i}}{16} + \frac{e^{-4\varphi i}}{16} =$$
$$= \frac{1}{8}\frac{e^{4\varphi i} + e^{-4\varphi i}}{2} + \frac{1}{2}\frac{e^{2\varphi i} + e^{-2\varphi i}}{2} + \frac{3}{8} = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{8}\cos 4\varphi.$$

2.

$$\sin^4\varphi\cos^3\varphi = \frac{(e^{\varphi i} - e^{-\varphi i})^4}{16}\cdot\frac{(e^{\varphi i} + e^{-\varphi i})^3}{8} =$$
$$= \frac{(e^{2\varphi i} - e^{-2\varphi i})^3(e^{\varphi i} - e^{-\varphi i})}{128} =$$
$$= \frac{(e^{6\varphi i} - 3e^{2\varphi i} + 3e^{-2\varphi i} - e^{-6\varphi i})(e^{\varphi i} - e^{-\varphi i}}{128} =$$

$$= \frac{e^{7\varphi i} - e^{5\varphi i} - 3e^{3\varphi i} + 3e^{\varphi i} + 3e^{-\varphi i} - 3e^{-3\varphi i} - e^{-5\varphi i} + e^{-7\varphi i}}{128} =$$
$$= \frac{3}{64}\cos\varphi - \frac{3}{64}\cos 3\varphi - \frac{1}{64}\cos 5\varphi - \frac{1}{64}\cos 7\varphi.$$

Заметим при этом, что любая целая степень $\cos\varphi$ и четная степень $\sin\varphi$ представляют собою четные функции φ, т. е. не меняют своей величины при замене φ на $(-\varphi)$, и выражение таких четных функций φ будет содержать лишь косинусы кратных дуг. Если же функция есть нечетная функция φ, т. е. если эта функция меняет знак при замене φ на $(-\varphi)$, как это будет иметь, например, место в случае нечетной степени $\sin\varphi$, то разложение такой функции будет содержать лишь синусы кратных дуг, и свободный член в этом разложении будет наверное отсутствовать. Все эти обстоятельства будут нами выяснены более подробно при изложении тригонометрических рядов.

177. Тригонометрические и гиперболические функции. До сих пор мы рассматривали тригонометрические функции лишь в случае вещественного аргумента. Определим тригонометрические функции при любом комплексном аргументе z по формулам Эйлера:

$$\cos z = \frac{e^{zi} + e^{-zi}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{2i},$$

причем выражения, стоящие справа, при любом комплексном z имеют смысл, указанный в [176].

Пользуясь этими формулами и основными свойствами показательной функции, нетрудно проверить справедливость формул тригонометрии в случае комплексного аргумента. Предлагаем читателю в качестве упражнения доказать, например, соотношения

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1,$$
$$\sin(z + z_1) = \sin z \cos z_1 + \cos z \sin z_1,$$
$$\cos(z + z_1) = \cos z \cos z_1 - \sin z \sin z_1.$$

Функции $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ определяются по формулам

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{zi} - e^{-zi}}{e^{zi} + e^{-zi}} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{2zi} - 1}{e^{2zi} + 1},$$
$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = i\frac{e^{zi} + e^{-zi}}{e^{zi} - e^{-zi}} = i\frac{e^{2zi} + 1}{e^{2zi} - 1}.$$

Введем теперь *гиперболические функции*. Гиперболические синус и косинус определяются по формулам

$$\mathrm{sh}z = \frac{\sin iz}{i} = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \mathrm{ch}z = \cos iz = \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$
$$\mathrm{th}z = \frac{\mathrm{ch}z}{\mathrm{sh}z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1},$$
$$\mathrm{cth}z = \frac{\mathrm{ch}z}{\mathrm{sh}z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} = \frac{e^{2z} + 1}{e^{2z} - 1}.$$

Пользуясь этими формулами, нетрудно проверить, например, следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{ch}^2 z - \mathrm{sh}^2 z = 1,\\
&\mathrm{sh}(z_1 \pm z_2) = \mathrm{sh}z_1\mathrm{ch}z_2 \pm \mathrm{ch}z_1\mathrm{sh}z_2,\\
&\mathrm{ch}(z_1 \pm z_2) = \mathrm{ch}z_1\mathrm{ch}z_2 \pm \mathrm{sh}z_1\mathrm{sh}z_2,\\
&\mathrm{sh}2z = 2\mathrm{sh}z\mathrm{ch}z, \ \mathrm{ch}2z = \mathrm{ch}^2 z + \mathrm{sh}^2 z,\\
&\mathrm{th}2z = \frac{2\mathrm{th}z}{1 + \mathrm{th}^2 z}, \quad \mathrm{cht}2z = \frac{1 + \mathrm{cth}^2 z}{2\mathrm{cht}z}.
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Таким образом возникает *гиперболическая тригонометрия* с формулами, аналогичными формулам обычной тригонометрии круга. Заменяя в формуле обычной тригонометрии $\sin z$ на $i\,\mathrm{sh}z$ и $\cos z$ на $\mathrm{ch}z$, получим аналогичную формулу гиперболической тригонометрии. Это обстоятельство вытекает непосредственно из формул, определяющих гиперболические функции.

Пользуясь этим указанием, нетрудно получить следующие формулы приведения суммы гиперболических функций к логарифмическому виду:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{sh}z_1 + \mathrm{sh}z_2 = 2\mathrm{sh}\frac{z_1 + z_2}{2}\mathrm{ch}\frac{z_1 - z_2}{2},\\
&\mathrm{sh}z_1 - \mathrm{sh}z_2 = 2\mathrm{sh}\frac{z_1 - z_2}{2}\mathrm{ch}\frac{z_1 + z_2}{2},\\
&\mathrm{ch}z_1 + \mathrm{ch}z_2 = 2\mathrm{ch}\frac{z_1 + z_2}{2}\mathrm{ch}\frac{z_1 - z_2}{2},\\
&\mathrm{ch}z_1 - \mathrm{ch}z_2 = 2\mathrm{sh}\frac{z_1 + z_2}{2}\mathrm{sh}\frac{z_1 - z_2}{2}.
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Рассмотрим теперь гиперболические функции при вещественных значениях аргумента:

$$\mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$
$$\mathrm{th}x = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}, \quad \mathrm{cth}x = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}.$$

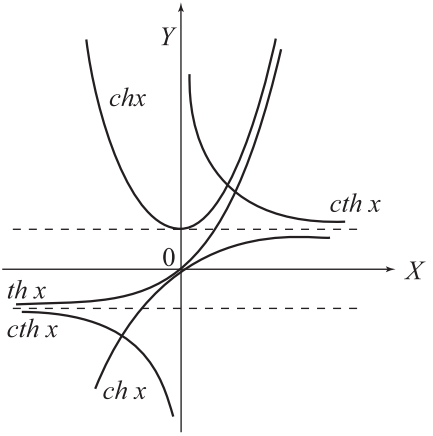

Рис. 171.

График функции $y = \mathrm{ch}x$ представляет собой цепную линию [78], к более подробному изучению которой мы перейдем в [178]. Графики функций $\mathrm{ch}x$, $\mathrm{sh}x$, $\mathrm{th}x$, $\mathrm{cth}x$ изображены на рис. 171.

Непосредственно дифференцируя, получаем следующие выражения производных:

$$\frac{d\mathrm{sh}x}{dx} = \mathrm{ch}x, \quad \frac{d\mathrm{ch}x}{dx} = \mathrm{sh}x,$$
$$\frac{d\mathrm{th}x}{dx} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x},$$
$$\frac{d\mathrm{cth}x}{dx} = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}.$$

Отсюда получаем таблицу интегралов:

$$\int \mathrm{sh}x\, dx = \mathrm{ch}x + C,$$
$$\int \mathrm{ch}x\, dx = \mathrm{sh}x + C,$$
$$\int \frac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}x + C,$$
$$\int \frac{dx}{\mathrm{sh}^x} = -\mathrm{cth}x + C.$$

Самое название «гиперболические функции» произошло вследствие того, что $\mathrm{ch}t$ и $\mathrm{sh}t$ играют ту же роль для параметрического представления равнобочной гиперболы

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

какую функции $\cos t$ и $\sin t$ — для окружности

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Параметрическое представление окружности есть

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t,$$

равнобочной же гиперболы

$$x = a\mathrm{ch}t, \quad y = a\mathrm{sh}t,$$

как в этом нетрудно убедиться при помощи соотношения

$$\mathrm{ch}^2 t - \mathrm{sh}^2 t = 1.$$

Геометрическое значение параметра t в обоих случаях, окружности и гиперболы, также одинаково. Если мы обозначим через S площадь сектора AOM (рис. 172), а через S_0 площадь всего круга

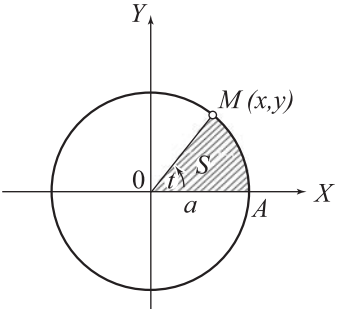

Рис. 172.

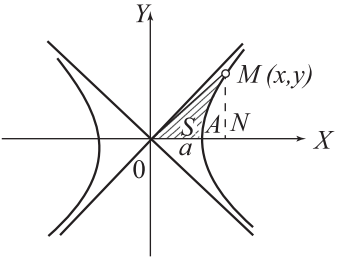

Рис. 173.

($S_0 = \pi a^2$), то, очевидно,

$$t = 2\pi \frac{S}{S_0}.$$

Пусть теперь S обозначает площадь аналогичного сектора равнобочной гиперболы (рис. 173). Мы имеем

$$S = \text{пл. } OMN - \text{пл. } AMN = \frac{1}{2}xy - \int\limits_x^a ydx =$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - a^2} - \int\limits_x^a \sqrt{x^2 - a^2}dx.$$

Вычисляя интеграл по формуле из [92], находим:

$$S = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2\log(x + \sqrt{x^2 - a^2})\right]_a^x =$$

$$= \frac{1}{2}a^2\log\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right).$$

Если теперь, обозначая опять через S_0 площадь круга, положим

$$t = 2\pi\frac{S}{S_0} = \log\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\right),$$

то найдем без труда

$$e^t = \frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1},$$

$$e^{-t} = \frac{1}{\frac{x}{a} + \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}} = \frac{x}{a} - \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1},^*$$

откуда, складывая почленно и умножая на $\frac{a}{2}$:

$$x = \frac{a}{2}(e^t + e^{-t}) = a\text{ch}t,$$

* Числитель и знаменатель домножили на $\frac{x}{a} - \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$ и воспользовались формулой разности квадратов в знаменателе.

$$y = \sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \mathrm{ch}^2 t - a^2} = a\mathrm{sh}t,$$

т. е. мы и получаем параметрическое представление равнобочной гиперболы.

178. Цепная линия. Исследуем кривую провисания гибкой однородной тяжелой нити, подвешенной на концах A_1 и A_2 (рис. 174).

В плоскости этой кривой направим ось OX горизонтально, ось OY вертикально вверх. Выделим элементы $MM_1 = ds$ нити. На каждый из них действуют натяжения T и T_1 от оставшихся частей нити и вес элемента. Натяжения приложены в концах M и M_1 элемента и направлены по касательным (причем T — по отрицательному, T_1 — по положительному направлению касательной). Вес мы можем принять пропорциональным длине элемента

$$dp = \rho ds,$$

где ρ — линейная плотность нити (вес погонной единицы длины).

Для равновесия необходимо и достаточно, чтобы равнялась нулю сумма проекций, действующих на элемент сил как на горизонтальное, так и на вертикальное направление. Так как проекция веса элемента ds на горизонтальное направление равна нулю, то горизонтальные составляющие сил T и T_1 должны быть равны по величине и противоположны по знаку. Обозначим через T_0 общую величину их горизонтальной составляющей.

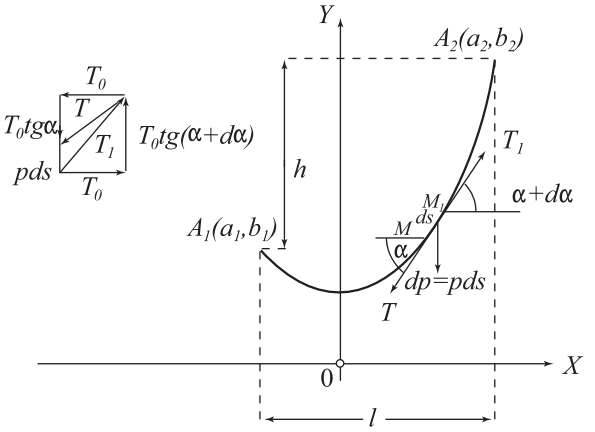

Рис. 174.

Далее, из чертежа мы получаем для вертикальных составляющих натяжений соответственно выражения

$$-T_0 \operatorname{tg} \alpha = -T_0 y' \quad \text{и} \quad T_0 \operatorname{tg}(\alpha + d\alpha) = T_0(y' + dy').$$

Здесь $d\alpha$ — прирост угла α, образованного касательной с осью OX, при перемещении из точки M в точку M_1, и dy' — соответствующее приращение углового коэффициента касательной, т. е. величины $tg\alpha$.

Приравнивая нулю сумму проекций T, T_1 и силы веса ρds на ось OY, получим

$$T_0(y' + dy') - T_0 y' - \rho ds = 0,$$

то есть

$$T_0 dy' = \rho ds,$$

что можно написать так:

$$T_0 dy' = \rho\sqrt{1 + y'^2} dx. \tag{25}$$

Переменные здесь разделяются [93]:

$$\frac{dy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{dx}{k}, \quad \text{где} \quad k = \frac{T_0}{\rho};$$

заметим, что k есть постоянная, прямо пропорциональная горизонтальной составляющей натяжения и обратно пропорциональная линейной плотности нити. Интегрируем полученное уравнение

$$\log(y' + \sqrt{1 + y'^2}) = \frac{x + C_1}{k},$$

откуда

$$e^{\frac{x+C_1}{k}} = y' + \sqrt{1 + y'^2};$$

чтобы определить y', введем обратную величину

$$e^{-\frac{x+C_1}{k}} = \frac{1}{y' + \sqrt{1 + y'^2}} = \sqrt{1 + y'^2} - y'.$$

Вычитая почленно это равенство из предыдущего, находим

$$y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x+C_1}{h}} - e^{-\frac{x+C_1}{k}}\right).$$

Интегрируя еще раз, получим уравнение искомой кривой нити

$$y + C_2 = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x+C_1}{k}} + e^{-\frac{x+C_1}{k}}\right). \tag{26}$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определяются из условия, что кривая проходит через точки $A_1(a_1, b_1)$ и $A_2(a_2, b_2)$. Однако в приложениях наибольший интерес представляет не само уравнение кривой провисания, т. е. постоянные C_1 и C_2, а соотношение между горизонтальным и вертикальным расстояниями точек подвеса и длиной дуги A_1A_2.

При исследовании зависимости между этими тремя величинами мы можем, конечно, совершить параллельный перенос координатных осей. Поместив начало в точку $(-C_1, -C_2)$, мы можем считать, что в уравнении (26) $C_1 = C_2 = 0$, и это уравнение заменится более простым

$$y = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{x}{k}} + e^{-\frac{x}{k}}\right) = k\operatorname{ch}\frac{x}{k}, \tag{26$_1$}$$

откуда ясно, что *кривая провисания есть цепная линия.*

Пусть при указанном выборе координатных осей точка подвеса A_1 имеет координаты (a_1, b_1) и A_2 — координаты (a_2, b_2). Обозначив через l, h, s горизонтальное и вертикальное расстояния точек подвеса и длину нити, будем иметь

$$l = a_2 - a_1, \quad h = b_2 - b_1 = k\left(\operatorname{ch}\frac{a_2}{k} - \operatorname{ch}\frac{a_1}{k}\right),$$

$$s = \int\limits_{a_1}^{a_2}\sqrt{1 + y'^2}dx = \int\limits_{a_1}^{a_2}\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2\frac{x}{k}}dx = \int\limits_{a_1}^{a_2}\operatorname{ch}\frac{x}{k}dx = k\left(\operatorname{sh}\frac{a_2}{k} - \operatorname{sh}\frac{a_1}{k}\right).$$

По формулам (24) находим

$$h = 2k\operatorname{sh}\frac{a_2 + a_1}{2k}\operatorname{sh}\frac{a_2 - a_1}{2k} = 2k\operatorname{sh}\frac{l}{2k}\operatorname{sh}\frac{a_2 + a_1}{2k},$$
$$s = 2k\operatorname{sh}\frac{a_2 - a_1}{2k}\operatorname{ch}\frac{a_2 + a_1}{2k} = 2k\operatorname{sh}\frac{l}{2k}\operatorname{ch}\frac{a_2 + a_1}{2k},$$

откуда на основании первого из соотношений (23)

$$s^2 - h^2 = 4k^2\operatorname{sh}^2\frac{l}{2k},$$

что и дает искомую зависимость между l, h и s. Ее можно переписать в следующей форме:

$$\frac{\operatorname{sh}\frac{l}{2k}}{\frac{l}{2k}} = \frac{\sqrt{s^2 - h^2}}{l}. \tag{27}$$

Если точки подвеса и длина нити заданы, то величины l, h и s известны и мы получаем уравнение для определения параметра k, или если линейная плотность ρ нити также известна, то уравнение (27) может

служить для определения горизонтальной составляющей натяжения T_0. Положим для сокращения письма:

$$\frac{l}{2k} = \xi, \quad \frac{\sqrt{s^2 - h^2}}{l} = c.$$

Уравнение (27) превратится в

$$\frac{\operatorname{sh}\xi}{\xi} = c. \tag{27$_1$}$$

Вспомнив разложение показательной функции в степенной ряд [129], найдем

$$\frac{\operatorname{sh}\xi}{\xi} = \frac{e^{\xi} - e^{-\xi}}{2\xi} = 1 + \frac{\xi^2}{3!} + \frac{\xi^4}{5!} + \frac{\xi^6}{7!} + \ldots,$$

откуда видно, что при возрастании ξ от 0 до $+\infty$ отношение также постоянно возрастает от 1 до $+\infty$. Стало быть, при всяком заданном значении $c \geqslant 1$ уравнение (27_1) имеет один положительный корень, который можно вычислить, пользуясь таблицами гиперболических функций[18]. Данные величины l, h и s должны при этом удовлетворять условию

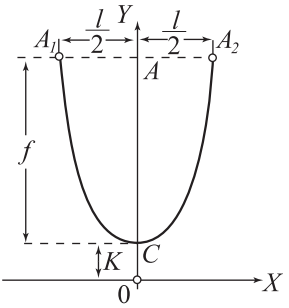

Рис. 175.

$$c = \frac{\sqrt{s^2 - h^2}}{l} \geqslant 1 \quad \text{или} \quad s^2 \geqslant h^2 + l^2,$$

которое очевидно и из геометрических соображений, так как $\sqrt{h^2 + l^2}$ есть хорда A_1A_2, а s — дуга цепной линии между теми же точками.

Пусть, например,

$$s = 100\ м, \quad l = 50\ м, \ h = 20\ м, \ \rho = 20\ кг/м,$$

мы получим

$$c = 0,02\sqrt{10\,000 - 400} = 0,8 \cdot \sqrt{6} = 1,96$$

и по таблицам гиперболических функций найдем корень уравнения (27_1):

$$\xi = \frac{l}{2k} = 2,15,$$

[18]Например, таблицы Янке и Эмде.

откуда

$$T_0 = k\rho = \frac{l}{2\xi}\rho = \frac{50}{2 \cdot 2,15} \cdot 20 = 232 \text{ кг}.$$

Пусть точки подвеса находятся на одинаковой высоте. Исследуем стрелу провисания нити f (рис. 175):

$$f = \overline{OA} - \overline{OC} = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{l}{2k}} + e^{-\frac{l}{2k}}\right) - k = \frac{k}{2}\left(e^{\frac{l}{2k}} + e^{-\frac{l}{2k}} - 2\right).$$

Разлагая показательную функцию в ряд, получим

$$f = \frac{1}{2!}\frac{l^2}{2^2 \cdot k} + \frac{1}{4!}\frac{l^4}{2^4 \cdot k^3} + \ldots \tag{28}$$

Точно так же будем иметь для s = дуге A_1A_2 [формула (27) при $h = 0$]:

$$s = 2k\operatorname{sh}\frac{l}{2k} = k\left(e^{\frac{l}{2k}} - e^{-\frac{l}{2k}}\right) = l + \frac{1}{3!}\frac{l^3}{2^2 \cdot k^2} + \frac{1}{5!}\frac{l^5}{2^4 \cdot k^4} + \ldots \tag{29}$$

Ограничиваясь в ряде (28) одним слагаемым, определим приближенно k:

$$k \approx \frac{l^2}{8f}.$$

В разложении (29) удержим первые два слагаемых и подставим найденное для k выражение

$$s \approx l + \frac{8}{3}\frac{f^2}{l}.$$

Дифференцируя это соотношение, получим *зависимость между удлинением нити и увеличением стрелы провисания:*

$$ds \approx \frac{16}{3}\frac{fdf}{l}, \quad \text{или} \quad df \approx \frac{3l}{16f}ds.$$

Уравнение (25) было нами получено в предположении, что на всякий элемент нити действует сила тяжести, пропорциональная длине элемента. В некоторых случаях, например при рассмотрении цепей висячих мостов, эту силу тяжести надо считать пропорциональной длине не самого элемента, но его проекции на горизонтальную ось. Это случится тогда, когда нагрузка от настила моста настолько велика по сравнению с собственным весом цепи, что последней можно пренебречь. В этом случае вместо уравнения (25) будем иметь

$$T_0 dy' = \rho dx,$$

откуда

$$y' = \frac{\rho}{T_0}x + C_1$$

и

$$y = \frac{\rho}{2T_0}x^2 + C_1x + C_2,$$

т. е. *кривая провисания будет параболой.*

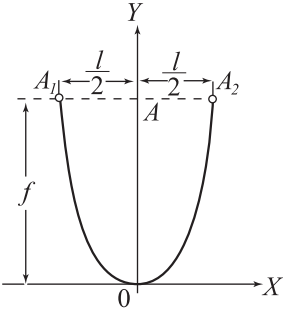

Рис. 176.

Положим, что концы нити A_1 и A_2 находятся на одинаковой высоте, и поместим начало координат в вершину параболы (рис. 176), так что уравнение ее будет

$$y = \alpha x^2 \quad \left(\alpha = \frac{\rho}{2T_0}\right).$$

Как и выше, определим длину пролета $l = A_1A_2$ и стрелу прогиба $f = OA$. Из уравнения параболы получим

$$f = \alpha\frac{l^2}{4}, \quad \text{откуда} \quad \alpha = \frac{4f}{l^2}.$$

Вычислим длину дуги A_1A_2, равную удвоенной дуге OA_2:

$$s = 2\int\limits_0^{\frac{l}{2}} \sqrt{1 + 4\alpha^2x^2}dx.$$

По формуле бинома Ньютона имеем

$$\sqrt{1 + 4\alpha^2x^2} = \left(1 + 4\alpha^2x^2\right)^{1/2} = 1 + 2\alpha^2x^2 - 2\alpha^4x^4 + \ldots$$

и интегрируя, находим разложение для s:

$$s = l + \frac{1}{6}\alpha^2l^3 - \frac{1}{40}\alpha^4l^5 + \ldots$$

Подставим вместо α найденное выше его выражение:

$$s = l + \frac{8}{3}\left(\frac{f}{l}\right)^2 l - \frac{32}{5}\left(\frac{f}{l}\right)^4 l + \ldots = l\left[1 + \frac{8}{3}\varepsilon^2 - \frac{32}{5}\varepsilon^4 + \ldots\right],$$

где $\varepsilon = \frac{f}{l}$. Ограничиваясь в написанном разложении двумя первыми слагаемыми, получим приближенную формулу

$$s \approx l + \frac{8}{3}\frac{f^2}{l},$$

совпадающую с аналогичной формулой для цепной линии.

179. Логарифмирование. *Натуральным логарифмом комплексного числа $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ называется показатель степени, в которую надо возвести e, чтобы получить логарифмируемое число.* Обозначив натуральный логарифм символом Log, можем сказать, что равенство

$$\mathrm{Log}[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)] = x + yi$$

равносильно следующему:

$$e^{x+yi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Последнее равенство можно написать так:

$$e^x(\cos y + i\sin y) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

откуда, сравнивая модули и аргументы, получим

$$e^x = r, \quad y = \varphi + 2k\pi \quad (k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots),$$

то есть

$$x = \log r \quad \text{и} \quad x + yi = \log r + (\varphi + 2k\pi)i$$

и окончательно

$$\mathrm{Log}[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)] = \log r + (\varphi + 2k\pi)i, \tag{30}$$

т. е. *натуральный логарифм комплексного числа равен комплексному числу, вещественная часть которого есть обычный логарифм модуля, а мнимая часть представляет собою произведение i на одно из значений аргумента.*

Мы видим, таким образом, что натуральный логарифм любого числа имеет бесчисленное множество значений. Исключение составляет лишь нуль, логарифм которого не существует. Если мы подчиним значение аргумента неравенству

$$-\pi < \varphi \leqslant \pi, \quad k = 0,$$

то получим так называемое *главное значение логарифма.* Для отличия главного значения логарифма от общего его значения, даваемого формулой (30), пользуются для главного значения обозначением log вместо Log, так что

$$\log[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)] = \log r + \varphi i, \tag{31}$$

где $-\pi < \varphi \leqslant \pi$.

С помощью логарифма определим *комплексную степень любого комплексного числа.* Если u и v — два комплексных числа, причем $u \neq 0$, то положим

$$u^v = e^{v\operatorname{Log} u}.$$

Заметим, что $\operatorname{Log} u$, а потому и u^v имеют, вообще говоря, бесчисленное множество значений.

Примеры. **1.** Модуль i равен единице и аргумент $\frac{\pi}{2}$, а потому

$$\operatorname{Log} i = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

2. Определим i^i:

$$i^i = e^{i\operatorname{Log} i} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

180. Синусоидальные величины и векторные диаграммы. Укажем на применение комплексных величин при изучении гармонических колебаний. Рассмотрим переменный ток, сила которого j в каждый момент времени имеет во всей цепи одно и то же значение, определяемое по формуле

$$j = j_m \sin(\omega t + \varphi), \tag{32}$$

где t — время, а j_m, ω и φ — постоянные.

Постоянная j_m, которую мы будем считать положительной, называется *амплитудой*; постоянная ω называется *частотой* и связана с *периодом* T соотношением

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

постоянная φ называется *фазой* переменного тока.

Ток, сила которого определяется по формуле (32), называется *синусоидальным.* Сказанное применяется и для напряжения

$$v = v_m \sin(\omega t + \varphi_1), \tag{33}$$

и в дальнейшем мы будем рассматривать силы тока и напряжения, изменяющиеся по синусоидальному закону, определяемому формулами (32) и (33).

Существует простое геометрическое изображение синусоидальных величин одной и той же частоты. Через некоторую точку O плоскости проводим луч, который мы будем вращать с угловой скоростью ω по часовой стрелке; этот луч назовем *осью времени.*

Пусть начальное положение оси времени при $t = 0$ совпадает с осью OX. Построим вектор $\overline{OA}$ (рис. 177) длины j_m, который образует угол φ с начальным положением оси времени (напомним, что положительным направлением отсчета углов мы считаем направление против часовой стрелки).

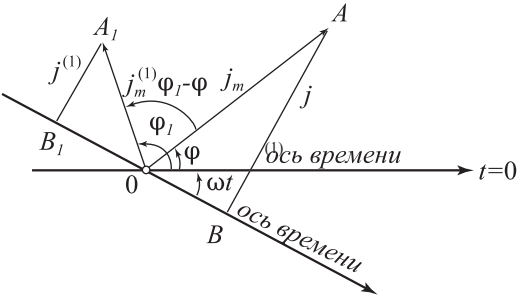

Рис. 177.

В момент t вектор $\overline{OA}$ будет образовывать угол $(\varphi + \omega t)$ с осью времени, повернувшейся на угол ωt; проекция вектора $\overline{OA}$ на направление, перпендикулярное оси времени и получающееся поворотом ее на угол $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки, или, короче говоря, взятая с надлежащим

знаком длина перпендикуляра, опущенного из конца вектора $\overline{OA}$ на ось времени, и дает нам, очевидно, величину $j = j_m \sin(\omega t + \varphi)$..

Для изображения другой синусоидальной величины того же периода

$$j^{(1)} = j_m^{(1)} \sin(\omega t + \varphi_1)$$

надо будет отложить вектор длины $j_m^{(1)}$, образующий с первым вектором угол

$$\psi = \varphi_1 - \varphi.$$

Таким образом, при помощи неподвижных векторов на плоскости мы можем изображать синусоидальные величины одной и той же частоты. Длина всякого вектора дает амплитуду соответствующей величины, а угол между двумя векторами представляет собой разность фаз соответствующих этим векторам величин. Построенные указанным образом векторы дают так называемую *векторную диаграмму* системы синусоидальных величин одного и того же периода.

Геометрическая сумма нескольких векторов векторной диаграммы, согласно теореме о проекции замыкающей, будет соответствовать синусоидальной величине того же периода, равной *сумме синусоидальных величин*, соответствующих слагаемым векторам.

Пользуясь определением умножения, приведенным в [172], можно придать операциям с векторными диаграммами удобный аналитический вид.

В дальнейшем мы будем обозначать векторы теми же буквами, но жирным шрифтом.

Произведение вектора $\mathbf{j}$ *на комплексное число* $re^{\varphi i}$ *будем считать равным вектору, который получается из вектора* $\mathbf{j}$*, если его длину умножить на* r *и повернуть его на угол* φ, т. е. будем считать, что произведение $re^{\varphi i}\mathbf{j}$ получается согласно приведенному в [172] правилу умножения комплексного числа, изображающего вектор $\mathbf{j}$, на комплексное число $re^{\varphi i}$.

Если комплексное число $re^{\varphi i}$ написать в виде $(a+bi)$, то произведение можно представить в виде суммы двух векторов

$$(a + bi)\mathbf{j} = a\mathbf{j} + bi\mathbf{j},$$

причем первое слагаемое есть вектор, параллельный вектору $\mathbf{j}$, а второе слагаемое есть вектор, перпендикулярный вектору $\mathbf{j}$.

Разлагая какой-либо вектор $\mathbf{j}_1$ на два взаимно перпендикулярных направления, можем представить его в виде

$$\mathbf{j}_1 = a\mathbf{j} + bi\mathbf{j} = (a + bi)\mathbf{j}.$$

При этом $|a+bi|$ равно, очевидно, отношению длин векторов $\mathbf{j}$ и $\mathbf{j}_1$, а аргумент числа $(a+bi)$ представляет собой угол, образованный вектором $\mathbf{j}_1$ с вектором $\mathbf{j}$. Этот угол дает разность фаз величин, соответствующих векторам $\mathbf{j}_1$ и $\mathbf{j}$.

Введем понятие *о среднем квадратичном* значении синусоидальной величины (32), которое мы обозначим символом $M(j^2)$. Оно определяется равенством

$$M(j^2) = \frac{1}{T}\int\limits_0^T j^2 dt.$$

Интегрируя выражение

$$j^2 = j_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}j_m^2 - \frac{1}{2}j_m^2 \cos 2(\omega t + \varphi)$$

в пределах от 0 до $T = \frac{2\pi}{\omega}$, получим

$$M(j^2) = \frac{1}{2}j_m^2 - \left[\frac{1}{4\omega}j_m^2 \sin 2(\omega t + \varphi)\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{1}{2}j_m^2.$$

Корень квадратный из среднего квадратичного значения называется *эффективным*, или *действующим, значением величины*:

$$j_{eff} = \sqrt{M(j^2)} = \frac{j_m}{\sqrt{2}}.$$

На практике при построении векторных диаграмм обычно принимают длину вектора равной не амплитуде, а эффективному значению величины, т. е. по сравнению с описанным выше построением длины векторов уменьшают в отношении $1 : \sqrt{2}$.

Дифференцируя формулу (32), получим

$$\frac{dj}{dt} = \omega j_m \cos(\omega t + \varphi) = \omega j_m \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

т. е. производная $\frac{d\mathbf{j}}{dt}$ отличается от $\mathbf{j}$ лишь тем, что амплитуда умножается на ω и к фазе прибавляется $\frac{\pi}{2}$.

Выведенное соотношение в векторных обозначениях напишется так:

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \omega i \mathbf{j}. \tag{34}$$

Интегрируя формулу (32) и отбрасывая произвольную постоянную, что необходимо делать, если мы желаем получить также синусоидальную величину того же периода, имеем

$$\int j dt = -\frac{1}{\omega} j_m \cos(\omega t + \varphi) = \frac{1}{\omega} j_m \sin\left(\omega t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right),$$

откуда следует[19]

$$\int \mathbf{j} dt = \frac{1}{\omega i} \mathbf{j}. \tag{35}$$

181. Примеры. 1. Рассмотрим цепь переменного тока, в которую введены последовательно: сопротивление R, самоиндукция L и емкость C. Обозначив через v напряжение и через j силу тока, будем иметь известное из физики соотношение:

$$v = Rj + L\frac{dj}{dt} + \frac{1}{C}\int j dt.$$

Ограничимся пока только явлениями *установившимися* и притом тем случаем, когда и напряжение и сила тока оказываются синусоидальными величинами одного и того же периода. Предыдущее уравнение можно переписать в векторной форме, введя вместо v и j *векторы* напряжения и тока $\mathbf{v}$ и $\mathbf{j}$:

$$\mathbf{v} = R\mathbf{j} + L\frac{d\mathbf{j}}{dt} + \frac{1}{C}\int \mathbf{j} dt;$$

вспомнив формулы (34) и (35), находим отсюда

$$\mathbf{v} = R\mathbf{j} + \omega L i \mathbf{j} + \frac{1}{\omega C i}\mathbf{j} = (R + ui)\mathbf{j} = \zeta \mathbf{j}, \tag{36}$$

где

$$u = \omega L - \frac{1}{\omega C}, \quad \zeta = R + ui. \tag{37}$$

Полученная зависимость между векторами напряжения и тока имеет вид обычного закона Ома с тою только разницей, что вместо омического сопротивления здесь входит комплексный множитель ζ, который называется *кажущимся сопротивлением цепи* и состоит из суммы трех

[19] Символ $\frac{d\mathbf{j}}{dt}$ обозначает вектор, соответствующий синусоидальной величине $\frac{dj}{dt}$, а символ $\int \mathbf{j} dt$ — вектор, соответствующий $\int j dt$.

«сопротивлений»: *омического* R, *сопротивления от самоиндукции* (ωLi) *и сопротивления от емкости* $\left(\frac{1}{\omega Ci}\right)$.

Формула (36) дает вместе с тем разложение вектора $\mathbf{v}$ на две составляющие: $R\mathbf{j}$ — по направлению j и $ui\mathbf{j}$ — по направлению, перпендикулярному к $\mathbf{j}$. Первая называется *ваттной*, вторая — *безваттной* составляющими напряжения. Эти термины станут ясными, если мы вычислим *среднюю мощность* W тока нашей цепи, которая определяется как среднее арифметическое по всему периоду от мгновенной мощности vj:

$$W = \frac{1}{T}\int\limits_0^T vj dt = \frac{v_m j_m}{T}\int\limits_0^T \sin(\omega t + \varphi_1)\sin(\omega t + \varphi_2)dt;$$

φ_1 означает здесь фазу напряжения, φ_2 — фазу тока, так что

$$v = v_m \sin(t + \varphi_1), \quad j = j_m \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Без труда находим

$$W = \frac{v_m j_m}{2T}\int\limits_0^T [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - \cos(2\omega t + \varphi_2)]dt =$$

$$= \frac{v_m j_m}{2}\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = v_{eff} j_{eff}\cos(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (38)$$

Таким образом, наибольшая по абсолютному значению средняя мощность получается, когда фазы напряжения и тока совпадают или отличаются на π; наименьшая, равная нулю, мощность получается тогда, когда эти фазы отличаются на $\pi/2$.

При составлении этого выражения W безваттная составляющая $ui\mathbf{j}$ вектора $\mathbf{v}$ дает среднюю мощность, равную нулю, ибо вектор $ui\mathbf{j}$ перпендикулярен вектору $\mathbf{j}$, т. е. для него $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$, и вся средняя мощность, которая переходит в джоулево тепло, получается лишь от ваттной («рабочей») составляющей.

Соотношение (36) можно переписать в виде

$$\mathbf{j} = \frac{1}{\zeta}\mathbf{v} = \eta\mathbf{v}, \quad \text{где} \quad \eta = \frac{1}{R + ui} = g + hi$$

или

$$\mathbf{j} = g\mathbf{v} + hi\mathbf{v}.$$

Комплексный множитель η называется *кажущейся проводимостью цепи, он равен обратной величине кажущегося сопротивления.* Предыдущая же формула дает разложение вектора тока на ваттную и безваттную составляющие (по направлению $\mathbf{v}$ и перпендикулярно к нему).

2. Основные правила для вычисления сопротивления сложной цепи постоянного тока, в которую включены сопротивления последовательно или параллельно, правила, которые выводятся из законов Ома и Киргофа, остаются в силе и для цепей с переменным установившимся синусоидальным током, если только условимся мгновенные значения напряжения и тока заменить соответствующими векторами, а омические сопротивления — кажущимися.

Так, если в цепь включены *последовательно* кажущиеся сопротивления

$$\zeta_1 = R_1 + x_1 i, \quad \zeta_2 = R_2 + x_2 i, \ldots,$$

то векторы напряжения и тока будут связаны соотношениями:

$$\mathbf{v} = \zeta' \mathbf{j}, \quad \text{где} \quad \zeta' = \zeta_1 + \zeta_2 + \ldots, \tag{39}$$

т. е. *при последовательном включении кажущиеся сопротивления складываются.*

Наоборот, если те же сопротивления включены *параллельно*, то мы получим соотношение

$$\mathbf{v} = \zeta'' \mathbf{j}, \quad \text{где} \quad \frac{1}{\zeta''} = \frac{1}{\zeta_1} + \frac{1}{\zeta_2} + \ldots, \tag{40}$$

т. е. *при параллельном включении складываются кажущиеся проводимости.*

Графически построение полного кажущегося сопротивления при последовательном включении кажущихся сопротивлений $\zeta_1, \zeta_2, \ldots$ сводится просто к построению геометрической суммы векторов, изображающих эти комплексные числа.

Укажем построение в случае параллельного включения двух кажущихся сопротивлений ζ_1 и ζ_2. Мы имеем по предыдущему правилу

$$\zeta'' = \frac{1}{\frac{1}{\zeta_1} + \frac{1}{\zeta_2}} = \frac{\zeta_1 \zeta_2}{\zeta_1 + \zeta_2}.$$

Положив

$$\zeta'' = \rho e^{\theta i}, \quad \zeta_1 = \rho_1 e^{\theta_1 i}, \quad \zeta_2 = \rho_2 e^{\theta_2 i}, \quad \zeta_1 + \zeta_2 = \rho_0 e^{\theta_0 i},$$

мы будем иметь

$$\rho = \frac{\rho_1\rho_2}{\rho_0}, \quad \theta = \theta_1 + \theta_2 - \theta_0.$$

Это приводит нас к следующему геометрическому построению (рис. 178). Находим прежде всего сумму $\zeta_1 + \zeta_2 = \overline{OC}$; затем строим $\triangle AOD$, подобный $\triangle COB$, для чего поворачиваем $\triangle COB$ в положение $C'O'B'$ и проводим прямую $\overline{AD} \,||\, \overline{C'B'}$.

Из подобия треугольников выводим:

$$\overline{OD} = \overline{OA}\frac{\overline{OB}}{\overline{OC}}, \quad \text{то есть} \quad \rho = \frac{\rho_1\rho_2}{\rho_0},$$
$$\theta = \theta_2 - \theta_0 \quad (\theta_1 = 0),$$

что и требовалось доказать.

3. Рассмотрим связанные колебания двух цепей, находящихся в магнитном соединении (рис. 179). Пусть v_1, j_1 означают внешнюю электродвижущую силу и силу тока в цепи I, j_2 — силу тока в цепи II (без внешней электродвижущей силы); R_1, R_2, L_1, L_2, C_1, C_2 — соответственно:

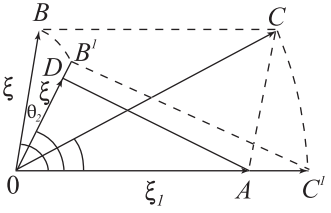

Рис. 178.

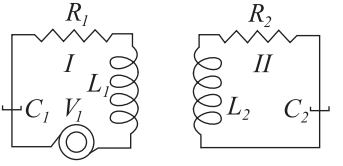

Рис. 179.

сопротивления, коэффициенты самоиндукции и емкости этих цепей, M — коэффициенты взаимной индукции цепей I и II.

Имеем соотношения

$$v_1 = R_1 j_1 + L_1\frac{dj_1}{dt} + M\frac{dj_2}{dt} + \frac{1}{C_1}\int j_1 dt,$$
$$0 = R_2 j_2 + L_2\frac{dj_2}{dt} + M\frac{dj_1}{dt} + \frac{1}{C_2}\int j_2 dt.$$

На чертеже мы для упрощения направили ось OX по вектору ζ_1, что приводится к предположению $\theta_1 = 0$. В общем случае достаточно повернуть ось OX на угол θ_1 по часовой стрелке.

Если рассматривать установившийся процесс, в котором напряжение и ток меняются по синусоидальному закону одинаковой частоты, то эти уравнения можно переписать в векторной форме:

$$\mathbf{v}_1 = \Big(R_1 + \omega L_1 i + \frac{1}{\omega C_1 i}\Big)\mathbf{j}_1 + \omega M i \mathbf{j}_2 = \zeta_1 \mathbf{j}_1 + \omega M i \mathbf{j}_2,$$
$$0 = \omega M i \mathbf{j}_1 + \Big(R_2 + \omega L_2 i + \frac{1}{\omega C_2 i}\Big)\mathbf{j}_2 = \omega M i \mathbf{j}_1 + \zeta_2 \mathbf{j}_2,$$

где ζ_1 и ζ_2 — кажущиеся сопротивления цепей I и II, если они взяты сами по себе. Решая относительно $\mathbf{j}_1$ и $\mathbf{j}_2$, получим без труда

$$\mathbf{j}_1 = \frac{\zeta_2}{\zeta_1\zeta_2 + \omega^2 M^2}\mathbf{v}_1, \ \mathbf{j}_2 = -\frac{\omega M_i}{\zeta_1\zeta_2 + \omega^2 M^2}\mathbf{v}_1.$$

Переписав первое уравнение в виде:

$$\mathbf{v}_1 = \Big(\zeta_1 + \frac{\omega^2 M^2}{\zeta_2}\Big)\mathbf{j}_1,$$

мы можем сказать, что наличие цепи II изменяет кажущееся сопротивление ζ цепи I на слагаемое $\frac{\omega^2 M^2}{\zeta_2}$.

182. Кривые в комплексной форме. Если вещественные числа условимся изображать точками на данной оси OX, то изменение вещественной переменной приводится к передвижению соответствующей точки по оси OX. Совершенно аналогично изменению комплексной переменной $\zeta = x + yi$ приводится к передвижению изображающей точки по *плоскости* XOY.

Особенно интересен тот случай, когда переменная ζ при своем изменении описывает некоторую *кривую*; это случится тогда, когда вещественная и мнимая части, т. е. координаты x и y, суть функции некоторого параметра u, который мы будем считать вещественным

$$x = \varphi_1(u), \quad y = \varphi_2(u). \tag{41}$$

Мы будем тогда писать просто

$$\zeta = f(u), \quad \text{где} \quad f(u) = \varphi_1(u) + i\varphi_2(u),$$

и будем называть это уравнение — *уравнением рассматриваемой кривой* (41) *в комплексной форме.*

Уравнения (41) дают параметрическое представление кривой в *прямоугольных* координатах. К представлению ее в *полярных* координатах мы придем, если напишем переменную ζ в показательной форме:

$$\zeta = \rho e^{\theta i}, \quad \rho = \psi_1(u), \quad \theta = \psi_2(u).$$

В этом выражении множитель ρ есть не что иное, как $|\zeta|$, множитель же $e^{\theta i}$, который в случае вещественных $\zeta(\theta = 0 \quad \text{или} \quad \pi)$ совпадает со «знаком» (± 1), есть вектор длины единицы и обозначается символом

$$\mathrm{Sgn}\zeta = e^{\theta i} = \frac{\zeta}{|\zeta|}$$

(сокращенное латинское слово «Signum» — знак).

К необходимости рассмотрения уравнений кривых в комплексной форме приводят векторные диаграммы. Если мы в соотношении

$$\mathbf{v} = \zeta \mathbf{j}$$

будем считать вектор тока $\mathbf{j}$ постоянным, но будем менять какую-нибудь из различных постоянных цепи, то будет меняться кажущееся сопротивление ζ и вектор $\mathbf{v}$; конец этого вектора $\mathbf{v}$ опишет кривую, которая называется *диаграммой напряжения*, построив которую, мы получим ясную картину изменения вектора $\mathbf{v}$. Точка ζ также опишет кривую (*диаграмма сопротивления*), которая только выбором масштаба будет отличаться от диаграммы напряжения (за единицу будет принят вектор $\mathbf{j}$).

Рассмотрим теперь уравнения некоторых простейших кривых.

1. Уравнение прямой, проходящей через данную точку $\zeta_0 = x_0 + y_0 i$ и образующий угол α с осью OX:

$$\zeta = \zeta_0 + u e^{\alpha i};$$

параметр u означает здесь расстояние, отсчитываемое от точки ζ_0 до ζ.

2. Уравнение окружности с центром в точке ζ_0 и радиусом $\mathbf{r}$:

$$\zeta = \zeta_0 + r e^{ui}.$$

3. Эллипс с центром в начале координат и полуосями a и b, причем большая ось направлена по оси OX, имеет в комплексной форме уравнение [177]:

$$\zeta = x + yi = a\cos u + bi\sin u = \frac{a+b}{2}e^{ui} + \frac{a-b}{2}e^{-ui}.$$

Если большая ось образует угол φ_0 с осью OX, то уравнение эллипса примет вид

$$\zeta = e^{\varphi_0 i}\left[\frac{a+b}{2}e^{ui} + \frac{a-b}{2}e^{-ui}\right].$$

В общем случае, когда центр эллипса находится в точке ζ_0 и большая ось образует угол φ_0 с осью OX, эллипс будет иметь уравнение

$$\zeta = \zeta_0 + e^{\varphi_0 j}\left[\frac{a+b}{2}e^{ui} + \frac{a-b}{2}e^{-ui}\right].$$

Если $b = a$, уравнение это обращается в уравнение окружности радиуса a:

$$\zeta = \zeta_0 + ae^{(\varphi_0+u)i},$$

где $(\varphi_0 + u)$, так же как и u — вещественный параметр. Если $b = 0$, получим отрезок прямой:

$$\zeta = \zeta_0 + ae^{\varphi_0 i}\frac{e^{ui}+e^{-ui}}{2} = \zeta_0 + ae^{\varphi_0 i}\cos u, \quad \zeta = \zeta_0 + ve^{\varphi_0 i},$$

образующий угол φ_0 с осью OX, длины $2a$, середина которого в точке ζ_0, ибо параметр $v = a\cos u$ — вещественный, подобно u, но может принимать значения только между $(-a)$ и $(+a)$.

Рассматривая случаи окружности и отрезка прямой как предельные случаи эллипса, получающиеся, когда малая полуось становится равной большой или обращается в нуль, мы можем теперь сказать вообще, что *уравнение*

$$\zeta = \zeta_0 + \mu_1 e^{ui} + \mu_2 e^{-ui}, \tag{42}$$

где ζ_0, μ_1, μ_2 — какие угодно комплексные числа, всегда представляет уравнение эллипса.

В самом деле, положив

$$\mu_1 = M_1 e^{\theta_1 i}, \quad \mu_2 = M_2 e^{\theta_2 i}, \quad \frac{\theta_1+\theta_2}{2} = \varphi, \quad \frac{\theta_1-\theta_2}{2} = \theta_0,$$

можем переписать уравнение (42) в виде

$$\zeta = \zeta_0 + M_1 e^{(u+\theta_1)i} + M_2 e^{-(u-\theta_2)i} = \zeta_0 + e^{\varphi_0 i}\left[M_1 e^{(u+\theta_0)i} + M_2 e^{(u+\theta_0)i}\right],$$

откуда ясно, что рассматриваемая кривая есть действительно эллипс с центром в точке ζ_0, полуосями $(M_1 \pm M_2)$, и большая ось которого образует угол φ_0 с осью OX, т. е. имеет направление биссектрисы угла между

векторами μ_1 и μ_2. При $M_2 = 0$ эллипс обращается в окружность, при $M_2 = M_1$ — в отрезок прямой.

4. При исследовании явлений переменного тока в цепях с непрерывно распределенными сопротивлениями, емкостями и самоиндукцией большое значение имеют кривые, уравнение которых в комплексной форме имеет вид

$$\zeta = \nu e^{\gamma u}, \tag{43}$$

где ν и γ — какие угодно комплексные постоянные.

Положив $\nu = N_1 e^{\varphi_0 i}$, $\gamma = a + bi$ и переходя к полярным координатам, имеем отсюда

$$\zeta = \rho e^{\theta i} = N_1 e^{\varphi_0 i} e^{(a+bi)u} = N_1 e^{au} e^{(bu+\varphi_0)i},$$

то есть

$$\rho = N_1 e^{au}, \quad \theta = bu + \varphi_0,$$

откуда

$$u = \frac{\theta - \varphi_0}{b},$$

или окончательно

$$\rho = N e^{\frac{a}{b}\theta} \quad \left(N = N_1 e^{-\frac{a\varphi_0}{b}}\right),$$

т. е. рассматриваемая кривая есть логарифмическая спираль $\Big($рис. 180, соответствующий случаю $\frac{a}{b} > 0\Big)$.

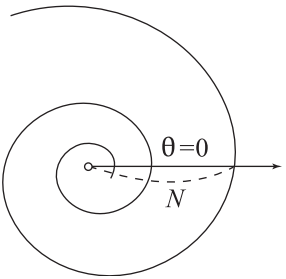

Рис. 180.

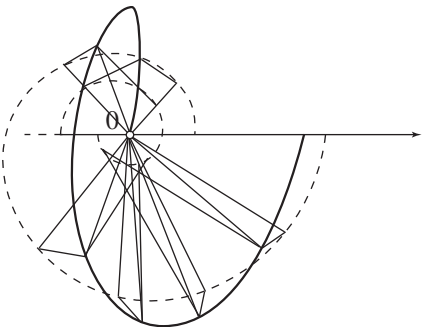

Рис. 181.

Более сложные кривые типа

$$\zeta = \nu_1 e^{\gamma_1 u} + \nu_2 e^{\gamma_2 u} + \ldots + \nu_s e^{\gamma_s u}$$

можно получить, построив «составляющие спирали»

$$\zeta_1 = \nu_1 e^{\gamma_1 u}, \quad \zeta_2 = \nu_2 e^{\gamma_2 u}, \quad \ldots, \ \zeta_s = \nu_s e^{\gamma_s u}$$

и вычисляя геометрически при каждом значении u сумму соответствующих значений $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_s$ (рис. 181).

183. Представление гармонического колебания в комплексной форме. Гармоническое затухающее колебание выражается формулой

$$x = Ae^{-\varepsilon t}\sin(\omega t + \varphi_0), \tag{44}$$

где A и ε — положительные постоянные. Введем в рассмотрение комплексную величину

$$\zeta = Ae^{\left(\varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right)i} e^{(\omega + \varepsilon i)it} = Ae^{-\varepsilon t + \left(\omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2}\right)i}. \tag{45}$$

Вещественная часть этой комплексной величины совпадает с выражением (44). Таким образом, мы можем представить любое гармоническое затухающее колебание как вещественную часть комплексного выражения вида:

$$\zeta = \alpha e^{\beta i t},$$

где α и β — комплексные числа. В случае формулы (45):

$$\alpha = Ae^{(\varphi_0 - \frac{\pi}{2})i} \quad \text{и} \quad \beta = \omega + \varepsilon i.$$

В случае чисто гармонического колебания без затухания $\varepsilon = 0$ и β будет числом вещественным. Выражение (45) для ζ совпадает с выражением (43) при

$$\nu = Ae^{(\varphi_0 - \frac{\pi}{2})i}, \quad \gamma = (\omega + \varepsilon i)i = -\varepsilon + \omega i \quad \text{и} \quad u = t.$$

Отсюда видно, что при изменении t точка ζ описывает логарифмическую спираль, причем полярный угол θ есть линейная функция времени t:

$$\theta = \omega t + \varphi_0 - \frac{\pi}{2},$$

т. е. радиус-вектор из начала координат в точку ζ вращается вокруг начала с постоянной угловой скоростью ω. Проекция точки ζ

на ось OX совершает затухающие колебания (44). Если $\varepsilon = 0$, то точка ζ движется по окружности $\rho = A$, и ее проекция на ось OX движется по закону гармонического колебания без затухания:

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0).$$

§ 18. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ЦЕЛЫХ МНОГОЧЛЕНОВ И ВЫЧИСЛЕНИЕ ИХ КОРНЕЙ

184. Алгебраическое уравнение. В настоящем параграфе мы будем заниматься исследованием целого многочлена (полинома):

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_k z^{n-k} + \ldots + a_{n-1} z + a_n,$$

где a_0, a_1, ..., a_k, a_n — данные комплексные числа и z — комплексная переменная, причем старший коэффициент a_0 мы можем считать отличным от нуля. Основные действия с многочленами хорошо известны из элементарной алгебры. Мы напомним только основной результат, касающийся действия деления. Если $f(z)$ и $\varphi(z)$ — два многочлена и степень $\varphi(z)$ не выше степени $f(z)$, то $f(z)$ можно представить в виде

$$f(z) = \varphi(z) \cdot Q(z) + R(z),$$

где $Q(z)$ и $R(z)$ — также многочлены, причем степень $R(z)$ ниже степени $\varphi(z)$. Многочлены $Q(z)$ и $R(z)$ называются, соответственно, частным и остатком при делении $f(z)$ на $\varphi(z)$. Частное и остаток суть вполне определенные многочлены, так что представление $f(z)$ в указанном выше виде через $\varphi(z)$ единственно.

Значения z, при подстановке которых многочлен обращается в нуль, называются корнями этого многочлена. Таким образом, *корни* $f(z)$ суть решения уравнения

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_k z^{n-k} + \ldots + a_{n-1} z + a_n = 0. \quad (1)$$

Написанное уравнение называется *алгебраическим уравнением* n-й *степени.*

При делении $f(z)$ на двучлен $(z-a)$ частное $Q(z)$ будет многочленом $(n-1)$-й степени со старшим коэффициентом a_0, остаток же R не будет содержать z. По основному свойству деления имеет место тождество

$$f(z) = (z-a)Q(z) + R.$$

Подставляя это тождество $z = a$, получим

$$R = f(a),$$

т. е. *остаток, получаемый при делении многочлена* $f(z)$ *на* $(z-a)$, *равен* $f(a)$ (теорема Безу).

В частности, для того чтобы многочлен $f(z)$ делился на $(z-a)$ без остатка, необходимо и достаточно условие

$$f(a) = 0,$$

т. е. *для того, чтобы многочлен делился на двучлен* $(z-a)$ *без остатка, необходимо и достаточно, чтобы* $z = a$ *было корнем этого многочлена.*

Таким образом, зная корень $z = a$ многочлена $f(z)$, мы можем выделить из этого многочлена множитель $(z-a)$:

$$f(z) = (z-a)f_1(z),$$

где

$$f_1(z) = b_0 z^{n-1} + b_1 z^{n-2} + \ldots + b_{n-2}z + b_{n-1} \quad (b_0 = a_0);$$

нахождение остальных корней приводит к решению уравнения

$$b_0 z^{n-1} + b_1 z^{n-2} + \ldots + b_{n-2}z + b_{n-1} = 0$$

$(n-1)$-й степени.

Для дальнейшего нам необходимо иметь ответ на следующий вопрос: имеет ли всякое алгебраическое уравнение корни? В случае неалгебраического уравнения ответ может быть отрицательным. Так, например, уравнение

$$e^z = 0 \ (z = x + yi)$$

вовсе корней не имеет, так как модуль e^x левой части ни при одном значении x в нуль не обращается. Но в случае алгебраического уравнения на поставленный выше вопрос имеется утвердительный ответ, который и заключается в следующей основной теореме алгебры: *всякое алгебраическое уравнение имеет по крайней мере один корень.*

Мы примем здесь эту теорему без доказательства. В третьем томе при изложении теории функций комплексной переменной мы дадим ее доказательство.

185. Разложение многочлена на множители. Всякий многочлен

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n, \tag{2}$$

согласно основной теореме, имеет корень $z = z_1$, а потому делится на $(z - z_1)$, и мы можем написать [184]

$$f(z) = (z - z_1)(a_0 z^{n-1} + \ldots).$$

Второй множитель произведения, стоящего в правой части этого равенства, имеет, согласно упомянутой основной теореме, корень $z = z_2$, а потому делится на $(z - z_2)$. И мы можем написать

$$f(z) = (z - z_1)(z - z_2)(a_0 z^{n-2} + \ldots).$$

Продолжая таким образом выделять множители первой степени, мы получим окончательно следующее разложение $f(z)$ на множители:

$$f(z) = a_0 (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n), \tag{3}$$

т. е. всякий многочлен n-й степени разлагается на $(n+1)$ множителей, один из которых равен старшему коэффициенту, а остальные суть двучлены первой степени вида $(z - a)$.

При подстановке $z = z_s$ $(s = 1,\ 2, \ldots,\ n)$ по крайней мере один из множителей в разложении (3) обратится в нуль, т. е. *значения $z = z_s$ суть корни $f(z)$.*

Любое значение z, отличное от всех z_s, не может быть корнем $f(z)$, так как при таком значении z ни одни из сомножителей в разложении (3) в нуль не обратится.

Если все числа z_s различны между собой, то $f(z)$ имеет ровно n различных корней. Если среди чисел z_s есть одинаковые, то число различных корней $f(z)$ будет меньше n.

Таким образом, мы можем высказать теорему: *многочлен n-й степени (или алгебраическое уравнение n-й степени) не может иметь более n различных корней.*

Непосредственным следствием этой теоремы является следующее предложение: *если известно, что некоторый многочлен степени не выше n имеет более n различных корней, то все коэффициенты этого многочлена и свободный член равны нулю, т. е. этот многочлен равен нулю тождественно.*

Положим, что значения двух многочленов $f_1(z)$ и $f_2(z)$ степени не выше n совпадают более чем при n различных значениях z. Их разность $f_1(z) - f_2(z)$ есть многочлен степени не выше n, имеющий более n различных корней, а потому эта разность обращается тождественно в нуль и $f_1(z)$ и $f_2(z)$ имеют одинаковые коэффициенты. *Если значения двух многочленов степени не выше n совпадают более чем при n различных значениях z, то все коэффициенты этих многочленов и свободные члены одинаковы, т. е. эти многочлены тождественно равны между собой.*

Это свойство многочленов лежит в основе так называемого метода неопределенных коэффициентов, которым мы в дальнейшем будем пользоваться. Практически сущность этого метода сводится к тому, что из тождественного равенства двух многочленов вытекают равенства коэффициентов этих многочленов при одинаковых степенях z.

Разложение (3) было нами получено путем выделения множителей первой степени из многочлена $f(z)$ в определенном порядке. Покажем теперь, что окончательный вид разложения не зависит от того, каким образом мы выделяли указанные множители, т. е. что *многочлен имеет единственное разложение на множители вида* (3).

Положим, что, кроме разложения (3), имеет место разложение

$$f(z) = b_0(z - z_1')(z - z_2')\dots(z - z_n'). \qquad (3_1)$$

Сравнивая эти два разложения, можем написать тождество

$$a_0(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)=b_0(z-z_1')(z-z_2')\ldots(z-z_n').$$

Левая часть этого тождества обращается в нуль при $z=z_1$; следовательно, то же должно иметь место и по отношению к правой части, т. е. по крайней мере одно из чисел z_k' должно быть равным z_1. Можно, например, считать, что $z_1'=z_1$. Сокращая обе части написанного тождества на $(z-z_1)$, получим равенство

$$a_0(z-z_2)\ldots(z-z_n)=b_0(z-z_2')\ldots(z-z_n'),$$

справедливое при всех значениях z, кроме, может быть, $z=z_1$. Но при этом, в силу доказанного выше предложения, это равенство также должно быть тождеством. Рассуждая так же, как и выше, докажем, что $z_2'=z_2$ и т. д. и, наконец, что $b_0=a_0$, т. е. разложение (3_1) должно совпадать с разложением (3).

186. Кратные корни. Среди чисел z_s, входящих в разложение (3), могут быть, как мы уже упоминали, и одинаковые. Соединяя в разложении (3) одинаковые сомножители в одну группу, можем написать его в виде

$$f(z)=a_0(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}\ldots(z-z_m)^{k_m}, \tag{4}$$

где числа z_1, z_2, ..., z_m различны и

$$k_1+k_2+\ldots+k_m=n. \tag{5}$$

Если в написанном таким образом разложении имеется множитель $(z-z_s)^{k_s}$, то корень $z=z_s$ называют *корнем кратности* k_s *и вообще корень* $z=a$ *многочлена* $f(z)$ *называется корнем кратности* k, *если* $f(z)$ *делится на* $(z-a)^k$ *и не делится на* $(z-a)^{k+1}$.

Укажем теперь другой признак кратности корня. Для этого введем в рассмотрение формулу Тейлора. Заметим прежде всего, что можем определить производные от многочлена $f(z)$ по тем же формулам, какие имели место при вещественной переменной:

$$f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_kz^{n-k}+\ldots+a_{n-1}z+a_n;$$

$$f'(z)=na_0z^{n-1}+(n-1)a_1z^{n-2}+\ldots+(n-k)a_kz^{n-k-1}+\ldots+a_{n-1};$$
$$f''(z)=n(n-1)a_0z^{n-2}+(n-1)(n-2)a_1z^{n-3}+\ldots$$
$$\ldots+(n-k)(n-k-1)a_kz^{n-k-2}+\ldots+2\cdot 1a_{n-2}.^*$$

. . . . . .

Формула Тейлора

$$f(z)=f(a)+\frac{z-a}{1!}f'(a)+\frac{(z-a)^2}{2!}f''(a)+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(z-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\ldots+\frac{(z-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) \quad (6)$$

представляет собою элементарное алгебраическое тождество, содержащее буквы a и z, справедливое не только при вещественных, но и при комплексных значениях этих букв.

Выведем теперь условие для того, чтобы $z=a$ было корнем $f(z)$ кратности k. Перепишем (6) в виде:

$$f(z)=(z-a)^k\left[\frac{1}{k!}f^{(k)}(a)+\frac{z-a}{(k+1)!}f^{(k+1)}(a)+\ldots+\frac{(z-a)^{n-k}}{n!}f^{(n)}(a)\right]+$$
$$+\left[f(a)+\frac{z-a}{1!}f'(a)+\ldots+\frac{(z-a)^{k-1}}{(k-1)!}f^{(k-1)}(a)\right].$$

Многочлен, стоящий во второй квадратной скобке, имеет степень ниже степени $(z-a)^k$, и отсюда видно [184], что первая квадратная скобка есть частное, а вторая — остаток при делении $f(z)$ на $(z-a)^k$. Для того, чтобы $f(z)$ делилось на $(z-a)^k$, необходимо и достаточно, чтобы этот остаток был равен тождественно нулю. Рассматривая его как многочлен относительно переменной $(z-a)$, получаем следующее условие:

$$f(a)=f'(a)=\ldots=f^{(k-1)}(a)=0. \quad (7)$$

К этому условию мы должны еще добавить условие

* Вообще говоря, дифференцирование функции комплексного переменного — вопрос для отдельного изучения и будет рассмотрен в следующих томах.

$$f^{(k)}(a) \neq 0, \tag{8}$$

ибо если бы и $f^{(k)}(a) = 0$, то $f(z)$ делился бы не только на $(z-a)^k$, но и на $(z-a)^{k+1}$. Итак, *условия* (7) *и* (8) *являются необходимыми и достаточными условиями того, чтобы* $z = a$ *было корнем кратности* k *многочлена* $f(z)$.

Положим $\psi(z) = f'(z)$, следовательно

$$\psi'(z) = f''(z),\ \psi''(z) = f'''(z),\ \ldots,\ \psi^{(s-1)}(z) = f^{(s)}(z).$$

Если $z = a$ есть корень кратности k многочлена $f(z)$, то, в силу (7) и (8):

$$\psi(a) = \psi'(a) = \ldots = \psi^{(k-2)}(a) = 0 \quad \text{и} \quad \psi^{(k-1)}(a) \neq 0,$$

т. е. $z = a$ будет корнем кратности $(k-1)$ для $\psi(z)$ или, что то же, для $f'(z)$, т. е. *корень кратности* k *некоторого многочлена является корнем кратности* $(k-1)$ *для производной этого многочлена.* Применяя последовательно это свойство, убедимся, *что он будет корнем кратности* $(k-2)$ *для второй производной, корнем кратности* $(k-3)$ *для третьей производной и т. д. и, наконец, корнем первой кратности, или, как говорят, простым корнем для производной* $(k-1)$*-го порядка.*

Таким образом, если для $f(z)$ имеет место разложение

$$f(z) = a_0(z-z_1)^{k_1}(z-z_2)^{k_2}\ldots(z-z_m)^{k_m}, \tag{9}$$

то для $f'(z)$ будем иметь

$$f'(z) = (z-z_1)^{k_1-1}(z-z_2)^{k_2-1}\ldots(z-z_m)^{k_m-1}\omega(z), \tag{10}$$

где $\omega(z)$ — многочлен, не имеющей уже корней, общих с $f(z)$.

187. Правило Горнера. Укажем теперь практически удобное правило для вычисления значений $f(z)$ и производных при заданном значении $z = a$.

Пусть при делении $f(z)$ на $(z-a)$ получается частное $f_1(z)$ и остаток r_1, при делении $f_1(z)$ на $(z-a)$ — частное $f_2(z)$ и остаток r_2 и т. д.:

$$f(z) = (z-a)f_1(z) + r_1, \quad r_1 = f(a),$$

$$f_1(z) = (z-a)f_2(z) + r_2, \quad r_2 = f_1(a),$$
$$f_2(z) = (z-a)f_3(z) + r_3, \quad r_3 = f_2(a),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Перепишем формулу (6) в виде:

$$f(z) = f(a) + (z-a)\left[\frac{f'(a)}{1} + \frac{f''(a)}{2!}(z-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^{n-1}\right].$$

Сравнивая эту формулу с первым из написанных выше равенств, получим

$$f_1(z) = \frac{f'(a)}{1} + \frac{f''(a)}{2!}(z-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^{n-1}, \ r_1 = f(a).$$

Поступая точно так же с $f_1(z)$, найдем:

$$f_2(z) = \frac{f''(a)}{2!} + \frac{f'''(a)}{3!}(z-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^{n-2}, \ r_2 = \frac{f'(a)}{1},$$

и, вообще,

$$r_{k+1} = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \quad (k = 1, \ 2, \ \ldots, \ n).$$

Положим теперь

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n,$$
$$f_1(z) = b_0 z^{n-1} + b_1 z^{n-2} + \ldots + b_{n-2}z + b_{n-1}, \ b_n = r_1$$

и покажем, каким образом можно вычислять коэффициенты частного b_s и остаток b_n. Раскрывая скобки и собирая члены с одинаковыми степенями z, получим тождество

$$\begin{aligned} a_0z^n + a_1z^{n-1} + \ldots + a_{n-1}z + a_n = \\ = (z-a)(b_0z^{n-1} + b_1z^{n-2} + \ldots + b_{n-2}z + b_{n-1}) + b_n = \\ = b_0z^n + (b_1 - b_0a)z^{n-1} + (b_2 - b_1a)z^{n-2} + \ldots + \\ + (b_{n-1} - b_{n-2}a)z + (b_n - b_{n-1}a), \end{aligned}$$

и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z:

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1 - b_0a,\ a_2 = b_2 - b_1a,\ \ldots,\ a_{n-1} = b_{n-1} - b_{n-2}a,$$
$$a_n = b_n - b_{n-1}a,$$

откуда

$$b_0 = a_0,\ b_1 = b_0a + a_1,\ b_2 = b_1a + a_2,\ \ldots,\ b_{n-1} = b_{n-2}a + a_{n-1},$$
$$b_n = b_{n-1}a + a_n = r_1.$$

Эти равенства и дают возможность последовательно определить величины b_s.

Точно так же, обозначив частное и остаток при делении $f_1(z)$ на $(z-a)$,

$$f_2(z) = c_0z^{n-2} + c_1z^{n-3} + \ldots + c_{n-3}z + c_{n-2}; \quad c_{n-1} = r_2,$$

будем иметь

$$c_0 = b_0,\ c_1 = c_0a + b_1,\ c_2 = c_1a + b_2,\ \ldots,\ c_{n-2} = c_{n-3}a + b_{n-2},$$
$$c_{n-1} = c_{n-2}a + b_{n-1} = r_2,$$

т. е. коэффициенты c_s вычисляют последовательно при помощи b_s, так же как b_s при помощи a_s.

Указанный прием вычисления называется правилом, или алгорифмом Горнера[21]). Применяя это правило, мы получим величины $\frac{f^{(k)}(a)}{k!}$.

Приведем схему вычислений, которая понятна без пояснений:

[21]Вообще алгорифмом называют определенное правило, согласно которому надо производить математические операции, чтобы получить требуемый ответ.

$$
\begin{array}{c|l}
a & a_0, \quad a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots, \; a_{n-2}, \quad a_{n-1}, \quad a_n \\
 & + \quad b_0 a, \; b_1 a, \; b_2 a, \; \ldots, \; b_{n-3} a, \; b_{n-2} a, \; b_{n-1} a \\
 & b_0 = a_0, \; b_1, \quad b_2, \quad b_3, \quad \ldots, \; b_{n-2}, \quad b_{n-1}, \qquad \boxed{b_n = r_1 = f(a)} \\
 & + \quad c_0 a, \; c_1 a, \; c_2 a, \; \ldots, \; c_{n-3} a, \; c_{n-2} a \\
 & c_0 = a_0, \; c_1, \quad c_2, \quad c_3, \quad \ldots, \; c_{n-2}, \qquad \boxed{c_{n-1} = r_2 = \frac{f'(a)}{1}} \\
 & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
 & l_0 = a_0, \; l_1 \qquad \boxed{l_2 = r_{n-1} = \frac{f^{n-2}(a)}{(n-2)!}} \\
 & + \quad m_0 a \\
 & m_0 = a_0 \qquad \boxed{m_1 = r_1 = \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}} \\
 & \boxed{m_0 = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}}
\end{array}
$$

Пример. Найти значения функции

$$f(z) = z^5 + 2z^4 - 2z^2 - 25z + 100$$

и ее производных при $z = -5$.

$$
\begin{array}{c|l}
a = -5 & 1, \quad 2, \quad 0, \quad -2, \; -25, \quad 100 \\
 & \quad -5 \; 15, \; -75, \; 385, \; -1800 \\
 & 1, \; -3, \; 15, \; -77, \; 360 \qquad \boxed{-1700 = f(-5)} \\
 & \quad -5, \; 40, \; -275, \; 1760 \\
 & 1, \; -8, \; 55, \; -352 \qquad \boxed{2120 = \frac{f'(-5)}{1!}} \\
 & \quad -5, \; 65, \; -600 \\
 & 1, \; -13, \; 120 \qquad \boxed{-952 = \frac{f''(-5)}{2!}} \\
 & \quad -5, \; 90 \\
 & 1, \; -18 \qquad \boxed{210 = \frac{f'''(-5)}{3!}} \\
 & \quad -5 \\
 & 1 \qquad \boxed{-23 = \frac{f^{IV}(-5)}{4!}} \\
 & \boxed{1 = \frac{f^{V}(-5)}{5!}}
\end{array}
$$

188. Общий наибольший делитель. Рассмотрим два многочлена $f_1(z)$ и $f_2(z)$. Каждый из них имеет определенное разложение на множители вида (3). *Общим наибольшим делителем* $D(z)$ этих двух многочленов называется произведение всех двучленных множителей вида $(z-a)$, входящих как в разложение $f_1(z)$, так и в разложение $f_2(z)$, причем эти общие множители берутся с показателем степени, равным наименьшему из показателей, с которым они входят в разложения $f_1(z)$ и $f_2(z)$. Постоянные множители при составлении общего наибольшего делителя никакой роли не играют. Таким образом, общий наибольший делитель двух многочленов есть многочлен, корни которого суть общие двум упомянутым многочленам корни с кратностью, равной наименьшей из тех двух кратностей, с которыми они входят в упомянутые многочлены. Если данные многочлены не имеют общих корней, то говорят, что они *взаимно простые.* Совершенно аналогично предыдущему можно определить и общий наибольший делитель нескольких многочленов.

Для составления общего наибольшего делителя указанным выше способом необходимо иметь разложение данных многочленов на множители первой степени. Но нахождение разложения (3) сводится к решению уравнения $f(z)=0$, что и составляет одну из основных задач алгебры.

Можно, однако, подобно тому, как это делается в арифметике для общего наибольшего делителя целых чисел, указать другой способ отыскания общего наибольшего делителя, не требующий разложения на множители, — *способ последовательного деления.* Способ этот состоит в следующем. Положим, что степень $f_1(z)$ не ниже степени $f_2(z)$. Первый многочлен делим на второй, затем второй многочлен $f_2(z)$ разделим на остаток, получаемый при первом делении, этот первый остаток делим на остаток, получаемый при втором делении, и т. д., пока не получится деление с остатком, равным нулю. *Последний остаток, отличный от нуля, и является общим наибольшим делителем двух данных многочленов.* Если этот остаток не содержит z, то данные многочлены будут взаимно простыми. Таким образом, *нахождение общего наибольшего делителя сводится к делению многочленов, расположенных по убывающим степеням переменной.* Разделив $f_1(z)$ и $f_2(z)$ на $D(x)$, мы

получим взаимно простые многочлены. Один из них или оба не могут содержать z.

Сравнивая разложения (9) и (10), мы видим, что общий наибольший делитель $D(z)$ многочлена $f(z)$ и его производной $f'(z)$ будет

$$D(z) = (z - z_1)^{k_1 - 1}(z - z_2)^{k_2 - 1} \ldots (z - z_m)^{k_m - 1},$$

причем мы опускаем постоянный множитель, что является несущественным.

Разделив $f(z)$ на $D(z)$, получим

$$\frac{f(z)}{D(z)} = a_0(z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_m),$$

т. е. при делении многочлена $f(z)$ на общий наибольший делитель $f(z)$ и $f'(z)$ получается многочлен, имеющий все корни простые и совпадающие с различными корнями $f(z)$.

Получение такого многочлена называется операцией освобождения многочлена $f(z)$ от кратных корней. Мы видим, что для этого нет необходимости решать уравнение $f(z) = 0$.

Если $f(z)$ и $f'(z)$ взаимно простые, то $f(z)$ имеет все корни простые и наоборот.

189. Вещественные многочлены. Рассмотрим теперь многочлен с вещественными коэффициентами:

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n,$$

и пусть этот многочлен имеет комплексный корень $z = a + bi$ $(b \neq 0)$ кратности k, т. е.

$$f(a + bi) = f'(a + bi) = \ldots = f^{(k-1)}(a + bi) = 0,$$
$$f^k(a + bi) = A + Bi \neq 0.$$

Заменим теперь в выражении $f(a+bi)$ и в производных все величины сопряженными. При этой замене коэффициенты a_s, как числа вещественные, останутся прежними и лишь $(a + bi)$ перейдет в

$(a-bi)$, т. е. многочлен $f(z)$ останется прежним, но вместо $z = a+bi$ в него будет подставлено $z = a - bi$. После замены комплексных чисел сопряженными, как известно [173], и общий результат, т. е. значение многочлена, переходит в сопряженное. Таким образом получим

$$f(a-bi) = f'(a-bi) = \ldots = f^{(k-1)}(a-bi) = 0,$$
$$f^k(a-bi) = A - Bi \neq 0,$$

т. е. если многочлен с вещественными коэффициентами имеет комплексный корень $z = a + bi (b \neq 0)$ кратности k, то он должен иметь и сопряженный корень $z = a - bi$ той же кратности.

Итак, комплексные корни многочлена $f(z)$ с вещественными коэффициентами распределяются по парам сопряженных корней. Положим, что переменная z принимает лишь вещественные значения, и обозначим ее буквою x. Согласно формуле (3)

$$f(x) = a_0(x - z_1)(x - z_2)\ldots(x - z_n).$$

Если среди корней n будут комплексные, то соответствующие им множители также будут комплексными. Перемножив попарно множители, соответствующие паре сопряженных корней, получим

$$[x - (a + bi)][x - (a - bi)] = [(x - a) - bi][(x - a) + bi] = \\ = (x - a)^2 + b^2 = x^2 + px + q,$$

где

$$p = -2a,\ q = a^2 + b^2\ (b \neq 0).$$

Таким образом, пара комплексных сопряженных корней дает вещественный множитель второй степени, и мы можем высказать следующее положение: *многочлен с вещественными коэффициентами разлагается на вещественные множители первой и второй степени.*

Разложение это имеет следующий вид:

$$f(x) = a_0(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\dots(x-x_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\times \\ \times(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}\dots(x^2+p_tx+q_t)^{l_t}. \quad (11)$$

где x_1, x_2, ..., x_r — вещественные корни $f(x)$ кратности k_1, k_2, ..., k_r и множители второй степени происходят от пар комплексных сопряженных корней кратности l_1, l_2, ..., l_t.

190. Зависимость между корнями уравнения и его коэффициентами. Пусть, как и раньше, z_1, z_2, ..., z_n суть корни уравнения

$$a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_{n-1}z + a_n = 0.$$

Согласно формуле (3), будем иметь тождество:

$$a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_{n-1}z + a_n = a_0(z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n).$$

Применяя в правой части известную из элементарной алгебры формулу для перемножения биномов, отличающихся вторыми членами, можем привести написанное тождество к виду

$$a_0z^n + a_1z^{n-1} + \dots + a_kz^{n-k} + \dots + a_n = \\ = a_0\left[z^n - S_1z^{n-1} + S_2z^{n-2} + \dots + (-1)^kS_kz^{n-k} + \dots + (-1)^nS_n\right],$$

где S_k обозначает сумму всевозможных произведений из чисел z_s $(s = 1,\ 2, \dots,\ n)$ по k множителей в каждом. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, получим

$$S_1 = -\frac{a_1}{a_0},\ S_2 = \frac{a_2}{a_0},\ \dots,\ S_k = (-1)^k\frac{a_k}{a_0},\ \dots,\ S_n = (-1)^n\frac{a_n}{a_0},$$

или в раскрытом виде

$$\left.\begin{aligned} z_1 + z_2 + \dots + z_n &= -\frac{a_1}{a_0}, \\ z_1z_2 + z_2z_3 + \dots + z_{n-1}z_n &= \frac{a_2}{a_0}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_1z_2\dots z_n &= (-1)^n\frac{a_n}{a_0}. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Формулы эти являются обобщением известных свойств корней квадратного уравнения на случай уравнения любой степени. Они дают, между прочим, возможность составить уравнение, когда известны его корни.

191. Уравнение третьей степени. Мы не будем подробно заниматься вопросом о фактическом вычислении корней алгебраических уравнений. Вопрос этот излагается в учебниках по приближенным вычислениям. Мы остановимся лишь на случае уравнения третьей степени и укажем также некоторые методы вычисления, которые будут полезны и в дальнейшем.

Начнем с исследования уравнения третьей степени

$$y_3 + a_1 y^2 + a_2 y + a_3 = 0. \tag{13}$$

Вместо y введем новую неизвестную x, полагая

$$y = x + \alpha.$$

Подставив это в левую часть уравнения (13), получим уравнение

$$x^3 + (3\alpha + a_1)x^2 + (3\alpha^2 + 2a_1\alpha + a_2)x + (\alpha^3 + a_1\alpha^2 + a_2\alpha + a_3) = 0.$$

Если положим $\alpha = -\frac{a_1}{3}$, то член с x^2 пропадает, и, следовательно, подстановка

$$y = x - \frac{a_1}{3}$$

преобразует уравнение (13) к виду

$$f(x) = x^3 + px + q = 0, \tag{14}$$

не содержащему члена с x^2.

Если p и q — вещественны, то уравнение (14) может иметь или все три вещественных корня, или один вещественный и два мнимых сопряженных корня [189]. Чтобы решить, какой из этих случае имеет место, составим первую производную левой части уравнения

$$f'(x) = 3x^2 + p.$$

Если $p > 0$, то $f'(x) > 0$, и $f(x)$ все время возрастает и будет иметь лишь один вещественный корень, ибо при переходе от $x =$

$-\infty$ к $x = +\infty$ функция $f(x)$ меняет знак $(-)$ на $(+)$. Положим теперь, что $p < 0$. Функция $f(x)$, как нетрудно видеть, будет иметь максимум при $x = -\sqrt{-\frac{p}{3}}$ и минимум при $x = \sqrt{-\frac{p}{3}}$. Подставляя эти значения x в выражение функции $f(x)$, получим для максимального и минимального значений этой функции, соответственно, выражения

$$q \mp \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

Если оба эти значения одного знака, т. е.

$$\left(q - \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)\left(q + \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) = q^2 + \frac{4p^3}{27} > 0$$

или

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} > 0, \tag{15$_1$}$$

то уравнение имеет только один вещественный корень, который заключается в промежутке $\left(-\infty,\ -\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)$ или в промежутке $\left(+\sqrt{-\frac{p}{3}},\ +\infty\right)$.

Если же упомянутое выше максимальное значение $f(x)$ имеет знак $(+)$, а минимальное $(-)$, т. е.

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0, \tag{15$_2$}$$

то $f(-\infty)$, $f\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)$, $f\left(+\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)$, $f(+\infty)$ будут иметь соответственно знаки $(-)$, $(+)$, $(-)$, $(+)$, и уравнение (14) будет иметь три вещественных корня. Заметим, кроме того, что при $p > 0$, наверно, выполнено условие (15_1). Предоставляем читателю показать, что в случае

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 0 \tag{15$_3$}$$

уравнение (14) имеет кратный корень $\pm\sqrt{-\frac{p}{3}}$ и корень $\frac{3q}{p}$, причем мы считаем $p \neq 0$, и из (15_3) следует $p < 0$. При $p = 0$ и $q \neq 0$ мы имеем неравенство (15_1), и уравнение (14) принимает вид $x^3 + q = 0$, т. е. $x = \sqrt[3]{-q}$, откуда следует, что уравнение (14) имеет один вещественный корень [175]. При $p = q = 0$ уравнение (14) будет: $x^3 = 0$ и имеет корень $x = 0$ третьей кратности.

Полученные результаты собраны в следующей таблице:

$x^3+px+q=0$	
$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0$	Один вещественный и два мнимых сопряженных корня
$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$	Три вещественных различных корня
$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$	Три вещественных корня, среди которых есть кратный

На рис. 182 изображен график функции

$$y=x^3+px+q$$

при различных предположениях относительно $\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)$. В случае ($15_3$) двойному корню соответствует точка касания кривой с осью OX.

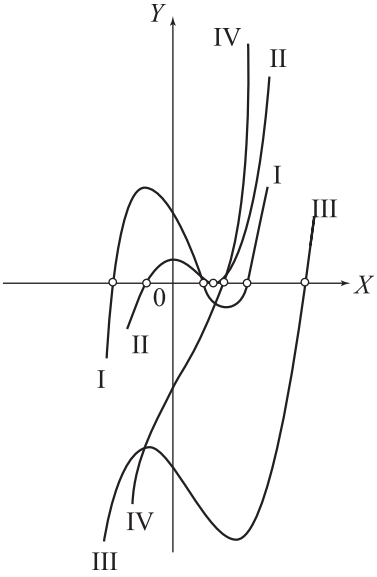

Рис. 182.

Выведем теперь формулу, выражающую корни уравнения (14) через его коэффициенты. Формула эта для практических вычислений не годится, и в следующем номере мы, пользуясь тригонометрическими функциями, извлечем из нее практически удобный способ вычисления корней.

Вместо неизвестных x введем две новые неизвестные u и v, полагая

$$x=u+v. \tag{16}$$

Подставим в уравнение (14)

$$(u+v)^3+p(u+v)+q=0,$$
$$u^3+v^3+(u+v)(3uv+p)+q=0. \tag{17}$$

Неизвестные u и v подчиним условию

$$3uv+p=0,$$

и тогда уравнение (17) дает нам

$$u^3+v^3=-q.$$

Таким образом, вопрос привелся к решению двух уравнений:

$$uv = -\frac{p}{3}, \quad u^3 + v^3 = -q. \tag{18}$$

Возводя обе части первого из уравнений в куб, имеем

$$u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}, \quad u^3 + v^3 = -q,$$

и, следовательно, u^3 и v^3 суть корни квадратного уравнения

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0,$$

т. е.

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q^2}{4} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \tag{19}$$

Окончательно, согласно формуле (16), найдем

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \tag{20}$$

Эта формула для решения кубического уравнения (14) носит название *формулы Кардана* — итальянского математика XVI столетия.

Обозначим для краткости через R_1 и R_2 выражения, стоящие под знаком кубических корней в формуле (20):

$$x = \sqrt[3]{R_1} + \sqrt[3]{R_2}.$$

Каждый из кубических корней имеет три различных значения [**175**], так что написанная формула даст, вообще говоря, девять различных значений x, и только три из них будут корнями уравнения (14). Посторонние значения x получились вследствие того, что мы возводили первое из уравнений (18) в третью степень. Для нас могут подойти лишь те значения, для коих u и v связаны первым из соотношений (18), т. е. в *формуле* (20) *мы должны брать только те значения корней кубических, произведение которых равно* $\left(-\frac{p}{3}\right)$.

Обозначим буквою ε одно из значений кубического корня из единицы:

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$\varepsilon^2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

и пусть $\sqrt[3]{R_1}$ и $\sqrt[3]{R_2}$ — какие-либо значения корней, удовлетворяющие указанному выше условию. Умножая их на ε и ε^2, получим все три значения корня [175].

Принимая во внимание, что $\varepsilon^3 = 1$, получим следующее выражение для корней уравнения (14), считая p и q — любыми комплексными:

$$x_1 = \sqrt[3]{R_1} + \sqrt[3]{R_2}, \quad x_2 = \varepsilon\sqrt[3]{R_1} + \varepsilon^2\sqrt[3]{R_2}, \quad x_3 = \varepsilon^2\sqrt[3]{R_1} + \varepsilon\sqrt[3]{R_2}. \quad (21)$$

192. Решение кубического уравнения в тригонометрической форме. Положим, что коэффициенты p и q уравнения (14) — числа вещественные. Формула Кардана, как мы уже упоминали, неудобна для вычисления корней, и мы выведем более практичные формулы. Рассмотрим отдельно четыре случая.

I. $$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0.$$

Из написанного следует, что $p < 0$. Подкоренные выражения R_1 и R_2 в формуле (20) будут комплексными, но, несмотря на это, все три корня уравнения будут, как известно, вещественными [**191**]. Положим

$$-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = -\frac{q}{2} \pm i\sqrt{-\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} = r(\cos\varphi \pm i\sin\varphi),$$

откуда [**171**]

$$r = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}, \quad \cos\varphi = -\frac{q}{2r}. \quad (22)$$

Согласно формуле Кардана, имеем

$$x = \sqrt[3]{r}\left(cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right) +$$
$$+\sqrt[3]{r}\left(cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3} - i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{3}\right) \quad (k = 0, 1, 2).$$

Принимая в обоих слагаемых равные значения для k, получим для произведения этих слагаемых положительное число: $\sqrt[3]{r^2} = -\frac{p}{3}$. Окончательно будем иметь

$$x = 2\sqrt[3]{r}cos\frac{\varphi + 2k\pi}{3} \quad (k = 0, 1, 2), \quad (23)$$

где r и φ определяются по формуле (22), причем нетрудно показать, что если мы возьмем различные φ, удовлетворяющие второму из уравнений (22), то получим одинаковый набор корней по формуле (23).

II. $$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0 \quad \text{и} \quad p<0.$$

Уравнение (14) имеет один вещественный корень и два комплексных сопряженных [191], причем из написанного следует, что $-\frac{p^3}{27}<\frac{q^2}{4}$. Введем вспомогательный угол ω, полагая

$$\sqrt{-\frac{p^3}{27}}=\frac{q}{2}\sin\omega \tag{24$_1$}$$

Это даст нам

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\frac{q}{2}\cos\omega}=-\sqrt{-\frac{p}{3}}\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}},$$

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\frac{q}{2}\cos\omega}=-\sqrt{-\frac{p}{3}}\sqrt[3]{\operatorname{ctg}\frac{\omega}{2}},$$

ибо, в силу (24$_1$),

$$\sqrt{-\frac{p}{3}}=\sqrt[3]{\frac{q}{2}\sin\omega}$$

Вводя, наконец, угол φ по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi=\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}}, \tag{24$_2$}$$

получим следующее выражение для вещественного корня:

$$x_1=-\sqrt{-\frac{p}{3}}(\operatorname{tg}\varphi+\operatorname{ctg}\varphi)=-\frac{2\sqrt{-\frac{p}{3}}}{\sin 2\varphi}. \tag{25$_1$}$$

Предлагаем читателю, пользуясь формулой (21), показать, что мнимые корни будут иметь выражения:

$$\frac{\sqrt{-\frac{p}{3}}}{\sin 2\varphi}\pm i\sqrt{-p}\operatorname{ctg}2\varphi. \tag{25$_2$}$$

III. $$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}>0 \quad \text{и} \quad p>0.$$

В этом случае, как и в предыдущем, уравнение (14) будет иметь один вещественный корень и два мнимых сопряженных. При этом $\sqrt{\frac{p^3}{27}}$ может

быть и меньше и больше, чем $\left|\frac{q}{2}\right|$, и мы вместо формулы (24_1) введем угол ω следующим образом:

$$\sqrt{\frac{p^3}{27}} = \frac{q}{2}\operatorname{tg}\omega \tag{26_1}$$

Это дает

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{\frac{q\sin^2\frac{\omega}{2}}{\cos\omega}} = \sqrt{\frac{p}{3}}\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}},$$

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} = \sqrt[3]{-\frac{q\cos^2\frac{\omega}{2}}{\cos\omega}} = \sqrt{\frac{p}{3}}\sqrt[3]{-\operatorname{ctg}\frac{\omega}{2}}.$$

Вводя новый угол φ по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\omega}{2}}, \tag{26_2}$$

окончательно будем иметь

$$x_1 = \sqrt{\frac{p}{3}}(\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{ctg}\varphi) = -2\sqrt{\frac{p}{3}}\operatorname{ctg}2\varphi. \tag{27_1}$$

Мнимые корни будут

$$\sqrt{\frac{p}{3}}\operatorname{ctg}2\varphi \pm \frac{i\sqrt{p}}{\sin 2\varphi}. \tag{27_2}$$

IV. $$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27} = 0.$$

Уравнение (14) имеет кратный корень, и в этом случае, как и в случае $p = 0$, решение уравнения не представляет никаких затруднений.

Пользуясь выведенными тригонометрическими формулами, можно при помощи таблицы логарифмов вычислить корни кубического уравнения с большой степенью точности.

Пример 1.

$$x^3 + 9x^2 + 23x + 14 = 0.$$

Полагая $x = y - 3$, приведем уравнение к виду

$$y^3 - 4y - 1 = 0,$$

и это уравнение имеет три вещественных корня [191]. Формулы (22) дают $\cos\varphi$, и, находя самый угол φ, определяем корни по формулам (23):

$\cos\varphi = \frac{\sqrt{27}}{16}, \quad l_g \cos\varphi = \overline{1},51156$
$\varphi = 71^\circ 2' 56''$
$\frac{\varphi}{3} = 23^\circ 40' 59'', \quad \frac{\varphi+360^\circ}{3} = 143^\circ 40' 59''$; $\frac{\varphi+720^\circ}{3} = 263^\circ 40' 59''$
$\lg \frac{4}{\sqrt{3}} = 0,36350$
$\lg y_1 = 0,32529, \quad \lg(-y_2) = 0,26970, \quad \lg(-y_3) = \overline{1},40501$
$y_1 = 2,1149, \quad y_2 = -1,8608, \quad y_3 = -0,2541$ $x_1 = -0,8851, \quad x_2 = -4,8608, \quad x_3 = -3,2541$

Пример 2.

$$x^3 - 3x + 5 = 0.$$

Определяем угол ω по формуле (24_1) и угол φ — по формуле (24_2) и затем вычисляем корни по формулам (25_1) и (25_2):

$\lg \sin\omega = \overline{1},60206, \quad \omega = 23^\circ 34' 11'', \quad \frac{\omega}{2} = 11^\circ 47' 20''$
$\lg \operatorname{tg}\varphi = \overline{1},77318, \quad \varphi = 30^\circ 40' 31'', \quad 2\varphi = 61^\circ 21' 02''$
$\lg \frac{1}{\sin 2\varphi} = 0,05672, \quad \frac{1}{\sin 2\varphi} = 1,11395$
$\lg \sqrt{-p} \operatorname{ctg} 2\varphi = \overline{1},97602, \quad \sqrt{-p} \operatorname{ctg} 2\varphi = 0,94628$
$x_1 = -2,2790, \quad x_2, \quad x_3 = 1,1395 \pm 0,94628i$

193. Способ итерации. Во многих случаях, имея приближенное значение x_0 искомого корня ξ с небольшим числом десятичных знаков, удобно улучшать это приближенное значение корня. Одним из способов такого *исправления* приближенного значения корня является *способ итерации*, или *способ последовательных приближений*. Этот способ, как выяснится из дальнейшего, годится не только для алгебраического, но и для трансцендентных уравнений.

Положим, что уравнение

$$f(x) = 0 \tag{28}$$

мы переписали в виде

$$f_1(x) = f_2(x), \tag{29}$$

причем $f_1(x)$ таково, что уравнение

$$f_1(x) = m$$

при любом вещественном m имеет один вещественный корень, который легко вычислить с большой степенью точности. Вычисление корня уравнения (29) при помощи метода итерации состоит в следующем: подставляя приближенное значение x_0 искомого корня в правую часть уравнения (29), определяем второе приближение x_1 к искомому корню из уравнения

$$f_1(x) = f_2(x_0).$$

Подставляя x_1 в правую часть (29) для следующего приближения x_2, решаем уравнение $f_1(x) = f_2(x_1)$ и т. д. Таким образом определится последовательность значений

$$x_0, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_n, \ldots, \tag{30}$$

причем

$$\left.\begin{aligned} &f_1(x_1) = f_2(x_0), \\ &f_1(x_2) = f_2(x_1), \ \ldots, \\ &f_1(x_n) = f_2(x_{n-1}), \ \ldots \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Нетрудно указать геометрический смысл полученных приближений. Искомый корень есть абсцисса точки пересечения кривых

$$y = f_1(x) \tag{32_1}$$

и

$$y = f_2(x). \tag{32_2}$$

На рис. 183 и 184 изображены обе эти кривые, причем в случае рис. 183 производные $f_1'(x)$ и $f_2'(x)$ имеют в точке пересечения одинаковые знаки, а в случае рис. 184 — разные знаки, и в обоих случаях

$$|f_2'(\xi)| < |f_1'(\xi)|.$$

Равенствам (31) соответствует следующее построение: проводим прямую $x = x_0$, параллельную оси OY, до пересечения ее в точке $(x_0,\ y_0)$ с кривой (32_2); через эту точку пересечения проводим прямую $y = y_0$, параллельную оси OX, до пересечения ее в точке $(x_1,\ y_0)$ с кривой (32_1); через точку $(x_1,\ y_0)$ проводим опять прямую $x = x_1$, параллельную оси OY, до пересечения ее с кривой (32_2) в точке $(x_1,\ y_1)$; через эту последнюю точку проводим прямую $y = y_1$ до пересечения ее с кривой (32_1) в

точке $(x_2,\ y_1)$ и т. д. Абсциссы точек пересечения и дают нам последовательность (30).

Если первое приближение взято достаточно близко к ξ, то эта последовательность, как видно из чертежа, стремится к ξ, как к пределу, причем в случае, когда $f_1'(\xi)$ и $f_2'(\xi)$ одинаковых знаков, получается ступенчатая ломаная линия, стремящаяся к ξ (черт. 183), а если $f_1'(\xi)$ и $f_2'(\xi)$ разных знаков, то эта ломаная линия стремится к ξ, имея форму спирали (черт. 184). Мы не будем приводить условий и строгого доказательства того, что последовательность (30) стремится к ξ как к пределу. Во многих случаях это можно непосредственно обнаружить из чертежа.

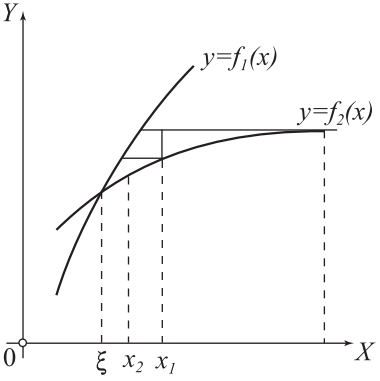

Рис. 183.

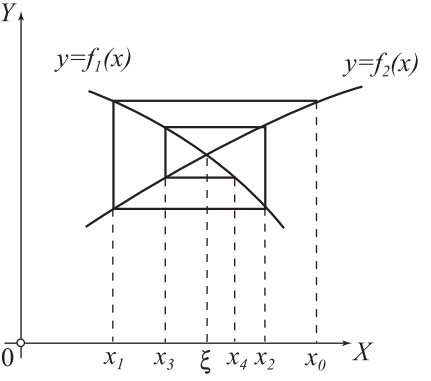

Рис. 184.

Особенно удобен для приложения указанный способ в том случае, когда уравнение (29) имеет вид

$$x = f_2(x).$$

Пусть ξ есть корень этого уравнения, приближенное значение которого

$$x_0 = \xi + h$$

нам известно. Ряд последовательных приближений будет

$$x_1 = f_2(x_0), \quad x_2 = f_2(x_1), \quad \ldots, \quad x_n = f_2(x_{n-1}), \quad \ldots$$

Можно показать, что действительно $x_n \to \xi$ при $n \to \infty$, если функция $f_2(x)$ имеет производную $f_2'(x)$, которая удовлетворяет условию

$$|f_2'(x)| \leqslant q < 1$$

в промежутке

$$\xi - h \leqslant x \leqslant \xi + h.$$

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$x^5 - x - 0,2 = 0. \tag{33}$$

Его вещественные корни суть абсциссы точек пересечения линий (рис. 185)

$$y = x^5, \tag{34$_1$}$$

$$y = x + 0,2, \tag{34$_2$}$$

и, как видно из рис. 185, уравнение (33) имеет один положительный и два отрицательных корня.

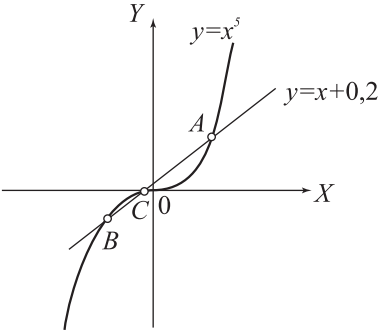

Рис. 185.

В точках пересечения A и B, соответствующих положительному корню и большему по абсолютному значению отрицательному корню, угловой коэффициент прямой (34_2) меньше по абсолютному значению, чем угловой коэффициент касательной к кривой (34_1), т. е. при вычислении этих корней методом итерации уравнение (33) надо представить в виде

$$x^5 = x + 0,2.$$

Принимая за первое приближение при вычислении положительного корня $x_0 = 1$, получим таблицу (I).

$\sqrt[5]{x_n + 0,2}$	$x_n + 0,2$
	1,2
$x_1 = 1,037$	1,237
$x_2 = 1,0434$	1,2434
$x_3 = 1,0445$	1,2445
$x_4 = 1,04472$	

(I)

Значение x_4 дает искомый корень с точностью до четвертого знака. При вычислении отрицательного корня, большего по абсолютному значению, примем за первое приближение $x_0 = -1$ и получаем таблицу (II).

$\sqrt[5]{x_n + 0,2}$	$x_n + 0,2$
	—0,8
$x_1 = -0,956$	—0,756
$x_2 = -0,9456$	—0,7456
$x_3 = -0,9430$	—0,7430
$x_4 = -0,9423$	—0,7423
$x_5 = -0,94214$	—0,74214
$x_6 = -0,94210$	

(II)

В точке C, которой соответствует отрицательный корень, меньший по абсолютному значению, угловой коэффициент касательной к кривой (34_1) по абсолютному значению меньше единицы, и потому при применении метода итерации уравнение (33) надо представить в виде

$$x = x^5 - 0,2.$$

Принимая за первое приближение $x_0 = 0$, получим таблицу (III).

$x_n^5 - 0,2$	x_n^5
	—0
$x_1 = -0,2$	—0,00032
$x_2 = -0,20032$	

(III)

Во всех трех случаях приближение к корню происходило по ступенчатой линии, как это изображено на рис. 183, в чем нетрудно убедиться из рис. 185, и во всех трех случаях приближения x_n стремятся при увеличении n к искомому корню, изменяясь монотонно.

Пример 2.

$$x = \operatorname{tg} x. \tag{35}$$

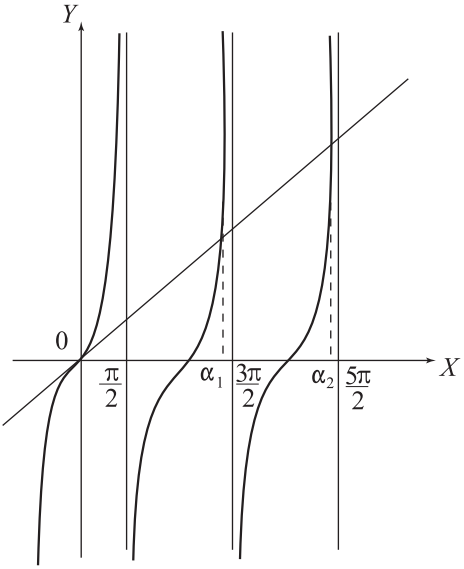

Рис. 186.

Корни этого уравнения суть абсциссы точек пересечения линий (рис. 186)

$$y = x, \quad y = \operatorname{tg} x,$$

и, как видно из рис. 186, уравнение имеет по одному корню в каждом из промежутков

$$\left[(2n-1)\frac{\pi}{2}, \quad (2n+1)\frac{\pi}{2}\right],$$
$$n = 0, \quad \pm 1, \quad \pm 2, \ \ldots$$

Для положительных корней будет иметь место приближенное равенство

$$\alpha_n \approx (2n+1)\frac{\pi}{2},$$

где буквою α_n мы обозначаем n-й положительный корень уравнения (35).

Вычислим корень α_1, близкий к $\frac{3\pi}{2}$. Для применения метода итерации перепишем уравнение (35) в виде

$$x = \operatorname{arctg} x$$

и примем за первое приближение $x_0 = \frac{3\pi}{2}$.

При вычислении последовательности приближений

$$x_n = arctg\, x_{n-1}$$

надо всегда брать значение арктангенса, содержащееся в третьей четверти. Пользуясь таблицами логарифмов и выражая дуги в радианном измерении, получим

$$x_0 = 4,7124, \quad x_1 = 4,5033,$$
$$x_2 = 4,4938, \quad x_3 = 4,4935.$$

194. Способ Ньютона. Процесс итерации, указанный на рис. 183 и 184, состоит в приближении к искомому корню по прямым, параллельным координатным осям. Мы укажем теперь другие процессы итерации,

для которых применяются и прямые, наклонные к координатным осям. Одним из таких способов является способ Ньютона.

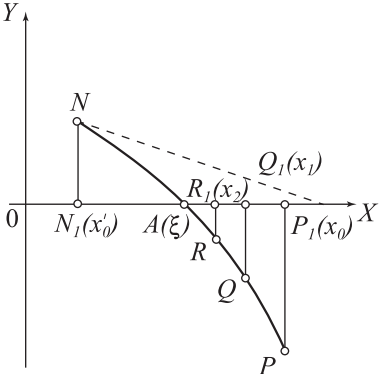

Рис. 187.

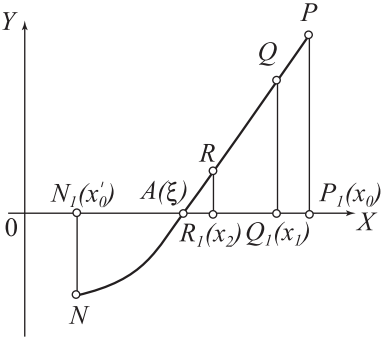

Рис. 188.

Пусть x_0' и x_0 — приближенные значения корня ξ уравнения

$$f(x) = 0, \tag{36}$$

и положим, что в промежутке $(x_0',\ x_0)$ это уравнение имеет один только корень ξ. На рис. 187 и 188 изображен график кривой

$$y = f(x).$$

Абсциссы точек N и P суть приближенные значения x_0' и x_0 корня ξ, который является абсциссой точки A. В точке P проведена касательная PQ_1 к кривой, и из точки пересечения Q_1 этой касательной с осью абсцисс проведена ордината $\overline{Q_1Q}$ кривой; в точке Q проведена касательная QR_1 к кривой и из точки R_1 проведена ордината R_1R кривой и т. д.

Точки P_1, Q_1, R_1, ..., как видно из чертежа, стремятся к точке A, так что их абсциссы $x_0, x_1, x_2, \ldots$ являются последовательными приближениями для корня ξ. Выведем формулу, выражающую x_n через x_{n-1}.

Уравнение касательной PQ_1 будет

$$Y - f(x_0) = f'(x_0)(X - x_0).$$

Подставляя $Y = 0$, найдем абсциссу точки Q_1:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}, \tag{37}$$

и, вообще,

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \quad n = 1, 2, 3 \ldots \tag{38}$$

То обстоятельство, что x_n действительно являются приближениями к корню ξ, мы усмотрели просто из чертежа, который сделан для того случая, когда $f(x)$ монотонна и остается выпуклой (или вогнутой) в промежутке (x_0', x_0), другими словами, когда $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют знак в этом промежутке [57, 71]. На строгом аналитическом доказательстве этого мы останавливаться не будем.

Заметим, что если бы мы применили способ Ньютона не к концу x_0, а к концу x_0', то не получили бы приближения к корню, как это показывает проведенная пунктиром касательная. В случае рис. 188 кривая обращена вогнутостью в сторону положительных ординат, т. е. $f''(x) > 0$, и способ Ньютона, как мы видим, надо применять к тому концу, где $f(x) > 0$. Из рис. 187 вытекает, что при $f''(x) < 0$ способ Ньютона надо применять к тому концу, где ордината $f(x) < 0$. Мы приходим, таким образом, к следующему правилу: *если $f'(x)$ и $f''(x)$ в промежутке (x_0', x_0) не обращаются в нуль, а ординаты $f(x_0')$ и $f(x_0)$ разных знаков, то, применяя способ Ньютона к тому концу промежутка, где знаки $f(x)$ и $f''(x)$ совпадают, получим последовательные приближения для единственного корня уравнения (36), заключающегося в промежутке (x_0', x_0).*

195. Способ простого интерполирования. Укажем еще один способ приближенного вычисления корня. Через концы N и P дуги кривой проведем прямую. Абсцисса следа B этой прямой на оси абсцисс и даст приближенное значение корня (рис. 189). Пусть, как и раньше, x_0' и x_0 — абсциссы концов промежутка. Уравнение прямой NP будет

$$\frac{Y - f(x_0)}{f(x_0') - f(x_0)} = \frac{X - x_0}{x_0' - x_0}.$$

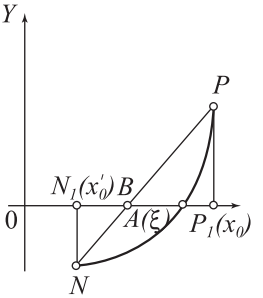

Рис. 189.

Полагая $Y = 0$, найдем выражение абсциссы точки B:

$$\frac{x_0' f(x_0) - x_0 f(x_0')}{f(x_0) - f(x_0')},$$

или

$$x_0' - \frac{(x_0 - x_0') f(x_0')}{f(x_0) - f(x_0')}, \tag{39}$$

или

$$x_0 - \frac{(x_0 - x_0')f(x_0)}{f(x_0) - f(x_0')}.$$

Замена участка кривой отрезком прямой, проходящей через конечные точки кривой, равносильна замене функции $f(x)$ в исследуемом промежутке многочленом первой степени, имеющим те же конечные значения, что и $f(x)$, или, что то же равносильно предположению, что в указанном промежутке изменения $f(x)$ пропорциональны изменениям x. Этот прием, называемый обычно *простым интерполированием*, применяется, например, при пользовании таблицами логарифмов (partes proportionales). Указанный нами прием вычисления корня называется также иногда *правилом ложного положения* (regula falsi).

Если применять одновременно как способ простого интерполирования, так и способ Ньютона, получается возможность оба предела x_0' и x_0 приблизить к корню ξ.

Положим, например, что на конце x_0 знаки $f(x)$ и $f''(x)$ совпадают, так что способ Ньютона надо применять именно к этому концу.

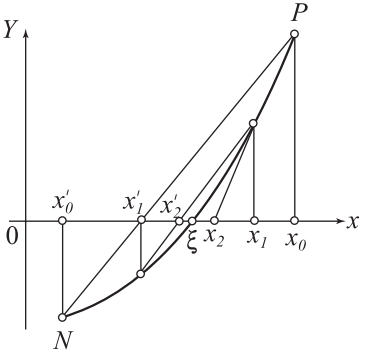

Рис. 190.

Применяя оба способа, получим два новых приближенных значения (рис. 190):

$$x_1' = \frac{x_0' f(x_0) - x_0 f(x_0')}{f(x_0) - f(x_0')},$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

К приближенным значениям x_1' и x_1 можно опять применить те же формулы и получим новые значения

$$x_2' = \frac{x_1' f(x_1) - x_1 f(x_1')}{f(x_1) - f(x_1')},$$

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Таким образом получим два ряда значений

$$x_0',\ x_1',\ x_2',\ \ldots,\ x_n'\ \ldots \quad \text{и} \quad x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots,$$

приближающихся к корню ξ слева и справа.

Если у значений x'_n и x_n совпадают несколько первых десятичных знаков, то у корня ξ, который заключается между x'_n и x_n, должны быть те же самые десятичные знаки.

Пример. Уравнение

$$f(x) = x^5 - x - 0,2 = 0,$$

которое мы рассматривали в примере 1 [193], имеет один положительный корень в промежутке $1 < x < 1,1$, и в этом промежутке

$$f'(x) = 5x^4 - 1 \quad \text{и} \quad f''(x) = 20x^3$$

знака не меняют. Таким образом, мы можем положить

$$x'_0 = 1; \quad x_0 = 1,1.$$

Вычисляем значения функции $f(x)$:

$$f(1) = -0,2, \quad f(1,1) = 0,31051,$$

откуда видно, что на правом конце ($x_0 = 1,1$), $f(x)$ и $f''(x)$ имеют одни и тот же знак ($+$), и, следовательно, способ Ньютона надо применять именно к правому концу. Предварительно вычисляем значение $f'(x)$ на правом конце:

$$f'(1,1) = 6,3205.$$

Согласно формулам (37) и (39), будем иметь

$$x'_1 = 1 + \frac{0,1 \cdot 0,2}{0,51051} = 1,039,$$

$$x_1 = 1,1 - \frac{0,31051}{6,3205} = 1,051.$$

Для следующего приближения вычисляем:

$$f(1,039) = -0,0282, \quad f(1,051) = 0,0313, \quad f'(1,051) = 5,1005,$$

откуда

$$x'_2 = 1,039 + \frac{0,012 \cdot 0,0282}{0,0595} = 1,04469, \quad x_2 = 1,051 - \frac{0,0313}{5,1005} = 1,04487,$$

что дает значение корня с точностью до двух единиц в четвертом знаке [193]:

$$1,04469 < \xi < 1,04487.$$

§ 19. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ

196. Разложение рациональной дроби на простейшие. Выше мы указали ряд приемов для вычисления неопределенных интегралов. В настоящем параграфе мы дополним эти указания и придадим им более систематический характер. Первым вопросом будет вопрос об интегрировании *рациональной дроби*, т. е. частного двух многочленов. Прежде чем переходить к решению этого вопроса, мы установим формулу, которая дает представление рациональной дроби в виде суммы некоторых дробей простейшего вида. Это представление называется *разложением рациональной дроби на простейшие*

Пусть имеется рациональная дробь

$$\frac{F(x)}{f(x)}.$$

Если это — дробь неправильная, т. е. степень числителя не ниже степени знаменателя, то, производя деление, можем выделить целую часть — многочлен $Q(x)$ и представить дробь в виде

$$\frac{F(x)}{f(x)} = Q(x) + \frac{\varphi(x)}{f(x)}, \tag{1}$$

где $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ есть уже правильная дробь, у которой степень числителя ниже степени знаменателя. Кроме того, мы будем считать эту дробь несократимой, т. е. будем считать, что числитель и знаменатель взаимно простые [188].

Пусть $x = a$ есть корень знаменателя кратности k:

$$f(x) = (x-a)^k f_1(x) \quad \text{и} \quad f_1(a) \neq 0.$$

Докажем, что дробь можно представить в виде следующей суммы:

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^k f_1(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{\varphi_1(x)}{(x-a)^{k-1} f_1(x)}, \tag{2}$$

где A — некоторая постоянная и второе слагаемое правой части — правильная дробь. Составим разность

$$\frac{\varphi(x)}{(x-a)^k f_1(x)} - \frac{A}{(x-a)^k} = \frac{\varphi(x) - A f_1(x)}{(x-a)^k f_1(x)}$$

и определим постоянную A так, чтобы числитель дроби, стоящей в правой части написанного равенства, делился на $(x-a)$ [184]:

$$\varphi(a) - Af_1(a) = 0,$$

откуда

$$A = \frac{\varphi(a)}{f_1(a)} \quad (f_1(a) \neq 0).$$

При таком выборе A только что упомянутую дробь можно сократить на $(x-a)$, и мы придем таким образом к тождеству (2). Оно показывает, что, выделяя слагаемое вида $\frac{A}{(x-a)^k}$, которое и называется простейшей дробью, мы можем понизить показатель степени множителя $(x-a)$, входящего в знаменатель по крайней мере на единицу.

Положим, что знаменатель разлагается на множители

$$f(x) = (x-a_1)^{k_1}(x-a_2)^{k_2}\ldots(x-a_m)^{k_m}.$$

Постоянный множитель мы не пишем, так как он может быть отнесен к числителю. Применяя последовательно указанное выше правило выделения простейшей дроби, получим разложение правильной рациональной дроби на простейшие:

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A_{k_1}^{(1)}}{(x-a_1)^{k_1}} + \frac{A_{k_1-1}^{(1)}}{(x-a_1)^{k_1-1}} + \ldots + \frac{A_1^{(1)}}{x-a_1} + \\ + \frac{A_{k_2}^{(2)}}{(x-a_2)^{k_2}} + \frac{A_{k_2-1}^{(2)}}{(x-a_2)^{k_2-1}} + \ldots + \frac{a_1^{(2)}}{x-a_2} + \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + \frac{A_{k_m}^{(m)}}{(x-a_m)^{k_m}} + \frac{A_{k_m-1}^{(m)}}{(x-a_m)^{k_m-1}} + \ldots + \frac{a_1^{(m)}}{x-a_m}. \qquad (3)\end{aligned}$$

Укажем теперь способы определения коэффициентов, входящих в правую часть написанного тождества. Освобождая его от знаменателя, придем к тождественному равенству двух многочленов и,

приравнивая их соответствующие коэффициенты, получим систему уравнений первой степени для определения искомых коэффициентов. Изложенный способ, как мы уже упоминали выше [185], называется *способом неопределенных коэффициентов*.

Можно поступить и иначе, а именно придавать в упомянутом выше тождественном равенстве многочленов различные частные значения переменной x. Этим *способом подстановки* можно еще пользоваться и предварительно продифференцировав любое число раз упомянутое тождество.

Можно доказать, на чем мы останавливаться не будем, что разложение (3) единственно, т. е. что его коэффициенты имеют вполне определенное значение, не зависящее от способа разложения. В дальнейшем мы дадим примеры применения указанных выше способов определения неизвестных коэффициентов разложения.

В случае вещественности многочленов $\varphi(x)$ и $f(x)$ правая часть тождества (3) может все-таки содержать мнимые члены, происходящие от мнимых корней знаменателя. Мы приведем другое разложение рациональной дроби, свободное от этого недостатка, но ограничимся при этом лишь тем случаем, когда знаменатель дроби имеет только простые корни, так как в приложениях имеет наибольшее значение именно этот случай.

Паре комплексных сопряженных корней знаменателя $x = a \pm bi$ будет соответствовать сумма простейших дробей

$$\frac{A + Bi}{x - a - bi} + \frac{A - Bi}{x - a + bi}.$$

Приводя эти дроби к одному знаменателю, получим простейшую дробь вида

$$\frac{Mx + N}{x^2 + px + q} \quad (p = -2a, \quad q = a^2 + b^2).$$

Таким образом, в рассматриваемом случае вещественная рациональная дробь разложится на вещественные простейшие:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{x - a_2} + \ldots + \frac{A_r}{x - a_r} +$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{x^2+p_1x+q_1}+\frac{M_2x+N_2}{x^2+p_2x+q_2}+\ldots+\frac{M_sx+N_s}{x^2+p_sx+q_s}, \quad (4)$$

причем в первой строке стоят дроби, соответствующие вещественным корням знаменателя, а во второй — дроби, соответствующие парам комплексных сопряженных корней.

197. Интегрирование рациональной дроби. Интегрирование рациональной дроби в силу формулы (1) приводится к интегрированию многочлена, что даст также многочлен, и к интегрированию правильной рациональной дроби, что мы и будем сейчас рассматривать.

Если знаменатель дроби имеет только простые корни, то, в силу формулы (4), все приведется к интегралам двух видов:

I. $$\int \frac{A}{x-a}dx = A\log(x-a)+C$$

и

II. $$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx.$$

Вспоминая сказанное [92], получим ответ вида

$$\int \frac{Mx-N}{x^2+px+q}dx = \lambda\log(x^2+px+q)+\mu\ \mathrm{arctg}\,\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае интеграл выразится через логарифмы и арктангенсы.

Рассмотрим теперь тот случай, когда знаменатель правильной рациональной дроби содержит кратные корни. Обратимся к разложению (3). Мнимые числа, которые могут в нем встретиться, будут играть лишь промежуточную роль в дальнейших вычислениях и в окончательном результате исчезнут.

При интегрировании простейших дробей, знаменатель которых выше первой степени, мы получим также рациональную дробь:

$$\int \frac{A^{(i)}_{k_i-s}}{(x-a_i)^{k_i-s}}dx = \frac{A^{(i)}_{k_i-s}}{(1-k_i+s)(x-a_i)^{k_i-s-1}}+C \quad (k_i-s>1).$$

Сумма полученных после интегрирования дробей даст *алгебраическую часть* интеграла, которая по приведении к общему знаменателю будет, очевидно, правильной дробью вида

$$\frac{\omega(x)}{(x-a_1)^{k_1-1}(x-a_2)^{k_2-1}\dots(x-a_m)^{k_m-1}}.$$

Числитель $\omega(x)$ есть многочлен степени по крайней мере на единицу ниже степени знаменателя, а знаменатель представляет собою общий наибольший делитель $D(x)$ знаменателя интегрируемой дроби $f(x)$ и ее первой производной $f'(x)$ [188].

Сумма остальных непроинтегрированных дробей

$$\frac{A_1^{(1)}}{x-a_1}+\frac{A_1^{(2)}}{x-a_1}+\dots+\frac{A_1^{(m)}}{x-a_m}$$

при приведении к общему знаменателю окажется правильной дробью вида

$$\frac{\omega_1(x)}{(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_m)},$$

где $\omega_1(x)$ есть многочлен степени по крайней мере на единицу ниже степени знаменателя, а знаменатель представляет собою частное $D_1(x)$ от деления $f(x)$ на $D(x)$. Таким образом, мы получим следующую *формулу Остроградского*:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}dx=\frac{\omega(x)}{D(x)}+\int\frac{\omega_1(x)}{D_1(x)}dx. \tag{5}$$

Многочлены $D(x)$ и $D_1(x)$ мы можем определять и не зная корней $f(x)$ [188]. Укажем теперь, как определить коэффициенты многочленов $\omega(x)$ и $\omega_1(x)$, степени которых мы можем считать на единицу ниже степеней соответствующих знаменателей. Дифференцируя равенство (5), освобождаемся от знаков интеграла. Освобождаясь в полученном таким образом тождестве от знаменателя, будем иметь тождественное равенство двух многочленов и, применяя к нему метод неопределенных коэффициентов или подстановки, сможем определить коэффициенты $\omega(x)$ и $\omega_1(x)$.

Формула Остроградского дает, таким образом, алгебраическую часть интеграла правильной рациональной дроби и тогда, когда корни знаменателя неизвестны. Знаменатель дроби, стоящей под знаком интеграла в правой части равенства (5), содержит только простые корни, и, разлагая эту дробь на простейшие, мы сумеем вычислить этот интеграл, причем, как это мы только что видели, он выразится через логарифмы и арктангенсы. Для проведения последней операции на надо знать корни $D_1(x)$.

Пример. Согласно формуле Остроградского

$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2} = \frac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{x^3+1} + \int \frac{\delta x^2+\varepsilon x+\eta}{x^3+1}dx.$$

Дифференцируем по x

$$\frac{1}{(x^3+1)^2} = \frac{(2\alpha x+\beta)(x^3+1)-3x^2(\alpha x^2+\beta x+\gamma)}{(x^3+1)^2} + \frac{\delta x^2+\varepsilon x+\eta}{x^3+1}$$

и, освобождаясь от знаменателя, имеем

$$1 = (2\alpha x+\beta)(x^3+1)-3x^2(\alpha x^2+\beta x+\gamma)+(\delta x^2+\varepsilon x+\eta)(x^3+1).$$

Сравнивая коэффициенты при x^5, получаем $\delta = 0$, и сравнивая затем коэффициенты при x^2, получим $\gamma = 0$. Подставляя в написанное тождество $\gamma = \delta = 0$ и сравнивая коэффициенты при остальных степенях, будем иметь:

$$\varepsilon - \alpha = 0, \quad \eta - 2\beta = 0, \quad 2\alpha + \varepsilon = 0, \quad \beta + \eta = 1,$$

откуда окончательно:

$$\alpha = \gamma = \delta = \varepsilon = 0, \quad \beta = \frac{1}{3}, \quad \eta = \frac{2}{3}$$

и, следовательно,

$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2} = \frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^3+1}.$$

Последний интеграл вычисляется разложением дроби на простейшие:

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2-x+1}.$$

Освобождаемся от знаменателя

$$1 = A(x^2 - x + 1) + (Mx + N)(x + 1).$$

Полагая $x = -1$, получим $A = \frac{1}{3}$, а затем, сравнивая коэффициенты при x^2 и свободные члены

$$M = -\frac{1}{3}, \quad N = \frac{2}{3},$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{3(x+1)} - \frac{x-2}{3(x^2-x+1)}.$$

Окончательно получим

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}dx =$$
$$= \frac{1}{3}\lg(x+1) - \frac{1}{6}\lg(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$$

откуда

$$\int \frac{dx}{(x^3+1)^2} = \frac{x}{3(x^3+1)} + \frac{2}{9}\lg(x+1) - \frac{1}{9}\lg(x^2-x+1) +$$
$$+ \frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C.$$

198. Интеграл от выражений, содержащих радикалы. Рассмотрим некоторые другие типы интегралов, которые приводятся к интегралам от рациональной дроби.

1. Интеграл

$$\int R\left[x,\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\lambda},\ \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\mu},\ \ldots\right]dx, \tag{6}$$

где R — рациональная функция своих аргументов, т. е. частное многочленов от этих аргументов, а λ, μ, ... — рациональные числа. Пусть m — общий знаменатель этих дробей. Введем новую переменную t:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^m.$$

При этом, очевидно, x, $\frac{dx}{dt}$ и выражения

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\lambda}, \quad \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\mu}$$

будут рациональными функциями t, и интеграл (6) приведется к интегралу от рациональной дроби.

2. *Биномный дифференциал.* К интегралу (6) приводятся в некоторых случаях *интегралы от биномных дифференциалов*:

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx, \tag{7}$$

где m, n и p — рациональные числа.

Положим $x = t^{\frac{1}{n}}$:

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx = \frac{1}{n}\int t^{\frac{m+1}{n}-1}(a+bt)^p dt.$$

Если p или $\frac{m+1}{n}$ есть целое число, то полученный интеграл есть интеграл вида (6). Из очевидного равенства

$$\int t^{\frac{m+1}{n}-1}(a+bt)^p dt = \int t^{\frac{m+1}{n}+p-1}\left(\frac{a+bt}{t}\right)^p dt$$

следует, что и в том случае, когда $\frac{m+1}{n}+p$ — целое число, интеграл (7) приводится к виду (6).

Существует *теорема Чебышева*, согласно которой указанные три случая исчерпывают все случаи, интеграл от биномного дифференциала выражается через элементарные функции.

199. Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$. Интегралы вида

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx, \tag{8}$$

где R — рациональная функция своих аргументов, приводятся к интегралам от рациональной дроби при помощи *подстановок Эйлера.*

В случае $a > 0$ можно пользоваться *первой подстановкой Эйлера*:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{ax}.$$

Возвышая обе части этого равенства в квадрат и решая относительно x, получим

$$x = \frac{t^2 - c}{2t\sqrt{a} + b},$$

откуда видно, что x, $\frac{dx}{dt}$ и $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ будут рациональными функциями от t и, следовательно, интеграл (8) приведется к интегралу от рациональной дроби.

В случае $c > 0$ можно пользоваться *второй подстановкой Эйлера*:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx + \sqrt{c}.$$

Предлагаем читателю убедиться в этом.

В случае $a < 0$ трехчлен $(ax^2 + bx + c)$ должен иметь вещественные корни x_1 и x_2, ибо в противном случае он имел бы при всех вещественных значениях x знак $(-)$, а $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ был бы величиной мнимой. В случае вещественности корней упомянутого трехчлена интеграл (8) приводится к интегралу от рациональной дроби при помощи *третьей подстановки Эйлера*:

$$\sqrt{a(x - x_1)(x - x_2)} = t(x - x_2),$$

в чем и предлагаем убедиться читателю.

Подстановки Эйлера приводят большей частью к сложным выкладкам, а потому мы укажем другой прием вычисления интеграла (8).

Обозначим для краткости письма:

$$y = \sqrt{ax^2 + bx + c}.$$

Всякая положительная четная степень y представляет собою многочлен от x, а потому подынтегральную функцию нетрудно привести к виду

$$R(x,\ y) = \frac{\omega_1(x) + \omega_2(x)y}{\omega_3(x) + \omega_4(x)y},$$

где $\omega_s(x)$ — многочлен от x. Освобождаясь от иррациональности в знаменателе и совершая элементарные преобразования, можно пре-

образовать написанное выражение к виду

$$R(x,\ y) = \frac{\omega_5(x)}{\omega_6(x)} + \frac{\omega_7(x)}{\omega_8(x)y}.$$

Первое слагаемое есть рациональная дробь, интегрировать которую мы уже умеем. Выделяя из дроби $\frac{\omega_7(x)}{\omega_8(x)}$ целую часть и разлагая оставшуюся правильную дробь на простейшие, мы придем к интегралам вида

$$\int \frac{\varphi(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx \tag{9}$$

и

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{10}$$

где $\varphi(x)$ — многочлен от x.

При этом мы предполагаем, что многочлен от $\omega_8(x)$ имеет лишь вещественные корни.

Прежде чем переходить к рассмотрению интегралов (9) и (10), отметим два простейших частных случая интеграла (9):

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \\ = \frac{1}{\sqrt{a}}\lg\left(x+\frac{b}{2a}+\sqrt{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}\right)+C \quad (a>0), \tag{11}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+bx+c}} = \int \frac{dx}{\sqrt{m^2-\left(x-\frac{b}{2}\right)^2}} = \arcsin\frac{x-\frac{b}{2}}{m}+C. \tag{12}$$

Формулу (11) нетрудно получить при помощи первой подстановки Эйлера. Интеграл (12) уже был нами разобран раньше [92].

Для вычисления интеграла (9) удобно пользоваться формулой:

$$\int \frac{\varphi(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \psi(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{13}$$

где $\psi(x)$ — многочлен степени на единицу ниже, чем $\varphi(x)$, и λ — постоянная. На доказательстве формулы (13) мы останавливаться не будем. Дифференцируя соотношение (13) и освобождаясь от знаменателя, получим тождественное равенство двух многочленов, откуда и можно определить коэффициенты многочленов $\psi(x)$ и постоянную λ.

Интеграл (10) приводится к интегралу (9) при помощи подстановки

$$x - a = \frac{1}{t}.$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}} = \int \frac{x - \sqrt{x^2 - x + 1}}{x - 1} dx =$$
$$= \int \frac{x}{x-1} dx - \int \frac{x^2 - x + 1}{(x-1)\sqrt{x^2 - x + 1}} dx =$$
$$= x + \lg(x-1) - \int \frac{x^2 - x + 1}{(x-1)\sqrt{x^2 - x + 1}} dx.$$

Но

$$\frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = x + \frac{1}{x-1},$$

а потому

$$\int \frac{x^2 - x + 1}{(x-1)\sqrt{x^2 - x + 1}} dx = \int \frac{x}{\sqrt{x^2 - x + 1}} dx + \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2 - x + 1}}.$$

Согласно формуле (13)

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 - x + 1}} dx = a\sqrt{x^2 - x + 1} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}}.$$

Дифференцируя это соотношение и освобождаясь от знаменателя, получим тождество

$$2x = a(2x - 1) + 2\lambda,$$

откуда

$$a = 1, \quad \lambda = \frac{1}{2},$$

и, следовательно, в силу формулы (11),

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-x+1}}dx = \sqrt{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\lg\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+1}\right) + C.$$

Подставляя

$$x-1=\frac{1}{t},$$

получим

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-x+1}} = -\int \frac{dx}{\sqrt{t^2+t+1}} =$$

$$= -\lg\left(t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+1}\right) + C =$$

$$= -\lg\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}+1}\right) + C =$$

$$= -\lg(x+1+2\sqrt{x^2-x+1}) + \lg(x-1) + C,$$

окончательно

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}} = x-\sqrt{x^2-x+1} - \frac{1}{2}\lg\left(x-\frac{1}{2}+\sqrt{x^2-x+1}\right) +$$

$$+ \lg(x+1+2\sqrt{x^2-x+1}) + C.$$

Интеграл (8) является частным случаем *абелева интеграла*, который имеет вид:

$$\int R(x,\ y)dx,$$

где R — рациональная функция своих аргументов и y — *алгебраическая функция от* x, т. е. функция от x, которая определяется из уравнения

$$f(x,\ y) = 0, \tag{15}$$

левая часть которого есть целый многочлен относительно x и y. Если

$$y = \sqrt{P(x)},$$

где $P(x)$ — многочлен третьей или четвертой степени от x, то абелев интеграл (14) называется *эллиптическим интегралом*. Мы займемся этими интегралами в третьем томе. Даже и этот последний, а тем более и общий абелев интеграл, вообще говоря, не выражается через элементарные

функции. Если степень многочлена $P(x)$ выше четвертой, то интеграл (14) называется *гиперэллиптическим.*

Если соотношение (15), которое выражает y как алгебраическую функцию от x, обладает тем свойством, что x и y могут быть выражены в виде рациональных функций вспомогательного параметра t, то, очевидно, абелев интеграл (14) приводится к интегралу от рациональной дроби. В указанном случае алгебраическая кривая, соответствующая соотношению (15), называется *уникурсальной.* В частности, подстановки Эйлера служат доказательством уникурсальности кривой

$$y^2 = ax^2 + bx + c.$$

200. Интегралы вида $\int R(\sin x,\ \cos x)dx$. Интеграл вида:

$$\int R(\sin x,\ \cos x)dx, \tag{16}$$

где R — рациональная функция своих аргументов, приводится к интегралу от рациональной дроби, если ввести новую переменную

$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$$

Действительно, согласно известным формулам тригонометрии, получим

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

и, кроме того,

$$x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

откуда и вытекает непосредственно наше утверждение.

Укажем теперь некоторые частные случаи, когда выкладки могут быть упрощены.

1. Положим, что $R(\sin x, \quad \cos x)$ не меняется при замене $\sin x$ и $\cos x$, соответственно, на $(-\sin x)$ и $(-\cos x)$, т. е. предположим, что $R(\sin x, \quad \cos x)$ имеет период π. Так как

$$\sin x = \cos x \operatorname{tg} x,$$

то $R(\sin x, \cos x)$ оказывается рациональной функцией от $\cos x$ и $\operatorname{tg} x$, не меняющейся при замене $\cos x$ на $(-\cos x)$, т. е. содержащей только четные степени $\cos x$:

$$R(\sin x,\ \cos x) = R_1(\cos^2 x,\ \operatorname{tg} x).$$

В рассматриваемом случае для приведения интеграла (16) к интегралу от рациональной дроби достаточно положить

$$t = \operatorname{tg} x.$$

Действительно, при этом

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}.$$

Итак, если $R(\sin x,\ \cos x)$ *не меняется при замене* $\sin x$ *и* $\cos x$, *соответственно, на* $(-\sin x)$ *и* $(-\cos x)$, *то интеграл (16) приводится к интегралу от рациональной дроби при помощи подстановки* $t = \operatorname{tg} x$.

2. Предположим теперь, что $R(\sin x,\ \cos x)$ меняет лишь знак при замене $\sin x$ на $(-\sin x)$. Функция

$$\frac{R(\sin x, \cos x)}{\sin x}$$

не будет вовсе меняться при указанной замене, т. е. будет содержать только четные степени $\sin x$, а следовательно:

$$R(\sin x,\ \cos x) = R_1(\sin^2 x,\ \cos x) \cdot \sin x.$$

Подставляя $t = \cos x$, получим

$$\int R(\sin x,\ \cos x)dx = -\int R_1(1-t^2, t)dt,$$

т. е. *если* $R(\sin x, \cos x)$ *при замене* $\sin x$ *на* $(-\sin x)$ *меняет лишь знак, то интеграл* (16) *приводится к интегралу от рациональной дроби при помощи подстановки* $t = \cos x$.

3. Точно так же нетрудно показать, что если $R(\sin x, \cos x)$ *при замене* $\cos x$ *на* $(-\cos x)$ *меняет лишь знак, то интеграл* (16) *приводится к интегралу от рациональной дроби при помощи подстановки* $t = \sin x$.

201. Интегралы вида $\int e^{ax}[P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx]dx$. Интеграл вида:

$$\int e^{ax}\varphi(x)dx, \tag{17}$$

где $\varphi(x)$ — многочлен n-й степени от x, интегрированием по частям можно упростить:

$$\int e^{ax}\varphi(x)dx = \frac{1}{a}e^{ax}\varphi(x) - \frac{1}{a}\int e^{ax}\varphi'(x)dx.^*$$

Таким образом, выделяя из интеграла слагаемое, имеющее вид произведения e^{ax} на многочлен n-й степени, мы можем понизить степень многочлена под знаком интеграла на единицу. Продолжая таким образом интегрировать по частям и принимая во внимание, что

$$\int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C,$$

получим

$$\int e^{ax}\varphi(x)dx = e^{ax}\psi(x) + C, \tag{18}$$

где $\psi(x)$ — многочлен той же n-й степени, что и $\varphi(x)$, т. е. *интеграл от произведения показательной функции* e^{ax} *на многочлен* n*-й степени имеет вид такого же произведения.*

Дифференцируя соотношение (18) и сокращая обе части полученного тождества на e^{ax}, можем определить коэффициенты полинома $\psi(x)$ по способу неопределенных коэффициентов.

Рассмотрим теперь интеграл более общего вида:

$$\int e^{ax}[P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx]dx, \tag{19}$$

---

* Для применения формулы интегрирования по частям необходимо внести e^{ax} под знак дифференциала по правилу $e^{ax}dx = \frac{1}{a}de^{ax}$.

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены от x. Пусть n — наибольшая из степеней этих двух многочленов. Вводя в качестве вспомогательного средства комплексные величины, можем привести интеграл (19) к интегралу (17), а именно, подставив вместо $\cos bx$ и $\sin bx$ их выражения по формулам Эйлера [176]:

$$\cos bx = \frac{e^{bxi} + e^{-bxi}}{2}, \quad \sin bx = \frac{e^{bxi} - e^{-bxi}}{2i},$$

получим

$$\int e^{ax}[P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx]dx = \\ = \int e^{(a+bi)x}\varphi(x)dx + \int e^{(a-bi)x}\varphi_1(x)dx,$$

где $\varphi(x)$ и $\varphi_1(x)$ — многочлены степени не выше n. Применяя формулу (18):

$$\int e^{ax}[P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx]dx = \\ = e^{(a+bi)x}\psi(x) + e^{(a-bi)x}\psi_1(x) + C,$$

где $\psi(x)$ и $\psi_1(x)$ — многочлены степени не выше n, и подставляя

$$e^{\pm bxi} = \cos bx \pm i\sin bx,$$

окончательно имеем

$$\int e^{ax}[P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx]dx = \\ = e^{ax}[R(x)\cos bx + S(x)\sin bx] + C,^* \qquad (20)$$

где $R(x)$ и $S(x)$ — многочлены степени не выше n. Таким образом, мы видим, что *интеграл* (19) *имеет выражение того же вида, что и его подынтегральная функция, причем степень многочленов в*

* Многочлены $R(x)$ и $S(x)$ должны содержать только вещественные коэффициенты.

выражении интеграла надо брать равной наибольшей из степеней многочленов, стоящих в подынтегральной функции.

Дифференцируя соотношение (20), сокращая полученное тождество на e^{ax} и приравнивая коэффициенты одинаковых членов вида $x^s \cos bx$ и $x^s \sin bx$ $(s = 0, 1, 2, \ldots, n)$, стоящих в правой и левой частях, получим систему уравнений первой степени для определения коэффициентов многочленов $R(x)$ и $S(x)$. Заметим при этом, что, если $\cos bx$ или $\sin bx$ под знак интеграла и не входят, в правой части формулы надо обязательно писать обе тригонометрические функции, помня высказанное выше правило определения степеней многочленов $R(x)$ и $S(x)$.

К интегралам вида (19) приводятся непосредственно интегралы вида:

$$\int e^{ax}\varphi(x)\sin(a_1x+b_1)\sin(a_2x+b_2)\ldots\cos(c_1x+d_1)\cos(c_2x+d_2)\ldots dx.$$

Действительно, пользуясь известными тригонометрическими формулами, выражающими сумму и разность синусов и косинусов в виде произведения, можно, наоборот, произведение каких-либо двух из вышеупомянутых тригонометрических функций выразить в виде суммы или разности синусов и косинусов. Применяя несколько раз это преобразование, можем довести число тригонометрических множителей под знаком интеграла до одного и таким образом получим интеграл вида (19).

Пример. Согласно формуле (20):

$$\int e^{ax}\sin bx dx = e^{ax}(A\cos bx + B\sin bx) + C.$$

Дифференцируем и сокращаем на e^{ax}:

$$\sin bx = (aA + bB)\cos bx + (-bA + aB)\sin bx,$$

откуда

$$aA + bB = 0,\ -bA + aB = 1,\ \text{то есть } A = -\frac{b}{a^2+b^2},\ B = \frac{a}{a^2+b^2},$$

и окончательно

$$\int e^{ax}\sin bx dx = e^{ax}\left(-\frac{b}{a^2+b^2}\cos bx + \frac{a}{a^2+b^2}\sin bx\right) + C. \qquad (21)$$

Учебное издание

Смирнов Владимир Иванович

Курс высшей математики
Том I

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 27.02.08.
Формат $60\times90^{1}/_{16}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 50,31.
Тираж 2000 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 194354, Санкт-Петербург, ул. Есенина, 5Б.

Санитарно-эпидемиологическое заключение на продукцию
№ 77.99.60.953.Д.002108.02.07 от 28.02.2007 г. выдано Федеральной службой
по надзору в сфере защиты прав потребителей и благополучия человека.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12