Б. М. Макаров, А. Н. Подкорытов

Лекции по вещественному анализу

bhv

Б. М. Макаров
А. Н. Подкорытов

Лекции по вещественному анализу

Рекомендовано УМО в области инновационных междисциплинарных образовательных программ в качестве учебника по специальности 010503 "Математическое обеспечение и администрирование информационных систем"

Санкт-Петербург
«БХВ-Петербург»
2011

УДК 519.6(075.8)
ББК 22.143я73
М15

Макаров, Б. М.

М15 Лекции по вещественному анализу: учебник / Б. М. Макаров, А. Н. Подкорытов. — СПб.: БХВ-Петербург, 2011. — 688 с.: ил. — (Учебная литература для вузов)

ISBN 978-5-9775-0631-1

Книга посвящена основам теории интегрирования и смежным темам. Особое внимание уделяется теории интеграла по мере Лебега. Обсуждаются замена переменных в кратном интеграле и построение меры на поверхности. Рассмотрены приложения общей теории, гармонические функции, асимптотические формулы Лапласа, ряды и преобразование Фурье, формулы, связанные с методом стационарной фазы, и др. Все темы излагаются для функций одной и нескольких переменных. Рассматриваются актуальные разделы вещественного анализа (например, меры Хаусдорфа), важные геометрические приложения: неравенство Брунна-Минковского, теорема Брауэра, теорема о непрерывных векторных полях на сфере и др. Затрагиваются вопросы функционального анализа. Изложение основано на лекциях, многократно читавшихся авторами на математико-механическом факультете СПбГУ. Книга содержит более 600 примеров и упражнений.

Для студентов-математиков и студентов других специальностей, преподавателей и аспирантов

УДК 519.6(075.8)
ББК 22.143я73

Группа подготовки издания:

Главный редактор	*Екатерина Кондукова*
Зам. главного редактора	*Евгений Рыбаков*
Зав. редакцией	*Григорий Добин*
Компьютерная верстка	*Константина Кохася*
Корректор	*Зинаида Дмитриева*
Дизайн серии	*Инны Тачиной*
Оформление обложки	*Елены Беляевой*
Фото	*Кирилла Сергеева*
Зав. производством	*Николай Тверских*

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

С. В. Кисляков, д-р физ.-мат. наук, проф., чл.-корр. РАН, директор Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В. А. Стеклова РАН;

А. М. Коточигов, д-р физ.-мат. наук, проф., заведующий кафедрой высшей математики II Санкт-Петербургского государственного электротехнического университета "ЛЭТИ".

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 30.09.10.
Формат 70×100 1/16. Печать офсетная. Усл. печ. л. 55,47.
Тираж 1000 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 190005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29.

Санитарно-эпидемиологическое заключение на продукцию
№ 77.99.60.953.Д.005770.05.09 от 26.05.2009 г. выдано Федеральной службой
по надзору в сфере защиты прав потребителей и благополучия человека.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12

ISBN 978-5-9775-0631-1

© Макаров Б. М., Подкорытов А. Н., 2010
© Оформление, издательство "БХВ-Петербург", 2010

Предисловие

Теория меры уже давно стала неотъемлемой составной частью университетской программы подготовки математиков. Имеется ряд посвящённых ей апробированных руководств. Можно назвать, например, книги Б. З. Вулиха [В], А. Н. Колмогорова и С. В. Фомина [КФ], не говоря уже о классической монографии П. Халмоша [Х]. Однако обычно в книгах по теории меры она рассматривается как самостоятельная дисциплина, что затрудняет достаточно органичное включение её в курс анализа. Например, инвариантность меры Лебега или вовсе не обсуждается, или рассматривается лишь как частный случай свойств меры Хаара; нередко вне поля зрения остаётся задача о преобразовании меры Лебега при диффеоморфизме. С другой стороны, до сих пор изложение теории интегрирования в курсах анализа зачастую основывается на римановой схеме, и читателю приходится не только осваивать многочисленные (хотя и единообразные) определения интеграла с помощью интегральных сумм, соответствующие различным ситуациям (двойные интегралы, тройные интегралы, криволинейные, поверхностные и т. д.), но и подчас преодолевать технические трудности, вызванные не существом дела, а отсутствием достаточно общего подхода к вопросу. Типичные примеры таких трудностей связаны с обоснованием изменения порядка интегрирования или предельного перехода под знаком интеграла.

По этим причинам возникает подчас как бы "двухуровневое" изложение теории интегрирования, когда на первой стадии понятие меры не затрагивается, а в дальнейшем к пройденным "элементарным" темам уже не возвращаются, оставляя согласование различных подходов учащемуся. Авторы стремились ликвидировать этот разрыв и дать изложение теории интеграла, которое с одной стороны было бы современным, а с другой — могло быть достаточно естественно включено в общий курс анализа, как это уже давно принято на кафедре математического анализа математико-механического факультета Санкт-Петербургского университета. В основе установившейся традиции лежит идея, высказанная ещё в начале 60-х годов Г. П. Акиловым и реализованная впервые В. П. Хавиным в 1963/64 учебном году.

Основной акцент в книге делается на изложении свойств интеграла по мере Лебега и его разнообразных применениях. Такой подход определил как характер изложения, так и подбор материала. Вместе с тем, мы надеемся, что читатель, освоивший первую треть книги, окажется достаточно подготовленным для изучения любых разделов математики, использующих общую теорию меры (теория вероятностей, функциональный анализ, математическая физика и др.).

Существенную часть книги составляют приложения теории интегрирования. Кроме элементов гармонического анализа, это прежде всего геометрические приложения, среди которых читатель найдёт как классические неравенства (Брунна–Минковского и изопериметрическое), так и более поздние результаты (использование замены переменной при доказательстве теорем Брауэра и о векторных полях на сфере, неравенство Болла и др.). Чтобы проиллюстрировать действенность полученных теорем и предоставить читателю возможность более активно осваивать излагаемый материал, в книгу включены примеры и упражнения различной степени трудности, общее число которых довольно значительно.

Учебный характер книги удерживал нас от изложения некоторых результатов в максимальной общности. В интересах читателя иногда в таких случаях даются ссылки на специальную литературу. Более подробно, чем обычно в книгах по математическому анализу, мы рассматриваем понятие площади поверхности и исходя из дескриптивного определения доказываем его однозначную определённость на борелевских подмножествах гладких и липшицевых многообразий.

Безусловно желательно, чтобы лекционному изложению основ теории меры предшествовало знакомство слушателей с понятием интеграла по отрезку от непрерывной функции одной переменной. Однако мы не считаем, что это первоначальное знакомство обязательно должно быть связано со схемой Римана, представляющей, на наш взгляд, прежде всего исторический интерес. Один из возможных альтернативных подходов изложен в добавлении I.

Эта книга возникла на основе курсов лекций, которые авторы многократно читали на математико-механическом факультете СПбГУ. Основная часть глав I–VIII примерно соответствует принятой на факультете программе четвертого и части пятого семестров курса математического анализа в потоке математиков. Материал глав IX–XII и некоторых других мест книги в тех или иных сочетаниях включался авторами в специальные курсы или в лекции по функциональному анализу. Некоторые дополнительные сведения содержатся в добавлениях II–VI. Добавление VII, посвящённое гладким отображениям, приведено для удобства ссылок.

Книга рассчитана на читателя, имеющего некоторую математическую подготовку. В соответствии с программой математико-механического факультета СПбГУ студенты-математики IV семестра знакомы с дифференциальным исчислением функций нескольких переменных и стандартными сведениями по линейной алгебре. Соответствующие факты в книге используются без особых пояснений. В главе VIII предполагается знакомство читателя с началами теории гладких многообразий, а в добавлениях II и III — с основными понятиями, связанными с метрическими пространствами.

Авторам приходилось встречать книги, в которых раз введённые определения или обозначения уже больше никогда не напоминаются и используются, даже спустя несколько глав, без всяких пояснений и ссылок. Нам представляется, что такая манера — уместная, возможно, в монографиях энциклопедического характера — предъявляет излишне завышенные требования к памяти и вниманию читателя. Учитывая, кроме того, что эта книга является учебным пособием и адресована прежде всего читателям не слишком искушенным, многие из которых впервые знакомятся с предметом, авторы сочли возможным не избегать некоторых повторений и напоминаний, но не берутся судить, удалось ли им соблюсти в этом отношении меру.

В процессе длительной работы над этой книгой авторы многократно пользовались советами своих коллег. Особенно полезными были контакты с Д. А. Владимировым,

А. А. Лодкиным, А. И. Назаровым, Ф. Л. Назаровым, А. А. Флоринским и В. П. Хавиным, которым мы искренне благодарны. Мы также признательны А. Л. Громову, любезно согласившемуся сделать компьютерную версию иллюстраций, и К. П. Кохасю, создавшему макет книги.

Главы книги нумеруются римскими цифрами. Они разбиты на параграфы, состоящие в свою очередь из пунктов, которые нумеруются двумя (арабскими) цифрами. Первая из них обозначает номер параграфа, а вторая — номер пункта в параграфе. Пункты добавлений нумеруются двумя цифрами — римской (номер добавления) и арабской, с добавлением при ссылках буквы Д.

Все утверждения, содержащиеся в данном пункте, нумеруются при ссылках так же, как и пункт. При ссылках внутри одной главы указывается только номер пункта (например, ссылка “по теореме 2.1” означает ссылку на теорему пункта 2.1 данной главы). При ссылках на утверждения из другой главы указывается дополнительно номер главы (например, ссылка “см. следствие II.3.4” означает ссылку на следствие, содержащееся в пункте 3.4 главы II). Нумерация формул сплошная в пределах параграфа. Окончание доказательства отмечается знаком ►.

Основные обозначения

Логические символы

$P \Rightarrow Q$, $Q \Leftarrow P$ — из утверждения P следует утверждение Q;
$\forall$ — квантор общности (“для всех”);
$\exists$ — квантор существования (“существует”).

Множества

$x \in X$ — элемент x принадлежит множеству X;
$x \notin X$ — элемент x не принадлежит множеству X;
$A \subset B$, $B \supset A$ — A подмножество множества B;
$A \cap B$ — пересечение множеств A и B;
$A \cup B$ — объединение множеств A и B;
$A \vee B$ — объединение дизъюнктных множеств A и B;
$A \setminus B$ — разность множеств A и B;
$A \times B$ — прямое (декартово) произведение множеств A и B;
$\mathrm{card}(A)$ — мощность множества A;
$\{x \in X \mid P(x)\}$ — подмножество множества X, элементы которого обладают свойством P;
$\varnothing$ — пустое множество.

Числовые множества

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;
$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел;
$\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел;
$\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел;
$\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ — расширенное множество вещественных чисел;
$\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел;
$\mathbb{R}^m$ — арифметическое m-мерное пространство;
$\mathbb{R}_+$ — множество положительных чисел;
$\mathbb{R}^m_+$ — подмножество пространства $\mathbb{R}^m$, состоящее из точек с положительными координатами;
$\mathbb{Q}^m$, $\mathbb{Z}^m$ — подмножества пространства $\mathbb{R}^m$, состоящие из точек соответственно с рациональными и целыми координатами;
$(a, b), [a, b), [a, b]$ — обозначения интервала, ячейки и сегмента;
$\langle a, b\rangle$ — произвольный промежуток с концами a и b;
$\inf A$ ($\sup A$) — наибольшая нижняя (наименьшая верхняя) граница числового множества A.

Множества в топологических и метрических пространствах

$\overline{A}$ — замыкание множества A;
$\mathrm{Int}(A)$ — внутренность множества A;
$B(a, r)$ — открытый шар с центром a и радиусом r;
$\overline{B}(a, r)$ — замкнутый шар с центром a и радиусом r;

$B(r)$ или $B^m(r)$ — шар $B(0,r)$ в пространстве $\mathbb{R}^m$;
B^m — шар $B^m(1)$;
S^{m-1} — единичная сфера (граница шара B^m) в пространстве $\mathbb{R}^m$;
$\operatorname{diam}(A)$ — диаметр множества A;
$\operatorname{dist}(x, A)$ — расстояние от точки x до множества A.

Системы множеств

$\mathfrak{A}^m$ — σ-алгебра подмножеств пространства $\mathbb{R}^m$, измеримых по Лебегу;
$\mathfrak{B}^m$ — σ-алгебра борелевских множеств пространства $\mathbb{R}^m$;
$\mathfrak{B}(\mathcal{E})$ — борелевская оболочка системы $\mathcal{E}$;
$\mathfrak{B}_X$ — σ-алгебра борелевских подмножеств пространства X;
$\mathscr{P}^m$ — полукольцо m-мерных ячеек;
$\mathscr{P} \odot \mathcal{Q}$ — произведение полуколец $\mathscr{P}$ и $\mathcal{Q}$.

Отображения и функции

$\det(A)$ — определитель квадратной матрицы A;
f_+, f_- — функции $\max\{f, 0\}$, $\max\{-f, 0\}$;
$f_n \rightrightarrows f$ — обозначение равномерной сходимости последовательности функций f_n к функции f;
$J_\Phi(x) = \det(\Phi'(x))$ — якобиан отображения Φ в точке x;
$\operatorname{supp}(f)$ — носитель функции f;
$T\colon X \to Y$ — отображение T, действующее из X в Y;
$T(A)$ — образ множества A при отображении T;
$T^{-1}(B)$ — полный прообраз множества B при отображении T;
$T \circ S$ — композиция (суперпозиция) отображений T и S;
$T|_A$ — сужение отображений T на множество A;
$\operatorname*{vraisup}_X f$ — истинный супремум функции f на множестве X;
$x \mapsto T(x)$ — при отображении T точка x переходит в $T(x)$;
$\Gamma_f(E)$ — график функции $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$;
$\mathscr{P}_f(E)$ — подграфик неотрицательной функции f над множеством E;
χ_E — характеристическая функция множества E;
$\Phi'(x)$ — матрица Якоби отображения Φ в точке x;
$\|\cdot\|$ — евклидова норма вектора или норма функции в $\mathscr{L}^2(X, \mu)$ или норма в банаховом пространстве;
$\|f\|_p$ — норма функции f в $\mathscr{L}^p(X, \mu)$;
$\|f\|_\infty = \operatorname*{vraisup}_X |f|$;
$\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение векторов в евклидовом пространстве или функций в $\mathscr{L}^2(X, \mu)$.

Меры

$(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой;
$(X, \mathfrak{A})$ — измеримое пространство;
α_m — объём (мера Лебега) единичного шара в $\mathbb{R}^m$;
λ_m — m-мерная мера Лебега;
$\mu \times \nu$ — произведение мер μ и ν;
σ_k — k-мерная площадь.

Множества функций

$C(X)$ — множество функций, непрерывных на топологическом пространстве X;
$C_0(X)$ — множество финитных функций, непрерывных на локально компактном топологическом пространстве X;
$C^r(\mathcal{O})$ $(C^r(\mathcal{O};\mathbb{R}^n))$ — множество r раз $(r = 0, 1, \ldots, +\infty)$ дифференцируемых функций (отображений со значениями в $\mathbb{R}^n$), определённых на открытом подмножестве $\mathcal{O}$ пространства $\mathbb{R}^m$;
$C_0^\infty(\mathcal{O})$ — множество бесконечно дифференцируемых финитных функций, определённых на открытом подмножестве $\mathcal{O}$ пространства $\mathbb{R}^m$;
$\mathscr{L}^0(X,\mu)$ — множество измеримых функций, определённых на X и почти везде конечных относительно меры μ;
$\mathscr{L}^p(X,\mu)$ — множество функций из $\mathscr{L}^0(X,\mu)$, удовлетворяющих условию $\int_X |f|^p\,d\mu < +\infty$;
$\mathscr{L}^\infty(X,\mu)$ — множество функций, каждая из которых ограничена на некотором подмножестве полной меры;
$\mathscr{L}(X,\mu) = \mathscr{L}^1(X,\mu)$ — множество функций, суммируемых на X по мере μ.

Глава I. МЕРА

§ 1. Системы множеств

В классическом анализе в основном рассматриваются функции, зависящие от одного или нескольких числовых переменных. Здесь же мы будем изучать функции, аргумент которых — множество. Основное внимание будет уделено мерам, т. е. функциям множеств, обобщающим понятия длины, площади и объёма. Рассматривая такие обобщения, естественно стремиться к тому, чтобы мера была определена на достаточно "хорошем" классе множеств. Желательно, чтобы он обладал рядом естественных свойств — вместе с любыми двумя множествами содержал бы их объединение, разность и пересечение. Чтобы мера представляла интерес, необходимо также, чтобы её область определения была достаточно богата множествами. Стремясь удовлетворить этим требованиям, мы приходим к понятиям алгебры и σ-алгебры множеств.

Вместо выражения "множество множеств" мы используем как синоним термин "система множеств". Множества, образующие систему, называются её элементами. Фраза "множество входит в данную систему множеств $\mathfrak{A}$" означает, что множество принадлежит $\mathfrak{A}$, т. е. является элементом этой системы. Во избежание двусмысленности в обозначениях, мы, как правило, обозначаем множества прописными буквами латинского алфавита $A, B, \ldots$, а входящие в них точки — строчными буквами $a, b, \ldots$ Для обозначения систем множеств используются готический и рукописный шрифты. Символом $\varnothing$ обозначается пустое множество.

1.1. Мы предполагаем, что читатель знаком с основами наивной теории множеств. Поэтому доказательства теоретико-множественных тождеств оставляются, как правило, для самостоятельной проверки. Некоторые из них, особенно часто используемые в дальнейшем, мы для удобства читателя приведём в следующей лемме.

Лемма. *Пусть A, A_ω $(\omega \in \Omega)$ — произвольные подмножества множества X. Тогда*

$$1) \qquad X \setminus \bigcup_{\omega\in\Omega} A_\omega = \bigcap_{\omega\in\Omega} (X \setminus A_\omega);$$

$$2) \qquad X \setminus \bigcap_{\omega\in\Omega} A_\omega = \bigcup_{\omega\in\Omega} (X \setminus A_\omega);$$

$$3) \qquad A \cap \bigcup_{\omega\in\Omega} A_\omega = \bigcup_{\omega\in\Omega} (A \cap A_\omega).$$

Равенства 1) и 2) называются формулами двойственности. Равенство 3) выражает свойство дистрибутивности, связывающее действия объединения и пересечения. Сопоставляя объединению сложение, а пересечению — умножение, читатель без труда заметит аналогию между этим свойством и обычным свойством дистрибутивности, справедливым для чисел.

Рассматривая объединения и пересечения семейства множеств со счётным множеством индексов Ω, мы, как правило, будем считать индексы натуральными числами. Это не умаляет общности получаемых результатов, поскольку при любой "нумерации" Ω (т. е. при любой биекции $n \mapsto \omega_n$ натурального ряда на Ω) справедливы равенства

$$\bigcup_{\omega\in\Omega} A_\omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{\omega_n}, \qquad \bigcap_{\omega\in\Omega} A_\omega = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_{\omega_n},$$

вытекающие непосредственно из определения объединения и пересечения.

В дальнейшем нам часто придётся иметь дело с представлением множества в виде объединения попарно не пересекающихся подмножеств. В связи с этим полезно следующее

Определение. Семейство множеств $\{E_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ называется *разбиением* множества E, если E_ω попарно не пересекаются и $\bigcup\limits_{\omega\in\Omega} E_\omega = E$.

Мы не исключаем, что некоторые элементы разбиения могут совпадать с пустым множеством.

Объединение непересекающихся множеств будем называть *дизъюнктным объединением* и обозначать символом $\vee$. Таким образом, символ $A \vee B$ обозначает объединение $A \cup B$ в случае, когда $A \cap B = \varnothing$. Соответственно символ $\bigvee\limits_{\omega\in\Omega} E_\omega$ обозначает объединение семейства множеств E_ω в случае, когда все они попарно не пересекаются.

Мы всегда будем предполагать, что рассматриваемая система множеств состоит из подмножеств фиксированного непустого множества, которое будем называть основным. Дополнение множества A относительно основного множества X, т. е. разность $X \setminus A$, обозначается символом A^c.

Определение. Система множеств называется *симметричной*, если каждое множество входит в неё одновременно со своим дополнением.

Рассмотрим следующие четыре свойства системы множеств $\mathfrak{A}$:

(σ_0) объединение любых двух множеств из $\mathfrak{A}$ снова входит в $\mathfrak{A}$;
(δ_0) пересечение любых двух множеств из $\mathfrak{A}$ снова входит в $\mathfrak{A}$;
(σ) объединение любой последовательности множеств, входящих в $\mathfrak{A}$, снова входит в $\mathfrak{A}$;
(δ) пересечение любой последовательности множеств, входящих в $\mathfrak{A}$, снова входит в $\mathfrak{A}$.

Справедливо следующее утверждение.

Предложение. *Если $\mathfrak{A}$ симметричная система множеств, то (σ_0) равносильно (δ_0), а (σ) равносильно (δ).*

Доказательство немедленно следует из формул двойственности. Докажем, например, что $(\delta) \Rightarrow (\sigma)$. Рассмотрим произвольную последовательность $\{A_n\}_{n\geqslant 1}$ множеств, содержащихся в $\mathfrak{A}$. Их объединение можно записать в виде

$$\bigcup_{n\geqslant 1} A_n = \left(\bigcap_{n\geqslant 1} A_n^c\right)^c.$$

Так как $A_n^c \in \mathfrak{A}$ для всех n (силу симметричности системы $\mathfrak{A}$), то по свойству (δ) пересечение этих дополнений также принадлежит $\mathfrak{A}$. Остаётся ещё раз воспользоваться

симметричностью системы $\mathfrak{A}$ — она содержит и дополнение этого пересечения, т. е. объединение исходных множеств.

Остальные импликации читатель без труда установит самостоятельно. ►

1.2. Введём теперь важнейшие для нас системы множеств.

Определение. Непустая симметричная система множеств $\mathfrak{A}$ называется *алгеброй*, если она обладает (равносильными) свойствами (σ_0) и (δ_0). Алгебра называется *σ-алгеброй* (сигма-алгеброй), если она обладает (равносильными) свойствами (σ) и (δ).

Отметим три свойства алгебры $\mathfrak{A}$.

1) $\varnothing, X \in \mathfrak{A}$. Действительно, пусть $A \in \mathfrak{A}$. Тогда $\varnothing = A \cap A^c \in \mathfrak{A}$ и $X = A \cup A^c \in \mathfrak{A}$ непосредственно по определению алгебры. ►

2) Вместе с любыми двумя множествами A, B алгебра $\mathfrak{A}$ содержит и их разность $A \setminus B$. Это следует из тождества $A \setminus B = A \cap B^c$ и определения алгебры. ►

3) Если множества $A_1, \dots, A_n$ входят в $\mathfrak{A}$, то их объединение и пересечение также входят в $\mathfrak{A}$. Это свойство доказывается с помощью индукции. ►

Примеры. 1) Система, состоящая из всевозможных ограниченных подмножеств плоскости $\mathbb{R}^2$ и их дополнений, очевидно, является алгеброй (но не σ-алгеброй!).

2) Система, состоящая только из двух множеств — X и $\varnothing$ — является, очевидно, алгеброй и σ-алгеброй. Эту алгебру часто называют тривиальной.

3) Другой крайний случай (по сравнению с тривиальной алгеброй) — система всех подмножеств множества X. Очевидно, она является σ-алгеброй.

4) Если $\mathfrak{A}$ алгебра (σ-алгебра) подмножеств множества X и $Y \subset X$, то система множеств $\{A \cap Y \mid A \in \mathfrak{A}\}$ является алгеброй (соответственно σ-алгеброй) подмножеств Y. Мы будем называть её *индуцированной алгеброй* (на Y) и обозначать символом $\mathfrak{A} \cap Y$.

Вообще, если $\mathcal{E}$ — произвольная система подмножеств множества X, $Y \subset X$, то система $\{E \cap Y \mid E \in \mathcal{E}\}$ называется системой индуцированной на Y и обозначается символом $\mathcal{E} \cap Y$. Часть системы $\mathcal{E} \cap Y$, состоящая из множеств, входящих в $\mathcal{E}$ и содержащихся в Y, обозначается символом $\mathcal{E}_Y$. Заметим, что если $\mathcal{E}$ алгебра, то $\mathcal{E}_Y$ алгебра тогда и только тогда, когда $Y \in \mathcal{E}$.

Предложение. *Пусть $\{\mathfrak{A}_\omega\}_{\omega \in \Omega}$ — произвольное семейство алгебр (σ-алгебр), состоящих из подмножеств некоторого множества. Тогда система $\bigcap\limits_{\omega \in \Omega} \mathfrak{A}_\omega$ снова есть алгебра (σ-алгебра).*

Доказательство предоставляется читателю. ►

Наряду с алгебрами иногда оказывается удобным рассматривать близкие системы множеств, отказавшись от требования симметричности. Система множеств называется *кольцом*, если она вместе с множествами A, B содержит и множества $A \cup B, A \cap B$ и $A \setminus B$. Кольцо, содержащее вместе с последовательностью множеств их объединение, называется σ-кольцом.

Очевидно, всякая алгебра (σ-алгебра) является и кольцом (σ-кольцом).

1.3. Всякая система множеств содержится в некоторой σ-алгебре, например в σ-алгебре всех подмножеств основного множества X. Но эта σ-алгебра, как правило, содержит “слишком много” множеств и часто бывает полезно погрузить данную систему множеств в алгебру наиболее экономным образом, т. е. так, чтобы объемлющая алгебра не содержала “лишних” элементов.

Оказывается, любой конечный набор подмножеств $\{A_k\}_{k=1}^n$ множества X можно считать частью алгебры, состоящей из конечного числа элементов. Это очевидно, если рассматриваемые множества образуют разбиение X. Тогда всевозможные конечные объединения этих множеств вместе с пустым множеством (которое в теории множеств считают равным объединению по пустому множеству индексов) образуют алгебру. Если же множества A_k не образуют разбиения, то существует стандартная процедура для построения вспомогательного разбиения, порождающего алгебру, их содержащую. Эта процедура такова: каждому набору $\varepsilon = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$, где $\varepsilon_k = 0$ или $\varepsilon_k = 1$, сопоставим пересечение $B_\varepsilon = A_1^{\varepsilon_1} \cap \dots \cap A_n^{\varepsilon_n}$, считая, что $A_k^0 = A_k$ и $A_k^1 = A_k^c$ $(= X \setminus A_k)$. Заметим, что по свойству 3) множества B_ε должны входить в любую алгебру, содержащую $A_1, \dots, A_n$. Читатель легко убедится, что множества B_ε образуют разбиение множества X, которое мы будем называть *каноническим разбиением,* соответствующим множествам $A_1, \dots, A_n$. Мы рекомендуем читателю выяснить, что представляют собой множества B_ε в случае, когда исходный набор множеств уже является разбиением X. Ясно, что B_ε либо содержится в A_k (если $\varepsilon_k = 0$), либо не пересекается с ним. Поэтому $A_k = \bigcup\limits_{\varepsilon_k=0} B_\varepsilon$. Всевозможные конечные объединения множеств B_ε (вместе с пустым множеством) образуют алгебру, содержащую все множества A_k. Эта алгебра содержит не более чем 2^{2^n} множеств (см. упр. 6) и (как всякая алгебра, состоящая из конечного числа множеств) является σ-алгеброй. Ясно, что это — наименьшая по запасу элементов σ-алгебра, содержащая все множества A_k.

Описание множеств, образующих минимальную σ-алгебру, содержащую данную бесконечную систему множеств, весьма сложно, и мы не будем рассматривать этот вопрос, ограничившись доказательством существования такой σ-алгебры. Этот важный результат часто будет использоваться в дальнейшем.

Теорема. *Для любой системы подмножеств $\mathcal{E}$ множества X существует наименьшая по запасу элементов σ-алгебра, содержащая $\mathcal{E}$.*

Она называется *борелевской* *) *оболочкой* системы $\mathcal{E}$ и обозначается символом $\mathfrak{B}(\mathcal{E})$. Борелевская оболочка состоит из подмножеств того же основного множества, что и система $\mathcal{E}$.

Доказательство. Очевидно, существует σ-алгебра, содержащая $\mathcal{E}$ (например, σ-алгебра всех подмножеств X). Рассмотрим пересечение всех σ-алгебр, содержащих $\mathcal{E}$. Эта система множеств содержит $\mathcal{E}$ и является σ-алгеброй по предложению 1.2. Минимальность этой σ-алгебры следует из построения. ►

Определение. Множества, входящие в минимальную σ-алгебру, содержащую все открытые подмножества пространства $\mathbb{R}^m$, называются *борелевскими подмножествами пространства* $\mathbb{R}^m$ или просто борелевскими множествами. σ-алгебра борелевских подмножеств пространства $\mathbb{R}^m$ обозначается символом $\mathfrak{B}^m$.

Замечания. 1) Простейшими борелевскими множествами, наряду с открытыми и замкнутыми, являются счётные пересечения открытых и счётные объединения замкнутых множеств. Они называются множествами типа G_δ и типа F_σ соответственно.

2) Совсем не очевидно, что σ-алгебра $\mathfrak{B}^m$ не совпадает с σ-алгеброй всех подмножеств пространства $\mathbb{R}^m$, однако это так. Более того, эти σ-алгебры имеют различную

*) Эмиль **Борель** (Borel), 1871–1956, — французский математик.

мощность. Можно доказать, что система $\mathfrak{B}^m$ имеет мощность континуума, т. е. равномощна $\mathbb{R}^m$; мощность же σ-алгебры всех подмножеств пространства $\mathbb{R}^m$ по теореме Кантора строго больше мощности $\mathbb{R}^m$. Мы не будем останавливаться на доказательствах этих фактов, которые читатель может найти, например, в книгах [Б], [Бу].

1.4. Прежде чем переходить к определению ещё одной системы множеств, установим один вспомогательный результат, который неоднократно будем использовать в дальнейшем.

Лемма (о дизъюнктном представлении). *Пусть $\{A_n\}_{n\geqslant 1}$ — произвольная последовательность множеств. Тогда*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigvee_{n=1}^{\infty}\Big(A_n \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k\Big) \tag{1}$$

(для единообразия мы считаем, что $A_0 = \varnothing$).

Доказательство. Положим $E_n = A_n \setminus \bigcup\limits_{k=0}^{n-1} A_k$. То, что эти множества попарно дизъюнктны, ясно: если, например, $m < n$, то $E_m \subset A_m$, а $E_n \subset A_n \setminus A_m$.

Проверяя равенство (1), возьмём произвольную точку x из объединения $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Пусть m — наименьший из таких номеров n, что $x \in A_n$, т. е. $x \in A_m$ и $x \notin A_k$ при $k < m$. Тогда $x \in E_m \subset \bigcup\limits_{n\geqslant 1} E_n$. Таким образом, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\Big(A_n \setminus \bigcup\limits_{k=0}^{n-1} A_k\Big)$. Обратное включение тривиально. ▶

Отметим, что любой конечный набор множеств $A_1, \dots, A_N$ удовлетворяет аналогичному равенству:

$$\bigcup_{n=1}^{N} A_n = \bigvee_{n=1}^{N}\Big(A_n \setminus \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k\Big). \tag{1'}$$

Доказательство получается почти дословным повторением доказательства леммы (можно также применить её к последовательности множеств $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, в которой $A_n = \varnothing$ при $n > N$).

Вместе с алгебрами и σ-алгебрами нам будет удобно использовать не столь “хорошие”, но зато зачастую более обозримые системы множеств — так называемые полукольца.

Определение. Система подмножеств $\mathscr{P}$ называется *полукольцом* при выполнении условий:

I) $\varnothing \in \mathscr{P}$;

II) если A, $B \in \mathscr{P}$, то $A \cap B \in \mathscr{P}$;

III) если A, $B \in \mathscr{P}$, то разность $A \setminus B$ представима в виде конечного объединения попарно не пересекающихся множеств из $\mathscr{P}$, т. е.

$$A \setminus B = \bigvee_{j=1}^{m} Q_j, \quad \text{где} \quad Q_j \in \mathscr{P}.$$

Пример. Система $\mathscr{P}^1$ всевозможных полуоткрытых промежутков вида $[a, b)$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leqslant b$, а также её часть $\mathscr{P}^1_r$, состоящая из промежутков с рациональными концами, суть полукольца.

Проверку этих простых, но важных фактов мы предоставляем читателю.

Всякая алгебра есть полукольцо, но, как видно из приведённых примеров, обратное неверно. Вместе с полукольцом $\mathscr{P}$ системы $\mathscr{P} \cap Y$ и $\mathscr{P}_Y$, очевидно, также являются полукольцами. Полукольцом является и любая система попарно дизъюнктных множеств, содержащая пустое множество.

Объединение и разность элементов полукольца могут не входить в него. Однако они допускают разбиения, состоящие из элементов полукольца. Мы докажем этот результат в несколько более сильной форме.

Теорема. *Пусть $\mathscr{P}$ — полукольцо, P, P_1, $\ldots$, $P_n, \ldots \in \mathscr{P}$. Тогда при любом N для множеств $P \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{N} P_n$ и $\bigcup\limits_{n=1}^{N} P_n$ справедливы представления*

$$P \setminus \bigcup_{n=1}^{N} P_n = \bigvee_{j=1}^{m} Q_j, \quad \text{где } Q_j \in \mathscr{P}; \tag{2}$$

$$\bigcup_{n=1}^{N} P_n = \bigvee_{n=1}^{N} \bigvee_{j=1}^{m_n} Q_{nj}, \quad \text{где } Q_{nj} \in \mathscr{P} \text{ и } Q_{nj} \subset P_n. \tag{3}$$

Кроме того,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} P_n = \bigvee_{n=1}^{\infty} \bigvee_{j=1}^{m_n} Q_{nj}, \quad \text{где } Q_{nj} \in \mathscr{P} \text{ и } Q_{nj} \subset P_n. \tag{4}$$

Из (3) и (4) вытекает, что объединение произвольной (конечной или бесконечной) последовательности множеств P_n, входящих в полукольцо, может быть представлено как конечное или счётное дизъюнктное объединение “более мелких” (т. е. содержащихся в исходных) и попарно не пересекающихся множеств, по-прежнему принадлежащих полукольцу.

При доказательстве равенств (3), (4) мы опираемся на (2) и формулы (1), (1′). ►

Следствие. *Пусть $\mathscr{P}$ полукольцо подмножеств множества X, $\mathcal{R}$ — система множеств, представимых в виде конечных объединений множеств из $\mathscr{P}$. Тогда объединение, пересечение и разность двух множеств из $\mathcal{R}$ снова входит в $\mathcal{R}$. Если $X \in \mathscr{P}$ (или хотя бы $X \in \mathcal{R}$), то $\mathcal{R}$ алгебра.*

Таким образом, система $\mathcal{R}$ конечных объединений множеств из полукольца $\mathscr{P}$ есть кольцо множеств. Очевидно, $\mathcal{R}$ есть минимальное кольцо, содержащее $\mathscr{P}$.

Замечание. Равенство (3) допускает следующее усиление: объединение P_n можно представить в виде

$$\bigcup_{n=1}^{N} P_n = \bigvee_{k=1}^{K} R_k, \quad \text{где } R_1, \ldots, R_K \in \mathscr{P},$$

и при любых k, n справедлива альтернатива: либо R_k содержится в P_n, либо их пересечение пусто.

При $N = 2$ для доказательства следует воспользоваться равенством

$$P_1 \cup P_2 = (P_1 \setminus P_2) \vee (P_1 \cap P_2) \vee (P_2 \setminus P_1)$$

и каждую из разностей $P_1 \setminus P_2$, $P_2 \setminus P_1$ представить по определению полукольца в виде дизъюнктного объединения. Общий случай исчерпывается с помощью индукции (обосновывая индукционный переход от N к $N+1$, в проведённом рассуждении следует заменить P_1 на $\bigcup\limits_{n=1}^{N} P_n$).

1.5. Пусть $\mathscr{P}$ и $\mathcal{Q}$ полукольца подмножеств множеств X и Y соответственно. Рассмотрим декартово произведение $X \times Y$ и систему его подмножеств $\mathscr{P} \odot \mathcal{Q}$, состоящую из произведений множеств, входящих в $\mathscr{P}$ и $\mathcal{Q}$:

$$\mathscr{P} \odot \mathcal{Q} = \{P \times Q \mid P \in \mathscr{P},\ Q \in \mathcal{Q}\}.$$

Мы будем называть эту систему множеств *произведением полуколец* $\mathscr{P}$ и $\mathcal{Q}$.

Теорема. *Произведение полуколец есть полукольцо.*

Очевидно, система $\mathscr{P} \odot \mathcal{Q}$ удовлетворяет условию I из определения полукольца. Пусть $A = P \times Q$ и $B = P_0 \times Q_0$, где P, $P_0 \in \mathscr{P}$, Q, $Q_0 \in \mathcal{Q}$. Из тождества $A \cap B = (P \cap P_0) \times (Q \cap Q_0)$ следует, что система $\mathscr{P} \odot \mathcal{Q}$ удовлетворяет и условию II.

Проверяя условие III, можно считать, что $B \subset A$, т. е. $P_0 \subset P$ и $Q_0 \subset Q$ (в противном случае следует заменить B на $B \cap A$). Тогда согласно определению полукольца для некоторых $P_1, \ldots, P_m$ из $\mathscr{P}$ и $Q_1, \ldots, Q_n$ из $\mathcal{Q}$ справедливы равенства

$$P = P_0 \vee P_1 \vee \ldots \vee P_m \quad \text{и} \quad Q = Q_0 \vee Q_1 \vee \ldots \vee Q_n.$$

Поэтому всевозможные "прямоугольники" $P_k \times Q_j$, $0 \leqslant k \leqslant m$, $0 \leqslant j \leqslant n$, образуют разбиение произведения $A = P \times Q$. Удалив из них $B = P_0 \times Q_0$, мы получим требуемое в условии III разбиение разности $A \setminus B$ множествами из системы $\mathscr{P} \odot \mathcal{Q}$. ▶

1.6. Рассмотрим теперь два важнейших примера полуколец, состоящих из подмножеств пространства $\mathbb{R}^m$. Пространство $\mathbb{R}^m$ мы отождествляем с декартовым произведением $\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ (m сомножителей). Координаты точки x из $\mathbb{R}^m$ обозначаются той же буквой с индексами. Таким образом, $x \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_m)$. В некоторых случаях мы будем также стандартным образом отождествлять это пространство с произведением пространств меньшей размерности: $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$ при $1 \leqslant k < m$.

Напомним, что расстояние $\rho(x, y)$ между точками $x, y \in \mathbb{R}^m$ равно по определению $\left(\sum\limits_{k=1}^{m} (x_k - y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Функция $x \mapsto \left(\sum\limits_{k=1}^{m} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} \equiv \|x\|$ называется (евклидовой) *нормой*. Ясно, что $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Величина $\sup\{\|x - y\| \mid x, y \in A\}$ называется *диаметром* множества $A \subset \mathbb{R}^m$ и обозначается символом $\operatorname{diam}(A)$.

Системы множеств, которые мы рассмотрим в первую очередь, состоят из прямоугольных параллелепипедов. Как известно, открытым *параллелепипедом* в $\mathbb{R}^m$, построенным на линейно независимых векторах $\{v_j\}_{j=1}^m$ (или натянутым на эти векторы), называется множество (далее $a \in \mathbb{R}^m$)

$$P(a; v_1, \ldots, v_m) = \left\{ a + \sum_{j=1}^{m} t_j v_j \;\middle|\; 0 < t_j < 1 \ \text{ при } \ j = 1, 2, \ldots, m \right\}.$$

Заменяя условия $0 < t_j < 1$ условиями $0 \leqslant t_j \leqslant 1$, мы получим замкнутый параллелепипед $\overline{P}(a; v_1, \dots, v_m)$, являющийся, очевидно, замыканием открытого. Всякое множество P, удовлетворяющее включению

$$P(a; v_1, \dots, v_m) \subset P \subset \overline{P}(a; v_1, \dots, v_m),$$

мы также будем называть параллелепипедом.

Векторы v_j называются рёбрами параллелепипеда. Если они попарно ортогональны, параллелепипед называется *прямоугольным.* Векторы вида $a + \sum\limits_{j \in J} v_j$, где J — произвольное подмножество множества $\{1, \dots, m\}$, называют вершинами параллелепипеда, вектор $a + \frac{1}{2} \sum\limits_{j=1}^{m} v_j$ — его центром.

Особую роль для нас будут играть прямоугольные параллелепипеды специального вида с рёбрами, параллельными осям координат. Опишем их подробнее.

Пусть $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$, $b = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$. Будем писать $a \leqslant b$, если $a_j \leqslant b_j$ при всех $j = 1, \dots, m$. Запись $a < b$ означает, что $a_j < b_j$ при всех $j = 1, 2, \dots, m$. При $a \leqslant b$ мы, обобщая понятие одномерного интервала, полагаем

$$(a, b) = \prod_{j=1}^{m} (a_j, b_j) = \big\{x = (x_1, \dots, x_m) \,|\, a_j < x_j < b_j \ \text{ при всех } j = 1, \dots, m\big\}.$$

Таким образом, при $a < b$ можно сказать, что $(a, b) = P(a; v_1, \dots, v_m)$, где $v_j = (b_j - a_j) e_j$ для $j = 1, \dots, m$. Очевидно, длины рёбер этого параллелепипеда равны $b_1 - a_1, \dots, b_m - a_m$.

Соответствующий замкнутый параллелепипед, который есть не что иное, как $\prod\limits_{j=1}^{m} [a_j, b_j]$, мы будем по аналогии с одномерным случаем обозначать $[a, b]$. К сожалению, ни открытые, ни замкнутые параллелепипеды не образуют полуколец. Поэтому в дальнейшем особый интерес для нас представляют параллелепипеды $[a, b)$ иного вида, которые будем называть *ячейками* (размерности m). По определению

$$[a, b) = \prod_{j=1}^{m} [a_j, b_j) = \{x = (x_1, \dots, x_m) \,|\, a_j \leqslant x_j < b_j \ \text{ при всех } \ j = 1, \dots, m\}.$$

Если $a_j = b_j$ хотя бы при одном j, то множества (a, b) и $[a, b)$ пусты. Таким образом, (a, b), $[a, b) \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда $a < b$. Заметим ещё, что декартово произведение ячеек размерностей m и l снова есть ячейка (размерности $m + l$).

Предложение. *Всякая непустая ячейка есть пересечение убывающей последовательности открытых параллелепипедов и объединение возрастающей последовательности замкнутых параллелепипедов.*

Доказательство. Непустую ячейку $[a, b)$ можно представить в виде $[a, a + h)$, где $h = b - a$ — вектор с положительными координатами. Рассмотрим параллелепипеды $I_k = (a - \frac{1}{k} h, b)$ и $S_k = [a, b - \frac{1}{k} h]$. Тогда $[a, b) = \bigcup\limits_{k \geqslant 1} S_k = \bigcap\limits_{k \geqslant 1} I_k$. Детали мы оставляем читателю. ►

Как вытекает из предложения, всякая ячейка одновременно является и множеством типа G_δ, и множеством типа F_σ. В частности, каждая ячейка есть борелевское множество.

Ячейка, у которой все длины рёбер одинаковы, называется кубической ячейкой. Если все координаты вершин ячейки рациональны, то мы будем называть её ячейкой с рациональными вершинами. Отметим простое, но важное обстоятельство: всякая ячейка с рациональными вершинами есть дизъюнктное объединение конечного числа кубических ячеек.

Действительно, так как координаты вершин ячейки можно представить в виде дробей с общим знаменателем n, то её можно разбить на кубы с длиной рёбер $\frac{1}{n}$.

Систему всевозможных m-мерных ячеек будем обозначать символом $\mathscr{P}^m$, а её часть, состоящую из ячеек с рациональными вершинами, символом $\mathscr{P}^m_r$.

Теорема. *Системы $\mathscr{P}^m$ и $\mathscr{P}^m_r$ суть полукольца.*

Доказательство проведём с помощью индукции по размерности. В одномерном случае утверждение очевидно (см. пример 1.4). Индукционный переход основывается на теореме 1.5 и на том обстоятельстве, что по определению ячеек $\mathscr{P}^m = \mathscr{P}^{m-1} \odot \mathscr{P}^1$ и $\mathscr{P}^m_r = \mathscr{P}^{m-1}_r \odot \mathscr{P}^1_r$. ►

Замечание. В некоторых случаях (см. доказательство теоремы X.5.5) нам будет нужно вместо полукольца $\mathscr{P}^m_r$ рассматривать систему $\mathscr{P}^m_E$, состоящую из всевозможных ячеек, у которых координаты вершин принадлежат фиксированному множеству $E \subset \mathbb{R}$. Как легко убедиться, эта система также является полукольцом.

1.7. Теорема. *Всякое непустое открытое подмножество G пространства $\mathbb{R}^m$ есть объединение счётного семейства попарно не пересекающихся ячеек, содержащихся в G вместе с замыканием. Можно считать, что все эти ячейки имеют рациональные вершины.*

Доказательство. Для каждой точки $x \in G$ найдём такую ячейку $R_x \in \mathscr{P}^m_r$, что $x \in R_x$, $\overline{R_x} \subset G$. Очевидно, $G = \bigcup\limits_{x \in G} R_x$. Поскольку полукольцо $\mathscr{P}^m_r$ счётно, среди ячеек R_x имеется лишь счётное множество различных. Нумеруя эти ячейки, мы получим последовательность ячеек P_k $(k \in \mathbb{N})$ со свойствами:

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} P_k = G, \quad \overline{P_k} \subset G \ \text{ при всех } \ k \in \mathbb{N}.$$

Чтобы получить представление G с помощью дизъюнктных ячеек с рациональными вершинами, остаётся воспользоваться представлением (4) теоремы 1.4 о свойствах полукольца. ►

Следствие. $\mathfrak{B}(\mathscr{P}^m) = \mathfrak{B}(\mathscr{P}^m_r) = \mathfrak{B}^m$.

Доказательство. Включения $\mathfrak{B}(\mathscr{P}^m_r) \subset \mathfrak{B}(\mathscr{P}^m) \subset \mathfrak{B}^m$ очевидны. Обратное включение $\mathfrak{B}^m \subset \mathfrak{B}(\mathscr{P}^m_r)$ верно по определению $\mathfrak{B}^m$, так как по доказанной выше теореме σ-алгебра $\mathfrak{B}(\mathscr{P}^m_r)$ содержит все открытые множества. ►

Замечание. Доказательство теоремы остаётся справедливым и для любого полукольца $\mathscr{P}^m_E$ при условии, что множество E всюду плотно. Вместе с теоремой остаётся справедливым и следствие.

УПРАЖНЕНИЯ

1) Докажите, что системы всех (одномерных) открытых промежутков и всех замкнутых промежутков не являются полукольцами.

2) Проверьте, что дуги окружности (в том числе вырожденные), угловой размер которых меньше π, образуют полукольцо, а без этого дополнительного ограничения утверждение неверно.

3) Какова борелевская оболочка системы всевозможных полупрямых вида $(-\infty, a)$, где $a \in \mathbb{R}$? Изменится ли ответ на этот вопрос, если рассматриваются только рациональные a? Если рассматриваются не открытые, а замкнутые полупрямые?

4) Симметрической разностью $A\Delta B$ множеств A, B называется множество $A\Delta B = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)$. Докажите, что $A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$. Приведите пример симметричной системы множеств, которая вместе с любыми двумя входящими в неё множествами содержит их симметрическую разность, но не является алгеброй. Указание. Считая, что $X = \{a, b, c, d\}$, рассмотрите систему всевозможных подмножеств, состоящих из чётного числа точек.

5) Пусть $\mathfrak{A}$ — алгебра всевозможных подмножеств двухточечного множества. Убедитесь, что полукольцо $\mathfrak{A} \odot \mathfrak{A}$ не содержит дополнений одноточечных множеств и, следовательно, не является алгеброй.

6) Докажите, что минимальная алгебра, содержащая n множеств, состоит не более чем из 2^{2^n} множеств. Убедитесь, что эта оценка точная.

7) Докажите, что всевозможные подмножества пространства $\mathbb{R}^m$, которые одновременно являются множествами типа G_δ и типа F_σ, образуют алгебру, содержащую все открытые множества. Убедитесь, что это не σ-алгебра (например, она не содержит $\mathbb{Q}^m$).

8) Уточните теорему 1.7, доказав, что можно ограничиться кубическими ячейками, удовлетворяющими дополнительному условию — диаметр каждой из них существенно меньше расстояния до границы множества:

$$\operatorname{diam}(P) \leqslant C \ \min\bigl\{\|x-y\| \mid x \in P,\, y \in \partial G\bigr\}$$

($C > 0$ — сколь угодно малый наперёд заданный коэффициент).

9) Пусть $P_1, \dots, P_n$ — элементы полукольца. Докажите, что все элементы канонического разбиения, соответствующего этому набору множеств, кроме, возможно, множества $\bigcap\limits_{k=1}^{n} P_k^c$, представимы в виде дизъюнктного объединения множеств, входящих в полукольцо. Выведите отсюда результат, полученный в замечании п. 1.4.

10) Симметричная система множеств называется D-системой, если она содержит объединения не более чем счётных семейств входящих в неё попарно дизъюнктных множеств. Пусть D-система $\mathcal{E}$ содержит множества A, B. Докажите, что

а) если $A \subset B$, то $B \setminus A \in \mathcal{E}$;

б) каждое из включений $A \cap B \in \mathcal{E}$, $A \cup B \in \mathcal{E}$, $A \setminus B \in \mathcal{E}$ влечёт остальные.

11) Пусть D-система содержит всевозможные конечные пересечения множеств $A_1, \dots, A_n$. Докажите, что тогда она содержит и минимальную алгебру, порождённую этими множествами.

12) Система непустых подмножеств множества X называется фильтром (в X), если вместе с каждыми двумя множествами она содержит их пересечение. Например, фильтром является система всех окрестностей данной точки. Фильтр называется

ультрафильтром, если всякий фильтр, его содержащий, с ним совпадает. Примером ультрафильтра может быть система всех множеств, содержащих данную точку (тривиальный ультрафильтр).

Докажите, что фильтр в X является ультрафильтром тогда и только тогда, когда для каждого множества $A \subset X$ справедлива альтернатива: либо A, либо $X \setminus A$ входит в фильтр. Опираясь на лемму Цорна, докажите существование ультрафильтра, содержащего данный фильтр.

§ 2. Объём

В этом параграфе мы приступаем к изучению вопросов, которым главным образом посвящена эта глава. Речь идёт о свойствах так называемых аддитивных функций множества. Утверждение, что та или иная величина аддитивна означает, что её значение, связанное с целым объектом, равно сумме значений, соответствующих его частям, при "любом" разбиении объекта на части. Многочисленные примеры аддитивных величин, встречающихся в математике, и их прообразы в механике и физике хорошо известны. К ним относятся, в частности, длина, площадь, вероятность, масса, статический момент относительно фиксированной оси, количество электричества и др. В этой главе мы ограничимся изучением аддитивных величин с неотрицательными числовыми (возможно бесконечными) значениями. К изучению свойств аддитивных величин произвольного знака мы вернёмся в главе XI. Перейдём к более точным формулировкам.

2.1. Пусть X — произвольное множество, $\mathcal{E}$ — некоторая система его подмножеств.

Определение. Заданная на системе $\mathcal{E}$ функция $\varphi\colon \mathcal{E} \to (-\infty, +\infty]$ называется *аддитивной*, если

$$\varphi(A \vee B) = \varphi(A) + \varphi(B) \ \text{ при условии, что } \ A,\ B \in \mathcal{E} \ \text{ и } \ A \vee B \in \mathcal{E}. \tag{1}$$

Функция φ называется *конечно-аддитивной,* если для любого множества A из $\mathcal{E}$ и любого его конечного разбиения на множества $A_1, \dots, A_n$ из $\mathcal{E}$ справедливо равенство

$$\varphi(A) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(A_k). \tag{1'}$$

Суммы в правых частях равенств (1) и (1′) всегда имеют смысл, так как входящие в них слагаемые не могут принимать бесконечные значения противоположных знаков (по определению $\varphi > -\infty$).

Замечание. Если функция φ задана на алгебре (или кольце) $\mathfrak{A}$, то из её аддитивности вытекает и конечная аддитивность. Это можно доказать с помощью равенства (1) по индукции.

2.2. Определение. Конечно аддитивная функция μ, заданная на полукольце подмножеств множества X, называется *объёмом* (в X), если она неотрицательна и $\mu(\varnothing) = 0$.

Согласно определению аддитивной функции объём может принимать и бесконечные значения. Он называется *конечным,* если X входит в полукольцо и $\mu(X) < +\infty$.

Объём называется *σ-конечным*, если X представимо в виде объединения последовательности множеств, объёмы которых конечны.

Примеры. 1) Длина промежутка на полукольце $\mathscr{P}^1$ есть объём.

Мы предоставляем читателю убедиться в этом самостоятельно.

2) Наряду с длиной важнейшим примером объёма является её обобщение — *классический объём* λ_m, который определяется на полукольце m-мерных ячеек $\mathscr{P}^m$ следующим образом:

$$\text{если} \quad P = \prod_{k=1}^{m} [a_k, b_k), \quad \text{то} \quad \lambda_m(P) = \prod_{k=1}^{m} (b_k - a_k).$$

Очевидно, что при $m = 1$ классический объём совпадает с длиной промежутка, при $m = 2$ — с площадью прямоугольника, а при $m = 3$ с обычным объёмом параллелепипеда. Аддитивность классического объёма будет доказана в следствии 2.4.

3) Пусть g — неубывающая функция, заданная на $\mathbb{R}$. Определим на полукольце $\mathscr{P}^1$ функцию промежутка ν_g следующим образом: $\nu_g\big([a, b)\big) = g(b) - g(a)$. Функция ν_g есть объём, что мы предоставляем проверить читателю.

4) Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная алгебра подмножеств множества X, $x_0 \in X$, $a \in \in [0, +\infty]$. Для $A \in \mathfrak{A}$ положим

$$\mu(A) = \begin{cases} a, & \text{если} \quad x_0 \in A, \\ 0, & \text{если} \quad x_0 \notin A. \end{cases}$$

Как легко убедиться, μ есть объём. Мы будем говорить, что он порождается нагрузкой a в точке x_0.

Вообще, если объём одноточечного множества $\{x_0\}$ равен $a > 0$, то мы будем говорить, что в точке x_0 он имеет нагрузку a.

Чтобы получить обобщение последнего примера, используем понятие суммы числового семейства. Семейство неотрицательных чисел будем для краткости называть положительным. Напомним, что символ $\operatorname{card}(E)$ обозначает мощность множества E.

Определение. Суммой положительного семейства $\{\omega_x\}_{x \in X}$ называется величина

$$\sup \left\{ \sum_{x \in E} \omega_x \,\middle|\, E \subset X, \ \operatorname{card}(E) < +\infty \right\},$$

которая обозначается символом $\sum\limits_{x \in X} \omega_x$.

Семейство $\{\omega_x\}_{x \in X}$ чисел произвольного знака называется *суммируемым,* если $\sum\limits_{x \in X} |\omega_x| < +\infty$. В этом случае *суммой* этого семейства называется величина

$$\sum_{x \in X} \omega_x = \sum_{x \in X} \omega_x^+ - \sum_{x \in X} \omega_x^-, \quad \text{где} \quad \omega_x^{\pm} = \max\{\pm\omega_x, 0\}.$$

Для суммируемого семейства множество $\{x \in X \,|\, \omega_x \neq 0\}$ не более чем счётно. В самом деле, оно исчерпывается множествами $X_n = \{x \in X \,|\, |\omega_x| \geqslant \frac{1}{n}\}$ $(n \in \mathbb{N})$, каждое из которых конечно, так как

$$\operatorname{card}(X_n) \leqslant n \sum_{x \in X_n} |\omega_x| \leqslant n \sum_{x \in X} |\omega_x| < +\infty.$$

Поскольку, очевидно, для любого положительного семейства

$$\sum_{x\in X}\omega_x = \sum_{\{x\in X\,|\,\omega_x>0\}}\omega_x,$$

полученный результат позволяет свести вычисление суммы произвольного суммируемого семейства к сумме семейства со счётным множеством индексов. Последняя же может быть сведена к вычислению суммы ряда.

Если множество X счётно, то биекцию $\varphi\colon \mathbb{N}\to X$ мы будем называть нумерацией X и обозначать символом $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$, где $x_n=\varphi(n)$.

Лемма. *Пусть $\{\omega_x\}_{x\in X}$ — произвольное положительное семейство. Если множество X счётно, то для его произвольной нумерации $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ справедливо равенство*

$$\sum_{x\in X}\omega_x = \sum_{n=1}^{\infty}\omega_{x_n}.$$

Доказательство. Обозначим S_1 и S_2 левую и правую части доказываемого равенства. С одной стороны, для любого конечного множества $E\subset X$ справедливо неравенство $\sum\limits_{x\in E}\omega_x \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty}\omega_{x_n}$ (ведь при каждом $x\in E$ число ω_x является членом ряда). Поэтому $S_1\leqslant S_2$.

С другой стороны, при любом k неравенство $\sum\limits_{n=1}^{k}\omega_{x_n}\leqslant S_1$ справедливо по определению суммы семейства, и поэтому $S_2\leqslant S_1$. С учётом того, что $S_1\leqslant S_2$, это завершает доказательство. ►

Мы предоставляем читателю убедиться, что доказанное равенство справедливо для суммы любого суммируемого семейства со счётным множеством индексов.

Рассмотрим теперь следующий пример.

5) Пусть $\{\omega_x\}_{x\in X}$ — произвольное положительное семейство. Считая, что $\mathfrak{A}$ — алгебра подмножеств множества X, содержащая все одноточечные множества, определим на $\mathfrak{A}$ функцию μ следующим образом:

$$\mu(A)=\sum_{x\in A}\omega_x \qquad (A\in\mathfrak{A})$$

(по определению мы считаем, что $\sum\limits_{x\in\varnothing}\omega_x=0$). Отметим, что так как $\mu(E)=\omega_{x_1}+\ldots+\omega_{x_N}$ для всякого конечного множества $E=\{x_1,\ldots,x_N\}$, то

$$\mu(A)=\sup\{\mu(E)\,|\,E\subset A,\ \operatorname{card}(E)<+\infty\}.$$

В аддитивности μ читатель легко убедится самостоятельно.

6) Пример объёма, заданного на алгебре ограниченных множеств и их дополнений (см. п. 1.2, пример 1), можно получить следующим образом. Для $a > 0$ положим

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & \text{если множество } A \text{ ограничено,} \\ a, & \text{если множество } A \text{ неограничено.} \end{cases}$$

Этот объём будет полезен нам в дальнейшем при построении контрпримеров.

2.3. Теорема. *Пусть μ — объём на полукольце $\mathscr{P}$, и пусть $P, P', P_1, \ldots, P_n \in \mathscr{P}$. Тогда*

1) если $P' \subset P$, то $\mu(P') \leqslant \mu(P)$;

2) если $\bigvee\limits_{k=1}^{n} P_k \subset P$, то $\sum\limits_{k=1}^{n} \mu(P_k) \leqslant \mu(P)$;

3) если $P \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k$, то $\mu(P) \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(P_k)$.

Свойства 1) и 2) называются *монотонностью* и *усиленной монотонностью объёма*; свойство 3) называется *полуаддитивностью объёма.*

Доказательство. Очевидно, что монотонность объёма следует из усиленной монотонности, которую мы и докажем.

По теореме о свойствах полукольца разность $P \setminus \bigvee\limits_{k=1}^{n} P_k$ представима в виде $P \setminus \bigvee\limits_{k=1}^{n} P_k = \bigvee\limits_{j=1}^{m} Q_j$, где $Q_j \in \mathscr{P}$. Следовательно, $P = \Big(\bigvee\limits_{k=1}^{n} P_k\Big) \vee \Big(\bigvee\limits_{j=1}^{m} Q_j\Big)$, и в силу аддитивности объёма

$$\mu(P) = \sum_{k=1}^{n} \mu(P_k) + \sum_{j=1}^{m} \mu(Q_j) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mu(P_k).$$

Для доказательства полуаддитивности объёма положим $P'_k = P \cap P_k$. Тогда $P = \bigcup\limits_{k=1}^{n} P'_k$, $P'_k \in \mathscr{P}$. По теореме о свойствах полукольца мы получаем, что

$$P = \bigvee_{k=1}^{n} \bigvee_{j=1}^{m_k} Q_{kj},$$

где $Q_{kj} \in \mathscr{P}$ и $Q_{kj} \subset P'_k \subset P_k$ при $1 \leqslant k \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant m_k$. Из усиленной монотонности объёма вытекает, что $\sum\limits_{j=1}^{m_k} \mu(Q_{kj}) \leqslant \mu(P_k)$. Следовательно,

$$\mu(P) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_k} \mu(Q_{kj}) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mu(P_k). \quad \blacktriangleright$$

Отметим, что если объём задан на алгебре (или на кольце) $\mathfrak{A}$, то $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$ при условии, что A, $B \in \mathfrak{A}$, $B \subset A$ и $\mu(B) < +\infty$. Действительно, так как $A \setminus B \in \mathfrak{A}$, то $\mu(A) = \mu(B) + \mu(A \setminus B)$.

Замечание. Объём μ, определённый на полукольце $\mathscr{P}$, единственным образом продолжается на кольцо $\mathcal{R}$, состоящее из конечных объединений множеств, входящих

в $\mathscr{P}$. В самом деле, пусть $E = \bigcup\limits_{k=1}^{n} P_k$, где $P_k \in \mathscr{P}$. Не умаляя общности, мы можем считать множества P_k попарно не пересекающимися (см. теорему 1.4). Положим $\widetilde{\mu}(E) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(P_k)$. Мы предоставляем читателю доказать, что это определение корректно и что $\widetilde{\mu}$ есть объём, совпадающий с μ на $\mathscr{P}$.

2.4. Убедимся теперь, что классический объём действительно является объёмом в смысле нашего определения. Поскольку $\mathscr{P}^m = \mathscr{P}^1 \odot \mathscr{P}^{m-1}$, этот факт вытекает из следующей общей теоремы, в которой мы пользуемся понятием произведения произвольных полуколец (см. п. 1.5).

Теорема. *Пусть X, Y — непустые множества, а $\mathscr{P}$, $\mathcal{Q}$ — полукольца их подмножеств, на которых заданы объёмы μ и ν соответственно. Определим на полукольце $\mathscr{P} \odot \mathcal{Q}$ функцию λ равенством*

$$\lambda(P \times Q) = \mu(P) \cdot \nu(Q) \quad \text{для любых } P \in \mathscr{P},\ Q \in \mathcal{Q}$$

(*произведения $0 \cdot (+\infty)$ и $(+\infty) \cdot 0$ считаем равными нулю*).

Тогда λ — объём на $\mathscr{P} \odot \mathcal{Q}$.

Объём λ называется *произведением объёмов* μ и ν.

Доказательство. Нужно проверить лишь конечную аддитивность функции λ. Сначала рассмотрим разбиение множества $P \times Q$ специального вида. Пусть множества P и Q разбиты на части:

$$P = P_1 \vee \ldots \vee P_I, \qquad Q = Q_1 \vee \ldots \vee Q_J \qquad (P_i \in \mathscr{P},\ Q_j \in \mathcal{Q}).$$

Тогда множества $P_i \times Q_j$ $(1 \leqslant i \leqslant I,\ 1 \leqslant j \leqslant J)$ принадлежат полукольцу $\mathscr{P} \odot \mathcal{Q}$ и образуют разбиение множества $P \times Q$, которое мы будем называть сеточным разбиением. Для него требуемое равенство очевидно:

$$\lambda(P \times Q) = \mu(P)\nu(Q) = \sum_{i=1}^{I} \mu(P_i) \sum_{j=1}^{J} \nu(Q_j) = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant I \\ 1 \leqslant j \leqslant J}} \lambda\big(P_i \times Q_j\big).$$

Рассмотрим теперь произвольное разбиение множества $P \times Q$ элементами полукольца $\mathscr{P} \odot \mathcal{Q}$:

$$P \times Q = (P_1 \times Q_1) \vee \ldots \vee (P_N \times Q_N) \quad (P_n \in \mathscr{P}, Q_n \in \mathcal{Q}).$$

Вообще говоря, оно не является сеточным, но мы измельчим его, чтобы свести дело к такому разбиению. Ясно, что $P = P_1 \cup \ldots \cup P_N$ и $Q = Q_1 \cup \ldots \cup Q_N$, причём множества $P_1, \ldots, P_N$ и соответственно $Q_1, \ldots, Q_n$ могут не быть дизъюнктными. Однако, как мы отмечали в § 1 (см. замечание п. 1.4), существуют такие разбиения

$$P = A_1 \vee \ldots \vee A_I \quad (A_i \in \mathscr{P}) \quad \text{и} \quad Q = B_1 \vee \ldots \vee B_J \quad (B_j \in \mathcal{Q}),$$

что

$$\text{для всех } i,n \quad \text{либо } A_i \subset P_n, \quad \text{либо } A_i \cap P_n = \varnothing;$$
$$\text{для всех } j,n \quad \text{либо } B_j \subset Q_n, \quad \text{либо } B_j \cap Q_n = \varnothing.$$

Так как множества $A_i \times B_j$ образуют сеточное разбиение произведения $P \times Q$, то

$$\lambda(P \times Q) = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant I \\ 1 \leqslant j \leqslant J}} \lambda(A_i \times B_j). \tag{2}$$

Вместе с тем ясно, что для любого n семейства $\{A_i \mid A_i \subset P_n\}$ и $\{B_j \mid B_j \subset Q_n\}$ — разбиения множеств P_n и Q_n соответственно. Поэтому $\{A_i \times B_j \mid A_i \subset P_n,\, B_j \subset Q_n\}$ — сеточное разбиение произведения $P_n \times Q_n$. Следовательно,

$$\lambda(P_n \times Q_n) = \sum_{\substack{i:\ A_i \subset P_n \\ j:\ B_j \subset Q_n}} \lambda(A_i \times B_j).$$

Перегруппировав слагаемые в правой части (2), мы получим отсюда требуемое равенство:

$$\lambda(P \times Q) = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant I \\ 1 \leqslant j \leqslant J}} \lambda(A_i \times B_j) = \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} \sum_{\substack{i:\ A_i \subset P_n \\ j:\ B_j \subset Q_n}} \lambda(A_i \times B_j) = \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} \lambda(P_n \times Q_n). \quad \blacktriangleright$$

Следствие. *Классический объём λ_m является объёмом в смысле определения 2.2.*

Доказательство основано на индукции по размерности. Одномерный случай мы предоставляем разобрать читателю самостоятельно. После этого аддитивность λ_m непосредственно вытекает из теоремы, поскольку $\mathscr{P}^m = \mathscr{P}^1 \odot \mathscr{P}^{m-1}$, а λ_m есть произведение объёмов λ_1 и λ_{m-1}. $\blacktriangleright$

УПРАЖНЕНИЯ

В задачах 1–3 μ — конечный объём, определённый на алгебре $\mathfrak{A}$ подмножеств множества X.

1) Докажите, что для любых множеств из $\mathfrak{A}$ справедливы равенства

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B);$$
$$\mu(A \cup B \cup C) = \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) - \mu(A \cap B) - \mu(B \cap C) - \mu(A \cap C) + \mu(A \cap B \cap C).$$

Обобщите эти равенства на случай четырёх и более множеств.

2) Пусть $\mu(X) = 1$ и пусть $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{A}$. Докажите, что если $\sum\limits_{k=1}^{n} \mu(A_k) > n - 1$, то $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k \neq \varnothing$.

3) Докажите, что всякое разбиение множества X на подмножества положительного объёма не более чем счётно.

§ 3. Свойства меры

В определении объёма центральным является свойство конечной аддитивности, т. е. утверждение “объём целого есть сумма объёмов частей” при условии, что этих “частей” конечное число. Как мы увидим ниже, это правило может нарушаться, если “части” образуют бесконечную последовательность. Конечно, бесконечные разбиения возникают только как идеализация реальных ситуаций, и поэтому затруднительно представить какое-либо естественно-научное обоснование необходимости рассматривать объёмы с таким усиленным свойством аддитивности, которое называют счётной аддитивностью.

Вместе с тем, нарушение правила “объём целого есть сумма объёмов частей”, когда частей счётное множество, интуитивно представляется чем-то достаточно неестественным, если, например, иметь в виду длину или площадь. Именно наличие счётной аддитивности позволяет развить глубокую теорию, смыкающуюся с теорией интегрирования. Этот и следующий параграфы посвящены теории счётно-аддитивных объёмов, которую принято называть теорией меры. Она имеет многочисленные важные приложения. В связи с ними в первую очередь следует указать на то, что теория меры лежит в основе современного обоснования теории вероятностей. Перейдём к точным определениям.

3.1. Определение. Объём μ, заданный на полукольце $\mathscr{P}$, называется *счётно-аддитивным*, если для любого множества P из $\mathscr{P}$ и любого его разбиения $\{P_k\}_{k=1}^{\infty}$, состоящего из входящих в $\mathscr{P}$ множеств, справедливо равенство

$$\mu(P) = \sum_{k\geqslant 1} \mu(P_k).$$

Счётно-аддитивный объём называется *мерой*.

Используя понятие суммы семейства и лемму 2.2, определение счётной аддитивности можно сформулировать в эквивалентном, но формально более общем виде: объём μ, заданный на полукольце $\mathscr{P}$, счётно аддитивен, если для любого множества P из $\mathscr{P}$ и любого его счётного разбиения $\{P_\omega\}_{\omega\in\Omega}$, состоящего из входящих в $\mathscr{P}$ множеств, справедливо равенство

$$\mu(P) = \sum_{\omega\in\Omega} \mu(P_\omega).$$

Счётная аддитивность не следует из конечной аддитивности, и поэтому не всякий объём есть мера. В частности, объём из примера 6 п. 2.2 не является мерой, в чём читатель легко убедится самостоятельно.

Примеры. 1) Классический объём есть мера (см. теорему II.1.1).

2) Рассмотрим объём $\nu_g\big([a,b)\big) = g(b) - g(a)$, определённый в примере 3 п. 2.2. Его счётная аддитивность означает, в частности, что если $[b_0, b) = \bigvee\limits_{n=0}^{\infty} [b_n, b_{n+1})$, где $b_n \to b$, $b_n < b_{n+1}$, то $\nu_g\big([b_0,b)\big) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \nu_g([b_n, b_{n+1}))$. Так как $\nu\big([b_n, b_{n+1})\big) = g(b_{n+1}) - g(b_n)$, то это равносильно тому, что $g(b_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(b)$.

Таким образом, для счётной аддитивности ν_g необходимо, чтобы функция g была непрерывна слева.

Меру с помощью произвольной возрастающей функции g можно получить, положив $\mu_g\big([a,b)\big) = g(b-0) - g(a-0)$, где $g(a-0)$, $g(b-0)$ — пределы g в точках a и b слева. Мы докажем счётную аддитивность μ_g в теореме IV.10.2. Из неё, в частности, вытекает, что непрерывность слева функции g не только необходимое, но и достаточное условие того, что объём ν_g есть мера.

3) Объём, порождённый положительной нагрузкой в некоторой точке (см. пример 4 п. 2.2), есть мера.

4) Пусть X — произвольное множество, $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра его подмножеств, содержащая все одноточечные множества. Определим на $\mathfrak{A}$ функцию μ следующим образом:

$$\mu(A) = \begin{cases} \text{число точек множества } A, & \text{если множество } A \text{ конечно;} \\ +\infty, & \text{если множество } A \text{ бесконечно.} \end{cases}$$

Мы предоставляем читателю убедиться, что так определенная функция μ действительно является мерой. Она называется *считающей мерой*.

5) Убедимся, что объём μ, построенный в примере 5) п. 2.2, счётно аддитивен, т. е. что μ — мера.

Действительно, пусть $A = \bigvee\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, где A, $A_k \in \mathfrak{A}$. Ясно, что при любом $n \in \mathbb{N}$

$$\mu(A) \geqslant \mu\Big(\bigvee_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k),$$

и поэтому $\mu(A) \geqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$. С другой стороны, если E — произвольное конечное подмножество A, то при некотором n справедливо включение $E \subset \bigvee\limits_{k=1}^{n} A_k$. Следовательно,

$$\mu(E) \leqslant \mu\Big(\bigvee_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Отсюда вытекает, что

$$\mu(A) = \sup\{\mu(E) \,|\, E \subset A,\ \operatorname{card}(E) < +\infty\} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Вместе с полученным ранее обратным неравенством это доказывает счётную аддитивность μ.

Будем говорить, что μ есть *дискретная мера*, порождённая нагрузками ω_x. Если $\omega_x \equiv 1$, то очевидно, μ — считающая мера.

3.2. Установим несколько важных свойств, характеризующих меры.

Теорема. *Определённый на полукольце $\mathscr{P}$ объём μ есть мера тогда и только тогда, когда он счётно полуаддитивен, т. е. когда*

$$\text{из условий } P \subset \bigcup_{k\geqslant 1} P_k,\ P, P_k \in \mathscr{P}, \quad \text{следует, что } \mu(P) \leqslant \sum_{k\geqslant 1} \mu(P_k). \tag{1}$$

Доказательство*). Пусть объём μ счётно аддитивен. Заменяя множества P_k в условии (1) множествами $P'_k = P \cap P_k$, мы получаем, что

$$P = \bigcup_{k \geqslant 1} P'_k, \quad P'_k \in \mathscr{P} \ \ (k \in \mathbb{N}).$$

По теореме 1.4 P представимо в виде

$$P = \bigvee_{k \geqslant 1} \bigvee_{j=1}^{n_k} Q_{kj} \qquad (Q_{kj} \in \mathscr{P}).$$

Кроме того, $\bigvee\limits_{j=1}^{n_k} Q_{kj} \subset P'_k$. Поэтому ввиду усиленной монотонности объёма $\sum\limits_{j=1}^{n_k} \mu(Q_{kj}) \leqslant \mu(P'_k) \leqslant \mu(P_k)$. Пользуясь счётной аддитивностью, мы получаем

$$\mu(P) = \sum_{k \geqslant 1} \sum_{j=1}^{n_k} \mu(Q_{kj}) \leqslant \sum_{k \geqslant 1} \mu(P_k),$$

что и требовалось.

Докажем теперь, что счётная полуаддитивность влечёт счётную аддитивность объёма. Пусть $\{P_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathscr{P}$ — разбиение множества P из $\mathscr{P}$. В силу счётной полуаддитивности мы имеем

$$\mu(P) \leqslant \sum_{k \geqslant 1} \mu(P_k). \tag{2}$$

С другой стороны, из усиленной монотонности объёма вытекает, что $\mu(P) \geqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(P_k)$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, мы видим, что $\mu(P) \geqslant \sum\limits_{k \geqslant 1} \mu(P_k)$. Вместе с (2) это доказывает счётную аддитивность. ►

Из доказанной теоремы вытекает утверждение, которым мы будем часто пользоваться в дальнейшем.

Следствие. *Пусть мера μ определена на σ-алгебре $\mathfrak{A}$. Тогда счётное объединение множеств нулевой меры снова имеет меру нуль.*

Действительно, если множества e_n из $\mathfrak{A}$ имеют нулевые меры, то их объединение также принадлежит $\mathfrak{A}$ и $\mu\Big(\bigcup\limits_{n \geqslant 1} e_n\Big) \leqslant \sum\limits_{n \geqslant 1} \mu(e_n) = 0$. ►

3.3. Теорема. *Определённый на алгебре $\mathfrak{A}$ объём μ есть мера тогда и только тогда, когда он непрерывен снизу, т. е. когда*

$$\text{из условий } A, A_k \in \mathfrak{A},\ A_k \subset A_{k+1},\ A = \bigcup_{k \geqslant 1} A_k, \text{ следует, что } \mu(A_k) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \mu(A). \tag{3}$$

*) Полезно сравнить это рассуждение с доказательством теоремы 2.3.

Замечание. Если алгебра $\mathfrak{A}$ в теореме есть σ-алгебра, то предположение $A \in \mathfrak{A}$ в условии непрерывности снизу может быть опущено, так как оно вытекает из равенства $A = \bigcup\limits_{k \geqslant 1} A_k$.

Доказательство теоремы. Пусть объём μ счётно аддитивен и множества A, A_k удовлетворяют условиям (3). Положив $B_1 = A_1$, $B_k = A_k \setminus A_{k-1}$ при $k > 1$, мы получим, что $B_k \in \mathfrak{A}$, $B_k \cap B_j = \varnothing$ при $k \neq j$ $(j, k \in \mathbb{N})$ и

$$A_k = \bigvee_{j=1}^{k} B_j, \ A = \bigvee_{j \geqslant 1} B_j.$$

Следовательно, $\mu(A_k) = \sum\limits_{j=1}^{k} \mu(B_j)$ и

$$\mu(A) = \sum_{j \geqslant 1} \mu(B_j) = \lim_{k \to \infty} \sum_{j=1}^{k} \mu(B_j) = \lim_{k \to \infty} \mu(A_k).$$

Докажем теперь, что непрерывность снизу влечёт счётную аддитивность объёма. Пусть $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{A}$ — разбиение множества A из $\mathfrak{A}$. Положим $A_k = \bigvee\limits_{j=1}^{k} E_j$. Тогда

$$A_k \in \mathfrak{A}, \quad A_k \subset A_{k+1}, \quad A = \bigcup_{k \geqslant 1} A_k$$

и $\mu(A_k) = \sum\limits_{j=1}^{k} \mu(E_j)$. Пользуясь непрерывностью объёма μ снизу, мы получаем

$$\mu(A) = \lim_{k \to \infty} \mu(A_k) = \lim_{k \to \infty} \sum_{j=1}^{k} \mu(E_j) = \sum_{j \geqslant 1} \mu(E_j). \ \blacktriangleright$$

3.4. Напомним, что объём μ, заданный на полукольце $\mathscr{P}$ подмножеств множества X, называется конечным, если $X \in \mathscr{P}$ и $\mu(X) < +\infty$ (см. определение 2.2).

Теорема. *Пусть μ — конечный объём, определённый на алгебре $\mathfrak{A}$. Следующие утверждения равносильны:*

1) объём μ есть мера;

2) объём μ непрерывен сверху, т. е. из условий

$$A, \ A_k \in \mathfrak{A}, \quad A_k \supset A_{k+1}, \quad \bigcap_{k \geqslant 1} A_k = A \tag{4}$$

следует, что $\mu(A_k) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} \mu(A)$;

3) объём μ непрерывен сверху на пустом множестве, т. е. из условий

$$A_k \in \mathfrak{A}, \quad A_k \supset A_{k+1}, \quad \bigcap_{k \geqslant 1} A_k = \varnothing \tag{4'}$$

следует, что $\mu(A_k) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть множества A_k удовлетворяют условию (4). Положим $B = A_1 \setminus A$, $B_k = A_1 \setminus A_k$. Тогда $B_k \subset B_{k+1}$, $B = \bigcup\limits_{k\geqslant 1} B_k$. По непрерывности меры снизу мы получаем, что

$$\mu(A_1) - \mu(A_k) = \mu(B_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mu(B) = \mu(A_1) - \mu(A),$$

т. е. $\mu(A_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mu(A)$.

Импликация 2) $\Rightarrow$ 3) тривиальна.

Докажем, что 3) $\Rightarrow$ 1). Пусть $\{E_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathfrak{A}$ — разбиение множества A из $\mathfrak{A}$. Положим $A_k = \bigvee\limits_{j=k+1}^{\infty} E_j$. Тогда $A_k \in \mathfrak{A}$, так как $A_k = A \setminus \bigvee\limits_{j=1}^{k} E_j$, и, очевидно, множества A_k удовлетворяют всем условиям (4′). Поэтому $\mu(A_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Кроме того, $A = A_k \vee \bigvee\limits_{j=1}^{k} E_j$. Таким образом, $\mu(A) = \mu(A_k) + \sum\limits_{j=1}^{k} \mu(E_j)$, $\mu(A_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, и, следовательно, $\mu(A) = \sum\limits_{j\geqslant 1} \mu(E_j)$, что и требовалось. ►

Следствие. *Всякая мера условно непрерывна сверху. Последнее означает, что из условий A, $A_k \in \mathfrak{A}$, $A_k \supset A_{k+1}$, $\bigcap\limits_{k\geqslant 1} A_k = A$, $\mu(A_m) < +\infty$ при некотором m, следует, что $\mu(A_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mu(A)$.*

Для доказательства достаточно рассмотреть сужение меры μ на индуцированную алгебру $\mathfrak{A} \cap A_m$ (см. пример 4 п. 1.2) и воспользоваться непрерывностью сверху получающейся конечной меры. ►

Замечание 1. Если объём бесконечен, то из условной непрерывности сверху не следует счётная аддитивность (см. упр. 1).

Замечание 2. Если объём задан на полукольце, то теоремы 3.3 и 3.4 верны лишь в части необходимости (см. упр. 2).

В дальнейшем мы, как правило, будем рассматривать меры, определённые на σ-алгебрах. Совокупность трёх объектов — множества X, σ-алгебры $\mathfrak{A}$ его подмножеств и меры μ, определённой на $\mathfrak{A}$, обозначается обычно символом $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ и называется *пространством с мерой.* Множества, для которых определена мера, т. е. множества, принадлежащие σ-алгебре $\mathfrak{A}$, называются *измеримыми* или, точнее, измеримыми относительно $\mathfrak{A}$.

УПРАЖНЕНИЯ

1) Докажите, что бесконечный объём из примера 6 п. 2.2 ($a = +\infty$) условно непрерывен сверху, но не является мерой.

2) Пусть $X = [0, 1) \cap \mathbb{Q}$ и пусть система $\mathscr{P}$ состоит из всевозможных множеств P вида $P \equiv [a, b) \cap \mathbb{Q}$, где $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 1$. Положим $\mu(P) = b - a$. Докажите, что $\mathscr{P}$ есть полукольцо, а μ — объём, который непрерывен сверху и снизу, но не является мерой.

3) Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой и пусть измеримые множества E_k таковы, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(E_k) < +\infty$. Рассмотрим множества

$$A_n = \{x \in X \mid x \in E_k \ \text{ в точности при } n \text{ значениях } \ k\},$$
$$B_n = \{x \in X \mid x \in E_k \ \text{ не менее чем при } n \text{ значениях } \ k\}.$$

Докажите, что множества A_n, B_n измеримы и что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

4) Используя считающую меру на $\mathbb{N}$, покажите, что непрерывность сверху на пустом множестве не вытекает из счётной аддитивности.

5) Докажите, что заданный на алгебре $\mathfrak{A}$ конечный объём μ счётно аддитивен, если он "непрерывен снизу на X", т. е. если из условий $A_k \subset A_{k+1}$, $\bigcup\limits_{k\geqslant 1} A_k = X$, $A_k \in \mathfrak{A}$, следует, что $\mu(A_k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \mu(X)$.

6) Докажите, что для σ-конечной меры всякое разбиение на множества положительной меры не более, чем счётно.

§ 4. Продолжение меры

4.1. Рассмотрев свойства, характеризующие меру, мы, однако, не можем сейчас предъявить ни одного нетривиального примера меры (кроме считающей), заданной на σ-алгебре.

Причина этого в том, что пока мы умеем определять меры лишь на "бедных" системах множеств, каковыми являются многие полукольца. На таких системах множеств нам удаётся, благодаря их обозримости, сравнительно просто определять объёмы (см. примеры 1–3 в п. 2.2). Задавать меру на более обширных системах множеств, например, на σ-алгебрах, мы, за исключением нескольких достаточно тривиальных случаев, пока не умеем. Такое положение вещей безусловно не может считаться удовлетворительным.

В самом деле, даже зная, что определённый на полукольце ячеек классический объём в m-мерном пространстве счётно аддитивен (это будет доказано в теореме II.1.1), мы, конечно, не можем считать задачу построения меры в $\mathbb{R}^m$ сколько-нибудь полно решённой. Ведь весьма сомнительна ценность меры в евклидовом пространстве, с помощью которой нельзя было бы "измерять" пирамиды, шары и тому подобные важнейшие тела, а мы пока находимся именно в таком положении. То обстоятельство, которое позволяло в рассмотренных случаях сравнительно просто определять на полукольцах объёмы — обозримость полуколец, малое разнообразие входящих в них множеств — оборачивается теперь своей отрицательной стороной, и нам необходимо научиться строить меры на более богатых системах множеств. Задача эта трудна, даже если мы ограничим себя σ-алгеброй борелевских подмножеств прямой и попытаемся приписать им длину (более формально говоря — попытаемся продолжить на эту σ-алгебру одномерный классический объём). Собственно, с решения Лебегом*) в 1902 году этой проблемы и началась теория меры. Вызванный потребностями различных разделов математики, этот результат стал важнейшим прорывом в теории интегрирования.

Продолжение длины (одномерного классического объёма) до меры, определённой на σ-алгебре подмножеств вещественной прямой, было осуществлено Лебегом на основе наглядных геометрических соображений. Оно распадается на несколько шагов.

*) Анри Леон **Лебег** (Lebesgue), 1875–1941, — французский математик.

Сначала он приписывает меру $m(G)$ открытым множествам $G \subset \mathbb{R}$ как сумму длин составляющих интервалов. Затем Лебег вводит величину, названную им внешней мерой, определяя её для произвольного множества $E \subset \mathbb{R}$ с помощью равенства

$$m_e(E) = \inf\{\, m(G) \,|\, G \supset E,\ G - \text{ открытое множество}\}.$$

Внутренней мерой $m_i(E)$ ограниченного множества E называется величина $m_i(E) = m(\Delta) - m_e(\Delta \setminus E)$, где Δ — произвольный интервал, содержащий E. Ограниченное множество называется измеримым, если его внешняя и внутренняя меры совпадают. Общее значение внешней и внутренней мер объявляется мерой измеримого множества. После этого проводится проверка того, что система измеримых множеств, содержащихся в фиксированном промежутке, есть σ-алгебра, а мера обладает свойством счётной аддитивности. Таким образом, путь, по которому мы идём при построении продолжения меры, не совсем прямой. Он содержит важнейший промежуточный этап — построение внешней меры. Мы, так сказать, "перепрыгиваем пропасть в два прыжка". Детальное осуществление этой программы (проведённое в несколько модифицированном виде, например, в [Н]) достаточно непросто.

При определённых преимуществах (в первую очередь это наглядность построения) такой подход к продолжению меры имеет и теневые стороны. Разумеется, так как каждое открытое подмножество евклидова пространства есть объединение последовательности ячеек, то ясна аналогия, которой следует руководствоваться, чтобы продолжить меру с полукольца ячеек. Однако остаётся неясным, как нужно действовать, чтобы продолжить меру, определённую на каком-то полукольце подмножеств основного множества, если в нём нет топологии и, следовательно, невозможно говорить об открытых множествах. Этот вопрос тем более актуален, что при аксиоматизации теории вероятностей в рамках теории меры в роли основного множества выступает множество "элементарных событий", которое по существу дела вовсе не обязано быть топологическим пространством.

В дальнейшем, главным образом благодаря результатам Каратеодори*), было выяснено, что в конструкции Лебега решающую роль играют два обстоятельства. Во-первых, это счётная полуаддитивность внешней меры, а во-вторых — возможность строить внешнюю меру, не используя открытые множества, т. е. не опираясь на топологию. Для этого надо только (учитывая, что открытое множество есть объединение последовательности ячеек) истолковать использованное в одномерной ситуации включение $E \subset G$ как возможность покрыть множество E последовательностью множеств из полукольца. Это соображение позволяет строить внешнюю меру по любой мере, независимо от того, топологизировано основное множество или нет.

Метод, предложенный Каратеодори, показывает, что при построении продолжения меры полезно, особенно в техническом отношении, не ограничиваться лишь аддитивными функциями, а рассматривать как самостоятельный объект счётно-полуаддитивные функции, определённые на всех подмножествах основного множества. Именно такие функции и называются теперь внешними мерами. Здесь стоит предупредить читателя о несовершенстве терминологии — вообще говоря, внешняя мера не является мерой в смысле определения 3.1 (подобно тому как "милостивый государь" — не монарх).

*) Константин **Каратеодори** (Carathéodory), 1873–1950, — немецкий математик.

Важнейшим моментом в построении, предложенном Каратеодори, является то обстоятельство, что с каждой внешней мерой можно естественным путём связать (в невырожденных случаях весьма обширную) σ-алгебру, на которой эта внешняя мера аддитивна, а следовательно, и счётно аддитивна. Тем самым каждой внешней мере каноническим образом сопоставляется мера. Поскольку внешние меры строить гораздо легче, чем меры, такой подход оказывается полезным не только при продолжении мер, но и в других случаях, когда необходимо найти меру с теми или иными заданными свойствами. С такими ситуациями мы встретимся при доказательстве существования площади поверхности (сводящемуся к построению меры Хаусдорфа надлежащей размерности) и при описании положительных функционалов в пространстве непрерывных функций (§ XII.2).

Детальному изложению метода Каратеодори предпошлём определение внешней меры и исследование её основных свойств.

4.2. Здесь мы будем рассматривать подмножества фиксированного непустого множества X, которое назовём основным множеством. Напомним, что символом A^c обозначается дополнение множества $A \subset X$, т. е. разность $X \setminus A$.

Определение 1. Пусть $\mathfrak{A}(X)$ — σ-алгебра всех подмножеств основного множества X. *Внешней мерой в* X называется такая функция $\tau\colon \mathfrak{A}(X) \to [0, +\infty]$, что

I. $\tau(\varnothing) = 0$ и

II. $\tau(A) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} \tau(A_n)$, если $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Свойство II называется *счётной полуаддитивностью.*

Отметим два простых свойства внешней меры.

1) Внешняя мера *конечно полуаддитивна,* т. е.

из включения $A \subset A_1 \cup \ldots \cup A_N$ *следует, что* $\tau(A) \leqslant \tau(A_1) + \ldots + \tau(A_N)$.

Это свойство немедленно получается из счётной полуаддитивности, если считать, что при $n > N$ все множества A_n пусты. ►

2) Внешняя мера *монотонна,* т. е.

из включения $A \subset B$ *следует неравенство* $\tau(A) \leqslant \tau(B)$.

Это частный случай свойства 1 при $N = 1$.

Как мы увидим в дальнейшем, внешние меры естественным образом возникают в различных ситуациях (см. §§ II.1, II.6, XII.2). Пока отметим лишь, что примером внешней меры может служить любая мера, определённая на всех подмножествах основного множества, в частности, дискретная мера (см. пример 5 п. 3.1).

Следующее определение связано с желанием выделить такую алгебру множеств, на которой внешняя мера τ была бы аддитивна. Если A и E такие множества, то должно выполняться равенство

$$\tau(E) = \tau(E \cap A) + \tau(E \setminus A). \tag{1}$$

Для построения искомой системы множеств мы отнесём к ней такие подмножества A основного множества, которые “аддитивно разбивают” любое множество E. Таким образом, мы приходим к следующему определению.

Определение 2. Пусть τ — внешняя мера в X. Множество A называется *измеримым*, или, точнее, *τ-измеримым*, если равенство (1) выполняется для любого множества $E \subset X$.

Систему всех τ-измеримых множеств обозначим символом $\mathfrak{A}_\tau$.

Поясним это определение таким неформальным примером. Рассмотрим пригородную железную дорогу, разделённую на тарифные зоны. Пусть множество X — совокупность её участков между соседними станциями. Произвольную совокупность участков (подмножество X) назовём путём. Если стоимость проезда по связному пути пропорциональна числу задеваемых им зон, а по несвязному — равна сумме оплат связных компонент, то стоимость проезда — внешняя мера на множестве участков. Измеримы лишь пути, состоящие из целых зон.

Заметим, что в силу равенства $E = (E \cap A) \cup (E \setminus A)$ и конечной полуаддитивности внешней меры всегда справедливо неравенство $\tau(E) \leqslant \tau(E \cap A) + \tau(E \setminus A)$. Поэтому для проверки равенства (1) достаточно установить лишь неравенство

$$\tau(E) \geqslant \tau(E \cap A) + \tau(E \setminus A), \tag{1'}$$

что мы обычно и будем делать.

Замечание. Если $\tau(A) = 0$, то $\tau(E \cap A) = 0$, и поэтому неравенство (1′) выполняется для любого множества E. Таким образом, все множества с нулевой внешней мерой измеримы.

4.3. Основной результат этого пункта состоит в следующем утверждении.

Теорема. *Пусть τ — внешняя мера в X. Тогда система $\mathfrak{A}_\tau$ есть σ-алгебра, а сужение τ на неё есть мера.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что система τ-измеримых множеств симметрична, т. е. вместе с каждым множеством A она содержит и его дополнение A^c. Это вытекает из того, что благодаря равенству $E \setminus A = E \cap A^c$ условию (1) можно придать симметричную форму: $\tau(E) = \tau(E \cap A) + \tau(E \cap A^c)$.

Докажем теперь, что $\mathfrak{A}_\tau$ — это алгебра множеств. Согласно определению 1.2 для этого достаточно проверить, что вместе с двумя множествами она содержит и их объединение.

Пусть A, $B \in \mathfrak{A}_\tau$, а E — произвольное множество. Последовательно пользуясь измеримостью множеств A и B, мы получаем

$$\tau(E) = \tau(E \cap A) + \tau(E \setminus A) = \tau(E \cap A) + \tau\big((E \setminus A) \cap B\big) + \tau\big((E \setminus A) \setminus B\big).$$

Третье слагаемое в правой части этого неравенства, очевидно, равно $\tau\big(E \setminus (A \cup B)\big)$, а сумму первого и второго можно оценить снизу, пользуясь полуаддитивностью τ:

$$\tau(E \cap A) + \tau\big((E \setminus A) \cap B\big) \geqslant \tau\Big((E \cap A) \cup \big((E \setminus A) \cap B\big)\Big) = \tau\big(E \cap (A \cup B)\big).$$

Таким образом,

$$\tau(E) \geqslant \tau\big(E \cap (A \cup B)\big) + \tau\big(E \setminus (A \cup B)\big),$$

т. е. объединение $A \cup B$ удовлетворяет неравенству $(1')$ для любого множества E. Поэтому $A \cup B \in \mathfrak{A}_\tau$ для любых A и B из $\mathfrak{A}_\tau$. Итак, $\mathfrak{A}_\tau$ есть алгебра.

Если измеримые множества A, B дизъюнктны, то $\big(E \cap (A \vee B)\big) \cap A = E \cap A$, а $\big(E \cap (A \vee B)\big) \setminus A = E \cap B$ для произвольного множества E. Поэтому $\tau\big(E \cap (A \vee B)\big) = \tau(E \cap A) + \tau(E \cap B)$. С помощью индукции мы получаем отсюда, что при любом $n \in \mathbb{N}$ для попарно дизъюнктных измеримых множеств $A_1, \ldots, A_n$ и произвольного множества E справедливо равенство

$$\tau\Big(E \cap \bigvee_{j=1}^{n} A_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \tau(E \cap A_j). \tag{2}$$

Взяв $E = X$, мы видим, что внешняя мера аддитивна на $\mathfrak{A}_\tau$:

$$\tau\Big(\bigvee_{j=1}^{n} A_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \tau(A_j). \tag{2'}$$

Убедимся теперь, что $\mathfrak{A}_\tau$ — σ-алгебра. Для этого нужно установить, что $\mathfrak{A}_\tau$ содержит объединение $A = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$ любой последовательности измеримых множеств A_j. Предположим сначала, что множества A_j попарно дизъюнктны. Тогда для любого множества E и любого n с помощью (2) мы получаем:

$$\tau(E) = \tau\Big(E \cap \bigvee_{j=1}^{n} A_j\Big) + \tau\Big(E \setminus \bigvee_{j=1}^{n} A_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \tau(E \cap A_j) + \tau\Big(E \setminus \bigvee_{j=1}^{n} A_j\Big) \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{j=1}^{n} \tau(E \cap A_j) + \tau(E \setminus A).$$

Переход к пределу при $n \to \infty$ вместе со счётной полуаддитивностью дают нам:

$$\tau(E) \geqslant \sum_{j=1}^{\infty} \tau(E \cap A_j) + \tau(E \setminus A) \geqslant \tau\Big(\bigvee_{j=1}^{\infty} (E \cap A_j)\Big) + \tau(E \setminus A) = \tau(E \cap A) + \tau(E \setminus A).$$

Таким образом, условие $(1')$ для множества A проверено, и поэтому $A \in \mathfrak{A}_\tau$.

Общий случай сводится к уже рассмотренному, если воспользоваться дизъюнктным представлением (см. лемму 1.4): $A = \bigvee\limits_{j=1}^{\infty} B_j$, где $B_1 = A_1$ и $B_j = A_j \setminus \big(A_1 \cup \ldots \cup A_{j-1}\big)$ при $j \geqslant 2$ (множества B_j измеримы, поскольку $\mathfrak{A}_\tau$ — алгебра).

Остаётся доказать второе утверждение теоремы. Пусть μ — сужение τ на $\mathfrak{A}_\tau$. Из равенства $(2')$ следует, что μ есть объём. Он счётно полуаддитивен, так как этим свойством обладает τ. По теореме 3.2 μ есть мера. ►

Замечание в конце п. 4.2 даёт повод выделить меры, обладающие важным дополнительным свойством. Учитывая монотонность, естественно ожидать, что всякое подмножество множества нулевой меры также имеет нулевую меру. Однако это не всегда так, поскольку необходимо, чтобы это подмножество было измеримым, а этого

может не быть (например, если мера определена лишь на борелевских множествах). Меры, для которых подмножества множеств меры нуль также имеют нулевую меру, представляют особый интерес.

Определение. Мера μ, заданная на полукольце $\mathscr{P}$, называется *полной*, если из условий $E \in \mathscr{P}$, $\mu(E) = 0$ вытекает, что любое содержащееся в E подмножество $\widetilde{E}$ также принадлежит $\mathscr{P}$ (и, следовательно, $\mu(\widetilde{E}) = 0$).

Используя это определение и замечание п. 4.2, мы можем дополнить теорему, сказав, что внешняя мера порождает полную меру. Иными словами, справедливо

Следствие. *Сужение внешней меры τ на σ-алгебру $\mathfrak{A}_\tau$ есть полная мера.*

4.4. Перейдём теперь к изложению предложенного Каратеодори метода продолжения меры. Он (как по существу и первоначальная конструкция Лебега) состоит из двух этапов. На первом из них по заданной мере μ_0 строится вспомогательная функция μ^*, которая продолжает μ_0 с исходного полукольца на систему всех подмножеств. При этом продолжении счётная аддитивность утрачивается и мы можем лишь доказать, что μ^* обладает более слабым свойством — счётной полуаддитивностью, оказываясь тем самым внешней мерой. На втором этапе построенная внешняя мера сужается на систему μ^*-измеримых множеств, в результате чего, согласно теореме 4.3, возникает новая мера, заданная на σ-алгебре. Чтобы убедиться в том, что эта мера является продолжением меры μ_0, остаётся проверить, что исходное полукольцо содержится в σ-алгебре μ^*-измеримых множеств. Приступим к осуществлению намеченной программы.

Пусть μ_0 — мера, определённая на каком-то полукольце $\mathscr{P}$ подмножеств множества X. Для любого множества $E \subset X$ положим

$$\mu^*(E) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(P_j) \,\middle|\, E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j,\ P_j \in \mathscr{P} \ \text{ при всех } \ j \in \mathbb{N}\right\} \tag{3}$$

(если E не может быть покрыто последовательностью множеств, принадлежащих полукольцу, то мы считаем, что $\mu^*(E) = +\infty$).

Заметим, что при определении μ^* вместо последовательности $\{P_j\}_{j\geqslant 1}$ можно рассматривать любое счётное семейство $\{P_\omega\}_{\omega\in\Omega}$, поскольку сумма $\sum\limits_{\omega\in\Omega} \mu_0(P_\omega)$ совпадает с $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu_0(P_{\omega_j})$ при любой нумерации множества Ω.

Теорема. *Функция μ^*, определённая равенством (3), есть внешняя мера, совпадающая на $\mathscr{P}$ с μ_0.*

Мы будем называть μ^* *внешней мерой, порождённой* μ_0.

Доказательство. Пусть $E \in \mathscr{P}$. Тогда в качестве покрытия этого множества элементами полукольца $\mathscr{P}$ можно взять последовательность $E, \varnothing, \varnothing, \ldots$ Поэтому $\mu^*(E) \leqslant \mu_0(E)$. Вместе с тем, если $E \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} P_j$, где $P_j \in \mathscr{P}$ при всех $j \in \mathbb{N}$, то $\mu_0(E) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu_0(P_j)$ в силу счётной полуаддитивности меры (теорема 3.2). Ввиду произвольности последовательности $\{P_j\}_{j\geqslant 1}$ отсюда следует, что $\mu_0(E) \leqslant \mu^*(E)$. Таким образом, $\mu^*(E) = \mu_0(E)$; в частности, $\mu^*(\varnothing) = 0$.

Осталось проверить счётную полуаддитивность μ^*, т. е. справедливость неравенства

$$\mu^*(E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$$

в случае, когда $E \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. При этом можно считать, что правая часть неравенства конечна, так как иначе оно тривиально. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$ и при каждом n найдём такие множества $P_j^{(n)}$ из $\mathscr{P}$ ($j \in \mathbb{N}$), что

$$E_n \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j^{(n)} \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0\big(P_j^{(n)}\big) < \mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

В этом случае

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j^{(n)}.$$

Поэтому по определению $\mu^*(E)$

$$\mu^*(E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0\big(P_j^{(n)}\big) < \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu^*(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε отсюда следует счётная полуаддитивность μ^*. ►

4.5. Теперь мы можем доказать теорему о продолжении меры, которая является нашей главной целью в этом параграфе.

Теорема. *Пусть μ_0 — мера, определённая на полукольце $\mathscr{P}$, μ^* — порождённая ею внешняя мера, а $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ — σ-алгебра μ^*-измеримых множеств. Тогда $\mathscr{P} \subset \mathfrak{A}_{\mu^*}$ и сужение μ^* на $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ есть продолжение μ_0.*

Доказательство. По теореме 4.3 сужение μ^* на $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ есть мера. Так как по теореме 4.4 μ^* совпадает с μ_0 на $\mathscr{P}$, то в доказательстве нуждается только включение $\mathscr{P} \subset \mathfrak{A}_{\mu^*}$, т. е. μ^*-измеримость каждого множества P из $\mathscr{P}$. Для этого мы должны проверить справедливость неравенства ($1'$) п. 4.2, которое в наших обозначениях принимает следующий вид: для любого множества E

$$\mu^*(E) \geqslant \mu^*(E \cap P) + \mu^*(E \setminus P). \tag{4}$$

Проверку этого неравенства произведём в два шага. Предположим сначала, что $E \in \mathscr{P}$. Тогда согласно определению полукольца $E \setminus P = \bigvee\limits_{j=1}^{N} Q_j$, где $Q_j \in \mathscr{P}$. Поэтому множество E распадается на непересекающиеся части, принадлежащие полукольцу $\mathscr{P}$: $E = (E \cap P) \vee \bigvee\limits_{j=1}^{N} Q_j$ и, следовательно, ввиду аддитивности μ_0 и полуаддитивности μ^*

$$\mu^*(E) = \mu_0(E) = \mu_0(E \cap P) + \sum_{j=1}^{N} \mu_0(Q_j) = \mu^*(E \cap P) + \sum_{j=1}^{N} \mu^*(Q_j) \geqslant$$

$$\geqslant \mu^*(E \cap P) + \mu^*\Big(\bigvee_{j=1}^{N} Q_j\Big) = \mu^*(E \cap P) + \mu^*(E \setminus P).$$

Тем самым в рассматриваем случае неравенство (4) установлено.

При доказательстве (4) в общем случае мы можем предполагать, что $\mu^*(E) < +\infty$. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$ и выберем такие множества P_j из $\mathscr{P}$, что $E \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} P_j$ и $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu_0(P_j) < \mu^*(E) + \varepsilon$. По доказанному

$$\mu_0(P_j) = \mu^*(P_j) \geqslant \mu^*(P_j \cap P) + \mu^*(P_j \setminus P).$$

Поэтому

$$\mu^*(E) + \varepsilon > \sum_{j=1}^{\infty} \mu_0(P_j) \geqslant \sum_{j=1}^{\infty} \bigl(\mu^*(P_j \cap P) + \mu^*(P_j \setminus P)\bigr).$$

Пользуясь счётной полуаддитивностью и монотонностью μ^*, мы получаем:

$$\mu^*(E) + \varepsilon > \mu^*\biggl(\Bigl(\bigcup_{j=1}^{\infty} P_j\Bigr) \cap P\biggr) + \mu^*\biggl(\Bigl(\bigcup_{j=1}^{\infty} P_j\Bigr) \setminus P\biggr) \geqslant \mu^*(E \cap P) + \mu^*(E \setminus P).$$

Ввиду произвольности ε это влечёт (4). Тем самым μ^*-измеримость каждого множества P из $\mathscr{P}$, а с ним и включение $\mathscr{P} \subset \mathfrak{A}_{\mu^*}$ доказаны. ▶

Построенное в доказанной теореме продолжение меры μ_0 будем называть *продолжением по Каратеодори* или *стандартным продолжением*. Учитывая существование стандартного продолжения, мы можем не умаляя общности всегда предполагать, что рассматриваемая мера определена на σ-алгебре.

Обратим внимание читателя на то, что в теореме не только утверждается существование продолжения, но и указывается формула (3), дающая средство вычислять продолженную меру μ с помощью исходной меры μ_0. Разумеется, поскольку эти меры совпадают на $\mathscr{P}$, для измеримых множеств формулу (3) можно, заменяя μ_0 на μ, переписать также в виде

$$\mu(A) = \inf\biggl\{\sum_{j=1}^{\infty} \mu(P_j) \;\biggl|\; A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j,\ P_j \in \mathscr{P} \quad \text{при всех} \quad j \in \mathbb{N}\biggr\}. \tag{3'}$$

Это равенство будет неоднократно использовано в дальнейшем.

Отметим в заключение, что повторное стандартное продолжение приводит к тому же результату, что и первоначальное. Чтобы убедиться в этом, мы покажем, что меры μ_0 и μ порождают одну и ту же внешнюю меру. В самом деле, правая часть равенства (3) не увеличится, если полукольцо $\mathscr{P}$ заменить σ-алгеброй $\mathfrak{A}_{\mu^*}$, а меру μ_0 — мерой μ. Это означает, что внешняя мера, порождаемая мерой μ, не больше μ^*. Для получения обратного неравенства достаточно заметить, что

$$\mu^*(E) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j)$$

для любого покрытия множества E множествами A_j из σ-алгебры $\mathfrak{A}_{\mu^*}$.

УПРАЖНЕНИЯ

1) Определим на подмножествах множества $X = \{1, 2, 3\}$ функцию τ следующим образом:

$$\tau(\varnothing) = 0,\ \tau(X) = 2,\ \tau(E) = 1 \quad \text{в остальных случаях.}$$

Убедитесь, что τ — внешняя мера. Какие множества τ-измеримы?

2) Пусть $\mathcal{E}$ — произвольная система множеств, содержащая $\varnothing$, и пусть $\alpha\colon \mathcal{E} \to [0,+\infty]$ — неотрицательная функция, $\alpha(\varnothing)=0$. Положим

$$\tau(E)=\inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\alpha(E_j)\;\middle|\; E\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j,\ E_j\in\mathcal{E}\ \text{ при всех }\ j\in\mathbb{N}\right\}$$

(в случае, когда E не может быть покрыто последовательностью множеств из $\mathcal{E}$, мы считаем, что $\tau(E)=+\infty$). Докажите, что τ — внешняя мера и что она продолжает α тогда и только тогда, когда функция α счётно полуаддитивна.

3) Пусть τ — внешняя мера. Докажите, что множество A будет τ-измеримо тогда и только тогда, когда $\tau(B\cup C)=\tau(B)+\tau(C)$ для любых множеств B,C, удовлетворяющих условиям $B\subset A,\ C\cap A=\varnothing$.

§ 5. Свойства стандартного продолжения

Сохраним обозначения предыдущего параграфа, считая, что μ — стандартное продолжение меры μ_0, определённой на полукольце $\mathscr{P}$, а μ^* — порождённая ею внешняя мера. μ^*-измеримые множества будем называть просто измеримыми, а σ-алгебру измеримых множеств обозначим буквой $\mathfrak{A}$.

5.1. Начнём с главного вопроса, интересующего нас в этом параграфе — существуют ли продолжения меры μ_0, отличные от стандартного. Этот вопрос распадается на два: во-первых — продолжается ли мера μ_0 на σ-алгебру, более широкую, чем алгебра $\mathfrak{A}$, а во-вторых — существуют ли иные продолжения μ_0 на алгебру $\mathfrak{A}$ или на какие-то её части, например, на борелевскую оболочку полукольца $\mathscr{P}$.

Первый вопрос мы оставим в стороне. Можно доказать (см. [Б], т. 1), что дальнейшее продолжение меры μ, как правило, возможно. Однако оно не мотивировано не только потребностями приложений, но и запросами “чистой” математики. Обычно σ-алгебра $\mathfrak{A}$ столь обширна, что потребность в её расширении не возникает.

Совсем другой характер имеет второй вопрос, и значение ответа на него трудно переоценить. Принципиально важно знать, единственно ли продолжение исходной меры хотя бы на минимальную σ-алгебру, порождённую полукольцом $\mathscr{P}$. Как мы покажем, в широком классе случаев, в частности, для всех конечных мер, ответ на этот вопрос утвердительный. Существование “нестандартных” продолжений следует рассматривать как некоторую патологию, возникающую как правило в искусственных ситуациях, которые мы будем встречать только в отдельных контрпримерах.

Единственность продолжения может быть получена, если ограничиться σ-конечными мерами, введёнными в п. 2.2. Очевидно, мера и её стандартное продолжение σ-конечны или нет одновременно.

Теорема (о единственности продолжения меры). *Пусть μ — стандартное продолжение меры μ_0, определённой на полукольце $\mathscr{P}$, $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра измеримых множеств, и пусть ν — мера, продолжающая μ_0 на некоторую σ-алгебру $\mathfrak{A}'$, содержащую $\mathscr{P}$. Тогда*

1) *$\nu(A)\leqslant\mu(A)$ для любого множества $A\in\mathfrak{A}\cap\mathfrak{A}'$, а если $\mu(A)<+\infty$, то $\nu(A)=\mu(A)$;*

2) *если мера μ_0 σ-конечна, то меры μ и ν совпадают на $\mathfrak{A}\cap\mathfrak{A}'$.*

В частности, σ-конечная мера единственным образом продолжается с полукольца $\mathscr{P}$ на σ-алгебры $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}(\mathscr{P})$.

Доказательство. Пусть множество A имеет счётное покрытие $\{P_j\}_{j\geqslant 1}$ элементами полукольца $\mathscr{P}$. Тогда $\nu(A) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{\infty} \nu(P_j) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu_0(P_j)$. Так как это неравенство справедливо для любого покрытия, то $\nu(A) \leqslant \mu(A)$.

Отсюда следует, что $\nu(P\cap A) = \mu(P\cap A)$, если $P \in \mathscr{P}$ и $\mu(P) < +\infty$. Действительно, в противном случае $\nu(P \cap A) < \mu(P \cap A)$, что ведёт к противоречию:

$$\mu(P) = \nu(P) = \nu(P \cap A) + \nu(P \setminus A) < \mu(P \cap A) + \mu(P \setminus A) = \mu(P).$$

Если $\mu(A) < +\infty$ или если мера μ_0 σ-конечна, то множество A можно покрыть элементами P_j полукольца $\mathscr{P}$, имеющими конечную меру. По теореме 1.4 мы можем считать их попарно не пересекающимися. Тогда

$$\nu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A \cap P_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A \cap P_j) = \mu(A).$$

Тем самым оба утверждения теоремы доказаны. ►

Несложные примеры показывают, что во втором утверждении теоремы предположение о σ-конечности меры существенно. В самом деле, пусть множество X состоит из двух точек a и b, полукольцо $\mathscr{P}$ — из пустого множества и одноточечного множества $\{a\}$, мера μ_0 тождественно равна нулю, а μ — стандартное продолжение μ_0. Тогда по определению стандартного продолжения мы получим, что $\mu(X) = \mu\big(\{b\}\big) = +\infty$. Вместе с тем очевидно, что мера μ_0 допускает и другое — тождественно равное нулю — продолжение. В рассматриваемой ситуации теорема 5.1 не применима, поскольку мера μ_0 не σ-конечна (множество X не представимо в виде счётного объединения множеств, входящих в полукольцо).

Другой пример, показывающий, что продолжение не σ-конечной меры не всегда единственно, можно получить с помощью дискретной меры, порождённой суммируемым семейством нагрузок (см. упр. 4).

5.2. Остановимся теперь на свойствах измеримых множеств, возникающих при стандартном продолжении. Для их описания удобно ввести некоторые новые термины.

Определение. Пусть $\mathcal{E}$ — произвольная система подмножеств основного множества. Множество H мы будем называть множеством *типа* $\mathcal{E}_\sigma$ (*типа* $\mathcal{E}_\delta$), если $H = \bigcup\limits_{n\geqslant 1} A_n$ (соответственно $H = \bigcap\limits_{n\geqslant 1} A_n$), где $A_n \in \mathcal{E}$ при всех $n \in \mathbb{N}$. Множества типа $(\mathcal{E}_\sigma)_\delta$, т. е. множества, представимые в виде $\bigcap\limits_{n\geqslant 1} H_n$, где H_n — множества типа $\mathcal{E}_\sigma$ при всех $n \in \mathbb{N}$, мы будем называть множествами *типа* $\mathcal{E}_{\sigma\delta}$.

Очевидно, как множества типа $\mathcal{E}_\sigma$ и $\mathcal{E}_\delta$, так и множества типа $\mathcal{E}_{\sigma\delta}$, принадлежат σ-алгебре $\mathfrak{B}(\mathcal{E})$ — борелевской оболочке системы $\mathcal{E}$.

Теорема. *Пусть μ — стандартное продолжение меры μ_0 с полукольца $\mathscr{P}$. Если $\mu^*(E) < +\infty$, то существует такое множество C типа $\mathscr{P}_{\sigma\delta}$, что*

$$E \subset C \quad \text{и} \quad \mu^*(E) = \mu(C).$$

Доказательство. По определению μ^* для каждого натурального n найдутся такие множества $P_j^{(n)} \in \mathscr{P}$ $(j \in \mathbb{N})$, что

$$\bigcup_{j\geqslant 1} P_j^{(n)} \supset E, \quad \sum_{j\geqslant 1} \mu\big(P_j^{(n)}\big) < \mu^*(E) + \frac{1}{n}.$$

Положим $C_n = \bigcup\limits_{j\geqslant 1} P_j^{(n)}$. Ясно, что

$$E \subset C_n \in \mathscr{P}_\sigma, \qquad \mu^*(E) \leqslant \mu(C_n) \leqslant \sum_{j\geqslant 1} \mu\big(P_j^{(n)}\big) < \mu^*(E) + \frac{1}{n}$$

при любом $n \in \mathbb{N}$. Поэтому множество $C = \bigcap\limits_{n\geqslant 1} C_n$ будет, очевидно, искомым. ►

Теперь мы можем доказать, что всякое измеримое множество конечной меры с точностью до множеств меры нуль аппроксимируется изнутри и снаружи множествами из $\mathfrak{B}(\mathscr{P})$.

Следствие. *Пусть A — измеримое множество конечной меры. Тогда найдутся такие множества B и C из $\mathfrak{B}(\mathscr{P})$, что*

$$B \subset A \subset C \quad \text{и} \quad \mu(C \setminus B) = 0.$$

В частности, $\mu(A) = \mu(B) = \mu(C)$.

Доказательство. Пусть C — множество, построенное в теореме. Положим $e = C \setminus A$. По доказанному найдётся такое содержащее e множество $\widetilde{e} \in \mathfrak{B}(\mathscr{P})$, что $\mu(\widetilde{e}) = 0$. Как читатель легко проверит самостоятельно, множество $B = C \setminus \widetilde{e}$ обладает всеми требуемыми свойствами. ►

5.3. Убедимся теперь в минимальности стандартного продолжения. Оказывается, что в случае σ-конечной меры оно наиболее "экономное" (при условии, что мы стремимся получить полную меру).

Теорема. *Пусть μ — стандартное продолжение σ-конечной меры μ_0, $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра измеримых множеств. Если μ' — некоторая полная мера, заданная на σ-алгебре $\mathfrak{A}'$ и продолжающая μ_0, то* $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}'$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что $\mathfrak{A}' \supset \mathfrak{B}(\mathscr{P})$, поскольку $\mathfrak{A}' \supset \mathscr{P}$. Проверим теперь, что если $\mu(e) = 0$, то $e \in \mathfrak{A}'$. Действительно, как установлено в теореме 5.2, множество e содержится в множестве $\widetilde{e}$ также нулевой меры, входящем в $\mathfrak{B}(\mathscr{P})$. По теореме 5.1 $\nu(\widetilde{e}) = \mu(\widetilde{e}) = 0$. Поэтому $e \in \mathfrak{A}'$ в силу полноты меры ν. Если A — измеримое множество конечной меры, то по следствию 5.2 его можно представить в виде $A = C \setminus e$, где $C \in \mathfrak{B}(\mathscr{P})$, а $\mu(e) = 0$.

Поэтому $A \in \mathfrak{A}'$. Если, наконец, A — произвольное измеримое множество, то пользуясь σ-конечностью меры μ его можно представить в виде объединения последовательности измеримых множеств конечной меры, которые входят в $\mathfrak{A}'$. Следовательно, и в этом случае $A \in \mathfrak{A}'$. ►

Приведём в заключение удобный критерий измеримости множества, справедливый не только для стандартного продолжения, но и для любой полной меры.

Лемма. *Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — произвольное пространство с полной мерой, $E \subset X$. Если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдутся такие измеримые множества A_ε и B_ε, что $A_\varepsilon \subset E \subset B_\varepsilon$ и $\mu(B_\varepsilon \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$, то множество E измеримо.*

В частности, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое измеримое множество E_ε, что $E \subset E_\varepsilon$ и $\mu(E_\varepsilon) < \varepsilon$, то множество E измеримо (и $\mu(E) = 0$).

Доказательство. Придавая ε значения $\frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, \ldots$), рассмотрим множества $A_{1/n}$ и $B_{1/n}$. Тогда множества $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_{1/n}$, $B = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_{1/n}$ измеримы и $A \subset E \subset B$. Кроме того, $\mu(B \setminus A) = 0$, так как $\mu(B \setminus A) \leqslant \mu(B_{1/n} \setminus A_{1/n}) < \frac{1}{n}$ при любом n. Таким образом, множество $E \setminus A$ содержится в множестве $B \setminus A$ нулевой меры и, следовательно, измеримо в силу полноты меры. Вместе с ним измеримо и множество $E = A \cup (E \setminus A)$. ►

УПРАЖНЕНИЯ

1) Пусть X и $\mathscr{P}$ те же, что в примере п. 5.1, т. е. $X = \{a,\ b\}$ — двухточечное множество, $\mathscr{P} = \{\varnothing,\ \{a\}\}$, и пусть μ_0 — произвольная конечная мера на $\mathscr{P}$. Убедитесь, что при любом α, $(0 \leqslant \alpha \leqslant +\infty)$ равенства

$$\nu_\alpha(\varnothing) = 0, \quad \nu_\alpha\big(\{a\}\big) = \mu_0\big(\{a\}\big), \quad \nu_\alpha\big(\{b\}\big) = \alpha, \quad \nu_\alpha(X) = \alpha + \mu_0\big(\{a\}\big)$$

определяют меру ν_α, продолжающую μ_0 на алгебру всех подмножеств X. Какая из мер ν_α будет стандартным продолжением μ_0? Как объяснить, что (конечные!) меры ν_1 и ν_2, совпадая на $\mathscr{P}$, не совпадают на $\mathfrak{B}(\mathscr{P})$?

В следующих упражнениях μ — стандартное продолжение меры μ_0 с полукольца $\mathscr{P}$ на σ-алгебру измеримых множеств $\mathfrak{A}$.

2) Докажите, что если μ_0 — σ-конечная мера, то условие $\mu(A) < +\infty$ в следствии 5.2 может быть опущено. При этом множество C по-прежнему можно считать множеством типа $\mathscr{P}_{\sigma\delta}$.

3) Докажите, что для любого множества A найдётся такое множество $B \in \mathfrak{B}(\mathscr{P})$, что $A \subset B$, $\mu^*(A) = \mu(B)$.

4) Рассмотрим дискретную меру ν, порождённую суммируемым семейством нагрузок на несчётном множестве X. Пусть μ_0 — её сужение на полукольцо не более чем счётных подмножеств. Докажите, что стандартное продолжение меры μ_0 задано, как и ν, на σ-алгебре всех подмножеств множества X, но в отличие от ν бесконечно на всех несчётных множествах.

5) Пусть мера μ_0 принимает лишь конечные значения. Для $A \in \mathfrak{A}$ положим

$$\widetilde{\mu}(A) = \sup\{\mu(B) \,|\, B \subset A,\ B \in \mathfrak{A},\ \mu(B) < +\infty\}.$$

Докажите, что $\widetilde{\mu}$ есть мера, продолжающая μ_0, и что это продолжение минимально в том смысле, что $\widetilde{\mu} \leqslant \nu$ для всякого продолжения ν меры μ_0 на $\mathfrak{A}$.

Используя упр. 1, приведите пример меры, продолжающей μ_0, но не совпадающей с μ и $\widetilde{\mu}$.

6) Обозначим символом $\mathcal{N}$ систему всех множеств с нулевой внешней мерой. Докажите, что

а) $\mathfrak{B}(\mathscr{P} \cup \mathcal{N}) \subset \mathfrak{A}$ и сужение меры μ на $\mathfrak{B}(\mathscr{P} \cup \mathcal{N})$ есть полная мера;

б) если мера μ σ-конечна, то $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}(\mathscr{P} \cup \mathscr{N})$;

в) приведите пример меры, для которой $\mathfrak{A} \neq \mathfrak{B}(\mathscr{P} \cup \mathscr{N})$ (рассмотрите считающую меру, заданную на полукольце конечных подмножеств несчётного множества).

7) Докажите, что стандартное продолжение σ-конечной полной меры, заданной на σ-алгебре, есть она сама.

§ 6. Свойства борелевской оболочки системы множеств

6.1. Пусть X, Y произвольные множества, $\varphi\colon X \to Y$ — отображение X в Y, и пусть $\mathcal{E}$ — некоторая система подмножеств множества Y. Символом $\varphi^{-1}(\mathcal{E})$ мы будем обозначать "прообраз системы $\mathcal{E}$", т. е. систему множеств $\{\varphi^{-1}(E) \mid E \in \mathcal{E}\}$. Оказывается, прообраз σ-алгебры есть σ-алгебра. Точнее, справедливо следующее утверждение.

Лемма. 1) *Прообраз σ-алгебры (алгебры) снова есть σ-алгебра (алгебра).*

2) *Если $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра (алгебра) подмножеств множества X, то система $\bigl\{B \subset Y \mid \varphi^{-1}(B) \in \mathfrak{A}\bigr\}$ также есть σ-алгебра (алгебра).*

Доказательство. Оба утверждения леммы немедленно следуют из равенств

$$\varphi^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus \varphi^{-1}(B), \qquad \varphi^{-1}\biggl(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\biggr) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi^{-1}(B_n).$$

Детали мы предоставляем читателю. ►

Основной результат этого параграфа составляет

Теорема. *Пусть X, Y — произвольные множества, $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра подмножеств множества X, $\mathcal{E}$ — система подмножеств множества Y, φ — произвольное отображение из X в Y. Тогда*

1) *если $\varphi^{-1}(\mathcal{E}) \subset \mathfrak{A}$, то $\varphi^{-1}\bigl(\mathfrak{B}(\mathcal{E})\bigr) \subset \mathfrak{A}$;*

2) $\mathfrak{B}\bigl(\varphi^{-1}(\mathcal{E})\bigr) = \varphi^{-1}\bigl(\mathfrak{B}(\mathcal{E})\bigr)$.

Доказательство. 1) Рассмотрим систему множеств $\mathfrak{A}' = \{B \subset Y \mid \varphi^{-1}(B) \in \mathfrak{A}\}$. Согласно лемме $\mathfrak{A}'$ есть σ-алгебра. Так как $\mathfrak{A}' \supset \mathcal{E}$, то из определения борелевской оболочки следует, что $\mathfrak{A}' \supset \mathfrak{B}(\mathcal{E})$.

2) Считая, что $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}\bigl(\varphi^{-1}(\mathcal{E})\bigr)$, мы получаем из доказанного в пункте 1), что

$$\varphi^{-1}\bigl(\mathfrak{B}(\mathcal{E})\bigr) \subset \mathfrak{B}\bigl(\varphi^{-1}(\mathcal{E})\bigr). \tag{1}$$

С другой стороны, по лемме система $\varphi^{-1}\bigl(\mathfrak{B}(\mathcal{E})\bigr)$ есть σ-алгебра. Так как $\varphi^{-1}(\mathcal{E}) \subset \varphi^{-1}\bigl(\mathfrak{B}(\mathcal{E})\bigr)$, то из определения борелевской оболочки вытекает, что

$$\mathfrak{B}\bigl(\varphi^{-1}(\mathcal{E})\bigr) \subset \varphi^{-1}\bigl(\mathfrak{B}(\mathcal{E})\bigr).$$

Вместе с включением (1) это даёт требуемое равенство. ►

6.2. Отметим несколько следствий из доказанной теоремы. Первые четыре из них являются её переформулировками или частными случаями, в чём читатель легко убедится самостоятельно.

Символом $\mathcal{E}$ в следствиях обозначается, как и в теореме, произвольная система подмножеств множества Y.

Пусть $X \subset Y$, $\varphi = \mathrm{id}\colon X \to Y$ — тождественное отображение (сопоставляющее точке x из X эту же точку, рассматриваемую как элемент множества Y). Очевидно, $\varphi^{-1}(E) = E \cap X$ для всякого множества $E \subset Y$. Ясно, что индуцированная система $\mathcal{E} \cap X$ совпадает с $\varphi^{-1}(\mathcal{E})$. Если система $\mathcal{E}$ состоит из подмножеств множества X, $X \subset Y$, то чтобы различать борелевские оболочки $\mathcal{E}$, состоящие из подмножеств X и Y соответственно, мы будем использовать символы $\mathfrak{B}^{(X)}(\mathcal{E})$ и $\mathfrak{B}^{(Y)}(\mathcal{E})$. Справедливо

Следствие 1. $\mathfrak{B}^{(X)}(\mathcal{E} \cap X) = \mathfrak{B}^{(Y)}(\mathcal{E}) \cap X$.

Заметим, что по определению левая часть равенства есть система подмножеств множества X, так как таковой является система $\mathcal{E} \cap X$.

Для доказательства достаточно применить теорему, считая, что $\varphi = \mathrm{id}\colon X \to Y$ — тождественное отображение (сопоставляющее точке x из X эту же точку, рассматриваемую как элемент множества Y). Тогда индуцированная система $\mathcal{E} \cap X$ совпадет с $\varphi^{-1}(\mathcal{E})$, поскольку $\varphi^{-1}(E) = E \cap X$ для всякого множества $E \subset Y$.

Обобщая понятие борелевского множества в $\mathbb{R}^m$ (см. п. 1.3), подмножество топологического пространства X будем называть борелевским, если оно входит в минимальную σ-алгебру, содержащую все открытые множества. Эту σ-алгебру будем обозначать символом $\mathfrak{B}_X$.

Следствие 2. *Пусть X и Y топологические пространства, $\varphi : X \to Y$ — непрерывное отображение. Тогда прообраз каждого борелевского подмножества пространства Y есть борелевское подмножество пространства X, т. е. $\varphi^{-1}(\mathfrak{B}_Y) \subset \mathfrak{B}_X$.*

Отметим, что следствие 2 перестаёт быть справедливым, если вместо прообразов рассматривать образы борелевских множеств. Например, можно доказать, что при ортогональном проектировании плоскости на прямую образ борелевского множества не всегда будет борелевским множеством. Этот нетривиальный результат принадлежит М. Я. Суслину*).

Следствие 3. *Пусть Y топологическое пространство, X его подпространство. Тогда всякое борелевское в X множество A есть след множества, борелевского в Y, т. е. $A = X \cap B$, где B некоторое множество из $\mathfrak{B}_Y$.*

С помощью теоремы 1.7 легко получить

Следствие 4. Пусть G — открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^m$, $\mathscr{P}_G^m = \{P \in \mathscr{P}^m \mid \overline{P} \subset G\}$. Тогда $\mathfrak{B}(\mathscr{P}_G^m) = \mathfrak{B}_G$ (система $\mathscr{P}_G^m$ рассматривается как система подмножеств множества G).

Будем писать $X \times \mathcal{E}$ для обозначения системы $\{X \times E \mid E \in \mathcal{E}\}$. Справедлива

Лемма. $\mathfrak{B}(X \times \mathcal{E}) = X \times \mathfrak{B}(\mathcal{E})$.

Для доказательства нужно рассмотреть в качестве φ каноническую проекцию $X \times Y$ на Y и применить теорему. ►

Пусть $\mathcal{E}'$ и $\mathcal{E}$ — произвольные системы подмножеств множеств X и Y соответственно. Систему подмножеств $\{E' \times E \mid E' \in \mathcal{E}',\ E \in \mathcal{E}\}$ декартова произведения $X \times Y$ будем обозначать символом $\mathcal{E}' \odot \mathcal{E}$.

*) Михаил Яковлевич **Суслин**, 1894–1919, — российский математик.

Следствие 5. *Пусть $\mathcal{E}'$ некоторая система подмножества множества X. Тогда*

$$\mathfrak{B}(\mathcal{E}' \odot \mathcal{E}) = \mathfrak{B}\big(\mathfrak{B}(\mathcal{E}') \odot \mathfrak{B}(\mathcal{E})\big).$$

Доказательство. Убедимся сначала, что

$$\mathcal{E}' \odot \mathfrak{B}(\mathcal{E}) \subset \mathfrak{B}(\mathcal{E}' \odot \mathcal{E}). \tag{2}$$

Для этого достаточно заметить, что по лемме (с заменой X на $E' \in \mathcal{E}'$)

$$E' \times \mathfrak{B}(\mathcal{E}) = \mathfrak{B}(E' \times \mathcal{E}) \subset \mathfrak{B}(\mathcal{E}' \odot \mathcal{E}).$$

Зафиксируем теперь множества $U \in \mathfrak{B}(\mathcal{E}')$, $V \in \mathfrak{B}(\mathcal{E})$. Тогда по лемме и включению (2) мы получаем

$$U \times Y \in \mathfrak{B}(\mathcal{E}' \times Y) \subset \mathfrak{B}\big(\mathcal{E}' \odot \mathfrak{B}(\mathcal{E})\big) \subset \mathfrak{B}(\mathcal{E}' \odot \mathcal{E}).$$

Аналогично $X \times V \in \mathfrak{B}(\mathcal{E}' \odot \mathcal{E})$. Поэтому

$$U \times V = (U \times Y) \cap (X \times V) \in \mathfrak{B}(\mathcal{E}' \odot \mathcal{E}).$$

Следовательно, $\mathfrak{B}\big(\mathfrak{B}(\mathcal{E}') \odot \mathfrak{B}(\mathcal{E})\big) \subset \mathfrak{B}(\mathcal{E}' \odot \mathcal{E})$. Обратное включение очевидно, поскольку $\mathcal{E}' \odot \mathcal{E} \subset \mathfrak{B}(\mathcal{E}') \odot \mathfrak{B}(\mathcal{E})$. ►

Следствие 6. *Если X и Y топологические пространства, то*

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{B}_X \odot \mathfrak{B}_Y) \subset \mathfrak{B}_{X \times Y}.$$

В частности, произведение борелевских подмножеств пространств X и Y есть борелевское подмножество $X \times Y$.

Если в X и Y выполнена вторая аксиома счётности, то $\mathfrak{B}(\mathfrak{B}_X \odot \mathfrak{B}_Y) = \mathfrak{B}_{X \times Y}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{G}_X$, $\mathfrak{G}_Y$, $\mathfrak{G}$ — системы открытых множеств в пространствах X, Y и $X \times Y$ соответственно. По следствию 5 $\mathfrak{B}(\mathfrak{B}_X \odot \mathfrak{B}_Y) = \mathfrak{B}(\mathfrak{G}_X \odot \mathfrak{G}_Y)$. Так как $\mathfrak{G}_X \odot \mathfrak{G}_Y \subset \mathfrak{G}$, то

$$\mathfrak{B}(\mathfrak{B}_X \odot \mathfrak{B}_Y) = \mathfrak{B}(\mathfrak{G}_X \odot \mathfrak{G}_Y) \subset \mathfrak{B}_{X \times Y}.$$

Из второй аксиомы счётности следует, что каждое множество, входящее в $\mathfrak{G}$, есть не более чем счётное объединение множеств из $\mathfrak{G}_X \odot \mathfrak{G}_Y$. Поэтому $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{B}(\mathfrak{G}_X \odot \mathfrak{G}_Y) \subset \subset \mathfrak{B}(\mathfrak{B}_X \odot \mathfrak{B}_Y)$ и, следовательно, $\mathfrak{B}_{X \times Y} \subset \mathfrak{B}(\mathfrak{B}_X \odot \mathfrak{B}_Y)$. Противоположное включение, как мы установили выше, справедливо всегда. ►

6.3. Ещё одно свойство борелевской оболочки связано с понятием монотонного класса множеств.

Определение. Система множеств называется *монотонным классом*, если она содержит объединения всевозможных возрастающих и пересечения всевозможных убывающих последовательностей входящих в неё множеств.

Теорема (о монотонном классе). *Если монотонный класс содержит некоторую алгебру $\mathfrak{A}$ подмножеств множества X, то он содержит и борелевскую оболочку этой алгебры.*

Доказательство. Рассмотрим минимальный монотонный класс $\mathcal{M}$, содержащий $\mathfrak{A}$. Очевидно, такой класс существует — достаточно рассмотреть пересечение всевозможных монотонных классов, содержащих $\mathfrak{A}$. Убедимся, что $\mathcal{M} = \mathfrak{B}(\mathfrak{A})$. Ясно, что $\mathcal{M} \subset \mathfrak{B}(\mathfrak{A})$, поскольку σ-алгебра есть монотонный класс. Поэтому остаётся установить справедливость включения $\mathcal{M} \supset \mathfrak{B}(\mathfrak{A})$, для чего достаточно проверить, что класс $\mathcal{M}$ есть σ-алгебра.

Докажем сначала, что

$$\text{если } \ A \in \mathfrak{A}, \ \text{ то } \ A \cap B \in \mathcal{M} \ \text{ и } \ A \cap B^c \in \mathcal{M} \ \text{ для любого } \ B \in \mathcal{M} \tag{3}$$

(символ B^c обозначает дополнение множества B относительно X: $B^c = X \setminus B$).

В самом деле, для множества A из $\mathfrak{A}$ положим

$$\mathcal{M}_A = \{B \in \mathcal{M} \,|\, A \cap B \in \mathcal{M},\ A \cap B^c \in \mathcal{M}\}.$$

Как легко убедиться, $\mathcal{M}_A$ — монотонный класс, содержащий $\mathfrak{A}$, причём по построению $\mathcal{M}_A \subset \mathcal{M}$. Следовательно, в силу минимальности $\mathcal{M}$, справедливо равенство $\mathcal{M}_A = \mathcal{M}$, что доказывает утверждение (3).

При $A = X$ из свойства (3) вытекает, что система $\mathcal{M}$ вместе с каждым множеством содержит и его дополнение, т. е. симметрична.

Убедимся теперь, что класс $\mathcal{M}$ вместе с любыми двумя множествами содержит и их пересечение. Пусть $B \in \mathcal{M}$. Рассмотрим систему множеств

$$\mathcal{N}_B = \{E \in \mathcal{M} \,|\, B \cap E \in \mathcal{M}\}.$$

Как и на предыдущем шаге, очевидно, что $\mathcal{N}_B$ — монотонный класс. Из (3) следует, что он содержит $\mathfrak{A}$. Поэтому в силу минимальности $\mathcal{M}$ множества $\mathcal{N}_B$ и $\mathcal{M}$ совпадают. Ввиду произвольности B это означает, что вместе с любыми двумя множествами B и E класс $\mathcal{M}$ содержит и их пересечение. Ввиду симметричности $\mathcal{M}$, отсюда следует, что он содержит и конечные объединения входящих в него множеств. Вместе с условием монотонности это влечёт, что он содержит и счётные объединения, т. е. является σ-алгеброй. Таким образом, $\mathcal{M}$ есть некоторая σ-алгебра, содержащая $\mathfrak{A}$. Поэтому $\mathcal{M} \supset \mathfrak{B}(\mathfrak{A})$ по определению борелевской оболочки. ►

УПРАЖНЕНИЯ

1) Докажите, что следствие 4 п. 6.2 остаётся справедливым, если полукольцо $\mathscr{P}_G^m$ заменить полукольцом $\{P \in \mathscr{P}_r^m \,|\, \overline{P} \subset G\}$.

2) Докажите, что отображение $(t_1, \dots, t_m) \mapsto (e^{it_1}, \dots, e^{it_m}) \in \mathbb{C}^m \quad ((t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{R}^m)$ преобразует борелевские множества в борелевские.

3) Пусть $\mathscr{P}$ — система не более чем одноточечных подмножеств множества, состоящего больше, чем из одной точки. Убедитесь, что $\mathscr{P}$ — полукольцо и монотонный класс, не совпадающий со своей борелевской оболочкой.

4) Докажите, что всякая D-система (см. § 1, упр. 10) есть монотонный класс.

5) Пусть D-система $\mathcal{E}$ состоит из подмножеств пространства $\mathbb{R}^m$ и содержит всевозможные конечные пересечения открытых шаров. Докажите, что она содержит также любые конечные объединения шаров. Используя упр. 4, выведите отсюда, что $\mathcal{E}$ содержит все борелевские множества.

Глава II. МЕРА ЛЕБЕГА

§ 1. Определение и простейшие свойства меры Лебега

Эта глава посвящена важнейшему и исторически первому примеру меры — мере, получаемой стандартным продолжением классического объёма. Чтобы применять к классическому объёму общую схему продолжения меры, описанную в § I.4, необходимо убедиться, что классический объём есть мера.

1.1. Теорема. *Классический объём λ_m на полукольце $\mathscr{P}^m$ есть σ-конечная мера.*

Доказательство. Нам нужно доказать лишь счётную аддитивность объёма λ_m, поскольку его σ-конечность очевидна. Для этого достаточно проверить его счётную полуаддитивность (см. теорему I.3.2), т. е. убедиться, что если P, $P_n \in \mathscr{P}^m$ $(n \in \mathbb{N})$, $P \subset \bigcup\limits_{n\geqslant 1} P_n$, то

$$\lambda_m(P) \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \lambda_m(P_n). \tag{1}$$

Докажем это неравенство с точностью до произвольного положительного числа ε. Пусть $P = [a, b) \neq \varnothing$, $P_n = [a_n, b_n)$. Воспользуемся тем, что, как ясно из определения, классический объём ячейки есть непрерывная функция её вершин. Выберем векторы $a'_n < a_n$ так, что

$$\lambda_m\big([a'_n, b_n)\big) < \lambda_m\big([a_n, b_n)\big) + \frac{\varepsilon}{2^n} \quad \text{при всех} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Оценим сверху объём $\lambda_m\big([a, t)\big)$ для произвольного t, $a < t < b$.

Так как $[a, t] \subset [a, b) = P$, $P_n = [a_n, b_n) \subset (a'_n, b_n)$, то, очевидно,

$$[a, t] \subset P \subset \bigcup_{n\geqslant 1} P_n \subset \bigcup_{n\geqslant 1} (a'_n, b_n).$$

В силу компактности параллелепипеда $[a, t]$ его покрытие множествами (a'_n, b_n) содержит конечное подпокрытие. Таким образом, при некотором $N \in \mathbb{N}$

$$[a, t] \subset \bigcup_{n=1}^{N} (a'_n, b_n).$$

И подавно

$$[a, t) \subset \bigcup_{n=1}^{N} [a'_n, b_n).$$

Пользуясь (конечной) полуаддитивностью классического объёма, мы получаем, что

$$\lambda_m\big([a,t)\big) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \lambda_m\big([a'_n, b_n)\big).$$

Вместе с неравенствами (2) это даёт нам:

$$\lambda_m\big([a,t)\big) < \sum_{n=1}^{N} \Big(\lambda_m(P_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\Big) < \sum_{n\geqslant 1} \lambda_m(P_n) + \varepsilon.$$

Пользуясь ещё раз непрерывной зависимостью объёма ячейки от её вершин и переходя к пределу при $t \to b$, мы видим, что

$$\lambda_m(P) = \lim_{t\to b} \lambda_m\big([a,t)\big) \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \lambda_m(P_n) + \varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε последнее неравенство влечёт (1). ►

1.2. Доказав теорему 1.1, мы получили право ввести, опираясь на теорему I.4.5 о продолжении меры, определение важнейшего понятия — меры Лебега.

Определение. *Мерой Лебега* в пространстве $\mathbb{R}^m$ (m-мерной мерой Лебега) называется стандартное продолжение классического объёма, определённого на полукольце $\mathscr{P}^m$.

m-мерная мера Лебега обозначается, как и классический объём, символом λ_m; если размерность пространства фиксирована, мы иногда опускаем индекс и используем обозначение λ; особенно часто мы делаем это в одномерном случае. Всюду далее в этом параграфе термин “мера” означает меру Лебега.

σ-алгебра множеств, на которых определена m-мерная мера Лебега, обозначается $\mathfrak{A}^m$; множества, принадлежащие этой σ-алгебре, называются *измеримыми по Лебегу* или просто *измеримыми.*

Как следует из определения стандартного продолжения,

$$\lambda_m(A) = \inf\Big\{\sum_{k\geqslant 1} \lambda_m(P_k) \,\Big|\, P_k \in \mathscr{P}^m,\ \bigcup_{k\geqslant 1} P_k \supset A\Big\}.$$

Так как каждая ячейка содержится в ячейке сколь угодно близкой меры с рациональными вершинами, то в последней формуле все ячейки можно считать ячейками с рациональными вершинами. Таким образом,

$$\lambda_m(A) = \inf\Big\{\sum_{k\geqslant 1} \lambda_m(P_k) \,\Big|\, P_k \in \mathscr{P}^m_r,\ \bigcup_{k\geqslant 1} P_k \supset A\Big\}. \tag{3}$$

Поэтому меру Лебега можно рассматривать и как стандартное продолжение классического объёма с полукольца $\mathscr{P}^m_r$.

1.3. *Простейшие свойства меры Лебега.*

1) *Открытые множества измеримы; мера непустого открытого множества строго положительна.*

Первая часть утверждения следует из теоремы I.1.7, вторая очевидна, поскольку непустое открытое множество содержит невырожденную ячейку. ►

2) *Замкнутые множества измеримы; мера одноточечного множества равна нулю.*

Первая часть утверждения вытекает из свойства 1), вторая очевидна, поскольку каждую точку можно заключить в ячейку произвольно малой меры. ►

3) *Мера измеримого ограниченного множества конечна. Всякое измеримое множество есть объединение последовательности множеств конечной меры.*

Следующее свойство показывает, что множество, которое изнутри и снаружи хорошо аппроксимируется измеримыми множествами, само измеримо.

4) *Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$. Если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие измеримые множества A_ε и B_ε, что $A_\varepsilon \subset E \subset B_\varepsilon$ и $\lambda_m(B_\varepsilon \setminus A_\varepsilon) < \varepsilon$, то множество E измеримо.*

В частности, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое измеримое множество E_ε, что $E \subset E_\varepsilon$ и $\lambda_m(E_\varepsilon) < \varepsilon$, то множество E измеримо (и $\lambda_m(E) = 0$).

Это свойство вытекает из полноты меры Лебега. Оно есть частный случай леммы I.5.3. ►

5) *Счётное объединение множеств меры нуль снова есть множество меры нуль.*

Это общее свойство всех мер, определённых на σ-алгебре (см. следствие из теоремы I.3.2). ►

В частности,

5′) *всякое счётное множество имеет меру нуль.*

Так как непустое открытое множество имеет положительную меру, то

6) *множество нулевой меры не имеет внутренних точек.*

7) *Если $\lambda_m(e) = 0$, то для любого числа $\varepsilon > 0$ найдутся такие кубические ячейки Q_j, что*

$$\bigcup_{j\geqslant 1} Q_j \supset e, \quad \sum_{j\geqslant 1} \lambda_m(Q_j) < \varepsilon.$$

Действительно, из формулы (3) следует, что e можно покрыть ячейками P_n с рациональными вершинами таким образом, что $\sum\limits_{n\geqslant 1} \lambda_m(P_n) < \varepsilon$. Остаётся вспомнить, что каждая ячейка с рациональными вершинами есть дизъюнктное объединение конечного числа кубических ячеек. Поэтому $P_n = \bigvee\limits_{j=1}^{k_n} Q_{nj}$ и $\lambda_m(P_n) = \sum\limits_{j=1}^{k_n} \lambda_m(Q_{nj})$. Следовательно,

$$e \subset \bigcup_{n\geqslant 1} P_n = \bigcup_{n\geqslant 1} \bigvee_{j=1}^{k_n} Q_{nj} \quad \text{и} \quad \sum_{n\geqslant 1}\sum_{j=1}^{k_n} \lambda_m(Q_{nj}) = \sum_{n\geqslant 1} \lambda_m(P_n) < \varepsilon. \ ►$$

Существуют ли несчётные множества нулевой меры? Такие множества просто построить, если размерность пространства больше единицы. Ими, в частности, являются произвольные собственные аффинные подпространства. Такие подпространства максимальной размерности мы будем называть *плоскостями*. В полном объёме этот результат мы получим в конце п. 3.1, а пока установим его для плоскостей специального вида.

8) *Пусть m, k — натуральные числа, $m \geqslant 2$, $1 \leqslant k \leqslant m$, и пусть $c \in \mathbb{R}$. Рассмотрим плоскость $H_k(c)$ ортогональную k-й координатной оси:*

$$H_k(c) = \bigl\{x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \bigm| x_k = c\bigr\}.$$

Тогда $\lambda_m\bigl(H_k(c)\bigr) = 0$.

Достаточно доказать, что нулевую меру имеет любая ограниченная часть $H_k(c)$. Последнее верно, поскольку она содержится в ячейке произвольно малой меры (k-е ребро ячейки можно сделать сколь угодно малым). ►

9) *Всякое множество, содержащееся в конечном или счётном объединении плоскостей перпендикулярных координатным осям имеет меру нуль.*

Отсюда вытекает, что меры открытого параллелепипеда (a, b), ячейки $[a, b)$ и замкнутого параллелепипеда $[a, b]$ одинаковы, так как мера границы параллелепипеда равна нулю.

10) *Существуют неизмеримые по Лебегу множества.*

Мы докажем несколько более сильное утверждение, а именно:

Всякое множество положительной меры содержит неизмеримое по Лебегу подмножество.

В самом деле, пусть $A \in \mathfrak{A}^m$ и $\lambda_m(A) > 0$. Не умаляя общности будем считать, что множество A ограничено: $\|x\| < R$ при $x \in A$. Введём в A отношение эквивалентности, считая, что $x \sim y$, если разность $x - y$ есть вектор с рациональными координатами, т. е. если $x - y \in \mathbb{Q}^m$. Тогда A можно разбить на попарно не пересекающиеся непустые классы, состоящие из эквивалентных точек. Ясно, что каждый такой класс есть не более чем счётное множество. Пользуясь аксиомой выбора, выделим в A подмножество E, имеющее с каждым классом ровно по одной общей точке. Убедимся, что E не измеримо по Лебегу. Рассмотрим рациональные сдвиги множества E, т. е. множества вида $r + E = \{r + x \mid x \in E\}$, где $r \in \mathbb{Q}^m$ (обозначение r для векторов из $\mathbb{Q}^m$ мы сохраним до конца доказательства). Они попарно дизъюнктны (иначе в E нашлись бы две точки из одного класса эквивалентности). Кроме того, поскольку $\|x - y\| < 2R$ при $x, y \in A$, ясно, что множество A содержится в ограниченном множестве $W = \bigvee\limits_{\|r\|<2R} (r + E)$.

Допустим, что множество E измеримо. Как мы увидим далее (см. теорему 4.1), сдвиг измеримого множества снова есть измеримое множество, имеющее ту же меру. Поэтому множество W измеримо. Его мера положительна, так как $A \subset W$ и $\lambda_m(A) > 0$. Кроме того, она конечна, поскольку множество W ограничено. Итак, $0 < \lambda_m(W) < +\infty$. В то же время в силу счётной аддитивности меры Лебега

$$\lambda_m(W) = \sum_{\|r\|<2R} \lambda_m(r + E) = \sum_{\|r\|<2R} \lambda_m(E).$$

Однако сумма, стоящая справа, либо равна нулю (если $\lambda_m(E) = 0$), либо бесконечности (если $\lambda_m(E) > 0$), что несовместимо с двойным неравенством $0 < \lambda_m(W) < +\infty$. Таким образом, предположение об измеримости множества E приводит к противоречию. ►

Отметим, что мы доказали более общий факт, чем существование множеств, не измеримых по Лебегу. В самом деле, при построении такого множества мы не использовали никаких свойств меры Лебега, кроме того, что она конечна на ограниченных множествах и инвариантна относительно сдвига. Это означает, что неизмеримые

множества существуют для любой (ненулевой) меры, обладающей этими двумя свойствами. Иными словами, такую меру невозможно задать на всех подмножествах пространства $\mathbb{R}^m$. Заметим в связи с этим, что если отказаться от счётной аддитивности и ограничиться лишь конечной аддитивностью, то, как можно доказать, картина меняется: существует заданный на системе всех подмножеств и инвариантный относительно сдвигов объём, совпадающий на $\mathfrak{A}^m$ с мерой Лебега.

Трудность построения и некоторая таинственность множества, не измеримого по Лебегу, не должны затемнять сути дела: в типичной ситуации при стандартном продолжении не все множества оказываются измеримыми. На бытовом уровне это хорошо иллюстрирует следующий остроумный пример, сообщённый нам Д. А. Владимировым.

Некоторое количество ботинок одинакового цвета, фасона и размера свалено в кучу X. Каждая правильная пара (левый и правый ботинок) имеет цену, так же, как и набор из нескольких таких пар. Тем самым на некоторой системе подмножеств множества X задана мера (стоимость). Продолжить её естественным образом на систему всех подмножеств невозможно. Действительно, если множество, образованное двумя правильными парами, разбить на две части, состоящие только из левых и только из правых ботинок, то суммарная стоимость этих частей (если они имеют цену) должна сохраниться. Но тогда хотя бы одна часть должна стоить не меньше правильной пары, что нелепо.

1.4. Как вытекает из свойства 9), при $m \geqslant 2$ в пространстве $\mathbb{R}^m$ существуют несчётные множества нулевой меры. В одномерном случае привести примеры таких множеств не так просто. Здесь мы обсудим интересный пример такого рода — канторово множество, которое получается удалением из промежутка $[0,1]$ счётного семейства интервалов. Сначала удаляется один интервал — центральная треть исходного промежутка $[0,1]$ (т. е. интервал $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$), затем из оставшихся двух сегментов удаляются их центральные трети и т. д. Точки из $[0,1]$, не попавшие ни в один из удаляемых интервалов, образуют канторово множество $\mathcal{C}$. Рассмотрим эту конструкцию подробнее.

Пример. *Канторово**) *множество.* Пусть $\Delta = [0,1]$ и пусть множество C_1 получается удалением из Δ интервала $\delta = (\frac{1}{3},\frac{2}{3})$:

$$C_1 = \Delta \setminus \delta = \left[0,\tfrac{1}{3}\right] \cup \left[\tfrac{2}{3},1\right].$$

Сегменты $\Delta_0 = [0,\frac{1}{3}]$ и $\Delta_1 = [\frac{2}{3},1]$ мы будем называть сегментами первого ранга. Множество C_2 получается после удаления из сегментов Δ_0 и Δ_1 их средних третей, т. е. интервалов $\delta_0 = (\frac{1}{9},\frac{2}{9})$, $\delta_1 = (\frac{7}{9},\frac{8}{9})$. Разность $\Delta_\varepsilon \setminus \delta_\varepsilon$ $(\varepsilon = 0,\ 1)$ состоит из двух сегментов, из которых левый мы обозначим $\Delta_{\varepsilon 0}$, а правый — $\Delta_{\varepsilon 1}$. Таким образом, C_2 есть объединение четырёх сегментов Δ_{00}, Δ_{01}, Δ_{10}, Δ_{11}, которые мы будем называть сегментами второго ранга. Учитывая дальнейшее, подчеркнём, что сегменты второго ранга нумеруются индексами $\varepsilon_1\varepsilon_2$, где ε_1 и ε_2 независимо друг от друга принимают значения 0 и 1. При этом $\Delta_{\varepsilon_1\varepsilon_2} \subset \Delta_{\varepsilon_1}$.

Дальнейшее построение продолжается по индукции. Пусть построено множество C_n, состоящее из 2^n попарно не пересекающихся сегментов n-го ранга. "Нумерацию" сегментов n-го ранга удобно производить с помощью индексов $\varepsilon_1,\ \ldots,\ \varepsilon_n$, где

*) Георг Фердинанд Людвиг Филипп **Кантор** (Cantor), 1845–1918, — немецкий математик.

ε_j может принимать значение 0 или 1. Индексы сегментов первого и второго рангов уже указаны, дальнейшая индексация производится следующим образом. При построении сегментов $(n+1)$-го ранга из каждого сегмента n-го ранга $\Delta_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}$ удаляется интервал $\delta_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}$ — его средняя треть. Разность $\Delta_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n} \setminus \delta_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}$ состоит из двух сегментов $(n+1)$-го ранга, из которых левый обозначается $\Delta_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n 0}$, а правый — $\Delta_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n 1}$. Таким образом, при переходе от n к $n+1$ число сегментов удваивается, а длины их уменьшаются втрое. Сегменты $(n+1)$-го ранга попарно не пересекаются и $\Delta_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n\varepsilon_{n+1}} \subset \Delta_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}$. Множество C_{n+1} есть объединение всех сегментов $(n+1)$-го ранга. Пересечение $\mathcal{C} = \bigcap\limits_{n\geqslant 1} C_n$ называется *канторовым множеством.* Его мера равна нулю. Действительно, ясно, что длина каждого сегмента n-го ранга равна $\frac{1}{3^n}$. Поэтому мера множества C_n равна $(\frac{2}{3})^n$, а мера $\mathcal{C} = \bigcap\limits_{n\geqslant 1} C_n$ равна нулю.

Докажем теперь, что $\mathcal{C}$ равномощно множеству $\mathcal{E}$ всех двоичных последовательностей и, следовательно, как и оно, имеет мощность континуума. Напомним, что двоичной последовательностью называется последовательность, каждый член которой равен 0 или 1.

Поскольку для любой двоичной последовательности $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n\geqslant 1}$ сегмент $\Delta_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n\varepsilon_{n+1}}$ вложен в $\Delta_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}$, последовательность $\{\Delta_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}\}_{n\geqslant 1}$ имеет непустое пересечение, состоящее, очевидно, из единственной точки $t(\varepsilon)$. Для разных двоичных последовательностей ε и ε' точки $t(\varepsilon)$ и $t(\varepsilon')$ различны. В самом деле, пусть $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n\geqslant 1}$, $\varepsilon' = \{\varepsilon'_n\}_{n\geqslant 1}$ и пусть k — первый номер, когда $\varepsilon_n \neq \varepsilon'_n$. Иными словами,

$$\varepsilon = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{k-1}, \varepsilon_k, \ldots\}, \quad \varepsilon' = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{k-1}, \varepsilon'_k, \ldots\} \ \text{ и } \ \varepsilon_k \neq \varepsilon'_k.$$

Из построения точек $t(\varepsilon)$ и $t(\varepsilon')$ следует, что

$$t(\varepsilon) \in \Delta_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{k-1}\varepsilon_k}, \qquad t(\varepsilon') \in \Delta_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_{k-1}\varepsilon'_k}.$$

Так как различные сегменты k-го ранга не пересекаются, то $t(\varepsilon)$ и $t(\varepsilon')$ не могут совпадать, что доказывает взаимную однозначность отображения $\varepsilon \mapsto t(\varepsilon)$. Поскольку каждая точка из $\mathcal{C}$ принадлежит пересечению некоторой последовательности сегментов $\{\Delta_{\varepsilon_1\ldots\varepsilon_n}\}_{n\geqslant 1}$, построенное отображение есть отображение “на”. Это завершает доказательство биективности отображения $\varepsilon \mapsto t(\varepsilon)$ множества $\mathcal{E}$ на $\mathcal{C}$.

УПРАЖНЕНИЯ

В задачах 1–12 измеримость понимается как измеримость по Лебегу, а буква λ обозначает меру Лебега надлежащей размерности.

1) Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$ — измеримое множество, $0 < \lambda(E) < +\infty$ и $\varepsilon \in (0,1)$. Докажите существование такого куба Q, что $\lambda(E \cap Q) > (1-\varepsilon)\lambda_m(Q)$.

2) Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$ и $0 < t < \lambda_m(E)$. Докажите, что в множестве E найдётся такое ограниченное подмножество A, что $\lambda_m(A) = t$.

3) Если лебегова мера множества $A \subset \mathbb{R}^m$ больше 1, то найдутся такие различные точки $x, y \in A$, что $x - y \in \mathbb{Z}^m$.

4) Пусть $r > 2$. Докажите, что для почти всех чисел x найдётся такой коэффициент $c_x > 0$, что $\left|x - \frac{k}{n}\right| \geqslant \frac{c_x}{n^r}$ для всех дробей $\frac{k}{n}$.

5) Приведите пример таких (попарно различных) подмножеств $A_1, \dots, A_N$ отрезка $[0,1]$, меры которых равны $\frac{1}{2}$, а все элементы соответствующего канонического разбиения (см. п. I.1.3) являются промежутками одинаковой длины.

6) Докажите измеримость объединения любого (даже несчётного) семейства невырожденных промежутков.

7) Докажите, что точка t принадлежит канторову множеству $\mathcal{C}$ тогда и только тогда, когда она допускает представление $t = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n 3^{-n}$, где $\varepsilon_n = 0$ или 1. Убедитесь, что такое представление единственно. Проверьте равенства $\mathcal{C}+\mathcal{C} = \{s+t \mid s,t \in \mathcal{C}\} = [0,2]$ и $\mathcal{C}-\mathcal{C} = \{s-t \mid s,t \in \mathcal{C}\} = [-1,1]$.

8) Пусть числа $a_n > 0$ $(n \geqslant 0)$ таковы, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n a_n < 1$. Будем рассуждать как при построении канторова множества. Сначала из сегмента $[0,1]$ удалим среднюю часть длины a_0, т. е. интервал $\delta = (\frac{1-a_0}{2}, \frac{1+a_0}{2})$. Из двух остающихся сегментов удалим средние части длиной a_1 и так далее. Докажите, что это построение приводит к множеству, не имеющему внутренних точек, но положительной меры.

9) Используя множества, аналогичные построенному в предыдущем упражнении, докажите существование такого измеримого множества $E \subset (0,1)$, что для любого непустого интервала $\Delta \subset (0,1)$ множества $\Delta \cap E$ и $\Delta \setminus E$ имеют положительную меру.

10) Убедитесь, что граница открытого подмножества прямой может иметь положительную меру.

11) Используя результат упр. 1, докажите, что если множество A имеет положительную меру, то нуль — внутренняя точка множества $A - A = \{x - y \mid x, y \in A\}$.

12) Пусть $\mathfrak{U}$ — ультрафильтр в $\mathbb{N}$, состоящий из бесконечных множеств (см. § I.1, упр. 12). С каждым множеством $U \in \mathfrak{U}$ свяжем точку $x_U = \sum\limits_{n \in U} 2^{-n} \in [0,1]$ и рассмотрим множество $E = \{x_U \mid U \in \mathfrak{U}\}$. Докажите, что оно не измеримо. Указание. Убедитесь, что для любого интервала $(k2^{-N}, (k+1)2^{-N}) \subset (0,1)$ и каждой иррациональной точки z из него справедлива альтернатива: либо $z \in E$, $z' \notin E$, либо $z \notin E$, $z' \in E$, где z' — точка, симметричная z относительно середины этого интервала. Рассуждая от противного, воспользуйтесь результатом задачи 1, взяв $\varepsilon < 1/2$.

§ 2. Регулярность меры Лебега

В этом параграфе мы установим важное свойство меры Лебега, свидетельствующее о том, что её определение хорошо согласовано с топологией. Меру Лебега в $\mathbb{R}^m$ будем обозначать буквой λ, опуская указание на размерность.

2.1. Теорема. *Для любого измеримого множества $E \subset \mathbb{R}^m$ и любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое открытое множество G, что*

$$G \supset E \text{ и } \lambda(G \setminus E) < \varepsilon.$$

Доказательство. Предположим сначала, что $\lambda(E) < +\infty$. Пользуясь формулой (3) п. 1.2, найдём такие ячейки $P_n = [a_n, b_n)$, что

$$\bigcup_{n \geqslant 1} P_n \supset E, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(P_n) < \lambda(E) + \varepsilon. \tag{1}$$

Поскольку мера ячейки непрерывно зависит от её вершин, можно выбрать точки $a'_n < a_n$ настолько близкими к a_n, что

$$\lambda\big([a'_n, b_n)\big) < \lambda(P_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \quad \text{при всех } n \text{ из } \mathbb{N}.$$

Положим $G = \bigcup\limits_{n\geqslant 1} (a'_n, b_n)$. Очевидно,

$$E \subset \bigcup_{n\geqslant 1} P_n \subset \bigcup_{n\geqslant 1} (a'_n, b_n) = G \subset \bigcup_{n\geqslant 1} [a'_n, b_n).$$

В силу счётной полуаддитивности меры мы получаем

$$\lambda(G) \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \lambda\big([a'_n, b_n)\big) < \sum_{n\geqslant 1} \Big(\lambda(P_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\Big) = \sum_{n\geqslant 1} \lambda(P_n) + \varepsilon < \lambda(E) + 2\varepsilon \tag{2}$$

(в конце было использовано неравенство (1)). Следовательно,

$$\lambda(G \setminus E) = \lambda(G) - \lambda(E) < 2\varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε это доказывает утверждение теоремы для множества конечной меры.

В общем случае представим множество E в виде объединения последовательности множеств конечной меры: $E = \bigcup\limits_{n\geqslant 1} E_n$. По доказанному, для каждого n найдётся такое открытое множество G_n, что $E_n \subset G_n$ и $\lambda(G_n \setminus E_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Убедимся, что множество $G = \bigcup\limits_{n\geqslant 1} G_n$ удовлетворяет утверждению теоремы. В самом деле,

$$E = \bigcup_{n\geqslant 1} E_n \subset \bigcup_{n\geqslant 1} G_n = G \quad \text{и} \quad G \setminus E = \bigcup_{n\geqslant 1} (G_n \setminus E) \subset \bigcup_{n\geqslant 1} (G_n \setminus E_n).$$

Пользуясь счётной полуаддитивностью меры, мы получаем

$$\lambda(G \setminus E) \leqslant \sum_{n\geqslant 1} \lambda(G_n \setminus E_n) < \sum_{n\geqslant 1} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon. \ \blacktriangleright$$

2.2. Отметим несколько важных следствий из доказанной теоремы.

Следствие 1. *Для каждого измеримого множества E и любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое замкнутое множество F, что $F \subset E$ и $\lambda(E \setminus F) < \varepsilon$.*

Для доказательства рассмотрим такое открытое множество G, что

$$G \supset E^c = \mathbb{R}^m \setminus E, \quad \lambda(G \setminus E^c) < \varepsilon.$$

Тогда множество $F = G^c$ будет искомым, поскольку оно замкнуто, содержится в E и $E \setminus F = G \setminus E^c$. $\blacktriangleright$

Следствие 2. *Для любого измеримого множества E справедливы равенства*

$$\lambda(E) = \inf\{\lambda(G) \,|\, G \supset E,\ G \text{ — открытое множество}\},$$
$$\lambda(E) = \sup\{\lambda(F) \,|\, F \subset E,\ F \text{ — замкнутое множество}\}.$$

Второе равенство можно уточнить:

$$\lambda(E) = \sup\{\lambda(K) \,|\, K \subset E,\ K \text{ — компактное множество}\}.$$

Доказательство первых двух равенств немедленно следует из теоремы и следствия 1. Возможность использовать лишь компактные подмножества вытекает из равенства $\lambda(F) = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda\big(F \cap [-n,n]^m\big)$, справедливого в силу непрерывности меры снизу (см. п. I.3.3). Оно позволяет сколь угодно полно исчерпать компактными множествами $F \cap [-n,n]^m$ любое замкнутое подмножество $F \subset E$, а следовательно, и всё множество E. ►

Установленное в следствии 2 свойство называется *регулярностью* меры Лебега. Оно означает, что каждое измеримое множество можно, изменяя меру сколь угодно мало, аппроксимировать изнутри замкнутыми множествами, а снаружи — открытыми множествами. Подчеркнём, что поменять ролями замкнутые и открытые множества нельзя. Например, множество E, состоящее из рациональных точек промежутка $(0,1)$ и имеющее, очевидно, нулевую (одномерную) лебеговскую меру, нельзя хорошо аппроксимировать объемлющим замкнутым множеством, так как всякое такое множество содержит отрезок $[0,1]$ и поэтому имеет меру не меньше единицы. Аналогичным образом, дополнение множества E до отрезка $[0,1]$, имеющее меру 1, но пустую внутренность, невозможно хорошо аппроксимировать содержащимися в нём открытыми множествами.

Замечание. Первое из доказанных в следствии 2 равенств остаётся верным для любых (не обязательно измеримых) множеств, если заменить $\lambda(E)$ внешней мерой $\lambda^*(E)$.

Действительно, если $\lambda^*(E) = +\infty$, то оно очевидно ввиду монотонности внешней меры, а если $\lambda^*(E) < +\infty$, то можно рассуждать дословно так же, как при доказательстве неравенства (2), заменив лишь $\lambda(E)$ на $\lambda^*(E)$.

Величину $\lambda_*(E) = \sup\{\lambda(F) \,|\, F \subset E,\ F$ — замкнутое множество$\}$ называют иногда *внутренней мерой* множества E. Как мы убедились, равенство внешней и внутренней меры — необходимое условие измеримости множества. Можно доказать (см. упр. 1), что если $\lambda_*(E) < +\infty$, то это условие и достаточно. Именно оно было положено Лебегом в основу определения измеримости ограниченного множества.

Следствие 3. *Всякое измеримое множество E представимо в виде $E = e \cup \bigcup\limits_{n\geqslant 1} K_n$, где $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — возрастающая последовательность компактных множеств, а $\lambda(e) = 0$.*

Достаточно рассмотреть случай, когда E ограничено. По следствию 2 найдутся такие компактные множества $K_n \subset E$, что $\lambda(E \setminus K_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. При этом можно считать, что $K_n \subset K_{n+1}$ (иначе следует заменить каждое множество K_n объединением $K_1 \cup \ldots \cup K_n$). Положим

$$e = E \setminus \bigcup_{n\geqslant 1} K_n.$$

Тогда $E = e \cup \bigcup\limits_{n\geqslant 1} K_n$ и $\lambda(e) = 0$, поскольку $\lambda(e) \leqslant \lambda(E \setminus K_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. ►

Следствие 4. *Всякое измеримое множество E представимо в виде $E = \Big(\bigcap\limits_{n\geqslant 1} G_n\Big) \setminus e$, где множества G_n открыты, а $\lambda(e) = 0$.*

Доказательство этого следствия мы предоставляем читателю.

Следствия 3 и 4 показывают, что с точностью до множеств нулевой меры каждое измеримое множество есть объединение последовательности замкнутых множеств

(т. е. множество типа F_σ) и пересечение последовательности открытых множеств (т. е. множество типа G_δ).

Напомним, что множества, входящие в минимальную σ-алгебру, содержащую все открытые множества, называются борелевскими множествами. Из следствий 3 и 4 вытекает

Следствие 5. *Всякое измеримое множество можно изнутри и снаружи аппроксимировать борелевскими множествами той же меры. Иными словами, если множество E измеримо, то найдутся такие борелевские множества A и B, что*

$$A \subset E \subset B, \quad \lambda(B \setminus A) = 0.$$

Если $\lambda(E) < +\infty$, то это следствие — частный случай следствия I.5.2.

2.3. Если стремиться обобщить понятие регулярности на другие меры в $\mathbb{R}^m$, то следует предполагать, что они определены на открытых и замкнутых множествах, а следовательно, и на минимальной σ-алгебре, содержащей эти множества, т. е. на борелевских множествах. В связи с этим введём следующее

Определение. Мера, заданная на σ-алгебре борелевских подмножеств топологического пространства X, называется *борелевской* мерой в X.

Теорема 2.1 остаётся справедливой для любой борелевской меры μ в открытом множестве $\mathcal{O}$ ($\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m$), если эта мера конечна на ячейках, содержащихся в $\mathcal{O}$ вместе с замыканием.

Действительно, единственным специфическим свойством меры Лебега, которым мы воспользовались при доказательстве теоремы, была непрерывная зависимость меры ячейки от её вершин. В общем случае можно вместо этого использовать непрерывность меры сверху и рассуждать следующим образом. Ячейка $P = [a, b)$ есть пересечение убывающей последовательности ячеек $[a - \frac{1}{n}h, b)$, где $h = b - a > 0$. Ясно, что $[a - \frac{1}{n}h, b] \subset \mathcal{O}$, если n достаточно велико (напомним, что $\overline{P} \subset \mathcal{O}$). По непрерывности меры сверху $\mu\big([a - \frac{1}{n}h, b)\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu(P)$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такую ячейку $[a', b)$, что $P \subset (a', b)$, $[a', b] \subset \mathcal{O}$, и $\mu([a', b)) < \mu(P) + \varepsilon$ (например, можно положить $a' = a - \frac{1}{n}h$ при достаточно большом n). Опираясь на этот факт, мы можем построить ячейки $[a'_n, b_n)$, $a'_n < a_n$, удовлетворяющие соотношениям (2) (с заменой λ на μ), после чего доказательство теоремы 2.1 для меры μ завершается без всяких изменений.

Все следствия из теоремы 2.1 также остаются справедливыми и в этой более общей ситуации. Как и в случае меры Лебега, свойство меры указанное в следствии 2, называется её *регулярностью*. Таким образом, справедлива следующая

Теорема. *Пусть $\mathcal{O}$ — произвольное открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^m$. Если борелевская мера μ в $\mathcal{O}$ конечна на ячейках, содержащихся в $\mathcal{O}$ вместе с замыканием, то она регулярна, т. е. для любого борелевского множества E, $E \subset \mathcal{O}$, справедливы равенства*

$$\mu(E) = \inf\{\mu(G) \,|\, G \supset E,\ G \text{ — открытое множество, } G \subset \mathcal{O}\},$$
$$\mu(E) = \sup\{\mu(F) \,|\, F \subset E,\ F \text{ — замкнутое множество}\}.$$

Следствие. *Пусть μ — борелевская мера в пространстве $\mathbb{R}^m$. Тогда для любого борелевского множества $E \subset \mathbb{R}^m$ конечной меры справедливо равенство*

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) \mid K \subset E,\ K \text{ — компактное множество}\}.$$

Действительно, не умаляя общности можно считать, что μ — конечная мера (в противном случае её следует заменить мерой $\widetilde{\mu}$, определяемой равенством $\widetilde{\mu}(A) = \mu(A \cap E)$). Для конечной меры доказательство можно провести по образцу следствия 2 п. 2.2. ▶

Заметим, что σ-конечная борелевская мера в пространстве $\mathbb{R}^m$ может не быть регулярной (см. упр. 3). Дополнительные результаты о регулярности борелевских мер в метризуемых пространствах приведены в добавлении III.

УПРАЖНЕНИЯ

1) Докажите измеримость множества, у которого внешняя и внутренняя меры совпадают и конечны.

2) Докажите, что стандартное продолжение произвольной регулярной меры есть регулярная мера.

3) Докажите, что борелевская мера в $\mathbb{R}$, порождённая единичными нагрузками в точках $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, не регулярна.

§ 3. Сохранение измеримости при гладком отображении

Пусть $\mathcal{O}$ — открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^m$. Символом $C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}^n)$ будем обозначать множество всех гладких (т. е. один раз непрерывно дифференцируемых) отображений из $\mathcal{O}$ в $\mathbb{R}^n$. Производная гладкого отображения Φ в точке x обозначается символом $\Phi'(x)$. Открытый шар с центром в точке x и радиусом r обозначается $B(x, r)$.

3.1. Введём важный класс отображений, который будем многократно использовать в дальнейшем.

Определение. Говорят, что отображение $\Phi\colon E \to \mathbb{R}^n$ удовлетворяет *условию Липшица**) на множестве $E \subset \mathbb{R}^m$, если существует такое число L, что

$$\|\Phi(x) - \Phi(x')\| \leqslant L\|x - x'\| \quad \text{при всех } x,\ x' \text{ из } E.$$

Число L называют *константой Липшица* для Φ.

Как доказано в следствии 2 п. Д.VII.2, гладкое отображение локально удовлетворяет условию Липшица.

Установим простое достаточное условие сохранения измеримости. Для краткости меру Лебега в $\mathbb{R}^m$ будем обозначать буквой λ, опуская указание на размерность.

---

*) Рудольф Отто Сигизмунд **Липшиц** (Lipschitz), 1832–1903, — немецкий математик.

Теорема. *Пусть $\mathcal{O}$ — открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^m$, $\Phi \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m)$. Тогда для любого измеримого множества A, $A \subset \mathcal{O}$, множество $\Phi(A)$ также измеримо. Если $\lambda(A) = 0$, то $\lambda\big(\Phi(A)\big) = 0$.*

Доказательство. Как вытекает из регулярности меры Лебега (см. п. 2.2, следствие 3), измеримое множество A представимо в виде $A = e \cup \bigcup\limits_{n \geqslant 1} K_n$, где K_n — компактные множества, а e — множество меры нуль. Так как множества $\Phi(K_n)$ компактны и

$$\Phi(A) = \Phi(e) \cup \bigcup_{n \geqslant 1} \Phi(K_n),$$

то для доказательства теоремы нам достаточно убедиться в справедливости её последнего утверждения.

Итак, пусть $\lambda(A) = 0$. Предположим сначала, что

$$A \subset P, \quad \overline{P} \subset \mathcal{O}, \quad \text{где} \quad P \in \mathscr{P}^m .$$

Пусть L — постоянная Липшица, соответствующая $\overline{P}$ (см. следствие 2 п. Д.VII.2). Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$ и, пользуясь свойством 7 п. 1.3, найдём такую последовательность кубических ячеек $\{Q_n\}_{n \geqslant 1}$, что

$$A \subset \bigcup_{n \geqslant 1} Q_n, \qquad \sum_{n \geqslant 1} \lambda(Q_n) < \varepsilon.$$

Очевидно, $A \subset \bigcup\limits_{n \geqslant 1} (Q_n \cap P)$. Пусть h_n — длина ребра Q_n. Тогда $\|x - y\| \leqslant h_n \sqrt{m}$ для всех x, y из $\overline{Q}_n$, и поэтому $\|\Phi(x) - \Phi(y)\| \leqslant L\,\|x - y\| \leqslant L\,h_n \sqrt{m}$ при $x, y \in \overline{Q}_n \cap \overline{P}$. Таким образом, множество $\Phi(\overline{Q}_n \cap \overline{P})$ содержится в шаре радиуса $Lh_n\sqrt{m}$, а следовательно, и в кубе с длиной стороны $2Lh_n\sqrt{m}$. Поэтому $\lambda\big(\Phi(\overline{Q}_n \cap \overline{P})\big) \leqslant (2Lh_n\sqrt{m}\,)^m \equiv C\lambda(Q_n)$. Множество $H = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} \Phi(\overline{Q}_n \cap \overline{P})$ содержит $\Phi(A)$ и измеримо как объединение компактных множеств $\Phi(\overline{Q}_n \cap \overline{P})$. Кроме того,

$$\lambda(H) \leqslant \sum_{n \geqslant 1} \lambda\big(\Phi(\overline{Q}_n \cap \overline{P})\big) \leqslant C \sum_{n \geqslant 1} \lambda(Q_n) < C\varepsilon.$$

Таким образом, множество $\Phi(A)$ может быть заключено в множество произвольно малой меры. В силу полноты меры Лебега оно измеримо и имеет нулевую меру (см. п. 1.3, свойство 4).

Рассмотрим теперь общий случай. По теореме I.1.7 открытое множество $\mathcal{O}$ может быть представлено в виде объединения последовательности ячеек P_n, содержащихся в $\mathcal{O}$ вместе с замыканием: $\mathcal{O} = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} P_n$, $\overline{P}_n \subset \mathcal{O}$. В этом случае

$$A = \bigcup_{n \geqslant 1} (A \cap P_n), \quad \Phi(A) = \bigcup_{n \geqslant 1} \Phi(A \cap P_n).$$

Как уже доказано, множества $\Phi(A \cap P_n)$ имеют нулевую меру. Такова и мера всего множества $\Phi(A)$. ▶

Замечание. Из доказательства теоремы видно, что мы не использовали гладкость отображения в полном объёме, а использовали лишь условие Липшица. Поэтому теорема остаётся справедливой для любого отображения, локально удовлетворяющего этому условию. В частности, такие отображения преобразуют множества меры нуль снова в множества меры нуль, т. е., как говорят, обладают свойством (N), введённым Лузиным*).

Следствие. *Пусть G — открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^m$, $f \in C^1(G)$ и пусть $\Gamma_f = \big\{(x, f(x)) \,|\, x \in G\big\} \subset \mathbb{R}^{m+1}$ — график функции f (мы отождествляем естественным образом пространства $\mathbb{R}^{m+1}$ и $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$). Тогда $\lambda_{m+1}(\Gamma_f) = 0$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{O} = G \times \mathbb{R}$. Положим $\Phi(x, y) = (x, f(x))$ для точек (x, y) из $\mathcal{O}$. Ясно, что $\mathcal{O}$ — открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^{m+1}$ и $\Phi \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}^{m+1})$. Очевидно, что $\Gamma_f = \Phi(e)$, где $e = G \times \{0\}$. Поскольку $\lambda_{m+1}(e) = 0$, для получения равенства $\lambda_{m+1}(\Gamma_f) = 0$ остаётся сослаться на теорему. ►

Из следствия, в частности, вытекает, что m-мерная лебегова мера всякого собственного аффинного подпространства пространства $\mathbb{R}^m$ равна нулю. Поэтому мера любого параллелепипеда совпадает, как мы уже отмечали в п. 1.3, с мерой его замыкания и его внутренности. Аналогично, мера открытого шара совпадает с мерой его замыкания.

3.2. Здесь мы покажем, что измеримость множества по Лебегу, вообще говоря, не сохраняется при непрерывном отображении. Таким образом, условие Липшица, гарантирующее измеримость образа измеримого множества (см. замечание в предыдущем пункте), нельзя заменить более слабым условием, предположив лишь непрерывность.

Чтобы убедиться в этом, достаточно построить непрерывное отображение φ, переводящее какое-нибудь множество e нулевой меры в множество $\varphi(e)$ положительной меры. Действительно, в этом случае, взяв в $\varphi(e)$ неизмеримое подмножество E (см. п. 1.3), мы получим, что $E = \varphi(e_0)$, $e_0 \subset e$. Множество e_0 измеримо (в силу полноты меры Лебега измеримы все подмножества множества с нулевой мерой), в то время как его образ E неизмерим.

Для построения такого примера мы, ограничившись одномерным случаем, используем *функцию Кантора* φ, которая часто оказывается полезной в аналогичных ситуациях, поскольку её свойства довольно необычны. Например, она непрерывна и её производная почти всюду равна нулю, но $\varphi \not\equiv \mathrm{const}$ (по поводу других свойств функции Кантора см. упр. 3–5).

Эта функция, заданная на $[0, 1]$ и тесно связанная с канторовым множеством $\mathcal{C}$ (см. 1.4), строится следующим образом. По определению $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(1) = 1$, а на центральной трети интервала $(0, 1)$, т. е. при $x \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, значение φ постоянно и равно полусумме значений φ на его концах: $\varphi(x) = \frac{1}{2}\big(\varphi(0) + \varphi(1)\big) = \frac{1}{2}$. На каждом из оставшихся интервалов $(0, \frac{1}{3})$ и $(\frac{2}{3}, 1)$ эта процедура повторяется — на центральной трети промежутка функция φ постоянна и равна там полусумме значений на его концах (т. е. $\varphi(x) = \frac{1}{4}$ на $[\frac{1}{9}, \frac{2}{9}]$ и $\varphi(x) = \frac{3}{4}$ на $[\frac{7}{9}, \frac{8}{9}]$). Неограниченно повторяя это построение, мы определим φ на плотном подмножестве отрезка $[0, 1]$. Остаётся определить φ на его дополнении, т. е. на множестве, которое получается из канторова множества удалением концов всех дополнительных к $\mathcal{C}$ интервалов. С сохранением непрерывности

*) Николай Николаевич **Лузин**, 1883–1950, — российский математик.

или монотонности на всём промежутке $[0,1]$ это можно сделать единственным образом. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что при нашем построении на каждом шаге получается возрастающая функция, приращение которой на промежутках длиной $\frac{1}{3^n}$ не превосходит $\frac{1}{2^n}$. График функции φ (см. рис. 1) называют иногда канторовой лестницей.

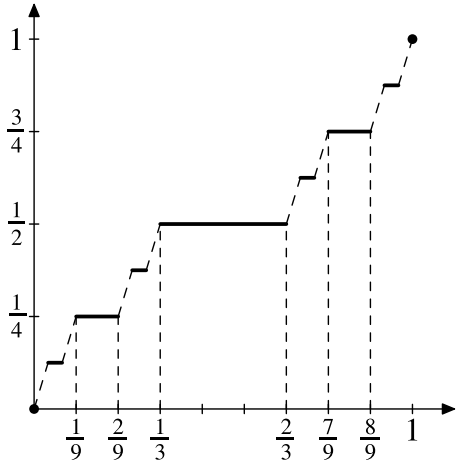


Рис. 1.

Из построения видно, что φ постоянна на интервалах, дополнительных к канторову множеству. Так как их концы принадлежат $\mathcal{C}$, то $\varphi(\mathcal{C}) = \varphi\big([0,1]\big)$. Таким образом, φ-образ канторова множества, имеющего нулевую меру, совпадает с $[0,1]$. Как мы отметили выше, отсюда следует неизмеримость образа некоторой части канторова множества.

3.3. В заключение параграфа коротко обсудим вопрос о сохранении измеримости по Борелю. Справедлив общий результат, согласно которому гомеоморфный образ борелевского множества есть борелевское множество. Его доказательство в полном объёме требует значительных усилий и выходит за рамки этой книги. Читатель может найти его, например, в [Б], т. II и [Бу1]. Мы ограничимся доказательством этого утверждения при дополнительном предположении. В будущем нам потребуется лишь этот частный случай.

Предложение. *Пусть Θ — гомеоморфизм, заданный на борелевском множестве A. Если обратное отображение Θ^{-1} удовлетворяет условию Липшица, то множество $B = \Theta(A)$ — борелевское.*

Доказательство. Так как обратное отображение удовлетворяет условию Липшица и, следовательно, равномерно непрерывно на B, то его можно продолжить до непрерывного отображения $\Psi\colon \overline{B} \to \mathbb{R}^m$. Убедимся, что

$$\Psi^{-1}(A) = B. \tag{1}$$

Если это равенство верно, то по следствию 2 п. I.6.2 B есть борелевское подмножество $\overline{B}$ (как прообраз борелевского множества при непрерывном отображении), а следовательно, и борелевское подмножество $\mathbb{R}^m$ (см. следствие 3 п. I.6.2).

Очевидно, что $\Psi^{-1}(A) \supset B$. Поэтому, доказывая равенство (1), достаточно проверить обратное включение. Если оно не выполнено, то найдётся такая точка $y_0 \in \overline{B} \setminus B$, что $x_0 = \Psi(y_0) \in A$. Рассмотрим точки $y_j \in B$, сходящиеся к y_0, и положим $x_j = \Psi(y_j) = \Theta^{-1}(y_j)$. Тогда по непрерывности Ψ мы имеем, что $x_j = \Psi(y_j) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \Psi(y_0) = x_0$. Вместе с тем, по непрерывности Θ

$$\Theta(x_j) = \Theta\big(\Theta^{-1}(y_j)\big) = y_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} \Theta(x_0) \in \Theta(A) = B.$$

Это противоречит тому, что $y_j \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} y_0 \notin B$. ►

Обратим внимание читателя, что сохраняя измеримость по Борелю, гомеоморфизм, вообще говоря, не сохраняет измеримости по Лебегу, даже если он удовлетворяет дополнительному условию предложения (см. упр. 5).

УПРАЖНЕНИЯ

1) Докажите, что график функции, непрерывной в открытом подмножестве пространства $\mathbb{R}^m$, имеет нулевую $(m+1)$-мерную меру.

2) Пусть X — измеримое подмножество пространства $\mathbb{R}^m$ и $F \in C(X, \mathbb{R}^m)$. Проверьте, что отображение F сохраняет измеримость тогда и только тогда, когда оно обладает свойством (N) (см. замечание 3.1).

3) Докажите следующие свойства функции Кантора φ (см. п. 3.2):

а) $\varphi(x) + \varphi(1-x) = 1$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$;

б) $\varphi(\frac{x}{3}) = \frac{\varphi(x)}{2}$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$;

в) $\varphi\big(x + \frac{2}{3^n}\big) = \varphi(x) + \frac{1}{2^n}$ при $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3^n}$;

г) $\big(\frac{x}{2}\big)^\alpha \leqslant \varphi(x) \leqslant x^\alpha$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$, где $\alpha = \log_3 2$.

4) Чему равна площадь подграфика функции Кантора?

5) Пусть $\mathcal{C}$ — канторово множество, φ — канторова функция, $g(x) = x + \varphi(x)$ $(x \in [0,1])$. Докажите, что

а) g есть гомеоморфизм;

б) мера множества $g(\mathcal{C})$ равна единице;

в) среди образов множеств нулевой меры есть неизмеримые.

Таким образом, гомеоморфизм g не сохраняет измеримость.

6) Говорят, что функция f удовлетворяет на промежутке $[a,b]$ условию Липшица порядка α $(\alpha > 0)$, если существует такое положительное число L, что $|f(x) - f(y)| \leqslant L|x-y|^\alpha$ для всех x, y из $[a,b]$. Убедитесь, что функция Кантора удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha = \log_3 2$.

7) Докажите, что для любого $\alpha \in (0,1)$ существует функция, удовлетворяющая условию Липшица порядка α, но не обладающая свойством (N) и, следовательно, не сохраняющая измеримости по Лебегу. Указание. Обобщите построение канторовой функции, используя вместо $\mathcal{C}$ множество, описанное в упр. 8 § 1.

§ 4. Инвариантность меры Лебега при движении

Напомним, что *движением в пространстве* $\mathbb{R}^m$ называется композиция сдвига и ортогонального преобразования. Мы начнём с изучения поведения меры Лебега при сдвиге.

Всюду в этом параграфе, за исключением пунктов 4.5 и 4.6, мера Лебега обозначается буквой λ без указания на размерность.

4.1. *Сдвигом* на вектор $v \in \mathbb{R}^m$ называется отображение $x \mapsto v + x \quad (x \in \mathbb{R}^m)$. Образ множества E при таком отображении будем обозначать $v + E$.

Теорема. *При сдвиге измеримость множества сохраняется и его мера остаётся неизменной. Иными словами, если $v \in \mathbb{R}^m$, $E \in \mathfrak{A}^m$, то $v + E \in \mathfrak{A}^m$ и $\lambda(v + E) = \lambda(E)$.*

Доказательство. Измеримость образа измеримого множества при сдвиге немедленно следует из теоремы 3.1, поскольку сдвиг есть гладкое отображение. Поэтому можно, зафиксировав произвольно вектор v, определить на σ-алгебре $\mathfrak{A}^m$ функцию μ равенством $\mu(E) = \lambda(v+E) \ \ (E \in \mathfrak{A}^m)$. Мы предоставляем читателю проверить, что μ есть мера. Так как при сдвиге на v образ ячейки $[a, b)$ есть ячейка $[a + v, b + v)$ с теми же длинами рёбер, то меры μ и λ совпадают на полукольце ячеек, и по теореме о единственности продолжения меры (см. п. I.5.1) они совпадают на всей σ-алгебре $\mathfrak{A}^m$. ►

4.2. Зададимся теперь вопросом, как описать все меры в пространстве $\mathbb{R}^m$, инвариантные относительно сдвига. Чтобы исключить казуистические случаи (например, считающую меру, инвариантную, очевидно, относительно любой биекции), мы наложим на рассматриваемые меры естественное ограничение. Тогда оказывается, что всякая мера, инвариантная относительно сдвига, пропорциональна мере Лебега.

Теорема. *Пусть μ — мера, определённая на алгебре $\mathfrak{A}^m$ измеримых по Лебегу множеств. Предположим, что*

а) мера μ инвариантна относительно сдвига, т. е. $\mu(v + E) = \mu(E)$ при любом v из $\mathbb{R}^m$ и любом E из $\mathfrak{A}^m$;

б) мера каждого ограниченного измеримого множества конечна.

Тогда найдётся такое число k, $0 \leqslant k < +\infty$, что $\mu = k\lambda$, т. е.

$$\mu(E) = k\lambda(E) \quad \text{для любого множества } E \text{ из } \mathfrak{A}^m. \tag{1}$$

Легко видеть, что условие б) равносильно тому, что конечны меры всех ячеек, а с учётом условия а) — хотя бы одной непустой ячейки. Равным образом можно было бы потребовать конечности мер компактных множеств.

Доказательство. Положим $Q = [0, 1)^m$. Если равенство (1) справедливо, то, очевидно, $k = \mu(Q)$. Это число k мы и будем рассматривать.

1) Пусть сначала $k = 1$, т. е. $\mu(Q) = \lambda(Q) = 1$. Убедимся, что $\mu = \lambda$. Как было отмечено после формулы (3) п. 1.2, λ есть стандартное продолжение с полукольца $\mathscr{P}_r^m$ ячеек с рациональными вершинами. Поэтому согласно теореме единственности для доказательства совпадения мер λ и μ достаточно проверить, что они совпадают на $\mathscr{P}_r^m$. Поскольку каждая ячейка с рациональными вершинами есть дизъюнктное объединение кубических ячеек с рациональными вершинами, достаточно убедиться, что λ и μ

совпадают на них. Так как всякая ячейка есть сдвиг ячейки с вершиной в нуле, то достаточно доказать совпадение мер μ и λ на ячейках $Q_n = [0, \frac{1}{n})^m$, где $n \in \mathbb{N}$.

Ячейка Q есть объединение n^m попарно не пересекающихся сдвигов ячейки Q_n (см. рис. 2).

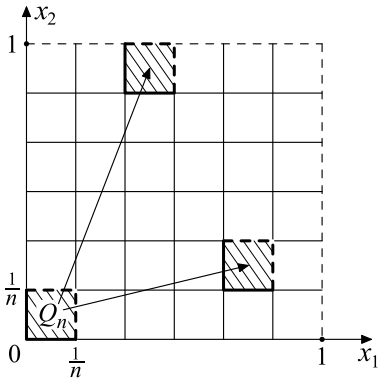


Рис. 2.

Поэтому $n^m \mu(Q_n) = \mu(Q) = 1$ и, следовательно, $\mu(Q_n) = n^{-m} = \lambda(Q_n)$. Тем самым доказательство в рассматриваемом случае завершено.

2) Пусть теперь $k = \mu(Q)$ произвольное положительное число. Введём вспомогательную меру $\widetilde{\mu} = \mu/k$. Ясно, что она, как и μ, инвариантна относительно сдвига и $\widetilde{\mu}(Q) = 1$. Как уже доказано, такая мера совпадает с λ, и, следовательно, равенство (1) справедливо.

3) Если $\mu(Q) = 0$, то и $\mu(\mathbb{R}^m) = 0$, поскольку пространство $\mathbb{R}^m$ покрывается счётным семейством сдвигов ячейки Q. Таким образом, в этом случае μ — это нулевая мера, для которой равенство (1) верно при $k = 0$. ►

Замечание. Если мера μ, удовлетворяющая условиям а) и б), определена не на всей σ-алгебре $\mathfrak{A}^m$, а на некоторой её подалгебре, содержащей ячейки и сдвиги любых входящих в неё множеств (например, на борелевских множествах), то, как видно из доказательства, равенство (1) сохраняется для всех множеств, на которых определена мера μ.

4.3. Из доказанной теоремы и рассуждений, проведённых в п. 1.3 при доказательстве существования множеств, не измеримых по Лебегу, следует, что не существует ненулевой меры, определённой на всех подмножествах пространства $\mathbb{R}^m$, которая была бы конечна на ячейках и инвариантна относительно сдвигов.

Если отказаться от счётной аддитивности, то положение меняется. Как доказал Банах*), в любом пространстве $\mathbb{R}^m$ существует (и даже не один) объём, определённый на кольце всех ограниченных множеств, инвариантный относительно сдвигов и совпадающий с классическим объёмом на ячейках. В двумерном случае можно даже добиться, чтобы такой объём был инвариантен не только относительно сдвигов, но и относительно всевозможных вращений. В пространствах большей размерности объёмы,

*) Стефан **Банах** (Banach), 1892–1945, — польский математик.

заданные на всех ограниченных множествах и инвариантные относительно вращений, существовать не могут, поскольку вращений там “слишком много” и группа движений “слишком некоммутативна” (см. [Н], гл. III, § 7 и Дополнения; обсуждение этого вопроса с более общей точки зрения можно найти в книге [Г]).

4.4. Оказывается, мера Лебега инвариантна не только относительно сдвига, но и относительно любого ортогонального преобразования.

Теорема. *При ортогональном преобразовании измеримость множества сохраняется и его мера остаётся неизменной. Иными словами, если* $U\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *— ортогональное преобразование,* $E \in \mathfrak{A}^m$*, то* $U(E) \in \mathfrak{A}^m$ *и* $\lambda\bigl(U(E)\bigr) = \lambda(E)$.

Доказательство. Сохранение измеримости множества под действием ортогонального преобразования вытекает из теоремы 3.1. Чтобы доказать, что мера множества при этом остаётся неизменной, воспользуемся теоремой о мерах, инвариантных при сдвиге.

Рассмотрим на σ-алгебре $\mathfrak{A}^m$ функцию множества μ, определённую равенством

$$\mu(E) = \lambda\bigl(U(E)\bigr) \quad (E \in \mathfrak{A}^m).$$

Читатель легко проверит, что это мера и что она конечна на ячейках. Наша цель — доказать, что $\mu = \lambda$. Проверим, что мера μ инвариантна относительно сдвига. Так как $U(v+E) = U(v)+U(E)$, то пользуясь инвариантностью меры Лебега относительно сдвига, мы получаем

$$\mu(v+E) = \lambda\bigl(U(v+E)\bigr) = \lambda\bigl(U(v)+U(E)\bigr) = \lambda\bigl(U(E)\bigr) = \mu(E).$$

По теореме 4.2 мера μ пропорциональна мере Лебега: $\mu = k\lambda$. Убедимся в заключение, что $k = 1$. Пусть B — произвольный шар с центром в нуле. Тогда $U(B) = B$, и поэтому

$$k\lambda(B) = \mu(B) = \lambda\bigl(U(B)\bigr) = \lambda(B) > 0.$$

Следовательно, $k = 1$, и меры μ и λ совпадают. ►

Сопоставив доказанную теорему и теорему 4.1, мы получим важный результат.

Следствие. *Мера Лебега сохраняется при движении.*

Инвариантность меры Лебега позволяет вычислять объёмы прямоугольных параллелепипедов, поскольку движением их можно перевести в параллелепипеды, рёбра которых параллельны координатным осям.

Пример. Мера прямоугольного параллелепипеда равна произведению длин его рёбер.

Прежде всего заметим, что объёмы всех параллелепипедов с фиксированной вершиной и данными рёбрами одинаковы, как было отмечено после следствия 3.1. Ввиду инвариантности меры Лебега относительно сдвига нам достаточно вычислить объём открытого параллелепипеда вида

$$P = \left\{ \sum_{j=1}^{m} t_j\, v_j \;\middle|\; 0 < t_j < 1 \ \text{ при } \ j = 1, 2, \ldots, m \right\},$$

рёбра которого $v_1, \dots, v_m$ попарно ортогональны. Нормируем векторы v_j, положив $g_j = \frac{v_j}{s_j}$, где $s_j = \|v_j\|$ $(j = 1, \dots, m)$. Ясно, что векторы $g_1, \dots, g_m$ образуют ортонормированный базис в $\mathbb{R}^m$. Рассмотрим линейное преобразование U, переводящее векторы канонического базиса $e_1, \dots, e_m$ в векторы $g_1, \dots, g_m$. Это ортогональное преобразование, причём $v_j = s_j U(e_j)$. Из определения параллелепипеда видно, что $P = U(R)$, где R — параллелепипед $\prod\limits_{j=1}^{m} (0, s_j)$. Так как ортогональное преобразование сохраняет меру, то

$$\lambda(P) = \lambda(R) = \prod_{j=1}^{m} s_j = \prod_{j=1}^{m} \|v_j\|.$$

В полной общности задачу о вычислении объёма параллелепипеда (не только прямоугольного) с заданными рёбрами мы рассмотрим в следующем параграфе (п. 5.3).

4.5. Теорема 4.2 позволяет говорить о мере Лебега в любом конечномерном векторном пространстве X. Действительно, поскольку X алгебраически изоморфно $\mathbb{R}^m$ при $m = \dim X$, мы можем, используя этот изоморфизм, "перенести" меру Лебега из $\mathbb{R}^m$ в X и получить меру μ, инвариантную относительно сдвига и конечную на ограниченных подмножествах. Как следует из теоремы 4.2, всякая другая мера, обладающая этими свойствами, пропорциональна μ. Таким образом, строя в X меру с помощью другого изоморфизма, мы получим меру, пропорциональную μ. Если X — евклидово пространство, и мы рассматриваем лишь изоморфизмы, сохраняющие скалярное произведение, то мера μ определяется однозначно, поскольку в силу теоремы 4.4 линейная изометрия сохраняет меру Лебега.

Отметим одно важное обстоятельство, которое мы используем в § 5 и в дальнейшем, в главе VIII. При $k < m$ k-мерную меру Лебега естественным образом можно определить на всех k-мерных аффинных подпространствах пространства $\mathbb{R}^m$. По определению она есть образ меры Лебега λ_k в $\mathbb{R}^k$, полученный при некотором движении (мы отождествляем $\mathbb{R}^k$ с подпространством, состоящим из точек, у которых последние $m - k$ координат равны нулю). Иными словами, если L некоторое k-мерное аффинное подпространство в $\mathbb{R}^m$, а $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ такое движение, что $L = T(\mathbb{R}^k)$, то множество $E \subset L$ называется измеримым, если измерим его прообраз $T^{-1}(E) \subset \mathbb{R}^k$, и мы полагаем, что мера Лебега множества E равна $\lambda_k\bigl(T^{-1}(E)\bigr)$. Из инвариантности меры Лебега при движении (см. следствие 4.4) вытекает независимость меры Лебега в подпространстве от выбора движения, с помощью которого она построена. Из определения сразу следует также, что меры Лебега в подпространствах переходят друг в друга при движении и в этом смысле образуют согласованное семейство. Меру Лебега в k-мерном аффинном подпространстве мы будем обозначать, как и меру в $\mathbb{R}^k$, символом λ_k. Из контекста всегда будет ясно, на каком именно подпространстве эта мера рассматривается.

4.6. Выясним, как связана мера множества, лежащего в аффинном подпространстве $L \subset \mathbb{R}^m$ размерности $m - 1$, с мерой его ортогональной проекции на $\mathbb{R}^{m-1}$ (как обычно, мы считаем $\mathbb{R}^{m-1}$ подпространством в $\mathbb{R}^m$, отождествляя векторы $(x_1, \dots, x_{m-1})$ из $\mathbb{R}^{m-1}$ и $(x_1, \dots, x_{m-1}, 0)$ из $\mathbb{R}^m$). В обоих подпространствах $(m-1)$-мерные меры Лебега будем обозначать символом λ_{m-1}.

Пусть P — ортогональный проектор пространства $\mathbb{R}^m$ на $\mathbb{R}^{m-1}$. Исключим тривиальный случай, когда $P(L) \neq \mathbb{R}^{m-1}$, т. е. будем считать, что нормаль N к L не ортогональна вектору $e_m = (0, \dots, 0, 1)$ — нормали к $\mathbb{R}^{m-1}$. Пусть θ — угол между этими

нормалями. Тогда $\cos\theta = \langle N, e_m\rangle / \|N\| \neq 0$. Установим связь между мерами множества и его проекции, обобщающую хорошо известный факт элементарной геометрии.

Предложение. *Для любого измеримого множества $E \subset L$ справедливо равенство*

$$\lambda_{m-1}\big(P(E)\big) = |\cos\theta|\,\lambda_{m-1}(E).$$

Доказательство. Не умаляя общности, будем предполагать, что L — линейное подпространство (иначе его можно сдвинуть). Так как сужение проектора P на L есть линейный изоморфизм, то, очевидно, функция

$$\mu\colon E \mapsto \lambda_{m-1}\big(P(E)\big) \qquad (E \subset L)$$

есть мера на σ-алгебре измеримых по Лебегу множеств, которая инвариантна относительно сдвига и конечна на ограниченных множествах. Поэтому (см. теорему 4.2) $\mu = k\,\lambda_{m-1}$, где k — некоторый положительный коэффициент. Иными словами,

$$\lambda_{m-1}\big(P(E)\big) = k\,\lambda_{m-1}(E)$$

для любого измеримого множества E, $E \subset L$.

Чтобы найти k, рассмотрим такой ортонормированный базис $v_1, \dots, v_{m-1}$ в L, что $v_1, \dots, v_{m-2} \in \mathbb{R}^{m-1}$. Тогда $v_1, \dots, v_{m-2}, P(v_{m-1})$ — ортогональный базис в $\mathbb{R}^{m-1}$. При этом $\|P(v_{m-1})\| = |\cos\theta|$. Единичный куб Q, построенный на векторах $v_1, \dots, v_{m-1}$, лежит в L и проектируется на прямоугольный параллелепипед, построенный на векторах $v_1, \dots, v_{m-2}, P(v_{m-1})$, мера которого равна $\lambda_{m-1}\big(P(Q)\big) = \|P(v_{m-1})\| = |\cos\theta|$. Поэтому

$$|\cos\theta| = \lambda_{m-1}\big(P(Q)\big) = k\,\lambda_{m-1}(Q) = k. \qquad \blacktriangleright$$

Заметим, что доказанное предложение остаётся, очевидно, верным и в том случае, когда $\cos\theta = 0$.

УПРАЖНЕНИЯ

1) Гомотетией в пространстве $\mathbb{R}^m$ с коэффициентом $k > 0$ называется отображение $x \mapsto kx$. Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 4.1, докажите, что при гомотетии измеримость множества E сохраняется и мера его образа равна $k^m\lambda_m(E)$.

2) Докажите, что если множество $A \subset \mathbb{R}$ измеримо, то измеримо и множество $B = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, x - y \in A\big\}$.

3) Сколь велика может быть площадь содержащегося в квадрате $[0, 6]^2$ измеримого множества, если оно не пересекается со своим сдвигом на вектор $(1, 2)$?

4) Будем говорить, что множество $E \subset \mathbb{R}^m$ порождает паркет, если его сдвиги на всевозможные векторы с целочисленными координатами образуют разбиение $\mathbb{R}^m$, т. е.

$$\mathbb{R}^m = \bigvee_{n \in \mathbb{Z}^m} (n + E).$$

Докажите, что мера измеримого множества, порождающего паркет, равна единице.

5) Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$, $\lambda_m(E) > 0$, A — плотное в $\mathbb{R}^m$ множество. Докажите, что $\lambda_m\Big(\mathbb{R}^m \setminus \bigcup\limits_{a\in A}(a+E)\Big) = 0$. Проверьте, что предположение $\lambda_m(E) > 0$ можно заменить на $\lambda_m^*(E) > 0$, отказавшись от измеримости E.

Сдвигом на число a по модулю 1 называется отображение $x \mapsto \{x+a\}$, где $\{x+a\}$ — дробная часть числа $x+a$ (т. е. $\{x+a\} = x+a-[x+a]$). Два подмножества промежутка $[0,1)$ называются конгруэнтными по модулю 1, если одно из них может быть получено из другого сдвигом по модулю 1 на некоторое число.

6) По аналогии с теоремой 4.1 докажите, что мера Лебега на промежутке $[0,1)$ инвариантна относительно сдвига по модулю 1: измеримость по Лебегу сохраняется и мера остаётся неизменной. Обобщите этот результат на многомерный случай, заменив промежуток $[0,1)$ кубической ячейкой $[0,1)^m$.

7) Используя конструкцию неизмеримого множества (см. п. 1.3), докажите существование множества $E \subset [0,1)$ со следующими свойствами:

а) внешняя мера E равна единице;

б) существует последовательность попарно не пересекающихся подмножеств промежутка $[0,1)$, конгруэнтных множеству E по модулю 1.

§ 5. Изменение меры Лебега при линейном отображении

Обратимся теперь к вопросу о том, как меняется мера Лебега при произвольном линейном преобразовании $V\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Если оно не обратимо, то $V(\mathbb{R}^m)$ — собственное подпространство в $\mathbb{R}^m$ и $\lambda_m\big(V(\mathbb{R}^m)\big) = 0$ (это было отмечено после следствия 3.1), вследствие чего образ любого множества имеет нулевую меру. В дальнейшем мы будем, исключая этот вырожденный случай, рассматривать только обратимые линейные преобразования. Напомним, что под определителем действующего в конечномерном пространстве линейного преобразования понимается определитель матрицы этого преобразования (в произвольном базисе).

5.1. Докажем предварительно одно вспомогательное утверждение.

Лемма. *Пусть $V\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ обратимое линейное преобразование. Тогда существуют ортонормированные базисы $\{g_j\}_{j=1}^m$, $\{h_j\}_{j=1}^m$ и такие положительные числа $s_1, \dots, s_m$, что*

$$V(x) = \sum_{j=1}^m s_j \langle x, g_j\rangle h_j \quad \text{при всех } x \in \mathbb{R}^m. \tag{1}$$

При этом $|\det V| = s_1 \cdots s_m$.

Символ $\langle x, y\rangle$ обозначает скалярное произведение векторов x и y.

Доказательство. Пусть V^* — преобразование, сопряжённое к V. Рассмотрим самосопряжённое преобразование $W = V^*V$. Как известно из линейной алгебры, существует ортонормированный базис $g_1, \dots, g_m$, состоящий из его собственных векторов. Пусть $c_1, \dots, c_m$ — соответствующие собственные числа. Они положительны,

поскольку квадратичная форма $\langle W(x), x\rangle = \|V(x)\|^2$ положительно определена. Положим $s_j = \sqrt{c_j}$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$. Для любого вектора x мы имеем:

$$x = \sum_{j=1}^{m} \langle x, g_j\rangle\, g_j \quad \text{и} \quad V(x) = \sum_{j=1}^{m} \langle x, g_j\rangle\, V(g_j) = \sum_{j=1}^{m} s_j\, \langle x, g_j\rangle\, h_j,$$

где $h_j = \frac{1}{s_j} V(g_j)$. Эти векторы образуют ортонормированную систему, поскольку

$$\langle h_k, h_j\rangle = \frac{1}{s_k s_j} \big\langle V(g_k), V(g_j)\big\rangle = \frac{1}{s_k s_j} \big\langle W(g_k), g_j\big\rangle = \frac{1}{s_k s_j} \langle s_k^2 g_k, g_j\rangle = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq j, \\ 1, & \text{если } k = j. \end{cases}$$

Так как определитель $\det W$ равен произведению собственных чисел, то

$$(\det V)^2 = \det V^* V = \det W = \prod_{j=1}^{m} c_j.$$

Следовательно, $|\det V| = \prod\limits_{j=1}^{m} s_j$. ►

5.2. Теперь мы можем выяснить, как меняется мера Лебега при линейном отображении. В этом и следующем пунктах она обозначается буквой λ без указания на размерность.

Теорема. *Если $V\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ линейное преобразование, а множество E, $E \subset \mathbb{R}^m$, измеримо, то множество $V(E)$ также измеримо и $\lambda\big(V(E)\big) = |\det(V)|\, \lambda(E)$.*

Таким образом, модуль определителя имеет простой геометрический смысл — он равен отношению меры образа множества к мере самого множества.

Доказательство. Измеримость образа измеримого множества при любом линейном преобразовании есть частный случай теоремы 3.1. Для необратимого преобразования справедливость утверждения теоремы уже отмечалась. Поэтому далее мы будем считать его обратимым.

Определим на $\mathfrak{A}^m$ меру μ равенством

$$\mu(E) = \lambda\big(V(E)\big) \quad (E \in \mathfrak{A}^m).$$

Мы предоставляем читателю проверить, что μ в самом деле мера. Как и мера Лебега, она инвариантна относительно сдвигов:

$$\mu(c + E) = \lambda\big(V(c + E)\big) = \lambda\big(V(c) + V(E)\big) = \lambda\big(V(E)\big) = \mu(E).$$

Поэтому по теореме 4.2 мера μ пропорциональна мере Лебега: $\mu = k\,\lambda$, где k некоторый неотрицательный коэффициент. Чтобы вычислить его, представим V, пользуясь леммой, в виде (1) и проследим, как преобразуется единичный куб Q, порождённый векторами $g_1, \ldots, g_m$. Так как $V(g_j) = s_j h_j$, то образом Q является прямоугольный параллелепипед с рёбрами $s_j h_j$. Поскольку $|\det V| = \prod\limits_{j=1}^{m} s_j$, мы получаем, что

$$k = k\lambda(Q) = \mu(Q) = \lambda(V(Q)) = \prod_{j=1}^{m} \|s_j h_j\| = \prod_{j=1}^{m} s_j = |\det V|. \qquad ►$$

Отметим частный случай этого утверждения, постоянно используемый в курсе элементарной геометрии при вычислении площадей и объёмов. Речь идёт о связи между мерами подобных множеств.

Гомотетией в пространстве $\mathbb{R}^m$ с коэффициентом k, $k > 0$, называется отображение $x \mapsto kx$ ($x \in \mathbb{R}^m$). Образ множества E при таком отображении будем обозначать kE.

Очевидно, гомотетия — линейное отображение, которому в произвольном базисе соответствует диагональная матрица, все диагональные элементы которой равны k. Как частный случай теоремы мы получаем

Следствие 1. *Пусть k — произвольное положительное число. Тогда $kE \in \mathfrak{A}^m$ и $\lambda(kE) = k^m\lambda(E)$ для любого измеримого множества E.*

Следствие 2. *Мера m-мерного шара с произвольным центром и радиусом r равна $\alpha_m\, r^m$, где α_m — мера единичного шара.*

Это утверждение справедливо, так как шар $B(x_0, r)$ может быть получен из единичного с помощью гомотетии и сдвига: $B(x_0, r) = x_0 + rB(0, 1)$.

Поскольку эллипсоид с полуосями $a_1, \dots, a_m$ может быть получен из единичного шара с помощью растяжений (в a_i раз вдоль i-й оси $i = 1, \dots, m$), его объём равен $\alpha_m a_1 \cdots a_m$.

Отметим ещё, что мера открытого выпуклого множества C равна мере его замыкания. Действительно, можно считать, что $0 \in C$. Тогда $C \subset \overline{C} = C \cup \partial C \subset kC$ для любого $k > 1$. Следовательно, $\lambda(C) \leqslant \lambda(\overline{C}) \leqslant \lambda(kC) = k^m\lambda(C)$. Перейдя к пределу при $k \to 1$, получим требуемое равенство. Из него легко следует, что $\lambda(\partial C) = 0$ (даже если $\lambda(C) = +\infty$).

5.3. Обобщая определение п. I.1.6 при $a = 0$, n-мерным *параллелепипедом* в $\mathbb{R}^m$ ($n \leqslant m$), построенным на линейно независимых векторах $\{v_j\}_{j=1}^n$ (или натянутым на эти векторы), будем называть множество

$$P(v_1, \dots, v_n) = \left\{ \sum_{j=1}^n t_j\, v_j \;\middle|\; 0 < t_j < 1 \;\text{ при }\; j = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

Как и прежде, векторы v_j будем называть рёбрами параллелепипеда.

Чтобы не делать излишних оговорок, мы сохраним обозначение $P(v_1, \dots, v_n)$ и в тех случаях, когда векторы $v_1, \dots, v_n$ линейно зависимы, хотя тогда это множество уже нельзя, вообще говоря, считать параллелепипедом.

Вычислим n-мерный объём параллелепипеда $P(v_1, \dots, v_n)$. Прежде всего рассмотрим случай, когда $n = m$. Пусть $e_1, \dots, e_m$ — векторы канонического базиса, а V — линейное отображение, переводящие их в векторы $v_1, \dots, v_m$. Очевидно, $P(v_1, \dots, v_m)$ есть V-образ открытого куба $Q = (0, 1)^m$. С помощью теоремы 5.2 мы получаем равенство

$$\lambda\big(P(v_1, \dots, v_m)\big) = \lambda\big(V(Q)\big) = |\det(V)|. \tag{2}$$

Чтобы выразить объём параллелепипеда $P(v_1, \dots, v_m)$ непосредственно через векторы $v_1, \dots, v_m$, необходимо использовать (возможно, известный читателю из курса алгебры) определитель Грама. Напомним его определение.

Определение. *Определителем Грама* *) $\Gamma(v_1, \dots, v_n)$, соответствующим векторам $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$, называется определитель *матрицы Грама*

$$\begin{pmatrix} \langle v_1, v_1\rangle & \langle v_1, v_2\rangle & \dots & \langle v_1, v_n\rangle \\ \langle v_2, v_1\rangle & \langle v_2, v_2\rangle & \dots & \langle v_2, v_n\rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle v_n, v_1\rangle & \langle v_n, v_2\rangle & \dots & \langle v_n, v_n\rangle \end{pmatrix},$$

составленной из попарных скалярных произведений векторов $v_1, v_2, \dots, v_n$.

Матрица Грама есть матрица неотрицательной квадратичной формы $\sum\limits_{j,k=1}^{n} \langle v_j, v_k\rangle t_j t_k = \big\|\sum\limits_{j=1}^{n} t_j v_j\big\|^2$. Поэтому определитель Грама неотрицателен (этот результат вытекает также из доказываемой ниже теоремы). Ясно, что если векторы $v_1, \dots, v_n$ линейно зависимы, то линейно зависимы и строки матрицы Грама, и поэтому $\Gamma(v_1, \dots, v_n) = 0$.

При $n = m$ определитель Грама имеет простой геометрический смысл.

Теорема. $\Gamma(v_1, \dots, v_m) = \lambda^2\big(P(v_1, \dots, v_m)\big)$.

Заметим, что это равенство, очевидно, справедливо и в том случае, когда векторы $v_1, \dots, v_m$ линейно зависимы.

Доказательство. Рассмотрим линейное преобразование $V : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, переводящее векторы канонического базиса в векторы $v_1, \dots, v_m$. Отображению V (в каноническом базисе) соответствует матрица W, столбцы которой суть векторы $v_1, \dots, v_m$. В силу равенства (2)

$$\lambda\big(P(v_1, \dots, v_m)\big) = |\det(V)| = |\det(W)|.$$

Вместе с тем, очевидно, произведение $W^T W$ как раз есть матрица Грама рассматриваемой системы векторов (W^T — транспонированная матрица W). Поэтому

$$\lambda^2\big(P(v_1 \dots, v_m)\big) = \det(W^T)\det(W) = \det(W^T W) = \Gamma(v_1, \dots, v_m). \ \blacktriangleright$$

Геометрический смысл определителя Грама сохраняется и в том случае, когда число векторов $v_1, \dots, v_n$ меньше размерности пространства. Действительно, эти векторы вместе с множеством $P(v_1, \dots, v_n)$ содержатся в подпространстве L — своей линейной оболочке. Если они линейно независимы, то $\dim L = n$. Так как L как евклидово пространство изоморфно $\mathbb{R}^n$, то в L определена мера Лебега, и доказанная теорема остаётся справедливой:

$$\Gamma(v_1, \dots, v_n) = \lambda_n^2\big(P(v_1, \dots, v_n)\big).$$

Таким образом, объём параллелепипеда с рёбрами $v_1, \dots, v_n$ есть корень квадратный из соответствующего им определителя Грама.

*) Йёрген Педерсен **Грам** (Gram), 1850–1916, — датский математик.

Зная геометрический смысл определителя Грама, можно описать, как меняется (n-мерная) мера при линейном отображении из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ при $n < m$.

Предложение. *Пусть $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n \leqslant m)$ — линейное отображение. Если $E \in \mathfrak{A}^n$, то*

$$\lambda_n(V(E)) = \sqrt{det(W^T W)} \cdot \lambda_n(E)$$

(*здесь W — матрица, соответствующая отображению V в каноническом базисе*).

Доказательство. Пусть сначала $\operatorname{rank}(V) = n$. Множество $V(E)$ измеримо по определению меры в подпространстве $X = V(\mathbb{R}^n)$ (см. п. 4.5). Для вычисления $\lambda_n\bigl(V(E)\bigr)$ введём вспомогательную меру μ, положив $\mu(E) = \lambda_n\bigl(V(E)\bigr)$ $(E \in \mathfrak{A}^n)$. Как читатель без труда проверит, она инвариантна относительно сдвига и поэтому пропорциональна мере Лебега.

Ясно, что коэффициент пропорциональности равен $\mu(Q)$, где $Q = [0,1)^n$. Вычислим его, пользуясь геометрическим смыслом определителя Грама. Пусть $v_1, \dots, v_n$ — V-образы векторов канонического базиса оператора V (очевидно, это столбцы матрицы W). Поэтому матрица $W^T W$ есть матрица Грама векторов $v_1, \dots, v_n$. Вместе с тем, как легко убедиться, $V(Q)$ есть не что иное, как параллелепипед $P(v_1, \dots, v_n)$, порождённый векторами $v_1, \dots, v_n$. Согласно доказанной теореме

$$\lambda_n^2\bigl(P(v_1, \dots, v_n)\bigr) = \Gamma(v_1, \dots, v_n) = \det(W^T W).$$

Следовательно, $\mu(Q) = \lambda_n\bigl(V(Q)\bigr) = \sqrt{\det(W^T W)}$.

Если $\operatorname{rank}(V) < n$, то множество $V(E)$ содержится в подпространстве, размерность которого меньше n, и поэтому его n-мерная мера равна нулю. Равен нулю и $\det(W^T W)$, поскольку это определитель Грама линейно зависимых векторов $v_1, \dots, v_n$. ►

Как известно из линейной алгебры, для матрицы W, имеющей m строк и n $(n \leqslant m)$ столбцов, справедлива формула Бине*)–Коши**) . Её можно записать следующим образом. Пусть $A \subset \{1, 2, \dots, m\}$, $\operatorname{card} A = n$, и W_A — матрица размера $n \times n$, получающаяся из W вычёркиванием всех строк, номера которых не входят в A. Согласно формуле Бине–Коши

$$\det(W^T W) = \sum_A \det{}^2(W_A).$$

Этому равенству можно придать красивый геометрический смысл. По доказанному предложению его левая часть есть не что иное, как квадрат меры множества $C = V(Q)$, где $V\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ — отображение, соответствующее матрице W, а Q — произвольное множество единичной меры. Введём отображение P_A, ортогонально проектирующее $\mathbb{R}^m$ на n-мерное подпространство L_A, натянутое на орты канонического базиса с номерами из A. Ясно, что композиция $P_A \circ V$ есть отображение с матрицей W_A. Поэтому с точностью до знака $\det(W_A)$ есть не что иное, как мера проекции множества $P_A(C)$. С учётом сказанного формулу Бине–Коши можно переписать в виде

$$\lambda_n^2(C) = \sum_A \lambda_n^2\bigl(P_A(C)\bigr). \tag{3}$$

*) Жак Филипп Мари **Бине** (Binet), 1786–1856, — французский математик.

) Огюстен Луи **Коши (Cauchy), 1789–1857, — французский математик.

В частности, квадрат объёма n-мерного параллелепипеда, содержащегося в пространстве $\mathbb{R}^m$ $(m \geqslant n)$, равен сумме квадратов объёмов его проекций на всевозможные подпространства L_A. Если $n = 1$, то такой параллелепипед — просто отрезок, а $P_A(C)$ — его проекции на координатные оси, и равенство (3) превращается просто в теорему Пифагора. Мы предоставляем читателю проверить, что равенство (3) справедливо для любого измеримого множества, лежащего в n-мерном подпространстве пространства $\mathbb{R}^m$.

5.4. Используя геометрический смысл определителя Грама, можно обобщить хорошо известный из элементарной геометрии факт: объём параллелепипеда равен произведению высоты на площадь основания.

Рассмотрим параллелепипед $P = P(v_1, \dots, v_m)$ и представим v_m в виде суммы $v_m = y + z$, где y есть проекция v_m на подпространство, порождённое векторами $v_1, \dots, v_{m-1}$, а вектор z ("высота параллелепипеда") перпендикулярен $v_1, \dots, v_{m-1}$. Параллелепипед $P(v_1, \dots, v_{m-1})$ (размерности $m-1$) естественно назвать основанием P. Так как $y = c_1 v_1 + \dots + c_{m-1} v_{m-1}$, то домножая строки матрицы Грама с номерами $1, \dots, m-1$ на числа $c_1, \dots, c_{m-1}$ и вычитая из последней строки, мы получаем, что определитель $\Gamma(v_1, \dots, v_m)$ равен определителю матрицы

$$\begin{pmatrix} \langle v_1, v_1 \rangle & \langle v_1, v_2 \rangle & \dots & \langle v_1, v_m \rangle \\ \langle v_2, v_1 \rangle & \langle v_2, v_2 \rangle & \dots & \langle v_2, v_m \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle z, v_1 \rangle & \langle z, v_2 \rangle & \dots & \langle z, v_m \rangle \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\langle z, v_j \rangle = 0$ при $j = 1, \dots, m-1$, а $\langle z, v_m \rangle = \langle z, z \rangle = \|z\|^2$, мы видим, что

$$\Gamma(v_1, \dots, v_m) = \Gamma(v_1, \dots, v_{m-1}) \|z\|^2.$$

С учётом геометрического смысла определителя Грама это означает, что объём m-мерного параллелепипеда $P(v_1, \dots, v_m)$ равен, как и в знакомом читателю трёхмерном случае, $(m-1)$-мерному объёму его основания, умноженному на длину высоты:

$$\lambda_m\big(P(v_1, \dots, v_m)\big) = \lambda_{m-1}\big(P(v_1, \dots, v_{m-1})\big) \cdot \|z\|. \tag{4}$$

Укажем естественную и важную оценку для объёма параллелепипеда P, легко следующую из равенства (4). Так как по теореме Пифагора $\|v_m\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 \geqslant \|z\|^2$, то из (4) вытекает, что

$$\lambda_m\big(P(v_1, \dots, v_m)\big) \leqslant \lambda_{m-1}\big(P(v_1, \dots, v_{m-1})\big) \cdot \|v_m\|.$$

Повторяя эту оценку, мы получаем важное *неравенство Адамара**):

$$\lambda_m\big(P(v_1, \dots, v_m)\big) \leqslant \|v_1\| \cdots \|v_m\|. \tag{5}$$

Иными словами, объём параллелепипеда, построенного на рёбрах $v_1, \dots, v_m$, не превосходит произведения их длин. Ясно, что эта оценка точная: максимальное значение

*) Жак Саломон **Адамар** (Hadamard), 1865–1963, — французский математик.

объёма параллелепипеда с рёбрами заданной длины достигается, если рёбра попарно перпендикулярны.

Неравенству Адамара можно, не прибегая к понятию объёма, придать чисто аналитическую форму. Пусть нам дана произвольная $m \times m$ матрица A и пусть вектор a_k есть её k-й столбец ($k = 1, \dots, m$). Тогда

$$|\det(A)| \leqslant \|a_1\| \cdots \|a_m\|.$$

Это неравенство, как и неравенство (5), также называется неравенством Адамара. Оно следует из равенства (2), применённого к отображению V, соответствующему матрице A, и неравенства (5):

$$|\det(A)| = \lambda_m\big(P(a_1, \dots, a_m)\big) \leqslant \|a_1\| \cdots \|a_m\|.$$

5.5. В завершение параграфа рассмотрим интересную геометрическую задачу, связанную с *выпуклыми телами*, т. е. выпуклыми компактными множествами с непустой внутренностью. Существенную информацию о выпуклом теле можно получить, зная, каков эллипсоид максимального объёма, "помещающийся" в нём (под эллипсоидом мы понимаем аффинный образ замкнутого шара). На возникающий сразу же вопрос о существовании и единственности такого эллипсоида отвечает следующая

Теорема. *Среди эллипсоидов, содержащихся в выпуклом теле $K \subset \mathbb{R}^m$, существует эллипсоид максимального объёма и он единственен.*

Доказательство. Убедимся сначала в существовании интересующего нас эллипсоида. Если последовательность эллипсоидов $E_n \subset K$ такова, что

$$\lambda(E_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} V = \sup\{\lambda(E) \,|\, E \subset K,\ E \text{ — эллипсоид}\},$$

то, переходя в случае необходимости к подпоследовательности, мы можем считать, что как центры c_n эллипсоидов, так и векторы $v_i^{(n)}$ ($i = 1, \dots, m$), соответствующие полуосям эллипсоидов, имеют пределы: $c_n \to c$ и $v_1^{(n)} \to v_1, \dots, v_m^{(n)} \to v_m$ при $n \to \infty$. Отсюда вытекает, что K содержит эллипсоид $\mathcal{E}$ с центром c и полуосями $v_1, \dots, v_m$. Как мы отмечали в п. 5.2, его объём равен (далее α_m — объём единичного шара)

$$\lambda(\mathcal{E}) = \alpha_m \|v_1\| \cdots \|v_m\| = \alpha_m \lim_{n\to\infty} \|v_1^{(n)}\| \cdots \|v_m^{(n)}\| = \lim_{n\to\infty} \lambda(E_n) = V.$$

Поэтому $\mathcal{E}$ — эллипсоид наибольшего объёма для K.

Допустим теперь, что существуют два эллипсоида наибольшего объёма. Поскольку аффинное преобразование переводит эллипсоид в эллипсоид и сохраняет отношение объёмов множеств, мы не умаляя общности можем считать, что один из эллипсоидов совпадает с единичным шаром $\overline{B}$ с центром в нуле, а полуоси другого — обозначим его $\mathcal{E}$ — параллельны осям координат. Пусть c — центр, $a_1, \dots, a_m$ — длины полуосей эллипсоида $\mathcal{E}$. Тогда включение $y \in \mathcal{E}$ равносильно тому, что y можно представить в виде $y = c + (a_1x_1, \dots, a_mx_m)$, где $x = (x_1, \dots, x_m) \in \overline{B}$.

Рассмотрим теперь новый эллипсоид E с центром в точке $\frac{c}{2}$ и длинами полуосей (параллельных осям координат) $\frac{1+a_1}{2}, \dots, \frac{1+a_m}{2}$. Каждая его точка z может быть представлена в виде $z = \frac{1}{2}c + \big(\frac{1+a_1}{2}x_1, \dots, \frac{1+a_m}{2}x_m\big)$, где $x = (x_1, \dots, x_m) \in \overline{B}$. Поэтому

$z = \frac{x+y}{2}$, где $y = c + (a_1x_1, \dots, a_mx_m) \in \mathcal{E}$. Таким образом, $E \subset \frac{1}{2}\overline{B} + \frac{1}{2}\mathcal{E} \subset K$. В то же время

$$\alpha_m = \lambda_m(\overline{B}) \geqslant \lambda(E) = \alpha_m \prod_{i=1}^{m} \frac{1+a_i}{2} \geqslant \alpha_m \prod_{i=1}^{m} \sqrt{a_i} = \alpha_m$$

(произведение $a_1 \cdots a_m$ равно 1, так как $\alpha_m = \lambda(\mathcal{E}) = \alpha_m\, a_1 \cdots a_m$). Поскольку крайние члены последнего неравенства совпадают, оно обращается в равенство. Поэтому $\frac{1+a_i}{2} = \sqrt{a_i}$ и, следовательно, $a_i = 1$ для всех i. Таким образом, $\mathcal{E}$ — единичный шар. Если он не совпадает с шаром $\overline{B}$, то, как читатель легко убедится самостоятельно, в выпуклой оболочке этих шаров содержится эллипсоид вращения (вокруг оси, проходящей через их центры), объём которого больше α_m, что невозможно. ►

Доказанная теорема позволяет устанавливать, что у "достаточно симметричного" тела эллипсоидом максимального объёма является шар. Так будет, например, для куба, для октаэдра, определяемого условием $\sum\limits_{i=1}^{m} |x_i| \leqslant 1$, и для правильного симплекса.

Оказывается, эллипсоид максимального объёма занимает достаточно большую часть выпуклого тела. Справедлива следующая

Теорема (Джон*). *Пусть $\mathcal{E}$ — эллипсоид максимального объёма для выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^m$. Тогда*

1) если центр $\mathcal{E}$ находится в нуле, то $K \subset m\mathcal{E}$;

2) если тело K центрально симметрично, то $K \subset \sqrt{m}\,\mathcal{E}$.

Точность утверждений теоремы видна на примерах симплекса и куба.

Доказательство. Как и в доказательстве предыдущей теоремы, мы можем считать, что $\mathcal{E}$ совпадает с шаром единичного радиуса. Включение $K \subset m\mathcal{E}$ докажем, рассуждая от противного: допустим, что $\|x\| > m$ для некоторой точки $x \in K$. Можно считать, что $x = (c, 0, \dots, 0)$, где $c > m$. Пусть T — выпуклая оболочка шара $\mathcal{E}$ и точки x. Очевидно, $T \subset K$. Возьмём малое число $\varepsilon \geqslant 0$ и рассмотрим в плоскости OX_1X_2 эллипс $\frac{(x_1-\varepsilon)^2}{(1+\varepsilon)^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \leqslant 1$, где $b^2 = \frac{c-1-2\varepsilon}{c-1}$. Мы предоставляем читателю проверить, что этот эллипс содержится в сечении множества T плоскостью OX_1X_2. Поэтому эллипсоид $E(\varepsilon)$, полученный вращением построенного эллипса вокруг оси OX_1, содержится в T, а следовательно, и в K. Его первая полуось равна $1+\varepsilon$, а остальные — b. Объём $V(\varepsilon) = \lambda\big(E(\varepsilon)\big)$ вычисляется по формуле

$$V(\varepsilon) = \alpha_m(1+\varepsilon)b^{m-1} = \alpha_m(1+\varepsilon)\Big(\frac{c-1-2\varepsilon}{c-1}\Big)^{\frac{m-1}{2}}.$$

Ясно, что $V(0) = \alpha_m$ и $V'(0) = \alpha_m \frac{c-m}{c-1} > 0$. Поэтому при $\varepsilon > 0$ близких к нулю $\lambda\big(E(\varepsilon)\big) = V(\varepsilon) > \alpha_m$, хотя $E(\varepsilon) \subset K$. Это противоречит тому, что эллипсоидом наибольшего объёма для K является единичный шар.

Если тело K центрально симметрично относительно нуля, то таков же и эллипсоид максимального объёма $\mathcal{E}$. В самом деле, так как "зеркальный" эллипсоид $-\mathcal{E}$ содержится в K, то в силу единственности эллипсоида максимального объёма $\mathcal{E} = -\mathcal{E}$, т. е. центр $\mathcal{E}$ совпадает с началом координат.

---

*) Фриц **Джон** или **Йон** (John), 1910–1994, — немецкий математик.

Остальная часть доказательства теоремы для случая центрально симметричного тела аналогична проведённым выше рассуждениям. Считая, как и раньше, эллипсоид $\mathcal{E}$ единичным шаром, теперь тело T следует определить как выпуклую оболочку шара $\mathcal{E}$ и точек $\pm(c, 0, \dots, 0)$ при $c > \sqrt{m}$, а в двумерное сечение T плоскостью OX_1X_2 вписать эллипс $\frac{x_1^2}{(1+\varepsilon)^2} + \frac{x_2^2}{b^2} \geqslant 1$, где $b^2 = \frac{c^2-(1+\varepsilon)^2}{c^2-1}$. Окончание доказательства мы оставляем читателю. ▶

УПРАЖНЕНИЯ

1) Будем рассматривать $\mathbb{R}^2$ как множество комплексных чисел. Как меняется мера Лебега при преобразовании $z \mapsto az$, где a фиксированное комплексное число?

2) Пусть $A, B : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — линейные отображения. Докажите, что если $\|A(x)\| \leqslant \|B(x)\|$ для любого $x \in \mathbb{R}^m$, то $\lambda_m\big(A(E)\big) \leqslant \lambda_m\big(B(E)\big)$ для любого измеримого множества E.

3) Пусть $E \subset \mathbb{R}_+$ и $S = \big\{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| \in E\big\}$. Докажите, что эти множества одновременно измеримы (или неизмеримы) по Лебегу. Убедитесь, что одно из равенств $\lambda_1(E) = 0$ и $\lambda_m(S) = 0$ влечёт другое.

§ 6. Меры Хаусдорфа

Здесь мы построим семейство мер μ_p $(p > 0)$, обобщающих меру Лебега. При $p = m$ мера μ_p в $\mathbb{R}^m$ окажется пропорциональной мере λ_m, а при $p = 1, 2, \dots, m-1$ мы получим обобщения лебеговских мер, определённых на (измеримых) подмножествах p-мерных подпространств.

Построение мер μ_p основано на наглядной геометрической характеристике множества — его диаметре. Напомним, что диаметром множества E называется величина

$$\operatorname{diam}(E) = \sup\big\{\|x-y\| \mid x, y \in E\big\}.$$

Диаметр пустого множества считается равным нулю.

6.1. Пусть $\varepsilon > 0$. Семейство множеств $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ назовём ε-*покрытием* множества $E \subset \mathbb{R}^m$, если

$$E \subset \bigcup_{\alpha\in A} e_\alpha \quad \text{и} \quad \operatorname{diam}(e_\alpha) \leqslant \varepsilon \quad \text{при любом} \quad \alpha \in A.$$

Поскольку в дальнейшем нам потребуются лишь не более чем счётные покрытия, всюду далее мы будем предполагать множество A счётным, не оговаривая это явно. Не умаляя общности можно считать, что $A = \mathbb{N}$. Как правило, мы так и будем поступать, однако иногда бывает удобно рассматривать и другие множества индексов. Ясно, что при любом $\varepsilon > 0$ у пространства $\mathbb{R}^m$, а следовательно, и у каждого его подмножества, существует ε-покрытие.

Для произвольных $p > 0$ и $E \subset \mathbb{R}^m$ положим

$$\mu_p(E, \varepsilon) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{diam}(e_j)}{2}\right)^p \,\Big|\, \{e_j\}_{j\geqslant 1} \ \text{— } \varepsilon\text{-покрытие множества } E\right\}.$$

Очевидно, функция $\varepsilon \mapsto \mu_p(E,\varepsilon)$ (принимающая, возможно, и бесконечные значения) убывает, и, следовательно, существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\mu_p(E,\varepsilon) = \sup_{\varepsilon>0}\mu_p(A,\varepsilon).$$

Определение. Функцию

$$E \mapsto \mu_p^*(E) = \lim_{\varepsilon\to+0}\mu_p(E,\varepsilon),$$

определённую на всех подмножествах пространства $\mathbb{R}^m$, называют *внешней p-мерой Хаусдорфа**).

Вскоре мы убедимся, что μ_p^* действительно является внешней мерой в смысле определения I.4.2.

Заметим ещё, что истолковывая пространство $\mathbb{R}^m$ как подпространство в $\mathbb{R}^n$ $(n > m)$, можно всякое содержащееся в $\mathbb{R}^m$ множество E считать и подмножеством пространства $\mathbb{R}^n$. Вычисление диаметра множества в пространствах $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ даёт, очевидно, одинаковые результаты. Таким образом, величина $\mu_p^*(E)$ не зависит от объемлющего пространства. Поэтому, говоря о ней, можно не указывать (как мы и делаем), подмножеством какого именно пространства мы считаем E. Когда возникает необходимость конкретизировать область задания функции μ_p^*, мы делаем соответствующие уточнения.

В связи с этим отметим, что для подмножеств пространства $\mathbb{R}^m$ внешние меры μ_p^* представляют интерес лишь при $p \leqslant m$, так как в противном случае $\mu_p^* \equiv 0$ (см. конец п. 6.6).

6.2. Установим основные свойства функции μ_p^*.

1) $0 \leqslant \mu_p^*(E) \leqslant +\infty, \quad \mu_p^*(\varnothing) = 0.$

2) Монотонность: *если* $E \subset F$, *то* $\mu_p^*(E) \leqslant \mu_p^*(F)$.

Эти свойства очевидны.

3) μ_p^* — *внешняя мера: если* $E \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, *то* $\mu_p^*(E) \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_p^*(E_n)$.

Доказательство. Будем считать, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu_p^*(E_n) < +\infty$, так как в противном случае доказываемое неравенство тривиально. Зафиксируем число $\varepsilon > 0$ и рассмотрим такие ε-покрытия $\{e_j^{(n)}\}_{j\geqslant 1}$ множеств E_n, что

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{diam}(e_j^{(n)})}{2}\right)^p < \mu_p(E_n,\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2^n} \qquad (n = 1, 2, \dots).$$

Очевидно, семейство $\{e_j^{(n)}\}_{n,j\geqslant 1}$ есть ε-покрытие E и, следовательно,

$$\mu_p(E,\varepsilon) \leqslant \sum_{n,j=1}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{diam}(e_j^{(n)})}{2}\right)^p \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\left(\mu_p(E_n,\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\mu_p^*(E_n) + \varepsilon.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем искомый результат. ▶

*) Феликс **Хаусдорф** (Hausdorff), 1868–1942, — немецкий математик.

На множествах, достаточно далёких друг от друга, функция μ_p^* аддитивна. Точнее, множества E и F называются *разделёнными,* если

$$\inf\bigl\{\|x-y\| \mid x\in E,\ y\in F\bigr\} > 0.$$

4) *Для разделённых множеств* $\mu_p^*(E\vee F)=\mu_p^*(E)+\mu_p^*(F)$.

Доказательство. Поскольку $\mu_p^*(E\vee F)\leqslant \mu_p^*(E)+\mu_p^*(F)$ в силу полуаддитивности μ_p^*, нам нужно доказать лишь противоположное неравенство.

Пусть $0<\varepsilon<\inf\{\|x-y\| \mid x\in E,\ y\in F\}$. Рассмотрим произвольное ε-покрытие $\{e_j\}_{j\geqslant 1}$ множества $E\vee F$. В силу выбора ε для любого номера j хотя бы одно из пересечений $e_j\cap E,\ e_j\cap F$ пусто, и поэтому

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{diam}(e_j)}{2}\right)^p \geqslant \sum_{e_j\cap E\neq\varnothing}\left(\frac{\operatorname{diam}(e_j)}{2}\right)^p + \sum_{e_j\cap F\neq\varnothing}\left(\frac{\operatorname{diam}(e_j)}{2}\right)^p.$$

Так как семейства $\{e_j\}_{e_j\cap E\neq\varnothing}$ и $\{e_j\}_{e_j\cap F\neq\varnothing}$ образуют соответственно ε-покрытия множеств E и F, то

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{diam}(e_j)}{2}\right)^p \geqslant \mu_p(E,\varepsilon)+\mu_p(F,\varepsilon).$$

Переходя в левой части этого неравенства к нижней грани по всевозможным ε-покрытиям, мы получаем, что $\mu_p(E\vee F,\varepsilon)\geqslant \mu_p(E,\varepsilon)+\mu_p(F,\varepsilon)$. Для завершения доказательства остаётся перейти к пределу при $\varepsilon\to 0$. ►

5) *Пусть* $E\subset\mathbb{R}^m$ *и отображение* $\Phi: E\to\mathbb{R}^n$ *удовлетворяет условию Липшица:*

$$\|\Phi(x)-\Phi(y)\|\leqslant L\|x-y\| \quad \text{при } x,y\in E,$$

где L *— некоторая постоянная. Тогда*

$$\mu_p^*\bigl(\Phi(E)\bigr)\leqslant L^p\mu_p^*(E).$$

В частности, $\mu_p^*\bigl(\Phi(E)\bigr)=0$, *если* $\mu_p^*(E)=0$.

Доказательство. Пусть $\mu_p^*(E)<+\infty$ и $\{e_j\}_{j\geqslant 1}$ — такое ε-покрытие множества E, что

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{diam}(e_j)}{2}\right)^p < \mu_p(E,\varepsilon)+\varepsilon.$$

Будем считать, что $e_j\subset E$ для всех j (в противном случае заменим e_j на $e_j\cap E$). Так как $\operatorname{diam}\bigl(\Phi(e_j)\bigr)\leqslant L\operatorname{diam}(e_j)$, то множества $\Phi(e_j)$ образуют $L\varepsilon$-покрытие множества $\Phi(E)$, и поэтому

$$\mu_p\bigl(\Phi(E),L\varepsilon\bigr)\leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{diam}(\Phi(e_j))}{2}\right)^p \leqslant L^p\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\operatorname{diam}(e_j)}{2}\right)^p < L^p\bigl(\mu_p(E,\varepsilon)+\varepsilon\bigr).$$

Переход к пределу при $\varepsilon\to 0$ даёт требуемое неравенство. ►

Замечание. При $\mu_p^*(E) = 0$ равенство $\mu_p^*(\Phi(E)) = 0$ можно получить при менее ограничительных предположениях об отображении Φ. Достаточно потребовать, чтобы оно удовлетворяло условию Липшица лишь локально (такими, в частности, являются отображения, гладкие в окрестности E). Тогда множество E следует разбить на счётное число частей, на которых Φ удовлетворяет условию Липшица (на каждой части со своей константой), к каждой из них применить полученный результат, а затем воспользоваться счётной полуаддитивностью μ_p^*.

Чтобы сформулировать следующее свойство, введём два важных для нас класса непрерывных отображений.

Определение. Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$. Отображение $\Theta\colon E \to \mathbb{R}^n$ будем называть *сближением* множества E, если $\|\Theta(x) - \Theta(y)\| \leqslant \|x - y\|$ для всех x, y из E.

Непрерывное отображение $\Theta\colon E \to \mathbb{R}^n$ будем называть *растяжением* множества E, если $\|\Theta(x) - \Theta(y)\| \geqslant \|x - y\|$ для всех x, y из E.

Иными словами, сближение — это отображение, удовлетворяющее условию Липшица с константой единица. Оно не обязательно обратимо. В то же время растяжение обратимо и обратное отображение есть сближение. В частности, всякое растяжение есть гомеоморфизм. Подчеркнём, что образ борелевского множества при растяжении — снова борелевское множество (это прямое следствие предложения п. 3.3).

6) *Если Θ — сближение множества E, то $\mu_p^*\bigl(\Theta(E)\bigr) \leqslant \mu_p^*(E)$. Для растяжения справедливо обратное неравенство.*

Это немедленно следует из свойства 5.

7) *если отображение Φ сохраняет расстояния между точками множества E, то $\mu_p^*\bigl(\Phi(E)\bigr) = \mu_p^*(E)$. В частности, внешняя мера Хаусдорфа инвариантна относительно сдвигов и ортогональных преобразований.*

Из свойства 5 следует, что

8) *внешние меры Хаусдорфа подобных множеств пропорциональны. Точнее,*

$$\mu_p^*(a\,E) = |a|^p\,\mu_p^*(E), \quad \text{где} \;\; aE = \{ax \mid x \in E\} \qquad (a \in \mathbb{R}).$$

6.3. Как мы знаем (см. п. I.4.3), каждая внешняя мера порождает меру на σ-алгебре измеримых множеств. Мера, получающаяся сужением внешней меры μ_p^* на σ-алгебру измеримых (точнее, μ_p^*-измеримых) множеств, называется *мерой Хаусдорфа* и обозначается символом μ_p. Какие множества окажутся при этом измеримыми? Приводимая далее теорема указывает широкий класс таких множеств. При её доказательстве удобно использовать простое и важное геометрическое понятие ε-окрестности множества.

Определение. Пусть $\varepsilon > 0$ и $E \subset \mathbb{R}^m$. Множество E_ε, образованное точками, удалёнными от E менее, чем на ε, называется *ε-окрестностью* E:

$$E_\varepsilon = \bigcup_{x \in E} B(x, \varepsilon).$$

Очевидно, E_ε — открытые множества, расширяющиеся с ростом параметра ε: $\overline{E_\varepsilon} \subset E_\delta$, если $0 < \varepsilon < \delta$. Отметим также легко проверяемые равенства

$$(\,\overline{E}\,)_\varepsilon = E_\varepsilon, \quad (E_\varepsilon)_\delta = E_{\varepsilon+\delta} \;\; \text{для любых} \;\; \varepsilon > 0,\; \delta > 0 \qquad \text{и} \qquad \bigcap_{\varepsilon > 0} E_\varepsilon = \overline{E}.$$

Теорема. *Борелевские множества μ_p^*-измеримы.*

Доказательство. Поскольку измеримые множества образуют σ-алгебру, для доказательства теоремы достаточно убедиться, что измеримо произвольное замкнутое множество F. По определению измеримости нам нужно проверить, что для любого множества $E \subset \mathbb{R}^m$ справедливо равенство $\mu_p^*(E) = \mu_p^*(E \cap F) + \mu_p^*(E \setminus F)$. Так как в силу полуаддитивности $\mu_p^*(E) \leqslant \mu_p^*(E \cap F) + \mu_p^*(E \setminus F)$, то нам остаётся установить, что

$$\mu_p^*(E) \geqslant \mu_p^*(E \cap F) + \mu_p^*(E \setminus F). \tag{1}$$

Доказывая это неравенство, мы можем предполагать, что $\mu_p^*(E) < +\infty$.

Пусть $\varepsilon > 0$ и F_ε — ε-окрестность F. Положим $A_n = E \setminus F_{1/n}$. Тогда, очевидно, множества A_n и $E \cap F$ разделены, и по свойству 4

$$\mu_p^*(E) \geqslant \mu_p^*\big((E \cap F) \cup A_n\big) = \mu_p^*(E \cap F) + \mu_p^*(A_n).$$

Чтобы из этого неравенства с помощью предельного перехода получить (1), нужно убедиться, что

$$\mu_p^*(A_n) \to \mu_p^*(E \setminus F) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{2}$$

Заметим, что $\bigcap\limits_{\varepsilon>0} F_\varepsilon = F$ ввиду замкнутости F и поэтому $E \setminus F = \bigcup\limits_{n\geqslant 1} A_n$. Положим $B_j = A_{j+1} \setminus A_j$. Так как $E \setminus F = A_n \vee \bigvee\limits_{j\geqslant n} B_j$, то в силу монотонности и счётной полуаддитивности

$$\mu_p^*(A_n) \leqslant \mu_p^*(E \setminus F) \leqslant \mu_p^*(A_n) + \sum_{j\geqslant n} \mu_p^*(B_j) \qquad (\text{при любом } \ n \in \mathbb{N}).$$

Поэтому если ряд

$$\sum_{j\geqslant 1} \mu_p^*(B_j) \tag{3}$$

сходится, то разность $\mu_p^*(E \setminus F) - \mu_p^*(A_n)$ оценивается остатком сходящегося ряда, из чего следует соотношение (2). Для доказательства сходимости ряда (3) воспользуемся тем, что множества B_k и B_l разделены, если $|k-l| > 1$ (проверить это мы предоставляем читателю). Отсюда вытекает, что при любом N

$$\sum_{j=1}^{N} \mu_p^*(B_{2j}) = \mu_p^*\left(\bigvee_{j=1}^{N} B_{2j}\right) \leqslant \mu_p^*(E) < +\infty.$$

Поэтому ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu_p^*(B_{2j})$ сходится. Аналогично проверяется сходимость ряда $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu_p^*(B_{2j+1})$. Это обеспечивает сходимость ряда (3), чего, как мы отмечали, достаточно для доказательства теоремы. ►

Дополним полученный результат утверждением, показывающим, что всякое множество (не обязательно измеримое) содержится в борелевском множестве той же хаусдорфовой меры. Для лебеговской меры сходное утверждение (для измеримого множества) нам уже известно (см. конец п. 2.2).

Предложение. *Для любого множества E, $E \subset \mathbb{R}^m$, существует такое борелевское множество C, что $E \subset C$ и $\mu_p^*(E) = \mu_p(C)$.*

Доказательство. Будем считать, что $\mu_p^*(E) < +\infty$ (в противном случае в качестве множества C возьмём $\mathbb{R}^m$). При каждом $n \in \mathbb{N}$ найдём такое $\frac{1}{n}$-покрытие $\{e_j^{(n)}\}_{j=1}^{\infty}$ множества E, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{diam}(e_j^{(n)})}{2} \right)^p < \mu_p\Big(E, \frac{1}{n}\Big) + \frac{1}{n},$$

и положим $C_n = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \overline{e_j^{(n)}}$. Так как диаметр множества совпадает с диаметром его замыкания, то

$$\mu_p\Big(C_n, \frac{1}{n}\Big) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{diam}(e_j^{(n)})}{2} \right)^p < \mu_p\Big(E, \frac{1}{n}\Big) + \frac{1}{n}.$$

Ясно, что борелевское множество $C = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n$ содержит E и при любом n

$$\mu_p\Big(C, \frac{1}{n}\Big) \leqslant \mu_p\Big(C_n, \frac{1}{n}\Big) \leqslant \mu_p\Big(E, \frac{1}{n}\Big) + \frac{1}{n} \leqslant \mu_p\Big(C, \frac{1}{n}\Big) + \frac{1}{n}.$$

Переходя к пределу в этом неравенстве, мы видим, что $\mu_p^*(E) = \mu_p(C)$. ►

6.4. Покажем теперь, что при $p = m$ мера Хаусдорфа по существу совпадает с m-мерной мерой Лебега. Нам потребуется следующая несложная оценка.

Лемма. $0 < \mu_m^*(Q) < +\infty$, *где $Q = [0,1]^m$ — единичный куб.*

Доказательство. Проверяя левое неравенство, заметим, что всякое множество e содержится в замкнутом шаре радиуса $\operatorname{diam}(e)$. Поэтому каждое покрытие $\{e_j\}_{j\geqslant 1}$ куба Q порождает его покрытие замкнутыми шарами B_j с радиусами $r_j = \operatorname{diam}(e_j)$. В силу счётной полуаддитивности меры Лебега мы имеем

$$1 = \lambda_m(Q) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_m(B_j) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_m r_j^m = 2^m \alpha_m \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{diam}(e_j)}{2} \right)^m,$$

где $\alpha_m = \lambda_m\big(B(0,1)\big)$. Поэтому

$$\frac{1}{2^m \alpha_m} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{diam}(e_j)}{2} \right)^m$$

для произвольного ε-покрытия $\{e_j\}_{j\geqslant 1}$ куба Q. Следовательно, $\mu_m(Q,\varepsilon) \geqslant \frac{2^{-m}}{\alpha_m}$ и тем более $\mu_m(Q) = \sup\limits_{\varepsilon>0} \mu_m(Q,\varepsilon) \geqslant \frac{2^{-m}}{\alpha_m}$.

Для доказательства правого неравенства разобьём куб Q на N^m конгруэнтных кубов Q_j. Диаметр каждого из них равен $\frac{\sqrt{m}}{N}$. Поэтому они образуют $\frac{\sqrt{m}}{N}$-покрытие куба Q. В таком случае

$$\mu_m\Big(Q, \frac{\sqrt{m}}{N}\Big) \leqslant \sum_{j=1}^{N^m} \left(\frac{\operatorname{diam}(Q_j)}{2} \right)^m = N^m \Big(\frac{\sqrt{m}}{2N}\Big)^m = 2^{-m} m^{\frac{m}{2}}.$$

Следовательно,

$$\mu_m^*(Q) = \lim_{N\to\infty} \mu_m\Big(Q, \frac{\sqrt{m}}{N}\Big) \leqslant 2^{-m} m^{\frac{m}{2}} < +\infty. \ ►$$

Теорема. *Мера Хаусдорфа μ_m пропорциональна мере Лебега λ_m.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}^m$ — σ-алгебра измеримых по Лебегу подмножеств пространства $\mathbb{R}^m$, а $\widetilde{\mathfrak{A}}^m$ — σ-алгебра μ_m^*-измеримых множеств.

Обе меры λ_m и μ_m инвариантны относительно сдвига и по лемме $\mu_m([0,1]^m) < +\infty$. По теореме 4.2 и замечанию к ней они пропорциональны по крайней мере на борелевских множествах, причём коэффициент пропорциональности положителен, поскольку $\mu_m\big([0,1]^m\big) > 0$. Отсюда вытекает, что на борелевских множествах они обращаются в нуль одновременно. Так как обе эти меры полны, то из предложения 6.3 следует равенство $\mathfrak{A}^m = \widetilde{\mathfrak{A}}^m$, а также пропорциональность мер на этой σ-алгебре. ►

Из доказанной теоремы легко вытекает, что при при $k = 1, 2, \ldots, m-1$ аналогичный результат справедлив для сужений меры Хаусдорфа μ_k на k-мерные аффинные подпространства.

В дальнейшем, в главе VI, будет установлена точная формула, показывающая, как меняется мера Лебега при диффеоморфном преобразовании множества. Сейчас же мы отметим лишь качественный результат, вытекающий из теоремы и свойства 6 п. 6.2.

Следствие. *Внешняя мера Лебега не возрастает при сближении и не убывает при растяжении.*

Следует соблюдать определённую осторожность в вопросе об измеримости образа измеримого множества при растяжении. Конечно, он возникает лишь в том случае, когда мы имеем дело с негладким растяжением. Отображение, обратное к растяжению, будучи липшицевским, сохраняет измеримость по Лебегу (см. п. 3.1). Само же растяжение не обязательно обладает этим свойством — оно может слишком сильно растянуть множество нулевой меры (см. упр. 5 в § 3). В то же время, как было отмечено, более узкий класс борелевских множеств сохраняется при растяжении.

6.5. Как доказано в теореме 6.4, меры λ_m и μ_m пропорциональны. Вычисление коэффициента пропорциональности основано на двух геометрических результатах, представляющих и самостоятельный интерес.

Лемма (об исчерпывании шарами). *Всякое непустое открытое подмножество G пространства $\mathbb{R}^m$ представимо в виде объединения последовательности попарно не пересекающихся шаров B_n и множества нулевой меры e:*

$$G = e \vee \bigvee_{n=1}^{\infty} B_n.$$

При этом диаметры шаров можно считать сколь угодно малыми.

Доказательство разделим на два этапа.

Установим сначала, что *в любом ограниченном открытом множестве G, $G \neq \varnothing$, можно выделить такие попарно не пересекающиеся шары $B_1, \ldots, B_N$, что*

$$\lambda_m\Big(G \setminus \big(B_1 \vee \ldots \vee B_N\big)\Big) < \theta\lambda_m(G)$$

(коэффициент $\theta = \theta_m \in (0,1)$ зависит только от размерности пространства).

Разобьём множество G на кубические ячейки Q_n с рациональными вершинами (см. п. I.1.7). Поскольку их можно подразбить на более мелкие части, диаметры этих ячеек можно считать произвольно малыми. Так как $\lambda_m(G) < +\infty$, то при достаточно большом N

$$\lambda_m(G) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_m(Q_n) < 2\sum_{n=1}^{N} \lambda_m(Q_n).$$

Пусть B_n — открытый шар, вписанный в ячейку Q_n (их центры совпадают, а радиус r_n шара равен половине длины ребра). Его объём составляет долю объёма ячейки, зависящую лишь от размерности:

$$\lambda_m(B_n) = \alpha_m r_n^m = \frac{\alpha_m}{2^m}\lambda_m(Q_n) \equiv \widetilde{\alpha}_m \lambda_m(Q_n),$$

где $\alpha_m = \lambda_m\big(B(0,1)\big)$. Поэтому

$$\sum_{n=1}^{N} \lambda_m(B_n) = \widetilde{\alpha}_m \sum_{n=1}^{N} \lambda_m(Q_n) > \frac{\widetilde{\alpha}_m}{2}\lambda_m(G).$$

Следовательно,

$$\lambda_m\Big(G \setminus \big(B_1 \vee \ldots \vee B_N\big)\Big) = \lambda_m(G) - \sum_{n=1}^{N} \lambda_m(B_n) < \lambda_m(G) - \frac{\widetilde{\alpha}_m}{2}\lambda_m(G).$$

Таким образом, можно положить $\theta = 1 - \widetilde{\alpha}_m/2$.

Перейдём ко второму этапу доказательства, предполагая сначала множество G ограниченным. Как мы только что убедились, из него можно удалить такой конечный набор попарно не пересекающихся шаров $B_1, \ldots, B_{N_1}$, что мера остающегося множества меньше $\theta\lambda_m(G)$. Удалив из G замыкания этих шаров, мы получим открытое множество $G_1 \subset G$, $\lambda_m(G_1) < \theta\lambda_m(G)$. В нём можно повторить это построение, выделив такой конечный набор попарно дизъюнктных шаров $B_{N_1+1}, \ldots, B_{N_2}$, что мера остальной части множества G_1 меньше $\theta\lambda_m(G_1)$. Удалив из G_1 замыкания этих шаров, получим открытое множество $G_2 \subset G_1$, $\lambda_m(G_2) < \theta\lambda_m(G_1) < \theta^2\lambda_m(G)$. Продолжив это рассуждение по индукции, мы построим последовательность попарно не пересекающихся шаров B_n, $B_n \subset G$, и последовательность вложенных открытых множеств G_j, $G \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots$, таких, что

$$G \setminus \bigcup_{n\geqslant 1} \overline{B}_n \subset G_j \quad \text{и} \quad \lambda_m(G_j) < \theta^j \lambda_m(G) \quad \text{при любом} \quad j.$$

Остаётся заметить, что множество $e = G \setminus \bigvee\limits_{n\geqslant 1} B_n$ имеет нулевую меру, поскольку оно содержится в объединении множеств $\bigcap\limits_{j\geqslant 1} G_j$ и $\bigcup\limits_{n\geqslant 1} \partial\overline{B}_n$.

Если множество G неограничено, то его можно представить в виде объединения множества меры нуль и последовательности попарно не пересекающихся ограниченных открытых множеств. Искомое представление мы получим, применив к каждому из них уже доказанную часть леммы. ►

Другое доказательство этой леммы может быть получено как следствие теоремы Витали (см. следствие 2 п. 7.3).

Нам потребуется ещё один геометрический факт. Речь идёт о так называемом изодиаметральном неравенстве, которое состоит в следующем (см. п. 8.3):

Из всех компактных множеств данного диаметра наибольший объём имеет шар.

Теперь мы можем найти коэффициент пропорциональности между мерами λ_m и μ_m.

Предложение. $\lambda_m = \alpha_m \mu_m$.

Доказательство. Достаточно установить равенство $\lambda_m(E) = \alpha_m \mu_m(E)$ хотя бы для одного множества положительной конечной меры.

Пусть $\{e_j\}_{j\geqslant 1}$ — ε-покрытие некоторого непустого открытого в $\mathbb{R}^m$ ограниченного множества G. Заметим, что в силу изодиаметрального неравенства $\lambda_m(\overline{e}_j) \leqslant \leqslant \alpha_m \left(\frac{\operatorname{diam}(e_j)}{2}\right)^m$. Поэтому

$$\lambda_m(G) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_m(\overline{e}_j) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_m \left(\frac{\operatorname{diam}(e_j)}{2}\right)^m = \alpha_m \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{diam}(e_j)}{2}\right)^m.$$

Переходя справа к нижней грани по всем ε-покрытиям, а затем переходя к пределу по ε, мы получаем, что

$$\lambda_m(G) \leqslant \alpha_m \mu_m(G). \tag{4}$$

С другой стороны, в силу леммы множество G можно представить в виде объединения последовательности попарно не пересекающихся шаров $B_j = B(x_j, r_j)$ и некоторого множества e нулевой лебеговой меры. Тогда

$$\lambda_m(G) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_m(B_j) = \alpha_m \sum_{j=1}^{\infty} r_j^m.$$

При этом радиусы шаров можно считать сколь угодно малыми. Будем предполагать, что все они меньше ε.

Так как $\mu_m(e) = \lambda_m(e) = 0$, то $\mu_m(e, \varepsilon) = 0$, и поэтому найдётся такое ε-покрытие $\{e_j\}_{j\geqslant 1}$ множества e, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{diam}(e_j)}{2}\right)^m < \varepsilon.$$

Таким образом, последовательности $\{B_j\}_{j\geqslant 1}$ и $\{e_j\}_{j\geqslant 1}$ в совокупности образуют ε-покрытие G и, следовательно,

$$\mu_m(G, \varepsilon) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} r_j^m + \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{diam}(e_j)}{2}\right)^m < \frac{1}{\alpha_m} \lambda_m(G) + \varepsilon.$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, мы получаем для $\mu_m(G)$ оценку сверху: $\mu_m(G) \leqslant \leqslant \frac{1}{\alpha_m} \lambda_m(G)$. Вместе с (4) это даёт требуемый результат. ►

6.6. Обсудим в заключение зависимость величины $\mu_p^*(E)$ от p. Очевидно, $\mu_p^*(E)$ убывает с ростом p. Более того, оказывается, $\mu_q^*(E) = 0$, если $\mu_p^*(E) < +\infty$ при какомнибудь $p < q$. Действительно, пусть $0 < \varepsilon < 1$ и $\{e_j\}_{j\geqslant 1}$ — такое ε-покрытие множества E, что

$$\sum_{j=1}^{\infty}\Big(\frac{\operatorname{diam}(e_j)}{2}\Big)^p < 1 + \mu_p(E,\varepsilon) \leqslant 1 + \mu_p^*(E) < +\infty.$$

Тогда

$$\mu_q(E,\varepsilon) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\Big(\frac{\operatorname{diam}(e_j)}{2}\Big)^q \leqslant \Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big)^{q-p}\sum_{j=1}^{\infty}\Big(\frac{\operatorname{diam}(e_j)}{2}\Big)^p < \Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big)^{q-p}\big(1+\mu_p^*(E)\big).$$

Перейдя в этом неравенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$, мы видим, что

$$\mu_q^*(E) = \lim_{\varepsilon\to 0}\mu_q(E,\varepsilon) = 0.$$

Полученный результат можно истолковать и так: если $0 < \mu_p^*(E) < +\infty$, то $\mu_q^*(E) = +\infty$ при $q < p$ и $\mu_q^*(E) = 0$ при $q > p$. Отсюда вытекает, что для любого множества E справедливо равенство

$$\inf\{q > 0 \,|\, \mu_q^*(E) = 0\} = \sup\{q > 0 \,|\, \mu_q^*(E) = +\infty\}.$$

Эта характеризующая множество E критическая величина представляет особый интерес. Она называется *хаусдорфовой размерностью* множества E и обозначается символом $\dim_H(E)$ (если $\mu_q^*(E) = 0$ для всех $q > 0$, то по определению $\dim_H(E) = 0$). Из леммы 6.4 вытекает, что $\mu_q^*(E) = 0$, если $E \subset \mathbb{R}^m$ и $q > m$. Таким образом, хаусдорфова размерность любого подмножества пространства $\mathbb{R}^m$ не превосходит m. Она равна m, если внешняя мера Лебега множества положительна.

УПРАЖНЕНИЯ

1) Не используя предложения 6.5, докажите непосредственно, что $\mu_1\big([a,b]\big) = \frac{b-a}{2}$, и, следовательно, $\lambda_1 = 2\mu_1$.

2) Чему равна хаусдорфова размерность счётного множества? Докажите, что $\dim_H\Big(\bigcup\limits_{n\geqslant 1} E_n\Big) = \sup\limits_n \dim_H(E_n)$.

3) Две точки $x, y \in \mathbb{R}^m$ называются ε-различимыми, если $\|x-y\| \geqslant \varepsilon$. Докажите, что

$$\dim_H(E) \leqslant \varliminf_{\varepsilon\to+0}\frac{\ln\big(N_E(\varepsilon)\big)}{|\ln\varepsilon|},$$

где $N_E(\varepsilon)$ — максимальное число попарно ε-различимых точек, содержащихся в ограниченном множестве $E \subset \mathbb{R}^m$. На примере множества $E = \{1, 2^{-p}, 3^{-p}, \dots\}$, где $p > 0$, убедитесь, что это неравенство нельзя заменить равенством.

4) Докажите, что хаусдорфова размерность не возрастает под действием отображения, удовлетворяющего условию Липшица, и поэтому сохраняется при диффеоморфизме.

5) Докажите, что хаусдорфова размерность канторова множества равна $\log_3 2$.

6) Докажите, что при $x \geqslant 0$ для канторовой функции φ справедливо равенство $\varphi(x) = 2^p \mu_p\big([0,x] \cap \mathcal{C}\big)$, где $\mathcal{C}$ — канторово множество и $p = \dim_H(\mathcal{C})$.

7) Модифицируя построение канторова множества, покажите, что при любом p, $0 < p < 1$, существует содержащееся в $[0,1]$ компактное множество E, хаусдорфова размерность которого равна p. Покажите на примерах, что при этом возможен любой из трёх случаев: $\mu_p(E) = 0$, $\mu_p(E) = +\infty$, $0 < \mu_p(E) < +\infty$.

8) Покажите, что существует содержащееся в $[0,1]$ множество, у которого мера Лебега равна нулю, а хаусдорфова размерность — единице.

9) Докажите, что в лемме об исчерпывании шарами (см. п. 6.5) шар можно заменить ограниченным измеримым множеством, мера которого положительна и совпадает с мерой его замыкания (например, выпуклым телом).

10) В пространстве $\mathbb{R}^m$ дана последовательность шаров, радиусы которых стремятся к нулю, а суммарный объём бесконечен. Докажите, что в кубе можно так разместить конечное число таких шаров, что они заполнят не менее 99% его объёма.

11) Пусть G, A — ограниченные открытые подмножества пространства $\mathbb{R}^m$, A выпукло. Рассмотрим специальный способ исчерпывания множества G, последовательно удаляя из него максимально возможные множества, подобные A. Это означает, что на первом шаге мы найдём максимальный коэффициент $c_1 > 0$ такой, что некоторый сдвиг $x_1 + c_1 A$ множества $c_1 A$ содержится в G (такой коэффициент существует). Потом положим $G_1 = G \setminus \big(x_1 + c_1 \overline{A}\,\big)$ и, повторив процедуру, построим множество G_2, и т. д. Докажите, что $\lambda_m(G_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

12) Подмножество E пространства $\mathbb{R}^m$ называется пренебрежимым, если $\lambda_m(E_\varepsilon) = o(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ (здесь E_ε — ε-окрестность E). Докажите, что если E пренебрежимо, то $\mu^*_{m-1}(E) = 0$.

§ 7. Теорема Витали

В этом параграфе мы докажем две теоремы о покрытиях, которые используются при изучении свойств измеримых множеств и функций (см. гл. IV). Мера Лебега в $\mathbb{R}^m$ обозначается буквой λ без указания на размерность, а символы $r(B)$ и B^* обозначают соответственно радиус шара B и шар с тем же центром и радиусом $5r(B)$.

7.1. Теорема. *Пусть $\mathcal{B}$ — набор шаров, образующих покрытие ограниченного множества E ($E \subset \mathbb{R}^m$). Если радиусы шаров ограничены, то из этого набора можно выделить такую (конечную или нет) последовательность попарно не пересекающихся шаров B_k, что*

$$E \subset \bigcup_{k\geqslant 1} B_k^*.$$

Доказательство. Не умаляя общности будем считать, что $E \cap B \neq \varnothing$ для всех шаров B из $\mathcal{B}$. Ясно, что тогда множество $\bigcup\limits_{B\in\mathcal{B}} B$ ограничено.

Искомую последовательность шаров $B_k = B(x_k, r_k)$ построим с помощью индукции. Пусть для единообразия $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1$, $R_1 = \sup\{r(B) \,|\, B \in \mathcal{B}_1\}$. Выберем $B_1 \in \mathcal{B}_1$ так, что $r_1 = r(B_1) > R_1/2$. Допустим, что попарно не пересекающиеся шары $B_1, \ldots, B_n$

и подмножества $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$ исходного набора $\mathcal{B}$ уже построены. Пусть

$$\mathcal{B}_{n+1} = \left\{ B \in \mathcal{B}_n \,\middle|\, B \cap \bigcup_{k=1}^{n} B_k = \varnothing \right\}.$$

Если $\mathcal{B}_{n+1} \neq \varnothing$, то мы полагаем $R_{n+1} = \sup\{r(B) \mid B \in \mathcal{B}_{n+1}\}$ и выбираем шар B_{n+1} так, что $r_{n+1} = r(B_{n+1}) > R_{n+1}/2$, и т. д. Таким образом, либо на каждом шаге множество $\mathcal{B}_{n+1}$ непусто, и мы получим бесконечную последовательность шаров, либо на каком-то шаге $\mathcal{B}_{n+1} = \varnothing$, и процесс оборвётся. Рассмотрим обе возможности, начиная со второй.

Пусть $\mathcal{B}_{n+1} = \varnothing$ и x — произвольная точка из E. Она принадлежит некоторому шару $B = B(a, r) \in \mathcal{B}$, причём $B \cap \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k \neq \varnothing$. Пусть j — наименьший из тех номеров k, что $B \cap B_k \neq \varnothing$. Тогда $r \leqslant R_j$ (при $j = 1$ это неравенство тривиально, а при $j > 1$ оно следует из дизъюнктности B и объединения $\bigcup\limits_{k=1}^{j-1} B_k$). Убедимся, что $x \in B_j^*$. В самом деле, поскольку шары B и B_j пересекаются,

$$\|x - x_j\| < \operatorname{diam}(B) + r(B_j) = 2r + r_j \leqslant 2R_j + r_j < 5r_j$$

(последнее неравенство справедливо, так как по построению $r_j > \frac{R_j}{2}$).

Рассмотрим теперь основной случай, когда последовательность шаров $\{B_k\}_{k \geqslant 1}$ бесконечна. Заметим прежде всего, что ряд $\sum\limits_{k \geqslant 1} \lambda(B_k)$ сходится. Действительно, по построению шары B_k попарно не пересекаются. Поэтому сумма ряда есть не что иное, как мера ограниченного множества $\bigcup\limits_{k \geqslant 1} B_k$ (в начале доказательства была отмечена ограниченность объединения всех шаров из $\mathcal{B}$). Из сходимости ряда немедленно следует, что $r_k \to 0$.

Пусть $x \in E$ и B — такой шар из $\mathcal{B}$, что $x \in B$. Убедимся, что

$$B \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \neq \varnothing. \tag{1}$$

В самом деле, в противном случае $B \cap \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k = \varnothing$. Тогда $0 < r(B) \leqslant R_{n+1} < 2r_{n+1}$ при любом n, что невозможно, поскольку $r_n \to 0$. Из (1) следует, что пересечение $B \cap B_k$ не пусто для некоторых номеров k. Пусть j — наименьший из них. Повторив проведённые выше рассуждения, мы убедимся, что $x \in B_j^*$. ►

Заметим, что как видно из доказательства, заключение теоремы справедливо для всякой последовательности шаров $\{B_k\}_{k \geqslant 1}$ из покрытия $\mathcal{B}$, удовлетворяющей при любом n условию

$$B_{n+1} \cap \bigcup_{k=1}^{n} B_k = \varnothing, \qquad 2r\big(B_{n+1}\big) > \sup\left\{ r(B) \,\middle|\, B \cap \bigcup_{k=1}^{n} B_k = \varnothing \right\}. \tag{2}$$

7.2. Доказанная теорема допускает существенное уточнение, если покрытие удовлетворяет дополнительному условию.

Определение. Набор $\mathcal{B}$ открытых шаров называется *покрытием Витали**) множества E ($E \subset \mathbb{R}^m$), если для любой точки из E в $\mathcal{B}$ найдётся сколь угодно малый шар, содержащий эту точку.

*) Джузеппе **Витали** (Vitali), 1875–1932, — итальянский математик.

Теорема (Витали). *Из всякого покрытия Витали $\mathcal{B}$ ограниченного множества E можно выделить (конечную или нет) последовательность шаров B_k, удовлетворяющую условиям:*

1) *шары B_k попарно не пересекаются;*
2) $E \subset \bigcup\limits_{k\geqslant 1} B_k^*$;
3) $\lambda\Big(E \setminus \bigcup\limits_{k\geqslant 1} B_k\Big) = 0$.

Отметим, что измеримость множества E не предполагается.

Доказательство. Прежде всего исключим из рассмотрения шары с излишне большими радиусами. Положим

$$\mathcal{B}_1 = \{B \in \mathcal{B} \,|\, r(B) < 1\}, \quad R_1 = \sup\{r(B) \,|\, B \in \mathcal{B}_1\}.$$

Очевидно, набор $\mathcal{B}_1$ образует покрытие множества E, удовлетворяющий условию теоремы 7.1. Пусть $\{B_k\}_{k\geqslant 1}$ — последовательность шаров, построенная в этой теореме. Она обладает свойствами 1) и 2). Убедимся, что она обладает и свойством 3).

Если эта последовательность конечна и состоит из n шаров, то $E \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} \overline{B_k}$. Действительно, конечность системы означает, что $B \cap \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k \neq \varnothing$ при любом $B \in \mathcal{B}$. Так как каждая точка из E принадлежит шарам со сколь угодно малым радиусом, то это было бы невозможно, если бы в E нашлись точки, не входящие в $\bigcup\limits_{k=1}^{n} \overline{B_k}$. Следовательно, $E \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k \subset \bigcup\limits_{k=1}^{n} \partial B_k$, и поэтому условие 3) выполняется.

Рассмотрим теперь случай, когда последовательность шаров B_k бесконечна. Убедимся, что при любом n

$$E \setminus \bigcup_{k=1}^{n} \overline{B_k} \subset \bigcup_{k=n+1}^{\infty} B_k^*. \tag{3}$$

Пусть $\mathcal{B}_{n+1}$ — множество шаров, построенное при доказательстве теоремы 7.1. Оно образует покрытие Витали множества $E_n = E \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{n} \overline{B_k}$, а последовательность шаров $\{B_{n+k}\}_{k\geqslant 1}$ удовлетворяет условию (2). Поэтому по теореме 7.1 $E_n \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_{n+k}^*$. Следовательно, при любом n

$$E \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \subset \Big(\bigcup_{k=1}^{n} \partial B_k\Big) \cup E_n \subset \Big(\bigcup_{k=1}^{n} \partial B_k\Big) \cup \Big(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} B_k^*\Big).$$

При этом

$$\lambda\Big(\bigcup_{k=1}^{n} \partial B_k \cup \bigcup_{k=n+1}^{\infty} B_k^*\Big) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda(B_k^*) = 5^m \sum_{k=n+1}^{\infty} \lambda(B_k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(последняя сумма стремится к нулю как остаток сходящегося ряда). Таким образом, множество $E \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$ содержится в множестве произвольно малой меры, откуда вытекает справедливость утверждения 3). ►

Замечание. Разбивая произвольное множество на ограниченные части, нетрудно убедиться, что утверждения 1) и 3) теоремы остаются справедливыми и для неограниченного множества E.

7.3. Одно из важных следствий из теоремы Витали связано с точками плотности.

Определение. Точка x_0 называется *точкой плотности* множества E, если $\lambda^*\bigl(E \cap B(x_0, r)\bigr)/\lambda(B(x_0, r)) \to 1$ при $r \to +0$.

Следствие 1. *Пусть E' — множество точек плотности произвольного множества E. Тогда $\lambda(E \setminus E') = 0$. В частности, почти каждая точка измеримого множества есть его точка плотности.*

Доказательство. Пусть $E_0 = E \setminus E'$. Если $x \in E_0$, то существует такая убывающая к нулю последовательность радиусов $\{r_n(x)\}_{n\geqslant 1}$, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^*\bigl(E \cap B(x_0, r_n(x))\bigr)}{\lambda\bigl(B(x_0, r_n(x))\bigr)} < 1.$$

Для $\theta \in (0,1)$ положим

$$E_\theta = \left\{ x \in E_0 \,\middle|\, \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda^*\bigl(E \cap B(x, r_n(x))\bigr)}{\lambda\bigl(B(x, r_n(x))\bigr)} < \theta \right\}.$$

Так как $E_\theta \subset E_{\theta'}$ при $\theta < \theta'$ и $E_0 = \bigcup\limits_{\theta\in(0,1)} E_\theta$, то нам достаточно убедиться, что $\lambda(E_\theta) = 0$ (заметим, что об измеримости множеств E_θ нам пока ничего не известно). Зафиксировав $\theta \in (0,1)$ и произвольно малое положительное число ε, найдём такое содержащее E_θ открытое множество G, что $\lambda(G) < \lambda^*(E_\theta) + \varepsilon$ (см. замечание в п. 2.2). Всевозможные содержащиеся в G шары $B\bigl(x, r_n(x)\bigr)$, $x \in E_\theta$, удовлетворяющие условию $\lambda^*\bigl(E \cap B(x, r_n(x))\bigr) \leqslant \theta\lambda\bigl(B(x, r_n(x))\bigr)$, образуют покрытие Витали множества E_θ. По теореме Витали существует такая подсистема попарно дизъюнктных шаров $B_k = B\bigl(x_k, r_{n_k}(x_k)\bigr)$, что разность $e = E_\theta \setminus \bigcup\limits_{k\geqslant 1} B_k$ имеет нулевую меру. В силу счётной полуаддитивности внешней меры мы получаем:

$$\lambda^*(E_\theta) \leqslant \lambda^*(e) + \sum_{k\geqslant 1} \lambda^*(E_\theta \cap B_k) \leqslant \sum_{k\geqslant 1} \lambda^*(E \cap B_k) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k\geqslant 1} \theta\lambda(B_k) \leqslant \theta\lambda(G) < \theta\bigl(\lambda^*(E_\theta) + \varepsilon\bigr).$$

Таким образом, $\lambda^*(E_\theta) < \frac{\varepsilon\theta}{1-\theta}$, из чего ввиду произвольности ε вытекает, что $\lambda^*(E_\theta) = 0$. Последнее означает, что множество E_θ измеримо и $\lambda(E_\theta) = 0$. ▶

Из теоремы Витали совсем легко вытекает полученный в лемме 6.5 результат об исчерпании открытого множества шарами.

Следствие 2. *Всякое непустое открытое подмножество G пространства $\mathbb{R}^m$ представимо в виде объединения последовательности попарно не пересекающихся шаров B_n и множества нулевой меры e:*

$$G = e \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Доказательство. Рассмотрим систему всевозможных шаров, содержащихся в G. Она, очевидно, образует покрытие Витали для G. Поэтому, если множество G ограничено, то для доказательства достаточно воспользоваться утверждением 2) теоремы Витали и положить $e = G \setminus \bigcup\limits_{k\geqslant 1} B_k$. В случае неограниченного множества G следует сослаться на замечание 7.2. ►

7.4. Теорема Витали допускает различные обобщения. Чтобы описать одно из них, введём понятие регулярного покрытия. Система множеств $\mathcal{B} = \{E_j(x) \,|\, x \in E,\ j \in \mathbb{N}\}$ называется *регулярным покрытием* множества E, если выполняются следующие условия:

1) $E_j(x) \subset B\big(x, r_j(x)\big), \quad r_j(x) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0;$

2) $\inf\limits_{j\in\mathbb{N}} \dfrac{\lambda\big(E_j(x)\big)}{\lambda\big(B(x, r_j(x))\big)} > 0$ при любом $x \in E$.

Например, в качестве множеств $E_j(x)$ можно брать "не слишком маленькие" по сравнению с $B\big(x, r_j(x)\big)$ кубы и т. п. Для регулярных покрытий справедлив аналог теоремы Витали (см., например, [C], гл. IV, § 3).

Теорема. *Из всякого регулярного покрытия множества E можно выделить такую последовательность попарно дизъюнктных множеств $E_k = E_{j_k}(x_k)$, что*

$$\lambda\Big(E \setminus \bigcup_{k\geqslant 1} E_k\Big) = 0.$$

Можно доказать, что теорема Витали остаётся справедливой для всякой борелевской меры μ в метрическом пространстве, если эта мера конечна на шарах и "квазиоднородна", т. е. если существуют такие числа $K > 1$, $a > 1$, что $\mu\big(B(x, ar)\big) \leqslant K\,\mu\big(B(x, r)\big)$ для всех x и $r > 0$. Этому условию удовлетворяет, например, площадь поверхности на компактных гладких многообразиях (см. гл. VIII).

УПРАЖНЕНИЯ

1) Докажите, что теорема Витали верна и для неограниченного множества.

2) Докажите, что всякая дифференцируемая на промежутке $< a, b >$ функция обладает свойством (N) (преобразует множества меры нуль в множества меры нуль).

3) Перенесите результат упр. 6 § 1 на двумерный случай, доказав, что объединение произвольного семейства невырожденных треугольников, лежащих на плоскости, измеримо. Сохранится ли измеримость, если заменить треугольники их границами?

4) Пусть G — открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^m$, $\Phi \in C^1(G, \mathbb{R}^m)$, $E \subset G$. Докажите, что если отображение Φ растягивающее на E, то $|\det\Phi'(x)| \geqslant 1$ почти везде на E. Можно ли утверждать, что $|\det\Phi'(x)| \geqslant 1$ всюду на E? Указание. Следует доказать, что требуемое неравенство справедливо во всякой точке плотности множества E и использовать следствие 1 п. 7.3.

5) Пусть $\mathcal{O}$ — открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^m$ и $\Phi \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m)$, причём $\det\Phi' \neq 0$ (от этого предположения позволяет отказаться теорема Сарда — см. добавление V). Докажите, что существует такое открытое множество $G \subset \mathcal{O}$, что сужение Φ на G взаимно однозначно и $\Phi(\mathcal{O}) = \Phi(G) \cup e$, где $\lambda(e) = 0$. Указание. Разбив множество $\mathcal{O}$ на части, сведите утверждение к случаю, когда замыкание $\mathcal{O}$ компактно,

$\lambda(\partial\mathcal{O}) = 0$, а Φ гладко в окрестности $\overline{\mathcal{O}}$. Докажите, что множество прообразов каждой точки из $\Phi(\mathcal{O})$ конечно. Убедитесь, что если точка не принадлежит $\Phi(\partial\mathcal{O})$, то она имеет окрестность, полный прообраз которой распадается на n компонент связности, где n число прообразов точки. С помощью теоремы Витали найдите последовательность таких окрестностей "почти покрывающую" $\Phi(\mathcal{O})$ и образуйте G из компонент их прообразов.

§ 8. Неравенство Брунна–Минковского

Буквой λ в этом параграфе обозначается мера Лебега в пространстве $\mathbb{R}^m$, которую мы будем называть также объёмом.

8.1. Теорема. *Для компактных множеств A, $B \subset \mathbb{R}^m$ справедливо неравенство*

$$\lambda^{\frac{1}{m}}(A+B) \geqslant \lambda^{\frac{1}{m}}(A) + \lambda^{\frac{1}{m}}(B).$$

Здесь $A+B$ — алгебраическая сумма множеств A и B: $A+B = \{x+y \mid x \in A,\ y \in B\}$, A, $B \neq \varnothing$.

Это неравенство называется неравенством Брунна*)–Минковского**).

Если A и B имеют положительную меру, то неравенство Брунна–Минковского обращается в равенство лишь в случае, когда они подобны. Доказательство этого факта непросто даже для выпуклых тел (ср. с упр. 3). Обсуждение этого и близких результатов читатель может найти, например, в книге [БЗ].

Доказательство разобьём на несколько шагов, постепенно усложняя множества A и B.

1) Пусть A и B — ячейки с длинами рёбер $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ и $\beta_1, \dots, \beta_m$ соответственно. Тогда $A+B$ — ячейка с длинами рёбер $\alpha_1+\beta_1, \dots, \alpha_1+\beta_m$. Будем считать, что $\alpha_j + \beta_j \equiv 1$ (общий случай получается отсюда с помощью сжатий вдоль координатных осей). Таким образом,

$$\lambda(A) = \alpha_1 \cdots \alpha_m, \quad \lambda(B) = \beta_1 \cdots \beta_m, \quad \lambda(A+B) = 1.$$

Воспользуемся теперь неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$\lambda^{\frac{1}{m}}(A) + \lambda^{\frac{1}{m}}(B) = (\alpha_1 \cdots \alpha_m)^{\frac{1}{m}} + (\beta_1 \cdots \beta_m)^{\frac{1}{m}} \leqslant \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} \alpha_j + \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} \beta_j = 1 = \lambda^{\frac{1}{m}}(A+B).$$

2) Пусть теперь каждое из множеств A и B есть конечное объединение ячеек. Благодаря теореме о свойствах полукольца (см. п. I.1.4) такие объединения можно считать дизъюнктными:

$$A = \bigvee_{k=1}^{r} P_k, \quad B = \bigvee_{j=1}^{s} Q_j.$$

Будем проводить доказательство по индукции относительно суммы $n = r+s$, считая, что $P_k, Q_j \neq \varnothing$. База индукции (при $n=2$) получена нами на предыдущем этапе.

*) Герман Карл **Брунн** (Brunn), 1862–1939, — немецкий математик.

) Герман **Минковский (Minkowski), 1864–1909, — немецкий математик.

Предположим, что доказываемое неравенство верно, если $r+s<n$. Произведём индукционный переход при $n \geqslant 3$. Ввиду равноправия r и s мы можем считать, что $r \geqslant 2$. Поскольку ячейки P_1 и P_r не имеют общих точек, не имеют общих точек и их проекции хотя бы на одну из координатных осей, например, на ось x_1. Это означает, что P_1 и P_r лежат по разные стороны от некоторой плоскости $x_1 = a$. Не умаляя общности будем считать, что $P_1 \subset H^+ = \{(x_1, \dots, x_m) \,|\, x_1 \geqslant a\}$ и $P_r \subset H^- = \{(x_1, \dots, x_m) \,|\, x_1 < a\}$. Положим

$$A^\pm = A \cap H^\pm, \quad P_k^\pm = P_k \cap H^\pm, \quad (k = 1, \dots, r).$$

Каждое из множеств $A^\pm$ представимо в виде объединения не более чем $(r-1)$-й ячейки:

$$A^+ = \bigcup_{k=1}^{r-1} P_k^+, \qquad A^- = \bigcup_{k=2}^{r} P_k^-.$$

Рассмотрим теперь такую плоскость $x_1 = b$, которая делит множество B в том же отношении, что плоскость $x_1 = a$ делит множество A. Точнее говоря, имеется в виду, что меры множеств $B^+ = B \cap \{(x_1, \dots, x_m) \,|\, x_1 \geqslant b\}$ и $B^- = B \cap \{(x_1, \dots, x_m) \,|\, x_1 < b\}$ находятся в том же отношении, что и меры множеств $A^\pm$. Последнее равносильно тому, что при некотором $\theta \in (0,1)$

$$\frac{\lambda(B^+)}{\lambda(B)} = \frac{\lambda(A^+)}{\lambda(A)} = \theta \quad \text{и} \quad \frac{\lambda(B^-)}{\lambda(B)} = \frac{\lambda(A^-)}{\lambda(A)} = 1 - \theta.$$

При этом каждое из множеств $B^\pm$ является, как и B, объединением не более чем s попарно дизъюнктных ячеек. Очевидно, что $A + B \supset (A^+ + B^+) \cup (A^- + B^-)$, причём множества $A^+ + B^+$ и $A^- + B^-$ не пересекаются (поскольку лежат по разные стороны от плоскости $x_1 = a + b$). Поэтому

$$\lambda(A+B) \geqslant \lambda\big((A^+ + B^+) \cup (A^- + B^-)\big) = \lambda(A^+ + B^+) + \lambda(A^- + B^-).$$

Меры в правой части можно оценить снизу по индукционному предположению:

$$\lambda(A^\pm + B^\pm) \geqslant \left(\lambda^{\frac{1}{m}}(A^\pm) + \lambda^{\frac{1}{m}}(B^\pm)\right)^m.$$

Вместе с предыдущим неравенством это даёт нам, что

$$\begin{aligned}\lambda(A+B) &\geqslant \left(\lambda^{\frac{1}{m}}(A^+) + \lambda^{\frac{1}{m}}(B^+)\right)^m + \left(\lambda^{\frac{1}{m}}(A^-) + \lambda^{\frac{1}{m}}(B^-)\right)^m = \\ &= \theta\left(\lambda^{\frac{1}{m}}(A) + \lambda^{\frac{1}{m}}(B)\right)^m + (1-\theta)\left(\lambda^{\frac{1}{m}}(A) + \lambda^{\frac{1}{m}}(B)\right)^m = \\ &= \left(\lambda^{\frac{1}{m}}(A) + \lambda^{\frac{1}{m}}(B)\right)^m,\end{aligned}$$

что завершает индукционный переход.

3) Пусть теперь A и B — произвольные компактные множества. Очевидно, таково и множество $A + B$. Искомый результат мы получим с помощью аппроксимации.

Множества A и B имеют конечные покрытия открытыми параллелепипедами (а следовательно, и ячейками), лежащими в δ-окрестностях этих множеств. Пусть A'

и B' — объединения ячеек, покрывающих A и B соответственно. Ясно, что $A' + B' \subset \subset (A+B)_{2\delta}$. Как мы отмечали (см. п. 6.3), пересечение δ-окрестностей множества есть его замыкание. Поэтому в силу непрерывности меры сверху $\lambda\big((A+B)_{2\delta}\big) \to \lambda(A+B)$ при $\delta \to 0$. По доказанному на предыдущем этапе мы имеем:

$$\lambda^{\frac{1}{m}}\big((A+B)_{2\delta}\big) \geqslant \lambda^{\frac{1}{m}}(A'+B') \geqslant \lambda^{\frac{1}{m}}(A') + \lambda^{\frac{1}{m}}(B') \geqslant \lambda^{\frac{1}{m}}(A) + \lambda^{\frac{1}{m}}(B).$$

Требуемое неравенство получается отсюда с помощью предельного перехода. ▶

Замечание. Мы рассмотрели неравенство Брунна–Минковского в ведущем частном случае — для компактных множеств. Сходными рассуждениями его нетрудно получить, например, для открытых множеств. Однако следует иметь в виду, что для произвольных измеримых множеств A, B множество $A+B$ может не быть измеримым (см. упр. 6). С учётом этого неравенство Брунна–Минковского для непустых измеримых множеств принимает вид:

$$\big(\lambda^*(A+B)\big)^{\frac{1}{m}} \geqslant \lambda^{\frac{1}{m}}(A) + \lambda^{\frac{1}{m}}(B),$$

где λ^* — внешняя мера Лебега. Для доказательства следует вспомнить (см. следствие 3 п. 2.2), что в силу регулярности меры Лебега множества A и B можно представить в виде

$$A = e \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad B = e' \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n,$$

где $\lambda(e) = \lambda(e') = 0$, а $\{A_n\}_{n\geqslant 1}$ и $\{B_n\}_{n\geqslant 1}$ — возрастающие последовательности компактных множеств. Так как $A+B \supset A_n + B_n$ при любом n, то

$$\big(\lambda^*(A+B)\big)^{\frac{1}{m}} \geqslant \lambda^{\frac{1}{m}}(A_n+B_n) \geqslant \lambda^{\frac{1}{m}}(A_n) + \lambda^{\frac{1}{m}}(B_n).$$

Поскольку $\lambda(A_n) \to \lambda(A)$ и $\lambda(B_n) \to \lambda(B)$ при $n \to \infty$, переход к пределу приводит к требуемому результату.

Можно также доказать (см. [Фе]), что для любых множеств

$$\big(\lambda^*(A+B)\big)^{\frac{1}{m}} \geqslant \big(\lambda^*(A)\big)^{\frac{1}{m}} + \big(\lambda^*(B)\big)^{\frac{1}{m}},$$

но мы не будем на этом останавливаться.

8.2. Из неравенства Брунна–Минковского легко следует неравенство, связывающее объём тела и площадь его поверхности (под телом мы понимаем компактное множество с непустой внутренностью). Подробно понятие площади поверхности обсуждается в главе VIII, сейчас же мы ограничимся определением необходимого для формулировки этого неравенства понятия площади поверхности в смысле Минковского. Это определение основано на том наглядном соображении, что приращение объёма тела при переходе к его ε-окрестности (см. п. 6.3) должно быть при малых $\varepsilon > 0$ почти пропорционально площади границы тела.

Определение. Пусть $K \subset \mathbb{R}^m$ — произвольное тело, K_ε — его ε-окрестность. *Нижней площадью в смысле Минковского* множества ∂K называется величина

$$\Sigma^-_{m-1}(\partial K) = \varliminf_{\varepsilon\to+0} \frac{\lambda(K_\varepsilon \setminus K)}{\varepsilon}.$$

Предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \frac{\lambda(K_\varepsilon\setminus K)}{\varepsilon}$ (если он существует) называется *площадью ∂K в смысле Минковского.* Мы будем обозначать его символом $\Sigma_{m-1}(\partial K)$.

Простые вычисления показывают, что для сферы $S(r) \subset \mathbb{R}^m$ радиуса r справедливо равенство $\Sigma_{m-1}\big(S(r)\big) = m\alpha_m r^{m-1}$, где α_m — объём единичного шара в пространстве $\mathbb{R}^m$. Как мы убедимся (см. п. VIII.4.4 и п. Д.IV.7), для тел с достаточно гладкой границей и для выпуклых тел площадь границы по Минковскому пропорциональна мере Хаусдорфа μ_{m-1}.

Теорема (изопериметрическое неравенство). *Для любого тела $K \subset \mathbb{R}^m$ справедливо неравенство*

$$\Sigma^-_{m-1}(\partial K) \geqslant m\alpha_m^{\frac{1}{m}} \lambda^{\frac{m-1}{m}}(K).$$

Если K — шар, то это неравенство обращается в равенство, из чего вытекает изопериметрическое неравенство в классической формулировке, в которой мы, говоря о площади поверхности, имеем в виду нижнюю площадь в смысле Минковского:

Из всех тел данного объёма шар имеет наименьшую площадь поверхности.
Из всех тел с данной площадью поверхности шар имеет наибольший объём.

Как читатель легко убедится самостоятельно, изопериметрическое неравенство можно записать и так (далее B — шар в $\mathbb{R}^m$):

$$\left(\frac{\Sigma^-_{m-1}(\partial K)}{\Sigma^-_{m-1}(\partial B)}\right)^{\frac{1}{m-1}} \geqslant \left(\frac{\lambda(K)}{\lambda(B)}\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Доказательство. Пусть $B = B(0,1)$, $\alpha_m = \lambda(B)$. По неравенству Брунна–Минковского

$$\lambda^{\frac{1}{m}}(K_\varepsilon) = \lambda^{\frac{1}{m}}(K + \varepsilon B) \geqslant \lambda^{\frac{1}{m}}(K) + \varepsilon\, \alpha_m^{\frac{1}{m}}.$$

Возведение в степень даёт нам:

$$\lambda(K_\varepsilon \setminus K) = \lambda(K_\varepsilon) - \lambda(K) \geqslant m\,\varepsilon\, \alpha_m^{\frac{1}{m}} \lambda^{\frac{m-1}{m}}(K) + O(\varepsilon^2).$$

Доказываемое неравенство мы получим, разделив на ε и перейдя к пределу:

$$\Sigma^-_{m-1}(\partial K) = \varliminf_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\varepsilon}\lambda(K_\varepsilon \setminus K) \geqslant m\,\alpha_m^{\frac{1}{m}} \lambda^{\frac{m-1}{m}}(K). \quad \blacktriangleright$$

8.3. Как следствие из неравенства Брунна–Минковского приведём ещё доказательство *изодиаметрального* неравенства или неравенства Бибербаха*).

Теорема. *Из всех измеримых множеств данного диаметра наибольшим объёмом обладает шар.*

Доказательство. Пусть $A \subset \mathbb{R}^m$, $\operatorname{diam}(A) = d$. Так как при переходе к замыканию диаметр множества не меняется, то множество A можно считать замкнутым и, следовательно, компактным. Рассмотрим множества $A' = -A$ и $E = \frac{1}{2}(A + A')$. По неравенству Брунна–Минковского объём множества E не меньше объёма A:

$$\lambda^{\frac{1}{m}}(E) = \frac{1}{2}\lambda^{\frac{1}{m}}(A + A') \geqslant \frac{1}{2}\big(\lambda^{\frac{1}{m}}(A) + \lambda^{\frac{1}{m}}(A')\big) = \lambda^{\frac{1}{m}}(A).$$

*) Людвиг **Бибербах** (Bieberbach), 1886–1982, — немецкий математик.

Убедимся, что множество E содержится в замкнутом шаре радиуса $d/2$. Действительно, если $x \in E$, то $x = (s-t)/2$, где $s, t \in A$. Поэтому $\|x\| = \frac{1}{2}\|s-t\| \leqslant \frac{d}{2}$. Итак, $\lambda(A) \leqslant \lambda(E)$, а E содержится в шаре B радиуса $d/2$. Следовательно, $\lambda(A) \leqslant \lambda(B)$. ►

УПРАЖНЕНИЯ

Далее A и B — подмножества пространства $\mathbb{R}^m$.

1) Пусть A и B — компактные множества. Убедитесь, что функция $t \mapsto \lambda^{\frac{1}{m}}\big(tA + (1-t)B\big)$ вогнута на $[0,1]$, т. е. при любом t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, справедливо неравенство

$$\lambda^{\frac{1}{m}}\big(tA + (1-t)B\big) \geqslant t\lambda^{\frac{1}{m}}(A) + (1-t)\lambda^{\frac{1}{m}}(B).$$

Используя вогнутость логарифма, выведите отсюда, что

$$\lambda\big(tA + (1-t)B\big) \geqslant \lambda^t(A)\lambda^{1-t}(B).$$

2) Рассуждая как в замечании 8.1, докажите, что для произвольных (возможно, неизмеримых) множеств A, B справедливо неравенство

$$\lambda_*^{\frac{1}{m}}(A+B) \geqslant \lambda_*^{\frac{1}{m}}(A) + \lambda_*^{\frac{1}{m}}(B),$$

где λ_* — внутренняя мера (см. определение в п. 2.2).

3) Докажите, что для эллипсоидов неравенство Брунна–Минковского обращается в равенство лишь в случае, когда они подобны. Указание. Примените приём, использованный при доказательстве теоремы 5.5 о единственности эллипсоида наибольшего объёма.

4) Пусть $[a,b]$ — проекция на первую координатную ось выпуклого тела, лежащего в $\mathbb{R}^m$ $(m \geqslant 2)$. Пусть, кроме того, $S(t)$ — площадь сечения этого тела плоскостью $x_1 = t$, а $V(t)$ — объём его части, лежащей в полупространстве $x_1 \leqslant t$. Докажите, что функция $S^{\frac{1}{m-1}}$ вогнута, а дробь $V^{\frac{1}{m}}/S^{\frac{1}{m-1}}$ не убывает на $(a,b]$.

5) Убедитесь, что рассуждения п. 8.3 сохраняют силу при замене евклидовой нормы $\|\cdot\|$ произвольной нормой $\|\cdot\|_*$: если измеримое множество $A \subset \mathbb{R}^m$ таково, что $\|x-y\|_* \leqslant 2r$ для всех x, $y \in A$, то $\lambda(A) \leqslant \lambda\big(B_*(r)\big)$, где $B_*(r) = \big\{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\|_* < r\big\}$.

6) Покажите, что алгебраическая сумма множеств нулевой лебеговой меры может быть неизмеримой. Указание. Рассмотрите множество $C + 2E$, где $C = \Big\{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{4^n} \;\Big|\; \varepsilon_n = 0 \text{ или } 1\Big\}$, а множество $E \subset C$ следующим образом строится с помощью ультрафильтра $\mathfrak{U}$ в $\mathbb{N}$, состоящего из бесконечных множеств: $E = \Big\{\sum\limits_{n \in U} 4^{-n} \;\Big|\; U \in \mathfrak{U}\Big\}$. Используйте тот же приём, что и при решении упр. 12 § 1.

Глава III. ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ

Введение понятия меры является для нас необходимым этапом при решении главной задачи — определении интеграла. Однако и сейчас, после знакомства с мерой, мы не можем сразу перейти к её решению. Дело в том, что не уточнив предварительно, для каких функций будет строиться интеграл, мы неизбежно встретимся с трудностями. Чтобы проиллюстрировать это, рассмотрим простейшую ситуацию.

Интеграл от ограниченной функции, заданной на отрезке $[a, b]$, естественно попытаться определять как предел интегральных сумм, т. е. сумм вида

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}), \quad \text{где } \ x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b, \quad x_{k-1} \leqslant \xi_k \leqslant x_k.$$

Предел вычисляется при условии, что максимум разностей $x_k - x_{k-1}$ стремится к нулю, и не должен зависеть от выбора точек ξ_k.

Если функция f непрерывна, то такой предел существует (см. теорему IV.7.3). Попытка применить эту процедуру к функциям, имеющим "много" разрывов, оканчивается неудачей. Например, если f — *функция Дирихле*, равная единице в рациональных и нулю в иррациональных точках, мы видим, что интегральная сумма равна нулю при иррациональных ξ_k и равна $b - a$ в случае, когда все ξ_k рациональны. Это верно для любого, сколь угодно мелкого дробления промежутка интегрирования, и поэтому интегральные суммы не имеют предела.

Чтобы понять причины неудачи описанного подхода к определению интеграла, следует обратить внимание на то, что для разрывной функции разбиение отрезка "на мелкие промежутки" и последующее построение интегральной суммы отнюдь не является столь же естественной процедурой, как для функции непрерывной. В самом деле, в последнем случае независимость предела интегральных сумм от выбора точек ξ_k определяется тем, что непрерывная функция мало меняется на промежутках дробления $[x_{k-1}, x_k]$, чего, конечно, нельзя ожидать от разрывной функции. Поэтому при стремлении построить интеграл от такой функции возникает естественная идея, впервые реализованная Лебегом, разбивать отрезок $[a, b]$ не на промежутки (на которых, несмотря на их "малость", наша функция всё равно может сильно меняться), а на какие-то другие множества. При этом "малость" множества должна определяться не его размерами, а тем, насколько сильно меняется на нём интегрируемая функция. Например, в роли таких множеств могут выступать множества e_k вида $f^{-1}\big([y_{k-1}, y_k)\big)$, где точки y_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ образуют возрастающую последовательность $(y_0 \leqslant \inf f, \ y_n > \sup f)$. При таком способе разбиения промежутка интегральная сумма должна быть модифицирована: разности $x_k - x_{k-1}$, т. е. длины промежутков $[x_{k-1}, x_k]$, следует заменить мерами множеств e_k. В этом случае интегральная сумма принимает вид $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\lambda(e_k)$,

где $\xi_k \in e_k$, а λ — мера Лебега. Оставляя обсуждение свойств таких сумм до следующей главы, заметим лишь, что под интегралом от функции f следует понимать их предел при условии, что $\max_k(y_k - y_{k-1}) \to 0$. Однако для реализации нового подхода к определению интеграла нужно устранить существенный пробел, имеющейся в наших рассуждениях. Он состоит в том, что мы не можем быть уверенными в измеримости множеств e_k (вспомним, что не всякое множество измеримо по Лебегу!) и поэтому не имеем права говорить об их мерах. Следовательно, рассматривая произвольную функцию, невозможно говорить о каких-то свойствах модифицированных интегральных сумм, так как сама возможность их построения не гарантирована. Поэтому, стремясь реализовать намеченную программу, мы откажемся от попыток определения интеграла для произвольной функции и ограничимся рассмотрением лишь таких функций, для которых построенные выше множества e_k заведомо имеют меру. Изучению таких функций, называемых измеримыми, и посвящена эта глава. Класс измеримых функций чрезвычайно широк и удовлетворяет не только потребностям приложений, но и большинству запросов чистой математики. Вместе с тем он достаточно обозрим, и, как мы увидим, в случае функций, заданных в пространстве $\mathbb{R}^m$, тесно связан с классами более простых, например, непрерывных, функций.

§ 1. Определение и простейшие свойства измеримых функций

Всюду далее мы будем считать, что фиксировано некоторое множество X и σ-алгебра его подмножеств $\mathfrak{A}$. Пару $(X, \mathfrak{A})$ будем называть *измеримым пространством.* Множества из σ-алгебры $\mathfrak{A}$ называем измеримыми.

Как читатель убедится в дальнейшем, нам будет удобно рассматривать вещественные функции не только с конечными, но и с бесконечными значениями. Некоторые возникающие на первых порах технические осложнения, связанные с арифметическими действиями с такими функциями, вполне компенсируются свободой, которую мы получим, позволив себе рассматривать измеримые функции с бесконечными значениями. С первым подтверждением этому мы встретимся уже в теореме 1.4.

1.1. Из сказанного в начале этой главы видно, что при построении интеграла важно, чтобы были измеримы множества, на которых колебания подынтегральной функции малы. Определяющую роль при этом играют множества, где функция односторонне ограничена. Введём важное

Определение. Пусть функция $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ определена на множестве $E \subset X$, $a \in \mathbb{R}$. Множества

$$E(f < a) \equiv \{x \in E \mid f(x) < a\}, \quad E(f \leqslant a) \equiv \{x \in E \mid f(x) \leqslant a\},$$
$$E(f > a) \equiv \{x \in E \mid f(x) > a\}, \quad E(f \geqslant a) \equiv \{x \in E \mid f(x) \geqslant a\}$$

называются *лебеговыми множествами* функции f (соответственно первого, второго, третьего и четвертого типа).

Как видно из определения, лебеговы множества — это прообразы открытых и замкнутых полуосей, т. е. множества

$$f^{-1}\big([-\infty, a)\big),\ f^{-1}\big([-\infty, a]\big),\ f^{-1}\big((a, +\infty]\big),\ f^{-1}\big([a, +\infty]\big)$$

соответственно (см. рис. 3).

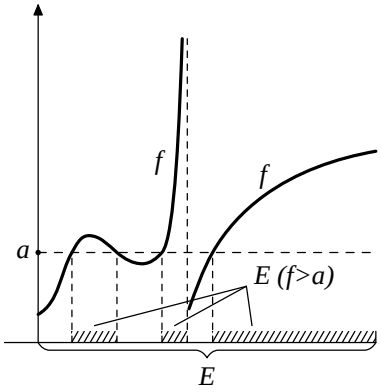


Рис. 3.

Наряду с символами $E(f < a)$, $E(f \leqslant a)$ и т. д. для обозначения прообразов полуосей аналогичные символы мы будем использовать и для обозначения прообразов промежутков, например, $E(a < f \leqslant b) = f^{-1}\big((a, b]\big)$.

Оказывается, измеримость всех лебеговых множеств одного типа влечёт измеримость лебеговых множеств других типов. Точнее, справедлива

Теорема. *Пусть E измеримое множество, $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$. Следующие свойства равносильны:*

1) *множества $E(f < a)$ измеримы при любом a из $\mathbb{R}$;*
2) *множества $E(f \leqslant a)$ измеримы при любом a из $\mathbb{R}$;*
3) *множества $E(f > a)$ измеримы при любом a из $\mathbb{R}$;*
4) *множества $E(f \geqslant a)$ измеримы при любом a из $\mathbb{R}$.*

Доказательство проведём по схеме 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 1).

Так как $E(f \leqslant a) = \bigcap\limits_{n \geqslant 1} E(f < a + \frac{1}{n})$, то первое свойство влечёт второе, из которого вытекает третье, поскольку $E(f > a) = E \setminus E(f \leqslant a)$.

Остальные две импликации доказываются аналогично. Читатель легко проведёт необходимые рассуждения самостоятельно. ►

1.2. Теперь мы введём класс функций, играющий основную роль в теории интегрирования.

Определение. Пусть $E \in \mathfrak{A}$, $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$. Функция f называется *измеримой* (точнее, $\mathfrak{A}$-измеримой или измеримой относительно $\mathfrak{A}$), если её лебеговы множества (всех четырёх типов) измеримы при любом $a \in \mathbb{R}$.

Если $E \subset \mathbb{R}^m$ и $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^m$ (или $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}^m$), то измеримые функции называются также измеримыми по Лебегу (или по Борелю).

Из теоремы 1.1 вытекает, что для измеримости функции достаточно, чтобы при любом $a \in \mathbb{R}$ были измеримы её лебеговы множества лишь какого-то одного типа (первого, второго и т. д.).

Замечание 1. Подчеркнём, что говоря об измеримой функции, мы всегда предполагаем, что она определена на измеримом множестве.

Замечание 2. Дополняя определение, будем говорить, что функция $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ измерима на множестве E_0, $E_0 \subset E$, если измеримо сужение $f\big|_{E_0}$ (разумеется, $E_0 \in \mathfrak{A}$).

Примеры. 1) Постоянная функция измерима на любом (измеримом) множестве E. В частности, согласно нашему определению, функция, тождественно равная $+\infty$ (или $-\infty$) на E, измерима.

2) *Характеристической* функцией множества $A \subset X$ называется функция χ_A, которая равна единице на A и нулю вне A. Как легко проверить, рассматривая её лебеговы множества, она измерима одновременно с множеством A.

3) Пусть $X = [0,1] \times [0,1]$, а алгебра $\mathfrak{A}$ состоит из множеств вида $e \times [0,1]$, где $e \in \mathfrak{A}^1$, $e \subset [0,1]$. Тогда функция $f(x,y) = y$ не измерима относительно $\mathfrak{A}$. Вместе с тем, она, очевидно, измерима по Лебегу.

Отметим несколько простых свойств измеримых функций.

1) *Прообразы одноточечных множеств* (*в том числе прообразы точек* $+\infty$ *и* $-\infty$) *измеримы.*

Действительно, если $a \in \mathbb{R}$, то $f^{-1}\big(\{a\}\big) = E(f \leqslant a) \cap E(f \geqslant a)$. Кроме того, $f^{-1}\big(\{+\infty\}\big) = \bigcap\limits_{n\geqslant 1} E(f > n)$, $\quad f^{-1}\big(\{-\infty\}\big) = \bigcap\limits_{n\geqslant 1} E(f < -n)$.

2) *Прообраз любого промежутка* Δ *измерим. В частности, множество, на котором значения функции конечны, т. е. множество* $f^{-1}(\mathbb{R})$, *измеримо.*

Действительно, в силу свойства 1 можно считать, что Δ открытый промежуток: $\Delta = (a,b)$. Если a, $b \in \mathbb{R}$, то $f^{-1}(\Delta) = E(f < b) \setminus E(f \leqslant a) \in \mathfrak{A}$. Бесконечный же интервал Δ исчерпывается конечными: $\Delta = \bigcup\limits_{n\geqslant 1} (a_n, b_n)$. Поэтому $f^{-1}(\Delta) = \bigcup\limits_{n\geqslant 1} E\big(a_n < f < b_n\big) \in \mathfrak{A}$. ►

3) *Измеримость функции влечёт измеримость её модуля*, поскольку $E\big(|f| < a\big) = E(-a < f < a) \in \mathfrak{A}$ для любого $a \in \mathbb{R}$.

4) *Вместе с функциями* f, g *измеримы и функции* $\varphi = \max\{f,g\}$, $\psi = \min\{f,g\}$. *В частности, измеримы функции* $f_+ = \max\{f,0\}$ и $f_- = \min\{-f,0\}$.

Для доказательства достаточно заметить, что $E(\varphi < a) = E(f < a) \cap E(g < a)$ и $E(\psi > a) = E(f > a) \cap E(g > a)$ для любого $a \in \mathbb{R}$. ►

5) *Прообраз открытого множества измерим.*

По теореме I.1.7 непустое открытое подмножество G прямой $\mathbb{R}$ можно представить в виде: $G = \bigcup\limits_{n\geqslant 1} [a_n, b_n)$. Поэтому измеримость $f^{-1}(G)$ вытекает из равенства $f^{-1}(G) = \bigcup\limits_{n\geqslant 1} E\big(a_n \leqslant f < b_n\big)$. ►

Опираясь на теорему I.6.1 о прообразе борелевской оболочки, мы видим, что вместе со свойством 5 справедливо и более общее утверждение.

Предложение. *Для любой измеримой функции прообраз борелевского подмножества вещественной прямой измерим.*

Заметим, что предложение перестаёт быть верным, если вместо борелевских рассматривать множества, измеримые по Лебегу (см. упр. 5 § II.3).

1.3. Продолжим знакомство со свойствами измеримых функций.

Теорема. 1) *Сужение измеримой функции на измеримое множество измеримо.*

2) *Если* $E = \bigcup\limits_{n\geqslant 1} E_n$ *и функция* f *измерима на каждом множестве* E_n, *то она измерима на* E.

Доказательство. 1) Если функция f задана на E и $E_0 \subset E$, то при любом $a \in \mathbb{R}$ множество $E_0(f < a)$ представимо в виде $E_0(f < a) = E_0 \cap E(f < a)$ и, следовательно, измеримо вместе с E_0.

2) Измеримость f на E следует из равенства $E(f < a) = \bigcup\limits_{n\geqslant 1} E_n(f < a)$. ►

Следствие. *Каждая измеримая функция* f, *определённая на* E, *есть сужение измеримой функции, определённой на* X.

Для доказательства достаточно доопределить f нулём вне E. Измеримость полученной таким образом функции следует из теоремы. ►

Замечание. Благодаря следствию мы при изучении измеримых функций всегда можем предполагать, что они заданы на всём множестве X.

1.4. Перейдём к вопросу о предельном переходе в классе измеримых функций и докажем, что он замкнут относительно поточечной сходимости, т. е. что поточечный предел последовательности измеримых функций снова есть измеримая функция.

Напомним, что функция f называется поточечным пределом последовательности $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ на E, если

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x) \quad \text{для любой точки } x \text{ из } E.$$

Пользуясь замечанием 1.3, мы в дальнейшем будем предполагать, что все рассматриваемые функции определены на всём множестве X.

Теорема. *Пусть* $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ — *произвольная последовательность измеримых функций,* $g = \sup\limits_n f_n$, $h = \inf\limits_n f_n$. *Тогда*

1) *функции* g *и* h *измеримы;*

2) *функции* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, f_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, f_n$ *измеримы; в частности, если последовательность* $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ *имеет поточечный предел, то предельная функция измерима.*

Благодаря тому, что определение измеримости позволяет рассматривать и функции со значениями в $\overline{\mathbb{R}}$, в сформулированной теореме мы имеем возможность не делать никаких оговорок относительно конечности рассматриваемых в ней функций.

Доказательство. 1) При любом $a \in \mathbb{R}$ справедливы равенства

$$X(g > a) = \bigcup_{n\geqslant 1} X(f_n > a), \quad X(h < a) = \bigcup_{n\geqslant 1} X(f_n < a),$$

из которых в силу теоремы 1.1 и следует наше утверждение.

2) Для доказательства достаточно вспомнить известные из теории пределов формулы

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, f_n(x) = \inf_{n\geqslant 1} \sup_{k\geqslant 1} f_{n+k}(x) \quad \text{и} \quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, f_n(x) = \sup_{n\geqslant 1} \inf_{k\geqslant 1} f_{n+k}(x),$$

и сослаться на утверждение 1). ►

1.5. Теорема. *Пусть $f_1, \dots, f_n$ измеримые функции, $\varphi \in C(H)$, где $H \subset \mathbb{R}^n$. Предположим, что $(f_1(x), \dots, f_n(x)) \in H$ при любом x. Тогда функция F, определяемая равенством $F(x) = \varphi\big(f_1(x), \dots, f_n(x)\big)$ $(x \in X)$, измерима.*

Доказательство. Воспользуемся тем, что при любом $a \in \mathbb{R}$ множество $H(\varphi < a)$ относительно открыто в H в силу непрерывности φ, т. е. $H(\varphi < a) = H \cap G_a$, где G_a — некоторое множество, открытое в $\mathbb{R}^n$.

Введём вспомогательное отображение $U\colon X \to \mathbb{R}^n$, положив

$$U(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)) \qquad (x \in X).$$

Убедимся, что для любого открытого в $\mathbb{R}^n$ множества G его прообраз — $U^{-1}(G)$ — измерим. Действительно, прообраз любой n-мерной ячейки $P = \prod\limits_{k=1}^{n} [a_k, b_k)$ измерим, поскольку

$$U^{-1}(P) = \{x \in X \mid a_k \leqslant f_k(x) < b_k \ \text{ при } \ k = 1, \dots, n\} = \bigcap_{k=1}^{n} X(a_k \leqslant f_k < b_k).$$

Так как G представимо в виде объединения последовательности ячеек: $G = \bigcup\limits_{j \geqslant 1} P_j$ (теорема I.1.7), то множество $U^{-1}(G) = \bigcup\limits_{j \geqslant 1} U^{-1}(P_j)$ измеримо.

Таким образом, множество

$$X(F < a) = \big\{x \in X \mid U(x) \in H(\varphi < a)\big\} = U^{-1}(H \cap G_a) = U^{-1}(G_a)$$

измеримо. ►

Опираясь на теорему 1.4, можно несколько обобщить полученный результат (по поводу дальнейшего обобщения см. упр. 11).

Следствие. *Теорема 1.5 остаётся справедливой, если функция φ является поточечным пределом последовательности непрерывных функций $\{\varphi_k\}_{k \geqslant 1}$.*

Для доказательства достаточно заметить, что $F = \varphi \circ U$ есть предел измеримых функций $F_k = \varphi_k \circ U$, где U — отображение, определённое в доказательстве теоремы. ►

1.6. Обсудим теперь арифметические действия с измеримыми функциями. Поскольку мы считаем, что измеримые функции могут принимать бесконечные значения, нам необходимо уточнить, что мы будем понимать под суммой и произведением таких функций. При определении суммы это необходимо, если значения слагаемых суть бесконечности противоположного знака, а при определении произведения — если один из сомножителей бесконечен, а другой равен нулю. Во избежание постоянных оговорок, мы распространим арифметические действия на расширенное множество вещественных чисел, приняв следующее

Определение. 1) Если $x \in \overline{\mathbb{R}}$ и $x \neq 0$, то

$$x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot x = \pm\infty \ \text{ при } \ x > 0 \qquad \text{и} \qquad x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot x = \mp\infty \ \text{ при } \ x < 0.$$

2) Для любого $x \in \overline{\mathbb{R}}$ мы полагаем: $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$.
3) При любом $x \in \overline{\mathbb{R}}$ мы полагаем: $\frac{x}{\pm\infty} = 0$ (в частности, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty} = 0$).

4) Для любого $x \in \mathbb{R}$ мы полагаем:

$$x + (+\infty) = x - (-\infty) = (+\infty) + x = +\infty, \qquad x + (-\infty) = x - (+\infty) = (-\infty) + x = -\infty.$$

5) $(+\infty) + (-\infty) = (-\infty) + (+\infty) = (+\infty) - (+\infty) = (-\infty) - (-\infty) = 0.$

Деление на нуль в $\overline{\mathbb{R}}$, как и в $\mathbb{R}$, не определено.

Первые четыре из введённых соглашений не нарушают ассоциативности арифметических операций. Пятое соглашение делает сложение в $\overline{\mathbb{R}}$ не ассоциативным. Последнее обстоятельство не причинит нам существенных неудобств, так как в основном мы будем иметь дело с функциями, принимающими конечные значения везде, за исключением, возможно, лишь множеств меры нуль, которыми, как будет видно из дальнейшего, мы сможем пренебрегать (см. об этом подробнее в § IV.3).

Теорема. 1) *Произведение и сумма двух измеримых функций измеримы.*

2) *Если функция f измерима, а функция φ непрерывна, и их композиция $\varphi \circ f$ имеет смысл, то она измерима.*

2′) *Если $f \geqslant 0$ и $p > 0$, то функция f^p измерима* (*в случае, если f принимает бесконечные значения, мы считаем, что $(+\infty)^p = +\infty$*).

3) *Функция $1/f$ измерима на том множестве, где $f \neq 0$.*

Доказательство. Пусть функции f и g определены на множестве E.

1) Если функции f, g принимают лишь конечные значения, то измеримость их произведения сразу вытекает из предыдущей теоремы, где следует положить $\varphi(x, y) = xy$. Если f и g могут иметь бесконечные значения, рассмотрим множества

$$E_0(f) = E(f = 0), \qquad E_1(f) = E(0 < f < +\infty), \qquad E_2(f) = E(-\infty < f < 0),$$
$$E_3(f) = E(f = -\infty), \qquad E_4(f) = E(f = +\infty)$$

и аналогичные множества $E_k(g)$. По доказанному выше произведение fg измеримо на $E_j(f) \cap E_k(g)$ при $j, k \leqslant 2$ и постоянно на таких пересечениях при других значениях j, k $(j, k = 0, \dots, 4)$. Следовательно, по теореме 1.3 оно измеримо и на их объединении, т. е. на E. Измеримость суммы доказывается аналогично.

2) Это утверждение — частный случай теоремы 1.5.

2′) Функция f^p измерима на множестве $E(f < +\infty)$ по предыдущему пункту теоремы и постоянна на множестве $E(f = +\infty)$. Следовательно, она измерима на объединении этих множеств, т. е. на E.

3) Множество $\widetilde{E} = E(f \neq 0)$, очевидно, измеримо. Кроме того,

$$\widetilde{E}\Big(\frac{1}{f} < a\Big) = \begin{cases} E(f < 0) \cup E\big(f > \frac{1}{a}\big) & \text{при } a > 0, \\ E(-\infty < f < 0) & \text{при } a = 0, \\ E\big(\frac{1}{a} < f < 0\big) & \text{при } a < 0. \end{cases}$$

Во всех случаях лебеговы множества функции $1/f$ измеримы. ►

Следствие 1. *Произведение конечного семейства измеримых функций измеримо.*

Следствие 2. *Положительная целая степень измеримой функции f измерима, отрицательная целая степень измерима на множестве, где $f \neq 0$.*

Следствие 3. *Линейная комбинация измеримых функций измерима.*

1.7. В заключение рассмотрим вопрос об измеримости функции $f\colon E \to \mathbb{R}$, определённой на измеримом по Лебегу подмножестве E пространства $\mathbb{R}^m$. Меру Лебега в $\mathbb{R}^m$ будем обозначать буквой λ, опуская указание на размерность.

Теорема. *Пусть функция f определена на множестве E, $E \in \mathfrak{A}^m$, и принимает лишь конечные значения. Если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое измеримое множество $e \subset E$, что*

$$\lambda(e) < \varepsilon \quad \text{и} \quad \text{сужение функции } f \text{ на } E \setminus e \text{ непрерывно,} \tag{C}$$

то функция f измерима по Лебегу. В частности, всякая функция, непрерывная на E, измерима по Лебегу.

Замечание. Условие (C) означает, что функция оказывается непрерывной после удаления из области её задания множества произвольно малой меры. Именно это свойство Лузин назвал C-свойством функции. Он доказал, что оно не только достаточно, но и необходимо для измеримости функции по Лебегу, т. е. что всякая измеримая по Лебегу функция обладает C-свойством. Мы вернёмся к этому вопросу в п. 4.3.

Из сформулированной теоремы вытекает, очевидно, что всякая функция, у которой множество точек разрыва имеет меру нуль, измерима. Однако теорема позволяет устанавливать измеримость даже и таких функций, которые имеют "большие" множества точек разрыва. Примером такой функции может служить функция Дирихле. Как легко убедиться, она разрывна в каждой точке. Вместе с тем, её сужение на множество иррациональных чисел непрерывно (поскольку оно просто является тождественным нулем). Поэтому функция Дирихле, конечно, удовлетворяет условию (C) и, следовательно, измерима. Впрочем, её измеримость очевидна и без теоремы, поскольку она есть характеристическая функция измеримого множества $\mathbb{Q}$.

Доказательство. Если функция f непрерывна, то её лебегово множество $E(f < a) = f^{-1}\big((-\infty, a)\big)$ относительно открыто в E. Поэтому оно является пересечением множества E с некоторым множеством, открытым в $\mathbb{R}^m$, и, следовательно, измеримо как пересечение измеримых множеств.

Если f — произвольная функция, удовлетворяющая условию (C), рассмотрим такие множества $e_n \subset E$ $(n \in \mathbb{N})$, что

$$\lambda(e_n) < \frac{1}{n} \quad \text{и} \quad \text{сужение функции } f \text{ на } E_n \equiv E \setminus e_n \text{ непрерывно.}$$

Положим $E_0 = \bigcap\limits_{n \geqslant 1} e_n$. Очевидно, что $\lambda(E_0) = 0$, и поэтому f измерима на E_0 (поскольку в случае полной меры любая функция измерима на множестве меры нуль). Таким образом, $E = \bigcup\limits_{n \geqslant 0} E_n$, причём функция f измерима по доказанному на каждом из множеств E_n. Остаётся сослаться на теорему 1.3. ►

УПРАЖНЕНИЯ

1) Докажите измеримость по Лебегу монотонной функции φ, заданной на произвольном промежутке, и измеримость её композиции $\varphi \circ f$ с любой измеримой функцией f (если композиция имеет смысл).

2) Пусть $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ произвольная последовательность измеримых функций. Докажите измеримость множеств

$$\{x \in X \mid \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \overline{\mathbb{R}}\} \quad \text{и} \quad \{x \in X \mid \text{последовательность } \{f_n(x)\}_{n\geqslant 1} \text{ сходится}\}.$$

3) Приведите пример ограниченной измеримой (по Лебегу) на $\mathbb{R}$ функции "настолько разрывной", что никаким изменением её на множестве нулевой меры нельзя добиться непрерывности хотя бы в одной точке. Указание. Рассмотрите характеристическую функцию множества, которое предлагается построить в упр. 9 § II.1.

4) Проверьте непосредственно, не опираясь на теорему 1.7, что характеристическая функция множества, построенного в упр. 8 § II.1, удовлетворяет условию (C) этой теоремы.

5) Пусть K — компактное подмножество пространства $\mathbb{R}^{m+1} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}$, P — каноническая проекция $\mathbb{R}^{m+1}$ на $\mathbb{R}^m$, $Q = P(K)$. Докажите существование такой функции $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, что график её сужения на Q содержится в K, а множество точек разрыва имеет нулевую меру.

6) Используя результат задачи 5 § II.3, докажите, что теорема 1.5 перестает быть верной, если вместо $\varphi \circ f$ рассматривать композицию $f \circ \varphi$.

7) Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — произвольная (возможно, неизмеримая) функция. Докажите, что множество точек, где она дифференцируема, измеримо и что измерима функция $\overline{f'}$, определяемая равенством $\overline{f'}(x) = \overline{\lim\limits_{y\to x}} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Убедитесь, что функция $\overline{f'}_+(x) = \overline{\lim\limits_{y\to x+0}} \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ может быть неизмеримой.

8) Функции Радемахера r_n $(n \in \mathbb{N})$ определяются на $\mathbb{R}$ равенством $r_n(x) = \operatorname{sign} \sin 2^n \pi x$ (см. п. VI.4.5). Докажите, что

$$\lambda\big(\{x \in (0,1) \mid r_{n_j}(x) < a_j \ \text{ при } \ j = 1, \dots, k\}\big) = \prod_{j=1}^{k} \lambda\big(\{x \in (0,1) \mid r_{n_j}(x) < a_j\}\big)$$

при любых $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ и попарно различных $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$.

В теории вероятностей функции, удовлетворяющие такому условию, называются статистически независимыми (см. п. VI.4.4).

9) Назовём функцию f, определённую в $\mathbb{R}^m$, радиальной, если она имеет вид $f(x) = f_0\big(\|x\|\big)$, где f_0 — функция, определённая на $\mathbb{R}_+$. Используя упр. 3 § II.5, докажите, что функции f и f_0 измеримы одновременно.

10) Пусть $(X, \mathfrak{A})$ — измеримое пространство. Отображение $F\colon X \to \mathbb{R}^m$ называется измеримым, если выполнено хотя бы одно из условий

а) его координатные функции измеримы;

б) прообразы борелевских множеств измеримы;

в) прообразы ячеек измеримы;

г) прообраз каждого открытого множества измерим.

Докажите равносильность условий а) — г).

11) Пусть $F\colon X \to \mathbb{R}^m$ измеримое отображение (см. предыдущую задачу). Докажите, что для любой измеримой по Борелю функции $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ композиция $\varphi \circ F$ измерима.

§ 2. Простые функции. Теорема об аппроксимации

Как и в предыдущем параграфе, мы предполагаем фиксированным измеримое пространство $(X, \mathfrak{A})$. Все рассматриваемые функции определены на множестве X.

2.1. Определение. Измеримая функция со значениями в $\mathbb{R}$ называется *простой*, если множество её значений конечно.

Для простой функции f существует состоящее из измеримых множеств конечное разбиение множества X (мы будем называть его *допустимым* для f), на элементах которого f постоянна. Такое разбиение можно получить, например, следующим образом. Пусть $a_1, \ldots, a_N$ — всевозможные попарно различные значения f. Положим $e_k = f^{-1}\big(\{a_k\}\big)$. Очевидно, что эти множества измеримы и образуют разбиение множества X, которое допустимо для f.

Допустимое разбиение, вообще говоря, не единственно: разбив любое из образующих его множеств на измеримые части, мы получим "более мелкое" допустимое разбиение. Таким образом, функция f может принимать и одинаковые значения на разных элементах своего допустимого разбиения. Кроме того, мы не исключаем случая, когда некоторые его элементы пусты.

Пример. Характеристическая функция χ_E множества E является простой тогда и только тогда, когда множество E измеримо. В этом случае множества E, $X \setminus E$ образуют допустимое для неё разбиение. Семейство $\{E, X \setminus E, \varnothing\}$ также образует допустимое для χ_E разбиение.

Отметим некоторые свойства простых функций.

1) Всякая функция с конечными значениями, постоянная на элементах некоторого конечного разбиения множества X, состоящего из измеримых множеств, является простой.

Действительно, множество её значений конечно, а измеримость следует, например, из теоремы 1.3.

2) Две простые функции f, g имеют общее допустимое разбиение.

В самом деле, искомое разбиение образуют, например, множества $e_k \cap e'_j$, где $\{e_k\}_{k=1}^n$ и $\{e'_j\}_{j=1}^m$ — допустимые разбиения для f и g соответственно.

3) Сумма и произведение двух простых функций есть простая функция.

Этот факт немедленно следует из существования общего допустимого разбиения и свойства 1).

3′) Линейная комбинация и произведение любого конечного семейства простых функций суть простые функции.

4) Максимум и минимум любого конечного семейства простых функций суть простые функции.

Для доказательства достаточно рассмотреть разбиение, допустимое для всех функций данного семейства.

2.2. В следующей теореме мы установим, в частности, что всякая измеримая функция является поточечным пределом последовательности простых функций. Этот

результат является не только важным техническим средством, которым мы будем многократно пользоваться в дальнейшем. На него можно смотреть как на альтернативное определение измеримой функции: функция называется измеримой, если она есть поточечный предел последовательности простых функций. В отличие от чисто описательного, или, как говорят, дескриптивного определения, данного в предыдущем параграфе, новое определение указывает на метод построения произвольных измеримых функций, исходя из более обозримых функций, названных нами простыми. В этом смысле можно сказать, что новое определение конструктивно. Эквивалентность этих двух определений, вытекающая из доказываемой ниже теоремы, ещё раз подтверждает естественность класса измеримых функций. В самом деле, в теореме 1.4 мы установили, что он настолько широк, что вместе с каждой поточечно сходящейся последовательностью содержит и её предел. В связи с этим может возникнуть вопрос, не чрезмерно ли широк класс измеримых функций. Ведь если рассматривать пространство $\mathbb{R}^m$ с лебеговской мерой, он содержит не только некоторые функции, разрывные в каждой точке (например, функцию Дирихле — характеристическую функцию множества рациональных чисел), но даже и функции, непрерывности которых нельзя добиться (в отличие от функции Дирихле) никаким "исправлением" на множестве нулевой меры (см. упр. 3, 4 в § 1). Из доказываемой ниже теоремы следует, что если предполагать замкнутость искомого класса функций относительно поточечного предельного перехода и включать в него характеристические функции измеримых множеств вместе с их линейными комбинациями, то никакой частью класса всех измеримых функций нам обойтись не удастся: вместе с характеристическими этот класс содержит всевозможные простые функции, поточечные пределы которых дают любые измеримые функции.

Теорема (об аппроксимации). *Всякая неотрицательная измеримая функция $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ есть поточечный предел некоторой возрастающей последовательности неотрицательных простых функций f_n. Если функция f ограничена, то последовательность $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ можно считать равномерно сходящейся на X.*

Доказательство. Зафиксируем натуральное число n и рассмотрим промежутки $\Delta_k = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)$ при $k = 0, 1, \ldots, n^2-1$ и промежуток $\Delta_{n^2} = [n, +\infty]$. Очевидно, они образуют разбиение множества $[0, +\infty]$. Рассмотрим множества $e_k = f^{-1}(\Delta_k)$ $(k = 0, 1, \ldots, n^2)$. Они измеримы и образуют разбиение множества X. (Вместо Δ_k и e_k точнее было бы использовать обозначения $\Delta_k^{(n)}$ и $e_k^{(n)}$, отмечая зависимость этих множеств не только от k, но и от n, но мы не будем этого делать.) Положим $g_n(x) = \frac{k}{n}$ при $x \in e_k$ (график этой функции схематически изображён на рис. 4 горизонтальными утолщёнными отрезками). Очевидно, что

$$0 \leqslant g_n(x) \leqslant f(x) \quad \text{при любом} \quad x \in X. \tag{1}$$

Кроме того,

$$g_n(x) \leqslant f(x) \leqslant g_n(x) + \frac{1}{n}, \quad \text{если} \quad x \notin e_{n^2}. \tag{2}$$

Убедимся теперь, что построенная последовательность $\{g_n\}_{n\geqslant 1}$ поточечно сходится к f. Рассмотрим произвольную точку $x \in X$. Если $f(x) = +\infty$, то $x \in e_{n^2}$ при любом n, и поэтому

$$g_n(x) = n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty = f(x).$$

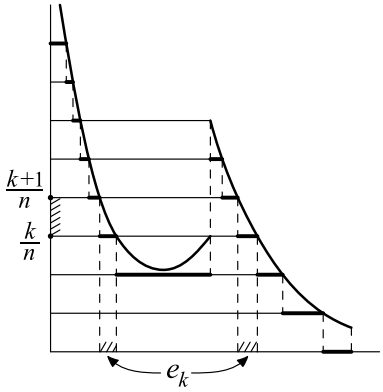


Рис. 4.

Если же $f(x) < +\infty$, то $x \notin e_{n^2}$ при

$$n > f(x). \tag{3}$$

Тогда, согласно (2), мы получаем, что

$$0 \leqslant f(x) - g_n(x) \leqslant \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{4}$$

Если функция f ограничена и $f(x) \leqslant C$ при всех $x \in X$, то при $n > C$ неравенство (3), а вместе с ним и (4), выполняются одновременно для всех $x \in X$, что влечёт равномерную сходимость.

Таким образом, построенные функции g_n обладают всеми требуемыми свойствами, кроме одного. Они, вообще говоря, не образуют возрастающей последовательности. Поэтому нам придётся их слегка "исправить". Положим $f_n = \max\{g_1, \dots, g_n\}$. Очевидно, функции f_n простые и $f_n \leqslant f_{n+1}$. Кроме того, из неравенства (1) следует, что

$$0 \leqslant g_n(x) \leqslant f_n(x) \leqslant f(x) \quad \text{при любом} \quad x \in X.$$

Это обеспечивает как поточечную сходимость f_n к f в общем случае, так и равномерную сходимость в случае ограниченности f. ►

Следствие. *Всякую измеримую функцию f можно поточечно аппроксимировать простыми функциями f_n, удовлетворяющими условию: $|f_n| \leqslant |f|$.*

Если функция f ограничена, то эту аппроксимацию можно считать равномерной.

Для доказательства достаточно аппроксимировать по отдельности функции $f_+ = \max\{f, 0\}$ и $f_- = \max\{-f, 0\}$ так, как указано в теореме. ►

УПРАЖНЕНИЯ

1) Пусть $\{g_n\}_{n\geqslant 1}$ — последовательность, построенная при доказательстве теоремы 2.2, $h_k = g_{2^k}$. Докажите, что последовательность $\{h_k\}_{k\geqslant 1}$ возрастает.

2) Докажите, что всякая неотрицательная измеримая на множестве X функция f представима в виде суммы ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\chi_{A_n}$. Указание. Рассмотрите множества

$$A_1 = \{x \in X \mid f(x) \geqslant 1\}, \quad A_n = \left\{x \in X \,\middle|\, f(x) \geqslant \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\chi_{A_k}\right\} \text{ при } n \geqslant 2.$$

§ 3. Сходимости по мере и почти везде

В курсе анализа читатель уже познакомился с двумя видами сходимости функциональных последовательностей — поточечной и равномерной. Теперь мы определим ещё два типа сходимости, играющих важную роль в теории интеграла и теории вероятностей. Эти сходимости предполагают, что на множестве, где заданы функции рассматриваемой последовательности, определена мера.

Мы считаем фиксированным пространство с мерой $(X, \mathfrak{A}, \mu)$. Все встречающиеся множества предполагаются измеримыми, т. е. принадлежащими σ-алгебре $\mathfrak{A}$. Класс всех (измеримых и) почти везде (относительно меры μ) конечных на множестве E функций обозначим символом $\mathscr{L}^0(E, \mu)$ или просто $\mathscr{L}^0(E)$. Всюду в этом параграфе (кроме п. 3.7) мы рассматриваем функции только из этого класса.

Поточечную сходимость функциональной последовательности $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ к функции f мы будем обозначать, как обычно, простой стрелкой: $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$, а равномерную — двойной: $f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$. Напомним ещё, что символом χ_E обозначается характеристическая функция множества E, а для множества $\{x \in E \mid f(x) > a\}$ используется также обозначение $E(f > a)$.

3.1. Определение 1. Последовательность функций f_n из $\mathscr{L}^0(E, \mu)$ *сходится к функции* $f \in \mathscr{L}^0(E, \mu)$ *по мере* (обозначение: $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f$), если

$$\mu\big(E(|f_n - f| > \varepsilon)\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{для любого положительного числа } \varepsilon.$$

Таким образом, $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f$, если для достаточно больших n каждая из функций f_n будет равномерно близка к f на множестве, получаемом из E удалением подмножества сколь угодно малой меры. При этом следует подчеркнуть, что удаляемое подмножество, вообще говоря, своё при каждом n, и в общем случае нельзя удалить одно множество, вне которого все функции f_n с достаточно большими номерами были бы равномерно близки к предельной.

Дополняя определение, будем говорить, что последовательность $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ сходится по мере на множестве $\widetilde{E}$, $\widetilde{E} \subset E$, к функции $f \in \mathscr{L}^0(\widetilde{E})$, если последовательность сужений $\widetilde{f}_n = f_n\big|_{\widetilde{E}}$ сходится по мере к f. Очевидно, это равносильно сходимости по мере последовательности $\{f_n\chi_{\widetilde{E}}\}_{n\geqslant 1}$ к функции f, продолженной нулём с $\widetilde{E}$ на E. Это замечание позволяет при обсуждении сходимости по мере считать, что рассматриваемые функции определены на всём X, так как в противном случае их можно продолжить на X нулём.

Обсудим связи между сходимостью по мере и другими типами сходимостей. Очевидно, равномерная сходимость влечёт сходимость по мере, поскольку в случае равномерной сходимости при любом $\varepsilon > 0$ множество $E(|f_n - f| > \varepsilon)$ пусто для достаточно больших n. Однако это уже, вообще говоря, не так, если заменить равномерную сходимость поточечной. Чтобы получить соответствующий пример, достаточно рассмотреть вещественную прямую с мерой Лебега и функции $\chi_{(n,+\infty)}$ или $\chi_{(n,n+1)}$, образующие последовательности, сходящиеся на $\mathbb{R}$ к нулю поточечно, но не по мере. Читатель легко убедится самостоятельно, что в смысле сходимости по мере эти последовательности не имеют никакого предела.

Из сходимости по мере, конечно, не вытекает поточечная сходимость, поскольку изменение функций f_n или f на множестве нулевой меры не меняет сходимости по мере. Поэтому сходимость по мере естественнее сравнивать с "ослабленной поточечной сходимостью". Мы имеем в виду следующее

Определение 2. Последовательность измеримых функций $f_n : E \to \overline{\mathbb{R}}$ *сходится к функции* f *почти везде на* E (обозначение: $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.в.}} f$), если существует такое множество $e \subset E$ нулевой меры, что $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ поточечно на $E \setminus e$.

Это определение (как и предыдущее) предполагает, что фиксирована некоторая мера μ. Если кроме неё рассматриваются и другие меры, то, уточняя, мы будем говорить о сходимости μ-почти везде (соответственно, о сходимости по мере относительно μ).

По теореме 1.4 предельная функция f измерима на множестве $E \setminus e$. Если мера μ полная, то предельная функция измерима не только на $E \setminus e$, но и на E. Если (в случае неполной меры) функция f не измерима на E, то изменяя её на множестве нулевой меры (например, считая нулем на e) можно получить измеримую функцию, являющуюся пределом последовательности $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ в смысле сходимости почти везде.

Формально говоря, в определении 2 можно отказаться от измеримости функций f_n, но в дальнейшем такое обобщение нам не потребуется.

Между сходимостями по мере и почти везде имеется довольно тонкая связь — см. доказываемые в этом параграфе теоремы А. Лебега и Ф. Рисса. Но начнём мы с контрпримера, показывающего, что сходимость почти везде не следует из сходимости по мере.

Пример. Пусть $X = \mathbb{R}$ и $\mu = \lambda$ — одномерная мера Лебега. Для каждого натурального числа k рассмотрим разбиение промежутка $[0, 1)$ на части $\Delta(k, p) = [\frac{p}{2^k}, \frac{p+1}{2^k})$, где $p = 0, 1, \dots, 2^k - 1$. Чтобы определить функцию f_n, представим номер $n > 1$ в виде $n = 2^k + p$, где $0 \leqslant p < 2^k$, (очевидно, такое представление единственно, а число k есть не что иное, как целая часть $\log_2 n$) и положим $f_n = \chi_{\Delta(k,p)}$. Так как

$$X(f_n \neq 0) = \Delta(k, p) \quad \text{и} \quad \lambda(\Delta(k, p)) = \frac{1}{2^k} \leqslant \frac{2}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

то построенная последовательность сходится по мере к нулю. Вместе с тем, числовая последовательность $\{f_n(x)\}_{n\geqslant 1}$ не имеет предела ни при каком $x \in [0, 1)$, поскольку среди значений $f_n(x)$ бесконечно много как равных единице, так и равных нулю.

3.2. Как мы отмечали, сходимость по мере не следует из сходимости почти везде. Однако положение коренным образом меняется, если рассматриваемое множество имеет конечную меру.

Теорема (Лебег). *На множестве конечной меры сходимость почти везде влечёт сходимость по мере.*

Доказательство. Пусть $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.в.}} f$ на E, $\mu(E) < +\infty$. Переопределив в случае необходимости функции на множестве нулевой меры (например, положив их там равными нулю), будем считать, что $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ всюду на E.

Для монотонной последовательности $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ поточечно стремящейся к нулю доказываемое утверждение почти очевидно. Действительно, в этом случае для любого $\varepsilon > 0$

множества $E\big(|f_n| > \varepsilon\big)$ убывают с ростом n и имеют пустое пересечение. В силу непрерывности меры сверху $\mu\big(E(|f_n| > \varepsilon)\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (именно здесь важно, что $\mu(E) < +\infty$). Тем самым сходимость по мере в рассматриваемом частном случае установлена.

В общем случае, когда $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ для всех $x \in E$, примéним установленный результат к функциям $\varphi_n(x) = \sup\limits_{k\geqslant n} |f_k(x) - f(x)|$. Ясно, что всюду $\varphi_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ монотонно, и по доказанному $\mu\big(E(\varphi_n > \varepsilon)\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Остаётся воспользоваться вытекающим из неравенства $|f_n - f| \leqslant \varphi_n$ включением $E\big(|f_n - f| > \varepsilon\big) \subset E(\varphi_n > \varepsilon)$:

$$\mu\big(E(|f_n - f| > \varepsilon)\big) \leqslant \mu\big(E(\varphi_n > \varepsilon)\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \quad \blacktriangleright$$

3.3. Прежде чем продолжать обсуждение связей между сходимостями по мере и почти везде, установим одно простое, но важное утверждение, часто используемое в теории вероятностей.

Лемма (Борель, Кантелли*)). *Пусть $\{E_n\}_{n\geqslant 1}$ — последовательность измеримых множеств и $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} E_k$, т. е.*

$$E = \big\{x \in X \mid x \in E_n \text{ для бесконечного множества } n\big\}.$$

Если $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mu(E_n) < +\infty$, то $\mu(E) = 0$.

Доказательство. Так как $E \subset \bigcup\limits_{n\geqslant k} E_n$, то $\mu(E) \leqslant \sum\limits_{n\geqslant k} \mu(E_n) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. $\blacktriangleright$

Из этой леммы следует полезный признак сходимости почти везде.

Следствие. *Пусть $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $g_n \in \mathscr{L}^0(X, \mu)$ и $X_n = X\big(|g_n| > \varepsilon_n\big)$. Если $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mu(X_n) < +\infty$, то $g_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.в.}} 0$. Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое множество e, что*

$$\mu(e) < \varepsilon \quad \text{и} \quad g_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0 \ \text{ на } \ X \setminus e.$$

Для доказательства сходимости почти везде следует, взяв произвольное $\varepsilon > 0$, применить лемму Бореля–Кантелли к множествам $E_n = X\big(|g_n| > \varepsilon\big)$, учитывая, что $E_n \subset X_n$ при достаточно больших n.

Для доказательства второго утверждения следствия выберем N настолько большим, что $\sum\limits_{n>N} \mu(X_n) < \varepsilon$, и положим $e = \bigcup\limits_{n>N} X_n$. Тогда $|g_n(x)| < \varepsilon_n$ при $x \in X \setminus e$ и $n > N$. $\blacktriangleright$

3.4. Вернёмся к обсуждению связей между сходимостями почти везде и по мере. Как мы видели, последовательность, сходящаяся по мере, может не сходиться ни в одной точке. Однако положение меняется, если мы будем рассматривать подпоследовательности.

---

*) Франческо Паоло **Кантелли** (Cantelli), 1875–1966, — итальянский математик.

Теорема (Ф. Рисс*)). *Из всякой последовательности, сходящейся по мере, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся почти везде к тому же пределу.*

Отметим, что в отличие от теоремы Лебега здесь не предполагается конечность меры.

Доказательство. Пусть $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f$. Тогда

$$\mu\left(X\left(|f_n - f| > \frac{1}{k}\right)\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

для любого $k \in \mathbb{N}$. Поэтому найдётся такая возрастающая последовательность номеров n_k, что

$$\mu\left(X\left(|f_n - f| > \frac{1}{k}\right)\right) < \frac{1}{2^k} \quad \text{при всех } n \geqslant n_k.$$

Подпоследовательность $\{f_{n_k}\}_{k\geqslant 1}$ — искомая. Действительно, применив следствие из леммы Бореля–Кантелли к функциям $g_k = |f_{n_k} - f|$, мы получим, что $g_k \xrightarrow[k\to\infty]{\text{п.в.}} 0$, т. е. $f_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{\text{п.в.}} f$. ►

Замечание. Выделенная при доказательстве теоремы Рисса подпоследовательность обладает, помимо того, что она сходится почти везде, ещё одним полезным (и более сильным) свойством. А именно, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое множество e, что

$$\mu(e) < \varepsilon \quad \text{и} \quad f_{n_k} \underset{k\to\infty}{\rightrightarrows} f \ \text{ на } \ X \setminus e.$$

Для доказательства достаточно сослаться на определение функций f_{n_k} и на следствие из леммы Бореля–Кантелли.

3.5. С помощью теоремы Рисса некоторые вопросы, связанные со сходимостью по мере, могут быть сведены к аналогичным вопросам, относящимся к сходимости почти везде. Примерами таких ситуаций могут служить вопросы о единственности предела и о предельном переходе в неравенстве.

Следствие 1. *Если последовательность $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ сходится по мере к функциям f и g, то $f(x) = g(x)$ для почти всех x.*

Доказательство. По теореме Рисса существует подпоследовательность $\{f_{n_k}\}_{k\geqslant 1}$, сходящаяся к f почти везде. Так как подпоследовательность $\{f_{n_k}\}_{k\geqslant 1}$ сходится, как и исходная последовательность, к g по мере, то, снова применив теорему Рисса, мы можем найти подпоследовательность $\{f_{n_{k_j}}\}_{j\geqslant 1}$, сходящуюся почти везде к g. Таким образом, функции f и g должны совпадать почти везде как пределы сходящейся почти везде последовательности $\{f_{n_{k_j}}\}_{j\geqslant 1}$. ►

Следствие 2. *Если $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} f$ и при каждом n почти везде $f_n \leqslant g$, то $f \leqslant g$ почти везде на E.*

---

*) Фридьеш **Рисс** (Riesz), 1880–1956, — венгерский математик.

Доказательство. Пусть функции f_{n_k} образуют подпоследовательность, сходящуюся к f почти везде. По условию $f_{n_k} \leqslant g$ вне некоторого множества e_k нулевой меры. Положив $e = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} e_k$, мы получим такое множество нулевой меры, что при любых $x \notin e$ и $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $f_{n_k}(x) \leqslant g(x)$. Остаётся перейти здесь к пределу при $k \to \infty$. ►

3.6. Сходимость почти везде тесно связана с более сильной сходимостью, которую мы сейчас определим.

Определение. Будем говорить, что последовательность $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ сходится к f *почти равномерно* на X, если для каждого положительного числа ε можно указать такое множество A_ε, что

$$\mu(A_\varepsilon) < \varepsilon \quad \text{и} \quad f_n \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f \ \text{ на } X \setminus A_\varepsilon.$$

Из почти равномерной сходимости вытекает сходимость почти везде. Действительно, последовательность $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ поточечно сходится всюду вне каждого множества $A_{1/k}$, а потому и вне их пересечения $\bigcap\limits_{k\geqslant 1} A_{1/k}$, имеющего, очевидно, нулевую меру. Как было отмечено после теоремы Рисса (см. замечание 3.4), последовательность, построенная при её доказательстве сходится не только почти везде, но и почти равномерно.

Оказывается, справедлив неожиданный результат: на множестве конечной меры почти равномерная сходимость равносильна сходимости почти везде.

Теорема (Егоров*). *Пусть f_n, $f \in \mathscr{L}^0(X,\mu)$ и пусть $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.в.}} f$. Если $\mu(X) < +\infty$, то $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ почти равномерно на X.*

Пример последовательности функций $\chi_{(n,n+1)}$ показывает, что эта теорема не переносится на множества с бесконечной мерой.

Доказательство. Положим $g_n(x) = \sup\limits_{k\geqslant n} |f_k(x) - f(x)|$. Ясно, что $g_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.в.}} 0$. По теореме Лебега (см. п. 3.2) $g_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mu} 0$ (именно здесь играет роль конечность меры). Поэтому (сравните с доказательством теоремы Рисса) из последовательности $\{g_n\}_{n\geqslant 1}$ можно выделить такую подпоследовательность $\{g_{n_k}\}_{k\geqslant 1}$, что

$$\mu\left(X\left(g_{n_k} > \frac{1}{k}\right)\right) < \frac{1}{2^k}.$$

Согласно следствию из леммы Бореля–Кантелли выделенная подпоследовательность сходится к нулю почти равномерно. Так как $|f_n - f| \leqslant g_{n_k}$ при $n \geqslant n_k$, то и последовательность $\{f_n - f\}_{n\geqslant 1}$ также сходится к нулю почти равномерно. ►

3.7. В заключение установим ещё одно полезное свойство сходимости почти везде.

Теорема (о диагональной последовательности). *Предположим, что мера μ σ-конечна, и пусть $f_k^{(n)} \in \mathscr{L}^0(X,\mu)$, $g_n \in \mathscr{L}^0(X,\mu)$ при $n,k \in \mathbb{N}$. Если $f_k^{(n)} \xrightarrow[k\to\infty]{\text{п.в.}} g_n$ при каждом $n \in \mathbb{N}$ и $g_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.в.}} h$, то существует такая строго возрастающая последовательность номеров k_n, что $f_{k_n}^{(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.в.}} h$.*

---

* Дмитрий Фёдорович **Егоров**, 1869–1931, — российский математик.

Отметим, что функция h, в отличие от функций $f_k^{(n)}$ и g_n, может принимать бесконечные значения на множествах положительной меры.

Доказательство. Будем сначала считать, что мера конечна. Тогда $f_k^{(n)} \xrightarrow[k\to\infty]{\mu} g_n$ в силу теоремы Лебега. Это означает, что

$$\mu\big(X(|f_k^{(n)} - g_n| > \varepsilon)\big) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ при каждом } n \in \mathbb{N} \text{ и любом } \varepsilon > 0.$$

Поэтому при каждом n найдётся такой номер k_n $(k_n > k_{n-1})$, что

$$\mu\left(X\left(|f_{k_n}^{(n)} - g_n| > \frac{1}{n}\right)\right) < \frac{1}{2^n}.$$

По следствию из леммы Бореля–Кантелли мы получаем, что $f_{k_n}^{(n)} - g_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.в.}} 0$. Таким образом,

$$f_{k_n}^{(n)} = \left(f_{k_n}^{(n)} - g_n\right) + g_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.в.}} h,$$

что завершает доказательство теоремы для конечной меры.

Случай бесконечной меры сводится к рассмотренному благодаря следующей лемме.

Лемма. *Если мера μ σ-конечна, то существует такая конечная мера ν, что $\nu(E) = 0$ тогда и только тогда, когда $\mu(E) = 0$.*

Таким образом, утверждения “почти везде” для мер μ и ν справедливы одновременно. Поэтому не умаляя общности меру в теореме можно предполагать конечной.

Доказательство леммы. Пусть $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$, где $0 < \mu(X_n) < +\infty$. Искомую меру мы получим, положив

$$\nu(E) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{2^n} \frac{\mu(E \cap X_n)}{\mu(X_n)}$$

для любого измеримого множества E.

Читатель без труда проверит, что ν — мера и что μ и ν обращаются в нуль на одних и тех же множествах. ▶

Замечание. Теорема о диагональной последовательности перестаёт быть верной, если сходимость почти везде заменить поточечной сходимостью — см. упр. 6. Поскольку поточечную сходимость можно истолковать как сходимость почти везде относительно считающей меры, это упражнение показывает также, что в теореме о диагональной последовательности отказаться от σ-конечности меры нельзя.

УПРАЖНЕНИЯ

1) Пусть $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ по мере. Докажите, что если $\mu(X) < +\infty$ и $g \in \mathscr{L}^0(X)$, то $f_n g \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} fg$ по мере. Верно ли это, если мера бесконечна?

2) Пусть $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ — последовательность, построенная в примере п. 3.1, и пусть $g_n = (-1)^k n\, f_n$, $k = [\log_2 n]$. Докажите, что последовательность $\{g_n\}$ сходится к нулю относительно меры Лебега и вместе с тем

$$\varliminf_{n\to\infty} g_n(x) = -\infty, \quad \varlimsup_{n\to\infty} g_n(x) = +\infty \quad \text{для всех } x \in [0,1).$$

3) Пусть $f, g, h \in \mathscr{L}^0\big([0,1],\lambda\big)$, где λ — мера Лебега, $g \leqslant f \leqslant h$. Убедитесь, что существует последовательность функций f_n из $\mathscr{L}^0\big([0,1]\big)$, сходящаяся к f по мере и удовлетворяющая условиям:

$$\varlimsup_{n\to\infty} f_n(x) = h(x), \qquad \varliminf_{n\to\infty} f_n(x) = g(x) \qquad \text{при каждом } \ x \in [0,1].$$

4) Пусть $g \in \mathscr{L}^0(X,\mu)$ и пусть функции f_n из $\mathscr{L}^0(X,\mu)$ при каждом n удовлетворяют условию: $|f_n| \leqslant g$ почти везде на X. Докажите, что если функция g такова, что $\mu\big(X(g>a)\big) < +\infty$ при любом $a>0$, то из сходимости последовательности $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ почти везде вытекает её сходимость по мере.

5) Докажите такой вариант теоремы Рисса: если мера σ-конечна, а последовательность $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ сходится к функции f по мере на каждом множестве конечной меры, то она содержит подпоследовательность, сходящуюся к f почти везде.

6) Пусть $f_k^{(n)}(x) = \cos^{2k}(\pi n!\,x)$ $(x \in \mathbb{R})$. Докажите, что

а) при каждом $x \in \mathbb{R}$ существует предел $g_n(x) = \lim\limits_{k\to\infty} f_k^{(n)}(x)$;

б) $g_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \chi(x)$ всюду на $\mathbb{R}$ (здесь χ — функция Дирихле);

в) не существует последовательности непрерывных функций (и, в частности, диагональной последовательности $\{f_{k_n}^{(n)}\}_{n\geqslant 1}$), которая сходилась бы к функции Дирихле поточечно на невырожденном промежутке.

7) Проверьте, что в случае σ-конечной меры для любой последовательности функций f_n из $\mathscr{L}^0(X,\mu)$ найдётся такая последовательность положительных чисел c_n, что $c_n f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{п.в.}} 0$. Указание. Примените теорему о диагональной последовательности к функциям $f_k^{(n)} = \frac{1}{k} f_n$.

8) Пользуясь тем, что множество всех числовых последовательностей имеет мощность континуума, покажите, что утверждение упр. 7 перестаёт быть верным для считающей меры на $[0,1]$.

9) Пусть мера σ-конечна и последовательность измеримых функций f_k почти везде сходится к нулю. Убедитесь, что $c_k f_k \xrightarrow[k\to\infty]{\text{п.в.}} 0$ для некоторой числовой последовательности $c_k \to +\infty$ (устойчивость сходимости почти везде). Указание. Считая последовательность $\{|f_k|\}_{k\geqslant 1}$ убывающей, примените теорему о диагональной последовательности к функциям $f_k^{(n)} = n f_k$.

10) Используя устойчивость сходимости почти везде, докажите, что если мера σ-конечна, $f_k \in \mathscr{L}^0(X,\mu)$ $(k \in \mathbb{N})$ и $f_k \xrightarrow[k\to\infty]{\text{п.в.}} 0$, то найдутся такая функция $g \in \mathscr{L}^0(X,\mu)$ и такая последовательность $c_k \to +\infty$, что $|f_k(x)| \leqslant \frac{1}{c_k} g(x)$ для почти всех $x \in X$ при любом k (сходимость с регулятором). Докажите теорему Егорова, опираясь на этот результат.

11) Пусть функция f определена на квадрате $[0,1]^2$ и непрерывна по первому аргументу (при произвольно фиксированном втором). Докажите, что если $f(x,y) \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0$ при почти всех $x \in [0,1]$, то справедлив следующий вариант теоремы Егорова: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое множество $e \subset [0,1]$, $\lambda(e) < \varepsilon$, что $f(x,y) \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0$ равномерно на $[0,1] \setminus e$. Указание. Рассмотрите множества

$$G_n(\varepsilon) = \Big\{(x,y) \,|\, 0 < x < 1, 0 < y < \frac{1}{n},\ |f(x,y)| > \varepsilon\Big\}$$

и их проекции на ось абсцисс.

12) Приведите пример измеримой по Лебегу на квадрате $[0,1]^2$ функции f со следующими свойствами:

а) при каждом $y \in [0,1]$ $f(x,y) \neq 0$ разве лишь при одном значении $x \in [0,1]$;

б) при каждом $x \in [0,1]$ $f(x,y) \neq 0$ разве лишь при одном значении $y \in [0,1]$ (из чего следует, что $f(x,y) \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0$ при каждом $x \in [0,1]$);

в) ни для какого множества $e \subset [0,1]$ положительной меры сходимость $f(x,y) \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0$ не может быть равномерной на e.

§ 4. Аппроксимация измеримых функций непрерывными. Теорема Лузина

В этом параграфе мы обсудим свойства функций, измеримых в $\mathbb{R}^m$. Измеримость (множеств и функций) означает их измеримость относительно меры Лебега, которую мы будем обозначать буквой λ.

4.1. Предварительно установим некоторые вспомогательные факты. Напомним понятие расстояния от точки до множества.

Определение. Пусть $A \subset \mathbb{R}^m$ и $x \in \mathbb{R}^m$. Величина

$$\operatorname{dist}(x, A) = \inf\bigl\{\, \|x-y\| \,\bigm|\, y \in A \bigr\}.$$

называется *расстоянием от точки x до множества A*.

Ясно, что $\operatorname{dist}(x,A) = 0$ лишь для точек x, принадлежащих замыканию множества A. В частности, для замкнутого множества A неравенство $\operatorname{dist}(x,A) > 0$ выполняется всюду вне A.

Лемма 1. *Функция $x \mapsto \operatorname{dist}(x,A)$ непрерывна в $\mathbb{R}^m$.*

Доказательство. Пусть $y \in A$, x, $x' \in \mathbb{R}^m$. Тогда $\|x-y\| \leqslant \|x'-y\| + \|x'-x\|$ и поэтому

$$\operatorname{dist}(x,A) \leqslant \|x'-y\| + \|x'-x\|.$$

Переходя в правой части этого неравенства к нижней грани по y, получаем, что $\operatorname{dist}(x,A) \leqslant \operatorname{dist}(x',A) + \|x-x'\|$, т. е. $\operatorname{dist}(x,A) - \operatorname{dist}(x',A) \leqslant \|x-x'\|$. Ввиду равноправия x и x' отсюда следует неравенство

$$|\operatorname{dist}(x,A) - \operatorname{dist}(x',A)| \leqslant \|x-x'\|. \quad \blacktriangleright$$

Лемма 2. *Характеристическая функция замкнутого множества $F \subset \mathbb{R}^m$ есть поточечный предел последовательности непрерывных функций.*

Доказательство. Очевидно, разность $\mathbb{R}^m \setminus F$ исчерпывается замкнутыми множествами $H_n = \{x \in \mathbb{R}^m \bigm| \operatorname{dist}(x,F) \geqslant \frac{1}{n}\}$. Рассмотрим функции f_n, сглаживающие характеристическую функцию множества F, положив

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{dist}(x,H_n)}{\operatorname{dist}(x,F) + \operatorname{dist}(x,H_n)} \quad (x \in \mathbb{R}^m).$$

Эти функции всюду непрерывны, так как знаменатель дроби нигде не обращается в нуль. Читатель легко самостоятельно убедится, что $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \chi_F(x)$ при любом $x \in \mathbb{R}^m$. ▶

4.2. Теорема (Фреше*)). *Всякая измеримая в $\mathbb{R}^m$ (по Лебегу) функция f есть предел сходящейся почти везде последовательности непрерывных функций.*

Здесь не исключено, что функция f может принимать бесконечные значения на множестве положительной меры.

Доказательство проведём в несколько шагов, постепенно усложняя функцию f.

1) Пусть f — характеристическая функция измеримого множества E. В силу регулярности меры Лебега $E = e \cup \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$, где $\lambda(e) = 0$, а K_n — компактные множества, образующие возрастающую последовательность (см. следствие 3 п. II.2.2). Очевидно, что $\chi_{K_n} \to \chi_E$ почти везде. Вместе с тем по лемме 2 каждая из характеристических функций χ_{K_n} есть предел последовательности непрерывных функций. Поэтому по теореме о диагональной последовательности χ_E также есть предел последовательности непрерывных функций в смысле сходимости почти везде.

2) Если f — простая функция, т. е. представима в виде $f = \sum\limits_{k=1}^{N} c_k \chi_{E_k}$, где множества E_k измеримы, то для аппроксимации f непрерывными функциями достаточно аппроксимировать функции χ_{E_k}.

3) В общем случае рассмотрим последовательность простых функций f_n, сходящуюся к f поточечно (см. п. 2.2, следствие из теоремы об аппроксимации). Остаётся каждую функцию f_n аппроксимировать непрерывными, а затем сослаться на теорему о диагональной последовательности. ▶

4.3. Используем теорему Фреше, чтобы доказать утверждение, дающее глубокую информацию о строении функции, измеримой в $\mathbb{R}^m$. Оно показывает, что условие Лузина, использованное нами в теореме 1.7, не только достаточно, но и необходимо для измеримости. Иными словами, любую измеримую в $\mathbb{R}^m$ функцию можно превратить в непрерывную, удалив из $\mathbb{R}^m$ множество сколь угодно малой меры.

Теорема (Лузин). *Всякая измеримая по Лебегу и почти везде конечная в $\mathbb{R}^m$ функция f обладает свойством Лузина, т. е. для любого положительного числа δ можно найти такое множество $e \subset \mathbb{R}^m$, что*

$$\lambda(e) < \delta \quad \text{и сужение } f \text{ на } \mathbb{R}^m \setminus e \text{ непрерывно.}$$

Доказательство. По теореме Фреше существует последовательность непрерывных функций f_k, сходящаяся к f почти везде. Согласно теореме Егорова в каждом шаровом слое $E_n = \left\{x \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, n-1 \leqslant \|x\| < n\right\}$ можно указать такое подмножество e_n, что

$$\lambda(e_n) < \frac{\delta}{2^n} \quad \text{и} \quad f_k \rightrightarrows f \quad \text{на} \quad E_n \setminus e_n.$$

*) Морис Рене **Фреше** (Fréchet), 1878–1973, — французский математик.

Ясно, что сужение f на $E_n \setminus e_n$ непрерывно как равномерный предел непрерывных функций. Положим $e = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (e_n \cup S_n)$, где S_n — сфера с центром в нуле и радиусом n. Тогда, очевидно, $\lambda(e) < \delta$ и сужение f на $\mathbb{R}^m \setminus e$ непрерывно. ►

Доказанное утверждение можно несколько усилить, опираясь на теорему о продолжении непрерывных функций. Последняя формулируется следующим образом.

Теорема. *Всякая функция, непрерывная на замкнутом подмножестве F пространства $\mathbb{R}^m$, является сужением на F некоторой функции, непрерывной в $\mathbb{R}^m$.*

Доказательство этой теоремы изложено в добавлении II. С её помощью теореме Лузина можно придать в следующий вид.

Теорема. *Всякая измеримая по Лебегу и почти везде конечная в $\mathbb{R}^m$ функция f совпадает с некоторой непрерывной в $\mathbb{R}^m$ функцией всюду, за исключением множества произвольно малой меры. Иными словами, для любого $\delta > 0$ можно найти такую непрерывную в $\mathbb{R}^m$ функцию φ_δ, что*

$$\lambda\big(\big\{x \in \mathbb{R}^m \,\big|\, f(x) \neq \varphi_\delta(x)\big\}\big) < \delta.$$

Доказательство. Зафиксируем $\delta > 0$ и рассмотрим множество e, существование которого установлено в теореме Лузина. Ввиду регулярности меры Лебега найдётся содержащее e открытое множество G, мера которого сколь угодно близка к мере e. Поэтому можно считать, что $\lambda(G) < \delta$. Положим $F = \mathbb{R}^m \setminus G$ и пусть f_0 — сужение f на F. Теперь, чтобы получить функцию φ_δ, достаточно продолжить f_0 на $\mathbb{R}^m$ с сохранением непрерывности. ►

УПРАЖНЕНИЯ

1) Докажите, что всякая функция из $\mathscr{L}^0(\mathbb{R}^m)$ есть предел сходящейся почти везде последовательности финитных непрерывных функций.

2) Докажите, что отображение $F\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ сохраняет измеримость по Лебегу (преобразует измеримые множества в измеримые) в том и только том случае, когда оно обладает свойством (N) (см. замечание II.3.1).

Глава IV. ИНТЕГРАЛ

В начале предыдущей главы мы кратко затронули вопрос о возможности построения интеграла от ограниченной функции, определённой на конечном промежутке $[a, b]$. Как мы отмечали, в случае, когда рассматриваемая функция f разрывна, на интегральные суммы вида

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}), \tag{1}$$

где $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$, $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, сильно влияет выбор точек ξ_k, что не позволяет надеяться на существование предела таких сумм при измельчении дробления. Поэтому при построении интеграла от разрывных функций возникает идея заменить частичные промежутки $[x_{k-1}, x_k]$ (на которых, несмотря на их "малость", колебания функции f могут быть весьма велики) множествами, на которых колебание функции можно контролировать. Точнее говоря, мы заменяем суммы (1) суммами

$$\sum_{k=1}^{n} y_k \lambda(E_k), \tag{2}$$

где $y_0 < y_1 < \ldots < y_n$, $y_0 \leqslant \inf f$, $y_n > \sup f$, $E_k = f^{-1}\big([y_{k-1}, y_k)\big)$ $(k = 1, \ldots, n)$.

По поводу замены сумм (1) суммами (2) Лебег писал*), что в первом случае "оперируют так, как это делает коммерсант сильно неопытный, который подсчитывает монеты и кредитные билеты, предоставляя всё случаю, т. е. сообразно тому, как они попадаются под руку; тогда как мы оперируем, как уже опытный и методический коммерсант, говорящий:

у меня есть $\operatorname{mes} E_1$ монет по 1 франку, стоящие $1 \times \operatorname{mes} E_1$;
у меня есть $\operatorname{mes} E_2$ монет по 2 франка, стоящие $2 \times \operatorname{mes} E_2$;
у меня есть $\operatorname{mes} E_3$ билетов по 5 франков, стоящие $5 \times \operatorname{mes} E_3$;
. . . . . .
итого: у меня $1 \times \operatorname{mes} E_1 + 2 \times \operatorname{mes} E_2 + 5 \times \operatorname{mes} E_3 + \ldots$ франков.

Конечно, тот и другой коммерсант придут к одному и тому же результату, как бы велико ни было состояние, которое они подсчитывают, ибо число франков конечно. Но... разница двух манер подсчета — капитальна".

Исходя из сумм (2) можно было бы дать определение интеграла, как это сделано, например, в [Л], [Н] и др. Однако мы предпочтём несколько иной путь, когда вначале упор делается на (определении и) изучении основных свойств интеграла от неотрицательных функций. Этот подход основан на простом и наглядном геометрическом соображении, известном по существу ещё древним грекам. Оно состоит в том, что подграфик неотрицательной функции можно "исчерпать" подграфиками простых функций.

*) Цитата заимствована из [Луз], стр. 499.

При этом суммы (2) истолковываются как интегралы от простых функций. Положительность подынтегральной функции даёт заметные технические выгоды, позволяя быстро получить все важнейшие свойства интеграла, на которых основано дальнейшее изложение (см. п. 2.5).

§ 1. Определение интеграла

Всюду в этом параграфе мы рассматриваем фиксированное пространство с мерой $(X, \mathfrak{A}, \mu)$. Все множества и функции предполагаются измеримыми. Если не оговорено противное, мы считаем, что значения всех функций принадлежат расширенному множеству вещественных чисел $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$.

1.1. Прежде чем переходить к определениям, докажем лемму.

Лемма. *Пусть f — неотрицательная простая функция, $\{A_j\}_{j=1}^M$, $\{B_k\}_{k=1}^N$ — допустимые для f разбиения, a_j, b_k — значения f, которые она принимает на множествах A_j и B_k соответственно. Тогда для любого (измеримого) множества $E \subset X$ справедливо равенство*

$$\sum_{j=1}^M a_j \mu(A_j \cap E) = \sum_{k=1}^N b_k \mu(B_k \cap E).$$

Поскольку меры рассматриваемых здесь множеств могут быть бесконечными, напомним соглашение, согласно которому $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$ для любого $x \in \overline{\mathbb{R}}$ (см. III.1.6).

Доказательство. Ясно, что $C = \bigcup\limits_{j=1}^M A_j \cap C = \bigcup\limits_{k=1}^N B_k \cap C$ для любого множества $C \subset X$, причём

$$\mu(C) = \sum_{j=1}^M \mu(A_j \cap C) = \sum_{k=1}^N \mu(B_k \cap C).$$

Кроме того, $a_j = b_k$, если $A_j \cap B_k \neq \varnothing$. Поэтому

$$a_j \mu(A_j \cap B_k \cap E) = b_k \mu(A_j \cap B_k \cap E) \text{ при всех } j,\ k,\ 1 \leqslant j \leqslant M,\ 1 \leqslant k \leqslant N.$$

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^M a_j \mu(A_j \cap E) = \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N a_j \mu(A_j \cap E \cap B_k) = \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N b_k \mu(A_j \cap B_k \cap E) =$$
$$= \sum_{k=1}^N b_k \sum_{j=1}^M \mu(A_j \cap B_k \cap E) = \sum_{k=1}^N b_k \mu(B_k \cap E).$$

Отметим, что все равенства справедливы и в том случае, когда какие-то из множеств $A_1, \ldots, A_M$ и $B_1, \ldots, B_N$ имеют бесконечную меру. ►

1.2. Теперь мы готовы к тому, чтобы перейти к определению интеграла от неотрицательной функции.

Определение I. Пусть f — неотрицательная простая функция, $\{A_j\}_{j=1}^M$ — произвольное допустимое для f разбиение, a_j — значение f на A_j. *Интегралом* от функции f по множеству $E \subset X$ называется сумма

$$\sum_{j=1}^{M} a_j \mu(E \cap A_j). \tag{1}$$

Интеграл обозначается символом $\int_E f\,d\mu$.

Символ $\int$ как стилизованная начальная буква S слова $Summa$ введён Лейбницем*) в работе, опубликованной в 1686 году. В рукописях Лейбниц использовал его с 1675 года, заменив им первоначальное обозначение Omn. Термин "интеграл" встречается впервые в работе Я. Бернулли**), опубликованной в 1690 году.

По лемме сумма (1) не зависит от выбора допустимого разбиения. Поэтому определение I корректно. Сумма (1) не зависит также от значений функции f на $X \setminus E$, так как если $E \cap A_j = \varnothing$, то $a_j \mu(E \cap A_j) = a_j \cdot 0 = 0$. В случае, когда функция f принимает на множестве E лишь одно значение C, мы, допуская некоторую вольность, будем обозначать интеграл $\int_E f\,d\mu$ символом $\int_E C\,d\mu$.

Отметим некоторые свойства интеграла.

1) Если C — неотрицательное число, то $\int_E C\,d\mu = C\mu(E)$. В частности, интеграл по любому множеству от функции, тождественно равной нулю, есть нуль.

Это свойство непосредственно вытекает из определения I.

2) *Монотонность интеграла.* Если простые неотрицательные функции f и g удовлетворяют на множестве E неравенству $f \leqslant g$, то $\int_E f\,d\mu \leqslant \int_E g\,d\mu$.

Действительно, пусть $\{A_j\}_{j=1}^M$ — общее допустимое разбиение для функций f и g, $\{a_j\}_{j=1}^M$, $\{b_j\}_{j=1}^M$ — соответствующие значения этих функций. Тогда $a_j \leqslant b_j$, если $A_j \cap E \neq \varnothing$, и поэтому $a_j \mu(A_j \cap E) \leqslant b_j \mu(A_j \cap E)$ при всех j, $1 \leqslant j \leqslant M$. Следовательно,

$$\int_E f\,d\mu = \sum_{j=1}^{M} a_j \mu(A_j \cap E) \leqslant \sum_{j=1}^{M} b_j \mu(A_j \cap E) = \int_E g\,d\mu. \ \blacktriangleright$$

Определение II. Пусть f — измеримая на множестве E неотрицательная функция. Интегралом от функции f по множеству E называется величина

$$\int_E f\,d\mu = \sup\left\{ \int_E g\,d\mu \,\middle|\, g \text{ — неотрицательная простая функция, } g \leqslant f \text{ на } E \right\}.$$

Замечание 1. Если f неотрицательная простая функция, то интегралы от неё по множеству E в смысле определений I и II совпадают. Это следует из монотонности интеграла от простой функции (свойство 2).

---

*) Готфрид Вильгельм **Лейбниц** (Leibniz), 1646–1716, — немецкий философ и математик.

) Якоб **Бернулли (Bernoulli), 1654–1705, — швейцарский математик.

Замечание 2. Интеграл от неотрицательной (измеримой) функции всегда определён и неотрицателен. Он может принимать и значение $+\infty$.

1.3. Для определения интеграла от измеримой функции f произвольного знака мы используем функции $f_+ = \max\{f, 0\}$, $f_- = \max\{-f, 0\}$. Они, очевидно, неотрицательны и, как уже отмечалось (см. свойство 4 в п. III.1.2), измеримы. Кроме того, легко проверить, что

$$f_+ \cdot f_- = 0, \quad f = f_+ - f_-, \quad |f| = f_+ + f_-.$$

Определение. Для произвольной измеримой на множестве E функции f мы, сохраняя введённые выше обозначения, положим

$$\int_E f\,d\mu = \int_E f_+\,d\mu - \int_E f_-\,d\mu,$$

если по крайней мере один из интегралов $\int_E f_\pm\,d\mu$ конечен. В этом случае функция f называется *интегрируемой* на множестве E (по мере μ). Если конечны оба интеграла $\int_E f_\pm\,d\mu$, то функция f называется *суммируемой* на E (по мере μ).

Замечание. Для неотрицательной функции f интегралы от неё в смысле последнего определения и определения II совпадают, так как в этом случае $f_+ = f$, $f_- = 0$ и $\int_E 0\,d\mu = 0$ (см. свойство 1).

Отметим в заключение, что наряду с обозначением $\int_E f\,d\mu$ мы будем также использовать обозначения $\int_E f(x)\,d\mu(x)$, $\int_E f(y)\,d\mu(y)$ и т. п., где явно указывается "переменная интегрирования". Эти обозначения, избыточные с формальной точки зрения, весьма удобны в конкретных случаях, особенно когда функция f зависит от параметров. Например, символы $\int_{(0,1)} x^y\,d\mu(x)$ и $\int_{(0,1)} x^y\,d\mu(y)$ указывают нам, какая функция интегрируется — степенна́я $x \mapsto x^y$, как в первом случае, или показательная $y \mapsto x^y$, как во втором.

§ 2. Свойства интеграла от неотрицательных функций

Как и в предыдущем параграфе, всюду далее мы рассматриваем фиксированное пространство с мерой $(X, \mathfrak{A}, \mu)$. Все множества и функции предполагаются измеримыми. Мы считаем, что значения всех функций принадлежат расширенному множеству вещественных чисел и неотрицательны, а также что каждая измеримая функция определена на всём множестве X (в случае необходимости этого можно добиться, продолжив её нулём вне области задания).

2.1. Отметим несколько простейших свойств интеграла.

1. *Монотонность интеграла.* Если $f \leqslant g$ на множестве E, то $\int_E f\,d\mu \leqslant \int_E g\,d\mu$.

Для простых функций это свойство уже было доказано. В общем случае оно непосредственно вытекает из определения II п. 1.2. ►

2. Если $\mu(E) = 0$, то $\int_E f\,d\mu = 0$ для любой функции f.

Если функция f простая, то она ограничена. Пусть $0 \leqslant f \leqslant C$. Тогда $0 \leqslant \int_E f\,d\mu \leqslant \int_E C\,d\mu = C\mu(E) = 0$. В общем случае доказываемое свойство непосредственно следует из определения II п. 1.2. ►

3. $\int_E f\,d\mu = \int_X f\chi_E\,d\mu$.

Из этого равенства вытекает, что интеграл по множеству E не зависит от поведения подынтегральной функции вне E.

Если функция f простая и $\{A_k\}_{1\leqslant k\leqslant N}$ — допустимое для f разбиение, то $\{E\cap A_1, E\cap A_2,\dots,E\cap A_N, X\setminus E\}$ — допустимое разбиение для функции $f\chi_E$, причём на последнем множестве разбиения она принимает нулевое значение, а на остальных — те же, что и f. Таким образом, требуемое равенство непосредственно вытекает из определения I п. 1.2.

В общем случае рассмотрим произвольные неотрицательные простые функции g и h, удовлетворяющие условиям

$$g\leqslant f \quad\text{на}\quad E,\qquad h\leqslant f\chi_E \quad\text{на}\quad X. \tag{1}$$

Тогда $h = h\chi_E$ и

$$\int_X h\,d\mu = \int_X h\chi_E\,d\mu = \int_E h\,d\mu \leqslant \int_E f\,d\mu \quad\text{и}\quad \int_E g\,d\mu = \int_X g\chi_E\,d\mu \leqslant \int_X f\chi_E\,d\mu$$

(оба неравенства справедливы по определению интеграла от неотрицательной функции). Переходя в левых частях этих неравенств к supremum'у по h и g, удовлетворяющим условиям (1), мы (снова опираясь на определение II п. 1.2) получаем, что $\int_X f\chi_E\,d\mu \leqslant \int_E f\,d\mu$ и $\int_E f\,d\mu \leqslant \int_X f\chi_E\,d\mu$. ►

Следствие. Если (измеримые неотрицательные) функции f и g совпадают на множестве A, то $\int_A f\,d\mu = \int_A g\,d\mu$, так как $f\chi_A = g\chi_A$. В частности,

3′. Если $f(x) = C$ при всех x из A, то $\int_A f\,d\mu = C\,\mu(A)$.

Как и раньше, мы, допуская некоторую вольность, будем обозначать этот интеграл символом $\int_A C\,d\mu$.

Замечание. Свойство 3 позволяет при доказательстве различных свойств интеграла ограничиваться случаем, когда областью интегрирования является всё множество X. В дальнейшем мы неоднократно будем этим пользоваться.

4. *Монотонность интеграла по множеству.* Если $A\subset B$ и $f\geqslant 0$ на B, то $\int_A f\,d\mu \leqslant \int_B f\,d\mu$.

Так как $f\chi_A \leqslant f\chi_B$, то это свойство вытекает из предыдущих. ►

2.2. Здесь мы докажем одно из основных свойств интеграла. В соответствии со сделанным выше замечанием, будем рассматривать только интегралы по всему множеству X. Конечность интегралов не предполагается.

Теорема (Б. Леви*)). *Пусть $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ — последовательность неотрицательных измеримых функций, поточечно сходящаяся на X к функции f. Если*

$$f_n \leqslant f_{n+1} \quad \text{на}\ X\ \text{при каждом}\ n\in\mathbb{N}, \tag{2}$$

то

$$\int_X f_n\,d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X f\,d\mu.$$

*) Беппо **Ле́ви** (Levi), 1875–1961, — итальянский математик.

Доказательство. Заметим прежде всего, что функция f измерима как предел измеримых функций и в силу (2) $f_n \leqslant f$ при всех $n \in \mathbb{N}$. По монотонности интеграла мы получаем, что

$$\int_X f_n \, d\mu \leqslant \int_X f_{n+1} \, d\mu \leqslant \int_X f \, d\mu.$$

Следовательно, предел $L = \lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu$ существует и $L \leqslant \int_X f \, d\mu$.

Нам нужно теперь убедиться в справедливости обратного неравенства

$$\int_X f \, d\mu \leqslant L,$$

что и является основной частью доказательства.

Пусть g такая простая функция, что $0 \leqslant g \leqslant f$, и пусть $A_1, A_2, \ldots, A_N$ — допустимое разбиение для функции g, на элементах которого она принимает значения a_1, $a_2, \ldots, a_N$ соответственно. Зафиксируем произвольное число $\theta \in (0,1)$ и положим $X_n = X(f_n \geqslant \theta g)$. Отметим, что

$$\text{(а) } X_n \subset X_{n+1} \qquad \text{и} \qquad \text{(б) } \bigcup_{n\geqslant 1} X_n = X. \tag{3}$$

Включение (3а) очевидно ввиду условия (2). Для доказательства равенства (3б) рассмотрим произвольную точку $x \in X$. Если $g(x) = 0$, то $f_n(x) \geqslant 0 = \theta g(x)$ и поэтому $x \in X_n$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Если же $g(x) > 0$, то при достаточно больших n будут выполняться неравенства $f_n(x) > \theta g(x)$, поскольку $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x) \geqslant g(x) > \theta g(x)$ (именно здесь существенно, что $\theta < 1$). Отсюда вытекает, что $x \in \bigcup\limits_{n\geqslant 1} X_n$. Тем самым равенство (3б) доказано. Из (3) следует, что для любого множества $A \subset X$

$$(A \cap X_n) \subset (A \cap X_{n+1}), \qquad A = \bigcup_{n\geqslant 1} A \cap X_n.$$

Поэтому в силу непрерывности меры снизу

$$\mu(A \cap X_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu(A). \tag{4}$$

Используя монотонность интеграла (свойства 4 и 1) и определение интеграла от простой функции, оценим теперь $\int_X f_n \, d\mu$ снизу:

$$\int_X f_n \, d\mu \geqslant \int_{X_n} f_n \, d\mu \geqslant \int_{X_n} \theta g \, d\mu = \sum_{k=1}^{N} \theta a_k \mu(A_k \cap X_n).$$

С учётом (4) предельный переход при $n \to \infty$ даёт нам неравенство

$$L \geqslant \sum_{k=1}^{N} \theta a_k \mu(A_k) = \theta \int_X g \, d\mu.$$

Перейдя здесь к пределу при $\theta \to 1$, мы получим $L \geqslant \int_X g \, d\mu$. Ввиду произвольности функции g отсюда по определению $\int_X f \, d\mu$ следует неравенство $L \geqslant \int_X f \, d\mu$, что и требовалось. ►

2.3. Перейдём теперь к свойствам интеграла, связанным с арифметическими действиями.

5. *Аддитивность интеграла.* Если f, $g \geqslant 0$ на X, то

$$\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu. \tag{5}$$

Пусть сначала f, g — простые функции, C_1, C_2, $\ldots$, C_N — их общее допустимое разбиение, a_k, b_k — значения, принимаемые этими функциями на C_k. Тогда

$$\int_X (f+g)\,d\mu = \sum_{k=1}^N (a_k+b_k)\,\mu(C_k) = \sum_{k=1}^N a_k\,\mu(C_k) + \sum_{k=1}^N b_k\,\mu(C_k) = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu.$$

Общий случай исчерпывается с помощью аппроксимации функций f, g возрастающими последовательностями простых функций f_n и g_n (см. теорему III.2.2): так как

$$\int_X (f_n+g_n)\,d\mu = \int_X f_n\,d\mu + \int_X g_n\,d\mu,$$

то переходя на основании теоремы Леви к пределу в этом равенстве, мы получаем (5). ▶

6. *Положительная однородность интеграла.* Если a — неотрицательное число, то $\int_X af\,d\mu = a\int_X f\,d\mu$.

Доказательство этого свойства проводится по той же схеме, что и доказательство аддитивности. Сначала непосредственным вычислением оно устанавливается для простых функций, а общий случай исчерпывается с помощью предельного перехода. Детали мы предоставляем читателю. ▶

Следствие. С помощью индукции из свойств 5 и 6 мы немедленно получаем, что

$$\int_X \left(\sum_{k=1}^N a_k f_k\right) d\mu = \sum_{k=1}^N a_k \int_X f_k\,d\mu$$

для любых чисел $a_k \geqslant 0$ и функций $f_k \geqslant 0$.

7. *Аддитивность интеграла по множеству.* Если A, $B \subset X$, $A \cap B = \varnothing$, то

$$\int_{A\cup B} f\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_B f\,d\mu.$$

Так как $A \cap B = \varnothing$, то $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$, и поэтому $f\chi_{A\cup B} = f\chi_A + f\chi_B$. Остаётся сослаться на свойства 5 и 3. ▶

Замечание. Доказанное свойство означает, что определённая на $\mathfrak{A}$ функция множества $A \mapsto \int_A f\,d\mu$ аддитивна, т. е. является объёмом. В дальнейшем мы убедимся (см. теорему 5.1), что она есть мера.

Завершая перечисление свойств интеграла, установим полезное неравенство.

8. *Строгая положительность интеграла.* Если $\mu(E) > 0$ и $f(x) > 0$ на E, то $\int_E f\,d\mu > 0$.

Пусть $E_n = E(f > \frac{1}{n})$ $(n \in \mathbb{N})$. Ясно, что $\bigcup\limits_{n\geqslant 1} E_n = E$ и поэтому $\mu(E_n) > 0$ для некоторого n. Следовательно,

$$\int_E f\,d\mu \geqslant \int_{E_n} f\,d\mu \geqslant \int_{E_n} \frac{1}{n}\,d\mu = \frac{1}{n}\mu(E_n) > 0. \ \blacktriangleright$$

2.4. Получим формулу для вычисления интеграла по дискретной мере (см. пример 5 п. I.3.1). Пусть $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра подмножеств множества X, содержащая все одноточечные множества, $\{\omega_x\}_{x\in X}$ — произвольное семейство неотрицательных чисел и μ — соответствующая ему дискретная мера:

$$\mu(A) = \sum_{x\in A} \omega_x \qquad (A \in \mathfrak{A}).$$

Убедимся, что

$$\int_X f\,d\mu = \sum_{x\in X} f(x)\,\omega_x. \tag{6}$$

Если f — неотрицательная простая функция со значениями $a_1, \dots, a_n$ на множествах $A_1, \dots, A_n$, образующих разбиение X, то по определению интеграла от простой функции

$$\int_X f\,d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k\mu(A_k) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{x\in A_k} a_k\,\omega_x = \sum_{x\in X} f(x)\,\omega_x$$

(последнее равенство вытекает из аддитивности дискретной меры, соответствующей числовому семейству $\{f(x)\,\omega_x\}_{x\in X}$). Таким образом, для простых функций равенство (6) справедливо. Убедимся, что оно справедливо всегда. В самом деле, если $\int_X f\,d\mu = +\infty$, то по определению II для любого $C > 0$ найдётся такая простая функция g, $0 \leqslant g \leqslant f$, что $\int_X g\,d\mu > C$. Пользуясь равенством (6) для g, мы видим, что $\sum\limits_{x\in X} f(x)\,\omega_x \geqslant \sum\limits_{x\in X} g(x)\,\omega_x = \int_X g\,d\mu > C$. Поэтому в рассматриваемом случае $\sum\limits_{x\in X} f(x)\,\omega_x = +\infty$, и равенство (6) верно.

Если же $\int_X f\,d\mu < +\infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такая простая функция g, $0 \leqslant g \leqslant f$, что $\int_X f\,d\mu < \int_X g\,d\mu + \varepsilon$. Для любого конечного множества $E \subset X$ мы в силу конечной аддитивности интеграла имеем:

$$\sum_{x\in E} f(x)\,\omega_x = \sum_{x\in E}\int_{\{x\}} f\,d\mu = \int_E f\,d\mu.$$

Поэтому

$$\sum_{x\in E} f(x)\,\omega_x = \int_E f\,d\mu \leqslant \int_X f\,d\mu < \int_X g\,d\mu + \varepsilon = \sum_{x\in X} g(x)\,\omega_x + \varepsilon \leqslant \sum_{x\in X} f(x)\,\omega_x + \varepsilon.$$

Переходя в левой части этого неравенства к supremum'у по всем конечным подмножествам E, мы по определению суммы семейства получаем:

$$\sum_{x\in X} f(x)\,\omega_x \leqslant \int_X f\,d\mu \leqslant \sum_{x\in X} f(x)\,\omega_x + \varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε это влечёт равенство (6). $\blacktriangleright$

Вместе с (6) справедливо и более общее равенство

$$\int_A f\,d\mu = \sum_{x\in A} f(x)\,\omega_x \quad (A \in \mathfrak{A}).$$

Для доказательства можно повторить проведённое рассуждение, заменив X на A, или воспользоваться формулой (6) и равенствами

$$\int_A f\,d\mu = \int_X f\chi_A\,d\mu \quad \text{и} \quad \sum_{x\in X} f(x)\chi_A(x)\,\omega_x = \sum_{x\in A} f(x)\,\omega_x.$$

В частности, если множество $A = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ счётно, то интеграл $\int_A f\,d\mu$ есть не что иное, как сумма ряда:

$$\int_A f\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(x_n)\,\omega_{x_n}. \tag{7}$$

2.5. *Об аксиоматическом определении интеграла.* Среди установленных нами свойств интеграла есть некоторые, которые следует особо отметить. Как было доказано в пп. 2.1–2.3, интеграл обладает, в частности, следующими свойствами: он неотрицателен на неотрицательных функциях (по определению), аддитивен по множеству (свойство 7), положительно однороден (свойство 6) и, как установлено в теореме Леви (см. п. 2.2), непрерывен относительно возрастающих последовательностей. Оказывается, эти свойства полностью определяют интеграл. Остановимся на этом вопросе подробнее.

Пусть $\mathcal{K}$ — множество (конус) всех определённых на X неотрицательных измеримых функций (принимающих, возможно, и бесконечные значения). Ограничиваясь только неотрицательными функциями, можно сказать, что интеграл является отображением из $\mathcal{K} \times \mathfrak{A}$ в расширенное множество вещественных чисел: каждой паре $(f, A) \in \mathcal{K} \times \mathfrak{A}$ сопоставляется $\int_A f\,d\mu$. Отображения со значениями в $\mathbb{R}$ и $\overline{\mathbb{R}}$ мы называем функциями, но в данной ситуации, когда область задания нашего отображения (интеграла) сама определена с помощью функций, мы во избежание недоразумений будем, как это обычно делается, чтобы не перегружать смыслами слово “функция”, использовать для этого отображения термин *функционал.* Итак, интеграл есть некоторый функционал, определённый на $\mathcal{K} \times \mathfrak{A}$.

Рассматривая функционалы на $\mathcal{K} \times \mathfrak{A}$, мы не станем заранее фиксировать меру и поэтому будем теперь считать, что нам задано не пространство с мерой, а измеримое пространство $(X, \mathfrak{A})$. В этом пункте все множества мы по умолчанию считаем измеримыми, а функции — принадлежащими $\mathcal{K}$; символом $\mathbb{I}$ обозначается функция, тождественно равная единице на X.

Предположим, что функционал $J\colon \mathcal{K} \times \mathfrak{A} \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ обладает следующими свойствами:

(I) *$J(f, A) \geqslant 0$ при всех f и A;*

(II) *если $A \cap B = \varnothing$, то $J(f, A \cup B) = J(f, A) + J(f, B)$ (аддитивность по множеству);*

(III) *если функция f принимает во всех точках множества A одно и то же значение C, $C \geqslant 0$, то $J(f, A) = C\,J(\mathbb{I}, A)$;*

(IV) *если функциональная последовательность $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ возрастает на X и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = g(x)$ при всех $x \in X$, то $J(f_n, A) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} J(g, A)$ для любого A.*

Покажем, как из этих свойств можно, например, вывести равенство $J(f+g,A) = J(f,A)+J(g,A)$.

Из аддитивности по множеству сразу следует, что если множества $A_1, \ldots, A_n$ попарно дизъюнктны, то при любом $n \in \mathbb{N}$

$$J\Big(f, \bigvee_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} J(f, A_k). \tag{8}$$

Если f, g — неотрицательные простые функции, принимающие значения a_k и b_k на элементах общего для них допустимого разбиения $\{A_k\}_{k=1}^n$, то пользуясь равенством (8) и свойством (III), мы получаем:

$$\begin{aligned} J(f+g,A) &= J\Big(f+g, A \cap \bigvee_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} J(f+g, A\cap A_k) = \\ &= \sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)J(\mathbb{I}, A\cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k J(\mathbb{I}, A\cap A_k) + \sum_{k=1}^{n} b_k J(\mathbb{I}, A\cap A_k) = \\ &= J(f,A)+J(g,A). \end{aligned}$$

В общем случае следует аппроксимировать функции f и g возрастающими последовательностями простых функций f_n и g_n (см. теорему III.2.2) и, пользуясь свойством (IV), перейти к пределу в равенстве $J(f_n+g_n,A) = J(f_n,A)+J(g_n,A)$.

Аналогичным образом можно доказать, что $J(af,A) = aJ(f,A)$ при $a>0$.

Справедливость последних двух свойств для функционала J неудивительна, поскольку, как мы сейчас докажем, всякий функционал, обладающий свойствами (I)–(IV), есть интеграл по некоторой мере.

Теорема. *Пусть $J\colon \mathcal{K}\times\mathfrak{A} \mapsto \overline{\mathbb{R}}$ — функционал, обладающий свойствами* (I)–(IV). *Тогда он допускает интегральное представление, т. е.*

$$J(f,A) = \int_A f\,d\mu \quad \text{для всех} \quad (f,A)\in\mathcal{K}\times\mathfrak{A},$$

где μ — мера, определённая на $\mathfrak{A}$.

Из интегрального представления J вытекает, что $\mu(A) = \int_A \mathbb{I}\,d\mu = J(\mathbb{I},A)$, и, таким образом, мера μ определена однозначно.

Доказательство разобьём на несколько шагов.

1) Справедливо равенство $J(\chi_A, X) = J(\mathbb{I}, A)$.

В самом деле, согласно условиям (II) и (III)

$$J(\chi_A,X) = J(\chi_A,A)+J(\chi_A,X\setminus A) = 1\cdot J(\mathbb{I},A)+0\cdot J(\mathbb{I},X\setminus A) = J(\mathbb{I},A)$$

(напомним, что по принятому нами соглашению произведение $0\cdot J(\mathbb{I},X\setminus A)$ равно нулю, даже если $J(\mathbb{I},X\setminus A)=+\infty$).

2) Положим теперь $\mu(A) = J(\mathbb{I},A)$ и убедимся, что μ есть мера. Аддитивность μ следует из условия (II). Поэтому μ есть объём. Для доказательства его счётной аддитивности проверим, что он непрерывен снизу (см. теорему I.3.3).

Пусть $A_n \subset A_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A$. Тогда $\chi_{A_n} \leqslant \chi_{A_{n+1}}$ и $\chi_{A_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \chi_A$ поточечно на X. Поэтому, согласно условию (IV), $J(\chi_{A_n}, X) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} J(\chi_A, X)$. Остаётся заметить, что согласно 1) $J(\chi_A, X) = J(\mathbb{I}, A) = \mu(A)$, и аналогичные равенства верны для A_n.

3) Докажем, что функционал J совпадает с интегралом по мере μ на простых функциях. Действительно, если f — неотрицательная простая функция, а a_k — значения, которые она принимает на элементах допустимого разбиения $\{A_k\}_{k=1}^N$, то пользуясь равенством (8) и свойством (III), мы имеем:

$$J(f, A) = J\Big(f, \bigcup_{k=1}^{N}(A \cap A_k)\Big) = \sum_{k=1}^{N} J(f, A \cap A_k) = \sum_{k=1}^{N} a_k J(\mathbb{I}, A \cap A_k) =$$
$$= \sum_{k=1}^{N} a_k \mu(A \cap A_k) = \int_A f\, d\mu.$$

4) Пусть, наконец, функция f и множество A произвольны. Рассмотрим возрастающую последовательность простых функций f_n поточечно сходящуюся к f на X. Переходя к пределу в равенстве $J(f_n, A) = \int_A f_n\, d\mu$, мы получаем требуемый результат: $J(f, A) = \int_A f\, d\mu$. При этом в левой части равенства можно перейти к пределу на основании условия (IV), а в правой — по теореме Леви. ►

Доказанная теорема позволяет по определению объявить функционал J, удовлетворяющий условиям (I)–(IV), интегралом по мере μ, определяемой равенством $\mu(A) = J(\mathbb{I}, A)$. При этом все свойства интеграла, установленные в пп. 2.1–2.3, можно вывести из этих условий. Однако такой аксиоматический подход оставляет открытым вопрос о существовании нетривиального (не равного тождественно нулю) функционала, удовлетворяющего условиям (I)–(IV), а также вопрос о том, любые ли меры можно получить с помощью таких функционалов. Эти вопросы разрешаются с помощью предъявления той или иной конструкции функционала, обладающего нужными свойствами, что и было нами сделано с самого начала.

УПРАЖНЕНИЯ

В задачах 1)–5) мера μ определена на некоторой σ-алгебре подмножеств множества X.

1) Если функция f измерима и неотрицательна на X, то интеграл $\int_X f\, d\mu$ и суммы $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu\big(X(f \geqslant n)\big)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\mu\big(X(n \leqslant f < n+1)\big)$ одновременно конечны или нет.

2) Пусть $\mu(X) = 1$ и каждая точка множества X принадлежит по крайней мере k измеримым множествам $E_1, \ldots, E_N$. Докажите, что при некотором n справедливо неравенство $\mu(E_n) \geqslant \frac{k}{N}$.

3) Пусть измеримая функция f почти везде конечна, $p \geqslant 1$. Положим

$$s = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^n \Big(\mu\big(X\big(2^n < |f| \leqslant 2^{n+1}\big)\big)\Big)^{\frac{1}{p}}, \quad S = \sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^n \Big(\mu\big(X\big(2^n < |f|\big)\big)\Big)^{\frac{1}{p}}.$$

Докажите, что $(s < +\infty) \Rightarrow (S < +\infty) \Rightarrow (I < +\infty)$, где $I = \int_X |f|^p\, d\mu$.

4) Докажите, что интегралы $\int_X f\,d\mu$ и $\int_X e^f\,d\mu$ одновременно конечны для любой неотрицательной измеримой на X функции f только в том случае, когда мера μ конечна, а множество X распадается на конечное число “атомов” (множеств, которые нельзя разбить на две части положительной меры).

5) Какой должна быть мера, чтобы всякая неотрицательная измеримая функция (с конечными значениями) была суммируема?

§ 3. Свойства интеграла, связанные с понятием “почти везде”

Как и в предыдущих параграфах, всюду далее мы считаем заданным некоторое пространство с мерой $(X, \mathfrak{A}, \mu)$. Все рассматриваемые множества и функции (со значениями в $\overline{\mathbb{R}}$) предполагаются измеримыми.

3.1. В теории функций часто приходится иметь дело с высказываниями, справедливость которых зависит от точки $x \in X$. Например, “$f(x) > 0$”, “последовательность $\{f_n(x)\}_{n\geqslant 1}$ ограничена”, “последовательность $\{f_n(x)\}_{n\geqslant 1}$ сходится” и т. п. Нам особенно важен случай, когда то или иное утверждение $P(x)$, справедливость которого зависит от точки, верно для всех x, кроме точек некоторого множества нулевой меры. В связи с этим мы введём следующее

Определение. Говорят, что высказывание $P(x)$ *верно для почти всех* x из множества $E \subset X$ (или *почти везде на* E), если существует такое множество $e \subset E$, что $\mu(e) = 0$ и $P(x)$ верно для каждой точки x из $E \setminus e$.

С частным случаем этого определения, когда утверждение $P(x)$ состоит в том, что “последовательность $\{f_n(x)\}_{n\geqslant 1}$ сходится”, мы уже встречались в п. III.3.1 (сходимость почти везде).

Множество, дополнение которого до X имеет меру нуль, называется *множеством полной меры**). Если свойство $P(x)$ справедливо на множестве полной меры, т. е. почти везде на X, то мы будем говорить, что оно верно почти везде, опуская указание на множество.

Замечание. Нужно иметь в виду, что когда мы рассматриваем не одну, а несколько мер: μ, ν, ..., то справедливость высказывания $P(x)$ почти везде относительно одной меры вовсе не означает, что оно справедливо почти везде и относительно другой меры. В таких случаях, во избежание недоразумений, говорят, что $P(x)$ верно μ-почти везде, ν-почти везде и т. д.

В дальнейшем мы будем часто пользоваться следующей леммой.

Лемма. *Пусть $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 1}$ — последовательность утверждений, $P(x)$ — утверждение, состоящее в том, что в точке $x \in X$ верны все утверждения $P_n(x)$. Если каждое из $P_n(x)$ верно почти везде на множестве $E \subset X$, то и $P(x)$ верно почти везде на E.*

Доказательство следует из того факта, что объединение последовательности множеств меры нуль снова есть множество меры нуль (см. следствие I.3.2). Детали мы предоставляем читателю. ►

*) Эта терминология никак не связана с введённым в п. I.4.3 понятием полной меры.

3.2. Отметим некоторые свойства интеграла, связанные с понятием “почти везде”.

1. Если $\int_E |f|\,d\mu < +\infty$, то $|f(x)| < +\infty$ почти везде на E.

Пусть $E_0 = \{x \in E \mid |f(x)| = +\infty\}$. Тогда при любом $t > 0$ мы имеем: $\int_E |f|\,d\mu \geqslant \int_{E_0} t\,d\mu = t\mu(E_0)$. Следовательно,

$$\mu(E_0) \leqslant \frac{1}{t}\int_E |f|\,d\mu \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0. \ \blacktriangleright$$

2. Если $\int_E |f|\,d\mu = 0$, то $f(x) = 0$ почти везде на E.

Действительно, если $\mu\big(E(|f| > 0)\big) > 0$, то по свойству 8 п. 2.3 $\int_{E(|f|>0)} |f|\,d\mu > 0$, что ведёт к противоречию. $\blacktriangleright$

3. Пусть $E_0 \subset E$, $\mu(E \setminus E_0) = 0$. Тогда интегралы $\int_E f\,d\mu$, $\int_{E_0} f\,d\mu$ существуют или нет одновременно, и если существуют, то равны.

В самом деле, благодаря аддитивности интеграла и свойству 2 п. 2.1, мы имеем:

$$\int_E f_\pm\,d\mu = \int_{E_0} f_\pm\,d\mu + \int_{E\setminus E_0} f_\pm\,d\mu = \int_{E_0} f_\pm\,d\mu. \tag{1}$$

Таким образом, интегралы $\int_E f_+\,d\mu$, $\int_{E_0} f_+\,d\mu$, как и интегралы $\int_E f_-\,d\mu$, $\int_{E_0} f_-\,d\mu$, конечны одновременно, что по определению и означает одновременную интегрируемость функции f на множествах E и E_0. Равенство интегралов $\int_E f\,d\mu$ и $\int_{E_0} f\,d\mu$ непосредственно следует из (1) и определения. $\blacktriangleright$

4. Если измеримые функции f, g совпадают почти всюду на множестве E, то интегралы $\int_E f\,d\mu$, $\int_E g\,d\mu$ существуют одновременно, и если существуют, то равны.

Пусть $e = E(f \neq g)$. Так как $f_\pm(x) = g_\pm(x)$ на $E \setminus e$, то по предыдущему свойству мы имеем

$$\int_E f_\pm\,d\mu = \int_{E\setminus e} f_\pm\,d\mu = \int_{E\setminus e} g_\pm\,d\mu = \int_E g_\pm\,d\mu,$$

откуда вытекает требуемое. $\blacktriangleright$

Из последнего свойства видно, что в рамках задач, связанных с интегрированием, на функции, совпадающие почти везде, можно смотреть как на одинаковые. Для таких функций удобно ввести следующее

Определение. Функции, совпадающие почти везде на X, называются *эквивалентными* (относительно меры μ).

3.3. *Добавление к определению интеграла.* Иногда, имея дело с функциями, измеримыми на некотором множестве E, мы естественным образом бываем вынуждены включать в рассмотрение и функции, определённые почти везде на E. Так будет, например, если нас интересует предел последовательности измеримых функций, сходящейся не везде, а лишь почти везде на E. Такая ситуация возникает достаточно часто, и чтобы каждый раз не делать в таких случаях специальных оговорок, удобно несколько обобщить понятия измеримой функции и интеграла.

Определение. Функцию f, определённую и измеримую на множестве $E_0 \subset E$ таком, что $\mu(E \setminus E_0) = 0$, мы будем называть функцией, *измеримой на E в широком смысле,* а под интегралом $\int_E f\,d\mu$ будем понимать интеграл $\int_{E_0} f\,d\mu$, если последний существует. Как и раньше (см. определение 1.3), если интегралы $\int_E f_\pm\,d\mu$ конечны, то функция f называется суммируемой на E.

Установленное выше свойство 3 обеспечивает корректность такого обобщения понятия интеграла. Очевидно, все доказанные в этом и предыдущем параграфах свойства интеграла остаются справедливыми и для интеграла в этом смысле.

Обратим внимание читателя на то, что функция, измеримая в широком смысле, может быть определена всюду на E, но не быть измеримой на этом множестве (такая ситуация возможна, если рассматриваемая мера не полная).

§ 4. Свойства интеграла от суммируемых функций

Всюду в этом параграфе рассматривается фиксированное пространство с мерой $(X, \mathfrak{A}, \mu)$. Все подмножества множества X по умолчанию предполагаются измеримыми, а все функции — измеримыми на X в широком смысле. Согласно определению 3.3 измеримая в широком смысле функция f называется суммируемой на E ($E \in \mathfrak{A}$) по мере μ, если конечны интегралы $\int_E f_\pm \, d\mu$. Множество таких функций обозначается символом $\mathscr{L}(E, \mu)$ или кратко $\mathscr{L}(E)$, если понятно, о какой мере идёт речь. Устанавливая свойства интеграла, мы везде, за исключением свойств 2 и 8, где это вызвано существом дела, будем рассматривать интегралы от суммируемых функций по всему множеству X. Соответствующие свойства интегралов по произвольным измеримым подмножествам X могут быть получены с помощью равенства $\int_E f \, d\mu = \int_X f \chi_E \, d\mu$ (см. § 2, свойство 3), что мы предоставляем читателю.

4.1. *Свойства интеграла, выражаемые неравенствами.*

1. Функция f суммируема на X в том и только том случае, когда $|f| \in \mathscr{L}(X)$. Если $f \in \mathscr{L}(X)$, то $\left|\int_X f \, d\mu\right| \leqslant \int_X |f| \, d\mu$.

Суммируемость f означает по определению конечность интегралов $\int_X f_+ \, d\mu$, $\int_X f_- \, d\mu$. Это равносильно суммируемости $|f|$, так как $|f| = f_+ + f_-$. В случае суммируемости f мы имеем

$$\left|\int_X f \, d\mu\right| = \left|\int_X f_+ \, d\mu - \int_X f_- \, d\mu\right| \leqslant \int_X f_+ \, d\mu + \int_X f_- \, d\mu = \int_X |f| \, d\mu. \ \blacktriangleright$$

Следствие. Всякая суммируемая на E функция конечна почти везде на этом множестве.

Для доказательства достаточно сопоставить доказанное свойство и свойство 1 п. 3.2. ▶

2. Всякая функция, суммируемая на некотором множестве, суммируема и на любом его (измеримом) подмножестве.

Это свойство немедленно вытекает из свойства 1 и монотонности интеграла по множеству. ▶

3. Всякая ограниченная функция f суммируема на множестве E конечной меры.

Действительно, пусть $|f| \leqslant C$ на E. Тогда

$$\int_E |f| \, d\mu \leqslant \int_E C \, d\mu = C\mu(E) < \infty,$$

и остаётся сослаться на свойство 1. ▶

4. *Монотонность интеграла.* Если $f, g \in \mathscr{L}(X)$ и $f \leqslant g$ почти везде, то $\int_X f\,d\mu \leqslant \int_X g\,d\mu$.

Так как $f_+ - f_- \leqslant g_+ - g_-$, то $f_+ + g_- \leqslant g_+ + f_-$. Поэтому в силу аддитивности и монотонности интеграла от неотрицательных функций

$$\int_X f_+\,d\mu + \int_X g_-\,d\mu \leqslant \int_X g_+\,d\mu + \int_X f_-\,d\mu.$$

Поскольку все интегралы конечны, отсюда следует нужное нам неравенство:

$$\int_X f_+\,d\mu - \int_X f_-\,d\mu \leqslant \int_X g_+\,d\mu - \int_X g_-\,d\mu. \quad \blacktriangleright$$

5. Если $|f| \leqslant g$ почти везде на X и $g \in \mathscr{L}(X)$, то $f \in \mathscr{L}(X)$.

Доказательство немедленно следует из монотонности интеграла и свойства 1. ▶

4.2. *Свойства интеграла, выражаемые равенствами.*

6. *Аддитивность интеграла.* Если f, $g \in \mathscr{L}(X)$, то $f + g \in \mathscr{L}(X)$ и

$$\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu. \tag{1}$$

Пусть $h = f + g$. Поскольку функции f, g почти везде конечны, функция h определена (и измерима) на множестве полной меры. Так как $|h| \leqslant |f| + |g|$ и $\int_X \bigl(|f| + |g|\bigr)\,d\mu = \int_X |f|\,d\mu + \int_X |g|\,d\mu$ в силу аддитивности интеграла от неотрицательных функций, то функция h суммируема по свойству 5. Для доказательства равенства (1) заметим, что

$$h_+ - h_- = f_+ - f_- + g_+ - g_-, \qquad \text{то есть} \qquad h_+ + f_- + g_- = f_+ + g_- + h_-.$$

Интегрируя последнее равенство и пользуясь аддитивностью интеграла от неотрицательных функций, мы получаем

$$\int_X h_+\,d\mu + \int_X f_-\,d\mu + \int_X g_-\,d\mu = \int_X f_+\,d\mu + \int_X g_+\,d\mu + \int_X h_-\,d\mu.$$

Здесь все интегралы конечны и поэтому

$$\int_X h_+\,d\mu - \int_X h_-\,d\mu = \int_X f_+\,d\mu - \int_X f_-\,d\mu + \int_X g_+\,d\mu - \int_X g_-\,d\mu. \quad \blacktriangleright$$

7. *Однородность интеграла.* Если $f \in \mathscr{L}(X)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, то $\alpha f \in \mathscr{L}(X)$ и

$$\int_X \alpha f\,d\mu = \alpha \int_X f\,d\mu. \tag{2}$$

Если $\alpha \geqslant 0$, то $(\alpha f)_+ = \alpha f_+$, $(\alpha f)_- = \alpha f_-$. Пользуясь определением интеграла (см. п. 1.3) и положительной однородностью, мы получаем

$$\int_X \alpha f\,d\mu = \int_X \alpha f_+\,d\mu - \int_X \alpha f_-\,d\mu = \alpha \int_X f_+\,d\mu - \alpha \int_X f_-\,d\mu = \alpha \int_X f\,d\mu,$$

что доказывает как суммируемость функции αf, так и равенство (2).

При $\alpha = -1$ мы имеем

$$(-f)_+ = \max\{-f, 0\} = f_- \ , \qquad (-f)_- = \max\{-(-f), 0\} = f_+ \ .$$

Поэтому

$$\int_X (-f)\, d\mu = \int_X (-f)_+\, d\mu - \int_X (-f)_-\, d\mu = \int_X f_-\, d\mu - \int_X f_+\, d\mu = -\int_X f\, d\mu.$$

Случай $\alpha < 0$ исчерпывается ссылкой на уже рассмотренные благодаря равенству $\alpha = (-1)|\alpha|$. ►

Следствие (*линейность интеграла*). Если $f_1, \ldots, f_n \in \mathscr{L}(X)$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, то $(\alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_n f_n) \in \mathscr{L}(X)$ и

$$\int_X \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k\, d\mu = \sum_{k=1}^n \alpha_k \int_X f_k\, d\mu.$$

При $n = 2$ следствие немедленно вытекает из аддитивности и однородности интеграла, общий случай исчерпывается с помощью индукции. ►

8. *Аддитивность интеграла по множеству.* Пусть $E = \bigcup\limits_{k=1}^n E_k$, функция f измерима (в широком смысле) на E. Тогда f суммируема на E в том и только том случае, когда она суммируема на каждом из множеств E_k. Если $f \in \mathscr{L}(E)$ и множества E_k попарно дизъюнктны, то справедливо равенство

$$\int_E f\, d\mu = \sum_{k=1}^n \int_{E_k} f\, d\mu. \tag{3}$$

Считая, что f произвольным образом продолжена на всё множество X, заметим, что $|f|\chi_{E_k} \leqslant |f|\chi_E \leqslant |f|\chi_{E_1} + \ldots + |f|\chi_{E_n}$ для любого $k = 1, \ldots, n$. Поэтому неравенство $\int_X |f|\chi_E\, d\mu < +\infty$, равносильное суммируемости f на E, выполняется в том и только том случае, когда справедливы все неравенства $\int_X |f|\chi_{E_k}\, d\mu < +\infty$ $(k = 1, \ldots, n)$, т. е. в случае суммируемости f на всех множествах E_k.

Если множества E_k попарно дизъюнктны, то $f\chi_E = f\chi_{E_1} + \ldots + f\chi_{E_n}$. Интегрируя это равенство, мы приходим к требуемому результату.

Заметим, что из суммируемости функции на каждом из множеств некоторого б е с к о н е ч н о г о семейства не следует её суммируемость на их объединении. Соответствующий пример мы получим, рассматривая функцию, тождественно равную единице, и любую последовательность множеств конечной меры, объединение которых имеет бесконечную меру.

9. *Интегрирование по сумме мер.* Если мера μ есть сумма мер μ_1 и μ_2, то

$$\int_X f\, d\mu = \int_X f\, d\mu_1 + \int_X f\, d\mu_2 \tag{4}$$

для любой неотрицательной функции f. Функция f (произвольного знака) суммируема относительно μ тогда и только тогда, когда она суммируема относительно μ_1 и μ_2. В этом случае равенство (4) остаётся справедливым.

Так как $\mu(E) = \int_X \chi_E \, d\mu$, то равенство (4) справедливо для характеристических, а следовательно, и для всех неотрицательных простых функций. Общий случай получается с помощью предельного перехода (ср. с доказательством свойства 5 в п. 2.3). Если f — функция произвольного знака, то одновременная конечность интегралов $\int_X f \, d\mu$, $\int_X f \, d\mu_1$, $\int_X f \, d\mu_2$ следует из равенства (4), применённого к $|f|$. Поскольку равенства (4) справедливы для функций $f_\pm$, мы с помощью вычитания (возможного ввиду конечности интегралов) получаем и равенство (4) для f. ►

4.3. Рассмотрим теперь вопрос об интегрировании комплекснозначных функций. Комплекснозначную функцию f мы будем называть измеримой, если измеримы её вещественная и мнимая части, т. е. функции $g = \mathcal{R}e(f)$ и $h = \mathcal{I}m(f)$; аналогично понимается измеримость f в широком смысле. Функция f называется суммируемой на множестве E, если суммируемы g и h. В этом случае мы по определению полагаем

$$\int_E f \, d\mu = \int_E g \, d\mu + i \int_E h \, d\mu.$$

Отсюда сразу следует формула для интегрирования комплексно-сопряжённой функции: $\int_E \overline{f} \, d\mu = \overline{\int_E f \, d\mu}$.

Свойства интеграла 6–8, выражаемые равенствами, сохраняются и для комплекснозначных функций. Несложную проверку этого мы предоставляем читателю.

Свойства 1, 2, 3 и 5 (свойство 4 теряет смысл) также остаются справедливыми в комплексном случае. При этом свойства 2 и 5 легко вытекают из свойства 1, поэтому мы докажем лишь его.

Пусть комплекснозначная функция f измерима. Сохраняя введённые обозначения, мы видим, что $|f| = \sqrt{g^2 + h^2}$. Поэтому функция $|f|$ также измерима. Кроме того,

$$|g|, |h| \leqslant |f| = \sqrt{g^2 + h^2} \leqslant |g| + |h|,$$

откуда следует, что функция $|f|$ суммируема в том и только том случае, когда суммируемы обе функции g и h, т. е. когда суммируема f.

Докажем, что если f суммируема, то $|\int_E f \, d\mu| \leqslant \int_E |f| \, d\mu$. Очевидно, что $|\int_E f \, d\mu| = e^{i\alpha} \int_E f \, d\mu$ при некотором $\alpha \in \mathbb{R}$. Поэтому в силу однородности интеграла относительно комплексных скаляров мы имеем:

$$\left| \int_E f \, d\mu \right| = e^{i\alpha} \int_E f \, d\mu = \int_E e^{i\alpha} f \, d\mu = \int_E \mathcal{R}e(e^{i\alpha} f) \, d\mu + i \int_E \mathcal{I}m(e^{i\alpha} f) \, d\mu.$$

Так как в начале этой цепочки равенств стоит вещественное число, то $\int_E \mathcal{I}m(e^{i\alpha} f) \, d\mu = 0$. Следовательно,

$$\left| \int_E f \, d\mu \right| = \int_E \mathcal{R}e(e^{i\alpha} f) \, d\mu \leqslant \int_E |\mathcal{R}e(e^{i\alpha} f)| \, d\mu \leqslant \int_E |e^{i\alpha} f| \, d\mu = \int_E |f| \, d\mu. \ ►$$

4.4. Оставшуюся часть параграфа мы посвятим важным интегральным неравенствам. Рассматриваемые при этом функции (вообще говоря, комплекснозначные) предполагаются измеримыми в широком смысле.

Теорема (неравенство Чебышева*)). *Пусть p, t — положительные числа. Для заданной на X функции f положим $X_t = X\big(|f| \geqslant t\big)$. Тогда*

$$\mu(X_t) \leqslant \frac{1}{t^p} \int_X |f|^p \, d\mu.$$

Доказательство почти очевидно:

$$\int_X |f|^p \, d\mu \geqslant \int_{X_t} |f|^p \, d\mu \geqslant \int_{X_t} t^p d\mu = t^p \mu(X_t). \quad \blacktriangleright$$

4.5. Теорема (неравенство Гёльдера**)). *Пусть числа p, $q > 1$ таковы, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда для любых функций f, g справедливо неравенство*

$$\int_X |f\, g| \, d\mu \leqslant \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_X |g|^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Доказательство. Будем считать функции f, g неотрицательными (в противном случае заменим f на $|f|$ и g на $|g|$). Если хотя бы один из интегралов $\int_X f^p \, d\mu$, $\int_X g^q \, d\mu$ равен нулю, то произведение fg равно нулю почти везде и доказываемое неравенство очевидно. Случай, когда хотя бы один из этих интегралов бесконечен, также тривиален. Поэтому в дальнейшем мы будем считать, что

$$0 < A^p = \int_X f^p \, d\mu < +\infty, \quad 0 < B^q = \int_X g^q \, d\mu < +\infty.$$

Воспользуемся вспомогательным неравенством, которое докажем чуть позже:

$$u\, v \leqslant \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} \qquad \text{при} \;\; u, v \geqslant 0.$$

Подставив сюда $u = \frac{f(x)}{A}$ и $v = \frac{g(x)}{B}$, мы получим

$$\frac{f(x)}{A} \cdot \frac{g(x)}{B} \leqslant \frac{1}{p} \cdot \frac{f^p(x)}{A^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{g^q(x)}{B^q}.$$

Интегрирование по X даёт нам:

$$\int_X \frac{fg}{AB} \, d\mu \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

что равносильно доказываемому неравенству.

Переходя к доказательству вспомогательного неравенства, заметим, что функция $\varphi(u) = \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q} - uv$ выпукла на $[0, +\infty)$ при любом $v \geqslant 0$. Так как $\varphi'(u) = 0$ в точке $u_0 = v^{\frac{q}{p}}$, то в этой точке φ достигает наименьшего значения. Как легко подсчитать, $\varphi(u_0) = 0$, что и доказывает неотрицательность φ. $\blacktriangleright$

---

*) Пафнутий Львович **Чебышев**, 1821–1894, — российский математик.

) Людвиг Отто **Гёльдер (Hölder), 1859–1937, — немецкий математик.

Следствие 1. *Если* $\int_X |f|^p\,d\mu < +\infty$, $\int_X |g|^q\,d\mu < +\infty$, *то функция* fg *суммируема и*

$$\left|\int_X fg\,d\mu\right| \leqslant \left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_X |g|^q\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$$

(это неравенство также называют неравенством Гёльдера).

Суммируемость fg немедленно следует из неравенства Гёльдера, правая часть которого конечна.

Следствие 2. *Если положительные числа* $p_1, \ldots, p_m$ *таковы, что* $\frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_m} = 1$, *то*

$$\int_X |f_1 \cdots f_m|\,d\mu \leqslant \prod_{j=1}^{m} \left(\int_X |f_j|^{p_j}\,d\mu\right)^{\frac{1}{p_j}}$$

для любых функций $f_1, \ldots, f_m$, *измеримых на* X.

Используя индукцию, читатель легко докажет это утверждение самостоятельно.

Дополним следствие 1 неравенством, соответствующим случаю $p = 1$. Для этого введём понятие “уточнённой” верхней границы.

Определение. *Истинным супремумом* функции $f \in \mathscr{L}^0(X, \mu)$ называется величина

$$\inf\{C \mid f \leqslant C \text{ почти везде на } X\}.$$

Она обозначается символом $\operatorname*{vraisup}_X f$.

Ясно, что если $\operatorname*{vraisup}_X |f| < +\infty$, то функцию f можно переопределить на множестве нулевой меры таким образом, что она станет ограниченной. Отметим также, что в определении истинного супремума нижнюю грань можно заменить на минимум и поэтому $f \leqslant \operatorname*{vraisup}_X f$ почти везде. В самом деле, если $\operatorname*{vraisup}_X f = +\infty$, то это тривиально, а если $\operatorname*{vraisup}_X f = C_0 < +\infty$, то $f \leqslant C_0 + \frac{1}{n}$ почти везде при любом $n \in \mathbb{N}$, из чего после перехода к пределу и вытекает наше утверждение.

Множество функций, удовлетворяющих условию $\operatorname*{vraisup}_X |f| < +\infty$, обозначается символом $\mathscr{L}^\infty(X, \mu)$.

Из монотонности интеграла вытекает, что если $f \in \mathscr{L}(X, \mu)$, $g \in \mathscr{L}^\infty(X, \mu)$, то функция fg суммируема и

$$\left|\int_X fg\,d\mu\right| \leqslant \operatorname*{vraisup}_X |g| \cdot \int_X |f|\,d\mu.$$

Следствие 3. *Если* $p > 1$, $\int_X |f|^p\,d\mu < +\infty$ *и* $\mu(X) < +\infty$, *то функция* f *суммируема.*

Действительно, считая, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, и применяя неравенство Гёльдера к функциям $|f|$ и 1, мы видим, что

$$\int_X |f|\,d\mu = \int_X |f| \cdot 1\,d\mu \leqslant \left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \big(\mu(X)\big)^{\frac{1}{q}} < +\infty.$$

Важный частный случай неравенства Гёльдера получим, взяв $p = q = 2$:

$$\int_X |f\,g|\,d\mu \leqslant \left(\int_X |f|^2\,d\mu\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_X |g|^2\,d\mu\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Это неравенство называют обычно *неравенством Коши–Буняковского**).

Отметим ещё, что если μ — считающая мера на конечном множестве $X_N = \{1, \dots, N\}$, то в силу аддитивности интеграла $\int_{X_N} f\,d\mu = \sum\limits_{n=1}^{N} \int_{\{n\}} f\,d\mu = \sum\limits_{n=1}^{N} f_n$, где $f_n = f(n)$. Поэтому в этом случае неравенство Гёльдера принимает вид

$$\sum_{n=1}^{N} |f_n\,g_n| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{N} |f_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{n=1}^{N} |g_n|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Переход к пределу при $N \to \infty$ даёт нам неравенство Гёльдера для рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n\,g_n| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} |g_n|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

которое есть не что иное, как интегральное неравенство Гёльдера в случае, когда μ — считающая мера на $\mathbb{N}$ (см. пример 4 п. I.3.1 и пример п. 5.1 далее).

При $p = q = 2$ отсюда как частный случай вытекает классическое неравенство Коши

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n\,g_n| \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} |g_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

4.6. Теорема (неравенство Минковского). *Пусть $p \geqslant 1$ и f, g — функции почти везде конечные на X. Тогда*

$$\left(\int_X |f+g|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Доказательство. Так как $|f+g| \leqslant |f| + |g|$, то при $p = 1$ неравенство Минковского очевидно. Поэтому далее мы считаем, что $p > 1$. Положим

$$A^p = \int_X |f|^p\,d\mu, \qquad B^p = \int_X |g|^p\,d\mu, \qquad C^p = \int_X |f+g|^p\,d\mu.$$

Очевидно, неравенство требует доказательства только если A и B конечны. Убедимся, что в этом случае $C < +\infty$. В самом деле, так как

$$|f+g|^p \leqslant \bigl(2\max\{|f|, |g|\}\bigr)^p \leqslant 2^p\bigl(|f|^p + |g|^p\bigr),$$

*) Виктор Яковлевич **Буняковский**, 1804–1889, — российский математик.

то $C^p \leqslant 2^p(A^p + B^p) < +\infty$. Ясно, что

$$C^p \leqslant \int_X \big(|f| + |g|\big)\big(|f| + |g|\big)^{p-1}\, d\mu = \int_X |f|\,\big(|f| + |g|\big)^{p-1}\, d\mu + \int_X |g|\,\big(|f| + |g|\big)^{p-1}\, d\mu. \quad (4)$$

Применив к первому из интегралов, стоящих в правой части, неравенство Гёльдера (см. п. 4.5) с $q = \frac{p}{p-1} > 1$, мы получим:

$$\int_X |f|\,\big(|f| + |g|\big)^{p-1}\, d\mu \leqslant \left(\int_X |f|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_X |f + g|^{(p-1)q}\, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} = A \cdot C^{\frac{p}{q}}.$$

Аналогично,

$$\int_X |g|\,|f + g|^{p-1}\, d\mu \leqslant B \cdot C^{\frac{p}{q}}.$$

Вместе с (4) это даёт нам:

$$C^p \leqslant A \cdot C^{\frac{p}{q}} + B \cdot C^{\frac{p}{q}} = (A + B)C^{\frac{p}{q}}.$$

При $C > 0$ сокращение на $C^{\frac{p}{q}}$ приводит к нужному результату, поскольку $p - \frac{p}{q} = 1$. При $C = 0$ доказываемое неравенство очевидно. ►

Отметим сумматорный вариант неравенства Минковского:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n + g_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |g_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

§ 5. Интеграл как функция множества

В этом параграфе, как и в предыдущем, мы будем рассматривать фиксированное пространство с мерой $(X, \mathfrak{A}, \mu)$. Все рассматриваемые подмножества X предполагаются измеримыми, а все функции определёнными по крайней мере почти всюду на X и измеримыми в широком смысле.

5.1. Теорема (счётная аддитивность интеграла). *Пусть функция f неотрицательна на множестве $A \subset X$ и $A = \bigvee\limits_{k=1}^{\infty} A_k$. Тогда*

$$\int_A f\, d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f\, d\mu.$$

Отметим, что конечность интегралов не предполагается.

Доказательство. Так как $\{A_n\}_{n \geqslant 1}$ — разбиение множества A, то

$$f\chi_A = \sum_{k=1}^{\infty} f\chi_{A_k}.$$

Пусть S_n — n-я частичная сумма ряда, стоящего справа. Ясно, что $0 \leqslant S_n \leqslant S_{n+1}$ и $S_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f\chi_A$. По теореме Леви мы получаем

$$\int_X f\chi_A\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X S_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_X f\chi_{A_k}\,d\mu.$$

Таким образом,

$$\int_A f\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{A_k} f\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty}\int_{A_k} f\,d\mu. \ \blacktriangleright$$

Замечание. Утверждение теоремы можно переформулировать следующим образом: если функция f неотрицательна на X, то функция множества $A \mapsto \int_A f\,d\mu$ есть мера на $\mathfrak{A}$ (сравните с замечанием после свойства 7 в п. 2.3).

Следствие 1. *Утверждение теоремы остаётся справедливым, если считать, что f — суммируемая функция произвольного знака.*

Для доказательства достаточно применить теорему к функциям $f_\pm$.

Следующее утверждение показывает, что интеграл от суммируемой функции произвольного знака обладает теми же свойствами непрерывности, что и конечная мера (см. теоремы I.3.3 и I.3.4).

Следствие 2. *Интеграл от суммируемой функции f непрерывен снизу и сверху. Подробнее: если*

$$A = \bigcup_{n\geqslant 1} A_n,\ A_n \subset A_{n+1}, \quad \text{или} \quad A = \bigcap_{n\geqslant 1} A_n,\ A_n \supset A_{n+1},$$

то $\int_{A_n} f\,d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_A f\,d\mu$.

В частности, если $A_n \supset A_{n+1}$ *и* $\bigcap\limits_{n\geqslant 1} A_n = \varnothing$, *то* $\int_{A_n} f\,d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Для доказательства достаточно сослаться на непрерывность снизу и сверху конечных мер $\nu_\pm$, где $\nu_+(A) = \int_A f_+\,d\mu$, $\nu_-(A) = \int_A f_-\,d\mu$. $\blacktriangleright$

Если функция f суммируема на множестве X бесконечной меры, то "в основном" интеграл $\int_X f\,d\mu$ "сосредоточен" на некотором множестве конечной меры. Точнее говоря, это означает, что справедливо

Следствие 3. *Если $f \in \mathscr{L}(X)$, то для любого положительного числа ε найдётся такое множество A конечной меры, что $\int_{X\setminus A} |f|\,d\mu < \varepsilon$.*

Убедимся, что в качестве A можно взять множество $X\big(|f| \geqslant \frac{1}{n}\big)$ при достаточно большом n. Для этого заметим, что множества $A_n = X\big(|f| < \frac{1}{n}\big)$ убывают и их пересечение равно $X(f = 0)$. По непрерывности интеграла сверху $\int_{A_n} |f|\,d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{X(f=0)} |f|\,d\mu = 0$. Поэтому $\int_{X\setminus A} |f|\,d\mu = \int_{A_n} |f|\,d\mu < \varepsilon$, если номер n достаточно велик. Остаётся заметить, что $\mu(A) < +\infty$, поскольку

$$\frac{1}{n}\mu\left(X\left(|f| \geqslant \frac{1}{n}\right)\right) \leqslant \int_A |f|\,d\mu \leqslant \int_X |f|\,d\mu < +\infty. \ \blacktriangleright$$

Пример. Если μ — считающая мера, определённая на алгебре всех подмножеств множества $\mathbb{N}$, то всякая последовательность $f = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ есть измеримая функция. Пользуясь счётной аддитивностью интеграла, мы получаем:

$$\int_{\mathbb{N}} |f|\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\{n\}} |f|\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|.$$

Таким образом, суммируемость f означает абсолютную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$, а сумма этого ряда есть интеграл от f по считающей мере. Такие свойства абсолютно сходящихся рядов, как, например, теоремы сравнения, перестановочное свойство и другие, суть не что иное, как частные случаи свойств интеграла от суммируемых функций.

Вообще, если μ — дискретная мера, соответствующая семейству нагрузок $\{\omega_x\}_{x\in X}$, и множество $X_0 = \{x \in X \mid \omega_x > 0\}$ конечно или счётно ($X_0 = \{x_1, x_2, \dots\}$), то при $f \geqslant 0$

$$\int_X f\,d\mu = \sum_{n\geqslant 1} f(x_n)\omega_{x_n},$$

и это равенство верно для любой (возможно, комплекснозначной) суммируемой функции.

5.2. Установим ещё одно важное свойство интеграла.

Теорема (абсолютная непрерывность интеграла). *Пусть $f \in \mathscr{L}(X)$. Тогда для каждого положительного числа ε существует такое число $\delta > 0$, что $\int_e |f|\,d\mu < \varepsilon$, если $\mu(e) < \delta$.*

Доказательство. Так как по определению интеграла

$$\int_X |f|\,d\mu = \sup\left\{\int_X g\,d\mu \,\middle|\, 0 \leqslant g \leqslant |f| \text{ на } X,\ g \text{ — простая функция}\right\},$$

то найдётся такая простая функция g_ε, что

$$0 \leqslant g_\varepsilon \leqslant |f|, \quad \int_X |f|\,d\mu < \int_X g_\varepsilon\,d\mu + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

Ясно, что функция g_ε ограничена. Пусть $g_\varepsilon \leqslant C_\varepsilon$ на X. Положим $\delta = \frac{\varepsilon}{2C_\varepsilon}$ и убедимся, что это число — требуемое. В самом деле, если $\mu(e) < \delta$, то используя (1) и монотонность интеграла по множеству, мы получаем

$$\int_e |f|\,d\mu = \int_e \big(|f| - g_\varepsilon\big)\,d\mu + \int_e g_\varepsilon\,d\mu \leqslant \int_X \big(|f| - g_\varepsilon\big)\,d\mu + \int_e C_\varepsilon\,d\mu < \frac{\varepsilon}{2} + C_\varepsilon\mu(e) < \varepsilon,$$

что и требовалось. ►

Из теоремы непосредственно вытекает

Следствие. *Пусть $\{e_n\}_{n\geqslant 1}$ — последовательность множеств, меры которых стремятся к нулю. Если функция f суммируема, то*

$$\int_{e_n} |f|\,d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

5.3. Определение. Пусть ν — мера, определённая на той же σ-алгебре $\mathfrak{A}$, что и μ. Если существует такая неотрицательная функция ω, что $\nu(A) = \int_A \omega\, d\mu$ для всех A из $\mathfrak{A}$, то ω называется *плотностью* или *весом* ν относительно μ.

Найдём формулу, связывающую интегралы по мерам μ и ν.

Теорема. *Если мера ν определена с помощью плотности ω, то для любой неотрицательной функции f справедливо равенство*

$$\int_X f\, d\nu = \int_X f\omega\, d\mu. \tag{2}$$

Функция f (произвольного знака) суммируема относительно меры ν тогда и только тогда, когда произведение $f\omega$ суммируемо относительно меры μ. В случае суммируемости равенство (2) сохраняется.

Учитывая результат этой теоремы, тот факт, что ω — плотность ν относительно μ, часто обозначают следующим образом: $d\nu = \omega\, d\mu$.

Доказательство. Если f — характеристическая функция, то равенство (2) непосредственно вытекает из определения ν. Следовательно, оно верно и для любых неотрицательных простых функций. Общий случай исчерпывается с помощью аппроксимации простыми функциями (см. п. III.2.2) и теоремы Леви.

Условие суммируемости f можно получить из (2), если заменить там f на $|f|$. Сохранение равенства (2) для суммируемой функции произвольного знака вытекает, очевидно, из равенств $\int_X f_\pm\, d\nu = \int_X f_\pm \omega\, d\mu$. ►

Пример. Пусть ν — дискретная мера (см. п. I.3.1), определённая на σ-алгебре $\mathfrak{A}(X)$ всевозможных подмножеств множества X и соответствующая семейству $\omega = \{\omega(x)\}_{x\in X}$. Ясно, что ω — плотность ν относительно считающей меры.

5.4. Очевидно, две плотности, совпадающие μ-почти везде, порождают одну и ту же меру. Докажем, что верно и обратное, т. е. что подынтегральная функция с точностью до эквивалентности определяется значениями интегралов от неё.

Теорема. *Пусть f и g суммируемые функции. Если*

$$\int_A f\, d\mu = \int_A g\, d\mu \qquad \text{при всех } A \text{ из } \mathfrak{A},$$

то $f(x) = g(x)$ для почти всех x из X.

Доказательство. Пусть $h = f - g$. Очевидно, $\int_A h\, d\mu = 0$ при любом A из $\mathfrak{A}$. В частности, для $A = A_\pm$, где $A_+ = \{x \in X \mid h(x) \geqslant 0\}$ и $A_- = \{x \in X \mid h(x) < 0\}$, мы имеем:

$$\int_{A_+} |h|\, d\mu = \int_{A_+} h\, d\mu = 0, \quad \int_{A_-} |h|\, d\mu = -\int_{A_-} h\, d\mu = 0,$$

Так как множества A_+ и A_- образуют разбиение X, то $\int_X |h|\, d\mu = \int_{A_+} |h|\, d\mu + \int_{A_-} |h|\, d\mu = 0$. Следовательно, $h(x) = 0$ почти везде на X (см. свойство 2, п. 3.2). ►

Следствие. *Пусть функция f суммируема по мере Лебега в пространстве $\mathbb{R}^m$. Если $\int_P f\,d\lambda_m = 0$ для любой ячейки P, то $f(x) = 0$ почти везде.*

Доказательство. По условию меры $\nu_\pm(A) = \int_A f_\pm\,d\lambda_m$ совпадают на полукольце $\mathscr{P}^m$. Поэтому по теореме о единственности продолжения меры (п. I.5.1) они совпадают и на всей σ-алгебре $\mathfrak{A}^m$, т. е. $\int_A f\,d\lambda_m = 0$ при всех $A \in \mathfrak{A}^m$. Остаётся сослаться на теорему.

УПРАЖНЕНИЯ

1) Докажите, что если мера μ σ-конечна, то теорема 5.4 остаётся верной для любых неотрицательных (не обязательно суммируемых) функций f и g.

2) Докажите, что существование положительной суммируемой функции равносильно σ-конечности меры.

§ 6. Интеграл Лебега от функции одной переменной

В этом параграфе символ λ обозначает одномерную меру Лебега. Интеграл $\int_E f\,d\lambda$, где $E \subset \mathbb{R}$ — измеримое по Лебегу множество, называется интегралом Лебега (от функции f по множеству E). Напомним, что суммируемая на множестве E функция может быть определена не везде, а лишь почти везде на E. Мы ограничимся здесь простейшими множествами — промежутками (возможно, бесконечными). При этом тип промежутка не важен, поскольку лебегова мера одноточечного множества равна нулю. Поэтому интегралы по промежуткам (a,b), $[a,b]$, $[a,b)$ и $(a,b]$ совпадают. Для обозначения произвольного промежутка с концами a и b будем использовать символ $\langle a,b\rangle$.

Отметим, что всякая (измеримая) функция, ограниченная на конечном промежутке, суммируема на нём. В частности, функция, непрерывная на замкнутом промежутке, суммируема.

6.1. Прежде всего изучим свойства функции $t \mapsto \int_{(a,t)} f\,d\lambda$, которую естественно связать с каждой суммируемой на $\langle a,b\rangle$ функцией f.

В следующей теореме мы будем рассматривать функцию F, определённую на невырожденном замкнутом промежутке $[a,b]$, содержащемся в расширенной числовой прямой $\overline{\mathbb{R}}$. Подчеркнём, что мы не исключаем случаев $a = -\infty$ или $b = +\infty$. Непрерывность F в точках $\pm\infty$ означает, что $F(\pm\infty) = \lim\limits_{t\to\pm\infty} F(t)$. Иными словами, непрерывность на $[a,b]$ понимается как непрерывность на подмножестве топологического пространства $\overline{\mathbb{R}}$.

Теорема. *Пусть функция f суммируема на промежутке $\langle a,b\rangle \subset \mathbb{R}$, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, и $F(t) = \int_{(a,t)} f\,d\lambda$ при $t \in [a,b]$. Тогда*

1) если $f \geqslant 0$, то функция F не убывает;

2) функция F ограничена и непрерывна на $[a,b]$; в частности, если $b = +\infty$ $(a = -\infty)$, то

$$F(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{(a,+\infty)} f\,d\lambda \qquad (F(t) \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0); \tag{1}$$

3) если f непрерывна в точке $t_0 \in \langle a,b\rangle$, то функция F дифференцируема в t_0 и $F'(t_0) = f(t_0)$.

Утверждение 3), устанавливающее связь между дифференциальным и интегральным исчислениями, по существу было известно ещё Барроу*).

Доказательство. 1) Возрастание функции F вытекает из равенства

$$F(t) - F(s) = \int_{(s,t)} f\,d\lambda \quad \text{при} \quad s \leqslant t,\ s,\, t \in [a,b], \tag{2}$$

правая часть которого неотрицательна, если $f \geqslant 0$.

2) Ограниченность F очевидна, так как

$$|F(t)| \leqslant \int_{(a,t)} |f|\,d\lambda \leqslant \int_{(a,b)} |f|\,d\lambda < +\infty.$$

Равенство (2) показывает, что непрерывность F в точке $s \in \mathbb{R}$ есть следствие абсолютной непрерывности интеграла (см. п. 5.2).

Для доказательства соотношений (1) заметим, что по определению F

$$F(a) = \int_{\varnothing} f\,d\lambda = 0 \quad \text{и} \quad F(b) = \int_{(a,b)} f\,d\lambda.$$

Так как $F(t) = F(b) - \int_{(t,b)} f\,d\lambda$, то при $b = +\infty$ ($a = -\infty$) нам достаточно убедиться, что

$$\int_{(t,+\infty)} |f|\,d\lambda \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \left(\text{соответственно} \quad \int_{(-\infty,t)} |f|\,d\lambda \underset{t\to-\infty}{\longrightarrow} 0\right),$$

а это немедленно следует из непрерывности интеграла сверху.

3) Докажем существование производной справа в точке t_0, $t_0 < b$. При этом будем считать, что функция f определена всюду на $\langle a, b\rangle$ (в противном случае доопределим её на множестве нулевой меры значением $f(t_0)$, что не скажется ни на значении интеграла, ни на непрерывности f в точке t_0).

Разделив при $s = t_0$ равенство (2) на $t - t_0$ и вычтя из получающегося результата равенство $f(t_0) = \frac{1}{t-t_0}\int_{(t_0,t)} f(t_0)\,d\lambda$, мы видим, что

$$\frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} - f(t_0) = \frac{1}{t - t_0}\int_{(t_0,t)} \big(f - f(t_0)\big)\,d\lambda.$$

Поэтому

$$\left|\frac{F(t) - F(t_0)}{t - t_0} - f(t_0)\right| \leqslant \frac{1}{t - t_0}\int_{(t_0,t)} |f - f(t_0)|\,d\lambda \leqslant \sup_{x\in[t_0,t]} |f(x) - f(t_0)|.$$

Правая часть этого неравенства бесконечно мала при $t \to t_0$, поскольку функция f непрерывна в точке t_0. Тем самым доказана дифференцируемость F в t_0 справа вместе с равенством $F'_+(t_0) = f(t_0)$. Дифференцируемость слева и равенство $F'_-(t_0) = f(t_0)$ устанавливаются аналогично. ▶

*) Исаак **Барроу** (Barrow), 1630–1677, — английский математик.

Следствие 1. *Всякая непрерывная на промежутке $\langle a, b\rangle$ функция f имеет первообразную.*

Доказательство. Функция f суммируема на любом замкнутом промежутке, содержащемся в $\langle a, b\rangle$. Предположим, что промежуток $\langle a, b\rangle$ замкнут слева и положим

$$F(t) = \int_{(a,t)} f\,d\lambda \quad \text{при} \quad t \in [a, b\rangle. \tag{3}$$

Из теоремы вытекает, что F — первообразная для f. В случае, если промежуток $\langle a, b\rangle$ замкнут справа, следует считать, что

$$F(t) = -\int_{(t,b)} f\,d\lambda \quad \text{при} \quad t \in \langle a, b].$$

В случае произвольного промежутка зафиксируем точку $c \in (a, b)$ и положим

$$F(t) = \begin{cases} -\int_{(t,c)} f\,d\lambda & \text{при} \quad t \in \langle a, c), \\ \int_{(c,t)} f\,d\lambda & \text{при} \quad t \in [c, b\rangle. \end{cases}$$

Мы предоставляем читателю проверить, что построенная функция действительно является первообразной для f на $\langle a, b\rangle$. ►

Следствие 2 (формула Ньютона*)–Лейбница). *Если Φ — первообразная непрерывной на промежутке $[a, b]$ функции f, то*

$$\int_{[a,b]} f\,d\lambda = \Phi(b) - \Phi(a), \text{ то есть } \int_{[a,b]} \Phi'\,d\lambda = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Действительно, пусть F — первообразная функции f, определяемая равенством (3). Тогда $F(a) = 0$. Так как разность двух первообразных постоянна, то $\Phi(b) - F(b) = \Phi(a) - F(a) = \Phi(a)$. Поэтому

$$\Phi(b) - \Phi(a) = F(b) = \int_{[a,b]} f\,d\lambda. \ ►$$

Разность $\Phi(b) - \Phi(a)$ нередко обозначается символом $\Phi(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$ или в краткой форме — $\Phi\Big|_a^b$ (“двойная подстановка от a до b”), с помощью которого формула Ньютона–Лейбница может быть переписана в виде

$$\int_{[a,b]} f\,d\lambda = \Phi(x)\Big|_{x=a}^{x=b}.$$

*) Исаак **Ньютон** (Newton), 1643–1727, — английский математик и физик.

Формула Ньютона–Лейбница столь важна, что её часто называют основной формулой интегрального исчисления. Читатель, знакомый с другими определениями интеграла, сделает на основании этой формулы вывод, что для непрерывных функций интеграл по отрезку в смысле любого из этих определений и интеграл по мере Лебега совпадают. Учитывая это обстоятельство, мы будем использовать для интеграла по промежутку $\langle a, b\rangle$ от функции f (как непрерывной, так и любой интегрируемой по мере Лебега) традиционное обозначение $\int_a^b f(x)\,dx$, и называя a и b нижним и верхним пределами интегрирования*) (буква x может быть, разумеется, заменена любой другой). С помощью этого обозначения функция F, рассмотренная в теореме, может быть записана как $F(t) = \int_a^t f(x)\,dx$, в связи с чем её часто называют "интегралом с переменным верхним пределом".

Новое обозначение для интеграла Лебега по промежутку $[a, b]$ дополним следующим удобным соглашением: по определению положим

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

При этом формула Ньютона–Лейбница, очевидно, сохраняется: если поменять a и b местами, то обе её части изменят знак.

Замечание. Формула Ньютона–Лейбница показывает, что приращение гладкой функции F равно интегралу от её производной. Как мы увидим в дальнейшем, это равенство справедливо и для функций более широких классов — например, удовлетворяющих условию Липшица (см. п. XI.4.1). Пока мы убедимся, что оно верно, если функция F непрерывна и выпукла на промежутке $[a, b]$.

Как известно, производная выпуклой функции существует всюду за исключением не более чем счётного множества и возрастает (см. п. Д.IV.3). Поэтому нам достаточно доказать формулу Ньютона–Лейбница при условии, что F' сохраняет знак (в противном случае промежуток $[a, b]$ следует разбить на две части, на каждой из которых это условие выполняется). Считая, не умаляя общности, что $F' \geqslant 0$, разобьём $[a, b]$ на равные части длины $h = (b - a)/n$ точками $x_k = a + kh$ ($k = 0, 1, \ldots, n$). Из леммы о трёх хордах (см. п. Д.IV.3) вытекает, что при $k = 0, \ldots, n - 1$

$$F'_+(x_k)\,h \leqslant F(x_{k+1}) - F(x_k) \leqslant F'_-(x_{k+1})\,h.$$

Учитывая возрастание F', эти неравенства можно при $k = 1, \ldots, n-2$ дополнить оценками

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} F'(x)\,dx \leqslant F(x_{k+1}) - F(x_k) \leqslant \int_{x_{k+1}}^{x_{k+2}} F'(x)\,dx.$$

Сложив эти неравенства, мы видим, что

$$\int_a^{x_{n-2}} F'(x)\,dx \leqslant F(x_{n-1}) - F(x_1) \leqslant \int_{x_2}^b F'(x)\,dx,$$

*) Для интеграла по бесконечному промежутку $(a, +\infty)$ мы часто, следуя традиции, пользуемся также обозначением $\int_a^\infty f(x)\,dx$, опуская знак $+$ перед символом ∞.

то есть

$$\int_a^{b-2h} F'(x)\,dx \leqslant F(b-h) - F(a+h) \leqslant \int_{a+2h}^{b} F'(x)\,dx.$$

Переходя к пределу в этом двойном неравенстве, мы получаем требуемую формулу. В частности, оказывается, что F' — суммируемая функция, поскольку предел левой части конечен.

6.2. Остановимся на двух важных приёмах вычисления интеграла.

Предложение I (интегрирование по частям). *Пусть функции u и v непрерывно дифференцируемы на промежутке $[a,b]$. Тогда*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

Эту формулу часто записывают также в виде

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

Доказательство. Проинтегрировав равенство $u'v + uv' = (uv)'$, мы на основании формулы Ньютона–Лейбница получим

$$\int_a^b u'(x)v(x)\,dx + \int_a^b u(x)v'(x)\,dx = \int_a^b \big(u(x)v(x)\big)'\,dx = u(b)v(b) - u(a)v(a). \quad \blacktriangleright$$

Различные обобщения предложения I приведены в пп. 6.4, 10.6, 11.4 и в упр. 9.

Пример 1. Вычислим интегралы

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Ясно, что $W_0 = \frac{\pi}{2}$ и $W_1 = 1$. Считая $n \geqslant 2$, мы после интегрирования по частям получим:

$$\begin{aligned} W_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x\,d\sin x = \sin x \cos^{n-1} x\Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,d\cos^{n-1} x = \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\cos^{n-2} x\,dx = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\cos^{n-2} x - \cos^n x\big)\,dx = \\ &= (n-1)\big(W_{n-2} - W_n\big). \end{aligned}$$

Поэтому интегралы W_n удовлетворяют рекуррентной формуле

$$W_n = \frac{n-1}{n}\,W_{n-2} \quad (n = 2, 3, \dots).$$

Для чётного n её повторное применение даёт нам

$$W_{2k} = \frac{2k-1}{2k} W_{2(k-1)} = \frac{2k-1}{2k}\,\frac{2k-3}{2k-2} W_{2(k-2)} = \ldots = \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1}{(2k)(2k-2)\cdots 2} W_0.$$

Поскольку $W_0 = \frac{\pi}{2}$, отсюда следует, что*) $W_{2k} = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\,\frac{\pi}{2}$. Аналогично доказывается равенство $W_{2k+1} = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$. Итак,

$$W_n = \frac{(n-1)!!}{n!!}\, v_n, \quad \text{где} \quad v_n = \begin{cases} 1 & \text{при нечётном } n, \\ \frac{\pi}{2} & \text{при чётном } n. \end{cases}$$

Этот результат приводит к знаменитой формуле Валлиса**), являющейся исторически первым примером представления числа π в виде предела последовательности рациональных чисел. Действительно, так как $v_n v_{n-1} \equiv \frac{\pi}{2}$, то

$$W_n W_{n-1} = \frac{\pi}{2}\,\frac{(n-1)!!}{n!!}\,\frac{(n-2)!!}{(n-1)!!} = \frac{\pi}{2n}.$$

Из очевидных неравенств $W_n < W_{n-1} < W_{n-2} = \frac{n}{n-1} W_n$ следует, что $W_n \sim W_{n-1}$. Поэтому

$$W_n^2 \sim \frac{\pi}{2n} \tag{4}$$

и, следовательно, $4k\, W_{2k+1}^2 \to \pi$. Это сокращённая запись формулы Валлиса, а в развёрнутом виде она такова:

$$\pi = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{2\cdot 4\cdots(2k)}{3\cdot 5\cdots(2k-1)}\right)^2.$$

Пример 2. Установим знаменитый результат Эйлера:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Излагаемый нами остроумный приём заимствован из [M] (другие способы, основанные на использовании рядов Фурье, см. в X.2.1, X.3.5).

Сначала с помощью интегрирования по частям получим рекуррентную формулу для интегралов $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^n x\, dx$:

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos^{n-1} x\, d\sin x = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\, d\big(x^2 \cos^{n-1} x\big) =$$
$$= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \big(\cos^{n-2} x - \cos^n x\big) dx + \frac{2}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\, d\cos^n x = (n-1)(J_{n-2} - J_n) - \frac{2}{n} W_n$$

*) Напомним, что символ $n!!$ обозначает произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n и одной с ним чётности.

) Джон **Валлис (Wallis), 1616–1703, — английский математик.

(символом W_n обозначен интеграл, рассмотренный в предыдущем примере). Следовательно,

$$\frac{2}{n}W_n = (n-1)J_{n-2} - nJ_n, \qquad \text{то есть} \qquad \frac{2}{n^2} = \frac{n-1}{n}\frac{J_{n-2}}{W_n} - \frac{J_n}{W_n}.$$

Для чётных n последнее равенство принимает вид

$$\frac{1}{2k^2} = \frac{2k-1}{2k}\frac{J_{2(k-1)}}{W_{2k}} - \frac{J_{2k}}{W_{2k}} = \frac{J_{2(k-1)}}{W_{2(k-1)}} - \frac{J_{2k}}{W_{2k}}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{J_0}{W_0} - \frac{J_{2n}}{W_{2n}}.$$

Поскольку $\frac{J_0}{W_0} = \frac{\pi^2}{12}$, нам остаётся проверить, что дробь J_{2n}/W_{2n} бесконечно мала. Действительно,

$$\frac{J_{2n}}{W_{2n}} = \frac{1}{W_{2n}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^{2n}x\,dx < \frac{1}{W_{2n}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Big(\frac{\pi}{2}\sin x\Big)^2\cos^{2n}x\,dx =$$
$$= \frac{\pi^2}{4W_{2n}}(W_{2n} - W_{2(n+1)}) = \frac{\pi^2}{4}\Big(1 - \frac{2n+1}{2n+2}\Big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Предложение II (замена переменной). *Пусть функция f непрерывна на промежутке $\langle a,b\rangle$, а функция φ непрерывно дифференцируема на $[p,q]$. Если $\varphi\big([p,q]\big) \subset \langle a,b\rangle$, то*

$$\int_p^q f\big(\varphi(x)\big)\,\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(y)\,dy.$$

Говорят, что части этого равенства связаны подстановкой $y = \varphi(x)$. Чтобы подчеркнуть это, левую часть равенства иногда записывают в виде $\int_p^q f\big(\varphi(x)\big)\,d\varphi(x)$. Отметим, что мы не требуем от φ взаимной однозначности или монотонности, так что $\varphi(p)$ может быть как меньше, так и больше (или равно) $\varphi(q)$. В дальнейшем (см. § VI.2) мы убедимся, что если $\varphi'(x) \neq 0$ на (p,q) (и, следовательно, φ строго монотонна), то формула замены переменной верна не только для непрерывной, но и для любой суммируемой функции f.

Доказательство. Пусть F — первообразная функции f на $\langle a,b\rangle$. Положим $H = F(\varphi)$. Ясно, что $H' = F'(\varphi)\,\varphi' = f(\varphi)\,\varphi'$. Поэтому H — первообразная функции $f(\varphi)\,\varphi'$ на $[p,q]$. Дважды используя формулу Ньютона–Лейбница, мы получаем

$$\int_p^q f\big(\varphi(x)\big)\varphi'(x)\,dx = H(q) - H(p) = F\big(\varphi(q)\big) - F\big(\varphi(p)\big) = \int_{\varphi(p)}^{\varphi(q)} f(y)\,dy. \ \blacktriangleright$$

Формула замены переменной чрезвычайно важна для вычисления и исследования интегралов. Чтобы расширить границы её применения, мы обобщим её сейчас на случай, когда функция φ задана не на замкнутом, а лишь на открытом (возможно, бесконечном) промежутке. При этом дополнительно предположим, что она монотонна.

Предложение III. *Пусть функция f неотрицательна и непрерывна на $\langle a,b\rangle$, а функция φ непрерывно дифференцируема и монотонна на (p,q). Если $\varphi\big((p,q)\big) \subset \subset \langle a,b\rangle$, то*

$$\int_p^q f\big(\varphi(x)\big)\,\varphi'(x)\,dx = \int_A^B f(y)\,dy,$$

где $A = \lim\limits_{x\to p+0}\varphi(x)$, $B = \lim\limits_{x\to q-0}\varphi(x)$.

Эта формула справедлива и для любой функции f, непрерывной и суммируемой на (a,b).

Доказательство. Пусть $a < s < t < b$. Тогда по предложению II

$$\int_s^t f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(s)}^{\varphi(t)} f(y)\,dy.$$

Остаётся в этом равенстве перейти к пределу при $s \to a,\ t \to b$.

Если f — непрерывная и суммируемая функция произвольного знака, то надо применить доказанное утверждение к неотрицательным функциям $f_+ = \max\{f,0\}$ и $f_- = \max\{-f,0\}$. ►

Следствие. Если непрерывная функция f суммируема на симметричном промежутке $(-a,a)$, где $0 < a \leqslant +\infty$, то $\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_0^a \big(f(x)+f(-x)\big)\,dx$. В частности, если f чётна (нечётна), то $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ (соответственно $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$).

Для доказательства достаточно записать интеграл $\int_{-a}^a f(x)\,dx$ в виде $\int_{-a}^0 f(y)\,dy + \int_0^a f(x)\,dx$ и в первом слагаемом сделать замену переменной $y = -x$. ►

6.3. Приведём некоторые важные примеры суммируемых функций. Первые три из них играют роль эталонов, сравнение с которыми часто позволяет установить суммируемость многих других функций.

Пример 1. Пусть $a > 0$, $f(x) = e^{-ax}$ при $x \geqslant 0$. Очевидно, первообразная $F(x) = -\frac{1}{a}\,e^{-ax}$ стремится к нулю при $x \to +\infty$. Следовательно,

$$\int_0^\infty e^{-ax}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t e^{-ax}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\big(F(t)-F(0)\big) = -F(0) = \frac{1}{a} < +\infty.$$

Итак, функция e^{-ax} суммируема на полуоси $[0,+\infty)$.

Пример 2. Пусть $f(x) = x^{-p}$ при $1 \leqslant x < +\infty$. Первообразная этой функции равна $\frac{1}{1-p}\,x^{1-p}$ при $p \neq 1$ и $\ln x$ при $p = 1$. Она имеет бесконечный предел при $x \to +\infty$, если $p \leqslant 1$. Поэтому для таких p функция f не суммируема. Если же $p > 1$, то

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\frac{t^{1-p}-1}{1-p} = \frac{1}{p-1} < +\infty.$$

Таким образом, функция x^{-p} суммируема на промежутке $[1,+\infty)$ лишь при $p > 1$.

Пример 3. Пусть $f(x) = x^{-p}$ при $0 < x \leqslant 1$. Рассуждая так же, как в предыдущем примере, приходим к выводу, что на промежутке $(0, 1]$ функция x^{-p} суммируема лишь при $p < 1$.

Как легко убедиться, аналогичный результат справедлив для интегралов $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}$, $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p}$, где (a, b) — произвольный конечный промежуток.

Из примеров 2 и 3 следует, что функция x^{-p} не суммируема на $(0, +\infty)$ ни при каком p.

Пример 4. Рассмотрим введённую Эйлером*) *функцию бета* (эйлеров интеграл первого рода):

$$B(s, t) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}\, dx.$$

Как следует из результата предыдущего примера, $B(s, t) < +\infty$ лишь при $s,\ t > 0$. Сделав замену переменной $x = \frac{y}{1+y}$, функцию бета можно представить в виде

$$B(s, t) = \int_0^\infty \frac{y^{s-1}}{(1+y)^{s+t}}\, dy.$$

Как мы увидим в дальнейшем, эта функция бывает полезна при вычислении многих интегралов.

Рассмотрим теперь функцию гамма, играющую важную роль в различных областях математики.

Пример 5. *Функция гамма* (эйлеров интеграл второго рода) определяется равенством

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1}\, e^{-x}\, dx.$$

Поскольку подынтегральная функция при $x \geqslant 1$ не превосходит $Ce^{-x/2}$, интеграл по промежутку $[1, +\infty)$ конечен. Поэтому интеграл $\Gamma(t)$ конечен одновременно с интегралом $\int_0^1 x^{t-1}\, e^{-x}\, dx$ и, следовательно, одновременно с интегралом $\int_0^1 x^{t-1}\, dx$, т. е. при $t > 0$. Таким образом, функция Γ корректно определена на положительной полуоси. Отметим её простейшие свойства (подробнее она будет изучена нами в § VII.2).

Функция Γ удовлетворяет функциональному уравнению:

$$\Gamma(t+1) = t\,\Gamma(t) \quad \text{при} \quad t > 0.$$

Действительно, пользуясь замечанием к предложению I, мы получаем

$$\Gamma(t+1) = \int_0^\infty x^t\, e^{-x}\, dx = -\int_0^\infty x^t\, de^{-x} = t\int_0^\infty x^{t-1} e^{-x}\, dx = t\,\Gamma(t)$$

(мы воспользовались тем, что предел $L = \lim\limits_{x\to+\infty} x^t\, e^{-x}$, очевидно, равен нулю).

*) Леонард **Эйлер** (Euler), 1707–1783, — швейцарский математик.

Функциональное уравнение обнаруживает тесную связь между функцией Γ и факториалом:

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad \text{для} \quad n \in \mathbb{N}$$

(напомним, что по определению $0! = 1$).

Это равенство проверяется с помощью индукции. Её база $\Gamma\ (1) = 1$ очевидна, а индукционный переход осуществляется с помощью функционального уравнения:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n!.$$

Подобным образом вычисление $\Gamma(n+a)$, где $0 < a < 1$, сводится к вычислению $\Gamma(a)$. Выразить $\Gamma(a)$ через известные константы удаётся лишь при $a = \frac{1}{2}$, но это не простая задача. Для её решения нам потребуется один "неберущийся интеграл" (к различным способам его вычисления мы ещё не раз обратимся в дальнейшем).

Теорема (интеграл Эйлера–Пуассона*)). $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$

Доказательство. Так как $e^u \geqslant 1 + u$, то $1 - x^2 \leqslant e^{-x^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2}$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Поэтому для любого $k \in \mathbb{N}$

$$(1-x^2)^k \leqslant e^{-kx^2} \quad \text{при} \quad |x| \leqslant 1 \qquad \text{и} \qquad e^{-kx^2} \leqslant \frac{1}{(1+x^2)^k} \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Проинтегрировав эти неравенства, получим

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^k\,dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} e^{-kx^2} dx \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^k}.$$

Сделаем в интеграле слева замену переменной $x = \sin t$, в среднем — $x = \frac{t}{\sqrt{k}}$, а в интеграле справа — $x = \operatorname{tg} t$. Это приводит к двусторонней оценке

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k+1} t\,dt \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt \leqslant \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2k-2} t\,dt.$$

Используя обозначение, введённое в примере 1 п. 6.2, её можно переписать в виде

$$2\sqrt{k}\,W_{2k+1} \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt \leqslant 2\sqrt{k}\,W_{2k-2}.$$

Осталось заметить, что в силу соотношения (4) величины, стоящие в левой и правой частях этого неравенства, стремятся при $k \to \infty$ к общему пределу $\sqrt{\pi}$. ►

Следствие 1. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Сделав в интеграле $\int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x}\,dx = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ замену переменной $x = y^2$, мы получим

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \sqrt{\pi}. \ ►$$

*) Симеон Дени **Пуассон** (Poisson), 1781–1840, — французский математик.

Следствие 2. $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$ для любого $n\in\mathbb{N}$.

Доказательство этого равенства почти дословно повторяет вычисление значений функции Γ в целых точках. Мы оставляем его читателю.

6.4. Оставшаяся часть этого параграфа посвящена так называемым несобственным интегралам. Мы коснёмся здесь этого понятия главным образом для того, чтобы иметь возможность сформулировать условия совпадения несобственного интеграла по промежутку с интегралом Лебега. Дополнительные сведения о несобственных интегралах и некоторые важные примеры читатель найдёт в § VII.4. Всюду далее рассматриваемые функции могут быть как вещественными, так и комплексными.

Определение. Пусть функция f измерима на промежутке $\langle a,b\rangle$ $(-\infty\leqslant a<b\leqslant\leqslant+\infty)$. Будем называть её *допустимой слева* на нём, если она суммируема на каждом интервале (a,t), где $a<t<b$. Если существует предел $\lim\limits_{t\to b}\int_a^t f(x)\,dx$, то он называется *несобственным интегралом* от функции f по промежутку $\langle a,b\rangle$ и обозначается символом $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$. Если несобственный интеграл конечен, то он называется *сходящимся*. В остальных случаях (т. е. если предел не существует или бесконечен) мы говорим, что несобственный интеграл *расходится*.

Аналогично определяется функция, допустимая справа, и несобственный интеграл от неё. В дальнейшем мы ограничимся изучением несобственных интегралов от функций, допустимых слева, предоставляя читателю перенести полученные результаты на случай функций, допустимых справа.

Ясно, что всякая функция, суммируемая на промежутке, допустима слева (так же, как и справа), а из теоремы 6.1 следует, что несобственный интеграл от неё сходится и совпадает с интегралом Лебега. Учитывая это обстоятельство, мы вне этого пункта используем для несобственных интегралов, как правило, обычное обозначение, а символ $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$ применяем лишь в исключительных случаях. Точки, в окрестностях которых функция не суммируема, называют иногда её особыми точками.

Для несобственных интегралов остаётся справедливым предложение III п. 6.2 о замене переменной (требование суммируемости подынтегральной функции теперь следует заменить сходимостью несобственного интеграла). Сохраняется также и возможность интегрирования по частям при условии, что сходится хотя бы один из рассматриваемых интегралов и предел $L=\lim\limits_{x\to b}u(x)v(x)$ существует и конечен (см. упр. 9).

Отметим, что для допустимой слева на промежутке $\langle a,b\rangle$ функции f сходимость интеграла $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$ равносильна сходимости интеграла $\int_c^{\to b} f(x)\,dx$, где c — произвольная точка из (a,b). Очевидно также, что для неотрицательной допустимой слева функции несобственный интеграл всегда существует и совпадает с интегралом Лебега. Однако для знакопеременных функций это уже не так.

Пример. Убедимся в сходимости несобственного *интеграла Френеля**) $\int_0^\infty e^{ix^2}\,dx$ (он будет вычислен в п. VII.4.8). Для этого воспользуемся интегрированием по частям — приёмом, который не только лежит в основе устанавливаемых далее признаков

*) Огюстен Жан **Френель** (Fresnel), 1788–1827, — французский физик и математик.

сходимости несобственных интегралов, но и может быть успешно использован (как в рассматриваемом случае) вне рамок этих признаков. Ясно, что

$$\int_1^t e^{ix^2}\,dx = \int_1^t \frac{1}{2ix}\,d\Big(e^{ix^2}\Big) = \frac{1}{2ix}\,e^{ix^2}\Big|_1^t + \frac{1}{2i}\int_1^t \frac{1}{x^2}\,e^{ix^2}\,dx.$$

Двойная подстановка имеет конечный предел при $t \to +\infty$, а функция $\frac{1}{x^2}\,e^{ix^2}$ суммируема на $[1, +\infty)$, что и доказывает сходимость интеграла Френеля.

В то же время, очевидно, функция e^{ix^2} не суммируема на $(0, +\infty)$. Более того, не суммируемы её вещественная и мнимая части. Например,

$$\int_0^N |\cos x^2|\,dx = \int_0^{N^2} \frac{|\cos y|}{2\sqrt{y}}\,dy > \int_0^{N^2} \frac{\cos^2 y}{2N}\,dy = \frac{1}{4N}\int_0^{N^2} (1+\cos 2y)\,dy =$$
$$= \frac{N}{4} + o(1) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Формулу интегрирования по частям можно распространить и на несобственные интегралы. Мы ограничимся здесь простейшим вариантом.

Предложение. *Если непрерывно дифференцируемые на промежутке* $[a, b)$ $(-\infty < a < b \leqslant +\infty)$ *функции* u, v *таковы, что существует конечный предел* $L = \lim\limits_{x\to b} u(x)\,v(x)$ *и сходится интеграл* $\int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$, *то сходится и интеграл* $\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx$ *и справедливо равенство*

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = L - u(a)\,v(a) - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx.$$

По аналогии с формулой интегрирования по частям, полученной в предложении I, его записывают также в виде

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx.$$

Для доказательства достаточно применить формулу интегрирования по частям к промежутку $[a, t]$, а затем в полученном равенстве перейти к пределу при $t \to b$. ▶

Другие обобщения предложения I, позволяющие рассматривать и негладкие функции, приведены в пп. 10.6, 11.4.

Аналогичным образом на несобственные интегралы обобщается и предложение III. Мы рекомендуем читателю сформулировать это обобщение самостоятельно.

6.5. Связь между суммируемостью функции и существованием несобственного интеграла можно установить с помощью понятия абсолютной сходимости несобственного интеграла.

Определение. Говорят, что несобственный интеграл от (измеримой) функции f *абсолютно сходится*, если сходится несобственный интеграл от функции $|f|$.

Несобственный интеграл, который сходится, но не сходится абсолютно, называют иногда *условно сходящимся*.

Теорема. *Несобственный интеграл* $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$ *абсолютно сходится тогда и только тогда, когда функция* f *суммируема на* (a,b).

Таким образом, абсолютно сходящийся несобственный интеграл есть не что иное, как интеграл от суммируемой функции.

Доказательство. Мы уже отмечали, что из суммируемости функции вытекает сходимость несобственного интеграла. Так как вместе с f суммируема и функция $|f|$, то суммируемость f обеспечивает и абсолютную сходимость интеграла.

Если же интеграл $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$ абсолютно сходится, то ввиду непрерывности снизу интеграла от неотрицательной функции мы получаем суммируемость f:

$$\int_a^b |f(x)|\,dx = \lim_{t\to b}\int_a^t |f(x)|\,dx = \int_a^{\to b} |f(x)|\,dx < +\infty. \quad \blacktriangleright$$

Для вещественной функции f условная сходимость (т. е. сходимость, но не абсолютная сходимость) несобственного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ влечёт, что обе функции $f_+ = \max\{f,0\}$ и $f_- = \max\{-f,0\}$ не "малы" (точнее, не суммируемы):

$$\int_a^b f_+(x)\,dx = \int_a^b f_-(x)\,dx = +\infty.$$

Действительно, эти интегралы не могут быть конечными одновременно, поскольку по последней теореме функция f не суммируема, а конечность лишь одного из них привела бы к расходимости несобственного интеграла. Вместе с тем, интеграл

$$\int_a^t f(x)\,dx = \int_a^t f_+(x)\,dx - \int_a^t f_-(x)\,dx$$

имеет конечный предел при $t \to b$, и, следовательно, неограниченно растущие с ростом t интегралы, стоящие в правой части последнего равенства, должны почти взаимно уничтожаться. Таким образом, условная сходимость несобственного интеграла возможна лишь в том случае, когда функция f достаточно сильно колеблется в окрестности точки b, принимая как положительные, так и отрицательные значения (это хорошо видно на примере вещественной или мнимой части интеграла Френеля).

6.6. Важно иметь легко проверяемые условия, обеспечивающие сходимость несобственного интеграла даже в случае, когда абсолютной сходимости нет. Мы рассмотрим два таких утверждения (признаки сходимости несобственного интеграла). Читатель, знакомый с теорией числовых рядов, увидит, что это аналоги признаков Дирихле*) и Абеля**), позволяющих устанавливать сходимость числового ряда даже при отсутствии абсолютной сходимости. Поэтому соответствующие утверждения о сходимости несобственных интегралов также связывают с именами этих математиков. Мы ограничимся здесь упрощёнными формулировками, некоторые предположения которых излишни. Менее стеснительные условия будут сформулированы нами позже — см. п. VII.4.6.

*) Петер Густав Лежён **Дирихле** (Dirichlet), 1805–1859, — немецкий математик.

) Нильс Хенрик **Абель (Abel), 1802–1829, — норвежский математик.

Теорема (признак Дирихле сходимости несобственного интеграла). *Пусть* $f \in C\big([a,b)\big)$, $g \in C^1\big([a,b)\big)$, *где* $-\infty < a < b \leqslant +\infty$. *Если первообразная* F *функции* f *ограничена на* $[a,b)$, *а функция* g *убывает и* $\lim\limits_{x\to b} g(x) = 0$, *то несобственный интеграл* $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$ *сходится.*

В этой теореме функция f может быть как вещественной, так и комплексной (функция g, разумеется, вещественная).

Доказательство. Проинтегрировав по частям на промежутке $[a,t]$ $(a < t < b)$, мы получим:

$$\int_a^t f(x)g(x)\,dx = \int_a^t g(x)\,dF(x) = g(t)F(t) - g(a)F(a) - \int_a^t F(x)g'(x)\,dx. \tag{5}$$

По условию $g(t)F(t) \underset{t\to b}{\longrightarrow} 0$. Кроме того, функция Fg' суммируема на (a,b), так как

$$\int_a^b |F(x)\,g'(x)|\,dx \leqslant \sup_{[a,b)} |F| \int_a^b \big(-g'(x)\big)\,dx = g(a) \sup_{[a,b)} |F| < +\infty.$$

Поэтому правая часть в (5) имеет конечный предел (при $t \to b$) и справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = -g(a)F(a) - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx. \ \blacktriangleright \tag{5'}$$

Интересно отметить, что равенство (5′) связывает несобственный интеграл в левой части (вообще говоря, не сходящийся абсолютно) с абсолютно сходящимся интегралом в правой части.

Доказанный признак часто применяется при исследовании интегралов вида

$$\int_a^\infty g(x)\,e^{i\omega x}\,dx \qquad (\omega \in \mathbb{R}).$$

Если функция g непрерывно дифференцируема на $[a,+\infty)$ и убывает к нулю на бесконечности, то при $\omega \neq 0$ согласно признаку Дирихле этот интеграл сходится. При этом не исключено, что функция g не суммируема.

Пример 1. Пусть $p > 0$. Несобственный интеграл

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,e^{ix}\,dx$$

сходится, причём сходимость абсолютная лишь при $p > 1$.

Суммируемость при $p > 1$ очевидна. Убедимся, что при $p \leqslant 1$ и вещественная, и мнимая части подынтегральной функции не суммируемы. Рассмотрим, например, мнимую часть. Так как $\frac{1}{x^p} \geqslant \frac{1}{x}$ при $x \geqslant 1$, достаточно доказать, что $\int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x}\,dx = +\infty$. Остановимся подробнее на интегралах $I_n = \int_0^{\pi n} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$, которые будут нам полезны

в дальнейшем, и установим не только их неограниченный рост, но и скорость этого роста. Очевидно,

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x+\pi(k-1)}\,dx.$$

Поскольку $\pi(k-1) \leqslant x+\pi(k-1) \leqslant \pi k$, значение k-го интеграла заключено между $\frac{2}{\pi k}$ и $\frac{2}{\pi(k-1)}$. Учитывая, что первый интеграл меньше π, мы получаем

$$\frac{2}{\pi}\Big(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}\Big) < I_n < \pi + \frac{2}{\pi}\Big(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}\Big).$$

Так как

$$\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n} < \int_1^n \frac{dx}{x} < 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1},$$

то из двусторонней оценки для I_n следует, что

$$\frac{2}{\pi}\ln n < I_n < \pi + \frac{2}{\pi}(1+\ln n) < 4 + \frac{2}{\pi}\ln n.$$

В частности, $I_n \sim \frac{2}{\pi}\ln n$ при $n \to \infty$.

Пример 2. Пусть f — выпуклая на $(0,+\infty)$ и суммируемая вблизи нуля функция, причём $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Тогда интеграл $C(y) = \int_0^\infty f(x)\cos yx\,dx$ сходится и неотрицателен при любом $y > 0$.

Достаточно убедиться в этом при $y = 1$ (иначе сделаем замену переменной $x \mapsto yx$). Произведение $f(x)\cos x$ суммируемо вблизи нуля, так как такова функция f. Несобственный интеграл по промежутку $[1,+\infty)$ сходится по признаку Дирихле, поскольку функция f убывает на $(0,+\infty)$. Действительно, в силу выпуклости при $t \geqslant 0$ разность $f(x)-f(x+t)$ убывает с ростом x: $f(x)-f(x+t) \geqslant f(x')-f(x'+t)$ для любого $x' \geqslant x$. Отсюда предельным переходом при $t \to +\infty$ получаем, что $f(x) \geqslant f(x')$.

Проверяя неравенство $C(1) \geqslant 0$, докажем, что $\int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} f(x)\cos x\,dx \geqslant 0$ при $k = 0, 1, \ldots$. Замена переменной $x \mapsto x+2\pi k$ позволяет ограничиться случаем $k = 0$. Тогда мы имеем:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(f(x)-f(\pi-x)-f(\pi+x)+f(2\pi-x)\big)\,\cos x\,dx.$$

Осталось заметить, что $f(x)-f(\pi-x)-f(\pi+x)+f(2\pi-x) \geqslant 0$ (это частный случай уже отмеченного неравенства с $x' = \pi - x$ и $t = \pi$).

Из признака Дирихле легко вытекает ещё один признак сходимости несобственных интегралов, показывающий, что введение ограниченного монотонного сомножителя в сходящемся несобственном интеграле сохраняет его сходимость.

Следствие (признак Абеля). *Пусть $f \in C\big([a,b)\big)$, $g \in C^1\big([a,b)\big)$. Если несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ сходится, а функция g монотонна и ограничена на $[a,b)$, то интеграл $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$ также сходится.*

Доказательство. Пусть $L = \lim\limits_{x\to b} g(x)$. Не умаляя общности будем считать функцию g убывающей. Ввиду сходимости несобственного интеграла первообразная $F(t) = \int_a^t f(x)\,dx$ $(a \leqslant t < b)$ ограничена. Очевидно,

$$f(x)g(x) = f(x)(g(x) - L) + Lf(x).$$

Каждый из несобственных интегралов $\int_a^b f(x)(g(x) - L)\,dx$, $\int_a^b L\,f(x)\,dx$ сходится (первый — по признаку Дирихле). Поэтому сходится и интеграл $\int_a^b f(x)g(x)\,dx$. ▶

УПРАЖНЕНИЯ

1) Вычислите интеграл $\int_0^\infty e^{-a(x^2+1/x^2)}dx$ $(a > 0)$.

2) Докажите, что предложения I и III п. 6.2 остаются справедливыми и для несобственных интегралов.

3) При каких a, b, $c \in \mathbb{R}_+$ функция $\frac{\sin^a(x^b)}{x^c}$ суммируема на интервале $(0,1)$?

4) Для каких вещественных a конечен интеграл $\int_1^\infty x^a e^{-x^3\sin^2 x}\,dx$?

5) Пусть функция f ограничена и убывает к нулю на промежутке $(a, +\infty)$. Докажите, что суммируемость на нём произведения $f(x)\sin x$ влечёт суммируемость f. На двумерный случай этот результат не переносится (см. упр. 3 следующего параграфа).

6) Пусть $p > 1$, f — суммируемая на $\mathbb{R}$ неотрицательная функция, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ — такая двусторонняя последовательность вещественных чисел, что $\inf\limits_n(x_{n+1} - x_n) > 0$. Докажите, что тогда

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{x_{n+1}}^\infty \frac{f(x)}{(x - x_n)^p}\,dx < +\infty.$$

7) Вычислите найденный Эйлером интеграл $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx$, сделав в интеграле $2I = \int_0^\pi \ln\sin x\,dx$ замену переменной $x = 2y$.

8) Вычислите ещё раз интеграл Эйлера–Пуассона, заменив на промежутке $[0, \sqrt{n}\,]$ функцию e^{-x^2} многочленом $\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n$. Чтобы оценить погрешность такой замены, докажите неравенство $0 \leqslant e^{-y} - \left(1 - \frac{y}{n}\right)^n \leqslant \frac{3}{n}\,y^2\,e^{-y}$ при $0 \leqslant y \leqslant n$.

Сведя интеграл от $\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n$ к W_{2n+1}, воспользуйтесь соотношением (4).

9) Пусть u, $v \in C^1\big([a,b)\big)$. Докажите, что если из трёх пределов $\lim\limits_{t\to b}\int_a^t u(x)v'(x)dx$, $\lim\limits_{t\to b}\int_a^t u'(x)v(x)dx$, $\lim\limits_{t\to b} u(t)v(t)$ два существуют и конечны, то существует и третий и справедлива формула интегрирования по частям.

10) При каких $a \in \mathbb{Z}$, b, $c \in \mathbb{R}$ интеграл $\int_0^1 \frac{\sin^a(x^b)}{x^c}\,dx$ сходится абсолютно? условно?

11) На примере функции $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ убедитесь, что сходимость на промежутке $[0, +\infty)$ несобственного интеграла от функции, стремящейся к нулю на бесконечности, не достаточна для сходимости интеграла от f^2. Этот же пример показывает, что в признаке Абеля нельзя отказаться от монотонности функции g (даже если интеграл от неё сходится).

12) Проверьте, что интеграл $\int_0^\infty \frac{1}{x^p}\sin x^3 dx$ сходится не только для положительных p. Можно ли заменить $\sin x^3$ на $\sin^3 x$?

13) Докажите сходимость интеграла $\int_a^\infty e^{i\,P(x)}\,dx$, если P — вещественный многочлен, степень которого больше 1.

14) Вытекает ли из сходимости несобственного интеграла $\int_1^\infty f(x)\,dx$ суммируемость функции $\frac{f(x)}{x^3}$?

15) Вычислите интеграл Фруллани*) $\int_0^\infty \big(f(ax)-f(bx)\big)\frac{dx}{x}$, где a, $b>0$, а непрерывная на $[0,+\infty)$ функция f удовлетворяет одному из условий

а) несобственный интеграл $\int_1^\infty f(x)\frac{dx}{x}$ сходится;

б) $f(x+T)=f(x)$ при некотором $T>0$ и произвольном $x\geqslant 0$;

в) существует конечный предел $L=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

16) Вычислите интеграл $\int_0^\infty\big(c_1\cos\frac{x}{a_1}+\ldots+c_n\cos\frac{x}{a_n}\big)\frac{dx}{x}$ при условии $c_1+\ldots+c_n=0$.

17) Докажите, что при $y>0$ интеграл $\int_0^\infty f(x)\sin yx\,dx$ неотрицателен, если убывающая к нулю на $(0,+\infty)$ функция f такова, что произведение $xf(x)$ суммируемо вблизи нуля.

18) Пусть φ — непрерывная 2π-периодическая функция. Докажите, что интеграл $\int_\pi^\infty \frac{\varphi(x)\,dx}{\ln x+\cos x}$ сходится лишь в том случае, когда φ — нечётная функция.

19) Докажите, что первый из интегралов $\int_\pi^\infty \frac{\sin x\,dx}{\ln x+\cos x+\sin x}$ и $\int_\pi^\infty \frac{\sin x\,dx}{\ln x+\cos x^2}$ расходится, а второй — сходится.

20) Для любого $\varepsilon>0$ и любой измеримой неотрицательной на $(0,+\infty)$ функции f справедливо неравенство

$$\int_1^2\sum_{n=1}^\infty f(n\varepsilon x)\,dx\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\infty f(x)\,dx.$$

21) Пусть $x_n>0$, $x_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$, $f(t)=\operatorname{card}\{n\in\mathbb{N}\,|\,x_n>t\}$. Докажите, что $\int_0^\infty f(t)\,dt=\sum\limits_{n=1}^\infty x_n$.

22) Докажите, что $\left|\int_E e^{ix}\,dx\right|\leqslant 2\sin\frac{\lambda_1(E)}{2}$ для любого измеримого множества $E\subset\subset[0,2\pi]$.

§ 7. Кратный интеграл Лебега

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые свойства интеграла по мере Лебега в многомерном пространстве. Как и в предыдущем параграфе, интеграл по мере Лебега будем называть интегралом Лебега и обозначать по аналогии с одномерным случаем символом $\int_E f(x)\,dx$. Саму меру Лебега будем обозначать буквой λ, опуская, как правило, указание на размерность.

Заметим, что интегралы по плоской, трёхмерной и m-мерной мерам Лебега называются обычно двойными, тройными и m-кратными и часто обозначаются соответственно символами $\iint$, $\iiint$ и $\int\ldots\int$, весьма удобными в конкретных ситуациях.

7.1. Следующая теорема обобщает результаты примеров 2 и 3 п. 6.3. Рассматриваемая в ней степень нормы во многих случаях может служить эталоном, с которым полезно сравнивать функции при исследовании их суммируемости.

Теорема. *Пусть B — шар в $\mathbb{R}^m$ с центром в точке a и радиусом r. Для $p>0$ положим $f(x)=\|x-a\|^{-p}$ при $x\in\mathbb{R}^m$. Тогда*

1) *суммируемость функции f на B равносильна неравенству $p<m$;*

2) *суммируемость функции f на $\mathbb{R}^m\setminus B$ равносильна неравенству $p>m$.*

*) Джулиано **Фруллани** (Frullani), 1795–1834, — итальянский математик.

Доказательство. Напомним прежде всего, что объём (m-мерная мера Лебега) m-мерного шара радиуса R равен $\alpha_m R^m$, где α_m — объём шара единичного радиуса (см. следствие 2 п. II.5.2). Поэтому объём сферического слоя $E(R) = \bigl\{x \in \mathbb{R}^m \mid \frac{R}{2} \leqslant \leqslant \|x-a\| < R\bigr\}$, очевидно, таков

$$\lambda\bigl(E(R)\bigr) = \alpha_m R^m - \alpha_m \left(\frac{R}{2}\right)^m = \alpha_m(2^m-1)\left(\frac{R}{2}\right)^m = \beta_m R^m,$$

где $\beta_m = \alpha_m(1-2^{-m})$.

Разобьём теперь шар B на сферические слои $E_k = E(\frac{r}{2^k})$: $B = \{0\} \vee \bigvee\limits_{k\geqslant 1} E_k$. Тогда

$$\lambda(E_k) = \beta_m \left(\frac{r}{2^k}\right)^m \qquad \text{при всех} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Кроме того,

$$\left(\frac{2^{k-1}}{r}\right)^p \leqslant f(x) \leqslant \left(\frac{2^k}{r}\right)^p \quad \text{при } x \in E_k.$$

Интегрируя это неравенство, мы видим, что

$$\left(\frac{2^{k-1}}{r}\right)^p \cdot \beta_m\left(\frac{r}{2^k}\right)^m \leqslant \int_{E_k} f(x)\,dx \leqslant \left(\frac{2^k}{r}\right)^p \cdot \beta_m\left(\frac{r}{2^k}\right)^m,$$

то есть

$$A\,2^{k(p-m)} \leqslant \int_{E_k} f(x)\,dx \leqslant B\,2^{k(p-m)},$$

где A, B — положительные коэффициенты, не зависящие от k. Из полученной двусторонней оценки интегралов $\int_{E_k} f(x)\,dx$ следует, что ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(p-m)} \qquad \text{и} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)\,dx$$

сходятся или расходятся одновременно. Так как первый ряд, очевидно, имеет конечную сумму лишь при $p < m$, а сумма второго ряда в силу счётной аддитивности интеграла равна $\int_B f(x)\,dx$, то первое утверждение теоремы доказано.

Доказательство второго утверждения теоремы совершенно аналогично (следует рассмотреть сферические слои $E(2^k r)$), и мы оставляем его читателю. ►

7.2. Теорема (о среднем). *Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$ — связное множество конечной меры. Если функция f непрерывна и суммируема (в частности, если она непрерывна и ограничена) на E, то существует такая точка $c \in E$, что*

$$\int_E f(x)\,dx = f(c)\,\lambda(E).$$

Доказательство. Будем считать, что $\lambda(E) \neq 0$, так как в противном случае точкой c может служить любая точка множества E. Пусть $A = \inf\limits_E f$ и $B = \sup\limits_E f$ ($A, B \in \overline{\mathbb{R}}$). Проинтегрировав неравенство $A \leqslant f \leqslant B$ и разделив результат на $\lambda(E)$, мы получим

$$A \leqslant C = \frac{1}{\lambda(E)} \int_E f(x)\,dx \leqslant B. \tag{1}$$

Нам остаётся доказать, что число C есть значение функции f. Если $A < C < B$, то это так, поскольку по теореме Больцано–Коши множество значений f содержит

интервал (A, B). Если же $C = A$ (или $C = B$), то функция f почти всюду на E равна A (соответственно B). В самом деле, при $C = A$ из неравенства (1) следует, что $\int_E (f(x) - A)\,dx = 0$. Ввиду неотрицательности подынтегральной функции это, в свою очередь, влечёт, что $f(x) - A = 0$ почти всюду на E (см. свойство 2 п. 3.2). Таким образом, точкой c может служить почти каждая точка из E. ►

Замечание. Как легко убедиться, при доказательстве теоремы о среднем мы не пользовались никакими свойствами меры Лебега, кроме конечности $\lambda(E)$. Поэтому теорема о среднем остаётся справедливой для любой борелевской меры μ такой, что $\mu(E) < +\infty$. Множество E при этом можно считать связным подмножеством произвольного хаусдорфова топологического пространства.

7.3. *Интеграл как предел интегральных сумм.*

Определение. Пусть $\tau = \{e_k\}_{k=1}^N$ — разбиение множества $E \subset \mathbb{R}^m$ на измеримые части. Величина $r(\tau) = \max\limits_{1 \leqslant k \leqslant N} \operatorname{diam}(e_k)$ называется *рангом разбиения* τ.

Пусть в каждом множестве $E \cap \overline{e_k}$ произвольным образом зафиксировано по точке ξ_k. Семейство $\xi \equiv \{\xi_k\}_{k=1}^N$ назовём *оснащением разбиения* τ.

Предположим теперь, что на множестве E определена функция f. Тогда с каждым разбиением τ и его оснащением ξ можно связать следующую важную сумму

$$\sigma(f, \tau, \xi) = \sum_{k=1}^N f(\xi_k)\,\lambda(e_k)$$

(λ — мера Лебега в $\mathbb{R}^m$). Она называется *интегральной суммой* функции f, соответствующей разбиению τ и его оснащению ξ.

Теорема (о пределе интегральных сумм). *Если множество E компактно, а функция f непрерывна на E, то $\sigma(f, \tau, \xi) \underset{r(\tau)\to 0}{\longrightarrow} \int_E f(x)\,dx$. Более подробно это означает, что для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что независимо от выбора оснащения ξ*

$$\left|\sigma(f, \tau, \xi) - \int_E f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

как только $r(\tau) < \delta$.

Доказательство. Пусть ω — модуль непрерывности функции f:

$$\omega(t) = \sup\bigl\{|f(x) - f(y)| \,\bigm|\, \|x - y\| \leqslant t,\ x, y \in E\bigr\}.$$

В частности, $|f(x) - f(y)| \leqslant \omega\bigl(\|x - y\|\bigr)$ при $x, y \in E$. Поэтому для любой точки $\xi_k \in \overline{e_k}$

$$\left|\int_{e_k} f(x)\,dx - f(\xi_k)\lambda(e_k)\right| = \left|\int_{e_k} (f(x) - f(\xi_k))\,dx\right| \leqslant \int_{e_k} |f(x) - f(\xi_k)|\,dx \leqslant \omega(\operatorname{diam}(\overline{e_k}))\lambda(e_k).$$

Так как $\operatorname{diam}(\overline{e_k}) = \operatorname{diam}(e_k)$, то

$$\left|\int_E f(x)\,dx - \sigma(f, \tau, \xi)\right| \leqslant \sum_{k=1}^N \left|\int_{e_k} f(x)\,dx - f(\xi_k)\lambda(e_k)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^N \omega(\operatorname{diam}(e_k))\lambda(e_k) \leqslant \omega(r(\tau))\lambda(E).$$

Отсюда следует утверждение теоремы, так как $\omega(t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ в силу равномерной непрерывности функции f (мы опираемся здесь на теорему Кантора). ►

Замечание. В приведённом доказательстве, как и при доказательстве теоремы 7.2, мы не использовали специфических свойств меры Лебега. Читатель без труда убедится, что доказательство остаётся справедливым в значительно более общей ситуации. А именно, можно считать, что E — некоторое компактное метрическое пространство, а мера λ — произвольная конечная мера, определённая на σ-алгебре, содержащей все открытые множества (последнее нужно, чтобы гарантировать измеримость непрерывной функции).

УПРАЖНЕНИЯ

1) Пусть функция f суммируема на каждом шаре $B(x,r) \subset \mathbb{R}^m$. Докажите, что функция $(x,r) \mapsto \int_{B(x,r)} |f(y)|\,dy$ непрерывна в $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+$.

2) Докажите, что интеграл по отрезку от ограниченной монотонной функции есть предел интегральных сумм.

3) Убедитесь, что $\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|\sin x|\,|\sin y|}{e^{xy}\ln(x+y+2)}\,dx\,dy < +\infty$, хотя $\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{dx\,dy}{e^{xy}\ln(x+y+2)} = +\infty$.

§ 8. Предельный переход под знаком интеграла

Здесь мы докажем несколько важных утверждений, позволяющих обосновывать равенство $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu$ при условии, что последовательность подынтегральных функций f_n сходится в том или ином смысле к предельной функции f. Таким образом, наша цель — получить условия перестановочности операций интегрирования и предельного перехода.

Всюду в этом параграфе буква μ обозначает меру, определённую на некоторой σ-алгебре подмножеств множества X, а рассматриваемые функции предполагаются заданными по крайней мере почти везде на X.

8.1. Начнём с несложной теоремы, которая скорее всего в той или иной форме известна читателю. В ней мы для простоты предполагаем, что рассматриваемые функции определены всюду на X.

Теорема. *Пусть $\mu(X) < +\infty$ и $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ — последовательность суммируемых функций, которая равномерно на X сходится к предельной функции f. Тогда эта функция суммируема и $\int_X f_n\,d\mu \to \int_X f\,d\mu$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Функция f измерима как предел последовательности измеримых функций. Поскольку $\mu(X) < +\infty$ и $|f_n - f| < 1$ всюду на X для достаточно больших номеров n, разность $f_n - f$ суммируема. Следовательно, суммируема и предельная функция f. Сходимость интегралов очевидна, так как

$$\left|\int_X f_n\,d\mu - \int_X f\,d\mu\right| \leqslant \int_X \bigl|f_n - f\bigr|\,d\mu \leqslant \mu(X)\sup_X \bigl|f_n - f\bigr| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \ \blacktriangleright$$

8.2. Теоремы 8.1 достаточно для решения несложных задач, связанных с предельным переходом под знаком интеграла. Однако во многих случаях её условия слишком обременительны и тогда требуются более общие утверждения. Первое из них мы получим, несколько обобщив одну из важнейших теорем о предельном переходе под знаком интеграла, доказанную в п. 2.2.

Теорема (Б. Леви). *Пусть последовательность измеримых функций f_n сходится почти везде на X к функции f. Если для каждого $n \in \mathbb{N}$*

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \quad \text{при почти всех } x \in X,$$

то

$$\int_X f_n \, d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X f \, d\mu.$$

Доказательство. Так как счётное объединение множеств меры нуль снова есть множество меры нуль, то на некотором множестве $X_0 \subset X$ полной меры выполнены все условия теоремы Б. Леви 2.2. Следовательно, $\int_{X_0} f_n \, d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{X_0} f \, d\mu$. Это совпадает с утверждением теоремы, поскольку интегралы по множествам X и X_0 равны. ►

Следствие 1. *Ряд из почти всюду неотрицательных измеримых функций можно интегрировать почленно.*

Доказательство. Достаточно применить теорему Б. Леви к частичным суммам ряда. ►

Заметим, что в следствии 1 мы ничего не предполагаем о сходимости функционального ряда. Это обстоятельство оказывается полезным уже в следующем утверждении.

Следствие 2. *Если числовой ряд $\sum\limits_{n\geqslant 1} \int_X |f_n| \, d\mu$ сходится, то функциональный ряд $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$ абсолютно сходится почти везде.*

Доказательство. Пусть $S = \sum\limits_{n\geqslant 1} |f_n|$. Из следствия 1 вытекает (независимо от сходимости ряда $\sum\limits_{n\geqslant 1} |f_n|$), что

$$\int_X S \, d\mu = \sum_{n\geqslant 1} \int_X |f_n| \, d\mu < +\infty.$$

Таким образом, функция S суммируема на X. Поэтому она почти всюду конечна, что равносильно утверждению следствия. ►

Следствие 2 — удобное средство для доказательства сходимости почти всюду различных функциональных рядов.

Пример. Пусть $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ — произвольная числовая последовательность (например, это может быть произвольным образом занумерованное множество всех рациональных чисел и т. п.). Если ряд $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$ абсолютно сходится, то ряд $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{\sqrt{|x-x_n|}}$ абсолютно сходится почти всюду (относительно меры Лебега) на $\mathbb{R}$.

Для доказательства достаточно убедиться, что рассматриваемый ряд абсолютно сходится почти всюду на произвольном промежутке $(-A, A)$. Очевидно, что

$$\int_{-A}^{A} \left| \frac{a_n}{\sqrt{|x-x_n|}} \right| dx = |a_n| \int_{-A-x_n}^{A-x_n} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \leqslant |a_n| \int_{-A}^{A} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = 4\sqrt{A}\, |a_n|.$$

Поэтому ряд $\sum\limits_{n\geqslant 1} \int_{-A}^{A} \frac{|a_n|}{\sqrt{|x-x_n|}} \, dx$ сходится, и нам остаётся сослаться на следствие 2.

8.3. Теорема Б. Леви относится лишь к возрастающим последовательностям неотрицательных функций и не применима при нарушении этих условий. Следующая важная теорема восполняет этот пробел, указывая удобные достаточные условия предельного перехода под знаком интеграла для произвольных последовательностей функций (как вещественных, так и комплекснозначных).

Интуитивно ясно, что если интеграл $\int_X |f-g|\,d\mu$ мал, то функции f и g "близки" на множестве "достаточно большой" меры. Если мы хотим получить условия, при которых $\int_X |f_n - f|\,d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, то следует думать, что функции f_n должны быть близки к f на множествах все большей и большей меры. Точную формулировку этого условия мы получим, воспользовавшись понятием сходимости по мере (см. § III.3). Напомним, что символ $X(f>a)$ обозначает лебегово множество функции f: $X(f>a) = \{x\in X \mid f(x)>a\}$.

Теорема (Лебег). *Пусть $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ — последовательность измеримых функций, сходящаяся по мере к функции f на X. Если*

$$\begin{aligned} &\text{а) } |f_n(x)| \leqslant g(x) \ \text{ почти везде на } X \text{ при любом } n\in\mathbb{N},\\ &\text{б) функция } g \text{ суммируема на } X, \end{aligned} \tag{L}$$

то функции f_n и f суммируемы,

$$\int_X |f_n - f|\,d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ \text{ и, следовательно, } \int_X f_n\,d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X f\,d\mu.$$

Заметим, что так как $\mu\big(X(|f-f_n|>\varepsilon)\big) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int_X |f-f_n|\,d\mu$ в силу неравенства Чебышева (см. п. 4.4), то сходимость f_n к f по мере необходима для справедливости утверждения теоремы.

Доказательство. Суммируемость функций f_n обеспечивается условием (L). Функция f измерима по определению сходимости по мере. Переходя к пределу в неравенстве *а*) (см. следствие 2 п. III.3.5), мы получаем, что $|f(x)|\leqslant g(x)$ почти везде на X, откуда вытекает суммируемость f.

Так как

$$\left|\int_X f_n\,d\mu - \int_X f\,d\mu\right| \leqslant \int_X |f_n - f|\,d\mu,$$

то нам достаточно установить первое из доказываемых соотношений.

Предположим сначала, что $\mu(X)<+\infty$. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon>0$ и положим $X_n(\varepsilon) = X\big(|f_n - f|>\varepsilon\big)$. Очевидно, что

$$\int_X |f_n - f|\,d\mu = \int_{X_n(\varepsilon)} \ldots + \int_{X\setminus X_n(\varepsilon)} \ldots \leqslant \int_{X_n(\varepsilon)} 2g\,d\mu + \int_X \varepsilon\,d\mu.$$

Так как $\mu\big(X_n(\varepsilon)\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, то $\int_{X_n(\varepsilon)} g\,d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ ввиду абсолютной непрерывности интеграла. Поэтому $\int_{X_n(\varepsilon)} g\,d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$ при достаточно больших n и, следовательно,

$$\int_X |f_n - f|\,d\mu < \varepsilon + \mu(X)\,\varepsilon,$$

что и доказывает теорему в рассматриваемом случае.

Если $\mu(X) = +\infty$, то, зафиксировав $\varepsilon > 0$, рассмотрим такое множество конечной меры A, что $\int_{X\setminus A} g\,d\mu < \varepsilon$ (см. следствие 3 п. 5.1). Тогда

$$\int_X |f_n - f|\,d\mu \leqslant \int_A |f_n - f|\,d\mu + \int_{X\setminus A} 2g\,d\mu < \int_A |f_n - f|\,d\mu + 2\,\varepsilon.$$

Поскольку $\mu(A) < +\infty$, из доказанного выше следует, что $\int_A |f_n - f|\,d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, и поэтому $\int_X |f_n - f|\,d\mu < 3\,\varepsilon$ при достаточно больших n. ►

Замечание. Как видно из доказательства теоремы, она остаётся справедливой, если в случае бесконечной, но σ-конечной меры, вместо сходимости по мере на X предполагать, что $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ по мере лишь на каждом множестве конечной меры (более общий результат указан в упр. 8). Поскольку в случае конечной меры сходимость по мере следует из сходимости почти везде (см. теорему III.3.2), теорема Лебега в случае σ-конечной меры остаётся справедливой при замене сходимости по мере сходимостью почти везде. Докажем, что такая замена возможна и в случае произвольной меры.

8.4. Теорема (Лебег). *Пусть $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ — последовательность измеримых функций, сходящаяся почти везде на X к функции f. Если выполнено условие* (L), *то функции f_n и f суммируемы,*

$$\int_X |f_n - f|\,d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ и, следовательно, } \int_X f_n\,d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X f\,d\mu.$$

Доказательство. Суммируемость функций f_n и f устанавливается дословно так же, как в теореме 8.3. Положим

$$h_n = \sup\{|f_n - f|, |f_{n+1} - f|, \dots\}.$$

Очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty} h_n(x) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,|f_n(x) - f(x)| = 0$ почти везде на X. Кроме того, $h_{n+1} \leqslant \leqslant h_n \leqslant 2g$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Применяя теорему Б. Леви к возрастающей последовательности $\{2g - h_n\}_{n\geqslant 1}$, мы получаем, что

$$\int_X (2g - h_n)\,d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X 2g\,d\mu.$$

Поэтому $\int_X h_n\,d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ и, следовательно,

$$\int_X |f_n - f|\,d\mu \leqslant \int_X h_n\,d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \ ►$$

Условие (L) теоремы не является необходимым для возможности предельного перехода под знаком интеграла. В этом можно убедиться на следующем примере. Пусть μ — мера Лебега на $\mathbb{R}$, а функции f_n определяются равенством $f_n(x) = c_n > 0$ при $\frac{1}{n+1} < < x < \frac{1}{n}$ и $f_n(x) = 0$ для остальных значений x. Очевидно, $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ всюду. Кроме того, $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \frac{c_n}{n(n+1)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, если $c_n = o(n^2)$. Но при этом функции f_n могут не иметь суммируемой мажоранты. В самом деле, она, очевидно, не меньше суммы $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n(x)$, интеграл от которой равен $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{c_n}{n(n+1)}$. Если, например, $c_n = n$, то последний ряд расходится.

Пример 1. Пусть μ — конечная борелевская мера на $[0,+\infty)$. Найдём предел последовательности интегралов

$$I_n = \int_{[0,+\infty)} \varphi(x^n)\, d\mu(x),$$

где φ — непрерывная функция, имеющая конечный предел C на бесконечности.

Поточечная сходимость очевидна:

$$\varphi(x^n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x) = \begin{cases} \varphi(0), & \text{если } \ 0 \leqslant x < 1, \\ \varphi(1), & \text{если } \ x = 1, \\ C, & \text{если } \ x > 1. \end{cases}$$

Поскольку функция φ ограничена на $[0,+\infty)$, а мера μ конечна, условие (L) выполнено (в качестве мажоранты можно взять постоянную функцию, всюду равную $\sup|\varphi|$). Поэтому можно воспользоваться теоремой Лебега:

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \int_{[0,+\infty)} f(x)\, d\mu(x) = \varphi(0)\,\mu\big([0,1)\big) + \varphi(1)\,\mu\big(\{1\}\big) + C\,\mu\big((1,+\infty)\big).$$

В частности, если μ — дискретная мера с нагрузками ω_k в целых точках, причём $\sum\limits_{k\geqslant 0} \omega_k < +\infty$, то

$$I_n = \sum_{k\geqslant 0} \varphi(k^n)\omega_k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \varphi(0)\omega_0 + \varphi(1)\omega_1 + C\sum_{k\geqslant 2}\omega_k.$$

В некоторых случаях от номера зависит не только подынтегральная функция f_n, но и множество интегрирования. Доопределив f_n нулём вне него, эту ситуацию можно свести к стандартной (с постоянным множеством интегрирования).

Пример 2. Пусть $a > 0$. Докажем, что при $n \to \infty$ интегралы

$$I_n = \int_0^n x^{a-1}\Big(1 - \frac{x}{n}\Big)^n dx$$

стремятся к интегралу $\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\, dx = \Gamma(a)$.

Устанавливая это, положим $f_n(x) = x^{a-1}\big(1 - \frac{x}{n}\big)^n$ при $x \in (0,n]$ и $f_n(x) = 0$ при $x > n$. Ясно, что $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x) = x^{a-1}e^{-x}$ для любого $x > 0$. Чтобы обосновать равенство $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \Gamma(a)$, убедимся, что функции f_n удовлетворяют условию (L) теоремы Лебега. В самом деле, так как $1 - \frac{x}{n} \leqslant e^{-x/n}$, то $\big(1 - \frac{x}{n}\big)^n \leqslant e^{-x}$ при $0 < x \leqslant n$, и поэтому $0 \leqslant f_n(x) \leqslant x^{a-1}e^{-x}$ при всех $x > 0$. Таким образом, функции f_n имеют мажоранту, суммируемую на $(0,+\infty)$.

8.5. Следующему примеру использования теоремы Лебега, имеющему более общий характер, мы предпошлём один вспомогательный результат.

Пусть функция f определена на ограниченном множестве $E \subset \mathbb{R}^m$. С каждым его разбиением τ, состоящим из множеств $e_1, \ldots, e_n$, и его оснащением $\xi_1, \ldots, \xi_n$, где по определению $\xi_k \in E \cap \overline{e_k}$, свяжем простую функцию

$$f_\tau = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\chi_{e_k}.$$

Таким образом, $f_\tau(x) = f(\xi_k)$ при $x \in e_k$. Напомним, что рангом разбиения τ называется величина $r(\tau) = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \operatorname{diam}(e_k)$ (см. п. 7.3).

Лемма. *Если $r(\tau) \to 0$, то $f_\tau(x) \to f(x)$ во всех точках непрерывности функции f. Подробнее: если x точка непрерывности f, то для любого числа $\varepsilon > 0$ можно найти такое число $\delta > 0$, что $|f_\tau(x) - f(x)| < \varepsilon$ как только $r(\tau) < \delta$.*

Доказательство. Достаточно по ε так выбрать $\delta > 0$, что $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ при $\|x - y\| < \delta$ и $y \in E$. Если в этом случае $r(\tau) < \delta$ и $x \in e_k$, то $\|\xi_k - x\| < \delta$, и поэтому $|f(x) - f_\tau(x)| = |f(x) - f(\xi_k)| < \varepsilon$. ►

Следующая теорема обобщает теорему 7.3.

Теорема. *Пусть E — ограниченное (измеримое) подмножество пространства $\mathbb{R}^m$. Если определённая на E функция f ограничена и множество её точек разрыва имеет нулевую меру, то интеграл $\int_E f(x)\,dx$ есть предел интегральных сумм (в том же смысле, что и в теореме 7.3).*

Доказательство. Прежде всего заметим, что по теореме III.1.7 функция f измерима. Пусть $\tau = \{e_k\}_{k=1}^n$ — разбиение множества E, а $\xi = \{\xi_k\}_{k=1}^n$, где $\xi_k \in E \cap \overline{e_k}$, его оснащение. По определению интегральная сумма $S(f, \tau, \xi)$, соответствующая оснащённому разбиению (τ, ξ), имеет вид $S(f, \tau, \xi) = \sum\limits_{k=1}^n f(\xi_k)\lambda_m(e_k)$. Используя обозначения леммы, это равенство можно переписать в виде

$$S(f, \tau, \xi) = \int_E f_\tau(x)\,dx.$$

Так как $f_\tau(x) \to f(x)$ при $r(\tau) \to 0$ во всех точках непрерывности функции f, то $f_{\tau_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ почти везде для любой последовательности разбиений τ_n такой, что $r(\tau_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Кроме того, очевидно, функции f_τ равномерно ограничены. Поэтому по теореме Лебега $\int_E f_{\tau_n}(x)\,dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_E f(x)\,dx$, что равносильно утверждению теоремы. ►

Для функций, заданных на отрезке $[a, b]$, интеграл по традиции часто определяют как предел интегральных сумм, соответствующих разбиению $[a, b]$ на более мелкие отрезки. Это определение предложено Риманом*), и интеграл, понимаемый как предел интегральных сумм, называют интегралом в смысле Римана, а интегральные суммы, соответствующие разбиению $[a, b]$ на промежутки, — римановыми суммами. Отметим, что до Римана такие суммы и их пределы рассматривал Коши, но лишь для непрерывных функций. Как следует из доказанной теоремы, для ограниченной и почти везде непрерывной функции интеграл в смысле Римана существует и совпадает с интегралом по мере Лебега. Мы предоставляем читателю доказать, что предположения теоремы (ограниченность функции и равенство нулю меры множества её точек разрыва) не только достаточны, но и необходимы для того, чтобы интеграл $\int_E f(x)\,dx$ был пределом интегральных сумм (см. упр. 10–12). Таким образом, интеграл в смысле Римана от ограниченной функции по конечному промежутку существует тогда и только тогда, когда она непрерывна почти везде.

8.6. Следующая теорема, не будучи в точном смысле слова теоремой о предельном переходе под знаком интеграла, показывает, что в широком классе случаев возможен предельный переход в неравенстве. Точнее говоря, интеграл от неотрицательных функций обладает важным свойством — полунепрерывностью снизу относительно

*) Георг Фридрих Бернхард **Риман** (Riemann), 1826–1866, — немецкий математик.

сходимости почти везде. Это свойство часто используется в случаях, когда нужно установить суммируемость предельной функции.

Теорема 1 (Фату*)). *Пусть $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ — последовательность неотрицательных измеримых функций, сходящаяся почти везде на X к функции f. Если для некоторого $C>0$*

$$\int_X f_n\,d\mu \leqslant C \quad \text{при любом} \quad n\in\mathbb{N}, \tag{1}$$

то $\int_X f\,d\mu \leqslant C$.

Замечание. Даже если все интегралы от функций f_n равны между собой, интеграл от предельной функции может быть строго меньше их общего значения. Чтобы получить соответствующий пример, будем считать, что наше пространство с мерой есть интервал $(0,1)$ с мерой Лебега, а функции f_n определяются равенством

$$f_n(x)=\begin{cases} n & \text{при } 0<x<\frac{1}{n},\\ 0 & \text{при } \frac{1}{n}\leqslant x<1.\end{cases}$$

Очевидно, что $f_n(x)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$ поточечно на $(0,1)$ и $\int_0^1 f_n(x)\,dx=1$, а интеграл от предельной функции есть нуль.

Этот же пример показывает, что теорема Фату перестаёт быть верной, если знаки неравенств в условии (1) и в заключении теоремы заменить на противоположные, так что интеграл, будучи полунепрерывным снизу, не обладает свойством полунепрерывности сверху.

Изменив знаки функций в рассмотренном примере, мы убеждаемся, что теорема Фату неверна без предположения о неотрицательности рассматриваемых функций.

Доказательство. Пусть $g_n(x)=\inf\{f_n(x),f_{n+1}(x),\dots,f_{n+k}(x),\dots\}$ $(x\in X)$. Ясно, что $g_n\leqslant g_{n+1}$, $g_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}f$ почти везде на X и

$$\int_X g_n\,d\mu\leqslant\int_X f_n\,d\mu\leqslant C \quad \text{при всех} \quad n\in\mathbb{N}.$$

Следовательно, по теореме Б. Леви

$$\int_X f\,d\mu=\lim_{n\to\infty}\int_X g_n\,d\mu\leqslant C. \ \blacktriangleright$$

Монотонность последовательности $\{g_n\}_{n\geqslant 1}$ позволяет отказаться от предположения о существовании предельной функции f и пользуясь равенством $\lim\limits_{n\to\infty}g_n=\varliminf\limits_{n\to\infty}f_n$ доказать формально несколько более сильный, чем приведённый, вариант теоремы Фату:

для любой последовательности неотрицательных измеримых функций $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ *справедливо неравенство*

$$\int_X \varliminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu\leqslant \varliminf_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu. \tag{2}$$

Читателю, вероятно, уже приходилось сталкиваться с тем, что иногда более общий результат гораздо менее важен, чем ведущий частный случай. Теорема Фату и её усиление могут, на наш взгляд, служить примером такого положения вещей. Ещё один пример такой ситуации читатель найдёт в упр. 4, обобщающем теорему Б. Леви.

*) Пьер Жозеф Луи **Фату** (Fatou), 1878–1929, — французский математик.

Теорема 1 остаётся справедливой при замене сходимости почти везде сходимостью по мере.

Теорема 1′ (Фату). *Пусть $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ — последовательность неотрицательных измеримых функций, сходящаяся по мере к функции f. Если для некоторого $C > 0$*

$$\int_X f_n\,d\mu \leqslant C \quad \text{при любом} \quad n \in \mathbb{N},$$

то $\int_X f\,d\mu \leqslant C$.

Доказательство. Пользуясь теоремой Рисса (см. п. III.3.4), выделим подпоследовательность $\{f_{n_k}\}_{k\geqslant 1}$, сходящуюся к f почти везде. Применив к ней теорему 1, приходим к требуемому результату. ►

Заметим, что в случае конечной меры теорема 1′ сильнее теоремы 1. Кроме того, полученный в ней результат не вытекает из формулы (2), поскольку нижний предел $\varliminf\limits_{n\to\infty} f_n$ может быть существенно меньше, чем f (см. § III.3, упр. 2, 3).

8.7. Условие существования суммируемой мажоранты в теореме Лебега, не будучи, как мы видели, необходимым для возможности предельного перехода под знаком интеграла, конечно, существенно, и отказаться от него нельзя. Однако анализ доказательства этой теоремы показывает, что это условие можно ослабить. Действительно, нам, собственно, было нужно не существование мажоранты, а вытекающая из него одновременная малость интегралов $\int_e |f_n|\,d\mu$ по множествам достаточно малой меры. В связи с этим введём следующее

Определение. Будем говорить, что функции f_α $(\alpha \in A)$ имеют *равностепенно абсолютно непрерывные* интегралы, если они суммируемы и

$$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ :\ (\mu(e) < \delta) \Rightarrow (\forall\,\alpha \in A\ \int_e |f_\alpha|\,d\mu < \varepsilon). \tag{3}$$

Если семейство $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ имеет суммируемую мажоранту, т. е. если для некоторой суммируемой функции g при любом α почти везде справедливо неравенство $|f_\alpha| \leqslant g$, то $\int_e |f_\alpha|\,d\mu \leqslant \int_e g\,d\mu$, и условие (3) выполняется в силу абсолютной непрерывности интеграла от g.

Оказывается, равностепенная абсолютная непрерывность интегралов от $f_n (n \in \mathbb{N})$ необходима для того, чтобы для любого измеримого множества E интегралы $\int_E f_n\,d\mu$ имели конечные пределы, и, в частности, для того, чтобы $\int_X |f_n - f|\,d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Мы не будем доказывать эту довольно сложную теорему Витали (см., например, [Б], т. I), а установим гораздо более простой факт — достаточность условия равностепенной абсолютной непрерывности для предельного перехода под знаком интеграла. Отметим, что при доказательстве этого результата мы столкнёмся с типичным использованием теоремы Фату: с её помощью оценивается интеграл от предельной функции.

Теорема (Витали). *Пусть $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ — последовательность суммируемых функций, сходящаяся на X к функции f по мере. Если $\mu(X) < \infty$ и функции f_n имеют равностепенно абсолютно непрерывные интегралы, то функция f суммируема и $\int_X |f_n - f|\,d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.*

Доказательство. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$ и пусть δ — число, при котором выполняется условие (3). Положим $e_n = X\big(|f - f_n| > \varepsilon\big)$. Так как по условию $\mu(e_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, то $\mu(e_n) < \delta$ для достаточно больших n, и в силу условия (3) при таких n для всех k справедливо неравенство $\int_{e_n} |f_k|\,d\mu < \varepsilon$. По теореме Фату отсюда вытекает, что $\int_{e_n} |f|\,d\mu \leqslant \varepsilon$. Следовательно,

$$\int_X |f - f_n|\,d\mu = \int_{X\setminus e_n} |f - f_n|\,d\mu + \int_{e_n} |f - f_n|\,d\mu \leqslant$$
$$\leqslant \int_{X\setminus e_n} \varepsilon\,d\mu + \int_{e_n} |f|\,d\mu + \int_{e_n} |f_n|\,d\mu \leqslant \varepsilon\,\mu(X) + \varepsilon + \varepsilon = (\mu(X) + 2)\varepsilon.$$

Так как это неравенство верно при достаточно больших n, то $\int_X |f - f_n|\,d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Кроме того, функция f суммируема, поскольку $f = f_n + (f - f_n)$, где оба слагаемых в правой части суммируемы. ►

Из теоремы Витали легко получить полезное

Следствие. *Пусть $\mu(X) < +\infty$, $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ — последовательность измеримых функций, сходящаяся по мере к функции f. Если существуют такие числа $p > 1$ и $C > 0$, что*

$$\int_X |f_n|^p\,d\mu \leqslant C \quad \text{при всех } n, \tag{V}$$

то функции f_n и f суммируемы и $\int_X |f_n - f|\,d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Доказательство. Чтобы применить теорему Витали, нам нужно проверить суммируемость функций f_n и равностепенную абсолютную непрерывность интегралов от них. Оба эти факта устанавливаются с помощью неравенства Гёльдера. В самом деле, считая, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, мы для любого множества e имеем:

$$\int_e |f_n|\,d\mu \leqslant \left(\int_e |f_n|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} (\mu(e))^{\frac{1}{q}} \leqslant C^{\frac{1}{p}} (\mu(e))^{\frac{1}{q}}.$$

Отсюда следует как суммируемость f_n (если взять $e = X$), так и выполнение условия (3), поскольку интегралы $\int_e |f_n|\,d\mu$ сколь угодно малы одновременно при всех n, если достаточно мала мера множества e. ►

По такой же схеме, что и следствие, из теоремы Витали можно получить и более общее утверждение, доказательство которого мы оставляем читателю.

Теорема (Валле Пуссен*)). *Пусть $\mu(X) < \infty$, $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ — последовательность измеримых функций, сходящаяся по мере к функции f. Если существует такая неограниченно возрастающая на $[0, +\infty)$ неотрицательная функция Φ, что*

$$\sup_n \int_X |f_n|\Phi(|f_n|)\,d\mu < +\infty,$$

то функции f_n и f суммируемы и $\int_X |f_n - f|\,d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

УПРАЖНЕНИЯ

1) Приведите пример такой последовательности положительных непрерывных на $[a, b]$ функций f_n, что $\int_a^b f_n(x)\,dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ и $\sup\limits_n f_n(x) = +\infty$ в каждой точке $x \in [a, b]$.

*) Шарль Жан де Ла **Валле Пуссен** (de La Vallée Poussin), 1866–1962, — бельгийский математик.

2) Убедитесь на примере, что теорема Б. Леви становится неверной, если отказаться от предположения о неотрицательности рассматриваемых функций.

3) Пусть $a_n \geqslant 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$. Докажите, что

а) если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \ln n < +\infty$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{|x-x_n|}$ сходится почти везде на $\mathbb{R}$ (относительно меры Лебега) для любой последовательности $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$;

б) если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \ln n = +\infty$ и X — всюду плотное в интервале $(0,1)$ счётное множество, то в зависимости от выбора его нумерации $\{x_n\}$ рассматриваемый ряд может как сходиться почти везде, так и расходиться почти везде на $(0,1)$ (и даже в каждой точке).

4) Докажите следующее обобщение теоремы Б. Леви. Пусть $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ — последовательность неотрицательных измеримых функций, сходящаяся почти всюду на X к функции f. Если $f_n \leqslant f$ почти везде при любом n, то $\int_X f_n\,d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X f\,d\mu$.

5) Пусть $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ — последовательность неотрицательных измеримых функций, сходящаяся почти всюду на X к суммируемой функции f. Если $\int_X f_n\,d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X f\,d\mu$, то $\int_E f_n\,d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_E f\,d\mu$ для любого измеримого множества $E \subset X$. Более того, $\int_X |f_n - f|\,d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Указание. Для доказательства первого утверждения примените теорему Фату; для доказательства второго используйте тождество $|f_n - f| = f_n - f + 2(f_n - f)_-$ и теорему Лебега.

6) Имеет ли (поточечно сходящаяся к нулю) последовательность функций $\frac{1}{n}\left(\frac{\sin nx}{x}\right)^2$ мажоранту, суммируемую на $(0,\pi)$?

7) Докажите, что если мера конечна, то $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ по мере тогда и только тогда, когда $\int_X \frac{|f_n-f|}{1+|f_n-f|}\,d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

8) Пусть мера μ удовлетворяет условию: $\mu(A) = \sup\{\mu(E) \mid E \subset A,\ \mu(E) < +\infty\}$ для всякого измеримого множества A. Докажите, что теорема 8.3 останется верной, если в её условии сходимость f_n к f по мере на X заменить сходимостью по мере на каждом множестве конечной меры. Последнее условие, очевидно, выполняется, если $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ почти везде.

9) Имеет ли последовательность функций $f_n(x) = \frac{n}{n-(n-1)e^{ix}}$ мажоранту, суммируемую на $(-\pi,\pi)$? Каков предел $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f_n(x)|\,dx$?

10) Докажите, что если определённая на шаре функция f не ограничена, то соответствующие ей интегральные суммы $S(f,\tau,\xi)$ не могут иметь конечного предела при $r(\tau) \to 0$.

11) Докажите, что если определённая на ограниченном подмножестве E пространства $\mathbb{R}^m$ измеримая функция f такова, что множество её точек разрыва имеет положительную меру, то её интегральные суммы не имеют предела при измельчении разбиений (даже если ограничиться лишь разбиениями E на части вида $E \cap P$, где P — ячейка). Указание. Рассмотрите такое множество положительной меры $K \subset E$, что

$$\overline{\lim_{y\to x}}\, f(y) - \underline{\lim_{y\to x}}\, f(y) \geqslant \varepsilon > 0 \quad \text{при всех } x \in K.$$

Убедитесь, что тогда существует разбиение τ произвольно малого ранга и такие его оснащения ξ и ξ', что $S(f,\tau,\xi) - S(f,\tau,\xi') > \frac{\varepsilon}{2}\lambda_m(K)$.

12) Убедитесь, что теорема 8.5 и утверждение задачи 11) остаются справедливыми для любой конечной борелевской меры. Утверждение задачи 10) также сохраняется при дополнительном предположении, что всякое непустое открытое множество имеет положительную меру.

13) Докажите, что в определении равностепенной абсолютной непрерывности интегралы $\int_e |f_\alpha|\,d\mu$ можно заменить на $\left|\int_e f_\alpha\,d\mu\right|$.

§ 9. Максимальная функция и дифференцирование интеграла по множеству

Этот параграф посвящён вопросу о том, в какой мере теорема Барроу о дифференцировании интеграла от непрерывной функции по переменному верхнему пределу (см. 6.1) может быть распространена на суммируемые функции. Как нетрудно убедиться, её легко обобщить на случай кратных интегралов, сохранив предположение о непрерывности подынтегральной функции. Однако попытка расширить класс рассматриваемых функций наталкивается на принципиальные трудности уже в одномерном случае. Если подынтегральная функция всего лишь суммируема, нельзя ожидать, что производная по переменному верхнему пределу будет существовать в каждой точке. Ясно также, что если эта производная существует, то она может и не совпадать с соответствующим значением подынтегральной функции (поскольку последнюю можно произвольно изменять на множестве меры нуль, не изменяя интеграла). Поэтому нам необходимо внести коррективы в саму постановку задачи. Очевидно, мы можем надеяться на совпадение производной и подынтегральной функции лишь почти всюду. Чрезвычайно важно выяснить, действительно ли производная существует почти везде. Точнее, мы поставим вопрос следующим образом. Верно ли, что для суммируемой в $\mathbb{R}^m$ функции предел её средних значений на стягивающихся шарах, т. е. предел $\lim\limits_{r\to 0}\frac{1}{v(r)}\int_{B(x,r)} f(y)\,dy$, существует почти везде? Мы убедимся, что ответ на этот вопрос положителен и, более того, что этот предел почти везде совпадает с $f(x)$.

Буквой λ мы будем обозначать меру Лебега в $\mathbb{R}^m$, символом λ^* — соответствующую внешнюю меру; $v(r)=\lambda\bigl(B(0,r)\bigr)$. Символом $\mathscr{L}(\mathbb{R}^m)$ обозначается множество функций, суммируемых в $\mathbb{R}^m$ относительно меры Лебега.

9.1. Вопрос о дифференцировании интеграла с переменным верхним пределом от функции f есть вопрос о поведении средних значений вида $\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(y)\,dy$. В разнообразных оценках, связанных со средними значениями функции (как одной, так и нескольких переменных), часто бывает полезно использовать мажоранту этих средних. Особенно удобна, введённая Харди*) и Литлвудом**), наименьшая из мажорант при усреднении по шарам. Введём соответствующее

Определение. Пусть $f\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^m)$. Зададим функцию M_f равенством

$$M_f(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{v(r)}\int_{B(x,r)}|f(y)|\,dy \qquad (x\in\mathbb{R}^m).$$

Она называется *максимальной функцией* (для f).

*) Годфри Харольд **Харди** (Hardy), 1877–1947, — английский математик.

) Джон Идензор **Литлвуд (Littlewood), 1885–1977, — английский математик.

Отметим, что максимальная функция измерима. В самом деле, как следует из абсолютной непрерывности интеграла, функция $(x,r) \mapsto \frac{1}{v(r)} \int_{B(x,r)} |f(y)|\,dy$ непрерывна. Поэтому при определении M_f супремум можно вычислять, придавая r лишь рациональные значения. Таким образом, максимальная функция измерима как супремум счётного семейства измеримых функций. При $I = \int_{\mathbb{R}^m} |f(x)|\,dx > 0$ она не суммируема. Действительно, если норма $\|x\|$ достаточно велика, то

$$M_f(x) \geqslant \frac{1}{v(2\|x\|)} \int_{B(x,2\|x\|)} |f(y)|\,dy \geqslant \frac{\mathrm{const}}{\|x\|^m}\, I.$$

Можно показать, что максимальная функция не обязательно суммируема даже на множествах конечной меры (см. упр. 1). Однако она почти везде конечна, как вытекает из следующей важной теоремы.

Теорема. *Пусть $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m)$ и $E_t = \{x \in \mathbb{R}^m \mid M_f(x) > t\}$ для $t > 0$. Тогда*

$$\lambda(E_t) \leqslant \frac{5^m}{t} \int_{\mathbb{R}^m} |f(x)|\,dx. \tag{1}$$

Поскольку $\{x \in \mathbb{R}^m \mid M_f(x) = +\infty\} \subset E_t$ для любого $t > 0$, отсюда следует, что функция M_f почти везде конечна.

Доказательство. Чтобы оценить меру множества E_t, используем теорему II.7.1. Так как $M_f(x) = \sup\limits_{r>0} \frac{1}{v(r)} \int_{B(x,r)} |f(y)|\,dy > t$ при $x \in E_t$, то для каждой точки $x \in E_t$ найдётся такой шар $B(x, r_x)$, что

$$\frac{1}{v(r_x)} \int_{B(x,r_x)} |f(y)|\,dy > t.$$

Это неравенство можно переписать в виде

$$v(r_x) < \frac{1}{t} \int_{B(x,r_x)} |f(y)|\,dy. \tag{2}$$

Отсюда вытекает, что $v(r_x) \leqslant \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^m} |f(y)|\,dy$, и поэтому радиусы шаров равномерно ограничены. Чтобы применить теорему II.7.1, рассмотрим не всё множество E_t, которое может быть неограниченным, а его произвольную ограниченную часть E_t^0. Тогда, согласно этой теореме, из семейства $\{B(x,r_x)\}_{x \in E_t^0}$ можно выделить такую (возможно конечную) последовательность попарно дизъюнктных шаров $B_k = B(x_k, r_{x_k})$, что $E_t^0 \subset \bigcup\limits_{k \geqslant 1} B_k^*$, где $B_k^* = B(x_k, 5r_{x_k})$. Поэтому, пользуясь неравенством (2), мы получаем:

$$\lambda(E_t^0) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B_k^*) = 5^m \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B_k) \;\leqslant\; \frac{5^m}{t} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{B_k} |f(y)|\,dy =$$
$$= \frac{5^m}{t} \int_{\bigcup\limits_{k \geqslant 1} B_k} |f(y)|\,dy \;\leqslant\; \frac{5^m}{t} \int_{\mathbb{R}^m} |f(y)|\,dy.$$

Ввиду произвольности E_t^0 это неравенство справедливо и для E_t. ►

9.2. Обратимся теперь к главному вопросу, которому посвящён этот параграф: верно ли, что предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda(E_n(x))} \int_{E_n(x)} f(y)\,dy$, где $E_n(x)$ — множества положительной меры, стягивающиеся к точке x, почти везде существует и совпадает с $f(x)$? Учитывая аналогию с одномерным случаем, когда $E_n(x)$ — стягивающиеся к x промежутки, естественно рассматривать наш вопрос как вопрос о дифференцировании интеграла относительно системы множеств $\{E_n(x)\}$.

Очевидно, поведение функции f в "далёких" от x точках (в частности, её суммируемость на всём пространстве $\mathbb{R}^m$) не влияет на существование и на значение указанного предела. В связи с этим целесообразно ввести более широкий, чем $\mathscr{L}(\mathbb{R}^m)$, класс измеримых функций, который нередко возникает как в теории функций, так и в других разделах математики.

Определение. Измеримая в $\mathbb{R}^m$ функция f называется *локально суммируемой* в $\mathbb{R}^m$, если она суммируема на любом ограниченном множестве, т. е. если

$$\int_{B(0,R)} |f(x)|\,dx < +\infty \qquad \text{для любого} \quad R > 0.$$

Множество всех таких функций будем обозначать символом $\mathscr{L}_{loc}(\mathbb{R}^m)$.

Очевидно, всякая локально суммируемая функция почти везде конечна, а класс $\mathscr{L}_{loc}(\mathbb{R}^m)$ содержит как непрерывные, так и простые функции.

Прежде всего мы рассмотрим случай, когда система, относительно которой производится дифференцирование, есть семейство концентрических шаров. Наша главная цель — доказать следующий важный результат.

Теорема (Лебег). *Если $f \in \mathscr{L}_{loc}(\mathbb{R}^m)$, то*

$$\frac{1}{v(r)} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\,dy \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0 \tag{3}$$

при почти всех x. В частности,

$$\frac{1}{v(r)} \int_{B(x,r)} f(y)\,dy \underset{r\to 0}{\longrightarrow} f(x) \qquad \textit{почти везде.} \tag{3'}$$

Точка x, в которой справедливо соотношение (3), называется *точкой Лебега* функции f. Таким образом, теорему Лебега можно сформулировать и так:

почти каждая точка является точкой Лебега локально суммируемой функции.

Разумеется, всякая точка непрерывности функции есть её точка Лебега, так как $\frac{1}{v(r)} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\,dy \leqslant \sup\limits_{y\in B(x,r)} |f(y) - f(x)| \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Доказательству теоремы предпошлём полезную лемму.

Лемма. *Функцию f из $\mathscr{L}(X,\mu)$ можно аппроксимировать простыми функциями в следующем смысле: для любого $\varepsilon > 0$ существует такая простая функция g, что $\int_X |f - g|\,d\mu < \varepsilon$.*

Доказательство. Если функция f неотрицательна, то наше утверждение есть непосредственное следствие определения интеграла. В самом деле,

$$\int_X f\,d\mu = \sup\Big\{\int_X h\,d\mu \,\Big|\, 0 \leqslant h \leqslant f,\ h - \text{простая функция}\Big\},$$

и поэтому найдётся такая простая функция g, $0 \leqslant g \leqslant f$, что $\int_X f\,d\mu < \int_X g\,d\mu + \varepsilon$. Она и даёт требуемую аппроксимацию:

$$\int_X |f-g|\,d\mu = \int_X (f-g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu - \int_X g\,d\mu < \varepsilon.$$

В общем случае мы можем, очевидно, получить искомую функцию, аппроксимируя функции f_+ и f_-. ▶

Доказательство теоремы. Не умаляя общности, будем считать функцию f вещественной. Достаточно показать, что для любого $R > 0$ почти все точки шара $B(0,R)$ суть точки Лебега функции f. Доказывая это утверждение, зафиксируем радиус R и воспользуемся тем, что при $\|x\| < R$ справедливость (3) не зависит от значений функции, принимаемых ею вне шара $B(0,R)$. Это позволяет в дальнейшем считать, что $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m)$ (достаточно переопределить f нулём вне шара).

Дальнейшее рассуждение проведём, постепенно усложняя функцию f. Сначала предположим, что $f = \chi_E$ — характеристическая функция измеримого множества E. Тогда

$$|f(y) - f(x)| = |\chi_E(y) - \chi_E(x)| = \begin{cases} 1 - \chi_E(y), & \text{если } x \in E, \\ \chi_E(y), & \text{если } x \notin E. \end{cases}$$

Поэтому

$$\frac{1}{v(r)} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\,dy = \begin{cases} 1 - \frac{\lambda(E \cap B(x,r))}{v(r)}, & \text{если } x \in E, \\ \frac{\lambda(E \cap B(x,r))}{v(r)}, & \text{если } x \notin E. \end{cases}$$

В силу следствия 1 из теоремы Витали (см. п. II.7.3) почти каждая точка множества есть его точка плотности, из чего вытекает, что при $r \to 0$ правая часть последнего равенства стремится к нулю почти везде.

Очевидно, соотношение (3) остаётся верным и для любой линейной комбинации характеристических функций, т. е. для любой простой функции.

Обратимся теперь к главному случаю, когда f — произвольная суммируемая функция. Убедимся, что для произвольного $a > 0$ мера множества

$$E_a(f) = \left\{ x \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, \varlimsup_{r \to 0} \frac{1}{v(r)} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\,dy > a \right\}$$

равна нулю. Этого достаточно для завершения доказательства теоремы, поскольку точки, в которых нарушается соотношение (3), лежат в объединении $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_{1/n}(f)$.

Зафиксируем параметр $a > 0$ и оценим внешнюю меру множества $E_a(f)$ (не вдаваясь в вопрос о его измеримости). Очевидно,

$$\varlimsup_{r \to 0} \frac{1}{v(r)} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|\,dy \leqslant \varlimsup_{r \to 0} \frac{1}{v(r)} \int_{B(x,r)} |f(y)|\,dy + |f(x)| \leqslant M_f(x) + |f(x)|,$$

и поэтому

$$E_a(f) \subset \{x \in \mathbb{R}^m \mid M_f(x) > \tfrac{a}{2}\} \cup \{x \in \mathbb{R}^m \mid |f(x)| > \tfrac{a}{2}\}.$$

При этом

$$\lambda\big(\big\{x \in \mathbb{R}^m \big| \, |f(x)| > \tfrac{a}{2}\big\}\big) \leqslant \frac{2}{a} \int_{\mathbb{R}^m} |f(x)| \, dx \quad \text{(по неравенству Чебышева)},$$

$$\lambda\big(\big\{x \in \mathbb{R}^m \big| \, M_f(x) > \tfrac{a}{2}\big\}\big) \leqslant 2\frac{5^m}{a} \int_{\mathbb{R}^m} |f(x)| \, dx \quad \text{(по теореме 9.1)}.$$

Следовательно,

$$\lambda^*\big(E_a(f)\big) \leqslant \frac{C}{a} \int_{\mathbb{R}^m} |f(x)| \, dx \tag{4}$$

где C — коэффициент, зависящий только от размерности.

Для завершения доказательства теоремы покажем, что $\lambda^*\big(E_a(f)\big) = 0$. Как уже установлено, соотношение (3) справедливо почти везде для простой функции. Поэтому взяв произвольно такую функцию g и усреднив неравенство

$$|f(y) - f(x)| - |g(y) - g(x)| \leqslant |(f(y) - g(y)) - (f(x) - g(x))| \leqslant |f(y) - f(x)| + |g(y) - g(x)|$$

по шару $B(x, r)$, мы, переходя к верхнему пределу при $r \to 0$, убеждаемся, что $\lambda^*\big(E_a(f)\big) = \lambda^*\big(E_a(f - g)\big)$. Таким образом, неравенство (4) допускает существенное усиление: для произвольной простой функции g

$$\lambda^*\big(E_a(f)\big) = \lambda^*\big(E_a(f - g)\big) \leqslant \frac{C}{a} \int_{\mathbb{R}^m} |f(x) - g(x)| \, dx. \tag{4'}$$

Как установлено в лемме, правая часть этого неравенства может быть за счёт выбора g сделана сколь угодно малой. Таким образом, $\lambda^*(E_a(f)) = 0$. ▶

Замечание 1. Так как равенство (3) верно для любой непрерывной функции g, то для неё, как показывают проведённые рассуждения, верно также и неравенство (4′). Поэтому доказательство теоремы можно получить, используя не ступенчатые, а непрерывные функции и ссылаясь вместо леммы на теорему IX.2.3.

Замечание 2. Теорему легко перенести на формально более общую ситуацию, когда рассматривается функция, заданная не на всём пространстве $\mathbb{R}^m$. Назовём функцию f локально суммируемой в открытом множестве $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m$ или в произвольном промежутке $\Delta \subset \mathbb{R}$, если она суммируема на любом его компактном подмножестве. В этом случае соотношение (3) выполняется для почти всех точек из $\mathcal{O}$.

Действительно, множество $\mathcal{O}$ можно исчерпать последовательностью содержащихся в нём замкнутых кубов. Поэтому достаточно установить соотношение (3) для почти всех точек каждого такого куба Q. Это сразу следует из теоремы, применённой к функции f_Q, совпадающей с f на Q и равной нулю вне Q ($f_Q \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m) \subset \mathscr{L}_{loc}(\mathbb{R}^m)$, поскольку $\int_Q |f(x)| \, dx < +\infty$).

9.3. Обратимся теперь к знаменитой теореме Лебега, дающей то обобщение теоремы Барроу, о котором мы говорили в начале параграфа. Оно относится к функциям, представимым в виде интеграла с переменным верхним пределом.

Определение. Функция F, заданная на промежутке Δ, называется *абсолютно непрерывной* на нём, если её можно представить в виде

$$F(x) = F(c) + \int_c^x f(y)\,dy \qquad (x \in \Delta), \tag{5}$$

где $c \in \Delta$, а функция f локально суммируема на Δ.

Обратим внимание читателя на то, что если промежуток Δ замкнут, то функция f суммируема на Δ. В других случаях этого может не быть (см. упр. 4).

Из теоремы 6.1 вытекает, что всякая абсолютно непрерывная функция непрерывна. Обратное утверждение неверно даже для монотонных функций (см. упр. 4, 5). Простейшие примеры абсолютно непрерывных функций доставляют функции класса C^1. Очевидно, что функции $|x|$, $\sqrt{|x|}$ абсолютно непрерывны на $\mathbb{R}$. Как следует из замечания после формулы Ньютона–Лейбница (п. 6.1), функция, непрерывная и выпуклая на некотором промежутке, абсолютно непрерывна на нём.

В одномерном случае теорема 9.2 показывает, что если функция F определена равенством (5), то при $h \to 0$ почти везде существует предел отношения $\frac{F(x+h)-F(x-h)}{2h} = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(y)\,dy$, совпадающий с $f(x)$. Этот результат можно усилить, показав, что почти везде функция F дифференцируема в классическом смысле.

Теорема (Лебег). *Если функция F абсолютно непрерывна в промежутке Δ, то она дифференцируема почти везде, её производная локально суммируема и при любых x, $y \in \Delta$ справедлива формула Ньютона–Лейбница: $F(y) - F(x) = \int_x^y F'(t)\,dt$.*

Доказательство. Пусть функция F удовлетворяет равенству (5). Докажем, что при почти всех x она имеет производную справа, совпадающую с $f(x)$. Действительно, если $h > 0$, то

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(y)\,dy - f(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \big(f(y) - f(x)\big)\,dy.$$

Следовательно,

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| \leqslant \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(y) - f(x)|\,dy \leqslant \frac{1}{h}\int_{x-h}^{x+h} |f(y) - f(x)|\,dy,$$

где при $h \to 0$ правая часть бесконечно мала почти везде на Δ по теореме 9.2. Это доказывает существование производной справа. Ясно, что аналогично доказывается и существование производной слева, после чего справедливость формулы Ньютона–Лейбница становится очевидной. ►

Теорема показывает, что абсолютно непрерывные функции допускают следующее описание: функция F абсолютно непрерывна на промежутке Δ, если почти везде существует локально суммируемая на Δ производная F', с помощью которой можно восстановить функцию F:

$$F(x) = F(c) + \int_c^x F'(y)\,dy \quad (c,\, x \in \Delta).$$

Заметим, что локальная суммируемость существующей почти везде производной лишь необходима, но не достаточна для выполнения этого равенства (см. упр. 5).

9.4. При вычислении производной интеграла по множеству можно рассматривать и другие семейства, кроме концентрических шаров. Используя понятие регулярного покрытия (см. п. II.7.4), из теоремы 9.2 нетрудно получить

Следствие. *Если функция f локально суммируема в открытом подмножестве $\mathcal{O}$ пространства $\mathbb{R}^m$ и семейство $\{E_n(x)\}_{x\in X, n\in\mathbb{N}}$ образует регулярное покрытие множества $X \subset \mathcal{O}$, то*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\lambda(E_n(x))} \int_{E_n(x)} |f(y) - f(x)|\, dy \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{почти везде на} \quad X.$$

Отметим, что измеримость множества X не предполагается.

Доказательство. Пусть

$$\inf_n \frac{\lambda(E_n(x))}{v(r_n(x))} = \theta(x) > 0 \qquad \text{при любом } x \text{ из } X.$$

Тогда утверждение следствия вытекает из неравенства

$$\frac{1}{\lambda(E_n(x))} \int_{E_n(x)} |f(y) - f(x)|\, dy \leqslant \frac{1}{\theta(x) v(r_n(x))} \int_{B(x, r_n(x))} |f(y) - f(x)|\, dy,$$

правая часть которого почти везде стремится к нулю по теореме 9.2. ►

УПРАЖНЕНИЯ

1) Пусть $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$ при $x \in (0, \frac{1}{2})$ и $f(x) = 0$ в остальных точках. Докажите, что $M_f(x) \geqslant \frac{1}{|x \ln x|}$ при $x \in (0, \frac{1}{4})$, и, следовательно, максимальная функция не суммируема в любой окрестности нуля.

2) Приведите пример такой функции f из $\mathscr{L}(\mathbb{R})$, что максимальная функция M_f не суммируема на любом непустом интервале.

3) Пусть $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ при $x \neq 0$, $f(0) = 0$, $F(x) = \int_0^x f(y)\, dy$. Докажите, что 0 не точка Лебега функции f, но, однако, производная $F'(0)$ существует и равна нулю.

4) Докажите, что функция $f(x) = \int_0^x \sin \frac{1}{t} \frac{dt}{t}$ ($x \in [0, 1]$, непрерывна, но не абсолютно непрерывна на замкнутом промежутке $[0, 1]$, хотя абсолютно непрерывна на полуоткрытом промежутке $(0, 1]$.

5) Докажите, что канторова функция (см. п. II.3.2) не абсолютно непрерывна (хотя почти везде имеет нулевую производную).

§ 10. Мера и интеграл Лебега–Стилтьеса

Здесь мы рассмотрим важный класс мер, порождаемых возрастающими функциями. Одномерная мера Лебега может быть истолкована как масса подмножества вещественной прямой при условии, что плотность распределения массы постоянна. Отказавшись от постоянства плотности, мы приходим к понятию меры Лебега–Стилтьеса*).

*) Томас Ян **Стилтьес** (Stieltijes), 1856–1894, — нидерландский математик.

10.1. Перейдём к точным определениям. Пусть Δ — непустой открытый промежуток (конечный или нет), g — возрастающая функция, определённая на Δ. Символами $g(c-0)$, $g(c+0)$, где $c \in \Delta$, будем обозначать односторонние пределы $\lim\limits_{x\to c-0} g(x)$ и $\lim\limits_{x\to c+0} g(x)$. Они конечны, $g(c-0) \leqslant g(c+0)$ и функция g разрывна в точке c в том и только в том случае, когда $g(c-0) < g(c+0)$. Из возрастания g следует, что $g(c+0) \leqslant g(c'-0)$, если $c < c'$ $(c,\ c' \in \Delta)$. Поэтому интервалы $(g(c-0), g(c+0))$, соответствующие различным точкам разрыва, не пересекаются. Так как каждый такой интервал содержит рациональное число, то множество точек разрыва монотонной функции не более чем счётно.

Рассмотрим теперь полукольцо $\mathscr{P}(\Delta)$ всевозможных полуоткрытых справа конечных промежутков, содержащихся в Δ вместе с замыканием. Определим на $\mathscr{P}(\Delta)$ объём μ_g равенством

$$\mu_g\big([a,b)\big) = g(b-0) - g(a-0) \qquad (a, b \in \Delta,\ a \leqslant b).$$

Мы предоставляем читателю проверить, что определённая таким образом функция μ_g действительно является объёмом, т. е. что она неотрицательна и аддитивна. Может возникнуть вопрос, почему для определения объёма μ_g мы не воспользовались более простой формулой $\nu_g\big([a,b)\big) = g(b) - g(a)$ (см. пример 3 п. I.2.2). Разумеется, в случае непрерывности функции g или хотя бы её непрерывности слева оба равенства дают одно и то же. Причина, по которой приходится прибегать к более сложной формуле, заключается в том, что объём μ_g, как мы вскоре докажем, всегда является мерой, а функция ν_g (будучи объёмом) в случае, когда g не непрерывна слева, мерой не будет (см. пример 2 п. I.3.1).

Так как $g(u) \leqslant g(v-0) \leqslant g(v)$ при $u < v$ $(u,\ v \in \Delta)$, то $\lim\limits_{x\to c-0} g(x-0) = g(c-0)$ для $c \in \Delta$. Это сразу приводит к следующему свойству объёма μ_g, которое будет нам полезно при доказательстве его счётной аддитивности: если $[a,b] \subset \Delta$, то

$$\mu_g\big([a,b)\big) = \lim_{s\to a-0} \mu_g\big([s,b)\big) = \lim_{t\to b-0} \mu_g\big([a,t)\big). \tag{1}$$

10.2. Теорема. *Объём μ_g есть σ-конечная мера.*

Доказательство*). Нам нужно доказать лишь счётную аддитивность объёма μ_g, поскольку его σ-конечность очевидна. Для этого, как мы знаем (см. теорему I.3.2), достаточно проверить его счётную полуаддитивность, т. е. убедиться, что если $P,\ P_n \in \mathscr{P}(\Delta)$, $P \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} P_n$, то

$$\mu_g(P) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu_g(P_n). \tag{2}$$

Докажем неравенство (2) с точностью до ε, где ε — произвольное положительное число. Пусть $P = [a,b) \neq \varnothing$, $P_n = [a_n, b_n)$. Используя (1), найдём такие точки $s_n \in \Delta$, что $s_n < a_n$ и

$$\mu_g\big([s_n, b_n)\big) < \mu_g\big([a_n, b_n)\big) + \frac{\varepsilon}{2^n} \qquad (n \in \mathbb{N}). \tag{3}$$

*) Полезно сравнить это доказательство с доказательством счётной аддитивности классического объёма (теорема II.1.1).

Оценим сверху объём $\mu_g\big([a,t)\big)$ для произвольного $t \in (a,b)$. Очевидно,

$$[a,t] \subset P \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (s_n, b_n).$$

Так как сегмент $[a,t]$ компактен, то для достаточно большого номера N справедливо включение $[a,t] \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N} (s_n, b_n)$. И подавно $[a,t) \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N} [s_n, b_n)$. Поскольку объём μ_g полуаддитивен, неравенства (3) приводят к оценке

$$\mu_g\big([a,t)\big) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \mu_g\big([s_n,b_n)\big) < \sum_{n=1}^{N} \left(\mu_g\big([a_n,b_n)\big) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) < \sum_{n=1}^{\infty} \mu_g\big([a_n,b_n)\big) + \varepsilon.$$

Ещё раз применив равенство (1), мы видим, что

$$\mu_g\big([a,b)\big) = \lim_{t\to b-0} \mu_g\big([a,t)\big) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu_g\big([a_n,b_n)\big) + \varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε отсюда следует неравенство (2). ►

10.3. Теперь мы можем ввести основное понятие, которому посвящён этот параграф.

Определение. *Мерой Лебега–Стилтьеса,* порождённой возрастающей функцией g, называется стандартное продолжение объёма μ_g.

Для этой меры мы сохраним обозначение μ_g; σ-алгебру подмножеств промежутка Δ, на которой она определена, будем обозначать символом $\mathfrak{A}_g(\Delta)$. Мера Лебега оказывается частным случаем меры Лебега–Стилтьеса при $\Delta = \mathbb{R}$ и $g(x) \equiv x$.

Отметим, что в σ-алгебру $\mathfrak{A}_g(\Delta)$ входят все содержащиеся в Δ интервалы, а следовательно, все открытые и все борелевские подмножества Δ.

Вычислим меру μ_g одноточечного множества. Пусть $c \in \Delta$ и пусть $c_n \in \Delta$ такие точки непрерывности функции g, что $c_n > c_{n+1}$, $c_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} c$. Положим $P_n = [c, c_n)$. Тогда $P_n \supset P_{n+1}$ и $\bigcap\limits_{n\geqslant 1} P_n = \{c\}$. По непрерывности меры сверху мы получаем $\mu_g(P_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu_g(\{c\})$. Кроме того,

$$\mu_g(P_n) = g(c_n) - g(c-0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(c+0) - g(c-0),$$

откуда вытекает, что $\mu_g(\{c\}) = g(c+0) - g(c-0)$. Таким образом, мера $\mu_g(\{c\})$ положительна тогда и только тогда, когда c — точка разрыва функции g. При этом в точке c сосредоточена мера, равная величине скачка.

Зная меру одноточечного множества, легко подсчитать меру произвольного промежутка, содержащегося в Δ. Например, если $[a,b] \subset \Delta$, то

$$\mu_g\big([a,b]\big) = \mu_g\big([a,b) \cup \{b\}\big) = \mu_g\big([a,b)\big) + \mu_g\big(\{b\}\big) = g(b+0) - g(a-0).$$

Найти меру промежутков других типов мы предоставляем читателю.

Для различных функций g σ-алгебры $\mathfrak{A}_g$, вообще говоря, различны. Например, если возрастающая функция g постоянна на $(a,b) \subset \Delta$, то $\mu_g\big((a,b)\big) = 0$, и в силу полноты меры μ_g σ-алгебра $\mathfrak{A}_g(\Delta)$ содержит <u>все</u> подмножества этого интервала. Вместе с тем нам известно, что всякий невырожденный интервал (a,b) содержит множества, не измеримые по Лебегу (см. п. II.1.3).

Чтобы иметь дело с мерами, определёнными на одной и той же σ-алгебре, часто рассматривают меры Лебега–Стилтьеса лишь на борелевских множествах. Сужение меры μ_g на σ-алгебру борелевских множеств называется *мерой Бореля–Стилтьеса.*

До сих пор мы рассматривали случай, когда функция g, порождающая меру Лебега–Стилтьеса, определена на открытом промежутке Δ. Если он имеет вид $\Delta = [p,q)$, то на содержащихся в нём полуоткрытых справа промежутках мы определяем меру μ_g так же, как и раньше, с тем отличием, что под $g(p-0)$ следует теперь понимать $g(p)$. Тем самым в точке p окажется сосредоточена нагрузка, равная величине скачка. Если промежуток Δ замкнут справа, то следует считать, что в точке q сосредоточена нагрузка, равная $g(q) - g(q-0)$. Можно сказать, что если $\Delta = \langle p,q\rangle$ и $p \in \Delta$ ($q \in \Delta$), то мы продолжаем функцию g, считая её постоянной на полуоси $(-\infty,p]$ (соответственно на $[q,+\infty)$), а потом меру, порождённую продолженной функцией, рассматриваем только на подмножествах исходного промежутка.

Ясно, что если разность двух возрастающих функций постоянна, то они порождают одну и ту же меру Лебега–Стилтьеса. Однако так может быть и в других случаях, поскольку объём, а следовательно, и мера μ_g не зависят от выбора значений функции g в точках разрыва. Заменив в точках разрыва $g(x)$ на $\widetilde{g}(x) = g(x-0)$, мы получим "исправленную" функцию, которая порождает тот же объём, что и g, и при этом непрерывна слева в каждой точке. Таким образом, не умаляя общности можно считать, что объём μ_g порождается функцией, непрерывной слева, что иногда может быть удобно в техническом отношении. По поводу описания всех функций, порождающих одну и ту же меру, см. упр. 6.

Замечание. Мы ввели некоторый класс борелевских мер, определённых на подмножествах заданного промежутка Δ. Эти меры конечны на его компактных подмножествах. Естественно спросить, существуют ли другие борелевские меры, обладающие этим свойством? Убедимся, что это не так, считая во избежание некоторых второстепенных оговорок промежуток Δ открытым.

Рассмотрим конечную на $\mathscr{P}(\Delta)$ борелевскую меру ν, зафиксируем произвольно внутреннюю точку $p \in \Delta$ и введём функцию g равенством ($x \in \Delta$)

$$g(x) = \begin{cases} \nu\big([p,x)\big) & \text{при } x \geqslant p, \\ -\nu\big([x,p)\big) & \text{при } x < p. \end{cases}$$

Мы предоставляем читателю убедиться, что если $[a,b] \subset \Delta$, то $g(b) - g(a) = \nu\big([a,b)\big)$ и что функция g возрастает и непрерывна слева. Таким образом, меры ν и μ_g совпадают на $\mathscr{P}(\Delta)$, а следовательно (по теореме единственности), и на всех борелевских подмножествах промежутка Δ.

Заканчивая обсуждение определения меры Лебега–Стилтьеса, заметим, что если g_1 и g_2 — возрастающие функции, определённые на Δ, то для борелевских подмножеств Δ справедливо равенство $\mu_{g_1+g_2}(A) = \mu_{g_1}(A) + \mu_{g_2}(A)$, т. е. $\mu_{g_1+g_2} = \mu_{g_1} + \mu_{g_2}$ для любых мер Бореля–Стилтьеса. Однако в случае мер Лебега–Стилтьеса это, вообще говоря, не так, поскольку эти меры, как мы отмечали, могут быть определены на разных σ-алгебрах.

10.4. Рассмотрим два класса возрастающих функций, порождающих меры Стилтьеса различных типов.

Пусть функция g возрастает на промежутке Δ, Δ_0 — множество её точек разрыва, ω_x — скачок g (возможно, нулевой) в точке $x \in \Delta$. Заметим, что если $a, b \in \Delta$, $a < b$, то приращение функции g на промежутке $[a, b]$ не меньше суммы её скачков, соответствующих точкам разрыва из (a, b). Действительно,

$$\sum_{x\in(a,b)} \omega_x = \sum_{x\in(a,b)\cap\Delta_0} \omega_x \leqslant \mu_g\big((a,b)\big) = g(b-0) - g(a+0) \leqslant g(b) - g(a).$$

Отсюда, в частности, вытекает конечность суммы $\sum\limits_{x\in[a,b]} \omega_x$.

Определение. Возрастающая функция g называется *функцией скачков,* если её приращение, соответствующее любым двум точкам непрерывности, равно сумме скачков между ними, т. е. для любых точек непрерывности a, $b \in \Delta$, $a < b$, справедливо равенство $g(b) - g(a) = \sum\limits_{x\in(a,b)\cap\Delta_0} \omega_x$ $(= \sum\limits_{x\in(a,b)} \omega_x)$.

Простейшим примером функции скачков может служить функция $[x]$ — целая часть числа x. Однако возможны и более сложные ситуации, например, когда множество точек разрыва функции скачков всюду плотно в Δ.

Пример. Функцию скачков можно получить следующим образом. Пусть $\{x_1, x_2, \dots\}$ — произвольное счётное подмножество промежутка Δ, ω_1, ω_2, $\dots$ — положительные числа, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \omega_n < +\infty$. Положим

$$h(x) = \sum_{x_n<x} \omega_n = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n \chi_+(x - x_n),$$

где χ_+ — характеристическая функция полуоси $(0, +\infty)$. Ввиду равномерной сходимости ряда, определяющего функцию h, она двусторонне непрерывна в точках $x \neq x_n$. Так как при любом m

$$h(x) = \omega_m \chi_+(x - x_m) + \sum_{n\neq m}^{\infty} \omega_n \chi_+(x - x_n)$$

и сумма последнего ряда непрерывна в точке x_m, то функция h, как и $\chi_+(x - x_m)$, непрерывная слева в этой точке, и её скачок равен ω_m. Вместе с тем, если a, b — точки непрерывности, $a < b$, то $h(b) - h(a) = \sum\limits_{a<x_n<b} \omega_n$, и поэтому h — функция скачков. Увеличивая надлежащим образом значения h в точках разрыва, мы снова получим функцию скачков с заданными скачками слева и справа.

Заметим, что условие сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \omega_n$ можно ослабить. Читатель без труда убедится, что все проведённые при построении функции h рассуждения сохраняются, если заменить это условие более слабым: $\sum\limits_{x_n\in[a,b]} \omega_n < +\infty$ для любых $a, b \in \Delta$, $a < b$.

Выясним, какую меру порождает функция скачков g. Пусть, как и раньше, Δ_0 — множество её точек разрыва, ω_x — её скачок (возможно, нулевой) в точке $x \in \Delta$. Если a, $b \in \Delta$, $a < b$, то

$$\mu_g\big([a,b)\big) = g(b-0) - g(a-0) = \sum_{x\in[a,b)\cap\Delta_0} \omega_x = \mu_g\big([a,b)\cap\Delta_0\big). \tag{4}$$

Если a и b точки непрерывности g, то среднее равенство справедливо по определению функции скачков, в общем случае оно обосновывается с помощью предельного перехода. Из равенства (4) вытекает, что $\mu_g(\Delta) = \mu_g(\Delta_0)$ и, следовательно, $\mu_g(\Delta \setminus \Delta_0) = 0$. Ввиду полноты меры μ_g σ-алгебра $\mathfrak{A}_g(\Delta)$ совпадает с алгеброй всех подмножеств промежутка Δ.

Равенство (4) показывает, что на полукольце $\mathscr{P}(\Delta)$ мера μ_g совпадает с дискретной мерой, порождаемой нагрузками $\{\omega_x\}_{x\in\Delta}$ (см. п. I.3.1). По теореме единственности (п. I.5.1) эти меры тождественны. Таким образом, если g — функция скачков, то мера μ_g есть не что иное, как дискретная мера, порождаемая семейством скачков g.

Рассмотрим теперь в известном смысле противоположную ситуацию, когда функция g не только не имеет скачков, т. е. непрерывна, но и абсолютно непрерывна (см. п. 9.3). Как установлено в теореме 9.3, в этом случае она почти везде дифференцируема и её возрастание равносильно неотрицательности производной.

Докажем, что в этом случае мера μ_g имеет плотность (см. п. 5.3) относительно меры Лебега.

Лемма. *Пусть g — возрастающая функция, абсолютно непрерывная на промежутке Δ. Тогда $\mu_g(A) = \int_A g'(x)\,dx$ для любого измеримого по Лебегу множества $A \subset \Delta$.*

Доказательство. В самом деле, рассмотрим меру ν, определяемую на σ-алгебре $\mathfrak{A}(\Delta)$ измеримых по Лебегу подмножеств промежутка Δ равенством

$$\nu(A) = \int_A g'(x)\,dx \qquad (A \in \mathfrak{A}(\Delta)).$$

Так как меры ν и μ_g совпадают на полукольце $\mathscr{P}(\Delta)$, то по теореме единственности продолжения меры (см. п. I.5.1) мы получаем, что они совпадают и на всех борелевских множествах, а в силу полноты меры μ_g и на всей σ-алгебре $\mathfrak{A}(\Delta)$. Таким образом,

$$\mathfrak{A}(\Delta) \subset \mathfrak{A}_g(\Delta) \quad \text{и} \quad \mu_g(A) = \nu(A) \ \text{ для } A \in \mathfrak{A}(\Delta). \ \blacktriangleright$$

Замечание. Применяя теорему 5.3 к мере μ_g, порождённой функцией g, удовлетворяющей условию леммы, мы видим, что для любой измеримой по Лебегу неотрицательной функции f справедливо равенство

$$\int_\Delta f\,d\mu_g = \int_\Delta f g'\,d\lambda, \tag{5}$$

где λ — одномерная мера Лебега.

10.5. Учитывая, что меры Лебега–Стилтьеса могут быть определены на различных σ-алгебрах, мы в этом пункте, говоря о сумме мер, будем рассматривать только меры борелевских множеств, т. е. иметь в виду меры Бореля–Стилтьеса.

Пусть g — возрастающая функция, определённая на промежутке Δ, который мы во избежание очевидных оговорок будем считать открытым, $\{\omega_x\}_{x\in\Delta}$ — семейство её скачков, а $\Delta_0 = \{x \in \Delta \,|\, \omega_x > 0\}$ — множество её точек разрыва. Зафиксируем произвольно точку $p \in \Delta$ и положим

$$h(x) = \begin{cases} \sum\limits_{t\in[p,x)} \omega_t & \text{при } \ x > p, \\ 0 & \text{при } \ x = p, \\ -\sum\limits_{t\in[x,p)} \omega_t & \text{при } \ x < p \end{cases}$$

(сравните с формулой из замечания в п. 10.3). Если считать, что $\Delta_0 = \{x_1, x_2, \dots\}$ и $h_n \equiv \omega_{x_n}$, то функция h совпадает с функцией, рассмотренной в примере 10.4. Как мы отмечали, семейство нагрузок не обязательно предполагать суммируемым; в нашем случае оно суммируемо на каждом замкнутом промежутке, содержащемся в Δ, чего достаточно для построения функции h. Как было показано в примере 10.4, функция h возрастает, имеет те же точки разрыва и те же скачки, что и g, и является функцией скачков. Изменяя в случае необходимости значения h в точках разрыва, можно добиться того, что она будет иметь такие же скачки слева и справа, что и g. Считая, что h обладает этим свойством, мы получим, что разность $g_c = g - h$ есть непрерывная функция. Эта функция возрастает. Действительно, пусть $a, b \in \Delta,\ a < b$. Доказывая неравенство $g_c(b) - g_c(a) \geqslant 0$, мы, учитывая непрерывность g_c, можем считать a и b точками непрерывности g (и h). В этом случае

$$g_c(b) - g_c(a) = g(b) - g(a) - (h(b) - h(a)) = g(b) - g(a) - \sum_{x\in(a,b)} \omega_x \geqslant 0,$$

поскольку приращение возрастающей функции на промежутке $[a, b]$ не меньше суммы её скачков, соответствующих точкам разрыва из (a, b).

Итак, всякая возрастающая функция представима в виде суммы функции скачков и непрерывной возрастающей функции: $g = h + g_c$.

Рассмотрим теперь (борелевские) меры μ_g, μ_{g_c} и μ_h, соответствующие этим функциям. Ясно, что если $a, b \in \Delta,\ a < b$, то

$$g(b-0) - g(a-0) = h(b-0) - h(a-0) + g_c(b) - g_c(a),$$

то есть

$$\mu_g\big([a,b)\big) = \mu_h\big([a,b)\big) + \mu_{g_c}\big([a,b)\big).$$

Таким образом, на полукольце $\mathscr{P}(\Delta)$ мера μ_g совпадает с суммой мер $\mu_h + \mu_{g_c}$. По теореме единственности эти меры совпадают и на борелевской оболочке полукольца $\mathscr{P}(\Delta)$, т. е. на всех борелевских подмножествах интервала Δ. Следовательно (см. п. 4.2, свойство 9), для любой неотрицательной (измеримой) функции f справедливо равенство

$$\int_\Delta f\, d\mu_g = \int_\Delta f\, d\mu_h + \int_\Delta f\, d\mu_{g_c}.$$

Поскольку функции скачков соответствует дискретная мера, интеграл по мере μ_h вычисляется согласно общей формуле (см. п. 2.4):

$$\int_\Delta f\, d\mu_h = \sum_{x\in\Delta_0} f(x)\omega_x.$$

Вычисление интеграла по мере μ_{g_c} может оказаться достаточно сложной задачей (см. упр. 7 и 8). Она существенно упрощается, если функция g_c абсолютно непрерывна. В этом случае, согласно равенству (5)

$$\int_\Delta f\,d\mu_{g_c} = \int_\Delta f g_c'\,d\lambda.$$

В заключение заметим, что интеграл по мере μ_g называют интегралом Лебега–Стилтьеса или просто интегралом Стилтьеса. Для его обозначения наряду с символами $\int_A f\,d\mu_g$, $\int_A f(x)\,d\mu_g(x)$ применяется также несколько более короткие классические обозначения $\int_A f\,dg$, $\int_A f(x)\,dg(x)$, которыми мы в дальнейшем обычно будем пользоваться.

10.6. В этом пункте мы получим обобщение формулы интегрирования по частям для интегралов Стилтьеса.

Теорема. *Пусть функция g не убывает, а функция F абсолютно непрерывна на $[a,b]$. Тогда*

$$\int_{[a,b]} F(x)\,dg(x) = F(x)\,g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F'(x)g(x)\,dx.$$

Доказательство. Так как $F' = (F')_+ - (F')_-$, где $(F')_\pm \geqslant 0$, то нам достаточно доказать формулу интегрирования по частям в случае, когда $F' \geqslant 0$, что мы и будем далее предполагать.

Пусть τ — произвольное дробление промежутка $[a,b]$ точками $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$. В силу возрастания функции g при $k = 0, 1, \ldots, n-1$ справедливы неравенства

$$\big(F(x_{k+1}) - F(x_k)\big)g(x_k) = g(x_k)\int_{x_k}^{x_{k+1}} F'(x)\,dx \leqslant \int_{x_k}^{x_{k+1}} F'(x)\,g(x)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant g(x_{k+1})\int_{x_k}^{x_{k+1}} F'(x)\,dx = \big(F(x_{k+1}) - F(x_k)\big)g(x_{k+1}).$$

Складывая их, мы получаем:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\big(F(x_{k+1}) - F(x_k)\big)g(x_k) \leqslant \int_a^b F'(x)\,g(x)\,dx \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\big(F(x_{k+1}) - F(x_k)\big)g(x_{k+1}). \qquad (6)$$

Преобразуем сумму, стоящую в левой части этого неравенства:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\big(F(x_{k+1}) - F(x_k)\big)g(x_k) = \sum_{k=1}^{n} F(x_k)g(x_{k-1}) - \sum_{k=0}^{n-1} F(x_k)g(x_k) =$$
$$= F(b)g(b) - F(a)g(a) - \sum_{k=1}^{n} F(x_k)\big(g(x_k) - g(x_{k-1})\big) = F(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - S_\tau.$$

Преобразовав аналогичным образом сумму, стоящую в правой части неравенства (6), получим

$$\sum_{k=0}^{n-1}\big(F(x_{k+1})-F(x_k)\big)g(x_{k+1})=F(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=b}-S'_\tau,$$

где $S'_\tau=\sum\limits_{k=0}^{n-1}F(x_{k+1})(g(x_k)-g(x_{k-1}))$. Таким образом,

$$F(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=b}-S_\tau\leqslant\int_a^b F'(x)\,g(x)\,dx\leqslant F(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=b}-S'_\tau.$$

Будем считать теперь, что точки дробления, лежащие внутри $[a,b]$, суть точки непрерывности функции g. В этом случае суммы S_τ и S'_τ оказываются интегральными суммами для интеграла $\int_{[a,b]}F(x)\,dg(x)$. Поэтому, измельчая дробление и переходя к пределу, мы согласно замечанию к теореме 7.3 получим равенство

$$F(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=b}-\int_{[a,b]}F(x)\,dg(x)=\int_a^b F'(x)g(x)\,dx,$$

которое равносильно доказываемому. ►

Другое доказательство этой теоремы приведено в следствии 3 п. V.3.4.

Следует иметь в виду, что доказанная формула интегрирования по частям справедлива в случае, когда функция g задана на замкнутом промежутке $[a,b]$, и, следовательно, в соответствии с определением мера μ_g имеет в точках a и b нагрузки $g(a+0)-g(a)$ и $g(b)-g(b-0)$. Если мера μ_g порождена функцией, заданной на интервале, содержащем $[a,b]$, то равенство

$$\int_{[a,b]}F(x)\,dg(x)=F(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=b}-\int_a^b F'(x)g(x)\,dx$$

может нарушаться, так как меры одноточечных множеств $\{a\}$ и $\{b\}$ могут не совпадать с указанными выше односторонними скачками. Однако формула интегрирования по частям заведомо остаётся справедливой, если нагрузок в точках a и b нет, т. е. если это точки непрерывности функции g. В случае, когда функция g непрерывна слева, формула интегрирования по частям всегда справедлива при интегрировании по промежутку, полуоткрытому справа:

$$\int_{[a,b)}F(x)\,dg(x)=F(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=b}-\int_a^b F'(x)g(x)\,dx.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1) Сосчитайте интеграл $\int_{[\frac{1}{\sqrt{15}},2]}x\,dg(x)$, где $g(x)=x-\left[\frac{1}{x}\right]$ (символ $[a]$ обозначает здесь целую часть числа a).

2) Пусть $g(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{-n}\chi_+(x-\frac{1}{n})$ $(x\in\mathbb{R})$, где χ_+ — характеристическая функция полуоси $(0,+\infty)$. Разнятся ли (и насколько) интегралы $\int_\delta x^2\,dg(x)$ по промежуткам $\delta=(\frac{2}{3},1)$ и $\delta=[\frac{2}{3},1]$; по промежуткам $(\frac{1}{3},\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{3},\frac{1}{2}]$ и $[\frac{1}{3},\frac{1}{2})$?

3) Вычислите интегралы $\int_{\frac{1}{2}}^{2} g\,dg$ (g — из упр. 1 и 2). Являются ли эти интегралы пределами соответствующих интегральных сумм?

4) Докажите, что если возрастающая функция g непрерывна на $[a,b]$, то формула

$$\int_{[a,b]} g^{\sigma}\,dg = \frac{g^{\sigma+1}(b) - g^{\sigma+1}(a)}{\sigma+1}$$

верна при любом $\sigma > 0$. Так ли это, если отказаться от непрерывности g?

5) Докажите, что мера, порождённая на $(0,+\infty)$ функцией $g(x) = \ln x$, определена на измеримых по Лебегу множествах и инвариантна относительно умножения на положительное число c (т. е. множества $A \subset (0,+\infty)$ и $cA = \{cx \,|\, x \in A\}$ в случае измеримости имеют одинаковую меру).

6) Докажите, что если две возрастающие функции порождают одну и ту же меру Лебега–Стилтьеса, то их разность постоянна на множестве (общих) точек непрерывности.

7) Найдите интеграл $\int_0^1 x\,d\varphi(x)$, где φ — канторова функция (см. п. II.3.2).

8) Докажите, что интеграл $F(y) = \int_0^1 e^{iyx} d\varphi(x)$ ($y \in \mathbb{R}$), где φ — канторова функция, равен $e^{iy/2} \prod\limits_{k=1}^{\infty} \cos\frac{y}{3^k}$. Убедитесь, что $F(y) \not\to 0$ при $|y| \to +\infty$.

9) Докажите, что если функция f непрерывна, а функция g возрастает на $[a,b]$, то интеграл Лебега–Стилтьеса $\int_{[a,b]} f\,d\mu_g$ есть предел классических интегральных сумм $S_\tau(f,\xi) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\big(g(x_{k+1}) - g(x_k)\big)$ при условии, что ранг дробления стремится к нулю.

10) Пусть $f \in C\big([-1,1]\big)$, φ — канторова функция, $a_\varepsilon = 2\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k}{3^k}$, где $\varepsilon = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$, $\varepsilon_k = 0$ или 1 (a_ε — левые концы сегментов n-го ранга, возникающих при построении канторова множества). Докажите, что при $n \to \infty$

$$\frac{1}{2^n}\sum_{\varepsilon} f(x - a_\varepsilon) \rightrightarrows \int_0^1 f(x-y)\,d\varphi(y) \quad \text{на } [0,1].$$

11) Назовём два пространства с мерами $(X,\mathfrak{A},\mu)$ и $(Y,\mathfrak{B},\nu)$ изоморфными, если существуют такие множества $e \subset X$ и $e' \subset Y$ нулевой меры и такая биекция $\Phi\colon X\setminus e \to Y\setminus e'$, что множества $A \subset X\setminus e$ и $\Phi(A)$ измеримы одновременно и в случае измеримости их меры равны. Докажите, что если меру Лебега на отрезке $[0,1]$ заменить мерой, соответствующей канторовой функции φ, то мы получим изоморфное пространство с мерой. Указание. Используйте равенство $\varphi(\mathcal{C}) = [0,1]$.

§ 11. Функции ограниченной вариации

11.1. Рассмотрим функцию f, определённую на замкнутом промежутке $[a,b]$. Для произвольного дробления τ сегмента $[a,b]$ точками $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$ положим

$$S_\tau = \sum_{k=0}^{n-1} \big|f(x_{k+1}) - f(x_k)\big|.$$

Очевидно, при добавлении к τ новых точек дробления сумма S_τ может разве лишь возрасти.

Определение. Величина $\sup_\tau S_\tau$ называется *вариацией* функции f на промежутке $[a,b]$ и обозначается символом $\mathbf{V}_a^b(f)$. Функция, вариация которой конечна, называется функцией *ограниченной вариации* или функцией с ограниченным изменением.

Очевидно, что если функция удовлетворяет на промежутке $[a,b]$ условию Липшица, то её вариация конечна. Следует, однако, иметь в виду, что если функция удовлетворяет условию Липшица с показателем $\alpha < 1$, то её вариация не только на промежутке $[a,b]$, но и на любом (невырожденном) частичном промежутке может быть бесконечной (см. упр. 4).

Отметим некоторые свойства вариации.

1) $\mathbf{V}_a^b(f) \geqslant |f(b) - f(a)|$.

2) Монотонная функция f имеет конечную вариацию, причём $\mathbf{V}_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$.

3) Линейная комбинация функций ограниченной вариации снова есть функция ограниченной вариации, причём

$$\mathbf{V}_a^b(f+g) \leqslant \mathbf{V}_a^b(f) + \mathbf{V}_a^b(g) \quad \text{и} \quad \mathbf{V}_a^b(\alpha f) = |\alpha|\mathbf{V}_a^b(f)| \ \text{ при } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Установим одно менее очевидное свойство вариации — её аддитивность.

Теорема. *Если $a < c < b$, то* $\mathbf{V}_a^b(f) = \mathbf{V}_a^c(f) + \mathbf{V}_c^b(f)$.

Теорема относится как к случаю конечных, так и бесконечных вариаций.

Доказательство. Пусть τ — произвольное дробление промежутка $[a,b]$, образованное точками $x_0, \dots, x_n$. Предположим, что одна из них — например, x_m — совпадает с c. Тогда точки $x_0, \dots, x_m$ и $x_m, \dots, x_n$ образуют дробления промежутков $[a,c]$ и $[c,b]$ соответственно. Поэтому

$$S_\tau = \sum_{k=0}^{m-1} \bigl|f(x_{k+1}) - f(x_k)\bigr| + \sum_{k=m}^{n-1} \bigl|f(x_{k+1}) - f(x_k)\bigr| \leqslant \mathbf{V}_a^c(f) + \mathbf{V}_c^b(f).$$

Это неравенство остаётся справедливым и в том случае, если точка c не входит в число точек дробления, так как при добавлении её к точкам дробления сумма S_τ не уменьшается. Следовательно,

$$\mathbf{V}_a^b(f) \leqslant \mathbf{V}_a^c(f) + \mathbf{V}_c^b(f).$$

С другой стороны, если τ' и τ'' — произвольные дробления промежутков $[a,c]$ и $[c,b]$, состоящие из точек $y_0, \dots, y_p$ и $z_0, \dots, z_q$, то $z_0 = y_p$ и точки $y_0, \dots, y_p, z_1, \dots, z_q$ образуют разбиение τ промежутка $[a,b]$, причём

$$S_{\tau'} + S_{\tau''} = S_\tau \leqslant \mathbf{V}_a^b(f).$$

Переходя в этом неравенстве к супремуму сначала по τ', а затем по τ'', мы видим, что

$$\mathbf{V}_a^c(f) + \mathbf{V}_c^b(f) \leqslant \mathbf{V}_a^b(f).$$

Вместе с полученным ранее противоположным неравенством это доказывает теорему. ►

Как видно из свойств 2) и 3), разность возрастающих функций есть функция ограниченной вариации. Из доказанной теоремы вытекает, что верно и обратное.

Следствие. *Функция ограниченной вариации есть разность возрастающих функций.*

Действительно, очевидно, что функция $V(x) = \mathbf{V}_a^x(f)$ возрастает. Кроме того, из свойства 1) и теоремы следует, что разность $W(x) = \mathbf{V}_a^x(f) - f(x)$ также возрастает. В самом деле, если $x,\, y \in [a,b]$, $x < y$, то

$$W(y) - W(x) = \big(\mathbf{V}_a^y(f) - \mathbf{V}_a^x(f)\big) - \big(f(y) - f(x)\big) \geqslant \mathbf{V}_x^y(f) - |f(y) - f(x)| \geqslant 0.$$

Поэтому представление

$$f = V - W \tag{1}$$

— искомое. ►

Из этого следствия, в частности, вытекает, что множество точек разрыва функции ограниченной вариации не более чем счётно.

11.2. Теорема. *Пусть функция f имеет ограниченную вариацию на промежутке $[a,b]$, $V(x) = \mathbf{V}_a^x(f)$ при $a < x \leqslant b$, $V(a) = 0$. Если функция f непрерывна в точке $c \in [a,b]$, то и функция V непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Установим непрерывность V справа (непрерывность слева доказывается аналогично). Пусть $a \leqslant c < b$. По следствию из теоремы 11.1 функцию f можно представить в виде разности возрастающих функций: $f = g - h$. Поэтому для $x \in (c,b)$ мы имеем

$$0 \leqslant V(x) - V(c) = \mathbf{V}_c^x(f) = \mathbf{V}_c^x(g-h) \leqslant \mathbf{V}_a^x(g) + \mathbf{V}_a^x(h) = \big(g(x) - g(c)\big) + \big(h(x) - h(c)\big).$$

Правая часть неравенства бесконечно мала при $x \to c$, если функции g и h непрерывны в точке c. Убедимся, что это можно предполагать не умаляя общности. Действительно, если они разрывны в точке c, то они имеют в ней одинаковые скачки, поскольку их разность $g - h$ непрерывна. Изменим функции g, h, уменьшив их на промежутке $(c,b]$ на величину скачка и доопределив в точке c пределами справа. Как легко проверить, изменённые функции возрастают, непрерывны в точке c и их разность совпадает с $g-h$, т. е. с f. ►

Поскольку справедливо представление (1), из доказанной теоремы вытекает, что функцию ограниченной вариации можно представить в виде разности возрастающих функций, непрерывных там же, где непрерывна функция f.

11.3. Теорема. *Если функция f абсолютно непрерывна на промежутке $[a,b]$, то она имеет ограниченную вариацию, причём*

$$\mathbf{V}_a^b(f) = \int_a^b |f'(t)|\,dt. \tag{2}$$

Доказательство. По условию $f(x) = f(a) + \int_a^x \omega(t)\,dt$ при $x \in [a,b]$, где функция ω (почти везде совпадающая с f' по теореме 9.3) суммируема на $[a,b]$. Следовательно, для любого разбиения $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$

$$\sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_k}^{x_{k+1}} f'(t)\,dt \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f'(t)|\,dt = \int_a^b |f'(t)|\,dt.$$

Поэтому f имеет конечную вариацию и

$$\mathbf{V}_a^b(f) \leqslant \int_a^b |f'(t)|\,dt. \tag{3}$$

Докажем противоположное неравенство с точностью до произвольного числа $\varepsilon > 0$. Для этого, пользуясь абсолютной непрерывностью интеграла и регулярностью меры Лебега, найдём такие замкнутые множества $Q_+ \subset \{x \in [a,b] \mid f'(x) \geqslant 0\}$ и $Q_- \subset \subset \{x \in [a,b] \mid f'(x) < 0\}$, что

$$\int_{[a,b]\setminus Q} |f'(x)|\,dx < \varepsilon, \quad \text{где} \quad Q = Q_+ \cup Q_-. \tag{4}$$

Так как множества $Q_\pm$ не пересекаются и компактны, то они отделены друг от друга — существует такое число $\delta > 0$, что $|x-y| \geqslant \delta$ для любых $x \in Q_+$, $y \in Q_-$.

Рассмотрим теперь столь мелкое разбиение τ промежутка $[a,b]$ точками $x_0 = a < < x_1 < \ldots < x_n = b$, что $x_{k+1} - x_k < \delta$ для всех k. Тогда каждый промежуток $\Delta_k = [x_k, x_{k+1}]$ может пересекаться разве лишь с одним из множеств $Q_\pm$. Поэтому на пересечении $\Delta_k \cap Q$ функция f' не меняет знак и, следовательно,

$$|f(x_{k+1}) - f(x_k)| = \left|\int_{\Delta_k} f'(x)\,dx\right| \geqslant \left|\int_{\Delta_k \cap Q} f'(x)\,dx\right| - \int_{\Delta_k \setminus Q} |f'(x)|\,dx =$$
$$= \int_{\Delta_k \cap Q} |f'(x)|\,dx - \int_{\Delta_k \setminus Q} |f'(x)|\,dx.$$

Сложив эти неравенства, получим оценку снизу суммы $S_\tau = \sum\limits_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$:

$$S_\tau \geqslant \int_{[a,b]\cap Q} |f'(x)|\,dx - \int_{[a,b]\setminus Q} |f'(x)|\,dx = \int_a^b |f'(x)|\,dx - 2\int_{[a,b]\setminus Q} |f'(x)|\,dx.$$

С учётом (4) отсюда вытекает неравенство $\mathbf{V}_a^b(f) \geqslant S_\tau > \int_a^b |f'(x)|\,dx - 2\varepsilon$. Ввиду произвольности ε мы имеем $\mathbf{V}_a^b(f) \geqslant \int_a^b |f'(x)|\,dx$, что вместе с (3) влечёт равенство (2). ►

В дальнейшем (см. теорему XI.1.6) мы, используя другую идею, получим более общий результат.

Отметим, что абсолютно непрерывная на $[a,b]$ функция f представима в виде разности абсолютно непрерывных возрастающих функций, поскольку

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(y)\,dy = \int_a^x (f'(y))_+\,dy - \int_a^x (f'(y))_-\,dy.$$

11.4. Исходя из определения интеграла Стилтьеса можно ввести полезное в ряде случаев понятие интеграла по функции ограниченной вариации. Предварительно заметим, что если возрастающие на промежутке $[a,b]$ функции g, h, g_1, h_1 удовлетворяют условию $g - h = g_1 - h_1$, то для любой ограниченной измеримой по Борелю функции φ справедливо равенство $\int_a^b \varphi\,dg - \int_a^b \varphi\,dh = \int_a^b \varphi\,dg_1 - \int_a^b \varphi\,dh_1$. В самом деле, по условию

$g+h_1 = g_1+h$, и соответствующее равенство справедливо и для мер Бореля–Стилтьеса: $\mu_g + \mu_{h_1} = \mu_{g_1} + \mu_g$. Поэтому (см. п. 4.2, свойство 9)

$$\int_a^b \varphi\, d\mu_g + \int_a^b \varphi\, d\mu_{h_1} = \int_a^b \varphi\, d\mu_{g_1} + \int_a^b \varphi\, d\mu_h,$$

что и доказывает наше утверждение.

Определение. Пусть функция f имеет ограниченную вариацию на промежутке $[a,b]$, а φ измерима по Борелю и ограничена на $[a,b]$. *Интегралом по* $[a,b]$ *от* φ *по* f, обозначаемым $\int_a^b \varphi\, df$, называется разность $\int_a^b \varphi\, dg - \int_a^b \varphi\, dh$, где возрастающие функции g и h таковы, что $g-h=f$.

Сделанное перед определением замечание обосновывает корректность этого определения: разность $\int_a^b \varphi\, dg - \int_a^b \varphi\, dh$ не зависит от выбора возрастающих функций g, h, удовлетворяющих условию $g-h=f$.

Очевидно, что интеграл по функции ограниченной вариации обладает свойством линейности, поскольку оно справедливо для интегралов Стилтьеса. По этой же причине для интеграла по функции ограниченной вариации справедлива формула интегрирования по частям (ср. с теоремой 10.6):

$$\int_a^b \varphi(x)\, df(x) = \varphi(x)\, f(x)\Big|_a^b - \int_a^b \varphi'(x) f(x)\, dx,$$

где функция φ абсолютно непрерывна, а f имеет ограниченную вариацию на $[a,b]$.

Если функция f абсолютно непрерывна на $[a,b]$, то справедлива формула, обобщающая формулу (5) предыдущего параграфа:

$$\int_a^b \varphi\, df = \int_a^b \varphi f'\, d\lambda,$$

где λ — одномерная мера Лебега.

Отметим ещё одно свойство интеграла по функции ограниченной вариации.

Теорема. *Если функция* φ *непрерывна, а функция* f *имеет ограниченную вариацию на промежутке* $[a,b]$, *то*

$$\left|\int_a^b \varphi\, df\right| \leqslant \sup_{[a,b]} |\varphi| \cdot \mathbf{V}_a^b(f).$$

Как мы покажем позже (см. теорему XI.1.8), это неравенство справедливо не только для непрерывной, но и для любой измеримой по Борелю ограниченной функции φ.

Доказательство. Мы используем то обстоятельство, что, как и в случае интеграла Стилтьеса, для интеграла по функции ограниченной вариации справедлива теорема 7.3 — интеграл есть предел интегральных сумм.

Рассмотрим произвольное дробление $\tau = \{x_0, \dots, x_n\}$ промежутка $[a, b]$ и соответствующую ему сумму:

$$S_\tau = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(\xi_k)\big(f(x_{k+1}) - f(x_k)\big),$$

где $\xi_k \in [x_k, x_{k+1})$. Очевидно,

$$|S_\tau| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |\varphi(\xi_k)|\,|f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leqslant M \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \leqslant M \cdot \mathbf{V}_a^b(f), \qquad (4)$$

где $M = \sup\limits_{[a,b]} |\varphi|$.

Функция f представима в виде разности $f = g - h$, где функции g и h возрастают (см. следствие из теоремы 11.1). Поэтому

$$S_\tau = S'_\tau - S''_\tau, \text{ где } S'_\tau = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(\xi_k)\big(g(x_{k+1}) - g(x_k)\big),\ S''_\tau = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(\xi_k)\big(h(x_{k+1}) - h(x_k)\big).$$

Если считать (а это возможно), что все внутренние точки дробления суть точки непрерывности функций g и h, то суммы S'_τ и S''_τ оказываются интегральными суммами. Поэтому при измельчении дробления они по теореме 7.3, а вместе с ними и сумма S_τ, стремятся к соответствующим интегралам, и для завершения доказательства нам остаётся только перейти к пределу в неравенстве (4). ►

УПРАЖНЕНИЯ

1) Произведение двух функций ограниченной вариации снова есть функция ограниченной вариации; частное двух функций ограниченной вариации снова есть функция ограниченной вариации при условии, что функция, стоящая в знаменателе, отделена от нуля.

2) Пусть f, g — функции ограниченной вариации, определённые на $[a, b]$. Покажите, что формула интегрирования по частям может быть неверной. Будет ли она верной, если предположить, что хотя бы одна из функций непрерывна на $[a, b]$?

3) Используя функцию $x^2 \sin \frac{1}{x^2}$, покажите, что на замкнутом промежутке дифференцируемая функция (в отличие от гладкой) может иметь бесконечную вариацию.

4) Проверьте, что функция $x \mapsto f(x) = (\ln x)^{-1} \sin(\ln x)$ при $0 < x \leqslant 1$, $f(0) = 0$, имеет бесконечную вариацию и удовлетворяет условию Липшица с любым показателем, меньшим единицы. С помощью ряда вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n f(x - x_n)$ постройте функцию, удовлетворяющую условию Липшица с любым показателем, меньшим единицы, и имеющую бесконечную вариацию на любом частичном промежутке.

Глава V. ПРОИЗВЕДЕНИЕ МЕР

§ 1. Определение произведения мер

Наша цель — по двум мерам, заданным на подмножествах множеств X, Y, построить новую меру, так называемое произведение мер, заданную на подмножествах декартова произведения $X \times Y$. Определение произведения мер опирается на теорему I.4.5 о стандартном продолжении меры и на теорему 1.2. При доказательстве последней мы будем пользоваться свойствами интеграла. Существует и другой способ её доказательства, не зависящий от понятия интеграла. Он технически сложнее приводимого нами, но представляет особый интерес, поскольку позволяет дать альтернативное определение интеграла. Мы рассмотрим этот вопрос подробнее в § 5.

Все меры в этой главе предполагаются σ-конечными.

1.1. Доказательство следующей леммы мы предоставляем читателю.

Лемма. *Пусть A, $A' \subset X$, B, $B' \subset Y$ и $\{B_\omega\}_{\omega\in\Omega}$ — семейство подмножеств множества Y. Тогда*

1) $A \times B \subset A' \times B'$, *если и только если* $A \subset A'$ *и* $B \subset B'$;

2) $(A \times B) \cap (A' \times B') = (A \cap A') \times (B \cap B')$;

3) $A \times (B \setminus B') = (A \times B) \setminus (A \times B')$;

4) $A \times \bigcup\limits_{\omega\in\Omega} B_\omega = \bigcup\limits_{\omega\in\Omega} (A \times B_\omega)$;

5) $A \times \bigcap\limits_{\omega\in\Omega} B_\omega = \bigcap\limits_{\omega\in\Omega} (A \times B_\omega)$.

Аналогичные свойства справедливы, если поменять ролями первый и второй сомножители.

1.2. Перейдём к построению произведения мер.

Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — два пространства с σ-конечными мерами. Положим

$$\mathscr{P} = \{\, A \times B \mid A \in \mathfrak{A},\ \mu(A) < +\infty,\ \ B \in \mathfrak{B},\ \nu(B) < +\infty \,\}.$$

Множества $A \times B \in \mathscr{P}$ будем называть *измеримыми прямоугольниками.*

Определим на $\mathscr{P}$ функцию m_0 равенством

$$m_0(A \times B) = \mu(A)\,\nu(B).$$

Теорема. *Система $\mathscr{P}$ измеримых прямоугольников есть полукольцо. Функция m_0 — σ-конечная мера на $\mathscr{P}$.*

Доказательство. Так как системы множеств $\{A \in \mathfrak{A} \,|\, \mu(A) < +\infty\}$, $\{B \in \mathfrak{B} \,|\, \nu(B) < +\infty\}$ являются, очевидно, полукольцами, то первое утверждение теоремы есть частный случай теоремы I.1.5.

Для доказательства второго утверждения теоремы убедимся сначала в счётной аддитивности функции m_0. Заметим, что если $A \subset X$, $B \subset Y$, то

$$\chi_{A\times B}(x,y) = \chi_A(x)\,\chi_B(y) \quad \text{при} \;\; x \in X,\; y \in Y.$$

Пусть измеримые прямоугольники $P_k = A_k \times B_k$, $k \in \mathbb{N}$, попарно дизъюнктны и их объединение $P \equiv \bigcup\limits_{k\geqslant 1} P_k$ принадлежит полукольцу $\mathscr{P}$. Тогда $P = A \times B$, где $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$, и $\chi_P = \sum\limits_{k\geqslant 1} \chi_{P_k}$, т. е.

$$\chi_A(x)\,\chi_B(y) = \sum_{k\geqslant 1} \chi_{A_k}(x)\,\chi_{B_k}(y) \quad \text{при} \;\; x \in X,\; y \in Y.$$

Почленное интегрирование этого неотрицательного ряда по мере ν (возможность чего вытекает из теоремы Леви, см. п. IV.8.2) даёт нам равенство

$$\chi_A(x)\,\nu(B) = \sum_{k\geqslant 1} \chi_{A_k}(x)\,\nu(B_k) \quad \text{при} \;\; x \in X.$$

Снова используя законность почленного интегрирования (на этот раз по мере μ), мы получаем, что

$$\mu(A)\,\nu(B) = \sum_{k\geqslant 1} \mu(A_k)\,\nu(B_k), \quad \text{то есть} \quad m_0(P) = \sum_{k\geqslant 1} m_0(P_k).$$

Тем самым счётная аддитивность функции m_0 доказана.

Ввиду σ-конечности мер μ, ν множества X, Y допускают представления

$$X = \bigcup_{k\geqslant 1} X_k, \quad Y = \bigcup_{k\geqslant 1} Y_k, \quad \text{где} \;\; \mu(X_k) < +\infty,\; \nu(Y_k) < +\infty \;\text{при}\; k \in \mathbb{N}.$$

Теперь σ-конечность меры m_0 следует из равенства

$$X \times Y = \bigcup_{k,n\geqslant 1} X_k \times Y_n. \;\blacktriangleright$$

Замечание. Как видно из доказательства теоремы, мы не использовали σ-конечность мер μ и ν при доказательстве счётной аддитивности m_0. σ-конечность мер-сомножителей влечёт σ-конечность m_0, что, в свою очередь, обеспечивает единственность продолжения m_0.

1.3. Доказанная теорема позволяет нам ввести следующее

Определение. Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ и $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ пространства с σ-конечными мерами. Мера, полученная стандартным продолжением с полукольца $\mathscr{P}$ меры m_0, рассмотренной в теореме 1.2, называется *произведением мер* μ и ν. Она обозначается символом $\mu \times \nu$, а σ-алгебра, на которой она определена, — символом $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$. Пространство с мерой $(X \times Y, \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}, \mu \times \nu)$ называется *произведением пространств с мерой* $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ и $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$.

Замечания. 1) Простейшим примером произведения пространств с мерой является произведение одномерных мер Лебега, которое, как мы докажем в § 4, есть не что иное, как мера Лебега на плоскости. Аналогично, мера Лебега в $\mathbb{R}^3$ есть произведение плоской и одномерной мер Лебега.

2) Декартово произведение измеримых множеств есть измеримое множество. Если $\mu(e) = 0$, то $(\mu \times \nu)(e \times Y) = 0$.

В самом деле, пусть $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$. Если меры этих множеств конечны, то их произведение $A \times B$ измеримо по определению произведения мер. В общем случае каждое из множеств A, B можно представить в виде объединения множеств конечной меры A_k и B_n соответственно ($k, n \in \mathbb{N}$). Поэтому множество

$$A \times B = \bigcup_{k \geqslant 1} (A_k \times B) = \bigcup_{k \geqslant 1} \bigcup_{n \geqslant 1} (A_k \times B_n)$$

измеримо как счётное объединение измеримых множеств.

Пусть $\mu(e) = 0$. Так как $Y = \bigcup\limits_{k \geqslant 1} Y_k$, где $\nu(Y_k) < +\infty$, то $e \times Y = \bigcup\limits_{k \geqslant 1} (e \times Y_k)$, причём $(\mu \times \nu)(e \times Y_k) = \mu(e) \cdot \nu(Y_k) = 0$. Поэтому

$$(\mu \times \nu)(e \times Y) \leqslant \sum_{k \geqslant 1} (\mu \times \nu)(e \times Y_k) = \sum_{k \geqslant 1} 0 = 0. \ \blacktriangleright$$

Определение произведения двух пространств с мерой естественным образом обобщается на случай произвольного числа сомножителей. Например, если

$$(X_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1), \quad (X_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2), \quad (X_3, \mathfrak{A}_3, \mu_3)$$

три пространства с σ-конечными мерами и $\mathcal{R}_0$ — система “измеримых параллелепипедов”, т. е. множества вида $A \times B \times C$, где $A \subset X_1$, $B \subset X_2$, $C \subset X_3$ — измеримые множества конечной меры, то мы можем определить на $\mathcal{R}_0$ функцию ν_0 равенством

$$\nu_0(A \times B \times C) = \mu_1(A)\, \mu_2(B)\, \mu_3(C).$$

Повторяя с необходимыми дополнениями рассуждения, проведённые при доказательстве теоремы 1.2, мы убеждаемся, что $\mathcal{R}_0$ есть полукольцо, а ν_0 — σ-конечная мера. Произведением мер $\mu_1 \times \mu_2 \times \mu_3$ называется стандартное продолжение меры ν_0. Определённое таким образом перемножение мер ассоциативно: $(\mu_1 \times \mu_2) \times \mu_3 = \mu_1 \times (\mu_2 \times \mu_3) = \mu_1 \times \mu_2 \times \mu_3$, что мы предоставляем читателю проверить самостоятельно (см. упр. 1). Аналогичным образом может быть определено произведение любого конечного семейства мер.

УПРАЖНЕНИЯ

1) Пусть $(X_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$, $(X_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$, $(X_3, \mathfrak{A}_3, \mu_3)$ три пространства с σ-конечными мерами. Отождествляя каноническим образом множества $(X_1 \times X_2) \times X_3$, $X_1 \times (X_2 \times X_3)$ и $X_1 \times X_2 \times X_3$, докажите, что произведение мер ассоциативно, т. е. что $(\mu_1 \times \mu_2) \times \mu_3 = \mu_1 \times (\mu_2 \times \mu_3) = \mu_1 \times \mu_2 \times \mu_3$. Указание. Пользуясь единственностью продолжения меры (теорема I.5.1) и полнотой стандартного продолжения, убедитесь, что эти меры определены на одной и той же σ-алгебре.

§ 2. Вычисление меры множества по мерам сечений. Интеграл как мера подграфика

Напомним, что функцию f, определённую почти везде на пространстве с мерой $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, мы называем измеримой в широком смысле, если она измерима на некотором множестве $X_0 \subset X$ полной меры. В этом случае она почти везде совпадает с функцией, измеримой на X. Интеграл $\int_X f\,d\mu$ есть по определению $\int_{X_0} f\,d\mu$ (см. п. IV.3.3).

2.1. Пусть X, Y — произвольные множества и $C \subset X \times Y$. Положим

$$C_x = \{y \in Y \mid (x, y) \in C\}, \quad C^y = \{x \in X \mid (x, y) \in C\}.$$

Определение. Множества C_x, C^y будем называть *сечениями* множества C соответственно *первого* и *второго рода.*

Подчеркнём, что сечения первого и второго рода являются подмножествами множеств Y и X соответственно. Отметим некоторые свойства сечений.

Лемма. *Пусть $\{C_\omega\}_{\omega\in\Omega}$, — семейство подмножеств декартова произведения $X \times Y$. Тогда*

$$\Big(\bigcup_{\omega\in\Omega} C_\omega\Big)_x = \bigcup_{\omega\in\Omega} (C_\omega)_x \qquad \text{и} \qquad \Big(\bigcap_{\omega\in\Omega} C_\omega\Big)_x = \bigcap_{\omega\in\Omega} (C_\omega)_x.$$

Кроме того, $(C \setminus C')_x = C_x \setminus C'_x$ для любых множеств C, $C' \subset X \times Y$ и $C_x \cap C'_x = \varnothing$, если $C \cap C' = \varnothing$.

Доказательство леммы предоставляется читателю.

2.2. Следующая теорема показывает, что мера множества $C \subset X \times Y$ целиком определяется мерами его сечений. Этот факт есть далеко идущее обобщение знаменитого принципа Кавальери*), гласящего, что объёмы двух тел равны, если при пересечении их произвольной плоскостью, параллельной данной, получающиеся в сечениях фигуры имеют одинаковые площади.

Теорема (принцип Кавальери). *Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — пространства с σ-конечными полными мерами, $m = \mu \times \nu$. Если $C \in \mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$, то*

1) $C_x \in \mathfrak{B}$ *при почти всех* $x \in X$;
2) *функция* $x \mapsto \nu(C_x)$ *измерима в широком смысле на* X;
3) $m(C) = \int_X \nu(C_x)\,d\mu(x)$.

Аналогичные утверждения справедливы и для сечений второго рода.

Отметим, что мы не исключаем случая, когда рассматриваемая в утверждении 2) функция принимает и бесконечные значения.

Следует иметь в виду, что измеримость сечений множества C (одновременно как первого, так и второго рода) даже вместе с выполнением условия 2) теоремы отнюдь не гарантирует измеримости C. Это вытекает, в частности, из существования неизмеримого по Лебегу плоского множества, пересечение которого с каждой прямой состоит

*) Франческа Бонавентура **Кавальери** (Cavalieri), 1598–1647, — итальянский математик.

не более, чем из двух точек. Пример такого множества, построенный Серпинским*), приведён в [ГО], стр. 181.

Доказательство проведём в несколько шагов и на первых трёх из них будем предполагать, что меры μ и ν конечны.

1) Докажем сначала утверждения теоремы для множеств из борелевской оболочки полукольца $\mathscr{P}$. Здесь, как и в предыдущем параграфе, $\mathscr{P}$ — полукольцо измеримых прямоугольников, т. е. множеств вида $A \times B$, где $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$. Отметим, что в рассматриваемом случае $X \times Y \in \mathscr{P}$.

Рассмотрим систему $\mathcal{E}$ множеств $E \subset X \times Y$, удовлетворяющих условиям:

$$\text{I)} \quad E_x \in \mathfrak{B} \ \text{ при всех } \ x \in X;$$

$$\text{II)} \quad \text{функция } \ x \mapsto \nu(E_x) \ \text{ измерима на } \ X.$$

Каждое множество входит в $\mathcal{E}$ одновременно со своим дополнением E^c, поскольку $(E^c)_x = Y \setminus E_x$ и $\nu\big((E^c)_x\big) = \nu(Y) - \nu(C_x)$ (для справедливости последнего равенства важна конечность меры ν).

Кроме того, вместе с возрастающей последовательностью множеств в $\mathcal{E}$ входит и их объединение. Действительно, пусть

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \quad \text{где } \ E_1 \subset E_2 \subset \ldots \ \text{ и } \ E_n \in \mathcal{E} \ \text{ при всех } \ n \in \mathbb{N}.$$

Тогда $E_x \in \mathfrak{B}$ для всех $x \in X$, так как по лемме $E_x = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} (E_n)_x$. Вместе с тем по теореме о непрерывности меры снизу $\nu\big((E_n)_x\big) \to \nu(E_x)$. Поэтому функция $x \mapsto \nu(E_x)$ измерима как предел измеримых функций. Таким образом, система $\mathcal{E}$ есть монотонный класс. Отметим ещё одно её свойство: если входящие в $\mathcal{E}$ множества A и B не пересекаются, то $A \vee B \in \mathcal{E}$. Это следует из равенств:

$$(A \vee B)_x = A_x \vee B_x, \qquad \nu\big((A \vee B)_x\big) = \nu(A_x) + \nu(B_x).$$

Очевидно, система $\mathcal{E}$ содержит полукольцо $\mathscr{P}$. Вместе с ним она содержит всевозможные конечные объединения входящих в $\mathscr{P}$ множеств, поскольку по теореме о свойствах полукольца (см. п. I.1.4) каждое такое объединение можно представить в виде объединения попарно дизъюнктных множеств из $\mathscr{P}$. Так как $X \times Y \in \mathcal{E}$, то по следствию из этой теоремы система $\mathcal{E}$ содержит алгебру множеств, порождённую $\mathscr{P}$. Поэтому $\mathcal{E}$ удовлетворяет условию теоремы о монотонном классе (п. I.6.3) и, следовательно, содержит всю борелевскую оболочку $\mathfrak{B}(\mathscr{P})$ полукольца $\mathscr{P}$. В частности, для множеств, входящих в $\mathfrak{B}(\mathscr{P})$, справедливы утверждения 1) и 2) теоремы.

Убедимся, что для множеств из $\mathfrak{B}(\mathscr{P})$ справедливо и равенство 3). Рассмотрим на этой σ-алгебре функцию $E \mapsto \int_X \nu(E_x)\, d\mu(x)$. Как следует из леммы 2.1 и счётной аддитивности интеграла, это мера. Читатель без труда проверит самостоятельно, что на множествах из полукольца $\mathscr{P}$ она совпадает с m. Поэтому равенство 3) вытекает из единственности продолжения меры.

---

*) Вацлав **Серпинский** (Sierpiński), 1882–1969, — польский математик.

Итак, теорема доказана для множеств, принадлежащих $\mathfrak{B}(\mathscr{P})$. Отметим, что пока мы не использовали в доказательстве полноту мер μ, ν и доказали, что сечения множества из $\mathfrak{B}(\mathscr{P})$ измеримы всегда (а не только при почти всех $x \in X$).

2) Рассмотрим теперь случай, когда C — множество из $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ и $m(C) = 0$. Пусть $\widetilde{C}$ — содержащее C множество из $\mathfrak{B}(\mathscr{P})$, имеющее нулевую меру (его существование доказано в следствии из теоремы I.5.2). Тогда

$$\int_X \nu(\widetilde{C}_x)\, d\mu(x) = m(\widetilde{C}) = 0.$$

Поэтому $\nu(\widetilde{C}_x) = 0$ при почти всех $x \in X$. Ввиду включения $C_x \subset \widetilde{C}_x$ и полноты меры ν мы получаем, что множество C_x измеримо, если $\nu(\widetilde{C}_x) = 0$, т. е. при почти всех $x \in X$. После этого остальные утверждения теоремы для множества C очевидны.

3) Обратимся к общему случаю. Снова используя следствие из теоремы I.5.2, представим C в виде $C = \widetilde{C} \setminus e$, где $\widetilde{C}$ — множество из $\mathfrak{B}(\mathscr{P})$, а $m(e) = 0$. Поэтому множество $C_x = \widetilde{C}_x \setminus e_x$ измеримо при почти всех $x \in X$ вместе с множеством e_x. Следовательно, значения (определённой почти везде) функции $x \mapsto \nu(C_x) = \nu(\widetilde{C}_x) - \nu(e_x)$ почти всюду совпадают с $\nu(\widetilde{C}_x)$, что влечёт её измеримость на множестве полной меры и равенство

$$m(C) = m(\widetilde{C}) = \int_X \nu(\widetilde{C}_x)\, d\mu(x) = \int_X \nu(C_x)\, d\mu(x).$$

Таким образом, в случае конечных мер μ, ν теорема доказана.

4) Перейдём к случаю, когда меры μ, ν бесконечны. Тогда множества X, Y можно представить в виде $X = \bigvee\limits_{n \geqslant 1} X_n$, $Y = \bigvee\limits_{n \geqslant 1} Y_n$, где X_n, Y_n — множества конечной меры. Рассмотрим измеримое множество $C \subset X \times Y$. Ясно, что

$$m(C) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m(C_{k,n}), \quad \text{где} \;\; C_{k,n} = C \cap (X_k \times Y_n).$$

Применяя к каждому из множеств $C_{k,n} \subset X_k \times Y_n$ уже доказанную часть теоремы, мы видим, что при любых $k, n \in \mathbb{N}$

$$m(C_{k,n}) = \int_{X_k} \nu(Y_n \cap C_x)\, d\mu(x).$$

Так как $C_x = \bigvee\limits_{n=1}^{\infty} (Y_n \cap C_x)$, то $\nu(C_x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \nu(Y_n \cap C_x)$. Следовательно,

$$\int_X \nu(C_x)\, d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{X_k} \nu(C_x)\, d\mu(x) =$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{X_k} \nu(Y_n \cap C_x)\, d\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m(C_{k,n}) = m(C).$$

Заключительная часть доказательства верна, конечно, и в случае, когда бесконечна лишь одна из мер. Например, если $\nu(Y) < +\infty$, мы можем вместо $X_k \times Y_n$ рассматривать лишь множества $X_k \times Y$. ►

Замечание. Как видно из доказательства, если рассматривать только сечения первого рода, то для справедливости теоремы достаточно предполагать лишь полноту меры ν. Это обстоятельство мы используем уже в следующей теореме.

Следствие. *Пусть*

$$P_1(C) = \{\, x \in X \mid C_x \neq \varnothing\}, \quad P_2(C) = \{\, y \in Y \mid C^y \neq \varnothing\}$$

— канонические проекции подмножества $C \subset X \times Y$ на множества X и Y. Если проекция $P_1(C)$ ($P_2(C)$) измерима, то $m(C) = \int_{P_1(C)} \nu(C_x)\, d\mu(x)$ (соответственно $m(C) = \int_{P_2(C)} \mu(C^y)\, d\nu(y)$).

Это равенство непосредственно вытекает из теоремы, поскольку $C_x = \varnothing$ и $\nu(C_x) = 0$ при $x \notin P_1(C)$. ►

Заметим, что от предположения об измеримости проекции отказаться нельзя, поскольку проекция измеримого множества может не быть измеримой. Например, график характеристической функции неизмеримого множества измерим, так как он содержится в множестве нулевой меры $(X \times \{0\}) \cup (X \times \{1\})$, но его проекция на X неизмерима.

2.3. Перейдём теперь к вопросу о "геометрическом смысле" интеграла. Мы будем считать, что фиксированы пространство с σ-конечной мерой $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ и функция f на X со значениями в $\overline{\mathbb{R}}$. До конца параграфа символ m обозначает произведение меры μ и одномерной меры Лебега λ.

Определение. *Подграфиком* неотрицательной функции f над множеством $E \subset X$ называется множество

$$\mathscr{P}_f(E) = \{\, (x, y) \in X \times \mathbb{R} \mid x \in E,\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}.$$

Графиком функции $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}$ назовём множество

$$\Gamma_f(E) = \{\, (x, y) \in X \times \mathbb{R} \mid x \in E,\ y = f(x)\}.$$

Отметим, что функция f может принимать и бесконечные значения. Однако даже в этом случае по нашему определению множества $\mathscr{P}_f(E)$, $\Gamma_f(E)$ содержатся в $X \times \mathbb{R}$, а не в $X \times \overline{\mathbb{R}}$. В случае, когда $E = X$, мы будем просто говорить о подграфике и графике функции f и обозначать их символами $\mathscr{P}_f$ и Γ_f.

Прежде всего убедимся в справедливости следующего утверждения, с частными случаями которого мы уже встречались (см. следствие II.3.1 и упр. 1 в § II.3).

Лемма. *Если вещественная функция f измерима на множестве E, то $m\big(\Gamma_f(E)\big) = 0$. Если неотрицательная функция f измерима в широком смысле, то её подграфик измерим.*

Доказательство. В силу σ-конечности меры μ нам достаточно ограничиться случаем $\mu(E) < +\infty$. Зафиксируем произвольно малое число $\varepsilon > 0$ и положим

$$e_k = \{x \in E \mid k\varepsilon \leqslant f(x) < (k+1)\varepsilon\}, \quad \text{где} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Очевидно, множества e_k попарно дизъюнктны (они исчерпывают E, если функция f принимает лишь конечные значения). Кроме того, $\Gamma_f(e_k) \subset e_k \times [k\varepsilon, (k+1)\varepsilon)$ и поэтому

$$\Gamma_f(E) \subset \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} e_k \times [k\varepsilon, (k+1)\varepsilon) = H_\varepsilon.$$

Множество H_ε измеримо и

$$m(H_\varepsilon) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varepsilon\, \mu(e_k) \leqslant \varepsilon\, \mu(E).$$

Таким образом, график может быть погружен в множество произвольно малой меры. Ввиду полноты меры m отсюда вытекает, что он измерим и имеет нулевую меру (см. лемму I.5.3).

Перейдём к доказательству измеримости подграфика измеримой функции. Рассмотрим сначала случай, когда функция f простая. Пусть $\{E_k\}_{k=1}^N$ — допустимое разбиение для f, $\{a_k\}_{k=1}^N$ — соответствующие значения функции. Ясно, что

$$\mathscr{P}_f(E_k) = E_k \times [0, a_k] \quad \text{и} \quad \mathscr{P}_f = \bigcup_{k=1}^N E_k \times [0, a_k].$$

Отсюда видно, что подграфик простой функции измерим как объединение измеримых прямоугольников.

Если функция f измерима на X, аппроксимируем её поточечно возрастающей последовательностью неотрицательных простых функций $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ (см. теорему III.2.2). Читатель легко проверит справедливость включений

$$\mathscr{P}_f \setminus \Gamma_f \subset \bigcup_{n\geqslant 1} \mathscr{P}_{f_n} \subset \mathscr{P}_f\,.$$

Поскольку, как мы доказали, $m(\Gamma_f) = 0$, из них следует, что подграфик лишь множеством меры нуль отличается от объединения последовательности измеримых множеств и, следовательно, сам измерим. Из этого вытекает и измеримость $\mathscr{P}_f(E)$, так как $\mathscr{P}_f(E) = \mathscr{P}_f \cap (E \times \mathbb{R})$. Подграфик $\mathscr{P}_f(E)$ измерим для любой функции f, измеримой на E, поскольку мы можем считать её сужением функции, измеримой на всем X.

Пусть, наконец, функция f измерима в широком смысле, т. е. измерима на некотором множестве X_0 полной меры. Ясно, что

$$\mathscr{P}_f = \mathscr{P}_f(X_0) \cup \mathscr{P}_f(e),$$

где $e = X \setminus X_0$, $\mu(e) = 0$. Множество $\mathscr{P}_f(X_0)$ измеримо по доказанному выше, а подграфик $\mathscr{P}_f(e)$ измерим в силу полноты меры m, поскольку

$$\mathscr{P}_f(e) \subset e \times \mathbb{R} \quad \text{и} \quad m(e \times \mathbb{R}) = 0. \ \blacktriangleright$$

Обратимся теперь к главному в этом пункте результату.

Теорема (о мере подграфика). *Пусть λ — мера Лебега в $\mathbb{R}$, $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с σ-конечной мерой, $m = \mu \times \lambda$, и пусть f — неотрицательная функция, определённая на X. Функция f измерима в широком смысле тогда и только тогда, когда измерим её подграфик. В этом случае*

$$\int_X f\,d\mu = m(\mathscr{P}_f). \tag{1}$$

Доказательство. Измеримость подграфика неотрицательной измеримой функции установлена в лемме.

Предположим теперь, что подграфик функции f измерим. Очевидно, что сечение $\big(\mathscr{P}_f\big)_x$ совпадает с промежутком $[0, f(x)]$, если $f(x) < +\infty$ и с $[0, +\infty)$, если $f(x) = +\infty$. По теореме 2.2 (см. также замечание к ней, где указывается, что если рассматривать лишь сечения первого рода, то полноты меры μ можно не предполагать) мы получаем, что функция $x \mapsto \lambda\big(\big(\mathscr{P}_f\big)_x\big) = f(x)$ измерима в широком смысле и справедливо равенство (1). ►

Замечания. 1) Доказанная теорема ещё раз подтверждает целесообразность принятого нами определения измеримой функции: неотрицательные измеримые в широком смысле функции — это как раз те функции, подграфикам которых естественным образом может быть приписана мера. Если произведение мер построено без использования понятия интеграла, то равенство (1) может быть принято за определение интеграла от неотрицательной измеримой функции. При этом некоторые свойства интеграла становятся очевидными. Например, теорема Леви непосредственно вытекает из непрерывности меры $\mu \times \lambda$ снизу. Мы вернёмся к обсуждению такого определения в п. 5.2.

2) Для неположительной функции f можно ввести аналог подграфика — множество

$$\widetilde{\mathscr{P}}_f(E) = \{\,(x, y) \in E \times \mathbb{R} \,|\, x \in E,\ f(x) \leqslant y \leqslant 0\}.$$

Аппроксимируя функцию $(-f)$ простыми, легко убедиться, что теорема 2.3 остаётся справедливой и для неположительных функций при замене подграфика множеством $\widetilde{\mathscr{P}}_f(E)$, а равенства (1) равенством $m\big(\widetilde{\mathscr{P}}_f(E)\big) = \int_E |f|\,d\mu = -\int_E f\,d\mu$. Таким образом, для любой интегрируемой функции f справедливо равенство

$$\int_X f\,d\mu = m\big(\mathscr{P}_f(E_+)\big) - m\big(\widetilde{\mathscr{P}}_f(E_-)\big),$$

где $E_\pm = E(\pm f > 0)$. Если μ — мера Лебега и множества $\mathscr{P}_f(E_+)$, $\widetilde{\mathscr{P}}_f(E_-)$ конгруэнтны (в частности, если множество E центрально симметрично, а функция f нечётна), то $\int_E f\,d\mu = 0$.

УПРАЖНЕНИЯ

1) Пусть f, g измеримые почти везде конечные функции, определённые на пространстве с мерой $(X, \mathfrak{A}, \mu)$. Докажите, что если $g \leqslant f$, то множество

$$Q = \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} \,|\, x \in X,\ g(x) \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

измеримо в $X \times \mathbb{R}$ и $m(Q) = \int_X (f - g)\,d\mu$, где $m = \mu \times \lambda$, λ — мера Лебега в $\mathbb{R}$.

2) Докажите, что если попарно не пересекающиеся круги, содержащиеся в квадрате, исчерпывают его с точностью до множества нулевой меры, то сумма длин граничных окружностей бесконечна.

§ 3. Кратные и повторные интегралы

Наша цель — научиться сводить вычисление интеграла по произведению мер к вычислению интегралов по мерам-сомножителям. Мы рассматриваем здесь только вещественные функции, поскольку на комплексный случай все получаемые результаты переносятся очевидным образом.

3.1. С каждой функцией f, заданной на множестве $C \subset X \times Y$, можно связать два семейства функций, "зафиксировав одну из переменных". Точнее, это означает, что на каждом непустом сечении C_x можно определить функцию f_x, действующую по правилу $f_x(y) = f(x,y)$, а на сечении C^y — функцию f^y, $f^y(x) = f(x,y)$. Эти обозначения будут часто использоваться в дальнейшем.

Переходя к изучению связи интеграла по произведению мер и интегралов по мерам-сомножителям, рассмотрим прежде всего случай, когда интегрируемая функция неотрицательна. Справедлива следующая важная

Теорема (Тонелли*). *Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — пространства с σ-конечными полными мерами, $m = \mu \times \nu$. Пусть f — определённая на $X \times Y$ неотрицательная измеримая относительно σ-алгебры $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{B}$ функция. Тогда*

1) *при почти всех $x \in X$ функция f_x измерима на Y;*

1′) *при почти всех $y \in Y$ функция f^y измерима на X;*

2) *функция*

$$x \mapsto \varphi(x) \equiv \int_Y f_x \, d\nu = \int_Y f(x,y) \, d\nu(y)$$

измерима в широком смысле на X;

2′) *функция*

$$y \mapsto \psi(y) \equiv \int_X f^y \, d\mu = \int_X f(x,y) \, d\mu(x)$$

измерима в широком смысле на Y;

3) *справедливы равенства*

$$\int_{X \times Y} f \, dm = \int_X \varphi \, d\mu = \int_Y \psi \, d\nu. \tag{1}$$

Замечание. Последнее равенство можно подробнее записать так:

$$\int_{X \times Y} f(x,y) \, dm(x,y) = \int_X \left(\int_Y f(x,y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y) \, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Интеграл в левой части этого равенства называется двойным, а остальные интегралы — повторными. Подчеркнём, что при вычислении двойных интегралов очень часто используется равенство повторных интегралов, или, как говорят, "возможность изменения порядка интегрирования" (см., в частности, примеры 1 и 2 ниже).

Доказательство. Рассмотрим три случая, шаг за шагом усложняя функцию f.

1) Пусть $f = \chi_C$ — характеристическая функция измеримого множества $C \subset X \times Y$. Тогда при любых x из X и y из Y

$$f_x(y) = \chi_C(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{если } (x,y) \in C, \\ 0, & \text{если } (x,y) \notin C, \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{если } y \in C_x, \\ 0, & \text{если } y \notin C_x, \end{cases} = \chi_{C_x}(y).$$

*) Леонида **Тонелли** (Tonelli), 1885–1946, — итальянский математик.

Таким образом, $f_x = \chi_{C_x}$. Поскольку по теореме 2.2 множества C_x измеримы при почти всех x, то же самое справедливо и для f_x. Интегрируя равенство $f_x = \chi_{C_x}$, мы видим, что

$$\varphi(x) = \int_Y f_x \, d\nu = \nu(C_x).$$

По теореме 2.2 функция φ измерима в широком смысле. Наконец, интегрируя последнее равенство, мы, снова по теореме 2.2, получаем нужное равенство

$$\int_X \varphi(x) \, d\mu(x) = \int_X \nu(C_x) \, d\mu(x) = m(C) = \int_{X \times Y} f \, dm.$$

2) Пусть теперь f — простая функция. Тогда $f = \sum\limits_{k=1}^{N} c_k \chi_{C_k}$, где $c_k \geqslant 0$. Следовательно, $f_x = \sum\limits_{k=1}^{N} c_k (\chi_{C_k})_x$ и $\varphi(x) = \sum\limits_{k=1}^{N} c_k \nu((C_k)_x)$, откуда следует справедливость утверждений 1) — 3).

3) В общем случае аппроксимируем f простыми функциями f_n, образующими возрастающую последовательность. Тогда $f_x = \lim\limits_{n\to\infty} (f_n)_x$, что обеспечивает измеримость f_x при почти всех x из X. Так как $(f_n)_x \leqslant (f_{n+1})_x$, то по теореме Леви

$$\varphi(x) = \int_Y f_x(y) \, d\nu(y) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x),$$

где функция φ_n определяется равенством $\varphi_n(x) = \int_Y (f_n)_x(y) \, d\nu(y)$. Очевидно, $\varphi_n \leqslant \varphi_{n+1}$ почти везде. Снова используя теорему Леви, мы получаем

$$\int_X \varphi(x) \, d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_X \varphi_n(x) \, d\mu(x) = \lim_{n\to\infty} \int_{X\times Y} f_n \, dm = \int_{X\times Y} f \, dm.$$

Утверждения 1′), 2′) и второе из равенств (1) доказываются аналогично. ►

Следствие 1. *Пусть f — неотрицательная измеримая функция, определённая на (измеримом) множестве $C \subset X \times Y$. Если проекция $P_1(C)$ измерима, то*

$$\int_C f \, dm = \int_{P_1(C)} \left(\int_{C_x} f(x,y) \, d\nu(y) \right) d\mu(x). \tag{1′}$$

Для доказательства достаточно доопределить функцию f нулём вне множества C и использовать утверждение 3) теоремы. ►

Аналогичное равенство справедливо и в случае измеримости проекции $P_2(C)$:

$$\int_C f \, dm = \int_{P_2(C)} \left(\int_{C^y} f(x,y) \, d\mu(x) \right) d\nu(y). \tag{1″}$$

Следствие 2. *Если функция f измерима на $X \times Y$, то*

1) *при почти всех $x \in X$ функция f_x измерима на Y;*

2) *если $\int_Y |f_x(y)| d\nu(y) < +\infty$ при почти всех $x \in X$, то функция $x \mapsto \int_Y f(x,y) d\nu(y)$ измерима в широком смысле на X.*

Аналогичные утверждения справедливы и для функции f^y.

Доказательство. Первое утверждение вытекает из равенства $f_x = (f_+)_x - (f_-)_x$ и измеримости функций $(f_\pm)_x$ (см. теорему Тонелли). Для доказательства

второго утверждения достаточно заметить, что (снова по теореме Тонелли) функции $x \mapsto \int_Y (f_\pm)_x(y)\,d\nu(y)$ измеримы в широком смысле. Они почти везде конечны и поэтому их разность

$$\int_Y f_+(x,y)\,d\nu(y) - \int_Y f_-(x,y)\,d\nu(y) = \int_Y f(x,y)\,d\nu(y)$$

определена и измерима на множестве полной меры. ►

3.2. Приведём несколько примеров применения теоремы Тонелли. Заметим, что во всех случаях мы будем использовать лишь равенство повторных интегралов, и нас не будет интересовать произведение рассматриваемых мер. Единственный факт, который нам в связи с этим потребуется, — это измеримость функции, непрерывной в открытом подмножестве пространства $\mathbb{R}^2$, относительно произведения одномерных мер Лебега λ_1. Последнее очевидно, поскольку мера $\lambda_1 \times \lambda_1$ определена на двумерных ячейках, а следовательно, и на всех открытых множествах. (Как мы увидим в § 4, мера $\lambda_1 \times \lambda_1$ есть плоская мера Лебега, но сейчас у нас нет необходимости использовать это обстоятельство.)

Пример 1. Используем теорему Тонелли, чтобы вновь (см. п. IV.6.3) вычислить интеграл Эйлера–Пуассона $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$.

Ясно, что

$$I^2 = \left(2\int_0^\infty e^{-x^2}dx\right)\left(2\int_0^\infty e^{-y^2}dy\right)dx = 4\int_0^\infty e^{-x^2}\left(\int_0^\infty e^{-y^2}\,dy\right)dx.$$

Произведём во внутреннем интеграле замену $y = xu$:

$$I^2 = 4\int_0^\infty e^{-x^2}\left(\int_0^\infty e^{-x^2u^2}x\,du\right)dx.$$

Учитывая измеримость и положительность подынтегральной функции $(x,u) \mapsto$ $\mapsto x\,e^{-x^2(1+u^2)}$, изменим порядок интегрирования, опираясь на теорему Тонелли:

$$I^2 = 4\int_0^\infty \left(\int_0^\infty xe^{-(1+u^2)x^2}\,dx\right)du.$$

Внутренний интеграл вычисляется с помощью первообразной:

$$\int_0^\infty xe^{-(1+u^2)x^2}\,dx = -\frac{1}{2(1+u^2)}e^{-(1+u^2)x^2}\Big|_0^\infty = \frac{1}{2(1+u^2)}.$$

Поэтому

$$I^2 = 2\int_0^\infty \frac{1}{1+u^2}\,du = \pi.$$

Итак, $I = \sqrt{\pi}$.

Пример 2. Применим теорему Тонелли для получения важной формулы Эйлера, связывающей функции B и Γ (см. п. IV.6.3):

$$B(s,t) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}dx = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)} \quad \text{для любых} \quad s,\, t > 0.$$

Для доказательства запишем произведение $\Gamma(s)\Gamma(t)$ в виде повторного интеграла с внешним интегрированием по x и сделаем во внутреннем интеграле замену переменной $y = u - x$:

$$\Gamma(s)\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\left(\int_0^\infty y^{t-1}e^{-y}dy\right)dx = \int_0^\infty x^{s-1}\left(\int_x^\infty (u-x)^{t-1}e^{-u}du\right)dx.$$

Получившийся повторный интеграл соответствует двойному интегралу по углу $C = \{(x,u)\,|\,0<x<u\}$. Ясно, что $C_x=(x,+\infty)$, $C^u=(0,u)$. Изменив порядок интегрирования, мы согласно формуле (1″) получим

$$\Gamma(s)\Gamma(t)=\int_0^\infty\Big(\int_0^u x^{s-1}(u-x)^{t-1}e^{-u}dx\Big)du,$$

что после замены $x=uv$ приводит к равенству

$$\Gamma(s)\Gamma(t)=\int_0^\infty u^{s+t-1}e^{-u}\Big(\int_0^1 v^{s-1}(1-v)^{t-1}dv\Big)du.$$

Осталось заметить, что внутренний интеграл равен $B(s,t)$.

Взяв в формуле Эйлера $s=t=\frac12$ и вычислив интеграл $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$, мы вновь приходим к найденному в п. IV.6.3 равенству $\Gamma(\frac12)=\sqrt{\pi}$.

Формула Эйлера позволяет также выразить через Γ-функцию часто встречающиеся интегралы $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^p\varphi\cos^q\varphi\,d\varphi$ $(p,\,q>-1)$. В самом деле,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^p\varphi\cos^q\varphi\,d\varphi=\frac12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{p-1}\varphi\cos^{q-1}\varphi\,d\sin^2\varphi=\frac12\int_0^1 x^{\frac{p-1}{2}}(1-x)^{\frac{q-1}{2}}\,dx=$$
$$=\frac12\,B\big(\tfrac{p+1}{2},\tfrac{q+1}{2}\big)=\frac{\Gamma\big(\frac{p+1}{2}\big)\,\Gamma\big(\frac{q+1}{2}\big)}{2\Gamma\big(\frac{p+q}{2}+1\big)}.$$

3.3. Теорема Тонелли остаётся справедливой для функции, принимающей значения произвольного знака, если в её формулировке условие “измеримая (в широком смысле)” заменить на “суммируемая”. Остановимся на этом важном утверждении подробнее.

Теорема (Фубини*)). *Пусть $(X,\mathfrak{A},\mu)$, $(Y,\mathfrak{B},\nu)$ — пространства с σ-конечными полными мерами, $m=\mu\times\nu$. Если (вещественная или комплексная) функция f суммируема на $X\times Y$ по мере m, то*

1) *при почти всех $x\in X$ функция f_x суммируема на Y;*

1′) *при почти всех $y\in Y$ функция f^y суммируема на X;*

2) *функция*
$$x\mapsto\varphi(x)\equiv\int_Y f_x\,d\nu=\int_Y f(x,y)\,d\nu(y)$$
суммируема на X;

2′) *функция*
$$y\mapsto\psi(y)\equiv\int_X f^y\,d\mu=\int_X f(x,y)\,d\mu(x)$$
суммируема на Y;

3) *справедливы равенства*
$$\int_{X\times Y}f\,dm=\int_X\varphi\,d\mu=\int_Y\psi\,d\nu. \tag{2}$$

*) Гвидо **Фубини** (Fubini), 1879–1943, — итальянский математик.

Доказательство. Очевидно, мы можем ограничиться случаем, когда функция f вещественна. Ввиду равноправия X и Y достаточно доказать утверждения 1) и 2) и первое из равенств (2). Пусть $f_\pm = \max\{\pm f, 0\}$. По теореме Тонелли

$$\int_{X\times Y} f_\pm\, dm = \int_X \left(\int_Y f_\pm(x,y)\, d\nu(y)\right) d\mu(x) < +\infty. \tag{3}$$

По той же теореме функции $(f_\pm)_x$ измеримы при почти всех x, а функции

$$x \mapsto \varphi_1(x) \equiv \int_Y f_+(x,y)\, d\nu(y), \quad x \mapsto \varphi_2(x) \equiv \int_Y f_-(x,y)\, d\nu(y)$$

измеримы в широком смысле. Как показывают неравенства (3), функции φ_1, φ_2 суммируемы и, следовательно, почти всюду конечны. Последнее означает, что функции $(f_\pm)_x$ суммируемы на Y при почти всех $x \in X$. Теперь для доказательства утверждений 1) и 2) теоремы остаётся заметить, что

$$f_x = (f_+)_x - (f_-)_x, \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2. \tag{4}$$

Для доказательства первого из равенств (2) следует второе из равенств (3) вычесть из первого и воспользоваться соотношениями (4). ►

Отметим, что если функция f суммируема на (измеримом) множестве $C \subset X \times Y$ и проекция $P_1(C)$ измерима, то формула (1′) остаётся справедливой:

$$\int_C f\, dm = \int_{P_1(C)} \left(\int_{C_x} f(x,y)\, d\nu(y)\right) d\mu(x). \tag{2′}$$

Для доказательства достаточно доопределить функцию f нулём вне множества C и использовать утверждение 3) теоремы Фубини.

Разумеется, в случае измеримости проекции $P_2(C)$ справедливо аналогичное равенство (см. (1″)).

Замечание. В теоремах Тонелли и Фубини предполагается, что рассматриваемая функция f измерима на $X \times Y$, или, как говорят, “как функция двух переменных”. Это требование сильнее, чем требование, что f “измерима по каждой переменной в отдельности”, т. е. что измеримы функции f_x и f^y. Вместе с тем, если функции g, h измеримы на X, Y соответственно, то функции $\widetilde{g}$, $\widetilde{h}$, определяемые на $X \times Y$ равенствами $\widetilde{g}(x,y) = g(x)$, $\widetilde{h}(x,y) = h(y)$, измеримы на $X \times Y$. Чтобы убедиться в этом, достаточно рассмотреть лишь функцию g, считая её вещественной. Тогда ясно, что лебеговы множества функции $\widetilde{g}$ имеют вид $E \times Y$, где $E \in \mathfrak{A}$. Следовательно, они измеримы по замечанию 2 п. 1.3.

Вместе с функциями $\widetilde{g}$, $\widetilde{h}$ на $X \times Y$ измеримо и их произведение $f = \widetilde{g} \cdot \widetilde{h}$, которое обозначают иногда символом $g \otimes h$.

3.4. Отметим некоторые полезные формулы, вытекающие из теоремы Фубини.

Следствие 1. *Пусть функции f и g суммируемы соответственно на пространствах $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ и $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ с σ-конечными мерами. Тогда функция $h = f \otimes g$, $h(x,y) = f(x)\, g(y)$, где $x \in X$, $y \in Y$, суммируема на $X \times Y$ относительно меры $m = \mu \times \nu$ и*

$$\int_{X\times Y} h(x,y)\, dm(x,y) = \int_X f(x)\, d\mu(x) \cdot \int_Y g(y)\, d\nu(y).$$

Доказательство. Измеримость функции h установлена в замечании п. 3.3. Убедимся с помощью теоремы Тонелли, что она суммируема. В самом деле,

$$\int_{X\times Y} |h(x,y)|\,dm(x,y) = \int_X \left(\int_Y |f(x)\,g(y)|\,d\nu(y)\right) d\mu(x) =$$
$$= \int_X |f(x)| \left(\int_Y |g(y)|\,d\nu(y)\right) d\mu(x) = \left(\int_Y |g(y)|\,d\nu(y)\right) \cdot \left(\int_X |f(x)|\,d\mu(x)\right) < +\infty.$$

Теперь, когда суммируемость функции h установлена, требуемое равенство следует из теоремы Фубини. ►

Приведённое рассуждение весьма типично. Вычисляя интеграл, мы опираемся на теорему Фубини, но прежде необходимо убедиться в суммируемости функции, что достигается с помощью теоремы Тонелли.

В следствии 2 мы покажем, что формула интегрирования по частям, полученная для гладких функций (см. п. IV.6.2), справедлива и при более слабых предположениях. Напомним (см. п. IV.9.3), что функция называется абсолютно непрерывной на замкнутом промежутке $[a,b]$, если она представима в виде $f(x) = f(a) + \int_a^x \varphi(t)\,dt$, где функция φ суммируема на $[a,b]$. По теореме IV.9.3 $\varphi = f'$ почти везде.

Следствие 2. *Пусть функции f, g абсолютно непрерывны на промежутке $[a,b]$. Тогда*

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx.$$

Доказательство. Сначала докажем требуемую формулу, предполагая дополнительно, что $f(a) = g(b) = 0$. Тогда двойная подстановка аннулируется, и дело сводится к изменению порядка интегрирования. Действительно, так как функции f' и g' суммируемы на $[a,b]$, то по следствию 1 функция $(x,y) \mapsto f'(x)\,g'(y)$ суммируема на квадрате $[a,b]^2$, а следовательно, и на треугольнике $\mathrm{C} = \{\,(x,y) \in [a,b]^2 \mid a \leqslant y \leqslant x \leqslant b\}$. Как легко убедиться, при x, $y \in [a,b]$ его сечения таковы:

$$C_x = [a,x], \quad C^y = [y,b].$$

Так как $f(x) = \int_a^x f'(y)\,dy$, то согласно формуле (2′)

$$\int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx = \int_a^b g'(x)\left(\int_a^x f'(y)\,dy\right)dx = \iint_{\mathrm{C}} f'(y)\,g'(x)\,dx\,dy =$$
$$= \int_a^b f'(y)\left(\int_y^b g'(x)\,dx\right)dy = -\int_a^b f'(y)\,g(y)\,dy,$$

что доказывает требуемую формулу в рассматриваемом частном случае. Для доказательства её в общем виде следует применить полученный результат к функциям $f(x) - f(a)$, $g(x) - g(b)$. ►

Обобщим предыдущее следствие и получим формулу интегрирования по частям для интеграла по мере Лебега–Стилтьеса (другое доказательство этой формулы приведено в п. IV.10.6).

Следствие 3. *Пусть g — неубывающая функция на промежутке $[a,b]$. Если функция f абсолютно непрерывна на $[a,b]$, то*

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dg(x) = f(x)g(x)\Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Доказательство. Как и при доказательстве следствия 2, достаточно рассмотреть случай $f(a) = g(b) = 0$. Применив теорему Фубини к произведению мер $\mu_g \times \lambda$ и изменив порядок интегрирования, мы получим:

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dg(x) = \int_{[a,b]} \left(\int_a^x f'(u)\,du\right) dg(x) = \int_a^b f'(u)\left(\int_{[u,b]} dg(x)\right) du.$$

При $u > a$ внутренний интеграл в правой части этой формулы равен $g(b) - g(u-0)$ и, следовательно, он почти везде (относительно меры Лебега) совпадает с $-g(u)$. Поэтому

$$\int_{[a,b]} f(x)\,dg(x) = -\int_a^b f'(u)\,g(u)\,du. \ \blacktriangleright$$

Полученная формула справедлива и в случае, когда g — функция ограниченной вариации.

3.5. Суммируемость функций f_x, f^y, φ и ψ, рассматриваемых в теореме Фубини, ещё не гарантирует равенства повторных интегралов и тем более суммируемости функции f относительно меры $\mu \times \nu$ (даже в случае, когда меры конечны и повторные интегралы равны). Убедимся в этом на двух примерах, считая, что меры μ и ν совпадают с одномерной мерой Лебега на $[-1,1]$.

Рассмотрим функции $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ и $g(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$ при $x^2+y^2 > 0$. Ясно, что функции f_x, f^y, g_x, g^y суммируемы на $[-1,1]$ при всех $x, y \neq 0$ из $[-1,1]$. Очевидно,

$$\int_{-1}^1 g(x,y)\,dy = \int_{-1}^1 g(x,y)\,dx = 0.$$

Читатель легко установит равенство

$$\int_{-1}^1 f(x,y)\,dy = \frac{2}{1+x^2} \quad (x \neq 0),$$

из которого ввиду антисимметричности функции f вытекает, что

$$\int_{-1}^1 f(x,y)\,dx = -\frac{2}{1+y^2} \quad (y \neq 0).$$

Следовательно,

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy\right) dx = \pi, \qquad \int_{-1}^1 \left(\int_{-1}^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx\right) dy = -\pi.$$

Таким образом, повторные интегралы, связанные с функцией f, конечны, но противоположны по знаку, из чего следует, что эта функция не суммируема на квадрате $[-1,1]^2$.

Повторные интегралы, связанные с функцией g одинаковы (равны нулю). Однако, несмотря на это, функция g не суммируема. В самом деле

$$\int_{-1}^{1}\left(\int_{-1}^{1}|g(x,y)|\,dy\right)dx = 4\int_{0}^{1}\left(\int_{0}^{1}\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\,dy\right)dx =$$
$$= 4\int_{0}^{1}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\Big|_{y=0}^{y=1}\right)dx = 4\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx = +\infty.$$

Мы предоставляем читателю построить примеры функций, у которых один из повторных интегралов конечен, а другой не существует или существует, но бесконечен.

УПРАЖНЕНИЯ

1) Докажите, что для функции f, определённой на $X\times Y$, при $x\in X$ справедливо равенство $\mathscr{P}_{f_x} = \big(\mathscr{P}_f\big)_x$.

2) Докажите теорему Тонелли, используя теорему 2.3 о мере подграфика и упр. 1.

3) Пусть μ — произвольная конечная борелевская мера в $\mathbb{R}^m$. Докажите, что при $0<p<m$ интеграл $\int_{\mathbb{R}^m}\frac{d\mu(x)}{\|x-y\|^p}$ конечен при почти всех (относительно меры Лебега) $y\in\mathbb{R}^m$.

4) Если измеримая функция f положительна на множестве E, $\mu(E)<+\infty$, то $\int_E f\,d\mu\cdot\int_E\frac{1}{f}\,d\mu\geqslant\mu^2(E)$. Указание. Воспользуйтесь неравенством $\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\geqslant 2$.

5) Пусть μ — борелевская мера на промежутке $[a,b]$, причём $\mu\big([a,b]\big)=1$. Докажите, что для возрастающих (или убывающих) на $[a,b]$ функций f, g выполняется неравенство Чебышева:

$$\int_a^b fg\,d\mu\geqslant\int_a^b f\,d\mu\cdot\int_a^b g\,d\mu.$$

Если же одна из функций возрастает, а другая убывает, то знак неравенства надо заменить на противоположный. Указание. Воспользуйтесь тем, что произведение $\big(f(x)-f(y)\big)\big(g(x)-g(y)\big)$ не меняет знак.

6) Пусть φ — канторова функция. При каких $p>0$ конечны интегралы

$$\iint_{[0,1]^2}\frac{d\varphi(x)\,d\varphi(y)}{(x^2+y^2)^{\frac{p}{2}}},\qquad \iint_{[0,1]^2}\frac{d\varphi(x)\,d\varphi(y)}{|x-y|^p}\ ?$$

§ 4. Мера Лебега как произведение мер

Наша цель — установить связь между мерой Лебега λ_{p+q} в пространстве $\mathbb{R}^{p+q}$ и мерами Лебега λ_p и λ_q в пространствах $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$ соответственно. Мы будем отождествлять пространство $\mathbb{R}^{p+q}$ с декартовым произведением $\mathbb{R}^p\times\mathbb{R}^q$, считая, что пара (x,y), где $x=(x_1,\dots,x_p)\in\mathbb{R}^p$, $y=(y_1,\dots,y_q)\in\mathbb{R}^q$, совпадает с точкой $(x_1,\dots,x_p,y_1,\dots,y_q)$ из $\mathbb{R}^{p+q}$.

Напомним ещё, что символ $\mathscr{P}^m$ обозначает полукольцо ячеек в $\mathbb{R}^m$.

4.1. Теорема. $\lambda_{p+q}=\lambda_p\times\lambda_q$.

Отсюда следует, в частности, ассоциативность умножения мер Лебега:

$$(\lambda_p\times\lambda_q)\times\lambda_r=\lambda_p\times(\lambda_q\times\lambda_r)=\lambda_{p+q+r}.$$

Доказательство. Пусть $\mathscr{P}$ — полукольцо множеств вида $A \times B$, где A, B — измеримые подмножества конечной меры пространств $\mathbb{R}^p$ и $\mathbb{R}^q$ соответственно. Каждая ячейка из $\mathscr{P}^{p+q}$ является, очевидно, произведением ячеек из $\mathscr{P}^p$ и $\mathscr{P}^q$. Поэтому $\mathscr{P}^{p+q} \subset \mathscr{P}$.

Меры λ_{p+q} и $\lambda_p \times \lambda_q$ получены стандартным продолжением мер, которые мы будем обозначать здесь l_{p+q} (классический объём, заданный на $\mathscr{P}^{p+q}$) и m_0 (мера, заданная на $\mathscr{P}$ — см. п. 1.2). Чтобы доказать совпадение мер λ_{p+q} и $\lambda_p \times \lambda_q$, достаточно проверить, что меры l_{p+q} и m_0 порождают одинаковые внешние меры: $l^*_{p+q} = m^*_0$. Поскольку m_0 продолжает l_{p+q} с полукольца $\mathscr{P}^{p+q}$ на более широкое полукольцо $\mathscr{P}$, из определения внешней меры, порождённой мерой, сразу следует неравенство $m^*_0 \leqslant l^*_{p+q}$. Нам остаётся проверить противоположное неравенство. Достаточно показать, что $l^*_{p+q}(E) < m^*_0(E) + \varepsilon$ для любого множества $E \subset \mathbb{R}^{p+q}$, $m^*_0(E) < +\infty$, и любого $\varepsilon > 0$. По определению m^*_0 существуют такие измеримые множества $A_j \subset \mathbb{R}^p$ и $B_j \subset \mathbb{R}^q$ $(j \in \mathbb{N})$ с конечными мерами, что $E \subset \bigcup\limits_{j \geqslant 1} A_j \times B_j$ и

$$\sum_{j \geqslant 1} \lambda_p(A_j)\lambda_q(B_j) < m^*_0(E) + \varepsilon.$$

Ввиду регулярности меры Лебега каждое из множеств A_j, B_j можно погрузить в настолько близкие к ним по мере открытые (в соответствующих пространствах) множества G_j, H_j, что при замене A_j на G_j и B_j на H_j последнее неравенство сохранится. В результате мы получим включение $E \subset \bigcup\limits_{j \geqslant 1} G_j \times H_j$ и неравенство

$$\sum_{j \geqslant 1} \lambda_p(G_j)\lambda_q(H_j) < m^*_0(E) + \varepsilon.$$

Из совпадения мер λ_{p+q} и $\lambda_p \times \lambda_q$ на $\mathscr{P}^{p+q}$ вытекает их совпадение на открытых множествах в $\mathbb{R}^{p+q}$. Так множества $G_j \times H_j$ открыты, то

$$l^*_{p+q}(G_j \times H_j) = \lambda_{p+q}(G_j \times H_j) = \lambda_p(G_j)\,\lambda_q(H_j) \quad (j \in \mathbb{N}).$$

Теперь искомая оценка вытекает из счётной полуаддитивности l^*_{p+q}:

$$l^*_{p+q}(E) \leqslant \sum_{j \geqslant 1} l^*_{p+q}(G_j \times H_j) = \sum_{j \geqslant 1} \lambda_p(G_j)\lambda_q(H_j) < m^*_0(E) + \varepsilon. \ \blacktriangleright$$

Замечание. Интегралы по плоской, трёхмерной и m-мерной мерам Лебега (по подмножеству E соответствующего пространства) называются двойными, тройными и m-кратными и часто обозначаются соответственно символами

$$\iint_E f(x,y)\,dx\,dy, \ \iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \ \text{ и } \int \dots \int_E f(x_1,\dots,x_m)\,dx_1 \dots dx_m.$$

Поскольку для суммируемых и любых неотрицательных функций интеграл по произведению мер равен повторному, такие обозначения не приводят к недоразумениям.

4.2. Рассмотрим некоторые примеры применения принципа Кавальери и теоремы Тонелли. Под объёмом будем понимать m-мерную меру Лебега.

Пример 1. Назовём конусом с высотой H и основанием E, $E \subset \mathbb{R}^{m-1}$, множество $C = \{(t,y) \in \mathbb{R}^m \mid t \in [0,H],\, y \in \frac{t}{H}E\}$. Конус с измеримым основанием E измерим, поскольку является образом цилиндра $[0,H] \times E$ при гладком отображении $(t,y) \mapsto \mapsto (t, \frac{t}{H}y)$.

Вычислим объём конуса. Его сечение C_t при фиксированном t либо пусто (если $t \notin [0,H]$), либо это множество $\frac{t}{H}E$, мера которого равна $\lambda_{m-1}(E)\left(\frac{t}{H}\right)^{m-1}$. Поэтому по принципу Кавальери (теорема 2.2)

$$\lambda_m(C) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_m\big(C_t\big)\,dt = \int_0^H \lambda_{m-1}(E)\left(\frac{t}{H}\right)^{m-1} dt = \frac{1}{m}\,H\,\lambda_{m-1}(E).$$

При $m = 2$ и $m = 3$ отсюда следуют известные школьные формулы для вычисления площади треугольника и объёмов пирамиды и кругового конуса.

Пример 2. Напомним, что объёмы открытого и замкнутого шаров одинаковы. Символ $B^m(R)$ обозначает далее открытый m-мерный шар радиуса R с центром в нуле.

Как мы установили, изучая изменение меры Лебега под действием линейных преобразований (см. п. II.5.2), объём шара $B^m(R)$ равен $\alpha_m\,R^m$, где символ α_m обозначает объём единичного шара $B^m \equiv B^m(1)$. Очевидно, $\alpha_1 = 2$ и $\alpha_2 = \int_{-1}^1 2\sqrt{1-t^2}\,dt = \pi$.

Займёмся вычислением α_m при $m > 2$, отождествляя пространство $\mathbb{R}^m$ с декартовым произведением $\mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}$. По определению сечение $(B^m)^y$ шара B^m есть множество

$$\big\{x \in \mathbb{R}^{m-1} \,\big|\, (x,y) \in B^m\big\} = \big\{x \in \mathbb{R}^{m-1} \,\big|\, \|x\|^2 < 1 - y^2\big\}.$$

При $|y| \geqslant 1$ оно пусто, а при $|y| < 1$ это $(m-1)$-мерный шар радиуса $\sqrt{1-y^2}$. Так как его $(m-1)$-мерный объём равен $\alpha_{m-1}(1-y^2)^{\frac{m-1}{2}}$, то по принципу Кавальери $\alpha_m = \int_{-1}^1 \alpha_{m-1}(1-y^2)^{\frac{m-1}{2}}\,dy$. Замена переменной $y = \sin u$ даёт нам рекуррентное соотношение

$$\alpha_m = 2\alpha_{m-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m u\,du.$$

Последний интеграл был вычислен нами в п. IV.6.2. Он равен $\frac{(m-1)!!}{m!!}\,v_m$, где $v_m = \frac{\pi}{2}$ при чётном m и $v_m = 1$ при нечётном m. Очевидно, $v_m v_{m-1} \equiv \frac{\pi}{2}$. Применив полученное рекуррентное соотношение дважды, мы приходим к формуле

$$\alpha_m = 2\alpha_{m-1}\frac{(m-1)!!}{m!!}\,v_m = 4\alpha_{m-2}\frac{(m-2)!!}{(m-1)!!}\,v_{m-1}\frac{(m-1)!!}{m!!}\,v_m = \frac{2\pi}{m}\alpha_{m-2}.$$

Так как начальные значения $\alpha_1 = 2$ и $\alpha_2 = \pi$ нам известны, то с её помощью мы получаем, что

$$\alpha_{2k} = \frac{\pi^k}{k!}, \qquad \alpha_{2k+1} = 2\frac{(2\pi)^k}{(2k+1)!!} \quad \text{при всех} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Функция Γ позволяет охватить случаи чётной и нечётной размерности единой формулой. В самом деле, $k! = \Gamma(k+1)$ и $\sqrt{\pi}(2k+1)!! = 2^{k+1}\Gamma(k+\frac{3}{2})$ (см. п. IV.6.3).

Подставив эти значения факториалов в формулы для α_{2k} и α_{2k+1}, мы видим, что при любом $m \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\alpha_m = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2}+1)}.$$

В связи с примерами 1 и 2 напомним открытие Архимеда, которым он очень гордился*): шар заполняет 2/3 объёма описанного вокруг него цилиндра.

Чтобы получить этот красивый результат, надо сравнить шар и тело, полученное удалением из цилиндра двух конусов с вершинами в центре шара. Из следующего рисунка легко усмотреть, что они имеют равновеликие горизонтальные сечения.

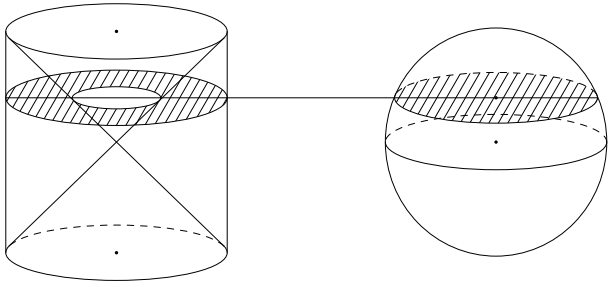


Рис. 5.

Пример 3. Вычислим интеграл $I_m(a) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{-a\|x\|^2}\,dx$ $(a > 0)$. В одномерном случае он сводится интегралу Эйлера–Пуассона:

$$I_1(a) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

Представив m-мерную меру Лебега как произведение $(m-1)$-мерной и одномерной мер, мы с помощью теоремы Тонелли получаем рекуррентное соотношение $I_m(a) = I_{m-1}(a)\cdot I_1(a)$, из которого сразу следует, что $I_m(a) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{m}{2}}$.

Пример 4. Обобщим результат, полученный в примере 2, и найдём объём $V_P(R)$ множества

$$W_P(R) = \left\{(x_1,\ldots,x_m) \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; |x_1|^{p_1} + \ldots + |x_m|^{p_m} < R\right\} \qquad (R > 0),$$

где $P = (p_1,\ldots,p_m) \in \mathbb{R}^m_+$.

Заметим сначала, что под действием линейной замены переменных $x_j = R^{1/p_j}u_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ множество $W_P(R)$ переходит в $W_P(1)$. Поэтому (см. п. II.5.2) $V_P(R) = R^q\,V_P(1)$, где $q = \frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_m}$. Следовательно, нам достаточно вычислить $V_P(1)$. Для этого воспользуемся принципом Кавальери. Считая $m > 1$, положим $P' = (p_1,\ldots,p_{m-1})$ и $q' = \frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_{m-1}}$. Поскольку сечение множества $W_P(1)$,

*) По словам Цицерона он нашёл могилу Архимеда на заброшенном кладбище благодаря маленькой колонне с изображением шара и цилиндра над соответствующими стихами.

соответствующее фиксированной координате x_m, равно, очевидно, $W_{P'}\big(1-|x_m|^{p_m}\big)$, мы имеем

$$V_P(1)=\int_{-1}^{1} V_{P'}\big(1-|x_m|^{p_m}\big)\,dx_m = 2V_{P'}(1)\int_0^1 \big(1-x_m^{p_m}\big)^{q'}\,dx_m.$$

После замены переменной $u=x_m^{p_m}$ это равенство принимает вид

$$V_P(1)=\frac{2}{p_m}\,V_{P'}(1)\int_0^1 (1-u)^{q'}\,u^{\frac{1}{p_m}-1}\,du.$$

Возникший интеграл выражается через значения функции Γ (см. пример 2 в п. 3.2) и мы получаем формулу понижения размерности:

$$V_P(1)=\frac{2}{p_m}\,V_{P'}(1)\,\frac{\Gamma(1+q')\,\Gamma\big(\frac{1}{p_m}\big)}{\Gamma(1+q)} = 2\,V_{P'}(1)\,\frac{\Gamma(1+q')\,\Gamma\big(1+\frac{1}{p_m}\big)}{\Gamma(1+q)}.$$

Из неё легко следует, что

$$V_P(1)=\frac{2^m}{\Gamma\big(1+\frac{1}{p_1}+\ldots+\frac{1}{p_m}\big)}\,\prod_{j=1}^{m}\Gamma\Big(1+\frac{1}{p_j}\Big).$$

При $p_1=\ldots=p_m=p$ отсюда вытекает формула для вычисления объёма множества $W_p=\big\{(x_1,\ldots,x_m)\in\mathbb{R}^m \;\big|\; |x_1|^p+\ldots+|x_m|^p<1\big\}$:

$$\lambda_m(W_p)=\frac{2^m\Gamma^m\big(1+\frac{1}{p}\big)}{\Gamma\big(1+\frac{m}{p}\big)}.$$

Если $p=2$, то мы ещё раз получаем формулу для вычисления объёма шара.

4.3. Приведём красивую формулу, связывающую двойной и повторный интегралы. Предварительно установим лемму, которая будет полезна нам и в дальнейшем. В ней мы отождествляем пространство $\mathbb{R}^{2m}$ с декартовым произведением $\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m$ (см. начало параграфа).

Лемма. *Пусть f — определённая в $\mathbb{R}^m$ измеримая функция. Тогда функции $(x,y)\mapsto f(x-y)$ и $(x,y)\mapsto f(x+y)$ измеримы в пространстве $\mathbb{R}^{2m}$.*

Доказательство достаточно провести лишь для функции $(x,y)\mapsto F(x,y)=f(x-y)$, считая её вещественной (для второй функции рассуждения аналогичны). Пусть $E=\{x\in\mathbb{R}^m \mid f(x)<a\}$. Тогда

$$\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^{2m} \;\big|\; F(x,y)=f(x-y)<a\big\}=\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^{2m} \;\big|\; x-y\in E\big\}=T^{-1}(E\times\mathbb{R}^m),$$

где $T\colon\mathbb{R}^{2m}\to\mathbb{R}^{2m}$ — линейное отображение, определяемое равенством $T(x,y)=(x-y,y)$. Отображение T, очевидно, обратимо, и, следовательно, лебегово множество функции F измеримо как линейный образ измеримого множества $E\times\mathbb{R}^m$. ▶

Замечание. Утверждение леммы, конечно, сохранится, если функция f задана не на всём пространстве $\mathbb{R}^m$, а на каком-то его измеримом подмножестве. Для доказательства достаточно продолжить f на $\mathbb{R}^m$ с сохранением измеримости и применить лемму к продолженной функции.

Доказательство следующей теоремы повторяет по существу вывод формулы Эйлера, связывающей функции B и Γ (см. п. 3.2, пример 2).

Теорема (формула Лиувилля*)). *Пусть f — неотрицательная функция, измеримая на $\mathbb{R}_+$. Тогда для положительных чисел p и q справедливо равенство*

$$\iint_{\mathbb{R}^2_+} f(x+y)\, x^{p-1}\, y^{q-1}\, dx\, dy = B(p,q) \int_0^\infty f(t)\, t^{p+q-1} dt,$$

где $B(p,q) = \int_0^1 s^{p-1}(1-s)^{q-1} ds$ — B-функция Эйлера.

Доказательство. Согласно лемме функция $(x,y) \mapsto f(x+y)$ измерима на $\mathbb{R}^2_+$. Пользуясь теоремой Тонелли, заменим двойной интеграл повторным с внешним интегрированием по x и сделаем во внутреннем интеграле замену переменной $y = t - x$:

$$\iint_{\mathbb{R}^2_+} f(x+y)\, x^{p-1}\, y^{q-1}\, dx\, dy = \int_0^\infty x^{p-1} \left(\int_x^\infty f(t)(t-x)^{q-1}\, dt \right) dx.$$

Повторный интеграл в правой части равенства соответствует двойному интегралу по углу $C = \{(x,t) \,|\, 0 < x < t\}$. Ясно, что $C_x = (x, +\infty)$, $C^t = (0,t)$. Изменив порядок интегрирования, мы видим, что

$$\iint_{\mathbb{R}^2_+} f(x+y)\, x^{p-1}\, y^{q-1}\, dx\, dy = \int_0^\infty f(t) \left(\int_0^t x^{p-1}(t-x)^{q-1} dx \right) dt.$$

Для получения искомого результата осталось сделать замену $x = ts$ во внутреннем интеграле. ►

4.4. В заключение параграфа, опираясь на возможность представить кратный интеграл в виде повторного, докажем одно неравенство, играющее важную роль в математической физике. Речь идёт о мажорировании интеграла от функции класса $C_0^1(\mathbb{R}^m)$ (т. е. от гладкой финитной функции) интегралом от нормы её градиента. В одномерном случае, очевидно, $f(x) = \int_{-\infty}^x f'(t)\, dt = -\int_x^\infty f'(t)\, dt$, и поэтому

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty |f'(t)|\, dt. \tag{1}$$

На функции нескольких переменных эта оценка обобщается следующим образом.

*) Жозеф **Лиувилль** (Louiville), 1809–1882, — французский математик.

Теорема (неравенство Гальярдо*)– Ниренберга**)–Соболева***)). *Пусть* $1 \leqslant p < m$, $q = \frac{mp}{m-p}$, $C = p\frac{m-1}{m-p}$. *Тогда для любой функции* $f \in C_0^1(\mathbb{R}^m)$ *справедливо неравенство*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{C}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^m} \|\operatorname{grad} f(x)\|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2}$$

Сначала установим красивое неравенство, несколько усиливающее (2) в случае $p=1$.

Лемма. *Пусть* $q = \frac{m}{m-1}$ *и* $f \in C_0^1(\mathbb{R}^m)$. *Тогда*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^m} |f'_{x_1}(x)|dx \cdots \int_{\mathbb{R}^m} |f'_{x_m}(x)|dx\right)^{\frac{1}{m}}.$$

При $q = +\infty$ (т. е. в случае $m = 1$) левая часть понимается как $\sup\limits_{\mathbb{R}^m} |f|$ и тем самым утверждение леммы совпадает с неравенством (1).

Доказательство проведём с помощью индукции по m. Поскольку при $m = 1$ всё сводится к (1), нам остаётся сделать индукционный переход. Считая далее $m > 1$, допустим, что утверждение леммы справедливо для функций $m-1$ переменной. Записав вектор $x \in \mathbb{R}^m$ в виде (s,t), где $s \in \mathbb{R}^{m-1}$, $t \in \mathbb{R}$, положим

$$I_j(t) = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} |f'_{x_j}(s,t)|\,ds \quad \text{для} \quad j = 1, \ldots, m-1 \qquad \text{и} \qquad I_m(s) = \int_{\mathbb{R}} |f'_{x_m}(s,t)|\,dt.$$

Кроме показателя $q = \frac{m}{m-1}$, соответствующего размерности m, нам потребуется показатель $r = \frac{m-1}{m-2}$, соответствующий размерности $m-1$. В силу индукционного предположения

$$\left(\int_{\mathbb{R}^{m-1}} |f(s,t)|^r\,ds\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant \frac{1}{2}\big(I_1(t)\cdots I_{m-1}(t)\big)^{\frac{1}{m-1}}. \tag{3}$$

Заметим ещё, что $|f(s,t)| \leqslant \frac{1}{2} I_m(s)$ (это не что иное, как неравенство (1)) и, следовательно, $|f(s,t)|^q \leqslant 2^{1-q}|f(s,t)|\, I_m^{\frac{1}{m-1}}(s)$. Поэтому неравенство Гёльдера с показателем r даёт нам

$$\int_{\mathbb{R}^{m-1}} |f(s,t)|^q ds \leqslant 2^{1-q}\int_{\mathbb{R}^{m-1}} |f(s,t)|\, I_m^{\frac{1}{m-1}}(s)\,ds \leqslant$$
$$\leqslant 2^{1-q}\left(\int_{\mathbb{R}^{m-1}} |f(s,t)|^r\,ds\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_{\mathbb{R}^{m-1}} I_m(s)\,ds\right)^{\frac{1}{m-1}}.$$

С учётом неравенства (3) мы видим, что

$$\int_{\mathbb{R}^{m-1}} |f(s,t)|^q ds \leqslant 2^{-q}\big(I_1(t)\cdots I_{m-1}(t)\big)^{\frac{1}{m-1}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^{m-1}} I_m(s)\,ds\right)^{\frac{1}{m-1}}.$$

---

*) Эмилио **Гальярдо** (Gagliardo), род. 1930, — итальянский математик.

) Луис **Ниренберг (Nirenberg), род. 1925, — американский математик

***) Сергей Львович **Соболев**, 1908–1989, — российский математик.

Проинтегрируем это неравенство по t:

$$\int_{\mathbb{R}^m} |f(x)|^q dx \leqslant 2^{-q} \int_{\mathbb{R}} \big(I_1(t)\cdots I_{m-1}(t)\big)^{\frac{1}{m-1}} dt \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^{m-1}} I_m(s)\, ds\right)^{\frac{1}{m-1}}.$$

Оценив первый интеграл, стоящий справа, с помощью неравенства Гёльдера для нескольких функций (см. следствие 2 п. IV.4.5 с $p_k = m-1$), получим неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^m} |f(x)|^q dx \leqslant 2^{-q} \left(\int_{\mathbb{R}} I_1(t)\, dt \cdots \int_{\mathbb{R}} I_{m-1}(t)\, dt\right)^{\frac{1}{m-1}} dt \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^{m-1}} I_m(s)\, ds\right)^{\frac{1}{m-1}},$$

которое, очевидно, равносильно доказываемому. ►

Доказательство теоремы. При $p = 1$ неравенство (2) с коэффициентом $C = 1$ сразу следует из леммы, поскольку $|f'_{x_k}(x)| \leqslant \|\operatorname{grad} f(x)\|$ для всех k и x.

Пусть теперь $p > 1$. Тогда $C > 1$ и, как легко подсчитать, $q = C\frac{m}{m-1} = (C-1)\times$ $\times\frac{p}{p-1}$. Введём вспомогательную функцию $\varphi = |f|^{\mathrm{C}}$. Так как $C > 1$, то она гладкая и $\|\operatorname{grad}\varphi\| = C|f|^{C-1}\|\operatorname{grad} f\|$. Применяя к φ неравенство (2) с $p = 1$, мы получаем:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^m} \varphi^{\frac{m}{m-1}}(x)\, dx\right)^{\frac{m-1}{m}} \leqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^m} \|\operatorname{grad}\varphi(x)\|\, dx,$$

т. е.

$$\left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x)|^q\, dx\right)^{\frac{m-1}{m}} \leqslant \frac{C}{2}\int_{\mathbb{R}^m} |f(x)|^{C-1}\|\operatorname{grad} f(x)\|\, dx. \tag{4}$$

Оценивая последний интеграл с помощью неравенства Гёльдера с показателем p и учитывая, что $(C-1)\frac{p}{p-1} = q$, мы видим, что

$$\int_{\mathbb{R}^m} |f(x)|^{C-1}\|\operatorname{grad} f(x)\|\, dx \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x)|^q\, dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^m} \|\operatorname{grad} f(x)\|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Вместе с (4) это приводит к искомому результату, поскольку $\frac{m-1}{m} - \frac{p-1}{p} = \frac{1}{p} - \frac{1}{m} = \frac{1}{q}$. ►

УПРАЖНЕНИЯ

1) Пусть $E \subset \mathbb{R}_+$ — измеримое множество. Докажите, что “кольцо” $A = \big\{(x,y) \in \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, \sqrt{x^2+y^2} \in E\big\}$ измеримо и $\lambda_2(A) = 2\pi\int_E t\, dt$.

2) Пусть множество $E \subset \mathbb{R}^2$, содержащееся в полуплоскости $y > 0$, измеримо. Докажите, что объём тела $T = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, (x, \sqrt{y^2+z^2}) \in E\big\}$, получаемого вращением E вокруг оси x, равен $2\pi\iint_E y\, dx\, dy$.

3) С помощью индукции докажите, что для любого вектора $a \in \mathbb{R}^m_+$ объём симплекса $S(a) = \big\{x \in \mathbb{R}^m_+ \,\big|\, \frac{x_1}{a_1} + \ldots + \frac{x_m}{a_m} \leqslant 1\big\}$ равен $\frac{a_1\cdots a_m}{m!}$.

4) Докажите, что объём правильного m-мерного симплекса Σ с ребром единичной длины равен $\frac{\sqrt{m+1}}{m!2^{m/2}}$. Найдите эллипсоид E наибольшего объёма для Σ. Исследуйте рост величины $\left(\frac{\lambda_m(\Sigma)}{\lambda_m(E)}\right)^{\frac{1}{m}}$ (объёмного отношения для Σ) с ростом размерности.

5) Пусть $1 \leqslant p < +\infty$, $V_p = \Big\{(x_1, \dots, x_m) \;\Big|\; \sum\limits_{k=1}^{m} |x_k|^p \leqslant 1\Big\}$. Найдите эллипсоид E_p наибольшего объёма для V_p. При каких C справедливо включение $V_p \subset C\,E_p$? Исследуйте рост величины $\left(\frac{\lambda_m(V_p)}{\lambda_m(E_p)}\right)^{\frac{1}{m}}$ с ростом размерности. При каких p она ограничена?

6) Пусть $A \subset \mathbb{R}^m$, $B \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклые компактные центрально симметричные относительно нуля множества, $C \subset \mathbb{R}^{m+n}$ — выпуклая оболочка объединения $(A \times \{0\}) \cup (\{0\} \times B)$. Докажите, что

$$\lambda_{m+n}(C) = \frac{m!\,n!}{(m+n)!}\lambda_m(A)\,\lambda_n(B).$$

7) Пусть K — произвольное выпуклое тело в $\mathbb{R}^m$, $V = \lambda_m(K)$. Докажите, что если $(m-1)$-мерный объём проекции K на любую плоскость не меньше S, то $\operatorname{diam}(K) \leqslant \frac{mV}{S}$.

8) Докажите, что ненулевой многочлен от нескольких переменных (как алгебраический, так и тригонометрический) почти везде не равен нулю.

9) Пусть $E_1, \dots, E_n \subset [0,1)$ и $S = \lambda(E_1) + \ldots + \lambda(E_n)$. Докажите существование таких сдвигов множеств E_j по модулю 1 (см. упр. 6 § II.4), объединение которых почти целиком покрывает $[0,1)$: мера разности $[0,1) \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{n} \{x_j + E_j\}$ меньше e^{-S}. Обобщите это утверждение на многомерный случай. Указание. Рассмотрите интеграл $\int_0^1 \dots \int_0^1 \big(\int_0^1 \chi_1(\{t-x_1\}) \cdots \chi_n(\{t-x_n\})\,dt\big)dx_1 \dots dx_n$, где χ_j — характеристическая функция множества $[0,1) \setminus E_j$ $(j = 1, \dots, n)$.

10) С помощью приёма, использованного при доказательстве теоремы 4.4, обобщите лемму 4.4, доказав, что

$$\left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{C}{2}\left(\int_{\mathbb{R}^m} |f'_{x_1}(x)|^p\,dx \cdots \int_{\mathbb{R}^m} |f'_{x_m}(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{m\,p}}.$$

11) Докажите изоморфность отрезка $[0,1]$ и квадрата $[0,1]^2$ с мерами Лебега (определение изоморфизма пространств с мерами дано в упр. 11, § IV.10). Обобщая этот результат, докажите, что пространства $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ с мерами Лебега изоморфны. Указание. Используя двоичное представление числа $x \in [0,1]$, рассмотрите отображение

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k 2^{-k} \longmapsto \Phi(x) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{2k-1} 2^{-k}, \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{2k} 2^{-k}\right) \in [0,1]^2.$$

§ 5. Ещё один подход к определению произведения мер и интеграла

В этом параграфе мы дадим альтернативное доказательство теоремы 1.2 о счётной аддитивности произведения мер, не использующее понятия интеграла. Это позволяет определить интеграл от неотрицательной измеримой функции как меру её подграфика. Как мы убедимся, такой подход к построению интеграла эквивалентен принятому в главе IV.

5.1. Пусть, как и в § 1, $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ — два пространства с σ-конечными мерами,

$$\mathscr{P} = \{A \times B \mid A \in \mathfrak{A},\ \mu(A) < +\infty,\ B \in \mathfrak{B},\ \nu(B) < +\infty\}$$

— полукольцо измеримых прямоугольников, а m_0 — произведение мер μ и ν, определённое на $\mathscr{P}$ равенством

$$m_0(A \times B) = \mu(A)\,\nu(B). \tag{1}$$

Как установлено в теореме I.2.4, m_0 есть объём, и мы хотим теперь доказать его счётную аддитивность.

Будем сначала предполагать, что меры μ и ν конечны. Тогда $X \times Y \in \mathscr{P}$ и по замечанию п. I.2.3 мы можем считать, что объём m_0 продолжен на алгебру $\mathfrak{C}$, состоящую из множеств, представимых в виде конечных объединений измеримых прямоугольников. Для этого продолженного объёма мы будем использовать то же обозначение m_0.

Докажем предварительно лемму, которая является сильно ослабленным вариантом теоремы 2.2. Она будет нужна нам для оценки объёма множеств алгебры $\mathfrak{C}$. Используемые в лемме понятия сечения C_x и канонической проекции $P_1(C)$ определены в пп. 2.1 и 2.2.

Лемма. *Если C — такое множество из алгебры $\mathfrak{C}$, что $\nu(C_x) \leqslant \delta$ при любом $x \in X$, то $m_0(C) \leqslant \delta \cdot \mu(P_1(C))$. В частности, $m_0(C) \leqslant \delta \cdot \mu(X)$.*

Доказательство. По определению алгебры $\mathfrak{C}$ все входящие в неё множества представимы в виде объединения конечного числа измеримых прямоугольников. Проведём доказательство с помощью индукции по числу прямоугольников, образующих множество C. База индукции (C — измеримый прямоугольник) очевидна. Предположим теперь, что утверждение леммы справедливо для объединения любых измеримых прямоугольников, если их число не больше $n-1$, и докажем его для множества $C = \bigcup\limits_{k=1}^{n} (A_k \times B_k)$, где $A_k \in \mathfrak{A}$, $B_k \in \mathfrak{B}$.

Положим $U = \bigcup\limits_{k=1}^{n-1} A_k$ и разобьём множество C на три части D, E и F так, что $P_1(D) = A_n \setminus U$, $P_1(E) = U \setminus A_n$, $P_1(F) = U \cap A_n$ (множества D, E, F не пересекаются, так как не пересекаются их проекции на X). Поскольку D, E, F — подмножества C, всякое их сечение содержится в соответствующем сечении множества C. Поэтому $\nu(D_x), \nu(E_x), \nu(F_x) \leqslant \delta$ при любом x из X. Чтобы к множествам D, E, F можно было применить индукционное предположение, проверим, что каждое из них есть объединение не более $n-1$ измеримого прямоугольника. Для множеств D, E это очевидно, так как

$$D = (A_n \setminus U) \times B_n \qquad \text{и} \qquad E = \bigcup_{k=1}^{n-1} (A_k \setminus A_n) \times B_k.$$

Из определения множества F непосредственно вытекает, что если $x \in U \cap A_n$, то

$$F_x = C_x = \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} (A_k \cap A_n) \times B_k\right)_x \cup B_n = \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} (A_k \cap A_n) \times (B_k \cup B_n)\right)_x,$$

и поэтому $F = \bigcup\limits_{k=1}^{n-1} (A_k \cap A_n) \times (B_k \cup B_n)$. Отсюда видно, что к F, как и к E, применимо

индукционное предположение. Пользуясь аддитивностью m_0, мы получаем требуемое неравенство:

$$m_0(C) = m_0(D) + m_0(E) + m_0(F) \leqslant \delta\mu\big(P_1(D)\big) + \delta\mu\big(P_1(E)\big) + \delta\mu\big(P_1(F)\big) =$$
$$= \delta\big(\mu(U \setminus A_n) + \mu(U \cap A_n) + \mu(A_n \setminus U)\big) = \delta\mu\big(U \cup A_n\big) = \delta\mu\big(P_1(C)\big). \quad \blacktriangleright$$

Как видно из доказательства, мы пользовались не счётной, а лишь конечной аддитивностью мер μ и ν, так что лемма верна не только для мер, но и для объёмов.

Теперь мы можем доказать, что произведение мер есть мера.

Теорема. *Объём m_0 счётно аддитивен.*

Доказательство. Будем сначала предполагать, что меры μ и ν нормированы, т. е. $\mu(X) = \nu(Y) = 1$, и что объём m_0 продолжен на алгебру $\mathfrak{C}$, состоящую из множеств, представимых в виде конечных объединений измеримых прямоугольников.

Докажем, что этот объём непрерывен сверху на пустом множестве, из чего по теореме I.3.4 следует его счётная аддитивность. Итак, пусть множества C_n из $\mathfrak{C}$ удовлетворяют условиям

$$C_n \supset C_{n+1} \ \text{ при } \ n \in \mathbb{N}, \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \varnothing.$$

Мы должны доказать, что $m_0(C_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Допустим противное. Тогда при некотором $\delta > 0$

$$m_0(C_n) > \delta \ \text{ при всех } \ n.$$

Рассмотрим множество E_n, состоящее из тех точек x, для которых сечение $(C_n)_x$ имеет “большую” меру. Точнее, пусть

$$E_n = \Big\{ x \in X \ \Big| \ \nu((C_n)_x) > \frac{\delta}{2} \Big\}.$$

Как легко проверить, функция $x \mapsto \nu((C_n)_x)$ простая и множество E_n измеримо относительно $\mathfrak{A}$. Ясно, что $C_n \subset (E_n \times Y) \cup C'_n$, где $C'_n = C_n \setminus (E_n \times Y)$. Поэтому

$$\delta < m_0(C_n) \leqslant m_0(E_n \times Y) + m_0(C'_n).$$

При этом $\nu\big((C'_n)_x\big) \leqslant \frac{\delta}{2}$. Используя для оценки $m_0(C'_n)$ доказанную выше лемму, мы получаем (напомним, что $\mu(X) = \nu(Y) = 1$):

$$\delta < m_0(C_n) \leqslant m_0(E_n \times Y) + \frac{\delta}{2} = \mu(E_n) + \frac{\delta}{2}.$$

Следовательно, $\mu(E_n) > \frac{\delta}{2}$. Таким образом, меры множеств E_n не стремятся к нулю. Поскольку множества E_n образуют убывающую последовательность, их пересечение не может быть пусто. Пусть $x_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Тогда $\nu\big((C_n)_{x_0}\big) > \frac{\delta}{2}$ при любом n. Так как множества $(C_n)_{x_0}$ образуют убывающую последовательность, их пересечение не пусто.

Пусть $y_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (C_n)_{x_0}$. Тогда точка (x_0, y_0) принадлежит каждому множеству C_n, что по условию невозможно, и мы получаем искомое противоречие.

Установив утверждение теоремы для нормированных мер, мы сразу получаем его и для любых конечных мер. Рассмотрим теперь случай, когда μ и ν — произвольные σ-конечные меры. Пусть $C = A \times B \in \mathscr{P}$, $C = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n$ и множества C_n из $\mathscr{P}$ попарно дизъюнктны. Тогда $\mu(A) < +\infty$ и $\nu(B) < +\infty$ по определению полукольца $\mathscr{P}$. Поэтому мы можем заменить X на A, а Y на B, рассмотреть сужение m_0 на полукольцо тех измеримых прямоугольников, которые содержатся в $A \times B$, и сослаться затем на уже рассмотренный случай конечных мер. ►

Теперь мы имеем право определить, как и в п. 1.1, произведение мер $\mu \times \nu$ как стандартное продолжение меры m_0.

5.2. Наметим альтернативный подход к определению интеграла от неотрицательной измеримой функции (для измеримых функций произвольного знака мы имеем в виду сохранить определение п. IV.1.3). Напомним, что как доказано в лемме 2.3 (без использования интеграла), подграфик неотрицательной измеримой (в широком смысле) функции измерим.

Определение. Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с σ-конечной мерой, $m = \mu \times \lambda$, где λ — одномерная мера Лебега. Интегралом от неотрицательной измеримой функции f по множеству $A \in \mathfrak{A}$ будем называть меру её подграфика $\mathscr{P}_f(A)$ над A.

В отличие от интеграла, введённого в главе IV, будем обозначать его символом $I(f, A)$. Таким образом, I — функционал (со значениями в $[0, +\infty]$), определённый на множестве $\mathcal{K} \times \mathfrak{A}$, где $\mathcal{K}$ — конус неотрицательных функций, измеримых на X.

Как нетрудно проверить, функционал I удовлетворяет условиям (I)–(IV) п. IV.2.5. В самом деле, выполнение условия (I) очевидно, а справедливость условия (II) вытекает из равенства $\mathscr{P}_f(A \vee B) = \mathscr{P}_f(A) \vee \mathscr{P}_f(B)$ и аддитивности меры m.

Если $f(x) = c$ при всех x из A, то $\mathscr{P}_f(A) = A \times [0, c]$, и поэтому $I(f, A) = c\mu(A) = c\, I(\mathbb{I}, A)$, что означает выполнение условия (III).

Наконец, условие (IV) также выполняется. Действительно, если $\{f_n\}_{n \geqslant 1}$ — возрастающая последовательность неотрицательных измеримых функций, поточечно сходящаяся к f, то справедливы включения

$$\mathscr{P}_f \setminus \Gamma_f \subset \bigcup_{n \geqslant 1} \mathscr{P}_{f_n} \subset \mathscr{P}_f\,.$$

При этом $m(\Gamma_f) = 0$ и $\mathscr{P}_{f_n} \subset \mathscr{P}_{f_{n+1}}$. Поэтому $m(\mathscr{P}_{f_n}) \to m(\mathscr{P}_f)$ в силу непрерывности меры снизу. Это означает, что $I(f_n, X) \to I(f, X)$, как и утверждается в условии (IV).

Как уже отмечалось в п. IV.2.5, другие свойства интеграла, полученные в § IV.2, вытекают из (I)–(IV).

УПРАЖНЕНИЯ

1) Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с σ-конечной полной мерой. Неотрицательную функцию f будем называть измеримой, если её подграфик измерим относительно алгебры $\mathfrak{A} \otimes \mathfrak{A}^1$. Докажите эквивалентность этого определения определению измеримости с помощью лебеговых множеств.

§ 6. Бесконечное произведение мер

6.1. Определим теперь произведение бесконечной последовательности мер. Напомним (см. п. 1.3), что произведение конечного семейства мер ассоциативно, так что, в частности, $\mu_1 \times \mu_2 \times \ldots \times \mu_n = \mu_1 \times (\mu_2 \times \ldots \times \mu_n)$.

Пусть $(X_n, \mathfrak{A}_n, \mu_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ — пространства с нормированными мерами, т. е. с мерами, удовлетворяющими условию $\mu_n(X_n) = 1$. Положим

$$Y = \prod_{k=1}^{\infty} X_k, \quad Y_n = \prod_{k=n+1}^{\infty} X_k \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Если все множества X_k совпадают с X, то их произведение мы будем обозначать символом $X^{\mathbb{N}}$.

Множество $A \subset Y$ будем называть *цилиндрическим* множеством ранга n, если оно представимо в виде $A = B \times Y_n$, где множество B (будем называть его *основанием* множества A) принадлежит σ-алгебре, на которой определено произведение мер $\mu_1, \ldots, \mu_n$. Очевидно, каждое цилиндрическое множество ранга n с основанием B является и цилиндрическим множеством ранга $n+1$ с основанием $B \times X_{n+1}$.

Мы предоставляем читателю убедиться самостоятельно, что цилиндрические множества всевозможных рангов образуют алгебру. Для каждого цилиндрического множества A ранга n с основанием B положим

$$\nu(A) = (\mu_1 \times \ldots \times \mu_n)(B).$$

Это определение корректно, так как

$$(\mu_1 \times \ldots \times \mu_n)(B) = (\mu_1 \times \ldots \times \mu_n \times \mu_{n+1})(B \times X_{n+1}) = \ldots .$$

Проверим, что функция ν аддитивна, т. е. является объёмом. В самом деле, пусть A и A' — цилиндрические множества. Очевидно, не умаляя общности можно считать, что их ранги одинаковы. Тогда $A = B \times Y_n$, $A' = B' \times Y_n$. Если A и A' дизъюнктны, то дизъюнктны и их основания, и так как $A \cup A' = (B \cup B') \times Y_n$, то

$$\nu(A \cup A') = (\mu_1 \times \ldots \times \mu_n)(B \cup B') = (\mu_1 \times \ldots \times \mu_n)(B) + (\mu_1 \times \ldots \times \mu_n)(B') = \nu(A) + \nu(A').$$

Объём ν будем называть *произведением* мер $\mu_1, \mu_2, \ldots$.

Заметим ещё, что при почти всех $x_1 \in X_1$ сечения цилиндрического множества $A = B \times Y_n$ ранга n снова являются цилиндрическими множествами (ранга $n-1$) в Y_1. Это вытекает из равенства

$$\begin{aligned} A_{x_1} &= \{(x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in Y_1 \mid (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in A\} = \\ &= \{(x_2, \ldots, x_n) \in X_2 \times \ldots \times X_n \mid (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B\} \times Y_n = B_{x_1} \times Y_n \end{aligned}$$

и принципа Кавальери (см. п. 2.2), гарантирующего измеримость B_{x_1} при почти всех $x_1 \in X_1$.

6.2. Докажем теперь счётную аддитивность объёма ν, руководствуясь идеей, использованной при доказательстве теоремы 5.1.

Теорема. *Бесконечное произведение мер есть мера.*

Доказательство. Так как система цилиндрических множеств есть алгебра, а ν — конечный объём, то для доказательства его счётной аддитивности достаточно проверить, что он непрерывен сверху на пустом множестве (см. теорему I.3.4). Пусть A^k — цилиндрические множества, $A^k \supset A^{k+1}$, $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A^k = \varnothing$. Докажем, что $\nu(A^k) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Рассуждая от противного, допустим, что для некоторого $\delta > 0$

$$\nu(A^k) \geqslant \delta > 0 \quad \text{при всех } k. \tag{1}$$

Выведем отсюда, что при некотором $c_1 \in X_1$ для сечений $A^k_{c_1}$ справедливы неравенства

$$\nu_1\bigl(A^k_{c_1}\bigr) \geqslant \frac{\delta}{2} \qquad \text{при всех } k, \tag{1'}$$

где ν_1 — произведение мер $\mu_2, \mu_3, \dots$. Пусть $A^k = B^k \times Y_{n_k}$ — цилиндрическое множество ранга n_k и пусть $\lambda = \mu_2 \times \ldots \times \mu_{n_k}$. Положим

$$E_k = \Bigl\{x_1 \in X_1 \,\Bigl|\, \nu_1\bigl(A^k_{x_1}\bigr) = \lambda(B^k_{x_1}) \geqslant \frac{\delta}{2}\Bigr\}.$$

Тогда

$$\delta \leqslant \nu(A^k) = (\mu_1 \times \mu_2 \times \ldots \times \mu_{n_k})(B^k) = (\mu_1 \times \lambda)(B^k) =$$
$$= \int_{E_k} \lambda(B^k_{x_1})\, d\mu_1(x_1) + \int_{X_1 \setminus E_k} \lambda(B^k_{x_1})\, d\mu_1(x_1) \leqslant \mu_1(E_k) + \frac{\delta}{2}$$

и, следовательно, $\mu_1(E_k) \geqslant \frac{\delta}{2}$. Так как множества E_k убывают, то $\mu_1\Bigl(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_k\Bigr) > 0$. Очевидно, что неравенства (1′) справедливы для всех тех точек $c_1 \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, для которых сечение измеримо.

Заменив (1) на (1′), а ν на ν_1 и повторив проведённые рассуждения, найдём такую точку $c_2 \in X_2$, что

$$\nu_2\bigl(A^k_{(c_1,c_2)}\bigr) \geqslant \frac{\delta}{4} \qquad \text{при всех } k,$$

где ν_2 — произведение мер $\mu_3, \mu_4, \dots$.

Продолжая этот процесс по индукции, мы получим такую последовательность точек $c_j \in X_j$, что при любых j и k сечения $A^k_{(c_1,\dots,c_j)}$ имеют положительный объём (произведение мер $\mu_{j+1}, \mu_{j+2}, \dots$) и поэтому непусты. Это и является для нас решающим обстоятельством — вопреки условию точка $c = (c_1, c_2, \dots) \in X$ принадлежит всем множествам A^k. В самом деле, при $j = n_k$ непустота сечения $A^k_{(c_1,\dots,c_{n_k})}$ означает, что оно совпадает с Y_{n_k}. Поэтому A^k содержит любые точки вида $(c_1, \dots, c_{n_k}, x_{n_k+1}, x_{n_k+2}, \dots)$. В частности, A^k содержит и точку c, что ввиду произвольности k даёт искомое противоречие. ►

Построенное нами бесконечное произведение мер $\mu_1, \mu_2, \dots$ задано на алгебре цилиндрических множеств, которая обычно не является σ-алгеброй. Продолжая его стандартным образом (см. § I.4), мы получим меру, определённую на σ-алгебре. Это продолжение мы по-прежнему будем называть произведением мер $\mu_1, \mu_2, \dots$ и обозначать символом $\mu_1 \times \mu_2 \times \dots$.

Отметим в заключение, что некоторые свойства бесконечного произведения мер могут показаться необычными. Например, множество $A \subset X^{\mathbb{N}}$ может иметь нулевую меру, хотя для любой его точки $x = (x_1, x_2, \dots)$ все "сечения"

$$A_n(x) = \{y \mid (x_1, \dots, x_{n-1}, y, x_{n+1}, \dots) \in A\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

совпадают с X (см. упр. 3, где следует считать, что A — множество ограниченных последовательностей).

УПРАЖНЕНИЯ

1) Докажите, что отрезок $[0,1]$ с мерой Лебега λ как пространство с мерой изоморфен (см. определение в упр. 11 § 4) пространству $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, где $X = [0,1]^{\mathbb{N}}$, а $\mu = \lambda \times \lambda \times \dots$.

2) Приведите пример последовательности неотрицательных функций $f_n \in \mathscr{L}(X, \mu)$, имеющих ограниченные интегралы и удовлетворяющих условию

$$\text{для любой подпоследовательности } \{n_k\} \quad \sup_k |f_{n_k}(x)| = +\infty \ \text{ почти везде.}$$

Указание. Рассмотрите меру μ из упр. 1 и функции $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x_n}}$, где $x = (x_1, x_2, \dots) \in (0,1)^{\mathbb{N}}$.

3) Пусть γ — вероятностная мера на $\mathbb{R}$ с плотностью $\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2}$, $\mu = \gamma \times \gamma \times \cdots$. Докажите, что всякий бесконечномерный куб и множество ограниченных последовательностей имеют нулевую меру, а при достаточно большом $a > 0$ мера μ множества

$$P(a) = \left\{(x_1, x_2, \dots) \,\middle|\, |x_n| \leqslant a\sqrt{\ln(n+1)},\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

сколь угодно близка к единице.

4) Пусть μ — мера в $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ из предыдущей задачи. Положим

$$E_a = \left\{x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|x_n|}{\sqrt{\ln n}} < a\right\}.$$

Докажите, что $\mu(E_a) = 0$ при $a = 1$ и $\mu(E_a) = 1$ при $a > 1$. Выведите отсюда, что $\mu(H) = 1$, где H — множество таких точек $x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, что $\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{|x_n|}{\sqrt{\ln n}} = 1$.

Глава VI. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ В ИНТЕГРАЛЕ

§ 1. Интегрирование по взвешенному образу меры

1.1. Наша основная цель — научиться осуществлять замену переменной в интеграле по мере Лебега. Как это часто бывает, полезно начать с более общего вопроса: можно ли с помощью "параметризации" $\Phi\colon X \to Y$ множества Y, в котором задана мера, свести интегрирование по ней к интегрированию по мере, заданной в X?

Точнее, пусть имеются два пространства с мерой $(X, \mathfrak{A}, \mu)$, $(Y, \mathfrak{B}, \nu)$ и отображение $\Phi\colon X \to Y$. Чрезвычайно важно знать, при каких условиях можно установить связь между интегралом по мере ν от функции f, заданной на Y, и интегралом от $f \circ \Phi$ по мере μ. Конечно, чтобы это стало возможно, необходимо предположить, что меры меры μ и ν каким-то образом согласованы. Эту согласованность мы опишем, введя понятие взвешенного образа меры.

Определение. Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой, $\mathfrak{B}$ — произвольная σ-алгебра подмножеств множества Y и $\Phi\colon X \to Y$ — отображение, удовлетворяющее условию

$$\Phi^{-1}(B) \in \mathfrak{A} \quad \text{для любого множества } B \text{ из } \mathfrak{B}.$$

Для неотрицательной измеримой на X функции ω определим функцию $\nu\colon \mathfrak{B} \to \overline{\mathbb{R}}$

$$\nu(B) = \int_{\Phi^{-1}(B)} \omega(x)\, d\mu(x) \qquad (B \in \mathfrak{B}). \tag{1}$$

Очевидно, ν есть мера на $\mathfrak{B}$. Будем называть её *взвешенным образом* (точнее, *ω-взвешенным Φ-образом*) меры μ. Функцию ω назовём *весом* или *весовой функцией*.

Отметим, что пока мы не предполагаем ни взаимной однозначности, ни сюръективности отображения Φ.

Следующая теорема показывает, как связаны между собой интегралы по мерам ν и μ.

Теорема. *Пусть ν — ω-взвешенный образ меры μ при отображении $\Phi\colon X \to Y$. Тогда для любой неотрицательной измеримой на Y функции f суперпозиция $f \circ \Phi$ также измерима и выполняется равенство*

$$\int_Y f(y)\, d\nu(y) = \int_X f(\Phi(x))\, \omega(x)\, d\mu(x). \tag{2}$$

Оно справедливо и для любой суммируемой на Y функции f.

Доказательство. Измеримость суперпозиции $g = f \circ \Phi$ следует из определения взвешенного образа меры. Действительно, так как для любого вещественного числа a неравенство $g(x) = f(\Phi(x)) < a$ равносильно включению $\Phi(x) \in Y(f < a)$, то $X(g < a) = \Phi^{-1}\big(Y(f < a)\big) \in \mathfrak{A}$.

Равенство (2) проверим, последовательно усложняя функцию f. Если $f = \chi_B$ — характеристическая функция множества B, $B \in \mathfrak{B}$, то

$$(f \circ \Phi)(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \Phi(x) \in B, \\ 0 & \text{при} \quad \Phi(x) \notin B \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \in \Phi^{-1}(B), \\ 0 & \text{при} \quad x \notin \Phi^{-1}(B) \end{cases} = \chi_{\Phi^{-1}(B)}(x).$$

Таким образом, $f \circ \Phi = \chi_{\Phi^{-1}(B)}$. В этом случае из определения ν непосредственно вытекает равенство (2). Для неотрицательной простой функции f оно следует из линейности интеграла.

В случае, когда f — произвольная неотрицательная измеримая функция, рассмотрим возрастающую последовательность неотрицательных простых функций f_n, поточечно сходящуюся к f. Тогда

$$\int_Y f_n(y)\, d\nu(y) = \int_X f_n(\Phi(x))\, \omega(x)\, d\mu(x).$$

Переходя здесь к пределу (это возможно по теореме Леви), мы получаем (2), что завершает доказательство теоремы для $f \geqslant 0$.

Как мы убедились, для любой измеримой на Y функции f справедливо равенство

$$\int_Y |f(y)|\, d\nu(y) = \int_X |f(\Phi(x))|\, \omega(x)\, d\mu(x).$$

Поэтому функции f и $(f \circ \Phi)\,\omega$ одновременно суммируемы относительно мер ν и μ соответственно. Написав в случае суммируемости равенство (2) для функций $f_+ = \max\{0, f\}$ и $f_- = \max\{0, -f\}$ и вычтя из первого второе, мы получим равенство (2) для вещественной функции f.

Комплексный случай очевиден. ►

Равенство (2) можно переписать в формально несколько более общем виде.

Следствие. *Пусть* $B \in \mathfrak{B}$. *Тогда*

$$\int_B f(y)\, d\nu(y) = \int_{\Phi^{-1}(B)} f(\Phi(x))\, \omega(x)\, d\mu(x).$$

Для доказательства достаточно применить теорему к функции $f \cdot \chi_B$.

1.2. Отметим два важных частных случая взвешенного образа меры.

Первый из них соответствует функции $\omega \equiv 1$. Тогда равенство (1) упрощается: $\nu(B) = \mu\big(\Phi^{-1}(B)\big)$. Мера ν называется Φ-образом меры μ и обозначается символом $\Phi(\mu)$. Подробнее об интегрировании по образу меры в случае, когда $Y = \mathbb{R}$, говорится в § 4.

Второй частный случай получим, взяв $Y = X$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$ и $\Phi = \mathrm{Id}$. Условие (1) принимает вид

$$\nu(B) = \int_B \omega\, d\mu \qquad (B \in \mathfrak{A}), \tag{1'}$$

и для любой неотрицательной функции мы согласно (2) имеем

$$\int_X f(x)\,d\nu(x) = \int_X f(x)\omega(x)\,d\mu(x). \tag{2'}$$

Этот результат нам уже известен (см. п. IV.5.3). Напомним, что в этом случае мы называли функцию ω плотностью меры ν относительно μ. Учитывая равенство (2′), естественно символически обозначать эту ситуацию равенством $d\nu = \omega\,d\mu$.

Как вытекает из теоремы IV.5.4, если мера ν конечна, то её плотность определяется однозначно с точностью до эквивалентности. То же самое верно и для σ-конечной меры (см. упр. 1 § IV.5). Используя понятие образа меры, можно сказать, что ω-взвешенный Φ-образ меры μ есть Φ-образ меры, имеющей плотность ω относительно μ: $\nu = \Phi(\mu_1)$, где $d\mu_1 = \omega\,d\mu$.

Чтобы иметь возможность достаточно свободно пользоваться равенством (2′), желательно иметь удобные критерии того, что ω является плотностью данной меры относительно другой. Один простой и важный критерий мы сейчас установим.

Теорема. *Пусть μ и ν две меры, определённые на σ-алгебре $\mathfrak{A}$ подмножеств множества X. Для того чтобы неотрицательная измеримая функция ω была плотностью ν относительно μ, необходимо и достаточно, чтобы для любого множества A из $\mathfrak{A}$ была справедлива двусторонняя оценка**)

$$\mu(A)\inf_A \omega \leqslant \nu(A) \leqslant \mu(A)\sup_A \omega.$$

Доказательство. Так как необходимость очевидна, перейдём сразу к достаточности, т. е. к доказательству равенства (1′). При этом мы можем считать, что $\omega > 0$ на B, так как для множества $e = \{x \in B \mid \omega(x) = 0\}$, очевидно, $\nu(e) = 0 = \int_e \omega\,d\mu$.

Считая функцию ω положительной, зафиксируем произвольное число q из интервала $(0,1)$ и рассмотрим множества

$$B_j = \{x \in B \mid q^j \leqslant \omega(x) < q^{j-1}\} \quad (j \in \mathbb{Z}).$$

Они измеримы и образуют разбиение B. Из двусторонней оценки сразу следует, что

$$q^j\mu(B_j) \leqslant \nu(B_j) \leqslant q^{j-1}\mu(B_j).$$

Для интегралов по множествам B_j справедливы аналогичные неравенства

$$q^j\mu(B_j) \leqslant \int_{B_j} \omega(x)\,d\mu(x) \leqslant q^{j-1}\mu(B_j).$$

Следовательно,

$$q\int_B \omega(x)\,d\mu(x) \leqslant \sum_j q^j\mu(B_j) \leqslant \nu(B) \leqslant \frac{1}{q}\sum_j q^j\mu(B_j) \leqslant \frac{1}{q}\int_B \omega(x)\,d\mu(x).$$

*) Как обычно, произведения $0\cdot(+\infty)$ и $(+\infty)\cdot 0$ считаются равными нулю.

Таким образом,

$$q\int_B \omega(x)\,d\mu(x) \leqslant \nu(B) \leqslant \frac{1}{q}\int_B \omega(x)\,d\mu(x)$$

для любого q из интервала $(0,1)$. Переходя к пределу при $q \to 1$, получаем доказываемое равенство. ►

УПРАЖНЕНИЯ

1) Пусть ν' — образ, а ν — ω-взвешенный образ меры μ при некотором биективном отображении Φ. Докажите, что $d\nu = \omega \circ \Phi^{-1}\,d\nu'$.

2) Определим отображение $\Phi\colon [0,1) \to [0,1)\times[0,1)$ следующим образом: если разложение числа x в двоичную дробь имеет вид $x = 0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$, то $\Phi(x) = (y_1, y_2)$, где $y_1 = 0,\alpha_1\alpha_3\ldots$; $y_2 = 0,\alpha_2\alpha_4\ldots$ (если разложение x в двоичную дробь не единственно, мы фиксируем произвольно одно из разложений). Докажите, что множество $A \subset [0,1)\times[0,1)$ измеримо по Лебегу тогда и только тогда, когда измерим его прообраз $\Phi^{-1}(A)$. Найдите Φ-образ меры Лебега.

3) Пусть λ — мера Лебега на промежутке $[0,1)$, $\{x\}$ — дробная часть числа x и $\varphi(x) = \{\frac{1}{x}\}$ — отображение $[0,1)$ в себя (по определению $\varphi(0) = 0$). Докажите, что $\omega(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+x)^2}$ есть плотность меры $\varphi(\lambda)$, т. е.

$$\lambda(\varphi^{-1}(A)) = \int_A \omega(x)\,dx$$

для любого содержащегося в $[0,1)$ измеримого множества A. Отметим, что согласно формуле (9) п. VII.2.6 $\omega(x) = (\ln\Gamma(x))''$.

4) Докажите, что определённая на $(0,1)$ мера, имеющая плотность $\frac{1}{1+x}$ относительно меры Лебега, инвариантна при отображении $\varphi(x) = \{\frac{1}{x}\}$, т. е.

$$\int_{\varphi^{-1}(A)} \frac{dx}{1+x} = \int_A \frac{dx}{1+x} \qquad (A \subset (0,1)).$$

5) Пусть $\varphi,\ \psi$ — ограниченные на $\mathbb{R}$ неубывающие функции и

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-t)\,d\psi(t) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Докажите, что мера μ_g есть образ меры $\mu_\varphi \times \mu_\psi$ при отображении $(x,y) \mapsto x+y$ и $\mu_g(A) = \int_{\mathbb{R}} \mu_\varphi(-t+A)\,d\psi(t)$ для любого борелевского множества A. Проверьте, что функция g непрерывна, если непрерывна хотя бы одна из функций φ, ψ.

6) Докажите, что функция g из предыдущего упражнения строго возрастает на $[0,2]$, если $\varphi = \psi$ — канторова функция (слева и справа от $[0,1]$ значения φ равны соответственно нулю и единице). Указание. На каждом промежутке вида $\Delta_k = [2t_k, 2t_k + 2\cdot 3^{-n}]$, где $t_k = k\cdot 3^{-n}$ ($n \in \mathbb{N}$, $k = 0,1,\ldots,3^n-1$), приращение g положительно, поскольку полоса $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x+y \in \Delta_k\}$ содержит квадрат, стороны которого представляют собой сегменты n-го ранга, возникающие при построении канторова множества.

7) Докажите, что функция g из упр. 6) не абсолютно непрерывна. Указание. Убедитесь, что при каждом n не меньше половины меры μ_g сосредоточено на тех промежутках Δ_k, у которых в троичном разложении t_k встречается по крайней мере $\frac{n}{2}$ единиц; проверьте, что при больших n суммарная длина этих промежутков сколь угодно мала.

§ 2. Замена переменной в кратном интеграле

Мы хотим конкретизировать общую схему, развитую в § 1, и выяснить, как связаны интегралы по открытым подмножествам $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}'$ пространства $\mathbb{R}^m$ в случае, когда первое из них отображается на другое с помощью некоторого диффеоморфизма. В этом параграфе под измеримыми множествами понимаются множества, измеримые по Лебегу, а интегралы рассматриваются только по мере Лебега в $\mathbb{R}^m$, которая обозначается буквой λ без указания на размерность.

Всюду далее $\Phi'(x)$ — матрица Якоби*) гладкого отображения Φ в точке x (матрица, соответствующая линейному отображению $d_x\Phi$ в каноническом базисе пространства $\mathbb{R}^m$), её определитель (*якобиан* отображения Φ) обозначается символом $J_\Phi(x)$ ($x \in \mathcal{O}$).

Напомним (см. п. Д.VII.3), что *диффеоморфизм* есть гладкое взаимно однозначное отображение одного открытого подмножества пространства $\mathbb{R}^m$ на другое, обратное к которому также гладкое. Как установлено в теореме II.3.1, образ измеримого множества при гладком отображении измерим, а образы множеств меры нуль имеют нулевую меру.

2.1. Прежде чем применять в нашей ситуации общую теорему 1.1, необходимо выяснить, как мера Лебега преобразуется при диффеоморфизме. Этот вопрос удобно переформулировать как задачу о вычислении меры ν, определённой на σ-алгебре измеримых подмножеств множества $\mathcal{O}$ равенством $\nu(A) = \lambda\bigl(\Phi(A)\bigr)$. Говоря конкретнее, мы хотим выяснить, имеет ли мера ν плотность относительно меры Лебега, и какова эта плотность, если она существует.

В поисках возможного значения гипотетической плотности в произвольной точке a, $a \in \mathcal{O}$, ключевым является тот факт, что вблизи неё диффеоморфизм Φ хорошо аппроксимируется аффинным отображением $x \mapsto \widetilde{\Phi}(x) = \Phi(a) + d_a\Phi(x-a)$, влияние которого на меру Лебега известно (см. теоремы II.4.1 и II.5.2):

$$\lambda\bigl(\widetilde{\Phi}(A)\bigr) = \lambda\bigl(d_a\Phi(A)\bigr) = |\det d_a\Phi|\,\lambda(A) = |J_\Phi(a)|\,\lambda(A).$$

Поэтому естественно предположить, что для измеримого множества A, лежащего в малой окрестности точки a, справедливо приближённое равенство

$$\lambda\bigl(\Phi(A)\bigr) \approx \lambda\bigl(\widetilde{\Phi}(A)\bigr) = |J_\Phi(a)|\,\lambda(A).$$

Вместе с тем, как следует из теоремы о среднем, $|J_\Phi(a)|\,\lambda(A) \approx \int_A |J_\Phi(x)|\,dx$. Вытекающее отсюда соотношение

$$\nu(A) = \lambda\bigl(\Phi(A)\bigr) \approx \int_A |J_\Phi(x)|\,dx$$

делает весьма правдоподобным, что плотностью меры ν относительно меры Лебега может быть функция $|J_\Phi|$.

*) Карл Густав Якоб **Якоби** (Jacobi), 1804–1851, — немецкий математик.

Перейдём теперь к формальному доказательству этого факта.

Теорема. *Пусть Φ — диффеоморфизм, заданный на открытом множестве $\mathcal{O}$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m$. Тогда для любого измеримого множества A, $A \subset \mathcal{O}$, справедливо равенство*

$$\lambda\bigl(\Phi(A)\bigr) = \int_A |J_\Phi(x)|\,dx. \tag{1}$$

Доказательство. На σ-алгебре содержащихся в $\mathcal{O}$ измеримых множеств определим меру ν равенством

$$\nu(A) = \lambda\bigl(\Phi(A)\bigr) \qquad (A \subset \mathcal{O})$$

и убедимся, что она удовлетворяет условию

$$\inf_A |J_\Phi|\,\lambda(A) \leqslant \nu(A) \leqslant \sup_A |J_\Phi|\,\lambda(A). \tag{2}$$

Как установлено в теореме 1.2, отсюда следует равенство $\nu(A) = \int_A |J_\Phi(x)|\,dx$, что и утверждается в теореме.

Переходя к доказательству неравенства (2), заметим, что достаточно установить лишь правое неравенство, так как применив его к отображению Φ^{-1} и множеству $\Phi(A)$, мы получим левое неравенство (напомним, что $J_\Phi(x)\cdot J_{\Phi^{-1}}(y) = 1$ при $y = \Phi(x)$ и $x \in \mathcal{O}$).

В качестве первого и наиболее трудного шага докажем правое неравенство (2) для произвольной кубической ячейки, содержащейся в $\mathcal{O}$ вместе со своим замыканием. Допустим противное: $\lambda(Q)\sup\limits_Q |J_\Phi| < \nu(Q)$ для некоторой кубической ячейки Q, $\overline{Q} \subset \mathcal{O}$. Тогда $C\lambda(Q) < \nu(Q)$ при некотором $C > \sup\limits_Q |J_\Phi|$. Разделим Q на 2^m ячеек, рёбра которых в два раза меньше ребра ячейки Q. Для какой-то из них — назовём её Q_1 — выполняется неравенство $C\lambda(Q_1) < \nu(Q_1)$. Повторяя это построение, по индукции построим такую последовательность вложенных кубических ячеек $\{Q_n\}$, что $\operatorname{diam}(Q_n) \to 0$ и

$$C\lambda(Q_n) < \nu(Q_n) \quad \text{для всех } n.$$

Пусть $a \in \bigcap\limits_n \overline{Q}_n$ и $L = d_a\Phi$. По условию L — обратимое линейное отображение, а так как $a \in \overline{Q}$, то $|\det L| = |J_\Phi(a)| < C$. Рассмотрим вспомогательное отображение

$$\Psi(x) = a + L^{-1}\bigl(\Phi(x) - \Phi(a)\bigr).$$

Около точки a оно близко к тождественному: $\Psi(x) = x + o(x-a)$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует столь малый шар B с центром в точке a, что

$$\|\Psi(x) - x\| \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}\|x - a\| \quad \text{для всех } x \text{ из } B.$$

По построению $a \in \overline{Q}_n$ и $\overline{Q}_n \subset B$, если номер n достаточно велик. Пусть h — длина ребра куба Q_n, $x \in Q_n$. Так как $\|x - a\| \leqslant \sqrt{m}h$, то $\|\Psi(x) - x\| \leqslant \varepsilon h$, и аналогичное

неравенство справедливо для всех координат разности $\Psi(x) - x$. Поэтому вектор $\Psi(x)$ принадлежит кубу с длиной ребра не больше $(1+2\varepsilon)h$. Следовательно,

$$\lambda\big(\Psi(Q_n)\big) \leqslant (1+2\varepsilon)^m h^m = (1+2\varepsilon)^m \lambda(Q_n).$$

Воспользуемся инвариантностью меры Лебега относительно сдвига (см. п. II.4.1) и теоремой II.5.2:

$$\lambda\big(\Psi(Q_n)\big) = \lambda\big(L^{-1} \circ \Phi(Q_n)\big) = |\det L^{-1}| \cdot \lambda\big(\Phi(Q_n)\big) = \frac{\nu(Q_n)}{|\det L|}.$$

Таким образом,

$$C\lambda(Q_n) < \nu(Q_n) = |\det L| \cdot \lambda\big(\Psi(Q_n)\big) \leqslant (1+2\varepsilon)^m |\det L| \cdot \lambda(Q_n).$$

Поэтому $C < (1+2\varepsilon)^m |\det L|$ для всех $\varepsilon > 0$, т. е. $C \leqslant |\det L| = |J_\Phi(a)|$. Но это невозможно, так как $C > \sup\limits_Q |J_\Phi|$ и $a \in \overline{Q}$. Полученное противоречие доказывает, что сделанное предположение неверно — неравенство $\nu(Q) \leqslant \lambda(Q) \sup\limits_Q |J_\Phi|$ выполняется для любой кубической ячейки Q, если $\overline{Q} \subset \mathcal{O}$.

Заметим теперь, что для множества A оценка (2) сверху заведомо выполняется, если она справедлива для множеств, образующих не более чем счётное разбиение A. Отсюда сразу следует, что оценка сверху верна для любого открытого множества G, $G \subset \mathcal{O}$ (достаточно разбить G на кубические ячейки, замыкания которых лежат в G — см. теорему I.1.7). Наконец, используя регулярность меры Лебега, получаем правую часть неравенства (2) для произвольного измеримого множества A, $A \subset \mathcal{O}$:

$$\nu(A) \leqslant \inf_{\substack{A \subset G \subset \mathcal{O} \\ G \text{ открыто}}} \nu(G) \leqslant \inf_{\substack{A \subset G \subset \mathcal{O} \\ G \text{ открыто}}} \Big(\lambda(G) \cdot \sup_G |J_\Phi|\Big) = \lambda(A) \cdot \sup_A |J_\Phi|.$$

Это завершает доказательство (2), а вместе с ним и теоремы. ►

Из непрерывности J_Φ и формулы (1) следует, что

$$|J_\Phi(a)| = \lim \frac{\lambda\big(\Phi(A)\big)}{\lambda(A)}, \tag{3}$$

где предел вычисляется при условии, что $\lambda(A) > 0$ и множества A “стягиваются” к точке a (т. е. $A \subset B(a,r)$, $r \to 0$). Таким образом, как мы и предполагали с самого начала, “в малом” на $|J_\Phi(a)|$ можно смотреть как на коэффициент искажения меры при отображении Φ (подобно тому как при линейном отображении модуль его определителя есть “глобальный” коэффициент искажения меры).

2.2. Теперь у нас есть всё необходимое для получения основного результата этого параграфа — формулы замены переменной в кратном интеграле.

Теорема. *Пусть Φ — диффеоморфизм, заданный на открытом множестве $\mathcal{O}$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m$. Тогда для любой измеримой неотрицательной функции f, заданной на $\mathcal{O}' = \Phi(\mathcal{O})$, выполняется равенство*

$$\int_{\mathcal{O}'} f(y)\,dy = \int_{\mathcal{O}} f(\Phi(x))\,|J_\Phi(x)|\,dx. \tag{4}$$

Оно справедливо и для любой суммируемой на $\mathcal{O}'$ функции f.

В силу предыдущей теоремы это частный случай общей теоремы 1.1, где $X = \mathcal{O}$, $Y = \mathcal{O}'$, μ и ν — меры Лебега на σ-алгебрах измеримых подмножеств множеств $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}'$ соответственно, а $\omega = |J_\Phi|$. Измеримость множества $\Phi^{-1}(B)$ вытекает из гладкости Φ^{-1}, а равенство $\lambda(B) = \int_{\Phi^{-1}(B)} |J_\Phi(x)|\,dx$, требуемое по определению 1.1, равносильно утверждению теоремы 2.1. ►

Как и в §1 (см. следствие 1.1), доказанное равенство выполняется и в несколько более общем виде: для любого содержащегося в $\mathcal{O}$ измеримого множества A

$$\int_{\Phi(A)} f(y)\,d\lambda(y) = \int_A f(\Phi(x))\,|J_\Phi(x)|\,d\lambda(x).$$

Суммируемость f на $\Phi(A)$ равносильна суммируемости функции $(f \circ \Phi)\,|J_\Phi|$ на A.

Замечание. Условия теоремы 2.2 можно несколько ослабить, разрешив отображению Φ "портиться" на "пренебрежимом" множестве. Опишем эту ситуацию подробнее. Пусть

$$X \subset \mathbb{R}^m,\ \ \mathcal{O} = \operatorname{Int}(X),\ \ e = X \setminus \mathcal{O},\ \ \Phi\colon X \to \mathbb{R}^m,\ \ \Phi(X) = Y.$$

Если сужение Φ на $\mathcal{O}$ есть диффеоморфизм и $\lambda(e) = \lambda\big(\Phi(e)\big) = 0$, то заключение теоремы 2.2 сохраняется и равенство

$$\int_Y f(y)\,dy = \int_X f(\Phi(x))|J_\Phi(x)|\,dx \tag{4'}$$

справедливо для любой функции f суммируемой на Y.

Действительно, так как e и $Y \setminus \Phi(\mathcal{O}) \subset \Phi(e)$ суть множества меры нуль, то

$$\int_Y f(y)\,dy = \int_{\Phi(\mathcal{O})} f(y)\,dy = \int_{\mathcal{O}} f(\Phi(x)|J_\Phi(x)|\,dx = \int_X f(\Phi(x))|J_\Phi(x)|\,dx. \ ►$$

Отметим, что отображение Φ, будучи взаимно однозначным на $\mathcal{O}$, может не удовлетворять этому условию на X и может быть не только не гладким, но даже и не непрерывным на e.

Рассмотрим простейший частный случай доказанной теоремы. Пусть $m = 1$, $\Phi \in C^1\big([a,b]\big)$ и пусть $\Phi'(x) \neq 0$ при $x \in (a,b)$. В силу последнего условия Φ' сохраняет знак на (a,b), функция Φ строго монотонна, и согласно теореме 2.2 мы получаем, что для любой измеримой на $[p,q] = \Phi([a,b])$ неотрицательной функции f справедливо равенство

$$\int_{[p,q]} f(y)\,dy = \int_{[a,b]} f(\Phi(x))|\Phi'(x)|\,dx.$$

Рассмотрев случаи $\Phi' > 0$ и $\Phi' < 0$ читатель легко убедится, что независимо от характера монотонности функции Φ из этого равенства следует формула

$$\int_a^b f(\Phi(x))\Phi'(x)\,dx = \int_{\Phi(a)}^{\Phi(b)} f(y)\,dy,$$

полученная в предложении II п. IV.6.2 лишь для непрерывной на (p,q) функции f (но, заметим, при несколько более слабых предположениях о Φ).

Отметим два простых частных случая теоремы 2.2, которыми будем неоднократно пользоваться в дальнейшем.

Сдвиг. Для любого вектора v, $v \in \mathbb{R}^m$, справедливо равенство

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^m} f(v+x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(v-x)\,dx.$$

Для доказательства достаточно заметить, что сдвиг, как и сдвиг с отражением, есть диффеоморфизм пространства $\mathbb{R}^m$, у которого модуль якобиана всюду равен единице.

Линейная замена. Пусть $L\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — обратимое линейное отображение. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(y)\,dy = |\det L| \int_{\mathbb{R}^m} f(L(x))\,dx.$$

В частности, для любого ненулевого коэффициента c справедливо равенство

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(y)\,dy = |c|^m \int_{\mathbb{R}^m} f(cx)\,dx.$$

В обоих случаях ради упрощения формул рассматривается интегрирование по всему пространству $\mathbb{R}^m$. Формулы для интегрирования по части $\mathbb{R}^m$ выводятся отсюда без труда.

2.3. Если $\Phi\colon \mathcal{O} \to \mathcal{O}'$ — диффеоморфизм, то положение точки y из $\mathcal{O}'$ полностью определяется точкой $x = \Phi^{-1}(y)$, и поэтому декартовы координаты точки x часто называют криволинейными координатами точки y. При этом множества $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}'$ удобно представлять себе лежащими в разных пространствах $\mathbb{R}^m$, рассматривая два экземпляра этого пространства (координаты точек в этих пространствах естественно обозначать разными буквами). Подмножество множества $\mathcal{O}'$, где криволинейная координата с данным номером k постоянна, называется координатной поверхностью (в двумерном случае координатной линией). Координатная поверхность есть образ пересечения плоскости $x_k = \mathrm{const}$ с $\mathcal{O}$. На неё можно также смотреть как на поверхность уровня для k-й координатной функции отображения Φ^{-1}. Таким образом, $\mathcal{O}'$ "расслаивается" на координатные поверхности $x_k = \mathrm{const}$, которые, очевидно, попарно не пересекаются. Такое расслоение мы можем производить m способами в зависимости от номера координаты. Каждая точка из $\mathcal{O}'$ лежит на пересечении m координатных поверхностей.

Зафиксировав все координаты точки $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathcal{O}$, кроме k-ой, и меняя эту координату в окрестности a_k, мы получим путь, параметризующий кривую, проходящую через точку $\Phi(a)$. Эта кривая называется *координатной линией.* Касательный вектор к ней в точке $\Phi(a)$ есть не что иное, как k-й столбец матрицы Якоби $\Phi'(a)$, который мы обозначим τ_k. Как известно (см. п. II.5.2), величина $|J_\Phi(a)|$ имеет простой геометрический смысл — это объём параллелепипеда, построенного на векторах $\tau_1, \dots, \tau_m$. Иногда, особенно в тех случаях, когда криволинейные координаты имеют простое геометрическое истолкование, рассматриваемую ситуацию можно описать, не упоминая о диффеоморфизме Φ. Вместо этого говорят, что в множестве $\mathcal{O}'$ "вводятся криволинейные координаты", и указывают зависимости $y_k = \varphi_k(x_1, \dots, x_m)$ декартовых координат точки, принадлежащей $\mathcal{O}'$, от криволинейных, т. е. фактически определяют координатные функции диффеоморфизма Φ. Поскольку он не указывается

явно, вместо определителя $J_\Phi(x) = \det d_x\Phi$ говорят о функциональном определителе $\frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_m)}{D(x_1,\dots,x_m)} = \det\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_j}\right)$, соответствующем системе функций $\varphi_1,\dots,\varphi_m$.

Иногда оказывается возможным вычислить абсолютную величину якобиана, опираясь не на определение, а на равенство (3), в котором рассматриваются множества A того или иного специального вида. Пусть, например, A — ячейка $\prod\limits_{k=1}^{m}[a_k, a_k + h_k)$, содержащаяся в $\mathcal{O}$, где $h = (h_1,\dots,h_m) \in \mathbb{R}^m_+$. Её образ есть "криволинейный параллелепипед", ограниченный соответствующими координатными поверхностями, "рёбра" которого лежат на координатных линиях и при малых h близки к касательным векторам $h_k\tau_k$. Главную часть объёма этого криволинейного параллелепипеда нередко удаётся найти непосредственно, руководствуясь геометрическим смыслом криволинейных координат, что позволяет вычислить и $|J_\Phi(a)|$.

Пример. Вычислим площадь S криволинейного четырёхугольника

$$M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2_+ \,\middle|\, a^2 \leqslant xy \leqslant b^2,\ \alpha \leqslant \frac{y}{x} \leqslant \beta\right\}$$

(a, b, α, β — положительные параметры, $a < b$, $\alpha < \beta$). Для этого введём в $\mathbb{R}^2_+$ криволинейные координаты u и v с помощью равенств

$$u = xy \quad \text{и} \quad v = \frac{y}{x}.$$

Соответствующие им координатные линии суть гиперболы и лучи. Поскольку на M криволинейные координаты могут принимать независимо друг от друга значения от a^2 до b^2 и от α до β соответственно, точки (u,v), отвечающие точкам (x,y) из M "на плоскости $u\,v$", заполнят прямоугольник $[a^2,b^2]\times[\alpha,\beta]$. Именно подобное упрощение исходной области и является, как правило, одной из главных целей при замене переменных. Легко проверить, что $\frac{D(u,v)}{D(x,y)} = 2\frac{y}{x} = 2v$. Следовательно, якобиан отображения $(u,v)\mapsto(x,y)$ равен $\frac{1}{2v}$ (обратим внимание читателя, что здесь мы сначала находим не якобиан отображения $(u,v)\mapsto(x,y)$, а проще вычисляемый якобиан обратного отображения). Поэтому искомая площадь равна

$$S = \iint_M 1\,dx\,dy = \int_{a^2}^{b^2}\int_\alpha^\beta \frac{du\,dv}{2v} = \frac{b^2-a^2}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}.$$

2.4. *Полярные координаты.* Положение точки на плоскости, кроме декартовых координат x и y, можно определить и с помощью других числовых параметров. Ими могут быть расстояние r от рассматриваемой точки до начала (декартовых) координат O и полярный угол φ, т. е. угол, образуемый некоторым фиксированным лучом, начинающимся в O, и радиус-вектором точки. Числа r и φ называются *полярными координатами* точки. Вводя декартовы координаты так, чтобы полярный угол отсчитывался от положительной части оси абсцисс в сторону положительной части оси ординат, мы видим, что связь между декартовым и полярными координатами задаётся формулами

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Формально говоря, эти равенства определяют гладкое отображение

$$(r,\varphi) \mapsto \Phi(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi),$$

переводящее плоскость r, φ в плоскость x, y. Однако, учитывая геометрический смысл параметра r (расстояние до начала координат), мы будем считать, что отображение Φ определено в полуплоскости $r \geqslant 0$. Очевидно, Φ не взаимно однозначно. Чтобы добиться взаимной однозначности, следует ограничить изменение угла φ каким-то интервалом, длина которого не превосходит 2π. Как читатель легко убедится, сужение Φ на полуполосу вида $P_\alpha = (0, +\infty) \times (\alpha, \alpha + 2\pi)$ взаимно однозначно, а её образ есть плоскость, из которой удалён луч $L_\alpha = \{(r\cos\alpha, r\sin\alpha) \,|\, r \geqslant 0\}$, или, как говорят, плоскость с разрезом по лучу L_α. Очевидно, $L_\alpha = \Phi(\partial P_\alpha)$, так что $\Phi(\overline{P}_\alpha) = \mathbb{R}^2$. Так как отображение Φ не взаимно однозначно, то переход от декартовых координат к полярным необходимо сопровождать указанием диапазона изменения полярного угла. Как правило, это промежутки $(0, 2\pi)$ или $(-\pi, \pi)$ (соответствующие $\alpha = 0$ и $\alpha = -\pi$).

Координатные линии, т. е. линии $r = \text{const}$ и $\varphi = \text{const}$ — это окружности (с центром в начале координат O) и лучи (начинающиеся в O) соответственно. Прямоугольник $[r_0, r_0 + \rho] \times [\varphi_0, \varphi_0 + \xi]$ преобразуется в криволинейный четырёхугольник, ограниченный окружностями $r = r_0$, $r = r_0 + \rho$ и лучами $\varphi = \varphi_0$, $\varphi = \varphi_0 + \xi$ (см. рис. 6).

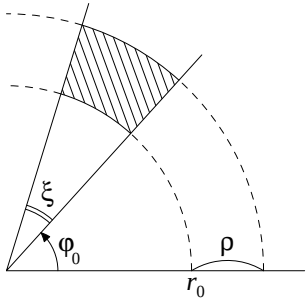


Рис. 6.

При малых ρ, ξ это почти прямоугольник со сторонами $r_0\xi$ и ρ. Поэтому с точностью до бесконечно малых высшего порядка его площадь равна $r_0\rho\xi$. Вспомнив, что значение якобиана J_Φ в точке (r_0, φ_0) есть коэффициент искажения площади, мы приходим к выводу, что $J_\Phi(r_0, \varphi_0) = r_0$. Читатель без труда придёт к этому же результату, сосчитав функциональный определитель второго порядка. Учитывая сделанное после теоремы 2.2 замечание, общую формулу $(4')$ замены переменной в интеграле можно при переходе к полярным координатам переписать в следующем виде:

$$\iint_A f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{\Phi_\alpha^{-1}(A)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr\, d\varphi,$$

где $A \subset \mathbb{R}^2$, а Φ_α — сужение Φ на $\overline{P}_\alpha$. В частности,

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dx\, dy = \int_\alpha^{\alpha+2\pi} \left(\int_0^\infty f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, dr \right) d\varphi.$$

Пример 1. С помощью полярных координат легко вычислить площадь “криволинейного треугольника” (см. рис. 7)

$$T = \big\{(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; \varphi \in \Delta,\ 0 \leqslant r \leqslant \rho(\varphi)\big\},$$

где $\Delta \subset \mathbb{R}$ — промежуток длиной не больше 2π, а ρ — неотрицательная измеримая на Δ функция.

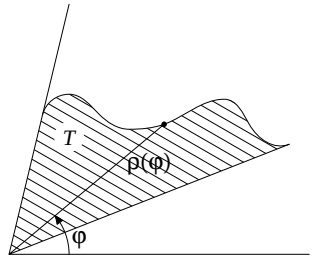


Рис. 7.

Взяв в последней формуле $f = \chi_T$, мы получим искомый результат

$$\lambda_2(T) = \iint_T 1 dx\, dy = \int_\Delta \left(\int_0^{\rho(\varphi)} r\, dr \right) d\varphi = \frac{1}{2} \int_\Delta \rho^2(\varphi)\, d\varphi.$$

Пример 2. Использование полярных координат даёт нам ещё один способ вычисления интеграла Эйлера–Пуассона $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx$, отличный от использованного в примере 1 п. V.3.2. Как и там, преобразуем I^2 с помощью теоремы Фубини:

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy.$$

Теперь, переходя к полярным координатам, мы получаем

$$I^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\infty} e^{-r^2} r\, dr \right) d\varphi = \pi \int_0^{\infty} e^{-r^2}\, d(r^2) = \pi.$$

Таким образом, $I = \sqrt{\pi}$.

2.5. *Сферические координаты.* Сферические координаты в трёхмерном пространстве — это аналог полярных координат на плоскости. Положение точки (x, y, z) можно определить с помощью трёх числовых параметров следующим образом. Во-первых, это расстояние r от точки до начала декартовых координат, во-вторых — это полярный угол φ на плоскости x, y, соответствующий проекции точки на эту плоскость, и, наконец, это угол θ, образуемый радиус-вектором точки и положительной частью оси z.

Связь между сферическими и декартовыми координатами задаётся формулами

$$x = r \cos\varphi\, \sin\theta, \quad y = r \sin\varphi\, \sin\theta, \quad z = r \cos\theta.$$

Формально говоря, эти равенства определяют гладкое отображение

$$(r, \varphi, \theta) \mapsto \Phi(r, \varphi, \theta) = (r \cos\varphi \sin\theta,\, r \sin\varphi \sin\theta,\, r \cos\theta),$$

переводящее пространство r, φ, θ в пространство x, y, z. Однако, учитывая геометрический смысл параметра r (расстояние до начала координат), мы будем считать, что отображение Φ определено в полупространстве $r \geqslant 0$. Очевидно, Φ не взаимно однозначно. Чтобы добиться взаимной однозначности, следует ограничить изменение углов φ и θ. Что касается θ, то мы всегда будем считать, что $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Угол φ будем считать изменяющимся в пределах от 0 до 2π (иногда эти границы удобнее заменить на $-\pi$ и π). Как читатель легко убедится, сужение Φ на бесконечный параллелепипед вида $P = (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \times (0, \pi)$ взаимно однозначно, а его образ есть всё пространство $\mathbb{R}^3$, из которого удалена замкнутая полуплоскость $L_0 = \big\{(r \sin\theta, 0, r\cos\theta) \;\big|\; r \geqslant 0,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\big\}$. Очевидно, $L_0 = \Phi(\partial P)$, так что $\Phi(\overline{P}) = \mathbb{R}^3$. В дальнейшем будем считать, что Φ определено на $\overline{P}$.

Координатные поверхности, т. е. поверхности $r = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$ и $\theta = \text{const}$ — это сферы (с центром в начале координат O), полуплоскости, ограниченные осью z, и круговые конусы с вершиной в O, симметричные относительно оси z. Пересечения сферы с полуплоскостями и конусами образуют на ней сетку меридианов и параллелей (по этой причине иногда вместо θ рассматривается угол $\theta' = \pi/2 - \theta$ — “широта”).

Отображением Φ параллелепипед $[r_0, r_0+\rho] \times [\varphi_0, \varphi_0+\xi] \times [\theta_0, \theta_0+\eta]$ преобразуется в криволинейный параллелепипед, ограниченный сферами $r = r_0$, $r = r_0 + \rho$, полуплоскостями $\varphi = \varphi_0$, $\varphi = \varphi_0 + \xi$ и коническими поверхностями $\theta = \theta_0$, $\theta = \theta_0 + \eta$. (см. рис. 8).

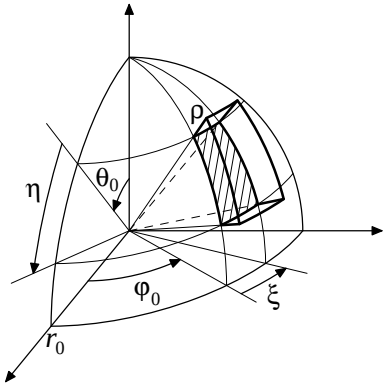


Рис. 8.

При малых ρ, ξ, η это почти прямоугольный параллелепипед. Его основание, лежащее на сфере $r = r_0$, ограничено дугами меридианов и параллелей. Приближённо можно считать его прямоугольником, длины сторон которого равны соответственно $r_0\eta$ и $r_0 \sin\theta_0\, \xi$. Поэтому с точностью до бесконечно малых высшего порядка объём криволинейного параллелепипеда равен $(r_0^2 \sin\theta_0)\, \rho\xi\eta$. Вспомнив, что значение якобиана J_Φ в точке $(r_0, \varphi_0, \theta_0)$ есть коэффициент искажения объёма, мы приходим к выводу, что $J_\Phi(r_0, \varphi_0, \theta_0) = r_0^2 \sin\theta_0$. Читатель без труда получит тот же результат, проделав необходимые формальные вычисления. Учитывая сделанное после теоремы 2.2 замечание, общую формулу замены переменной в интеграле при переходе к сферическим координатам можно переписать в следующем виде:

$$\iiint_A f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{\Phi^{-1}(A)} f(r\cos\varphi\sin\theta,\, r\sin\varphi\sin\theta,\, r\cos\theta)\, r^2 \sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta,$$

где $A \subset \mathbb{R}^3$. В частности,

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} f(r\cos\varphi\sin\theta,\ r\sin\varphi\sin\theta,\ r\cos\theta)\,r^2\sin\theta\,dr\,d\varphi\,d\theta.$$

Пример. Применим сферические координаты для вычисления преобразования Фурье радиальной функции. В общем случае *преобразование Фурье* суммируемой на $\mathbb{R}^m$ функции f определяется равенством

$$\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\,e^{-2\pi i\langle x,y\rangle}\,dx.$$

Рассмотрим измеримую радиальную функцию f трёх переменных, т. е. функцию вида $f(x) = f_0\big(\|x\|\big)$, где f_0 — функция измеримая на $\mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}^3$. Перейдя к сферическим координатам, мы видим, что $\int_{\mathbb{R}^3} |f(x)|\,dx = 4\pi\int_0^{\infty} |f_0(r)|\,r^2\,dr$. Поэтому суммируемость f в $\mathbb{R}^3$ равносильна неравенству $\int_0^{\infty} |f_0(r)|r^2dr < +\infty$. В этом случае вычисление $\widehat{f}$ можно свести к вычислению интеграла по полуоси $\mathbb{R}_+$.

При $y \neq 0$ в интеграле $\widehat{f}(y)$ сделаем такую ортогональную замену переменной $x \mapsto u$, при которой орт $y/\|y\|$ переходит в $(0,0,1)$. Тогда

$$\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^3} f_0(\|x\|)\,e^{-2\pi i\langle x,y\rangle}\,dx = \int_{\mathbb{R}^3} f_0(\|u\|)\,e^{-2\pi i\|y\|u_3}\,du.$$

В получившемся интеграле перейдём к сферическим координатам:

$$\widehat{f}(y) = \int_0^{\infty} f_0(r)\,r^2\left(\int_0^{\pi}\left(\int_0^{2\pi} e^{-2\pi i r\|y\|\cos\theta}\sin\theta\,d\varphi\right)\,d\theta\right)dr =$$
$$= 2\pi\int_0^{\infty} f_0(r)\,r^2\left(\int_0^{\pi} e^{-2\pi i r\|y\|\cos\theta}\sin\theta\,d\theta\right)dr.$$

Интеграл по θ легко вычисляется, и мы получаем искомую формулу:

$$\widehat{f}(y) = \frac{2}{\|y\|}\int_0^{\infty} f_0(r)\,r\,\sin\big(2\pi r\|y\|\big)\,dr.$$

Как мы видим, преобразование Фурье радиальной функции снова есть радиальная функция.

УПРАЖНЕНИЯ

1) Вычислите интеграл $\iint_{\mathbb{R}^2} |ax+by|e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$.

2) Вычислите интеграл $\iiiint_{x^2+y^2+u^2+v^2\leqslant 1} e^{x^2+y^2-u^2-v^2}\,dx\,dy\,du\,dv$.

3) Вычислите интеграл $\int_{\langle Ax,x\rangle\leqslant 1} e^{\langle Ax,x\rangle}\,dx$, где A — положительно определённая $m\times m$ матрица.

4) Пусть $E = \big\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 \,\big|\, \sqrt{x_2^2+x_3^2+x_4^2} \leqslant x_1\big\}$. Выясните, для каких $t \in \mathbb{R}^4$ конечен и чему равен интеграл $\int_E e^{-\langle x,t\rangle}\,dx$.

5) Сделав надлежащее ортогональное преобразование, вычислите интеграл по m-мерному шару $\int_{\|x\|<r} |\langle a,x\rangle|^p\,dx$ при $p > -1$.

6) Вычислите интеграл $\int_{\mathbb{R}^m} e^{-Q(x)}dx$, где $Q(x) = \sum\limits_{1\leqslant j\leqslant k\leqslant m} x_j x_k$.

7) Выясните, для каких a и b конечен интеграл ($m \geqslant 2$)

$$\int_{(0,1)^m} (\min(x_1, \dots, x_m))^a \, (\max(x_1, \dots, x_m))^b \, dx,$$

и выразите его с помощью функции бета.

8) Докажите, что для любой неотрицательной измеримой на $\mathbb{R}$ функции f и любых $a, b \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{f(ax+by)}{(1+x^2)(1+y^2)} \, dx\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(cu)}{1+u^2} \, du, \qquad \text{где} \quad c = |a| + |b|.$$

9) Используя предыдущую задачу и индукцию, докажите, что для $p \in (-1, 1)$ и $a = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ справедливо равенство

$$\frac{1}{\pi^m} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{|\langle x, a\rangle|^p \, dx}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)\cdots(1+x_m^2)} = C_p \left(\sum_{k=1}^m |a_k| \right)^p,$$

где $C_p = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{t^p}{1+t^2} \, dt$.

10) Будем рассматривать плоскость $\mathbb{R}^2$ как множество комплексных чисел. Найдите такую функцию $\omega > 0$, чтобы мера ν с этой плотностью ($d\nu = \omega \, d\lambda_2$) была бы инвариантна относительно умножения, т. е. чтобы образ меры ν относительно отображения $z \mapsto az$ совпадал с ν при любом $a \neq 0$.

11) Пусть $p > 0$, $E \subset \mathbb{R}^m$, и $\lambda_m(E) = \lambda_m\big(B(0,r)\big)$. Докажите, что

$$\int_E \frac{dy}{\|x-y\|^p} \leqslant \int_{B(0,r)} \frac{dz}{\|z\|^p} \quad \text{при любом } x \text{ из } \mathbb{R}^m.$$

12) Докажите, что для любого множества $E \subset \mathbb{R}^2$ конечной меры справедливо неравенство

$$\left| \iint_E \frac{dx\, dy}{x+iy} \right| \leqslant \sqrt{\pi \, \lambda_2(E)}.$$

Указание. С помощью поворота сведите левую часть неравенства к интегралу от функции $\mathcal{R}e\frac{1}{z}$ и убедитесь, что при заданной площади множества интегрирования он максимален, когда интегрирование ведётся по надлежащему лебегову множеству подынтегральной функции.

13) Пусть $f(x,y)$ — число точек (k,j) с целочисленными координатами, удовлетворяющими условию $k^2 + j^2 < x^2 + y^2$, и пусть $S = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} e^{-n^2}$. Докажите, что

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) e^{-(x^2+y^2)} \, dx\, dy = \pi \, S^2.$$

Указание. Перейдя к полярным координатам, воспользуйтесь интегрированием по частям с помощью функции $F(r) = f(r, 0)$.

§ 3. Интегральное представление аддитивных функций

С момента своего возникновения интегральное исчисление успешно использовалось для решения прикладных задач механики и физики. Среди них можно выделить задачи, связанные с аддитивными величинами, — вычисление массы, статических моментов, энергии и т. п. В этом параграфе мы рассмотрим общую схему, позволяющую в широком классе случаев вычислять и оценивать такие величины.

Отметим ограниченность задачи, которую мы ставим перед собой, обращаясь к приложениям. Мы занимаемся только вычислением значений тех или иных величин, исходя из заданных их свойств. Как правило, эти свойства интуитивно вполне очевидны, и оправдывая их использование, мы ссылаемся лишь на простейшие правдоподобные соображения, оставляя более обстоятельное обоснование специальным дисциплинам.

3.1. Теорема 1.2 допускает модификации, позволяющие получать интегральные представления различных аддитивных физических и механических величин. Рассмотрим одну из таких модификаций.

Предложение. *Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с конечной мерой, а φ — некоторая аддитивная функция, определённая на σ-алгебре $\mathfrak{A}$. Если существует такая ограниченная измеримая функция f, что*

$$\mu(A) \inf_A f \leqslant \varphi(A) \leqslant \mu(A) \sup_A f \qquad \text{для любого } A \text{ из } \mathfrak{A},$$

то $\varphi(A) = \int_A f\, d\mu$ $(A \in \mathfrak{A})$.

Обобщая определение п. 1.2, будем называть функцию f *плотностью аддитивной функции* φ. Как следует из теоремы IV.5.4, плотность определяется однозначно с точностью до эквивалентности.

Отметим, что аддитивная функция φ не предполагается счётно-аддитивной. Это ослабление условий, налагаемых на φ, компенсируется предположениями о конечности меры μ и ограниченности плотности f.

Доказательство. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$ и рассмотрим множества

$$A_k = \{x \in A \mid k\varepsilon \leqslant f(x) < (k+1)\varepsilon\} \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Они измеримы и образуют конечное разбиение множества A (если величина $|k|$ достаточно велика, то $A_k = \varnothing$ ввиду ограниченности f). Сложив неравенства $\varepsilon k \mu(A_k) \leqslant \varphi(A_k) \leqslant \varepsilon(k+1)\mu(A_k)$, вытекающие из двусторонней оценки, мы видим, что $\varphi(A)$ мало отличается от суммы $S = \varepsilon \sum_{k \in \mathbb{Z}} k\mu(A_k)$:

$$S \leqslant \varphi(A) \leqslant S + \varepsilon\, \mu(A).$$

Точно так же из неравенств $\varepsilon k \mu(A_k) \leqslant \int_{A_k} f(x)\, d\mu(x) \leqslant \varepsilon(k+1)\mu(A_k)$ следует, что

$$S \leqslant \int_A f(x)\, d\mu(x) \leqslant S + \varepsilon\, \mu(A).$$

Таким образом, $\left|\varphi(A) - \int_A f(x)\, d\mu(x)\right| \leqslant \varepsilon\, \mu(A)$, что ввиду произвольности ε равносильно нашему утверждению. ►

3.2. Используем предложение 3.1 для вычисления силы притяжения материальной точки массой μ_0 компактным множеством $A \subset \mathbb{R}^3$, на котором распределена масса μ. Будем считать, что эта точка лежит вне множества A.

Чтобы иметь дело не с векторной, а со скалярной величиной, рассмотрим не саму силу притяжения $\vec{F}(A)$, а её проекцию на фиксированное направление, соответствующее единичному вектору $\vec{l}$, т. е. скалярное произведение $F_l(A) = \langle \vec{F}(A), \vec{l} \rangle$.

Очевидно, что $F_l(A)$ есть аддитивная функция множества. Не умаляя общности будем считать, что точечная масса находится в начале координат. Если множество A вырождается в точку $w_0 \neq 0$, то, как следует из закона тяготения,

$$F_l(A) = \gamma\, \mu_0\, \mu(A)\, \frac{\langle w_0, \vec{l} \rangle}{r^3},$$

где $r = \|w_0\|$, а γ — коэффициент пропорциональности (гравитационная постоянная). Естественно считать, что справедливы оценки

$$\gamma\, \mu_0\, \mu(A) \inf_{w \in A} \frac{\langle w, \vec{l} \rangle}{\|w\|^3} \leqslant F_l(A) \leqslant \gamma\, \mu_0\, \mu(A) \sup_{w \in A} \frac{\langle w, \vec{l} \rangle}{\|w\|^3}.$$

Исходя из этого, мы, согласно предложению 3.1, получаем, что

$$F_l(A) = \gamma \mu_0 \int_A \frac{\langle w, \vec{l} \rangle}{\|w\|^3}\, d\mu(w).$$

Используя замену переменных, отсюда легко получить, что если масса μ_0 сосредоточена в точке w_0 с координатами a, b, c, то компоненты силы притяжения вычисляются по формулам:

$$F_x = \gamma \mu_0 \int_A \frac{x-a}{\|r\|^3}\, d\mu(w), \quad F_y = \gamma \mu_0 \int_A \frac{y-b}{\|r\|^3}\, d\mu(w), \quad F_z = \gamma \mu_0 \int_A \frac{z-c}{\|r\|^3}\, d\mu(w),$$

где $r = \|w - w_0\|$, $w = (x, y, z)$.

Пример. Вычислим силу $\vec{F}$, с которой точка единичной массы притягивается однородным шаром радиуса R (точка предполагается лежащей вне шара).

Будем считать, что центр шара совпадает с началом координат, точка имеет координаты $(0, 0, c)$, $c > R$, и что масса распределена по шару с (постоянной) плотностью ρ. Пользуясь формулами для вычисления компонент силы притяжения, мы получаем

$$F_x = \gamma \iiint_{B(R)} \frac{\rho\, x}{\left(x^2 + y^2 + (z-c)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\, dx\, dy\, dz,$$

$$F_y = \gamma \iiint_{B(R)} \frac{\rho\, y}{\left(x^2 + y^2 + (z-c)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\, dx\, dy\, dz,$$

$$F_z = \gamma \iiint_{B(R)} \frac{\rho\, (z-c)}{\left(x^2 + y^2 + (z-c)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\, dx\, dy\, dz.$$

Из соображений симметрии ясно, что $F_x = F_y = 0$, что, конечно, легко следует из нечётности подынтегральных функций. Перейдя к сферическим координатам, мы видим, что

$$F_z = \gamma \iiint_{B(R)} \frac{\rho\,(z-c)}{\left(x^2+y^2+(z-c)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \gamma \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \frac{\rho\,(r\cos\theta - c) r^2 \sin\theta}{(r^2-2rc\cos\theta+c^2)^{\frac{3}{2}}}\,dr\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= 2\pi\gamma\rho \int_0^R r^2 \left(\int_0^{\pi} \frac{(r\cos\theta - c)\sin\theta}{(r^2-2rc\cos\theta+c^2)^{\frac{3}{2}}}\,d\theta\right) dr.$$

Мы предоставляем читателю самостоятельно убедиться, что возникший интеграл по θ равен $-\frac{2}{c^2}$. Поэтому

$$F_z = 2\pi\gamma\rho \int_0^R r^2 \left(-\frac{2}{c^2}\right) dr = -\gamma\,\rho\,\frac{4\pi}{3}\,R^3\,\frac{1}{c^2} = -\gamma\,\frac{\mu(B(R))}{c^2}.$$

Таким образом, материальная точка притягивается однородным шаром так, как если бы вся его масса была сосредоточена в центре.

3.3. Рассмотрим ещё один пример использования предложения 3.1.

Пусть в пространстве $\mathbb{R}^m$ зафиксирована некоторая аффинная плоскость P. Она разбивает $\mathbb{R}^m$ на два полупространства, одно из которых мы будем называть $(+)$-полупространством, а другое — $(-)$-полупространством. Плечом $p(x)$ точки x относительно плоскости P будем называть расстояние от неё до P, взятое со знаком "+", если точка лежит в $(+)$-полупространстве, и со знаком "−" в противном случае. Если $P = P_k$ — координатная плоскость $x_k = 0$, то $(+)$-полупространством будем считать полупространство $x_k \geqslant 0$. Тогда плечо точки x относительно P_k есть просто её k-я координата. Говоря, что на множестве $A \subset \mathbb{R}^m$ распределена масса, мы имеем в виду борелевскую меру μ, сосредоточенную на A $\big(\mu(\mathbb{R}^m \setminus A) = 0\big)$. В частности, говоря, что в точке x сосредоточена точечная масса μ_0, мы имеем в виду меру, порождённую нагрузкой μ_0 в точке x (см. пример 4 в п. I.2.2).

Как известно из курса теоретической механики, статический момент множества A, на котором распределена масса, относительно плоскости P есть физическая величина $M_P(A)$, характеризующая "степень нарушения" состояния равновесия. Она обладает следующими свойствами.

1) Аддитивность момента:

$$M_P(A \cup B) = M_P(A) + M_P(B), \quad \text{если} \quad A \cap B = \varnothing$$

(здесь и далее все рассматриваемые множества предполагаются борелевскими).

2) Момент удовлетворяет неравенству

$$\mu(A) \inf_{x\in A} p(x) \leqslant M_P(A) \leqslant \mu(A) \sup_{x\in A} p(x),$$

где $\mu(A)$ — масса множества A.

Если $A = \{x_0\}$ — одноточечное множество и μ_0 — масса, сосредоточенная в точке x_0, то из свойства 2) вытекает, что $M_P(A) = \mu_0\, p(x_0)$.

Отметим естественность условия 2). В самом деле, если множество A расположено в $(+)$-полупространстве и мы сосредоточим всю распределённую на нём массу в точке, удалённой от P не меньше, чем все точки множества A, то мы получим систему "ещё менее равновесную", чем раньше. Это соответствует правому неравенству в условии 2).

Из свойства 2) следует положительность момента: момент множества, расположенного в $(+)$-полупространстве, неотрицателен. Из аддитивности и положительности момента вытекает его монотонность для множеств, лежащих в $(+)$-полупространстве: если $A \subset B$, то $M_P(A) \leqslant M_P(B)$. Однако нам нет необходимости останавливаться подробно на этих свойствах, поскольку все они вытекают из интегрального представления момента. Так как момент есть аддитивная функция множества, удовлетворяющая двусторонней оценке, можно использовать предложение 3.1. Его непосредственное применение показывает, что справедливо

Предложение. *Пусть μ — конечная масса, распределённая на ограниченном множестве A. Тогда*

$$M_P(A) = \int_A p(x)\, d\mu(x).$$

Определение. *Центром масс* множества с распределённой на нём массой называется такая точка, что момент этого множества относительно любой плоскости, проходящей через неё, равен нулю.

Убедимся, что центр масс всегда существует.

Найдём сначала необходимые условия, которым должна удовлетворять эта точка. Пусть μ — ненулевая масса, распределённая на A, и пусть $C = (c_1, \dots, c_m)$ центр масс. Рассмотрим проходящую через C плоскость P, определяемую уравнением $x_k - c_k = 0$. Очевидно, что плечо точки $x = (x_1, \dots, x_m)$ относительно этой плоскости совпадает (в зависимости от выбора $(+)$-полупространства) или с $x_k - c_k$, или с $c_k - x_k$. В любом случае мы имеем:

$$0 = M_P(A) = \int_A p(x)\, d\mu(x) = \int_A (x_k - c_k)\, d\mu(x) = M_k(A) - c_k\mu(A),$$

где $M_k(A)$ — момент относительно плоскости $x_k = 0$. Таким образом, центром масс может быть только точка C с координатами $c_k = M_k(A)/\mu(A)$ $(k = 1, \dots, m)$.

Проверим теперь, что эта точка действительно есть центр масс. Пусть P — произвольная плоскость, проходящая через C. Её уравнение имеет вид

$$\sum_{k=1}^{m} a_k(x_k - c_k) = 0.$$

Не умаляя общности мы будем считать, что $\sum\limits_{k=1}^{m} a_k^2 = 1$. Выбирая $(+)$-полупространство так, что в нём $\sum\limits_{k=1}^{m} a_k(x_k - c_k) > 0$, мы получаем, что плечо точки $x = (x_1, \dots, x_m)$ совпадает с суммой $\sum\limits_{k=1}^{m} a_k(x_k - c_k)$. Поэтому

$$M_P(A) = \int_A \sum_{k=1}^{m} a_k(x_k - c_k)\, d\mu = \sum_{k=1}^{m} a_k\big(M_k(A) - c_k\mu(A)\big) = 0,$$

что и требовалось.

Вместе с доказательством существования центра масс мы получили и формулы для вычисления его координат:

$$c_k = \frac{1}{\mu(A)} \int_A x_k \, d\mu(x) \qquad (k = 1, \ldots, m).$$

Заметим, что если рассматриваемое множество A конечно, $A = \{a_1, \ldots, a_N\}$, и в каждой точке a_k сосредоточена масса μ_k, то согласно этим формулам центр тяжести такой системы есть выпуклая комбинация точек a_k:

$$C = \frac{\mu_1 a_1 + \ldots + \mu_N a_N}{\mu_1 + \ldots + \mu_N}.$$

Коэффициенты этой выпуклой комбинации пропорциональны массам, сосредоточенным в соответствующих точках.

Пример. Найдём центр масс C однородного множества $B_+^m = B(0,1) \cap \mathbb{R}_+^m$. Можно считать, что плотность распределения массы равна единице, т. е. $\mu = \lambda_m$. Тогда вся масса равна объёму B_+^m: $\mu(B_+^m) = \frac{\alpha_m}{2^m}$ (напомним, что $\alpha_m = \lambda_m\big(B(0,1)\big)$).

В силу симметрии все координаты вектора C одинаковы: $C = (c, \ldots, c)$. Формулы для вычисления координат центра масс дают нам

$$c = \frac{1}{\mu(B_+^m)} \int_{B_+^m} x_m \, dx = \frac{2^m}{\alpha_m} \int_{B_+^m} x_m \, dx.$$

Чтобы вычислить этот интеграл, запишем вектор x из B_+^m в виде $x = (y, t)$, где $y \in B_+^{m-1}$, $t \in (0,1)$ и $\|y\|^2 + t^2 < 1$. Тогда

$$c = \frac{2^m}{\alpha_m} \int_0^1 t \, \lambda_{m-1}\Big(\sqrt{1-t^2} B_+^{m-1}\Big) \, dt = \frac{2^m}{\alpha_m} \int_0^1 t \cdot \frac{\alpha_{m-1}}{2^{m-1}} \cdot \big(1-t^2\big)^{\frac{m-1}{2}} dt = \frac{2}{m+1} \, \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m}.$$

Так как $\alpha_m = \pi^{\frac{m}{2}} / \Gamma\big(1 + \frac{m}{2}\big)$ (см. п. V.4.2), то

$$c = \frac{2}{m+1} \, \frac{\Gamma\big(\frac{m+2}{2}\big)}{\sqrt{\pi}\, \Gamma\big(\frac{m+1}{2}\big)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \, \frac{\Gamma\big(\frac{m+2}{2}\big)}{\Gamma\big(\frac{m+3}{2}\big)}.$$

При $m = 3$ мы получаем $C = (\frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8})$. Заметим, что как следует из формулы Стирлинга (см. п. VII.2.6), при $m \to \infty$ координаты точки C стремятся к нулю как $\sqrt{\frac{2}{\pi m}}$. Поэтому норма $\|C\|$ стремится к $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$. Более детальный анализ показывает, что $\|C\|$ растёт с ростом размерности. Это соответствует тому, что всё большая доля объёма множества B_+^m сосредоточена около сферической части его границы.

УПРАЖНЕНИЯ

1) С какой силой однородный сферический слой $B_{r,R} = \{w \in \mathbb{R}^3 \,|\, r \leqslant \|w\| \leqslant R\}$ притягивает материальную точку w_0, $w_0 \notin B_{r,R}$? Рассмотрите случаи $\|w_0\| > R$ и $\|w_0\| < r$.

2) Пусть множество A лежит в некоторой плоскости по одну сторону от прямой ℓ. Используя результат задачи 2 § V.4, докажите теорему Гульдина*): *объём тела, получаемого вращением A вокруг ℓ, равен площади множества A, умноженной на длину окружности, описываемой центром масс* (предполагается, что масса распределена на A с постоянной плотностью).

*) Пауль **Гульдин** (Guldin), 1577–1643, — швейцарский математик.

Пусть в ограниченном множестве $A \subset \mathbb{R}^3$ распределена конечная масса μ. Момент инерции $I_\ell(A)$ множества A относительно заданной оси ℓ есть физическая величина, характеризующая кинетическую энергию тела при вращении его вокруг этой оси. Точнее, кинетическая энергия равна $\frac{1}{2} I_\ell(A)\omega^2$, где ω — угловая скорость вращения. Для точечной массы μ_0, помещённой на расстоянии r от оси вращения, кинетическая энергия E вычисляется по формуле $E = \frac{\mu_0\, v^2}{2} = \frac{\mu_0\, r^2}{2}\,\omega^2$. Таким образом, в этом случае момент инерции равен $\mu_0\, r^2$.

Из физических соображений ясно, что момент инерции относительно фиксированной оси есть аддитивная функция множества, которая не уменьшается при увеличении расстояния от тела до оси. Таким образом, если всю массу поместить в точку тела, наиболее удалённую от оси вращения, то момент инерции может только возрасти. Соответственно, если всю массу тела поместить в точку, наиболее близкую к этой оси, то момент инерции может только уменьшиться. Это означает, что для $I_\ell(A)$ справедливы двусторонние оценки

$$\mu(A) \inf_{x\in A} \operatorname{dist}^2(x,\ell) \leqslant I_\ell(A) \leqslant \mu(A) \sup_{x\in A} \operatorname{dist}^2(x,\ell),$$

позволяющие использовать при вычислении моментов инерции предложение 3.1.

3) Найдите моменты инерции однородного шара относительно диаметра и касательной.

4) Найдите моменты инерции однородного (прямого кругового) цилиндра относительно оси симметрии, образующей и диаметра основания.

5) Найдите момент инерции шара относительно диаметра, если плотность распределённой в шаре массы обратно пропорциональна расстоянию до центра.

6) Для какой из всевозможных параллельных друг другу прямых момент инерции тела минимален?

7) Пусть в измеримом конусе (см. пример 1 в п. V.4.2) равномерно распределена масса. Докажите, что расстояние от его центра масс до плоскости, в которой лежит основание, пропорционально высоте конуса, а коэффициент пропорциональности зависит только от размерности. Чему он равен?

8) Пусть в выпуклом теле $K \subset \mathbb{R}^m$ равномерно распределена масса и центр масс совпадает с началом координат. Докажите, что $-K \subset mK$. Указание. Проверьте, что любая хорда, проходящая через центр масс, делится им на отрезки, длины которых не меньше $\frac{1}{m+1}$ длины хорды.

9) Убедитесь, что момент инерции однородного куба относительно проходящей через его центр оси не зависит от её направления.

Обобщая естественным образом понятие момента инерции, убедитесь, что этот результат справедлив и в многомерном случае.

При каком распределении массы это свойство сохраняется? Верно ли, что сумма квадратов расстояний всех вершин куба до прямой, проходящей через его центр, одинакова, какую бы прямую ни взять?

§ 4. Функции распределения. Независимые функции

4.1. Рассмотрим один важный частный случай взвешенного образа меры. Как и в § 1, мы считаем заданным некоторое пространство с мерой $(X, \mathfrak{A}, \mu)$. По умолчанию рассматриваемые функции предполагаются измеримыми.

Пусть $Y = \mathbb{R}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ — σ-алгебра борелевских множеств. Пусть, далее, h — почти везде конечная функция, измеримая на X. Как известно (см. предложение III.1.2), прообраз $h^{-1}(B)$ измерим для всякого борелевского множества $B \subset \mathbb{R}$. Поэтому мы можем определить на $\mathfrak{B}$ меру $\nu = h(\mu)$ — образ μ относительно h. Предположим дополнительно, что мера ν конечна на промежутках. Тогда она является мерой Бореля–Стилтьеса и, следовательно, порождается некоторой неубывающей функцией. Чтобы конкретизировать эту функцию, введём

Определение. Пусть h — измеримая почти везде конечная на X функция. Предположим, что при любом $t \in \mathbb{R}$ множество

$$X(h < t) = \{x \in X \mid h(x) < t\}$$

имеет конечную меру, и положим $H(t) = \mu\bigl(X(h < t)\bigr)$. Функция H называется *функцией распределения* функции h (по мере μ или относительно меры μ).

Очевидно, функция распределения не убывает. Из непрерывности меры снизу следует, что она непрерывна слева. Заметим, что функция $t \mapsto \mu\bigl(X(h \leqslant t)\bigr)$ совпадает с H во всех точках непрерывности. Если мера конечна, то всякая измеримая почти везде конечная функция имеет функцию распределения.

Предложение. *При выполнении условия определения мера $h(\mu)$ совпадает с мерой Бореля–Стилтьеса, порождённой функцией H.*

Определение меры Бореля–Стилтьеса см. в п. IV.10.3.

Для доказательства достаточно в силу теоремы единственности I.5.1 проверить совпадение рассматриваемых мер на полуоткрытых справа промежутках, а это немедленно следует из определения функций H. ►

Сформулируем утверждение, в которое превращается в нашем частном случае доказанная в п. 1.1 общая теорема. Отметим, что рассматриваемая в этой теореме функция f должна быть измеримой относительно σ-алгебры $\mathfrak{B}$, которой теперь является σ-алгебра борелевских подмножеств вещественной прямой. Такие функции называются измеримыми по Борелю. Очевидно, таковы, в частности, все непрерывные функции.

Теорема. *Пусть f — определённая на $\mathbb{R}$ неотрицательная функция, измеримая по Борелю, h — почти везде конечная функция, измеримая на X, H её функция распределения. Тогда*

$$\int_X f(h(x))\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, dH(t). \tag{1}$$

Это равенство остаётся справедливым для функции f, принимающей значения любого знака, при условии, что композиция $f \circ h$ суммируема.

Эта теорема получается из теоремы 1.1, если положить $(Y, \mathfrak{B}, \nu) = (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), h(\mu))$, $\Phi = h$, $\omega \equiv 1$. Заметим, что условие определения 1.1 (измеримость прообраза $h^{-1}(B)$ борелевского множества B) выполняется в силу предложения III.1.2. ►

Замечание. Частными случаями равенства (1) являются формулы

$$\int_X h\,d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} t\,dH(t), \qquad \int_X |h|^p\,d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} |t|^p\,dH(t),$$

которые часто используются в теории вероятностей. Знакомый с нею читатель узнает в них формулы для математического ожидания и абсолютных моментов случайной величины h.

4.2. Приведём несколько примеров.

Пример 1. Рассмотрим интеграл $\int_{\mathbb{R}^m} f(\|x\|)\,dx$, где f — неотрицательная функция, измеримая на полуоси $(0,+\infty)$.

Введём функцию h равенством $h(x) = \|x\|$ при $x \in \mathbb{R}^m$. Её функция распределения такова: $H(t) = 0$ при $t \leqslant 0$ и $H(t) = \alpha_m t^m$ при $t > 0$, где α_m — объём единичного шара. Поэтому

$$\int_{\mathbb{R}^m} f\big(\|x\|\big)\,dx = \int_0^{\infty} f(t)\,dH(t) = m\,\alpha_m \int_0^{\infty} f(t)\,t^{m-1}\,dt$$

(последнее равенство мы написали, пользуясь гладкостью H на промежутке $(0,+\infty)$ и формулой (5) замечания IV.10.4).

Пример 2. Используем формулу примера 1 для того, чтобы новым способом вычислить интеграл Эйлера–Пуассона $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$, значение которого нам уже известно (см. пример 1 п. V.3.2 и пример 2 п. 2.4).

Как и там, преобразуем I^2 с помощью теоремы Фубини:

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$

Теперь, используя при $m = 2$ формулу примера 1 и считая, что $f(t) = e^{-t^2}$, мы получаем:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \int_0^{\infty} e^{-t^2}\,d(\pi t^2) = (-\pi)\,e^{-t^2}\Big|_0^{\infty} = \pi.$$

Таким образом, $I = \sqrt{\pi}$.

Пример 3. Обобщая приём, использованный в предыдущем примере, найдём объём V множества

$$W = \big\{(x_1,\dots,x_m) \in \mathbb{R}^m \,\big|\, |x_1|^{p_1} + \ldots + |x_m|^{p_m} \leqslant 1\big\},$$

где $p_1,\dots,p_m$ — положительные числа (в примере 4 п. V.4.2 эта задача была решена без использования функции распределения). Для этого вычислим двумя способами интеграл

$$I = \int_{\mathbb{R}^m} \exp\Big(-\sum_{j=1}^{m} |x_j|^{p_j}\Big)\,dx.$$

С одной стороны, очевидно, что по теореме Фубини

$$I = \prod_{j=1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^{p_j}}\,dt = 2^m \prod_{j=1}^{m} \Gamma\Big(1 + \frac{1}{p_j}\Big).$$

С другой стороны, можно воспользоваться формулой (1), считая, что $f(t) = e^{-t}$ и $h(x) = |x_1|^{p_1} + \ldots + |x_m|^{p_m}$. Соответствующую функцию распределения $H(t)$ при $t > 0$ можно вычислить, сделав линейную замену переменной $x_j = t^{\frac{1}{p_j}} u_j$ $(j = 1, \ldots, m)$:

$$\begin{aligned} H(t) &= \lambda_m\big(\{(x_1, \ldots, x_m) \,\big|\, |x_1|^{p_1} + \ldots + |x_m|^{p_m} \leqslant t\}\big) = \\ &= t^q \lambda_m\big(\{(u_1, \ldots, u_m) \,\big|\, |u_1|^{p_1} + \ldots + |u_m|^{p_m} \leqslant 1\}\big) = t^q \lambda_m(W) = t^q V, \end{aligned}$$

где $q = \frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_m}$. Поэтому формула (1) даёт нам:

$$I = \int_0^\infty f(t)\, dH(t) = \int_0^\infty e^{-t}\, d\big(V t^q\big) = V\, \Gamma(1+q).$$

Таким образом,

$$V = \frac{I}{\Gamma(1+q)} = \frac{2^m}{\Gamma\big(1 + \frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_m}\big)} \prod_{j=1}^m \Gamma\Big(1 + \frac{1}{p_j}\Big).$$

В случае, когда $p_1 = \ldots = p_m = 2$, мы ещё раз получаем формулу для объёма единичного m-мерного шара B^m (см. п. V.4.2):

$$\lambda_m(B^m) = \frac{2^m \Gamma^m\big(1 + \frac{1}{2}\big)}{\Gamma\big(1 + \frac{m}{2}\big)} = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\big(1 + \frac{m}{2}\big)}.$$

В заключение этого пункта приведём результат более общего характера. Используем функцию распределения для оценки отношения объёмов компактных множеств $K \subset \mathbb{R}^m$ и $\Delta K = \{x - y \,|\, x, y \in K\}$. В общем случае такая оценка невозможна (например, если $K \subset \mathbb{R}^2$ состоит из двух непараллельных отрезков, то $\lambda_2(K) = 0$, а $\lambda_2(\Delta K) > 0$). Однако, как установлено в [RS], справедлива

Теорема. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^m$ — выпуклое тело. Тогда*

$$2^m \lambda_m(K) \leqslant \lambda_m(\Delta K) \leqslant C_{2m}^m \lambda_m(K).$$

Доказательство. Оценку снизу легко вывести из неравенства Брунна–Минковского. Действительно, так как $\lambda_m(-K) = \lambda_m(K)$ и $\Delta K = K + (-K)$, то $2\lambda_m^{\frac{1}{m}}(K) = \lambda_m^{\frac{1}{m}}(K) + \lambda_m^{\frac{1}{m}}(-K) \leqslant \lambda_m^{\frac{1}{m}}(K + (-K)) = \lambda_m^{\frac{1}{m}}(\Delta K)$.

Оценка сверху доказывается сложнее. Очевидно,

$$\begin{aligned} \lambda_m^2(K) &= \int_{\mathbb{R}^m} \chi_K(x) \left(\int_{\mathbb{R}^m} \chi_K(y)\, dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \chi_K(x) \left(\int_{\mathbb{R}^m} \chi_K(x - z)\, dz \right) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^m} \chi_K(x) \chi_K(x - z)\, dx \right) dz = \int_{\mathbb{R}^m} \lambda_m\big(K \cap (z + K)\big)\, dz. \end{aligned}$$

Если $z \notin \Delta K$, то $K \cap (z + K) = \varnothing$, так как в представлении $z = x - (x - z)$ либо $x \notin K$, либо $x - z \notin K$. Следовательно, $\lambda_m\big(K \cap (z + K)\big) = 0$ при $z \notin \Delta K$, и поэтому

$$\lambda_m^2(K) = \int_{\Delta K} \lambda_m\big(K \cap (z + K)\big)\, dz.$$

Чтобы оценить $\lambda_m\big(K \cap (z+K)\big)$ снизу, возьмём $z \in \Delta K$, $z \neq 0$, и найдём такое $h = h(z) \in (0,1]$, что $\frac{z}{h} \in \partial\Delta K$. Пусть $\frac{z}{h} = a - b$, где $a, b \in K$. Проверим, что

$$ha + (1-h)K \subset K \cap (z+K).$$

Включение $ha + (1-h)K \subset K$ очевидно, а включение $ha + (1-h)K \subset z + K$ вытекает из того, что $ha = hb + z$, и поэтому

$$ha + (1-h)K = z + hb + (1-h)K \subset z + K.$$

Таким образом,

$$\lambda_m\big(K \cap (z+K)\big) \geqslant \lambda_m\big(ha + (1-h)K\big) = (1-h)^m \lambda_m(K).$$

Следовательно,

$$\lambda_m^2(K) \geqslant \lambda_m(K) \int_{\Delta K} (1-h(z))^m \, dz.$$

Чтобы вычислить последний интеграл, введём функцию распределения для h:

$$H(t) = \lambda_m\big(\{z \in \Delta K \mid h(z) < t\}\big) = \lambda_m(t\,\Delta K) = t^m \lambda_m(\Delta K) \quad \text{при} \quad 0 < t < 1,$$
$$H(t) = 0 \quad \text{при } t \leqslant 0, \qquad H(t) = \lambda_m(\Delta K) \quad \text{при} \quad t \geqslant 1.$$

По теореме 4.1

$$\int_{\Delta K} (1-h(z))^m \, dz = \int_0^1 (1-t)^m \, dH(t) = m\lambda_m(\Delta K) \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^m \, dt =$$
$$= m\mathrm{B}(m, m+1)\lambda_m(\Delta K) = \frac{m!\,m!}{(2m)!}\lambda_m(\Delta K).$$

Таким образом,

$$\lambda_m^2(K) \geqslant \frac{m!\,m!}{(2m)!}\lambda_m(\Delta K)\lambda_m(K),$$

что равносильно доказываемому неравенству. ►

Замечание. Очевидно, $\Delta K = 2K$ для центрально-симметричного выпуклого тела K и, следовательно, $\lambda_m(\Delta K) = 2^m \lambda_m(K)$. Поэтому данная в теореме оценка объёма $\lambda_m(\Delta K)$ снизу точна. Точна и оценка сверху — она обращается в равенство, если K — симплекс, так как в этом случае $K \cap (z+K) = ha + (1-h)K$. Мы предоставляем читателю проверить это равенство самостоятельно. Проверку удобно проводить на примере симплекса $K = \big\{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}_+^m \,\big|\, x_1 + \ldots + x_m \leqslant 1\big\}$, убедившись, что тогда $h(x) = \max\big\{\sum\limits_{k=1}^m (x_k)_+, \sum\limits_{k=1}^m (-x_k)_+\big\}$.

4.3. Как мы уже говорили, если мера μ конечна, то функция распределения существует всегда, однако в случае бесконечной меры это уже не так. Например, никакая положительная функция, суммируемая относительно бесконечной меры, не имеет функции распределения. Поэтому часто бывает полезно несколько изменить определение функции распределения.

Определение. Пусть неотрицательная измеримая на X функция h такова, что при любом $t > 0$ множество

$$X(h > t) = \{x \in X \mid h(x) > t\}$$

имеет конечную меру. Положим $\widetilde{H}(t) = \mu(X(h > t))$ и будем называть функцию $\widetilde{H}$ *убывающей функцией распределения* для h.

Во избежание путаницы, функцию распределения, определённую в 4.1, будем иногда называть *возрастающей* функцией распределения.

Из непрерывности меры сверху следует, что $\widetilde{H}(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ тогда и только тогда, когда $h(x) < +\infty$ почти везде на X. Как и возрастающая функция распределения, функция $\widetilde{H}$ непрерывна слева. Множества $X(h \leqslant t)$ и $X(h > t)$ одновременно имеют конечную меру, только если мера μ конечна. В этом случае, очевидно, $H(t+0) + \widetilde{H}(t) = \mu(X)$. Заметим, что измеримая неотрицательная функция h заведомо имеет убывающую функцию распределения, если $\int_X h^p\,d\mu < +\infty$ для некоторого $p > 0$. Это немедленно следует из неравенства Чебышева (см. теорему IV.4.4):

$$\widetilde{H}(t) = \mu\bigl(X(h > t)\bigr) \leqslant \frac{1}{t^p}\int_X h^p\,d\mu < +\infty \quad \text{при любом} \quad t > 0.$$

Не приводя аналога теоремы 4.1, мы ограничимся для убывающей функции распределения утверждением более частного характера.

Предложение. *Пусть $p > 0$, h — неотрицательная измеримая функция, имеющая убывающую функцию распределения $\widetilde{H}$. Тогда*

$$\int_X h^p\,d\mu = p\int_0^\infty t^{p-1}\widetilde{H}(t)\,dt.$$

Доказательство. Преобразуем интеграл $\int_X h^p\,d\mu$ следующим образом:

$$\int_X h^p\,d\mu = p\int_X \left(\int_0^{h(x)} t^{p-1}\,dt\right)\,d\mu(x).$$

Повторный интеграл справа равен двойному интегралу от функции $(x,t) \mapsto t^{p-1}$ по подграфику $\mathscr{P} = \mathscr{P}_h(X)$ функции h. Чтобы поменять порядок интегрирования, заметим, что его сечение $\mathscr{P}^t$ при $t > 0$ есть множество $X(h \geqslant t)$ (см. рис. 9).

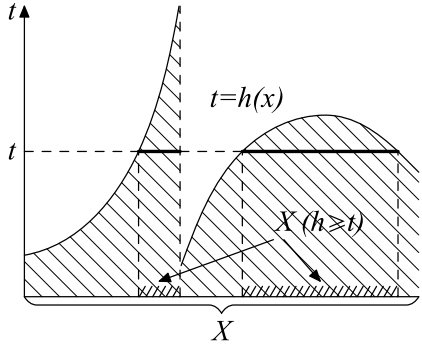


Рис. 9.

Поэтому, изменив порядок интегрирования, мы получим:

$$\int_X h^p\,d\mu = p\int_0^\infty t^{p-1}\left(\int_{X(h\geqslant t)} 1\,d\mu\right)dt = p\int_0^\infty t^{p-1}\mu(X(h\geqslant t))\,dt.$$

Остается заметить, что $\mu(X(h\geqslant t)) = \widetilde{H}(t)$ почти всюду — во всех точках непрерывности функции $\widetilde{H}$. ►

4.4. Всюду в этом пункте мы предполагаем, что рассматриваемые функции определены на фиксированном пространстве $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ с нормированной мерой $(\mu(X) = 1)$. Пусть $f_1, \ldots, f_n$ — вещественные измеримые почти везде конечные функции. Каждой функции f_k соответствует борелевская мера ν_k — образ μ относительно f_k, которую называют распределением f_k. Рассмотрим ещё отображение $\Phi\colon X \to \mathbb{R}^n$ с координатными функциями $f_1, \ldots, f_n$ и пусть $\nu = \Phi(\mu)$. Мера ν называется *совместным распределением* функций $f_1, \ldots, f_n$. Введём понятие независимости функций, основополагающее для теории вероятностей.

Определение. Функции $f_1, \ldots, f_n$ называются *независимыми*, если ν совпадает с мерой $\nu_1 \times \ldots \times \nu_n$ — произведением мер $\nu_1, \ldots, \nu_n$. Функции бесконечного семейства называются независимыми, если независимы функции произвольного конечного подсемейства.

В силу единственности продолжения меры для совпадения мер ν и $\nu_1 \times \ldots \times \nu_n$ достаточно, чтобы они совпадали на ячейках, т. е. чтобы для любой ячейки $P = \prod\limits_{k=1}^n [a_k, b_k)$ выполнялось равенство

$$\mu\big(\Phi^{-1}(P)\big) = \prod_{k=1}^n \mu\big(f_k^{-1}\big([a_k, b_k)\big)\big).$$

Поскольку множество $\Phi^{-1}(P)$ совпадает с $\bigcap\limits_{k=1}^n f_k^{-1}\big([a_k, b_k)\big)$, последнее равенство можно также переписать в виде

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^n f_k^{-1}\big([a_k, b_k)\big)\right) = \prod_{k=1}^n \mu\big(f_k^{-1}\big([a_k, b_k)\big)\big). \tag{2}$$

Если функции $f_1, \ldots, f_n$ независимы и неотрицательная функция h, заданная в $\mathbb{R}^n$, измерима по Борелю, то, как следует из теоремы 1.1,

$$\int_X h(f_1(x), \ldots, f_n(x))\,d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} h(t_1, \ldots, t_n)\,d\nu_1(t_1)\ldots d\nu_n(t_n), \tag{3}$$

и это равенство остаётся справедливым, если функция h суммируема.

В свою очередь, если равенство (3) справедливо для любой неотрицательной функции h, то справедливо, в частности, и равенство (2). Чтобы убедиться в этом, достаточно положить $h = \chi_P$. Таким образом, равенство (3) — характеристическое свойство независимых функций.

Из равенства (3) вытекает, что если независимые функции $f_1, \dots, f_n$ суммируемы, то суммируемо и их произведение $f_1 \cdots f_n$ (поскольку $\int_X |f_1 \cdots f_n|\, d\mu = \prod\limits_{k=1}^{n} \int_X |f_k|\, d\mu$), и интеграл от произведения этих функций равен произведению интегралов (ср. со следствием 1 п. V.3.4).

Если $f_1, \dots, f_n$ — вещественные функции, то система множеств вида $\bigcap\limits_{k=1}^{n} f_k^{-1}(\Delta_k)$, где Δ_k всевозможные замкнутые слева промежутки, есть полукольцо; мы будем обозначать его $\mathscr{P}(f_1, \dots, f_n)$, а его борелевскую оболочку — символом $\mathfrak{A}(f_1, \dots, f_n)$. Очевидно, все функции $f_1, \dots, f_n$ измеримы относительно $\mathfrak{A}(f_1, \dots, f_n)$ и это минимальная σ-алгебра, относительно которой измеримы все рассматриваемые функции. Аналогично, символом $\mathfrak{A}(\{f_n\}_{n\geqslant 1})$ будем обозначать борелевскую оболочку объединения $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathscr{P}(f_1, \dots, f_n)$. Это наименьшая σ-алгебра, относительно которой измеримы все функции последовательности $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$.

Лемма. *Пусть функции $f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_m$ независимы. Тогда алгебры $\mathfrak{A}(f_1, \dots, f_n)$ и $\mathfrak{A}(g_1, \dots, g_m)$ независимы в том смысле, что*

$$\mu(A \cap B) = \mu(A)\,\mu(B) \quad \text{для любых} \quad A \in \mathfrak{A}(f_1, \dots, f_n),\ B \in \mathfrak{A}(g_1, \dots, g_m). \tag{4}$$

Доказательство. Если $A \in \mathscr{P}(f_1, \dots, f_n)$, $B \in \mathscr{P}(g_1, \dots, g_m)$, то равенство (4) справедливо по определению независимости функций. Зафиксируем множество $Q \in \mathscr{P}(g_1, \dots, g_m)$ и рассмотрим две меры, определённые на σ-алгебре $\mathfrak{A}(f_1, \dots, f_n)$:

$$\mu_1(A) = \mu(A \cap Q) \quad \text{и} \quad \mu_2(A) = \mu(A)\,\mu(Q) \quad (A \in \mathfrak{A}(f_1, \dots, f_n)).$$

Эти меры совпадают на полукольце $\mathscr{P}(f_1, \dots, f_n)$, и по теореме единственности они совпадают на $\mathfrak{A}(f_1, \dots, f_n)$. Зафиксируем теперь произвольное множество $A \in \mathfrak{A}(f_1, \dots, f_n)$ и рассмотрим две меры, определённые на σ-алгебре $\mathfrak{A}(g_1, \dots, g_m)$:

$$\nu_1(B) = \mu(A \cap B) \quad \text{и} \quad \nu_2(B) = \mu(A)\,\mu(B) \quad (B \in \mathfrak{A}(g_1, \dots, g_m)).$$

По доказанному они совпадают на полукольце $\mathscr{P}(g_1, \dots, g_m)$, а по теореме единственности и на $\mathfrak{A}(g_1, \dots, g_m)$, что завершает доказательство. ►

Замечание. Равенство (4) остаётся справедливым и в случае, когда мы рассматриваем бесконечные последовательности независимых функций, поскольку оно справедливо при $A \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathscr{P}(f_1, \dots, f_n)$, $B \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathscr{P}(g_1, \dots, g_n)$.

Следствие. *Пусть функции $f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_m$ независимы. Если функции F и G измеримы относительно σ-алгебр $\mathfrak{A}(f_1, \dots, f_n)$ и $\mathfrak{A}(g_1, \dots, g_m)$ соответственно, то они независимы.*

Доказательство. Независимость функций F и G следует из равенства (4), применённого к множествам $A = F^{-1}(\Delta)$ и $B = G^{-1}(\Delta')$, где Δ и Δ' — произвольные промежутки. ►

Пусть $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ — последовательность независимых функций, $\mathfrak{A}_n = \mathfrak{A}(f_n, f_{n+1}, \dots,)$ — минимальная σ-алгебра, относительно которой измеримы все функции f_n, f_{n+1}, $\dots$

Очевидно, σ-алгебры $\mathfrak{A}_n$ убывают с ростом n. В их пересечение входят множества, "не зависящие от любого числа первых функций $f_1, \ldots, f_m$". Таким множеством будет, например, множество сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$, поскольку ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ и $\sum\limits_{k=n}^{\infty} f_k$ сходятся одновременно.

Оказывается, что для множеств, входящих в пересечение $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{A}_n$, справедливо следующее замечательное утверждение.

Теорема (закон нуля–единицы). *Если $A \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{A}_n$, то либо $\mu(A) = 0$, либо $\mu(A) = 1$.*

Доказательство. Убедимся, что если $B \in \mathfrak{A}_1$, то

$$\mu(A \cap B) = \mu(A)\,\mu(B). \tag{4'}$$

Действительно, по замечанию к лемме алгебры $\mathfrak{A}(f_1, \ldots, f_n)$ и $\mathfrak{A}_{n+1}$ независимы при любом n, и поэтому равенство (4′) справедливо для любого множества B из полукольца $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathscr{P}(f_1, \ldots, f_n)$. По теореме единственности совпадение мер $B \mapsto \mu(A \cap B)$ и $B \mapsto \mu(A)\,\mu(B)$ сохраняется и на борелевской оболочке этого полукольца, т. е. на $\mathfrak{A}_1$, что доказывает равенство (4′). При $B = A$ оно превращается в равенство $\mu(A) = (\mu(A))^2$, справедливое лишь в случае, когда $\mu(A) = 0$ или $\mu(A) = 1$. ▶

Следствие. *Если функции f_1, f_2, $\ldots$ независимы, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ либо сходится почти везде, либо расходится почти везде.*

Это частный случай закона нуля–единицы, поскольку множество сходимости ряда принадлежит, как мы уже отмечали, пересечению $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{A}_n$. ▶

Используя бесконечное произведение мер, легко убедиться, что существует последовательность независимых функций с произвольными заранее заданными распределениями ν_n ($n = 1, 2, \ldots$). Для этого достаточно в бесконечном произведении $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \ldots$ рассмотреть меру $\mu = \nu_1 \times \nu_2 \times \ldots$ и считать, что $h_n(t)$ есть n-я координата точки $t \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

4.5. Важный пример последовательности независимых функций мы получим, рассмотрев *функции Радемахера**) r_n ($n = 1, 2, \ldots$). Функцию r_n определяют следующим образом. Разобьём интервал $(0, 1)$ на равные части точками $k2^{-n}$ и на каждом интервале $\Delta_{n,k} = (k2^{-n}, (k+1)2^{-n})$ ($k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$) положим $r_n(x) = (-1)^k$. Кроме того, будем считать, что $r_n(k2^{-n}) = 0$ при $k = 0, 1, \ldots, 2^n$ и что функция r_n 1-периодическая. Как легко убедиться

$$r_n(x) = r_1(2^{n-1}x) = \operatorname{sign} \sin(2^n \pi x).$$

Читатель легко проверит самостоятельно, что значения функций Радемахера в точке $x \in (0, 1)$ тесно связаны со знаками двоичного разложения x: если x не двоично-рациональная дробь и $x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n(x)}{2^n}$, где $\varepsilon_n(x) = 0$ или 1, то $r_n(x) = 1 - 2\varepsilon_n(x)$.

---

*) Ганс Адольф **Радемахер** (Rademacher), 1892–1969, — немецкий математик.

Ясно, что $\lambda_1\big(\{x \in (0,1) \,|\, r_n(x) = 1\}\big) = \lambda_1\big(\{x \in (0,1) \,|\, r_n(x) = -1\}\big) = \frac{1}{2}$, и поэтому все функции Радемахера имеют одну и ту же возрастающую функцию распределения F:

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t \leqslant -1, \\ \frac{1}{2} & -1 < t \leqslant 1, \\ 1 & t > 1. \end{cases}$$

Функции F соответствует мера ν на $\mathbb{R}$, порождённая нагрузками $\frac{1}{2}$ в точках ± 1. Очевидно,

$$\int_0^1 h(r_n(x))\,dx = \frac{h(-1) + h(1)}{2} = \int_{\mathbb{R}} h(t)\,dF(t).$$

Функции Радемахера образуют независимую систему, если рассматривать их как функции на промежутке $(0,1)$ с мерой Лебега. Чтобы убедиться в их независимости, проверим равенство (3). В нашем случае оно означает, что при любом n

$$\int_0^1 h(r_1(x), \dots, r_n(x))\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} h(t_1, \dots, t_n)\,dF(t_1)\dots dF(t_n).$$

Вычислим порознь левую и правую части этого равенства. Так как значения функций $r_1, \dots, r_n$ постоянны на каждом промежутке $\Delta_{n,k}$, то при $x \in \Delta_{n,k}$ семейство $\{r_k(x)\}_{k=1}^n$ представляет собой набор из ± 1. При этом разным промежуткам $\Delta_{n,k}$ соответствуют разные наборы — в этом читатель с помощью индукции без труда убедится самостоятельно. Так как число промежутков $\Delta_{n,k}$, как и n-членных наборов $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ с $\varepsilon_k = \pm 1$, равно 2^n, то имеется взаимно однозначное соответствие между ними. Поэтому

$$\int_0^1 h(r_1(x), \dots, r_n(x))dx = \sum_{k=1}^{2^n-1} \int_{\Delta_{n,k}} h(r_1(x), \dots, r_n(x))dx = \frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} h(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n).$$

С другой стороны, так как F соответствует мера ν, порождённая нагрузками $\frac{1}{2}$ в точках ± 1, то $\nu \times \ldots \times \nu$ (n раз) есть мера, порождаемая нагрузками 2^{-n} в вершинах куба $[-1,1]^n$, т. е. во всевозможных точках вида $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$, где $\varepsilon_k = \pm 1$. Поэтому

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(t_1, \dots, t_n)\,dF(t_1)\dots dF(t_n) = \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} h(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)\,2^{-n}.$$

Правые части этого и предыдущего равенств совпадают, что доказывает справедливость равенства (3) для функций Радемахера. Аналогично можно проверить, что знаки двоичного (десятичного, p-ичного) разложения числа $x \in (0,1)$ — независимые функции.

Использование функций распределения полезно не только при вычислении интегралов, но и для доказательства интегральных неравенств. В оставшейся части параграфа мы рассмотрим два таких примера. Первый из них посвящён важному неравенству, связанному с функциями Радемахера.

Оценим убывающую функцию распределения функции $|S|$, где $S = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j r_j$ (здесь $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $r_1, \ldots, r_n$ — функции Радемахера), т. е. меру множества $E_t = \{x \in (0,1) \mid |S(x)| > t\}$. Важно получить оценку, зависящую не от числа слагаемых n, а от совокупной величины коэффициентов $a_1, \ldots, a_n$. Говоря точнее — наша цель оценить меру $\widetilde{F}(t) = \lambda_1(E_t)$ с помощью параметра $A = \left(\sum a_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Будем исходить из неравенства $1 \leqslant e^{u(|S(x)|-t)}$, справедливого при $x \in E_t$ для любого $u > 0$ (свободой в выборе этого параметра мы распорядимся позже). Очевидно,

$$\widetilde{F}(t) = \lambda_1(E_t) \leqslant \int_{E_t} e^{u(|S(x)|-t)}\,dx \leqslant e^{-ut} \int_0^1 \left(e^{uS(x)} + e^{-uS(x)}\right) dx.$$

В силу независимости функций Радемахера интегралы $\int_0^1 e^{\pm uS(x)}\,dx$ распадаются в произведение интегралов:

$$\int_0^1 e^{\pm uS(x)}\,dx = \prod_{j=1}^{n} \int_0^1 e^{\pm u a_j r_j(x)}\,dx = \prod_{j=1}^{n} \operatorname{ch}(u a_j).$$

Поэтому $\widetilde{F}(t) \leqslant 2e^{-ut} \prod\limits_{j=1}^{n} \operatorname{ch}(u a_j)$. Мажорируем последнее произведение, пользуясь неравенством $\operatorname{ch} x \leqslant e^{x^2/2}$, которое легко обосновать, сравнив коэффициенты тейлоровских разложений. Это даёт нам:

$$\widetilde{F}(t) \leqslant 2e^{-ut} \prod_{j=1}^{n} e^{u^2 a_j^2/2} = 2e^{-ut + u^2 A^2/2}.$$

Выберем теперь u так, чтобы правая часть неравенства была минимальна. Для этого положим $u = \frac{t}{A^2}$. В результате мы приходим к искомой оценке $\widetilde{F}(t) = \lambda(E_t) \leqslant 2e^{-t^2/(2A^2)}$.

Эта оценка позволяет получить *неравенство Хинчина**), согласно которому при любом $p > 0$

$$\left(\int_0^1 |S(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C_p \left(a_1^2 + \ldots + a_n^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{5}$$

(константа C_p зависит лишь от p). Поскольку $\int_0^1 |S(x)|^2\,dx = a_1^2 + \ldots + a_n^2$, из неравенства Гёльдера вытекает, что при $p \in (0, 2]$ можно взять $C_p = 1$. Отметим также, что неравенство Хинчина точно по порядку — его можно дополнить аналогичной оценкой снизу (см. упр. 7 в § IX.1).

Для доказательства воспользуемся предложением 4.3: применив найденную оценку функции распределения, мы получим

$$\int_0^1 |S(x)|^p\,dx = p \int_0^\infty t^{p-1} \widetilde{F}(t)\,dt \leqslant 2p \int_0^\infty t^{p-1} e^{-t^2/(2A^2)}\,dt.$$

*) Александр Яковлевич **Хинчин**, 1894–1959, — российский математик.

Остаётся выразить последний интеграл через функцию Γ (см. п. IV.6.3, пример 5). Делая в последнем интеграле подстановку $s = \frac{t^2}{2A^2}$, мы видим, что

$$\int_0^\infty t^{p-1} e^{-t^2/(2A^2)}\,dt = p2^{\frac{p}{2}} A^p \int_0^\infty s^{\frac{p}{2}-1} e^{-s}\,ds = p2^{\frac{p}{2}}\Gamma\Big(\frac{p}{2}\Big)A^p.$$

Это приводит к неравенству (5) с $C_p = \sqrt{2}\big(p\Gamma(\frac{p}{2})\big)^{\frac{1}{p}}$. С помощью формулы Стирлинга (см. п. VII.2.6) легко показать, что $C_p \sim \sqrt{\frac{p}{e}}$ при $p \to +\infty$.

УПРАЖНЕНИЯ

1) Пусть f — определённая в $\mathbb{R}_+$ неотрицательная измеримая по Лебегу функция, $\mathbb{R}_+^m = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \mid x_1 > 0, x_2 > 0, \dots, x_m > 0\}$. Докажите равенства

а) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^m} f(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)\,dx = \frac{1}{(m-1)!}\int_0^\infty t^{m-1} f(t)\,dt;$

б) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^m} f(\max\{x_1, x_2, \dots, x_m\})\,dx = m\int_0^\infty t^{m-1} f(t)\,dt.$

2) Докажите формулу Каталана*): если f — неотрицательная измеримая по Борелю на $\mathbb{R}$ функция, то

$$\int_X g(x) f(h(x))\,d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,dH(t).$$

Здесь функция $g \geqslant 0$ суммируема на X, h — измеримая функция, а H — её возрастающая функция распределения по мере, имеющей плотность g относительно μ (т. е. $H(t) = \int_{X(h<t)} g\,d\mu$).

3) Докажите следующее обобщение предложения 4.3. Пусть φ — непрерывно дифференцируемая на $[0, +\infty)$ возрастающая функция, $\varphi(0) = 0$. Тогда

$$\int_X \varphi(h)\,d\mu = \int_0^\infty \varphi'(t)\widetilde{H}(t)\,dt,$$

где функция h неотрицательна, а $\widetilde{H}$ её убывающая функция распределения.

4) Если μ — ненулевая конечная мера в X, $\mu(X) \neq 1$, то нет ни одной пары независимых функций, заданных на X.

5) Пусть $\rho(x)$ — расстояние от точки x до ограниченного выпуклого множества $A \subset \mathbb{R}^2$. Вычислите возрастающую функцию распределения функции ρ.

6) Пусть $f(x) = \frac{a_1}{x-c_1} + \ldots + \frac{a_n}{x-c_n}$, где $a_1, \dots, a_n$ положительные, а $c_1, \dots, c_n$ — произвольные вещественные числа. Докажите равенства Буля**):

$$\lambda\big(\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > t\}\big) = \lambda\big(\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < -t\}\big) = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{t} \quad \text{при любом } t > 0.$$

---

*) Эжен Шарль **Каталан** (Catalan), 1814–1894, — бельгийский математик.

) Джорж **Буль (Boole), 1815–1864, — английский математик.

§ 5. Вычисление кратного интеграла с помощью интегрирования по сфере

В этом параграфе мы будем использовать следующие обозначения:
$\mathbb{R}^m_\pm = \{\, x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid \pm x_m > 0 \,\}$;
$S^{m-1}_\pm = S^{m-1} \cap \mathbb{R}^m_\pm$;
$B^m = \{\, x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| < 1 \}$ — единичный шар в пространстве $\mathbb{R}^m$;
P — ортогональная проекция $\mathbb{R}^m$ на $\mathbb{R}^{m-1}$: если $x = (x_1, \dots, x_{m-1}, x_m)$, то $P(x) = (x_1, \dots, x_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}$ $(m \geqslant 2)$.

5.1. В главе VIII будет определена мера на гладких поверхностях (“площадь поверхности”). Здесь, забегая вперед, мы сообщим лишь, что на сфере S^{m-1} эта мера σ $(= \sigma_{m-1})$ строится таким образом, что множество $A \subset S^{m-1}_+$ измеримо тогда и только тогда, когда его проекция $P(A)$ измерима по Лебегу в пространстве $\mathbb{R}^{m-1}$, и в случае её измеримости мера $\sigma(A)$ вычисляется по формуле

$$\sigma(A) = \int_{P(A)} \frac{du}{\sqrt{1 - \|u\|^2}}\,.$$

Заметим, что сужение P на S^{m-1}_+ есть отображение, обратное к отображению $T\colon B^{m-1} \to S^{m-1}_+$, определяемому равенством

$$T(u) = \bigl(u, \sqrt{1 - \|u\|^2}\bigr), \quad \text{где} \quad u \in B^{m-1}.$$

Здесь и далее в этом параграфе мы отождествляем пару (u, t), где $u = (u_1, \dots, u_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}$, $t \in \mathbb{R}$, с точкой $(u_1, \dots, u_{m-1}, t) \in \mathbb{R}^m$.

Таким образом, сужение меры σ на σ-алгебру измеримых подмножеств верхней полусферы есть ω-взвешенный образ меры λ_{m-1} в единичном шаре при отображении T с весом $\omega(u) = \frac{1}{\sqrt{1-\|u\|^2}}$. Из приведённого определения меры σ вытекает, что заданная на S^{m-1}_+ функция g измерима одновременно с композицией $g \circ T$. Используя теорему 1.1, мы видим, что

$$\int_{S^{m-1}_+} g(\xi)\, d\sigma(\xi) = \int_{B^{m-1}} g(T(u)) \frac{du}{\sqrt{1 - \|u\|^2}} \tag{1}$$

для всякой неотрицательной измеримой на S^{m-1}_+ функции g.

Аналогичные факты верны и для нижней полусферы.

Найдём сразу же полную площадь сферы S^{m-1} $(m > 1)$. Ясно, что

$$\sigma(S^{m-1}) = 2\sigma(S^{m-1}_+) = 2 \int_{B^{m-1}} \frac{du}{\sqrt{1 - \|u\|^2}}.$$

Согласно формуле, полученной в примере 1 п. 4.2,

$$2 \int_{B^{m-1}} \frac{du}{\sqrt{1 - \|u\|^2}} = 2(m-1)\alpha_{m-1} \int_0^1 \frac{t^{m-2}}{\sqrt{1 - t^2}}\, dt =$$

$$= (m-1)\alpha_{m-1} \int_0^1 \frac{t^{m-3}}{\sqrt{1 - t^2}}\, d(t^2) \;= (m-1)\alpha_{m-1} \int_0^1 s^{\frac{m-1}{2} - 1} (1 - s)^{\frac{1}{2} - 1}\, ds,$$

где α_{m-1} — $(m-1)$-мерный объём шара B^{m-1}. Как установлено в п. V.4.2 (пример 2) и в п. V.3.2 (пример 2),

$$\alpha_{m-1} = \frac{\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma(\frac{m+1}{2})}, \qquad \int_0^1 s^{\frac{m-1}{2}-1}(1-s)^{\frac{1}{2}-1}\,ds = \frac{\Gamma(\frac{m-1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})}.$$

Подставляя эти результаты в предыдущее равенство, мы получаем

$$\sigma(S^{m-1}) = (m-1)\,\frac{\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma(\frac{m+1}{2})}\,\frac{\Gamma(\frac{m-1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})} = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})}.$$

Впервые эта формула для площади многомерной сферы была установлена Якоби.

5.2. Сообщив эти необходимые в дальнейшем сведения, перейдём непосредственно к интересующему нас вопросу. Наша цель — перенести результаты пп. 2.4, 2.5 (вычисление интегралов с помощью полярных и сферических координат) на многомерный случай.

Теорема. *Для всякой определённой в* $\mathbb{R}^m$ *неотрицательной измеримой по Лебегу функции* f *справедливо равенство*

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(y)\,dy = \int_0^\infty t^{m-1}\left(\int_{S^{m-1}} f(t\xi)\,d\sigma(\xi)\right)dt\,. \tag{2}$$

При этом функция $\xi \mapsto f(t\xi)$ *измерима на* S^{m-1} *при почти всех* $t>0$ *и внутренний интеграл в правой части равенства* (2) *есть измеримая функция от* t.

Это утверждение очевидным образом переносится на функции, суммируемые в произвольном шаре $B(0,r)$:

$$\int_{B(0,r)} f(y)\,dy = \int_0^r t^{m-1}\left(\int_{S^{m-1}} f(t\xi)\,d\sigma(\xi)\right)dt\,. \tag{2'}$$

Доказательство. Мы докажем формулу, аналогичную (2), где пространство $\mathbb{R}^m$ и сфера S^{m-1} заменены полупространством $\mathbb{R}^m_+$ и полусферой S^{m-1}_+:

$$\int_{\mathbb{R}^m_+} f(y)\,dy = \int_0^\infty t^{m-1}\left(\int_{S^{m-1}_+} f(t\xi)\,d\sigma(\xi)\right)dt\,.$$

Как нетрудно убедиться, аналогичное равенство верно также для полупространства $\mathbb{R}^m_-$ и полусферы S^{m-1}_-, а поэтому верно и равенство (2).

Так как в силу (1)

$$\int_{S^{m-1}_+} f(t\xi)\,d\sigma(\xi) = \int_{B^{m-1}} f(tT(u))\frac{du}{\sqrt{1-\|u\|^2}}\,,$$

где $T(u) = \big(u, \sqrt{1-\|u\|^2}\big)$, то нам достаточно проверить равенство

$$\int_{\mathbb{R}^m_+} f(y)\,dy = \int_0^\infty t^{m-1}\left(\int_{B^{m-1}} f(tT(u))\frac{du}{\sqrt{1-\|u\|^2}}\right)dt, \tag{3}$$

которое мы и будем доказывать.

Положим $G = B^{m-1} \times \mathbb{R}_+$ и определим отображение $\Phi\colon G \to \mathbb{R}^m_+$ равенством

$$\Phi(x) = tT(u), \qquad \text{где} \;\; x = (u,t) \in G.$$

Очевидно, оно гладкое. Мы предоставляем читателю проверку того, что отображение (также гладкое)

$$y \mapsto \Psi(y) = \left(P\left(\frac{y}{\|y\|}\right), \|y\|\right) \in B^{m-1} \times \mathbb{R}_+ \quad (y \in \mathbb{R}^m_+)$$

является обратным к Φ. Таким образом, Φ — диффеоморфизм.

Ввиду измеримости композиции $f \circ \Phi$ правую часть равенства (3) можно на основании теоремы Тонелли переписать следующим образом:

$$\int_0^\infty t^{m-1}\left(\int_{B^{m-1}} f\big(tT(u)\big)\frac{du}{\sqrt{1-\|u\|^2}}\right)dt = \int_G f\big(\Phi(x)\big)\frac{t^{m-1}}{\sqrt{1-\|u\|^2}}\,dx\,.$$

Заметим, что по теореме Тонелли функция $u \mapsto f\big(tT(u)\big)$ измерима при почти всех $t > 0$. По определению меры на сфере отсюда следует и измеримость при почти всех $t > 0$ функции $\xi \mapsto f(t\xi)$, где $\xi \in S^{m-1}_+$.

Итак, равенство (3) равносильно равенству

$$\int_{\mathbb{R}^m_+} f(y)\,dy = \int_G f\big(\Phi(x)\big)\frac{t^{m-1}}{\sqrt{1-\|u\|^2}}\,dx\,.$$

Покажем, что оно следует из формулы замены переменной в кратном интеграле при гладком отображении (см. теорему 2.2). Для этого достаточно проверить, что якобиан $J_\Phi(x)$ отображения Φ в точке $x = (u,t)$ $(x \in G)$ равен $\frac{t^{m-1}}{\sqrt{1-\|u\|^2}}$. Так как $\Phi(x) = (tu, t\sqrt{1-\|u\|^2}\,)$, то

$$J_\Phi(x) = \begin{vmatrix} t & 0 & \dots & 0 & u_1 \\ 0 & t & \dots & 0 & u_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t & u_{m-1} \\ -tcu_1 & -tcu_2 & \dots & -tcu_{m-1} & \frac{1}{c} \end{vmatrix},$$

где мы положили для краткости $c = \frac{1}{\sqrt{1-\|u\|^2}}$. Домножив k-ю строчку $(1 \leqslant k < m)$ на число $c\,u_k$ и сложив все эти строки с последней, мы получим

$$J_\Phi(x) = \begin{vmatrix} t & 0 & \dots & 0 & u_1 \\ 0 & t & \dots & 0 & u_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t & u_{m-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & v \end{vmatrix} = t^{m-1}v,$$

где

$$v = \frac{1}{c} + c\,\|u\|^2 = \sqrt{1-\|u\|^2} + \frac{\|u\|^2}{\sqrt{1-\|u\|^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\|u\|^2}}\,.$$

Таким образом, равенство

$$|J_\Phi(x)| = \frac{t^{m-1}}{\sqrt{1-\|u\|^2}} \quad \text{при} \quad x=(u,t)\in G.$$

доказано, что завершает доказательство теоремы. ►

Если подынтегральная функция $f(x)$ в равенстве (2) равна произведению двух функций, одна из которых зависит лишь от $t=\|x\|$, а другая — от направления вектора x, т. е. от $\xi=\frac{x}{\|x\|}$, то интеграл, стоящий в правой части (2), распадается на произведение двух интегралов (по положительной полуоси и по единичной сфере). Это позволяет сводить вычисление интеграла по сфере к вычислению кратного интеграла. Вот типичный пример такой ситуации.

Пример 1. Вычислим интеграл

$$J=\int_{S^{m-1}} |\xi_1|^{p_1}\cdots|\xi_m|^{p_m}\,d\sigma(\xi) \qquad (p_1,\dots,p_m\in\mathbb{R}).$$

Как будет видно из дальнейшего, он конечен лишь в случае, когда все показатели p_j больше -1.

Рассмотрим вспомогательный интеграл

$$I=\int_{\mathbb{R}^m} |x_1|^{p_1}\cdots|x_m|^{p_m}\,e^{-\|x\|^2}\,dx$$

(как обычно, $\|x\|$ — евклидова норма вектора $x=(x_1,\dots,x_m)$).

С одной стороны, $I=I_1\cdots I_m$, где

$$I_j=\int_{-\infty}^{\infty}|u|^{p_j}e^{-u^2}\,du=\begin{cases}\Gamma\bigl(\frac{p_j+1}{2}\bigr) & \text{при } p_j>-1,\\ +\infty & \text{при } p_j\leqslant -1.\end{cases}$$

Отсюда следует, в частности, что интеграл I конечен лишь при $p_1,\dots,p_m>-1$.

С другой стороны, формула (2) даёт нам

$$I=J\int_0^\infty t^{m+p-1}\,e^{-t^2}\,dt=\frac{J}{2}\,\Gamma\Bigl(\frac{m+p}{2}\Bigr),$$

где $p=p_1+\ldots+p_m$. Таким образом, если все показатели p_j больше -1, то

$$J=\frac{2I}{\Gamma\bigl(\frac{m+p}{2}\bigr)}=\frac{2}{\Gamma\bigl(\frac{m+p_1+\ldots+p_m}{2}\bigr)}\prod_{j=1}^m\Gamma\Bigl(\frac{1+p_j}{2}\Bigr),$$

а в остальных случаях $J=+\infty$.

Пример 2. Пусть q и $p_1,\dots,p_m$ — вещественные числа. Для $x=(x_1,\dots,x_m)$, $x\in\mathbb{R}^m$, положим

$$f(x)=\frac{|x_1|^{p_1}\cdots|x_m|^{p_m}}{(1+\|x\|^2)^q}.$$

Выясним, при каких условиях функция f суммируема в пространстве $\mathbb{R}^m$. Используя обозначения, введённые в предыдущем примере, мы получаем с помощью равенства (2), что

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(x)\,dx = J\int_0^\infty \frac{t^{p+m-1}}{(1+t^2)^q}\,dt.$$

Учитывая результат примера 1, мы видим, что функция f суммируема тогда и только тогда, когда выполняются неравенства $q > \frac{p+m}{2}$ и $p_1, \dots, p_m > -1$.

Заметим ещё, что интеграл, стоящий в правой части последней формулы, заменой переменной $t = \operatorname{tg}\varphi$ сводится к интегралу, который выражается через функцию Γ (см. конец п. V.3.2).

Замечание. Доказанная теорема может быть переформулирована следующим образом. Рассмотрим в декартовом произведении $\mathbb{R}_+ \times S^{m-1}$ меру $\mu = \lambda_1 \times \sigma$. Отображение $\Theta\colon \mathbb{R}_+ \times S^{m-1} \to \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, определяемое равенством $\Theta(t,\xi) = t\,\xi$, является, очевидно, гомеоморфизмом. Если f — характеристическая функция множества $A \subset \mathbb{R}^m$, то из теоремы 5.2 следует, что

$$\lambda_m(A) = \int_{\mathbb{R}_+\times S^{m-1}} t^{m-1} f(t\xi)\,d\mu(t,\xi) = \int_{\Theta^{-1}(A)} t^{m-1}\,d\mu(t,\xi).$$

Таким образом, мера Лебега λ_m есть ω-взвешенный образ меры $\mu = \lambda_1 \times \sigma$ относительно отображения Θ с $\omega(t,\xi) = t^{m-1}$. Мы предоставляем читателю проверить, что верно и обратное: теорема 5.2 вытекает из этого утверждения.

5.3. Приведём некоторые следствия из теоремы 5.2. Первое из них — прямое обобщение формулы для вычисления площади в полярных координатах (см. п. 2.4).

Следствие 1. Объём множества $V = \bigl\{r\xi \bigm| \xi \in S^{m-1},\ 0 \leqslant r \leqslant \rho(\xi)\bigr\}$, где ρ — измеримая неотрицательная функция на сфере S^{m-1}, может быть вычислен по формуле

$$\lambda_m(V) = \frac{1}{m}\int_{S^{m-1}} \rho^m(\xi)\,d\sigma(\xi). \tag{4}$$

В частности, при $\rho \equiv 1$ мы вновь получаем формулу Якоби для вычисления площади сферы.

Для доказательства применим формулу (2) к характеристической функции множества V, поменяв порядок интегрирования в правой части:

$$\lambda_m(V) = \int_{\mathbb{R}^m} \chi_V(x)\,dx = \int_{S^{m-1}} \biggl(\int_0^\infty r^{m-1}\chi_V(r\xi)\,dr\biggr)\,d\sigma(\xi).$$

Поскольку $\chi_V(r\xi) = 0$ при $r > \rho(\xi)$ и $\chi_V(r\xi) = 1$ при $r \leqslant \rho(\xi)$, отсюда следует доказываемое равенство:

$$\lambda_m(V) = \int_{S^{m-1}} \biggl(\int_0^{\rho(\xi)} r^{m-1}\,dr\biggr)\,d\sigma(\xi) = \frac{1}{m}\int_{S^{m-1}} \rho^m(\xi)\,d\sigma(\xi). \quad \blacktriangleright$$

Чтобы получить ещё один результат Якоби, перепишем равенство (4) в другой форме: если f — измеримая в $\mathbb{R}^m$ функция, удовлетворяющая условиям $f(x) > 0$ при $x \neq 0$ и $f(tx) = tf(x)$ для $t \geqslant 0$, $x \in \mathbb{R}^m$, то

$$\lambda_m\big(\{x \in \mathbb{R}^m \mid f(x) \leqslant 1\}\big) = \frac{1}{m}\int_{S^{m-1}} \frac{d\sigma(\xi)}{f^m(\xi)}. \tag{4'}$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно применить формулу (4) к функции $\rho(\xi) = \frac{1}{f(\xi)}$, поскольку неравенства $f(r\xi) \leqslant 1$ и $r \leqslant \rho(\xi)$ равносильны.

Следствие 2. Для положительно определённой $m \times m$ матрицы A выполняется равенство Якоби

$$\int_{S^{m-1}} \frac{d\sigma(\xi)}{\langle A\xi, \xi\rangle^{\frac{m}{2}}} = \frac{m\alpha_m}{\sqrt{\det A}}.$$

Действительно, представив A в виде $A = A_1^2$, где A_1 — положительно определённая матрица, положим $f(x) = \|A_1(x)\|$. Тогда $\sqrt{\langle A\xi, \xi\rangle} = \|A_1(\xi)\| = f(\xi)$, а множество $V = \{x \in \mathbb{R}^m \mid f(x) \leqslant 1\}$ есть $A_1^{-1}(B^m)$. Поэтому по формуле (4′) мы получаем

$$\int_{S^{m-1}} \frac{d\sigma_{m-1}(\xi)}{\langle A\xi, \xi\rangle^{\frac{m}{2}}} = m\lambda_m(V) = m\det(A_1^{-1})\lambda_m\big(B^m\big) = \frac{m\alpha_m}{\sqrt{\det A}}. \quad ▶$$

Закончим перечень следствий результатом, уже полученным нами ранее другим способом (см. п. 4.2, пример 1).

Следствие 3. Пусть φ — определённая на $\mathbb{R}_+$ неотрицательная измеримая (по Лебегу) функция. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^m} \varphi\big(\|x\|\big)\,dx = m\alpha_m \int_0^\infty t^{m-1}\varphi(t)\,dt\,.$$

Это вытекает из теоремы 5.2, применённой к радиальной функции $f(x) = \varphi\big(\|x\|\big)$. ▶

5.4. Из формулы для объёма m-мерного шара сразу следует, что при больших m бóльшую его часть занимают точки близкие к граничной сфере. Например, объём шара радиуса $1 - \frac{1}{\sqrt{m}}$ пренебрежимо мал по сравнению с объёмом шара B^m. Иначе говоря, бесконечно тонкий (при $m \to \infty$) сферический слой $\big\{x \in \mathbb{R}^m \,|\, 1 - \frac{1}{\sqrt{m}} < \|x\| < 1\big\}$ почти исчерпывает единичный шар. Поэтому Алиса, попав в 1000-мерное пространство, не могла бы там лакомиться арбузами. Даже при неправдоподобно малой толщине корки в 1% от радиуса арбуз на 99,99% состоял бы из корки.

Это явление приводит к такому, на первый взгляд неожиданному, результату: для достаточно регулярно меняющейся в $\mathbb{R}^m$ функции при больших m её средние значения на шаре и на граничной сфере почти совпадают. Точнее, пусть функция f, заданная на единичном шаре $\overline{B}^m$, удовлетворяет условию Липшица: $|f(x) - f(y)| \leqslant L\|x - y\|$, где L — некоторая константа, и пусть f_B и f_S — её средние значения на шаре $\overline{B}^m$ и сфере S^{m-1}:

$$f_B = \frac{1}{\alpha_m}\int_{\|x\|\leqslant 1} f(x)\,dx, \qquad f_S = \frac{1}{s_m}\int_{\|\xi\|=1} f(\xi)\,d\sigma(\xi)$$

(здесь α_m — объём шара $\overline{B}^m$, s_m — площадь сферы S^{m-1}). Тогда

$$\big|f_B - f_S\big| \leqslant \frac{L}{m}.$$

Для доказательства запишем интеграл по шару с помощью сферических координат (см. равенство (2′)):

$$\int_{\|x\|\leqslant 1} f(x)\,dx = \int_{\|\xi\|=1}\left(\int_0^1 f(t\xi)\,t^{m-1}\,dt\right)d\sigma(\xi).$$

С учётом равенства $s_m = m\alpha_m$ это даёт нам

$$f_S - f_B = \frac{1}{s_m}\int_{\|\xi\|=1}\left(f(\xi) - m\int_0^1 f(t\xi)\,t^{m-1}\,dt\right)d\sigma(\xi) =$$
$$= \frac{m}{s_m}\int_{\|\xi\|=1}\left(\int_0^1 \big(f(\xi) - f(t\xi)\big)\,t^{m-1}\,dt\right)d\sigma(\xi).$$

Поэтому

$$|f_S - f_B| \leqslant \frac{m}{s_m}\int_{\|\xi\|=1}\left(\int_0^1 L(1-t)\,t^{m-1}\,dt\right)d\sigma(\xi) = \frac{L}{m+1}. \ \blacktriangleright$$

УПРАЖНЕНИЯ

1) Пусть функция f непрерывна на $\mathbb{R}^m$ $(m \geqslant 2)$ и $I(r) = \int_{\|x\|\leqslant r} f(x)\,dx$ при $r \geqslant 0$. Докажите, что

$$I'(r) = r^{m-1}\int_{S^{m-1}} f(r\xi)\,d\sigma(\xi).$$

2) Для каких чисел $p_1 > 0, \ldots, p_m > 0$ конечны интегралы

а) $\displaystyle\int_{B^m} \frac{dx}{|x_1|^{p_1} + \ldots + |x_m|^{p_m}}$, б) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^m\setminus B^m} \frac{dx}{|x_1|^{p_1} + \ldots + |x_m|^{p_m}}$?

3) Выясните, при каких a, p, q функция $\frac{x^p y^q}{(1+x^2+y^2)^a}$ суммируема в углах $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < y < x\}$ и $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 < y < x < 2y\}$, и сравните получающийся результат с условием суммируемости из примера 2 п. 5.2.

4) Используя геометрический смысл якобиана, докажите, что для инверсии относительно единичной сферы (т. е. для отображения $x \mapsto x/\|x\|^2$) он равен $\|x\|^{-2m}$.

5) Обобщите результат п. 5.4, оценив разность $f_S - f_B$ через модуль непрерывности функции f.

§ 6. Некоторые геометрические приложения

В этом параграфе мы приведём аналитические доказательства интересных геометрических результатов, связанных с теоремой Брауэра о неподвижной точке и теоремой о векторных полях на сфере.

6.1. В теории нелинейных уравнений и топологии важную роль играет теорема Брауэра о существовании неподвижной точки у любого непрерывного отображения замкнутого шара в себя. Она может быть выведена из теоремы об отсутствии гладкой ретракции шара на его границу или из теоремы об отсутствии на чётномерной сфере невырождающегося непрерывного поля касательных векторов. Мы докажем эти важные теоремы, следуя работам [Mi], [R].

Как обычно, будем считать, что $\overline{B}$ — замыкание единичного шара B в $\mathbb{R}^m$, I — единичная матрица, Φ' — матрица Якоби отображения Φ, а J_Φ — её определитель (якобиан). Условимся называть отображение, заданное на некотором подмножестве пространства $\mathbb{R}^m$, гладким, если оно является сужением отображения, гладкого в некоторой окрестности этого множества.

Докажем одно вспомогательное утверждение.

Лемма. *Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m$ — открытое множество, K — его компактное подмножество, $\Psi \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m)$, и пусть $\Phi_t(x) = x + t\Psi(x)$, где $x \in \mathcal{O}$, $t \in \mathbb{R}$. Тогда при достаточно малых $t > 0$*

1) *Φ_t взаимно однозначно на K;*

2)
$$J_{\Phi_t}(x) > 0 \quad \text{на } K. \tag{1}$$

Кроме того, $J_{\Phi_t}(x)$ есть полином относительно t (с коэффициентами, зависящими от x).

Доказательство. Убедимся сначала, что Ψ удовлетворяет на K условию Липшица, т. е. что при некотором $L > 0$

$$\|\Psi(x) - \Psi(y)\| \leqslant L\|x - y\| \quad \text{при всех } x, y \text{ из } K. \tag{2}$$

Нам известно, что это так, если компакт K выпуклый (см. следствие 2 п. Д.VII.2). Если он не выпуклый, то его можно покрыть конечным числом открытых шаров $B_1, \dots, B_N$, содержащихся в $\mathcal{O}$ вместе с замыканиями. Пусть L' — максимальная из констант Липшица для этих шаров. Если точки x, $y \in K$ попадают в один из них, то $\|\Psi(x) - \Psi(y)\| \leqslant L'\|x - y\|$. В противном случае пара (x, y) принадлежит компактному множеству

$$(K \times K) \setminus \bigcup_{n=1}^{N} (B_n \times B_n),$$

и поэтому величина $\|x - y\|$ отделена от нуля, скажем, числом $\eta > 0$. Следовательно, в этом случае

$$\|\Psi(x) - \Psi(y)\| \leqslant 2M \leqslant \frac{2M}{\eta}\|x - y\|,$$

где $M = \max\limits_{z \in K} \|\Psi(z)\|$. Таким образом, при $L = \max\{L', \frac{2M}{\eta}\}$ неравенство (2) справедливо для любых $x, y \in K$. Теперь мы видим, что при x, $y \in K$, $x \neq y$, и при $0 < t < \frac{1}{L}$

$$\|\Phi_t(x) - \Phi_t(y)\| \geqslant \|x - y\| - t\|\Psi(x) - \Psi(y)\| \geqslant (1 - tL)\|x - y\| > 0,$$

что доказывает первое утверждение леммы.

Заключительное утверждение леммы следует из правил вычисления определителя и того обстоятельства, что $\Phi_t'(x) = I + t\Psi'(x)$. Второе утверждение леммы вытекает из соображений непрерывности, если учесть, что $J_{\Phi_0}(x) = \det(I) = 1 > 0$. ►

6.2. Теперь мы готовы перейти к теореме о ретракции.

Определение. Пусть $A \subset X \subset \mathbb{R}^m$. Непрерывное отображение $\Phi\colon X \to \mathbb{R}^m$ называется *ретракцией X на A*, если

$$\Phi(X) \subset A \quad \text{и} \quad \Phi(x) = x \ \text{ для всех } \ x \in A.$$

Теорема (о ретракции). *Не существует ретракции шара $\overline{B}$ на его границу.*

Доказательство. Мы ограничимся доказательством отсутствия гладкой ретракции. Общий случай может быть получен из гладкого с помощью аппроксимации (см. упр. 1). Предположим противное. Пусть $\mathcal{O}$ — содержащее $\overline{B}$ открытое множество и $\Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m)\colon \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$ — гладкое отображение, сужение которого на $\overline{B}$ есть ретракция шара $\overline{B}$ на сферу S^{m-1}. Так как образ единичного шара не имеет внутренних точек, то из теоремы Д.VII.3 о сохранении области следует, что

$$J_\Phi(x) = \det(\Phi'(x)) = 0 \quad \text{при всех} \ \ x \in \overline{B}. \tag{3}$$

Введём теперь семейство отображений $\{\Phi_t\}_{0 \leqslant t \leqslant 1}$, определив $\Phi_t\colon \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$ равенством

$$\Phi_t(x) = x + t(\Phi(x) - x) = (1-t)x + t\Phi(x) \quad \text{при} \ \ x \in \mathcal{O} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Ясно, что $\Phi_t(\overline{B}) \subset \overline{B}$ и, кроме того,

$$\Phi_t(B) \subset B \quad \text{при} \ \ 0 \leqslant t < 1, \tag{4}$$

так как

$$\|\Phi_t(x)\| \leqslant (1-t)\|x\| + t\|\Phi(x)\| < (1-t) + t = 1 \quad \text{при всех} \ \ x \in B, \ 0 \leqslant t < 1.$$

На сфере S^{m-1} отображение Φ_t совпадает с тождественным. В самом деле,

$$\Phi_t(x) = (1-t)x + t\Phi(x) = (1-t)x + tx = x \quad \text{при} \ \ x \in S^{m-1}. \tag{5}$$

Будем считать, что неравенство (1) верно при $0 < t < \delta$. По теореме Д.VII.3 об открытом отображении из (1) вытекает, что

$$\text{множество} \ \ \Phi_t(B) \ \ \text{открыто при} \ \ 0 < t < \delta. \tag{6}$$

Убедимся, что из соотношений (4), (5) и (6) следует, что

$$\Phi_t(B) = B \quad \text{при} \ \ 0 < t < \delta. \tag{7}$$

Ввиду справедливости включения (4) нам достаточно показать, что множество $\Phi_t(B)$ не только открыто, но и (относительно) замкнуто в B, после чего равенство (7) окажется справедливым в силу связности B. Итак, пусть $\{y_n\}_{n \geqslant 1} \subset \Phi_t(B)$, $y_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y_0 \in B$. Выберем $x_n \in B$ таким образом, чтобы $y_n = \Phi_t(x_n)$ при $n \in \mathbb{N}$. Не умаляя общности можно считать, что последовательность $\{x_n\}_{n \geqslant 1}$ сходится (иначе её можно заменить сходящейся подпоследовательностью). Пусть $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$. Если $\|x_0\| = 1$, то $\|\Phi_t(x_n)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|\Phi_t(x_0)\| = \|x_0\| = 1$, что невозможно, так как $\|\Phi_t(x_n)\| = \|y_n\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|y_0\| < 1$. Поэтому $\|x_0\| < 1$. Следовательно, $x_0 \in B$ и

$$y_0 = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \Phi(x_n) = \Phi(x_0) \in \Phi(B),$$

что доказывает замкнутость $\Phi(B)$ в B, а вместе с тем и равенство (7). Как установлено в лемме, при малом t отображение Φ_t взаимно однозначно. Таким образом, это диффеоморфизм шара B на себя. Используя теорему о гладкой замене переменных в кратном интеграле и учитывая (1), мы получаем, что

$$\lambda_m(B) = \int_B J_{\Phi_t}(x)\,dx \quad \text{при достаточно малых } \ t > 0. \tag{8}$$

По лемме $J_{\Phi_t}(x)$ есть полином относительно t. Следовательно, правая часть равенства (8) также полином относительно t. Будучи постоянным при малых t, этот полином есть тождественная константа. Поэтому равенство (8) справедливо не только при малых, но и при всех $t \in [0,1]$, в частности при $t = 1$. Поскольку $\Phi_1 \equiv \Phi$, из (8) вытекает, что

$$\lambda_m(B) = \int_B J_\Phi(x)\,dx.$$

Но это невозможно, так как в силу (3) правая часть последнего равенства равна нулю.

Таким образом, предположение о существовании гладкой ретракции ведёт к противоречию. ►

6.3. Покажем теперь, как из теоремы о ретракции может быть выведена теорема Брауэра. Напомним, что *неподвижной точкой отображения* $f\colon X \to X$ называется такая точка $x \in X$, что $f(x) = x$.

Теорема (Брауэр*)). *Всякое непрерывное отображение шара $\overline{B}$ в себя имеет неподвижную точку.*

Доказательство. Сначала докажем, что теорема верна для гладких отображений. Будем рассуждать от противного. Допустим, что утверждение теоремы неверно, и пусть $f\colon \overline{B} \to \overline{B}$ — гладкое отображение, не имеющее неподвижной точки. Построим с помощью f гладкую ретракцию Φ шара на границу.

Так как $y = f(x) \neq x$ при $x \in \overline{B}$, то эта пара точек однозначно определяет луч $\ell_x = \{y + t(x-y) \mid t \geqslant 0\}$ с началом в точке y, который проходит через x. Поскольку обе определяющие луч точки лежат в $\overline{B}$, открытый луч $\ell_x \setminus \{y\}$ пересекается со сферой S^{m-1} в единственной точке (сделайте рисунок!). Эту точку пересечения мы и примем за $\Phi(x)$. Аналитически это означает, что квадратное относительно t уравнение $\|y+t(x-y)\|^2 = 1$ имеет единственный положительный корень. Оно может быть переписано в виде

$$\|x-y\|^2 t^2 + 2\langle y, x-y\rangle\, t + \|y\|^2 - 1 = 0,$$

и его (единственный) положительный корень, который мы обозначим t^*, вычисляется по формуле

$$t^* = \frac{-\langle y, x-y\rangle + \sqrt{\langle y, x-y\rangle^2 + \|x-y\|^2(1-\|y\|^2)}}{\|x-y\|^2} \tag{9}$$

(заметим, что если $\|y\| = 1$, то $\langle y, x-y\rangle = \langle y, x\rangle - 1 < 0$, так как в противном случае $\langle y, x\rangle = 1$, что возможно только если векторы x и y совпадают). Отображение Φ может быть аналитически задано формулой

$$\Phi(x) = y + t^*(x-y) \quad \text{при } \ x \in \overline{B}, \tag{10}$$

*) Лёйтзен Эгберт Ян **Брауэр** (Brouwer), 1881–1966, — нидерландский математик.

где число t^* определяется равенством (9). Так как $\|y\| \leqslant 1$ и $x \neq y$ при $x \in \overline{B}$, то знаменатель и подкоренное выражение в (9) не обращаются в нуль не только в шаре $\overline{B}$, но и в некоторой его окрестности, и поэтому правая часть равенства (10) определена и сохраняет гладкость в окрестности $\overline{B}$. Таким образом, отображение Φ гладкое на $\overline{B}$. По определению t^* мы получаем, что $\|\Phi(x)\| = 1$ при всех $x \in \overline{B}$. Кроме того, если $\|x\| = 1$, то точка пересечения открытого луча $\ell_x \setminus \{y\}$ со сферой совпадает с x (что, как нетрудно проверить, равносильно равенству $t^* = 1$). Следовательно, на сфере отображение Φ совпадает с тождественным. Таким образом, оно является гладкой ретракцией, что противоречит предыдущей теореме.

Докажем теперь, что теорема верна и для любого непрерывного отображения. Будем снова рассуждать от противного. Пусть $f\colon \overline{B} \to \overline{B}$ — непрерывное отображение, не имеющее неподвижных точек. Тогда разность $x - f(x)$ не обращается в нуль на $\overline{B}$, и поэтому существует такое положительное число δ, что

$$\|x - f(x)\| > 2\delta$$

при всех $x \in \overline{B}$. Построим гладкое отображение шара в себя, также не имеющее неподвижной точки.

Пусть $f_1, \ldots, f_m$ — координатные функции отображения f. По теореме Вейерштрасса (см. п. VII.6.4) найдутся такие полиномы $P_1, \ldots, P_m$, что

$$|f_k(x) - P_k(x)| < \frac{\delta}{m} \quad \text{при всех} \quad x \in \overline{B} \quad \text{и} \quad k,\ 1 \leqslant k \leqslant m.$$

Рассмотрим отображение $F\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ с координатными функциями $P_1, \ldots, P_m$. Ясно, что при всех $x \in \overline{B}$

$$\|f(x) - F(x)\|^2 = \sum_{k=1}^{m} |f_k(x) - P_k(x)|^2 < \delta^2. \tag{11}$$

Образ шара $\overline{B}$ при отображении F может не содержаться в этом шаре. Поэтому мы рассмотрим отображение $\varphi = (1+\delta)^{-1}F$. Очевидно, что $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$. Убедимся, что $\varphi(\overline{B}) \subset B$. В самом деле, при $x \in \overline{B}$

$$\|\varphi(x)\| = \frac{1}{1+\delta}\,\|F(x)\| \leqslant \frac{1}{1+\delta}\big(\|f(x)\| + \|F(x) - f(x)\|\big) < \frac{1}{1+\delta}\,(1+\delta) = 1.$$

Проверим, что отображение φ не имеет неподвижной точки в $\overline{B}$. Действительно, в силу (10) и (11) при $x \in \overline{B}$ мы получаем

$$\|x - \varphi(x)\| \geqslant \|x - f(x)\| - \|f(x) - \varphi(x)\| \geqslant 2\delta - \left\|\frac{1+\delta}{1+\delta}f(x) - \frac{1}{1+\delta}F(x)\right\| \geqslant$$
$$\geqslant 2\delta - \frac{\delta}{1+\delta}\,\|f(x)\| - \frac{1}{1+\delta}\|f(x) - F(x)\| \geqslant 2\delta - \frac{2\delta}{1+\delta} > 0.$$

Таким образом, если есть непрерывное отображение шара в себя, не имеющее неподвижной точки, то есть и гладкое отображение с тем же свойством, что, как мы уже доказали, невозможно. ►

По поводу другого доказательства теоремы см. упр. 2.

Следствие. *Пусть $K \subset \mathbb{R}^m$ — компактное множество, гомеоморфное шару $\overline{B}$. Всякое непрерывное отображение множества K в себя имеет неподвижную точку.*

Доказательство этого следствия мы предоставляем читателю.

Теорема о ретракции в полном объёме, т. е. для отображений, удовлетворяющих лишь условию непрерывности, может быть получена из гладкого случая с помощью соображений аппроксимации, как это было сделано при доказательстве теоремы Брауэра. Однако теорему о ретракции легко вывести из теоремы Брауэра непосредственно. В самом деле, если $f\colon \overline{B} \to S^{m-1}$ — ретракция шара $\overline{B}$ на его границу, то отображение $-f$ не может иметь неподвижных точек, что противоречит теореме Брауэра.

6.4. Обратимся теперь к вопросу о векторных полях на сфере. Термин *векторное поле* мы будем понимать как синоним термина "непрерывное отображение в $\mathbb{R}^m$". Точнее, под векторным полем на множестве $X \subset \mathbb{R}^m$ мы понимаем непрерывное отображение $V\colon X \to \mathbb{R}^m$. Векторное поле называется нормированным, если $\|V(x)\| = 1$ при всех $x \in X$. Мы говорим, что векторное поле V на сфере S^{m-1} состоит из касательных векторов, если $V(x) \perp x$ (т. е. $\langle x, V(x)\rangle = 0$) для $x \in S^{m-1}$. Такое поле называется касательным векторным полем.

Пример нормированного касательного векторного поля на сфере $S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$ можно получить следующим образом. Положим

$$V(x) = (x_2, -x_1, \dots, x_{2n}, -x_{2n-1}), \quad \text{при} \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, x_{2n}) \in S^{2n-1}.$$

Ясно, что $V(x) \perp x$, так как

$$\langle x, V(x)\rangle = x_1x_2 - x_2x_1 + \ldots + x_{2n-1}x_{2n} - x_{2n}x_{2n-1} = 0.$$

Однако пример касательного поля, состоящего из ненулевых векторов, уже невозможен, если рассматривать чётномерную сферу. Это утверждение называют также теоремой "о еже" или "о волосатом шаре": покрытый волосами трёхмерный шар невозможно "причесать" так, чтобы волосы лежали "гладко", без "вихров". Точная формулировка такова.

Теорема. *Пусть $m > 1$ нечётное число. На сфере $S^{m-1} \subset \mathbb{R}^m$ не существует векторного поля, состоящего из ненулевых касательных векторов.*

Доказательство проведём от противного, рассматривая сначала гладкий случай. Допустим, что V — гладкое векторное поле на S^{m-1}, состоящее из ненулевых касательных векторов (гладкость на сфере означает, как мы условились в п. 6.1, что V есть сужение некоторого отображения, гладкого в окрестности сферы). Не умаляя общности будем считать поле V нормированным (в противном случае его можно заменить полем $\frac{1}{\|V(x)\|}V(x)$). Продолжим V на $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ следующим образом: $\Psi(x) = \|x\|V\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$. Очевидно, что Ψ — гладкое отображение.

Рассмотрим отображение $\Phi_t(x) = x + t\Psi(x)$, где t некоторое положительное число. Так как $x \perp \Psi(x)$ и $\|\Psi(x)\| = \|x\|$, то Φ_t отображает сферу радиуса r в сферу радиуса $r\sqrt{1+t^2}$. Зафиксируем теперь какой-нибудь сферический слой $G_0 = \{x \in \mathbb{R}^m \mid a < \|x\| < b\}$, где $0 < a < b$. Ясно, что его образ $\Phi_t(G_0)$ содержится в сферическом слое

$G_t = \{x \in \mathbb{R}^m \mid a\sqrt{1+t^2} < \|x\| < b\sqrt{1+t^2}\}$. Убедимся, что при достаточно малых $t > 0$ это будет отображение "на", т. е. что

$$\Phi_t(G_0) = G_t. \tag{12}$$

Заметим, что в силу леммы 6.1 (при $K = \overline{G}_0$) и теоремы о гладкости обратного отображения Φ_t есть диффеоморфизм при достаточно малых $t > 0$.

Для доказательства равенства (12) нам достаточно показать, что при $a < r < b$ образ сферы $S(r)$ радиуса r совпадает со сферой $\widetilde{S}(r) = S\bigl(r\sqrt{1+t^2}\bigr)$. Как мы уже отметили выше, $\Phi_t(S(r)) \subset \widetilde{S}(r)$. Очевидно, множество $\Phi_t(S(r))$ замкнуто. Вместе с тем оно относительно открыто в $\widetilde{S}(r)$. Это вытекает из равенства

$$\Phi_t(S(r)) = \Phi_t\bigl(S(r) \cap G_0\bigr) = \widetilde{S}(r) \cap \Phi_t(G_0),$$

поскольку множество $\Phi_t(G_0)$ открыто. В силу связности сферы $\widetilde{S}(r)$ она должна совпадать со своим (очевидно, непустым) открыто-замкнутым подмножеством, и поэтому $\Phi_t(S(r)) = \widetilde{S}(r)$. Ввиду произвольности r это доказывает равенство (12).

Пользуясь равенством (12), вычислим теперь двумя способами объём множества G_t. С одной стороны, очевидно,

$$\lambda_m(G_t) = \lambda_m\left(B\left(b\sqrt{1+t^2}\right) \setminus B\left(a\sqrt{1+t^2}\right)\right) = \alpha_m(b^m - a^m)(1+t^2)^{\frac{m}{2}}. \tag{13}$$

С другой стороны, считая $t > 0$ достаточно малым и пользуясь формулой для вычисления образа меры при диффеоморфизме, мы получаем

$$\lambda_m(G_t) = \int_{G_0} J_{\Phi_t}(x)\,dx.$$

По лемме 6.1 правая часть этого равенства есть полином относительно t. Вместе с (13) это даёт нам, что функция $(1+t^2)^{\frac{m}{2}}$ при достаточно малых положительных t совпадает с полиномом, что невозможно при нечётном m, поскольку тогда бесконечно много производных этой функции отлично от нуля.

Итак, мы доказали, что на чётномерной сфере не может быть гладких невырождающихся касательных полей. Рассмотрим теперь случай негладких полей, который (как и при доказательстве теоремы Брауэра) исчерпывается с помощью аппроксимации.

Пусть V — векторное поле на сфере S^{m-1}, состоящее из ненулевых касательных векторов. Как и в гладком случае, мы можем считать его нормированным. Построим с его помощью гладкое касательное поле, также состоящее из ненулевых векторов, что приведёт нас к противоречию с уже доказанной частью теоремы.

Пусть $f_1, \ldots, f_m$ — координатные функции поля V. По теореме Вейерштрасса (см. п. VII.6.4) найдутся такие полиномы $P_1, \ldots, P_m$, что

$$|f_k(x) - P_k(x)| < \frac{1}{2m} \quad \text{для всех } x \in S^{m-1} \text{ и } k = 1, \ldots, m.$$

Рассмотрим отображение $F\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ с координатными функциями $P_1, \ldots, P_m$. Ясно, что при всех $x \in S^{m-1}$

$$\|V(x) - F(x)\|^2 = \sum_{k=1}^{m} |f_k(x) - P_k(x)|^2 < \frac{1}{4}.$$

Векторы $F(x)$ не будут, вообще говоря, касательными к сфере, однако, будучи близкими к $V(x)$, они содержат большую "касательную составляющую". Это позволяет подправить их так, чтобы получить невырождающееся гладкое поле, состоящее из касательных векторов.

Положим $W(x) = F(x) - \langle x, F(x)\rangle\, x$ при $x \in S^{m-1}$, вычитая из вектора $F(x)$ его радиальную составляющую. Ясно, что W — гладкое векторное поле. Кроме того, поскольку $\langle x, V(x)\rangle = 0$,

$$\|W(x)\| \geqslant \|F(x)\| - |\langle x, F(x)\rangle| \geqslant \|V(x)\| - \|V(x) - F(x)\| - |\langle x, V(x) - F(x)\rangle| \geqslant \\ \geqslant 1 - 2\|V(x) - F(x)\| > 0.$$

Убедимся, наконец, что поле W состоит из касательных векторов. В самом деле,

$$\langle x, W(x)\rangle = \big\langle x, F(x) - \langle x, F(x)\rangle x\big\rangle = \langle x, F(x)\rangle - \langle x, F(x)\rangle\|x\|^2 = 0$$

при любом $x \in S^{m-1}$. Итак, гладкое поле W состоит из ненулевых касательных векторов, что, как мы уже доказали, невозможно. ►

УПРАЖНЕНИЯ

1) Завершите доказательство теоремы о ретракции в общем случае, не опираясь на теорему Брауэра. Указание. Если Φ произвольная ретракция, то разность $\Phi(x) - x$ мала в некоторой окрестности граничной сферы. Поэтому её можно с точностью до $\frac{1}{2}$ аппроксимировать в шаре $\overline{B}$ гладким отображением Ψ, обращающимся на сфере в нуль. После этого можно получить гладкую ретракцию Φ_1, положив $\Phi_1(x) = \frac{x+\Psi(x)}{\|x+\Psi(x)\|}$, что ведёт к противоречию.

2) Получите ещё одно доказательство теоремы Брауэра, проверив, что если непрерывное отображение $f\colon \overline{B} \to \overline{B}$ не имеет неподвижной точки, то отображение $\Phi(x) = \frac{g(x)}{\|g(x)\|}$, где

$$g(x) = x - \frac{1 - \|x\|^2}{1 - \langle x, f(x)\rangle} f(x) \qquad (x \in \overline{B}),$$

есть ретракция шара на его границу.

3) Докажите следующее усиление теоремы Брауэра: если отображение $\Phi\colon \overline{B} \to \mathbb{R}^m$ непрерывно и $\Phi(S^{m-1}) \subset \overline{B}$, то оно имеет неподвижную точку. Указание. Убедитесь, что отображение $x \mapsto \Phi(x)/\max\{1, \|\Phi(x)\|\}$ имеет те же неподвижные точки, что и Φ.

§ 7. Некоторые геометрические приложения (продолжение)

7.1. Здесь мы обсудим интересную геометрическую задачу, связанную с определением меры множества по мерам его сечений. Пусть в пространстве $\mathbb{R}^m$ даны измеримые множества A и B. Можно ли, не вычисляя их мер (объёмов), выяснить, какая из них больше, зная лишь меры (площади) некоторых их пересечений с подпространствами меньшей размерности? Из принципа Кавальери следует, что $\lambda_m(A) < \lambda_m(B)$, если $\lambda_{m-1}(A \cap H) < \lambda_{m-1}(B \cap H)$ для всех плоскостей H, перпендикулярных некоторому фиксированному направлению.

Оказывается, что положение существенно изменяется, если вместо параллельных друг другу плоскостей мы будем рассматривать плоскости, проходящие через заданную точку.

В 1956 году Буземаном*) и Петти**) был задан следующий вопрос. Пусть множества A и B выпуклы и центрально симметричны относительно начала координат. Можно ли утверждать, что $\lambda_m(A) < \lambda_m(B)$, если $\lambda_{m-1}(A \cap H) < \lambda_{m-1}(B \cap H)$ для любой плоскости H, проходящей через центр симметрии? Ограничения на геометрические свойства множеств (выпуклость и симметричность), как нетрудно убедиться, необходимы, поскольку без них ответ на заданный вопрос отрицателен (см. упр. 1).

Вопрос Буземана–Петти, утвердительный ответ на который очевиден в двумерном случае (достаточно воспользоваться полярными координатами), оказался совсем не простым в пространствах большей размерности. Прошло почти двадцать лет, пока в 1975 году был установлен неожиданный факт: для больших m ответ отрицателен. Ещё через 10 лет Болл***) показал, что если размерность достаточно велика (точнее, $m \geqslant 10$), то контрпримерами служат куб и шар.

Следуя [NP], мы докажем красивый результат, принадлежащий Боллу: наибольшее (по площади) сечение куба плоскостью получается, если она проходит через диагональ двумерной грани перпендикулярно этой грани. Точнее, площадь любого сечения куба $Q = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^m$ плоскостью не больше $\sqrt{2}$, причём равенство возможно лишь для плоскостей вида $x_k = \pm x_j$, $k \neq j$.

Зная оценку площади сечений куба, легко получить отрицательный ответ на вопрос Буземана–Петти, если размерность m велика. Достаточно сравнить единичный куб Q и шар $B(r_m)$ в $\mathbb{R}^m$, имеющий единичную меру Лебега. Действительно, так как $1 = \lambda_m\big(B(r_m)\big) = \alpha_m\, r_m^m$ (как обычно, α_m — объём единичного шара в $\mathbb{R}^m$), то $r_m = 1/\sqrt[m]{\alpha_m}$. Следовательно, мера s_m центрального сечения шара $B(r_m)$ равна

$$s_m = \alpha_{m-1}\, r_m^{m-1} = \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m^{1-\frac{1}{m}}}.$$

Учитывая равенство $\alpha_m = \pi^{\frac{m}{2}}/\Gamma\big(1+\frac{m}{2}\big)$ (см. п. V.4.2), мы получаем с помощью формулы Стирлинга, что $s_m \to \sqrt{e}$. Поэтому $s_m > \sqrt{2}$, если размерность m достаточно велика. Таким образом, мы приходим к парадоксальному результату: при больших m площадь центральных сечений рассматриваемого шара больше площади любого сечения единичного куба, но их объёмы одинаковы.

Убедимся, что $s_m > \sqrt{2}$ при $m \geqslant 10$. Прямые вычисления показывают, что

$$s_{10} = \frac{(120)^{\frac{9}{10}}}{\frac{945}{32}\sqrt{\pi}} = 1{,}420\ldots > \sqrt{2} \quad \text{и} \quad s_{11} = \frac{1}{120}\Big(\frac{10395}{64}\sqrt{\pi}\Big)^{\frac{10}{11}} = 1{,}433\ldots > \sqrt{2}.$$

Поэтому достаточно проверить, что при $m > 10$ справедливо неравенство $s_{m-2} < s_m$. Так как

$$s_m = \frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m^{\frac{m-1}{m}}} = \frac{\Gamma\big(\frac{m+2}{2}\big)^{\frac{m-1}{m}}}{\Gamma\big(\frac{m+1}{2}\big)} = s_{m-2}\frac{(2m^{m-3})^{\frac{1}{m-2}}}{m-1}\,\Gamma\Big(\frac{m+2}{2}\Big)^{\frac{2}{m(m-2)}},$$

то это равносильно неравенству

$$\Gamma\Big(\frac{m+2}{2}\Big) > \frac{(m-1)^{\frac{m(m-2)}{2}}}{(2m^{m-3})^{\frac{m}{2}}} = \frac{m^{\frac{m}{2}}}{2^{\frac{m}{2}}}\left(\Big(1-\frac{1}{m}\Big)^m\right)^{\frac{m-2}{2}}.$$

*) Герберт **Буземан** (Busemann), 1905–1994, — американский математик.

) Клинтон **Петти (Petty), род. в 1923 г., — американский математик.

***) Кейт Мартин **Болл** (Ball), род. 1960, — английский математик.

Учитывая, что $1-\frac{1}{m}<e^{-\frac{1}{m}}$, нам достаточно показать, что

$$\Gamma\Big(\frac{m+2}{2}\Big)\geqslant e\Big(\frac{m}{2e}\Big)^{\frac{m}{2}}.$$

Это сразу следует из формулы Стирлинга (см. равенство ($8''$) п. VII.2.6), но может быть получено и с помощью индукции (с индукционным переходом от m к $m+2$), что мы оставляем читателю.

Отметим, что, как теперь известно, утвердительный ответ на вопрос Буземана–Петти справедлив лишь при $m\leqslant 4$. Более подробную историю решения проблемы Буземана–Петти можно найти в [Ко].

7.2. Перейдём к оценке площади сечения куба $Q=[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^m$. Чтобы оценить эту площадь сверху, сначала найдём для неё интегральное представление. Хотя сечения, наибольшие по площади, естественно разыскивать среди проходящих через центр куба, нам потребуются не только они.

Объём множества A, $A\subset\mathbb{R}^m$, можно выразить через площади его сечений

$$A(\omega,r)=\{x\in A\mid\langle x,\omega\rangle=r\}\qquad(r\in\mathbb{R}^m)$$

плоскостями, перпендикулярными вектору $\omega\neq 0$. Действительно, по принципу Кавальери выполняется равенство

$$\lambda_m(A)=\int_{\mathbb{R}}\lambda_{m-1}(A(\omega,r))\,dr,\qquad\text{если}\quad\|\omega\|=1.$$

Докажем, что

$$\lambda_{m-1}\left(Q(\omega,r)\right)=\frac{2}{\pi}\|\omega\|\int_0^\infty\cos(2rt)\prod_{j=1}^m\frac{\sin\omega_j t}{\omega_j t}\,dt\tag{1}$$

(если $\omega_j=0$, то дробь $\frac{\sin\omega_j t}{\omega_j t}$ следует заменить единицей).

Для вектора ω, пропорционального какому-то вектору канонического базиса, равенство (1) выполнено при всех $r\neq\pm\frac{1}{2}\|\omega\|$. Это сразу следует из формулы $\int_0^\infty\frac{\sin ct}{t}\,dt=$ $=\frac{\pi}{2}\operatorname{sign}c$ (см. пример 2 п. VII.1.6). Легко видеть, что она же даёт требуемый результат и в двумерном случае. Поэтому далее будем считать, что $m>2$ и что среди координат $\omega_1,\dots,\omega_m$ вектора ω по крайней мере две отличны от нуля. Тогда (1) справедливо для всех r. Мы дадим два вывода этой формулы. Первый — хотя и совершенно элементарный, но технически более сложный — основан на индукции по размерности. Второй, менее громоздкий, предполагает знакомство с преобразованием Фурье (см. § X.5).

Заметим, что формулу (1) достаточно доказать для какого-нибудь вектора, пропорционального ω, поскольку $Q(a\omega,r)=Q(\omega,\frac{r}{a})$.

Предположив, что формула (1) справедлива для сечений куба размерности $m-1$, докажем её для сечений m-мерного куба Q. Для этого при $\omega_m\neq 0$ рассмотрим проекцию P сечения $Q(\omega,r)$ на плоскость $x_m=0$. Считая ω_m положительным, мы видим, что

$$\lambda_{m-1}\big(Q(\omega,r)\big)=\frac{\|\omega\|}{\omega_m}\lambda_{m-1}(P).$$

Для вычисления $\lambda_{m-1}(P)$ положим $\widetilde{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_{m-1})$. Это ненулевой вектор, поскольку по крайней мере две координаты вектора ω отличны от нуля. Как видно на рис. 10, непустые сечения (в $\mathbb{R}^{m-1}$) проекции P плоскостями, перпендикулярными $\widetilde{\omega}$, совпадают с соответствующими сечениями куба $\widetilde{Q} = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^{m-1}$.

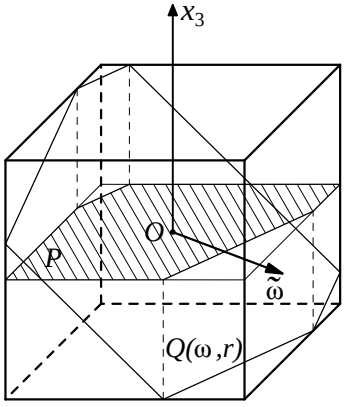


Рис. 10.

Действительно, так как

$$P = \left\{\widetilde{x} \in \widetilde{Q} \mid \exists x_m \in \left[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right] : \langle \widetilde{\omega}, \widetilde{x}\rangle + \omega_m x_m = r\right\} =$$
$$= \left\{\widetilde{x} \in \widetilde{Q} \mid \langle \widetilde{\omega}, \widetilde{x}\rangle \in \left[r - \tfrac{1}{2}\omega_m, r + \tfrac{1}{2}\omega_m\right]\right\},$$

то сечение $P(\widetilde{\omega}, u)$ совпадает с $\widetilde{Q}(\widetilde{\omega}, u)$ при $u \in \left[r - \frac{\omega_m}{2}, r + \frac{\omega_m}{2}\right]$, а для остальных u оно пусто.

Заменяя в случае необходимости вектор ω пропорциональным, будем считать, что $\|\widetilde{\omega}\| = 1$. Тогда, как уже было отмечено, согласно принципу Кавальери справедливо равенство:

$$\lambda_{m-1}(P) = \int_{\mathbb{R}} \lambda_{m-2}\big(P(\widetilde{\omega}, u)\big)\, du = \int_{r-\frac{\omega_m}{2}}^{r+\frac{\omega_m}{2}} \lambda_{m-2}\big(\widetilde{Q}(\widetilde{\omega}, u)\big)\, du.$$

По индукционному предположению

$$\lambda_{m-2}\big(\widetilde{Q}(\widetilde{\omega}, u)\big) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos(2ut) \prod_{j=1}^{m-1} \frac{\sin \omega_j t}{\omega_j t}\, dt.$$

Поэтому

$$\lambda_{m-1}\big(Q(\omega, r)\big) = \frac{\|\omega\|}{\omega_m}\lambda_{m-1}(P) = \frac{\|\omega\|}{\omega_m}\int_{r-\frac{\omega_m}{2}}^{r+\frac{\omega_m}{2}} \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos(2ut) \prod_{j=1}^{m-1} \frac{\sin \omega_j t}{\omega_j t}\, dt\, du =$$
$$= \frac{2}{\pi}\frac{\|\omega\|}{\omega_m}\int_0^\infty \left(\int_{r-\frac{\omega_m}{2}}^{r+\frac{\omega_m}{2}} \cos(2ut)\, du\right) \prod_{j=1}^{m-1} \frac{\sin \omega_j t}{\omega_j t}\, dt =$$
$$= \frac{2}{\pi}\|\omega\| \int_0^\infty \cos(2rt) \frac{\sin \omega_m t}{\omega_m t} \prod_{j=1}^{m-1} \frac{\sin \omega_j t}{\omega_j t}\, dt,$$

что завершает индукционный переход.

Переходя к выводу формулы (1), основанному на преобразовании Фурье, зафиксируем вектор ω единичной длины (у которого по крайней мере две координаты отличны от нуля) и найдём преобразование Фурье функции

$$r \mapsto s(r) = \lambda_{m-1}\big(Q(\omega, r)\big) \quad (r \in \mathbb{R})\,.$$

Для этого вычислим двумя способами значение в точке $t\omega$ преобразования Фурье $\widehat{\chi}$ характеристической функции χ куба Q. По определению

$$\widehat{\chi}(t\omega) = \int_Q e^{-2\pi i\langle t\omega, x\rangle}\,dx = \prod_{j=1}^m \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{-2\pi i t\omega_j x_j}\,dx_j = \prod_{j=1}^m \frac{\sin(\pi\omega_j t)}{\pi\omega_j t}\,.$$

Рассмотрим теперь ортогональное преобразование L в $\mathbb{R}^m$, переводящее первый вектор канонического базиса в вектор ω. С помощью теоремы Фубини мы получаем

$$\widehat{\chi}(t\omega) = \int_{\mathbb{R}^m} \chi(x)\, e^{-2\pi i t\langle \omega, x\rangle}\,dx = \int_{\mathbb{R}^m} \chi(Ly)\, e^{-2\pi i t y_1}\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} s(y_1)\, e^{-2\pi i t y_1}\,dy_1 = \widehat{s}(t),$$

где $\widehat{s}$ — преобразование Фурье функции s. Сравнивая два полученных равенства, мы видим, что

$$\widehat{s}(t) = \prod_{j=1}^m \frac{\sin(\pi\omega_j t)}{\pi\omega_j t}\,.$$

Так как функция $\widehat{s}$ суммируема на $\mathbb{R}$, то $s(r)$ находится с помощью формулы обращения (см. теорему X.5.4):

$$s(r) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{s}(t)\, e^{2\pi i r t}\,dt = 2\int_0^{\infty} \cos 2\pi r t \prod_{j=1}^m \frac{\sin(\pi\omega_j t)}{\pi\omega_j t}\,dt\,.$$

Остаётся сделать замену $\pi t \mapsto t$.

7.3. При доказательстве неравенства $\lambda_{m-1}\big(Q(\omega, r)\big) \leqslant \sqrt{2}$ будем, не умаляя общности, предполагать, что $\|\omega\| = 1$ и все координаты вектора ω положительны. Если хотя бы одна из них, например, ω_m велика: $\omega_m \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$, то неравенство $\lambda_{m-1}\big(Q(\omega, r)\big) \leqslant \sqrt{2}$ очевидно (так как мера проекции сечения на плоскость $\omega_m = 0$ не превосходит единицы). Далее мы будем считать, что $0 < \omega_j < \frac{1}{\sqrt{2}}$ для всех $j = 1, \ldots, m$. Из равенства (1) с помощью неравенства Гёльдера (см. следствие 2 п. IV.4.5) с показателями $\frac{1}{\omega_j^2}$ получаем:

$$\lambda_{m-1}\big(Q(\omega, r)\big) \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \prod_{j=1}^m \left|\frac{\sin\omega_j t}{\omega_j t}\right| dt \leqslant \frac{2}{\pi}\prod_{j=1}^m \left(\int_0^{\infty} \left|\frac{\sin\omega_j t}{\omega_j t}\right|^{\frac{1}{\omega_j^2}} dt\right)^{\omega_j^2} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\prod_{j=1}^m \left(\frac{1}{\omega_j}\int_0^{\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right|^{\frac{1}{\omega_j^2}} dt\right)^{\omega_j^2}.$$

Теперь воспользуемся интегральным неравенством Болла (его доказательство отложим до следующего пункта)

$$\int_0^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right|^p < \frac{\pi}{\sqrt{2p}} \qquad \text{при} \quad p > 2.$$

Придавая p значения $\frac{1}{\omega_j^2} > 2$ $(j = 1, \dots m)$ и учитывая нормировку $\omega_1^2 + \ldots + \omega_n^2 = 1$, мы видим, что

$$\lambda_{m-1}\big(Q(\omega, r)\big) < \frac{2}{\pi}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^{\omega_j^2} = \sqrt{2},$$

что и требовалось.

Анализ проведённого доказательства показывает, что площадь сечения равна $\sqrt{2}$ лишь в случае, когда все координаты вектора ω, $\|\omega\| = 1$, равны либо нулю, либо $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Поэтому экстремальными являются только сечения плоскостями вида $x_j = \pm x_k$ $(k \neq j)$.

Заметим попутно, что равенство (1) даёт следующее выражение для площади S_m центрального сечения единичного куба плоскостью, ортогональной его главной диагонали (т. е. плоскостью $x_1 + \ldots + x_m = 0$):

$$S_m = \frac{2}{\pi}\sqrt{m}\int_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t}\right)^m dt.$$

Из интегрального неравенства Болла вытекает, что эти площади не максимальны при $m > 2$. То, что они не максимальны при достаточно больших m, следует и из асимптотической формулы Лапласа (см. пример 3 в п. VII.3.3), поскольку согласно ей $S_m \to$ $\to \sqrt{\frac{6}{\pi}} < \sqrt{2}$.

7.4. Несмотря на простоту формулировки неравенства Болла, его доказательство технически довольно сложно. Мы выведем его из интегрального неравенства, связанного с убывающими функциями распределения. Оно представляет и самостоятельный интерес.

Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой и f — неотрицательная измеримая функция почти везде конечная на X. Интеграл $I_p(f) = \int_X f^p\,d\mu$ $(0 < p < +\infty)$ содержит большую информацию о функции f и используется в различных задачах. Часто при этом бывает важно сравнивать значения этих интегралов при различных p. В случае нормированной меры (т. е. при $\mu(X) = 1$) поведение $I_p(f)$ достаточно просто: как следует из неравенства Гёльдера (см. п. IV.4.5), величины $I_p^{1/p}(f)$ растут вместе с p. Труднее сравнивать их рост для двух различных функций. В частности, интересен такой вопрос: при каких условиях неравенство $I_p(g) \leqslant I_p(f)$ справедливо при всех $p > q$, если оно справедливо "в начальной точке", т. е. при $p = q$? Ответ на него даёт следующее

Предложение. *Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой и измеримые неотрицательные почти везде конечные на X функции f, g имеют конечные убывающие функции распределения F, G:*

$$F(t) = \mu\big(X(f > t)\big), \quad G(t) = \mu\big(X(g > t)\big) \qquad (t > 0).$$

Если в некоторой точке $t_0 > 0$ разность $F - G$ меняет знак с "$-$" на "$+$" (т. е. $F(t) \leqslant G(t)$ при $t \in (0, t_0)$ и $F(t) \geqslant G(t)$ при $t > t_0$), то при $p > q > 0$

$$\text{из неравенства } \int_X g^q d\mu \leqslant \int_X f^q d\mu \text{ следует неравенство } \int_X g^p d\mu \leqslant \int_X f^p d\mu.$$

Последнее неравенство обращается в равенство лишь в двух тривиальных случаях: $F \equiv G$ или $\int_X g^p d\mu = \int_X f^p d\mu = +\infty$.

Доказательство. Считая, что $\int_X f^p d\mu < +\infty$ (иначе всё очевидно), положим

$$\Delta(p) = \int_X f^p\, d\mu - \int_X g^p\, d\mu.$$

По условию $\Delta(q) \geqslant 0$ и нужно доказать, что $\Delta(p) \geqslant 0$ при $p > q$. Для этого достаточно проверить, что для некоторых положительных чисел A и B разность $R = A\Delta(p) - B\Delta(q)$ неотрицательна. Как мы увидим, для наших целей в качестве A и B удобно взять производные в точке t_0 функций t^q и t^p соответственно.

Представим интегралы $\int_X f^p\, d\mu$ и $\int_X g^p\, d\mu$ с помощью функций распределения (см. предложение 4.3):

$$\Delta(p) = \int_X f^p\, d\mu - \int_X g^p\, d\mu = \int_0^\infty \big(F(t) - G(t)\big) p t^{p-1}\, dt.$$

Взяв $A = q t_0^{q-1}$ и $B = p t_0^{p-1}$, мы получаем:

$$R = \int_0^\infty \big(F(t) - G(t)\big)\big(q t_0^{q-1} p t^{p-1} - p t_0^{p-1} q t^{q-1}\big)\, dt.$$

Разность

$$pq t_0^{q-1} t^{p-1} - pq t_0^{p-1} t^{q-1} = pq (t_0 t)^{q-1} (t^{p-q} - t_0^{p-q})$$

имеет тот же знак, что и разность $F(t) - G(t)$. Поэтому под знаком последнего интеграла стоит неотрицательная функция и, следовательно, $R \geqslant 0$. При этом $R > 0$, если $F \not\equiv G$. ▶

Замечание. Как видно из приведённого доказательства, справедливо чуть более сильное утверждение: интеграл

$$I(p) = \int_0^\infty \big(F(t) - G(t)\big)\left(\frac{t}{t_0}\right)^{p-1} dt = \frac{1}{p t_0^{p-1}} \int_X \big(f^p - g^p\big)\, d\mu$$

не убывает.

7.5. Завершим параграф доказательством интегрального неравенства К. Болла

$$\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|^p < \frac{\pi}{\sqrt{2p}} \qquad \text{при} \quad p > 2.$$

При $p = 2$ оно обращается в равенство. Это легко получить интегрированием по частям в равенстве $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$ (см. пример 2 в п. VII.1.6). При $1 < p < 2$ знак в неравенстве Болла надо заменить на противоположный (см. упр. 2).

Запишем доказываемое неравенство в виде

$$\int_0^\infty g^p(x)\, dx < \int_0^\infty f^p(x)\, dx \quad (p > 2)\,,$$

где $g(x) = \left|\frac{\sin x}{x}\right|$ и $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2\pi}}$. Поскольку при $p = 2$ оно обращается в равенство, нам достаточно установить, что разность $F - G$ убывающих функций распределения в некоторой точке t_0 меняет знак с "$-$" на "$+$". Так как обе функции f и g не превосходят единицы, то $F(t) = G(t) = 0$ при $t \geqslant 1$. Поэтому всюду далее считаем, что $t \in (0,1)$. Очевидно, $F(t) = f^{-1}(t) = \sqrt{2\pi \ln \frac{1}{t}}$. Значения функции G вычисляются сложнее, и для их оценки нам потребуются величины $t_m = \max\limits_{(\pi m, \pi m + \pi)} g$, $m \in \mathbb{N}$. Ясно, что $\frac{1}{\pi(m+\frac{1}{2})} < t_m < \frac{1}{\pi m}$.

Пользуясь разложением синуса в бесконечное произведение (см. п. VII.2.5, формула (7)), получаем, что на промежутке $(0,1)$ функция g убывает и не превосходит $e^{-x^2/6}$:

$$g(x) = \prod_{k=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2}\Big) \leqslant \prod_{k=1}^{\infty} e^{-x^2/(\pi k)^2} = e^{-x^2/6}$$

(в конце использовано равенство $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, установленное нами в примере 2 п. IV.6.2). Поэтому для $t \in (t_1, 1)$ мы имеем

$$G(t) = \Big(g\,|_{(0,1)}\Big)^{-1}(t) \leqslant \sqrt{6 \ln \frac{1}{t}} < \sqrt{2\pi \ln \frac{1}{t}} = F(t)$$

и, следовательно, разность $F - G$ положительна на $(t_1, 1)$. Вместе с тем она меняет знак, так как

$$2\int_0^{\infty} t\big(F(t) - G(t)\big)dt = \int_0^{\infty} \big(f^2(x) - g^2(x)\big)dx = 0\,.$$

Чтобы показать, что перемена знака происходит лишь один раз, достаточно проверить, что $F - G$ возрастает на $(0, t_1)$. Для этого мы докажем, что $|G'(t)| > |F'(t)|$ при $t \in (0, t_1)$, $t \neq t_m$. Ясно, что функция G всюду непрерывна и дифференцируема в точках, отличных от t_m ($m \in \mathbb{N}$). При этом

$$|G'(t)| = -G'(t) = \sum_{\substack{x>0:\\ g(x)=t}} \frac{1}{|g'(x)|}\,.$$

Пусть $t \in (t_{m+1}, t_m)$. При таком t уравнение $g(x) = t$ имеет единственный корень на $(0, \pi)$ и по два корня на промежутках $(\pi k, \pi k + \pi)$ при $k = 1, \ldots, m$ (см. рис. 11).

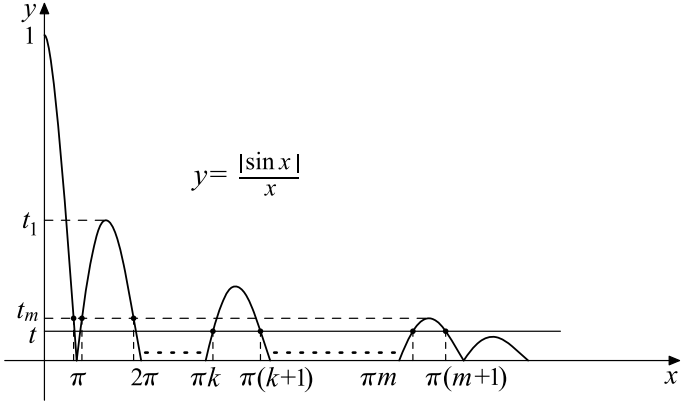


Рис. 11.

Оценим $|g'(x)|$ сверху в этих точках. Если $x \in (0, \pi)$, то

$$|g'(x)| = \frac{\sin x - x\cos x}{x^2} \leqslant \frac{1}{2}$$

(неравенство $\sin x - x\cos x \leqslant \frac{x^2}{2}$ легко проверяется дифференцированием). Если же $x \in (\pi k, \pi k + \pi)$ при $k \geqslant 1$, то

$$|g'(x)| = \frac{1}{x}\left|\cos x - \frac{\sin x}{x}\right| \leqslant \frac{1}{x}\left(1 + \frac{|\sin(x - \pi k)|}{\pi k}\right) \leqslant \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x - \pi k}{\pi k}\right) = \frac{1}{\pi k}.$$

Следовательно, для $t \in (t_{m+1}, t_m)$ имеем

$$|G'(t)| \geqslant 2 + 2\sum_{k=1}^{m} \pi k = 2 + \pi m(m+1) > \pi\left(m + \frac{3}{2}\right) > \frac{1}{t_{m+1}}.$$

Таким образом,

$$\left|\frac{G'(t)}{F'(t)}\right| = |G'(t)|\, t\sqrt{\frac{2}{\pi}\ln\frac{1}{t}} \geqslant \frac{1}{t_{m+1}}\sqrt{\frac{2}{\pi}t^2\ln\frac{1}{t}}.$$

Так как $t_1 < \frac{1}{\pi}$, то произведение $t^2 \ln\frac{1}{t}$ возрастает на $(0, t_1)$, и поэтому для $t > t_{m+1}$ мы получаем

$$\left|\frac{G'(t)}{F'(t)}\right| > \frac{1}{t_{m+1}}\sqrt{\frac{2}{\pi}\, t_{m+1}^2 \ln\frac{1}{t_{m+1}}} \geqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}\ln\frac{1}{t_2}} > \sqrt{\frac{2}{\pi}\ln 2\pi}.$$

Осталось заметить, что правая часть этого неравенства больше единицы, поскольку $\ln 4x > x$ на $[1, 2]$ в силу вогнутости логарифма.

УПРАЖНЕНИЯ

1) Проверьте, что сферический слой может иметь сколь угодно большой объём, в то время как площадь его пересечения с любой плоскостью произвольно мала.

2) Докажите, что $\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right|^p > \frac{\pi}{\sqrt{2p}}$ при $0 < p < 2$. Указание. Воспользуйтесь замечанием 7.4.

Глава VII. ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

§ 1. Основные теоремы

Имея дело с функциями "двух переменных", т. е. с функциями, заданными на декартовом произведении двух множеств, читатель, вероятно, уже встречался с ситуацией, когда требовалось выяснить, можно ли ту или иную операцию по одной переменной (предельный переход, дифференцирование, интегрирование) производить независимо от операций относительно другой переменной. Иными словами, вопрос состоит в том, будут ли перестановочны операции, относящиеся к разным переменным. Говоря о дифференцировании, можно в связи с этим указать на теорему о равенстве смешанных производных, конечно, известную читателю. Возможно, читатель знаком и с теоремой о равенстве повторных пределов, где речь идет о перестановочности предельных переходов по разным переменным. Мы рассмотрим вопрос о перестановочности операций анализа в случае, когда одна из них есть интегрирование.

Наша цель в этом параграфе — изучить свойства "интеграла, зависящего от параметра", т. е. функции J, определяемой равенством

$$J(y) = \int_X f(x,y)\,d\mu(x) \qquad (y \in Y).$$

Здесь μ — мера, заданная на некоторой σ-алгебре подмножеств множества X, функция $x \mapsto f(x,y)$ суммируема на X при каждом $y \in Y$, а Y — подмножество метризуемого топологического пространства $\widetilde{Y}$. Если X — топологическое пространство, то мы всегда будем предполагать, что мера μ определена на всех борелевских множествах (и, следовательно, все функции, непрерывные на X, измеримы). Мы не исключаем случая, когда мера μ — считающая, поэтому получаемые далее результаты относятся, в частности, и к абсолютно сходящимся функциональным рядам.

Прежде всего нас интересуют непрерывность и (в случае, когда $Y \subset \mathbb{R}^m$) дифференцируемость функции J. По существу это вопрос о возможности переставлять операцию интегрирования по первой переменной с другими операциями анализа (переходом к пределу, дифференцированием) по второй переменной (см. теоремы пп. 1.2 и 1.5). С подобной ситуацией мы уже сталкивались в § IV.8, где речь шла о предельном переходе под знаком интеграла, а роль параметра играл номер функции. Эти результаты послужат нам основой в дальнейших рассуждениях.

Вместе с изучением задачи о дифференцировании естественно, конечно, поставить и вопрос об интегрировании по параметру. Нам, однако, нет необходимости здесь его касаться, поскольку он с большой полнотой уже решён в теореме Фубини.

1.1. В этом и следующем пункте мы по существу просто переформулируем три теоремы из § IV.8 для случая "непрерывного параметра". Во всех трёх утверждениях a — предельная точка*) множества Y в пространстве $\widetilde{Y}$ и $\varphi(x) = \lim\limits_{y\to a} f(x,y)$, где f и φ — функции (вообще говоря, комплекснозначные), заданные на $X\times Y$ и X соответственно. Укажем условия, гарантирующие справедливость соотношения

$$J(y) = \int_X f(x,y)\,d\mu(x) \underset{y\to a}{\longrightarrow} \int_X \varphi(x)\,d\mu(x), \tag{1}$$

то есть равенство

$$\lim_{y\to a}\int_X f(x,y)\,d\mu(x) = \int_X \left(\lim_{y\to a} f(x,y)\right)\,d\mu(x).$$

Теорема. *Если $\mu(X) < +\infty$, а сходимость $f(x,y) \underset{y\to a}{\longrightarrow} \varphi(x)$ равномерная относительно $x\in X$, то функция φ суммируема на X и справедливо равенство* (1).

Доказательство. Поскольку пространство $\widetilde{Y}$ метризуемо, мы можем рассуждать "на языке последовательностей". Надо проверить, что

$$J(y_n) = \int_X f(x,y_n)\,d\mu(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X \varphi(x)\,d\mu(x)$$

для любой сходящейся к точке a последовательности $\{y_n\}$, такой, что $y_n \in Y\setminus\{a\}$ при всех $n\in\mathbb{N}$. Этот факт, вместе с суммируемостью функции φ, немедленно следует из теоремы IV.8.1, все условия которой выполняются, если считать, что $f_n(x) = f(x,y_n)$. ▶

1.2. Для удобства дальнейших ссылок приведём модификации теорем Лебега IV.8.4 и следствия из теоремы Витали IV.8.7 на случай "непрерывного параметра".

Теорема 1. *Пусть $\varphi(x) = \lim\limits_{y\to a} f(x,y)$ при почти всех $x\in X$, причём существуют такая окрестность U точки a и такая функция $g\colon X\to\mathbb{R}$, что выполняется условие*

$$\left.\begin{array}{l} \text{а) при почти всех } x\in X \text{ и любом } y\in (Y\cap U)\setminus\{a\} \\ \quad\text{справедливо неравенство } |f(x,y)|\leqslant g(x), \\ \text{б) функция } g \text{ суммируема на } X. \end{array}\right\} \tag{L_{loc}}$$

Тогда функция φ суммируема на X и справедливо равенство (1).

Условие (L_{loc}) можно ослабить, потребовав, чтобы неравенство $|f(x,y)|\leqslant g(x)$ при каждом $y\in Y$ выполнялось лишь на множестве полной меры, зависящем, возможно, от y. При таком обобщении условия (L_{loc}) доказательство теоремы остаётся справедливым. Однако в дальнейшем (см. теоремы 1.5, 1.7) нам потребуется именно та формулировка условия (L_{loc}), которая приведена в теореме 1.

Доказательство, как и в теореме 1.1, сводится к рассмотрению последовательности функций $f_n(x) = f(x,y_n)$, где $y_n\to a$, $y_n\in (Y\cap U)\setminus\{a\}$. Достаточно применить к ней теорему Лебега IV.8.4. ▶

*) В частности, при $\widetilde{Y} = [-\infty,+\infty]$ возможны случаи $a = \pm\infty$.

Если $\mu(X) < +\infty$ и функция f ограничена, то очевидно, для любой точки сгущения множества Y условие (L_{loc}) выполнено. В случае конечной меры его можно заменить другим, модифицируя условие (V) следствия IV.8.7.

Отметим ещё случай, когда $X = \mathbb{N}$ и μ — считающая мера. В этой ситуации интеграл $\int_X f(x,y)\,d\mu(x)$ превращается в сумму (абсолютно сходящегося) ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n,y)$, а условие (L_{loc}) совпадает с условием признака Вейерштрасса, гарантирующего равномерную сходимость ряда в окрестности точки a. Из теоремы 1 вытекает, что предел суммы ряда можно находить почленно.

Теорема 2. *Пусть $\mu(X) < +\infty$ и $\varphi(x) = \lim\limits_{y\to a} f(x,y)$ при почти всех $x \in X$. Если существуют такая окрестность U точки a и такие числа $s > 1$, $C > 0$, что выполняется условие*

$$\int_X |f(x,y)|^s\,d\mu(x) \leqslant C \quad \text{при всех } \ y \in (Y \cap U) \setminus \{a\}, \tag{V_{loc}}$$

то функция φ суммируема на X и справедливо равенство (1).

Доказательство этой теоремы совпадает с доказательством предыдущей с тем отличием, что вместо теоремы Лебега мы должны теперь сослаться на следствие IV.8.7.

В некоторых случаях условие (V_{loc}) является полезной альтернативой условию (L_{loc}). Например, если $X = Y$ — некоторый шар в $\mathbb{R}^m$, μ — мера Лебега, а $f(x,y) = \frac{1}{\|x-y\|^p}$, где $p < m$, то условие (V_{loc}) (при $1 < s < \frac{m}{p}$) выполнено в произвольной точке $a \in Y$, и поэтому функция J непрерывна на Y. Вместе с тем, условие (L_{loc}) ни в какой точке $a \in Y$ выполняться не может, так как для любой её окрестности U

$$\sup_{y\in U\setminus\{x\}} f(x,y) = +\infty \quad \text{при каждом } \ x \in U.$$

1.3. Следующая теорема, очевидно, является частным случаем теоремы 1 п. 1.2.

Теорема. *Если функция f удовлетворяет условию (L_{loc}) в точке $y_0 \in Y$ и при почти всех $x \in X$ непрерывна в ней по второму аргументу, т. е.*

$$f(x,y) \underset{y\to y_0}{\longrightarrow} f(x,y_0) \quad \text{при почти всех } \ x \in X, \tag{2}$$

то функция J непрерывна в точке y_0:

$$J(y) = \int_X f(x,y)\,d\mu(x) \underset{y\to y_0}{\longrightarrow} J(y_0) = \int_X f(x,y_0)\,d\mu(x).$$

Заметим, что условие (2) заведомо выполнено, если X есть топологическое пространство и функция f непрерывна на $X \times Y$.

Следствие. *Если X есть компактное пространство с конечной мерой, а $Y \subset \mathbb{R}$ — произвольный промежуток, то из непрерывности функция f на $X \times Y$ следует непрерывность интеграла $J(y) = \int_X f(x,y)\,d\mu(x)$ на этом промежутке.*

В самом деле, у каждой точки промежутка Y имеется относительная окрестность U, замыкание которой компактно и содержится в Y. По теореме Вейерштрасса функция f ограничена на произведении $X \times U$, что обеспечивает выполнение условия (L_{loc}). ►

Очевидно, что следствие справедливо не только для промежутка, но и для любого локально компактного пространства Y; в частности, оно верно, если Y — открытое или замкнутое подмножество евклидова пространства.

1.4. Рассмотрим два примера. Докажем непрерывность функций H и K, определяемых равенствами

$$H(y) = \int_0^\infty \frac{\cos xy}{1+x^2}\,dx \quad \text{при } y \in \mathbb{R}, \qquad K(y) = \int_0^\infty e^{-xy}\sin x\,dx \quad \text{при} \quad y \in (0,+\infty).$$

В первом случае $f(x,y) = \frac{\cos xy}{1+x^2}$. Так как

$$\left|\frac{\cos xy}{1+x^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+x^2} \quad \text{для любых} \quad x,\, y \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} < +\infty,$$

то функция f удовлетворяет условию (L_{loc}) в каждой точке $y \in \mathbb{R}$. Остаётся сослаться на теорему 1 п. 1.2.

Во втором случае $f(x,y) = e^{-xy}\sin x$. В отличие от предыдущего примера теперь не существует одной и той же для всех $y \in Y$ суммируемой на $(0,+\infty)$ мажоранты g_0, для которой неравенство $|f(x,y)| \leqslant g_0(x)$ выполнялось бы при всех $x,\, y > 0$. Тем не менее, условие (L_{loc}) все-таки справедливо для каждой точки $y \in (0,+\infty)$. Только теперь для каждого $y > 0$ нам придётся выбирать свою окрестность и свою, зависящую от этой окрестности, суммируемую мажоранту. В самом деле, пусть $y_0 > 0$ и $U = (\frac{y_0}{2}, +\infty)$. Тогда

$$|e^{-xy}\sin x| \leqslant e^{-\frac{xy_0}{2}} \quad \text{для любых} \quad x > 0,\ y \in U, \quad \text{и} \quad \int_0^\infty e^{-\frac{xy_0}{2}}\,dx < +\infty.$$

Второй из рассмотренных примеров допускает и другое решение — путём прямого вычисления. Действительно, дважды интегрируя по частям, мы получаем

$$\begin{aligned} K(y) &= -e^{-xy}\cos x\Big|_0^\infty - y\int_0^\infty e^{-xy}\cos x\,dx = \\ &= 1 - y\left(e^{-xy}\sin x\Big|_0^\infty + y\int_0^\infty e^{-xy}\sin x\,dx\right) = 1 - y^2K(y). \end{aligned}$$

Следовательно, $K(y) = \frac{1}{1+y^2}$ при любом $y > 0$.

Первое решение, основанное на общей схеме, приведено нами по двум причинам. Во-первых, оно типично для задач такого рода. Например, совершенно аналогично может быть доказана непрерывность по параметру интеграла $\int_0^\infty e^{-xy}h(x)\,dx$ для любой ограниченной функции h. Во-вторых, даже умение вычислять сам интеграл не избавляет иногда от необходимости проверять условие (L_{loc}) для подынтегральной функции (см. ниже пример 2 в п. 1.6).

1.5. Теорема 1 п. 1.2 позволяет легко получить условия не только непрерывности, но и дифференцируемости интеграла, зависящего от параметра.

Теорема. *Пусть $Y \subset \mathbb{R}$ — произвольный промежуток и*
а) при почти всех $x \in X$ и при каждом $y \in Y$ существует частная производная

$$f'_y(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h};$$

б) функция f'_y удовлетворяет в точке $y_0 \in Y$ условию (L_{loc}).
Тогда функция J дифференцируема в этой точке, причём

$$J'(y_0) = \int_X f'_y(x,y_0)\,d\mu(x). \tag{3}$$

Эта формула называется *правилом Лейбница.*

Доказательство. Пусть $x \in X$, $y_0 + h \in Y$, $h \neq 0$ и

$$F(x,h) = \frac{f(x,y_0+h)-f(x,y_0)}{h}.$$

Так как

$$\frac{J(y_0+h)-J(y_0)}{h} = \int_X \frac{f(x,y_0+h)-f(x,y_0)}{h}\,d\mu(x) = \int_X F(x,h)\,d\mu(x), \tag{4}$$

то существование конечной производной $J'(y_0)$ и равенство (3) немедленно следуют из возможности перейти к пределу при $h \to 0$ под знаком интеграла в равенстве (4). Законность этого предельного перехода можно обосновать с помощью теоремы 1 п. 1.2, если показать,что функция F удовлетворяет в точке $h = 0$ условию (L_{loc}). Проверим это.

Так как функция f'_y удовлетворяет условию (L_{loc}), то найдутся такое положительное число δ и такая суммируемая на X функция g, что

$$|f'_y(x,y)| \leqslant g(x) \ \text{ при почти всех } x \in X \ \text{ и при } \ y \in Y,\ 0 < |y-y_0| < \delta.$$

Теорема Лагранжа о среднем, применённая к функции $y \mapsto f(x,y)$ на промежутке с концами y_0 и $y_0 + h$, даёт нам равенство $F(x,h) = f'_y(x, y_0 + \theta h)$, где θ — некоторое число из интервала $(0,1)$. Поэтому $|F(x,h)| \leqslant g(x)$ при почти всех $x \in X$ и $0 < |h| < \delta$. Следовательно, условие (L_{loc}) для функции F выполнено. ▶

При использовании доказанной теоремы существование частной производной f'_y, как правило, не вызывает сомнений, так что обычно нужно лишь проверить, что она удовлетворяет условию (L_{loc}). Ещё проще обстоит дело в случае, когда $X = [p,q]$, $Y = \langle a,b\rangle$, а функции f и f'_y непрерывны в прямоугольнике $X \times Y$. Тогда функция $J(y) = \int_p^q f(x,y)\,dx$ непрерывно дифференцируема на $\langle a,b\rangle$, причём $J'(y) = \int_p^q f'_y(x,y)\,dx$.

Замечание. Теорема 1.5 остаётся, очевидно, справедливой и в формально более общей ситуации, когда Y — подмножество многомерного пространства и вместо производной $J'(y)$ вычисляется частная производная по одной из координат.

1.6. Рассмотрим некоторые приложения полученных результатов. Прежде всего применим их для нахождения двух "неберущихся" интегралов, представляющих большой интерес.

Пример 1. Вычислим интеграл

$$J(y) = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos yx \, dx \qquad \text{при} \quad y \in \mathbb{R}.$$

По теореме о дифференцировании интеграла по параметру (её условия, очевидно, выполнены) это гладкая функция и

$$J'(y) = -\int_0^\infty x\, e^{-x^2} \sin yx \, dx.$$

Проинтегрировав по частям, получим

$$J'(y) = \frac{1}{2} e^{-x^2} \sin yx \Big|_0^\infty - \frac{y}{2} \int_0^\infty e^{-x^2} \cos yx \, dx = -\frac{y}{2} \int_0^\infty e^{-x^2} \cos yx \, dx.$$

Поэтому $J'(y) + \frac{y}{2} J(y) = 0$. Следовательно, $\left(e^{y^2/4} J(y)\right)' = 0$. Таким образом, $J(y) = C\, e^{-y^2/4}$. Поскольку $C = J(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (см. п. IV.6.3), мы приходим к искомому результату:

$$J(y) = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos yx \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-y^2/4}.$$

Пример 2. Рассмотрим интеграл

$$J(y) = \int_0^\infty e^{-xy} \frac{\sin x}{x} \, dx \qquad \text{при} \quad y \in (0, +\infty).$$

Докажем дифференцируемость функции J и опираясь на это вычислим $J(y)$. Ясно, что в нашем случае $f'_y(x, y) = -e^{-xy} \sin x$ при всех x, $y > 0$. Как было установлено в п. 1.4, функция f'_y удовлетворяет условию (L_{loc}) в каждой точке полуоси $(0, +\infty)$. Поэтому можно воспользоваться правилом Лейбница:

$$J'(y) = -\int_0^\infty e^{-xy} \sin x \, dx \qquad \text{при всех} \quad y > 0.$$

Последний интеграл был вычислен в примере 1.4 (отметим, что знание этого интеграла не избавляет нас от необходимости использовать условие (L_{loc}) при обосновании предыдущего равенства). Следовательно,

$$J'(y) = -\frac{1}{1+y^2} \quad \text{и} \quad J(y) = C - \operatorname{arctg} y \quad \text{при всех } y > 0,$$

где C — некоторая постоянная. Чтобы определить её, заметим, что $J(y) \underset{y \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, поскольку $|J(y)| \leqslant \int_0^\infty e^{-xy} dx = \frac{1}{y}$. Поэтому $C = \frac{\pi}{2}$ и, таким образом,

$$J(y) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} y \qquad \text{при всех} \quad y > 0. \tag{5}$$

До сих пор мы рассматривали интеграл $J(y)$ лишь при $y > 0$. Однако его подынтегральная функция имеет смысл и при $y = 0$. Кроме того, нам известно (см. пример 1 в п. IV.6.6), что хотя функция $f(x, 0) = \frac{\sin x}{x}$ и не суммируема, тем не менее несобственный интеграл $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ сходится. Поэтому естественно доопределить интеграл $J(y)$ при $y = 0$, положив $J(0) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$, и спросить себя, будет ли доопределённый таким образом интеграл $J(y)$ непрерывен в нуле. Ясно, что

$$e^{-xy}\frac{\sin x}{x} \underset{y\to 0}{\longrightarrow} \frac{\sin x}{x} \qquad \text{при всех} \quad x > 0.$$

Обоснование предельного перехода $J(y) \to J(0)$ затруднено тем, что подынтегральная функция в $J(0)$ не суммируема. Поэтому, в частности, мы заведомо не можем использовать здесь теорему 1 п. 1.1, условия которой гарантируют суммируемость предельной функции. Общие теоремы, позволяющие устанавливать непрерывность несобственных интегралов, зависящих от параметра, мы получим в § 4, а пока докажем непрерывность J в нуле непосредственно — убедимся, что разность

$$J(y) - J(0) = \int_0^\infty \left(e^{-yx} - 1\right)\frac{\sin x}{x}\,dx$$

бесконечно мала при $y \to 0$. Для этого по отдельности оценим интегралы по промежуткам $[0, t]$ и $[t, +\infty)$, где $t > 0$ — вспомогательный параметр, выбор которого мы уточним позже. Интеграл по промежутку $[0, t]$ оценим совсем грубо: так как $0 \leqslant 1 - e^{-yx} \leqslant yx$, то

$$\left|\int_0^t \left(e^{-yx} - 1\right)\frac{\sin x}{x}\,dx\right| \leqslant \int_0^t xy\,\frac{1}{x}\,dx = yt.$$

Во втором интеграле воспользуемся интегрированием по частям:

$$\int_t^\infty \left(e^{-yx} - 1\right)\frac{\sin x}{x}\,dx = \int_t^\infty \left(e^{-yx} - 1\right)\frac{d(-\cos x)}{x} =$$
$$= -\left(1 - e^{-ty}\right)\frac{\cos t}{t} + \int_t^\infty \cos x\left(\frac{e^{-yx} - 1}{x}\right)'_x dx.$$

Следовательно,

$$\left|\int_t^\infty \left(e^{-yx} - 1\right)\frac{\sin x}{x}\,dx\right| \leqslant \frac{1}{t} + \int_t^\infty \left(\frac{1}{x^2} + \frac{y}{x}\,e^{-yx}\right)dx \leqslant \frac{2}{t} + \frac{y}{t}\int_t^\infty e^{-yx}dx < \frac{3}{t}.$$

Итак, $|J(y) - J(0)| \leqslant yt + \frac{3}{t}$ для любых положительных y и t.

Поэтому можно сначала за счёт выбора t сделать сколь угодно малым второе слагаемое (для всех y одновременно), а затем, зафиксировав t, добиться малости и первого слагаемого при всех достаточно малых y. Тем самым непрерывность J при $y \to 0$ доказана. Учитывая (5), мы получаем значение важного интеграла

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

1.7. Теорема 1.5 остаётся справедливой, если говорить о дифференцируемости не по вещественному, а по комплексному параметру.

Теорема. *Пусть Y — открытое подмножество комплексной плоскости. Если выполнены условия*

а) при почти всех $x \in X$ функция $y \mapsto f(x,y)$ голоморфна в Y,

б) частная производная f'_y удовлетворяет в точке $y_0 \in Y$ условию (L_{loc}),

то интеграл $J(y) = \int_X f(x,y)\,d\mu(x)$ дифференцируем в точке y_0, причём

$$J'(y_0) = \int_X f'_y(x,y_0)\,d\mu(x).$$

Доказательство этой теоремы повторяет доказательство теоремы 1.5 с тем отличием, что сейчас вместо теоремы Лагранжа о среднем мы воспользуемся в случае, когда круг $\overline{B}(y_0,|h|)$ содержится в Y, оценкой

$$|F(x,h)| = \left|\int_0^1 f'_y(x,y_0+th)\,dt\right| \leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\bigl|f'_y(x,y_0+th)\bigr|.$$

При h достаточно малых по модулю правая часть этого неравенства имеет в силу условия (L_{loc}) суммируемую мажоранту, не зависящую от h. Зная это, мы можем закончить доказательство теоремы дословно так же, как в вещественном случае. ►

Из доказанной теоремы вытекает, что если функция φ суммируема на конечном промежутке $[a,b]$, то функция

$$F(z) = \int_a^b \varphi(t)\,e^{zt}\,dt$$

голоморфна на всей комплексной плоскости. Таким образом, для суммируемой функции с компактным носителем её преобразования Лапласа и Фурье, т. е. интегралы

$$\mathcal{L}(z) = \int_{\mathbb{R}_+} \varphi(t)\,e^{-zt}\,dt \qquad \text{и} \qquad \mathcal{F}(z) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,e^{-izt}\,dt$$

— целые функции.

Пример 1. Вычислим преобразование Лапласа степенно́й функции. Пусть $a > 0$, $z \in \mathbb{C}$, $x = \mathcal{R}e(z) > 0$,

$$\mathcal{L}(z) = \int_0^\infty t^{a-1}\,e^{-zt}\,dt.$$

Очевидно, $|f(t,z)| = |t^{a-1}e^{-zt}| = t^{a-1}e^{-xt}$, и поэтому подынтегральная функция суммируема при каждом z, $\mathcal{R}e(z) > 0$. Производная f'_z удовлетворяет условию (L_{loc}) в каждой точке правой полуплоскости. Поэтому

$$\mathcal{L}'(z) = -\int_0^\infty t^a\,e^{-zt}\,dt = \frac{1}{z}\,t^a\,e^{-tz}\Big|_{t=0}^{\infty} - \frac{a}{z}\int_0^\infty t^{a-1}\,e^{-zt}\,dt = -\frac{a}{z}\mathcal{L}(z).$$

Это равенство можно переписать в виде $\bigl(z^a\mathcal{L}(z)\bigr)' \equiv 0$, откуда вытекает, что $z^a\mathcal{L}(z) \equiv$ $\equiv \mathrm{const}$. Будем считать, что z^a — ветвь степенно́й функции, равная единице при $z = 1$.

Тогда $\mathcal{L}(z) = \mathcal{L}(1)/z^a$, и для завершения вычислений остаётся вспомнить определение функции Γ (см. п. IV.6.3):

$$\mathcal{L}(1) = \int_0^\infty t^{a-1}\, e^{-t}\, dt = \Gamma(a).$$

Итак, $\mathcal{L}(z) = \frac{\Gamma(a)}{z^a}$.

Пример 2. Пусть X — некоторое замкнутое подмножество комплексной плоскости, G — его дополнение, h — функция, суммируемая на X по мере μ (напомним, что, как мы условились в начале параграфа, мера в пространстве с топологией считается определённой по крайней мере на всех борелевских множествах). Определим на G функцию J равенством

$$J(z) = \int_X \frac{h(\zeta)}{\zeta - z}\, d\mu(\zeta) \qquad (z \in G).$$

Функция J называется интегралом типа Коши. Убедимся, что она голоморфна в G, а её производные могут быть вычислены с помощью дифференцирования по параметру под знаком интеграла, т. е.

$$J^{(n)}(z) = n! \int_X \frac{h(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\, d\mu(\zeta) \quad \text{при всех } z \in G,\ n \in \mathbb{N}.$$

В нашем случае $f(\zeta, z) = \frac{h(\zeta)}{\zeta - z}$ и $f'_z(\zeta, z) = \frac{h(\zeta)}{(\zeta - z)^2}$ при $\zeta \in X$, $z \in G$. В окрестности точки z_0 знаменатель $\zeta - z$ отделён от нуля: если круг $B(z_0, 2r)$ содержится в G, то при $|z - z_0| < r$ и $\zeta \in X$, очевидно, справедливо неравенство $|\zeta - z| \geqslant r$. Поэтому функция $\zeta \mapsto f(\zeta, z)$ суммируема на X при каждом $z \in G$ и

$$|f'_z(\zeta, z)| = \left| \frac{h(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \right| \leqslant \frac{|h(\zeta)|}{r^2} \quad \text{при всех } \zeta \in X,\ |z - z_0| < r.$$

Эта оценка показывает, что функция f'_z удовлетворяет в точке z_0 условию (L_{loc}). Ввиду произвольности z_0 мы получаем по теореме 1.7, что функция J голоморфна в G и

$$J'(z) = \int_X \frac{h(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\mu(\zeta) \quad \text{при всех } z \in G.$$

Производные высших порядков вычисляются аналогично.

УПРАЖНЕНИЯ

1) Найдите мажоранту семейства функций $\{\ln(1 - 2r\cos x + r^2)\}_{0<r<1}$, суммируемую на $(0, 2\pi)$.

2) Имеет ли семейство функций $\left\{\frac{1}{|1 - re^{ix}|}\right\}_{0<r<1}$ мажоранту, суммируемую на $(0, 2\pi)$?

3) Докажите, что

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{|1 - re^{ix}|} \underset{r\to 1-0}{\sim} 2\ln\frac{1}{1-r}; \qquad \int_0^{2\pi} \frac{dx}{|1 - re^{ix}|^p} \underset{r\to 1-0}{\sim} \frac{C_p}{(1-r)^{p-1}} \qquad (p > 1),$$

где $C_p = 2\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^{p/2}}$.

4) Пусть множество $E \subset \mathbb{R}^m$ ограничено и измеримо. Докажите, что при $p < m$ функция $y \mapsto \int_E \frac{dx}{\|x-y\|^p}$ непрерывна в пространстве $\mathbb{R}^m$.

5) Вычислите интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x}\, dx$.

Указание. Рассмотрите интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(y \operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x}\, dx$ при $y \geqslant 0$.

§ 2. Функция гамма

В этом параграфе мы рассмотрим важный пример интеграла, зависящего от параметра. Речь идёт о введённой Эйлером функции Γ (гамма), или эйлеровом интеграле второго рода. По своему значению эта функция вполне может сравниться с элементарными функциями. Эпизодически она нам уже встречалась (см. пп. IV.6.3 и V.3.2). В частности, с её помощью в п. V.4.2 был вычислен объём m-мерного шара.

2.1. Напомним, что при $x > 0$ функция Γ определяется равенством

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt. \tag{1}$$

Мы предоставляем читателю самостоятельно проверить, что в окрестности любой точки $x_0 > 0$ производная f'_x подынтегральной функции $f(t,x) = t^{x-1}e^{-t}$ удовлетворяет условию (L_{loc}). По теореме 1.5 функция Γ дифференцируема и

$$\Gamma'(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \ln t\, dt.$$

Аналогично устанавливается существование у Γ производных любого порядка, а также формула для их вычисления. В частности, $\Gamma''(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\ln^2 t\, dt > 0$. Поэтому Γ — выпуклая функция класса $C^\infty\big((0,+\infty)\big)$.

Интегрируя по частям, легко убедиться, что функция Γ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \qquad \text{при} \quad x > 0. \tag{2}$$

Вычислим Γ при натуральных значениях аргумента. Очевидно, $\Gamma(1) = 1$. С помощью равенства (2) и индукции получаем, что $\Gamma(n+1) = n!$ при любом $n \in \mathbb{N}$. Таким образом, функция Γ есть продолжение на положительную полуось функции $n!$, связанной, как кажется на первый взгляд, исключительно с натуральными числами.

Заменой переменной $t = u^2$ интеграл $\int_0^\infty t^{-1/2}e^{-t}dt = \Gamma(\frac{1}{2})$ сводится к интегралу Эйлера–Пуассона $I = \int_{-\infty}^\infty e^{-u^2}\, du$, который был вычислен нами неоднократно (см., например, п. VI.2.4). Таким образом, $\Gamma(\frac{1}{2}) = I = \sqrt{\pi}$. Опираясь на этот результат и функциональное уравнение (2), можно найти значения Γ в полуцелых точках:

$$\Gamma\Big(n + \frac{1}{2}\Big) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Равенство (2) позволяет выяснить поведение функции Γ около нуля:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1) \sim \frac{1}{x} \quad \text{при} \quad x \to +0.$$

При больших x значения $\Gamma(x)$ очень велики, так как

$$\Gamma(1+x) = \int_0^\infty t^x\, e^{-t} dt \geqslant \int_x^\infty t^x e^{-t} dt \geqslant x^x \int_x^\infty e^{-t}\, dt = \Big(\frac{x}{e}\Big)^x.$$

Эта простая оценка довольно хорошо описывает рост Γ на бесконечности. Ниже (см. п. 2.6) мы получим точное описание асимптотического поведения $\Gamma(x)$ при $x \to +\infty$.

Функциональное уравнение (2) подсказывает, как естественным образом продолжить функцию Γ на отрицательную полуось. Действительно, равенство $\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1)$ следует принять за определение функции Γ на интервале $(-1, 0)$. Тогда её значения на нём отрицательны, причём односторонние пределы в точках 0 и -1 бесконечны. Определив Γ на $(-1, 0)$, можно, исходя из того же равенства, определить её на интервале $(-2, -1)$. Продолжая действовать подобным образом, мы определим $\Gamma(x)$ для всех $x < 0$, $x \neq -1, -2, \dots$. При этом $(-1)^n\Gamma(x) > 0$, если $x \in (-n, -n+1)$, и $|\Gamma(x)| \underset{x \to -n}{\longrightarrow} +\infty$ $(n = 1, 2, \dots)$. Ясно, что теперь равенство (2) можно обобщить:

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x) \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}. \tag{2'}$$

Установленные свойства функции Γ позволяют нарисовать эскиз её графика (см. рис. 12). Заметим, что так как $\Gamma(2) = 1 = \Gamma(1)$, то по теореме Ролля в интервале $(1, 2)$ находится (единственная в силу выпуклости) критическая точка функции Γ, в которой, очевидно, она достигает наименьшего значения. Кроме того, по одной критической точке содержится в каждом из интервалов $(-n, -n+1)$, $n \in \mathbb{N}$ (см. упр. 8).

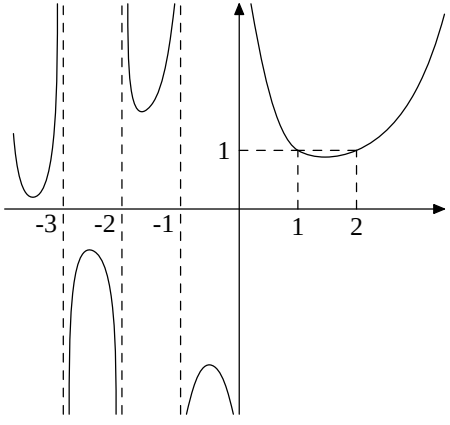


Рис. 12.

Заменяя в равенстве (1) x комплексным числом z (и понимая t^{z-1} как $e^{(z-1)\ln t}$), мы видим, что оно позволяет определить Γ не только при $x > 0$, но и для комплексного z при условии, что $\mathcal{R}e(z) > 0$, т. е. в правой половине комплексной плоскости. Из теоремы 1.7 следует голоморфность Γ в этой полуплоскости. При этом тождество $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ сохранится, и его можно использовать для определения Γ на всей комплексной плоскости за исключением точек $0, -1, -2, \dots$ совершенно аналогично тому, как мы определили Γ на полуоси $(-\infty, 0)$. Мы, однако, ограничимся изучением функции Γ лишь на вещественной оси.

2.2. В этом и следующих пунктах будут установлены важнейшие формулы, относящиеся к функции Γ.

Прежде всего напомним формулу, связывающую функции B и Γ. Функция B определяется (см. п. IV.6.3) равенством $\mathrm{B}(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt$, где x, $y > 0$. Как

доказано в п. V.3.2, $\mathrm{B}(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$, т. е.

$$\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{3}$$

Выведем из этого равенства асимптотическое соотношение (см. также упр. 9):

$$\Gamma(x+a) \sim x^a\Gamma(x) \quad \text{при} \quad x \to +\infty. \tag{4}$$

Благодаря функциональному уравнению для Γ его достаточно доказать при $a > 0$. Формула (3) даёт нам:

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(a)}{\Gamma(x+a)} = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{x-1}\,dt \qquad (a,\, x > 0).$$

Заменяя для удобства x на $x+1$ и делая в интеграле замену $t = \frac{u}{x}$, получаем:

$$\frac{\Gamma(x+1)\Gamma(a)}{\Gamma(x+a+1)} = \frac{1}{x^a}\int_0^x u^{a-1}\Big(1-\frac{u}{x}\Big)^x\,du.$$

Так как $1-t \leqslant e^{-t}$, то $1-\frac{u}{x} \leqslant e^{-u/x}$ и $\big(1-\frac{u}{x}\big)^x \leqslant e^{-u}$ при $0 \leqslant u \leqslant x$. Следовательно, в последнем интеграле подынтегральная функция (будем считать её равной нулю при $u > x$) имеет при любом x мажоранту $u^{a-1}e^{-u}$, очевидно, суммируемую на $(0,+\infty)$. Поэтому по теореме 1 п. 1.2

$$x^a\frac{\Gamma(x+1)\Gamma(a)}{\Gamma(x+a+1)} = \int_0^x u^{a-1}\Big(1-\frac{u}{x}\Big)^x\,du \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^\infty u^{a-1}e^{-u}\,du = \Gamma(a)$$

(по существу этот предельный переход уже обоснован в примере 2 п. IV.8.4). Сократив на $\Gamma(a)$, это можно переписать в виде, равносильном (4):

$$x^a\frac{x\Gamma(x)}{(x+a)\Gamma(x+a)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1. \quad \blacktriangleright$$

По поводу уточнения этого соотношения см. упр. 9 и пример 1 в п. 3.5.

2.3. Следующая формула позволяет находить значения функции Γ, не прибегая к интегрированию:

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{n^x\,n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)(x+n)} \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R},\ x \neq 0,-1,-2,\ldots$$

Она близка к эйлеровскому определению Γ (см. упр. 2) и известна как *формула Эйлера–Гаусса**).

Для доказательства заметим, что $\Gamma(x+n) = (x+n-1)\cdots(x+1)x\Gamma(x)$. Поэтому

$$\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \frac{n}{x+n}\cdot\frac{n^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)} = \frac{n}{x+n}\cdot\Gamma(x)\cdot\frac{n^x\Gamma(n)}{\Gamma(x+n)}.$$

Остаётся воспользоваться соотношением (4). $\blacktriangleright$

*) Карл Фридрих **Гаусс** (Gauss), 1777–1855, — немецкий математик.

При $x = \frac{1}{2}$ формула Эйлера–Гаусса по существу совпадает с формулой Валлиса (см. п. IV.6.2). В самом деле, при $x = \frac{1}{2}$ мы получаем:

$$\sqrt{\pi} = \Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\, n!}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\big(\frac{1}{2}+n\big)} = 2\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!},$$

что равносильно формуле Валлиса.

Чтобы получить ещё одну знаменитую формулу, связанную с функцией Γ, напомним асимптотику частичных сумм гармонического ряда: существует такое положительное число γ (*константа Эйлера*), что

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1).$$

Это вытекает из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\big(\frac{1}{k} - \ln\big(1+\frac{1}{k}\big)\big)$, поскольку его n-я частичная сумма равна $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)$.

Мы используем этот результат для получения красивого разложения функции $1/\Gamma$ в бесконечное произведение. Напомним, что бесконечным произведением последовательности чисел $a_1, a_2, \ldots$ называется предел $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n} a_k$, который обозначается символом $\prod\limits_{k=1}^{\infty} a_k$.

Докажем, что

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\prod_{k=1}^{\infty}\Big(1+\frac{x}{k}\Big)e^{-\frac{x}{k}} \quad (x\in\mathbb{R}) \tag{5}$$

(поскольку $|\Gamma(x)| \to +\infty$ при $x \to 0, -1, -2, \ldots$, естественно считать, что дробь $1/\Gamma$ равна нулю в этих точках). Это равенство называют *формулой Вейерштрасса**)

Для доказательства перепишем формулу Эйлера–Гаусса в виде

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = \lim_{n\to\infty} n^{-x}x(1+x)\cdots\Big(1+\frac{x}{n}\Big).$$

Теперь простое тождественное преобразование даёт нам

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x\lim_{n\to\infty} n^{-x}\prod_{k=1}^{n}\Big(1+\frac{x}{k}\Big) = x\lim_{n\to\infty} e^{x\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)}\prod_{k=1}^{n}\Big(1+\frac{x}{k}\Big)e^{-\frac{x}{k}}.$$

Так как $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n \to \gamma$, то отсюда следует и существование предела $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\big(1+\frac{x}{k}\big)e^{-\frac{x}{k}}$, и формула Вейерштрасса. ►

2.4. Равенство (3) позволяет получить *формулу Лежандра***), называемую также формулой удвоения:

$$\Gamma(x)\,\Gamma\Big(x+\frac{1}{2}\Big) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}\,\Gamma(2x) \qquad (x>0).$$

---

*) Карл Теодор Вильгельм **Вейерштрасс** (Weierstrass), 1815–1897, — немецкий математик.

) Адриен Мари **Лежандр (Legendre), 1752–1833, — французский математик.

Для этого в равенстве $\frac{\Gamma^2(x)}{\Gamma(2x)} = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{x-1}\,dt$ преобразуем правую часть:

$$\frac{\Gamma^2(x)}{\Gamma(2x)} = \int_0^1 (t-t^2)^{x-1}\,dt = \int_0^1 \Big(\frac{1}{4} - \Big(\frac{1}{2}-t\Big)^2\Big)^{x-1}\,dt = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \Big(\frac{1}{4}-s^2\Big)^{x-1}\,ds.$$

После подстановки $u = 4s^2$ получим согласно (3)

$$\frac{\Gamma^2(x)}{\Gamma(2x)} = 2^{1-2x}\int_0^1 u^{-\frac{1}{2}}(1-u)^{x-1}\,du = 2^{1-2x}\,\frac{\Gamma\big(\frac{1}{2}\big)\,\Gamma(x)}{\Gamma\big(x+\frac{1}{2}\big)}.$$

Поскольку $\Gamma\big(\frac{1}{2}\big) = \sqrt{\pi}$, мы приходим к искомой формуле. ►

Как следует из (2′), доказанная формула справедлива не только для положительных x, но и для всех вещественных x таких, что $2x \neq 0, -1, -2, \ldots$.

2.5. Установим теперь одну из важнейших формул, связанных с функцией Γ. Это так называемая *формула дополнения:*

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \quad \text{при} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

Приводимое нами изящное доказательство заимствовано из книги [A].

Докажем, что произведение $\theta(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi}\Gamma(x)\Gamma(1-x)$ постоянно на $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Как следует из равенства (2′), функция θ имеет период 1:

$$\theta(x+1) = -\frac{\sin(\pi x)}{\pi}\,\Gamma(x+1)\Gamma(-x) = -\frac{\sin(\pi x)}{\pi}\,x\Gamma(x)\frac{\Gamma(1-x)}{-x} = \theta(x).$$

Кроме того,

$$\theta(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\Gamma(x+1)\Gamma(1-x),$$

откуда видно, что доопределив θ равенством $\theta(n) = 1$ для $n \in \mathbb{Z}$, мы получим 1-периодическую функцию, бесконечно дифференцируемую в окрестности нуля, а следовательно, и на всей вещественной оси. Ясно, что $\theta > 0$ на $\mathbb{R}$.

При $x > 0$ из формулы Лежандра следует (читатель легко проверит это самостоятельно) равенство

$$\theta\Big(\frac{x}{2}\Big)\theta\Big(\frac{1+x}{2}\Big) = \theta(x).$$

После логарифмирования мы видим, что

$$g\Big(\frac{x}{2}\Big) + g\Big(\frac{x+1}{2}\Big) = g(x), \tag{6}$$

где $g = \ln\theta$. Следовательно, непрерывная и 1-периодическая функция g'' удовлетворяет тождеству

$$g''\Big(\frac{x}{2}\Big) + g''\Big(\frac{1+x}{2}\Big) = 4g''(x).$$

При $M = \max|g''|$ из него следует, что $2M \geqslant 4M$. Поскольку $0 \leqslant M < +\infty$, это означает, что $M = 0$, т. е. $g = \ln\theta$ — линейная функция. Учитывая равенство $g(0) = g(1) = 0$, мы получаем, что $g \equiv 0$, т. е. $\theta \equiv 1$. ►

Мы доказали, что в классе $C^2\big([0,1]\big)$ функциональное уравнение (6) имеет лишь тривиальное решение $g \equiv 0$. Интересно отметить, что в более широком классе $C\big([0,1]\big)$ это уже не так. Например, непрерывная функция

$$\widetilde{g}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin\big(2^n \pi x\big)$$

удовлетворяет уравнению (6), однако $\widetilde{g} \not\equiv 0$, так как $\widetilde{g}\big(\frac{1}{4}\big) = \frac{1}{2}$.

С помощью формулы дополнения можно установить знаменитый результат Эйлера — разложить синус на "простые множители" подобно тому, как в таком виде представляется алгебраический многочлен. Поскольку синус имеет бесконечно много корней, нам придётся воспользоваться бесконечным произведением. Результат Эйлера состоит в следующем:

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{x^2}{n^2}\Big) \quad \text{при любом} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Отбрасывая тривиальный случай и считая, что $x \notin \mathbb{Z}$, перемножим формулы Вейерштрасса для $\Gamma(x)$ и $\Gamma(-x)$:

$$\frac{1}{\Gamma(x)\Gamma(-x)} = -x^2 \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{x^2}{n^2}\Big).$$

Осталось применить формулу дополнения:

$$\sin \pi x = \frac{\pi}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} = \frac{\pi}{(-x)\Gamma(x)\Gamma(-x)} = \pi x \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{x^2}{n^2}\Big). \ ►$$

Заметим, что, как видно из предыдущего, формулу дополнения, в свою очередь, легко вывести из формулы Вейерштрасса и равенства (7).

2.6. Обратимся теперь к более обстоятельному исследованию поведения $\Gamma(x)$ при $x \to +\infty$. Асимптотика описывается *формулой Стирлинга**):

$$\Gamma(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\, x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}. \tag{8}$$

В § 3 мы получим этот результат как частный случай более общего утверждения, а сейчас используем другой подход, основанный на наших сведениях о функции Γ и позволяющий получить уточнение асимптотической формулы (8).

*) Джеймс **Стирлинг** (Stirling), 1692–1770, — шотландский математик.

Прежде всего заменим быстро растущую функцию Γ её логарифмом. Следующим нашим шагом будет выяснение асимптотики второй производной $\ln\Gamma(x)$.

Логарифмируя равенство (5) при $x>0$, мы получаем:

$$-\ln\Gamma(x)=\ln x+\gamma\,x+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\ln\Big(1+\frac{x}{n}\Big)-\frac{x}{n}\Big).$$

После двукратного дифференцирования отсюда вытекает, что

$$\big(\ln\Gamma(x)\big)''=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(x+n)^2}. \tag{9}$$

Почленное дифференцирование возможно, так как получающиеся ряды равномерно сходятся на каждом замкнутом промежутке, содержащемся в $(0,+\infty)$.

Общий метод, позволяющий, в частности, получить сколь угодно точное асимптотическое представление суммы ряда (9) при $x\to+\infty$, доставляет формула Эйлера–Маклорена (см. [Ф], т. II; [Бу]). Мы, однако, не будем к ней обращаться, а получим первые несколько членов асимптотики $(\ln\Gamma(x))''$ непосредственно. Главный член асимптотики установить легко, поскольку сумма ряда (9) близка к интегралу:

$$\frac{1}{x}=\int_0^{\infty}\frac{dt}{(x+t)^2}\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(x+n)^2}\leqslant\frac{1}{x^2}+\int_0^{\infty}\frac{dt}{(x+t)^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}.$$

Таким образом,

$$(\ln\Gamma(x))''=\frac{1}{x}+O\Big(\frac{1}{x^2}\Big)$$

(здесь и в дальнейшем до конца пункта $x>0$ и все символы O относятся к случаю $x\to+\infty$). Приём, который мы будем использовать, состоит в том, чтобы последовательно уточнять полученную асимптотическую формулу, выделяя главные части с помощью рядов, суммы которых легко найти. На первом шаге представим $\frac{1}{x}$ в виде

$$\frac{1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{x+n}-\frac{1}{x+n+1}\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$$

и вычтем из (9). Тогда

$$\big(\ln\Gamma(x)\big)''-\frac{1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{(x+n)^2}-\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(x+n)^2(x+n+1)}. \tag{10}$$

Снова сравнивая возникший ряд с соответствующим интегралом, мы видим, что

$$\frac{1}{2(x+1)^2}=\int_0^{\infty}\frac{dt}{(x+t+1)^3}\leqslant\big(\ln\Gamma(x)\big)''-\frac{1}{x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(x+n)^2(x+n+1)}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{x^3}+\int_0^{\infty}\frac{dt}{(x+t)^3}=\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x^3}.$$

Следовательно,

$$\big(\ln\,\Gamma(x)\big)'' - \frac{1}{x} = \frac{1}{2x^2} + h(x), \quad \text{где} \quad h(x) = O\Big(\frac{1}{x^3}\Big). \tag{11}$$

Этого результата (его другой вывод см. в упр. 13) уже достаточно для получения эквивалентности (8). В самом деле, очевидно, что

$$\int_1^x h(t)\,dt = \int_1^\infty h(t)\,dt - \int_x^\infty h(t)\,dt = \text{const} + O\Big(\frac{1}{x^2}\Big).$$

Поэтому интегрирование разложения (11) от 1 до x приводит к равенству

$$\big(\ln\Gamma(x)\big)' = A + \ln x - \frac{1}{2x} + O\Big(\frac{1}{x^2}\Big).$$

Ещё одно интегрирование даёт нам соотношение

$$\ln\,\Gamma(x) = B + Ax + x\ln x - x - \frac{1}{2}\ln x + O\Big(\frac{1}{x}\Big).$$

Чтобы найти A и B, его удобнее записать (несколько загрубив) в виде эквивалентности:

$$\Gamma(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} Cx^{x-\frac{1}{2}}e^{(A-1)x},$$

где $C = e^B$. Для определения A используем функциональное уравнение. Из него вытекает, что

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{C}{x}(x+1)^{x+\frac{1}{2}}e^{(A-1)(x+1)}.$$

Взяв отношение правых частей этих эквивалентностей, мы получаем:

$$\Big(1+\frac{1}{x}\Big)^{x+\frac{1}{2}}e^{A-1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1,$$

что возможно лишь при $A = 0$. Константа B находится аналогичным образом с помощью формулы Лежандра. Из неё следует, что

$$C^2x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}\Big(x+\frac{1}{2}\Big)^x e^{-x-\frac{1}{2}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}C(2x)^{2x-\frac{1}{2}}e^{-2x}.$$

После сокращения на $Cx^{2x-\frac{1}{2}}e^{-2x}$ мы видим, что $C\big(1+\frac{1}{2x}\big)^x e^{-\frac{1}{2}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \sqrt{2\pi}$, откуда вытекает равенство $C = \sqrt{2\pi}$. Таким образом,

$$\ln\,\Gamma(x) = \Big(x-\frac{1}{2}\Big)\,\ln\,x - x + \frac{1}{2}\,\ln(2\pi) + O\Big(\frac{1}{x}\Big),$$

то есть

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}\Big(1+O\Big(\frac{1}{x}\Big)\Big). \tag{8'}$$

Эти равенства, как и (8), также называют формулами Стирлинга.

Для уточнения асимптотики представим $\frac{1}{x^2}$ в виде

$$\frac{1}{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{(x+n)^2}-\frac{1}{(x+n+1)^2}\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(x+n)+1}{(x+n)^2(x+n+1)^2}$$

и домножив на $\frac{1}{2}$ вычтем из (10). Тогда мы получим

$$\big(\ln\Gamma(x)\big)''-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(x+n)^2(x+n+1)^2}. \tag{12}$$

Так как

$$\frac{1}{6(x+1)^3}=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{dt}{(x+t+1)^4}\leqslant\big(\ln\Gamma(x)\big)''-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(x+n)^2(x+n+1)^2}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2x^4}+\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\frac{dt}{(x+t)^4}=\frac{1}{2x^4}+\frac{1}{6x^3},$$

то

$$\big(\ln\Gamma(x)\big)''-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}=\frac{1}{6x^3}+O\Big(\frac{1}{x^4}\Big).$$

Дальнейшее уточнение асимптотики можно производить многократно, но мы сделаем ещё только один шаг. Применяя уже дважды использованный приём, представим $\frac{1}{x^3}$ в виде

$$\frac{1}{x^3}=\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{(x+n)^3}-\frac{1}{(x+n+1)^3}\Big)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3(x+n)^2+3(x+n)+1}{(x+n)^3(x+n+1)^3}.$$

Домножив на $\frac{1}{6}$ и вычтя из (12), получим

$$\big(\ln\Gamma(x)\big)''-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{6x^3}=-\frac{1}{6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(x+n)^3(x+n+1)^3}\equiv-\frac{1}{6}\,s(x),$$

где

$$\frac{1}{5(x+1)^5}=\int_0^{\infty}\frac{dt}{(x+t+1)^6}\leqslant s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(x+n)^3(x+n+1)^3}<$$
$$<\frac{1}{x^6}+\int_0^{\infty}\frac{dt}{(x+t)^6}=\frac{1}{5x^5}+\frac{1}{x^6}.$$

Нетрудно проверить, что $\frac{1}{5x^5}-\frac{1}{x^6}<\frac{1}{5(x+1)^5}$. Поэтому $\big|s(x)-\frac{1}{5x^5}\big|<\frac{1}{x^6}$. Итак,

$$\big(\ln\Gamma(x)\big)''=\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{6x^3}-\frac{1}{30x^5}+\frac{\theta}{6x^6},\qquad|\theta|<1.$$

После интегрирования это приводит к такому уточнению формулы (8′):

$$\Gamma(x)=\sqrt{2\pi}\,x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}\,e^{\frac{1}{12x}-\frac{1}{360x^3}+\frac{\theta}{120x^4}},\qquad|\theta|<1. \tag{8''}$$

2.7. Обобщим формулу Лежандра и убедимся, что для любого $p = 2, 3, 4, \dots$ справедливо равенство (*теорема умножения Гаусса*)

$$\Gamma(x)\Gamma\Big(x+\frac{1}{p}\Big)\cdots\Gamma\Big(x+\frac{p-1}{p}\Big) = \frac{(2\pi)^{\frac{p-1}{2}}}{p^{px-\frac{1}{2}}}\Gamma(px) \qquad (px \neq 0, -1, -2, \dots).$$

Для доказательства запишем левую часть с помощью формулы Эйлера–Гаусса:

$$\prod_{k=0}^{p-1}\Gamma\Big(x+\frac{k}{p}\Big) = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{p-1}\frac{n!n^{x+\frac{k}{p}}}{\prod\limits_{j=0}^{n}\big(x+\frac{k}{p}+j\big)} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^p n^{px+\frac{p-1}{2}}p^{(n+1)p}}{\prod\limits_{k=0}^{p-1}\prod\limits_{j=0}^{n}(px+pj+k)}.$$

Легко видеть, что возникшее повторное произведение равно произведению сомножителей вида $px+i$ при $0 \leqslant i \leqslant pn+p-1$. Заменив последние $p-1$ из них на эквивалентные (при $n\to\infty$) величины pn, мы получим, что оно эквивалентно произведению

$$(pn)^{p-1}\prod_{i=0}^{pn}(px+i).$$

Поэтому

$$\prod_{k=0}^{p-1}\Gamma\Big(x+\frac{k}{p}\Big) = \lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^p n^{px+\frac{p-1}{2}}p^{(n+1)p}}{(pn)^{p-1}\prod\limits_{i=0}^{pn}(px+i)} =$$

$$= p^{-px}\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^p p^{np+1}}{(np)!n^{\frac{p-1}{2}}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{(np)^{px}(np)!}{px(px+1)\cdots(px+pn)}.$$

Второй предел согласно формуле Эйлера–Гаусса есть $\Gamma(px)$. Остаётся заметить, что первый предел (не зависящий от x) равен $(2\pi)^{\frac{p-1}{2}}\sqrt{p}$. Это легко проверить с помощью формулы Стирлинга, что читатель без труда сделает самостоятельно. Тем самым мы приходим к нужному результату. ►

2.8. Остановимся на ещё одном свойстве функции Γ. Как мы увидим, вместе с функциональным уравнением (2) оно характеризует Γ с точностью до постоянного множителя. Речь идёт о логарифмической выпуклости. Положительная функция f называется *логарифмически выпуклой*, если $\ln f$ — выпуклая функция.

Выпуклость функции $\ln\Gamma$ вытекает, конечно, из формулы (9), показывающей, что $(\ln\Gamma)'' > 0$. Однако логарифмическую выпуклость функции Γ легко установить и непосредственно, опираясь на определение Γ. В самом деле, она, очевидно, равносильна тому, что $\Gamma\big(\alpha x+(1-\alpha)y\big) \leqslant \Gamma^{\alpha}(x)\Gamma^{1-\alpha}(y)$ для всех положительных x, y и $\alpha\in(0,1)$. Последнее неравенство — следствие неравенства Гёльдера (см. теорему IV.4.5 при $p=\frac{1}{\alpha}$):

$$\Gamma\big(\alpha x+(1-\alpha)y\big) = \int_0^\infty\Big(t^{x-1}e^{-t}\Big)^{\alpha}\Big(t^{y-1}e^{-t}\Big)^{1-\alpha}dt \leqslant$$

$$\leqslant\Big(\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt\Big)^{\alpha}\Big(\int_0^\infty t^{y-1}e^{-t}\,dt\Big)^{1-\alpha} = \Gamma^{\alpha}(x)\,\Gamma^{1-\alpha}(y).$$

Функция гамма — не единственное решение функционального уравнения $f(x+1) = xf(x)$. Например, другие решения можно получить, домножая её на 1-периодические функции. Таким образом, это уравнение не определяет функцию Γ однозначно. Положение, однако, коренным образом меняется, если искать решение в классе логарифмически выпуклых функций. В нём это уравнение имеет с точностью до положительного коэффициента единственное решение. Иными словами, справедливо следующее утверждение*).

Теорема. *Если логарифмически выпуклая на $(0,+\infty)$ функция f удовлетворяет функциональному уравнению $f(x+1) = xf(x)$, то $f(x) = f(1)\,\Gamma(x)$.*

Доказательство. Убедимся, что отношение f/Γ постоянно. Введём функцию $M = \ln(f/\Gamma)$, которая непрерывна на $(0,+\infty)$ как разность выпуклых функций. Кроме того, она односторонне 1-периодична, т. е. $M(x+1) = M(x)$ для всех $x > 0$. Допустим, что эта функция не постоянна, и рассмотрим точку $x_0 \in (1,2]$, в которой она достигает наибольшего значения. В таком случае в этой точке вторая разность $\Delta_h^2 M(x) = M(x+h) - 2M(x) + M(x-h)$ при некотором $h \in (0,1)$ отрицательна: $\Delta_h^2 M(x_0) = \delta < 0$. Вместе с тем $\Delta_h^2\big(\ln f(x)\big) \geqslant 0$ ввиду логарифмической выпуклости f. Но тогда в силу односторонней периодичности для любого натурального n мы имеем

$$0 \leqslant \Delta_h^2\big(\ln f(x_0+n)\big) = \Delta_h^2 M(x_0+n) + \Delta_h^2\big(\ln\Gamma(x_0+n)\big) = \delta + \Delta_h^2\big(\ln\Gamma(x_0+n)\big).$$

Из соотношения (4) следует, что $\Delta_h^2\big(\ln\Gamma(x)\big) \to 0$ при $x \to +\infty$. Поэтому, перейдя к пределу при $n \to \infty$ в неравенстве $0 \leqslant \delta + \Delta_h^2\big(\ln\Gamma(x_0+n)\big)$, мы получим противоречие: $0 \leqslant \delta < 0$. ►

УПРАЖНЕНИЯ

1) Выразите через значения функции Γ следующие интегралы

а) $\displaystyle\int_0^1 x^{a-1}(1-x^b)^c\,dx \quad (a,b,c>0)$; б) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{(1+x^b)^c}\,dx \quad (a,\ b,\ c>0,\ bc>a)$.

2) Докажите равенство

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x}{1+\frac{x}{n}} \quad \text{при} \quad x \neq 0,-1,-2,\ldots,$$

которое Эйлер принимал за определение функции Γ.

3) Если числа $a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k$ из $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$ таковы, что $a_1+\ldots+a_k = b_1+\ldots+b_k$, то

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(n-a_1)\cdots(n-a_k)}{(n-b_1)\cdots(n-b_k)} = \frac{\Gamma(1-b_1)\cdots\Gamma(1-b_k)}{\Gamma(1-a_1)\cdots\Gamma(1-a_k)}.$$

4) Пусть $S(t) = \prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{t^2}{n^2}\right) = \frac{\operatorname{sh}\pi t}{\pi t}$. Докажите, что

$$S\Big(\frac{a}{\sqrt{x^2-a^2}}\Big) \leqslant \frac{\Gamma(x-a)\Gamma(x+a)}{\Gamma^2(x)} \leqslant S(a) \qquad \text{при} \quad x > 1+|a|.$$

*) Насколько нам известно, оно впервые опубликовано в [BM] (см. также [LO]).

5) Дифференцируя разложение функции $\ln\Gamma$ в ряд (см. п. 2.6), докажите, что

$$\Gamma'(1) = -\gamma \quad \text{и} \quad \Gamma'(n+1) = n!\Big(-\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\Big).$$

6) Вычислите $\Gamma'\big(n+\frac{1}{2}\big)$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$

7) Найдите предел $\lim\limits_{x\to -n}(x+n)\Gamma(x)$ при $n \in \mathbb{N}$.

8) Опираясь на логарифмическую выпуклость Γ на $(0, +\infty)$ и равенство $(2')$, докажите, что функция $|\Gamma(x)|$ логарифмически выпукла (и, следовательно, выпукла) на каждом промежутке $(-n, -n+1)$, $n \in \mathbb{N}$.

9) Уточняя соотношение (4), докажите, что при $0 < a < 1,\ x > 0$

$$x^a \frac{x}{x+a}\,\Gamma(x) \leqslant \Gamma(x+a) \leqslant x^a\Gamma(x)$$

(используйте логарифмическую выпуклость функции Γ).

10) С помощью предыдущего упражнения, докажите неравенство $\big(\ln\Gamma(x)\big)' \leqslant \ln x$ при $x > 0$.

11) Убедитесь, что теорема 2.8 остаётся справедливой в классе положительных функций $f \in C\big((0, +\infty)\big)$, удовлетворяющих для достаточно малых $h > 0$ условию:

$$\varliminf_{x\to+\infty} \Delta_h^2\big(\ln\, f(x)\big) \geqslant 0$$

("логарифмическая выпуклость f на бесконечности").

12) С помощью формулы Стирлинга (8) (но не опираясь на формулу $(8'')$), докажите, что

$$\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} e^{\frac{1}{12n+1}} < n! < \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} e^{\frac{1}{12n}} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

(убедитесь в монотонности отношений крайних частей неравенства к $n!$).

13) Установите соотношение (11), сравнив ряд (9) с суммой

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2 - \frac{1}{4}} = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{x+n-\frac{1}{2}} - \frac{1}{x+n+\frac{1}{2}}\Big).$$

14) Дополняя оценку функции s, полученную при доказательстве формулы Стирлинга, докажите, что $0 < s(x) < \frac{1}{5x^5}$, и получите двустороннее неравенство

$$\sqrt{2\pi}\, x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} e^{\frac{1}{12x} - \frac{1}{360x^3}} < \Gamma(x) < \sqrt{2\pi}\, x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} e^{\frac{1}{12x}}.$$

15) Пользуясь тождеством $\frac{1}{y^2} = \frac{1}{y(y+1)} + \frac{1}{y(y+1)(y+2)} + \ldots + \frac{(j-1)!}{y(y+1)\cdots(y+j)} \ldots$ при $y = x,\ x+1,\ x+2\ \ldots$, выведите из (11) равенство

$$(\ln\Gamma(x))'' = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n+1} \cdot \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n)} \qquad (x > 0),$$

которое можно использовать для уточнения соотношения $(8'')$.

§ 3. Метод Лапласа

Этот параграф посвящён исследованию асимптотики важного класса интегралов, зависящих от параметра специальным образом. Мы имеем в виду интегралы

$$\Phi(x) = \int_T f(t)\,\varphi^x(t)\,d\mu(t),$$

где функция φ неотрицательна и ограничена. Потребность в выяснении поведения таких интегралов при $x \to +\infty$ возникает как в задачах классического анализа, так и во многих задачах математической физики, теории вероятностей и др. Систематически эта проблема впервые была рассмотрена Лапласом*) при обосновании закона больших чисел.

Всюду в этом параграфе, говоря об асимптотике интегралов $\Phi(x)$, мы будем иметь в виду асимптотику при $x \to +\infty$, даже если это не указано явно.

3.1. Изучение интегралов указанного вида начнём с простейшего и вместе с тем важнейшего случая, когда множество T — промежуток (возможно, бесконечный), а μ — мера Лебега. Будем считать при этом, что функция φ положительна, ограничена и кусочно монотонна, а функция f суммируема на (a, b). Таким образом, интеграл

$$\Phi(x) = \int_a^b f(t)\,\varphi^x(t)\,dt \tag{1}$$

конечен при всех $x \geqslant 0$.

Вместо суммируемости функции f можно предполагать лишь суммируемость произведения $f\varphi^{x_0}$ при некотором $x_0 > 0$ и рассматривать интеграл $\Phi(x)$ для $x \geqslant x_0$. Этот случай, очевидно, сводится к предыдущему, если заменить f на $f\,\varphi^{x_0}$.

Метод Лапласа основан на том, что главный вклад в $\Phi(x)$ вносят интегралы по окрестностям тех точек, где функция φ достигает наибольшего значения. Это хорошо видно на графике φ^x, который при больших x имеет в окрестностях таких точек "горбы", тем более резко выраженные, чем больше x (см. рис. 13, иллюстрирующий случай $\max\varphi = 1$):

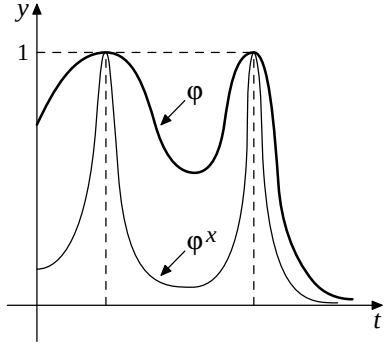


Рис. 13.

*) Пьер Симон **Лаплас** (de Laplace), 1749–1827, — французский математик.

Такие резкие колебания подынтегральной функции обычно затрудняют приближённое вычисление интегралов, но в данном случае упрощают определение асимптотики. Двести лет назад в предисловии к своей знаменитой “Аналитической теории вероятностей” Лаплас с воодушевлением написал, что открытый им приём “тем более точен, чем более он необходим”.

Разбивая при необходимости промежуток интегрирования на несколько частей, можно считать, что функция φ монотонна. Очевидно, достаточно рассмотреть только случай, когда φ убывает, так как случай, когда φ возрастает, сводится к нему с помощью замены переменной. Будем считать φ убывающей на $[a,b)$ (где $-\infty<a<b\leqslant+\infty$) и убедимся прежде всего, что у интегралов вида (1) наблюдается явление локализации — их асимптотика зависит от поведения подынтегральной функции лишь в произвольно малой окрестности точки a. Точнее, справедливо следующее простое, но важное утверждение.

Лемма. *Пусть функция φ убывает, а функция f суммируема на $[a,b)$, причём*

1) $0<\varphi(t)<\varphi(a)=\lim\limits_{u\to a}\varphi(u)$ при $t\in(a,b)$;

2) функция f сохраняет знак вблизи точки a и “не исчезает” около неё, т. е.

$$I_c=\int_a^c f(t)\,dt\neq 0 \quad \text{для всех } c, \text{ достаточно близких к } a.$$

Тогда для любого $c\in(a,b)$ справедливы асимптотические соотношения

$$\Phi(x)\sim\int_a^c f(t)\,\varphi^x(t)\,dt \quad \text{и} \quad \varphi^x(c)=o\big(\Phi(x)\big) \quad \text{при} \quad x\to+\infty.$$

Таким образом, основной вклад в $\Phi(x)$ даёт интеграл по сколь угодно малому интервалу (a,c), а вклад интеграла по остающемуся промежутку пренебрежимо мал.

Доказательство. Из неравенства $\left|\int_c^b f(t)\,\varphi^x(t)\,dt\right|\leqslant\varphi^x(c)\int_c^b|f(t)|dt$, следует, что $\Phi(x)=\int_a^c f(t)\,\varphi^x(t)\,dt+O(\varphi^x(c))$. Поэтому надо проверить лишь соотношение $\varphi^x(c)=o\big(\Phi(x)\big)$. Поскольку функция φ убывает, точку c можно взять сколь угодно близкой к точке a. Не умаляя общности, будем считать, что функция f неотрицательна на промежутке $[a,c]$.

По условию найдётся такая точка $\overline{c}\in(a,c)$, что $\varphi(c)<\varphi(\overline{c})$. Тогда $I_{\overline{c}}>0$ и

$$\frac{\Phi(x)}{\varphi^x(c)}\geqslant\frac{1}{\varphi^x(c)}\int_a^{\overline{c}}f(t)\,\varphi^x(t)\,dt+\frac{1}{\varphi^x(c)}\int_c^b f(t)\,\varphi^x(t)\,dt\geqslant\frac{\varphi^x(\overline{c})}{\varphi^x(c)}\,I_{\overline{c}}-\int_c^b|f(t)|\,dt\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty,$$

что завершает доказательство леммы. ►

Установленное нами явление локализации — важная качественная характеристика интегралов $\Phi(x)$. Оно лежит в основе изучения этих интегралов при больших значениях параметра x. В частности, оно позволяет сравнивать поведение интегралов $\Phi(x)=\int_a^b f(t)\,\varphi^x(t)\,dt$ и $\Psi(x)=\int_a^b g(t)\,\varphi^x(t)\,dt$ при $x\to+\infty$, если есть информация о поведении дроби $g(t)/f(t)$ при $t\to a$. Сформулируем этот полезный в техническом отношении результат подробнее.

Следствие. *Пусть функции φ и f удовлетворяют условиям леммы, функция g суммируема на $[a,b)$, а $\Psi(x)=\int_a^b g(t)\,\varphi^x(t)\,dt$. Тогда*

а) если $g(t)=O(f(t))$ при $t\to a$, то $\Psi(x)=O\big(\Phi(x)\big)$ при $x\to+\infty$;
б) если $g(t)=o(f(t))$ при $t\to a$, то $\Psi(x)=o\big(\Phi(x)\big)$ при $x\to+\infty$;
в) если $g(t)\sim f(t)$ при $t\to a$, то $\Psi(x)\sim\Phi(x)$ при $x\to+\infty$.

Доказательство. а) По условию существуют такой коэффициент $C>0$ и такая точка $c\in(a,b)$, что $|g(t)|\leqslant C|f(t)|$ на (a,c). При этом точку c можно взять столь близкой к a, что функция f не меняет знак на (a,c). Тогда

$$|\Psi(x)|\leqslant\int_a^c|g(t)|\,\varphi^x(t)\,dt+\int_c^b|g(t)|\,\varphi^x(t)\,dt\leqslant C\int_a^c|f(t)|\,\varphi^x(t)\,dt+O\big(\varphi^x(c)\big).$$

Так как f не меняет знак на (a,c), то с помощью леммы мы получаем

$$|\Psi(x)|\leqslant \mathrm{C}\left|\int_a^c f(t)\,\varphi^x(t)\,dt\right|+o\big(\Phi(x)\big)=C|\Phi(x)|+o\big(\Phi(x)\big),$$

что завершает доказательство пункта а).

Это же рассуждение доказывает и пункт б), поскольку коэффициент C можно взять сколь угодно малым. Наконец, для получения утверждения в) следует применить б) к разности $f-g$. ►

3.2. Исследование интегралов вида $\Phi(x)$ основано на простой идее: опираясь на локализацию, аппроксимировать функции f и φ вблизи точки a функциями, порождающими легко вычисляющийся интеграл. Очевидно, поведение $\Phi(x)$ при $x\to+\infty$ в значительной степени определяется той скоростью, с которой $\varphi(t)$ теряет максимальное значение при удалении аргумента t от точки a. Иначе говоря, в рассматриваемой задаче решающую роль играет бесконечно малая (при $t\to a$) величина $\varphi(a)-\varphi(t)$, и поэтому скорость её изменения следует в первую очередь учитывать при выборе аппроксимации.

Для гладких функций φ важнейшими являются следующие два случая:

а) $\varphi(t)-\varphi(a)\underset{t\to a}{\sim}\varphi'(a)(t-a)$, где $\varphi'(a)<0$,

б) $\varphi(t)-\varphi(a)\underset{t\to a}{\sim}\frac{1}{2}\varphi''(a)(t-a)^2$, где $\varphi''(a)<0\quad(\varphi'(a)=0)$.

Тогда при условии $f(t)\underset{t\to a}{\longrightarrow}L\neq0$ справедливы *асимптотические формулы Лапласа*

$$\text{а) }\Phi(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}L\frac{\varphi(a)}{|\varphi'(a)|x}\,\varphi^x(a),\qquad\text{б) }\Phi(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}L\sqrt{\frac{\pi\varphi(a)}{2|\varphi''(a)|x}}\,\varphi^x(a).\tag{2}$$

Мы установим более общий факт, предполагая, что разность $\varphi(a)-\varphi(t)$ — бесконечно малая степенно́го типа, т. е. что $\varphi(a)-\varphi(t)\underset{t\to a}{\sim}C(t-a)^p$, где C, $p>0$. Если представить функцию φ в виде $\varphi(t)=e^{-S(t)}$, то это условие равносильно тому, что $S(t)-S(a)\underset{t\to a}{\sim}\frac{C}{\varphi(a)}(t-a)^p$.

Доказательство нашего основного результата при $\varphi(a)=1$ сводится по существу к обоснованию естественной идеи — замене $\varphi(t)$ на “похожую” вблизи точки a функцию $e^{-C(t-a)^p}$. Реализацию этого плана разделим на три этапа.

Прежде всего рассмотрим интеграл $\int_0^\infty e^{-xt^p}\,dt$, который будет в дальнейшем служить эталоном. Он легко вычисляется с помощью функции гамма:

$$\int_0^\infty e^{-xt^p}\,dt = \int_0^\infty e^{-u}\,d\Big(\frac{u}{x}\Big)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{p}\,\Gamma\Big(\frac{1}{p}\Big)\,x^{-\frac{1}{p}}.$$

На следующем этапе мы, опираясь на явление локализации, убедимся, что замена t^p на эквивалентную функцию не изменит асимптотики интеграла. Сформулируем это утверждение в виде леммы.

Лемма. *Пусть определённая на $[0,b)$ функция φ удовлетворяет условиям леммы о локализации. Если $\ln\varphi(t) \underset{t\to+0}{\sim} -t^p$ для некоторого $p>0$, то*

$$\Phi(x) = \int_0^b \varphi^x(t)\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_0^\infty e^{-xt^p}\,dt = C_p\,x^{-\frac{1}{p}}, \qquad \text{где}\ \ C_p = \frac{1}{p}\,\Gamma\Big(\frac{1}{p}\Big).$$

Доказательство. Положим $S(t) = -\ln\varphi(t)$ и, зафиксировав произвольное число $\varepsilon\in(0,1)$, найдём такое $c\in(0,b)$, что $(1-\varepsilon)t^p < S(t) < (1+\varepsilon)t^p$ при $0<t<c$. Согласно лемме о локализации

$$\Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \Psi(x) = \int_0^c e^{-xS(t)}\,dt.$$

Оценим интеграл Ψ. Очевидно,

$$\int_0^c e^{-(1+\varepsilon)xt^p}\,dt < \Psi(x) < \int_0^c e^{-(1-\varepsilon)xt^p}\,dt.$$

При $x\to+\infty$ интегралы, стоящие слева и справа, эквивалентны соответственно $C_p\,(1+\varepsilon)^{-\frac{1}{p}}\,x^{-\frac{1}{p}}$ и $C_p\,(1-\varepsilon)^{-\frac{1}{p}}\,x^{-\frac{1}{p}}$. Поэтому для достаточно большого x справедливо двойное неравенство

$$C_p\,(1+\varepsilon)^{-\frac{1}{p}-1} < x^{\frac{1}{p}}\Psi(x) < C_p\,(1-\varepsilon)^{-\frac{1}{p}-1}.$$

Поскольку $x^{\frac{1}{p}}\Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x^{\frac{1}{p}}\Psi(x)$, отсюда следует, что (снова для достаточно большого x)

$$C_p\,(1+\varepsilon)^{-\frac{1}{p}-2} < x^{\frac{1}{p}}\Phi(x) < C_p\,(1-\varepsilon)^{-\frac{1}{p}-2}.$$

Ввиду произвольности ε это доказывает, что $x^{\frac{1}{p}}\Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} C_p$. ►

Теперь мы готовы перейти к завершающему этапу и получить основной результат.

Теорема. *Пусть положительная функция φ убывает, а функция f суммируема на промежутке $[a,b)$, причём*

а) существуют такие числа C, $p>0$, что $\varphi(a)-\varphi(t) \underset{t\to a}{\sim} C(t-a)^p$;

б) существуют такие числа $L\neq 0$ и $q>-1$, что $f(t) \underset{t\to a}{\sim} L(t-a)^q$.

Тогда

$$\Phi(x) = \int_a^b f(t)\,\varphi^x(t)\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{L}{p}\,\Gamma\Big(\frac{q+1}{p}\Big)\,\Big(\frac{\varphi(a)}{Cx}\Big)^{\frac{q+1}{p}}\,\varphi^x(a). \tag{3}$$

В частности, при $q=0$ и $p=1$ или 2 мы получаем формулы Лапласа (2).

Как мы уже отмечали, случай, когда функция φ возрастает, сводится к рассмотренному с помощью замены переменной. Поэтому если φ неотрицательна, не убывает на промежутке $(a,b]$ (здесь $-\infty \leqslant a < b < +\infty$), $\varphi(b)-\varphi(t) \sim C(b-t)^p$ и $f(t) \sim L(b-t)^q$ при $t \to b$, то соотношение (3) сохраняется (с заменой точки a на b).

Если же функция φ достигает наибольшего значения в точке t_0 интервала (a,b), возрастая слева от неё и убывая справа, причём $\varphi(t_0)-\varphi(t) \sim C|t-t_0|^p$ и $f(t) \sim L|t-t_0|^q$ при $t \to t_0$, то, применив формулу к каждому из промежутков $(a,t_0]$, $[t_0,b)$ в отдельности, мы видим, что правую часть следует удвоить:

$$\Phi(x) = \int_a^b f(t)\,\varphi^x(t)\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2L}{p}\,\Gamma\Big(\frac{q+1}{p}\Big)\left(\frac{\varphi(t_0)}{Cx}\right)^{\frac{q+1}{p}} \varphi^x(t_0). \tag{3'}$$

Доказательство. Заменяя φ на $\frac{\varphi}{\varphi(a)}$, можно считать, что $\varphi(a)=1$. Кроме того, будем предполагать $a=0$ (этого можно добиться заменой переменной $t \mapsto t-a$). Таким образом, надо доказать, что

$$\Phi(x) = \int_0^b f(t)\,\varphi^x(t)\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{L}{p}\,\Gamma\Big(\frac{q+1}{p}\Big)\,(Cx)^{-\frac{q+1}{p}},$$

если $1-\varphi(t) \underset{t\to 0}{\sim} Ct^p$. Благодаря следствию из леммы о локализации мы можем, не меняя асимптотики интеграла, заменить функцию f на эквивалентную:

$$\Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_0^b Lt^q\,\varphi^x(t)\,dt = \frac{L}{q+1}\int_0^{b^{q+1}} \varphi^x\Big(u^{\frac{1}{q+1}}\Big)du = \frac{L}{q+1}\int_0^B e^{-Cx\,S(u)}du,$$

где $S(u) = -\frac{1}{C}\,\ln\varphi\big(u^{\frac{1}{q+1}}\big)$, $B = b^{q+1}$. При $u \to 0$ мы, согласно условию, имеем

$$S(u) \sim \frac{1}{C}\Big(1-\varphi\big(u^{\frac{1}{q+1}}\big)\Big) \sim u^{\frac{p}{q+1}}.$$

Это позволяет применить лемму (с параметром Cx вместо x и показателем степени $\frac{p}{q+1}$ вместо p) к интегралу по промежутку $[0,B)$:

$$\Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{L}{q+1}\,\frac{q+1}{p}\,\Gamma\Big(\frac{q+1}{p}\Big)\,(Cx)^{-\frac{q+1}{p}} = \frac{L}{p}\,\Gamma\Big(\frac{q+1}{p}\Big)\,(Cx)^{-\frac{q+1}{p}}. \quad \blacktriangleright$$

Замечание. Пренебрежимо малый вклад в $\Phi(x)$ дают не только точки интервала (c,b) с фиксированным $c \in (a,b)$. Параметр c можно брать зависящим от x и стремящимся (но не слишком быстро) к точке a. В условиях теоремы справедливо такое уточнение явления локализации: если $\alpha(x) \to 0$ и $x^{\frac{1}{p}}\alpha(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$, то

$$\int_a^b f(t)\,\varphi^x(t)\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \int_a^{a+\alpha(x)} f(t)\,\varphi^x(t)\,dt.$$

Действительно, будем, как и при доказательстве теоремы, считать $a=0$ и $\varphi(a)=1$. Поскольку при фиксированном $c \in (a,b)$ интеграл по промежутку $[c,b)$ экспоненциально мал, нам достаточно оценить интеграл по промежутку $[\alpha(x),c]$. Возьмём число c

столь малым, что $|f(t)| \leqslant 2|L|t^q$ и $1-\varphi(t) \geqslant \frac{C}{2}t^p$ для $t \in [0,c]$. Тогда $\varphi(t) \leqslant e^{-Ct^p/2}$ и поэтому

$$\left|\int_{\alpha(x)}^{c} f(t)\,\varphi^x(t)\,dt\right| \leqslant 2|L|\int_{\alpha(x)}^{\infty} t^q e^{-\frac{C}{2}xt^p}\,dt = \frac{2|L|}{x^{\frac{q+1}{p}}}\int_{x^{\frac{1}{p}}\alpha(x)}^{\infty} u^q e^{-\frac{C}{2}u^p}\,du = o(\Phi(x)).$$

Из этой оценки следует также, что в случае, когда $\left(\frac{x}{\ln x}\right)^{\frac{1}{p}}\alpha(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$, относительная погрешность равенства $\Phi(x) \approx \int_a^{a+\alpha(x)} f(t)\varphi^x(t)\,dt$ убывает "сверхстепенным" образом, т. е. быстрее любой отрицательной степени x.

В теореме 3.2 мы предполагали, что разность $\varphi(a)-\varphi(t)$ и функция $f(t)$ имеют при $t \to a$ главные части степенно́го вида. В п. 3.4 будут рассмотрены примеры, в которых это условие нарушается. При их исследовании важную роль будет играть выбор стягивающейся с ростом x окрестности точки a. Следует иметь в виду, что в случаях, когда бесконечно малая $\varphi(a)-\varphi(t)$ не является степенно́й, замена её на эквивалентную может изменить асимптотику изучаемого интеграла (см. упр. 10). Дополнительные ограничения, позволяющие осуществлять такую замену, указаны в упр. 11.

3.3. Рассмотрим несколько примеров применения формулы Лапласа.

Пример 1. Найдём асимптотику интегралов $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^x t\,dt$. Для этого воспользуемся формулой Лапласа 2б) с функциями $\varphi(t) = \cos t$ и $f(t) \equiv 1$, что сразу приводит к соотношению

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^x t\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2x}}.$$

Напомним, что в случае, когда $x = n$ — целое число, интеграл равен $v_n\frac{(n-1)!!}{n!!}$, где $v_n = 1$ при нечётном n и $v_n = \frac{\pi}{2}$ при чётном. Поэтому для таких x асимптотику можно получить, опираясь на формулу Стирлинга.

Пример 2. Асимптотика функции Γ (формула Стирлинга). В интеграле $\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\,dt$ подынтегральная функция достигает максимального значения при $t = x$, и в окрестности этой точки её график имеет резко выраженный "пик", что наводит на мысль о возможности использования метода Лапласа. Однако его нельзя применить сразу, так как точка максимума подынтегральной функции меняется вместе с параметром. Чтобы привести подынтегральное выражение к рассмотренному в теореме 3.2 виду, необходимо зафиксировать скользящий пик, чего можно достичь с помощью подстановки $t = xu$. Это даёт нам

$$\Gamma(x+1) = x^{x+1}\int_0^\infty \varphi^x(u)\,du,$$

где $\varphi(u) = ue^{-u}$. Очевидно, φ возрастает на $[0,1]$, убывает на $[1,+\infty)$ и $\varphi''(1) = -e^{-1}$. Учитывая, что максимальное значение $\varphi(1) = e^{-1}$ достигается во внутренней точке промежутка интегрирования, мы с помощью формулы (3′) получаем

$$\int_0^\infty \varphi^x(u)\,du \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{x}}\,e^{-x}.$$

Следовательно,

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1) = x^x\int_0^\infty \varphi^x(u)\,du \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}\,x^{x-\frac{1}{2}}\,e^{-x}.$$

Ранее (см. п. 2.6) этот результат был получен другим путём.

Пример 3. Обсуждая в п. VI.7.3 сечения куба $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]^n$, мы попутно получили формулу для вычисления площади S_n сечения этого куба плоскостью, проходящей через центр куба и ортогональной его главной диагонали:

$$S_n = \frac{2}{\pi}\sqrt{n}\int_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt.$$

Проследим за поведением величин S_n при неограниченном возрастании размерности n. Оно определяется асимптотикой интегралов

$$I_n = \int_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt.$$

Непосредственное применение формулы Лапласа затруднено тем, что при $t \geqslant 0$ функция $\frac{\sin t}{t}$ меняет знак. Но это препятствие легко устранимо, так как при $n \to \infty$ интеграл по промежутку $[\pi, +\infty)$ экспоненциально мал:

$$\int_\pi^\infty \left|\frac{\sin t}{t}\right|^n dt \leqslant \int_\pi^\infty \frac{1}{t^n}\,dt \leqslant \frac{1}{\pi^{n-1}} \qquad (n \geqslant 2).$$

В то же время формула Лапласа применима к интегралу по промежутку $[0,\pi]$: поскольку $\frac{1}{t}\,\sin t = 1 - \frac{1}{6}t^2 + o\big(t^2\big)$ при $t \to 0$, мы получаем

$$\int_0^\pi \left(\frac{\sin t}{t}\right)^n dt \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6\pi}{n}}.$$

Поэтому $I_n \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{6\pi}{n}}$ и, следовательно, $S_n \to \sqrt{\frac{6}{\pi}}$. Позже, в примере 2 п. 3.5, мы уточним этот результат.

Пример 4. Найдём асимптотику сумм

$$S_n = 1 + n + \frac{n^2}{2!} + \ldots + \frac{n^k}{k!} + \ldots + \frac{n^n}{n!}.$$

Очевидно, S_n есть значение n-го многочлена Тейлора функции e^x, вычисленное в точке n. Воспользуемся интегральным представлением остатка формулы Тейлора:

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n e^t\,dt.$$

При $x = n$ после подстановки $t = ns$ мы получим

$$e^n - S_n = \frac{1}{n!}\int_0^n (n-t)^n e^t\,dt = \frac{n^{n+1}}{n!}\int_0^1 \big((1-s)\,e^s\big)^n\,ds.$$

Так как $(1-s)e^s = 1 - \frac{1}{2}s^2 + o(s^2)$ при $s \to 0$, то формула Лапласа даёт нам

$$e^n - S_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n^{n+1}}{n!}\sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

Для получения окончательного результата остаётся воспользоваться формулой Стирлинга, из которой следует, что $e^n - S_n \sim \frac{1}{2}\,e^n$, т. е. $S_n \sim \frac{1}{2}\,e^n$.

Замечание 1. Если ослабить условия а) и б) теоремы 3.2, заменив их двусторонними оценками $\varphi(a)-\varphi(t) \underset{t\to a}{\asymp} (t-a)^p$ и $0 \leqslant f(t) \underset{t\to a}{\asymp} (t-a)^q$, то с помощью леммы 3.1 можно получить двустороннюю оценку $\Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\asymp} x^{-\frac{q+1}{p}}$. Например, нетрудно проверить, что функция Кантора φ на промежутке $[0,1]$ удовлетворяет двойному неравенству $\left(\frac{t}{2}\right)^p \leqslant \varphi(t) \leqslant t^p$, где $p=\log_3 2$, и тождеству $\varphi(t)+\varphi(1-t)=1$. Поэтому для интеграла $\Phi(x)=\int_0^1 \varphi^x(t)\,dt$ справедлива двусторонняя оценка $\Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\asymp} x^{-\log_2 3}$. Его асимптотика описывается значительно сложнее (см. упр. 14).

Замечание 2. Полезно отметить, что предположение о монотонности функции φ использовалось лишь при доказательстве леммы о локализации. Его можно заменить в этой лемме, а следовательно, и в теореме 3.2 менее ограничительным условием

$$\lim_{t\to a}\varphi(t) > \sup_{t>c}\varphi(t) \quad \text{для любого} \quad c \quad \text{из интервала} \quad (a,b).$$

Так будет, например, если функция φ непрерывна на $[a,b]$ и $\varphi(a)>\varphi(t)$ при $t\neq a$.

3.4. Применения метода Лапласа не ограничиваются лишь обоснованием формул (2), (3) или (3′). Возможности его использования гораздо шире. Идея метода — локализация и замена в малой окрестности подынтегральной функции её тейлоровским разложением — оказывается вполне эффективной и в случаях, когда условия теоремы 3.2 нарушаются. Основную трудность при этом представляет выбор окрестности. С одной стороны, она не должна быть слишком большой, так как в противном случае скажется погрешность, вызванная применением формулы Тейлора. С другой стороны, для нейтрализации погрешности, возникающей при замене исходного интеграла интегралом по окрестности, её нельзя брать слишком малой. Удачный выбор окрестности, позволяющий добиться пренебрежимости обеих указанных погрешностей, и составляет главное содержание решения.

Не стремясь здесь к формулированию общих утверждений, а желая дать лишь общее представление о том, как следует находить асимптотику в этих ситуациях, мы последуем тезису Ньютона, согласно которому “при изучении наук примеры полезнее правил”, и ограничимся разбором двух конкретных задач (см. также упр. 9, 10, 12).

Пример 1. Пусть

$$\Phi(x)=\int_0^b |\ln t|^r e^{-xt^p}\,dt,$$

где $p>0$, а r — произвольное вещественное число (при $r\leqslant -1$ мы считаем, что $0<b<1$, чтобы несуммируемая особенность подынтегральной функции — точка $t=1$ — не принадлежала промежутку интегрирования). Заметим, что в этом примере функция $f(t)=|\ln t|^r$ при $t\to 0$ не удовлетворяет условию б) теоремы 3.2 (а при $b=+\infty$ даже не суммируема на $(0,+\infty)$). Для определения асимптотики воспользуемся схемой выбора окрестности, описанной в замечании к этой теореме.

Поскольку наибольшее значение функция $\varphi(t)=e^{-t^p}$ принимает при $t=0$, основной вклад в $\Phi(x)$ даёт интеграл по окрестности нуля. В её выборе у нас есть довольно большая свобода. Положим $\alpha(x)=x^{-\frac{1}{2p}}$ и выясним поведение интегралов

$\Phi_1(x) = \int_0^{\alpha(x)} \dots$ и $\Phi_2(x) = \int_{\alpha(x)}^b \dots$, сумма которых равна $\Phi(x)$. Сделав в первом из них замену $u = x^{1/p}t$, мы после простых преобразований получим:

$$\Phi_1(x) = x^{-\frac{1}{p}} \ln^r(x^{\frac{1}{p}}) \int_0^{x^{\frac{1}{2p}}} \left|1 - p\,\frac{\ln u}{\ln x}\right|^r e^{-u^p}\,du.$$

При $0 < u < x^{\frac{1}{2p}}$ и достаточно большом x справедливы оценки

$$\frac{1}{2} \leqslant \left|1 - p\,\frac{\ln u}{\ln x}\right| \leqslant 1 + p\,|\ln u|.$$

Следовательно, при любом r (как положительном, так и отрицательном)

$$\left|1 - p\,\frac{\ln u}{\ln x}\right|^r \leqslant 2^{|r|} + (1 + p\,|\ln\,u|)^r, \quad \text{если} \;\; 0 < u < x^{\frac{1}{2p}}.$$

Это неравенство позволяет воспользоваться теоремой Лебега:

$$\int_0^{x^{\frac{1}{2p}}} \left|1 - p\,\frac{\ln u}{\ln x}\right|^r e^{-u^p}\,du \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^\infty e^{-u^p}\,du = \Gamma\Big(1 + \frac{1}{p}\Big).$$

Поэтому $\Phi_1(x) \sim \Gamma\big(1+\frac{1}{p}\big)x^{-\frac{1}{p}} \ln^r(x^{\frac{1}{p}})$. Убедимся теперь, что $\Phi_2(x) = o\big(\Phi_1(x)\big)$. В самом деле,

$$\Phi_2(x) \leqslant \int_{\alpha(x)}^b |\ln\,t|^r e^{-xt^p}\,dt \leqslant e^{-(x-1)\alpha^p(x)} \int_{\alpha(x)}^b |\ln\,t|^r e^{-t^p}\,dt \leqslant \frac{\text{const}}{e^{\sqrt{x}}} = o\big(\Phi_1(x)\big).$$

Таким образом,

$$\int_0^b |\ln\,t|^r e^{-xt^p}\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \Gamma\Big(1 + \frac{1}{p}\Big)\left(\frac{\ln x}{p}\right)^r x^{-\frac{1}{p}}.$$

Так же как интеграл $\int_0^\infty e^{-xt^p}\,dt$ в теореме 3.2, рассмотренный пример может служить эталоном при исследовании интегралов вида $\int_a^b f(t)\varphi^x(t)\,dt$, где $f(t) \underset{t\to+0}{\sim} L(t-a)^q|\ln(t-a)|^r$ (см. упр. 5 и 6).

Пример 2. Найдём асимптотику интеграла

$$\Phi(x) = \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} \Big(1 + \frac{1}{\ln t}\Big)^x\,dt.$$

Функция $\varphi(t) = 1 + \frac{1}{\ln t}$ (будем считать, что $\varphi(0) = 1$) строго убывает на промежутке интегрирования. Поэтому основной вклад в интеграл дают точки t близкие к нулю. Применению формулы (3) препятствует не степенно́й характер бесконечно

малой $\varphi(0)-\varphi(t)=-\frac{1}{\ln t}$. Для преодоления этого затруднения целесообразно сделать замену переменной $t=e^{-u}$, которая приводит к равенству

$$\Phi(x)=\int_1^\infty\Big(1-\frac{1}{u}\Big)^x e^{-u}du.$$

При фиксированном x подынтегральная функция достигает наибольшего значения в точке $u_x=\frac{1}{2}\big(1+\sqrt{1+4x}\,\big)\approx\sqrt{x}$. Её значение при $u=\sqrt{x}$ равно

$$\Big(1-\frac{1}{\sqrt{x}}\Big)^x e^{-\sqrt{x}}=e^{-2\sqrt{x}+O(1)}.$$

В точках $u\leqslant\frac{\sqrt{x}}{3}$ она существенно меньше и не превосходит $e^{-u-\frac{x}{u}}\leqslant e^{-\frac{10}{3}\sqrt{x}}$. Поэтому вклад этих точек в интеграл $\Phi(x)$ мал: он допускает оценку $o\big(e^{-3\sqrt{x}}\big)$.

Рассмотрим теперь интеграл $\widetilde{\Phi}(x)$ по оставшемуся промежутку $(\frac{\sqrt{x}}{3},+\infty)$, где $\frac{\sqrt{x}}{3}>1$. Это и есть та "малая" окрестность точки u_x, в которой удаётся аппроксимировать подынтегральную функцию с помощью формулы Тейлора:

$$\Big(1-\frac{1}{u}\Big)^x e^{-u}=\exp\left(-u-x\Big(\frac{1}{u}+\frac{1}{2u^2}+O\Big(\frac{1}{u^3}\Big)\Big)\right)\quad\text{для}\ \ u\geqslant\frac{\sqrt{x}}{3}.$$

Как мы уже отмечали, максимум подынтегральной функции достигается в точке $u_x\approx\sqrt{x}$, меняющейся вместе с x. Чтобы уменьшить эту зависимость и свести ситуацию к случаю, рассмотренному в теореме 3.2, сделаем ещё одну замену переменной: $u=\sqrt{x}v$. Тогда

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi}(x)&=\sqrt{x}\int_{\frac{1}{3}}^\infty\exp\left(-\sqrt{x}\Big(v+\frac{1}{v}\Big)-\frac{1}{2v^2}+O\Big(\frac{1}{\sqrt{x}\,v^3}\Big)\right)dv=\\&=\sqrt{x}\int_{\frac{1}{3}}^\infty\exp\left(-\sqrt{x}\Big(v+\frac{1}{v}\Big)-\frac{1}{2v^2}\right)\left(1+O\Big(\frac{1}{\sqrt{x}}\Big)\right)dv.\end{aligned}$$

Ясно, что

$$\widetilde{\Phi}(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\sqrt{x}\int_{\frac{1}{3}}^\infty\exp\left(-\sqrt{x}\Big(v+\frac{1}{v}\Big)-\frac{1}{2v^2}\right)dv.$$

К возникшему интегралу применима теорема 3.2 (с параметром $\sqrt{x}$ вместо x). Учитывая, что наибольшее значение e^{-2} функция $e^{-(v+\frac{1}{v})}$ принимает во внутренней точке $v=1$ промежутка интегрирования, мы получаем с помощью $(3')$:

$$\widetilde{\Phi}(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\sqrt{\frac{\pi}{e}}\,\sqrt[4]{x}\,e^{-2\sqrt{x}}.$$

Такова асимптотика и исходного интеграла $\Phi(x)$, поскольку, как мы уже выяснили, $\Phi(x)-\widetilde{\Phi}(x)=o(e^{-3\sqrt{x}})$ при $x\to+\infty$.

Обратим внимание читателя, что при $\varphi(a)=1$ в случае, охватываемом теоремой 3.2, интеграл $\Phi(x)$ убывает степенны́м образом. В разобранном же примере $\Phi(x)$ убывает быстрее, чем любая отрицательная степень параметра. Причина этого в том, что функция $1+\frac{1}{\ln t}$ имеет около нуля "сверхострый пик": при возрастании аргумента t она теряет своё максимальное значение быстрее, чем любая функция вида $1-t^p$ $(p>0)$ (см. также упр. 10).

3.5. До сих пор мы использовали метод Лапласа лишь для определения главной части интегралов вида (1), ничего не говоря о дальнейшем уточнении асимптотики. Переходя к этому вопросу, мы до конца пункта будем предполагать, что функции φ и f удовлетворяют условиям теоремы 3.2 с $a = 0$. Конечно, для уточнения полученного в ней результата необходима дополнительная информация о поведении функций φ и f вблизи нуля. Обычно исходят из локальных асимптотических разложений этих функций, в том или ином смысле обобщающих тейлоровское разложение.

Напомним, что ряд $\sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j t^{q_j}$ $\left(\text{или } \sum\limits_{j=0}^{\infty} a_j t^{-q_j}\right)$, где $q_0 < q_1 < \dots$ и $q_j \to +\infty$, называется асимптотическим разложением функции F при $t \to 0$ (при $t \to +\infty$), если для каждого n справедливо соотношение $F(t) = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j t^{q_j} + o(t^{q_n})$ (соответственно $F(t) = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j t^{-q_j} + o(t^{-q_n})$). В частности, если функция F имеет в нуле производные любого порядка, то из формулы Тейлора следует, что она имеет при $t \to 0$ асимптотическое разложение $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \frac{F^{(j)}(0)}{j!} t^j$ (независимо от того, сходится написанный ряд Тейлора при каких-нибудь $t \neq 0$ или нет).

В дальнейшем мы неоднократно будем использовать формулу

$$\int_0^{\infty} t^q e^{-xt^p}\,dt = \int_0^{\infty} \left(\frac{u}{x}\right)^{\frac{q}{p}} e^{-u}\,d\left(\frac{u}{x}\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{p}\Gamma\left(\frac{q+1}{p}\right) x^{-\frac{q+1}{p}}. \tag{4}$$

Заметим, что погрешность, возникающая при замене в левой части этого равенства бесконечного промежутка конечным, экспоненциально мала, точнее

$$\int_0^{b} t^q e^{-xt^p}\,dt = \frac{1}{p}\Gamma\left(\frac{1+q}{p}\right) x^{-\frac{1+q}{p}} + O\left(e^{-xb^p}\right) \quad \text{при } x \to +\infty. \tag{4'}$$

Действительно, так как $t^q e^{-xt^p} \leqslant \frac{C}{t^2}\, e^{-xb^p}$ при $t \geqslant b$, $x > 0$, то

$$\int_0^{\infty} t^q e^{-xt^p}\,dt - \int_0^{b} t^q e^{-xt^p}\,dt = \int_b^{\infty} t^q e^{-xt^p}\,dt \leqslant \int_b^{\infty} \frac{C}{t^2}\, e^{-xb^p} dt = \frac{C}{b} e^{-xb^p}.$$

Следующая лемма описывает асимптотику интеграла $\Phi(x)$ в простейшем и вместе с тем важнейшем случае, когда $\varphi(t) = e^{-t^p}$.

Лемма (Ватсон*)). *Пусть функция f суммируема на промежутке $[0, b)$ $(0 < b \leqslant +\infty)$ и $\Phi(x) = \int_0^b f(t) e^{-xt^p}\,dt$. Если*

$$f(t) = a_1 t^{q_1} + \dots + a_n t^{q_n} + o\left(t^{q_n}\right) \quad \text{при } t \to 0,$$

где $-1 < q_1 < \dots < q_n$, то при $x \to +\infty$

$$\Phi(x) = \int_0^b f(t)\, e^{-xt^p}\,dt = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{n} a_j \Gamma\left(\frac{1+q_j}{p}\right) x^{-\frac{1+q_j}{p}} + o\left(x^{-\frac{1+q_n}{p}}\right). \tag{5}$$

---

*) Джордж Невилл **Ватсон** (Watson), 1886–1965, — английский математик.

Доказательство сразу получается из соотношения (4′), поскольку в силу следствия из леммы 3.1

$$\int_0^b o\big(t^{q_n}\big)e^{-xt^p}\,dt = o\left(\int_0^\infty t^{q_n}e^{-xt^p}\,dt\right) = o\big(x^{-\frac{1+q_n}{p}}\big). \quad \blacktriangleright$$

Из леммы Ватсона и определения асимптотического разложения немедленно вытекает

Следствие. *Если при $0 \leqslant t < \delta$ функция f представима в виде $f(t) = t^q g(t)$, где $g \in C^\infty\big([0,\delta)\big)$, то для любого n при $x \to +\infty$ справедливо асимптотическое соотношение*

$$\Phi(x) = \frac{1}{p}\sum_{j=0}^{n}\frac{g^{(j)}(0)}{j!}\Gamma\Big(\frac{q+j+1}{p}\Big)x^{-\frac{q+j+1}{p}} + o\big(x^{-\frac{q+n+1}{p}}\big). \tag{6}$$

Интересно отметить, что хотя в общем случае асимптотические равенства могут нарушаться при формальном дифференцировании (например, бесконечно малая функция может иметь неограниченную производную), в условиях леммы Ватсона асимптотическое равенство (5) (а следовательно, и (6)) остаётся справедливым при дифференцировании любое число раз.

Действительно, применение правила Лейбница (теорема 1.5) показывает, что функция $\Phi(x)$ принадлежит классу C^∞ и что

$$\Phi'(x) = \int_0^b f(t)\Big(e^{-xt^p}\Big)'_x\,dt = -\int_0^b \widetilde{f}(t)\,e^{-xt^p}dt,$$

где

$$\widetilde{f}(t) = t^p f(t) = a_1 t^{p+q_1} + \ldots + a_n t^{p+q_n} + o(t^{p+q_n}) \quad \text{при} \quad t \to 0.$$

Можно считать, что $b < +\infty$ (иначе уменьшим промежуток интегрирования, допустив при этом экспоненциально малую погрешность). Тогда функция $\widetilde{f}$ суммируема на $(0,b)$ и применив к ней лемму Ватсона, мы получим

$$\Phi'(x) = -\int_0^b \widetilde{f}(t)\,e^{-xt^p}dt = -\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{n}a_j\Gamma\Big(\frac{1+p+q_j}{p}\Big)x^{-\frac{1+p+q_j}{p}} + o\left(x^{-\frac{1+p+q_n}{p}}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{n}a_j\Gamma\Big(\frac{1+q_j}{p}\Big)x^{-\frac{1+q_j}{p}}\right)'_x + o\left(x^{-\frac{1+q_n}{p}-1}\right),$$

что доказывает возможность почленного дифференцирования соотношения (5).

Как следует поступать, когда функция φ не совпадает с e^{-t^p}, а устроена сложнее? Не вдаваясь в подробности, наметим два возможных подхода. Первый из них прямолинеен — свести возникшую задачу к предыдущей. Считая, что φ — функция, строго убывающая от единицы до нуля и гладкая на $(0,b)$, сделаем в интеграле $\Phi(x) = \int_0^b f(t)\,\varphi^x(t)\,dt$ замену переменной $u = -\ln\varphi(t)$. Тогда он преобразуется к уже рассмотренному виду:

$$\Phi(x) = \int_0^\infty g(u)\,e^{-xu}du,$$

где $g(u) = f(\psi(u))\psi'(u)$, ψ — функция, обратная к $-\ln\varphi$. Зная асимптотические разложения функций f, φ и φ', можно найти асимптотическое разложение функции g, что позволит воспользоваться леммой Ватсона. Если $f \in C^\infty$, то при этом может быть полезна формула Лагранжа для степенного ряда обратной функции.

Второй подход состоит в том, чтобы имея дополнительную информацию о поведении разности $\varphi(0) - \varphi(t)$, представить φ^x в виде произведения экспоненты e^{-Cxt^p} на сумму ряда по степеням произведения $xs(t)$, где функция $s(t)$ быстро убывает при $t \to 0$.

Рассмотрим этот подход подробнее, считая, как и раньше, ради упрощения выкладок, что $\varphi(0) = 1$. Тогда функция $S = -\ln\varphi$ представима в виде $S(t) = Ct^p + s(t)$, где $s(t) = o(t^p)$ при $t \to 0$. Будем предполагать, что $s(t) = O(t^r)$ при $t \to 0$, где $r > p$. Кроме того, будем не умаляя общности считать функцию s ограниченной на $[0, b)$. В противном случае можно уменьшить промежуток интегрирования, пользуясь тем, что замена $[0, b)$ на $[0, c)$ даёт экспоненциально малую погрешность. Так как

$$\varphi^x(t) = e^{-xCt^p - xs(t)} = e^{-xCt^p}\left(1 - xs(t) + \ldots + \frac{(-xs(t))^{n-1}}{(n-1)!} + O\Big((xt^r)^n\Big)\right)$$

и $f(t) = O(t^q)$, то

$$\Phi(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-x)^j}{j!} \int_0^b f(t)s^j(t)e^{-xCt^p}\,dt + O\left(x^n \int_0^b t^{q+nr} e^{-xCt^p}\,dt\right). \tag{7}$$

Каждое слагаемое можно оценить с помощью формулы (4′). В частности, O-член имеет порядок $x^{-\frac{q+1+n(r-p)}{p}}$. Если известна дополнительная информация о поведении функций f и s при $t \to 0$, то мы можем уточнить асимптотику каждого из слагаемых, пользуясь леммой Ватсона. Разумеется, это уточнение имеет смысл лишь до тех пор, пока не превзойдена точность, которая гарантируется остаточным членом.

Поясним сказанное на двух примерах. Первый из них связан с функцией Γ.

Пример 1. Применяя описанный метод, уточним соотношение $\frac{x^a\Gamma(x)}{\Gamma(x+a)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, полученное в п. 2.2. Для этого воспользуемся равенством, связывающим функции B и Γ:

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+a+1)} = \mathrm{B}(a, x+1) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^x\,dx$$

(здесь $a > 0$; для упрощения последующих формул мы рассматриваем $\mathrm{B}(a, x+1)$, а не $\mathrm{B}(a, x)$). Очевидно,

$$(1-t)^x = e^{-xt}((1-t)e^t)^x = e^{-xt}e^{-xs(t)},$$

где $s(t) = -\ln(1-t) - t = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \ldots = O(t^2)$, для $t \in [0, \frac{1}{2}]$. Поэтому

$$\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^x\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} t^{a-1}e^{-xt}\left(1 - \frac{x}{2}t^2 + O(xt^3 + x^2t^4)\right)dt + O\Big(\frac{1}{2^x}\Big) =$$

$$= \frac{\Gamma(a)}{x^a} - \frac{x}{2}\frac{\Gamma(a+2)}{x^{a+2}} - \frac{x}{3}\frac{\Gamma(a+3)}{x^{a+3}} + x^2 O\Big(\frac{1}{x^{a+4}}\Big) =$$

$$= \frac{\Gamma(a)}{x^a}\left(1 - \frac{(a+1)a}{2x} + O\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\right).$$

Так как $\frac{\Gamma(a)\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+a+1)} = \frac{\Gamma(a)x\Gamma(x)}{(x+a)\Gamma(x+a)}$, то сокращая на $\Gamma(a)$, мы получаем:

$$\frac{x^a\Gamma(x)}{\Gamma(x+a)} = \Big(1+\frac{a}{x}\Big)\Big(1-\frac{(a+1)a}{2x}+O\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big) = 1+\frac{a(1-a)}{2x}+O\Big(\frac{1}{x^2}\Big).$$

Следующий пример рассмотрен в уже упоминавшейся “Аналитической теории вероятностей” Лапласа (1-я кн., n° 42). Речь идёт об интеграле

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\frac{\sin t}{t}\Big)^x \cos yt\,dt,$$

в котором вещественный параметр y может изменяться одновременно с x. Получающийся результат особенно нагляден, если параметр представить в виде $y = r\sqrt{x}$ $(r \geqslant 0)$.

Пример 2. Найдём асимптотику при $x \to +\infty$ интеграла

$$I_r(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\frac{\sin t}{t}\Big)^x \cos yt\,dt, \qquad \text{где} \;\; y = r\sqrt{x}.$$

В этом случае $\varphi(t) = \frac{\sin t}{t}$ и

$$S(t) = -\ln\varphi(t) = \frac{1}{6}t^2 + s(t), \;\; \text{где} \;\; s(t) = \frac{1}{180}t^4 + O(t^6) \;\; \text{при} \;\; t \to 0.$$

Взяв в формуле (7) $n = 2$, мы получим:

$$I_r(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(1 - xs(t)\big)e^{-\frac{x}{6}t^2}\cos yt\,dt + O\bigg(x^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^8|\cos yt|e^{-\frac{x}{6}t^2}\,dt\bigg).$$

Заменим (с экспоненциально малой погрешностью) интегрирование по промежутку $[0, \frac{\pi}{2}]$ интегрированием по $[0, +\infty)$ и $|\cos yt|$ в O-члене единицей. Тогда мы приходим к соотношению

$$I_r(x) = \int_0^\infty \Big(1 - \frac{x}{180}t^4\Big)e^{-\frac{x}{6}t^2}\cos yt\,dt + O\Big(\int_0^\infty (xt^6 + x^2t^8)e^{-\frac{x}{6}t^2}\,dt\Big).$$

Легко видеть, что O-член имеет порядок малости $O(x^{-\frac{5}{2}})$ (с абсолютной константой). Таким образом,

$$I_r(x) = \int_0^\infty \Big(1 - \frac{x}{180}t^4\Big)e^{-\frac{x}{6}t^2}\cos(\sqrt{x}\,rt)\,dt + O\big(x^{-\frac{5}{2}}\big).$$

Теперь замена переменной интегрирования $t = \sqrt{\frac{6}{x}}\,u$ даёт нам:

$$I_r(x) = \sqrt{\frac{6}{x}}\int_0^\infty \Big(1 - \frac{u^4}{5x}\Big)e^{-u^2}\cos(\sqrt{6}\,ru)\,du + O\big(x^{-\frac{5}{2}}\big).$$

Для вычисления последнего интеграла воспользуемся тем, что, как установлено в примере 1 п. 1.6,

$$\int_0^\infty e^{-u^2}\cos(\sqrt{6}\,ru)\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-\frac{3}{2}r^2}.$$

Продифференцировав это тождество четыре раза по параметру r, можно найти и интеграл $\int_0^\infty u^4 e^{-u^2}\cos(\sqrt{6}\,ru)\,du$. После несложных вычислений мы приходим к искомой формуле:

$$I_r(x) = \sqrt{\frac{3\pi}{2x}}\left(1 - \frac{3}{20x}\bigl(1 - 6r^2 + 3r^4\bigr)\right)e^{-\frac{3}{2}r^2} + O\bigl(x^{-\frac{5}{2}}\bigr).$$

Особый интерес представляет случай, когда $x = m \in \mathbb{N}$. Тогда степень $\left(\frac{\sin t}{t}\right)^m$ определена при всех t. Заменяя с экспоненциально малой погрешностью интеграл $I_{2r}(m)$ на интеграл по промежутку $(0, +\infty)$, мы получаем:

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t}\right)^m \cos(2\sqrt{m}\,rt)\,dt = \sqrt{\frac{3\pi}{2m}}\left(1 - \frac{3}{20m}\bigl(1 - 24r^2 + 48r^4\bigr)\right)e^{-6r^2} + O\bigl(m^{-\frac{5}{2}}\bigr).$$

Напомним (см. равенство (1) п. VI.7.2 при $\omega = (1, \dots, 1)$), что интеграл, стоящий слева, с точностью до множителя совпадает с площадью $S_m(r)$ сечения m-мерного единичного куба плоскостью перпендикулярной главной диагонали куба и удалённой от его центра на расстояние r:

$$S_m(r) = \frac{2}{\pi}\sqrt{m}\int_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t}\right)^m \cos(2\sqrt{m}\,rt)\,dt.$$

Поэтому

$$S_m(r) = \sqrt{\frac{6}{\pi}}\left(1 - \frac{3}{20m}(1 - 24r^2 + 48r^4)\right)e^{-6r^2} + O(m^{-2})$$

(константа в O-члене абсолютная).

При $r = 0$, т. е. для центральных сечений, это даёт нам уточнение асимптотической формулы, полученной в примере 3 п. 3.3:

$$S_m(0) = \sqrt{\frac{6}{\pi}}\left(1 - \frac{3}{20m}\right) + O(m^{-2}).$$

Более точные вычисления (к интегралу $I_0(x)$ надо применить формулу (7) с $n = 3$) приводят к асимптотическому соотношению

$$S_m(0) = \sqrt{\frac{6}{\pi}}\left(1 - \frac{3}{20\,m} - \frac{13}{1120\,m^2}\right) + O(m^{-3}).$$

3.6. Обсудим теперь метод Лапласа в общей ситуации, о которой мы упомянули в начале параграфа. Пусть $(T, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой, неотрицательные функции φ, f измеримы на T, причём φ ограничена, а f суммируема. При сделанных предположениях интегралы

$$\Phi(x) = \int_T f(t)\,\varphi^x(t)\,d\mu(t)$$

конечны для всех $x \geqslant 0$. Вопрос о их поведении при $x \to +\infty$ есть непосредственное обобщение задачи, рассмотренной нами в предыдущих пунктах параграфа. Конечно, мы исключаем тривиальный случай, когда произведение $f\varphi$ обращается в нуль почти везде на T. Заменяя меру, можно свести задачу к случаю, когда мера конечна и $f \equiv 1$. Действительно, из равенства $(2')$ п. VI.1.2 следует, что

$$\Phi(x) = \int_T \varphi^x(t)\,d\nu(t), \quad \text{где} \;\; \nu(A) = \int_A f(t)\,d\mu(t) \quad (A \in \mathfrak{A}),$$

причём $\nu(T) = \int_T f\,d\mu < +\infty$. Чтобы избежать дополнительных оговорок, будем считать в этом пункте функции f и φ положительными всюду на T (этого можно добиться, заменив в случае необходимости T множеством $\{t \in T \mid f(t)\varphi(t) > 0\}$). Тогда неравенства $\nu(A) > 0$ и $\mu(A) > 0$ равносильны, и поэтому условия "почти везде по мере μ" и "почти везде по мере ν" совпадают.

На первый взгляд может показаться, что отказ от сделанных в одномерном случае наглядных предположений о характере изменения функции φ (её кусочной монотонности) лишает нас возможности хотя бы качественно охарактеризовать поведение интегралов $\Phi(x)$. Однако и в новой ситуации сохраняется принцип, лежащий в основе всех предыдущих рассуждений: вклад в интеграл $\Phi(x)$ точек, в которых значения функции φ меньше некоторого уровня, скажем $\varphi < h$, пренебрежимо мал по сравнению с вкладом тех точек, где $\varphi \geqslant h$ (разумеется, в предположении, что множество $T_h = \{t \in T \mid \varphi(t) \geqslant h\}$ имеет положительную меру). Допуская вольность речи, можно сказать, что основной вклад в интеграл $\Phi(x)$ дают те точки $t \in T$, в которых значения $\varphi(t)$ "почти максимальны". Чтобы уточнить это утверждение, используем введённое в п. IV.4.5 понятие истинного супремума функции f. Обозначив его H, мы по определению получим: $H = \inf\bigl\{C \in \mathbb{R} \bigm| \varphi \leqslant C$ почти везде на $T\bigr\}$. Легко видеть, что

$$H = \sup\bigl\{h \in \mathbb{R} \bigm| \nu\bigl(T_h\bigr) > 0\bigr\},$$

и что при сделанных нами предположениях $0 < H < +\infty$.

Из последнего равенства вытекает, что $\nu\bigl(T_h\bigr) > 0$ для $h < H$ и $\nu\bigl(T_h\bigr) = 0$ для $h > H$. Если множество T_H имеет положительную меру, то асимптотика интеграла $\Phi(x)$ очевидна: так как вне T_H дробь $\bigl(\frac{\varphi}{H}\bigr)^x$ стремится при $x \to +\infty$ к нулю и равна единице почти везде на T_H, то по теореме 1 п. 1.2 мы получаем

$$\frac{\Phi(x)}{H^x} = \int_T \Bigl(\frac{\varphi}{H}\Bigr)^x\,d\nu \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \nu(T_H).$$

Таким образом, в этом простейшем случае $\Phi(x) \sim H^x\,\nu(T_H)$.

Обсудим теперь более содержательный случай $\nu\bigl(T_H\bigr) = 0$. Тогда $\varphi(t) < H$ почти везде на T и для всех $h < H$ множества T_h имеют положительную меру. Очевидно,

$$\int_{T_h} \varphi^x\,d\nu \geqslant h^x\nu(T_h) \quad \text{и} \quad \int_{T\setminus T_h} \varphi^x\,d\nu = h^x \int_{T\setminus T_h} \Bigl(\frac{\varphi}{h}\Bigr)^x\,d\nu = o(h^x).$$

Поэтому при $x \to +\infty$ интеграл по $T\setminus T_h$ пренебрежимо мал по сравнению с интегралом по T_h. Отсюда видно, что в рассматриваемом случае аналог явления локализации таков: основной вклад в $\Phi(x)$ вносит интеграл по множеству T_h с параметром h сколь

угодно близким к H. Поэтому для нахождения асимптотики интеграла $\Phi(x)$ важно знать, с какой скоростью убывает мера множества T_h при $h \to H$. Говоря иными словами, асимптотика определяется убывающей функцией распределения $\widetilde{f}(h) = \nu(T_h)$ (см. п. VI.4.3). Согласно предложению VI.4.3 интеграл $\Phi(x)$ можно записать в виде

$$\Phi(x) = x\int_0^\infty h^{x-1}\widetilde{f}(h)\,dh = x\int_0^H h^{x-1}\widetilde{f}(h)\,dh \tag{8}$$

(мы учли, что $\widetilde{f}(h) = 0$ при $h > H$). Таким образом, рассматриваемые "абстрактные" интегралы Лапласа сводятся к уже изученным нами классическим интегралам с тем различием, что теперь подынтегральная функция $\widetilde{f}$ задана не непосредственно, а с помощью равенства

$$\widetilde{f}(h) = \nu(T_h) = \int_{T_h} f\,d\mu.$$

Из сказанного видно, что с идейной точки зрения в общем случае нет ничего нового по сравнению с классическим. Однако при определении асимптотики необходимо ещё преодолеть технические трудности, связанные с оценкой функции $\widetilde{f}(h)$. Например, в отличие от одномерного случая теперь вполне естественной представляется ситуация, когда множества T_h стягиваются при $h \to H$ не к точке, а к некоторому множеству нулевой меры, например, к поверхности (см. ниже пример 2).

Пример 1. Для $t = (t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{R}^m$ положим $\|t\|_p = \bigl(|t_1|^p + \ldots + |t_m|^p\bigr)^{\frac{1}{p}}$ $(p > 0)$. Найдём асимптотику интеграла

$$\Phi(x) = \int_{S^{m-1}} \|t\|_p^x\,d\sigma,$$

где σ — площадь на $(m-1)$-мерной единичной сфере S^{m-1}.

Максимум величины $\|t\|_p$ на сфере зависит от параметра p. Случай $p = 2$ тривиален. Если $p > 2$, то $H = \max\limits_{t\in S^{m-1}} \|t\|_p = 1$ (это значение достигается в $2m$ точках $\pm e_1, \dots, \pm e_m$, где $e_1, \dots, e_m$ — векторы канонического базиса). Если же $p \in (0, 2)$, то $H = \max\limits_{t\in S^{m-1}} \|t\|_p = m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$ (это значение достигается в 2^m точках, у которых абсолютные величины всех координат равны $\frac{1}{\sqrt{m}}$).

Рассмотрим подробнее случай $p > 2$. При определении асимптотики $\Phi(x)$ будем опираться на равенство (8), содержащее функцию распределения $\widetilde{f}(h)$ — площадь множества $T_h = \bigl\{t \in S^{m-1} \bigm| \|t\|_p \geqslant h\bigr\}$. Нам нужно оценить эту площадь при h близких к $H = 1$. Для таких h оно распадается на $2m$ конгруэнтных частей. Достаточно оценить площадь одной из них, например, лежащей около орта e_m. При $h \to 1$ площадь этой части эквивалентна площади её проекции на подпространство $t_m = 0$. Эта проекция образована точками $t' = (t_1, \dots, t_{m-1})$, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$|t_1|^p + \ldots + |t_{m-1}|^p + \bigl(1 - \|t'\|^2\bigr)^{\frac{p}{2}} \geqslant h^p$$

($\|t'\|$ — евклидова норма вектора t'). При $h \to 1$ проекция стягивается к началу координат и поэтому она образована точками, удовлетворяющими соотношению

$$1 - \frac{p}{2}\|t'\|^2 + o\bigl(\|t'\|^2\bigr) \geqslant h^p.$$

Она содержит $(m-1)$-мерный шар радиуса $(1-\varepsilon)\sqrt{\frac{2}{p}(1-h^p)}$ и содержится в шаре радиуса $(1+\varepsilon)\sqrt{\frac{2}{p}(1-h^p)}$, где ε — бесконечно малая величина при $h \to 1$. Следовательно, площадь проекции эквивалентна $\alpha_{m-1}\big(\frac{2}{p}(1-h^p)\big)^{\frac{m-1}{2}}$, где α_{m-1} — объём единичного шара B^{m-1}. Таким образом,

$$\widetilde{f}(h) = \sigma\big(\varphi \geqslant h\big) \underset{h\to 1}{\sim} 2m\alpha_{m-1}\Big(\frac{2}{p}(1-h^p)\Big)^{\frac{m-1}{2}} \underset{h\to 1}{\sim} 2m\alpha_{m-1}\big(2(1-h)\big)^{\frac{m-1}{2}}.$$

Это даёт нам

$$\Phi(x) = x\int_0^1 h^{x-1}\widetilde{f}(h)\,dh \underset{x\to+\infty}{\sim} m\alpha_{m-1}2^{\frac{m+1}{2}}x\int_0^1 h^{x-1}(1-h)^{\frac{m-1}{2}}dh.$$

После несложных вычислений мы получаем, что при $p > 2$

$$\Phi(x) = \int_{S^{m-1}}\big(|t_1|^p + \ldots + |t_m|^p\big)^{\frac{x}{p}}d\sigma \underset{x\to+\infty}{\sim} 2m\Big(\frac{2\pi}{x}\Big)^{\frac{m-1}{2}}.$$

Случай $0 < p < 2$ рассматривается аналогично. Мы предлагаем читателю сделать это самостоятельно (см. упр. 18). Кроме того, в п. 3.8 мы вернёмся к этому примеру, иллюстрируя ещё один приём исследования интегралов $\Phi(x)$.

Следующий пример показывает, что учитывая особенности задачи иногда полезно использовать некоторые вариации общей схемы.

Пример 2. Пусть r, p_1, ... , p_m — положительные числа. Найдём асимптотику интеграла

$$\Phi(x) = \int_{\mathbb{R}^m}\varphi^x(t)\,dt,$$

где

$$\varphi(t) = e^{-\left||t_1|^{p_1}+\ldots+|t_m|^{p_m}-1\right|^r} \qquad (t = (t_1,\ldots,t_m) \in \mathbb{R}^m).$$

Очевидно, истинный супремум функции φ совпадает с её максимальным значением и равен единице. Оно достигается во всех точках поверхности

$$\big\{t \in \mathbb{R}^m \;\big|\; |t_1|^{p_1} + \ldots + |t_m|^{p_m} = 1\big\}.$$

Используем функцию распределения F суммы $\sum\limits_{j=1}^m |t_j|^{p_j}$, вычисленную в примере 3 п. VI.4.2:

$$F(u) = V\,u^s\ (u > 0), \quad \text{где}\ \ s = \frac{1}{p_1} + \ldots + \frac{1}{p_m} \quad \text{и}\ \ V = \frac{2^m}{\Gamma(1+s)}\prod_{j=1}^m \Gamma\Big(1+\frac{1}{p_j}\Big).$$

Тогда

$$\Phi(x) = \int_0^\infty e^{-x|u-1|^r}\,dF(u) = s\,V\int_0^\infty e^{-x|u-1|^r}u^{s-1}\,du.$$

Теперь для выяснения асимптотики $\Phi(x)$ остаётся применить формулу $(3')$ при $t_0 = 1$, $p = r$, $q = 0$ и $C = L = 1$:

$$\int_{\mathbb{R}^m} e^{-x\left||t_1|^{p_1}+\ldots+|t_m|^{p_m}-1\right|^r}dt \underset{x\to+\infty}{\sim} 2sV\,\Gamma\Big(1+\frac{1}{r}\Big)\,x^{-\frac{1}{r}}.$$

3.7. Здесь мы рассмотрим многомерный вариант интеграла Лапласа

$$\Phi(x) = \int_T f(t)\,\varphi^x(t)\,dt,$$

где T — измеримое по Лебегу подмножество пространства $\mathbb{R}^m$. Наша цель — получить аналог теоремы 3.2 в ситуации, когда множества $T_h = \{t \in T \,|\, \varphi(t) \geqslant h\}$ при возрастании h к $\max\varphi$ стягиваются к единственной точке. Это допущение служит заменой монотонности φ, предполагавшейся в одномерном случае. Вместе с другими условиями оно позволяет получить многомерное обобщение теоремы 3.2, не используя функцию распределения. Дополнительные ограничения, налагаемые на функции f и φ в дальнейшем, сходны с условиями теоремы 3.2. Их удобно описывать с помощью сферических координат (см. п. VI.5.2). Символ σ обозначает площадь на единичной сфере S^{m-1}.

Теорема. *Пусть на множестве $T \subset \mathbb{R}^m$, $a \in \mathrm{Int}(T)$, заданы суммируемая функция f и измеримая функция φ, причём $0 \leqslant \varphi(t) \leqslant \varphi(a)$ и $\mathrm{diam}(T_h) \to 0$ при $h \to \varphi(a) - 0$. Предположим, что существуют такие числа $p > 0$, $q > -m$, $c > 0$ и такие неотрицательные на единичной сфере S^{m-1} функции F, G, что для почти всех $\xi \in S^{m-1}$ выполнены условия*

а) существуют пределы $C(\xi) = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{\varphi(a) - \varphi(a + r\xi)}{r^p}$ *и* $L(\xi) = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{f(a + r\xi)}{r^q}$;

б) $\dfrac{\varphi(a) - \varphi(a + r\xi)}{r^p} \geqslant F(\xi)$ *и* $\left|\dfrac{f(a + r\xi)}{r^q}\right| \leqslant G(\xi)$ *при* $0 < r < c$.

Если, кроме того, функция $G\,F^{-\frac{q+m}{p}}$ суммируема на S^{m-1}, то

$$\Phi(x) = \frac{I + o(1)}{p}\,\Gamma\Big(\frac{q+m}{p}\Big)\Big(\frac{\varphi(a)}{x}\Big)^{\frac{q+m}{p}}\,\varphi^x(a) \quad \text{при} \quad x \to +\infty,$$

где

$$I = \int_{S^{m-1}} L(\xi)\,C^{-\frac{q+m}{p}}(\xi)\,d\sigma(\xi).$$

В частности, если $I \neq 0$, то

$$\Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{I}{p}\,\Gamma\Big(\frac{q+m}{p}\Big)\Big(\frac{\varphi(a)}{x}\Big)^{\frac{q+m}{p}}\,\varphi^x(a). \tag{9}$$

Очевидно, эта формула есть многомерный аналог формулы (3′). Формуле (3) соответствует ситуация, когда a — граничная точка множества T. Положив $f = 0$ вне T, этот случай можно свести к предыдущему. В частности, теорема остаётся справедливой, если пересечение T с некоторым шаром $B(a, \rho)$ совпадает с пересечением этого шара с конусом $\big\{a + r\xi \,\big|\, \xi \in E \subset S^{m-1},\ 0 \leqslant r < +\infty\big\}$, а φ и f удовлетворяют условиям теоремы при почти всех $\xi \in E$. Тогда можно использовать соотношение (9), считая функцию L равной нулю вне E.

Если функция C отделена от нуля и предельные соотношения а) выполняются равномерно на S^{m-1}, то доказательство теоремы можно провести по образцу доказательства теоремы 3.2, опустив условия б) и предполагая лишь суммируемость функции L

(мы советуем читателю убедиться в этом). Для получения более общего результата приходится использовать более мощные средства — нам понадобится теорема Лебега о сходимости с мажорантой (теорема 1.2). Её применение при доказательстве теоремы 3.2 могло бы несколько сократить рассуждения, но там мы предпочли обойтись сравнительно элементарными средствами.

Доказательство. Не умаляя общности, будем считать, что $a = 0$ и $\varphi(0) = 1$. Так как $\operatorname{diam}(T_h) \underset{h\to 1-0}{\longrightarrow} 0$, то при h достаточно близком к единице множество T_h содержится в шаре $B = B(0, c)$, в котором выполнено условие б). Следовательно, $\varphi < h$ вне шара B, в силу чего интеграл $\int_{T\setminus B} f(t)\,\varphi^x(t)\,dt$ экспоненциально мал. Поэтому нам достаточно рассмотреть лишь случай $T = B$. Введя сферические координаты и сделав затем замену переменной $r = x^{-\frac{1}{p}}u$, мы получим

$$x^{\frac{q+m}{p}}\Phi(x) = x^{\frac{q+m}{p}} \int_{S^{m-1}} \left(\int_0^c r^{m-1} f(r\xi)\,\varphi^x(r\xi)\,dr \right) d\sigma(\xi) =$$

$$= \int_{S^{m-1}} \left(\int_0^{cx^{\frac{1}{p}}} u^{m-1} x^{\frac{q}{p}} f\Big(x^{-\frac{1}{p}}u\xi\Big)\,\varphi^x\Big(x^{-\frac{1}{p}}u\xi\Big) dr \right) d\sigma(\xi).$$

По условию а) подынтегральная функция (будем считать её заданной на произведении $P = S^{m-1} \times (0, +\infty)$ и равной нулю, если $u > cx^{\frac{1}{p}}$) при $x \to +\infty$ поточечно сходится к предельной функции

$$u^{q+m-1} L(\xi)\, e^{-u^p C(\xi)}.$$

Предельный переход в правой части последнего равенства (его законность проверим чуть позже) даёт нам:

$$x^{\frac{q+m}{p}}\Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} J = \iint_P u^{q+m-1} L(\xi)\, e^{-u^p C(\xi)}\, d\sigma(\xi)\, du.$$

Интеграл J легко вычисляется:

$$J = \int_{S^{m-1}} L(\xi) \left(\int_0^\infty u^{q+m-1} e^{-u^p C(\xi)}\, du \right) d\sigma(\xi) = \frac{I}{p}\,\Gamma\Big(\frac{q+m}{p}\Big).$$

Для обоснования предельного перехода можно воспользоваться теоремой 1 п. 1.2. Действительно, так как условие б) влечёт неравенства

$$x^{\frac{q}{p}} \left| f\big(x^{-\frac{1}{p}}u\xi\big) \right| \leqslant u^q G(\xi) \quad \text{и} \quad \varphi^x\big(x^{-\frac{1}{p}}u\xi\big) \leqslant \left(1 - \frac{u^p}{x}\,F(\xi)\right)^x \leqslant e^{-u^p F(\xi)},$$

то на множестве P подынтегральная функция имеет мажоранту $u^{q+m-1} G(\xi)\, e^{-u^p F(\xi)}$. Проверка её суммируемости, опирающаяся на теорему Тонелли, с точностью до обозначений совпадает с вычислением интеграла J. ►

Отметим наиболее важный частный случай, когда гладкая функция φ принимает максимальное значение во внутренней точке a, причём второй дифференциал $d_a^2\varphi$ —

отрицательно определённая квадратичная форма и существует конечный ненулевой предел $L_0 = \lim\limits_{t\to a} f(t)$. Тогда $p = 2$, $q = 0$, $C = -\frac{1}{2}d_a^2\varphi$ и $L \equiv L_0$. Поэтому

$$I = L_0 \int_{S^{m-1}} \Big(-\frac{1}{2}\, d_a^2\varphi\Big)^{-\frac{m}{2}}(\xi)\, d\sigma(\xi).$$

Этот интеграл выражается (см. следствие 2 в п. VI.5.3) через определитель матрицы вторых частных производных (определитель *матрицы Гессе**)) функции φ:

$$\int_{S^{m-1}} \Big(-d_a^2\varphi\Big)^{-\frac{m}{2}}(\xi)\, d\sigma(\xi) = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m}{2})\sqrt{|\Delta|}}, \quad \text{где } \Delta = \det\Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t_k \partial t_j}(a)\Big)_{1\leqslant k,j\leqslant m}.$$

Таким образом, мы приходим к многомерному аналогу формулы Лапласа (2б):

$$\Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{L_0}{\sqrt{|\Delta|}} \Big(\frac{2\pi\varphi(a)}{x}\Big)^{\frac{m}{2}} \varphi^x(a). \tag{10}$$

3.8. Завершая изучение метода Лапласа, рассмотрим несколько примеров применения теоремы 3.7.

Пример 1. Найдём асимптотику интеграла $\Phi(x) = \iint_{[-1,1]^2} \big(\cos t_1 + \cos t_2\big)^x dt$ при $x \to +\infty$. В этом случае $\varphi(t) = \cos t_1 + \cos t_2$, $\max\varphi = 2$ и $\varphi(t) = 2 - \frac{1}{2}\|t\|^2 + o\big(\|t\|^2\big)$ при $t \to 0$. Поэтому $\Delta = \det\Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t_k \partial t_j}(0)\Big)_{1\leqslant k,j\leqslant 2} = 1$, и по формуле (10)

$$\iint_{[-1,1]^2} \big(\cos t_1 + \cos t_2\big)^x dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{4\pi}{x}\, 2^x.$$

Пример 2. Вернёмся к примеру 1 из п. 3.6 и найдём асимптотику интеграла $\Phi(x) = \int_{S^{m-1}} \|t\|_p^x\, d\sigma(t)$ в случае $p \in (0, 2)$.

Мы сведём эту задачу к ситуации, позволяющей применить формулу (10). Для этого воспользуемся приёмом, эффективным во многих подобных случаях. Его идея — пользуясь положительной однородностью функции $t \mapsto \|t\|_p$, заменить интеграл по сфере интегралом по всему пространству — уже использовалась нами в примере 1 п. VI.5.2.

Рассмотрим интеграл

$$\widetilde{\Phi}(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \|t\|_p^x\, e^{-\frac{x}{2m}\|t\|^2} dt$$

(здесь, как обычно, $\|t\| = \|t\|_2$ — евклидова норма вектора t; коэффициент $\frac{1}{2m}$ в экспоненте введён для упрощения вычислений). С помощью сферических координат (см. п. VI.5.2) легко обнаружить связь между интегралами $\Phi(x)$ и $\widetilde{\Phi}(x)$:

$$\widetilde{\Phi}(x) = \int_{S^{m-1}} \int_0^\infty r^{m+x-1}\, \|\xi\|_p^x\, e^{-\frac{x}{2m}r^2}\, d\sigma(\xi)\, dr = \frac{\Phi(x)}{2}\Big(\frac{2m}{x}\Big)^{\frac{x+m}{2}} \Gamma\Big(\frac{x+m}{2}\Big).$$

*) Людвиг Отто **Гессе** (Hesse), 1811–1874, — немецкий математик.

Таким образом, задача сводится к исследованию интеграла

$$\widetilde{\Phi}(x) = 2^m \int_{\mathbb{R}^m_+} \varphi^x(t)\,dt, \quad \text{где} \;\; \varphi(t) = \|t\|_p\, e^{-\|t\|^2/(2m)}.$$

Так как $\|t\|_p \leqslant m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\|t\|$ при $p \in (0,2)$, то $\varphi(t) \leqslant m^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\|t\|\, e^{-\|t\|^2/(2m)} \leqslant m^{\frac{1}{p}}/\sqrt{e}$. В точке $a = (1,\dots,1)$ (и только в ней) эти неравенства обращаются в равенство, т. е. $\varphi(a) = m^{\frac{1}{p}}/\sqrt{e}$ — строгий максимум функции φ. Теперь можно воспользоваться формулой (10). Мы предоставляем читателю самостоятельно проделать необходимые вычисления и убедиться в том, что в точке a определитель матрицы Гессе функции φ равен $\frac{2}{p-2}\left(\frac{2-p}{m}\varphi(a)\right)^m$. Поэтому для $p \in (0,2)$ справедливо асимптотическое соотношение

$$\int_{S^{m-1}} \left(|t_1|^p + \ldots + |t_m|^p\right)^{\frac{x}{p}} d\sigma(t) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\left(\frac{8\pi}{(2-p)x}\right)^{\frac{m-1}{2}} m^{(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})x}.$$

В теореме рассмотрен случай, когда приращение $\varphi(a) - \varphi(a + r\xi)$ является бесконечно малой при $r \to 0$, порядок которой не зависит от направления $\xi \in S^{m-1}$. Однако зачастую это предположение нарушается. Нередко встречается ситуация, когда гладкая функция φ достигает в точке a наибольшего значения, а второй дифференциал $d^2_a\varphi$ — неположительная, но вырожденная квадратичная форма (возможно, $d^2_a\varphi \equiv 0$). В этом случае вблизи точки a приращение $\varphi(a) - \varphi(t)$ описывается неотрицательным многочленом более высокой степени. Например, справедливо асимптотическое (при $t \to a$) соотношение

$$\varphi(a) - \varphi(t) = c_1(t_1 - a_1)^{2n_1} + \ldots + c_m(t_m - a_m)^{2n_m} + o\big(\|t - a\|^n\big),$$

где все коэффициенты $c_1,\dots,c_m$ положительны и $n = \max(n_1,\dots,n_m)$. Эту ситуацию можно свести к случаю, охватываемому теоремой, с помощью замены переменной $u_j = (t_j - a_j)^{n_j}$ $(j = 1,\dots,m)$. Поясним сказанное на примере.

Пример 3. Найдём асимптотику интеграла

$$\Phi(x) = \iint_{\mathbb{R}^2} (u^2 + v^2)^{\frac{\beta}{2}}\, e^{-x(|u|+v^4)} du\, dv.$$

Ясно, что он конечен при $\beta > -2$ и равен $4\iint_{\mathbb{R}^2_+} \ldots$. В интеграле по множеству $\mathbb{R}^2_+$ сделаем замену переменных $u = t^2$, $v = s^{\frac{1}{2}}$. В результате получим

$$\Phi(x) = \iint_{\mathbb{R}^2} \left(t^4 + |s|\right)^{\frac{\beta}{2}} \frac{|t|}{\sqrt{|s|}} e^{-x(t^2+s^2)} dt\, ds. \tag{11}$$

Теперь мы оказываемся в условиях теоремы 3.7 с функциями

$$\varphi(t,s) = e^{-(t^2+s^2)} \quad \text{и} \quad f(t,s) = \left(t^4 + |s|\right)^{\frac{\beta}{2}} \frac{|t|}{\sqrt{|s|}} = r^{\frac{\beta+1}{2}}\left(r^3\xi_1^4 + |\xi_2|\right)^{\frac{\beta}{2}} \frac{|\xi_1|}{\sqrt{|\xi_2|}},$$

где $r = \sqrt{t^2+s^2}$, $\xi_1 = \frac{t}{r}$, $\xi_2 = \frac{s}{r}$. В этом случае $p = 2$, $C(\xi) \equiv 1$ и $q = \frac{\beta+1}{2}$, $L(\xi) = \lim\limits_{r\to 0} r^{-\frac{\beta+1}{2}} f(r\xi_1, r\xi_2) = |\xi_1||\xi_2|^{\frac{\beta-1}{2}}$. Очевидно, функция L суммируема на окружности

при $\beta > -1$. При $\beta \leqslant -1$ это не так и наша теорема не применима. В этом случае приходится привлекать дополнительные соображения (см. пример 4). Если же $\beta > -1$, то, как читатель легко проверит самостоятельно, условия теоремы выполняются. Поскольку

$$I = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, \sin^{\frac{\beta-1}{2}}\theta\, d\theta = \frac{8}{\beta+1},$$

формула (9) при $m = 2$, $p = 2$, $q = \frac{\beta+1}{2}$, $a = 0$, $\varphi(0) = 1$ даёт нам

$$\Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{I}{p}\,\Gamma\Big(\frac{q+2}{p}\Big)x^{-\frac{q+2}{p}} = \Gamma\Big(\frac{\beta+1}{4}\Big)x^{-\frac{\beta+5}{4}}.$$

Рассмотрим теперь эту задачу в ситуации, не охватываемой теоремой.

Пример 4. Найдём асимптотику интеграла из примера 3 при $-2 < \beta < -1$ (случай $\beta = -1$ мы оставляем читателю — см. упр. 17).

После перехода к полярным координатам в равенстве (11) интеграл принимает вид

$$\Phi(x) = 4\int_0^\infty r^{\frac{\beta+3}{2}} e^{-xr^2}\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (r^3\cos^4\theta + \sin\theta)^{\frac{\beta}{2}} \frac{\cos\theta}{\sqrt{\sin\theta}}\, d\theta\Big)dr =$$
$$= 4\int_0^\infty r^{\frac{\beta+3}{2}} e^{-xr^2}\Big(\int_0^1 (r^3(1-u^2)^2 + u)^{\frac{\beta}{2}} \frac{du}{\sqrt{u}}\Big)dr.$$

Так как $\beta < -1$, то внутренний интеграл стремится к бесконечности при $r \to 0$. Чтобы можно было применить теорему 3.2, нам нужно найти его асимптотику. Как нетрудно проверить (мы оставляем читателю сделать это самостоятельно),

$$\int_0^1 \big(r^3(1-u^2)^2 + u\big)^{\frac{\beta}{2}} \frac{du}{\sqrt{u}} \underset{r\to 0}{\sim} g(r) = \int_0^1 (r^3 + u)^{\frac{\beta}{2}} \frac{du}{\sqrt{u}}.$$

Сделав в последнем интеграле замену переменной $u = r^3 v$, мы видим, что

$$g(r) = r^{\frac{3}{2}(\beta+1)} \int_0^{\frac{1}{r^3}} (1+v)^{\frac{\beta}{2}} \frac{dv}{\sqrt{v}} \underset{r\to 0}{\sim} r^{\frac{3}{2}(\beta+1)} \int_0^\infty (1+v)^{\frac{\beta}{2}} \frac{dv}{\sqrt{v}}.$$

Преобразуем получившийся интеграл с помощью замены переменной $v = \frac{z}{1-z}$:

$$\int_0^\infty (1+v)^{\frac{\beta}{2}} \frac{dv}{\sqrt{v}} = \int_0^1 z^{-\frac{1}{2}}(1-z)^{-\frac{\beta+1}{2}-1}\, dz = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{|\beta+1|}{2})}{\Gamma(\frac{|\beta|}{2})}.$$

Таким образом,

$$\Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 4\int_0^\infty r^{\frac{\beta+3}{2}} g(r) e^{-xr^2}\, dr,$$

где

$$g(r) \underset{r\to 0}{\sim} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{|\beta+1|}{2})}{\Gamma(\frac{|\beta|}{2})} r^{\frac{3}{2}(\beta+1)}.$$

По теореме 3.2 с $p = 2$ и $q = \frac{\beta+3}{2} + \frac{3}{2}(\beta+1) = 2\beta + 3$ получаем:

$$\Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 2\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{|\beta+1|}{2})}{\Gamma(\frac{|\beta|}{2})}\Gamma(\beta+2)\, x^{-\beta-2}.$$

Используя формулу Лежандра и формулу дополнения для функции Γ (см. пп. 2.4 и 2.5), коэффициент в правой части можно упростить:

$$\Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{2^{3+\beta}\pi^2}{\Gamma^2\big(\frac{|\beta|}{2}\big)\,\sin\pi\beta}\, x^{-\beta-2}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1) Пусть функции f, φ неотрицательны на (a,b) и $\varphi(t) \to 1$ при $t \to a$. Докажите, что если $\int_a^c f(t)\,dt > 0$ при $a < c < b$, то интеграл $\Phi(x) = \int_a^b f(t)\varphi^x(t)\,dt$ не может убывать экспоненциально, т. е. $q^x = o\big(\Phi(x)\big)$ при $x \to +\infty$ для любого $q \in (0,1)$.

2) Докажите, что $\int_0^\infty \frac{\cos^2 1/t}{t^{1/2}} e^{-xt}\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$.

3) Докажите, что $\int_0^\infty \frac{\cos 1/t}{t^{2/3}} e^{-xt}\,dt = o\big(x^{-N}\big)$ при $x \to +\infty$ для любого $N > 0$.

Этот пример вместе с упр. 2 показывает, что следствие из леммы 3.1 не переносится на знакопеременные функции f и g.

4) С помощью представления $\frac{\sin u}{u} = \int_0^1 \cos ut\,dt$ найдите асимптотику производных $\big(\frac{\sin u}{u}\big)^{(n)}$ при $n \to \infty$.

5) Используя результат примера 1 п. 3.4, обобщите лемму 3.2, доказав, что

$$\int_0^b |\ln t|^r \varphi^x(t)\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \Gamma\Big(1+\frac{1}{p}\Big)\left(\frac{\ln x}{p}\right)^r x^{-\frac{1}{p}}.$$

6) Опираясь на результат предыдущего примера и следуя доказательству теоремы 3.2, убедитесь, что замена в ней условия б) условием $f(t) \underset{t\to a}{\sim} L(t-a)^q\,|\ln(t-a)|^r$, где $r \in \mathbb{R}$, влечёт асимптотическое соотношение

$$\Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{L}{p}\,\Gamma\Big(\frac{q+1}{p}\Big)\left(\frac{\ln x}{p}\right)^r \left(\frac{\varphi(a)}{Cx}\right)^{\frac{q+1}{p}} \varphi^x(a).$$

7) Докажите, что при $x \to +\infty$

$$\Gamma'(x) = \Gamma(x)\left(\ln x + O\Big(\frac{1}{x}\Big)\right), \quad \Gamma''(x) = \Gamma(x)\left(\ln^2 x + O\Big(\frac{\ln x}{x}\Big)\right).$$

8) Пусть в теореме 3.2 $\varphi(a) = 1$. Докажите, что замена условия б) на $\frac{1-\varphi(t)}{(t-a)^p} \to +\infty$ (или $\frac{1-\varphi(t)}{(t-a)^p} \to 0$) при $t \to a$ приводит к соотношению $x^{\frac{q+1}{p}}\Phi(x) \to 0$ (соответственно $x^{\frac{q+1}{p}}\Phi(x) \to +\infty$).

9) Найдите асимптотику интегралов $\int_0^{\frac{1}{2}} t^{xt}\,dt$ и $\int_0^1 t^{xt}\,dt$.

10) Докажите, что $\int_0^{\frac{1}{e}} e^{x/\ln t}\,dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\pi}\frac{\sqrt[4]{x}}{e^{2\sqrt{x}}}$.

Поучительно сравнить этот результат с примером 2 п. 3.4: хотя функции $\varphi(t) = 1 + \frac{1}{\ln t}$ и $\psi(t) = e^{1/\ln t}$ очень похожи около нуля ($\varphi(t) - 1 \sim \psi(t) - 1$ при $t \to 0$), тем не менее соответствующие им интегралы имеют разные асимптотики.

11) Пусть неотрицательная функция f суммируема, а функции S и R непрерывны и строго возрастают на $[a, b)$. Пусть, кроме того, $S(a) = R(a) = 0$ и $S(t) - R(t) = O((t-a)^2)$ при $t \to a$. Докажите, что интегралы

$$\Phi(x) = \int_a^b f(t)e^{-xS(t)}dt \quad \text{и} \quad \Psi(x) = \int_a^b f(t)e^{-xR(t)}dt$$

эквивалентны, если какой-то из них — например, $\Psi(x)$ — не слишком быстро убывает к нулю: $\ln\Psi(x) = o(\sqrt{x}\,)$ при $x \to +\infty$.

Сравнение упр. 10 и примера 2 п. 3.4 показывает, что ослабить последнее условие, заменив его на $\ln\Psi(x) = O(\sqrt{x}\,)$, нельзя.

12) Пусть $p > 0$. Докажите, что

$$\int_0^\infty e^{-xt^p - t^{-p}}dt \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{p}\,x^{-\frac{2+p}{4p}}\,e^{-2\sqrt{x}}.$$

13) Уточните результат примера 4 п. 3.3, доказав, что

$$S_n = \frac{e^n}{2}\left(1 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi n}} + O\Big(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\Big)\right).$$

14) Докажите, что для интеграла $\Phi(x) = \int_0^1 \varphi^x(t)\,dt$, где φ — канторова функция, справедливо следующее асимптотическое соотношение:

$$\Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{\theta(\log_2 x)}{x^{\log_2 3}}, \quad \text{где} \quad \theta(u) = \frac{1}{2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{3^{k+u}}{\operatorname{sh}(2^{k+u})}.$$

В частности, $\Phi(2^n) \sim \theta(0)\,3^{-n} \quad (n \in \mathbb{N})$.

Можно показать, что функция θ “почти постоянна”: $1,9964 < \theta(u) < 1,997$.

15) Пусть H — истинный супремум положительной измеримой функции φ. Обобщая упр. 1, докажите, что для интеграла $\Phi(x) = \int_T \varphi^x(t)\,d\nu(t)$ справедливо предельное соотношение $\frac{1}{x}\,\ln\Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \ln H$.

16) Пусть B — единичный шар в $\mathbb{R}^3$. Докажите, что

$$\iiint_B \sqrt{s^2+t^2+u^2}\left(1 - \frac{|s| + t^2 + u^4}{2}\right)^x ds\,dt\,du \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{16}{3x^2}.$$

17) Используя результат упр. 6, докажите, что при $\beta = -1$ асимптотика функции Φ, рассматриваемой в примерах 3 и 4 п. 3.8, такова:

$$\Phi(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{3}{4}\,\frac{\ln x}{x}.$$

18) Рассуждая по аналогии со случаем $p > 2$ в примере 1 п. 3.6, найдите асимптотику интеграла $\int_{S^{m-1}} \|t\|_p^x\,d\sigma(t)$ при $p \in (0, 2)$.

19) Убедитесь, что не меняя общего плана доказательства теоремы 3.7, её можно обобщить на случай, когда функция f удовлетворяет условиям: при некотором $s \geqslant 0$ для почти всех $\xi \in S^{m-1}$ существует предел $L(\xi) = \lim\limits_{r\to 0} \frac{f(a+r\xi)}{r^q|\ln r|^s}$ и $\frac{|f(a+r\xi)|}{r^q|\ln r|^s} \leqslant G(\xi)$ $(0 < r < c)$. Тогда при сохранении остальных предположений и обозначений теоремы справедливо соотношение

$$\Phi(x) = \frac{I + o(1)}{p}\,\Gamma\Big(\frac{q+m}{p}\Big)\Big(\frac{\ln x}{p}\Big)^s\Big(\frac{\varphi(a)}{x}\Big)^{\frac{q+m}{p}}\,\varphi^x(a) \quad \text{при} \quad x \to +\infty.$$

Оно верно и для $s < 0$, если дроби $\frac{\varphi(a)-\varphi(a+r\xi)}{r^p}$ отделены от нуля.

20) Покажите, что в случае $s < 0$ результат предыдущего упражнения без дополнительных предположений не верен: произведение $x^{\frac{q+m}{p}}\Phi(x)$ (для простоты считаем $\varphi(a) = 1$) может стремиться к нулю сколь угодно медленно. Указание. При $a = 0$ рассмотрите функции $f(r\xi) = r^q \ln^s \frac{1}{r}$ и $\varphi(r\xi) = e^{-r^p(C(\xi)+\theta(r))}$, где θ — непрерывная и медленно возрастающая на $[0,1]$ функция, $\theta(0) = 0$, а неотрицательная и измеримая на сфере S^{m-1} функция C такова, что конечен интеграл $\int_{S^{m-1}} C^{-\frac{q+m}{p}}(\xi)\,d\sigma(\xi)$.

§ 4. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

4.1. До сих пор мы исследовали зависящие от параметра интегралы $J(y) = \int_X f(x,y)\,d\mu(x)$, предполагая, что подынтегральная функция при каждом y суммируема. Однако это требование оказывается иногда слишком обременительным, как мы уже видели в примере 2 п. 1.6, где нам пришлось обратиться к понятию несобственного интеграла, введённому в п. IV.6.4. Теперь мы рассмотрим этот вопрос более систематически. При этом, конечно, нам придётся значительно уменьшить общность, заменив произвольное пространство с мерой промежутком с мерой Лебега.

Итак, будем считать, что $X = \langle a, b\rangle$ и функция f определена на произведении $\langle a, b\rangle \times Y$, а вместо суммируемости функции $x \mapsto f(x,y)$ при каждом $y \in Y$, ослабляя это требование, предположим, что сходится несобственный интеграл $\int_a^{\to b} f(x,y)\,dx$. Напомним, что по определению это означает суммируемость функции $x \mapsto f(x,y)$ на каждом интервале (a,t), $a < t < b$, и существование конечного предела $J(y) = \lim\limits_{t\to b}\int_a^t f(x,y)\,dx$. При отсутствии абсолютной сходимости свойства таких интегралов нельзя исследовать прежними средствами, предполагающими суммируемость подынтегральной функции. Поэтому при распространении результатов § 1 на несобственные интегралы нам потребуется новое понятие — равномерная сходимость несобственного интеграла. Поясним на двух примерах приводящие к нему соображения.

Рассмотрим два интеграла

$$J(y) = \int_0^\infty (1 - e^{-xy})\frac{\sin x}{x}\,dx, \qquad I(y) = \int_0^\infty \frac{\sin xy}{x}\,dx \qquad (y \geqslant 0).$$

Очевидно, что $J(0) = I(0) = 0$. При $y > 0$ значения каждого из этих интегралов также нам известны из п. 1.6: $J(y) = \operatorname{arctg} y$, $I(y) = I(1) = \frac{\pi}{2}$. Отсюда видно, что

$$J(y) \underset{y\to 0}{\to} J(0) = 0, \quad I(y) \underset{y\to 0}{\not\to} I(0).$$

В остальном знание этих интегралов для дальнейшего не существенно. В чём причина того, что первая из функций непрерывна в нуле, а вторая — нет? Ведь и в том, и в другом случае подынтегральные функции стремятся к нулю при $y \to 0$. Очевидно, что если бы интегралы J и I вычислялись не по бесконечному, а по произвольному конечному промежутку $[0, t]$, то сходимость к нулю была бы. Таким образом, поведение интегралов J, I определяется поведением "остаточных интегралов"

$$j_t(y) = \int_t^\infty (1 - e^{-xy}) \frac{\sin x}{x}\, dx, \quad i_t(y) = \int_t^\infty \frac{\sin xy}{x}\, dx.$$

При доказательстве непрерывности интеграла J в нуле мы фактически доказали (см. п. 1.6), что при всех $y > 0$ справедливо неравенство $|j_t(y)| \leqslant \frac{3}{t}$. Следовательно,

$$|J(y)| = \left| \int_0^t (1 - e^{-xy}) \frac{\sin x}{x}\, dx + j_t(y) \right| \leqslant \left| \int_0^t (1 - e^{-xy}) \frac{\sin x}{x}\, dx \right| + \frac{3}{t}.$$

Поэтому мы можем сначала за счёт выбора t сделать произвольно малым (для всех $y > 0$ сразу!) второе слагаемое в правой части, после чего зафиксировать t и при малых $y > 0$ добиться малости первого слагаемого.

Совсем другая картина наблюдается во втором случае. Разбив интеграл $I(y)$, как и раньше, на два слагаемых

$$I(y) = \int_0^t \frac{\sin xy}{x}\, dx + i_t(y),$$

мы с помощью замены переменной $z = xy$ убеждаемся, что

$$i_t(y) = \int_{yt}^\infty \frac{\sin z}{z}\, dz.$$

Таким образом, каким бы большим ни был параметр t, интеграл $i_t(y)$ будет при малых y близок к $I(1) \neq 0$ и, следовательно, не будет стремиться к нулю при $y \to 0$.

Проведённый анализ показывает, что непрерывность интеграла в первом случае и разрывность во втором обусловливаются различным поведением остаточных интегралов j_t и i_t. Непрерывность J следует из того, что остаточный интеграл j_t можно при достаточно большом t сделать малым сразу для всех значений параметра. Именно это свойство и кладётся в основу определения равномерной сходимости несобственного интеграла.

4.2. Под несобственным интегралом, зависящим от параметра, будем понимать функцию J, определённую на некотором множестве Y равенством

$$J(y) = \int_a^{\to b} f(x, y)\, dx \quad (y \in Y), \tag{1}$$

где функция f (вообще говоря, комплекснозначная) задана на $\langle a, b\rangle \times Y$. Всегда предполагается, что для каждого значения параметра y из Y несобственный интеграл (1) сходится (см. п. IV.6.4). Не исключено, что при некоторых значениях y подынтегральная функция окажется суммируемой.

Разумеется, аналогичным образом можно определить несобственный интеграл с особой точкой на левом конце промежутка интегрирования. Для изучения этой ситуации, как и более общей, когда особых точек несколько, не требуется новых идей. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением несобственных интегралов указанного вида.

На протяжении всего этого параграфа решающую роль играет следующее важное понятие.

Определение. Будем говорить, что несобственный интеграл (1) *сходится равномерно* на Y (или относительно $y \in Y$), если

$$\int_a^t f(x,y)\,dx \underset{t\to b}{\longrightarrow} J(y) \quad \text{равномерно на } Y.$$

Так как, очевидно,

$$J(y) - \int_a^t f(x,y)\,dx = \int_t^{\to b} f(x,y)\,dx,$$

то определение можно переписать в таком виде:

$$\sup_{y\in Y}\left|\int_t^{\to b} f(x,y)\,dx\right| \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad t\to b. \tag{2}$$

Это условие заведомо выполняется в простейшей ситуации, когда семейство функций $\{x \mapsto f(x,y)\}_{y\in Y}$ имеет суммируемую мажоранту, т. е. когда существует такая суммируемая на интервале (a,b) функция F, что $|f(x,y)| \leqslant F(x)$ для всех $x \in (a,b)$ и $y \in Y$. Действительно, в этом случае $\sup\limits_{y\in Y}\left|\int_t^b f(x,y)\,dx\right| \leqslant \int_t^b F(x)\,dx$ и остаётся заметить, что $\int_t^b F(x)\,dx \to 0$ при $t \to b$, поскольку функция F суммируема на (a,b). Однако сейчас эта ситуация нам не интересна, так как при наличии суммируемой мажоранты мы оказываемся в условиях, уже рассмотренных в первом параграфе. Вместе с тем, равномерная сходимость может быть полезна и в случае, когда все функции $x \mapsto f(x,y)$ суммируемы, но не имеют суммируемой мажоранты (см. упр. 4).

4.3. Наш первый результат о поведении несобственного интеграла $J(y)$ таков.

Теорема. *Пусть $\widetilde{Y}$ — метризуемое топологическое пространство, y_0 — точка сгущения множества Y, $Y \subset \widetilde{Y}$. Допустим, что выполнены условия:*

а) для почти всех x из (a,b) существует предел $f_0(x) = \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$;

б) функция f_0 суммируема на каждом интервале (a,t) $(a < t < b)$ и

$$\int_a^t f(x,y)\,dx \to \int_a^t f_0(x)\,dx \quad \text{при} \quad y \to y_0;$$

в) несобственный интеграл (1) сходится равномерно относительно $y \in Y$.

Тогда несобственный интеграл $J_0 = \int_a^{\to b} f_0(x)\,dx$ сходится и

$$J(y) = \int_a^{\to b} f(x,y)\,dx \underset{y\to y_0}{\longrightarrow} J_0.$$

Из этой теоремы непосредственно вытекает

Следствие. *Если $y_0 \in Y$ и при сохранении условий б) и в) теоремы условие а) заменено условием*

а′) для почти всех x из (a, b) функция $y \mapsto f(x, y)$ непрерывна в точке y_0,

то интеграл J непрерывен в точке y_0.

Прежде чем переходить к доказательству теоремы, сделаем два замечания.

Замечание 1. Условие б) выполнено, если существует такая допустимая слева функция g, что $|f(x, y)| \leqslant g(x)$ почти везде на (a, b) при каждом $y \in Y$ (см. теорему 1 п. 1.2).

Замечание 2. Так как существование предела есть свойство локальное, то в теореме (и следствии) не обязательно предполагать равномерную сходимость интеграла на всём множестве Y. Достаточно потребовать её на пересечении $Y \cap U(y_0)$, где $U(y_0)$ — некоторая окрестность точки y_0.

Доказательство теоремы сводится к ссылке на известное из курса математического анализа утверждение о перестановке двух предельных переходов (см. [З] т. II, гл. XVI, п. 3.2; [Ф] т. II, n°436).

Предложение. *Пусть T, Y — подмножества метризуемых топологических пространств $\widetilde{T}$, $\widetilde{Y}$; $t_0 \in \widetilde{T}$ и $y_0 \in \widetilde{Y}$ — их точки сгущения. Допустим, что функция F, заданная на произведении $T \times Y$, удовлетворяет условиям:*

I) для любого $t \in T$ существует конечный предел $L(t) = \lim\limits_{y \to y_0} F(t, y)$;

II) для любого $y \in Y$ существует конечный предел $J(y) = \lim\limits_{t \to t_0} F(t, y)$.

Если хотя бы в одном случае сходимость равномерная (на T или Y), то функции J и L имеют равные конечные пределы: $\lim\limits_{t \to t_0} L(t) = \lim\limits_{y \to y_0} J(y)$.

Говоря иными словами, условия этого предложения гарантируют существование, конечность и совпадение повторных пределов:

$$\lim_{t \to t_0} \lim_{y \to y_0} F(t, y) = \lim_{y \to y_0} \lim_{t \to t_0} F(t, y).$$

Обращаясь к доказательству теоремы, будем считать, что $T = (a, b)$, $T_0 = \overline{\mathbb{R}}$, $t_0 = b$ и $F(t, y) = \int_a^t f(x, y)\, dx$. Тогда доказываемое утверждение сводится к сформулированному предложению. В самом деле, в силу условия б) F удовлетворяет требованию I с функцией $L(t) = \int_a^t f_0(x)\, dx$. Требование II также выполнено, поскольку равномерная сходимость несобственного интеграла (т. е. условие в)) есть равномерная относительно $y \in Y$ сходимость $F(t, y)$ к $J(y)$ при $t \to b$. Поэтому теорема о перестановке двух пределов гарантирует и существование конечного предела $\lim\limits_{t \to b} L(t)$, т. е. сходимость несобственного интеграла $\int_a^{\to b} f_0(x)\, dx$, и совпадение этого интеграла с пределом $\lim\limits_{y \to y_0} J(y)$. ►

4.4. После того, как получены условия непрерывности несобственного интеграла по параметру, было бы естественно перейти к аналогу теоремы 1.5 — правилу Лейбница дифференцирования интеграла. Но мы отложим эту тему до следующего пункта, так как при её изложении удобно пользоваться возможностью интегрировать по параметру. В первом параграфе такого рода результаты не обсуждались, поскольку для суммируемых функций задача об интегрировании по параметру с достаточной полнотой решена теоремой Фубини. Обсудим теперь её обобщение на несобственные интегралы.

Пусть на некоторой σ-алгебре подмножеств множества Y задана полная мера μ. Покажем, что при естественных дополнительных предположениях для равномерно сходящихся несобственных интегралов перестановка порядка интегрирования возможна (другой вариант условий см. в упр. 5).

Теорема. *Пусть функция f суммируема по мере*[*)] $\lambda_1 \times \mu$ *на каждом множестве* $(a,t) \times Y$, $a < t < b$, *и* $I(x) = \int_Y f(x,y)\,d\mu(y)$. *Если* $\mu(Y) < +\infty$, *а несобственный интеграл (1) равномерно сходится на* Y, *то функция* J *суммируема на* Y, *несобственный интеграл* $\int_a^{\to b} I(x)\,dx$ *сходится и справедливо равенство*

$$\int_Y J(y)\,d\mu(y) = \int_a^{\to b} I(x)\,dx. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $J_t(y) = \int_a^t f(x,y)\,dx$ при $t \in (a,b)$, $y \in Y$. По теореме Фубини функция J_t суммируема на Y. Так как равномерная сходимость интеграла $J(y)$ равносильна соотношению (2), то для t достаточно близкого к b выполняется неравенство

$$|J(y) - J_t(y)| = \left|\int_t^{\to b} f(x,y)\,dx\right| \leqslant 1 \quad \text{для всех} \quad y \in Y.$$

Ввиду конечности меры μ отсюда следует суммируемость функции $J - J_t$, а следовательно, и функции J.

По теореме Фубини функция I суммируема на промежутке (a,t) и

$$\int_a^t I(x)\,dx = \int_a^t \left(\int_Y f(x,y)\,d\mu(y)\right)dx = \int_Y \left(\int_a^t f(x,y)\,dx\right)d\mu(y) =$$
$$= \int_Y J(y)\,d\mu(y) - \int_Y \left(\int_t^{\to b} f(x,y)\,dx\right)d\mu(y).$$

Таким образом,

$$\left|\int_a^t I(x)\,dx - \int_Y J(y)\,d\mu(y)\right| \leqslant \int_Y \left|\int_t^{\to b} f(x,y)\,dx\right| d\mu(y) \leqslant \mu(Y) \sup_{y\in Y} \left|\int_t^{\to b} f(x,y)\,dx\right| \underset{t\to b}{\longrightarrow} 0.$$

Это и означает, что несобственный интеграл $\int_a^{\to b} I(x)\,dx$ сходится, а его значение равно $\int_Y J(y)\,d\mu(y)$. ►

Следствие. *Если Y — компактное подмножество пространства $\mathbb{R}^m$, $\mu = \lambda_m$ и функция f непрерывна на $[a,b) \times Y$, то равенство (3) справедливо при единственном условии, что несобственный интеграл $J(y)$ равномерно сходится на Y.*

[*)] Напомним, что символом λ_1 мы обозначаем одномерную меру Лебега.

4.5. Теперь мы готовы перейти к доказательству правила Лейбница дифференцирования несобственных интегралов по параметру, которое служит важным инструментом их исследования.

Теорема. *Пусть функция f определена и непрерывна на множестве $[a,b)\times\langle c,d\rangle$ и интеграл (1) сходится при каждом $y\in\langle c,d\rangle$. Допустим, что*

а) при всех $x\in[a,b)$, $y\in\langle c,d\rangle$ существует частная производная $f'_y(x,y)$, непрерывная на $[a,b)\times\langle c,d\rangle$;

б) интеграл $I(y)=\int_a^{\to b} f'_y(x,y)\,dx$ равномерно сходится на Y.

Тогда $J\in C^1\big(\langle c,d\rangle\big)$ и $J'(y)=I(y)$, т. е.

$$\left(\int_a^{\to b} f(x,y)\,dx\right)'_y=\int_a^{\to b} f'_y(x,y)\,dx.$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что по следствию из теоремы 4.3 интеграл I непрерывно зависит от y. Применив к нему теорему об интегрировании по параметру на произвольном промежутке с концами s_0, $s\in\langle c,d\rangle$, получим

$$\int_{s_0}^{s} I(y)\,dy=\int_{s_0}^{s}\left(\int_a^{\to b} f'_y(x,y)\,dx\right)dy=\int_a^{\to b}\left(\int_{s_0}^{s} f'_y(x,y)\,dy\right)dx=$$
$$=\int_a^{\to b}(f(x,s)-f(x,s_0)\,dx=J(s)-J(s_0).$$

Отсюда вытекает дифференцируемость J, поскольку дифференцируем интеграл, стоящий в левой части равенства. Из теоремы Барроу следует, что $J'(s)=I(s)$. ►

4.6. Теперь, когда установлены основные свойства несобственного интеграла, зависящего от параметра, и мы убедились в полезности понятия равномерной сходимости, желательно иметь удобные, легко проверяемые условия, гарантирующие её. Мы докажем два таких признака, аналогичных признакам Дирихле и Абеля сходимости несобственных интегралов (см. п. IV.6.6). Предварительно несколько обобщим их (отказавшись от излишних требований гладкости) и дополним некоторыми оценками. Рассматриваемая в этих утверждениях функция f, вообще говоря, комплекснозначная.

Лемма. *Пусть на промежутке $[a,b)$, $-\infty<a<b\leqslant+\infty$, функция f допустима слева, а функция g монотонно стремится к нулю при $x\to b$. Предположим ещё, что функция $t\mapsto\int_a^t f(x)\,dx$ $(a<t<b)$ ограничена. Тогда несобственный интеграл $\int_a^{\to b} f(x)g(x)\,dx$ сходится и справедливо неравенство*

$$\left|\int_a^{\to b} f(x)g(x)\,dx\right|\leqslant|g(a)|\sup_{t\in(a,b)}\left|\int_a^t f(x)\,dx\right|. \tag{4}$$

Доказательство в значительной степени повторяет доказательство признака Дирихле. Оба они основаны на формуле интегрирования по частям. На сей раз, не

располагая гладкостью функции g, мы воспользуемся вариантом этой формулы, установленным в следствии 3 п. V.3.4. Из доказанного там равенства следует (не умаляя общности будем считать функцию g возрастающей), что

$$\int_a^t f(x)g(x)\,dx = F(t)g(t) - \int_{(a,t]} F(x)\,dg(x) \quad (a < t < b),$$

где $F(t) = \int_a^t f(x)\,dx$. Очевидно, мера μ, порождённая функцией g, конечна, а ограниченная функция F суммируема по ней. Поэтому интеграл $\int_{(a,t]} F(x)\,dg(x)$ стремится при $t \to b$ к конечному пределу $\int_{(a,b)} F(x)\,dg(x)$. Поскольку $F(t)g(t) \underset{t\to b}{\longrightarrow} 0$, это вместе с предыдущим равенством влечёт сходимость несобственного интеграла $\int_a^{\to b} f(x)g(x)\,dx$ и равенство

$$\int_a^{\to b} f(x)g(x)\,dx = -\int_{(a,b)} F(x)\,dg(x).$$

Отсюда немедленно следует и оценка (4):

$$\left|\int_a^{\to b} f(x)g(x)\,dx\right| \leqslant \mu\big((a,b)\big) \sup_{t\in(a,b)} |F(t)| \leqslant |g(a)| \sup_{t\in(a,b)} |F(t)|. \ \blacktriangleright$$

Если существует конечный предел $\lim\limits_{t\to b} F(t)$, т. е. сходится несобственный интеграл $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$, то от условия $g(t) \underset{t\to b}{\longrightarrow} 0$ можно отказаться и получить такой вариант леммы.

Следствие. *Пусть интеграл $\int_a^{\to b} f(x)\,dx$ сходится, а функция g монотонна и ограничена на $[a,b)$. Тогда интеграл $\int_a^{\to b} f(x)g(x)\,dx$ сходится и справедливо неравенство*

$$\left|\int_a^{\to b} f(x)g(x)\,dx\right| \leqslant 5 \sup_{t\in(a,b)} |g(t)| \sup_{t\in(a,b)} \left|\int_t^{\to b} f(x)\,dx\right|.$$

Доказательство. По лемме интеграл $\int_a^{\to b} f(x)(g(x)-L)dx$, где $L = \lim\limits_{x\to b} g(x)$, сходится. Представив произведение $f(x)g(x)$ в виде $Lf(x)+f(x)(g(x)-L)$, мы получаем не только сходимость интеграла $\int_a^{\to b} f(x)g(x)\,dx$, но и вытекающее из (4) неравенство

$$\left|\int_a^{\to b} f(x)g(x)\,dx\right| \leqslant |L| \left|\int_a^{\to b} f(x)\,dx\right| \ + \ |g(a+0)-L| \sup_{t\in(a,b)} \left|\int_a^t f(x)\,dx\right|.$$

Так как числа $|L|$ и $|g(a+0)|$ не превосходят $\sup\limits_{(a,b)} |g|$, то для завершения доказательства остаётся воспользоваться очевидной оценкой

$$\left|\int_a^t f(x)\,dx\right| = \left|\int_a^{\to b} f(x)\,dx - \int_t^{\to b} f(x)\,dx\right| \leqslant 2 \sup_{s\in(a,b)} \left|\int_s^{\to b} f(x)\,dx\right|. \ \blacktriangleright$$

Прежде чем перейти к нашей главной цели в этом пункте — признакам равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра, договоримся

о терминологии. Нам придётся рассматривать функции $x \mapsto f(x,y)$ (при фиксированном $y \in Y$) и $y \mapsto f(x,y)$ (при фиксированном $x \in X$). В п. V.3.1 для них были введены обозначения f^y и f_x соответственно. В дальнейшем, допуская вольность речи, мы, имея в виду то или иное свойство функции f^y (измеримость, непрерывность и т. д.), будем говорить, что при данном y функция f обладает этим свойством как функция от x (или по первой переменной). Например, фраза "при данном y функция f монотонна по первой переменной" означает монотонность функции f^y.

Теорема (признак Дирихле равномерной сходимости несобственного интеграла). *Пусть на произведении $[a,b) \times Y$, где $-\infty < a < b \leqslant +\infty$ и Y — некоторое множество, заданы функции f и g, удовлетворяющие условиям*

1) для любого $y \in Y$ функция f как функция от x допустима слева, а функция g монотонна по x на промежутке $[a,b)$;

2) функция $(t,y) \mapsto F(t,y) = \int_a^t f(x,y)\,dx$ ограничена на $(a,b) \times Y$;

3) $g(x,y) \underset{x\to b}{\longrightarrow} 0$ равномерно относительно $y \in Y$.

Тогда несобственный интеграл

$$J(y) = \int_a^{\to b} f(x,y)g(x,y)\,dx$$

равномерно сходится на Y.

Доказательство. Сходимость интеграла $J(y)$ для каждого y из Y вытекает из леммы. Как отмечалось в п. 4.2, равномерная сходимость равносильна соотношению

$$\sup_{y\in Y}\left|\int_s^{\to b} f(x,y)g(x,y)\,dx\right| \underset{s\to b}{\longrightarrow} 0. \tag{2'}$$

По условию 2) существует такое число C, что $|F(t,y)| \leqslant C$ для всех t из (a,b) и y из Y. Заменив в неравенстве (4) промежуток $[a,b)$ на $[s,b)$, а интеграл $\int_a^t f(x)\,dx$ на $\int_s^t f(x,y)\,dx = F(t,y) - F(s,y)$, мы получим, что

$$\left|\int_s^{\to b} f(x,y)g(x,y)\,dx\right| \leqslant 2C|g(s,y)| \qquad (a < s < b).$$

Чтобы убедиться в справедливости соотношения (2′), теперь остаётся лишь использовать условие 3). ▶

Теорема (признак Абеля равномерной сходимости несобственного интеграла). *Если несобственный интеграл $\int_a^{\to b} f(x,y)\,dy$ равномерно сходится на множестве Y, а функция g ограничена на произведении $(a,b) \times Y$ и при каждом $y \in Y$ монотонна по первой переменной, то интеграл $\int_a^{\to b} f(x,y)g(x,y)\,dx$ также равномерно сходится на Y.*

Для доказательства достаточно сослаться на неравенство, установленное в следствии из леммы.

4.7. При использовании признаков Дирихле и Абеля часто особенно удобными оказываются следующие два частных случая.

Следствие 1. *Если функция φ определена на $[a,+\infty)$ и монотонно стремится к нулю при $x\to+\infty$, то для любого $\delta>0$ интеграл*

$$J(y)=\int_a^\infty \varphi(x)\,e^{ixy}\,dx \tag{5}$$

равномерно сходится на множестве $\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)$.

Это вытекает из признака Дирихле, применённого к функциям $f(x,y)=e^{ixy}$ и $g(x,y)=\varphi(x)$. В этом случае, очевидно, $|F(t,y)|=\left|\int_a^t e^{ixy}dx\right|=\left|\frac{e^{ity}-e^{iay}}{iy}\right|\leqslant\frac{2}{|y|}\leqslant\frac{2}{\delta}$.

Полезно заметить, что так как равномерная сходимость связана с поведением интегралов $\int_a^t\varphi(x)\,e^{ixy}\,dx$ при $t\to+\infty$, то монотонность $\varphi(x)$ существенна только при больших x. На любом промежутке $[a,c]$ достаточно предполагать лишь суммируемость φ.

Поскольку подынтегральная функция непрерывна по y, с помощью следствия из теоремы 4.3 мы получаем, что $J\in C\big(\mathbb{R}\setminus\{0\}\big)$. Более того, мы можем придавать параметру y комплексные значения при условии, что $\mathcal{I}m\,y\geqslant 0$, $y\neq 0$. В этом случае оценка $|F(t,y)|\leqslant\frac{2}{|y|}$ сохраняется, и поэтому те же рассуждения дают непрерывность интеграла J во всей полуплоскости $\mathcal{I}m\,y\geqslant 0$ за исключением начала координат. Отметим ещё, что, как следует из теоремы 1.7, во внутренних точках (т. е. при $\mathcal{I}m\,y>0$) функция J голоморфна.

Следствие 2. *Если несобственный интеграл $I=\int_0^\infty f(x)\,dx$ сходится, а функция Φ монотонна и ограничена на $[0,+\infty)$, то интеграл*

$$J(y)=\int_0^\infty \Phi(yx)f(x)\,dx$$

сходится равномерно относительно $y>0$ и $J(y)\underset{y\to 0}{\longrightarrow}\Phi(+0)\,I$, где $\Phi(+0)=\lim\limits_{y\to 0}\Phi(y)$.

Это прямое следствие признака Абеля. Им часто пользуются при вычислении условно сходящихся несобственных интегралов. Например, если функция f ограничена, то взяв $\Phi(x)=e^{-x}$, мы можем представить искомый интеграл I в виде предела (при $y\to+0$) абсолютно сходящегося интеграла $J(y)$. Его вычисление обычно проще, чем вычисление исходного интеграла I. С такой ситуацией мы уже встретились в примере 2 п. 1.6. Там мы сначала с помощью дифференцирования по параметру вычислили интеграл $J(y)=\int_0^\infty\frac{\sin x}{x}e^{-xy}\,dx$ при $y>0$, а затем "вручную" доказали его непрерывность в точке $y=0$. Теперь этот предельный переход можно обосновать ссылкой на следствие 2.

4.8. Применим полученные результаты для вычисления важных "неберущихся" интегралов.

Пример 1. Как мы установили в примере 1 п. 1.7, при $a>0$ и $\mathcal{R}e(z)>0$ интеграл $\mathcal{L}(z)=\int_0^\infty x^{a-1}\,e^{-zx}\,dx$ равен $\frac{\Gamma(a)}{z^a}$, где z^a — такая ветвь степенно́й функции, что $z^a=1$ при $z=1$. Вместе с тем при $0<a<1$ интеграл $\mathcal{L}(z)$ сходится и для чисто мнимых $z\neq 0$, так что при таких a функция $\mathcal{L}$ определена во всей замкнутой полуплоскости $\mathcal{R}e\,z\geqslant 0$

за исключением нуля. Из признака Дирихле легко следует равномерная сходимость на множестве $|z| \geqslant \delta > 0$, $\mathcal{R}e\, z \geqslant 0$. Поэтому функция $\mathcal{L}(z)$ непрерывна при $\mathcal{R}e\, z \geqslant 0$, $z \neq 0$, а равенство $\mathcal{L}(z) = \frac{\Gamma(a)}{z^a}$ сохранится и для чисто мнимых z. В частности, при $z = i$ мы получим:

$$\int_0^\infty x^{a-1}\, e^{-ix}\, dx = \frac{\Gamma(a)}{i^a} = \Gamma(a)\, e^{-i\frac{\pi a}{2}} \quad (0 < a < 1).$$

Отделив вещественную и мнимую части, это равенство можно записать в виде

$$(C) \quad \int_0^\infty \frac{\cos x}{x^{1-a}}\, dx = \Gamma(a) \cos\frac{\pi a}{2}\,, \qquad\qquad (S) \quad \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^{1-a}}\, dx = \Gamma(a) \sin\frac{\pi a}{2}.$$

Равенство (S) справедливо и при $-1 < a < 0$ (достаточно проинтегрировать по частям равенство (C)). Кроме того, переход в (S) к пределу при $a \to 0$ ещё раз даёт нам значение важного интеграла $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$ (см. упр. 2).

Отметим также частный случай, соответствующий значению $a = \frac{1}{2}$:

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{-ix}\, dx = \Gamma\Big(\frac{1}{2}\Big)\, e^{-i\frac{\pi}{4}} = (1-i)\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Подстановкой $x = t^2$ интеграл, стоящий в левой части этого равенства, сводится к интегралу Френеля (см. п. IV.6.4): $\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{-ix}\, dx = 2\int_0^\infty e^{-it^2}\, dt$. Таким образом,

$$\int_0^\infty e^{-it^2}\, dt = \frac{1-i}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\,, \qquad \text{т. е.} \qquad \int_0^\infty \cos t^2\, dt = \int_0^\infty \sin t^2\, dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Пример 2. Вычислим *интегралы Лапласа*

$$C(y) = \int_0^\infty \frac{\cos yx}{1+x^2}\, dx \quad \text{и} \quad S(y) = \int_0^\infty \frac{x \sin yx}{1+x^2}\, dx \qquad (y \in \mathbb{R}).$$

Функция C непрерывна и ограничена на $\mathbb{R}$, поскольку подынтегральная функция имеет суммируемую мажоранту $\frac{1}{1+x^2}$.

Интегралы $C(y)$ и $S(y)$ тесно связаны друг с другом: пользуясь правилом Лейбница, мы получаем, что $C'(y) = -S(y)$ при $y > 0$. Для обоснования применимости правила Лейбница нужно (см. теорему 4.5) лишь сослаться на равномерную сходимость интеграла $S(y)$ вблизи произвольной точки $y_0 > 0$, которая сразу вытекает из равномерной сходимости интегралов вида (5) при $\varphi(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

Применить правило Лейбница к интегралу $S(y)$ непосредственно нельзя, так как несобственный интеграл, полученный формальным дифференцированием по параметру, расходится. Здесь нас выручает искусственный приём: прежде чем дифференцировать, выделим в $S(y)$ "медленно сходящуюся" часть — интеграл $\int_0^\infty \frac{\sin yx}{x}\, dx$, который нам известен (см. пример 2 п. 1.6):

$$S(y) = \int_0^\infty \Big(\frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{x}\Big) \sin yx\, dx + \int_0^\infty \frac{\sin yx}{x}\, dx = -\int_0^\infty \frac{\sin yx}{x(1+x^2)}\, dx + \frac{\pi}{2}.$$

К возникшему интегралу правило Лейбница, очевидно, применимо. Оно даёт нам равенство $S'(y) = -C(y)$. Следовательно, $C''(y) = C(y)$. Как известно из теории дифференциальных уравнений, общее решение этого уравнения имеет вид $C(y) = A\,e^{y} + B\,e^{-y}$ ($A,\ B \in \mathbb{R}$). Поскольку функция C ограничена, коэффициент A равен нулю, т. е. $C(y) = B\,e^{-y}$ при $y > 0$. Для определения коэффициента B воспользуемся непрерывностью C в нуле:

$$B = \lim_{y\to 0} C(y) = C(0) = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Таким образом, $C(y) = \frac{\pi}{2}\,e^{-y}$ и, следовательно, $S(y) = \frac{\pi}{2}\,e^{-y}$ при $y > 0$. Учитывая чётность первой функции и нечётность второй, окончательно получаем

$$C(y) = \frac{\pi}{2}\,e^{-|y|} \qquad \text{и} \qquad S(y) = \frac{\pi}{2}\,e^{-|y|}\operatorname{sign} y \qquad \text{при} \quad y \in \mathbb{R}.$$

Отметим, что для вычисления интеграла $C(y) = \int_0^\infty \frac{\cos xy}{1+x^2}\,dx$, где подынтегральная функция суммируема, оказалось удобным выйти за пределы класса суммируемых функций и использовать теорию, развитую для несобственных интегралов (см. также упр. 3).

4.9. В заключение этого параграфа обсудим асимптотику интегралов, по форме аналогичных рассматривавшимся в § 3 при получении формулы Лапласа. Мы имеем в виду интегралы вида

$$I(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(t)\,e^{ix\varphi(t)}dt \qquad (x \in \mathbb{R}), \tag{6}$$

играющие важную роль в методе стационарной фазы, используемом при исследовании волновых процессов. Из физических соображений, которых мы не будем касаться, функцию f естественно назвать амплитудой, а функцию φ — фазовой функцией. Наложив на них определённые ограничения, мы установим скорость убывания интеграла $I(x)$ при $x \to \pm\infty$. Следует отметить, что причина этого убывания принципиально отлична от той, что определяла асимптотику в § 3. Если там малость интеграла была следствием малости подынтегральной функции, то здесь интеграл $I(x)$ мал при больших x из-за частых перемен знака вещественной и мнимой частей экспоненциального множителя (ещё раз это явление мы обсудим в п. IX.2.5 при доказательстве теоремы Римана–Лебега).

Чтобы технические детали не затемняли основную идею, мы не будем стремиться к максимальной общности результатов и ограничимся рассмотрением бесконечно гладких функций f и φ, всюду считая фазовую функцию вещественной, а амплитуду финитной. Последнее гарантирует, в частности, суммируемость подынтегральной функции.

Наш первый результат относится к случаю, когда φ не имеет критических точек на носителе функции f.

Теорема. *Если $f, \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ и $\operatorname{grad}\varphi \neq 0$ на $\operatorname{supp} f$, то интеграл (6) при $x \to \infty$ убывает сверхстепенным образом: для любого $n \in \mathbb{N}$*

$$I(x) = O\left(\frac{1}{x^n}\right) \qquad \text{при} \quad x \to \pm\infty.$$

Доказательство. Используя разбиение единицы, подчинённое покрытию носителя $K = \operatorname{supp} f$ множествами $\left\{t \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, \frac{\partial\varphi}{\partial t_j}(t) \neq 0\right\}$ (см. п. VIII.1.8), можно считать, что $\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(t) \neq 0$ на K. Тогда якобиан J_Φ отображения

$$t = (t_1, t_2, \dots, t_m) \mapsto \Phi(t) = (\varphi(t), t_2, \dots, t_m)$$

отделён от нуля на K, и по теореме о локальной обратимости Φ — диффеоморфизм в окрестности каждой точки из K. Снова используя в случае необходимости разбиение единицы, можно считать, что Φ — диффеоморфизм (класса C^∞) в некоторой окрестности G носителя f. Замена переменной $u = \Phi(t)$ даёт нам

$$I(x) = \int_G \frac{f(t)}{|J_\Phi(t)|}\, e^{ix\varphi(t)} |J_\Phi(t)|\, dt = \int_{\Phi(G)} \frac{f(\Phi^{-1}(u))}{|J_\Phi(\Phi^{-1}(u))|}\, e^{ixu_1} du = \int_{\mathbb{R}^m} g(u)\, e^{ixu_1} du,$$

где $g = \frac{f(\Phi^{-1})}{|J_\Phi(\Phi^{-1})|} \in C_0^\infty$. Интегрируя правую часть этого равенства n раз по частям по первой координате, мы видим, что

$$|I(x)| = \left| \frac{1}{(ix)^n} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial^n g}{\partial u_1^n}(u)\, e^{ixu_1} du \right| \leqslant \frac{1}{|x|^n} \int_{\mathbb{R}^m} \left| \frac{\partial^n g}{\partial u_1^n}(u) \right| du. \ \blacktriangleright$$

4.10. Исследование интеграла $I(x)$ при наличии у функции φ критических точек, лежащих в $\operatorname{supp} f$, начнём с важнейшего частного случая, когда φ — невырожденная квадратичная форма. Общий случай сводится к нему при условии, что в критических точках матрица Гессе фазовой функции обратима (см. далее п. 4.11).

Итак, пусть теперь

$$I(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(t)\, e^{ixQ(t)} dt,$$

где Q — невырожденная вещественная квадратичная форма, а $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$. Так как с помощью ортогонального преобразования форма Q может быть приведена к диагональному виду, то далее мы будем считать, что

$$Q(t) = \sum_{j=1}^m a_j t_j^2 \qquad (t = (t_1, \dots, t_m) \in \mathbb{R}^m). \tag{7}$$

Нам будет удобно использовать частный случай этой формулы, когда $|a_1| = \dots = |a_m| = 1$. С точностью до нумерации координат это означает, что

$$Q(t) = \sum_{j=1}^p t_j^2 - \sum_{j=1}^q t_{p+j}^2, \tag{7'}$$

где $p + q = m$ (при $p = 0$ в равенстве (7′) следует заменить нулём первую сумму, а при $q = 0$ — вторую).

Начнём с оценки интеграла $I(1)$ в этом частном случае.

Лемма. *Если квадратичная форма Q имеет вид (7′), а функция f из $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ такова, что всюду $\left|\frac{\partial^\alpha f}{\partial t^\alpha}\right| \leqslant M$ при $0 \leqslant |\alpha| \leqslant 2m$, то $|I(1)| \leqslant 8^m M$.*

Здесь $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{Z}_+^m$ — мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_m$.

Доказательство проведём индукцией по числу переменных. При $m = 1$ оценим по отдельности интегралы от $f(t)\,e^{it^2}$ по промежуткам $[1, +\infty)$, $(-\infty, -1]$ и $[-1, 1]$. С помощью двукратного интегрирования по частям получаем:

$$\int_1^\infty f(t)\,e^{it^2}dt = \frac{1}{2i}\int_1^\infty \frac{f(t)}{t}\,d(e^{it^2}) = -\frac{f(1)}{2i}\,e^i - \frac{1}{(2i)^2}\int_1^\infty \frac{1}{t}\left(\frac{f(t)}{t}\right)'\,d(e^{it^2}) =$$

$$= -\frac{f(1)}{2i}\,e^i - \frac{f'(1) - f(1)}{4}\,e^i - \int_1^\infty \frac{t^2 f''(t) - 3tf'(t) + 3f(t)}{4t^4}\,e^{it^2}dt.$$

Поэтому интеграл по промежутку $[1, +\infty)$ не превосходит $\frac{M}{2} + \frac{M+M}{4} + \frac{7M}{4}\int_1^\infty \frac{dt}{t^2} \leqslant 3M$. Такая же оценка справедлива и для интеграла $\int_{-\infty}^{-1} f(t)\,e^{it^2}dt$. Следовательно,

$$\left|\int_{-\infty}^\infty f(t)\,e^{it^2}dt\right| \leqslant \left|\int_{-\infty}^{-1}\dots\right| + \left|\int_{-1}^{1}\dots\right| + \left|\int_1^\infty\dots\right| \leqslant 3M + 2M + 3M = 8M.$$

Очевидно, эта оценка верна и для интеграла $\int_{-\infty}^\infty f(t)\,e^{-it^2}dt$. Таким образом, база индукции установлена.

Предположим теперь, что лемма справедлива для функций $(m-1)$-й переменной. Положив для краткости $u = (t_1, \dots, t_{m-1})$, представим $Q(t)$ в виде $Q(t) = \widetilde{Q}(u) \pm t_m^2$. Тогда

$$I(1) = \int_{-\infty}^\infty h(t_m)\,e^{\pm it_m^2}dt_m, \qquad \text{где} \quad h(t_m) = \int_{\mathbb{R}^{m-1}} f(u, t_m)\,e^{i\widetilde{Q}(u)}du.$$

Так как по индукционному предположению, применённому к функциям f, $\frac{\partial f}{\partial t_m}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial t_m^2}$, функции $|h|$, $|h'|$ и $|h''|$ не превосходят $8^{m-1}M$, то для завершения доказательства остаётся воспользоваться базой индукции. ►

Теорема. *Пусть Q — невырожденная квадратичная форма, $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ и $I(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(t)\,e^{ixQ(t)}dt$. Тогда при $x \to +\infty$*

$$I(x) = \frac{f(0)}{\sqrt{|\det(A)|}}\left(\frac{\pi}{x}\right)^{\frac{m}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}S} + O\Big(\frac{1}{x^{\frac{m}{2}+1}}\Big),$$

где A — матрица формы Q, а S — её сигнатура (разность между числом положительных и отрицательных собственных чисел матрицы A).

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $f(0) = 0$. Будем считать, что $x > 1$. Согласно лемме Адамара (см. п. Д.VII.8) $f(t) = t_1 g_1(t) + \ldots + t_m g_m(t)$, где $g_1, \dots, g_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$. Поэтому нам достаточно рассмотреть функцию f вида $f(t) = t_k g(t)$ с g из $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$. Тогда интегрируя по частям по k-й координате, мы получаем:

$$I(x) = \pm\frac{1}{2ix}\int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial g}{\partial t_k}(t)\,e^{ixQ(t)}dt = \pm\frac{1}{2ix}\frac{1}{x^{\frac{m}{2}}}\int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial g}{\partial t_k}\left(\frac{u}{\sqrt{x}}\right)e^{iQ(u)}du$$

(выбор знака перед интегралом определяется знаком, с которым слагаемое t_k^2 входит в Q). Так как при $x > 1$ все производные функции $\frac{\partial g}{\partial t_k}\left(\frac{u}{\sqrt{x}}\right)$ до порядка $2m$ включительно равномерно ограничены, то по лемме последний интеграл ограничен константой, не зависящей от x, из чего вытекает утверждение теоремы в случае $f(0) = 0$.

Пусть теперь $f(0) \neq 0$. Сделав в случае необходимости ортогональную замену переменных, можно считать, что матрица A диагональная и квадратичная форма имеет вид (7). Тогда $\det(A) = a_1 \cdots a_m$. Преобразуем интеграл $I(x)$, производя растяжения по координатным осям с коэффициентами $\sqrt{|a_j|}$:

$$I(x) = \frac{1}{\sqrt{|\det(A)|}} I_1(x), \qquad I_1(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f_1(u)\, e^{ixQ_1(u)} du.$$

При этом $f_1(0) = f(0)$, а Q_1 — квадратичная форма, имеющая вид (7′), где p — число положительных, а q — отрицательных собственных чисел матрицы A. Таким образом, не умаляя общности мы можем и будем в дальнейшем считать, что квадратичная форма Q имеет вид (7′).

Рассмотрим такую функцию $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, что $\theta(u) = 1$ в окрестности нуля, и положим

$$K_\pm(x) = \int_{\mathbb{R}} \theta(u)\, e^{\pm ixu^2} du.$$

Ясно, что произведение $\Theta(t) = \theta(t_1) \cdots \theta(t_m)$ принадлежит $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ и

$$\int_{\mathbb{R}^m} \Theta(t)\, e^{ixQ(t)} dt = K_+^p(\lambda)\, K_-^q(\lambda). \tag{8}$$

Так как разность $\widetilde{f} = f - f(0)\Theta$ есть бесконечно дифференцируемая финитная функция и $\widetilde{f}(0) = 0$, то, как мы уже установили,

$$I(x) - f(0) K_+^p(x)\, K_-^q(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \widetilde{f}(t)\, e^{ixQ(t)} dt = O\left(\frac{1}{x^{\frac{m}{2}+1}}\right). \tag{9}$$

Таким образом, для завершения доказательства нам остаётся найти асимптотику интегралов $K_\pm(x)$. Очевидно,

$$K_\pm(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm ixu^2} du + \int_{-\infty}^{\infty} (\theta(u) - 1)\, e^{\pm ixu^2} du.$$

Первый из этих интегралов сводится к интегралу Френеля, вычисленному в примере 1 предыдущего пункта:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm ixu^2} du = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\pm it^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{x}}\, e^{\pm i\frac{\pi}{4}}.$$

Второй интеграл быстро стремится к нулю. Действительно, так как $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ и $\theta(u) = 1$ в окрестности нуля, то функция $\frac{\theta(u)-1}{u}$ бесконечно гладкая на $\mathbb{R}$. Кроме того, она вместе со всеми производными стремится к нулю на бесконечности. Поэтому,

представив рассматриваемый интеграл в виде $\frac{\pm 1}{2ix}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\theta(u)-1}{u}\,d(e^{\pm ixu^2})$ и дважды проинтегрировав по частям, мы видим, что он убывает по крайней мере как x^{-2}. Таким образом,

$$K_{\pm}(x)=\sqrt{\frac{\pi}{x}}\,e^{\pm i\frac{\pi}{4}}+O(x^{-2}).$$

Учитывая (8), (9) и равенства $p+q=m$, $p-q=S$, мы завершаем доказательство:

$$I(x)=f(0)\Big(\sqrt{\frac{\pi}{x}}\,e^{i\frac{\pi}{4}}+O\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big)^p\Big(\sqrt{\frac{\pi}{x}}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}+O\Big(\frac{1}{x^2}\Big)\Big)^q+O\Big(\frac{1}{x^{\frac{m}{2}+1}}\Big)=$$

$$=f(0)\Big(\frac{\pi}{x}\Big)^{\frac{m}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}(p-q)}+O\Big(\frac{1}{x^{\frac{m}{2}+1}}\Big)=f(0)\Big(\frac{\pi}{x}\Big)^{\frac{m}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}S}+O\Big(\frac{1}{x^{\frac{m}{2}+1}}\Big).\ \blacktriangleright$$

4.11. Обобщим теперь полученный результат, заменив квадратичную форму Q гладкой функцией φ. Как следует из теоремы 4.9, дополнение окрестности множества критических точек даёт малый вклад в интеграл (6). Поэтому всё сводится к подсчёту вклада (сколь угодно малых) окрестностей критических точек. Мы сделаем это, предполагая, что они невырождены. Напомним, что критическая точка p функции φ называется невырожденной, если её матрица Гессе $H(p)=\Big(\frac{\partial^2\varphi}{\partial t_j\,\partial t_k}(p)\Big)_{1\leqslant j,k\leqslant m}$ обратима. Далее символом $S(p)$ обозначается сигнатура второго дифференциала функции φ в точке p.

Теорема. *Пусть $f,\varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, причём f финитна, а вещественная функция φ имеет в $\operatorname{supp}(f)$ конечное число критических точек $p_1,\dots,p_n$ и все они невырожденные. Тогда при $x\to+\infty$*

$$I(x)=\int_{\mathbb{R}^m}f(t)\,e^{ix\varphi(t)}dt=\Big(\frac{2\pi}{x}\Big)^{\frac{m}{2}}\sum_{j=1}^{n}\frac{f(p_j)}{\sqrt{|\det(H(p_j))|}}\,e^{ix\varphi(p_j)}\,e^{i\frac{\pi}{4}S(p_j)}+O\Big(\frac{1}{x^{\frac{m}{2}+1}}\Big).$$

Доказательство начнём с ведущего частного случая, когда $n=1$ и $p_1=0$ (при $p_1\neq 0$ следует использовать сдвиг). Убедимся, что носитель функции f можно считать сколь угодно малым. Для этого рассмотрим функцию $\theta\in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ равную нулю вне шара $B(\rho)$ и единице около нуля. Выбор радиуса ρ уточним позже (он зависит лишь от свойств φ). Поскольку произведение $f\cdot(1-\theta)$ удовлетворяет условиям теоремы 4.9, замена f на $f\theta$ приведёт к малому изменению интеграла $I(x)$ (вызванная ею погрешность сверхстепенным образом стремится к нулю). Это позволяет считать в дальнейшем, что $\operatorname{supp}(f)\subset\overline{B}(\rho)$. Согласно лемме Морса (см. п. Д.VII.8) для достаточно малого ρ существует такой диффеоморфизм $\Phi\in C^\infty(B(\rho),\mathbb{R}^m)$, что $\Phi(0)=0$, $J_\Phi(0)=1$ и при $u=\Phi(t)$

$$\varphi(t)-\varphi(0)=Q(u)=\sum_{j=1}^{m}a_ju_j^2.$$

Замена переменной $u=\Phi(t)$ сводит интеграл $I(x)$ к виду, рассмотренному в теореме предыдущего пункта:

$$I(x)=\int_{\Phi(B(\rho))}\frac{f(\Phi^{-1}(u))}{|J_\Phi(\Phi^{-1}(u))|}\,e^{ix(\varphi(0)+Q(u))}du=e^{ix\varphi(0)}\int_{\mathbb{R}^m}\widetilde{f}(u)\,e^{ixQ(u)}du,$$

где $\widetilde{f} = \frac{f(\Phi^{-1})}{|J_\Phi(\Phi^{-1})|}$ на $\Phi(B(\rho))$ и $\widetilde{f} = 0$ вне этого множества. Кроме того, $\widetilde{f}(0) = f(0)$, так как $J_\Phi(0) = 1$. Поскольку $\det(H(0)) = 2^m a_1 \cdots a_m$ нам остаётся сослаться на теорему 4.10.

В общем случае построим непересекающиеся шары с центрами в точках $p_1, \ldots, p_n$ и функции $\theta_1, \ldots, \theta_n$ с описанными свойствами. Так как φ не имеет критических точек вне этих шаров, то по теореме 4.9 замена функции f на $(\theta_1 + \ldots + \theta_n)f$ изменит интеграл $I(x)$ на величину, которая сверхстепенным образом убывает на бесконечности. Интеграл от $(\theta_1 + \ldots + \theta_n)f$ распадается в сумму интегралов рассмотренного типа. ►

УПРАЖНЕНИЯ

1) Докажите, что $\int_0^\infty \frac{1-e^{-x}}{x} \cos ax\, dx = \frac{1}{2}\ln\bigl(1 + \frac{1}{a^2}\bigr)$ при $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Указание. Проверьте, что этот интеграл равен пределу интеграла $I(y) = \int_0^\infty e^{-xy} \frac{1-e^{-x}}{x} \cos ax\, dx$ при $y \to +0$. Для вычисления $I(y)$ примените правило Лейбница.

2) Докажите, что интеграл в левой части равенства (S) п.4.8 равномерно сходится в окрестности точки $a = 0$. Перейдя к пределу при $a \to 0$, вычислите заново интеграл $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$.

3) По аналогии с вычислением интегралов Лапласа найдите интеграл $J(y) = \int_0^\infty \frac{\cos yx}{1+x^4}\, dx$ $(y \in \mathbb{R})$.

4) Убедитесь, что интеграл $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} \frac{dx}{\ln^2(2+xy)}$ равномерно сходится на $(0,1)$, но не удовлетворяет условию (L_{loc}) ни в какой окрестности нуля.

5) Сохраняя обозначения теоремы 4.4 об интегрировании по параметру, докажите, что в ней можно отказаться от конечности меры и равномерной сходимости интеграла, заменив эти условия следующим предположением: существует такая суммируемая на Y функция φ, что $\left|\int_a^t f(x,y)\, dx\right| \leqslant \varphi(y)$ при $t \in (a,b)$ и $y \in Y$.

6) Используйте предыдущее упражнение для обоснования изменения порядка интегрирования в повторных интегралах

$$\int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-xy} \sin x\, dy\right) dx \quad \text{и} \quad \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-xy^2} \sin x\, dy\right) dx.$$

Опираясь на это, вычислите заново интегралы $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$ и $\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\, dx$.

7) Сохраняя обозначения теоремы 4.5 о дифференцировании по параметру, докажите следующее усиление этой теоремы: если

а) для некоторой точки y_0 из Y интеграл $J(y_0)$ сходится;

б) при почти всех $x \in (a,b)$ и при каждом $y \in Y$ существует частная производная $f'_y(x,y)$, причём $|f'_y(x,y)| \leqslant g(x)$, где g — некоторая функция, допустимая слева на промежутке (a,b);

в) интеграл $I(y) = \int_a^{\to b} f'_y(x,y)\, dx$ равномерно сходится на Y,

то несобственный интеграл $J(y)$ сходится для любого $y \in Y$, функция J дифференцируема на Y и $J'(y) = I(y)$.

8) Докажите, что $\int_{-\infty}^\infty \frac{\sin x}{1+y^2\sin^2 x} \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{\sqrt{1+y^2}}$ при $y \in \mathbb{R}$. Указание. Воспользуйтесь разложением функции $\frac{1}{\sin x}$ в сумму простейших дробей: $\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + 2x \sum\limits_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{x^2-(\pi n)^2}$ (см. пример 2 п. X.3.5).

9) Используя результат упр. 8, вычислите интеграл $\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(y \sin x)}{x}\, dx$ $(y \in \mathbb{R})$.

10) Пусть функция f определена почти везде на $\mathbb{R}^m$ и суммируема в любом круге $B(R)$. Будем говорить, что кратный несобственный интеграл от f сходится, если существует конечный предел

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\|x\|\leqslant R} f(x)\,dx,$$

который мы по-прежнему будем обозначать $\int_{\mathbb{R}^m} f(x)\,dx$. Докажите, что в случае сходимости справедлив такой многомерный вариант следствия 2 п. 4.7: если Φ — монотонная ограниченная на $(0,+\infty)$ функция, то для любого $y>0$ сходится несобственный интеграл $J(y)=\int_{\mathbb{R}^m}\Phi\bigl(y\|x\|\bigr)\,f(x)\,dx$ и при этом

$$J(y)\underset{y\to 0}{\longrightarrow}\Phi(+0)\int_{\mathbb{R}^m} f(x)\,dx.$$

§ 5. Условия существования и основные свойства свёртки

Все рассматриваемые в этом параграфе функции, вообще говоря, комплекснозначные, предполагаются измеримыми в пространстве $\mathbb{R}^m$ (в широком смысле — см. п. IV.3.3), под мерой понимается мера Лебега. Как и раньше, $B(r)$ — обозначение шара радиуса r с центром в нуле.

5.1. Определение. Пусть функции f и g измеримы в $\mathbb{R}^m$. Если

$$\int_{\mathbb{R}^m}|f(x-y)g(y)|\,dy<+\infty \quad \text{при почти всех } x\in\mathbb{R}^m, \tag{1}$$

то функция h, определённая почти везде равенством

$$h(x)=\int_{\mathbb{R}^m} f(x-y)g(y)\,dy, \tag{2}$$

называется их *свёрткой* и обозначается символом $f*g$.

Условие (1) будем называть *условием существования свёртки.* С помощью замены $y\to z=x-y$ легко убедиться, что оно равносильно условию

$$\int_{\mathbb{R}^m}|f(z)g(x-z)|\,dz<+\infty \quad \text{при почти всех } x\in\mathbb{R}^m$$

и что в этом случае из (2) следует равенство $h(x)=\int_{\mathbb{R}^m} f(z)g(x-z)\,dz$. Поэтому свёртки $f*g$ и $g*f$ существуют одновременно и равны. Таким образом, свёртка коммутативна, т. е. $f*g=g*f$ (если хотя бы одна из этих свёрток определена).

Как легко видеть, свойства свёртки похожи на свойства умножения чисел. Она не только коммутативна, но очевидно, и дистрибутивна: $f*(g_1+g_2)=f*g_1+f*g_2$. Не углубляясь в эту аналогию (см. упр. 1), мы будем использовать навеянные ею термины, в частности, называть функции f и g свёрточными сомножителями.

Отметим также перестановочность свёртки со сдвигом: если символом f_h обозначить сдвиг функции f, т. е. положить $f_h(x)=f(x-h)$, то из определения свёртки непосредственно следует, что $(f*g)_h=f_h*g=f*g_h$.

Помимо чисто математических вопросов (к ним, как мы увидим в следующем параграфе, относятся, в частности, задачи аппроксимации) источником понятия свёртки служат и некоторые прикладные задачи. Например, она возникает как естественная математическая модель реального прибора, обрабатывающего поступающие сигналы. Скажем об этом несколько подробнее. Пусть у нас имеется некоторый прибор ("черный ящик"), реагирующий на сигналы, которые мы будем представлять себе как финитные функции времени. Естественно предположить, что реакция прибора (его "отклик") на сигнал f_h, поступивший с запозданием h, будет отличаться лишь соответствующим запозданием от реакции на сигнал f. Иными словами, то преобразование, которое совершает прибор с сигналом f, превращая его в отклик $\widetilde{f}$, перестановочно со сдвигом во времени: $\widetilde{f_h} = \left(\widetilde{f}\right)_h$. Мы предположим, кроме того, что линейной комбинации сигналов прибор сопоставляет линейную комбинацию откликов. Основной характеристикой такого прибора (или, как часто говорят, его аппаратной функцией) является его реакция на импульсное воздействие δ_α, которое можно представлять себе как функцию с единичным интегралом ("энергией импульса"), постоянную на очень малом промежутке $\Delta_\alpha = [0, \alpha)$ и равную нулю вне него. Иначе говоря, $\delta_\alpha = \frac{1}{\alpha}\chi_\alpha$, где χ_α — характеристическая функция промежутка Δ_α. При достаточно малых α реакция прибора на сигналы δ_a практически не зависит от α. Поэтому, заменяя δ_α "предельной функцией", под мгновенным единичным импульсом понимают функцию Дирака*) δ (условность этого термина мы обсудим в п. 6.1), обладающую свойствами:

$$\delta(t) = 0 \ \text{ при } \ t \neq 0, \quad \delta(0) = +\infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1.$$

Отклик E на сигнал δ называют аппаратной функцией прибора. Представляя произвольный сигнал f с надлежащей точностью в виде линейной комбинации ступенчатых функций, постоянных на промежутках $[n\alpha, (n+1)\alpha)$, можно написать, что

$$f(t) \approx \sum_n f(n\alpha)\chi_\alpha(t - n\alpha) \approx \alpha \sum_n f(n\alpha)\delta_\alpha(t - n\alpha).$$

Ввиду того, что преобразование, осуществляемое прибором, линейно и перестановочно со сдвигом, для отклика мы получим:

$$\widetilde{f}(s) \approx \alpha \sum_n f(n\alpha)\, E(s - n\alpha).$$

Эта сумма есть не что иное, как интегральная сумма для интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)E(s - t)\, dt.$$

Учитывая, что при выборе достаточно малого α последнее приближённое равенство станет сколь угодно точным, можно считать, что $\widetilde{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)E(s - u)\, du$. Таким образом, отклик прибора на сигнал f совпадает со свёрткой f с аппаратной функцией прибора. Этим обуславливается существенная роль свёртки в теоретических основах оптики и радиотехники.

*) Поль Адриен Морис **Дирак** (Dirac), 1902–1984, — английский физик.

5.2. Лемма. *Если измеримые в $\mathbb{R}^m$ функции f и g удовлетворяют условию (1), то их свёртка $f * g$ также измерима в $\mathbb{R}^m$.*

Доказательство достаточно провести для вещественных функций. В этом случае можно воспользоваться леммой V.4.3, из которой вытекает, что подынтегральная функция в (2) не только измерима при почти всех $x \in \mathbb{R}^m$ как функция y, но и измерима "по совокупности" переменных x, y (т. е. функция $(x, y) \mapsto F(x, y) = f(x - y)g(y)$ измерима в $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$). Поэтому для доказательства леммы нам остаётся сослаться на следствие 2 из теоремы Тонелли (см. п. V.3.1). ▶

Теорема. *Свёртка суммируемых в $\mathbb{R}^m$ функций f и g определена почти везде в $\mathbb{R}^m$, суммируема и удовлетворяет неравенству*

$$\int_{\mathbb{R}^m} |(f * g)(x)|\, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^m} |f(x)|\, dx \int_{\mathbb{R}^m} |g(x)|\, dx.$$

Доказательство. Положим $H(x) = \int_{\mathbb{R}^m} |f(x - y)g(y)|\, dy$. Так как (по лемме V.4.3) функция $(x, y) \mapsto f(x - y)g(y)$ измерима в $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$, то по теореме Тонелли

$$\int_{\mathbb{R}^m} H(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x - y)|\, dx \right) |g(y)|\, dy.$$

Замена переменной $x \mapsto x - y$ показывает, что при каждом y внутренний интеграл равен $\int_{\mathbb{R}^m} |f(x)|\, dx$. Поэтому

$$\int_{\mathbb{R}^m} H(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} |f(x)|\, dx \int_{\mathbb{R}^m} |g(y)|\, dy < +\infty.$$

Следовательно, функция H суммируема, и поэтому $H(x) < +\infty$ почти везде. Таким образом, условие (1) выполнено и свёртка $(f * g)(x)$ существует. Её измеримость установлена в лемме, а суммируемость вытекает из неравенства $|(f * g)(x)| \leqslant H(x)$. Кроме того,

$$\int_{\mathbb{R}^m} |(f * g)(x)|\, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^m} H(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} |f(x)|\, dx \int_{\mathbb{R}^m} |g(y)|\, dy. \ ▶$$

5.3. Дополним теперь теорему 5.2 и получим ещё один вариант достаточных условий существования свёртки. Рассмотрим более широкий, чем $\mathscr{L}(\mathbb{R}^m)$, класс измеримых функций, который нередко возникает как в теории функций, так и в других разделах математики. Повторим определение, данное в п. IV.9.2.

Определение. Измеримая в $\mathbb{R}^m$ функция f называется *локально суммируемой* в $\mathbb{R}^m$, если она суммируема на любом ограниченном множестве, т. е. если

$$\int_{B(R)} |f(x)|\, dx < +\infty \quad \text{для любого} \quad R > 0.$$

Множество всех локально суммируемых в $\mathbb{R}^m$ функций будем обозначать символом $\mathscr{L}_{loc}(\mathbb{R}^m)$. Очевидно, всякая локально суммируемая функция почти везде конечна и $C(\mathbb{R}^m) \subset \mathscr{L}_{loc}(\mathbb{R}^m)$.

Напомним, что замыкание множества $\{x \in \mathbb{R}^m \mid f(x) \neq 0\}$ называется *носителем* функции f и обозначается символом $\operatorname{supp}(f)$. Функция называется *финитной,* если она обращается в нуль вне некоторого шара, т. е. если её носитель — компактное множество. Символом $A + B$, где A, $B \subset \mathbb{R}^m$, обозначается множество $\{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$.

Теорема. *Если $f \in \mathscr{L}_{loc}(\mathbb{R}^m)$, а функция g суммируема и финитна, то свёртка $f * g$ существует и*

$$\operatorname{supp}(f * g) \subset \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g). \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $\operatorname{supp}(g) \subset B(r)$. Как и в теореме 5.2 положим

$$H(x) = \int_{\mathbb{R}^m} |f(x-y)g(y)|\,dy = \int_{B(r)} |f(x-y)g(y)|\,dy$$

и докажем, что $H(x) < +\infty$ почти везде. Для этого проверим, что $H \in \mathscr{L}_{loc}(\mathbb{R}^m)$, т. е. что $\int_{B(R)} H(x)\,dx < +\infty$ при любом $R > 0$. Действительно, поскольку $\operatorname{supp}(g) \subset B(r)$,

$$\begin{aligned}\int_{B(R)} H(x)\,dx &= \int_{B(R)} \left(\int_{B(r)} |f(x-y)g(y)|\,dy\right) dx = \\ &= \int_{B(r)} |g(y)| \left(\int_{B(R)} |f(x-y)|\,dx\right) dy \leqslant \int_{B(r)} |g(y)| \left(\int_{B(r+R)} |f(u)|\,du\right) dy = \\ &= \int_{B(r+R)} |f(u)|\,du \cdot \int_{B(r)} |g(y)|\,dy < +\infty.\end{aligned}$$

Последнее неравенство справедливо ввиду локальной суммируемости f. Таким образом, функция H конечна почти везде в любом шаре $B(R)$ и, следовательно, почти везде в $\mathbb{R}^m$. Поэтому условие (1) выполнено, свёртка $f * g$ существует.

Для доказательства включения (3) заметим, что если $f(x-y)g(y) \neq 0$, то $x - y \in \operatorname{supp}(f)$ и $y \in \operatorname{supp}(g)$, а следовательно, $x = (x-y) + y \in \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)$. Поэтому $f(x-y)g(y) \equiv 0$ в случае, когда $x \notin \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)$. Следовательно, $f * g = 0$ вне множества $\operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g)$, т. е.

$$\{x \in \mathbb{R}^m \mid (f * g)(x) \neq 0\} \subset \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g).$$

Ввиду компактности $\operatorname{supp}(g)$, множество, стоящее в правой части этого включения, замкнуто (предоставляем читателю проверить это самостоятельно), откуда вытекает, что

$$\operatorname{supp}(f * g) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^m \mid (f * g)(x) \neq 0\}} \subset \operatorname{supp}(f) + \operatorname{supp}(g). \quad \blacktriangleright$$

Следствие. *Свёртка двух суммируемых финитных функций финитна.*

5.4. Обсудим теперь дифференциальные свойства свёртки. Предварительно докажем вспомогательный результат.

Лемма (об усечении). *Пусть f, $\widetilde{f} \in \mathscr{L}_{loc}(\mathbb{R}^m)$, а функция g ограничена и $\operatorname{supp}(g) \subset B(r)$. Если f совпадает с $\widetilde{f}$ в шаре $B(R + r)$, то свёртки $f * g$ и $\widetilde{f} * g$ совпадают в шаре $B(R)$.*

Доказательство. Пусть $\|x\| < R$. Тогда $\|x-y\| < R+r$ при $\|y\| < r$. Поэтому

$$(f*g)(x) = \int_{B(r)} f(x-y)g(y)\,dy = \int_{B(r)} \widetilde{f}(x-y)g(y)\,dy = (\widetilde{f}*g)(x). \quad \blacktriangleright$$

Теорема. *Пусть $f \in \mathscr{L}_{loc}(\mathbb{R}^m)$, а функция g финитна и ограничена. Тогда*

1) если хотя бы одна из функций f, g непрерывна, то свёртка $f*g$ непрерывна;

2) если хотя бы одна из функций f, g непрерывно дифференцируема, то свёртка непрерывно дифференцируема и её производные могут быть вычислены по формуле $(k=1,\dots,m)$

$$\frac{\partial(f*g)}{\partial x_k}(x) = \begin{cases} \big(f*\frac{\partial g}{\partial x_k}\big)(x), & \text{если} \quad g \in C^1(\mathbb{R}^m); \\ \big(\frac{\partial f}{\partial x_k}*g\big)(x), & \text{если} \quad f \in C^1(\mathbb{R}^m). \end{cases} \tag{4}$$

Замечание. Первое утверждение теоремы допускает существенное усиление. Как мы убедимся впоследствии (см. следствие IX.3.2), свёртка локально суммируемой и ограниченной финитной функции непрерывна без каких-либо дополнительных предположений.

Доказательство. Будем считать, что $\operatorname{supp}(g) \subset B(r)$.

1) Если непрерывна функция g, а функция f суммируема, то непрерывность интеграла $\int_{\mathbb{R}^m} f(y)g(x-y)\,dy$ по параметру следует из теоремы 1.3. В случае, когда f не суммируема, мы используем то очевидное обстоятельство, что непрерывность свёртки достаточно доказать в произвольном шаре $B(R)$. При этом можно, пользуясь леммой об усечении, заменить f финитной суммируемой функцией $\widetilde{f}$, совпадающей с f в шаре $B(R+r)$. Этот же приём применим и в случае, когда непрерывна функция f, поскольку тогда $\widetilde{f}$ можно считать непрерывной.

2) Переходя к доказательству гладкости свёртки, предположим сначала, что гладкой является функция g. Очевидно, что при любом $x_0 \in \mathbb{R}^m$ и при $\|x-x_0\| < 1$

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(y)g(x-y)\,dy = \int_{B(x_0,r+1)} f(y)g(x-y)\,dy.$$

Применяя к правой части этого равенства правило Лейбница (см. теорему 1.5), мы сразу получаем требуемый результат:

$$\frac{\partial(f*g)}{\partial x_k}(x) = \int_{B(x_0,r+1)} f(y)\frac{\partial g}{\partial x_k}(x-y)\,dy = \Big(f*\frac{\partial g}{\partial x_k}\Big)(x).$$

Убедимся, что в нашем случае применение правила Лейбница законно. Для этого нужно проверить, что в точке x_0 для частной производной $\frac{\partial}{\partial x_k}\big(f(y)g(x-y)\big) = f(y)\frac{\partial g}{\partial x_k}(x-y)$ выполняется условие (L_{loc}). Это действительно так, поскольку

$$\Big|f(y)\frac{\partial g}{\partial x_k}(x-y)\Big| \leqslant M|f(y)|\chi_{B(x_0,r+1)}(y) \quad \text{при всех} \quad x \in B(x_0,r+1),$$

где $M = \max_x |\frac{\partial g(x)}{\partial x_k}|$.

Если непрерывно дифференцируема не функция g, а f, то доказывая дифференцируемость свёртки в $B(R)$, следует заменить f финитной функцией $\widetilde{f}$, совпадающей с f в достаточно большом шаре, как мы это делали, доказывая непрерывность свёртки, с той разницей, что теперь функция $\widetilde{f}$ должна быть гладкой. Например, можно домножить f на гладкую финитную функцию, равную единице в шаре $B(R+r)$. Тогда, меняя ролями g и $\widetilde{f}$ и пользуясь уже доказанной формулой, мы при $\|x\| < R$ получим:

$$\frac{\partial(f*g)}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial(g*\widetilde{f})}{\partial x_k}(x) = \Big(g*\frac{\partial\widetilde{f}}{\partial x_k}\Big)(x) = \Big(g*\frac{\partial f}{\partial x_k}\Big)(x) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_k}*g\Big)(x).$$

Ввиду произвольности R это доказывает теорему. ►

Следствие. *Свёртка локально суммируемой функции f и финитной ограниченной функции φ бесконечно дифференцируема, если бесконечно дифференцируема хотя бы одна из свёртываемых функций.*

Доказательство следует проводить с помощью индукции, опираясь на формулу (4). ►

В частности, из следствия вытекает, что линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами перестановочен со свёрткой.

5.5. Понятие свёртки имеет различные обобщения и модификации. Укажем на некоторые из них.

В случае, когда рассматриваются периодические функции на вещественной прямой, свёртка определяется, как выше, с тем отличием, что теперь интеграл по $\mathbb{R}$ заменяется интегралом по промежутку, длина которого равна периоду (очевидно, безразлично, какой из таких промежутков использовать). Для определённости будем считать период равным 2π. Ясно, что свёртка периодических функций также периодическая функция. Мы предоставляем читателю самостоятельно убедиться, что для свёртки периодических функций справедлив аналог теоремы 5.2. Для этого нужно лишь повторить приведённое там доказательство, изменив надлежащим образом область интегрирования.

Сказанное в полной мере относится и к функциям, заданным в $\mathbb{R}^m$, 2π-периодическим по каждой переменной. Их свёртка определяется равенством

$$(f*g)(x) = \int_{(-\pi,\pi)^m} f(x-y)g(y)\,dy.$$

К ещё одному варианту понятия свёртки можно прийти следующим образом. Если функция g суммируема и неотрицательна, то на интеграл $\int_{\mathbb{R}^m} f(x-y)g(y)\,dy$ можно смотреть как на интеграл по мере ν, имеющей плотность g относительно меры Лебега: $(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x-y)\,d\nu(y)$. Правую часть этого равенства мы и положим в основу определения свёртки функции и меры. Чтобы обеспечить существование свёртки, будем предполагать все меры конечными, а функции ограниченными.

Определение. Пусть ν — конечная борелевская мера в $\mathbb{R}^m$, а f — измеримая по Борелю и ограниченная в $\mathbb{R}^m$ функция. Свёртка $f*\nu$ определяется равенством

$$(f*\nu)(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x-y)\,d\nu(y) \qquad (x\in\mathbb{R}^m).$$

Ещё один вариант свёртки соответствует считающей мере μ, заданной на целочисленной решётке $\mathbb{Z}^m$. В этой ситуации вместо функций мы говорим о кратных последовательностях. По аналогии с (2), свёртку двух таких последовательностей $f = \{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}^m}$ и $g = \{g_n\}_{n\in\mathbb{Z}^m}$ определяют формулой

$$(f * g)_k = \int_{\mathbb{Z}^m} f(k-n)g(n)\,d\mu(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^m} f_{k-n}\,g_n \qquad (k \in \mathbb{Z}^m).$$

Мы рекомендуем читателю сформулировать и доказать аналог теоремы 5.2 для этого случая.

УПРАЖНЕНИЯ

1) Докажите ассоциативность свёртки: если $f, g, h \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m)$, то функции $(f * g) * h$ и $f * (g * h)$ совпадают почти везде.

2) Докажите, что свёртка двух функций класса C^r, одна из которых финитна, есть функция класса C^{2r} $(r = 0, 1, \dots)$.

3) Проверьте, что мера μ, определённая на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$ равенством $d\mu = \frac{dx}{x}$, инвариантна относительно умножения, т. е. для любого измеримого множества $E \subset \mathbb{R}_+$ и любого $a > 0$ справедливо равенство $\mu(E) = \mu(aE)$, где $aE = \{ax \mid x \in E\}$. Это открывает возможность определить на полуоси свёртку следующим образом:

$$(f * g)(x) = \int_0^\infty f\left(\frac{x}{y}\right) g(y)\frac{dy}{y}.$$

Убедитесь, что для так определённой свёртки остаются справедливыми все доказанные в § 5 теоремы (по определению функция принадлежит $\mathscr{L}_{loc}(\mathbb{R}_+)$, если она суммируема на любом компактном множестве, содержащемся в $\mathbb{R}_+$).

4) Докажите, что свёртка конечной на компактных множествах борелевской меры с финитной функцией класса C^r снова есть функция того же класса.

§ 6. Аппроксимативная единица

6.1. Если один из свёрточных сомножителей неотрицателен и интеграл от него равен единице, то на свёртку можно смотреть как на среднее значение второго сомножителя. Действительно, если $g \geqslant 0$ и $\int_{\mathbb{R}^m} g(y)\,dy = 1$, то $\inf\limits_{\mathbb{R}^m} f \leqslant (f * g)(x) \leqslant \sup\limits_{\mathbb{R}^m} f$ для $x \in \mathbb{R}^m$. Если при этом носитель функции g содержится в шаре $B(r)$, то эту оценку можно уточнить:

$$\inf_{B(x,r)} f \leqslant (f * g)(x) \leqslant \sup_{B(x,r)} f \qquad (x \in \mathbb{R}^m).$$

Поэтому для непрерывной функции f при малом r свёртка должна быть близка к f. Вместе с тем, гладкость свёртки часто оказывается гораздо выше, чем у f. В частности, как мы покажем в примере 1 п. 6.2, свёртка любой локально суммируемой функции с характеристической функцией произвольного шара непрерывна. Таким образом, можно надеяться получить, используя свёртку, метод аппроксимации рассматриваемых функций более гладкими.

Из непрерывности свёртки локально суммируемой функции с характеристической функцией шара вытекает, что не существует локально суммируемой функции, которая играла бы роль единицы свертки, т. е. такой, что свёртка с ней не меняла бы второго свёрточного сомножителя (даже если это финитная непрерывная функция — см. упр. 1). Вместе с тем, свёртка с мерой δ_0, порождённой единичной точечной нагрузкой, сосредоточенной в нуле, обладает этим свойством:

$$(f * \delta_0)(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x-y)\, d\delta_0(y) = f(x) \text{ при всех } x \text{ из } \mathbb{R}^m.$$

Мера δ_0, конечно, не имеет плотности относительно меры Лебега, однако, в своё время знаменитый физик П. Дирак, избегая интегрирования по мере δ_0, фактически предложил считать, что такая плотность всё-таки имеется. Не говоря ни о каких мерах, он ввёл "функцию" δ (известную теперь как функция Дирака), обладающую следующими свойствами:

$$\text{I.}\quad \delta(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \neq 0, \\ +\infty & \text{при } x = 0, \end{cases} \qquad \text{и} \qquad \text{II.}\quad \int_{\mathbb{R}^m} \delta(x)\, dx = 1.$$

Исходя из этих свойств, он делал вывод, что для любой непрерывной в $\mathbb{R}^m$ функции f справедливо равенство $f(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x-y)\delta(y)\, dy$, т. е. что δ есть единица свёртки на классе непрерывных функций. Именно это обстоятельство и играет решающую роль. Свойства I и II, которыми характеризуется функция Дирака, конечно, несовместны. Однако, если смотреть на интеграл $\int_{\mathbb{R}^m} f(x-y)\delta(y)\, dy$ просто как на новое обозначение интеграла $\int_{\mathbb{R}^m} f(x-y)\, d\delta_0(y)$, выкладки, в которых участвует функция δ, становятся корректными.

Как уже было сказано, мера δ_0 не имеет плотности относительно меры Лебега, и функции со свойствами I и II не существует. В связи с этим возникает задача об аппроксимации δ_0 мерами, имеющими плотность, т. е. мерами вида $\omega(x)\, dx$. В широком классе случаев мы убедимся, что свёртка с мерой такого вида, с одной стороны, мало изменяет функцию (поскольку наша мера "близка" к δ_0), а с другой — приводит к функции, более гладкой, чем исходная. Это открывает возможность аппроксимировать произвольные функции гладкими. Характер аппроксимации может толковаться по-разному и требует уточнения. В этом и следующем параграфах мы получим результаты, связанные главным образом с поточечной и равномерной аппроксимацией. Другой подход к этой задаче будет рассмотрен в гл. IX.

Прежде всего определим семейство функций, с помощью которого аппроксимируется мера δ_0.

Определение. Пусть $T \subset (0, +\infty)$ и t_0 — предельная точка T $(0 \leqslant t_0 \leqslant +\infty)$. Семейство заданных в $\mathbb{R}^m$ функций $\{\omega_t\}_{t \in T}$ называется *аппроксимативной единицей в* $\mathbb{R}^m$ (при $t \to t_0$), если

$$\text{а) } \omega_t \geqslant 0, \qquad \text{б) } \int_{\mathbb{R}^m} \omega_t(x)\, dx = 1, \qquad \text{в) } \int_{\|x\|>\delta} \omega_t(x)\, dx \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} 0 \text{ для любого } \delta > 0.$$

Замечание 1. Учитывая равенство б), условие в) можно, очевидно, сформулировать и в таком виде:

$$\int_{\|x\|<\delta} \omega_t(x)\, dx \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} 1 \quad \text{для любого } \delta > 0.$$

Таким образом, основной вклад в интеграл $\int_{\mathbb{R}^m} \omega_t(x)\,dx$ вносит интеграл по сколь угодно малой окрестности нуля. Это свойство аппроксимативной единицы называют иногда *фокусирующим свойством*. Оно свидетельствует, что при t близких к t_0 график ω_t можно схематически представлять себе в виде "узкого высокого горба". Такие функции называют иногда δ-образными.

Замечание 2. Иногда отказываются от неотрицательности функций ω_t, заменяя условие а) менее ограничительным предположением

а′) $$\int_{\mathbb{R}^m} |\omega_t(x)|\,dx \leqslant C \text{ при некотором } C > 0 \text{ и всех } t \in T$$

(при этом в условии в) функция ω_t заменяется на $|\omega_t|$).

Для неотрицательных функций условие а′) выполняется автоматически ввиду равенства б). Многие из результатов, получаемых ниже, остаются справедливыми и в этой более общей ситуации, но мы не будем на этом останавливаться.

6.2. Рассмотрим некоторые примеры аппроксимативных единиц. Во всех случаях рассматриваемые здесь семейства являются аппроксимативными единицами при $t \to +0$, $T = (0, +\infty)$, а свёрточные сомножители предполагаются локально суммируемыми в $\mathbb{R}^m$.

Пример 1. Усреднение по Стеклову*). Пусть $\omega_t = \frac{1}{v(t)}\chi_{B(t)}$, где $v(t)$ — объём (лебегова мера) шара $B(t)$ в $\mathbb{R}^m$. Очевидно, это семейство есть аппроксимативная единица. Значение свёртки $f * \omega_t$ в точке x есть усреднение f по шару $B(x,t)$:

$$(f * \omega_t)(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(y)\frac{1}{v(t)}\chi_{B(t)}(x-y)\,dy = \frac{1}{v(t)}\int_{B(x,t)} f(y)\,dy.$$

Такое усреднение систематически использовал Стеклов, и свёртки $f_t = f * \omega_t$ называются усреднением функции f по Стеклову. Для локально суммируемой функции они непрерывны (впоследствии, см. п. IX.3.2, мы установим более общий результат). Действительно, будем считать, что $\|x - x_0\| < 1$. При таких x симметрическая разность e_x шаров $B(x_0,t)$ и $B(x,t)$ содержится в шаре $B(x_0, 1+t)$. Так как функция f суммируема на нём и $\lambda(e_x) \to 0$ при $x \to x_0$, то в силу абсолютной непрерывности интеграла

$$|f_t(x) - f_t(x_0)| \leqslant \frac{1}{v(t)}\int_{e_x} |f(y)|\,dy \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} 0.$$

Пример 2. Рассмотренный пример укладывается в общую схему, с помощью которой могут быть построены различные аппроксимативные единицы. Эта схема состоит в следующем.

Пусть ψ — неотрицательная суммируемая в $\mathbb{R}^m$ функция, $C = \int_{\mathbb{R}^m} \psi(x)\,dx > 0$. Положим

$$\omega_t(x) = \frac{1}{\mathrm{C}t^m}\psi\Big(\frac{x}{t}\Big) \quad (x \in \mathbb{R}^m).$$

Семейство $\{\omega_t\}_{t>0}$ есть аппроксимативная единица при $t \to 0$. Выполнение условия а) из определения аппроксимативной единицы очевидно, а в справедливости б) мы убеждаемся с помощью замены переменной $y = \frac{x}{t}$:

$$\int_{\mathbb{R}^m} \omega_t(x)\,dx = \frac{1}{C}\int_{\mathbb{R}^m} \psi(y)\,dy = 1.$$

*) Владимир Андреевич **Стеклов**, 1863–1926, — российский математик.

Вместе с тем выполнено и условие в), так как при любом $\delta > 0$

$$\int_{\|x\|<\delta} \omega_t(x)\,dx = \frac{1}{C}\int_{\|y\|<\delta/t} \psi(y)\,dy \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1.$$

В примере 1 роль функции ψ играет характеристическая функция шара $B(1)$.

Особенно удобно использовать аппроксимативные единицы, полученные по описанной общей схеме, в случае, когда ψ — финитная функция класса C^∞, а её носитель содержится в единичном шаре. Такие аппроксимативные единицы впервые систематически использовал Соболев, и мы будем называть их *соболевскими* аппроксимативными единицами.

6.3. Установим теперь основной результат, относящийся к аппроксимативным единицам. Мы обратимся к этому вопросу ещё раз в § IX.3.

Теорема. *Пусть f — измеримая и ограниченная в $\mathbb{R}^m$ функция, $\{\omega_t\}_{t\in T}$ — аппроксимативная единица при $t \to t_0$, $f_t = f * \omega_t$. Тогда*

1) *если в точке x_0, $x_0 \in \mathbb{R}^m$, существует конечный предел $L = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, то $f_t(x_0) \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} L$;*

2) *если $f \in C(\mathbb{R}^m)$, то $f_t \underset{t\to t_0}{\rightrightarrows} f$ на любом ограниченном множестве.*

Доказательство. По определению

$$f_t(x_0) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x_0 - y)\,\omega_t(y)\,dy.$$

Домножая равенство

$$1 = \int_{\mathbb{R}^m} \omega_t(y)\,dy$$

на L и вычитая из предыдущего, мы получаем:

$$f_t(x_0) - L = \int_{\mathbb{R}^m} (f(x_0 - y) - L)\,\omega_t(y)\,dy.$$

Докажем, что правая часть этого неравенства стремится к нулю при $t \to t_0$. По условию $|f| \leqslant C$ всюду. Поэтому для любого $\delta > 0$ выполняется неравенство

$$\begin{aligned} |f_t(x_0) - L| &\leqslant \int_{\mathbb{R}^m} |f(x_0 - y) - L|\,\omega_t(y)\,dy = \int_{\|y\|<\delta} \ldots + \int_{\|y\|>\delta} \ldots \leqslant \\ &\leqslant \sup_{0<\|z-x_0\|<\delta} |f(z) - L| \int_{\|y\|<\delta} \omega_t(y)\,dy + 2C\int_{\|y\|>\delta} \omega_t(y)\,dy. \end{aligned} \tag{1}$$

Так как $\int_{\|y\|<\delta} \omega_t(y)\,dy \leqslant \int_{\mathbb{R}^m} \omega_t(y)\,dy = 1$, то отсюда следует, что

$$|f_t(x_0) - L| \leqslant \sup_{0<\|z-x_0\|<\delta} |f(z) - L| + 2C\int_{\|y\|>\delta} \omega_t(y)\,dy.$$

Теперь за счёт выбора параметра δ можно сделать сколь угодно малым первое слагаемое в правой части этого неравенства, а затем при фиксированном δ с помощью условия в) добиться малости и второго слагаемого.

Доказательство второго утверждения теоремы совпадает с доказательством предыдущего, если заменить x_0 на x, а L на $f(x)$, и учесть, что ввиду равномерной непрерывности f на каждом ограниченном множестве E число δ можно выбрать не зависящим от точки $x \in E$. ►

Замечание. Из доказательства теоремы видно, что если функция f равномерно непрерывна во всем пространстве, то $f_t \underset{t\to t_0}{\rightrightarrows} f$ на $\mathbb{R}^m$.

Следствие. *Если функция g ограничена и непрерывна в нуле, то*

$$\int_{\mathbb{R}^m} g(y)\,\omega_t(y)\,dy \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} g(0).$$

Это частный случай первого утверждения теоремы, если считать, что $x_0 = 0$, $f(x) = g(-x)$, а $L = g(0)$. ►

Следствие ещё раз подкрепляет соображения, которыми мы руководствовались, вводя аппроксимативную единицу. Из него вытекает, что меры ν_t с плотностями ω_t сходятся к мере δ_0, порождённой единичной нагрузкой, сосредоточенной в нуле, в том смысле, что для любой ограниченной непрерывной функции g

$$\int_{\mathbb{R}^m} g(x)\,d\nu_t(x) \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} g(0) = \int_{\mathbb{R}^m} g(x)\,d\delta_0(x).$$

Если дополнительно предположить, что функции ω_t финитны и их носители стягиваются к нулю, то это утверждение верно для любой (в том числе и неограниченной) непрерывной функции (см. упр. 2).

6.4. Рассмотрим теперь один важный пример использования аппроксимативных единиц и докажем знаменитую теорему Вейерштрасса, утверждающую, что всякую непрерывную на замкнутом промежутке функцию можно с любой степенью точности равномерно аппроксимировать многочленом. Приём, который мы используем для доказательства, состоит в том, что сначала данная функция с малой погрешностью заменяется свёрткой с некоторой “хорошей” функцией, а затем строится полиномиальная аппроксимация для свёртки. Этот метод одинаково хорошо работает как для функций одной, так и многих переменных*).

Следуя Вейерштрассу, мы будем рассматривать свёртки данной функции с функциями вида

$$W_t(x) = \frac{1}{t^m} e^{-\pi \frac{\|x\|^2}{t^2}} \qquad (x \in \mathbb{R}^m, t > 0).$$

Это семейство есть аппроксимативная единица при $t \to +0$. Условие а) из определения аппроксимативной единицы очевидно, условие б) легко проверить, используя значение многомерного интеграла Эйлера–Пуассона, вычисленного в п. V.4.2. Проверку фокусирующего свойства мы предоставляем читателю.

*) Краткое и ясное изложение идеи этого метода (вместе с остроумной пародией на формально-наукообразный стиль изложения) читатель может найти в замечательной книге [Ли], п. 11.

Теорема 1 (Вейерштрасс). *Пусть $f \in C(\mathbb{R}^m)$. Тогда для любых $R > 0$, $\varepsilon > 0$ найдётся такой многочлен m переменных P, что*

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon \quad \text{при всех } x \text{ из } \overline{B}(R).$$

Доказательство. Предположим сначала, что функция f финитна и что она равна нулю вне шара $\overline{B} \equiv \overline{B}(R)$ (иначе радиус R можно увеличить). Положим $f_t = f * W_t$. Как указано в замечании к теореме 6.3, $f_t \rightrightarrows f$ при $t \to 0$. Зафиксируем t так, что

$$|f(x) - f_t(x)| < \varepsilon \quad \text{при любом } x \text{ в } \mathbb{R}^m. \tag{2}$$

Покажем теперь, что в шаре $\overline{B}$ любая функция f_t допускает равномерную аппроксимацию многочленом. Так как f равна нулю вне $\overline{B}$, то

$$f_t(x) = \int_{B(R)} f(y) W_t(x-y)\, dy.$$

Будем считать, что $x \in \overline{B}$, откуда следует, что в последнем интеграле $x - y \in B(2R)$.

Идея дальнейших рассуждений состоит в том, чтобы в шаре $B(2R)$ хорошо аппроксимировать функцию W_t многочленом и воспользоваться тем, что свёртка финитной функции с многочленом снова есть многочлен. Чтобы убедиться в последнем, рассмотрим произвольный многочлен Q. Ясно, что $Q(x-y)$ также есть полином относительно координат точки x с коэффициентами, зависящими от y. После домножения на финитную функцию $f(y)$ эти коэффициенты станут суммируемыми. Проинтегрировав их мы получим некоторые числа, и поэтому свёртка снова есть полином.

Займёмся теперь аппроксимацией функции W_t многочленом. По формуле Тейлора (с остаточным членом по Лагранжу) мы получаем: $e^{-u} = T_{n-1}(u) + r_n(u)$, где T_{n-1} — многочлен степени $n-1$, $r_n(u) = \frac{1}{n!} e^{-\theta u}(-u)^n$, $0 < \theta < 1$. Ясно, что $|r_n(u)| \leqslant \frac{u^n}{n!}$ при $u \geqslant 0$. По определению W_t

$$W_t(x) = \frac{1}{t^m} T_{n-1}\left(\pi \frac{\|x\|^2}{t^2}\right) + \frac{1}{t^m} r_n\left(\pi \frac{\|x\|^2}{t^2}\right) = P_n(x) + \rho_n(x),$$

причём P_n есть многочлен (как композиция T_{n-1} и многочлена $\pi \frac{\|x\|^2}{t^2}$), а для ρ_n при $\|x\| \leqslant 2R$ справедлива оценка

$$|\rho_n(x)| = \left| \frac{1}{t^m} r_n\left(\pi \frac{\|x\|^2}{t^2}\right) \right| \leqslant \frac{1}{t^m n!} \left(\pi \frac{\|x\|^2}{t^2}\right)^n \leqslant \frac{1}{t^m n!} \left(\frac{4\pi R^2}{t^2}\right)^n. \tag{3}$$

Поскольку $f(x) = 0$ вне шара $\overline{B}$, очевидно, что свёртка $f * \rho_n$ удовлетворяет неравенству

$$|(f * \rho_n)(x)| = \left| \int_{B(R)} f(y) \rho(x-y)\, dy \right| \leqslant M \int_{B(R)} |\rho_n(x-y)|\, dy,$$

где $M = \max_x |f(x)|$. Так как при $\|x\| \leqslant R$ в интеграле справа $\|x - y\| \leqslant 2R$, то вместе с (3) это даёт нам

$$|(f * \rho_n)(x)| \leqslant M v(R) \frac{1}{t^m n!} \left(\frac{4\pi R^2}{t^2}\right)^n,$$

где $v(R)$ — m-мерный объём шара $B(R)$. Зафиксируем теперь n так, чтобы правая часть последнего неравенства была меньше ε. Тогда, очевидно, при $\|x\| \leqslant R$

$$|f_t(x) - (f * P_n)(x)| = |(f * \rho_n)(x)| < \varepsilon. \tag{4}$$

Вместе с (2) это неравенство показывает, что $|f(x) - (f * P_n)(x)| < 2\varepsilon$ при $x \in \overline{B}$. Это завершает доказательство теоремы для финитной функции, поскольку, как отмечалось выше, свертка $f * P_n$ есть полином.

В общем случае достаточно заменить f непрерывной финитной функцией f_1, совпадающей с f в шаре $\overline{B}$. Построив полином, аппроксимирующий f_1 в $\overline{B}$, мы тем самым найдём аппроксимацию и для f. ►

Следствие 1. *Пусть f — функция, непрерывная на компактном множестве $K \subset \subset \mathbb{R}^m$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой многочлен P, что $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ при всех $x \in K$*

Доказательство. По теореме Титце–Урысона (см. п. Д.II.2) всякая функция, непрерывная на замкнутом подмножестве пространства $\mathbb{R}^m$, может быть продолжена до функции, непрерывной во всём пространстве. Поэтому нам достаточно применить теорему к продолженной функции, считая R настолько большим, что $K \subset B(R)$. ►

Отметим ещё один факт, вытекающий из теоремы Вейерштрасса.

Следствие 2. *Пусть финитная функция f непрерывна на $\mathbb{R}^m$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая бесконечно дифференцируемая финитная функция g, что $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ при всех $x \in \mathbb{R}^m$.*

Доказательство. Пусть функция f обращается в нуль вне шара $B(R)$ и пусть P — полином, аппроксимирующий f с точностью до ε в шаре $B(R+1)$. Мы получим искомую функцию g, если домножим P на такую функцию φ класса C^∞, что $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, $\varphi(x) = 1$ при $x \in B(R)$ и φ обращается в нуль вне $B(R+1)$. ►

Замечание. Если в следствии 2 функция f неотрицательна, то можно считать неотрицательной и функцию g.

Действительно, в противном случае её можно заменить функцией $\varphi \cdot (g + \varepsilon)$, которая, очевидно, неотрицательна, и аппроксимирует f с точностью до 2ε.

Обобщая теорему 1, покажем, что гладкую функцию можно аппроксимировать полиномом вместе с производными. В следующей теореме буква k обозначает мультииндекс ($k \in \mathbb{Z}_+^m$), а символ $D^k f$, где $k = (k_1, \ldots, k_m)$, — частную производную функции f порядка $|k| = k_1 + \ldots + k_m$, когда дифференцирование по j-й координате производится k_j раз.

Теорема 2. *Пусть $f \in C^r(\mathbb{R}^m)$ ($r \in \mathbb{N}$). Тогда для любых $R > 0$, $\varepsilon > 0$ найдётся такой многочлен m переменных P, что*

$$|D^k f(x) - D^k P(x)| < \varepsilon \text{ при всех } x \text{ из } \overline{B}(R) \text{ и всех } k,\ 0 \leqslant |k| \leqslant r.$$

Доказательство. Как и в теореме 1, будем не умаляя общности считать, что $\operatorname{supp}(f) \subset \overline{B}(R)$. Так как согласно свойствам свёртки $D^k(f_t) = (D^k f) * W_t$, то можно так

выбрать параметр $t > 0$, что вместе с неравенством (2) при $|k| \leqslant r$ для любого $x \in \mathbb{R}^m$ будут верны и аналогичные неравенства для $D^k f$. Положим $M = \max\limits_{x, |k| \leqslant r} |D^k f(x)|$. Тогда при надлежаще выбранном n неравенство (4) окажется справедливым не только для функции f, но и для всех её производных порядка не выше r. ►

6.5. Здесь, опираясь на понятие свёртки периодических функций (см. п. 5.5), мы определим периодическую аппроксимативную единицу и докажем теорему Вейерштрасса о приближении тригонометрическими многочленами. Сжатие позволяет легко менять величину периода. Поэтому не умаляя общности мы будем рассматривать в этом пункте лишь 2π-периодические по каждой переменной функции и только их будем называть периодическими.

На периодический случай определение аппроксимативной единицы п. 6.1 модифицируется очевидным образом (далее $Q = [-\pi, \pi]^m$): семейство периодических функций $\{\omega_t\}_{t \in T}$ называется *периодической аппроксимативной единицей* (при $t \to t_0$), если

а) $\omega_t \geqslant 0$, б) $\displaystyle\int_Q \omega_t(x)\,dx = 1$, в) $\displaystyle\int_{Q \setminus B(\delta)} \omega_t(x)\,dx \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} 0$ для любого $\delta \in (0, \pi)$.

Введём ещё усиленный вариант фокусирующего свойства:

в′) $\omega_t(x)\,dx \underset{t \to t_0}{\rightrightarrows} 0$ на $Q \setminus B(\delta)$ для любого $\delta \in (0, \pi)$.

Почти дословное повторение доказательства теоремы 6.3 даёт такие аппроксимативные свойства периодической свёртки $f_t = f * \omega_t$.

Теорема. *Пусть периодическая функция f измерима и ограничена на кубе Q. Тогда*

а) если в точке x_0, $x_0 \in \mathbb{R}^m$, существует конечный предел $L = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, то $f_t(x_0) \underset{t \to t_0}{\longrightarrow} L$;

б) если $f \in C(\mathbb{R}^m)$, то $f_t \underset{t \to t_0}{\rightrightarrows} f$ на $\mathbb{R}^m$.

Замечание. Если аппроксимативная единица удовлетворяет условию в′), то утверждение а) остаётся справедливым для любой периодической функции, суммируемой на Q. Для доказательства следует неравенство (1) заменить неравенством

$$|f_t(x_0) - L| \leqslant \int_Q |f(x_0 - y) - L|\,\omega_t(y)\,dy = \int_{B(\delta)} \ldots + \int_{Q \setminus B(\delta)} \ldots \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{y \in B(\delta)} |f(x_0 - y) - L| + \sup_{y \in Q \setminus B(\delta)} \omega_t(y) \int_Q |f(x_0 - y) - L|\,dy,$$

после чего рассуждение можно закончить так же, как в теореме 6.3: сначала за счёт выбора δ сделать малым первое слагаемое в правой части этого неравенства, а затем добиться малости второго, используя условие в′).

Опираясь на последнюю теорему, получим теперь периодический аналог теоремы Вейерштрасса (см. п. 6.4). Поскольку свёртка любой суммируемой функции с тригонометрическим многочленом — снова тригонометрический многочлен, нам достаточно построить аппроксимативную единицу, состоящую из таких многочленов.

Начнём с одномерного случая и рассмотрим тригонометрический многочлен

$$\Theta_n(x) = \frac{1}{c_n}\cos^{2n}\frac{x}{2} = \frac{1}{c_n}\Big(\frac{1+\cos x}{2}\Big)^n,$$

где коэффициент c_n таков, что $\int_{-\pi}^{\pi}\Theta_n(x)\,dx = 1$, т. е. $c_n = \int_{-\pi}^{\pi}\cos^{2n}\frac{x}{2}\,dx$. Эти интегралы были вычислены в примере п. IV.6.2, но для дальнейшего важно лишь, что они не слишком быстро стремятся к нулю:

$$c_n = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}y\,dy \geqslant 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin y\cos^{2n}y\,dy = \frac{4}{2n+1} > \frac{1}{n}.$$

Отсюда следует, что последовательность функций Θ_n обладает усиленным фокусирующим свойством в′), сформулированным в начале этого пункта:

$$\sup_{\delta<|x|<\pi}\Theta_n(x) \leqslant n\cos^{2n}\frac{\delta}{2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{для любого} \quad \delta\in(0,\pi).$$

Исходя из построенной периодической аппроксимативной единицы Θ_n одной переменной, легко построить её многомерный аналог:

$$\omega_n(x) = \Theta_n(x_1)\cdots\Theta_n(x_m) \quad \text{для} \quad x = (x_1,\dots,x_m)\in\mathbb{R}^m.$$

Эта последовательность тригонометрических многочленов удовлетворяет условиям а)–в) и, следовательно, для неё справедлива теорема с $T=\mathbb{N}$ и $t_0=+\infty$. Поскольку $f_n = f*\omega_n$ — тригонометрический многочлен, мы приходим к периодическому варианту теоремы Вейерштрасса 6.4.

Следствие (Вейерштрасс). *Пусть f — всюду непрерывная периодическая функция. Тогда существует последовательность тригонометрических многочленов, сходящаяся к f равномерно на $\mathbb{R}^m$.*

УПРАЖНЕНИЯ

1) Докажите, что не существует “единицы свёртки” — такой локально суммируемой функции g, что $f*g=f$ для любой финитной непрерывной функции f.

2) Пусть носители функций ω_t, образующих при $t\to 0$ аппроксимативную единицу в $\mathbb{R}^m$, “стягиваются к нулю”, т. е. удовлетворяют условию: $\operatorname{supp}(\omega_t)\subset B(r_t)$, $r_t\to 0$ при $t\to 0$. Докажите, что $f*\omega_t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} f$ поточечно для любой непрерывной в $\mathbb{R}^m$ функции f и что сходимость равномерная на каждом компактном множестве.

3) Докажите, что первое утверждение теоремы 6.3 остаётся справедливым и в случае, когда $L=+\infty$.

4) Дополните первое утверждение теоремы 6.3 в одномерном случае, доказав, что если все функции ω_t чётные, то для ограниченной функции f, имеющей в точке x_0 конечные односторонние пределы $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$, справедливо соотношение

$$(f*\omega_t)(x_0) \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} \frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}.$$

5) Укажите такую аппроксимативную единицу $\{\omega_t\}_{t>0}$ на вещественной прямой, что $(f*\omega_t)(x_0) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} f(x_0+0)$, если односторонний предел $f(x_0+0)$ существует.

6) Дополняя следствие 2 п. 6.4, докажите, что всякую непрерывную в $\mathbb{R}^m$ функцию можно равномерно на всем пространстве $\mathbb{R}^m$ аппроксимировать функцией класса C^∞.

7) Покажите, что для аппроксимативной единицы, не удовлетворяющей условию в′), утверждение а) теоремы 6.5 становится неверным.

Глава VIII. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Наша основная цель в этой главе — придать точный смысл понятию площади гладкой поверхности и дать методы её вычисления. Безусловно, у каждого человека есть интуитивное представление о площади криволинейной поверхности, которым он руководствуется в повседневной жизни (например, оценивая расход краски, необходимой для окраски поверхности). Вместе с тем, вычисление площади криволинейной поверхности — задача весьма трудная по сравнению с аналогичной задачей для плоской фигуры. Элементарными средствами свести первую ко второй можно лишь в случаях конической и цилиндрической поверхностей (их надо "развернуть"). В школе к этим результатам добавляется вычисление площади сферы и некоторых её частей (результат совсем неочевидных рассуждений).

Прежде чем обсуждать вычислительную сторону проблемы, необходимо преодолеть принципиальную трудность — определить, что такое площадь поверхности.

Мы не ограничиваемся лишь двумерными поверхностями, и в дальнейшем речь пойдёт о построении меры (площади поверхности) на гладких многообразиях произвольной размерности*). При этом нам придётся использовать основные факты, связанные с гладкими отображениями. Для удобства читателя нужные сведения собраны во вспомогательном первом параграфе главы.

§ 1. Предварительные сведения

Напомним необходимые сведения из теории гладких многообразий и зафиксируем связанные с ними обозначения и терминологию.

Символом $C^r(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m)$ $(1 \leqslant r \leqslant +\infty)$ обозначим множество r раз непрерывно дифференцируемых отображений, действующих в $\mathbb{R}^m$ из множества $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^k$, которое всегда предполагается открытым. Отображения класса C^1 назовём гладкими. Говоря об отображении, гладком на произвольном (не открытом) множестве, мы всегда будем иметь в виду, что оно задано и непрерывно дифференцируемо на некоторой окрестности этого множества, т. е. на более широком открытом множестве.

Дифференциал отображения $\Phi \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m)$ в точке $a \in \mathcal{O}$ обозначим символом $d_a\Phi$, а соответствующую ему (в канонических базисах пространств $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{R}^m$) матрицу, т. е. матрицу Якоби — символом $\Phi'(a)$. Как известно, эта $m \times k$-матрица (m строчек и k столбцов) образована частными производными $\frac{\partial \varphi_j}{\partial t_i}$ $(1 \leqslant j \leqslant m, 1 \leqslant i \leqslant k)$ координатных функций $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ отображения Φ. Если $m = k$, то матрица Якоби квадратная. Её определитель $\det\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial t_i}\right)$ (якобиан отображения Φ) будем обозначать также символом $\frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_k)}{D(t_1, \dots, t_k)}$.

*) Читатель, знакомый с теорией многообразий, заметит, что за исключением одномерного случая мы рассматриваем только многообразия без края.

1.1. Определение. Множество M, $M \subset \mathbb{R}^m$, называется *простым k-мерным многообразием,* если оно гомеоморфно некоторому открытому подмножеству $\mathcal{O}$ пространства $\mathbb{R}^k$ $(k \leqslant m)$. Гомеоморфизм $\Phi\colon \mathcal{O} \xrightarrow{\text{на}} M$ называется *параметризацией* многообразия M. Если при некотором $r = 1, 2, \ldots, +\infty$

$$\Phi \in C^r(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m) \quad \text{и} \quad \operatorname{rank} d_a\Phi = k \text{ в каждой точке } a \in \mathcal{O},$$

то параметризация Φ называется *гладкой* класса C^r. Простое многообразие, у которого существует такая параметризация, также называется гладким (класса C^r).

Обратим внимание читателя на то обстоятельство, что множество задания параметризации всегда (по определению) открыто.

Поскольку положение точки $p = \Phi(t)$ на многообразии однозначно определяется параметром t, его координаты $t_1, \ldots, t_k$ часто называют криволинейными координатами точки p. В конкретных случаях они нередко имеют простой геометрический смысл, знание которого позволяет упростить решение задачи.

Простейшим частным случаем k-мерного гладкого многообразия является k-мерное векторное подпространство. Его параметризацию можно построить, например, следующим образом. Зафиксируем в подпространстве произвольный базис $\tau_1, \ldots, \tau_k$ и положим

$$\Phi(t) = t_1\tau_1 + \ldots + t_k\tau_k \qquad (t = (t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^k).$$

Очевидно, отображение Φ удовлетворяет всем необходимым требованиям. “Криволинейные координаты” вектора из подпространства — это просто его координаты в базисе $\tau_1, \ldots, \tau_k$.

Определение (первое определение гладкого многообразия). Множество $M \subset \mathbb{R}^m$ называется *k-мерным многообразием класса C^r*, если у каждой точки p из M есть такая окрестность U, что пересечение $U \cap M$ есть простое k-мерное многообразие класса C^r. Его параметризация называется *локальной параметризацией* многообразия M в точке p.

Аналогично определяется k-мерное многообразие класса C^0 — это множество M, которое локально является простым k-мерным многообразием (без каких-либо условий гладкости) — каждая его точка имеет такую окрестность U, что пересечение $U \cap M$ есть простое k-мерное многообразие. Число k называется *размерностью многообразия M* и обозначается символом $\dim M$. Разность $m - \dim M$ называется *коразмерностью* многообразия. Многообразие коразмерности 1 будем называть *поверхностью.*

В противоположность локальной параметризации, параметризация простого многообразия называется также *глобальной параметризацией.*

Если значение параметра $r \geqslant 1$ не существенно (в большинстве случаев достаточно считать, что $r = 1$), то мы будем называть множество M гладким k-мерным многообразием или гладким многообразием, а иногда и просто многообразием, поскольку в других случаях характер многообразия явно оговаривается.

Если точка p принадлежит многообразию $M \subset \mathbb{R}^m$, то под её *M-окрестностью,* или относительной окрестностью будем понимать пересечение M с окрестностью p в пространстве $\mathbb{R}^m$. Ясно, что каждая точка многообразия имеет базу M-окрестностей, замыкания которых содержатся в M. Относительную окрестность, являющуюся простым многообразием, т. е. допускающую параметризацию и, следовательно, введение криволинейных координат, назовём *координатной окрестностью.*

В простых и важных случаях мы сталкиваемся с примерами “почти” гладких многообразий (например, границы квадрата, куба и др.). Поэтому мы дополним определение гладкого многообразия следующим образом: *кусочно-гладким* k-мерным многообразием назовём объединение гладкого k-мерного многообразия (возможно, несвязного) и множества, у которого k-мерная хаусдорфова мера равна нулю. Очевидно, границы многогранных тел оказываются при таком определении кусочно-гладкими поверхностями.

Формально говоря, рассматривая содержащееся в $\mathbb{R}^m$ гладкое многообразие M, мы не исключаем, что $\dim M = m$. В этом случае, как вытекает из определения, M — просто открытое подмножество в $\mathbb{R}^m$. Вопрос об определении меры в таком множестве решён в главе II, где построена мера Лебега. Поэтому всюду в дальнейшем, если явно не оговорено противное, рассматриваются лишь многообразия, размерность которых меньше размерности объемлющего пространства. Вместе с тем, мы допускаем случай, когда $\dim M = 1$. В этой ситуации вместо термина “многообразие” используется термин “кривая”. Связная простая кривая называется также простой дугой.

Нам будет полезно ещё одно определение гладкого многообразия (как доказано в п. Д.VII.7, оно эквивалентно первому определению).

Определение (второе определение гладкого многообразия). Множество $M \subset \mathbb{R}^m$ называется k-мерным ($1 \leqslant k < m$) многообразием класса C^r, если для каждой точки $p \in M$ существует окрестность U и такие определённые в ней функции $F_1, \dots, F_{m-k}$ класса C^r, что

1) $x \in M \cap U$ тогда и только тогда, когда

$$F_1(x) = 0, \ \dots, \ F_{m-k}(x) = 0, \tag{1}$$

и

2) векторы

$$\operatorname{grad} F_1(p), \ \dots, \ \operatorname{grad} F_{m-k}(p) \tag{2}$$

линейно независимы.

В частности, гладкая поверхность (многообразие коразмерности 1) локально является множеством уровня некоторой гладкой функции с ненулевым градиентом. Как видно из последнего определения, локально всякое многообразие содержится в некоторой поверхности.

1.2. С гладким многообразием связаны важные понятия касательного вектора и касательного подпространства. Напомним, что *путём* (в $\mathbb{R}^m$) называется любое непрерывное отображение некоторого отрезка в $\mathbb{R}^m$. Путь называется *гладким,* если его координатные функции гладкие, и *кусочно-гладким,* если он задан на объединении $\bigcup\limits_{j=0}^{n-1} [c_j, c_{j+1}]$, причём его сужения на промежутки $[c_j, c_{j+1}]$ суть гладкие пути.

Определение. Пусть M — гладкое многообразие в $\mathbb{R}^m$. Вектор $\tau \in \mathbb{R}^m$ называется *касательным вектором* к M в точке p, $p \in M$, если существует такой гладкий путь $\gamma\colon [a,b] \mapsto \mathbb{R}^m$, что $\gamma(t) \in M$ при $t \in [a,b]$ и при некотором $c \in (a,b)$ $\gamma(c) = p$ и $\gamma'(c) = \tau$.

Если некоторая M-окрестность точки $p = \gamma(c)$ содержится в множестве уровня гладкой функции F, то $F(\gamma(t)) \equiv \mathrm{const}$ при t близких к c. Поэтому $\langle \operatorname{grad} F(p), \gamma'(c)\rangle = 0$, т. е. касательный вектор в точке p ортогонален $\operatorname{grad} F(p)$.

Пусть Φ — локальная параметризация многообразия M в точке $p = \Phi(a)$. "Заморозив" все координаты точки $a = (a_1, \dots, a_k)$, кроме j-ой, и меняя её в окрестности a_j, мы получим путь, параметризующий кривую, проходящую через точку p. Эта кривая называется *координатной линией*. Касательный вектор к ней в точке p есть не что иное, как j-й столбец матрицы $\Phi'(a)$, который мы будем обозначать $D_j\Phi(a)$ или $\tau_j = \tau_j(a)$. Поскольку $\operatorname{rank} d_a\Phi = k$, векторы $\tau_1, \dots, \tau_k$ линейно независимы. Очевидно, что $\tau_j(a) = d_a\Phi(e_j)$ (мы считаем, что $e_1, \dots, e_k$ — векторы канонического базиса в $\mathbb{R}^k$). Будем их называть *каноническими касательными векторами*, соответствующими параметризации Φ. Множество всех векторов, касательных к многообразию M в точке p, называется *касательным подпространством* и обозначается символом $T_p(M)$ или кратко T_p. Обратим внимание, что этот термин нам ещё необходимо обосновать, убедившись, что T_p действительно есть векторное подпространство.

Лемма. *T_p есть k-мерное подпространство пространства $\mathbb{R}^m$.*

При $k = m-1$ подпространство T_p будем называть также *касательной плоскостью*.

Доказательство. Будем считать, что в окрестности точки p многообразие M задано уравнениями (1) и система (2) линейно независима.

Проверим, что вместе с любыми двумя векторами τ_1, τ_2 множество T_p содержит и их линейную комбинацию $\tau = \alpha_1\tau_1 + \alpha_2\tau_2$. Можно считать, что $\tau \neq 0$, так как в противном случае достаточно рассмотреть постоянный путь. Дополним систему (2), ортогональную вектору τ, векторами $h_1, \dots, h_{k-1}$ до базиса в ортогональном дополнении к τ и рассмотрим систему уравнений

$$F_1(x) = 0,\ \dots,\ F_{m-k}(x) = 0,\ \langle x-p, h_1\rangle = 0,\ \dots,\ \langle x-p, h_{k-1}\rangle = 0. \tag{3}$$

Согласно второму определению гладкого многообразия эта система определяет в окрестности точки p гладкое одномерное многообразие, т. е. гладкую кривую, содержащуюся, очевидно, в M и проходящую через p.

Пусть γ — некоторая параметризация этой кривой в окрестности точки p. Не умаляя общности можно считать, что $p = \gamma(0)$. Тогда (ненулевой!) вектор $\gamma'(0)$ ортогонален вычисленным в точке p градиентам всех функций, участвующих в системе (3). Поэтому он пропорционален вектору τ. При надлежащем выборе коэффициента θ мы получим, что при $t = 0$ касательный вектор к пути $\widetilde{\gamma}(t) = \gamma(\theta t)$, $|t| \leqslant \delta$, совпадает с τ, т. е. $\tau \in T_p$.

Итак, мы доказали, что T_p — векторное подпространство пространства $\mathbb{R}^m$. Его размерность не больше k, поскольку все входящие в него векторы ортогональны векторам системы (2). Вместе с тем, оно содержит k линейно независимых векторов, касательных к координатным линиям. Поэтому $\dim T_p = k$. ►

Замечание. Если в окрестности точки p поверхность M задана уравнением $F(x) = 0$ и $\operatorname{grad} F(p) \neq 0$, то, как мы отмечали перед леммой, касательные векторы в точке p ортогональны $\operatorname{grad} F(p)$. Поэтому касательное подпространство к M в точке p есть плоскость, состоящая из векторов, ортогональных $\operatorname{grad} F(p)$, т. е. определяемая уравнением $\langle x, \operatorname{grad} F(p)\rangle = 0$.

Отметим, что так как канонические касательные векторы, соответствующие параметризации Φ многообразия M, линейно независимы, то они образуют базис в касательном подпространстве. В силу линейности отображения $d_a\Phi\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ для любого вектора $t = (t_1, \dots, t_k)$ из $\mathbb{R}^k$ выполняется равенство

$$d_a\Phi(t) = \sum_{j=1}^{k} t_j \tau_j.$$

Таким образом, дифференциал параметризации изоморфно отображает $\mathbb{R}^k$ на касательное подпространство.

Вместо касательного подпространства T_p иногда геометрически нагляднее рассматривать *аффинное касательное подпространство* L_p, которое получается сдвигом T_p на вектор p: $L_p = p + T_p$. Поскольку $p + d\Phi_a(t-a) \in L_p$ при $p = \Phi(a)$ и

$$\Phi(t) = p + d\Phi_a(t-a) + o\big(\|t-a\|\big) \quad \text{при} \quad t \to a,$$

для точки $x = \Phi(t)$ справедливо соотношение

$$\operatorname{dist}(x, L_p) = \operatorname{dist}(\Phi(t), L_p) \leqslant \big\|\Phi(t) - (p + d\Phi_a(t-a))\big\| = o\big(\|t-a\|\big) \quad \text{при} \quad t \to a.$$

По следствию 1 п. 1.4 вблизи точки p отображение Φ^{-1} удовлетворяет условию Липшица:

$$\|t-a\| = \|\Phi^{-1}(x) - \Phi^{-1}(p)\| \leqslant C\|x-p\|,$$

и поэтому

$$\operatorname{dist}(x, L_p) = o\big(\|x-p\|\big) \quad \text{при} \quad x \to p,\ x \in M.$$

Таким образом, при замене точек многообразия точками подпространства L_p относительная погрешность стремится к нулю, т. е. “в малом” многообразие M “почти плоское”. Последнее соотношение является формализацией наших интуитивных представлений о касательном подпространстве как о подпространстве “тесно прилегающем” к многообразию. Можно доказать, что установленное свойство аффинного касательного подпространства определяет его однозначно (см. упр. 2).

1.3. Приведём некоторые примеры.

Пример 1. Важным примером поверхности является график гладкой функции f, определённой в открытом подмножестве $\mathcal{O}$ пространства $\mathbb{R}^{m-1}$. По определению графика это есть множество

$$\Gamma_f = \{(x_1, \dots, x_{m-1}, y) \in \mathbb{R}^m \mid (x_1, \dots, x_{m-1}) \in \mathcal{O},\ y = f(x_1, \dots, x_{m-1})\}.$$

Отображение

$$\mathcal{O} \ni x = (x_1, \dots, x_{m-1}) \mapsto \Phi(x) = \big(x_1, \dots, x_{m-1}, f(x)\big)$$

является, очевидно, глобальной параметризацией графика. Мы будем называть эту параметризацию *канонической*.

График функции f можно рассматривать как множество нулевого уровня функции $F(x_1, \dots, x_{m-1}, y) = y - f(x_1, \dots, x_{m-1})$, определённой в множестве $\mathcal{O}' = \mathcal{O} \times \mathbb{R}$. Заметим, что $\operatorname{grad} F \neq 0$ всюду в $\mathcal{O}'$ и, в частности, на Γ_f. Как следует из замечания после доказательства леммы 1.2, аффинная касательная плоскость в точке $p = \big(a_1, \dots, a_{m-1}, f(a)\big)$, где $a = (a_1, \dots, a_{m-1}) \in \mathcal{O}$, задаётся уравнением

$$y - f(a) = \langle \operatorname{grad} f(a), x - a \rangle = \sum_{j=1}^{m-1} f'_{x_j}(a)(x_j - a_j).$$

Множество, которое может быть получено из графика изменением нумерации координат (так что "зависимая" координата окажется не на последнем месте), мы также будем называть графиком или, точнее, графиком в широком смысле. Очевидно, множество $M \subset \mathbb{R}^m$, каждая точка которого имеет такую окрестность U, что $M \cap U$ есть график (в широком смысле), является поверхностью.

Опираясь на теорему о неявной функции (см. п. Д.VII.6), можно доказать и обратное: каждая содержащаяся в $\mathbb{R}^m$ поверхность локально есть график гладкой функции (см. упр. 4).

Пример 2. Рассмотрим в $\mathbb{R}^m$ сферу

$$S(R) = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \mid x_1^2 + \dots + x_m^2 = R^2\}.$$

Убедимся в том, что это поверхность. У каждой точки $p = (p_1, \dots, p_m)$, лежащей на $S(R)$, хотя бы одна координата отлична от нуля. Пусть для определённости $p_m > 0$. Тогда p принадлежит верхней полусфере $S_+(R) = \{x \in S(R) \mid x_m > 0\}$, которая есть не что иное, как график функции $f(x_1, \dots, x_{m-1}) = \sqrt{R^2 - x_1^2 - \dots - x_{m-1}^2}$, заданной в шаре пространства $\mathbb{R}^{m-1}$. Это функция класса C^∞. Поэтому полусфера $S_+(R)$, а вместе с ней и вся сфера $S(R)$ — поверхности класса C^∞.

Интуитивно ясно, что сфера не имеет глобальной параметризации. В то же время нетрудно указать отображение, параметризующее почти всю сферу. Мы ограничимся наиболее наглядным частным случаем — двумерной сферой в $\mathbb{R}^3$ (случай произвольной размерности см. в упр. 5). Вспомним географические координаты точки на земной поверхности — долготу φ и широту θ. Для $\varphi \in [-\pi, \pi]$ и $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ положим

$$\Phi(\varphi, \theta) = \big(R \cos\varphi \cos\theta,\ R \sin\varphi \cos\theta,\ R \sin\theta\big)$$

(соответствующие координатные линии — это параллели и меридианы, положительным значениям φ соответствует восточное полушарие, отрицательным — западное, неравенство $\theta > 0$ задаёт северное полушарие, а $\theta < 0$ — южное). В рассматриваемом случае мы сталкиваемся с довольно типичной ситуацией: формально говоря, отображение Φ определено для любых φ и θ, но нас интересуют только его сужения на те или иные, удобные нам множества. Ясно, что Φ — бесконечно дифференцируемое отображение. Но оно не биективно, поскольку $\Phi(\varphi, \pm\frac{\pi}{2}) = (0, 0, \pm R)$ для всех значений φ (северному и южному полюсам невозможно естественным образом приписать долготу). Кроме того, при любом θ нарушение взаимной однозначности происходит при $\varphi = \pm\pi$, поскольку углам $\varphi = \pi$ и $\varphi = -\pi$ сопоставляются одинаковые точки на сфере. Этим значениям φ соответствует меридиан, называемый в географии линией перемены дат*).

*) Реальная линия перемены дат определяется дополнительными соглашениями и не всюду совпадает с этим меридианом.

Удалив его (вместе с полюсами), мы получим "разрезанную сферу" — двумерную поверхность класса C^∞, имеющую глобальную параметризацию, определённую на открытом прямоугольнике $|\varphi| < \pi$, $|\theta| < \frac{\pi}{2}$. Условие $\operatorname{rank} d\Phi \equiv 2$, т. е. линейная независимость касательных векторов

$$\tau_1 = D_1\Phi(\varphi,\theta) = \big(-R\sin\varphi\cos\theta,\ R\cos\varphi\cos\theta,\ 0\big),$$
$$\tau_2 = D_2\Phi(\varphi,\theta) = \big(-R\cos\varphi\sin\theta,\ -R\sin\varphi\sin\theta,\ R\cos\theta\big),$$

следует из их ортогональности (τ_1 касается параллели, а τ_2 — меридиана), поскольку $\|\tau_1\| = R\cos\theta \neq 0$ и $\|\tau_2\| = R$.

Как мы увидим далее, удаление меридиана не существенно при интегрировании по сфере.

Заметим ещё, что в анализе вместо широты часто используют угол θ', образованный радиус-вектором точки и положительным направлением оси OZ. Он изменяется в промежутке $[0,\pi]$ и связан с широтой θ равенством $\theta + \theta' = \frac{\pi}{2}$.

Пример 3. Рассмотрим тор — поверхность, получающуюся при вращении в $\mathbb{R}^3$ окружности $(R-x)^2 + z^2 = r^2$ $(0 < r < R)$ вокруг оси OZ. Как нетрудно убедиться, тор можно задать уравнением $\big(R - \sqrt{x^2+y^2}\big)^2 + z^2 = r^2$. Глобальной параметризации у тора нет (на доказательстве этого мы не останавливаемся). Положение точки на нём определяется двумя углами φ и θ (аналогичными долготе и широте на сфере) с помощью равенств

$$x = (R + r\cos\theta)\cos\varphi, \quad y = (R + r\cos\theta)\sin\varphi, \quad z = r\sin\theta.$$

Бесконечно дифференцируемое отображение (определённое в $\mathbb{R}^2$)

$$\Phi(\varphi,\theta) = \big((R + r\cos\theta)\cos\varphi,\ (R + r\cos\theta)\sin\varphi,\ r\sin\theta\big)$$

переводит квадрат $[-\pi,\pi]^2$ на тор. Оно не биективно из-за 2π-периодичности тригонометрических функций. Удалив две окружности, соответствующие углам $\varphi = \pm\pi$ и $\theta = \pm\pi$, мы получим "тор с двумя разрезами" — поверхность класса C^∞, имеющую глобальную параметризацию Φ, определённую на квадрате $(-\pi,\pi)^2$. Условие $\operatorname{rank} d\Phi \equiv 2$ выполнено, так как касательные векторы

$$\tau_1 = D_1\Phi(\varphi,\theta) = \big(-(R + r\cos\theta)\sin\varphi,\ (R + r\cos\theta)\cos\varphi,\ 0\big),$$
$$\tau_2 = D_2\Phi(\varphi,\theta) = \big(-r\cos\varphi\sin\theta,\ -r\sin\varphi\sin\theta,\ r\cos\theta\big)$$

линейно независимы (они ортогональны и $\|\tau_1\| = R + r\cos\theta > 0$, $\|\tau_2\| = r > 0$).

Чтобы убедиться, что не только тор с разрезами, но и тор в целом действительно является гладкой поверхностью, надо доказать, что каждая точка $p = \Phi(\varphi_0,\theta_0)$ имеет на торе окрестность, допускающую локальную параметризацию. Такую параметризацию можно построить, меняя область задания отображения Φ. Мы предоставляем читателю проверить, что требуемый результат можно получить, рассматривая сужение Φ на квадрат $(\varphi_0 - \pi, \varphi_0 + \pi) \times (\theta_0 - \pi, \theta_0 + \pi)$. Соответствующей окрестностью точки p на торе будет тор с разрезами по окружностям $\varphi = \varphi_0 \pm \pi$ и $\theta = \theta_0 \pm \pi$.

Заметим, что в предельном случае, когда $r = R$, мы вращаем вокруг оси OZ окружность $(R-x)^2 + z^2 = R^2$. Получающееся множество M не будет гладкой поверхностью, так как у начала координат нет M-окрестности, которая была бы простой поверхностью. Однако, как читатель легко убедится самостоятельно, множество $M \setminus \{0\}$ — гладкая поверхность класса C^∞ и поэтому M — кусочно-гладкая поверхность.

Пример 4. Рассмотрим многообразие минимальной размерности, т. е. кривую. Её параметризация в окрестности произвольной точки — это гладкая вектор-функция, заданная на интервале вещественной оси. Это гомеоморфизм с ненулевой производной. Ясно, что график гладкой функции одной переменной, заданной в произвольном интервале, является гладкой плоской кривой (т. е. кривой, содержащейся в $\mathbb{R}^2$).

Другая хорошо знакомая кривая — это окружность. Обобщая этот пример, напомним, что в соответствии со вторым определением гладкого многообразия множество уровня гладкой функции двух переменных, у которой градиент не обращается в нуль, есть гладкая кривая. Пример лемнискаты Бернулли — плоского множества, координаты точек которого удовлетворяют уравнению

$$(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)=0,$$

показывает, что предположение о градиенте существенно: точка $(0,0)$, где градиент функции $F(x,y)=(x^2+y^2)^2-(x^2-y^2)$ равен нулю, не имеет относительной окрестности, гомеоморфной интервалу. Вблизи начала координат лемнискату можно рассматривать как объединение двух графиков ("кривая с самопересечением"). Отметим, что удалив из неё начало координат, мы получим (несвязную) гладкую кривую. Таким образом, лемниската — кусочно-гладкая кривая.

Пример 5. Пусть $O(n)$ — группа ортогональных $n\times n$ матриц. Будем рассматривать её как подмножество n^2-мерного евклидова пространства, которое отождествим с множеством всевозможных $n\times n$ матриц $U=\{u_{i,j}\}_{i,j=1}^n$ с элементами u_{ij}. Это подмножество определяется системой уравнений

$$\begin{aligned} u_{i,1}^2+\ldots+u_{i,n}^2&=1, && 1\leqslant i\leqslant n,\\ u_{i,1}u_{k,1}+\ldots+u_{i,n}u_{k,n}&=0, && 1\leqslant i<k\leqslant n. \end{aligned}$$

Градиенты функций $F_i(U)=u_{i,1}^2+\ldots+u_{i,n}^2$ и $F_{ik}(U)=u_{i,1}u_{k,1}+\ldots+u_{i,n}u_{k,n}$, вычисленные в точках $O(n)$, линейно независимы. Чтобы убедиться в этом, будем представлять себе эти градиенты в виде матриц, где элемент, стоящий на пересечении i-ой строки и j-го столбца, есть результат дифференцирования по $u_{i,j}$. Тогда каждая строка матрицы, являющейся линейной комбинацией градиентов, содержит только линейные комбинации (попарно ортогональных) строк матрицы U, из чего легко вывести требуемое свойство. Поэтому $O(n)$ — гладкое многообразие размерности $n^2-n-\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$. Отображение $U\mapsto U_0U$ (или $U\mapsto UU_0$), где $U\in\mathbb{R}^{n^2}$, а U_0 — фиксированный элемент $O(n)$, естественно называть левым (или правым) сдвигом в множестве всех матриц. Он сохраняет евклидово расстояние между ними, поскольку, как легко проверить, евклидовы нормы матриц U и U_0U (UU_0) как элементов пространства $\mathbb{R}^{n^2}$ одинаковы. Поэтому в $O(n)$ сдвиг есть изометрия, если считать, что метрика в $O(n)$ индуцирована из объемлющего n^2-мерного евклидова пространства.

1.4. Для дальнейшего важно, что параметризацию k-мерного многообразия в $\mathbb{R}^m$ локально можно рассматривать как сужение на $\mathbb{R}^k$ некоторого диффеоморфизма, определённого в открытом подмножестве пространства $\mathbb{R}^m$. Более точно это означает следующее. Будем считать, что $\mathbb{R}^k$ канонически вложено в $\mathbb{R}^m$, т. е. отождествим векторы $(x_1,\ldots,x_k)$ из $\mathbb{R}^k$ и $(x_1,\ldots,x_k,0\ldots,0)$ из $\mathbb{R}^m$. Тогда справедливо следующее утверждение о продолжении параметризации до диффеоморфизма.

Лемма. *Пусть $\mathcal{O}$ — открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^k$, $a \in \mathcal{O}$. Для любой гладкой параметризации Φ множества $\Phi(\mathcal{O}) \subset \mathbb{R}^m$ в точке $p = \Phi(a)$ можно указать такую окрестность $V \subset \mathbb{R}^m$ точки $a = (a_1, \dots, a_k, 0, \dots, 0)$ и такой заданный в ней диффеоморфизм F, что Φ и F совпадают на $V \cap \mathbb{R}^k$.*

Доказательство. Поскольку ранг матрицы Якоби $\Phi'(a)$ равен k, у неё есть ненулевой минор размера $k \times k$. Не умаляя общности, будем считать, что он образован её первыми строками. Тогда $\frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_k)}{D(t_1,\dots,t_k)}(a) \neq 0$, где $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ — координатные функции отображения Φ.

Рассмотрим отображение Θ, действующее из $\mathcal{O} \times \mathbb{R}^{m-k}$ в $\mathbb{R}^m$ по правилу

$$\Theta(t_1, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots, t_m) = \Phi(t_1, \dots, t_k) + (0, \dots, 0, t_{k+1}, \dots, t_m),$$

где $(t_1, \dots, t_k) \in \mathcal{O}$ и $(t_{k+1}, \dots, t_m) \in \mathbb{R}^{m-k}$. Очевидно, Θ — гладкое отображение, продолжающее Φ на $\mathcal{O} \times \mathbb{R}^{m-k}$. Кроме того, $\operatorname{rank} d_a\Theta = m$, так как $\det \Theta'(a) = \frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_k)}{D(t_1,\dots,t_k)}(a) \neq 0$. По теореме о локальной обратимости сужение Θ на достаточно малую (m-мерную) окрестность V точки a есть диффеоморфизм (см. п. Д.VII.5). Это сужение и следует принять за F. ►

Если Φ — локальная параметризация k-мерного многообразия M в точке p, а F — описанный в лемме диффеоморфизм, то Φ^{-1} и F^{-1} совпадают в некоторой M-окрестности точки p, точнее, на множестве $\Phi(V_0)$, где $V_0 = V \cap \mathbb{R}^k$. Поэтому из доказанной леммы вытекают следующие два утверждения.

Следствие 1. *В достаточно малой M-окрестности U точки p отображение Φ^{-1} удовлетворяет условию Липшица, т. е. для некоторого C*

$$\|\Phi^{-1}(x) - \Phi^{-1}(y)\| \leqslant C\|x - y\| \quad \text{при} \quad x, y \in U.$$

Для доказательства достаточно заметить, что гладкое отображение F^{-1} удовлетворяет условию Липшица в каждом замкнутом шаре, содержащемся в области задания (см. следствие 2 п. Д.VII.2).

Следствие 2. *Пусть $\mathcal{O}$ и $\mathcal{O}'$ — открытые множества в $\mathbb{R}^k$, $\Phi \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m)$ — параметризация многообразия M, $M \subset \mathbb{R}^m$. Если $\Psi \in C^1(\mathcal{O}', \mathbb{R}^m)$ и $\Psi(\mathcal{O}') \subset M$, то композиция $\Phi^{-1} \circ \Psi$ есть гладкое отображение.*

Действительно, для любой точки $t_0 \in \mathcal{O}'$ в некоторой M-окрестности точки $\Psi(t_0)$ отображение Φ^{-1} совпадает с гладким отображением F^{-1}. Поэтому в достаточно малой окрестности точки t_0 мы получаем, что $\Phi^{-1} \circ \Psi = F^{-1} \circ \Psi$ — композиция гладких отображений.

1.5. Нам будет полезен один простой геометрический факт, в основе которого лежит следующее наблюдение:

> *каждое открытое подмножество G пространства $\mathbb{R}^m$ есть объединение содержащихся в нём шаров, у которых радиусы и координаты центров — рациональные числа.*

Поскольку каждую точку x множества G можно считать центром содержащегося в нём шара $B(x, r)$, для доказательства достаточно заметить, что при $0 < \rho < \frac{r}{2}$ и $\|x - y\| < \rho$ справедливы включения $x \in B(y, \rho) \subset B(x, r)$. Очевидно, что при этом ρ и координаты вектора y можно выбрать рациональными.

Теорема (Линделёф*)). *Для любого семейства $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ открытых в $\mathbb{R}^m$ множеств существует не более чем счётное подсемейство $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A_0}$ ($A_0 \subset A$, A_0 — не более чем счётно) с тем же самым объединением:*

$$\bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha = \bigcup_{\alpha\in A_0} G_\alpha.$$

Доказательство. Рассмотрим всевозможные открытые шары, содержащиеся хотя бы в одном из множеств G_α, у которых рациональны радиус и все координаты центра. Множество таких шаров счётно. Пусть $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — какая-то его нумерация. По выбору этих шаров, для любого номера n найдётся такой индекс $\alpha_n \in A$, что $B_n \subset G_{\alpha_n}$. Кроме того, каждое множество G_α исчерпывается выбранными шарами:

$$G_\alpha \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \qquad \text{для любого индекса } \alpha \in A.$$

Следовательно,

$$\bigcup_{\alpha\in A} G_\alpha \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_{\alpha_n}.$$

Поскольку включение $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} G_{\alpha_n} \subset \bigcup\limits_{\alpha\in A} G_\alpha$ очевидно, в качестве A_0 можно взять множество, образованное индексами α_n. ►

Следствие 1. *Гладкое многообразие представимо в виде объединения не более чем счётного семейства простых многообразий.*

Так как область изменения криволинейных координат есть счётное объединение компактных множеств, то справедливо

Следствие 2. *Гладкое многообразие есть не более чем счётное объединение компактных множеств, каждое из которых содержится в некотором простом многообразии.*

Отметим также вытекающее отсюда

Следствие 3. *Гладкое многообразие, содержащееся в $\mathbb{R}^m$, есть борелевское подмножество этого пространства.*

Так как гладкая поверхность локально совпадает с графиком (в широком смысле) некоторой гладкой функции, то справедливо

Следствие 4. *Гладкая поверхность есть не более чем счётное объединение графиков гладких функций.*

1.6. В заключительной части параграфа мы установим один полезный факт, позволяющий представлять гладкую функцию в виде суммы гладких функций с малыми носителями. Зачастую это приводит к существенным техническим упрощениям благодаря "локализации" задачи (см. п. 6.5). Напомним, что носителем функции $\varphi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, который обозначается символом $\operatorname{supp}(\varphi)$, называется замыкание множества $\{x \mid \varphi(x) \neq 0\}$.

---

*) Эрнст Леонард **Линделёф** (Lindelöf), 1870–1946, — финский математик.

Теорема (о гладком разбиении единицы). *Для всякого $\varepsilon > 0$ существует такая неотрицательная функция φ_ε класса $C^\infty(\mathbb{R}^m)$, что $supp\,(\varphi_\varepsilon) = [-\varepsilon, \varepsilon]^m$ и*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^m} \varphi_\varepsilon(x - \varepsilon n) = 1 \quad \text{для любого } x \text{ из } \mathbb{R}^m.$$

Заметим, что около каждой точки $a \in \mathbb{R}^m$ число ненулевых слагаемых этой суммы ограничено. Точнее, если $x \in a + (-\varepsilon, \varepsilon)^m$ и $\varphi_\varepsilon(x - \varepsilon n) \neq 0$, то $n \in \frac{1}{\varepsilon}a + (-2, 2)^m$.

Доказательство. Используем известный из анализа пример функции класса $C^\infty(\mathbb{R})$:

$$\Psi(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leqslant 0, \\ e^{-1/t} & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

Существование у Ψ производных всех порядков в нуле (для остальных точек это очевидно) вытекает из легко проверяемого представления $\Psi^{(n)}(t)$ при $t > 0$ в виде $\Psi^{(n)}(t) = P_n(\frac{1}{t})e^{-1/t}$, где P_n — полином.

Положим $\psi(x) = \prod\limits_{k=1}^{m} \Psi(1 - x_k^2)$, где $x = (x_1, \dots, x_m)$. Очевидно, это функция класса $C^\infty(\mathbb{R}^m)$ положительная в кубе $(-1, 1)^m$ и равная нулю вне него. Поэтому каждая функция $x \mapsto \psi(x - n)$ положительна на сдвинутом кубе $n + (-1, 1)^m$ $(n \in \mathbb{Z}^m)$. Поскольку любая точка x принадлежит хотя бы одному такому кубу, сумма

$$\Phi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^m} \psi(x - n)$$

положительна. В окрестности каждой точки это сумма лишь конечного числа бесконечно дифференцируемых функций (см. замечание после формулировки теоремы). Следовательно, $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$. Положим $\varphi_1(x) = \frac{\psi(x)}{\Phi(x)}$. Ясно, что эта функция удовлетворяет требованиям теоремы при $\varepsilon = 1$. Чтобы получить функцию φ_ε, достаточно, используя масштабирование, положить $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi_1(\frac{1}{\varepsilon}x)$. ►

1.7. Покажем, как с помощью разбиения единицы можно строить гладкие аппроксимации характеристических функций. Интуитивно ясно, что вне множества E значения его характеристической функции можно изменять не скачком, а постепенно, уменьшая их до нуля. Правдоподобно также, что такой "спуск" можно произвести "вблизи" E, не выходя за пределы его сколь угодно малой ε-окрестности. Напомним, что ε-окрестностью E называется множество

$$E_\varepsilon = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \operatorname{dist}(y, E) < \varepsilon\} = \bigcup_{x\in E} B(x, \varepsilon).$$

Мы покажем также, что это сглаживание можно производить, не допуская слишком резких перепадов значений сглаживающей функции, т. е. контролируя норму её градиента так, чтобы в рассматриваемых обстоятельствах она была минимально возможной по порядку.

Теорема (о гладком спуске). *Для любого множества $E \subset \mathbb{R}^m$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такая функция θ_ε класса $C^\infty(\mathbb{R}^m)$, что*

а) $0 \leqslant \theta_\varepsilon \leqslant 1$ на $\mathbb{R}^m$;

б) $\theta_\varepsilon(x) = 1$ при $x \in E$;

в) $\theta_\varepsilon(x) = 0$ вне E_ε;

г) $\|\operatorname{grad}\theta_\varepsilon\| \leqslant \frac{c_m}{\varepsilon}$ на $\mathbb{R}^m$, где c_m — коэффициент, зависящий только от размерности.

Доказательство. Пусть $\delta = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{m}}$ и φ_δ — функция, построенная в теореме 1.6, $Q = (-1,1)^m$. Сохраним в сумме

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^m} \varphi_\delta(x-\delta n) = 1$$

только те слагаемые, для которых куб $\delta(n+Q)$ задевает за множество E, и положим

$$\theta_\varepsilon(x) = \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}^m:\\ \delta(n+Q)\cap E\neq\varnothing}} \varphi_\delta(x-\delta n).$$

Ясно, что всюду $0 \leqslant \theta_\varepsilon(x) \leqslant 1$ и $\theta_\varepsilon(x) = 1$, если $x \in E$. Кроме того, так как $\operatorname{diam}(Q) = 2\sqrt{m}$, то $\theta_\varepsilon(x) = 0$ вне E_ε. Таким образом, функция θ_ε удовлетворяет условиям а)–в). Проверим условие г). Поскольку около каждой точки сумма, определяющая θ_ε, содержит лишь конечное число ненулевых слагаемых (это было отмечено после формулировки теоремы 1.6), её можно дифференцировать почленно. Ясно, что

$$\|\operatorname{grad}\theta_\varepsilon(x)\| \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}^m} \|\operatorname{grad}\varphi_\delta(x-\delta n)\|.$$

Так как каждая точка x может принадлежать не более чем 2^m кубов $\delta(n+Q)$, то

$$\|\operatorname{grad}\theta_\varepsilon(x)\| \leqslant 2^m \max_x \|\operatorname{grad}\varphi_\delta(x)\| = \frac{2^m}{\delta}\max_x\Big\|\operatorname{grad}\varphi_1\Big(\frac{1}{\delta}x\Big)\Big\| = \frac{2^m}{\delta}\,L = \frac{2^{m+1}\sqrt{m}}{\varepsilon}\,L,$$

где $L = \max_y \|\operatorname{grad}\varphi_1(y)\|$ — величина, не зависящая от ε (но зависящая от m). ►

1.8. Завершим этот параграф модификацией теоремы о разложении единицы. Предварительно установим полезный геометрический факт.

Лемма. *Пусть K — компактное подмножество пространства $\mathbb{R}^m$, $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — его открытое покрытие. Тогда существует такое число $\delta > 0$, что всякое множество e, пересекающееся с K и удовлетворяющее условию $\operatorname{diam}(e) < \delta$, содержится хотя бы в одном из множеств покрытия.*

Доказательство. Допустим, что утверждение леммы неверно. Тогда при любом $n \in \mathbb{N}$ найдётся такое множество e_n, что оно не содержится ни в каком G_α и вместе с тем

$$e_n \cap K \neq \varnothing, \quad \operatorname{diam}(e_n) < \frac{1}{n}.$$

Зафиксируем точку x_n из $e_n \cap K$. Не умаляя общности будем считать, что $x_n \to x_0$, $x_0 \in K$ (иначе можно перейти к подпоследовательности). Точка x_0 принадлежит какому-то из множеств G_α, например, G_{α_0}. Поэтому $B(x_0,r) \subset G_{\alpha_0}$ при некотором $r > 0$. Если n настолько велико, что $\|x_n - x_0\| < \frac{r}{2}$ и $\operatorname{diam}(e_n) < \frac{r}{2}$, то $e_n \subset B(x_0,r) \subset$ $\subset G_{\alpha_0}$. Таким образом оказывается, что множества e_n с достаточно большими номерами содержатся в G_{α_0}, что противоречит их выбору. ►

Следующую теорему удобно использовать в тех случаях, когда произвольную функцию требуется заменить функциями, носители которых должны “вписываться” в заданные множества (см., например, теоремы 4.2 и 6.5).

Теорема (о разбиении единицы, подчинённом покрытию). *Пусть K — компактное подмножество пространства $\mathbb{R}^m$, $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — его открытое покрытие. Тогда существует такой конечный набор $\psi_1, \dots, \psi_N$ неотрицательных финитных функций класса $C^\infty(\mathbb{R}^m)$, что:*

$$\sum_{j=1}^{N} \psi_j \leqslant 1 \text{ на } \mathbb{R}^m, \quad \sum_{j=1}^{N} \psi_j(x) = 1 \ \text{ при } \ x \in K$$

и при любом j носитель ψ_j содержится в одном из множеств покрытия.

Семейство функций $\psi_1, \dots, \psi_N$ называется разбиением единицы для K, *подчинённым покрытию* $\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$.

Доказательство. Пусть δ — соответствующее данному покрытию число из доказанной выше леммы. Рассмотрим построенное в теореме 1.6 разбиение единицы $1 = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^m} \varphi_\varepsilon(x - \varepsilon n)$, считая ε настолько малым, что $\operatorname{diam}\bigl(\operatorname{supp}(\varphi_\varepsilon)\bigr) < \delta$. Сохранив в разложении единицы лишь те слагаемые $\varphi_\varepsilon(x - \varepsilon n)$, носители которых задевают K, мы, очевидно, получим искомый конечный набор, который остаётся лишь занумеровать. ►

УПРАЖНЕНИЯ

1) Пусть $M = \bigl\{(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4 \bigm| x^2 + y^2 = 1,\ u^2 + v^2 = 1\bigr\}$. Докажите, что

а) M есть двумерное C^∞-гладкое компактное многообразие, гомеоморфное декартову произведению двух окружностей;

б) отображение $(x, y, u, v) \mapsto ((R + ru)x, (R + ru)y, rv)$ гомеоморфно отображает M на тор, рассмотренный в примере 3 п. 1.3.

2) Пусть p — точка, принадлежащая гладкому многообразию M. Докажите, что среди всевозможных аффинных подпространств L (любой размерности), проходящих через точку p, лишь касательное подпространство удовлетворяет условию

$$\operatorname{dist}(x, L) = o\bigl(\|x - p\|\bigr) \ \text{ при } x \to p,\ x \in M.$$

3) Пусть S^2 — двумерная сфера в $\mathbb{R}^3$ с центром в нуле, $N = (0, 0, 1)$ — её северный полюс. Рассмотрим отображение $S^2 \setminus \{N\}$ на экваториальную плоскость, определяемое следующим образом: точке p на сфере сопоставляется точка пересечения экваториальной плоскости и прямой, проведённой через p и N. Это отображение называется стереографической проекцией. Докажите, что

а) стереографическая проекция есть взаимно однозначное отображение $S^2 \setminus \{N\}$ на плоскость;

б) отображение, обратное стереографической проекции, есть C^∞-гладкая параметризация множества $S^2 \setminus \{N\}$;

в) при стереографической проекции угол между лежащими на сфере S^2 кривыми, проходящими через данную точку, таков же, как между их образами (это свойство называется конформностью стереографической проекции).

4) Докажите, что всякая содержащаяся в $\mathbb{R}^m$ гладкая поверхность локально есть график гладкой функции.

5) Пусть $R>0$. Рассмотрим отображение Φ, которое каждой точке $\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_{m-1})$ из $\mathbb{R}^{m-1}$ $(m\geqslant 3)$ сопоставляет вектор $x=(x_1,\dots,x_m)$ из $\mathbb{R}^m$ по правилу

$$\begin{aligned}
x_1 &= R\cos\varphi_1,\\
x_2 &= R\sin\varphi_1\cos\varphi_2,\\
x_3 &= R\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_3,\\
&\dots\\
x_{m-1} &= R\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{m-2}\cos\varphi_{m-1},\\
x_m &= R\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cdots\sin\varphi_{m-2}\sin\varphi_{m-1}.
\end{aligned}$$

Докажите, что Φ переводит прямоугольный параллелепипед $[0,\pi]^{m-1}\times[0,2\pi]$ на сферу радиуса R (с центром в нуле), а сужение Φ на открытый параллелепипед $(0,\pi)^{m-1}\times$ $\times(0,2\pi)$ взаимно однозначно переводит его на "сферу с разрезом" (на этот раз "разрез" — это многообразие размерности $m-2$).

Числа $\varphi_1,\dots,\varphi_{m-1}$ называют сферическими координатами точки на границе шара.

6) Пусть T_p — касательное подпространство к гладкому многообразию M в точке p и P — ортогональный проектор на T_p. Докажите, что при любом $\varepsilon>0$ в достаточно малой M-окрестности U точки p справедливо неравенство

$$(1-\varepsilon)\|x-y\|\leqslant\|P(x)-P(y)\|\leqslant\|x-y\| \qquad (x,\,y\in U).$$

7) Из результата предыдущей задачи следует обратимость сужения P на достаточно малую M-окрестность U точки p. Докажите, что $\left(P|_U\right)^{-1}$ — гладкое отображение.

8) Пусть $M\subset\mathbb{R}^m$ — гладкое многообразие, $\dim M<m$. Опираясь на то, что график гладкой функции имеет меру нуль (см. следствие II.3.1), докажите, что $\lambda_m(M)=0$.

§ 2. Площадь поверхности

2.1. Под k-мерной площадью в пространстве $\mathbb{R}^m$ $(1\leqslant k\leqslant m)$ мы будем понимать борелевскую меру (см. п. II.2.3), обладающую свойствами, аналогичными свойствам меры Лебега λ_k. В частности, на подмножествах k-мерных аффинных подпространств эта мера должна совпадать с мерой Лебега. Это позволяет говорить о площади множеств, составленных из плоских частей, например, при $k=m-1$, о площади граней многогранников. Но для разумного определения площади "кривых фигур" этого, разумеется, ещё недостаточно и необходимо указать какое-то свойство площади, позволяющее сравнивать её значения на не плоских (т. е. не лежащих в k-мерных аффинных подпространствах) множествах. Роль такого свойства у нас будет играть следующее наглядное требование: под действием сближения (см. п. II.6.2, свойство 6) площадь не увеличивается. Учитывая, что образ борелевского множества при сближении (и даже при проектировании) может не быть борелевским множеством, будем считать, что последнее условие относится лишь к компактным множествам. Итак, мы примем следующее

Определение. Пусть k, $m \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant m$. Мера σ_k, определённая на σ-алгебре $\mathfrak{B}^m$ всех борелевских подмножеств пространства $\mathbb{R}^m$, называется *k-мерной площадью* (в $\mathbb{R}^m$), если она удовлетворяет двум аксиомам:

(I) на любом k-мерном аффинном подпространстве пространства $\mathbb{R}^m$ σ_k совпадает с сужением меры Лебега λ_k на σ-алгебру борелевских множеств этого подпространства;

(II) на компактных множествах σ_k не возрастает под действием сближающего отображения: если Φ — сближающее отображение компактного множества Q, то

$$\sigma_k(\Phi(Q)) \leqslant \sigma_k(Q).$$

Многообразия коразмерности 1 мы условились называть поверхностями. Поэтому $(m-1)$-мерную площадь естественно назвать площадью поверхности. Однако, допуская вольность речи, мы будем так называть k-мерную площадь при любом k. Как мы вскоре убедимся, в пространстве $\mathbb{R}^m$ k-мерная площадь существует для всех $k = 1, \dots, m$.

Как и всякая борелевская мера, площадь поверхности обладает свойством регулярности, указанным в следствии II.2.3:

$$\text{если } \sigma_k(E) < +\infty, \text{ то } \sigma_k(E) = \sup\{\sigma_k(Q) \mid Q - \text{компактное множество}, Q \subset E\}. \qquad (1)$$

По аксиоме (I) мера σ_m совпадает с мерой Лебега λ_m (точнее, с её сужением на $\mathfrak{B}^m$). Свойством (II) мера Лебега обладает в силу следствия II.6.4.

Отметим, что из аксиомы (II) и равенства (1) следует инвариантность площади поверхности относительно любой изометрии, поскольку и она, и обратное отображение являются сближающими. В частности, площадь инвариантна относительно сдвига и вращения, так что площади конгруэнтных множеств одинаковы. При ортогональном проектировании (которое, очевидно, сближает точки) площадь компактного множества не возрастает.

Установим ещё одно важное свойство площади.

Теорема. *При растяжении борелевского множества конечной площади его площадь не уменьшается.*

Доказательство. Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$ — борелевское множество конечной площади и Θ — его растяжение. Согласно предложению II.3.4 образ $E' = \Theta(E)$ снова борелевское множество. Если E компактно, то можно применить аксиому (II) к отображению Θ^{-1} (поскольку оно сближающее) и поэтому $\sigma_k(E) \leqslant \sigma_k(E')$. В общем случае следует воспользоваться равенством (1). ►

Дополним полученную теорему простым, но важным утверждением. Оно даёт двустороннюю оценку площади множества, имеющего липшицеву параметризацию. Это свойство площади будет неоднократно использоваться в дальнейшем.

Лемма. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$ — борелевское множество и Ψ — его отображение в $\mathbb{R}^k$. Если при некотором $C > 1$*

$$\frac{1}{C}\|x-y\| \leqslant \|\Psi(x) - \Psi(y)\| \leqslant C\,\|x-y\| \quad \text{для } x, y \in E,$$

то

$$\frac{1}{C^k}\lambda_k\big(\Psi(E)\big) \leqslant \sigma_k(E) \leqslant C^k \lambda_k\big(\Psi(E)\big).$$

Доказательство. Очевидно, требуемое неравенство достаточно доказать для ограниченных множеств. Поэтому далее мы считаем, что множество E, а следовательно, и его образ E' ограничены. Из условия леммы вытекает, что отображения $H = C\Psi$ и $\Theta\colon u \mapsto \Psi^{-1}(Cu)$ суть растяжения множеств E и $\frac{1}{C}\,E'$ соответственно. Как установлено в предложении II.3.4, они преобразуют борелевские множества в борелевские. Ввиду равномерной непрерывности сближения H^{-1} его можно считать заданным на компактном множестве $Q = C\overline{E'}$, площадь которого (совпадающая с мерой Лебега) конечна. Следовательно,

$$\sigma_k(E) = \sigma_k\big(H^{-1}(CE')\big) \leqslant \sigma_k\big(H^{-1}(Q)\big) \leqslant \sigma_k(Q) = \lambda_k(Q) < +\infty.$$

Конечность площади позволяет применить теорему к растяжению H и получить оценку сверху:

$$\sigma_k(E) \leqslant \sigma_k\big(H(E)\big) = \lambda_k\big(C\Psi(E)\big) = C^k\,\lambda_k\big(\Psi(E)\big).$$

С другой стороны,

$$\sigma_k(E) = \sigma_k\Big(\Theta\Big(\frac{1}{C}\Psi(E)\Big)\Big) \geqslant \sigma_k\Big(\frac{1}{C}\Psi(E)\Big) = \lambda_k\Big(\frac{1}{C}\Psi(E)\Big) = \frac{1}{C^k}\lambda_k\big(\Psi(E)\big),$$

что даёт искомую оценку снизу. ►

Замечание. Как видно из доказательства, лемма остаётся справедливой, если Ψ действует не в $\mathbb{R}^k$, а в k-мерное (линейное или аффинное) подпространство пространства любой размерности, где по аксиоме (I) k-мерная площадь совпадает с мерой Лебега.

2.2. Вопрос о существовании площади поверхности, по существу, нами уже решён. В самом деле, мера Хаусдорфа μ_k удовлетворяет аксиоме (II) (см. свойство 6 в п. II.6.2), а на k-мерных подпространствах она пропорциональна мере Лебега. Как было установлено в п. II.6.5, коэффициент пропорциональности равен объёму α_k единичного шара в $\mathbb{R}^k$. Следовательно, функция $\alpha_k\mu_k$, рассматриваемая на всех борелевских подмножествах пространства $\mathbb{R}^m$, есть k-мерная площадь. Таким образом, справедлива

Теорема. *При любом натуральном k, $1 \leqslant k \leqslant m$, в пространстве $\mathbb{R}^m$ существует k-мерная площадь.*

Как можно показать, борелевская мера, удовлетворяющая условиям (I) и (II), не единственна (см. [Фе]). Обсуждение связанных с этим тонких результатов выходит за рамки настоящей книги. Отметим лишь, что неединственность площади может проявиться только на весьма сложных множествах. Мы вскоре убедимся, что площадь борелевских множеств, удовлетворяющих естественным геометрическим условиям, вычисляется однозначно.

2.3. Остановимся теперь на одномерном случае и рассмотрим вопрос о вычислении меры σ_1 на *простых дугах,* т. е. гомеоморфных образах отрезков. Для краткости будем как синоним использовать также термин “дуга”. Величину $\sigma_1(L)$ естественно, конечно, назвать длиной дуги L. Однако использование сейчас этого термина может привести к определённой двусмысленности. В самом деле, читатель ещё в школе познакомился на примере окружности с определением длины кривой как предела длин вписанных ломаных. Его естественное обобщение приводит к классическому определению длины

дуги. Поэтому желательно убедиться, что мера σ_1 согласуется с этим определением. Приступая к решению этой задачи, введём предварительно понятие длины пути.

Рассмотрим произвольный путь $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^m$. Для дробления τ сегмента $[a,b]$ точками $t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b$ положим

$$S_\tau = \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\|.$$

По определению *длиной* пути γ называется величина $s(\gamma) = \sup\limits_\tau S_\tau$. Путь называется *спрямляемым,* если его длина конечна. Отметим, что $s(\gamma) \geqslant \|\gamma(b) - \gamma(a)\|$, поскольку $S_\tau \geqslant \|\gamma(b) - \gamma(a)\|$ в силу неравенства треугольника.

Если $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ — координатные функции пути γ, то, очевидно, при любых $i = 1, \ldots, m$ и $k = 1, \ldots, n$

$$|\varphi_i(t_{k+1}) - \varphi_i(t_k)| \leqslant \|\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)\| \leqslant \sum_{j=1}^{m} |\varphi_j(t_{k+1}) - \varphi_j(t_k)|.$$

Поэтому

$$\mathbf{V}_a^b(\varphi_i) \leqslant s(\gamma) \leqslant \sum_{j=1}^{m} \mathbf{V}_a^b(\varphi_j). \tag{1'}$$

Таким образом, путь спрямляем в том и только том случае, когда все его координатные функции имеют ограниченную вариацию. Повторяя доказательство теоремы IV.11.1, можно убедиться, что длина пути аддитивна, т. е. $s(\gamma) = s(\gamma_1) + s(\gamma_2)$, где γ_1, γ_2 — сужения γ на промежутки $[a,c]$ и $[c,b]$ соответственно ($a < c < b$).

Чтобы определить длину дуги в классическом смысле, нам потребуется несложный вспомогательный результат. Для пути, гомеоморфно отображающего отрезок на дугу, мы сохраним термин “параметризация”, несмотря на то, что он определён не на открытом, как должно быть согласно определению 1.1, а на замкнутом промежутке.

Лемма. *Длины двух параметризаций простой дуги одинаковы.*

Доказательство. Пусть $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{R}^m$, $\gamma_1\colon [p,q] \to \mathbb{R}^m$ — две параметризации простой дуги L. Положим $\omega(x) = \gamma_1^{-1}\big(\gamma(x)\big)$ ($a \leqslant x \leqslant b$). Тогда функция ω непрерывна и взаимно однозначна, а следовательно, и строго монотонна. Поэтому каждому дроблению $\tau = \{x_0, \ldots, x_n\}$ промежутка $[a,b]$ соответствует дробление промежутка $[p,q]$ точками $\omega(x_0), \ldots, \omega(x_n)$, если ω возрастает, и точками $\omega(x_n), \ldots, \omega(x_0)$, если ω убывает. Кроме того, $\gamma(x) = \gamma_1(\omega(x))$. Поэтому

$$S_\tau = \sum_{k=0}^{n-1} \|\gamma(x_{k+1}) - \gamma(x_k)\| = \sum_{k=0}^{n-1} \big\|\gamma_1(\omega(x_{k+1})) - \gamma_1(\omega(x_k))\big\| \leqslant s(\gamma_1).$$

Следовательно — ввиду произвольности τ — $s(\gamma) \leqslant s(\gamma_1)$. Поскольку параметризации γ и γ_1 равноправны, это означает, что $s(\gamma) = s(\gamma_1)$. ►

Длиной дуги назовём общее значение длин всех её параметризаций. Длину дуги L обозначим символом $s(L)$. Таким образом, $s(L) = s(\gamma)$, если γ — какая-то параметризация дуги L (использование символа s для обозначения и длины дуги, и длины её

параметризации не приводит к противоречию). Дуга называется *спрямляемой,* если её длина конечна. Поскольку длина пути не меньше расстояния между его началом и концом, для длины дуги справедлив наглядный геометрический принцип “отрезок — кратчайшая из дуг, соединяющих две данные точки”:

$$s(L) \geqslant \|B - A\|, \quad \text{если дуга } L \text{ содержит точки } A \text{ и } B. \tag{2}$$

Из аксиомы (II) следует, что этот принцип переносится и на (любую) меру σ_1:

$$\sigma_1(L) \geqslant \|B - A\|, \quad \text{если дуга } L \text{ содержит точки } A \text{ и } B \tag{2'}$$

(так как проекция L на прямую, проходящую через точки A и B, содержит и весь соединяющий их отрезок).

Заметим ещё, что если путь γ спрямляем, то функция $x \mapsto \theta(x) = s(\gamma|_{[a,x]})$ непрерывна. Действительно, если $a \leqslant x < y \leqslant b$, то в силу (1′) (далее $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ — координатные функции параметризации γ)

$$|\theta(y) - \theta(x)| = s(\gamma|_{[x,y]}) \leqslant \sum_{j=1}^{m} \mathbf{V}_x^y(\varphi_j),$$

где $\mathbf{V}_x^y(\varphi_j) \to 0$ при $x - y \to 0$ по теореме IV.11.2.

Непрерывность функции θ позволяет ввести новую параметризацию спрямляемой дуги L. Так как множество значений θ совпадает с $[0, S]$, где $S = s(L)$, то отображение $u \mapsto \delta(u) = \gamma\bigl(\theta^{-1}(u)\bigr)$ определено на $[0, S]$, непрерывно, взаимно однозначно и $\delta([0, S]) \subset L$. Читатель легко убедится, что $\delta([0, S]) = L$. Таким образом, δ — параметризация дуги L. Из определения θ вытекает, что при $0 \leqslant u \leqslant S$ всегда справедливо равенство $s\bigl(\delta([0, u])\bigr) = u$. Кроме того, из аддитивности длины следует, что эта параметризация обладает также следующим свойством: если $0 \leqslant u_1 < u_2 \leqslant S$, то $s\bigl(\delta([u_1, u_2])\bigr) = u_2 - u_1$. Поэтому для параметризации δ параметр u имеет простой геометрический смысл: разность значений параметров u_1, u_2 ($u_1 < u_2$) равна длине дуги, соответствующей промежутку $[u_1, u_2]$. Такую параметризацию простой дуги называют *натуральной.* Она сближает точки промежутка $[0, S]$, так как $u_2 - u_1 = s\bigl(\delta([u_1, u_2])\bigr) \geqslant \geqslant \|\delta(u_2) - \delta(u_1)\|$ в силу неравенства (2).

Теорема. *Для любой простой дуги L справедливо равенство $\sigma_1(L) = s(L)$.*

Доказательство. Проверим сначала, что $s(L) \leqslant \sigma_1(L)$. Пусть γ — некоторая параметризация L, определённая на $[a, b]$. Рассмотрим произвольное дробление τ сегмента $[a, b]$ точками $t_0 = a < t_1 < \ldots < t_n = b$ и положим $L_k = \gamma\bigl([t_k, t_{k+1}]\bigr)$ $(0 \leqslant k < n)$. Так как $\|\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)\| \leqslant \sigma_1(L_k)$ в силу (2′), то

$$S_\tau \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \|\gamma(t_{k+1}) - \gamma(t_k)\| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \sigma_1(L_k) = \sigma_1(L).$$

Ввиду произвольности τ это влечёт неравенство $s(L) \leqslant \sigma_1(L)$.

Доказывая противоположное неравенство, можно считать, что дуга L спрямляема, т. е. $S = s(L) < +\infty$. Как уже было отмечено, её натуральная параметризация сближает точки промежутка $[0, S]$. Поэтому $\sigma_1(L) \leqslant \sigma_1([0, S]) = S = s(L)$. ▶

Доказанное утверждение позволяет называть меру σ_1 длиной.

2.4. Как мы убедились в предыдущем пункте, мера σ_1 любой простой дуги равна супремуму длин вписанных в неё ломаных. “Здравый смысл” подсказывает, что при вычислении площади криволинейной поверхности M следует поступить аналогично: рассмотреть многогранные поверхности, вершины которых лежат на M (многогранники, вписанные в M), вычислить сумму площадей их граней, а затем перейти к пределу, “измельчая” грани. Однако, как показывает не очень сложный анализ, такой подход не может привести к разумному результату, даже если наша поверхность — цилиндр. Построение соответствующего классического контрпримера — так называемого “сапога Шварца*)” — мы сейчас коротко наметим.

В прямой круговой цилиндр радиуса R и высоты H впишем многогранную поверхность, которая строится следующим образом. Плоскостями, перпендикулярными оси цилиндра, рассечём его на m равных цилиндров. В нижнее и верхнее основания каждого такого цилиндра впишем правильные n-угольники, расположенные так, чтобы вершины верхнего многоугольника лежали над серединами дуг, стягиваемых сторонами многоугольника, расположенного под ним. Иными словами, верхний многоугольник повёрнут относительно нижнего на угол $\frac{\pi}{n}$. Каждую вершину многоугольника соединим отрезками с ближайшими вершинами многоугольников, расположенных на один уровень выше или ниже. Пара таких отрезков, проведённых из данной вершины к многоугольнику, расположенному на соседнем уровне, образует вместе с его стороной равнобедренный треугольник. Эти треугольники в совокупности составляют многогранную поверхность, напоминающую измятое голенище сапога (см. рис. 14).

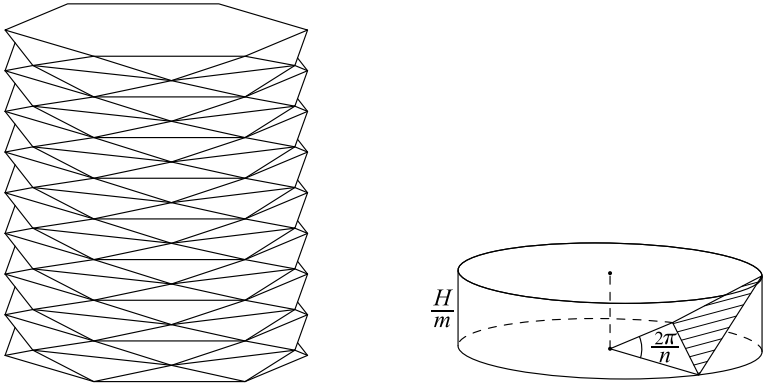


Рис. 14.

Между соседними сечениями расположены $2n$ треугольных граней (у половины из них основаниями служат стороны нижнего n-угольника, а у другой половины — верхнего). Таким образом, вся многогранная поверхность состоит из $2mn$ одинаковых треугольных граней. Ясно, что длины их сторон стремятся к нулю, когда m, $n \to \infty$. Подчеркнём, что плоскости граней оказываются почти перпендикулярными оси цилиндра, если высота слоёв мала по сравнению с длиной стороны многоугольника.

Площадь s_{mn} каждой грани нетрудно вычислить:

$$s_{mn} = R \sin\frac{\pi}{n}\sqrt{\left(2R\sin^2\frac{\pi}{2n}\right)^2 + \left(\frac{H}{m}\right)^2}.$$

*) Карл Герман Амандус **Шварц** (Schwarz), 1843–1921, — немецкий математик.

Отбросив второе слагаемое под знаком корня, мы получим (с учётом неравенства $\sin\varphi \geqslant \frac{2}{\pi}\varphi$ для $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$)

$$s_{mn} \geqslant R\sin\frac{\pi}{n} \cdot 2R\sin^2\frac{\pi}{2n} \geqslant \frac{4R^2}{n^3}.$$

Поэтому полная площадь многогранной поверхности, т. е. произведение $2mns_{mn}$, не меньше $8R^2\frac{m}{n^2}$. Следовательно, в цилиндр можно вписать многогранную поверхность со сколь угодно большой площадью (взяв $m \gg n^2$), хотя её грани — треугольники со сколь угодно малыми сторонами. Отметим, что площадь цилиндра, т. е. $2\pi RH$, мы в пределе получим лишь при таком измельчении, когда $\frac{m}{n^2} \to 0$.

Из приведённой конструкции легко понять, почему подход, эффективный при вычислении длин кривых, непригоден для вычисления площадей. Причина простая — звенья ломаной, вписанной в гладкую кривую, почти касаются её, если их длины достаточно малы; с поверхностями ситуация совсем иная — сколь угодно мелкие грани многогранника, вписанного в криволинейную поверхность, могут оказаться почти ортогональными ей ("шершавая" вписанная поверхность). Таким образом, при вычислении площади поверхности приходится отказаться от наивного подхода, связанного с использованием вписанных многогранников.

УПРАЖНЕНИЯ

1) Докажите, что любые две параметризации простой дуги можно получить друг из друга с помощью строго монотонной замены переменной. Выведите отсюда (не используя теорему 2.3) независимость классической длины простой дуги от выбора параметризации.

2) Не опираясь на теорему 2.3, а исходя лишь из определения классической длины, докажите её аддитивность: $s(L) = s(L_1) + s(L_2)$, где $L_1 = \gamma\big([a,c]\big)$, $L_2 = \gamma\big([c,b]\big)$, $a < c < b$, γ — произвольная параметризация простой дуги L.

3) Пусть L — гладкая простая дуга и $L_{x,y}$ — её поддуга с концами x, y. Докажите, что для любой точки $p \in L$ справедливо равенство

$$\lim_{x,y\to p} \frac{s(L_{x,y})}{\|x-y\|} = 1,$$

т. е. длина стягиваемой в точку дуги эквивалентна длине хорды.

4) Докажите, что при переходе к выпуклой оболочке длина границы плоской области не увеличивается. Верно ли аналогичное утверждение в трёхмерном случае?

5) Докажите однозначную определённость меры σ_1 на борелевских подмножествах спрямляемых дуг.

6) Пусть $f \in C\big([a,b]\big)$. Докажите, что если функция f монотонна, то длина её графика не превосходит $b - a + |f(b) - f(a)|$. Убедитесь, что неравенство строгое, если функция f ($f \not\equiv \mathrm{const}$) удовлетворяет условию Липшица.

7) Чему равна длина графика функции Кантора?

8) Докажите, что промежуток $[0,1)$ с мерой Лебега как пространство с мерой изоморфен (см. определение в задаче 11 § IV.10) единичной окружности с мерой $\frac{1}{2\pi}\sigma_1$.

§ 3. Свойства площади на гладком многообразии

В этом параграфе все многообразия и параметризации по умолчанию предполагаются гладкими. Многообразия коразмерности единица мы называем поверхностями.

3.1. Наша ближайшая цель — получить формулу, позволяющую вычислять площадь борелевских подмножеств простого гладкого k-мерного многообразия. Тогда в силу счётной аддитивности площади мы сможем находить и площади счётных объединений таких множеств, в частности, площади подмножеств произвольных гладких многообразий.

Обсудим наглядные соображения, подсказывающие, какой должна быть искомая формула. Пусть Φ, $\Phi \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m)$, — параметризация простого многообразия M, $\dim M = k$, и пусть $\widetilde{\Phi}(t) = \Phi(a) + d_a\Phi(t-a)$ — линеаризация Φ в точке $a \in \mathcal{O}$. Множество значений $\widetilde{\Phi}$ есть k-мерное аффинное касательное пространство, в котором определена мера Лебега λ_k. Рассмотрим кубическую ячейку $Q_h \subset \mathcal{O}$ с вершиной в точке a и ребром h. При отображении Φ её образом будет "криволинейный параллелепипед" $R_h = \Phi(Q_h)$. Для малых h он почти изометричен соответствующей "чешуйке" $\widetilde{R}_h$ — образу Q_h под действием линеаризованного отображения $\widetilde{\Phi}$ (см. лемму в следующем пункте). Поэтому следует ожидать, что площадь "криволинейного параллелепипеда" R_h должна быть близка к мере Лебега множества $\widetilde{R}_h$. Оно может быть получено сдвигом из параллелепипеда $d_a\Phi\big([0,h)^k\big)$, лежащего в касательном пространстве. Следовательно, $\lambda_k(\widetilde{R}_h) = \lambda_k\big(d_a\Phi\big([0,h)^k\big)\big) = h^k\lambda_k\big(d_a\Phi\big([0,1)^k\big)\big)$. Параллелепипед $C_a = d_a\Phi\big([0,1)^k\big)$ будем называть *сопровождающим*. Таким образом, площадь $\sigma_k(R_h)$ должна быть близка к $h^k\lambda_k(C_a)$ в том смысле, что отношение этих величин стремится к единице с уменьшением h. Это наводит на мысль, что площадь на простом гладком многообразии M есть не что иное, как взвешенный образ (см. п. VI.1.1) k-мерной меры Лебега*) при отображении Φ, причём роль веса играет функция $\omega_\Phi\colon t \mapsto \lambda_k(C_t)$ — объём сопровождающего параллелепипеда.

3.2. Чтобы убедиться в обоснованности наших наводящих соображений, установим предварительно двустороннюю оценку отклонения точки многообразия от касательного подпространства. Одно из возможных "распрямляющих" отображений, имеющее простую геометрическую природу, мы могли бы получить, ортогонально проектируя достаточно малую окрестность точки касания на касательное пространство (см. упр. 6 § 1). Однако в техническом отношении нам удобнее с каждой параметризацией связать своё распрямляющее отображение (близкое к проектированию).

Лемма. *Пусть $\Phi \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m)$ — локальная параметризация многообразия M и $\widetilde{\Phi}(t) = \Phi(a) + d_a\Phi(t-a)$ — её линеаризация в точке $a \in \mathcal{O}$. Тогда*

1) отображение $\Psi = \widetilde{\Phi} \circ \Phi^{-1}$ почти изометрично вблизи точки $p = \Phi(a)$: для любого $C > 1$ в достаточно малой M-окрестности U точки p справедливо неравенство

$$\frac{1}{C}\|x-y\| \leqslant \|\Psi(x) - \Psi(y)\| \leqslant C\|x-y\| \qquad (x, y \in U);$$

2) для любого множества A из $\mathfrak{A}^k$

$$\lambda_k\big(\widetilde{\Phi}(A)\big) = \omega_\Phi(a)\,\lambda_k(A). \tag{1}$$

*) Точнее, её сужения на $\mathfrak{B}^k$.

Доказательство. Достаточно проверить, что вблизи точки p выполняется неравенство

$$\big\|(x-y)-(\Psi(x)-\Psi(y))\big\| \leqslant \Big(1-\frac{1}{C}\Big)\|x-y\|.$$

Поскольку локально отображение Φ^{-1} удовлетворяет условию Липшица (см. следствие 1 п. 1.4), нам достаточно проверить, что для любого $\varepsilon > 0$ существует столь малая M-окрестность U точки p, что

$$\big\|(x-y)-(\Psi(x)-\Psi(y))\big\| \leqslant \varepsilon\big\|\Phi^{-1}(x)-\Phi^{-1}(y)\big\| \quad (x,\, y \in U).$$

Положив $s=\Phi^{-1}(x)$ и $t=\Phi^{-1}(y)$, мы видим, что это равносильно условию

$$\big\|\big(\Phi(s)-\Phi(t)\big)-d_a\Phi(s-t)\big\| \leqslant \varepsilon\|s-t\| \qquad \text{вблизи точки } a. \tag{2}$$

Оно вытекает из гладкости Φ. Действительно, пусть радиус r столь мал, что $\|d_u\Phi - d_a\Phi\| \leqslant \varepsilon$ при любом u из k-мерного шара $B(a,r)$. Тогда согласно следствию 1 из неравенства Лагранжа (см. п. Д.VII.2)

$$\big\|\big(\Phi(s)-\Phi(t)\big)-d_a\Phi(s-t)\big\| \leqslant \sup_{u\in B(a,r)} \|d_u\Phi - d_a\Phi\|\,\|s-t\|,$$

что влечёт (2). Таким образом, в качестве искомой M-окрестности U точки p можно взять $\Phi\big(B(a,r)\big)$, если радиус r достаточно мал.

Для доказательства равенства (1) заметим, что мера $A \mapsto \lambda_k\big(\widetilde{\Phi}(A)\big)$ инвариантна относительно сдвига и потому (см. п. II.4.2) пропорциональна λ_k. Так как $\lambda_k\big(\widetilde{\Phi}([0,1)^k)\big) = \lambda_k(C_a) = \omega_\Phi(a)$, то коэффициент пропорциональности равен $\omega_\Phi(a)$. ►

Теперь мы готовы доказать формулу для вычисления площади множества, лежащего на гладком многообразии. Идея доказательства та же, что была использована нами в теореме VI.2.1.

Теорема. *Для любого борелевского множества E, содержащегося в простом гладком многообразии M, справедливо равенство*

$$\sigma_k(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} \omega_\Phi(t)\,dt, \tag{3}$$

где Φ — произвольная гладкая параметризация M.

Как мы отмечали в п. 2.2, аксиомы площади не определяют её однозначно на всех борелевских множествах. В противоположность этому сформулированная теорема показывает, что на достаточно “хороших” множествах — гладких многообразиях и их борелевских частях — все площади совпадают. В § 8 показано, что то же самое справедливо и для подмножеств липшицевых (в частности, выпуклых) поверхностей. Таким образом, различие между площадями может проявиться лишь на борелевских множествах весьма сложной природы.

Доказательство. На борелевских подмножествах открытого множества $\mathcal{O}$, где определена параметризация Φ, рассмотрим меру $\nu(A) = \sigma_k\big(\Phi(A)\big)$ и убедимся, что она удовлетворяет условию

$$\inf_A \omega_\Phi\,\lambda_k(A) \leqslant \nu(A) \leqslant \sup_A \omega_\Phi\,\lambda_k(A). \tag{4}$$

Как установлено в теореме VI.1.2, отсюда следует равенство $\nu(A) = \int_A \omega_\Phi(t)\,dt$, которое равносильно утверждению теоремы.

Если эти неравенства справедливы для множеств, образующих возрастающую последовательность, то, очевидно, они справедливы и для их объединения. Поэтому нам достаточно доказать (4), считая, что A — ограниченное множество, замыкание которого содержится в $\mathcal{O}$. Оба неравенства (4) устанавливаются единообразно. Мы докажем лишь оценку сверху, предоставляя читателю провести аналогичные рассуждения для доказательства оценки снизу.

Если правое неравенство (4) неверно, то при некотором $C_0 > 1$

$$\nu(A) > C_0 \sup_A \omega_\Phi \, \lambda_k(A). \tag{5}$$

Разобьём множество A на конечное число частей, диаметры которых не превосходят $\frac{\operatorname{diam}(A)}{2}$. Тогда неравенство (5) должно быть справедливо и для какой-то из этих частей, которую мы обозначим A_1. Заменив A на A_1 и повторив рассуждения, получим множество A_2 и т. д. По индукции мы построим последовательность вложенных друг в друга множеств A_n, диаметры которых стремятся к нулю. Возьмём точку a из пересечения $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n$. По построению множеств A_n, для них справедливо неравенство (5):

$$\nu(A_n) > C_0 \sup_{A_n} \omega_\Phi \, \lambda_k(A_n). \tag{6}$$

Убедимся, что это ведёт к противоречию. По лемме для любого числа $C > 1$ (его выбор уточним далее) существует такая окрестность V точки a, что при x, $y \in U = \Phi(V)$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{C}\|x-y\| \leqslant \|\Psi(x) - \Psi(y)\| \leqslant C\|x-y\|,$$

где, как и в лемме, $\Psi = \widetilde{\Phi} \circ \Phi^{-1}$, $\widetilde{\Phi}$ — линеаризация Φ $\big(\widetilde{\Phi}(t) = \Phi(a) + d_a\Phi(t-a)\big)$. Если n настолько велико, что $A_n \subset V$, то $\Phi(A_n) \subset U$. Тогда по лемме 2.1 мы получаем, что для множества $E_n = \Phi(A_n)$ справедливо неравенство $\sigma_k(E_n) \leqslant C^k \lambda_k\big(\Psi(E_n)\big)$. Так как $\Psi(E_n) = \widetilde{\Phi}(A_n)$ и согласно (1) $\lambda_k\big(\widetilde{\Phi}(A_n)\big) = \omega_\Phi(a)\lambda_k(A_n)$, то

$$\nu(A_n) = \sigma_k\big(\Phi(A_n)\big) = \sigma_k(E_n) \leqslant C^k \lambda_k\big(\Psi(E_n)\big) = C^k \lambda_k\big(\widetilde{\Phi}(A_n)\big) \leqslant C^k \sup_{A_n} \omega_\Phi \, \lambda_k(A_n).$$

Из (6) и последнего неравенства вытекает, что $1 < C_0 \leqslant C^k$. Это, однако, невозможно, если C было выбрано достаточно близким к единице. Следовательно, сделанное предположение неверно, что доказывает теорему. ►

Частным случаем этой теоремы (при $k = m$) является теорема VI.2.1 о преобразовании меры Лебега при диффеоморфизме, поскольку в этом случае $\omega_\Phi = J_\Phi \equiv |\det(\Phi')|$. Доказательства этих теорем аналогичны, но теперь мы воспользовались свойствами площади и поэтому могли не следить за мерами образов малых кубических ячеек.

3.3. Здесь мы обсудим основные свойства площади σ_k в пространстве $\mathbb{R}^m$, всюду считая, что $k < m$. Для краткости будем говорить просто о площади, опуская указание на размерность.

Очевидно, свойства площади в некоторых отношениях значительно отличаются от привычных свойств меры Лебега. Например, так как каждый m-мерный куб содержит

континуум конгруэнтных попарно не пересекающихся k-мерных кубов, то в пространстве $\mathbb{R}^m$ есть компактные множества бесконечной площади. Ясно также, что каждое непустое открытое множество имеет бесконечную площадь. Из этого сразу вытекает, что площадь не σ-конечна и не может быть регулярной мерой. Поэтому мы, исследуя более детально свойства площади, будем, как правило, иметь дело не с площадью "в целом", а рассматривать её сужения на подмножества, содержащиеся в фиксированном многообразии. Для большей точности введём следующие обозначения, связанные с гладким k-мерным многообразием $M \subset \mathbb{R}^m$ $(k < m)$. Символом $\mathfrak{B}_M$ обозначим систему всех содержащихся в M борелевских множеств, а символом σ_M — сужение k-мерной площади на $\mathfrak{B}_M$. Так как само многообразие M есть борелевское множество, то система $\mathfrak{B}_M$ есть σ-алгебра, а σ_M — мера.

Формула (3) позволяет вычислять площадь борелевского подмножества простого многообразия. Очевидно, она справедлива и для подмножеств координатной окрестности произвольного, не обязательно простого, многообразия, если Φ — соответствующая параметризация.

Установим некоторые важные свойства площади.

1) *Площадь компактного подмножества гладкого многообразия конечна.*

Для компактного подмножества некоторой координатной окрестности это вытекает из формулы (3), так как для любой параметризации его прообраз компактен, а вес ω_Φ непрерывен. Произвольное компактное подмножество многообразия можно покрыть конечным числом координатных окрестностей конечной площади.

2) *Мера σ_M σ-конечна.*

Это свойство вытекает из предыдущего и следствия 2 п. 1.5.

Поскольку борелевские множества нулевой меры могут иметь не борелевские подмножества, мера σ_M не полна. Полной мерой будет её стандартное продолжение. σ-алгебру, на которой оно определено, обозначим символом $\mathfrak{A}_M$, а входящие в неё множества назовём *измеримыми по Лебегу,* или для краткости просто *измеримыми.* По теореме I.5.1 продолжение меры σ_M на $\mathfrak{A}_M$ единственно. Мы сохраним для него старое обозначение σ_M и по-прежнему будем называть его площадью (на многообразии M). Согласно следствию I.5.2 каждое измеримое множество можно изнутри и снаружи аппроксимировать борелевскими множествами той же меры.

Если Φ — параметризация простого многообразия M и $E \subset M$ — произвольное измеримое по Лебегу множество, то формула (3), установленная нами для борелевских множеств, сохраняется. Таким образом,

3) *мера σ_M на простом k-мерном многообразии M есть взвешенный образ k-мерной меры Лебега относительно произвольной параметризации Φ. Подмножество простого многообразия измеримо тогда и только тогда, когда измерим его прообраз.*

В самом деле, измеримое множество E представимо в виде $E = A \cup e$, где A — борелевское множество, а $\sigma_M(e) = 0$. Кроме того, $e \subset e'$, где e' — борелевское множество нулевой площади. Поэтому $\Phi^{-1}(e) \subset \Phi^{-1}(e')$, причём $\lambda_k\big(\Phi^{-1}(e')\big) = 0$. Последнее справедливо, так как $0 = \sigma_M(e') = \int_{\Phi^{-1}(e')} \omega_\Phi(t)\,dt$ и $\omega_\Phi > 0$. В силу полноты меры Лебега множество $\Phi^{-1}(e)$ измеримо (и имеет нулевую меру). Поэтому

$$\sigma_M(E) = \sigma_M(A) = \int_{\Phi^{-1}(A)} \omega_\Phi(t)\,dt = \int_{\Phi^{-1}(E)} \omega_\Phi(t)\,dt.$$

Аналогично проверяется, что из измеримости $\Phi^{-1}(E)$ следует измеримость E.

4) *Мера σ_M регулярна*, т. е. (см. п. II.2.2)

$$\sigma_M(E) = \inf_{\substack{E\subset G\subset M \\ G \text{ открыто в } M}} \sigma_M(G) = \sup_{\substack{E\supset F \\ F \text{ компактно}}} \sigma_M(F)$$

для любого измеримого множества E, $E \subset M$.

Если M — простое многообразие, то это свойство есть непосредственное следствие регулярности меры Лебега и формулы (3). Рассуждения для случая произвольного многообразия мы предоставляем провести читателю самостоятельно.

5) *Пусть L — произвольное гладкое многообразие, $\dim L < k$. Тогда $\sigma_k(L) = 0$.*

Проверим, что у каждой точки из L есть такая окрестность U, что пересечение $L \cap U$ имеет нулевую площадь (этого достаточно, поскольку по теореме Линделёфа L можно покрыть счётным числом таких окрестностей).

Согласно второму определению гладкого многообразия окрестность U можно выбрать так, что $L \cap U$ содержится в некотором простом гладком многообразии M размерности k. При этом, не умаляя общности, можно считать $\dim L = k - 1$.

Пусть Φ — параметризация многообразия M. Тогда $\Phi^{-1}(L)$ есть гладкая поверхность в $\mathbb{R}^k$, представимая в виде счётного объединения графиков гладких функций (см. следствие 4 п. 1.5). Так как k-мерный объём каждого такого графика равен нулю в силу следствия II.3.1, то $\lambda_k\big(\Phi^{-1}(L)\big) = 0$. Таким образом, $\sigma_k(L) = \int_{\Phi^{-1}(L)} \omega_\Phi(t)\,dt = 0$. ►

Отсюда вытекает, например, что вычисляя площадь подмножества сферы, мы можем пренебрегать многообразиями меньшей размерности. Это позволяет не умаляя общности считать, что рассматриваемое множество содержится в “разрезанной” сфере, и пользоваться соответствующей параметризацией и формулой (3).

6) *При гомотетии с коэффициентом $a > 0$ мера множества, содержащегося в k-мерном многообразии M, меняется в a^k раз: $\sigma_k(aE) = a^k\,\sigma_k(E)$*, если $E \in \mathfrak{A}_M$.

В самом деле, площадь пропорциональна мере Хаусдорфа, которая обладает требуемым свойством (см. свойство 8 в п. II.6.2).

Заметим, что в случае произвольного линейного преобразования многообразия меры на нём и его образе не имеют такой простой связи. Это можно увидеть уже при сжатии окружности — длина дуги эллипса с эксцентриситетом $\varepsilon \neq 1$ вычисляется весьма сложно. Как легко подсчитать, она выражается с помощью эллиптического интеграла $\int_0^\varphi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 t}\,dt$, который не является элементарной функцией.

Отметим в заключение свойство площади, упомянутое сразу после определения 2.1.

7) *Площадь инвариантна относительно изометрии.*

В частности, площадь на сфере инвариантна относительно вращения.

3.4. Чтобы находить площади многообразий с помощью формулы (3), нужно иметь явные выражения для вычисления веса $\omega_\Phi(t)$, равного мере сопровождающего параллелепипеда C_t. При $k = 1$ C_t есть не что иное, как отрезок с концами 0 и $\Phi'(t)$. Поэтому $\omega_\Phi(t) = \lambda_1(C_t) = \|\Phi'(t)\|$ и для вычисления, например, длины дуги $L = \Phi\big([a, b]\big)$ надо проинтегрировать длину касательного вектора: $\sigma_1(L) = \int_a^b \|\Phi'(t)\|\,dt$.

В общем случае параллелепипед C_t натянут на канонические касательные векторы $\tau_1 = \tau_1(t), \dots, \tau_k = \tau_k(t)$, соответствующие параметризации Φ. Поскольку они линейно

независимы, объём параллелепипеда C_t положителен, т. е. всегда $\omega_\Phi(t) > 0$. Значение $\omega_\Phi(t)$ можно вычислить с помощью определителя Грама (см. п. II.5.3):

$$\omega_\Phi(t) = \lambda_k(C_t) = \sqrt{\Gamma(\tau_1, \dots, \tau_k)} = \sqrt{\det\left((\langle\tau_i, \tau_j\rangle)_{i,j=1}^k\right)} = \sqrt{\det\left[(\Phi'(t))^T\ \Phi'(t)\right]}.$$

Из формулы Бине–Коши следует, что

$$\omega_\Phi^2(t) = \det\left[(\Phi'(t))^T\ \Phi'(t)\right] = \sum_{j_1<j_2<\dots<j_k} \left(\frac{D(\varphi_{j_1}, \varphi_{j_2}, \dots, \varphi_{j_k})}{D(t_1, t_2, \dots, t_k)}(t)\right)^2,$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$ — координатные функции параметризации Φ.

Для поверхности, т. е. при $k = m - 1$, выражение для веса, даваемое формулой Бине–Коши, упрощается:

$$\omega_\Phi^2(t) = \sum_{j=1}^m \left(\frac{D(\varphi_1, \dots, \widehat{\varphi}_j, \dots, \varphi_m)}{D(t_1, \dots, t_{m-1})}(t)\right)^2$$

(символ $\widehat{\ }$ указывает, что соответствующая функция опускается).

Правую часть этого равенства легко истолковать геометрически. Пусть $e_1, \dots, e_m$ — канонический базис в $\mathbb{R}^m$. Рассмотрим вектор

$$N_\Phi(t) = \sum_{j=1}^m (-1)^{j+1} \frac{D(\varphi_1, \dots, \widehat{\varphi}_j, \dots, \varphi_m)}{D(t_1, \dots, t_{m-1})}(t) \cdot e_j.$$

Его можно записать с помощью символического определителя

$$N_\Phi(t) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & \dots & e_m \\ \frac{\partial\varphi_1(t)}{\partial t_1} & \frac{\partial\varphi_2(t)}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial\varphi_m(t)}{\partial t_1} \\ \frac{\partial\varphi_1(t)}{\partial t_2} & \frac{\partial\varphi_2(t)}{\partial t_2} & \dots & \frac{\partial\varphi_m(t)}{\partial t_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_1(t)}{\partial t_{m-1}} & \frac{\partial\varphi_2(t)}{\partial t_{m-1}} & \dots & \frac{\partial\varphi_m(t)}{\partial t_{m-1}} \end{vmatrix},$$

строки которого, кроме первой, состоят из касательных векторов.

Вектор $N_\Phi(t)$ ортогонален каждому касательному вектору $\tau_j(t)$, поскольку скалярное произведение $\langle N_\Phi(t), \tau_j(t)\rangle$ можно представить как определитель с двумя одинаковыми строками. Таким образом, вектор $N_\Phi(t)$ есть нормаль к M в точке $\Phi(t)$. Эту нормаль мы будем называть *нормалью, соответствующей параметризации* Φ. Очевидно, длина $N_\Phi(t)$ равна $\omega_\Phi(t)$.

При $m = 3$, $k = 2$ мы получаем, что $N_\Phi(t)$ есть просто векторное произведение касательных векторов: $N_\Phi(t) = \tau_1(t) \times \tau_2(t)$. Ясно, что

$$\omega_\Phi^2 = \begin{vmatrix} \langle\tau_1, \tau_1\rangle & \langle\tau_1, \tau_2\rangle \\ \langle\tau_2, \tau_1\rangle & \langle\tau_2, \tau_2\rangle \end{vmatrix} = EG - F^2,$$

где E, F, G — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности, т. е. $E = \|\tau_1\|^2$, $G = \|\tau_2\|^2$, $F = \langle\tau_1, \tau_2\rangle$. Если касательные векторы τ_1 и τ_2 ортогональны, то $\omega_\Phi = \|\tau_1\| \cdot \|\tau_2\|$.

Если $M = \Gamma_f$ — график функции f из $C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R})$, то отображение

$$\mathcal{O} \ni x = (x_1, \dots, x_{m-1}) \mapsto \Phi(x) = (x, f(x))$$

— его каноническая параметризация, для которой

$$\frac{D(\varphi_1, \dots, \widehat{\varphi}_j, \dots, \varphi_m)}{D(x_1, \dots, x_{m-1})}(x) = (-1)^{m+j+1} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$$

при $1 \leqslant j \leqslant m-1$. При $j = m$ этот определитель равен единице. Поэтому $N_\Phi(x) = (-1)^m \big(f'_{x_1}(x), \dots, f'_{x_{m-1}}(x), -1\big)$ и $\omega_\Phi(x) = \sqrt{1 + \|\operatorname{grad} f(x)\|^2}$.

Плотность ω_Φ, соответствующую канонической параметризации, нетрудно найти и непосредственно из геометрических соображений, не опираясь на общую формулу. Действительно, канонической параметризации графика соответствуют касательные векторы $\tau_j = \big(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, f'_{x_j}(x)\big)$. Натянутый на них сопровождающий параллелепипед C_x при проектировании на $\mathbb{R}^{m-1}$ переходит в единичный куб $[0,1]^{m-1}$. Поэтому (см. п. II.4.6) $\lambda_{m-1}(C_x) = \frac{1}{|\cos\theta(x)|}$, где $\theta(x)$ — угол между последней координатной осью и произвольной нормалью к касательной плоскости $T_{(x, f(x))}$. Как известно (см. пример 1 в п. 1.3), одной из таких нормалей является вектор $\nu(x) = \big(-f'_{x_1}(x), \dots, -f'_{x_{m-1}}(x), 1\big)$ (отметим, что нормали $N_\Phi(x)$ и $\nu(x)$ совпадают при нечётном m и противоположны при чётном). Следовательно,

$$|\cos\theta(x)| = \frac{\langle \nu(x), e_m \rangle}{\|\nu(x)\|\,\|e_m\|} = \frac{1}{\|\nu(x)\|}.$$

Поэтому

$$\omega_\Phi(x) = \lambda_{m-1}(C_x) = \frac{1}{|\cos\theta(x)|} = \|\nu(x)\| = \sqrt{1 + \|\operatorname{grad} f(x)\|^2}.$$

Таким образом, площадь любого содержащегося в графике Γ_f измеримого множества E вычисляется по формуле

$$\sigma_{\Gamma_f}(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} \frac{dx}{|\cos\theta(x)|} = \int_{P(E)} \sqrt{1 + \|\operatorname{grad} f(x)\|^2}\, dx, \tag{7}$$

где $P(E)$ — ортогональная проекция E на $\mathbb{R}^{m-1}$.

В частности, если $f(x) = \sqrt{R^2 - \|x\|^2}$ для $x \in B^{m-1}(R)$, то Γ_f есть верхняя полусфера $S^{m-1}_+(R)$. Так как радиус-вектор точки на сфере есть нормаль к ней, то $\cos\theta = \frac{f(x)}{R}$. Поэтому для площади измеримого множества E, лежащего на полусфере $S^{m-1}_+(R)$, мы получаем формулу

$$\sigma_{\Gamma_f}(E) = \int_{P(E)} \frac{1}{|\cos\theta(x)|}\, dx = \int_{P(E)} \frac{R}{\sqrt{R^2 - \|x\|^2}}\, dx, \tag{7'}$$

которую уже использовали в § VI.5 при $R = 1$.

3.5. Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. *Площадь подмножеств двумерной сферы.* При вычислении площади подмножеств сферы $S^2(R) = \{(x, y, z) \,|\, x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$ мы, согласно свойству 5 п. 3.3, можем пренебрегать гладкими кривыми. Введём сферические координаты φ, θ, т. е. рассмотрим отображение

$$(\varphi, \theta) \mapsto \Phi(\varphi, \theta) = \big(R\cos\varphi\cos\theta,\ R\sin\varphi\cos\theta,\ R\sin\theta\big) \in S^2(R) \qquad \Big(|\varphi| < \pi, |\theta| < \frac{\pi}{2}\Big).$$

Оно параметризует сферу с разрезом по меридиану $\varphi = \pm\pi$. Координатными линиями для этой параметризации являются меридианы и параллели. Исходя из этого легко приближённо сосчитать площадь малого четырёхугольника, ограниченного координатными линиями, соответствующими углам $\varphi,\ \varphi + h$ и $\theta,\ \theta + h$ $(h > 0)$. Так как в точках пересечения параллели и меридианы ортогональны, то сопровождающим параллелепипедом будет прямоугольник, стороны которого при малом h почти равны длинам дуг, ограничивающих криволинейный четырёхугольник. Последние суть дуги окружностей радиусов R (по меридиану) и $R\cos\theta$ (по параллели). Поэтому площадь сопровождающего параллелограмма приближённо равна $(R^2\cos\theta)\,h^2$. Это подсказывает нам, что вес ω_Φ, соответствующий рассматриваемой параметризации, есть не что иное, как $R^2\cos\theta$. Мы предоставляем читателю убедиться в правильности полученного результата, найдя касательные векторы и сосчитав соответствующий определитель Грама.

Зная вес, легко найти площадь множества, лежащего на сфере. Рассмотрим для простоты сферический четырёхугольник Q, ограниченный параллелями и меридианами:

$$Q = \left\{\Phi(\varphi, \theta) \;\middle|\; -\pi \leqslant \alpha_1 < \varphi < \alpha_2 \leqslant \pi,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \beta_1 < \theta < \beta_2 \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Очевидно,

$$\sigma_2(Q) = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\int_{\beta_1}^{\beta_2} R^2\cos\theta\, d\varphi\, d\theta = R^2(\sin\,\beta_2 - \sin\,\beta_1)(\alpha_2 - \alpha_1).$$

При крайних значениях $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ мы получаем площадь сферы: $\sigma_2\big(S^2(R)\big) = 4\pi R^2$.

Пример 2. *Площадь подмножеств двумерного тора.* При вычислении площади подмножеств тора $T^2 = \{(x, y, z) \,|\, (R - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2 = r^2\}$ мы, согласно свойству 5 п. 3.3, можем пренебрегать гладкими кривыми. Найдём вес, соответствующий параметризации разрезанного тора, рассмотренной в примере 3 п. 1.3. Напомним, что эта параметризация Φ имеет вид

$$\Phi(\varphi, \theta) = \big((R + r\cos\theta)\cos\varphi,\ (R + r\cos\theta)\sin\varphi,\ r\sin\theta\big),$$

где φ, $\theta \in (-\pi, \pi)$.

Как и в случае сферы, координатными линиями (своего рода параллелями и меридианами) являются окружности, ортогональные в точках пересечения. Вычисляя, как в примере 1, площадь малого криволинейного четырёхугольника, ограниченного координатными линиями, мы можем сделать правдоподобный вывод, что вес, соответствующий выбранной параметризации, имеет вид: $\omega_\Phi(\varphi, \theta) = r(R + r\cos\theta)$. Читатель без труда проведёт все необходимые формальные вычисления.

Ясно, что площадь криволинейного четырёхугольника на торе, ограниченного “меридианами” $\varphi = \alpha_1$, $\varphi = \alpha_2$ и “параллелями” $\theta = \beta_1$, $\theta = \beta_2$, равна

$$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} r(R + r\cos\theta)\, d\varphi\, d\theta = r\big(R(\beta_2 - \beta_1) + r(\sin\beta_2 - \sin\beta_1)\big)(\alpha_2 - \alpha_1).$$

При крайних значениях α_1, α_2, β_1, β_2 мы получаем площадь тора: $\sigma_2(T^2) = 4\pi^2 rR$.

Пример 3. *Площадь подмножеств конической поверхности.* Выясним, как связана площадь множества E, лежащего на конической поверхности

$$\big\{(x, y) \bigm| x \in \mathbb{R}^{m-1},\ y = c\|x\|\big\},$$

с площадью его проекции $P(E)$ на плоскость $y = 0$. Если $0 \notin E$, то E лежит на гладкой поверхности — графике функции $f(x) = c\|x\|$, заданной в $\mathbb{R}^{m-1} \setminus \{0\}$. Легко видеть, что $\|\operatorname{grad} f(x)\| = |c|$ всюду (угол между касательной плоскостью и плоскостью $y = 0$ постоянен). Поэтому

$$\sigma_{m-1}(E) = \int_{P(E)} \sqrt{1 + \|\operatorname{grad} f(x)\|^2}\, dx = \sqrt{1 + c^2}\, \lambda_{m-1}\big(P(E)\big).$$

Рассмотрим примеры, связанные с многомерной сферой.

Пример 4. *Площадь многомерной сферы.* Вычисление площади сферы $S^{m-1}(R)$ произвольного радиуса сводится к нахождению площади единичной сферы S^{m-1}, поскольку $S^{m-1}(R) = RS^{m-1}$ и, следовательно (см. свойство 6) п. 3.3), $\sigma_{m-1}\big(S^{m-1}(R)\big) = R^{m-1}\sigma_{m-1}\big(S^{m-1}\big)$. Площадь единичной сферы мы уже вычислили в п. VI.5.1, используя тот факт, что она состоит из двух полусфер, являющихся графиками гладких функций. Мы не будем повторять здесь эти вычисления, а отметим лишь формулу, к которой они приводят:

$$\sigma_{m-1}\big(S^{m-1}(R)\big) = \frac{2\pi^{m/2}}{\Gamma(\frac{m}{2})}\, R^{m-1}.$$

Правая часть этого равенства равна $m\alpha_m R^{m-1} = (\alpha_m R^m)'_R$. Поэтому площадь сферы равна производной (по радиусу) от объёма шара. Впоследствии (см. замечание 3 п. 4.3 и теорему Д.IV.7) мы обсудим этот вопрос подробнее.

Дополним полученный результат, вычислив площадь сферической “шапочки”, отсекаемой от сферы $S^{m-1}(R)$ плоскостью, проходящей на расстоянии H $(0 \leqslant H < R)$ от центра сферы (при $H = 0$ мы получаем полусферу). Поскольку площадь инвариантна относительно вращения, можно сказать, что речь идёт о площади множества

$$S_H(R) = \big\{(x, y) = (x_1, \dots, x_{m-1}, y) \in S^{m-1}(R) \bigm| y > H\big\}.$$

Очевидно, это часть графика функции $x \mapsto f(x) = \sqrt{R^2 - \|x\|^2}$, расположенная над шаром $B^{m-1}\big(\sqrt{R^2 - H^2}\,\big)$. Формула (7′) даёт нам

$$\sigma_{m-1}\big(S_H(R)\big) = \int_{B^{m-1}(\sqrt{R^2-H^2})} \frac{R}{\sqrt{R^2 - \|x\|^2}}\, dx.$$

Воспользуемся формулой для вычисления интеграла от радиальной функции (см. пример 1 п. VI.4.2 или следствие 3 п. VI.5.3, в которых надо m заменить на $m-1$):

$$\begin{aligned}\sigma_{m-1}\big(S_H(R)\big) &= (m-1)\alpha_{m-1}R\int_0^{\sqrt{R^2-H^2}}\frac{u^{m-2}\,du}{\sqrt{R^2-u^2}} = \\ &= (m-1)\alpha_{m-1}R^{m-1}\int_0^{\sqrt{R^2-H^2}/R}\frac{v^{m-2}\,dv}{\sqrt{1-v^2}}.\end{aligned} \tag{8}$$

Здесь $\alpha_{m-1} = \lambda_{m-1}\big(B^{m-1}\big) = \frac{\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma(\frac{m+1}{2})}$. Полагая $H = \delta R$, можно переписать равенство (8) так:

$$\sigma_{m-1}\big(S_{\delta R}(R)\big) = (m-1)\alpha_{m-1}R^{m-1}\int_0^{\sqrt{1-\delta^2}}\frac{v^{m-2}\,dv}{\sqrt{1-v^2}} = (m-1)\alpha_{m-1}R^{m-1}\int_{\arcsin\delta}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m-2}t\,dt.$$

Проследим за асимптотикой отношения площади сферической шапочки к площади содержащей её сферы большой размерности при условии, что расстояние от плоскости, отсекающей шапочку, до центра сферы остаётся неизменным. Особенно поучительно сделать это в следующих двух случаях: когда шапочка расположена на единичной сфере и когда радиус сферы пропорционален $\sqrt{m}$. Сначала рассмотрим единичную сферу. Для некоторого упрощения формул мы будем рассматривать сферы, лежащие не в $\mathbb{R}^m$, а в $\mathbb{R}^{m+1}$.

Пример 5. В пространстве большой размерности наблюдается явление “концентрации меры”: почти вся площадь сферы сосредоточена в сколь угодно узком сферическом поясе около “экватора”. Точнее, для шапочек $S_\delta = S_\delta(1)$ отношение $\sigma_m(S_\delta)/\sigma_m(S_0)$ быстро убывает с ростом размерности:

$$\frac{\sigma_m(S_\delta)}{\sigma_m(S_0)} = \frac{\int_{\arcsin\delta}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m-1}t\,dt}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{m-1}t\,dt} < 3\,e^{-\frac{m\delta^2}{2}}. \tag{9}$$

Одно из следствий этого неожиданного эффекта приведено в упр. 7.

Для доказательства неравенства (9) оценим сначала знаменатель. Как известно (см. пример 1 п. IV.6.2),

$$W_m \equiv \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^m t\,dt = \frac{(m-1)!!}{m!!}v_m,$$

где v_m равно 1 или $\frac{\pi}{2}$ в зависимости от чётности m. Поэтому $W_mW_{m+1} = \frac{\pi}{2m+2}$. Так как интегралы W_m убывают, то отсюда следует, что

$$\sqrt{\frac{\pi}{2m+2}} < W_m < \sqrt{\frac{\pi}{2m}}.$$

Оценивая числитель, воспользуемся неравенствами $\delta \leqslant \arcsin\delta$ и $\cos t \leqslant e^{-t^2/2}$:

$$W_m(\delta) \equiv \int_{\arcsin\delta}^{\frac{\pi}{2}}\cos^m t\,dt \leqslant \int_\delta^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{m}{2}t^2}\,dt < \int_0^\infty e^{-\frac{m}{2}(t+\delta)^2}\,dt \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2m}}\,e^{-\frac{m}{2}\delta^2}.$$

Таким образом, при $m > 1$

$$\frac{\sigma_m(S_\delta)}{\sigma_m(S_0)} = \frac{W_{m-1}(\delta)}{W_{m-1}} < \sqrt{\frac{m}{m-1}}\, e^{-\frac{m-1}{2}\delta^2} \leqslant \sqrt{\frac{me}{m-1}}\, e^{-\frac{m}{2}\delta^2} < 3\, e^{-\frac{m\delta^2}{2}}.$$

Отметим, что заменив $\arcsin\delta$ на δ мы оценили площадь шапочки, задаваемой неравенством $y \geqslant \sin\delta$, чуть большей чем S_δ. Такое множество естественно возникает, если евклидову метрику на сфере заменить геодезической, более сильной, чем евклидова. В этой метрике расстояние между двумя точками сферы равно углу между их радиус-векторами. Ясно, что бóльшая шапочка состоит из точек, у которых отклонение от экватора (пересечения сферы с плоскостью $y = 0$) не меньше δ в геодезической метрике.

Пример 6. Обсудим теперь второй из поставленных вопросов: как с ростом m меняется отношение площадей шапочки $S_H(R)$ и содержащей её сферы $S^m(R)$ при условии, что $R = R_m = \theta\sqrt{m}$, где $\theta > 0$. Положим $P_m(H) = \sigma_m\big(S_H(R)\big)/\sigma_m\big(S^m(R)\big)$. На эту величину можно смотреть как на вероятность того, что точка, “брошенная наудачу” на сферу, попадёт на шапочку. Можно также сказать, что $P_m(H)$ — вероятность того, что последняя координата случайно брошенной на сферу точки больше H.

Из формулы (8) (с заменой m на $m+1$) вытекает, что

$$P_m(H) = \frac{m\alpha_m}{(m+1)\alpha_{m+1}} \int_0^{\sqrt{1-\frac{H^2}{m\theta^2}}} \frac{t^{m-1}\,dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Так как $\Gamma(x+\frac{1}{2}) \sim \sqrt{x}\,\Gamma(x)$ при $x \to +\infty$ (см. формулу (4) в п. VII.2.2), то

$$\frac{m\alpha_m}{(m+1)\alpha_{m+1}} = \frac{m}{m+1}\,\frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma(\frac{m+2}{2})}\,\frac{\Gamma(\frac{m+3}{2})}{\pi^{\frac{m+1}{2}}} \underset{m\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{m}{2\pi}},$$

и поэтому

$$P_m(H) \underset{m\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{m}{2\pi}} \int_0^{\sqrt{1-\frac{H^2}{m\theta^2}}} \frac{t^{m-1}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

Выясним, как ведёт себя последний интеграл, полагая для краткости $\delta = \frac{H}{\theta}$. После замены $v = \sqrt{m}\sqrt{1-t^2}$ мы получим:

$$\sqrt{m}\int_0^{\sqrt{1-\frac{\delta^2}{m}}} \frac{t^{m-1}}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \int_\delta^{\sqrt{m}} \Big(1-\frac{v^2}{m}\Big)^{\frac{m-2}{2}}\,dv \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \int_\delta^\infty e^{-\frac{v^2}{2}}\,dv.$$

Обоснование предельного перехода проводится точно так же, как в примере 2 п. IV.8.4. Следовательно,

$$P_m(H) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{H}{\theta}}^\infty e^{-\frac{v^2}{2}}\,dv = \frac{1}{\theta\sqrt{2\pi}} \int_H^\infty e^{-\frac{t^2}{2\theta^2}}\,dt.$$

Найденный предел может быть истолкован как вероятность того, что гауссова случайная величина с плотностью распределения $\frac{1}{\theta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\theta^2}}$ имеет значение больше H. Этот результат — называемый иногда леммой Пуанкаре*) или леммой Максвелла**) — означает, что относительно нормированной площади на m-мерной сфере радиуса $\theta\sqrt{m}$ распределение координат “почти гауссовское”.

*) Жюль Анри **Пуанкаре** (Poincaré), 1854–1912, — французский математик.

) Джеймс Клерк **Максвелл (Maxwell), 1831–1879, — английский физик.

3.6. Обсудим теперь один более частный вопрос — о поведении площади при изгибании. Изгибанием многообразия обычно называют такое его преобразование, при котором не меняются длины лежащих на нём кривых. Для наших целей это понимание изгибания слишком широко, поскольку при таком отображении гладкое многообразие может перейти в множество, не являющееся многообразием. Например, интервал вещественной оси можно изогнуть в "восьмёрку" (непрерывное отображение $t \mapsto \big((1-\cos t)\operatorname{sign} t,\ \sin t\big)$ переводит интервал $(-2\pi, 2\pi)$ в пару окружностей, касающихся друг друга; оно взаимно однозначное, но не гомеоморфное). Кроме того, мы по-прежнему ограничиваемся рассмотрением лишь гладких отображений. Поэтому изгибающее преобразование желательно подчинить дополнительным ограничениям.

Определение. *Изгибанием* гладкого многообразия M, лежащего в $\mathbb{R}^m$, назовём гладкое отображение $\Theta\colon M \to \mathbb{R}^d$, удовлетворяющее условиям:

1) Θ — гомеоморфизм между M и $\Theta(M)$;

2) Θ сохраняет длины гладких кривых: $\sigma_1(L) = \sigma_1\big(\Theta(L)\big)$ для любой гладкой кривой L, содержащейся в M.

Напомним, что гладкость отображения Θ на M означает его гладкость в некотором открытом множестве, содержащем M.

Интуитивно ясно, что при изгибании площадь множества, лежащего на поверхности, не меняется. На этом основано, например, школьное вычисление площадей конуса и цилиндра. Обсудим первый из этих примеров подробнее (по поводу второго см. упр. 5).

Пример. Рассмотрим конус K в $\mathbb{R}^3$, образованный лучами, начинающимися в начале координат (вершине конуса). Он однозначно определяется своими точками на единичной сфере, т. е. множеством $\ell = K \cap S^2$. Очевидно, гладкость поверхности $K \setminus \{0\}$ означает, что ℓ — гладкая кривая. Предполагая последнее, будем считать, что её длина Δ конечна и Ψ — натуральная параметризация, определённая на $(0, \Delta)$. "Развёртывание" конуса будем производить так, чтобы кривая ℓ перешла в дугу единичной окружности той же длины, точнее, точка $\Psi(s)$ перешла в точку $z(s) = (\cos s, \sin s)$, а луч, проходящий через $\Psi(s)$, — в луч, проходящий через $z(s)$ (мы считаем все лучи исходящими из начала координат). При этом мы будем предполагать, что $\Delta < 2\pi$ (в противном случае ℓ следует разбить на части).

Для формальной проверки того, что описанное отображение есть изгибание, удобнее использовать обратное отображение Θ. Мы будем считать, что оно определено в угле C с вершиной в начале координат, точкам которого соответствуют полярные углы, лежащие в интервале $(0, \Delta)$. Для аналитического представления Θ рассмотрим гладкое отображение $P\colon C \to (0, \Delta) \times (0, +\infty)$, сопоставляющее каждой точке z из C её полярные координаты $\varphi(z)$ и $r(z)$. Тогда $\Theta(z) = r(z)\Psi(\varphi(z))$. Убедимся, что Θ в самом деле изгибание.

Пусть $\gamma(t)$ $\big(t \in (a, b)\big)$ — параметризация гладкой кривой L, лежащей в C. Она порождает параметризацию $\Phi = \Theta \circ \gamma$ кривой $\Theta(L) \subset K$. Надо проверить, что длины $\sigma_1(L)$ и $\sigma_1\big(\Theta(L)\big)$ этих кривых одинаковы. Положим $P(\gamma(t)) = (\omega(t), \rho(t))$. Заметим, что $\sigma_1(L) = \int_a^b \sqrt{(\rho'(t))^2 + \rho^2(t) \cdot (\omega'(t))^2}\, dt$. Так как $\Phi(t) = \rho(t)\Psi(\omega(t))$, то касательный вектор Φ' распадается на два слагаемых: $\Phi' = \rho'\Psi + \rho\,\omega'\,\Psi'$. Поскольку $\|\Psi\| = \|\Psi'\| = 1$

и $\Psi' \perp \Psi$, отсюда следует, что $\|\Phi'\|^2 = (\rho')^2 + \rho^2 \cdot (\omega')^2$. Поэтому

$$\sigma_1(\Theta(L)) = \int_a^b \|\Phi'(t)\|\,dt = \int_a^b \sqrt{(\rho'(t))^2 + \rho^2(t)\cdot(\omega'(t))^2}\,dt = \sigma_1(L),$$

что и требовалось.

Таким образом, преобразование Θ есть изгибание. В силу теоремы 3.6 (см. далее) оно сохраняет площадь. В частности, площадь части конуса K, лежащей в шаре радиуса R с центром в вершине конуса, равна площади кругового сектора $C \cap B(0,R)$.

Выясним теперь, при каком условии гладкое отображение является изгибанием.

Лемма. *Пусть $M \subset \mathbb{R}^m$ — гладкое многообразие, $\Theta\colon M \to \mathbb{R}^d$ — гладкий гомеоморфизм. Он сохраняет длины кривых, лежащих в M, тогда и только тогда, когда для любой точки p, $p \in M$, отображение $d_p\Theta$ изометрично отображает касательное пространство $T_p(M)$ в $\mathbb{R}^d$.*

Доказательство. Пусть L ($L \subset M$) — гладкая кривая, проходящая через точку p, и $t \mapsto \gamma(t)$ ($t \in (\alpha,\beta)$) её (гладкая) параметризация, $p = \gamma(t_0)$. Тогда $\delta = \Theta \circ \gamma$ — параметризация кривой $\widetilde{L} = \Theta(L)$. Ясно, что $\delta'(t) = d_{\gamma(t)}\Theta\big(\gamma'(t)\big)$, и длины дуг $\ell = \gamma\big((t_0,t)\big)$, $\widetilde{\ell} = \delta\big((t_0,t)\big)$ таковы:

$$\sigma_1(\ell) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(u)\|\,du, \quad \sigma_1(\widetilde{\ell}) = \int_{t_0}^t \|\delta'(u)\|\,du. \tag{10}$$

Если Θ есть изгибание, то эти длины равны. Дифференцируя по t, мы получаем, что $\|\delta'(t_0)\| = \|\gamma'(t_0)\|$. Это означает, что $\|d_p\Theta(\gamma'(t_0))\| = \|\gamma'(t_0)\|$, т. е. $\|d_p\Theta(x)\| = \|x\|$ для любого вектора x, представимого в виде $x = \gamma'(t_0)$. По определению касательного пространства так можно представить любой вектор из $T_p(M)$. Таким образом, из сохранения длин кривых вытекает, что $\|d_p\Theta(x)\| = \|x\|$ при $x \in T_p(M)$, т. е. $d_p\Theta$ — изометрия на касательном пространстве $T_p(M)$. Если же это условие выполнено при любом $p \in M$, то $\|\delta'(t)\| = \|\gamma'(t)\|$ при любом t, и поэтому правые части равенств (10) одинаковы, откуда следует, что Θ — изгибание. ►

Из леммы вытекает, что если Θ — изгибание, то $\operatorname{rank}\Theta' = \dim M$, и поэтому множество $\widetilde{M} = \Theta(M)$ — гладкое многообразие той же размерности, что и M.

Теперь легко доказать, что изгибание сохраняет площадь.

Теорема. *Пусть M — гладкое k-мерное многообразие, Θ — её изгибание и $\widetilde{M} = \Theta(M)$. Тогда для любого множества E, $E \in \mathfrak{A}_M$, его образ $\widetilde{E} = \Theta(E)$ имеет ту же площадь:*

$$\sigma_k(E) = \sigma_k(\widetilde{E}).$$

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать, что сохраняется мера множества, лежащего в какой-то координатной окрестности $U \subset M$. Пусть Φ — параметризация U и $\widetilde{\Phi} = \Theta \circ \Phi$. Дифференциал $d_{\Phi(t)}\Theta$ изометрично отображает сопровождающий параллелепипед, соответствующий Φ, на параллелепипед, соответствующий $\widetilde{\Phi}$. Поскольку изометрия сохраняет меру Лебега, меры этих параллелепипедов равны, т. е. равны веса ω_Φ и $\omega_{\widetilde{\Phi}}$. Поэтому площади множеств, содержащихся в U, не изменяются. ►

Заметим, что изгибание может одновременно быть и растяжением — например, “распрямление” дуги окружности, “развёртывание” цилиндра на плоскость и др. Эти примеры показывают, что при растяжении, строго увеличивающим расстояние между некоторыми точками, длина и площадь не всегда строго возрастают.

3.7. Мы уже отмечали, что площадь сферы инвариантна относительно вращения (см. свойство 7 в п. 3.3). Обсудим ещё один пример инвариантной меры. Рассмотрим меру $\sigma = \sigma_{n(n-1)/2}$ на группе $O(n)$ ортогональных $n \times n$ матриц, метрику в которой будем считать индуцированной из $\mathbb{R}^{n^2}$ (см. п. 1.3, пример 5). Так как это множество компактно, то мера σ конечна. Как мы установили в п. 1.3, сдвиг в группе $O(n)$ (умножение слева или справа на фиксированный элемент U_0 из $O(n)$) отображает $O(n)$ на себя изометрично. Поскольку площадь инвариантна относительно изометрий, мера σ инвариантна относительно сдвига на группе $O(n)$. В частности, для любой суммируемой на $O(n)$ функции f и любого V из $O(n)$ мы получаем (см. формулу (2′) п. VI.1.2):

$$\int_{O(n)} f(UV)\,d\sigma(U) = \int_{O(n)} f(VU)\,d\sigma(U) = \int_{O(n)} f(U)\,d\sigma(U). \tag{11}$$

Используя существование инвариантной меры на группе $O(n)$, можно доказать её единственность, а также единственность инвариантной относительно вращения меры на сфере. Точнее, справедлива следующая

Теорема. 1) *Конечная борелевская мера в S^{m-1}, инвариантная относительно вращения, единственна с точностью до постоянного множителя.*

2) *Конечная борелевская мера в $O(n)$, инвариантная относительно произвольного правого или левого сдвига (т. е. относительно умножения — справа или слева — на элемент группы $O(n)$), единственна с точностью до постоянного множителя.*

Доказательство. Пусть ν — конечная борелевская мера на S^{m-1}, инвариантная относительно вращения, а σ — мера Лебега в $O(m)$, которая, как мы знаем, инвариантна относительно сдвига. Предположим, что $\nu(S^{m-1}) = \sigma_{m-1}(S^{m-1})$, и будем доказывать совпадение мер ν и σ_{m-1}.

Рассмотрим меру μ на $O(m)$, получаемую в результате нормировки меры σ ($\mu = \frac{1}{\sigma(O(m))}\sigma$), и пусть E — борелевское подмножество сферы S^{m-1}. Покажем прежде всего, что величина $\int_{O(m)} \chi_E(Ux_0)\,d\mu(U)$ не зависит от выбора x_0 из S^{m-1}. В самом деле, для любого вектора x, $x \in S^{m-1}$, можно найти такое ортогональное преобразование V, что $x = V x_0$. Поэтому согласно равенству (11) с $f(U) = \chi_E(Ux_0)$

$$\int_{O(m)} \chi_E(Ux)\,d\mu(U) = \int_{O(m)} \chi_E(UVx_0)\,d\mu(U) = \int_{O(m)} \chi_E(Ux_0)\,d\mu(U),$$

что и требовалось. Так как в силу инвариантности меры ν

$$\nu(E) = \int_{S^{m-1}} \chi_E(x)\,d\nu(x) = \int_{S^{m-1}} \chi(Ux)\,d\nu(x)$$

при любом U из $O(m)$, то интегрируя это равенство по (нормированной) мере μ и изменяя порядок интегрирования, мы получаем:

$$\nu(E) = \int_{O(m)} \nu(E)\, d\mu(U) = \int_{O(m)} \left(\int_{S^{m-1}} \chi_E(Ux)\, d\nu(x) \right) d\mu(U) =$$
$$= \int_{S^{m-1}} \left(\int_{O(m)} \chi_E(Ux)\, d\mu(U) \right) d\nu(x) = \nu(S^{m-1}) \int_{O(m)} \chi_E(Ux)\, d\mu(U),$$

где правая часть, как мы установили выше, не зависит от x. Аналогичное равенство можно, очевидно, написать, заменив ν на σ_{m-1}. При этом правые части равенств будут одинаковы. Следовательно, одинаковы и левые части равенств, что и требовалось доказать.

Изменяя порядок интегрирования (и, следовательно, используя теорему Тонелли), мы молчаливо предполагали, что функция $(x, U) \mapsto \varphi(x, U) \equiv \chi_E(Ux)$ измерима на $S^{m-1} \times O(m)$. Это действительно так, поскольку φ есть характеристическая функция множества $\{(x, U) \,|\, Ux \in E\} = \Psi^{-1}(E)$, где $\Psi(x, U) = Ux$. Так как отображение Ψ, очевидно, непрерывно, а множество E — борелевское, то борелевским будет и его прообраз $\Psi^{-1}(E)$ (см. следствие 2 в п. I.6.2).

Утверждение 2) доказывается совершенно аналогично. ►

УПРАЖНЕНИЯ

1) Какую долю (по площади) составляет множество точек (x, y, z), лежащих на сфере с центром в нуле и удовлетворяющих неравенствам $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{3}x$, $0 \leqslant z \leqslant \sqrt{2}x$?

2) Найдите площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX графика гладкой функции, определённой на интервале (a, b). Докажите теорему Гульдина: для знакопостоянной функции эта площадь равна произведению длины графика на длину окружности, описываемой его центром масс (предполагается, что масса распределена на графике с постоянной плотностью).

3) Ограниченная часть прямого кругового конуса с углом 2α при вершине отсекается плоскостью, образующей угол β $(0 < \beta \leqslant \frac{\pi}{2})$ с осью конуса. Убедитесь, что отношение площадей отсекаемой части конуса и получающегося в сечении эллипса равно $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$.

4) Найдите трёхмерную площадь “телесного тора” M:

$$M = \{(x, y, u, v) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x^2 + y^2 = r^2,\ u^2 + v^2 < R^2\}.$$

5) Докажите, что цилиндрическая поверхность $C = \ell \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$, где $\ell \subset \mathbb{R}^2$ — простая гладкая кривая конечной длины S (её называют направляющей цилиндра C), может быть получена изгибанием полосы $(0, S) \times \mathbb{R}$.

6) Дополните результат леммы 3.6, доказав, что дифференциал гладкого растяжения Θ гладкого многообразия M растягивает касательное подпространство T_p в произвольной точке $p \in M$, т. е. $\|d_p\Theta(x)\| \geqslant \|x\|$ для всех x из T_p.

7) Опираясь на неравенство (9), докажите, что при $m \to \infty$ сфера S^m почти целиком (по площади) содержится в бесконечно малом кубе: площадь разности $S^m \setminus (-\delta, \delta)^{m+1}$ при $\delta = \delta_m = 2\sqrt{\frac{\ln m}{m}}$ меньше $\frac{6}{m}\, \sigma_m(S^m)$.

8) К какому результату приведут рассуждения из примера 6 п. 3.5 в случае, когда рассматриваются сферы, площади которых равны 1?

9) Пользуясь лишь инвариантностью площади относительно вращения, докажите, что средние значения функций x_j^2, x_j^4, $x_j^2 x_k^2$ (здесь $j, k = 1, \dots, m$, $j \neq k$) на сфере S^{m-1} равны соответственно $\frac{1}{m}$, $\frac{3}{m(m+2)}$ и $\frac{1}{m(m+2)}$. Указание. Простые уравнения, связывающие средние значения x_j^4 и $x_j^2 x_k^2$, можно получить, проинтегрировав по сфере функции $\left(\frac{x_j + x_k}{\sqrt{2}}\right)^4$ и $(x_1^2 + \ldots + x_m^2)^2$.

10) При $m = m_1 + m_2$ отождествим $\mathbb{R}^m$ с $\mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}$. Пусть M_1 и M_2 — простые гладкие многообразия в $\mathbb{R}^{m_1}$ и $\mathbb{R}^{m_2}$ соответственно и $M = M_1 \times M_2$. Докажите, что мера σ_M есть произведение мер σ_{M_1} и σ_{M_2}.

11) Грассмановым многообразием G_m^k называется множество всевозможных содержащихся в $\mathbb{R}^m$ k-мерных подпространств. Расстояние между элементами L_1 и L_2 из G_m^k определим как норму $\|P_1 - P_2\|$, где P_1 и P_2 — ортогональные проекторы в $\mathbb{R}^m$ на L_1 и L_2 соответственно. Группу $O(m)$ ортогональных матриц можно каноническим образом отобразить на G_m^k, сопоставив каждой такой матрице U линейную оболочку её первых k строк. Меру на G_m^k определим как образ площади в $O(m)$ при этом отображении. Докажите, что получающаяся на G_m^k мера "инвариантна относительно вращения", т. е. относительно преобразования $G_m^k \ni L \mapsto U(L)$, где U — произвольный элемент $O(m)$, и что конечная борелевская мера на G_m^k, инвариантная относительно вращения, единственна с точностью до постоянного множителя.

12) Обозначим символом $\widetilde{\sigma}_n$ n-мерную площадь, нормированную так, чтобы площадь единичной сферы S^n была равна единице. Используя единственность меры, инвариантной относительно вращения, докажите, что при $1 < k < m$

$$\int_{S^{m-1}} f(x)\, d\widetilde{\sigma}_{m-1}(x) = \int_{G_m^k} \left(\int_{L \cap S^{m-1}} f(x)\, d\widetilde{\sigma}_{k-1}(x) \right) d\nu(L),$$

где $f \in C(S^{m-1})$, а ν — нормированная мера на многообразии G_m^k, построенная в упр. 11.

§ 4. Интегрирование по гладкому многообразию

4.1. Вычисление интеграла по площади на гладком многообразии или, короче, поверхностного интеграла, может быть сведено к вычислению кратного интеграла по мере Лебега. Этот переход не потребует от нас дополнительных усилий, так как по свойству 3 п. 3.3 площадь простого многообразия есть взвешенный образ меры Лебега. Поэтому можно сослаться на общую теорему VI.1.1 о вычислении интеграла по взвешенному образу меры, которая в рассматриваемой ситуации приводит к такому утверждению.

Теорема. *Пусть M — простое гладкое многообразие в $\mathbb{R}^m$, $\dim M = k$, и f — неотрицательная измеримая на M функция. Тогда*

$$\int_M f(x)\, d\sigma_k(x) = \int_{\Phi^{-1}(M)} f(\Phi(t)) \omega_\Phi(t)\, dt$$

для любой параметризации Φ многообразия M.

Это равенство справедливо и для любой суммируемой на M функции.

Напомним, что величина $\omega_\Phi(t)$ имеет простой геометрический смысл — объём сопровождающего параллелепипеда. При $k = 1$ она равна длине касательного вектора $\Phi'(t)$, а при $k = m - 1$ — длине нормали $N_\Phi(t)$, соответствующей параметризации Φ (см. п. 3.4).

Как и в общей ситуации (см. следствие VI.1.1), аналогичная формула справедлива для функций, заданных не на всём многообразии M, а лишь на каком-то его измеримом подмножестве. Если M не простое многообразие, то интеграл по нему может быть вычислен с помощью не более чем счётного разбиения M на множества, каждое из которых содержится в некоторой координатной окрестности.

В случае $\dim M = m$ утверждение теоремы есть не что иное, как формула замены переменной при диффеоморфизме (см. п. VI.2.2).

Отметим важный частный случай, когда многообразие есть график гладкой функции φ, заданной на открытом подмножестве $\mathcal{O}$ пространства $\mathbb{R}^{m-1}$. Рассмотрим каноническую параметризацию графика $\mathcal{O} \ni x \mapsto \Phi(x) = (x, \varphi(x))$. Тогда (см. п. 3.4) $\omega_\Phi(x) = \sqrt{1 + \|\mathrm{grad}\varphi(x)\|^2}$ и $\Phi^{-1}(E) = P(E)$, где P — ортогональный проектор на $\mathbb{R}^{m-1}$. Поэтому для любого измеримого множества $E \subset M = \Gamma_\varphi$

$$\int_E f\, d\sigma_{m-1} = \int_{P(E)} f(x, \varphi(x)) \sqrt{1 + \|\mathrm{grad}\varphi(x)\|^2}\, dx. \tag{1}$$

Пример 1. Пусть $\Sigma_m = S^{m-1} \cap \mathbb{R}^m_+$ — часть единичной сферы S^{m-1} пространства $\mathbb{R}^m$, лежащая в "первом октанте". Считая сферу однородной, найдём центр масс C поверхности Σ_m. В силу симметрии все координаты этого вектора одинаковы: $C = (c, \dots, c)$. Как установлено в п. VI.3.3, они вычисляются по формуле

$$c = \frac{1}{\sigma_{m-1}(\Sigma_m)} \int_{\Sigma_m} x_m\, d\sigma_{m-1}(x) = \frac{2^m}{m\alpha_m} \int_{\Sigma_m} x_m\, d\sigma_{m-1}(x).$$

Для вычисления этого интеграла заметим, что Σ_m — подмножество графика функции $\varphi(t) = \sqrt{1 - \|t\|^2}$, определённой в единичном шаре B^{m-1}, а проекция Σ_m совпадает с пересечением $A = B^{m-1} \cap \mathbb{R}^{m-1}_+$. Применяя формулу (1) с $f(x) = x_m$, мы получаем:

$$c = \frac{2^m}{m\alpha_m} \int_A \varphi(t) \sqrt{1 + \|\mathrm{grad}\, \varphi(t)\|^2}\, dt = \frac{2^m}{m\alpha_m} \int_A 1\, dt =$$
$$= \frac{2^m}{m\alpha_m} \lambda_{m-1}(A) = \frac{2\alpha_{m-1}}{m\alpha_m} = \frac{\Gamma(\frac{m}{2})}{\sqrt{\pi}\, \Gamma(\frac{m+1}{2})}.$$

В частности,

$$\|C\| = \frac{\sqrt{m}\, \Gamma(\frac{m}{2})}{\sqrt{\pi}\, \Gamma(\frac{m+1}{2})}.$$

При $m \to \infty$ эти нормы стремятся к $\sqrt{\frac{2}{\pi}}$. Можно проверить, что они убывают. Заметим, что центр масс C' части единичного шара, лежащей в $\mathbb{R}^m_+$ (см. п. VI.3.3), имеет координаты $c' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{m}{2})}{\Gamma(\frac{m+1}{2})} \frac{m}{m+1} = \frac{m}{m+1} c$ и $\|C'\|$ стремится к тому же пределу, что и $\|C\|$, но не убывая, а возрастая.

Пример 2. Пусть M — гладкое k-мерное многообразие в $\mathbb{R}^m$, $\sigma_k(M) < +\infty$, $x_0 \in M$. Выясним, при каких $p > 0$ конечен интеграл $I_0 = \int_M \frac{d\sigma_k(x)}{\|x-x_0\|^p}$. Сначала найдём необходимое условие этого. Рассмотрим параметризацию Φ некоторой M-окрестности точки x_0, $x_0 = \Phi(a)$. В некотором шаре $B(a,\rho) \subset \mathbb{R}^k$ она удовлетворяет условию Липшица: $\|\Phi(t) - \Phi(a)\| \leqslant L\|t-a\|$, где L — фиксированное положительное число. Если радиус ρ достаточно мал, то $\omega_\Phi(t) \geqslant \frac{1}{2}\omega_\Phi(a)$ для $t \in B(a,\rho)$. Поэтому

$$I_0 \geqslant \int_{B(a,\rho)} \frac{\omega_\Phi(t)\,dt}{\|\Phi(t)-\Phi(a)\|^p} \geqslant \frac{\omega_\Phi(a)}{2L^p} \int_{B(a,\rho)} \frac{dt}{\|t-a\|^p}.$$

Из конечности I_0 следует конечность интеграла в правой части последнего неравенства, что возможно лишь при $p < k$ (см. теорему IV.7.1).

Докажем теперь, что условие $p < k$ не только необходимо, но и достаточно для конечности I_0. Чтобы установить сразу несколько более сильный результат, введём интеграл

$$I(y) = \int_M \frac{d\sigma_k(x)}{\|x-y\|^p} \qquad (y \in \mathbb{R}^m).$$

Очевидно, $I_0 = I(x_0)$. Докажем, что при $p < k$ интеграл I ограничен в некоторой окрестности точки x_0. Отметим, что условие $y \notin M$ не достаточно, вообще говоря, для конечности интеграла $I(y)$, если $y \in \overline{M} \setminus M$ (см. упр. 2).

По-прежнему будем считать, что Φ — параметризация некоторой M-окрестности точки x_0 и $x_0 = \Phi(a)$. Вспомним, что около точки a параметризация Φ есть сужение некоторого диффеоморфизма F (см. лемму 1.4; пространство $\mathbb{R}^k$, в подмножестве которого определено Φ, мы считаем канонически вложенным в $\mathbb{R}^m$). В достаточно малом шаре $B(x_0,r)$ отображение F^{-1} удовлетворяет условию Липшица с некоторой константой C:

$$\|F^{-1}(x) - F^{-1}(y)\| \leqslant C\|x-y\| \quad \text{при} \quad x,y \in B(x_0,r). \tag{2}$$

Считая радиус r столь малым, что $\omega_\Phi\big(\Phi^{-1}(x)\big) \leqslant 2\omega_\Phi(a)$ для всех x из $M_r = M \cap B(x_0,r)$, докажем ограниченность интеграла I в шаре $B(x_0,r)$.

Взяв произвольную точку y из этого шара, представим интеграл $I(y)$ в виде

$$I(y) = \int_{M_r} \frac{d\sigma_k(x)}{\|x-y\|^p} + \int_{M\setminus M_r} \frac{d\sigma_k(x)}{\|x-y\|^p} = I_1(y) + I_2(y).$$

Ясно, что

$$I_2(y) \leqslant \frac{1}{r^p} \int_{M\setminus M_r} d\sigma_k(x) \leqslant \frac{1}{r^p}\,\sigma_k(M) < +\infty.$$

Осталось оценить интеграл $I_1(y)$ по простому многообразию M_r:

$$I_1(y) = \int_{\Phi^{-1}(M_r)} \frac{\omega_\Phi(t)\,dt}{\|\Phi(t)-y\|^p} \leqslant 2\omega_\Phi(a) \int_{\Phi^{-1}(M_r)} \frac{dt}{\|\Phi(t)-y\|^p}.$$

Оценим снизу норму $\|\Phi(t)-y\|$. Пусть $x = \Phi(t)$, $s = F^{-1}(y)$. Из неравенства (2) следует, что при x, $y \in B(x_0,r)$

$$\|\Phi(t)-y\| = \|x-y\| \geqslant \frac{1}{C}\|t-s\| \geqslant \frac{1}{C}\|t-u\|,$$

где u — проекция s на $\mathbb{R}^k$. Так как точки $x = \Phi(t)$ и y принадлежат шару $B(x_0, r)$, то $\|\Phi(t) - y\| < 2r$ и, следовательно, $\|t - u\| \leqslant C\|\Phi(t) - y\| < 2Cr$. Поэтому

$$\int_{\Phi^{-1}(M_r)} \frac{dt}{\|\Phi(t) - y\|^p} \leqslant \int_{\|t-u\|<2Cr} \Big(\frac{C}{\|t-u\|}\Big)^p dt = C^p \int_{\|v\|<2Cr} \frac{dv}{\|v\|^p} = C^p \frac{k\alpha_k}{k-p}(2Cr)^{k-p}.$$

Итак, при $y \in B(x_0, r)$

$$I(y) \leqslant 2C^k \omega_\Phi(a) \frac{k\alpha_k}{k-p}(2r)^{k-p} + \frac{1}{r^p}\,\sigma_k(M)$$

(параметры C и r зависят от многообразия M и точки x_0, но не от показателя p).

Пример 3 (интегралы типа потенциала простого слоя). Пусть M — гладкое k-мерное многообразие в $\mathbb{R}^m$, E — его компактное подмножество, $w \in C(E)$. Убедимся, что при $p < k$ функция

$$y \mapsto I(y) = \int_E \frac{w(x)}{\|x-y\|^p}\, d\sigma_k(x) \qquad (y \in \mathbb{R}^m)$$

непрерывна во всём пространстве и бесконечно дифференцируема в $\mathbb{R}^m \setminus E$.

Гладкость I вне E вытекает из того, что при $y_0 \notin E$ норма $\|y-x\|$ отделена от нуля, когда $x \in E$, а y принадлежит достаточно малой окрестности точки y_0. Поэтому и сама подынтегральная функция, и все её частные производные по координатам $y_1, \ldots, y_m$ ограничены в окрестности точки y_0. Таким образом, в точке y_0 выполнено условие (L_{loc}), и можно воспользоваться правилом Лейбница.

Для доказательства непрерывности I в точке $y_0 \in E$ воспользуемся теоремой 2 п. VII.1.2. Зафиксируем такое число $s > 1$, что $sp < k$, и положим $C = \max_E |\varphi|$. Как установлено в предыдущем примере, интеграл $\widetilde{I}(y) = \int_E \frac{C\, d\sigma_k(x)}{\|x-y\|^{sp}}$ ограничен в окрестности точки y_0, а этого, согласно теореме 2 п. VII.1.2, достаточно для непрерывности I в этой точке.

4.2. В этом пункте мы получим обобщение теоремы Фубини на случай, когда открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^m$ $(m \geqslant 2)$ расслаивается не на аффинные подпространства, а на поверхности уровня гладкой функции. В частном случае, когда поверхности уровня суть концентрические сферы, мы, по существу, решили эту задачу в теореме VI.5.2. В самом деле, в этой теореме было доказано, что для любой функции f, суммируемой в шаре $B(0, r) \subset \mathbb{R}^m$, справедливо равенство

$$\int_{B(0,r)} f(x)\, dx = \int_0^r t^{m-1} \left(\int_{S^{m-1}} f(t\xi)\, d\sigma_{m-1}(\xi) \right) dt.$$

Поскольку и площадь σ_{m-1}, и объём λ_m инвариантны относительно сдвига, здесь можно рассматривать сферы с произвольным центром. Кроме того, учитывая равенство $\sigma_{m-1}(tE) = t^{m-1}\sigma_{m-1}(E)$ при $t > 0$ (см. свойство 6 в п. 3.3) и теорему VI.1.1 о замене переменной, утверждению теоремы VI.5.2 можно придать следующий вид:

$$\int_{B(a,r)} f(x)\, dx = \int_0^r \left(\int_{S(a,t)} f(x)\, d\sigma_{m-1}(x) \right) dt. \tag{3}$$

Теорема, к которой мы переходим, является далеко идущим обобщением этого результата.

Теорема (Кронрод*), Федерер**)). *Пусть $\mathcal{O}$ — открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^m$, $F \in C^1(\mathcal{O})$, $\operatorname{grad} F \neq 0$ в $\mathcal{O}$. Тогда для любой суммируемой в $\mathcal{O}$ функции f справедливо равенство*

$$\int_{\mathcal{O}} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{M(t)} \frac{f(x)}{\|\operatorname{grad} F(x)\|}\, d\sigma_{m-1}(x) \right) dt, \tag{4}$$

где $M(t) = \{x \in \mathcal{O} \mid F(x) = t\}$.

Доказательство. Сначала докажем такой локальный вариант теоремы: у любой точки $x_0 \in \mathcal{O}$ существует столь малая окрестность U, что равенство (4) справедливо для каждой функции f равной нулю вне U.

Не умаляя общности, будем считать, что $F(x_0) = 0$. Кроме того, используя в случае необходимости сдвиг и ортогональное преобразование, можно считать, что $x_0 = 0$ и что касательная плоскость к $M(0)$ в нуле совпадает с координатным подпространством $x_m = 0$. Для упрощения формул обозначим буквой u проекцию вектора x на это подпространство, а буквой v — его последнюю координату x_m, так что $x = (u, v)$, $u = (u_1, \dots, u_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}$, $v \in \mathbb{R}$. Тогда $F'_{u_k}(0) = 0$ при $1 \leqslant k < m$ и $F'_v(0) \neq 0$. Рассмотрим отображение $T\colon \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$, "выпрямляющее" поверхности уровня, положив $T(x) = (u, F(x))$. Оно преобразует поверхности уровня в плоскости, параллельные подпространству $\mathbb{R}^{m-1}$. Якобиан J_T этого отображения при $x = 0$ не равен нулю, так как $J_T(0) = F'_v(0) \neq 0$. Поэтому сужение T на некоторую окрестность U начала координат есть диффеоморфизм. Будем считать, что U проектируется в шар радиуса δ и заключена между поверхностями уровня $M(-\varepsilon)$ и $M(\varepsilon)$, т. е.

$$U = \{x = (u, v) \mid \|u\| < \delta,\ |F(x)| < \varepsilon\},$$

где положительные числа δ и ε достаточно малы. В таком случае при $|t| < \varepsilon$ множество $T\big(M(t) \cap U\big)$ содержится в аффинном подпространстве $v = t$ и $T(U)$ совпадает с декартовым произведением $W = B^{m-1}(0, \delta) \times (-\varepsilon, \varepsilon)$. Ясно, что отображение Φ, обратное к сужению T на U, меняет, как и T, лишь последнюю координату аргумента, и поэтому оно имеет вид:

$$\Phi(u, t) = (u, \varphi(u, t)), \quad \text{где} \quad \|u\| < \delta,\ |t| < \varepsilon,$$

(φ — последняя координатная функция отображения Φ, $\varphi \in C^1(W)$).

Таким образом, при $|t| < \varepsilon$ часть поверхности $M(t)$, лежащая в U, есть не что иное, как график гладкой функции $u \mapsto \varphi_t(u) \equiv \varphi(u, t)$. Поскольку $F(u, \varphi_t(u)) \equiv t$, легко найти связь между градиентами функций φ_t и F:

$$F'_{u_j}(u, \varphi_t(u)) + F'_v(u, \varphi_t(u)) \frac{\partial \varphi(u, t)}{\partial u_j} \equiv 0 \quad \text{при} \quad 1 \leqslant j < m.$$

Поэтому

$$\frac{1}{|F'_v|} = \frac{\sqrt{1 + \|\operatorname{grad}\varphi_t\|^2}}{\|\operatorname{grad} F\|}. \tag{5}$$

*) Александр Семёнович **Кронрод**, 1921–1986, — российский математик.

) Герберт **Федерер (Federer), род. 1931, — американский математик.

Кроме того, используя тождество $F'_v(u,\varphi(u,t))\,\frac{\partial\varphi(u,t)}{\partial t}\equiv 1$, можно вычислить якобиан отображения Φ:

$$J_\Phi(u,t)=\frac{\partial\varphi(u,t)}{\partial t}=\frac{1}{F'_v(\Phi(u,t))}.$$

Считая, что функция f равна нулю вне U, после замены переменной мы получим:

$$\int_U f(x)\,dx=\int_W\frac{f(\Phi(u,t))}{|F'_v(\Phi(u,t))|}\,du\,dt=\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\left(\int_{\|u\|<\delta}\frac{f(\Phi(u,t))}{|F'_v(\Phi(u,t))|}\,du\right)dt.$$

Запишем внутренний интеграл в виде интеграла по графику функции φ_t (см. формулу (1)). Учитывая равенство (5), мы видим, что

$$\begin{aligned}\int_{\|u\|<\delta}\frac{f(\Phi(u,t))}{|F'_v(\Phi(u,t))|}\,du&=\int_{\|u\|<\delta}\frac{f(u,\varphi_t(u))}{\|\operatorname{grad}F(u,\varphi_t(u))\|}\sqrt{1+\|\operatorname{grad}\varphi_t(u)\|^2}\,du=\\&=\int_{\Gamma_{\varphi_t}}\frac{f(x)}{\|\operatorname{grad}F(x)\|}\,d\sigma_{m-1}(x).\end{aligned}\tag{6}$$

По определению функции φ_t её график Γ_{φ_t} есть не что иное, как часть поверхности $M(t)$, содержащаяся в U. Таким образом,

$$\begin{aligned}\int_U f(x)\,dx&=\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\left(\int_{M(t)\cap U}\frac{f(x)}{\|\operatorname{grad}F(x)\|}\,d\sigma_{m-1}(x)\right)dt=\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{M(t)\cap U}\frac{f(x)}{\|\operatorname{grad}F(x)\|}\,d\sigma_{m-1}(x)\right)dt.\end{aligned}$$

Поскольку $f=0$ вне U, отсюда следует равенство (4) для функций, отличных от нуля лишь в достаточно малой окрестности точки x_0.

Из полученного локального варианта теоремы вытекает справедливость формулы (4) для суммируемой функции f, носитель которой — компактное подмножество в $\mathcal{O}$. В самом деле, окружим каждую точку $x\in\mathcal{O}$ такой окрестностью $U_x\subset\mathcal{O}$, что равенство (4) выполняется для функций, равных нулю вне U_x. По теореме 1.8 существует разложение единицы $\varphi_1,\dots,\varphi_N$ на множестве $\operatorname{supp}(f)$, подчинённое семейству $\{U_x\}_{x\in\mathcal{O}}$. Напишем формулу (4) для функции $f\varphi_k$:

$$\int_{\mathcal{O}} f(x)\varphi_k(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{M(t)}f(x)\varphi_k(x)\,d\sigma_{m-1}(x)\right)dt.$$

Сложение этих равенств даёт требуемый результат для функций с компактным носителем. Чтобы доказать его для неотрицательной функции с произвольным носителем (этого, очевидно, достаточно, чтобы получить теорему в полном объёме), следует исчерпать множество $\mathcal{O}$ возрастающей последовательностью компактных подмножеств K_n и применить теорему Леви к обеим частям равенства (4), в котором функция f заменена на $f\chi_{K_n}$. ►

Замечание. В случае, когда функция f непрерывна, функция

$$t\mapsto\int_{M(t)}\frac{f(x)}{\|\operatorname{grad}F(x)\|}\,d\sigma_{m-1}(x)$$

также непрерывна. Если носитель f мал, это вытекает из формулы (6). Общий случай исчерпывается с помощью разложения единицы.

Отметим ещё, что теорема остаётся справедливой, если гладкость функции F нарушается на замкнутом множестве E, удовлетворяющем условиям

$$\lambda_m(E) = 0,\ \sigma_{m-1}(M(t) \cap E) = 0 \ \text{ при любом } \ t.$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно применить теорему к $\mathcal{O} \setminus E$, заменив $M(t)$ на $M(t) \setminus E$.

4.3. Сделаем ещё несколько замечаний по поводу полученного результата.

1. Очевидно, формула (3) следует из доказанной теоремы при $\mathcal{O} = \mathbb{R}^m \setminus \{a\}$, $F(x) = \|x - a\|$ (заметим, что $\|\operatorname{grad} F(x)\| \equiv 1$). Мы рекомендуем читателю сравнить доказательство теоремы с рассуждениями в п. VI.5.2, где благодаря специальному виду функции F нам не потребовались локальные рассмотрения.

2. Заменив f на $f\,\|\operatorname{grad} F\|$, мы можем переписать равенство (4) в виде:

$$\int_{\mathcal{O}} f(x)\|\operatorname{grad} F(x)\|\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{M(t)} f(x)\,d\sigma_{m-1}(x) \right) dt. \tag{4'}$$

Если функция F достаточно гладкая, то от условия $\operatorname{grad} F \neq 0$ можно отказаться, поскольку согласно теореме Сарда Д.V.2 множество критических значений функции $F \in C^m(\mathcal{O})$ имеет нулевую меру.

3. Положим $V(u) = \lambda_m\big(\mathcal{O}(F < u)\big)$ $(u \in \mathbb{R})$. Считая $V(u) < +\infty$, $f \equiv 1$ и применяя равенство (4) к $\mathcal{O}(F < u)$, мы получаем (учитывая, что теперь $M(t) = \varnothing$ при $t > u$):

$$V(u) = \int_{-\infty}^{u} \left(\int_{M(t)} \frac{d\sigma_{m-1}(x)}{\|\operatorname{grad} F(x)\|} \right) dt.$$

Так как функция $t \mapsto \int_{M(t)} \frac{d\sigma_{m-1}(x)}{\|\operatorname{grad} F(x)\|}$ непрерывна (см. замечание 4.2), то дифференцируя последнее равенство, мы приходим к следующему результату:

$$V'(u) = \int_{M(u)} \frac{d\sigma_{m-1}(x)}{\|\operatorname{grad} F(x)\|}. \tag{7}$$

В частном случае, когда $F(x) = \|x\|$ (и соответственно $\|\operatorname{grad} F(x)\| \equiv 1$), полученная формула приводит к равенству $\big(\lambda_m(B(u))\big)' = \sigma_{m-1}\big(S^{m-1}(u)\big)$, с которым мы уже встречались (см. п. 3.5, пример 4).

4.4. Используем формулу (7) для того, чтобы связать площадь поверхности и её площадь в смысле Минковского (см. п. II.8.2). Как можно доказать, для компактного множества A, содержащегося в гладкой поверхности $S \subset \mathbb{R}^m$, справедливо равенство

$$\sigma_{m-1}(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\lambda_m(A_\varepsilon \setminus A)}{2\varepsilon},$$

где A_ε — ε-окрестность множества A (см. [Фе], теорема 3.2.39). Мы докажем аналогичную формулу не для произвольного компактного подмножества гладкой поверхности, а для границы компактного лебегова множества гладкой функции.

Теорема. *Пусть $\mathcal{O}$ — открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^m$, $F \in C^2(\mathcal{O})$, $K = \mathcal{O}(F \leqslant C)$, $M = \partial K$. Если множество K компактно и $\operatorname{grad} F \neq 0$ на M, то площадь M совпадает с площадью по Минковскому, т. е.*

$$\sigma_{m-1}(M) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\lambda_m(K_\varepsilon \setminus K)}{\varepsilon}.$$

Доказательство. Предположим сначала, что $\|\operatorname{grad} F\| \equiv 1$ на M, и не умаляя общности будем считать $C = 0$. Зафиксируем такое $\delta > 0$, что $\overline{K}_\delta \subset \mathcal{O}$. Пусть ω — модуль непрерывности отображения $x \mapsto \operatorname{grad} F(x)$ на множестве $K_\delta \setminus K$. Будем считать δ столь малым, что $\omega(\delta) < \frac{1}{2}$. Убедимся, что при малых $\varepsilon > 0$ множества $V(\varepsilon) = \{x \in K_\delta \,|\, F(x) \leqslant \varepsilon\}$ близки к ε-окрестностям множества K. Для этого, сохраняя введённые обозначения, покажем, что справедлива

Лемма. *При $\varepsilon < \frac{\delta}{2}$ для $\varepsilon' = \varepsilon(1-\omega(2\varepsilon))$ и $\varepsilon'' = \varepsilon(1+\omega(2\varepsilon))$ справедливы включения*

$$V(\varepsilon') \subset K_\varepsilon \subset V(\varepsilon'').$$

Доказательство леммы. Если $x \in K_\delta \setminus K$ и x_0 — ближайшая к x точка из M, то

$$F(x) = F(x) - F(x_0) \leqslant \max_{z \in [x, x_0]} \|\operatorname{grad} f(z)\| \, \|x - x_0\| \leqslant \big(1 + \omega(\|x - x_0\|)\big) \, \|x - x_0\|.$$

Поэтому для любой точки x из K_ε при $\varepsilon < \delta$ мы имеем $F(x) \leqslant (1 + \omega(\varepsilon))\varepsilon \leqslant \varepsilon''$ и, следовательно, $K_\varepsilon \subset V(\varepsilon'')$.

Докажем теперь, что $V(\varepsilon') \subset K_\varepsilon$. Пусть $x \in V(\varepsilon) \setminus K$ и пусть x_0 — ближайшая к x точка M. По определению множества $V(\varepsilon)$ $\|x - x_0\| < \delta$. Как легко убедиться, векторы $x - x_0$ и $\operatorname{grad} F(x_0)$ пропорциональны: $x - x_0 = \|x - x_0\| \operatorname{grad} F(x_0)$. Поэтому при некотором $z \in [x_0, x]$

$$\begin{aligned} \varepsilon \geqslant F(x) - F(x_0) = \langle \operatorname{grad} F(z), x - x_0 \rangle = \langle \operatorname{grad} F(x_0), x - x_0 \rangle + \\ + \big\langle \operatorname{grad} F(z) - \operatorname{grad} F(x_0), x - x_0 \big\rangle \geqslant \|x - x_0\| - \omega(\|x - x_0\|)\|x - x_0\|. \end{aligned} \tag{8}$$

Так как $\|x - x_0\| < \delta$, то $\omega\big(\|x - x_0\|\big) \leqslant \omega(\delta) \leqslant \frac{1}{2}$, и поэтому $\|x - x_0\| \leqslant 2\varepsilon$. Возвращаясь с неравенству (8), мы получаем:

$$\varepsilon \geqslant \|x - x_0\| - \omega(\|x - x_0\|)\|x - x_0\| \geqslant \|x - x_0\| - \omega(2\varepsilon)\|x - x_0\|,$$

т. е. $\|x - x_0\| \leqslant t = \varepsilon/(1 - \omega(2\varepsilon))$. Отсюда следует, что $V(\varepsilon) \subset K_t$. Так как $t > \varepsilon$, то $\omega(2\varepsilon) \leqslant \omega(2t)$, и поэтому $\varepsilon = t(1 - \omega(2\varepsilon)) > t(1 - \omega(2t))$. Следовательно,

$$V\big(t(1 - \omega(2t))\big) \subset V(\varepsilon) \subset K_t,$$

что, заменяя t на ε, можно переписать в виде

$$V(\varepsilon') = V\big(\varepsilon(1 - \omega(2\varepsilon))\big) \subset K_\varepsilon. \ \blacktriangleright$$

Вернёмся к доказательству теоремы. Из леммы следует, что

$$(1-\omega(2\varepsilon))\frac{\lambda_m(V(\varepsilon')\setminus K)}{\varepsilon'} \leqslant \frac{\lambda_m(K_\varepsilon\setminus K)}{\varepsilon} \leqslant (1+\omega(2\varepsilon))\frac{\lambda_m(V(\varepsilon'')\setminus K)}{\varepsilon''}.$$

Согласно (7) при $\varepsilon\to 0$ крайние части этого неравенства стремятся к $\int_M \frac{d\sigma_{m-1}(x)}{\|\operatorname{grad} F(x)\|} = \sigma_{m-1}(M)$, что завершает доказательство теоремы при сделанном дополнительном предположении. Заметим, что на этом этапе доказательства мы использовали не C^2-, а лишь C^1-гладкость функции F.

В общем случае введём вспомогательную функцию H, полагая

$$H(x)=\frac{F(x)}{\sqrt{\|\operatorname{grad} F(x)\|^2+F^2(x)}}.$$

Очевидно, что $H\in C^1(\mathcal{O})$, $K=\mathcal{O}(H\leqslant 0)$ и

$$\operatorname{grad} H(x)=\frac{\operatorname{grad} F(x)}{\sqrt{\|\operatorname{grad} F(x)\|^2+F^2(x)}}+F(x)\operatorname{grad}\frac{1}{\sqrt{\|\operatorname{grad} F(x)\|^2+F^2(x)}}.$$

Поэтому $\|\operatorname{grad} H(x)\|=1$ при $x\in M$, и требуемое равенство справедливо согласно первой части доказательства. ►

4.5. Опираясь на изопериметрическое неравенство (см. п. II.8.2) и теорему 4.4, можно получить основной частный случай неравенства Гальярдо–Ниренберга–Соболева. При $p=1$ оно имеет вид (см. п. V.4.4)

$$\left(\int_{\mathbb{R}^m}|F(x)|^{\frac{m}{m-1}}\,dx\right)^{\frac{m-1}{m}} \leqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^m}\|\operatorname{grad} F(x)\|\,dx,$$

где $F\in C_0^1(\mathbb{R}^m)$. Докажем его, уменьшив попутно коэффициент в правой части. Поскольку всякую гладкую функцию можно вместе с производными равномерно аппроксимировать функциями класса C_0^∞ (см. теорему 2 в п. VII.6.4), будем далее предполагать, что $F\in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$. Тогда формула (4′) с $f\equiv 1$ даёт нам:

$$\int_{\mathbb{R}^m}\|\operatorname{grad} F(x)\|\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\sigma_{m-1}\big(M(t)\big)\,dt, \tag{9}$$

где $M(t)$ — граница множества $V(t)=\{x\in\mathbb{R}^m \mid F(x)\geqslant t\}$. Поскольку по теореме Сарда Д.V.2 множество критических значений функции F имеет нулевую меру, это равенство, очевидно, сохранится, если интегрировать $\|\operatorname{grad} F(x)\|$ не по всему пространству $\mathbb{R}^m$, а только по множеству $\mathcal{O}=\{x\in\mathbb{R}^m \mid F(x)\neq 0,\ \operatorname{grad} F(x)\neq 0\}$. В этом случае можно считать, что $F\geqslant 0$, так как иначе F можно заменить на $|F|$.

По теореме 4.4 при не критических значениях $t\in\mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\sigma_{m-1}\big(M(t)\big)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\,\lambda_m\big((V(t))_\varepsilon\setminus V(t)\big),$$

правая часть которого согласно изопериметрическому неравенству не меньше, чем $m\alpha_m^{\frac{1}{m}}\lambda_m^{\frac{m-1}{m}}(V(t))$, где α_m — объём единичного шара. Таким образом, из равенства (9) следует, что

$$\int_{\mathbb{R}^m} \|\operatorname{grad} F(x)\|\,dx \geqslant m\alpha_m^{\frac{1}{m}} \int_0^\infty \lambda_m^{\frac{m-1}{m}}(V(t))\,dt. \tag{10}$$

Для оценки последнего интеграла снизу нам потребуется

Лемма. *Если неотрицательная функция ψ не возрастает на $[0,+\infty)$, то для любых $r>1$ и $s>0$ выполняется неравенство*

$$\left(\int_0^s \psi^r(t)\,dt^r\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant \int_0^s \psi(t)\,dt.$$

Доказательство леммы. Обозначим левую и правую части неравенства символами $I(s)$ и $J(s)$ соответственно. Так как функция ψ не возрастает, то $I(s) \geqslant \psi(s)\left(\int_0^s dt^r\right)^{\frac{1}{r}} = s\psi(s)$. Поэтому при почти всех $s>0$

$$I'(s) = \frac{1}{r} I^{1-r}(s)\, r\, s^{r-1}\psi^r(s) \leqslant (s\psi(s))^{1-r} s^{r-1}\psi^r(s) = \psi(s) = J'(s).$$

Отсюда вытекает утверждение леммы, так как функции I, J абсолютно непрерывны и $I(0)=J(0)$ $(=0)$. ▶

Применяя лемму к функции $\psi(t) = \lambda_m^{\frac{1}{r}}(V(t))$, мы получаем:

$$\int_0^\infty \lambda_m^{\frac{1}{r}}(V(t))\,dt \geqslant \left(r\int_0^\infty t^{r-1}\lambda_m(V(t))\,dt\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\int_{\mathbb{R}^m} |F(x)|^r\,dx\right)^{\frac{1}{r}}$$

(в конце мы воспользовались предложением VI.4.3). При $r = \frac{m}{m-1}$ это вместе с (10) приводит к требуемой оценке:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^m} |F(x)|^{\frac{m}{m-1}}\,dx\right)^{\frac{m-1}{m}} \leqslant \frac{1}{m\alpha_m^{1/m}} \int_{\mathbb{R}^m} \|\operatorname{grad} F(x)\|\,dx.$$

Заметим, что $m\alpha_m^{\frac{1}{m}} \geqslant 2\sqrt{m}$, поскольку

$$\alpha_m^{\frac{1}{m}} = \lambda_m^{\frac{1}{m}}(B(1)) \geqslant \lambda_m^{\frac{1}{m}}\left(\left(-\frac{1}{\sqrt{m}}, \frac{1}{\sqrt{m}}\right)^m\right) = \frac{2}{\sqrt{m}}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1) Пусть $M = \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \,|\, u^2+v^2+w^2 = R^2,\ u^2+v^2 > R|u|\}$ — часть сферы $S^2(R)$, лежащая вне цилиндров $u^2+v^2 = \pm Ru$. При каких α конечен интеграл $\int_M \frac{d\sigma_2(x)}{\|x-x_0\|^\alpha}$, где $x_0 = (0,0,R)$?

2) Докажите, что при $\alpha < 1$ график функции $\varphi(x) = x\sin\frac{1}{x^\alpha}$ $\big(x \in (0,1)\big)$ — спрямляемая кривая. Выясните, при каких p конечен интеграл $\int_{\Gamma_\varphi} \frac{d\sigma_1(x)}{\|x\|^p}$.

3) Пусть E — компактное подмножество гладкого k-мерного многообразия, $w \in C(E)$. Докажите, что функция $I(y) = \int_E w(x) \ln \|x-y\| \, d\sigma_k(x)$ бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}^m \setminus E$ и $(k-1)$ раз непрерывно дифференцируема на E (ср. с примером 3 п. 4.1).

4) Пусть $f \in C\big(B(a,2r)\big)$. Положим $g(x) = \int_{B(r)} f(x+y)\,dy$ при $x \in B(a,r)$. Тогда $g \in C^1\big(B(a,r)\big)$ и

$$\frac{\partial g}{\partial e}(x) = \frac{1}{r}\int_{S(r)} f(x+y)\langle y, e\rangle \, d\sigma(y) \quad \text{для любого орта } e.$$

5) Пусть $f \in C\big([-1,1]\big)$ и e — орт в $\mathbb{R}^m$ $(m>1)$. Докажите формулу Пуассона

$$\int_{S^{m-1}} f\big(\langle x, e\rangle\big)\, d\sigma_{m-1}(x) = 2(m-1)\frac{\pi^{\frac{m-1}{2}}}{\Gamma(\frac{m-1}{2})}\int_{-1}^{1} f(t)(1-t^2)^{\frac{m-3}{2}}\,dt.$$

6) Пусть f — такая положительная непрерывная в $\mathbb{R}^m$ функция, что $f(tx) = t^m f(x)$ при $t>0$. Докажите, что для любого невырожденного линейного преобразования A в $\mathbb{R}^m$ справедливо равенство

$$\int_{S^{m-1}} \frac{1}{f(A(x))}\, d\sigma_{m-1}(x) = \frac{1}{|\det(A)|}\int_{S^{m-1}} \frac{1}{f(x)}\, d\sigma_{m-1}(x).$$

Указание. Используйте формулу $(4')$ п. VI.5.3.

7) Пусть $v \in \mathbb{R}^m$, $A\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — невырожденное линейное преобразование, $F \in C(\mathbb{R})$. Докажите, что

$$\int_{S^{m-1}} F\left(\frac{\langle x, v\rangle}{\|A(x)\|}\right)\frac{d\sigma_{m-1}(x)}{\|A(x)\|^m} = \frac{s_{m-1}}{|\det(A)|}\int_{-1}^{1} F(ct)(1-t^2)^{m-\frac{3}{2}}\,dt,$$

где $c = \|(A^{-1})^*(v)\|$, s_{m-1} — площадь единичной сферы.

8) Пусть θ — угол между ненулевыми векторами $a, b \in \mathbb{R}^m$ $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$. Докажите, что

$$\int_{S^{m-1}} \operatorname{sign}(\langle a, x\rangle)\operatorname{sign}(\langle b, x\rangle)\, d\sigma_{m-1}(x) = \Big(1 - \frac{2}{\pi}\theta\Big)s_{m-1}$$

(s_{m-1} — площадь единичной сферы).

§ 5. Интегрирование векторных полей

5.1. В задачах механики и физики часто встречаются интегралы вида

$$\int_M \big\langle V(x), \theta(x)\big\rangle\, d\sigma(x),$$

где $V(x)$ — векторы, соответствующие рассматриваемой задаче, единичный вектор $\theta(x)$ связан только с гладким многообразием M, а σ — площадь на M. Отметим, что для суммируемости подынтегральной функции достаточно, чтобы все координаты вектора

$V(x)$ были суммируемы на M, что равносильно неравенству $\int_M \|V(x)\|\,d\sigma(x) < +\infty$. В дальнейшем предполагается, что это условие выполнено.

Мы ограничимся обсуждением двух крайних случаев, представляющих особый интерес.

I. M — одномерное многообразие, а $\theta(x)$ — орт, касательный к M в точке x;

II. M — многообразие коразмерности 1 (поверхность), а $\theta(x)$ — единичная нормаль к M в точке x.

Введём некоторые термины, с помощью которых можно естественным образом пояснить физический смысл возникающих интегралов.

Будем смотреть на непрерывное отображение $V\colon E \to \mathbb{R}^m$, где $E \subset \mathbb{R}^m$, как на семейство векторов $\{V(x)\}_{x\in E}$ и называть его *векторным полем на* E. Как правило, мы будем предполагать, что множество E открыто, а поле гладкое (последнее означает C^1-гладкость отображения V).

Вектор $V(x)$ можно интерпретировать как силу, приложенную к точке x, и говорить о силовом поле. Можно также представлять себе, что в множестве E происходит установившееся движение вещества (жидкости или газа), при котором скорость частицы, находящейся в произвольный момент в точке $x \in E$, не зависит от времени и равна $V(x)$. В таком случае говорят, что в E задан стационарный поток, а V — поле его скоростей. Мы будем придерживаться этих механических интерпретаций. Однако следует иметь в виду, что в приложениях важную роль играют и векторные поля иной природы — например, поля электрической или магнитной напряженности, фигурирующие в уравнениях Максвелла.

5.2. *Интеграл по ориентированной кривой.* Обсудим сначала случай I. Для простоты будем предполагать, что векторное поле V определено в некоторой области $\mathcal{O}$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m$. Целесообразно изменить обозначения, чтобы подчеркнуть одномерный характер рассматриваемой ситуации. Одномерное многообразие назовём кривой и будем обозначать её буквой L, $L \subset \mathcal{O}$. Меру $\sigma = \sigma_1$ будем, как обычно, называть длиной.

Единичный вектор, касательный к L в точке x обозначим символом $\tau(x)$. Ясно, что существуют лишь два таких вектора: $\tau(x)$ и $-\tau(x)$. *Направлением* на гладкой кривой L назовём заданное на ней непрерывное семейство единичных касательных векторов. Иными словами, непрерывное семейство $\tau = \{\tau(x)\}_{x\in L}$ есть направление на L, если $\|\tau(x)\| = 1$ и $\tau(x)$ — касательный вектор к L в точке x для всех x из L. Кривую, на которой задано направление, т. е. пару (L, τ), будем называть *ориентированной кривой.*

С помощью координатных функций $V_1, \dots, V_m$ поля V криволинейный интеграл от $\langle V, \tau\rangle$ записывают в виде

$$\int_L \big\langle V(x), \tau(x)\big\rangle\, d\sigma(x) = \int_{(L,\tau)} V_1(x)\,dx_1 + \ldots + V_m(x)\,dx_m. \tag{1}$$

Используется также обозначение $\int_L V_1(x)\,dx_1 + \ldots + V_m(x)\,dx_m$, не содержащее указания на направление (задание которого подразумевается).

Очевидно, замена направления $\tau = \{\tau(x)\}_{x\in L}$ на противоположное $\{-\tau(x)\}_{x\in L}$ приводит к замене знака интеграла.

На связной кривой имеются лишь два взаимно противоположных направления. Действительно, если $\{\widetilde{\tau}(x)\}_{x\in L}$ — направление на L, то функция $x \mapsto \langle \tau(x), \widetilde{\tau}(x)\rangle$ непрерывна на L и принимает лишь значения ± 1. В силу связности она постоянна на L,

откуда и следует, что $\widetilde{\tau}$ совпадает либо с направлением τ, либо с противоположным направлением. Отметим, что для задания направления на связной кривой достаточно указать касательный вектор лишь в одной её точке.

С помощью гладкой параметризации $\gamma\colon (a,b) \mapsto \mathbb{R}^m$ простой кривой L легко построить направление на L, которое мы будем называть *направлением, соответствующим параметризации.* Оно определяется равенством

$$\tau(x) = \frac{\gamma'(\gamma^{-1}(x))}{\|\gamma'(\gamma^{-1}(x))\|} \qquad (x \in L).$$

Отсюда следует (см. теорему 4.1) формула для вычисления интеграла (1):

$$\int_{(L,\tau)} V_1(x)\,dx_1 + \ldots + V_m(x)\,dx_m = \int_a^b \bigl\langle V(\gamma(t)), \gamma'(t)\bigr\rangle\,dt.$$

Она приводит к полезному обобщению. Пусть γ — кусочно-гладкий путь в $\mathcal{O}$, определённый на $[a,b]$. *Интегралом по пути* γ от векторного поля V назовём интеграл, стоящий в правой части последней формулы. Он обозначается символом $\int_\gamma V_1(x)\,dx_1 + \ldots + V_m(x)\,dx_m$.

Поясним теперь, как можно истолковать интеграл (1) по ориентированной кривой (L,τ). Будем считать V силовым полем и предполагать, что кривая L содержится в $\mathcal{O}$. Рассмотрим малую L-окрестность U точки $x \in L$. Ввиду малости эту часть кривой можно считать почти прямолинейной, а поле V — почти постоянным на ней. Поэтому работа, совершаемая силой V на участке U, должна быть приближённо равна работе постоянной силы $V(x)$ при перемещении на вектор $\sigma(U)\tau(x)$. Последняя величина равна $\bigl\langle V(x), \tau(x)\bigr\rangle\,\sigma(U)$. Учитывая сказанное, естественно считать, что работа $A(e,\tau)$ силы V на произвольном участке e ориентированной кривой удовлетворяет оценке

$$\inf_{x\in e} \bigl\langle V(x), \tau(x)\bigr\rangle\,\sigma(e) \leqslant A(e,\tau) \leqslant \sup_{x\in e} \bigl\langle V(x), \tau(x)\bigr\rangle\,\sigma(e).$$

Кроме того, величина $A(e,\tau)$ аддитивно зависит от e. Принимая эти допущения и используя общую схему, рассмотренную в § VI.3, мы видим, что работа силы V вдоль ориентированной кривой (L,τ) вычисляется с помощью интеграла (1). Ясно, что такой же смысл имеет интеграл по кусочно-гладкому пути, лежащему в $\mathcal{O}$.

Определение. Векторное поле $V = (V_1, \ldots, V_m)$, заданное в области $\mathcal{O}$, называется *потенциальным*, если существует такая гладкая в $\mathcal{O}$ функция F (*потенциал поля*), что $V(x) = \operatorname{grad} F(x)$ для всех точек x из $\mathcal{O}$.

В случае потенциального поля для интеграла $\int_\gamma V_1(x)\,dx_1 + \ldots + V_m(x)\,dx_m$ справедлива обобщённая формула Ньютона–Лейбница.

Предложение 1. *Пусть F — потенциал поля $V = (V_1, \ldots, V_m)$, определённого в области $\mathcal{O}$, и γ — кусочно-гладкий путь в $\mathcal{O}$ с началом в точке A и концом в точке B. Тогда*

$$\int_\gamma V_1(x)\,dx_1 + \ldots + V_m(x)\,dx_m = F(B) - F(A).$$

Доказательство достаточно провести для гладкого пути γ. Будем считать, что он определён на промежутке $[a,b]$ и, следовательно, $A=\gamma(a)$, $B=\gamma(b)$. Как легко проверить, $\langle V(\gamma),\gamma'\rangle=(F(\gamma))'$. Поэтому

$$\int_\gamma V_1(x)\,dx_1+\ldots+V_m(x)\,dx_m=\int_a^b\big\langle V(\gamma(t)),\gamma'(t)\big\rangle\,dt=\int_a^b\big(F(\gamma(t))\big)'dt=$$
$$=F(\gamma(b))-F(\gamma(a))=F(B)-F(A).\ \blacktriangleright$$

Таким образом, работа потенциального поля зависит только от значений потенциала в конечной и начальной точках пути и равна приращению потенциала. В этом случае говорят, что интеграл не зависит от выбора пути. Существенно, что верно и обратное.

Предложение 2. *Независимость криволинейного интеграла от выбора пути влечёт потенциальность векторного поля.*

Доказательство. Заметим, что любые две точки A, B области $\mathcal{O}$ можно соединить лежащим в ней кусочно-гладким путём. Пусть V — векторное поле в $\mathcal{O}$, у которого все интегралы вдоль таких путей совпадают. Их общее значение обозначим $\int_A^B V_1(z)\,dz_1+\ldots+V_m(z)\,dz_m$. Зафиксировав точку $A\in\mathcal{O}$, рассмотрим "интеграл с переменным верхним пределом"

$$F(x)=\int_A^x V_1(z)\,dz_1+\ldots+V_m(z)\,dz_m\qquad(x\in\mathcal{O}).$$

Легко видеть, что $F(y)-F(x)=\int_x^y V_1(z)\,dz_1+\ldots+V_m(z)\,dz_m$ (чтобы убедиться в этом, следует представить $F(y)$ в виде интеграла по пути, проходящему через точку x). Проверим, что F — потенциал поля V. Зафиксируем x и рассмотрим произвольный вектор e_j канонического базиса. Для достаточно малого вещественного t мы имеем

$$F(x+te_j)-F(x)=\int_x^{x+te_j}V_1(z)\,dz_1+\ldots+V_m(z)\,dz_m=\int_0^t\big\langle V(x+se_j),e_j\big\rangle\,ds=$$
$$=\int_0^t V_j(x+se_j)\,ds=t\int_0^1 V_j(x+tue_j)\,du.$$

Следовательно, $F(x+te_j)-F(x)=t\big(V_j(x)+o(1)\big)$ при $t\to0$, т. е. $\frac{\partial F}{\partial x_j}(x)=V_j(x)$. $\blacktriangleright$

Из независимости криволинейного интеграла от выбора пути следует, что интеграл вдоль замкнутого пути равен нулю (напомним, что путь называется замкнутым, если его конечная точка совпадает с начальной). Но в общем случае это не так.

Пример. Пусть $V(x,y)=(-\frac{y}{x^2+y^2},\frac{x}{x^2+y^2})$ — силовое поле, заданное в "проколотой" плоскости $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$. Вычислим его работу A вдоль окружности, точнее, вдоль замкнутого пути $\gamma(t)=(\cos t,\sin t)$, где $t\in[0,2\pi]$:

$$A=\int_\gamma-\frac{y}{x^2+y^2}\,dx+\frac{x}{x^2+y^2}\,dy=\int_0^{2\pi}dt=2\pi.$$

Этот пример показывает, что работа непотенциального поля вдоль замкнутого пути может быть отличной от нуля. Заметим, что сужение рассмотренного поля на любую полуплоскость, не содержащую нуля, потенциально. В частности, его сужение на полуплоскость $x > 0$ есть поле градиента функции $F(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

Для гладких полей легко установить простое и важное необходимое условие потенциальности. В самом деле, если F — потенциал поля $V = (V_1, \dots, V_m)$, гладкого в области $\mathcal{O}$, то в силу теоремы о равенстве смешанных производных мы получаем, что

$$\frac{\partial V_k}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial x_k}(x) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_j}(x) = \frac{\partial V_j}{\partial x_k}(x).$$

Таким образом, равенства

$$\frac{\partial V_k}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial V_j}{\partial x_k}(x) \qquad (x \in \mathcal{O},\ j, k = 1, \dots, m) \tag{2}$$

необходимы для потенциальности поля V. Как показывает рассмотренный пример, это условие не достаточно. Однако оно достаточно для потенциальности в “хороших” областях. Оставляя в стороне полное исследование этого вопроса, мы ограничимся частным случаем утверждения, известного как лемма Пуанкаре.

Предложение 3. *Гладкое поле $V = (V_1, \dots, V_m)$, определённое в выпуклой области $\mathcal{O}$ и удовлетворяющее условию (2), потенциально.*

Доказательство. Ради упрощения формул будем считать, что область $\mathcal{O}$ содержит начало координат. Тогда для любой точки $x = (x_1, \dots, x_m)$ из $\mathcal{O}$ прямолинейный путь $\gamma_x(t) = tx$, $t \in [0, 1]$, лежит в $\mathcal{O}$. Положим $F(x) = \int_{\gamma_x} V_1(z)\, dz_1 + \ldots + V_m(z)\, dz_m$ и проверим, что F — потенциал поля V. В самом деле,

$$F(x) = \int_0^1 \big\langle V(\gamma_x(t)), \gamma_x'(t) \big\rangle\, dt = \sum_{k=1}^m x_k \int_0^1 V_k(tx)\, dt.$$

Дифференцируя по x_j и используя условия (2), находим:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x) = \int_0^1 V_j(tx)\, dt + \sum_{k=1}^m x_k \int_0^1 t \frac{\partial V_k}{\partial x_j}(tx)\, dt = \int_0^1 \Big(V_j(tx) + t \sum_{k=1}^m x_k \frac{\partial V_j}{\partial x_k}(tx) \Big)\, dt =$$

$$= \int_0^1 \Big(t V_j(tx) \Big)_t'\, dt = V_j(x). \ \blacktriangleright$$

Замечание. В доказательстве выпуклость области использовалась не полностью. В частности, оно сохраняется для областей, звёздных относительно какой-то своей точки (т. е. таких, что для некоторой точки $x_0 \in \mathcal{O}$ отрезок $\{x_0 + t(x - x_0) \mid t \in [0, 1]\}$ содержится в $\mathcal{O}$, если $x \in \mathcal{O}$).

Будем говорить, что определённое в области $\mathcal{O}$ векторное поле *локально потенциально,* если у каждой точки из $\mathcal{O}$ есть окрестность, в которой поле имеет потенциал. Из предложения 3 вытекает очевидное, но полезное

Следствие. *Гладкое поле локально потенциально тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условию* (2).

Приведённый пример показывает, что локально потенциальное поле может не быть потенциальным, и интеграл от него по замкнутому пути может быть отличен от нуля. Позже, в п. 6.7 мы вернёмся к этому вопросу.

5.3. *Сторона поверхности и поток векторного поля.* Обратимся теперь к случаю II. Рассмотрим интегралы вида $\int_M \langle V(x), \nu(x)\rangle\, d\sigma(x)$, часто встречающиеся в задачах физики и механики. Здесь M — гладкая поверхность, $\nu(x)$ — единичная нормаль к ней в точке x, а $V(x)$ — вектор, соответствующий рассматриваемой задаче.

Напомним, что нормалью к гладкой поверхности $M \subset \mathbb{R}^m$ в точке $x \in M$ называется ненулевой вектор, ортогональный касательному пространству T_x. Нормаль называют единичной, если её длина равна единице. В каждой точке поверхности существуют лишь две такие (противоположно направленные) нормали.

Стороной гладкой поверхности M будем называть заданное на M непрерывное семейство единичных нормалей. Иными словами, непрерывное семейство $\{\nu(x)\}_{x\in M}$ есть сторона поверхности M, если $\|\nu(x)\| = 1$ и $\nu(x)$ — нормаль к M в точке x при всех x из M.

Обращаясь к интуитивному представлению о площади поверхности как о величине, пропорциональной количеству израсходованной краски (о чём мы говорили в начале этой главы), добавим теперь, что сторону поверхности можно представлять себе как поверхность вместе с нанесённым слоем краски или как совокупность положений кисти. Отметим и более распространённое бытовое толкование понятия стороны поверхности, когда говорят о её "видимой стороне". Она определяется тем участком, который "видим" наблюдателю, или, выражаясь точнее, тем участком, на котором нормали направлены "навстречу" лучу зрения (образуют с ним тупой угол).

Перейдём теперь от неформальных соображений к необходимым уточнениям, связанным с понятием стороны поверхности. Если $\nu = \{\nu(x)\}_{x\in M}$ — сторона поверхности M, то, очевидно, противоположное семейство $\{-\nu(x)\}_{x\in M}$ также является стороной M. На связной поверхности других сторон нет (для доказательства достаточно почти дословно повторить рассуждение, использованное при рассмотрении направления на кривой). Учитывая это обстоятельство, поверхности, у которых существует сторона, называют *двусторонними.* Для указания стороны связной поверхности достаточно отметить нормаль к ней хотя бы в одной точке.

Ясно, что с помощью вектора N_Φ (см. п. 3.4) легко построить сторону гладкой поверхности M, имеющей глобальную параметризацию Φ. Следует положить

$$\nu(x) = \frac{N_\Phi(\Phi^{-1}(x))}{\|N_\Phi(\Phi^{-1}(x))\|} \qquad (x \in M).$$

Будем говорить, что эта сторона порождена параметризацией Φ или *соответствует* ей.

График Γ_φ гладкой функции φ — двусторонняя поверхность. Его каноническая параметризация порождает сторону

$$x = (u, \varphi(u)) \mapsto \nu(x) = \frac{(-\operatorname{grad}\varphi(u), 1)}{\sqrt{1 + \|\operatorname{grad}\varphi(u)\|^2}}. \tag{3}$$

Отметим, что все векторы этой стороны образуют острые углы с осью x_m. Поэтому эту сторону графика мы будем называть *верхней* стороной, а противоположную ей — *нижней.*

Ещё один важный пример двусторонней поверхности — граница “достаточно хорошего” компактного множества — будет рассмотрен в следующем параграфе.

Из сказанного видно, что каждая достаточно малая M-окрестность любой точки гладкой поверхности M имеет сторону. Однако это совсем не означает, что сторону имеет и вся поверхность M. Контрпример — поверхность, называемую листом Мёбиуса,*) — можно получить, “склеив” противоположные стороны прямоугольника, предварительно его “перекрутив”. Говоря более формально, нужно в прямоугольнике $[-a,a]\times(-b,b)$ отождествить центрально-симметричные точки, лежащие на вертикальных сторонах (заметим, что отождествляя точки, симметричные относительно оси ординат, мы получим обычную цилиндрическую поверхность, очевидно, двустороннюю). Можно доказать, что на листе Мёбиуса нельзя определить сторону. Мы рекомендуем читателю провести эксперимент с окраской поверхности, полученной с помощью склеивания перекрученной узкой прямоугольной полоски бумаги. Гладкие поверхности, на которых нельзя задать сторону, называются односторонними.

Выбрав сторону $\{\nu(x)\}_{x\in M}$ двусторонней поверхности, лежащей в области, где задано векторное поле V, можно рассмотреть поверхностный интеграл

$$\int_M \big\langle V(x),\nu(x)\big\rangle\, d\sigma(x) \tag{4}$$

(замена стороны на противоположную приводит, очевидно, к тому, что интеграл меняет знак). Если выбранная сторона порождена параметризацией Φ, $\Phi\in C^1(G)$, то вычисление этого интеграла сводится к вычислению кратного интеграла (см. теорему 4.1 и формулу для нормали N_Φ в п. 3.4):

$$\int_M \big\langle V(x),\nu(x)\big\rangle\, d\sigma(x)=\int_G \big\langle V(\Phi(u)),N_\Phi(u)\big\rangle\, du=\int_G \begin{vmatrix} V_1(\Phi(u)) & \dots & V_m(\Phi(u)) \\ \frac{\partial\varphi_1(u)}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial\varphi_m(u)}{\partial u_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_1(u)}{\partial u_{m-1}} & \dots & \frac{\partial\varphi_m(u)}{\partial u_{m-1}} \end{vmatrix}\, du.$$

Обратимся теперь к физической задаче, которая приводит к появлению интеграла (4). Пусть в области $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^m$ задано векторное поле V, которое мы будем считать полем скоростей стационарного движения жидкости. Как вычислить объём жидкости, протекающей за единицу времени через гладкую двустороннюю поверхность $M\subset\mathcal{O}$? При решении этой задачи следует учитывать, что частицы жидкости могут пересекать поверхность в разных направлениях, “переходя с одной её стороны на другую”. Если поверхность ограничивает некоторое тело, то это означает, что жидкость может как вытекать, так и втекать в него. Поэтому чтобы сделать нашу задачу вполне определённой, мы зафиксируем на M некоторую сторону $\{\nu(x)\}_{x\in M}$.

Рассмотрим малую M-окрестность U точки $x\in M$. Ввиду малости эту часть поверхности можно считать почти плоской, а значения скорости V на ней — почти постоянными. Поэтому жидкость, протекающая за единицу времени через U, заполнит криволинейный параллелепипед, близкий к параллелепипеду с основанием U и рёбрами, равными $V(x)$. Объём последнего равен $\sigma(U)|\langle V(x),\nu(x)\rangle|$ (см. рис. 15).

*) Август Фердинанд **Мёбиус** (Möbius), 1790–1868, — немецкий математик.

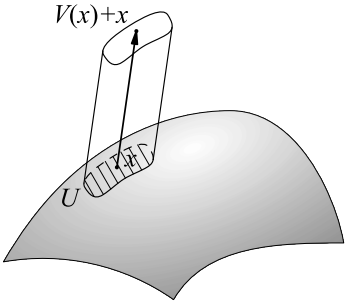


Рис. 15.

Скалярное произведение $\langle V(x), \nu(x)\rangle$ положительно, если векторы $V(x)$ и $\nu(x)$ образуют острый угол, т. е. если жидкость пересекает M "в направлении $\nu(x)$", и отрицательно в противоположном случае. Поэтому интеграл $\int_U \langle V(x), \nu(x)\rangle\, d\sigma(x)$ по абсолютной величине равен объёму жидкости, протекающей за единицу времени через площадку U. Его знак зависит от выбора стороны поверхности и характеризует направление движения жидкости. Исходя из приведённых соображений, интеграл (4) называют *потоком* векторного поля V через M в заданную сторону*).

Пример. Пусть f — гладкая в области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m$ функция, не имеющая критических точек. Положим

$$\nu(x) = \frac{1}{\|\operatorname{grad} f(x)\|} \operatorname{grad} f(x), \quad V(x) = \frac{1}{\|\operatorname{grad} f(x)\|}\, \nu(x) \qquad (x \in \mathcal{O}).$$

Очевидно, на поверхности уровня $M_C = \{x \in \mathcal{O} \mid f(x) = C\}$ семейство $\{\nu(x)\}_{x \in M_C}$ есть сторона поверхности. Поток вектора ν в эту сторону есть не что иное, как площадь поверхности M_C. Поток вектора V через M_C также имеет простой геометрический смысл: это производная при $u = C$ объёма множества $\mathcal{O}_u = \{x \in \mathcal{O} \mid f(x) \leqslant u\}$ (см. замечание 3 в п. 4.3).

5.4. Обсудив интегрирование векторных полей по многообразиям минимальной (п. 5.2) и максимальной размерности (п. 5.3), необходимо сказать несколько слов об интегрировании по плоской кривой. В этой ситуации максимальная и минимальная размерности совпадают (обе они равны 1). Поэтому на гладкой плоской кривой L можно рассматривать не только направление, но и сторону. Формально, у нас возникают два вида криволинейных интегралов по L от векторного поля $V = (V_1, V_2)$. Во-первых, это интеграл по ориентированной кривой

$$\int_{(L,\tau)} V_1(x,y)\, dx + V_2(x,y)\, dy = \int_L \langle V(x,y), \tau(x,y)\rangle\, d\sigma_1(x,y),$$

а во-вторых — интеграл по L, соответствующий стороне $\nu = \{\nu(x,y)\}_{(x,y)\in L}$:

$$\int_L \langle V(x,y), \nu(x,y)\rangle\, d\sigma_1(x,y).$$

*) Мы предоставляем читателю вывести эту формулу, опираясь на интуитивно ясные свойства потока и используя общую схему, рассмотренную в § VI.3.

Как нетрудно убедиться, между интегралами этих двух видов имеется тесная связь. Чтобы уточнить её, введём ортогональное преобразование $z = (x, y) \mapsto U(z) = (-y, x)$, поворачивающее вектор z на $\frac{\pi}{2}$ "против часовой стрелки" (отождествляя $\mathbb{R}^2$ с множеством комплексных чисел $\mathbb{C}$, это можно записать совсем коротко: $U(z) = i\,z$). Так как поворачивая нормаль на прямой угол мы получаем касательный вектор, то каждой стороне ν кривой L можно сопоставить направление $\tau = U(\nu)$. Обратно, каждому направлению τ на L соответствует сторона $\nu = U^{-1}(\tau)$. Направление и сторону, связанные равенством $\tau = U(\nu)$, мы будем называть согласованными друг с другом. Очевидно, что $\langle V, \nu\rangle = \langle \overline{V}, \tau\rangle$, где $\overline{V} = U(V)$, и поэтому поток поля V в сторону ν равен интегралу от поля $\overline{V} = U(V)$ по ориентированной кривой (L, τ), где $\tau = U(\nu)$:

$$\int_L \langle V, \nu\rangle\, d\sigma_1 = \int_L \langle \overline{V}, \tau\rangle\, d\sigma_1.$$

Это равенство можно переписать в виде

$$\int_L \langle V, \nu\rangle\, d\sigma_1 = \int_{(L,\tau)} -V_2(x, y)\, dx + V_1(x, y)\, dy. \tag{5}$$

Мы используем его в следующем параграфе при обсуждении формулы Грина (п. 6.7).

УПРАЖНЕНИЯ

1. Найдите потенциал F поля $V(x) = -\frac{x}{\|x\|^m}$, заданного в $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. В трёхмерном случае поле V пропорционально гравитационному полю, создаваемому массой, сосредоточенной в начале координат. Поэтому функцию F называют ньютоновским потенциалом. Чему равна работа поля V вдоль пути, начинающегося в точке $x \neq 0$ и уходящего в бесконечность?

2. Векторное поле V называют центральным, если существует такая непрерывная на $(0, +\infty)$ функция f, что $V(x) = f(\|x\|)\, x$ для $x \neq 0$. Докажите, что такое поле потенциально. Чему равен его потенциал?

3. Пусть M — часть границы эллипсоида $\frac{x_1^2}{a_1^2} + \ldots + \frac{x_m^2}{a_m^2} < 1$, лежащая в "первом октанте" $\mathbb{R}^m_+$. Вычислите поток векторного поля $V(x) = \left(\frac{c_1}{x_1}, \ldots, \frac{c_m}{x_m}\right)$ через невидимую из начала координат (т. е. верхнюю) сторону поверхности M.

§ 6. Формула Гаусса–Остроградского

6.1. В основе классического интегрального исчисления лежит формула Ньютона–Лейбница

$$\int_a^b f'(x)\, dx = f(b) - f(a),$$

выражающая интеграл от производной через значения функции в граничных точках промежутка интегрирования.

Каков аналог этой формулы в многомерном случае? Естественно предположить, что для функции нескольких переменных следует заменить f' частной производной, промежуток — компактным множеством K и рассмотреть интеграл $\int_K \frac{\partial f}{\partial x_j}\,d\lambda_m$. Возможно ли выразить его формулой, в которую входили бы значения функции f лишь на границе области интегрирования? Наша цель в этом параграфе — показать, что ответ на этот вопрос положителен при весьма широких предположениях о строении границы множества K.

Простейший вариант искомой формулы можно получить с помощью теоремы Фубини, интегрируя частную производную $\frac{\partial f}{\partial x_m}$ функции f, гладкой на параллелепипеде $P = Q \times [a,b]$, где $Q \subset \mathbb{R}^{m-1}$ (точку x из P мы отождествляем с парой (u,v), $u \in Q$, $v \in [a,b]$):

$$\int_P \frac{\partial f}{\partial x_m}(x)\,dx = \int_Q \left(\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_m}(u,v)\,dv\right)\,du = \int_Q f(u,b)\,du - \int_Q f(u,a)\,du.$$

Интегралы, стоящие в правой части, — не что иное, как интегралы от f по нижнему и верхнему основаниям параллелепипеда P. Обозначив эти части границы P символами ∂P_+ и ∂P_-, можно, очевидно, написать:

$$\int_P \frac{\partial f}{\partial x_m}(x)\,dx = \int_{\partial P_+} f(x)\,d\sigma_{m-1}(x) - \int_{\partial P_-} f(x)\,d\sigma_{m-1}(x). \tag{1}$$

Следующий шаг — решающий в наших рассуждениях. В возникшей ситуации нужно осмыслить то обстоятельство, что мы должны рассматривать разность, а не, скажем, сумму, интегралов по ∂P_+ и ∂P_-. Желательно найти такое истолкование этого явления, которое позволило бы избавиться от “неравноправия” интегралов по ∂P_+ и ∂P_-. Это можно сделать с помощью понятия внешней нормали, благодаря которому мы сможем записать правую часть равенства (1) в виде интеграла по границе параллелепипеда P.

Чтобы сделать это, рассмотрим на ∂P внешнюю нормаль ν. Оставляя точное определение этого понятия до следующего пункта, можно, руководствуясь интуитивными соображениями, сказать, что на ∂P_+ внешняя нормаль совпадает с вектором e_m, на ∂P_- — с $(-e_m)$, а на остальной части ∂P она ортогональна e_m. Поэтому формулу (1) можно переписать в виде:

$$\int_P \frac{\partial f}{\partial x_m}(x)\,dx = \int_{\partial P_+} f(x)\big\langle \nu(x), e_m\big\rangle\,d\sigma_{m-1}(x) + \int_{\partial P_-} f(x)\big\langle \nu(x), e_m\big\rangle\,d\sigma_{m-1}(x) =$$
$$= \int_{\partial P_+\cup\partial P_-} f(x)\big\langle \nu(x), e_m\big\rangle\,d\sigma_{m-1}(x) = \int_{\partial P} f(x)\big\langle \nu(x), e_m\big\rangle\,d\sigma_{m-1}(x).$$

Учитывая, что частная производная $\frac{\partial f}{\partial x_m}$ есть производная по направлению e_m, полезно придать этому равенству вид

$$\int_P \frac{\partial f}{\partial e_m}(x)\,dx = \int_{\partial P} f(x)\langle \nu(x), e_m\rangle\,d\sigma_{m-1}(x), \tag{2}$$

подчеркнув связь подынтегрального выражения справа с направлением дифференцирования слева.

Таким образом, у нас возник простейший вариант классической формулы Гаусса–Остроградского*), являющейся тем обобщением формулы Ньютона–Лейбница, к которому мы стремимся.

Заметим, что в одномерном случае формулу Ньютона–Лейбница можно истолковать как частный случай формулы (2), если считать, что P — это отрезок $[a, b]$, мера на его границе порождена единичными нагрузками в точках a и b, а "внешние нормали" в них суть соответственно векторы $-e$ и e, где e — единичный орт на вещественной оси.

Уже сейчас читатель без труда убедится, что в равенстве (2) вместо $\frac{\partial f}{\partial e_m}$ можно рассматривать частную производную по любой другой координате и вообще производную по любому направлению. Значительно труднее доказать, что полученная формула справедлива не только для параллелепипедов, но и для компактных множеств более общего вида. Описание таких множеств вместе с проверкой соответствующего равенства и составляют основное содержание этого параграфа. Окончательный результат будет получен как итог поэтапного расширения класса рассматриваемых множеств.

Всюду в этом параграфе $m > 1$. Площадь поверхности и мера Лебега λ_m обозначаются буквами σ и λ без указания на размерность.

6.2. Пусть гладкая поверхность M содержится в границе множества A. Нормаль к M называют также нормалью к границе. Нормаль $N(p)$ называется *внешней нормалью* к ∂A в точке $p \in \partial A$, если $p + tN(p) \notin A$ и $p - tN(p) \in \operatorname{Int} A$ для достаточно малых положительных t. Сторона M, состоящая из внешних нормалей, называется внешней стороной M, а противоположная сторона — внутренней. В случае, когда вблизи точки $p \in \partial A$ множество A может быть задано неравенством, т. е. $A \cap B(p, \delta) = \{x \in B(p, \delta) \mid F(x) \leqslant 0\}$, где F — гладкая в шаре $B(p, \delta)$ функция с ненулевым градиентом, соответствующая часть границы ∂A есть не что иное, как множество нулевого уровня функции F. При этом $\operatorname{grad} F(p)$ — внешняя нормаль к ∂A, поскольку градиент указывает направление строгого возрастания функции F.

Для дальнейшего нам потребуются множества, тесно связанные с подграфиком гладкой функции. Чтобы определить их, отождествим пространство $\mathbb{R}^m$ с декартовым произведением $\mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}$ и будем записывать точку x из $\mathbb{R}^m$ в виде $x = (u, v)$, где $u \in \mathbb{R}^{m-1}$ и $v \in \mathbb{R}$. Пусть φ — гладкая в замкнутом кубе $Q \subset \mathbb{R}^{m-1}$ функция. Множества

$$\{(u, v) \mid u \in Q,\ c \leqslant v \leqslant \varphi(u)\} \quad \text{и} \quad \{(u, v) \mid u \in Q,\ \varphi(u) \leqslant v \leqslant d\},$$

где $c < \varphi$ и соответственно $\varphi < d$, назовём *нижним* и *верхним брусами*. Множества, получающиеся из них изменением нумерации координат, будем называть просто *брусами*.

Точки (u, v) графика функции φ, проекции u которых лежат внутри куба Q, образуют *нетривиальную часть* границы бруса. Остальные точки границы образуют её *тривиальную часть* (для нижнего бруса она содержится в границе бесконечного параллелепипеда $Q \times [c, +\infty)$).

Если функция φ не постоянна, то нетривиальная часть границы бруса не лежит ни в какой плоскости и поэтому определяется однозначно. В противном случае нетривиальная часть границы должна быть указана дополнительно (например, у куба ею может быть любая его грань).

*) Михаил Васильевич **Остроградский**, 1801–1862, — русский математик.

Ясно, что граница бруса состоит из конечного числа компактных подмножеств гладких поверхностей. Внешняя нормаль $\nu(x)$ к ней существует в любой точке гладкости x, т. е. почти везде относительно σ. Дополняя определение п. 5.3, *внешней стороной границы бруса* $\mathcal{B}$ будем называть семейство внешних нормалей $\{\nu(x)\}_{x\in\partial\mathcal{B}}$. Отметим, что согласно этому определению внешняя сторона определена не всюду, а лишь почти везде на $\partial\mathcal{B}$. При этом для любого вектора $e \in \mathbb{R}^m$ функция $x \mapsto \langle \nu(x), e\rangle$ непрерывна почти везде на $\partial\mathcal{B}$ и, следовательно, измерима.

Поскольку вблизи каждой точки нетривиальной части границы нижний брус описывается неравенством $F(u,v) = v - \varphi(u) \leqslant 0$, внешней нормалью является градиент $\operatorname{grad} F(u,v) = (-\operatorname{grad}\varphi(u), 1)$. Говоря иными словами, внешняя сторона нетривиальной части границы нижнего бруса есть верхняя сторона графика Γ_φ, а единичная внешняя нормаль в точке $x = (u, \varphi(u))$, принадлежащей этой части границы, равна

$$\nu(x) = \frac{(-\operatorname{grad}\varphi(u), 1)}{\sqrt{1 + \|\operatorname{grad}\varphi(u)\|^2}}. \tag{3}$$

У верхнего бруса внешняя сторона нетривиальной части границы есть нижняя сторона графика, задаваемая противоположными нормалями.

6.3. Следующая теорема — первый шаг в обобщении формулы (2). Символ ν обозначает внешнюю сторону границы бруса.

Теорема. *Пусть гладкая на брусе $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^m$ функция f равна нулю на тривиальной части его границы. Тогда для любого орта $e \in \mathbb{R}^m$ справедливо равенство*

$$\int_{\mathcal{B}} \frac{\partial f}{\partial e}(x)\, dx = \int_{\partial\mathcal{B}} f(x)\, \langle \nu(x), e\rangle\, d\sigma(x). \tag{4}$$

Доказательство. Изменив при необходимости нумерацию координат, будем считать далее, что $\mathcal{B}$ — верхний или нижний брус. Поскольку рассуждения в этих двух случаях аналогичны, мы ограничимся рассмотрением нижнего бруса. По определению он имеет вид

$$\mathcal{B} = \{(u,v) \mid u \in Q,\ \text{c} \leqslant v \leqslant \varphi(u)\},$$

где φ — такая гладкая на замкнутом кубе $Q \subset \mathbb{R}^{m-1}$ функция, что $\varphi > c$. Заметим, что так как производная по направлению есть линейная комбинация частных производных, то равенство (4) достаточно доказать для случая, когда e — один из векторов $e_1, \dots, e_m$ канонического базиса в $\mathbb{R}^m$.

Сначала рассмотрим случай $e = e_m$. По теореме Фубини мы имеем

$$\int_{\mathcal{B}} \frac{\partial f}{\partial e_m}(x)\, dx = \int_Q \left(\int_c^{\varphi(u)} \frac{\partial f}{\partial v}(u,v)\, dv \right) du = \int_Q \Big(f(u,\varphi(u)) - f(u,c) \Big) du.$$

При этом $f(u,c) = 0$, поскольку функция f равна нулю на тривиальной части границы бруса. Следовательно,

$$\int_{\mathcal{B}} \frac{\partial f}{\partial e_m}(x)\, dx = \int_Q f(u,\varphi(u)) du = \int_Q \frac{f(u,\varphi(u))}{\sqrt{1 + \|\operatorname{grad}\varphi(u)\|^2}} \sqrt{1 + \|\operatorname{grad}\varphi(u)\|^2} du.$$

В силу равенства (3) это означает, что

$$\int_{\mathcal{B}} \frac{\partial f}{\partial e_m}(x)\,dx = \int_{\Gamma_\varphi} f(x)\,\big\langle \nu(x), e_m \big\rangle\,d\sigma(x) = \int_{\partial\mathcal{B}} f(x)\,\big\langle \nu(x), e_m \big\rangle\,d\sigma(x)$$

(в конце мы ещё раз воспользовались равенством $f \equiv 0$ на $\partial\mathcal{B} \setminus \Gamma_\varphi$).

Пусть теперь $e = e_k$, $1 \leqslant k < m$. Для всех таких k доказательства проводятся единообразно, поэтому можно считать, что $k = m-1$. Будем предполагать, что $m \geqslant 3$. В двумерном случае все дальнейшие рассуждения лишь упрощаются, в чём читатель может легко убедиться самостоятельно.

Представим куб Q в виде произведения $Q = R \times [a,b]$, где R — куб в $\mathbb{R}^{m-2}$. Точку u из Q будем записывать в виде $u = (s,t)$, где $s \in R$, $a \leqslant t \leqslant b$. В этих обозначениях с помощью теоремы Фубини мы получаем

$$\int_{\mathcal{B}} \frac{\partial f}{\partial e_{m-1}}(x)\,dx = \int_R \left(\int_a^b \left(\int_c^{\varphi(s,t)} \frac{\partial f}{\partial t}(s,t,v)\,dv \right) dt \right) ds. \tag{5}$$

Чтобы преобразовать внутренний интеграл (переставить интегрирование по v и дифференцирование по t), нам потребуется обобщение правила Лейбница дифференцирования интеграла, зависящего от параметра. Это обобщение таково.

Лемма. *Пусть $\psi \in C^1\big([a,b]\big)$ и $c < \psi(t)$ при $a \leqslant t \leqslant b$. Если функция f гладкая в окрестности криволинейной трапеции $T = \big\{(t,v) \in \mathbb{R}^2 \,|\, t \in [a,b],\ c \leqslant v \leqslant \psi(t)\big\}$, то*

$$\int_c^{\psi(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(t,v)\,dv = \frac{d}{dt}\left(\int_c^{\psi(t)} f(t,v)\,dv \right) - f(t,\psi(t))\,\psi'(t).$$

Доказательство леммы. Положим $F(t,\theta) = \int_c^\theta f(t,v)\,dv$ для (t,θ) из достаточно малой окрестности трапеции T. Так как $F'_\theta(t,\theta) = f(t,\theta)$ и по правилу Лейбница $F'_t(t,\theta) = \int_c^\theta f'_t(t,v)\,dv$, то дифференцируя суперпозицию $F(t,\psi(t))$, мы получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\int_c^{\psi(t)} f(t,v)\,dv \right) = \big(F(t,\psi(t))\big)'_t = F'_t(t,\psi(t)) + F'_\theta(t,\psi(t))\,\psi'(t) =$$

$$= \int_c^{\psi(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(t,v)\,dv + f(t,\psi(t))\,\psi'(t),$$

что равносильно доказываемому равенству. ►

Вернёмся к доказательству теоремы. Считая, что $\psi(t) = \varphi(s,t)$, применим лемму к внутреннему интегралу в правой части равенства (5):

$$\int_c^{\varphi(s,t)} \frac{\partial f}{\partial t}(s,t,v)\,dv = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_c^{\varphi(s,t)} f(s,t,v)\,dv \right) - f\big(s,t,\varphi(s,t)\big)\,\frac{\partial \varphi}{\partial t}(s,t).$$

Проинтегрировав это равенство по t, получим

$$\int_a^b \left(\int_c^{\varphi(s,t)} \frac{\partial f}{\partial t}(s,t,v)\,dv \right) dt = \int_c^{\varphi(s,t)} f(s,t,v)\,dv \Big|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f\big(s,t,\varphi(s,t)\big)\,\frac{\partial \varphi}{\partial t}(s,t)\,dt.$$

Поскольку точки (s, a, v) и (s, b, v) принадлежат тривиальной части границы бруса, на которой $f \equiv 0$, двойная подстановка обращается в нуль. Это позволяет переписать равенство (5) в виде

$$\int_{\mathcal{B}} \frac{\partial f}{\partial e_{m-1}}(x)\,dx = -\int_R \left(\int_a^b f\big(s, t, \varphi(s,t)\big)\, \frac{\partial \varphi}{\partial t}(s,t)\,dt \right) ds =$$
$$= \int_Q f(u, \varphi(u)) \left\langle (-\operatorname{grad}\varphi(u), 1), e_{m-1} \right\rangle du.$$

Учитывая равенство (3), возникший интеграл можно представить в виде интеграла по мере σ:

$$\int_{\mathcal{B}} \frac{\partial f}{\partial e_{m-1}}(x)\,dx = \int_Q f(u, \varphi(u)) \left\langle \nu(u, \varphi(u)), e_{m-1} \right\rangle \sqrt{1 + \|\operatorname{grad}\varphi(u)\|^2}\,du =$$
$$= \int_{\Gamma_\varphi} f(x) \left\langle \nu(x), e_{m-1} \right\rangle d\sigma(x) = \int_{\partial\mathcal{B}} f(x) \left\langle \nu(x), e_{m-1} \right\rangle d\sigma(x)$$

(мы опять воспользовались условием $f \equiv 0$ на $\partial\mathcal{B} \setminus \Gamma_\varphi$). Таким образом, формула Гаусса–Остроградского для бруса $\mathcal{B}$ и ортов $e_1, \dots, e_{m-1}$, а вместе с ней и равенство (4), доказаны. ►

Предположение, что $f \equiv 0$ на тривиальной части $\partial\mathcal{B}$, конечно, излишне. Оно сделано лишь ради упрощения доказательства предварительной версии формулы Гаусса–Остроградского. В окончательном варианте (см. п. 6.5) этого ограничения нет.

6.4. *Стандартные компакты.* Введём теперь те компактные множества, которые будут использоваться в общей формуле Гаусса–Остроградского. Для компактов с гладкой границей мы получим её, не опираясь на результаты этого пункта (см. первый этап доказательства теоремы 6.5). Поскольку наша цель — получить формулу Гаусса–Остроградского не только для компактных множеств с гладкой границей (на которой все площади совпадают), мы откажемся теперь от рассмотрения произвольных площадей и будем использовать лишь площадь пропорциональную мере Хаусдорфа μ_{m-1}. Эта площадь обозначается по-прежнему буквой σ.

Определение. Компактное множество $K \subset \mathbb{R}^m$ называется *стандартным компактом,* если его границу можно представить в виде $\partial K = M \cup E$, где

а) для каждой точки $p \in M$ существует такой шар B_p с центром в p и такая функция $F \in C^1(B_p)$, что $F > 0$ на $B_p \setminus K$, $F \leqslant 0$ на $B_p \cap K$ и $\operatorname{grad} F(p) \neq 0$;

б) $\sigma(M) < +\infty$;

в) E — компактное множество, $\sigma(E) = 0$.

Из условия а) следует, что M — гладкая поверхность. Будем называть M *регулярной частью границы* компакта K, а E — множеством её особенностей. Условие в) позволяет нам при интегрировании по ∂K пренебрегать интегралом по множеству особенностей, поскольку он равен нулю.

Очевидно, брус является стандартным компактом. Компакты, ограниченные одной или несколькими гладкими поверхностями (например, шар, тор или сферический слой) также стандартны. Таковы же все ограниченные тела, изучаемые в школьной геометрии (многогранник, часть конуса, отсекаемая плоскостью, и др.).

Ясно, что функция F из пункта а) определения обращается в нуль на $B_p \cap M$. Как уже отмечалось в п. 6.2, $\operatorname{grad} F(p)$ — внешняя нормаль к ∂K в точке $p \in M$. Поэтому в каждой точке M имеется внешняя нормаль. Отображение, сопоставляющее произвольной точке из M единичную внешнюю нормаль, непрерывно, поскольку локально, в окрестности точки $p \in M$, эти нормали совпадают с нормированными градиентами функции F. Таким образом, семейство единичных внешних нормалей образует сторону поверхности M, которая согласно принятому в п. 6.2 определению называется внешней стороной M. Так как в окрестности точки p множество уровня $F(x) = 0$ совпадает с графиком некоторой гладкой функции, то найдётся такой содержащий p достаточно малый открытый параллелепипед $P \subset B_p$, для которого пересечение $\overline{P} \cap K = \mathcal{B}_p$ есть брус. Очевидно, нетривиальная часть его границы совпадает с $M \cap P$, и на ней внешние нормали к M являются и внешними нормалями к $\partial \mathcal{B}_p$.

Важно иметь достаточно простые условия, которые гарантируют, что множество особенностей E имеет нулевую площадь. В частности, это так, если E — подмножество гладкого многообразия L, коразмерность которого больше 1, поскольку в силу свойства 5 п. 3.3 $\sigma(L) = 0$. Для дальнейшего полезно также другое условие, обеспечивающее равенство $\sigma(E) = 0$. Чтобы его сформулировать, напомним, что ε-окрестностью множества E называется открытое множество $E_\varepsilon = \bigcup\limits_{x \in E} B(x, \varepsilon)$ (оно образовано теми точками $y \in \mathbb{R}^m$, для которых $\operatorname{dist}(y, E) < \varepsilon$).

Определение. Множество $E \subset \mathbb{R}^m$ называется *пренебрежимым в* $\mathbb{R}^m$, если объём его ε-окрестности E_ε удовлетворяет условию $\lambda(E_\varepsilon) = o(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$.

Очевидно, каждое пренебрежимое множество ограничено. Поскольку множество и его замыкание имеют одинаковые ε-окрестности, замыкание всякого пренебрежимого множества пренебрежимо.

На прямой пренебрежимо лишь пустое множество. На плоскости пренебрежимо всякое конечное множество, но не всякое дискретное (см. упр. 6). Читатель без труда убедится, что объединение конечного семейства пренебрежимых множеств пренебрежимо. В пространстве $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 3$, пренебрежимо любое ограниченное подмножество аффинного подпространства L, если $\dim L \leqslant m - 2$. Следующее утверждение помогает проверять условие в) определения стандартного компакта.

Предложение. *Всякое пренебрежимое подмножество пространства* $\mathbb{R}^m$ *имеет нулевую площадь.*

Доказательство. Пусть $E \subset \mathbb{R}^m$ — пренебрежимое множество. Как мы уже отмечали, оно ограничено. Убедимся, что $\sigma(E) = \alpha_{m-1}\mu_{m-1}(E) = 0$.

Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Точки x и y будем называть ε-различимыми, если $\|x - y\| \geqslant \varepsilon$. Очевидно, ограниченное множество содержит лишь конечное число попарно ε-различимых точек. Рассмотрим множество A, состоящее из максимально возможного числа ε-различимых точек, принадлежащих E. Тогда

$$E \subset \bigcup_{x \in A} B(x, \varepsilon),$$

так как в противном случае множество A можно было бы дополнить точкой из $E \setminus \bigcup\limits_{x \in A} B(x, \varepsilon)$, что противоречило бы его максимальности. Кроме того, шары $B(x, \frac{\varepsilon}{2})$ и $B(y, \frac{\varepsilon}{2})$ с центрами, лежащими в A, не пересекаются, так как точки этого множества

отстоят друг от друга по крайней мере на ε. Поскольку шары $B(x,\varepsilon)$ $(x \in A)$ образуют покрытие множества E, по определению величины $\mu_{m-1}(E,\varepsilon)$ (см. п. II.6.1) мы получаем

$$\mu_{m-1}(E,\varepsilon) \leqslant \sum_{x\in A} \varepsilon^{m-1} = \frac{2^m}{\alpha_m \varepsilon} \sum_{x\in A} \lambda\big(B(x,\tfrac{\varepsilon}{2})\big) = \frac{2^m}{\alpha_m \varepsilon} \lambda\Big(\bigcup_{x\in A} B(x,\tfrac{\varepsilon}{2})\Big) \leqslant \frac{2^m}{\alpha_m \varepsilon} \lambda(E_\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Следовательно, $\mu_{m-1}(E) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \mu_{m-1}(E,\varepsilon) = 0$. ►

Для компактных подмножеств гладкой поверхности доказанное в предложении необходимое условие является и достаточным.

Лемма. *Если компактное подмножество K гладкой поверхности M имеет нулевую площадь, то оно пренебрежимо.*

Доказательство. У каждой точки поверхности есть M-окрестность, замыкание которой содержится в графике некоторой гладкой функции. Ясно, что множество K можно покрыть конечным семейством таких окрестностей U_n: $K \subset \bigcup\limits_{n=1}^{N} U_n$. Положим

$$K_n = K \cap \overline{U}_n \qquad (n = 1, \dots, N).$$

Очевидно, множества K_n компактны и $K = \bigcup\limits_{n=1}^{N} K_n$. Следовательно, достаточно доказать утверждение леммы для множеств K_n, а это позволяет считать в дальнейшем, что M есть график гладкой функции $\varphi \in C^1(G)$, где G — открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^{m-1}$.

Как и раньше, точку x пространства $\mathbb{R}^m$ представим в виде $x = (u,v)$, где $u \in \mathbb{R}^{m-1}$, $v \in \mathbb{R}$, отождествляя $\mathbb{R}^{m-1}$ с плоскостью $v = 0$. Пусть H — проекция множества K на $\mathbb{R}^{m-1}$. Говоря о δ-окрестности H, мы будем иметь в виду δ-окрестность в пространстве $\mathbb{R}^{m-1}$, сохраняя для неё обозначение H_δ. Выберем столь малое $\delta > 0$, что H_δ содержится в G вместе с замыканием $\overline{H_\delta}$ и положим $L = \max\limits_{u\in\overline{H_\delta}} \|\operatorname{grad}\varphi(u)\|$.

Так как каноническая параметризация Φ графика Γ_φ есть растяжение и $K = \Phi(H)$, то $\lambda_{m-1}(H) \leqslant \sigma(\Phi(H)) = \sigma(K) = 0$. Следовательно, $\lambda_{m-1}(H) = 0$. Поскольку $\bigcap\limits_{\varepsilon>0} H_\varepsilon = H$, из непрерывности меры сверху вытекает, что

$$\lambda_{m-1}(H_\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{6}$$

Рассмотрим слой вокруг графика φ над H_ε при $0 < \varepsilon < \delta$:

$$A(\varepsilon) = \big\{(u,v) \in \mathbb{R}^m \,\big|\, u \in H_\varepsilon,\ |v - \varphi(u)| < (L+1)\,\varepsilon\big\}.$$

Так как $\lambda(A(\varepsilon)) = 2(L+1)\varepsilon\lambda_{m-1}(H_\varepsilon)$, то в силу (6) $\lambda(A(\varepsilon)) = o(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$. Поэтому для доказательства пренебрежимости K достаточно проверить, что $K_\varepsilon \subset A(\varepsilon)$. Пусть $x = (u,v) \in K_\varepsilon$. Убедимся, что $x \in A(\varepsilon)$, то есть, что $u \in H_\varepsilon$ и $|v - \varphi(u)| < (L+1)\varepsilon$. По определению ε-окрестности найдётся такая точка $x' = (u',v') \in K \subset \Gamma_\varphi$, что $\|x - x'\| < \varepsilon$. Так как $\|u - u'\| \leqslant \|x - x'\| < \varepsilon$ и $u' \in H$, то $u \in H_\varepsilon$. Кроме того, $v' = \varphi(u')$ и $|v - v'| \leqslant \|x - x'\|$. Поэтому

$$|v - \varphi(u)| \leqslant |v - v'| + |\varphi(u') - \varphi(u)| \leqslant \|x - x'\| + L\,\|u - u'\| < (L+1)\,\varepsilon,$$

откуда вытекает, что $x \in A(\varepsilon)$. ►

Заметим, что нельзя ослабить условие леммы, заменив компактность на ограниченность (см. упр. 7). Кроме того, она перестаёт быть верной, если предположить, что K содержится не в одной, а в объединении двух гладких поверхностей (см. упр. 8).

Приведём простое, но полезное следствие из леммы.

Следствие. *Компактное подмножество K гладкого многообразия, коразмерность которого больше 1, пренебрежимо.*

Действительно, площадь такого многообразия равна нулю (см. свойство 5 в п. 3.3). Кроме того, локально оно содержится в многообразии коразмерности 1, т. е. в поверхности (см. конец п. 1.1). Поэтому K покрывается конечным числом компактных множеств, каждое из которых содержится в гладкой поверхности и имеет нулевую площадь. Остаётся воспользоваться леммой. ▶

6.5. Здесь мы обобщим полученный в п. 6.3 предварительный вариант формулы Гаусса–Остроградского, заменив брус произвольным стандартным компактом. Внешнюю сторону ν поверхности M будем называть также внешней стороной ∂K. Таким образом, внешняя сторона определена и непрерывна почти везде на ∂K. Зафиксировав произвольный вектор $e \in \mathbb{R}^m$, мы получим, что функция $x \mapsto \langle \nu(x), e\rangle$ непрерывна почти везде на ∂K (относительно меры σ) и, следовательно, измерима.

Теорема (формула Гаусса–Остроградского). *Пусть f — функция, гладкая на стандартном компакте $K \subset \mathbb{R}^m$. Тогда для любого орта $e \in \mathbb{R}^m$*

$$\int_K \frac{\partial f}{\partial e}(x)\,dx = \int_{\partial K} f(x)\,\big\langle \nu(x), e\big\rangle\,d\sigma(x).$$

Прежде чем приступать к доказательству, отметим, что оно разбито на три этапа. Для компактов с гладкой границей (шар, тор и т. п.) достаточен результат, установленный на первом этапе. Если же граница компакта имеет особенность, то в большинстве случаев это пренебрежимое множество (например, у многогранника, полушара, конуса и т. п.). Для этого случая формула будет установлена на втором этапе доказательства.

Доказательство. По определению стандартного компакта $\partial K = E \cup M$, где M — регулярная часть ∂K, а $\mu_{m-1}(E) = 0$.

I. Пусть $f \equiv 0$ на открытом множестве G, содержащем E (в случае гладкой границы, т. е. при $E = \varnothing$, это допущение о функции f излишне). Каждой точке $x \in \operatorname{Int} K$ сопоставим открытый куб $Q_x \subset \operatorname{Int} K$ с центром в x. Как следует из определения стандартного компакта, каждая точка $p \in M$ находится внутри такого открытого параллелепипеда R_p, что пересечение $\overline{R}_p \cap K$ есть брус.

Множества G, $\{Q_x\}_{x\in \operatorname{Int} K}$ и $\{R_p\}_{p\in M}$ образуют открытое покрытие компакта K. Пусть $G, Q_{x_1}, \dots, Q_{x_J}$ и $R_{p_1}, \dots, R_{p_N}$ — некоторое конечное подпокрытие. Рассмотрим разбиение единицы, подчинённое этому подпокрытию (см. теорему 1.8). Пусть оно состоит из гладких функций ω, $\psi_1, \dots, \psi_J$ и $\theta_1, \dots, \theta_N$ ($\omega \equiv 0$ вне G, $\psi_j \equiv 0$ вне Q_{x_j} и $\theta_n \equiv 0$ вне R_{p_n} при $j = 1, \dots, J$, $n = 1, \dots, N$). Тогда

$$1 = \omega(x) + \sum_{j=1}^{J} \psi_j(x) + \sum_{n=1}^{N} \theta_n(x) \quad \text{для всех} \quad x \in K.$$

В силу условия $f \equiv 0$ на G отсюда следует, что

$$f(x) = \sum_{j=1}^{J} \psi_j(x) f(x) + \sum_{n=1}^{N} \theta_n(x) f(x) \quad \text{для всех} \quad x \in K. \tag{7}$$

Поэтому

$$\int_K \frac{\partial f}{\partial e}(x)\,dx = \sum_{j=1}^{J} \int_K \frac{\partial(\psi_j f)}{\partial e}(x)\,dx + \sum_{n=1}^{N} \int_K \frac{\partial(\theta_n f)}{\partial e}(x)\,dx.$$

Учитывая, что $\psi_j \equiv 0$ вне Q_{x_j} и $\theta_n \equiv 0$ вне R_{p_n}, мы получаем

$$\int_K \frac{\partial f}{\partial e}(x)\,dx = \sum_{j=1}^{J} \int_{Q_{x_j}} \frac{\partial(\psi_j f)}{\partial e}(x)\,dx + \sum_{n=1}^{N} \int_{K \cap R_{p_n}} \frac{\partial(\theta_n f)}{\partial e}(x)\,dx. \tag{8}$$

По теореме 6.3 слагаемые первой суммы равны нулю (поскольку $\psi_j \equiv 0$ на всей границе куба Q_{x_j}). Преобразуем интегралы, стоящие во второй сумме. Для этого заметим, что $\theta_n \equiv 0$ на ∂R_{p_n} и, следовательно, функция $\theta_n f$ аннулируется на тривиальной части границы бруса $K \cap \overline{R}_{p_n}$. Поэтому и к этим интегралам можно применить формулу Гаусса–Остроградского для бруса (см. теорему 6.3):

$$\int_{K \cap R_{p_n}} \frac{\partial(\theta_n f)}{\partial e}(x)\,dx = \int_{\partial(K \cap R_{p_n})} \theta_n(x)\, f(x)\, \langle \nu_n(x), e \rangle\, d\sigma(x),$$

где ν_n — внешняя нормаль к $\partial(K \cap R_{p_n})$. Так как $\theta_n(x) \neq 0$ лишь на нетривиальной части границы бруса $K \cap \overline{R}_{p_n}$, т. е. на $M \cap R_{p_n}$, и на ней ν_n совпадает с внешней нормалью ν к M, то

$$\int_{K \cap R_{p_n}} \frac{\partial(\theta_n f)}{\partial e}(x)\,dx = \int_{M \cap R_{p_n}} \theta_n(x)\, f(x)\, \langle \nu_n(x), e \rangle\, d\sigma(x) = \int_M \theta_n(x)\, f(x)\, \langle \nu(x), e \rangle\, d\sigma(x)$$

(в конце учтено, что $\theta_n \equiv 0$ вне R_{p_n}). Таким образом, из равенства (8) следует, что

$$\int_K \frac{\partial f}{\partial e}(x)\,dx = \sum_{n=1}^{N} \int_M \theta_n(x)\, f(x)\, \langle \nu(x), e \rangle\, d\sigma(x) = \int_M f(x) \sum_{n=1}^{N} \theta_n(x) \langle \nu(x), e \rangle\, d\sigma(x).$$

Поскольку функции $\psi_1, \ldots, \psi_J$ аннулируются на M, из равенства (7) вытекает, что $f(x) \sum\limits_{n=1}^{N} \theta_n(x) = f(x)$ для $x \in M$. Итак,

$$\int_K \frac{\partial f}{\partial e}(x)\,dx = \int_M f(x)\, \langle \nu(x), e \rangle\, d\sigma(x) = \int_{\partial K} f(x)\, \langle \nu(x), e \rangle\, d\sigma(x).$$

II. Обратимся теперь к случаю, когда множество особенностей E пренебрежимо. Проверим, что разность

$$\Delta = \int_K \frac{\partial f}{\partial e}(x)\,dx - \int_{\partial K} f(x) \langle \nu(x), e \rangle\, d\sigma(x)$$

между левой и правой частями доказываемой формулы сколь угодно мала. Для этого зафиксируем произвольное положительное число ε и применим теорему 1.7. о гладком спуске к множеству E_ε (легко видеть, что его ε-окрестность совпадает с $E_{2\varepsilon}$): найдётся такая функция $\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$, что

а) $0 \leqslant \theta \leqslant 1$ всюду на $\mathbb{R}^m$;
б) $\theta = 1$ на E_ε;
в) $\theta = 0$ вне $E_{2\varepsilon}$;
г) $\|\operatorname{grad}\theta\| \leqslant \frac{C}{\varepsilon}$ всюду на $\mathbb{R}^m$, где C — некоторая фиксированная постоянная.

Положим ещё $L_0 = \max_K |f|$ и $L_1 = \max_K |\frac{\partial f}{\partial e}|$.

Так как функция $(1-\theta)f$ обращается в нуль на E_ε, то для неё справедлива уже доказанная часть теоремы. Поэтому

$$\int_K \frac{\partial f}{\partial e}(x)\,dx = \int_K \frac{\partial(\theta f)}{\partial e}(x)\,dx + \int_K \frac{\partial(f-\theta f)}{\partial e}(x)\,dx =$$
$$= \int_K \frac{\partial(\theta f)}{\partial e}(x)\,dx + \int_{\partial K} (1-\theta(x))\,f(x)\langle\nu(x),e\rangle\,d\sigma(x).$$

Следовательно,

$$\Delta = \int_K \frac{\partial(\theta f)}{\partial e}(x)\,dx - \int_{\partial K} \theta(x)\,f(x)\langle\nu(x),e\rangle\,d\sigma(x).$$

В силу свойства в) в обоих интегралах множества, по которым идёт интегрирование, можно уменьшить, заменив их пересечениями с $E_{2\varepsilon}$. Это даёт нам

$$|\Delta| \leqslant \int_{K\cap E_{2\varepsilon}} \left(\left|\frac{\partial\theta}{\partial e}(x)\right|\,|f(x)| + |\theta(x)|\,\left|\frac{\partial f}{\partial e}(x)\right|\right)dx + \int_{E_{2\varepsilon}\cap\partial K} |\theta(x)\,f(x)|\,d\sigma(x).$$

Таким образом,

$$|\Delta| \leqslant \int_{K\cap E_{2\varepsilon}} \left(\frac{C}{\varepsilon}\,L_0 + L_1\right)dx + \int_{E_{2\varepsilon}\cap\partial K} L_0\,d\sigma(x) \leqslant \left(\frac{C}{\varepsilon}\,L_0 + L_1\right)\lambda(E_{2\varepsilon}) + L_0\sigma(E_{2\varepsilon}\cap\partial K).$$

Поскольку E — пренебрежимое множество, слагаемое $\left(\frac{C}{\varepsilon}\,L_0 + L_1\right)\lambda(E_{2\varepsilon})$ бесконечно мало при $\varepsilon \to 0$. Таково же и второе слагаемое. Действительно,

$$\sigma(E_{2\varepsilon}\cap\partial K) \to \sigma(E) \qquad \text{при} \quad \varepsilon \to 0$$

в силу непрерывности меры σ сверху (именно здесь мы используем конечность площади границы стандартного компакта). Осталось вспомнить, что $\sigma(E) = 0$. Итак, $|\Delta| = 0$.

III. Рассмотрим теперь общий случай, доказательство в котором проведём по следующей схеме. Сначала мы несколько “исправим” (расширяя) множество K, применим формулу Гаусса–Остроградского к расширенному множеству, а затем перейдём к пределу, стягивая вспомогательное множество к K.

Поскольку $\mu_{m-1}(E) = 0$, можно, зафиксировав произвольное положительное число ε, выбрать такие шары $B_j = B(x_j, r_j)$, что

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} r_j^{m-1} < \varepsilon^{m-1}.$$

Число ε будем считать настолько малым, что функция f непрерывно дифференцируема в $K_{2\varepsilon}$. Учитывая компактность множества E, можно считать, что $E \subset \bigcup\limits_{j=1}^{N} B_j \subset E_{2\varepsilon}$. Заметим ещё, что при пересечении поверхности конечной площади с концентрическими сферами мы за исключением не более чем счётного множества радиусов будем получать множества нулевой площади, так как семейство $\bigl\{\sigma\bigl(M \cap \partial B(a,r)\bigr)\bigr\}_{r>0}$ суммируемо (см. п. I.2.2). Поэтому не умаляя общности, мы будем предполагать, что

$$\sigma(M \cap \partial B_j) = 0 \quad (j = 1, \dots, N).$$

Введём теперь множество $K(\varepsilon) = K \cup \bigcup\limits_{j=1}^{N} \overline{B}_j$. Очевидно, его граница не задевает E и состоит только из точек, принадлежащих регулярной части ∂K или сферам $\partial B_1, \dots, \partial B_N$. Гладкость границы $K(\varepsilon)$ может нарушаться только на пересечениях сфер или множества M с этими сферами. Поэтому площадь множества особенностей границы $K(\varepsilon)$ равна нулю. Это множество состоит из конечного числа лежащих на сферах компактных множеств, каждое из которых пренебрежимо (по лемме 6.4). Поэтому пренебрежимо и их объединение. Следовательно, $K(\varepsilon)$ — стандартный компакт, граница которого имеет пренебрежимое множество особенностей, и для него формула Гаусса–Остроградского уже установлена:

$$\int_{K(\varepsilon)} \frac{\partial f}{\partial e}(x)\,dx = \int_{\partial K(\varepsilon)} f(x)\langle \nu(x), e\rangle\,d\sigma(x). \tag{9}$$

Полагая

$$M'(\varepsilon) = \partial K \setminus \bigcup_{j=1}^{N} B_j, \qquad M''(\varepsilon) = \partial K(\varepsilon) \setminus M'(\varepsilon),$$

и выделяя в равенстве (9) интегралы по K и M, его можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned}\int_K \frac{\partial f}{\partial e}(x)\,dx &+ \int_{K(\varepsilon)\setminus K} \frac{\partial f}{\partial e}(x)\,dx = \\ &= \int_{M'(\varepsilon)} f(x)\langle \nu(x), e\rangle\,d\sigma(x) + \int_{M''(\varepsilon)} f(x)\langle \nu(x), e\rangle\,d\sigma(x) = \\ &= \int_M \dots - \int_{M\setminus M'(\varepsilon)} \dots + \int_{M''(\varepsilon)} \dots .\end{aligned} \tag{10}$$

Так как $K(\varepsilon) \setminus K \subset E_{2\varepsilon}$ и $M \setminus M'(\varepsilon) \subset M \cap E_{2\varepsilon}$, то

$$\lambda_m\bigl(K(\varepsilon) \setminus K\bigr) \leqslant \lambda_m(E_{2\varepsilon}), \qquad \sigma\bigl(M \setminus M'(\varepsilon)\bigr) \leqslant \sigma(M \cap E_{2\varepsilon});$$

кроме того,

$$\sigma\bigl(M''(\varepsilon)\bigr) \leqslant \sum_{j=1}^{N} \sigma(\partial B_j) = m\alpha_m \sum_{j=1}^{N} r_j^{m-1} < m\alpha_m \varepsilon^{m-1}.$$

Правые части этих трёх неравенств стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$. Поэтому переходя при $\varepsilon \to 0$ к пределу в равенстве (10), мы получаем требуемую формулу. ►

Отметим, что доказанная теорема допускает обобщения различного характера — как в отношении расширения класса стандартных компактов (см. п. 8.4), так и в отношении ослабления свойств гладкости функции f (см. п. IX.3.5).

Пример. Формула Гаусса–Остроградского позволяет выразить объём тела с помощью интеграла по его границе. Например, применив эту формулу к функции $f(x) = \langle x, e\rangle$, мы получим, что

$$\lambda(K) = \int_{\partial K} \langle x, e\rangle \big\langle e, \nu(x)\big\rangle \, d\sigma(x).$$

Иначе говоря, объём тела K равен потоку векторного поля $V(x) = \langle x, e\rangle e$ через его границу "наружу".

Этот результат можно переформулировать следующим образом. Пусть L — подпространство в $\mathbb{R}^m$, а P — ортогональный проектор на L. Тогда

$$\dim L \cdot \lambda(K) = \int_{\partial K} \big\langle P(x), \nu(x)\big\rangle \, d\sigma(x),$$

т. е. поток проектора P через внешнюю сторону пропорционален объёму компакта, а коэффициент пропорциональности равен размерности подпространства, на которое происходит проектирование. В частности, при $L = \mathbb{R}^m$, мы получаем, что $\lambda(K) = \frac{1}{m}\int_{\partial K} \big\langle x, \nu(x)\big\rangle \, d\sigma(x)$.

6.6. Преобразуем формулу Гаусса–Остроградского с тем, чтобы пояснить её физический смысл.

Пусть $\mathcal{O}$ — открытое множество в $\mathbb{R}^m$, $\{V(x)\}_{x\in\mathcal{O}}$ — гладкое векторное поле с координатными функциями $V_1, \dots, V_m$. Согласно формуле Гаусса–Остроградского

$$\int_{\partial K} \big\langle V(x), \nu(x)\big\rangle \, d\sigma(x) = \sum_{j=1}^m \int_{\partial K} V_j(x) \big\langle e_j, \nu(x)\big\rangle \, d\sigma(x) =$$
$$= \sum_{j=1}^m \int_K \frac{\partial V_j}{\partial x_j}(x)\, dx = \int_K \Big(\sum_{j=1}^m \frac{\partial V_j}{\partial x_j}(x)\Big) dx,$$

где ν — внешняя сторона стандартного компакта $K \subset \mathcal{O}$. Левая часть этого равенства есть поток вектора V через ∂K, соответствующий внешней стороне поверхности. Подынтегральная функция $\sum\limits_{j=1}^m \frac{\partial V_j}{\partial x_j}$ в правой части называется *дивергенцией* векторного поля V и обозначается $\operatorname{div} V$. С использованием этого обозначения полученная формула может быть записана следующим образом (так называемая "векторная форма" формулы Гаусса–Остроградского):

$$\int_K \operatorname{div} V(x)\, dx = \int_{\partial K} \big\langle V(x), \nu(x)\big\rangle \, d\sigma(x). \tag{11}$$

Заметим, что $\operatorname{div} V(x)$ есть не что иное, как след матрицы Якоби $\big(\frac{\partial V_j}{\partial x_k}(x)\big)_{j,k=1}^m$, т. е. след оператора $d_x V$. Так как след не зависит от выбора базиса, то при вычислении

дивергенции векторного поля можно использовать не только каноническую, но и любую ортонормированную систему координат.

Последний результат можно установить и другим способом. По теореме о среднем при $a \in \mathcal{O}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{\alpha_m \varepsilon^m} \int_{B(a,\varepsilon)} \operatorname{div} V(x)\, dx = \operatorname{div} V(x_\varepsilon), \qquad \text{где} \;\; x_\varepsilon \in B(a,\varepsilon).$$

Поэтому

$$\operatorname{div} V(a) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\alpha_m \varepsilon^m} \int_{B(a,\varepsilon)} \operatorname{div} V(x)\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\alpha_m \varepsilon^m} \int_{\|x-a\|=\varepsilon} \big\langle V(x), \nu(x) \big\rangle\, d\sigma(x).$$

Отсюда видно, что значение $\operatorname{div} V(a)$ не связано с выбором системы координат.

Если смотреть на V как на поле скоростей несжимаемой жидкости, то поток через границу тела может быть отличен от нуля лишь при наличии в этом теле источников (если поток положителен) или стоков (если поток отрицателен). Величина $\frac{1}{\alpha_m \varepsilon^m} \int_{\|x-a\|=\varepsilon} \langle V(x), \nu(x) \rangle\, d\sigma(x)$, стоящая в правой части последнего равенства, характеризует среднюю интенсивность источников в шаре $B(a,\varepsilon)$, а её предел — $\operatorname{div} V(a)$ — интенсивность источников в точке a.

Пример (*закон Архимеда**)). Покажем, как с помощью формулы Гаусса–Остроградского можно вывести закон Архимеда из закона Паскаля**). Напомним, что в силу закона Паскаля давление жидкости на погружённую в неё площадку направлено по нормали к площадке и равно весу столба жидкости, основанием которого служит эта площадка, а высотой — глубина погружения.

Вычислим архимедову силу, действующую на тело $K \subset \mathbb{R}^3$, погруженное в жидкость (для простоты её плотность будем считать равной единице). Для этого введём декартовы координаты, совместив плоскость OXY с поверхностью жидкости, а ось OZ направив вниз. В каждой точке $(x,y,z) \in \partial K$ на тело K действует сила давления $F(x,y,z) = -z\nu(x,y,z)$, где $\nu(x,y,z)$ — единичная внешняя нормаль к ∂K. Результирующая, т. е. архимедова сила $\iint_{\partial K} (-z)\nu(x,y,z)\, d\sigma(x,y,z)$ имеет координаты

$$F_x = -\iint_{\partial K} z \left\langle \nu(x,y,z), e_1 \right\rangle d\sigma(x,y,z),$$
$$F_y = -\iint_{\partial K} z \left\langle \nu(x,y,z), e_2 \right\rangle d\sigma(x,y,z),$$
$$F_z = -\iint_{\partial K} z \left\langle \nu(x,y,z), e_3 \right\rangle d\sigma(x,y,z).$$

Записав первое из этих равенств в виде $F_x = \iint_{\partial K} \langle V, \nu \rangle d\sigma$, где $V(x,y,z) = (-z,0,0)$, с помощью формулы Гаусса–Остроградского мы получаем

$$F_x = \iiint_K \operatorname{div} V(x,y,z)\, dxdydz = \iiint_K 0\, dxdydz = 0.$$

---

*) **Архимед** (*Ἀρχιμήδης*), около 287–212 до н. э., — древнегреческий математик и механик.

) Блез **Паскаль (Pascal), 1623–1662, — французский философ, математик и физик.

Точно так же проверяется равенство $F_y = 0$. Вертикальная составляющая архимедовой силы выражается через дивергенцию поля $\widetilde{V}(x,y,z) = (0,0,-z)$ и равна

$$F_z = \iint_{\partial K} \big\langle \widetilde{V}(x,y,z), \nu(x,y,z) \big\rangle \, d\sigma(x,y,z) = \iiint_K \operatorname{div} \widetilde{V}(x,y,z) \, dxdydz = \\ = \iiint_K (-1) \, dxdydz = -\lambda_3(K).$$

Таким образом, на тело, помещённое в жидкость с единичной плотностью, действует вертикальная выталкивающая сила, численно равная его объёму.

6.7. *Формула Грина.* Отметим двумерный случай формулы Гаусса–Остроградского. Пусть K — стандартный компакт в $\mathbb{R}^2$ и ν — его внешняя сторона. На регулярной части L границы ∂K сторона ν согласована с направлением $\tau = U(\nu)$ (см. п. 5.4). Пару $(\partial K, \tau)$ назовём *ориентированной границей* плоского стандартного компакта K и будем обозначать её символом $\partial^+ K$.

Для поля $V = (V_1, V_2)$, гладкого в окрестности компакта K, векторная форма формулы Гаусса–Остроградского (11) даёт нам:

$$\iint_K \operatorname{div} V(x,y) \, dx \, dy = \int_{\partial K} \big\langle V(x,y), \nu(x,y) \big\rangle \, d\sigma_1(x,y).$$

Благодаря равенству (5) п. 5.4 это можно переписать в виде

$$\iint_K \Big(\frac{\partial V_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial V_2}{\partial y}(x,y) \Big) \, dx \, dy = \int_{\partial^+ K} -V_2(x,y) \, dx + V_1(x,y) \, dy.$$

Полагая $P = -V_2$, $Q = V_1$, мы приходим к важному результату — формуле Грина*):

$$\iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \int_{\partial^+ K} P(x,y) \, dx + Q(x,y) \, dy.$$

В частности, формула Грина позволяет представить площадь стандартного компакта в виде криволинейного интеграла по его границе: взяв функции $P(x,y) \equiv 0$, $Q(x,y) \equiv x$ или $P(x,y) \equiv -y$, $Q(x,y) \equiv 0$, мы получим

$$\lambda_2(K) = \int_{\partial^+ K} x \, dy = -\int_{\partial^+ K} y \, dx = \frac{1}{2} \int_{\partial^+ K} -y \, dx + x \, dy.$$

В предыдущем параграфе отмечалось (см. пример п. 5.2), что интеграл по замкнутой ориентированной кривой от локально потенциального поля может быть отличен от нуля. Вместе с тем, очевидно, справедливо вытекающее из формулы Грина

Следствие 1. *Пусть $V = (P,Q)$ — локально потенциальное гладкое в области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$ векторное поле, $K \subset \mathcal{O}$ — стандартный компакт с ориентированной границей. Тогда*

$$\int_{\partial^+ K} P(x,y) \, dx + Q(x,y) \, dy = 0.$$

*) Джордж **Грин** (Green), 1793–1841, — английский математик и физик.

Следствие даёт простое геометрическое условие, при котором интеграл от локально потенциального поля по замкнутой кривой равен нулю. Это так, если кривая "ограничивает в $\mathcal{O}$", т. е. совпадает с границей некоторого содержащегося в $\mathcal{O}$ стандартного компакта. В противном случае (например, если кривая "охватывает" точку, не принадлежащую области) нетрудно указать локально потенциальное гладкое в $\mathcal{O}$ векторное поле, которое имеет ненулевой интеграл вдоль этой кривой (см. пример п. 5.2).

Отметим один важный частный случай следствия 1, относящийся к голоморфным функциям. Пусть $L \subset \mathbb{C}$ — ориентированная кусочно-гладкая кривая, лежащая в области определения непрерывной комплекснозначной функции f, и пусть $g = \mathcal{R}e\, f$, $h = \mathcal{I}m\, f$. Руководствуясь результатом формального перемножения $f(z)\,dz = (g + i\,h)(dx + i\,dy) = (g\,dx - h\,dy) + i(h\,dx + g\,dy)$, под интегралом $\int_L f(z)\,dz$ будем по определению понимать сумму $\int_L g\,dx - h\,dy + i\int_L h\,dx + g\,dy$. Легко видеть, что $\int_L f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$ для гладкой параметризации γ, согласованной с ориентацией кривой L.

Следствие 2 (теорема Коши). *Если функция f имеет непрерывную производную $\frac{df}{dz}$ в области $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}$ и $K \subset \mathcal{O}$ — стандартный компакт, то $\int_{\partial^+ K} f(z)\,dz = 0$.*

Доказательство. По условию функции $g = \mathcal{R}e\, f$ и $h = \mathcal{I}m\, f$ входят в класс $C^1(\mathcal{O})$. При этом выполняются условия Коши–Римана: $g'_x = h'_y$, $h'_x = -g'_y$, что обеспечивает локальную потенциальность полей $(g, -h)$ и (h, g) (см. п. 5.2, следствие из предложения 3). Поэтому равенства

$$\int_{\partial^+ K} g\,dx - h\,dy = 0 \quad \text{и} \quad \int_{\partial^+ K} h\,dx + g\,dy = 0$$

вытекают из следствия 1. ►

УПРАЖНЕНИЯ

Пусть K — стандартный компакт в $\mathbb{R}^m$, ν — внешняя сторона его границы.

1) Докажите, что $\int_{\partial K} \nu(x)\,d\sigma(x) = 0$ (это равенство следует понимать покоординатно).

2) Как отмечено в примере п. 6.5, $\lambda(K) = \frac{1}{m}\int_{\partial K} \langle x, \nu(x)\rangle\,d\sigma(x)$. Обобщая этот результат, докажите, что

$$\int_{\partial K} L(x, \nu(x))\,d\sigma(x) = \lambda(K)\sum_{j=1}^{m} L(e_j, e_j)$$

для любой билинейной формы L, заданной в $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. В частности, при $m = 3$ отсюда следует равенство $\int_{\partial K} x \times \nu(x)\,d\sigma(x) = 0$ (символ $x \times y$ обозначает векторное произведение векторов x и y).

3) Докажите такой вариант формулы интегрирования по частям для функций нескольких переменных:

$$\int_K \frac{\partial f}{\partial e}(x)\cdot g(x)\,dx = \int_{\partial K} f(x)\,g(x)\,\langle \nu(x), e\rangle\,d\sigma(x) - \int_K f(x)\cdot\frac{\partial g}{\partial e}(x)\,dx$$

(функции f и g непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности K, e — произвольный орт в $\mathbb{R}^m$).

4) Пусть функция f непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности K, $y \in \mathbb{R}^m$. Докажите, что

$$\int_K f(x)\, e^{i\langle x,y\rangle} dx = \frac{1}{i\|y\|^2}\left(\int_{\partial K} f(x)\langle \nu(x), y\rangle\, e^{i\langle x,y\rangle}\, d\sigma(x) - \int_K \big\langle \operatorname{grad} f(x), y\big\rangle\, e^{i\langle x,y\rangle} dx\right).$$

В частности, отсюда следует, что $\int_K f(x)\, e^{i\langle x,y\rangle} dx = O\left(\frac{1}{1+\|y\|}\right)$.

5) Батискаф, имеющий форму эллипсоида, вертикальная полуось которого равна c, опускается в море глубиной $H > 2c$. Если он частично погружается в донный грунт, то находящаяся в грунте часть поверхности батискафа не испытывает давления воды. Поэтому выталкивающая сила уменьшается (батискаф наполовину ушедший в грунт уже не выталкивается, а напротив, прижимается водой ко дну). Считая, что средняя плотность батискафа ρ меньше 1 (плотности воды), оцените ту глубину h его погружения в грунт, при которой плавучесть батискафа исчезает. Убедитесь в том, что эта величина почти обратно пропорциональна глубине моря, точнее $\frac{2}{3}(1-\rho)\,\frac{c^2}{H} < h < \frac{2}{3}(1-\rho)\,\frac{c^2}{H-c}$.

6) Убедитесь, что дискретное множество, образованное точками $(\frac{1}{n}, \sin\sqrt{n}\,)$ $(n \in \mathbb{N})$, не пренебрежимо на плоскости.

7) Приведите пример гладкой кривой в $\mathbb{R}^3$, которая ограничена, но не пренебрежима.

8) Докажите, что лемма 6.4 перестаёт быть верной, если K содержится в объединении двух гладких кривых. Указание. Рассмотрите на плоскости $\mathbb{R}^2$ объединение оси ординат L и графика функции $x \mapsto f(x) = \sin\frac{1}{x}$ $(x > 0)$. Пусть $K = ([0,1]\times\mathcal{C})\cap(L\cup\Gamma_f)$, где $\mathcal{C}$ — канторово множество. Убедитесь, что множество K не пренебрежимо, хотя $\sigma_1(K) = 0$.

9) Убедитесь, что лежащая в $\mathbb{R}^3$ кривая конечной длины пренебрежима, если она связна, и что от последнего условия отказаться нельзя.

§ 7. Гармонические функции

Всюду в этом параграфе $\mathcal{O}$ — область в $\mathbb{R}^m$, K — лежащий в $\mathcal{O}$ стандартный компакт, ν — его внешняя сторона. Как и в предыдущем параграфе, σ — площадь поверхности пропорциональная мере Хаусдорфа μ_{m-1} . Символы $B(a,r)$ и $S(a,r)$ обозначают соответственно открытый шар и сферу в $\mathbb{R}^m$ с центром a и радиусом r (указания на размерность для краткости опускаются). Кроме того, положим

$$B = B(0,1), \quad S = S(0,1), \quad s(r) = \sigma\big(S(0,r)\big), \quad v(r) = \lambda_m\big(B(0,r)\big).$$

7.1. Отображение $U \mapsto \sum\limits_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 U}{\partial x_k^2}$, определённое на $C^2(\mathcal{O})$, обозначается символом Δ и называется *оператором Лапласа.* Ясно, что $\Delta U = \operatorname{div}\operatorname{grad} U$.

Поскольку оператор Лапласа есть композиция градиента и дивергенции, он не зависит от выбора ортонормированной системы координат (вопреки первому впечатлению, которое может сложиться исходя из его определения). В этом можно ещё раз убедиться следующим образом.

Пусть $U \in C^2(\mathcal{O})$, $B(a,R) \subset \mathcal{O}$. Согласно формуле Тейлора

$$U(x) = U(a) + d_a U(x-a) + \frac{1}{2} d_a^2 (x-a) + o\big(\|x-a\|^2\big).$$

Проинтегрируем это равенство по сфере $S(a,r)$ при $0 < r < R$. Поскольку

$$\int_{S(a,r)} (x_j - a_j)\, d\sigma(x) = 0 \quad \text{и} \quad \int_{S(a,r)} (x_j - a_j)(x_k - a_k)\, d\sigma(x) = 0 \quad \text{для любых} \quad j,k,\ j \neq k,$$

мы получим, что

$$\int_{S(a,r)} U(x)\, d\sigma(x) = s(r)U(a) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} U''_{x_j^2}(a) \int_{S(a,r)} (x_j - a_j)^2\, d\sigma(x) + o(r^{m+1}).$$

Так как

$$\int_{S(a,r)} (x_j - a_j)^2\, d\sigma(x) = \frac{1}{m} \int_{S(a,r)} \|x-a\|^2\, d\sigma(x) = \frac{r^2}{m} s(r),$$

то

$$\frac{1}{s(r)} \int_{S(a,r)} U(x)\, d\sigma(x) = U(a) + \frac{r^2}{2m} \Delta U(a) + o(r^2)$$

и, следовательно, значение ΔU в точке a можно найти, зная средние значения функции на сферах с центром в этой точке:

$$\Delta U(a) = \lim_{r \to 0} \frac{2m}{r^2} \left(\frac{1}{s(r)} \int_{S(a,r)} U(x)\, d\sigma(x) - U(a) \right).$$

Определение. Функция $U \in C^2(\mathcal{O})$ называется *гармонической в* $\mathcal{O}$, если $\Delta U(x) = 0$ при всех $x \in \mathcal{O}$.

Мы будем рассматривать только вещественные гармонические функции, поскольку при переходе от комплекснозначной функции к её вещественной и мнимой частям гармоничность сохраняется.

Очевидно, что гармонические в $\mathcal{O}$ функции образуют векторное пространство. В одномерном случае — это просто множество всех полиномов не выше первой степени. Поэтому далее мы считаем $m > 1$. В этом случае класс гармонических функций весьма широк и играет важную роль как в математике, так и в её приложениях. Например, температура тела, в котором поддерживается стационарный тепловой режим и отсутствуют участки, выделяющие или поглощающие тепло, есть гармоническая функция; если поле скоростей несжимаемой однородной жидкости является градиентом некоторой функции, то, как вытекает из формулы Гаусса–Остроградского, эта функция должна быть гармонической.

В качестве примера гармонической функции в первую очередь приведём, считая, что $m \geqslant 3$, *точечный потенциал* $\mathcal{N}_a$ с полюсом в точке a:

$$\mathcal{N}_a(x) = \frac{1}{\|x-a\|^{m-2}} \quad (x \neq a).$$

Точечные потенциалы, их линейные комбинации и особенно свёртки этих потенциалов и их частных производных с различными мерами играют чрезвычайно важную роль при решении многих задач, связанных с гармоническими функциями. Таковы, в частности, интегралы вида $\int_E \frac{d\mu(y)}{\|x-y\|^{m-2}}$, называемые ньютоновыми потенциалами, соответствующими мере μ, сосредоточенной на множестве E.

Отметим равенство

$$\operatorname{grad}\mathcal{N}_a(x) = -(m-2)\,\frac{x-a}{\|x-a\|^m}, \tag{1}$$

которое будет нам полезно в дальнейшем. При $m=3$ оно показывает, что градиент $\mathcal{N}_a$ с точностью до постоянного множителя совпадает с напряжённостью гравитационного или электростатического поля, порождённого массой или зарядом, сосредоточенными в точке a.

В двумерном случае вместо $\mathcal{N}_a$ используется *логарифмический потенциал*: $x \mapsto \ln \frac{1}{\|x-a\|}$. Выкладки, необходимые для проверки гармоничности потенциалов, читатель без труда проведёт самостоятельно.

Если L — движение или гомотетия в $\mathbb{R}^m$, то для гармонической функции U композиция $U \circ L$, как легко проверить, также гармонична (для произвольного линейного отображения это неверно).

7.2. Здесь мы получим некоторые важные следствия формулы Гаусса–Остроградского, справедливые на всём классе C^2. Их применение к гармоническим функциям приводит, как мы убедимся, к замечательным результатам. Первое из этих следствий, как и формула п. 6.7, связано с именем Грина.

Далее символом $\frac{\partial U}{\partial \nu}(x)$ обозначается величина $\langle \operatorname{grad} U(x), \nu(x)\rangle$ — производная функции U в точке $x \in \partial K$ по направлению внешней нормали $\nu(x)$.

Теорема 1 (Грин). *Пусть $U, V \in C^2(\mathcal{O})$. Тогда*

$$\int_K \big(U(x)\Delta V(x) - V(x)\Delta U(x)\big)\,dx = \int_{\partial K} \left(U(x)\,\frac{\partial V}{\partial \nu}(x) - V(x)\frac{\partial U}{\partial \nu}(x)\right)\,d\sigma(x). \tag{2}$$

Взяв $V \equiv 1$, мы получим полезное равенство

$$\int_K \Delta U(x)\,dx = \int_{\partial K} \frac{\partial U}{\partial \nu}(x)\,d\sigma(x). \tag{2'}$$

Доказательство. Достаточно применить формулу Гаусса–Остроградского (см. равенство (11) в п. 6.6) к векторному полю $U\operatorname{grad} V - V\operatorname{grad} U$, дивергенция которого совпадает с $U\Delta V - V\Delta U$. ▶

Следующая формула, будучи справедливой при $m \geqslant 2$, при $m=2$ не даёт ничего нового, поскольку в этом случае она сводится к равенству (2′). Её содержательный аналог в двумерном случае возникает, если заменить точечный потенциал логарифмическим (см. упр. 3).

Теорема 2. *Пусть $U \in C^2(\mathcal{O})$. Тогда для любой точки $x \in \operatorname{Int}(K)$ справедливо равенство*

$$(m-2)s(1)U(x) = -\int_K \frac{\Delta U(y)}{\|y-x\|^{m-2}}dy + \\ + \int_{\partial K} \frac{\partial U}{\partial \nu}(y)\,\frac{d\sigma(y)}{\|y-x\|^{m-2}} + (m-2)\int_{\partial K} U(y)\frac{\langle y-x, \nu(y)\rangle}{\|y-x\|^m}\,d\sigma(y). \tag{3}$$

Замечание. В математической физике интегралы вида

$$\int_K \frac{\omega(y)\,dy}{\|y-x\|^{m-2}}, \quad \int_{\partial K} \frac{\omega(y)\,d\sigma(y)}{\|y-x\|^{m-2}} \quad \text{и} \quad \int_{\partial K} \omega(y)\frac{\langle y-x, \nu(y)\rangle}{\|y-x\|^m}\,d\sigma(y)$$

играют большую роль. Их называют соответственно объёмным потенциалом, потенциалом простого слоя и потенциалом двойного слоя.

Доказательство. Чтобы можно было воспользоваться формулой (2) с функцией $V = \mathcal{N}_x$, слегка "исправим" компакт K. Так как x — его внутренняя точка, то $\overline{B}(x,r) \subset \operatorname{Int}(K)$ при достаточно малом $r > 0$. Множество $K_r = K \setminus B(x,r)$, как и K, — стандартный компакт. Его граница есть объединение ∂K и сферы $S(x,r) = \partial B(x,r)$. Заметим, что в точках этой сферы единичная внешняя нормаль $\nu(y)$ к K_r противоположна внешней нормали к шару $\overline{B}(x,r)$, которая, очевидно, совпадает с $\frac{y-x}{\|y-x\|}$. Поэтому на сфере $S(x,r)$ производная от $\mathcal{N}_x$ по внешней для K_r нормали совпадает с $\frac{m-2}{\|y-x\|^{m-1}}$ (см. (1)). Применим формулу (2) к компакту K_r, учитывая гармоничность функции $\mathcal{N}_x$:

$$-\int_{K_r} \frac{\Delta U(y)}{\|y-x\|^{m-2}}\,dy = \int_{\partial K}\left(U(y)\frac{\partial \mathcal{N}_x}{\partial \nu}(y) - \mathcal{N}_x(y)\frac{\partial U}{\partial \nu}(y)\right)d\sigma(y) + \\ + \int_{S(x,r)}\left(U(y)\frac{m-2}{\|y-x\|^{m-1}} - \frac{1}{\|y-x\|^{m-2}}\frac{\partial U}{\partial \nu}(y)\right)d\sigma(y) = \\ = \int_{\partial K}\left(U(y)\frac{\partial \mathcal{N}_x}{\partial \nu}(y) - \mathcal{N}_x(y)\frac{\partial U}{\partial \nu}(y)\right)d\sigma(y) + \\ + \frac{m-2}{r^{m-1}}\int_{S(x,r)} U(y)\,d\sigma(y) - \frac{1}{r^{m-2}}\int_{S(x,r)}\frac{\partial U}{\partial \nu}(y)\,d\sigma(y).$$

При $r \to 0$ последнее слагаемое есть, очевидно, $O(r)$, а предпоследнее стремится к $(m-2)s(1)\,U(x)$, как это следует из теоремы о среднем (см. п. IV.7.2). Кроме того, интеграл по K_r, стоящий в левой части равенства, стремится к интегралу по компакту K. Поэтому переходя к пределу при $r \to 0$, мы получаем

$$-\int_K \frac{\Delta U(y)}{\|y-x\|^{m-2}}\,dy = \int_{\partial K}\left(U(y)\frac{\partial \mathcal{N}_x}{\partial \nu}(y) - \mathcal{N}_x(y)\frac{\partial U}{\partial \nu}(y)\right)d\sigma(y) + (m-2)\,s(1)\,U(x),$$

что ввиду (1) равносильно равенству (3). ►

7.3. Приведём несколько относящихся к гармоническим функциям следствий, непосредственно вытекающих из теорем 1 и 2.

Отметим прежде всего необходимое условие гармоничности, являющееся частным случаем равенства (2′): если функция U гармонична в $\mathcal{O}$, то

$$\int_{\partial K} \frac{\partial U}{\partial \nu}(y)\, d\sigma(y) = 0 \tag{2''}$$

для любого стандартного компакта $K \subset \mathcal{O}$. Оказывается, это условие не только необходимо, но и достаточно для гармоничности C^2-гладкой функции, причём в усиленной форме.

Предложение. *Для гармоничности в $\mathcal{O}$ функции $U \in C^2(\mathcal{O})$ достаточно, чтобы $\int_{\partial \overline{B}} \frac{\partial U}{\partial \nu}(y)\, d\sigma(y) = 0$ для любого содержащегося в $\mathcal{O}$ замкнутого шара $\overline{B}$.*

Иными словами, функция гармоническая, если поток её градиента “наружу” из любого содержащегося в $\mathcal{O}$ шара равен нулю.

Доказательство. Из равенства (2′) вытекает, что функция ΔU имеет нулевой интеграл по любому шару $\overline{B}(x,r) \subset \mathcal{O}$. Следовательно, $\Delta U(y_r) = 0$ для некоторой точки y_r из $\overline{B}(x,r)$. Поэтому $\Delta U(x) = \lim\limits_{r\to 0} \Delta U(y_r) = 0$, что завершает доказательство ввиду произвольности точки x. ▶

В следующей теореме устанавливается замечательное свойство гармонической функции. Оказывается, по её значениям, принимаемым вблизи границы компакта, можно определить значения во внутренних точках. Этот результат — интегральное представление гармонической функции — играет основополагающую роль в теории гармонических функций.

Теорема. *Если функция U гармонична в $\mathcal{O}$, то*

$$\frac{1}{s(1)} \int_{\partial K} \left(U(y) \frac{\langle y-x, \nu(y)\rangle}{\|y-x\|^m} + \frac{1}{m-2} \frac{\partial U(y)}{\partial \nu} \frac{1}{\|y-x\|^{m-2}} \right) d\sigma(y) = \\ = \begin{cases} U(x), & \text{если } x \in \operatorname{Int}(K), \\ 0, & \text{если } x \notin K. \end{cases} \tag{4}$$

Доказательство. Для внутренней точки x это прямое следствие из (3), а для внешней — из равенства (2) с гармонической функцией $V = \mathcal{N}_x$, если заметить, что $\frac{\partial \mathcal{N}_x}{\partial \nu}(y) = -(m-2)\frac{\langle y-x,\nu(y)\rangle}{\|y-x\|^m}$ в силу (1). ▶

Функции $x \mapsto \frac{\langle y-x,\nu(y)\rangle}{\|y-x\|^m}$ и $x \mapsto \frac{1}{\|y-x\|^{m-2}}$ бесконечно дифференцируемы в $\operatorname{Int}(K)$ при любом $y \in \partial K$. Это приводит к важному следствию.

Следствие. *Гармоническая функция бесконечно дифференцируема.*

Поскольку дифференцируемость есть локальное свойство, для доказательства достаточно рассмотреть произвольную точку $a \in \mathcal{O}$ и применить формулу (4) к замкнутому шару $K = \overline{B}(a,r)$. Дифференцируемость интеграла в шаре (а вместе с нею и бесконечная дифференцируемость) вытекает из теоремы VII.1.5 и замечания к ней. ▶

Отметим интересный частный случай формулы (4). Взяв $U \equiv 1$, мы получим *интеграл Гаусса*

$$\int_{\partial K} \frac{\langle y-x, \nu(y)\rangle}{\|y-x\|^m}\, d\sigma(y) = \begin{cases} s(1), & \text{если } x \in \operatorname{Int}(K), \\ 0, & \text{если } x \notin K. \end{cases} \tag{4'}$$

Аналоги формул (4) и (4′) для двумерного случая возникают, если заменить потенциал $\mathcal{N}_x$ логарифмическим (см. упр. 3).

Замечание. Интегральное представление (4) позволяет дополнить равенство (4′) следующим образом (см. упр. 5): если C — конус с вершиной в нуле и настолько хорошей границей, что $K \cap C$ есть стандартный компакт, то

$$\int_{C\cap\partial K} \frac{\langle y, \nu(y)\rangle}{\|y\|^m}\, d\sigma(y) = \begin{cases} \sigma(S\cap C), & \text{если } 0 \in \operatorname{Int}(K), \\ 0, & \text{если } 0 \notin K. \end{cases}$$

Таким образом, интеграл в левой части формулы можно истолковать как меру телесного угла, под которым из начала координат видна часть границы компакта K, лежащая в C. Говоря о мере телесного угла, следует иметь в виду, что участок границы, взаимно однозначно отображаемый при центральном проектировании в единичную сферу, измеряется площадью проекции, которая берётся со знаком “+”, если из начала координат видна внутренняя сторона участка (в его пределах лучи зрения образуют острые углы с внешними нормалями к ∂K), и со знаком “−” в противном случае (см. рис. 16, соответствующий двумерной ситуации).

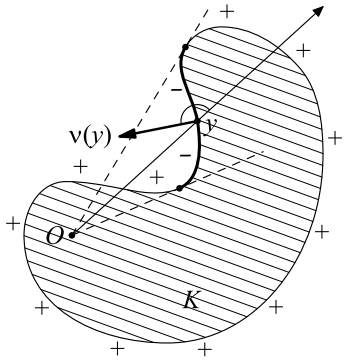


Рис. 16.

7.4. Теорема. *Если две гармонические в области функции совпадают в некотором шаре, то они совпадают всюду.*

В основе доказательства этой теоремы лежит аналитичность гармонической функции. Она вытекает из доказываемой в п. 7.10 формулы Пуассона (14). Здесь мы ограничимся тем, что установим более слабую, но достаточную для наших целей версию этого свойства — аналитичность гармонической функции “вдоль отрезков”.

Лемма. *Если функция U гармонична в $\mathcal{O}$, то для любой точки $a \in \mathcal{O}$ и любого вектора $e \in \mathbb{R}^m$ функция $\varphi\colon t \mapsto U(a+te)$ разлагается в степенной ряд на достаточно малом интервале $(-\delta, \delta) \subset \mathbb{R}$.*

Доказательство. Пусть $K \subset \mathcal{O}$ — стандартный компакт (например, шар), для которого a — внутренняя точка. Ради упрощения формул будем считать, что $a = 0$. Тогда из интегрального представления (4) следует равенство

$$\varphi(t) = \frac{1}{s(1)} \int_{\partial K} \left(U(y) \frac{\langle y - te, \nu(y) \rangle}{\|y - te\|^m} + \frac{1}{m-2} \frac{\partial U(y)}{\partial \nu} \frac{1}{\|y - te\|^{m-2}} \right) d\sigma(y).$$

Для любого $y \in \partial K$ функции $t \mapsto \frac{\langle y-te, \nu(y) \rangle}{\|y-te\|^m}$ и $t \mapsto \frac{1}{\|y-te\|^{m-2}}$ разлагаются в степенные ряды по степеням t. При этом радиус сходимости не меньше $\frac{\|y\|}{\|e\|}$ и, следовательно, отделён от нуля положительной величиной. Поэтому нужный нам результат получается почленным интегрированием этих рядов. ►

Доказательство теоремы. Не умаляя общности можно считать, что одна из этих функций всюду равна нулю (иначе следует рассмотреть их разность). Поэтому надо доказать, что из обращения гармонической функции U в нуль вблизи точки a следует, что $U(x) = 0$ для любого x из области. Поскольку любые две точки области можно соединить лежащей в ней ломаной, нам достаточно рассмотреть случай, когда отрезок с концами a и x лежит в $\mathcal{O}$. По лемме функция $\varphi(t) = U(a+t(x-a))$ аналитична на $[0, 1]$, а так как она равна нулю для малых t, то по теореме единственности для аналитических функций $\varphi \equiv 0$. В частности, $U(x) = \varphi(1) = 0$. ►

7.5. Как следует из интегрального представления, значения гармонической функции во внутренних точках стандартного компакта определяются значениями функции и её нормальной производной на его границе. Отсюда вытекают фундаментальные свойства гармонических функций. Первое из них таково.

Теорема (о среднем для гармонических функций). *Пусть функция U гармонична в $\mathcal{O}$. Тогда она обладает свойством среднего значения: для любого замкнутого шара $\overline{B}(x, r)$, содержащегося в $\mathcal{O}$, справедливо равенство*

$$U(x) = \frac{1}{s(r)} \int_{S(x,r)} U(y)\, d\sigma(y). \tag{5}$$

Доказательство. Воспользуемся формулой (4), взяв в качестве компакта шар $\overline{B}(x, r)$ (в двумерном случае вместо (4) используется результат упр. 3). Тогда $\|y-x\| = r$ и $\nu(y) = \frac{y-x}{r}$. Поэтому

$$U(x) = \frac{1}{s(1)} \int_{S(x,r)} \left(U(y) \frac{\left\langle y - x, \frac{y-x}{r} \right\rangle}{r^m} + \frac{1}{m-2} \frac{\partial U(y)}{\partial \nu} \frac{1}{r^{m-2}} \right) d\sigma(y).$$

Поскольку интеграл от нормальной производной равен нулю — см. (2″), отсюда следует, что

$$U(x) = \frac{1}{s(1)} \int_{S(x,r)} U(y) \frac{d\sigma(y)}{r^{m-1}} = \frac{1}{s(r)} \int_{S(x,r)} U(y)\, d\sigma(y). \quad ►$$

Следствие. *В предположениях теоремы справедливо равенство*

$$U(x) = \frac{1}{v(r)} \int_{B(x,r)} U(y)\, dy. \tag{5'}$$

Для доказательства достаточно заметить, что $s(\rho)U(x) = \int_{S(x,\rho)} U(z)\,d\sigma(z)$ при $0 < \rho < r$, и поэтому

$$v(r)U(x) = \int_0^r s(\rho)U(x)\,d\rho = \int_0^r \left(\int_{S(x,\rho)} U(z)\,d\sigma(z)\right) d\rho = \int_{B(x,r)} U(z)\,dz$$

(последнее равенство справедливо согласно формуле (3) п. 4.2). ►

Отметим одно важное свойство функций, гармонических во всём пространстве, известное как теорема Лиувилля.

Теорема. *Если гармоническая в $\mathbb{R}^m$ функция U ограничена, то она постоянна.*

Доказательство. Убедимся, что $U(x) = U(0)$ при любом $x \in \mathbb{R}^m$. Пусть $C = \sup|U|$. По следствию из теоремы о среднем при любом $r > 0$

$$U(0) = \frac{1}{v(r)} \int_{B(0,r)} U(y)\,dy, \qquad U(x) = \frac{1}{v(r)} \int_{B(x,r)} U(y)\,dy.$$

Следовательно,

$$|U(0) - U(x)| \leqslant \frac{1}{v(r)} \int_{E_r} |U(y)|\,dy \leqslant C\frac{\lambda_m(E_r)}{v(r)},$$

где E_r — множество, образованное точками, попадающими лишь в один из шаров $B(0,r)$ и $B(x,r)$. Оно содержится в сферическом слое $\{y \mid r - \|x\| \leqslant \|y\| \leqslant r + \|x\|\}$, объём которого есть $O(r^{m-1})$. Следовательно, $\lambda_m(E_r) = O(r^{m-1})$ и $|U(0) - U(x)| = O\left(\frac{1}{r}\right)$ при $r \to +\infty$. Поэтому $U(x) = U(0)$. ►

В действительности доказано несколько больше, чем утверждается в теореме: гармоническая в $\mathbb{R}^m$ функция U постоянна, если $U(x) = o\big(\|x\|\big)$ при $\|x\| \to +\infty$. Пример линейной функции показывает, что условие $U(x) = o\big(\|x\|\big)$ нельзя заменить на $U(x) = O\big(\|x\|\big)$. Можно доказать (см. упр. 11), что среди гармонических в $\mathbb{R}^m$ функций степенно́й оценке роста $U(x) = O\big(\|x\|^p\big)$ при $\|x\| \to +\infty$ удовлетворяют только многочлены.

Условие теоремы можно ослабить, предположив лишь одностороннюю ограниченность гармонической функции (см. следствие 7.11).

7.6. Оказывается, свойство среднего значения полностью характеризует гармонические функции. Точнее, справедлива

Теорема. *Если локально суммируемая в $\mathcal{O}$ функция U удовлетворяет равенству $(5')$ для любого замкнутого шара $\overline{B}(x,r) \subset \mathcal{O}$, то она бесконечно дифференцируема и гармонична в $\mathcal{O}$.*

Отметим, что бесконечную дифференцируемость рассматриваемой функции мы докажем, не опираясь на интегральное представление (4), как это делалось выше.

Доказательство. Гармоничность C^2–гладкой функции, удовлетворяющей равенству $(5')$, доказывается просто. Действительно, в этом случае повторное дифференцирование равенства

$$U(x) = \frac{1}{v(1)} \int_B U(x + ry)\,dy$$

по r даёт нам:

$$0 = \int_B \sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial^2 U(x+ry)}{\partial x_j\, \partial x_k} y_j y_k \, dy.$$

Перейдя к пределу при $r \to 0$, мы получим

$$0 = \sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_j\, \partial x_k} \int_B y_j y_k \, dy = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 U(x)}{\partial x_k^2} \int_B y_k^2 \, dy.$$

Интегралы $\int_B y_k^2 \, dy$, очевидно, равны. Поэтому $\Delta U(x) = 0$ в каждой точке $x \in \mathcal{O}$.

Докажем теперь гладкость функции U. Для этого мы воспользуемся стандартной в таких задачах схемой, сглаживая U с помощью свёртки с финитной функцией. Поскольку гладкость есть локальное свойство, мы можем при доказательстве считать, что U локально суммируема во всём пространстве (в противном случае можно заменить $\mathcal{O}$ достаточно малым шаром и доопределить U нулём вне его).

Заметим прежде всего, что из $(5')$ вытекает непрерывность U. В самом деле, пусть $a \in \mathcal{O}$ и $B(a, 2r) \subset \mathcal{O}$. Тогда при $x \in B(a, r)$

$$|U(x) - U(a)| = \frac{1}{v(r)} \left| \int_{B(x,r)} U(y)\, dy - \int_{B(a,r)} U(y)\, dy \right| \leqslant \frac{1}{v(r)} \int_{e_x} |U(y)|\, dy,$$

где e_x — симметрическая разность шаров $B(x, r)$ и $B(a, r)$, мера которой бесконечно мала при $x \to a$. В силу абсолютной непрерывности интеграла (см. п. IV.5.2) это влечёт непрерывность U в точке a.

Учитывая непрерывность U и дифференцируя по r вытекающее из $(5')$ равенство

$$v(r)U(x) = \int_{B(x,r)} U(y)\, dy = \int_0^r \left(\int_{S(x,t)} U(y)\, d\sigma(y) \right) dt$$

(см. формулу (3) в 4.2), мы видим, что U обладает свойством среднего значения. Зафиксируем теперь неотрицательную функцию $\psi \not\equiv 0$ из $C^\infty(\mathbb{R})$, равную нулю вне $[0, r^2]$, и положим $\varphi(x) = \psi\big(\|x\|^2\big)$. Пользуясь свойством среднего значения, мы имеем при $x \in B(a, r)$:

$$(U * \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^m} U(x-y)\psi\big(\|y\|^2\big)\, dy = \int_0^r \psi(t^2) \left(\int_{S(0,t)} U(x-y)\, d\sigma(y) \right) dt =$$
$$= U(x) \int_0^r s(t)\psi(t^2)\, dt.$$

Здесь $s(t) = \sigma\big(S(0,t)\big) > 0$, вследствие чего $\int_0^r s(t)\psi(t^2)\, dt > 0$. Таким образом, в шаре $B(a, r)$ функция U пропорциональна свёртке $U * \varphi$, которая бесконечно дифференцируема (см. следствие VII.5.4). ▶

Следствие. *Если последовательность функций гармонических в области $\mathcal{O}$ сходится к функции U равномерно на каждом компактном множестве, лежащем в $\mathcal{O}$, то U — гармоническая функция.*

Действительно, функция U непрерывна и обладает свойством среднего значения. ▶

7.7. Теорема (принцип максимума для гармонических функций). *Если гармоническая в области функция не постоянна, то она не имеет локальных экстремумов.*

Отсюда сразу следует, что гармоническая функция постоянна, если её модуль достигает наибольшего значения.

Доказательство. Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда гармоническая в области функция U имеет локальный максимум: существует такой замкнутый шар с центром в точке a, что $U(a) \geqslant U(y)$ для всех y из этого шара. Среднее значение U в нём равно $U(a)$ по следствию из теоремы о среднем. Это возможно лишь если $U(y) \equiv U(a)$ во всём шаре. Но тогда по теореме единственности $U(y) \equiv U(a)$ во всей области, что противоречит условию. ►

Следствие. *Пусть Q — компактное множество, $U \in C(Q)$. Если функция U гармонична в $\mathrm{Int}(Q)$, то*

$$\max_{x\in Q} U(x) = \max_{x\in\partial Q} U(x) \quad \text{и} \quad \min_{x\in Q} U(x) = \min_{x\in\partial Q} U(x).$$

Достаточно доказать лишь первое из этих равенств, считая множество $\mathrm{Int}(Q)$ связным. Если U не постоянна в $\mathrm{Int}(Q)$, то согласно принципу максимума она не может принимать там наибольшего значения. Случай $U \equiv \mathrm{const}$ очевиден. ►

Отметим, что если интерпретировать гармоническую функцию как температуру тела, в котором поддерживается стационарный тепловой режим и нет участков, выделяющих или поглощающих тепло, то с точки зрения физика принцип максимума совершенно очевиден. Действительно, если бы при этих условиях в некоторой точке температура имела локальный максимум, то происходил бы отток тепла от окрестности этой точки к соседним участкам, в силу чего температура в ней должна была бы понижаться, что несовместимо со стационарностью теплового режима.

7.8. До сих пор, говоря о гармонических функциях, мы рассматривали, как правило, случай $m > 2$, предоставляя читателю самостоятельно получить аналогичные результаты, относящиеся к двумерному случаю (см. упр. 2, 3, 6).

Однако в двумерном случае есть один важный специфический момент, на котором мы теперь остановимся. Речь идёт о понятии гармонически сопряжённой функции.

Определение. Пусть U — функция, гармоническая в области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$. Функция $V \in C^2(\mathcal{O})$ называется *гармонически сопряжённой с* U, если $U'_x = V'_y$, $U'_y = -V'_x$.

Заметим, что всякая гармонически сопряжённая функция сама является гармонической, так как $\Delta V = -(U'_y)'_x + (U'_x)'_y = 0$. Повторное сопряжение приводит, как легко видеть, к функции $-U$. В точках пересечения линии уровня гармонически сопряжённой функции ортогональны линиям уровня исходной функции, поскольку ортогональны градиенты этих функций. Читатель, знакомый с теорией функций комплексной переменной, заметит, что функция V гармонически сопряжена с U лишь в том случае, когда функция $U + iV$ голоморфна.

Предложение. *Для всякой функции U, гармонической в выпуклой плоской области, существует гармонически сопряжённая.*

Доказательство. Рассмотрим векторное поле $(-U'_y, U'_x)$. Так как $\frac{\partial}{\partial x}(U'_x) = -\frac{\partial}{\partial y}(U'_y)$ в силу гармоничности U, то из леммы Пуанкаре (см. п. 5.2) вытекает, что это поле потенциально. Его потенциал и есть функция, гармонически сопряжённая с U. ►

В невыпуклой области гармонически сопряжённая функция может не существовать (хотя согласно предложению она существует локально). Это видно на примере функции $U(x,y) = \ln(x^2+y^2)$, гармонической в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ (см. пример п. 5.2).

7.9. *Задача Дирихле.* Эта классическая задача, связанная с гармоническими функциями, состоит в следующем. Надо найти функцию, непрерывную в замыкании данной области $\mathcal{O}$ и гармоническую в $\mathcal{O}$, с заранее заданными значениями на границе области. Иными словами, требуется найти функцию $U \in C(\overline{\mathcal{O}}) \cap C^2(\mathcal{O})$, удовлетворяющую условиям

$$1)\ \Delta U(x) = 0 \quad \text{при} \ \ x \in \mathcal{O}$$

(это уравнение называют *уравнением Лапласа*) и

$$2)\ U(x) = f(x) \quad \text{при} \ \ x \in \partial\mathcal{O},$$

где f — заданная функция, непрерывная на $\partial\mathcal{O}$, которую называют граничным значением.

Мы ограничимся здесь случаем, когда $m \geqslant 3$. Как показывает следствие из принципа максимума, в ограниченной области решение задачи Дирихле единственно. Чтобы наметить путь, следуя по которому можно найти решение, предположим, что замыкание $\overline{\mathcal{O}}$ — стандартный компакт. Если U — решение задачи Дирихле, гладкое в некоторой окрестности $\overline{\mathcal{O}}$, то согласно интегральному представлению (см. теорему 7.3) при любом $x \in \mathcal{O}$

$$U(x) = \frac{1}{s(1)} \int_{\partial\mathcal{O}} \left(f(y) \frac{\langle y-x, \nu(y)\rangle}{\|x-y\|^m} + \frac{1}{m-2} \mathcal{N}_x(y) \frac{\partial U}{\partial \nu}(y) \right) d\sigma(y). \tag{6}$$

Правая часть этой формулы содержит неизвестную нам функцию $\frac{\partial U}{\partial \nu}$. Чтобы устранить её, поступим следующим образом. Зафиксируем точку $x \in \mathcal{O}$ и рассмотрим гармоническую в $\mathcal{O}$ функцию W_x, граничные значения которой те же, что у потенциала $\mathcal{N}_x$. Если такая функция существует и она достаточно гладкая в окрестности множества $\overline{\mathcal{O}}$, то формула Грина (2) с $V = W_x$ даёт нам

$$0 = \frac{1}{s(1)} \int_{\partial\mathcal{O}} \left(f(y) \frac{\partial W_x}{\partial \nu}(y) - \mathcal{N}_x(y) \frac{\partial U}{\partial \nu}(y) \right) d\sigma(y).$$

Разделив это равенство на $(m-2)$ и сложив с (6), мы получим:

$$U(x) = \frac{1}{s(1)} \int_{\partial\mathcal{O}} \left(\frac{\langle y-x, \nu(y)\rangle}{\|x-y\|^m} + \frac{1}{m-2} \frac{\partial W_x}{\partial \nu}(y) \right) f(y)\, d\sigma(y). \tag{7}$$

Таким образом, решение задачи Дирихле с заданным граничным значением f выражается через это граничное значение с помощью функции

$$\frac{1}{s(1)} \left(\frac{\langle y-x, \nu(y)\rangle}{\|x-y\|^m} + \frac{1}{m-2} \frac{\partial W_x}{\partial \nu}(y) \right) = \frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) \qquad \big(x \in \mathcal{O},\ y \in \overline{\mathcal{O}},\ x \neq y\big),$$

где

$$G(x,y) = \frac{1}{(m-2)s(1)} \left(W_x(y) - \frac{1}{\|x-y\|^{m-2}} \right). \tag{8}$$

Функция G называется *функцией Грина* для области $\mathcal{O}$. Используя символ $\frac{\partial G}{\partial \nu}$, мы всегда будем иметь в виду производную по второму аргументу. С помощью производной функции Грина равенство (7) можно переписать в виде

$$U(x) = \int_{\partial\mathcal{O}} \frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) f(y)\, d\sigma(y). \tag{7'}$$

Доказательство существования и исследование свойств функции Грина для широкого класса областей читатель может найти в § 29 книги [Вл]. Мы же ограничимся важнейшими частными случаями — построением функции Грина и решением задачи Дирихле для шара и полупространства.

7.10. *Задача Дирихле для шара.* Поскольку при сдвиге и гомотетии гармоничность функции сохраняется, решение достаточно построить для единичного шара с центром в нуле. В этом случае функцию Грина можно получить, используя так называемые сферически симметричные точки. Наводящие соображения для её построения связаны с приводимой ниже теоремой Кельвина.

Определение. Пусть $x \neq 0$. Точка x', лежащая на том же луче, что и x, и удовлетворяющая условию $\|x\| \cdot \|x'\| = 1$ (т. е. точка $x' = \frac{x}{\|x\|^2}$), называется сферически симметричной точке x.

Ясно, что точкой, симметричной x', является x. Точки единичной сферы S симметричны сами себе, если же $x \notin S$, то точки x и x' разделены сферой S. Сферически симметричные точки обладают полезным геометрическим свойством: их расстояния до точек сферы S пропорциональны. Точнее,

$$\|x\| \cdot \|y - x'\| = \|y - x\|, \qquad \text{если} \quad \|y\| = 1. \tag{9}$$

Действительно,

$$\|x\| \cdot \|y - x'\| = \left\| \|x\| y - \frac{x}{\|x\|} \right\| = \sqrt{\|x\|^2 - 2\langle y, x\rangle + 1} = \|x - y\|.$$

Теорема (Кельвин*). *Пусть функция U гармонична в области $\mathcal{O}$, $0 \notin \mathcal{O}$, и пусть $\mathcal{O}'$ — область, сферически симметричная $\mathcal{O}$ относительно сферы S. Тогда функция V, определённая равенством $V(x) = \frac{1}{\|x\|^{m-2}} U\left(\frac{x}{\|x\|^2}\right)$, гармонична в $\mathcal{O}'$.*

Поскольку формальная ссылка на эту теорему нам не потребуется, её доказательство (довольно громоздкое в техническом отношении) мы предлагаем читателю провести самостоятельно (см. упр. 9).

Перейдём теперь к построению функции Грина для единичного шара B. Пусть $\|x\| < 1$. Чтобы получить гармоническую в B функцию, принимающую в точках $y \in S$ значения $\mathcal{N}_x(y) = \frac{1}{\|x-y\|^{m-2}}$, воспользуемся гармоничностью функции $\mathcal{N}_x$ вне B и "пересадим" её в B с помощью симметрии относительно сферы. Точнее, положим

$$W(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\|x\|^{m-2}} \frac{1}{\|y-x'\|^{m-2}} & \text{при} \quad x \neq 0,\ \|x\|\,\|y\| < 1, \\ 1 & \text{при} \quad x = 0,\ y \in \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

*) Уильям **Томсон**, лорд Кельвин (Thomson, lord Kelvin), 1824–1907, — английский физик и математик.

Гармоничность функции W как функции от x (при $x \neq 0$) следует из теоремы Кельвина, но мы установим этот факт непосредственно. Очевидно, $W(x,y) = \left(1 - 2\langle x,y\rangle + \|x\|^2\|y\|^2\right)^{\frac{2-m}{2}}$ при $\|x\|\,\|y\| < 1$ и, следовательно, W — симметричная функция своих аргументов. При фиксированном $x \neq 0$ функция $y \mapsto W(x,y)$ пропорциональна точечному потенциалу с полюсом в точке x', поэтому она гармонична. Ввиду симметрии, при фиксированном y гармонична и функция $x \mapsto W(x,y)$. В частности, если $\|y\| = 1$, то эта функция гармонична в единичном шаре. Это обстоятельство позволяет нам обойтись без ссылки на теорему Кельвина.

Теперь, взяв $W_x(y) = W(x,y)$ и руководствуясь формулой (8), положим при $\|x\| < 1$, $\|y\| = 1$,

$$G(x,y) = \frac{1}{(m-2)s(1)}\left(W(x,y) - \frac{1}{\|x-y\|^{m-2}}\right).$$

Так как единичная внешняя нормаль к шару B в точке $y \in S$ есть y, то из (1) и (9) следует, что для фиксированного $x \in B$

$$\frac{\partial W}{\partial \nu}(x,y) = (m-2)\frac{\langle x,y\rangle - \|x\|^2}{\|x-y\|^m} \quad \text{для всех} \quad y \in S.$$

Поэтому при $y \in S$

$$\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) = \frac{1}{s(1)}\,\frac{1-\|x\|^2}{\|x-y\|^m}.$$

Формула (7′) в нашем случае показывает, что решение задачи Дирихле для единичного шара с граничной функцией f должно иметь вид

$$U(x) = \int_S f(y)\frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y)\,d\sigma(y) = \frac{1}{s(1)}\int_S \frac{1-\|x\|^2}{\|x-y\|^m}\,f(y)\,d\sigma(y) \quad (\|x\| < 1).$$

Убедимся, что эта формула действительно даёт решение задачи Дирихле. Положим

$$P(x,y) = \frac{\partial G}{\partial \nu}(x,y) = \frac{1}{s(1)}\,\frac{1-\|x\|^2}{\|x-y\|^m} \quad \text{при } (x,y) \in B \times S, \tag{10}$$

где дифференцирование производится по внешней нормали к единичному шару в точке y. Эта функция называется *ядром Пуассона* (для шара). Установим его основные свойства.

Лемма. 1) *Ядро Пуассона положительно и при фиксированном $y \in S$ гармонично в B как функция x.*

2) *При каждом x из B*

$$\int_S P(x,y)\,d\sigma(y) = 1. \tag{11}$$

3) *Если $a \in S$, $x \in B$ и $\|x-a\| < \delta$, то*

$$\int_{S\setminus B(a,\delta)} P(x,y)\,d\sigma(y) \leqslant \frac{2\|x-a\|}{(\delta - \|x-a\|)^m}.$$

Доказательство. 1) Неравенство $P > 0$ очевидно. Как уже отмечалось, при $\|y\| = 1$ функция $x \mapsto W(x, y)$ гармонична в единичном шаре. Вместе с нею гармонична и функция $x \mapsto G(x, y)$. Так как частные производные гармонической функции также гармонические, то остаётся сослаться на равенство (10).

2) Поскольку для $x = 0$ равенство (11) очевидно, будем считать, что $0<\|x\|<1$. Выпишем интегралы Гаусса ($4'$) с $K = \overline{B}$ для внутренней точки x и внешней x'. В первом случае мы имеем

$$1 = \frac{1}{s(1)} \int_S \frac{\langle y - x, y\rangle}{\|y - x\|^m}\, d\sigma(y). \tag{12}$$

Во втором случае

$$0 = \frac{1}{s(1)} \int_S \frac{\langle y - x', y\rangle}{\|y - x'\|^m}\, d\sigma(y).$$

В силу (9) отсюда следует, что

$$0 = \frac{1}{s(1)} \int_S \frac{\langle y - x', y\rangle}{\|y - x\|^m}\, d\sigma(y).$$

Домножая это равенство на $\|x\|^2$ и вычитая его из (12), получаем:

$$1 = \frac{1}{s(1)} \int_S \big\langle y - x - \|x\|^2(y - x'), y\big\rangle\, \frac{d\,\sigma(y)}{\|y - x\|^m}.$$

Чтобы прийти к окончательному результату, осталось преобразовать скалярное произведение:

$$\big\langle y - x - \|x\|^2(y - x'), y\big\rangle = \big\langle (1 - \|x\|^2)y, y\big\rangle = 1 - \|x\|^2.$$

3) Это неравенство вытекает из (10), так как $1 - \|x\|^2 < 2(1 - \|x\|) \leqslant 2\|x - a\|$ и $\|x - y\| > \delta - \|x - a\|$ при $y \notin B(a, \delta)$. ▶

Теперь мы готовы рассмотреть задачу Дирихле для шара. При её решении важно, что ядро Пуассона, как свидетельствует доказанная лемма, обладает свойствами, аналогичными свойствам аппроксимативной единицы, с тем отличием, что интегрирование по мере Лебега следует заменить интегрированием по мере на сфере. Формула (13) показывает, что решение задачи Дирихле можно получить, рассматривая обобщённую свёртку граничной функции и ядра Пуассона.

Теорема. *Решение задачи Дирихле в шаре B с граничной функцией $f \in C(S)$ существует и единственно. При $x \in B$ это решение U определяется равенством*

$$U(x) = \int_S P(x, y) f(y)\, d\sigma(y). \tag{13}$$

Доказательство. Как мы уже отмечали, единственность — следствие принципа максимума. Гармоничность функции U в шаре B вытекает из гармоничности ядра Пуассона и возможности дифференцировать по параметру под знаком интеграла. Положим $U(x) = f(x)$ в точках $x \in S$. Теперь для доказательства теоремы нам остаётся убедиться, что функция U непрерывна в граничных точках шара. Для этого оценим

разность $U(x)-U(a)$ в точках $a \in S$ и $x \in B$. Домножив равенство (11) на $f(a)$ и вычтя его из (13), мы видим, что

$$U(x) - U(a) = \int_S (f(y) - f(a))P(x,y)\,d\sigma(y).$$

Пусть ω — модуль непрерывности f, $C = \max\limits_S |f|$. При любых $\delta > 0$ и $x \in B$, $\|x-a\| < \delta$, с помощью леммы мы получаем:

$$\begin{aligned}|U(x) - U(a)| &\leqslant \int_S |f(y) - f(a)|P(x,y)\,d\sigma(y) = \int_{S\cap B(a,\delta)} \ldots + \int_{S\setminus B(a,\delta)} \ldots \leqslant \\ &\leqslant \int_{S\cap B(a,\delta)} \omega(\delta)P(x,y)\,d\sigma(y) + \int_{S\setminus B(a,\delta)} 2CP(x,y)\,d\sigma(y) \leqslant \\ &\leqslant \omega(\delta) + 4C\frac{\|x-a\|}{(\delta - \|x-a\|)^m}.\end{aligned}$$

Теперь за счёт выбора δ можно сделать сколь угодно малым слагаемое $\omega(\delta)$, а затем и второе слагаемое, взяв точку x достаточно близкой к a. ►

Как показывает простая выкладка, решение задачи Дирихле в произвольном шаре $B(a,R)$ имеет вид

$$U(x) = \frac{1}{s(1)R}\int_{S(a,R)} \frac{R^2 - \|x-a\|^2}{\|y-x\|^m} f(y)\,d\sigma(y) \quad (x \in B(a,R)). \tag{14}$$

В частности, если функция U гармонична в области, содержащей $\overline{B}(a,R)$, или хотя бы непрерывна в $\overline{B}(a,R)$ и гармонична в $B(a,R)$, то в силу единственности решения задачи Дирихле при $\|x-a\| < R$ справедлива *формула Пуассона*

$$U(x) = \frac{1}{s(1)R}\int_{S(a,R)} \frac{R^2 - \|x-a\|^2}{\|y-x\|^m} U(y)\,d\sigma(y).$$

7.11. Формула Пуассона позволяет дополнить теорему о среднем для гармонической функции и оценить отклонения её значений от значения в центре шара. Мы сформулируем этот результат для m-мерного шара с центром в нуле.

Теорема (неравенство Гарнака*)). *Пусть неотрицательная функция U гармонична в шаре $B(0,R)$. Тогда в любой точке x, $\|x\| < R$, справедливо двустороннее неравенство*

$$\left(1 - \frac{\|x\|}{R}\right)\left(\frac{R}{R+\|x\|}\right)^{m-1} U(0) \leqslant U(x) \leqslant \left(1 + \frac{\|x\|}{R}\right)\left(\frac{R}{R-\|x\|}\right)^{m-1} U(0).$$

Доказательство. Возьмём число r из интервала $(\|x\|, R)$. Согласно формуле Пуассона мы имеем

$$U(x) = \frac{1}{s(1)r}\int_{S(0,r)} \frac{r^2 - \|x\|^2}{\|y-x\|^m} U(y)\,d\sigma(y).$$

Поэтому

$$U(x) \leqslant \frac{r^2 - \|x\|^2}{r(r-\|x\|)^m}\frac{1}{s(1)}\int_{S(0,r)} U(y)\,d\sigma(y) = \frac{(r+\|x\|)r^{m-2}}{(r-\|x\|)^{m-1}} U(0).$$

Перейдя к пределу при $r \to R$, получим оценку сверху для $U(x)$. Оценка снизу доказывается аналогично. ►

*) Карл Густав Аксель **Гарнак** (Harnack), 1851–1888, — немецкий математик.

С помощью неравенства Гарнака легко получить уточнение теоремы Лиувилля (п. 7.5) (другие следствия из этого неравенства указаны в упр. 12–15).

Следствие. *Если гармоническая в $\mathbb{R}^m$ функция U ограничена сверху или снизу, то она постоянна.*

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, $U \geqslant 0$. Перейдя в неравенстве Гарнака к пределу при $R \to +\infty$, получим, что $U(0) \leqslant U(x) \leqslant U(0)$ для любой точки $x \in \mathbb{R}^m$. ▶

Из формулы Пуассона вытекает важный факт — оказывается, величину градиента гармонической в шаре функции можно оценить максимумом самой функции на границе шара (см. также упр. 17).

Теорема. *Пусть функция U непрерывна в $\overline{B}(0,R)$ и гармонична в $B(0,R)$. Тогда в каждой точке $x \in B(0,R)$ выполняется неравенство*

$$\|\operatorname{grad} U(x)\| \leqslant \frac{\sqrt{m}}{R - \|x\|} \max_{\|y\|=R} |U(y)|.$$

Доказательство. Положим $C = \max\limits_{\|y\|=R} |U(y)|$. Достаточно проверить, что $\left|\frac{\partial U}{\partial e}(x)\right| \leqslant \frac{C\sqrt{m}}{R-\|x\|}$ для любого орта $e \in \mathbb{R}^m$. По формуле Пуассона

$$U(x) = \frac{1}{s(1)R} \int_{S(0,R)} \frac{R^2 - \|x\|^2}{\|y-x\|^m} U(y)\, d\sigma(y).$$

Сначала оценим производную в центре шара. Продифференцировав под знаком интеграла и сделав в интеграле замену $y = Ru$, получим:

$$\frac{\partial U}{\partial e}(0) = \frac{1}{s(1)R} \int_{S(0,R)} mR^2 \frac{\langle y, e\rangle}{\|y\|^{m+2}} U(y)\, d\sigma(y) = \frac{m}{s(1)R} \int_S \langle u, e\rangle\, U(Ru)\, d\sigma(u).$$

Поэтому

$$\left|\frac{\partial U}{\partial e}(0)\right| \leqslant \frac{mC}{R} \frac{1}{s(1)} \int_S |\langle u, e\rangle|\, d\sigma(u) \leqslant \frac{mC}{R} \sqrt{\frac{1}{s(1)} \int_S |\langle u, e\rangle|^2\, d\sigma(u)}$$

(в конце мы воспользовались неравенством Коши–Буняковского — см. п. IV.4.5). Ясно, что

$$\int_S |\langle u, e\rangle|^2 d\sigma(u) = \int_S u_1^2\, d\sigma(u) = \int_S \frac{u_1^2 + \ldots + u_m^2}{m}\, d\sigma(u) = \frac{s(1)}{m}.$$

Таким образом, $\left|\frac{\partial U}{\partial e}(0)\right| \leqslant \frac{C\sqrt{m}}{R}$. Очевидно, полученная оценка справедлива для шара с центром в произвольной точке. В случае $0 < \|x\| < R$ надо применить её к шару $\overline{B}(x, R - \|x\|)$ и воспользоваться тем, что на его границе модуль функции не превосходит C в силу принципа максимума модуля (см. п. 7.7). ▶

7.12. Однозначная разрешимость задачи Дирихле позволяет получить важный "принцип стирания особенностей". Речь идёт о естественном вопросе: в каком случае можно гарантировать гармоничность функции во всей области $\mathcal{O}$, если известно, что она гармонична в $\mathcal{O}$ за исключением некоторого "малого" множества. Если оно не имеет внутренних точек, то, очевидно, C^2-гладкость функции влечёт её гармоничность всюду в $\mathcal{O}$. Насколько можно ослабить предположение о гладкости? Пример функции $x \mapsto |x_m|$, гармонической при $x_m \neq 0$, но не гармонической во всём пространстве $\mathbb{R}^m$, показывает, что непрерывности на исключительном множестве, вообще говоря, недостаточно. Но если оно содержится в некоторой плоскости, то можно дать полезное и легко проверяемое условие, формально не связанное с дифференцированием, которое обеспечивает гармоничность функции во всей области.

Так как гармоничность функции не нарушается при движении, мы будем предполагать, что множество, где может нарушаться гармоничность, содержится в плоскости $x_m = 0$. Введём некоторые обозначения. Для произвольной области $\mathcal{O}$ положим:

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_+ &= \mathcal{O} \cap \{x = (x_1, \dots, x_m) \,|\, x_m > 0\},\\
\mathcal{O}_- &= \mathcal{O} \cap \{x = (x_1, \dots, x_m) \,|\, x_m < 0\},\\
\mathcal{O}_0 &= \mathcal{O} \cap \{x = (x_1, \dots, x_m) \,|\, x_m = 0\}.
\end{aligned}$$

Оказывается, если непрерывная функция нечётна по последней координате, то стирание особенностей возможно без каких-либо предположений о её гладкости. Другие условия стирания особенностей вытекают из этого основного результата (см. упр. 18 и 19).

Теорема (принцип симметрии). *Предположим, что функция V непрерывна в области $\mathcal{O}$, симметричной относительно плоскости $x_m = 0$, и нечётна по последней координате, т. е. $V(x_1, \dots, x_{m-1}, -x_m) = -V(x_1, \dots, x_{m-1}, x_m)$ при $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{O}$. Если V гармонична в $\mathcal{O}_+$, то она гармонична и в $\mathcal{O}$.*

Доказательство. Очевидно, V гармонична также и в $\mathcal{O}_-$. Поэтому нам остаётся убедиться, что она гармонична в окрестности каждой точки из $\mathcal{O}_0$. Пусть $a \in \mathcal{O}_0$, $\overline{B}(a, R) \subset \mathcal{O}$ и пусть f — сужение V на $S(a, R)$. Очевидно, функция f непрерывна и нечётна по последней координате. Пусть U — решение задачи Дирихле в шаре $B(a, R)$ с граничной функцией f. Во внутренних точках шара это решение задаётся формулой (14), из которой легко вытекает (мы предоставляем читателю убедиться в этом самостоятельно), что функция U нечётна по последней координате. Она, как и V, равна нулю на множестве $\mathcal{O}_0 \cap \overline{B}(a, R)$. Таким образом, функции V и U принимают на границе верхней половины шара — множества $\mathcal{O}_+ \cap B(a, R)$ — одинаковые значения и, следовательно, совпадают на этом множестве в силу единственности решения задачи Дирихле. То же самое можно сказать и о нижней половине шара $B(a, R)$. Поэтому функция V совпадает с гармонической функцией U во всем шаре, что и доказывает наше утверждение. ►

7.13. В заключение затронем задачу Дирихле в неограниченной области, ограничившись случаем, когда эта область — "верхнее" полупространство. Из соображений технического характера мы будем рассматривать $(m+1)$-мерное полупространство $\mathbb{R}^{m+1}_+$, состоящее из точек вида $\xi = (x_1, \dots, x_m, t)$, где $t > 0$. В этом случае решение, вообще говоря, не единственно. Например, задача Дирихле с нулевым граничным

условием, кроме тривиального решения ($U \equiv 0$), имеет и другое — $U(\xi) = t$. Однако единственности решения можно добиться, если сузить класс рассматриваемых функций, потребовав, чтобы они обладали теми или иными дополнительными свойствами. Для полупространства таким естественным свойством является ограниченность решения, и в этом классе единственность решения восстанавливается. Точнее, справедливо следующее

Предложение. *Пусть U, V — две непрерывные и ограниченные в полупространстве $\overline{\mathbb{R}^{m+1}_+}$ функции, гармонические в $\mathbb{R}^{m+1}_+$. Если они совпадают на $\partial\mathbb{R}^{m+1}_+$, то они тождественны.*

Доказательство. Очевидно, функция $F = U - V$ ограничена и обращается в нуль на плоскости $\partial\mathbb{R}^{m+1}_+$. Продолжим её на все пространство нечётным образом, полагая $F(x_1, \dots, x_m, -t) = -F(x_1, \dots, x_m, t)$ при $t > 0$. Ясно, что продолженная функция удовлетворяет всем условиям принципа симметрии, и поэтому гармонична во всём пространстве. Так как она ограничена, то по теореме Лиувилля (см. п. 7.5) она постоянна и, следовательно, является тождественным нулём. ►

Перейдём теперь к доказательству существования решения задачи Дирихле для полупространства в случае, когда граничное значение — ограниченная непрерывная функция. Следуя общей схеме, зафиксируем точку $\xi = (x_1, \dots, x_m, t) \in \mathbb{R}^{m+1}_+$ и построим гармоническую в $\mathbb{R}^{m+1}_+$ функцию W_ξ, имеющую те же граничные значения, что и $\mathcal{N}_\xi$. Очевидно, что $W_\xi = \mathcal{N}_{\xi'}$, где $\xi' = (x_1, \dots, x_m, -t)$. Следовательно, функция Грина для полупространства должна иметь вид

$$G(\xi, \eta) = \frac{1}{(m-1)\sigma(1)} \left(\frac{1}{\|\xi' - \eta\|^{m-1}} - \frac{1}{\|\xi - \eta\|^{m-1}} \right),$$

где $\sigma(1)$ обозначает площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^{m+1}$, а $\eta = (y_1, \dots, y_m, \tau)$. Так как в рассматриваемом случае $\nu = -e_{m+1}$, то $\frac{\partial}{\partial\nu} = -\frac{\partial}{\partial\tau}$, и поэтому согласно ($7'$) решение задачи Дирихле с граничной функцией f должно иметь вид

$$U(\xi) = -\int_{\mathbb{R}^m} f(\eta) \frac{\partial G}{\partial \tau}(\xi, \eta)\, d\eta.$$

Убедимся, что эта формула действительно даёт решение задачи Дирихле. Очевидно

$$-\frac{\partial G}{\partial \tau}(\xi, \eta) = \frac{1}{\sigma(1)} \left(\frac{t + \tau}{\|\xi' - \eta\|^{m+1}} + \frac{t - \tau}{\|\xi - \eta\|^{m+1}} \right).$$

Так как $\|\xi' - \eta\| = \|\xi - \eta\|$ при $\tau = 0$, то для $\eta \in \partial\mathbb{R}^{m+1}_+$ мы получаем

$$-\frac{\partial G}{\partial \tau}(\xi, \eta) = \frac{1}{\sigma(1)} \frac{2t}{\|\xi - \eta\|^{m+1}}.$$

Положим

$$P_t(x) = \frac{1}{\sigma(1)} \frac{2t}{\|\xi\|^{m+1}} = \frac{1}{\sigma(1)} \frac{2t}{(\|x\|^2 + t^2)^{\frac{m+1}{2}}} \qquad (\xi = (x, t),\ x \in \mathbb{R}^m,\ t > 0).$$

Функция $x \mapsto P_t(x)$ называется *ядром Пуассона* (для полупространства). Мы будем считать, что это определение относится и к случаю $m = 1$.

Согласно общей схеме решение задачи Дирихле для полупространства $\mathbb{R}^{m+1}_+$ с граничной функцией f должно иметь вид

$$U(x,t) = \int_{\mathbb{R}^m} f(y) P_t(x-y)\,dy.$$

Иными словами, решение задачи Дирихле представляется в виде свёртки граничной функции с ядром Пуассона. Чтобы доказать это, установим сначала основные свойства ядра Пуассона.

Лемма. 1) *Ядро Пуассона для полупространства положительно и гармонично в* $\mathbb{R}^{m+1}_+$ *(т. е. как функция точки* $\xi = (x,t),\ x \in \mathbb{R}^m,\ t > 0$*).*

2) *При каждом* $t > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^m} P_t(x)\,dx = 1. \tag{16}$$

3) *При каждом* $\delta > 0$

$$\int_{\|x\|>\delta} P_t(x)\,dx \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Эта лемма справедлива для любого m, начиная с $m = 1$. Она, в частности, показывает, что семейство $\{P_t\}_{t>0}$ есть аппроксимативная единица в $\mathbb{R}^m$ при $t \to 0$ (см. п. VII.6.1).

Доказательство. 1) Положительность $P_t(x)$ очевидна. При $m > 1$ гармоничность следует из того, что с точностью до постоянного множителя ядро Пуассона есть производная точечного потенциала: $P_t(x) = \frac{1}{s(1)}\frac{\partial \mathcal{N}_0}{\partial t}(\xi)$, где $\xi = (x,t)$. При $m = 1$ потенциал $\mathcal{N}_0$ следует заменить логарифмическим.

2) Равенство (16) проверяется прямым вычислением:

$$\int_{\mathbb{R}^m} \frac{2t}{\left(\|x\|^2+t^2\right)^{\frac{m+1}{2}}}\,dx = m\alpha_m \int_0^\infty \frac{2tr^{m-1}}{(r^2+t^2)^{\frac{m+1}{2}}}\,dr = m\alpha_m \int_0^\infty \frac{u^{\frac{m}{2}-1}}{(u+1)^{\frac{m+1}{2}}}\,du$$

(в конце сделана замена переменной $u = \frac{r^2}{t^2}$). Теперь требуемый результат вытекает из формулы

$$\int_0^\infty \frac{u^{a-1}}{(u+1)^{a+b}}\,du = B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

примера 4 п. IV.6.3 и равенства $\sigma(1) = (m+1)\alpha_{m+1}$:

$$\int_{\mathbb{R}^m} P_t(x)\,dx = \frac{1}{\sigma(1)}\int_{\mathbb{R}^m} \frac{2t}{\left(\|x\|^2+t^2\right)^{\frac{m+1}{2}}}\,dx = \frac{m\alpha_m}{(m+1)\alpha_{m+1}}\,\frac{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{m+1}{2})} = 1.$$

3) Достаточно воспользоваться очевидным неравенством $P_t(x) \leqslant \frac{\text{const}}{\|x\|^{m+1}}\,t$. ►

Теорема. *Ограниченное решение задачи Дирихле в полупространстве* $\mathbb{R}^{m+1}_+$ *с ограниченной граничной функцией* $f \in C(\mathbb{R}^m)$ *существует и единственно. При* $\xi = (x,t) \in \mathbb{R}^{m+1}_+$ *это решение* U *определяется равенством*

$$U(\xi) = \int_{\mathbb{R}^m} P_t(x-y) f(y)\,dy. \tag{17}$$

Доказательство. Единственность установлена в предложении, приведённом в начале этого пункта. Докажем существование решения. Пусть $C = \sup\limits_{y\in\mathbb{R}^m} |f(y)|$. Убедимся прежде всего, что функция U ограничена. В самом деле, при любом $\xi = (x,t) \in \mathbb{R}^{m+1}_+$

$$|U(\xi)| \leqslant C \int_{\mathbb{R}^m} P_t(x-y)\,dy = C.$$

Гармоничность U вытекает из первого утверждения леммы и правила Лейбница.

Будем считать, что $U(\xi) = f(\xi)$ при $\xi \in \partial\mathbb{R}^{m+1}_+$, и убедимся в непрерывности U в произвольной граничной точке $\xi_0 = (a,0) \in \partial\mathbb{R}^{m+1}_+$. Так как $U(\xi) = (P_t * f)(x)$, то

$$|U(\xi) - U(\xi_0)| = \big|(P_t * f)(x) - f(a)\big| \leqslant \big|(P_t * f)(x) - f(x)\big| + |f(x) - f(a)|.$$

Ясно, что для x из достаточно малого шара $B(a,\delta)$ величина $|f(x) - f(a)|$ становится сколь угодно малой. По теореме VII.6.3 $(P_t * f)(x) \underset{t\to 0}{\rightrightarrows} f(x)$ на любом ограниченном множестве. Поэтому t можно выбрать настолько малым, что первое слагаемое в правой части последнего неравенства будет произвольно мало при всех $x \in B(a,\delta)$. Следовательно, $U(\xi) \to U(\xi_0)$ при $\xi \to \xi_0$, что и требовалось. ►

УПРАЖНЕНИЯ

1) Докажите, что если $U, V \in C^2(\mathcal{O})$, то

$$\int_K \langle \operatorname{grad} U, \operatorname{grad} V\rangle\,dx + \int_K V\,\Delta\,U\,dx = \int_{\partial K} V\frac{\partial U}{\partial \nu}\,d\sigma.$$

В частности, для гармонической в $\mathcal{O}$ функции U

$$\int_K \|\operatorname{grad} U(x)\|^2\,dx = \int_{\partial K} U\frac{\partial U}{\partial \nu}\,d\sigma.$$

2) Для любой финитной функции $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^m)$ $(m \geqslant 3)$ справедливо равенство

$$(\mathcal{N}_0 * \Delta\,\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{N}_0(x-y)\Delta\,\varphi(y)\,dy = -(m-2)s(1)\varphi(x).$$

Таким образом, с помощью свёртки с $\mathcal{N}_0$ можно восстановить финитную функцию, зная её лапласиан. Это обстоятельство даёт основание называть $\mathcal{N}_0$ фундаментальным решением уравнения Лапласа.

Заменяя потенциал $\mathcal{N}_0$ логарифмическим, получите аналогичный результат для функций двух переменных.

3) Докажите двумерные варианты равенств (3) и (4) (теоремы 7.2 и 7.3), заменив потенциал $\mathcal{N}_x$ логарифмическим.

4) В дополнение к интегралу Гаусса (см. формулу (4′)) докажите, что

$$\int_{\partial K} \frac{\langle x, \nu(x)\rangle}{\|x\|^m} = \frac{1}{2}\,s(1),$$

если начало координат принадлежит регулярной части ∂K.

5) Докажите утверждение, сформулированное в замечании п. 7.3. Указание. Используйте равенство $\langle x, \nu(x)\rangle = 0$ для точек x, лежащих на границе конуса C.

6) Докажите теорему о среднем для гармонических функций двух переменных (см. п. 7.5).

7) Для $f \in C^2(\mathcal{O})$, $a \in \mathcal{O}$ положим $F(r) = \frac{1}{s(r)} \int_{S(a,r)} f(x)\, d\sigma(x)$ при $\overline{B}(a,r) \subset \mathcal{O}$, $F(0) = f(a)$. Докажите, что $F \in C^2\big([0,R)\big)$ и $F''(0) = \frac{1}{m}\Delta f(a)$.

8) Используя теорему 7.6, докажите, что в предложении 7.3 условие $U \in C^2(\mathcal{O})$ можно ослабить, предположив лишь непрерывную дифференцируемость U. Опираясь на это, докажите "принцип стирания особенностей": если функция из $C^1(\mathcal{O})$ гармонична в $\mathcal{O} \setminus L$, где L — некоторая плоскость, то она гармонична в $\mathcal{O}$.

9) Докажите теорему Кельвина: если функция U гармонична в некоторой области, то в соответствующей области гармонична и функция $V(x) = \frac{1}{\|x\|^{m-2}}\, U\big(\frac{x}{\|x\|^2}\big)$.

10) Докажите, что однородная сфера в $\mathbb{R}^3$ притягивает внешнюю точку так же, как если бы вся масса сферы была сосредоточена в её центре, а внутренние точки находятся в невесомости. Обобщите эти результаты на m-мерный случай, считая, что сила притяжения двух материальных точек пропорциональна $\frac{1}{r^{m-1}}$, где r — расстояние между точками. Верны ли они для логарифмического потенциала? Указание. При вычислении возникающих интегралов воспользуйтесь выкладками, проведёнными при доказательстве равенства (11).

11) Пусть для некоторого $p > 0$ гармоническая в $\mathbb{R}^m$ функция U удовлетворяет условию: $|U(x)| = O\big(\|x\|^p\big)$ при $\|x\| \to +\infty$. Используя оценку градиента (см. п. 7.11), докажите, что U — многочлен степени не выше $[p]$.

12) Пусть последовательность функций, непрерывных в замкнутом шаре и гармоничных внутри него, равномерно ограничена и поточечно сходится на граничной сфере. Докажите, что сходимость есть и во внутренних точках, причём предельная функция гармонична.

13) Пусть последовательность гармонических в области $\mathcal{O}$ функций поточечно сходится в ней к некоторой функции. Используя неравенство Гарнака, докажите, что если эта последовательность монотонна, то предельная функция гармонична в $\mathcal{O}$ (теорема Гарнака).

14) Если ряд из неотрицательных гармонических в области функций сходится в какой-то точке, то он равномерно сходится на любом компакте, лежащем в области.

15) С помощью неравенства Гарнака докажите, что если непостоянная гармоническая в шаре и непрерывная в его замыкании функция принимает в граничной точке экстремальное значение, то её нормальная производная в этой точке отлична от нуля.

16) Докажите, что для неотрицательной гармонической в m-мерном шаре $B(a,R)$ функции U справедливо неравенство $\|\operatorname{grad} U(a)\| \leqslant \frac{m}{R}\, U(a)$.

17) Уточните оценку градиента, полученную в п. 7.11, доказав, что

$$\|\operatorname{grad} U(x)\| \leqslant \frac{c_m}{R - \|x\|} \max_{\|y\|=R} |U(y)|, \quad \text{где} \quad c_m = 2\frac{\alpha_{m-1}}{\alpha_m}.$$

Докажите, что коэффициент c_m нельзя уменьшить.

18) Докажите, что принцип симметрии остаётся справедливым для функции $U \in C(\mathcal{O})$, чётной по последней координате, при условии, что $U'_{x_m} \in C(\mathcal{O})$. Указание. Примените принцип симметрии к производной U'_{x_m}.

19) С помощью результата предыдущей задачи докажите следующее уточнение “принципа стирания особенностей” (задача 8): если функция из $C(\mathcal{O})$ непрерывно дифференцируема в $\mathcal{O}$ по последней координате и гармонична при $x_m \neq 0$, то она гармонична в $\mathcal{O}$.

20) Докажите принцип стирания точечной особенности гармонической функции: если функция U гармонична в проколотом m-мерном ($m \geqslant 3$) шаре $B(a,r)\backslash\{a\}$ и $U(x) = o\Big(\frac{1}{\|x-a\|^{m-2}}\Big)$ при $x \to a$, то эту функцию можно так доопределить в точке a, что новая функция окажется гармонической во всём шаре $B(a,r)$. Каков двумерный аналог этого утверждения?

21) Найдите размерность пространства всех однородных гармонических многочленов степени n от двух переменных.

22) Укажите какой-нибудь базис пространства всех однородных гармонических многочленов четвёртой степени от трёх переменных.

§ 8. Площадь на липшицевых многообразиях

8.1. В этом параграфе под площадью понимается k-мерная площадь в смысле определения 2.1 (мы не предполагаем, что она порождена мерой Хаусдорфа μ_k). Она обозначается далее буквой σ, а k-мерная мера Лебега — буквой λ (указания на размерность опускаются).

Напомним, что теорема 3.2 решает вопрос о единственности площади на (борелевских) подмножествах гладких многообразий. Наша цель — распространить этот результат на подмножества многообразий более широкого класса. Сколь обширным он может быть? Оказывается, что для поставленной задачи естественным является класс так называемых липшицевых многообразий. Уточним это понятие. Гомеоморфизм Φ называют *билипшицевым* отображением, если условию Липшица удовлетворяет как Φ, так и Φ^{-1}. *Простое липшицево* многообразие — многообразие, имеющее билипшицеву параметризацию (заданную на открытом подмножестве пространства $\mathbb{R}^k$, где k — размерность многообразия). Если такая параметризация есть вблизи каждой точки многообразия, то его называют *липшицевым*. В частности, эта терминология относится и к поверхностям (многообразиям коразмерности 1).

Очевидно, каноническая параметризация графика функции есть билипшицево отображение тогда и только тогда, когда сама функция удовлетворяет условию Липшица. Однако в отличие от гладких, липшицевы поверхности даже локально не являются, вообще говоря, графиками липшицевых функций (см. упр. 1).

За пределами σ-алгебры, порождённой борелевскими подмножествами липшицевых многообразий, площадь не определена однозначно. Мы не будем обсуждать эту тему, выходящую за рамки нашей книги. Дополнительную информацию читатель может найти в монографии [Фе], § 3.3.

При получении формулы для вычисления площади на простом липшицевом многообразии решающую роль играет теорема Радемахера XI.4.2, согласно которой функция, удовлетворяющая условию Липшица, дифференцируема почти везде. Поэтому координатные функции липшицевой параметризации Φ почти везде дифференцируемы и, следовательно, почти везде определён сопровождающий параллелепипед $C_t = d_t\Phi\big([0,1)^k\big)$, а вместе с ним и плотность $\omega_\Phi(t) = \lambda\big(\mathrm{C}_t\big)$. Следующая теорема, доказательство которой приведено в п. 8.3, распространяет результат теоремы 3.2 на липшицевы многообразия.

Теорема. *Для любого борелевского множества E, содержащегося в простом липшицевом многообразии M, справедливо равенство*

$$\sigma(E) = \int_{\Phi^{-1}(E)} \omega_\Phi(t)\,dt,$$

где Φ — произвольная билипшицева параметризация M.

Как мы убедимся в добавлении IV, дифференцируемость почти везде выпуклых функций может быть установлена без ссылки на теорему Радемахера. Поэтому она не нужна и для доказательства единственности площади на выпуклых поверхностях.

Из теоремы непосредственно вытекает используемое в дальнейшем

Следствие. *Пусть функция f удовлетворяет условию Липшица на открытом подмножестве $\mathcal{O}$ пространства $\mathbb{R}^m$. Тогда для любого борелевского множества E, содержащегося в графике функции f, справедливо равенство*

$$\sigma(E) = \int_{P(E)} \sqrt{1 + \|\operatorname{grad} f(x)\|^2}\,dx,$$

где $P(E)$ обозначает ортогональную проекцию множества E на $\mathbb{R}^m$.

8.2. Доказательству теоремы предпошлём лемму, которая является усовершенствованием леммы 2.1 и даёт оценки для площади подмножества "почти аффинного" многообразия.

Лемма. *Пусть Φ — билипшицева параметризация простого многообразия M ($M \subset \mathbb{R}^m$), определённая на открытом множестве $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^k$, и $\varkappa$ — постоянная Липшица для Φ^{-1}. Пусть, далее, $A \subset \mathcal{O}$ — борелевское множество, а $L\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ — линейное отображение. Если при некотором $\varepsilon \in (0, 1/\varkappa)$*

$$\|\Phi(t) - \Phi(s) - L(t-s)\| \leqslant \varepsilon\,\|t-s\| \quad \text{для всех} \;\; t, s \in A, \tag{1}$$

то

$$(1-\varkappa\varepsilon)^k\,\lambda\bigl(L(A)\bigr) \leqslant \sigma\bigl(\Phi(A)\bigr) \leqslant \frac{1}{(1-\varkappa\varepsilon)^k}\,\lambda\bigl(L(A)\bigr).$$

Доказательство. Взяв x, $y \in E = \Phi(A)$ и положив $s = \Phi^{-1}(x)$, $t = \Phi^{-1}(y)$, мы получим из (1), что "распрямляющее" отображение $\Psi = L \circ \Phi^{-1}$ удовлетворяет неравенству

$$\bigl\|y - x - (\Psi(y) - \Psi(x))\bigr\| \leqslant \varepsilon\|t-s\| \leqslant \varepsilon\varkappa\|y-x\|.$$

Поэтому Ψ — почти изометрия при малых ε:

$$(1-\varepsilon\varkappa)\|y-x\| \leqslant \|\Psi(y) - \Psi(x)\| \leqslant (1+\varepsilon\varkappa)\|y-x\| \quad \text{при} \;\; x, y \in E.$$

Применяя лемму 2.1 с $C = (1-\varepsilon\varkappa)^{-1}$ и учитывая замечание к ней, мы получаем двустороннюю оценку

$$(1-\varepsilon\varkappa)^k\lambda\bigl(\Psi(E)\bigr) \leqslant \sigma(E) \leqslant \frac{1}{(1-\varepsilon\varkappa)^k}\lambda\bigl(\Psi(E)\bigr),$$

которая равносильна доказываемому неравенству, так как $\Psi(E) = L(A)$. ►

8.3. *Доказательство теоремы* 8.1. Не умаляя общности будем считать, что параметризация Φ задана на открытом множестве $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^k$ конечной меры. На борелевских множествах $A \subset \mathcal{O}$ рассмотрим меру $\nu(A) = \sigma\big(\Phi(A)\big)$ и убедимся, что она удовлетворяет условию

$$\inf_{t\in A} \omega_\Phi(t)\,\lambda(A) \leqslant \nu(A) \leqslant \sup_{t\in A} \omega_\Phi(t)\,\lambda(A). \tag{2}$$

Как установлено в теореме VI.1.2, отсюда следует, что $\nu(A) = \int_A \omega_\Phi(t)\,dt$, а это равносильно утверждению теоремы.

Так как параметризация Φ вместе с Φ^{-1} удовлетворяет условию Липшица, то $\nu(A) = 0$ тогда и только тогда, когда $\lambda(A) = 0$ (см. лемму 2.1). Это позволяет, устанавливая неравенства (2), пренебрегать множествами нулевой меры.

Пусть D — множество тех точек из $\mathcal{O}$, в которых все координатные функции отображения Φ дифференцируемы. По теореме Радемахера $\lambda(\mathcal{O}\setminus D) = 0$. Заменяя в случае необходимости D содержащимся в нём борелевским множеством той же меры (см. следствие 5 в п. II.2.2), не умаляя общности будем считать множество D борелевским. Так как $\nu(\mathcal{O} \setminus D) = \lambda(\mathcal{O} \setminus D) = 0$, то для доказательства неравенств (2) нам достаточно установить их для множеств, содержащихся в D, которые мы и будем далее рассматривать.

Заметим ещё, что если неравенства (2) справедливы для множеств, образующих возрастающую последовательность, объединение которых равно A, или для множеств, образующих счётное разбиение A, то они справедливы и для A.

Оба неравенства (2) устанавливаются единообразно. Мы докажем лишь оценку сверху, предоставляя читателю провести аналогичные рассуждения для получения оценки снизу.

Допустим, что правое неравенство (2) неверно для множества $A \subset D$. Тогда при некотором $C > 1$

$$\nu(A) > C \sup_{t\in A} \omega_\Phi(t)\,\lambda(A). \tag{3}$$

Зафиксируем теперь положительное число ε, выбор которого уточним позже, и для каждого $r > 0$ рассмотрим множества

$$D^r = \Big\{ s \in D \;\Big|\; B(s,r) \subset \mathcal{O} \;\text{ и }\; \big\|\Phi(t) - \Phi(s) - d_s\Phi(t-s)\big\| \leqslant \varepsilon\,\|t-s\| \;\text{ для }\; t \in B(s,r) \Big\}.$$

Очевидно, они расширяются при уменьшении r и исчерпывают всё множество D. Поэтому неравенство (3) справедливо и для какого-то множества $A \cap D^r$. Заменяя в случае необходимости A таким пересечением, будем считать, что $A \subset D^r$ при некотором r. Если разбить множество A на не более чем счётное число частей, диаметры которых меньше r, то по крайней мере для одной из них будет справедливо неравенство (3). Поэтому не умаляя общности можно считать, что $\operatorname{diam}(A) < r$. В таком случае на множестве A выполнено неравенство

$$\|\Phi(t) - \Phi(s) - d_s\Phi(t-s)\| \leqslant \varepsilon\,\|t-s\| \qquad (s,\, t \in A). \tag{4}$$

Так как частные производные координатных функций отображения Φ измеримы и ограничены, множество A можно разбить на конечное число (борелевских) частей таким

образом, что на каждой из них колебания всех частных производных будут произвольно малы. Тогда, очевидно, сколь угодно малым будет и колебание дифференциалов отображения Φ. Построим разбиение таким образом, чтобы на каждом его элементе A' выполнялось неравенство

$$\|d_s\Phi - d_t\Phi\| < \varepsilon \quad \text{при} \quad s,\, t \in A'. \tag{5}$$

По крайней мере для одного элемента этого разбиения будет справедливо и неравенство (3). Заменяя в случае необходимости A таким элементом разбиения, можно не умаляя общности считать, что множество A удовлетворяет обоим условиям (4) и (5). Поэтому, взяв в качестве линейного отображения L дифференциал Φ в какой-то точке $a \in A$, мы получим, что отображение Φ почти аффинное:

$$\big\|\Phi(t) - \Phi(s) - L(t-s)\big\| \leqslant \big\|\Phi(t) - \Phi(s) - d_s\Phi(t-s)\big\| + \big\|d_s\Phi(t-s) - d_a\Phi(t-s)\big\| \leqslant 2\varepsilon\|t-s\|$$

для всех t, s из A. Таким образом, выполнено условие (1) леммы 8.2 (с заменой ε на 2ε). Считая, что $\varepsilon < \frac{1}{2\varkappa}$, где $\varkappa$ — константа Липшица для отображения Φ^{-1}, получаем неравенство

$$\nu(A) = \sigma\big(\Phi(A)\big) \leqslant \frac{\lambda\big(L(A)\big)}{(1-2\varepsilon\varkappa)^k} = \frac{\omega_\Phi(a)\lambda(A)}{(1-2\varepsilon\varkappa)^k} \leqslant \frac{1}{(1-2\varepsilon\varkappa)^k}\sup_{t\in A}\omega_\Phi(t)\,\lambda(A).$$

Вместе с (3) отсюда вытекает, что

$$C\sup_{t\in A}\omega_\Phi(t)\,\lambda(A) < \nu(A) \leqslant \frac{1}{(1-2\varepsilon\varkappa)^k}\sup_{t\in A}\omega_\Phi(t)\,\lambda(A).$$

Следовательно,

$$1 < C \leqslant \frac{1}{(1-2\varepsilon\varkappa)^k}.$$

Это приводит к искомому противоречию, если число ε было взято достаточно малым. Таким образом, сделанное допущение неверно, что доказывает теорему. ►

Следствие. *Сужение k-мерной площади на σ-алгебру борелевских подмножеств k-мерного липшицева многообразия есть регулярная мера, конечная на компактных множествах.*

Это вытекает из доказанной в теореме формулы с учётом ограниченности функции ω_Φ и регулярности меры Лебега.

8.4. Умея вычислять площадь на липшицевых поверхностях, мы можем расширить класс компактных множеств, для которых справедлива формула Гаусса–Остроградского (п. 6.5). Для этого в определении бруса (см. п. 6.2) вместо гладкой функции рассмотрим функцию φ, удовлетворяющую условию Липшица. Так как она дифференцируема почти везде, то почти везде на нетривиальной части границы бруса определена внешняя нормаль. При этом площадь множества, содержащегося в графике липшицевой функции, вычисляется, как и в случае гладкой функции (см. следствие 8.1). Поскольку приращение липшицевой функции по любой координате

представляется в виде интеграла от соответствующей частной производной (см. теорему XI.4.1), при таком обобщении и утверждение, и доказательство теоремы 6.3 полностью сохраняются.

Обобщая понятие стандартного компакта (определение 6.4), будем по-прежнему считать, что $\partial K = M \cup E$, где M и E — удовлетворяют условиям б) и в) этого определения, а условие а) заменим следующим:

а′) для каждой точки $p \in M$ существует такой открытый параллелепипед R_p, что $p \in R_p$ и пересечение $K \cap \overline{R_p}$ есть брус, соответствующий липшицевой функции.

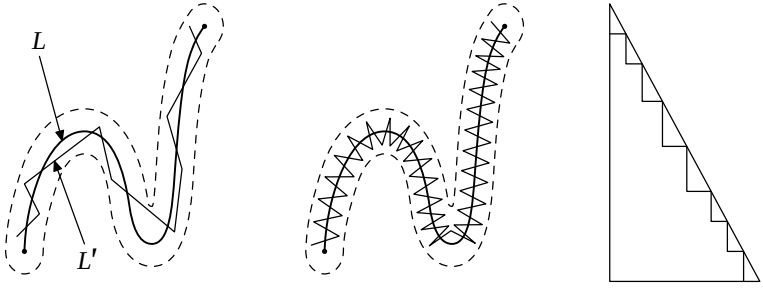
Повторяя доказательство теоремы Гаусса–Остроградского мы убедимся, что она верна для K. В частности, она верна для любого выпуклого тела, так как условие а′) выполняется в каждой точке его границы (см. дополнение IV).

8.5. Обсудим теперь вопрос о том, будут ли близкими площади "близких" множеств, иными словами, вопрос о непрерывности площади. Чтобы уточнить, как понимается близость, введём числовую характеристику отклонения двух множеств друг от друга. Напомним (см. п. 1.7), что символом E_ε обозначается ε-окрестность множества E. Для ограниченных множеств A, B положим

$$\rho(A,B) = \inf\{\varepsilon > 0 \,|\, A \subset B_\varepsilon,\ B \subset A_\varepsilon\}.$$

Очевидно, что определённая таким образом функция ρ неотрицательна и симметрична. Кроме того, $\rho(A,B) = 0$ тогда и только тогда, когда $\overline{A} = \overline{B}$. Мы предоставляем читателю проверить, что функция ρ удовлетворяет неравенству треугольника и, следовательно, является метрикой (точнее, псевдометрикой). Она называется *метрикой Хаусдорфа.* На классе компактных множеств это настоящая метрика. При $\rho(A,B) < \varepsilon$ множества A, B ε-близки в том смысле, что $A \subset B_\varepsilon$ и $B \subset A_\varepsilon$, а если они ε-близки, то $\rho(A,B) \leqslant \varepsilon$.

Если L — плоская простая дуга, а число $\varepsilon > 0$ мало, то кривая L', ε-близкая к L, лежит в ε-окрестности кривой L и "в основном" повторяет её изгибы (см. рис. 17 а)). Как показывает рис. 17 б), при произвольно малом ε длина кривой L' может быть сколь угодно велика. На рис. 17 в) изображена ситуация, когда у всех ломаных, аппроксимирующих гипотенузу, длины одинаковы и равны сумме длин катетов.



а) б) в)

Рис. 17.

Таким образом, уже в одномерном случае нет никакой надежды на то, что длина непрерывна относительно метрики Хаусдорфа, даже если рассматривать только гладкие кривые. Однако примеры, приводящие к этому негативному итогу, позволяют

сделать одно важное наблюдение. В самом деле, длина кривой L' действительно может сколь угодно сильно отличаться от длины кривой L, но только в бóльшую сторону! Из приведённых рисунков видно, что кривая L' не может быть намного короче кривой L (ведь не только L' лежит в ε-окрестности L, но и L лежит в ε-окрестности L'). Именно это свойство, называемое полунепрерывностью длины снизу, мы и будем обсуждать. При этом, конечно, чрезвычайно существенно, что кривая L аппроксимируется не произвольными множествами, а кривыми. Ясно, что всегда можно построить ε-близкое к L счётное множество, длина которого (в силу его счётности) равна нулю. Поэтому за пределами множества кривых нет даже полунепрерывности длины. Явление, которое мы обнаружили на примере кривых, свойственно и поверхностям. Об этом, в частности, свидетельствует пример Шварца, где площадь аппроксимирующих многогранных поверхностей может значительно отличаться от площади цилиндра только в бóльшую сторону. Однако в случае поверхностей ситуация по сравнению с кривыми усложняется. Оказывается, ε-близость двух поверхностей не гарантирует нам (в отличие от того, что мы наблюдали для кривых), что аппроксимирующая поверхность имеет достаточно большую площадь. Это видно на рис. 18, где аппроксимируемая поверхность — просто единичный квадрат, а аппроксимирующая поверхность — достаточно "густо" заполняющая его узкая змейка, площадь которой (несмотря на её ε-близость к квадрату) может быть сколь угодно малой.

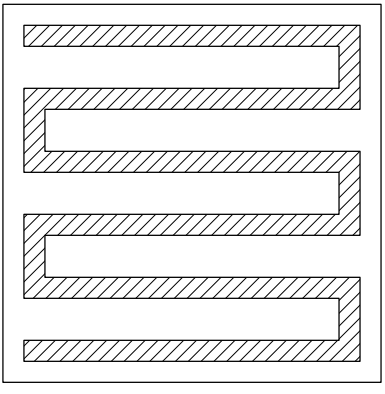


Рис. 18.

Выход из этого затруднения состоит в том, что в многомерном случае вместе с ε-близостью самих поверхностей следует предполагать и ε-близость их границ. Для произвольных многообразий это требует введения понятия края многообразия и приводит к необходимости преодолевать дополнительные трудности топологического характера (см. [Бо], стр. 88–141). Чтобы избежать этого, мы в дальнейшем вместо произвольных многообразий будем рассматривать лишь графики непрерывных функций.

Уточним понятие полунепрерывности для этого случая. Напомним, что символом Γ_f мы обозначаем график функции f. Все рассматриваемые функции считаются определёнными в некотором фиксированном открытом множестве $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m$, которое всюду до конца параграфа предполагается ограниченным. Буквами σ и λ далее обозначаются соответственно произвольная m-мерная площадь (в $\mathbb{R}^{m+1}$) и мера Лебега в $\mathbb{R}^m$. Точки пространства $\mathbb{R}^{m+1}$ будем обозначать символом (x, y), где $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}$.

Определение. Пусть функция $f \in C(\mathcal{O})$ ограничена и $\sigma(\Gamma_f) < +\infty$. Будем говорить, что площадь *полунепрерывна снизу* на Γ_f, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что $\sigma(\Gamma_g) > \sigma(\Gamma_f) - \varepsilon$ при условии, что $g \in C(\mathcal{O})$ и $\rho(\Gamma_f, \Gamma_g) < \delta$.

Это определение можно переформулировать следующим образом.

Площадь полунепрерывна снизу на Γ_f, если для любой последовательности непрерывных в $\mathcal{O}$ функций f_n из сходимости $\Gamma_{f_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Gamma_f$ по метрике Хаусдорфа следует, что $\varliminf\limits_{n\to\infty} \sigma(\Gamma_{f_n}) \geqslant \sigma(\Gamma_f)$.

Заметим, что из равномерной сходимости f_n к f на $\mathcal{O}$ вытекает сходимость графиков в метрике Хаусдорфа. Эти сходимости не равносильны (см. упр. 2), однако если предельная функция удовлетворяет условию Липшица, то сходимость по метрике Хаусдорфа влечёт равномерную сходимость. Это следует из неравенства

$$|f(x) - g(x)| \leqslant (C+1)\rho(\Gamma_f, \Gamma_g) \quad (x \in \mathcal{O}), \tag{6}$$

которое справедливо, если хотя бы одна из функций, скажем f, удовлетворяет условию Липшица с константой C. Действительно, пусть $r > \rho(\Gamma_f, \Gamma_g)$, $x \in \mathcal{O}$. Поскольку $(x, g(x)) \in \Gamma_g \subset (\Gamma_f)_r$, существует такая точка $(x_0, f(x_0)) \in \Gamma_f$, что $\big\|(x, g(x)) - (x_0, f(x_0))\big\| < r$. Тогда $\|x - x_0\| < r$ и $|g(x) - f(x_0)| < r$. Поэтому

$$|g(x) - f(x)| \leqslant |g(x) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(x)| < r + C\|x - x_0\| < (C+1)r.$$

Это приводит к требуемому результату, поскольку r может быть сколь угодно близко к $\rho(\Gamma_f, \Gamma_g)$.

8.6. Прежде чем переходить к доказательству полунепрерывности площади, установим предварительно одно вспомогательное утверждение.

Лемма. *Пусть функция f непрерывна в шаре $B(a, r)$. Предположим, что при некотором ε, $0 < \varepsilon < r$, её график Γ_f содержится в ε-окрестности плоскости L, не параллельной последней координатной оси. Тогда ортогональная проекция графика на эту плоскость содержит все её точки, лежащие над шаром $B(a, r-\varepsilon)$, т. е. все точки из L вида (x, y), где $x \in B(a, r-\varepsilon)$.*

Доказательство. Зафиксируем на L точку $p = (x, y)$, лежащую над $B(a, r-\varepsilon)$, и проверим, что прямая $\ell = \{p + t\nu \,|\, t \in \mathbb{R}\}$, где $\nu = (\nu', \alpha)$ — единичная нормаль к L, пересекает Γ_f. По условию $\alpha \neq 0$. Для определённости будем предполагать, что $\alpha > 0$. Прямая ℓ пересекает границу ε-окрестности L в точках $p \pm \varepsilon\nu = (x \pm \varepsilon\nu', y \pm \varepsilon\alpha)$, причём $x \pm \varepsilon\nu' \in B(a, r)$, поскольку $x \in B(a, r-\varepsilon)$ и $\|\varepsilon\nu'\| \leqslant \|\varepsilon\nu\| = \varepsilon$. Так как Γ_f лежит в ε-окрестности L, то $f(x + \varepsilon\nu') < y + \varepsilon\alpha$ и $f(x - \varepsilon\nu') > y - \varepsilon\alpha$. Поэтому разность $(y + t\alpha) - f(x + t\nu')$ принимает на концах отрезка $[-\varepsilon, \varepsilon]$ значения разных знаков. Следовательно, $f(x + \tau\nu') = y + \tau\alpha$ для некоторого $\tau \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Таким образом, точка $p + \tau\nu = (x + \tau\nu', f(x + \tau\nu'))$ принадлежит Γ_f и при ортогональном проектировании на L переходит в точку p, поскольку ν — нормаль к L. ►

Теперь мы готовы перейти к основному результату этого пункта и указать условие, гарантирующее полунепрерывность площади в смысле определения 8.5.

Теорема. *На графике функции, удовлетворяющей условию Липшица, площадь полунепрерывна снизу.*

Доказательство. Пусть функция f удовлетворяет условию Липшица с константой C на ограниченном открытом множестве $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m$ и D — множество тех точек, в которых она дифференцируема. Очевидно, $\|\operatorname{grad} f(x)\| \leqslant C$ на D. Положим $\omega(x) = \sqrt{1 + \|\operatorname{grad}(x)\|^2}$ и $\Omega = \sqrt{1 + C^2}$, так что $\omega(x) \leqslant \Omega$ и $\sigma(\Gamma_f) \leqslant \Omega\lambda(\mathcal{O}) < +\infty$.

Зафиксируем произвольное число $\varepsilon \in (0,1)$. Ясно, что множество D можно исчерпать множествами

$$D^t = \Big\{ a \in D \;\Big|\; B(a,t) \subset \mathcal{O} \text{ и } \big| f(x) - f(a) - \langle \operatorname{grad} f(a), x - a \rangle \big| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \|x - a\| \text{ для } x \in B(a,t) \Big\},$$

которые расширяются при уменьшении t. Поскольку по теореме Радемахера $\lambda(\mathcal{O} \setminus D) = 0$, мы можем зафиксировать столь малое $t > 0$, что $\lambda(\mathcal{O} \setminus D^t) < \varepsilon$. Построим шары, объединение которых почти совпадает с D^t. Для этого заметим, что по следствию из теоремы Витали (см. следствие 1 п. II.7.3) почти каждая точка D^t есть точка плотности этого множества. Пусть E^t — множество таких точек:

$$E^t = \left\{ x \in D_t \;\middle|\; \lim_{r \to 0} \frac{\lambda\big(D^t \cap B(x,r)\big)}{\lambda\big(B(x,r)\big)} = 1 \right\}.$$

Тогда $\lambda(E^t \cap B(x,r)) = \lambda\big(D_t \cap B(x,r)\big) > (1-\varepsilon)\lambda\big(B(x,r)\big)$ при $x \in E^t$ и $0 < r < r(x)$, так что

$$\lambda\big(B(x,r) \setminus E^t\big) < \varepsilon\lambda\big(B(x,r)\big). \tag{7}$$

Будем считать, что $r(x) < \frac{t}{2}$ для $x \in E^t$. Совокупность шаров $B(x,r)$, где $x \in E^t$ и $0 < r < r(x)$, образует покрытие Витали множества E^t. По теореме Витали из него можно выделить такие попарно не пересекающиеся шары B_i, что $\lambda(E^t \setminus \bigcup_i B_i) = 0$.

Обозначим временно произвольный шар B_i буквой B и пусть r — его радиус. Выберем в $B \cap E^t$ такую точку a, что $\omega(a) + \varepsilon\Omega \geqslant \sup\limits_{B \cap E^t} \omega$. Так как согласно (7) $\lambda(B \setminus E^t) < \varepsilon\lambda(B)$, то для площади графика f над B справедлива оценка:

$$\begin{aligned} \sigma\big(\Gamma_f(B)\big) = \int_B \omega(x)\,dx = \int_{B \cap E^t} \ldots + \int_{B \setminus E^t} \ldots \leqslant \\ \leqslant (\omega(a) + \varepsilon\Omega)\lambda(B \cap E^t) + \Omega\lambda(B \setminus E^t) \leqslant (\omega(a) + 2\varepsilon\Omega)\lambda(B) \end{aligned} \tag{8}$$

(символом $\Gamma_f(B)$ мы обозначаем часть графика функции f, лежащую над множеством B).

Неравенство (8) позволяет сравнить $\sigma\big(\Gamma_f(B)\big)$ с площадью графика функции, близкой к f в шаре B. Действительно, пусть $g \in C(\mathcal{O})$ и $|f(x) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{3} r$ для $x \in B$. Рассмотрим уравнение $y = h(x) = f(a) + \big\langle x - a, \operatorname{grad} f(a) \big\rangle$ аффинной касательной плоскости L к графику Γ_f в точке $(a, f(a))$. Так как $a \in B$, то $\|x - a\| < 2r < t$ для любой точки x из этого шара. Учитывая включение $a \in D^t$, мы получаем неравенство $|f(x) - h(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}\|x - a\| < \frac{2}{3}\varepsilon r$. Поэтому $|g(x) - h(x)| < \eta = \varepsilon r$ и, следовательно, график $\Gamma_g(B)$ лежит в η-окрестности плоскости L. Чтобы воспользоваться леммой, рассмотрим множество $B^\eta = \{x \in B \,|\, B(x,\eta) \subset B\}$. Ясно, что это шар, радиус которого равен $r - \eta = (1-\varepsilon)r$. Поэтому $\lambda\big(B^\eta\big) = (1-\varepsilon)^m \lambda(B) > (1 - m\varepsilon)\lambda(B)$.

По лемме ортогональная проекция Γ' графика $\Gamma_g(B)$ на L содержит график $\Gamma_h(B^\eta)$. Так как при ортогональном проектировании площади компактных множеств не возрастают и $\Gamma_g(B)$ есть счётное объединение компактных множеств, то $\sigma\big(\Gamma_g(B)\big) \geqslant \sigma(\Gamma')$, так что $\sigma\big(\Gamma_g(B)\big) \geqslant \sigma\big(\Gamma_h(B^\eta)\big)$. Следовательно,

$$\sigma\big(\Gamma_g(B)\big) \geqslant \sigma\big(\Gamma_h(B^\eta)\big) = \omega(a)\,\lambda(B^\eta) \geqslant (1-m\varepsilon)\omega(a)\lambda(B) \geqslant (\omega(a)-m\Omega\varepsilon)\lambda(B).$$

Вместе с неравенством (8) это даёт нам, что

$$\sigma\big(\Gamma_f(B)\big) \leqslant \sigma\big(\Gamma_g(B)\big) + (m+2)\varepsilon\Omega\lambda(B), \tag{9}$$

если $|f(x)-g(x)| < \frac{\varepsilon}{3}r$ для всех $x \in B$.

В заключительной части доказательства оценим снизу площадь Γ_g, считая, что $\rho(\Gamma_f,\Gamma_g) < \delta$ и δ достаточно мало. Зафиксируем столь большой номер N, что $\lambda\big(\bigcup\limits_{i>N} B_i\big) < \varepsilon$ и положим $\delta = \frac{\varepsilon}{3(C+1)} \min\limits_{1\leqslant i\leqslant N} r_i$, где r_i — радиус шара B_i. Если $\rho(\Gamma_f,\Gamma_g) < \delta$, то $|f(x)-g(x)| < (C+1)\delta$ при всех $x \in \mathcal{O}$ в силу неравенства (6), и поэтому $|f(x)-g(x)| < \frac{\varepsilon}{3}r_i$ в шаре B_i при $i = 1,\dots,N$. Следовательно, при $B = B_i$ неравенства (9) справедливы для $i = 1,\dots,N$. Сложив их, мы получим:

$$\sigma\left(\Gamma_f\left(\bigcup_{i=1}^N B_i\right)\right) = \sum_{i=1}^N \sigma\big(\Gamma_f(B_i)\big) \leqslant \sigma\left(\Gamma_g\left(\bigcup_{i=1}^N B_i\right)\right) + \widetilde{\Omega}\varepsilon \leqslant \sigma(\Gamma_g) + \widetilde{\Omega}\varepsilon,$$

где $\widetilde{\Omega} = (m+2)\Omega\lambda(\mathcal{O})$. Таким образом,

$$\sigma(\Gamma_g) \geqslant \int_{\bigcup\limits_{i=1}^N B_i} \omega(x)\,dx - \widetilde{\Omega}\varepsilon = \int_{\bigcup\limits_{i=1}^\infty B_i} \dots - \int_{\bigcup\limits_{i>N} B_i} \dots - \widetilde{\Omega}\varepsilon >$$
$$> \int_{D_t} \omega(x)\,dx - (\Omega+\widetilde{\Omega})\varepsilon > \int_{\mathcal{O}} \omega(x)\,dx - \Omega\varepsilon - (\Omega+\widetilde{\Omega})\varepsilon = \sigma(\Gamma_f) - (2\Omega+\widetilde{\Omega})\varepsilon,$$

что ввиду произвольности ε и доказывает полунепрерывность площади снизу на графике Γ_f. ►

Следствие. *Если функция f удовлетворяет условию Липшица, а последовательность непрерывных функций g_n равномерно сходится к f, то*

$$\sigma(\Gamma_f) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \sigma(\Gamma_{g_n}).$$

Для доказательства достаточно заметить, что $\rho\big(\Gamma_{g_n},\Gamma_f\big) \leqslant \sup\limits_{\mathcal{O}} |g_n - f| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, и поэтому при $\varepsilon > 0$ неравенство $\sigma(\Gamma_{g_n}) < \sigma(\Gamma_f) - \varepsilon$ может выполняться лишь для конечного числа номеров n.

Это следствие можно несколько усилить, заменив в нём равномерную сходимость сходимостью почти везде или по мере. Покажем, что оно остаётся справедливым для сходимости почти везде.

В самом деле, пусть $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ почти везде на (ограниченном) множестве $\mathcal{O}$. Зафиксируем произвольно малое число $\varepsilon > 0$ и на основании теоремы Егорова III.3.6 найдём такое множество $e \subset \mathcal{O}$, что

$$f_n \rightrightarrows f \quad \text{на} \quad \mathcal{O} \setminus e \quad \text{и} \quad \lambda(e) < \varepsilon.$$

Положим $t_n = \sup\limits_{\mathcal{O}\setminus e} |f_n - f|$ и исправим функции f_n, "срезав" их там, где они "сильно отличаются" от f. Для этого введём функции

$$g_n(x) = \begin{cases} f(x) + t_n, & \text{если} \quad f_n(x) \geqslant f(x) + t_n, \\ f(x) - t_n, & \text{если} \quad f_n(x) \leqslant f(x) - t_n, \\ f_n(x), & \text{если} \quad |f_n(x) - f(x)| < t_n. \end{cases}$$

Они непрерывны и равномерно сходятся к f на $\mathcal{O}$, так как $|f - g_n| \leqslant t_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Заметим, что над множеством $E_n = \mathcal{O}\big(|g_n - f| \geqslant t_n\big)$ график g_n состоит из двух частей, лежащих на графиках липшицевых функций $f \pm t_n$, и если $t_n < \varepsilon$, то множество E_n содержится в e. Таким образом, при достаточно больших номерах

$$\sigma(\Gamma_{f_n}) \geqslant \sigma\big(\Gamma_{f_n}(\mathcal{O} \setminus E_n)\big) = \sigma\big(\Gamma_{g_n}(\mathcal{O} \setminus E_n)\big) =$$
$$= \sigma(\Gamma_{g_n}) - \int_{E_n} \omega(x)\,dx \geqslant \sigma(\Gamma_{g_n}) - \Omega\lambda(e) > \sigma(\Gamma_{g_n}) - \Omega\varepsilon.$$

Переходя в этом неравенстве к нижнему пределу, мы получаем:

$$\varliminf_{n\to\infty} \sigma(\Gamma_{f_n}) \geqslant \varliminf_{n\to\infty} \sigma(\Gamma_{g_n}) - \Omega\varepsilon.$$

Поскольку ε произвольно, а $\varliminf\limits_{n\to\infty} \sigma(\Gamma_{g_n}) \geqslant \sigma(\Gamma_f)$ согласно следствию, мы приходим к требуемому результату.

Случай сходимости по мере сводится к рассмотренному с помощью теоремы Рисса III.3.4.

УПРАЖНЕНИЯ

1) Пусть L_0 — график функции $f(x) = 2x^2 \sin\frac{2\pi}{x}$ при $0 < x < \frac{1}{2}$, $f(0) = 0$, а L — объединение L_0 и множества, получающегося из него поворотом на $\frac{\pi}{2}$. Докажите, что кривая L допускает билипшицеву параметризацию, но её пересечение с произвольной окрестностью точки $(0,0)$ не конгруэнтно графику какой-либо функции.

2) Пусть непрерывные ограниченные функции f, f_n $(n = 1, 2, \dots)$ определены на ограниченном множестве $\mathcal{O}$. Докажите, что

а) если $f_n \rightrightarrows f$ на $\mathcal{O}$, то $\rho(\Gamma_{f_n}, \Gamma_f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$;

б) если $\rho(\Gamma_{f_n}, \Gamma_f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, то $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ поточечно в $\mathcal{O}$;

в) если $\rho(\Gamma_{f_n}, \Gamma_f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ и функция f равномерно непрерывна, то $f_n \rightrightarrows f$ на $\mathcal{O}$.

Покажите на примере, что без равномерной непрерывности f утверждение в) неверно.

Глава IX. АППРОКСИМАЦИЯ И СВЁРТКА

§ 1. Пространства $\mathscr{L}^p$

При решении многих задач важную роль играет возможность приближения произвольных функций того или иного класса функциями с лучшими свойствами. Например, измеримые функции аппроксимируются простыми (см. теорему III.2.2), непрерывные — гладкими. Большое значение имеет при этом то, как мы понимаем близость между функциями, что принимаем за меру "непохожести" их друг на друга. Читатель, вероятно, уже знаком с равномерным, или чебышевским отклонением. Напомним, что равномерное отклонение двух заданных на множестве X функций f и g определяется как $\sup\limits_X |f-g|$. Ясно, что чебышевское отклонение f_n от g стремится к нулю тогда и только тогда, когда $f_n \rightrightarrows g$ на X. Если функции определены на пространстве с мерой, то наряду с классическим равномерным отклонением полезно рассматривать и его модификацию — равномерное отклонение на множестве полной меры. Для функций f, g оно определяется с помощью понятия истинного супремума (см. п. IV.4.5) как $\operatorname{vraisup}\limits_X |f-g|$.

Однако нередко условия рассматриваемой задачи заранее исключают возможность равномерной аппроксимации. Так будет, в частности, при приближении неограниченных функций ограниченными или — что особенно важно — разрывных функций непрерывными. В таких случаях необходимо использовать другие характеристики отклонения функций друг от друга. Для суммируемых функций f, g это можно сделать с помощью так называемого *отклонения в среднем,* под которым понимается интеграл $\int_X |f-g|\,d\mu$. Если X — подмножество пространства $\mathbb{R}^m$, а μ — m-мерная мера Лебега, то отклонение в среднем имеет простой геометрический смысл: это $(m+1)$-мерный объём множества, заключённого между графиками рассматриваемых функций. Отклонение в среднем принципиально отлично от равномерного отклонения. Последнее велико уже когда функции сильно отличаются хотя бы в одной точке, а отклонение в среднем учитывает поведение функций на всём множестве интегрирования. Как легко убедиться на примерах, оно может быть сколь угодно малым, даже если чебышевское отклонение сколь угодно велико.

Отклонение в среднем естественно рассматривать на множестве $\mathscr{L}(X,\mu)$ всех суммируемых функций, а модифицированное равномерное отклонение — на множестве

$$\mathscr{L}^\infty(X,\mu) = \Big\{ f \in \mathscr{L}^0(X,\mu) \;\Big|\; \operatorname{vraisup}_X |f| < +\infty \Big\}.$$

Для увеличения числа возможных приложений полезно ввести также множества, "промежуточные" между $\mathscr{L}(X,\mu)$ и $\mathscr{L}^\infty(X,\mu)$.

1.1. Далее мы будем придерживаться обычных обозначений: $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с произвольной (ненулевой) мерой, $\mathscr{L}^0(X, \mu)$ — множество измеримых функций (вещественных или комплексных) почти везде конечных на X. В дальнейшем все функции берутся из этого множества.

Зафиксируем произвольное число p, $1 < p < +\infty$, и положим

$$\mathscr{L}^p(X, \mu) = \Big\{ f \in \mathscr{L}^0(X, \mu) \;\Big|\; \int_X |f|^p \, d\mu < +\infty \Big\}.$$

Для единообразия будем считать, что $\mathscr{L}^1(X, \mu) = \mathscr{L}(X, \mu)$ — множество всех суммируемых функций. Так как

$$|f + g|^p \leqslant \big(|f| + |g|\big)^p \leqslant \big(2 \max\{|f|, |g|\}\big)^p = 2^p \max\big\{|f|^p, |g|^p\big\} \leqslant 2^p \big(|f|^p + |g|^p\big),$$

то множество $\mathscr{L}^p(X, \mu)$ вместе с функциями f, g содержит их сумму, а следовательно, и их линейную комбинацию. Таким образом, оно является векторным пространством. Нередко говорят, что $\mathscr{L}^p(X, \mu)$ — это множество функций "суммируемых со степенью p". Точнее было бы сказать, что это функции, у которых суммируема p-я степень модуля. При этом сама функция может не быть суммируемой. Например, функция $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ не суммируема по мере Лебега λ на $\mathbb{R}_+$, но входит в $\mathscr{L}^2\big(\mathbb{R}_+, \lambda\big)$ или, как говорят, она "суммируема с квадратом" на $(0, +\infty)$.

Однако для конечной меры $\mathscr{L}^p(X, \mu) \subset \mathscr{L}^1(X, \mu)$. Более того, если $1 \leqslant r < p \leqslant +\infty$, то $\mathscr{L}^p(X, \mu) \subset \mathscr{L}^r(X, \mu)$. При $p = +\infty$ это очевидно. Если же $p < +\infty$, то положив $s = \frac{p}{r}$, $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$ и применив неравенство Гёльдера с показателем s к функциям $|f|^r$ и 1, где $f \in \mathscr{L}^p(X, \mu)$, мы видим, что

$$\int_X |f|^r \, d\mu = \int_X |f|^r \cdot 1 \, d\mu \leqslant \left(\int_X |f|^{rs} \, d\mu \right)^{\frac{r}{p}} \mu(X)^{\frac{1}{s'}} = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{r}{p}} \mu(X)^{\frac{1}{s'}} < +\infty. \quad (1)$$

Таким образом, в случае конечной меры множества $\mathscr{L}^p(X, \mu)$ уменьшаются с ростом p. В частности, $\mathscr{L}^1(X, \mu)$ — наибольшее из них, а $\mathscr{L}^\infty(X, \mu)$ — наименьшее.

Обобщённое отклонение в среднем удобно ввести с помощью нормы.

Определение. Пусть $f \in \mathscr{L}^p(X, \mu)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. *Норма**) (точнее: *$\mathscr{L}^p$-норма*) функции f определяется равенством

$$\|f\|_p = \begin{cases} \big(\int_X |f|^p \, d\mu\big)^{\frac{1}{p}} & \text{при } 1 \leqslant p < +\infty; \\ \operatorname*{vraisup}_X |f| & \text{при } p = +\infty. \end{cases}$$

Если $\mu(X) = 1$, то, как видно из (1), $\mathscr{L}^p$-норма растёт с ростом p. Кроме того, можно доказать (см. упр. 4), что $\|f\|_p \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} \|f\|_\infty$ для f из $\mathscr{L}^\infty(X, \mu)$. Это предельное соотношение может служить дополнительной мотивировкой обозначения $\|f\|_\infty$ для $\operatorname*{vraisup}_X |f|$.

*) Это название не вполне соответствует общепринятой терминологии; обычно функцию, удовлетворяющую перечисленным ниже свойствам 1) — 3), называют полунормой.

Отметим основные свойства нормы: для любых $f, g \in \mathscr{L}^p(X,\mu)$ и любого скаляра a

1) $\|f\|_p \geqslant 0$; 2) $\|a\,f\|_p = |a|\,\|f\|_p$; 3) $\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p$.

Свойства 1)–2) очевидны. Заметим ещё, что $\|f-g\|_p = 0$ тогда и только тогда, когда функции f и g эквивалентны, т. е. совпадают почти везде. Неравенство 3) называется *неравенством треугольника.* Для $\mathscr{L}^p$-нормы при конечном p оно есть не что иное, как неравенство Минковского, которое установлено в п. IV.4.6. Справедливость неравенства треугольника в случае $p = +\infty$ мы предоставляем читателю проверить самостоятельно.

Из неравенства треугольника вытекает полезное следствие:

$$\big|\,\|f\|_p - \|g\|_p\big| \leqslant \|f-g\|_p.$$

Действительно, $\|f\|_p = \|g+(f-g)\|_p \leqslant \|g\|_p + \|f-g\|_p$, т. е. $\|f\|_p - \|g\|_p \leqslant \|f-g\|_p$. Так как функции f и g равноправны, то это даёт требуемое.

Очевидно, что отклонение в среднем функций f и g друг от друга есть не что иное, как $\mathscr{L}^1$-норма их разности. Поэтому если $\|f_n - f\|_1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, то мы говорим, что последовательность $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ *сходится к f в среднем.* Допуская некоторую вольность речи, будем и при произвольном $p \geqslant 1$ говорить, что f_n сходятся к f в среднем, или, точнее, *в среднем с показателем p*, если $\|f_n - f\|_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ (*сходимость по $\mathscr{L}^p$-норме*). Используя неравенство треугольника, легко доказать, что при сходимости по $\mathscr{L}^p$-норме предел единствен с точностью до эквивалентности. В самом деле, если $\|f_n - f\|_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ и $\|f_n - g\|_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, то

$$\|f-g\|_p \leqslant \|f-f_n\|_p + \|f_n - g\|_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

так что $\|f-g\|_p = 0$.

$\mathscr{L}^p$-норма непрерывна относительно сходимости в среднем, т. е.

$$\text{если}\ \ \|f_n - f\|_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \ \ \text{то}\ \ \|f_n\|_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|f\|_p.$$

Это следует из доказанного выше неравенства: $\big|\,\|f_n\|_p - \|f\|_p\big| \leqslant \|f_n - f\|_p$.

Принятые нами определения множества $\mathscr{L}^p$ и $\mathscr{L}^p$-нормы можно распространить и на случай $0 < p < 1$. Однако при этом “норма” уже не будет удовлетворять неравенству треугольника (см. упр. 14), а множество $\mathscr{L}^p(\mathbb{R},\lambda)$ содержит не только несуммируемые, но даже и локально несуммируемые функции (см. упр. 15), что весьма сужает круг возможных приложений. Поэтому мы ограничиваемся изучением свойств $\mathscr{L}^p$ лишь при $p \geqslant 1$. Это будет подразумеваться в дальнейшем, даже если не оговорено явно.

1.2. Обсудим вопрос о необходимых и о достаточных условиях сходимости по $\mathscr{L}^p$-норме.

Теорема. *Пусть $1 \leqslant p < +\infty$ и $f_n \in \mathscr{L}^p(X,\mu)$ при всех $n \in \mathbb{N}$.*

а) Если $f \in \mathscr{L}^p(X,\mu)$ и $\|f_n - f\|_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, то $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ по мере.

б) Если $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ по мере или почти везде и $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ почти всюду при всех n, причём $g \in \mathscr{L}^p(X,\mu)$, то $f \in \mathscr{L}^p(X,\mu)$ и $\|f - f_n\|_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Доказательство. а) Зафиксируем произвольное положительное число ε и положим $X_n(\varepsilon) = \{x \in X \mid |f(x) - f_n(x)| \geqslant \varepsilon\}$. Тогда

$$\mu\big(X_n(\varepsilon)\big) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^p} \int_{X_n(\varepsilon)} |f - f_n|^p \, d\mu \leqslant \frac{1}{\varepsilon^p} \|f - f_n\|_p^p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

что и требовалось.

б) Так как $|f_n| \leqslant g$, то $|f| \leqslant g$ (в случае сходимости по мере это установлено в следствии 2 п. III.3.5) и $|f_n - f|^p \leqslant (2g)^p \in \mathscr{L}^1(X, \mu)$. Поэтому $\|f_n - f\|_p^p = \int_X |f_n - f|^p \, d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ по теореме Лебега (см. пп. IV.8.3-4). ▶

Замечание. Легко видеть, что сходимость последовательности в пространстве $\mathscr{L}^\infty(X, \mu)$ равносильна её равномерной сходимости на некотором подмножестве полной меры.

1.3. Здесь мы установим важное свойство пространства $\mathscr{L}^p(X, \mu)$.

Определение. Последовательность $\{f_n\}_{n\geqslant 1} \subset \mathscr{L}^p(X, \mu)$ называется *фундаментальной* (или сходящейся в себе) в $\mathscr{L}^p(X, \mu)$, если $\|f_n - f_k\|_p \to 0$ при k, $n \to \infty$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ : \ \|f_n - f_k\|_p < \varepsilon \quad \text{при} \quad k, n > N.$$

Всякая сходящаяся последовательность фундаментальна, так как если $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$, то в силу неравенства треугольника

$$\|f_n - f_k\|_p \leqslant \|f_n - f\|_p + \|f - f_k\|_p \underset{k,n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Оказывается, верно и обратное. Мы установим сейчас это свойство, называемое полнотой пространства $\mathscr{L}^p$.

Теорема. *Всякая последовательность, фундаментальная по $\mathscr{L}^p$-норме* ($1 \leqslant p \leqslant +\infty$), *имеет предел.*

Доказательство. Случай $p = +\infty$ мы предоставляем читателю рассмотреть самостоятельно (он сводится к полноте пространства ограниченных функций относительно равномерной сходимости). Далее считаем, что $p < +\infty$.

Покажем сначала, что любая фундаментальная последовательность $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся почти везде. Для этого, пользуясь сходимостью в себе, выделим из $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ такую подпоследовательность $\{f_{n_j}\}_{j\geqslant 1}$, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p \leqslant 1.$$

Проверим, что $\{f_{n_j}\}_{j\geqslant 1}$ сходится почти везде. Рассмотрим ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|. \tag{2}$$

Пусть S и S_k — его сумма и k-я частичная сумма соответственно. По неравенству треугольника $\|S_k\|_p \leqslant \sum\limits_{j=1}^{\infty} \|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p \leqslant 1$, и поэтому

$$\int_X S_k^p \, d\mu \leqslant 1 \quad \text{при всех} \quad k.$$

Так как $S_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} S$ поточечно, то по теореме Фату $\int_X S^p\,d\mu \leqslant 1$. Из суммируемости S^p следует, что $S(x) < +\infty$ почти всюду, а это и означает сходимость почти всюду ряда (2). Рассмотрим теперь ряд

$$f_{n_1} + \sum_{j=1}^{\infty} \left(f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\right).$$

Как и ряд (2), он сходится почти везде, а его частичными суммами являются функции f_{n_k}. Таким образом, почти везде $f_{n_k}(x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$, где f — сумма последнего ряда.

Докажем теперь, что f и есть предел последовательности $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ в смысле сходимости в среднем, т. е. что $f \in \mathscr{L}^p(X,\mu)$ и $\|f_n - f\|_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$ и, пользуясь определением сходимости в себе, найдём такое N, что

$$\int_X |f_n - f_l|^p\,d\mu < \varepsilon^p \quad \text{при} \quad l,\, n > N.$$

Подставив в это неравенство $l = n_k > N$, мы видим, что

$$\int_X |f_n - f_{n_k}|^p\,d\mu < \varepsilon^p.$$

Переход в этом неравенстве к пределу по k (при фиксированном $n > N$) даёт нам согласно теореме Фату:

$$\int_X |f_n - f|^p\,d\mu \leqslant \varepsilon^p.$$

Таким образом, функция $f_n - f$, а с нею и f (поскольку $f = (f - f_n) + f_n$), входит в $\mathscr{L}^p(X,\mu)$, и последнее неравенство можно переписать в виде:

$$\|f_n - f\|_p \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad n > N. \ \blacktriangleright$$

1.4. В заключение этого параграфа остановимся на обобщении важной оценки максимальной функции, полученной в теореме IV.9.1. Прежде всего обобщим понятие максимальной функции, отказавшись от суммируемости.

Множество $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^m, \lambda_m)$ будем далее обозначать символом $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^m)$. Ясно, что $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^m) \subset \mathscr{L}_{loc}(\mathbb{R}^m)$ (определение $\mathscr{L}_{loc}(\mathbb{R}^m)$ дано в п. IV.9.2).

Определение. Пусть $f \in \mathscr{L}_{loc}(\mathbb{R}^m)$. Функция M_f, определяемая равенством

$$M_f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{v(r)} \int_{B(x,r)} |f(y)|\,dy \qquad (x \in \mathbb{R}^m),$$

называется *максимальной функцией* (для f).

Здесь, как и в § IV.9, $v(r)$ — объём шара радиуса r.

Повторив рассуждение, приведённое в п. IV.9.1, легко убедиться, что максимальная функция измерима. Отметим ещё два очевидных свойства максимальной функции, которые будем далее использовать без оговорок:

$$M_{f+g} \leqslant M_f + M_g; \qquad \text{если} \ \ |f| \leqslant C, \ \ \text{то} \ \ M_f \leqslant C.$$

Если $f \in \mathscr{L}_{loc}(\mathbb{R}^m)$ и $|f(x)|$ неограниченно растет при $\|x\| \to +\infty$, то максимальная функция всюду имеет значение $+\infty$. Если функция f суммируема, то, как доказано в теореме IV.9.1, максимальная функция почти везде конечна. Более того, в этой теореме получена оценка: $F(t) \leqslant \frac{5^m}{t}\|f\|_1$, где $F(t) = \lambda_m\big(\{x \in \mathbb{R}^m \mid M_f(x) > t\}\big)$ — убывающая функция распределения для M_f. Однако суммируемость может не сохраняться при переходе к максимальной функции (см. упр. 1, § IV.9). В противоположность этому, если при $p > 1$ некоторая функция принадлежит $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^m)$, то и её максимальная функция входит в этот класс. Чтобы доказать этот результат, мы сначала несколько уточним оценку, полученную в теореме IV.9.1 для суммируемой функции.

Лемма. *Пусть $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^m)$, $E_t = \{x \in \mathbb{R}^m \mid |f(x)| > t\}$, F — убывающая функция распределения для M_f. Тогда для всех $t > 0$*

$$F(t) \leqslant 2\frac{5^m}{t}\int_{E_{t/2}} |f(x)|\,dx. \tag{3}$$

Доказательство. Для оценки $F(t)$ представим f в виде суммы двух слагаемых, выбор которых зависит от t. Эта важная идея впервые была использована Марцинкевичем*) при доказательстве его интерполяционной теоремы, частным случаем которой является теорема, доказываемая ниже. Итак, положим $g = f \cdot \chi_{E_{t/2}}$, $h = f - g = f \cdot (1 - \chi_{E_{t/2}})$. Тогда $\|g\|_1 = \int_{E_{t/2}} |f|\,d\mu$, $|h| \leqslant \frac{t}{2}$. Так как $f = g + h$, то $M_f \leqslant M_g + M_h$. Оценим F через функции распределения M_g и M_h, которые обозначим соответственно буквами G и H. Очевидно,

$$\{x \in \mathbb{R}^m \mid M_f(x) > t\} \subset \{x \in \mathbb{R}^m \mid M_g(x) > \tfrac{t}{2}\} \cup \{x \in \mathbb{R}^m \mid M_h(x) > \tfrac{t}{2}\},$$

и поэтому $F(t) \leqslant G(\frac{t}{2}) + H(\frac{t}{2})$. Согласно теореме IV.9.1 $G(t) \leqslant \frac{5^m}{t}\|g\|_1$. Так как $|h| \leqslant \frac{t}{2}$, то и $M_h \leqslant \frac{t}{2}$, и поэтому $H(\frac{t}{2}) = 0$. Следовательно,

$$F(t) \leqslant G(\tfrac{t}{2}) \leqslant \frac{5^m}{t/2}\|g\|_1 = 2\frac{5^m}{t}\int_{E_{t/2}} |f(x)|\,dx. \quad \blacktriangleright$$

Перейдём теперь к основному результату этого пункта.

Теорема. *Если $1 < p < +\infty$ и $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^m)$, то $M_f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^m)$, причём*

$$\|M_f\|_p \leqslant 2\left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} 5^{\frac{m}{p}}\,\|f\|_p.$$

Доказательство. Пусть F — убывающая функция распределения для M_f. Согласно предложению VI.4.3

$$I \equiv \int_{\mathbb{R}^m} M_f^p(x)\,dx = p\int_0^\infty t^{p-1}F(t)\,dt.$$

*) Йозеф **Марцинкевич** (Marcinkiewicz), 1910–1940, — польский математик.

Оценивая $F(t)$ с помощью неравенства (3), мы получаем:

$$I \leqslant 2p\,5^m \int_0^\infty t^{p-2}\Big(\int_{E_{t/2}} |f(x)|\,dx\Big)dt = 2p\,5^m \int_0^\infty t^{p-2}\Big(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x)|\chi\Big(|f(x)| - \frac{t}{2}\Big)\,dx\Big)dt,$$

где χ — характеристическая функция полуоси $(0, +\infty)$. Изменение порядка интегрирования (проверка измеримости подынтегральной функции по совокупности переменных x, t предоставляется читателю) даёт нам:

$$\begin{aligned} I &\leqslant 2p5^m \int_{\mathbb{R}^m} |f(x)|\Big(\int_0^\infty t^{p-2}\chi\Big(|f(x)| - \frac{t}{2}\Big)\,dt\Big)dx = \\ &= 2p5^m \int_{\mathbb{R}^m} |f(x)|\Big(\int_0^{2|f(x)|} t^{p-2}\,dt\Big)\,dx = \\ &= 2p5^m \int_{\mathbb{R}^m} |f(x)|\frac{1}{p-1}|2f(x)|^{p-1}\,dx = 2^p 5^m \frac{p}{p-1}\|f\|_p^p, \end{aligned}$$

что равносильно утверждению теоремы. ►

УПРАЖНЕНИЯ

1) Убедитесь, что ни одно из множеств $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ и $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$ не содержится в другом. Приведите пример функции из $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$, не принадлежащей пространствам $\mathscr{L}^p(\mathbb{R})$ при $p \neq 2$.

2) Проверьте, что $\mathscr{L}^\infty\big([0,1],\lambda\big) \neq \bigcap\limits_{p<+\infty} \mathscr{L}^p\big([0,1],\lambda\big)$ (λ — мера Лебега).

3) Докажите, что при $1 < p < +\infty$ справедливо включение

$$\mathscr{L}^p(X,\mu) \subset \mathscr{L}^1(X,\mu) + \mathscr{L}^\infty(X,\mu) \equiv \big\{f + g \;\big|\; f \in \mathscr{L}^1(X,\mu),\ g \in \mathscr{L}^\infty(X,\mu)\big\}.$$

4) Пусть $\mu(X) < +\infty$, $f_n \in \mathscr{L}^p(X,\mu)$ $(n \in \mathbb{N})$ и $f_n \rightrightarrows f$ на X. Докажите, что $f \in \mathscr{L}^p(X,\mu)$ и $\|f_n - f\|_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

5) Докажите, что при $0 < r < p < s \leqslant +\infty$ пересечение $\mathscr{L}^r(X,\mu) \cap \mathscr{L}^s(X,\mu)$ содержится в $\mathscr{L}^p(X,\mu)$. Кроме того, $\|f\|_\infty = \lim\limits_{p\to+\infty} \|f\|_p$ для всякой функции f из $\mathscr{L}^r(X,\mu) \cap \mathscr{L}^\infty(X,\mu)$.

6) Пусть f — измеримая функция, $I(p) = \int_X |f|^p\,d\mu > 0$. Докажите, что множество $\{p > 0 \,|\, I(p) < +\infty\}$ есть промежуток. Убедитесь, что если он невырожден, то функция $p \mapsto I(p)$ логарифмически выпукла.

7) Покажите, что если $0 < r < p < s \leqslant +\infty$ и $\|f\|_s \leqslant C\|f\|_p$, то $\|f\|_p \leqslant K\|f\|_r$, где K зависит от C и от p, r, s, но не от f. Используя этот результат, докажите следующее дополнение к неравенству Хинчина (см. п. VI.4.5): при любых $p > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$

$$B_p(a_1^2 + \ldots + a_n^2)^{\frac{1}{2}} \leqslant \Big(\int_0^1 \big|a_1 r_1(t) + \ldots + a_n r_n(t)\big|^p\,dt\Big)^{\frac{1}{p}},$$

где $r_1, \ldots, r_n$ — функции Радемахера, а $B_p > 0$ — константа, зависящая лишь от p.

8) Докажите, что множество $B = \{f \in \mathscr{L}^p(X,\mu) \,|\, \|f\| \leqslant R\}$ замкнуто в $\mathscr{L}^p(X,\mu)$ относительно сходимости по мере: если $\{f_n\}_{n\geqslant 1} \subset B$ и $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ по мере, то $f \in B$.

9) Проверьте, что сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|f_n - f\|_p$ влечёт сходимость функций f_n к f почти везде.

10) Опишите меры, для которых

а) $\mathscr{L}^1(X,\mu) = \mathscr{L}^2(X,\mu)$; б) $\mathscr{L}^1(X,\mu) \not\subset \mathscr{L}^2(X,\mu)$ и $\mathscr{L}^2(X,\mu) \not\subset \mathscr{L}^1(X,\mu)$.

11) Укажите такую сходящуюся в среднем к нулю последовательность функций f_n из $\mathscr{L}^1\big([0,1],\lambda\big)$, что везде $\varlimsup\limits_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty$ и $\varliminf\limits_{n\to\infty} f_n(x) = -\infty$.

12) Пусть $0 < p < 1$, $\mathscr{L}^p(X,\mu) = \big\{f \in \mathscr{L}^0(X,\mu) \,\big|\, \|f\|_p < +\infty\big\}$. Докажите, что это векторное пространство и убедитесь, что

$$\|f+g\|_p^p \leqslant \|f\|_p^p + \|g\|_p^p \quad \text{и} \quad \|f+g\|_p \leqslant 2^{\frac{1}{p}-1}(\|f\|_p + \|g\|_p).$$

В частности, функция $\rho(f,g) = \|f-g\|_p^p$ есть метрика в $\mathscr{L}^p(X,\mu)$ (с той оговоркой, что равенство $\rho(f,g) = 0$ влечёт совпадение f и g лишь почти везде).

13) Проверьте, что теоремы этого параграфа справедливы для всех $p > 0$.

14) Убедитесь на примере, что если $0 < p < 1$, то для $\|f\|_p = \big(\int_X |f|^p\,d\mu\big)^{\frac{1}{p}}$ неравенство треугольника неверно.

15) Приведите пример такой функции f, что $\int_0^1 \sqrt{|f(x)|}\,dx < +\infty$ и $\int_a^b |f(x)|\,dx = +\infty$ при любых a, b, $0 \leqslant a < b \leqslant 1$.

§ 2. Аппроксимация в пространствах $\mathscr{L}^p$

В этом параграфе, начиная с п. 2.2, X — измеримое по Лебегу подмножество пространства $\mathbb{R}^m$, $\mathscr{L}^p(X)$ — краткое обозначение множества $\mathscr{L}^p(X,\lambda_m)$, $p \geqslant 1$. Как обычно, χ_E — характеристическая функция множества E.

2.1. Наш первый результат служит основой для последующих теорем об аппроксимации функций по $\mathscr{L}^p$-норме. Согласно ему простые функции плотно расположены в пространстве $\mathscr{L}^p(X,\mu)$ подобно тому, как рациональные числа плотны на вещественной оси (частный случай этого утверждения был установлен в лемме IV.9.2). Поскольку мы не ограничиваемся рассмотрением лишь вещественных функций, под простой функцией далее будем понимать измеримую функцию с конечным числом значений (вещественных или комплексных), т. е. линейную комбинацию характеристических функций измеримых множеств с, вообще говоря, комплексными коэффициентами.

Теорема. *Пусть $(X,\mathfrak{A},\mu)$ — произвольное пространство с мерой. Для любой функции f из $\mathscr{L}^p(X,\mu)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, и любого $\varepsilon > 0$ найдётся такая простая функция g, что $\|f-g\|_p < \varepsilon$.*

Доказательство. Не умаляя общности будем считать функцию вещественной. Утверждение теоремы при $p = +\infty$ фактически установлено в следствии из теоремы III.2.2. Пусть $p < +\infty$. Согласно тому же следствию найдутся такие простые функции g_n $(n = 1,2,\dots)$, что

$$g_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x) \quad \text{и} \quad |g_n(x)| \leqslant |f(x)| \ \text{ при всех } \ x \in X \ \text{ и } \ n \in \mathbb{N}.$$

Следовательно, по теореме 1.2 $\|f-g_n\|_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Таким образом, в качестве искомой функции g можно взять любую функцию g_n с достаточно большим номером. ►

2.2. Одна из наших целей — показать, что функции из $\mathscr{L}^p(X)$ можно сколь угодно точно аппроксимировать (по $\mathscr{L}^p$-норме) гладкими функциями. Начнём с приближения простыми функциями специального вида.

Определение. Линейную комбинацию характеристических функций ячеек будем называть *ступенчатой функцией.*

Ясно, что всякая ступенчатая функция принадлежит $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^m)$ при любом p.

Теорема. *Пусть* $1 \leqslant p < +\infty$, $f \in \mathscr{L}^p(X)$, $\varepsilon > 0$. *Тогда найдётся такая ступенчатая функция* g, *что* $\|f - g\|_p < \varepsilon$.

Доказательство разобьём на несколько шагов, постепенно усложняя функцию f. Продлив её нулём вне X, будем считать далее $X = \mathbb{R}^m$.

1) Пусть $f = \chi_E$ — характеристическая функция множества E конечной меры. По определению меры Лебега

$$\lambda_m(E) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_m(P_k) \;\middle|\; E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k,\ P_k \in \mathscr{P}^m \quad \text{при} \quad k = 1, 2, \dots\right\}.$$

Пусть $\{P_k\}_{k\geqslant 1}$ — такая последовательность ячеек, что

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_m(P_k) < \lambda_m(E) + \varepsilon.$$

Зафиксируем столь большое число N, что $\sum\limits_{k>N} \lambda_m(P_k) < \varepsilon$, и положим

$$A = \bigcup_{k=1}^{\infty} P_k, \quad B = \bigcup_{k=1}^{N} P_k.$$

По теореме о свойствах полукольца множество B можно представить в виде объединения попарно дизъюнктных ячеек. Не умаляя общности будем считать, что множества $P_1, \dots, P_N$ попарно не пересекаются. Тогда $\chi_B = \chi_{P_1} + \dots + \chi_{P_N}$ и, таким образом, $g = \chi_B$ — ступенчатая функция. Оценим $\|f - g\|_p$. По неравенству треугольника

$$\|f - g\|_p = \|\chi_E - \chi_B\|_p \leqslant \|\chi_E - \chi_A\|_p + \|\chi_A - \chi_B\|_p.$$

Рассмотрим каждое из слагаемых отдельно. Очевидно,

$$\|\chi_E - \chi_A\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^m} (\chi_A - \chi_E)^p \, d\lambda_m = \int_{A\setminus E} 1 \, d\lambda_m = \lambda_m(A) - \lambda_m(E) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_m(P_k) - \lambda_m(E) < \varepsilon$$

(последнее неравенство справедливо по выбору последовательности $\{P_k\}$). Далее:

$$\|\chi_A - \chi_B\|_p^p = \int_{A\setminus B} 1 \, d\lambda_m = \lambda_m(A \setminus B) \leqslant \lambda_m\Big(\bigcup_{k>N} P_k\Big) \leqslant \sum_{k>N} \lambda_m(P_k) < \varepsilon$$

(последнее неравенство справедливо по выбору N). Следовательно, $\|\chi_E - g\|_p \leqslant 2\varepsilon^{\frac{1}{p}}$. Мы видим, что функцию χ_E можно с произвольной степенью точности аппроксимировать ступенчатой функцией.

2) Если f — простая функция, т. е. линейная комбинация характеристических функций множеств конечной меры E_k, то утверждение теоремы верно для неё, поскольку по доказанному мы можем аппроксимировать каждую из функций χ_{E_k} с произвольной степенью точности.

3) В общем случае, опираясь на теорему 2.1, аппроксимируем функцию f простой функцией h таким образом, что $\|f-h\|_p<\varepsilon$. По доказанному, можно найти такую ступенчатую функцию g, что $\|h-g\|_p<\varepsilon$. Тогда $\|f-g\|_p\leqslant\|f-h\|_p+\|h-g\|_p<2\varepsilon$, что завершает доказательство. ►

Доказанная теорема справедлива не только для меры Лебега, но и для многих других σ-конечных мер (см. упр. 2).

2.3. Перейдём теперь к задаче об аппроксимации суммируемых функций гладкими. Напомним, что замыкание множества $\{x\in\mathbb{R}^m \mid \varphi(x)\neq 0\}$ называется носителем функции φ и обозначается символом $\operatorname{supp}(\varphi)$, а функция с компактным носителем называется финитной. Далее $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ — класс бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{R}^m$ финитных функций.

Наша цель — доказать, что при конечном p всякую функцию, входящую в $\mathscr{L}^p(X)$, можно сколь угодно хорошо аппроксимировать в среднем функцией из $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$. Отметим, что в пространстве $\mathscr{L}^\infty(X)$ не все функции допускают такую аппроксимацию (см. упр. 1).

Теорема. *Пусть $1\leqslant p<+\infty$, $f\in\mathscr{L}^p(X)$, $\varepsilon>0$. Тогда найдётся такая функция $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, что $\|f-\varphi\|_p<\varepsilon$.*

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 2.2, будем считать $X=\mathbb{R}^m$. Согласно этой теореме каждую функцию из $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^m)$ можно с любой степенью точности аппроксимировать ступенчатыми. Поэтому достаточно доказать, что требуемая аппроксимация существует для характеристической функции ячейки. Для этого воспользуемся теоремой о гладком спуске (см. п. VIII.1.7), согласно которой для произвольной ячейки P и любого положительного числа ε найдётся такая функция φ из $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, что

$$0\leqslant\varphi\leqslant 1,\quad \operatorname{supp}(\varphi)\subset P_\varepsilon,\quad \varphi(x)=1 \ \text{ при } \ x\in P,$$

где P_ε — ε-окрестность ячейки P.

Так как $\chi_P-\varphi=0$ на P и вне P_ε, то

$$\|\chi_P-\varphi\|_p^p=\int_{P_\varepsilon\setminus P}\varphi^p\,d\lambda_m\leqslant\lambda_m(P_\varepsilon\setminus P).$$

Очевидно, правая часть этого неравенства сколь угодно мала вместе с ε. Тем самым существование искомой аппроксимации для χ_P доказано, а вместе с этим доказана и теорема. ►

Следствие. *Пусть $X\subset\mathbb{R}^m$ — ограниченное измеримое множество, $1\leqslant p<+\infty$, $f\in\mathscr{L}^p(X)$. Для любого $\varepsilon>0$ найдётся такой полином P, что $\|f-P\|_p<\varepsilon$.*

Доказательство. По теореме существует такая функция $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, что $\|f-\varphi\|_p<\varepsilon$. Благодаря теореме Вейерштрасса (см. следствие 1 п. VII.6.4) мы можем равномерно аппроксимировать φ полиномом P на замыкании множества X, так что $|\varphi(x)-P(x)|<\varepsilon$ на X. Тогда

$$\|f-P\|_p\leqslant\|f-\varphi\|_p+\|\varphi-P\|_p<\varepsilon+\varepsilon\cdot\big(\lambda_m(X)\big)^{\frac{1}{p}}.$$

Таким образом, функцию f можно сколь угодно точно аппроксимировать полиномом по $\mathscr{L}^p$-норме. ►

2.4. Здесь мы установим неожиданную и интересную особенность функций из $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^m)$ с конечным p. Хотя такие функции могут быть всюду разрывными, тем не менее некоторые характеристики их поведения в целом позволяют говорить о "непрерывности в среднем". Для точной формулировки этого утверждения нам потребуется понятие сдвига функции.

Определение. Пусть $f \in \mathscr{L}^0(\mathbb{R}^m)$, $h \in \mathbb{R}^m$. *Сдвигом* функции f на вектор h называется функция f_h, задаваемая равенством

$$f_h(x) = f(x-h) \qquad (x \in \mathbb{R}^m).$$

Ввиду инвариантности меры Лебега относительно сдвига ясно, что $f_h \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^m)$ одновременно с f и $\|f_h\|_p = \|f\|_p$.

Теорема (о непрерывности в среднем). *Пусть* $1 \leqslant p < +\infty$, $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^m)$. *Тогда*

$$\|f - f_h\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x) - f(x-h)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Таким образом, отображение $h \mapsto f_h$ из $\mathbb{R}^m$ в $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^m)$ непрерывно.

Доказательство. По теореме 2.2 функцию f можно сколь угодно точно аппроксимировать в $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^m)$ ступенчатой функцией g. Очевидно,

$$\|f - f_h\|_p \leqslant \|f - g\|_p + \|g - g_h\|_p + \|f_h - g_h\|_p = 2\|f - g\|_p + \|g - g_h\|_p.$$

Поэтому теорему достаточно установить лишь для ступенчатых функций. Так как каждая такая функция есть линейная комбинация характеристических функций ячеек, то нам остаётся проверить утверждение теоремы для функции f вида $f = \chi_P$, где P ячейка. Как читатель легко убедится самостоятельно, оно сразу следует из теоремы Лебега. Но можно обойтись и без ссылки на эту теорему. Ясно, что f_h есть не что иное, как характеристическая функция сдвинутой ячейки $P_h = \{x + h \mid x \in P\}$. Поскольку $|f - f_h| = 0$ вне объединения $(P \setminus P_h) \cup (P_h \setminus P)$ и $|f - f_h| = 1$ на нём, мы видим, что

$$\|f - f_h\|_p^p = \int_{P\setminus P_h} 1 \, d\lambda_m + \int_{P_h \setminus P} 1 \, d\lambda_m = \lambda_m(P \setminus P_h) + \lambda_m(P_h \setminus P).$$

Правая часть этого равенства бесконечно мала при $h \to 0$. ▶

Как показывает пример функции $f = \chi_{(0,1)}$, теорема справедлива лишь для конечных p.

Отметим ещё непрерывность в среднем периодических функций.

Следствие. *Пусть* $1 \leqslant p < +\infty$ *и пусть* f *— измеримая в* $\mathbb{R}^m$ *функция,* 2π*-периодическая по каждой переменной. Если* $\int_{(-\pi,\pi)^m} |f(x)|^p \, dx < +\infty$, *то*

$$\int_{(-\pi,\pi)^m} |f(x) - f(x-h)|^p \, dx \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Доказательство. Пусть g совпадает с f в кубе $(-2\pi, 2\pi)^m$ и равна нулю вне его. Тогда $g \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^m)$ и $f(x) - f(x-h) = g(x) - g(x-h)$ при $x \in (-\pi, \pi)^m$, $\|h\| < \pi$. Поэтому

$$\int_{(-\pi,\pi)^m} |f(x) - f(x-h)|^p \, dx = \int_{(-\pi,\pi)^m} |g(x) - g(x-h)|^p \, dx \leqslant \|g - g_h\|_p^p \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0. \ \blacktriangleright$$

2.5. Установим теперь с помощью аппроксимации результат, играющий важную роль в гармоническом анализе.

Теорема (Риман, Лебег). *Пусть $X \subset \mathbb{R}^m$ и $f \in \mathscr{L}^1(X)$. Тогда*

$$I_f(y) = \int_X f(x)\, e^{i\langle x,y\rangle} \, dx \underset{\|y\|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

(символ $\langle x, y\rangle$ обозначает скалярное произведение векторов x, y из $\mathbb{R}^m$).

Если f — функция, суммируемая на конечном промежутке $[a, b]$, то теорема утверждает, что

$$\int_a^b f(x)\, e^{ixy} \, dx \underset{|y|\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Причина сходимости интеграла к нулю состоит, конечно, в том, что при больших y вещественная и мнимая части экспоненты e^{ixy} быстро колеблются около нуля. Если f непрерывна, то доказываемый результат интуитивно совершенно ясен: интеграл по $[a, b]$ можно разбить в сумму интегралов по промежуткам длиной $\frac{2\pi}{|y|}$. При больших $|y|$ функция f почти постоянна на каждом таком промежутке, а на его левой и правой половинах значения осциллирующего множителя e^{ixy} противоположны по знаку. Поэтому интегралы по ним "почти взаимно уничтожаются", что и приводит к эффекту, устанавливаемому в теореме. Удивительно, однако, что $I_f(y) \underset{|y|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ не только для непрерывных, но и для любых суммируемых функций, которые могут вообще не иметь точек непрерывности.

Мы дадим два доказательства теоремы Римана–Лебега. В них, несмотря на интуитивную ясность приведённых соображений, понятие непрерывности не используется. Оказывается, технически удобнее опираться на установленную нами возможность аппроксимировать суммируемую функцию ступенчатыми. Во втором доказательстве мы установим не только чисто качественный результат, сформулированный в теореме, но и получим оценку интеграла $I_f(y)$.

Доказательство I. Как и при доказательстве теорем 2.2 и 2.3, можно продолжить f нулём вне множества X. Поэтому мы не умаляя общности будем считать, что $X = \mathbb{R}^m$.

Разобьём доказательство на несколько шагов, постепенно усложняя f.

1) Функция f есть характеристическая функция ячейки P, имеющей вид $P = [a_1, b_1) \times \ldots \times [a_m, b_m)$. Тогда для вектора $y = (y_1, ..., y_m)$ из $\mathbb{R}^m$ мы имеем

$$I_f(y) = \prod_{k=1}^m \int_{a_k}^{b_k} e^{ix_k y_k} \, dx_k = \prod_{k=1}^m \frac{\exp(ib_k y_k) - \exp(ia_k y_k)}{iy_k}.$$

Ясно, что все сомножители справа ограничены, и если $\|y\| \to +\infty$, то правая часть этого равенства стремится к нулю, поскольку хотя бы один из знаменателей по абсолютной величине не меньше $\frac{\|y\|}{m}$. Таким образом, для характеристических функций ячеек утверждение теоремы установлено.

2) Функция f ступенчатая. Для такой функции утверждение теоремы очевидно, поскольку она есть линейная комбинация характеристических функций ячеек.

3) Пусть теперь f — произвольная функция из $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^m)$. Так как $I_f(y) = I_g(y) + I_{f-g}(y)$ и $\bigl|I_{f-g}(y)\bigr| \leqslant \|f-g\|_1$ для любой функции g, то

$$\bigl|I_f(y)\bigr| \leqslant \bigl|I_g(y)\bigr| + \bigl|I_{f-g}(y)\bigr| \leqslant \bigl|I_g(y)\bigr| + \|f-g\|_1.$$

В силу теоремы 2.2 слагаемое $\|f-g\|_1$ можно сделать сколь угодно малым за счёт выбора ступенчатой функции g. После этого, зафиксировав g, можно добиться малости слагаемого $\bigl|I_g(y)\bigr|$ для всех векторов y с достаточно большой нормой. ►

Непрерывность сдвига в пространстве $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^m)$ позволяет дать ещё одно, совсем короткое (хотя и несколько формальное) доказательство теоремы Римана–Лебега. Оно основано на приёме, часто используемом в гармоническом анализе.

Доказательство II. Будем считать, что $X = \mathbb{R}^m$. Положим $h = \frac{\pi y}{\|y\|^2}$. Ясно, что $\|h\| = \frac{\pi}{\|y\|} \to 0$ при $\|y\| \to +\infty$. После замены переменной $x \mapsto x - h$ получим

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(x)\, e^{i\langle x,y\rangle}\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x-h)\, e^{-i\pi + i\langle x,y\rangle}\, dx = -\int_{\mathbb{R}^m} f_h(x)\, e^{i\langle x,y\rangle}\, dx.$$

Следовательно,

$$2\int_{\mathbb{R}^m} f(x)\, e^{i\langle x,y\rangle}\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} \bigl(f(x) - f_h(x)\bigr)\, e^{i\langle x,y\rangle}\, dx.$$

Поэтому

$$2\left|\int_{\mathbb{R}^m} f(x)\, e^{i\langle x,y\rangle}\, dx\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^m} |f(x) - f_h(x)|\, dx.$$

Интеграл, стоящий в правой части этого неравенства, бесконечно мал при $h \to 0$ в силу непрерывности функции f в среднем. ►

Из второго доказательства теоремы видно, что быстрое стремление к нулю нормы $\|f - f_h\|_1$ при $h \to 0$ влечёт быстрое убывание интеграла $I_f(y)$ при $\|y\| \to +\infty$. Для гладкой функции f с компактным носителем, очевидно, $\|f - f_h\|_1 = O\bigl(\|h\|\bigr)$ и тогда $I_f(y) = O\bigl(\frac{1}{\|y\|}\bigr)$. В одномерном случае при $X = [a,b]$ оценка $I_f(y) = O\bigl(\frac{1}{|y|}\bigr)$ справедлива не только для гладкой, но и для абсолютно непрерывной функции f, в чём легко убедиться с помощью интегрирования по частям. Однако в некоторых задачах (см. пример 2 п. X.5.2) требуются оценки интегралов I_f при менее стеснительных предположениях. В следующем примере мы получим один результат такого рода.

Пример. Выясним, с какой скоростью стремится к нулю интеграл $I_f(y)$ при $y \to +\infty$, если функция f определена на промежутке $X = [0,1)$ и имеет вид $f(x) = \frac{F(x)}{\sqrt{1-x^2}}$, где $F \in C^1([0,1])$.

Представим f в виде $f(x) = \frac{F(1)}{\sqrt{2(1-x)}} + g(x)$, где $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\left(\frac{F(x)}{\sqrt{1+x}} - \frac{F(1)}{\sqrt{2}}\right)$ — абсолютно непрерывная на $[0,1)$ функция. Поэтому $I_g(y) = O(\frac{1}{y})$ и мы получаем, что

$$I_f(y) = \frac{F(1)}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{e^{iyx}}{\sqrt{1-x}}\,dx + O\Big(\frac{1}{y}\Big) = \frac{F(1)}{\sqrt{2}}\int_0^1 e^{iy(1-t)}\frac{dt}{\sqrt{t}} + O\Big(\frac{1}{y}\Big) =$$
$$= \frac{F(1)}{\sqrt{2y}}\,e^{iy}\int_0^y e^{-iu}\frac{du}{\sqrt{u}} + O\Big(\frac{1}{y}\Big).$$

Так как интеграл $\int_0^y e^{-iu}\frac{du}{\sqrt{u}}$ при $y \to +\infty$ стремится к интегралу Френеля $\int_0^\infty e^{-iu}\frac{du}{\sqrt{u}}$, равному $(1-i)\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (см. пример 1 п. VII.4.8), то

$$I_f(y) = \frac{F(1)}{\sqrt{2y}}\,e^{iy}\left((1-i)\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \int_y^\infty e^{-iu}\frac{du}{\sqrt{u}}\right) + O\Big(\frac{1}{y}\Big) = \frac{F(1)}{2}\,e^{iy}(1-i)\sqrt{\frac{\pi}{y}} + O\Big(\frac{1}{y}\Big). \quad (1)$$

Найдём с помощью этой формулы асимптотику интегралов

$$C(y) = \int_{-1}^1 \frac{e^{-iyx}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad \text{и} \quad S(y) = \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,e^{-iyx}\,dx.$$

Очевидно,

$$C(y) = 2\int_0^1 \frac{\cos xy}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = 2\mathcal{R}e\int_0^1 \frac{e^{ixy}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx,$$
$$S(y) = -\frac{1}{iy}\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,e^{-ixy} = \frac{2}{y}\mathcal{I}m\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,e^{ixy}\,dx.$$

Применение формулы (1) (в обоих случаях $F(1) = 1$) после простых подсчётов даёт нам, что при $y \to +\infty$ справедливы соотношения

$$C(y) = \sqrt{\frac{\pi}{y}}\,(\sin y + \cos y) + O\Big(\frac{1}{y}\Big), \qquad S(y) = \frac{1}{y}\sqrt{\frac{\pi}{y}}\,(\sin y - \cos y) + O\Big(\frac{1}{y^2}\Big).$$

УПРАЖНЕНИЯ

1) Убедитесь, что в теоремах 2.2 и 2.3 от условия $p < +\infty$ отказаться нельзя.

В задачах 2–6 предполагается, что $1 \leqslant p < +\infty$.

2) Докажите, что теоремы 2.2 и 2.3 остаются справедливыми, если в них меру Лебега заменить любой борелевской мерой, конечной на ячейках.

3) Пусть μ — стандартное продолжение меры с полукольца $\mathscr{P}$ подмножеств множества X. Повторяя рассуждения, проведённые при доказательстве теоремы 2.2, докажите, что всякую функцию из $\mathscr{L}^p(X,\mu)$ можно с любой степенью точности аппроксимировать в среднем линейными комбинациями характеристических функций множеств, входящих в $\mathscr{P}$.

4) Пусть $(X,\mathfrak{A},\mu)$ и $(Y,\mathfrak{B},\nu)$ — пространства с σ-конечными мерами. Используя предыдущее упражнение, докажите, что линейными комбинациями произведений вида $\varphi(x)\psi(y)$, где $\varphi \in \mathscr{L}^p(X,\mu)$, $\psi \in \mathscr{L}^p(Y,\nu)$, можно с любой степенью точности приблизить любую функцию из $\mathscr{L}^p(X\times Y,\mu\times\nu)$.

5) Докажите, что линейными комбинациями произведений вида $\psi_1(x_1)\cdots\psi_m(x_m)$, где $\psi_1, \ldots, \psi_m \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, можно сколь угодно хорошо приблизить любую функцию из $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^m, \mu)$, где μ — произвольная борелевская мера, конечная на ячейках.

6) Докажите, что любую функцию из $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^m)$ можно сколь угодно хорошо приблизить рациональными функциями (т. е. дробями вида P/Q, где P, Q — алгебраические многочлены от m переменных, $Q \neq 0$).

7) Докажите, что $\frac{1}{uv} + \frac{1}{u-v}\left(\frac{1}{u}e^{iu} - \frac{1}{v}e^{iv}\right) \to 0$ при $u^2+v^2 \to +\infty$. Указание. Примените теорему Римана–Лебега к характеристической функции треугольника с вершинами $(0,0)$, $(1,0)$ и $(0,1)$.

8) Пусть функция f из $\mathscr{L}^0(\mathbb{R}^m)$ такова, что при некотором $p \in [1, +\infty)$ нормы $\|f_h - f\|_p$ $(h \in \mathbb{R}^m)$ ограничены. Докажите, что f представима в виде $f = \varphi + \mathrm{const}$, где $\varphi \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^m)$. Указание. Проверив, что $f \in \mathscr{L}_{loc}(\mathbb{R}^m)$, убедитесь в существовании конечного среднего значения $\lim\limits_{R\to+\infty} \frac{1}{(2R)^m}\int_{[-R,R]^m} f(x)\,dx$.

§ 3. Свёртка и аппроксимативная единица в пространствах $\mathscr{L}^p$

В этом параграфе мы дополним информацию о свёртке, полученную в §§ VII.5–6. Все рассматриваемые функции предполагаются измеримыми (и, вообще говоря, комплекснозначными).

В периодическом и непериодическом случаях свойства свёртки совершенно аналогичны. Поэтому мы рассмотрим подробно лишь непериодический случай, ограничиваясь в периодическом случае в основном только формулировками, приводимыми для удобства ссылок.

3.1. Прежде всего обобщим теорему VII.5.2 о существовании свёртки двух суммируемых функций.

Теорема. *Пусть $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^m)$ и $g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^m)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. Тогда свёртка $f * g$ существует, принадлежит $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^m)$ и*

$$\|f * g\|_p \leqslant \|g\|_1 \cdot \|f\|_p.$$

Доказательство. Следуя схеме доказательства теоремы VII.5.2, прежде всего покажем, что выполняется условие существования свёртки, т. е. что функция $H(x) = \int_{\mathbb{R}^m} |f(x-y)g(y)|\,dy$ почти везде конечна. Более того, убедимся, что $H \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^m)$.

При $p = +\infty$ это очевидно, так как

$$H(x) \leqslant \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^m} |g(y)|\,dx = \|f\|_\infty \|g\|_1.$$

Если же $1 < p < +\infty$, то считая, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, с помощью неравенства Гёльдера мы получаем:

$$H(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \left(|f(x-y)||g(y)|^{\frac{1}{p}}\right) |g(y)|^{\frac{1}{q}}\,dy \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x-y)|^p |g(y)|\,dy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |g(y)|\,dy\right)^{\frac{1}{q}}$$

(при $p=1,\ q=+\infty$ это неравенство превращается в равенство). Следовательно,

$$H^p(x) \leqslant \|g\|_1^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}^m} |f(x-y)|^p |g(y)|\, dy = \|g\|_1^{\frac{p}{q}} \Big(|f|^p * |g|\Big)(x).$$

Таким образом, функция H^p мажорируется (с коэффициентом $\|g\|_1^{\frac{p}{q}}$) свёрткой суммируемых функций $|f|^p$ и $|g|$. По теореме VII.5.2 она суммируема и справедлива оценка

$$\int_{\mathbb{R}^m} H^p(x)\, dx \leqslant \|g\|_1^{\frac{p}{q}} \| \, |f|^p\|_1 \|g\|_1 = \|g\|_1^{1+\frac{p}{q}} \|f\|_p^p.$$

В частности, отсюда следует, что $H(x) < +\infty$ почти везде, так что условие существования свёртки выполнено. Кроме того, так как $|(f*g)(x)| \leqslant H(x)$, то $f*g \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^m)$ и $\|f*g\|_p \leqslant \|H\|_p \leqslant \|g\|_1^{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}} \cdot \|f\|_p = \|g\|_1 \cdot \|f\|_p$, что и требовалось. ►

3.2. Как мы уже видели в гл. VII, степень гладкости функций при свёртке может разве лишь возрасти. Теперь мы дополним этот результат и докажем, опираясь на теорему о непрерывности в среднем, что в широком классе случаев свёртка разрывных (вообще говоря) функций оказывается непрерывной.

Теорема. *Пусть $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^m)$, $g \in \mathscr{L}^q(\mathbb{R}^m)$, где $1 \leqslant p, q \leqslant +\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Тогда свёртка $f*g$ существует, равномерно непрерывна в $\mathbb{R}^m$ и при любом x из $\mathbb{R}^m$ справедливо неравенство*

$$\big|(f*g)(x)\big| \leqslant \|f\|_p \, \|g\|_q. \tag{1}$$

Доказательство. Ввиду равноправия f и g можно считать, что $p<+\infty$. Чтобы убедиться в существовании свёртки, докажем конечность интеграла $H(x)$ (это обозначение введено в доказательстве теоремы 3.1). При $1<p<+\infty$ неравенство Гёльдера даёт нам:

$$H(x) \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x-y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |g(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(y)|^p dy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |g(y)|^q dy\right)^{\frac{1}{q}};$$

при $p=1$ это неравенство принимает вид $H(x) \leqslant \|f\|_1 \operatorname{vraisup} |g|$. Таким образом, $H(x) \leqslant \|f\|_p \, \|g\|_q < +\infty$, что доказывает существование свёртки. Так как $|(f*g)(x)| \leqslant H(x)$, то отсюда вытекает и неравенство (1). Остаётся проверить равномерную непрерывность функции $u=f*g$. Для этого оценим разность $u(x-h)-u(x) = u_h(x)-u(x) = (f_h-f)*g(x)$ с помощью неравенства (1):

$$|u(x-h)-u(x)| = \big|(f_h-f)*g(x)\big| \leqslant \|f_h-f\|_p \|g\|_q.$$

Правая часть этого неравенства не зависит от x и стремится к нулю при $h \to 0$, в силу непрерывности функции f в среднем. ►

Следствие. *Если $f \in \mathscr{L}_{loc}(\mathbb{R}^m)$, а функция g ограничена и финитна, то свёртка $f*g$ непрерывна.*

Если функция f суммируема, то непрерывность свёртки установлена в теореме. В общем случае непрерывность $f*g$ в произвольном шаре $B(0,R)$ вытекает из совпадения в этом шаре свёрток $f*g$ и f_1*g, где f_1 — функция, равная нулю вне шара $B(0,2R)$ и совпадающая с f в этом шаре (см. лемму об усечении в п. VII.5.4). ►

3.3. В этом пункте мы рассмотрим свойства свёртки функции, входящей в $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^m)$, с аппроксимативной единицей. Напомним (см. п. VII.6.1), что аппроксимативной единицей в $\mathbb{R}^m$ (при $t \to t_0$) называется семейство функций $\{\omega_t\}_{t>0}$, удовлетворяющее условиям:

а) $\omega_t \geqslant 0$, б) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^m} \omega_t(x)\,dx = 1$, в) $\displaystyle\int_{\|x\|>\delta} \omega_t(x)\,dx \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} 0$ для любого $\delta > 0$.

В теореме VII.6.3, в частности, доказано, что если ограниченная функция f непрерывна в $\mathbb{R}^m$, то свёртки $f*\omega_t$ поточечно сходятся к f при $t \to t_0$ (сходимость равномерная, если функция f равномерно непрерывна на $\mathbb{R}^m$). Для функций из пространства $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^m)$ это утверждение модифицируется следующим образом:

Теорема. *Пусть $\{\omega_t\}_{t>0}$ — аппроксимативная единица в $\mathbb{R}^m$ при $t \to t_0$, $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^m)$, $1 \leqslant p < +\infty$. Тогда функции $f_t = f * \omega_t$ сходятся к f при $t \to t_0$ по $\mathscr{L}^p$-норме.*

Доказательство. Ясно, что

$$|f_t(x) - f(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^m} \bigl|f(x-y) - f(x)\bigr|\omega_t(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^m} \bigl|f(x-y) - f(x)\bigr|\,\omega_t^{\frac{1}{p}}(y)\omega_t^{\frac{1}{q}}(y)\,dy.$$

Неравенство Гёльдера даёт нам:

$$|f_t(x) - f(x)| \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^m} \bigl|f(x-y) - f(x)\bigr|^p \omega_t(y)\,dy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^m} \omega_t(y)\,dy\right)^{\frac{1}{q}} = \\ = \left(\int_{\mathbb{R}^m} \bigl|f(x-y) - f(x)\bigr|^p \omega_t(y)\,dy\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Возводя в степень p, интегрируя и изменяя порядок интегрирования, мы получим:

$$\int_{\mathbb{R}^m} \bigl|f_t(x) - f(x)\bigr|^p\,dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^m} \bigl|f(x-y) - f(x)\bigr|^p \omega_t(y)\,dy\right)\,dx = \\ = \int_{\mathbb{R}^m} \omega_t(y) \int_{\mathbb{R}^m} \bigl|f(x-y) - f(x)\bigr|^p\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}^m} g(y)\omega_t(y)\,dy,$$

где $g(y) = \int_{\mathbb{R}^m} |f(x-y) - f(x)|^p dx \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0$ в силу непрерывности в среднем функции f. По следствию из теоремы VII.6.3 правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $t \to t_0$. ►

Полученный результат позволяет дать ещё одно доказательство важной теоремы 2.3.

Следствие. *Пусть $1 \leqslant p < +\infty$, $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^m)$, $\varepsilon > 0$. Тогда найдётся такая функция $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, что $\|f - \varphi\|_p < \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть $\{\omega_t\}_{t>0}$ — соболевская аппроксимативная единица в $\mathbb{R}^m$. По следствию из теоремы VII.5.4 свёртка $f * \omega_t$ бесконечно дифференцируема. По доказанной теореме $\|f - f*\omega_t\|_p \underset{t\to t_0}{\longrightarrow} 0$. Зафиксируем такое t, что $\|f - f*\omega_t\|_p < \frac{\varepsilon}{2}$, и положим $g = f * \omega_t$.

Для завершения доказательства нам остаётся приблизить g функцией класса $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ с точностью до $\frac{\varepsilon}{2}$. Это можно сделать, домножая g на функцию, полученную сглаживанием характеристической функции шара достаточно большого радиуса. Детальное рассуждение мы оставляем провести читателю. ►

3.4. Здесь мы дополним результаты предыдущего пункта исследованием сходимости свёрток $f_t = f * \omega_t$ к функции f из $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^m)$ не по норме этого пространства, а почти везде. Для получения искомого результата на аппроксимативную единицу придётся наложить дополнительное ограничение и потребовать, чтобы функции ω_t имели достаточно хорошую ("горбатую") мажоранту. Точнее говоря, мы предположим, что при любом $t > 0$ справедливы оценки

$$\omega_t(x) \leqslant \psi_t\big(\|x\|\big), \qquad \int_{\mathbb{R}^m} \psi_t\big(\|x\|\big)\,dx \leqslant C, \tag{2}$$

где ψ_t — убывающие на $(0,+\infty)$ функции, а C — некоторая константа.

Очевидно, если ψ_t имеет вид $\psi_t(r) = t^{-m}\Psi(\frac{r}{t})$, где Ψ — убывающая на $(0,+\infty)$ функция, то второе из условий (2) сводится к неравенству $\int_0^\infty r^{m-1}\Psi(r)\,dr < +\infty$.

Теорема. *Пусть $\{\omega_t\}_{t>0}$ — аппроксимативная единица в $\mathbb{R}^m$ при $t \to t_0$, удовлетворяющая условию (2). Тогда, если $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^m)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, то свёртки $f_t = f * \omega_t$ сходятся при $t \to t_0$ к функции f в каждой её точке Лебега и, следовательно, почти всюду.*

Доказательство. Для характеристической функции шара утверждение теоремы немедленно вытекает из свойств б) и в) аппроксимативной единицы. Поэтому, не умаляя общности, далее мы можем считать, что x — точка Лебега функции f и $f(x) = 0$ (в противном случае надо заменить функцию f разностью $f - f(x)\chi$, где χ — характеристическая функция произвольного шара с центром в x). Таким образом, мы будем доказывать, что $f_t(x) \to 0$ при $t \to t_0$, если

$$\frac{1}{r^m}\int_{B(r)} |f(x-y)|\,dy \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0 \tag{3}$$

(как обычно $B(r)$ — шар с центром в нуле и радиусом r).

Так как $f_t(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x-y)\,\omega_t(y)\,dy$, то

$$|f_t(x)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^m} |f(x-y)|\,\omega_t(y)\,dy = \int_{B(\varepsilon)} \ldots + \int_{\mathbb{R}^m\setminus B(\varepsilon)} \ldots = I(\varepsilon) + J(\varepsilon)$$

для любого $\varepsilon > 0$ (свободой в выборе этого параметра воспользуемся позже). Интегралы $I(\varepsilon)$ и $J(\varepsilon)$ оценим по отдельности. Первый из них представим в виде суммы интегралов по сферическим слоям $S_j = B(\varepsilon_{j-1}) \setminus B(\varepsilon_j)$, где $\varepsilon_j = \frac{\varepsilon}{2^j}$ при $j \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon_0 = \varepsilon$. Заметим, что $\lambda_m(S_j) = \beta_m \varepsilon_j^m$, где коэффициент β_m зависит только от m. Так как $\omega_t(y) \leqslant \psi_t\big(\|y\|\big) \leqslant \psi_t(\varepsilon_j)$ в слое S_j, то

$$\int_{S_j} |f(x-y)|\,\omega_t(y)\,dy \leqslant \psi_t(\varepsilon_j)\int_{B(\varepsilon_{j-1})} |f(x-y)|\,dy.$$

Положим

$$\Delta(\varepsilon) = \sup_{r\leqslant\varepsilon} \frac{1}{r^m}\int_{B(r)} |f(x-y)|\,dy.$$

Тогда

$$\int_{S_j} |f(x-y)|\,\omega_t(y)\,dy \leqslant \varepsilon_{j-1}^m \Delta(\varepsilon_{j-1})\psi_t(\varepsilon_j) \leqslant (4\varepsilon_{j+1})^m \Delta(\varepsilon)\psi_t(\varepsilon_j) \leqslant \frac{4^m}{\beta_m}\Delta(\varepsilon)\int_{S_{j+1}} \psi_t\big(\|y\|\big)\,dy.$$

Сложив эти неравенства, мы, с учётом (2), получим:

$$I(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{S_j} |f(x-y)|\,\omega_t(y)\,dy \leqslant \frac{4^m}{\beta_m}\Delta(\varepsilon) \int_{B(\varepsilon)} \psi_t\big(\|y\|\big)\,dy \leqslant \frac{4^m}{\beta_m} C\Delta(\varepsilon).$$

Из соотношения (3) вытекает, что $\Delta(\varepsilon)$, а вместе с этим и $I(\varepsilon)$, есть величина, бесконечно малая при $\varepsilon \to 0$.

Перейдём теперь к оценке интеграла $J(\varepsilon)$. При $p = +\infty$ всё просто: $J(\varepsilon) \leqslant \leqslant \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^m \setminus B(\varepsilon)} \omega_t(y)\,dy$ и поэтому

$$|f_t(x)| \leqslant I(\varepsilon) + J(\varepsilon) \leqslant \frac{4^m}{\beta_m} C\Delta(\varepsilon) + \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^m \setminus B(\varepsilon)} \omega_t(y)\,dy.$$

Первое слагаемое можно сделать сколь угодно малым за счёт выбора ε. При фиксированном ε второе слагаемое бесконечно мало при $t \to t_0$ по свойству в) аппроксимативной единицы.

В случае $1 \leqslant p < +\infty$ интеграл $J(\varepsilon)$ оценивается несколько сложнее, поскольку на некоторой части множества $\mathbb{R}^m \setminus B(\varepsilon)$ значения $|f(x-y)|$ могут быть сколь угодно велики. Рассмотрим эту часть, положив $E_R = \big\{y \in \mathbb{R}^m \;\big|\; |f(x-y)| > R\big\}$, где R — произвольно большой числовой параметр. Как следует из неравенства Чебышева, мера множества E_R бесконечно мала при $R \to +\infty$. В силу абсолютной непрерывности бесконечно мал и интеграл $\int_{E_R} |f(x-y)|^p\,dy$. Из первого неравенства (2) и определения множества E_R с $R > 1$ вытекает оценка

$$|f(x-y)|\,\omega_t(y) \leqslant \begin{cases} \psi_t(\varepsilon)\,|f(x-y)|^p & \text{при } \; y \in E_R,\; \|y\| > \varepsilon, \\ R\,\omega_t(y) & \text{при } \; y \notin E_R. \end{cases}$$

Кроме того, в силу второго неравенства (2)

$$C \geqslant \int_{B(\varepsilon)} \psi_t\big(\|y\|\big)\,dy \geqslant \psi_t(\varepsilon)\lambda_m\big(B(\varepsilon)\big)$$

и, следовательно, $\psi_t(\varepsilon) \leqslant A(\varepsilon) = \frac{C}{\lambda_m(B(\varepsilon))}$ для всех t. Поэтому

$$J(\varepsilon) \leqslant A(\varepsilon) \int_{E_R} |f(x-y)|^p\,dy + R \int_{\mathbb{R}^m \setminus B(\varepsilon)} \omega_t(y)\,dy.$$

Таким образом,

$$|f_t(x)| \leqslant I(\varepsilon) + J(\varepsilon) \leqslant \frac{4^m}{\beta_m} C\Delta(\varepsilon) + A(\varepsilon) \int_{E_R} |f(x-y)|^p\,dy + R \int_{\mathbb{R}^m \setminus B(\varepsilon)} \omega_t(y)\,dy.$$

Теперь мы можем сначала сделать произвольно малым первое слагаемое, выбрав малое ε, затем при фиксированном ε за счёт выбора R сделать малым и второе слагаемое, после чего остаётся заметить, что для фиксированных R и ε третье слагаемое бесконечно мало при $t \to t_0$ в силу свойства в) аппроксимативной единицы. ►

Замечание. Для произвольной аппроксимативной единицы утверждение теоремы неверно (см. упр. 4). Вместе с тем, предположения о функциях ψ_t можно несколько

ослабить. Как видно из доказательства, вместо второго неравенства (2) достаточна менее ограничительная оценка: для некоторых положительных чисел C и ρ при всех $t > 0$ справедливо неравенство $\int_{B(\rho)} \psi_t\big(\|x\|\big)\,dx \leqslant C$.

3.5. Этот и следующий пункты посвящены результатам, при доказательстве которых удобно использовать аппроксимативные единицы. В обоих случаях идея доказательства состоит в том, что требуемое утверждение мы получаем предельным переходом, основываясь на его справедливости для "сглаженной" функции, построенной с помощью свёртки. Первый из этих результатов — распространение формулы Гаусса–Остроградского (см. п. VIII.6.5) на некоторый класс негладких функций. При этом, как и в п. VIII.6.5, под $(m-1)$-мерной площадью σ понимается площадь, пропорциональная мере Хаусдорфа μ_{m-1}. Напомним ещё, что символом K_ε обозначается ε-окрестность множества K.

Теорема. *Пусть f — функция, определённая и ограниченная в ε-окрестности стандартного компакта $K \subset \mathbb{R}^m$. Предположим, кроме того, что*

а) f дифференцируема почти везде в K_ε и её частные производные суммируемы в K_ε;

б) f непрерывна на ∂K почти везде относительно σ.

Тогда для любого орта $e \in \mathbb{R}^m$

$$\int_K \frac{\partial f}{\partial e}(x)\,dx = \int_{\partial K} f(x)\,\langle \nu(x), e\rangle\,d\sigma(x).$$

Доказательство. Считая, что f равна нулю вне K_ε, рассмотрим свёртку f_t функции f с соболевской аппроксимативной единицей. Тогда $(f_t)'_{x_j}(x) = (f'_{x_j})_t(x)$ при $x \in K$ и достаточно малом t. Кроме того, $\int_K |f'_{x_j} - (f'_{x_j})_t|\,dx \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ по теореме 3.3 и $f_t(x) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} f(x)$ в точках непрерывности f на основании теоремы VII.6.3. Благодаря условию б) мы получаем, что $f_t(x) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} f(x)$ почти везде по площади на ∂K. Так как $|f_t| \leqslant \|f\|_\infty$, то по теореме Лебега $\int_{\partial K} |f_t - f|\,d\sigma \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$. Таким образом, для завершения доказательства остаётся написать формулу Гаусса–Остроградского для f_t и перейти к пределу при $t \to 0$. ►

3.6. Приведём ещё один пример использования теоремы 3.3. Следующее утверждение, известное как лемма Лагранжа*), играет важную роль в теории обобщённых функций и в вариационном исчислении.

Теорема (Лагранж). *Пусть $\mathcal{O}$ — открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^m$, функция f определена в $\mathcal{O}$ и суммируема на каждом содержащемся в нём компактном множестве. Если*

$$\int_{\mathcal{O}} f(x)\varphi(x)\,dx = 0 \ \text{ для любой функции } \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m) \text{ такой, что } \operatorname{supp}(\varphi) \subset \mathcal{O},$$

то $f(x) = 0$ при почти всех x из $\mathcal{O}$.

Доказательство разобьём на несколько шагов. Не умаляя общности будем считать f вещественной.

*) Жозеф Луи **Лагранж** (Lagrange), 1736–1813, — французский математик.

1) Пусть сначала $\mathcal{O} = \mathbb{R}^m$ и функция f непрерывна. Если допустить, что $f(x_0) \neq 0$, то $f(x) \neq 0$ и в некотором шаре $B(x_0, r)$. Рассмотрим такую неотрицательную функцию $\varphi \not\equiv 0$ из $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, что $\operatorname{supp}(\varphi) \subset B(x_0, r)$. Тогда $f\varphi$ сохраняет знак, и поэтому $\int_{\mathbb{R}^m} f(x)\varphi(x)\,dx \neq 0$ в противоречие с условием.

2) Предположим теперь, как и на первом шаге, что $\mathcal{O} = \mathbb{R}^m$ и что функция f суммируема в $\mathbb{R}^m$, и используем свёртку f с чётными функциями ω_t, образующими соболевскую аппроксимативную единицу. Если $f_t = f * \omega_t$ и $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, то

$$\int_{\mathbb{R}^m} f_t(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x) \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(y)\omega_t(x-y)\,dy \right) dx =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^m} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}^m} \varphi(x)\omega_t(x-y)\,dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^m} f(y)\varphi_t(y)\,dy,$$

где $\varphi_t = \varphi * \omega_t$. В силу следствий VII.5.3 и VII.5.4 $\varphi_t \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$. Поэтому

$$\int_{\mathbb{R}^m} f_t(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(y)\varphi_t(y)\,dy = 0.$$

Так как это равенство справедливо для произвольной функции φ из $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, а функция f_t непрерывна, то, как доказано на предыдущем шаге, $f_t \equiv 0$. Вместе с тем $f_t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} f$ в среднем, и поэтому $\|f\|_1 = \|f - f_t\|_1 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$. Таким образом, $\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}^m} |f(x)|\,dx = 0$, что равносильно утверждению теоремы.

3) Обращаясь к общей ситуации заметим, что поскольку $\mathcal{O}$ представимо в виде объединения последовательности компактных множеств, нам достаточно убедиться, что $f(x) = 0$ почти везде на каждом компактном множестве $K \subset \mathcal{O}$. Зафиксировав такое множество K, рассмотрим функцию $\varphi_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ со свойствами

$$\varphi_0 = 1 \ \text{ на } \ K, \quad \operatorname{supp}(\varphi_0) \subset \mathcal{O}, \quad 0 \leqslant \varphi_0 \leqslant 1$$

(см. теорему VIII.1.7 о гладком спуске). Пусть функция f_1 равна $f\varphi_0$ в $\mathcal{O}$ и нулю вне $\mathcal{O}$. Она суммируема в $\mathbb{R}^m$, так как

$$\int_{\mathbb{R}^m} |f_1(x)|\,dx = \int_{\operatorname{supp}(\varphi_0)} |f(x)|\varphi_0(x)\,dx \leqslant \int_{\operatorname{supp}(\varphi_0)} |f(x)|\,dx < +\infty.$$

Отметим ещё, что $\operatorname{supp}(\varphi_0\varphi) \subset \operatorname{supp}(\varphi_0) \subset \mathcal{O}$ для любой функции φ из $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$. Поэтому

$$\int_{\mathbb{R}^m} f_1(x)\varphi(x)\,dx = \int_{\mathcal{O}} f(x)(\varphi_0(x)\varphi(x))\,dx = 0.$$

По доказанному на предыдущем шаге, $f_1(x) = 0$ почти везде в $\mathbb{R}^m$ и, в частности, почти везде на K, где f_1 совпадает с f. Итак, $f(x) = 0$ почти везде на K, что и требовалось. ►

3.7. В заключение этого параграфа обратимся к свойствам свёртки в периодическом случае. Периодичность функции (произвольного числа переменных) мы понимаем здесь как 2π-периодичность по каждой переменной. Символом $\widetilde{\mathscr{L}}^p(\mathbb{R}^m)$ $(1 \leqslant p < +\infty)$ обозначим пространство периодических функций, суммируемых на кубе $Q = (-\pi, \pi)^m$

со степенью $p \geqslant 1$. С ростом p эти пространства, очевидно, уменьшаются. Для функции $f \in \widetilde{\mathscr{L}}^p(\mathbb{R}^m)$ под $\|f\|_p$ будем понимать $\mathscr{L}^p$-норму её сужения на куб Q.

Как мы уже говорили в п. VII.5.5, свёртка измеримых в $\mathbb{R}^m$ периодических функций f и g определяется равенством

$$(f * g)(x) = \int_Q f(x-y)g(y)\,dy \qquad (x \in \mathbb{R}^m).$$

Она существует и суммируема, если суммируемы функции f и g. Таким образом, в периодическом случае свёртка функций f и g, входящих в $\widetilde{\mathscr{L}}^p(\mathbb{R}^m)$ и $\widetilde{\mathscr{L}}^q(\mathbb{R}^m)$, существует, поскольку эти пространства состоят из суммируемых функций. Для периодической аппроксимативной единицы (см. определение в п. VII.6.5) справедливы аналоги теорем 3.1–3.4. Их доказательства отличаются от доказательств в непериодическом случае лишь заменой интегрирования по всему пространству $\mathbb{R}^m$ интегрированием по кубу Q.

Для удобства ссылок мы приведём некоторые формулировки.

Теорема 1. *Если $f \in \widetilde{\mathscr{L}}^p(\mathbb{R}^m)$ и $g \in \widetilde{\mathscr{L}}^1(\mathbb{R}^m)$, то свёртка $f * g$ существует, принадлежит $\widetilde{\mathscr{L}}^p(\mathbb{R}^m)$ и $\|f * g\|_p \leqslant \|f\|_p \|g\|_1$.*

Теорема 2. *Пусть $\{\omega_t\}_{t>0}$ — периодическая аппроксимативная единица в $\mathbb{R}^m$ при $t \to t_0$, $f \in \widetilde{\mathscr{L}}^p(\mathbb{R}^m)$, $1 \leqslant p < +\infty$. Тогда функции $f_t = f * \omega_t$ сходятся к f при $t \to t_0$ по $\mathscr{L}^p$-норме.*

Теорема 3. *Пусть $\{\omega_t\}_{t>0}$ — такая периодическая аппроксимативная единица в $\mathbb{R}^m$ при $t \to t_0$, что для некоторого ρ, $0 < \rho \leqslant \pi$, функции $\psi_t(x) = \sup\limits_{\|x\| \leqslant \|y\| \leqslant \rho} \omega_t(y)$ удовлетворяют условию*

$$\sup_{t>0} \int_{B(\rho)} \psi_t(x)\,dx < +\infty.$$

Тогда для любой функции f из $\widetilde{\mathscr{L}}^p(\mathbb{R}^m)$, $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, свёртки $f_t = f * \omega_t$ сходятся к f при $t \to t_0$ почти везде.

С помощью теоремы 2 нетрудно получить периодический аналог следствия 2.3 об аппроксимации полиномами по $\mathscr{L}^p$-норме.

Теорема 4. *Пусть $1 \leqslant p < +\infty$, $f \in \widetilde{\mathscr{L}}^p(\mathbb{R}^m)$, $\varepsilon > 0$. Тогда найдётся такой тригонометрический многочлен T, что $\|f - T\|_p < \varepsilon$.*

Доказательство. Рассмотрим аппроксимативную единицу Θ_n, построенную при доказательстве следствия VII.6.5. Она состоит из тригонометрических многочленов, и поэтому тригонометрическими многочленами являются также и свёртки $f * \Theta_n$. Так как $\|f * \Theta_n - f\|_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ по теореме 2, то в качестве T можно взять любую свёртку $f * \Theta_n$ с достаточно большим номером. ►

УПРАЖНЕНИЯ

1) Пусть f_E — усреднение функции $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^m)$ по множеству $E \subset \mathbb{R}^m$ положительной конечной меры: $f_E(x) = \frac{1}{\lambda_m(E)} \int_E f(x+y)\,dy$ $(x \in \mathbb{R}^m)$. Докажите, что $\|f_E\|_p \leqslant \|f\|_p$.

2) Проверьте, что ядро Пуассона для полупространства, т. е. семейство функций $\{P_t\}_{t>0}$, где

$$P_t(x) = C\frac{t}{(t^2+\|x\|^2)^{\frac{m+1}{2}}}, \quad C = \pi^{-\frac{m+1}{2}}\Gamma\Big(\frac{m+1}{2}\Big) \quad (x \in \mathbb{R}^m),$$

образует при $t \to +0$ аппроксимативную единицу, удовлетворяющую условию (2) (используйте лемму VIII.7.13).

3) Докажите, что если $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^m)$ и $U(x,t) = (f*P_t)(x)$, то функция U гармонична в полупространстве $t > 0$ и является решением задачи Дирихле для полупространства в том смысле, что $\|U(\cdot,t) - f\|_p \to 0$ и $U(x,t) \to f(x)$ почти везде при $t \to +0$.

4) Пусть $\Delta_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2})$, $\omega_n = n^2\chi_{\Delta_n}$. Покажите, что функции ω_n образуют аппроксимативную единицу, для которой теорема 3.4 неверна. Указание. Убедитесь, что 0 — точка Лебега функции $f(x) = \chi_E(-x)$, где $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Delta_{2^k}$, но $(f*\omega_n)(0) \not\to f(0)$.

5) Пусть функции f, g локально суммируемы в $\mathbb{R}^m$. Функция g называется обобщённой производной функции f по k-й координате, если

$$\int_{\mathbb{R}^m} g(x)\,\varphi(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}^m} f\,\varphi'_{x_k}(x)\,dx$$

для любой функции φ класса C_0^∞. Опираясь на теорему Лагранжа (см. п. 3.6), докажите, что обобщённая производная единственна с точностью до эквивалентности.

6) Пусть $p \geqslant 1$ и f, g — такие функции из $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^m)$, что

$$\int_{\mathbb{R}^m} \left|\frac{f(x+te_k)-f(x)}{t} - g(x)\right|^p dx \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

где e_k — вектор канонического базиса в $\mathbb{R}^m$. Докажите, что g — обобщённая производная функции f по k-й координате.

7) Рассмотрим определённую в пространстве $\mathbb{R}^m$ функцию $x \mapsto f_\alpha(x) = \frac{1}{\|x\|^{m-\alpha}}$, где $\alpha > 0$ (не входящую ни в какое пространство $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^m)$ при $p > 0$). Докажите, что если $\alpha + \beta < m$, то свёртка $f_\alpha * f_\beta$ существует и равна $Cf_{\alpha+\beta}$. Вычислите коэффициент C. Убедитесь, что при надлежащем выборе коэффициента C_α функции $g_\alpha = C_\alpha f_\alpha$ обладают свойством $g_\alpha * g_\beta = g_{\alpha+\beta}$ $(\alpha > 0,\ \beta > 0,\ \alpha+\beta < m)$. Указание. При вычислении C воспользуйтесь формулой

$$\frac{\Gamma(\frac{p}{2})}{\|x\|^p} = \int_0^\infty t^{\frac{p}{2}-1}e^{-\|x\|^2 t}\,dt.$$

8) Пусть $Q = [-\pi,\pi]^m$, μ — конечная борелевская мера в Q. Докажите, что при конечном p тригонометрические многочлены всюду плотны в пространстве $\mathscr{L}^p(Q,\mu)$, если одно из возможных произведений полуоткрытых промежутков с концами в точках $\pm\pi$ (например, ячейка $[-\pi,\pi)^m$) имеет полную меру. В одномерном случае это условие не только достаточно, но и необходимо. О необходимых и достаточных условиях в многомерной ситуации см. упр. 7 в § XI.2.

9) Докажите периодический аналог теоремы 3.2.

Глава X. РЯДЫ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

§ 1. Ортогональные системы в пространстве $\mathscr{L}^2(X,\mu)$

В этом параграфе рассматривается только норма в пространстве $\mathscr{L}^2(X,\mu)$. Для краткости она обозначается символом $\|\cdot\|$ без индекса.

1.1. Норма в пространстве $\mathscr{L}^2(X,\mu)$ обладает важной особенностью — как и норма в конечномерном евклидовом пространстве она порождается скалярным произведением. Скалярное произведение функций f и g, принадлежащих (вообще говоря, комплексному) пространству $\mathscr{L}^2(X,\mu)$, определяется равенством

$$\langle f,g\rangle = \int_X f\,\overline{g}\,d\mu$$

(произведение $f\,\overline{g}$ суммируемо, так как $2|f\,\overline{g}| \leqslant |f|^2+|g|^2$).

Очевидно, $\langle g,f\rangle = \overline{\langle f,g\rangle}$ и $\langle f,f\rangle = \|f\|^2$. Кроме того, по неравенству Коши–Буняковского $|\langle f,g\rangle| \leqslant \|f\|\,\|g\|$, из чего вытекает непрерывность скалярного произведения относительно сходимости по норме. Действительно, если $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$, $g_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g$, то

$$\big|\langle f_n,g_n\rangle - \langle f,g\rangle\big| \leqslant \big|\langle f_n-f,g_n\rangle\big| + \big|\langle f,g_n-g\rangle\big| \leqslant \|f_n-f\|\|g_n\| + \|f\|\|g_n-g\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Из непрерывности скалярного произведения следует, что сходящиеся по норме ряды можно скалярно умножать почленно: $\Big\langle \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n, g\Big\rangle = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\langle f_n,g\rangle$. Чтобы убедиться в этом, достаточно перейти к пределу в равенстве $\Big\langle \sum\limits_{n=1}^{k} f_n, g\Big\rangle = \sum\limits_{n=1}^{k}\langle f_n,g\rangle$ (предел левой части существует ввиду сходимости ряда и непрерывности скалярного произведения).

Отметим ещё одно свойство нормы в пространстве $\mathscr{L}^2(X,\mu)$, связанное с тем, что она порождается скалярным произведением. Это так называемое тождество параллелограмма:

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\big(\|f\|^2+\|g\|^2\big) \qquad (f,\,g\in\mathscr{L}^2(X,\mu)).$$

Читатель легко проверит, что если мера не вырождается (точнее, если существуют два дизъюнктных множества положительной конечной меры), то ни в одном пространстве $\mathscr{L}^p(X,\mu)$ с $p\neq 2$ тождество параллелограмма не выполняется.

1.2. Наличие скалярного произведения позволяет, как и в конечномерном евклидовом пространстве, ввести понятие угла между векторами. Не делая этого в общей ситуации, мы выделим важнейший частный случай, когда угол можно считать равным $\frac{\pi}{2}$. Введём следующее

Определение. Функции $f,\ g \in \mathscr{L}^2(X,\mu)$ называются *ортогональными*, если $\langle f, g\rangle = 0$.

Заметим, что если $\langle f,g\rangle = 0$, то и $\langle g,f\rangle = \overline{\langle g,f\rangle} = 0$, так что отношение ортогональности симметрично. Оно обозначается символом $f \perp g$. Функция, равная нулю почти везде, ортогональна любой функции из $\mathscr{L}^2(X,\mu)$ и, очевидно, верно также и обратное. Для ортогональных функций верна *теорема Пифагора**): если $f \perp g$, то $\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$. Этот результат остаётся справедливым для любого числа попарно ортогональных слагаемых: если $f_j \perp f_k$ при $j \neq k$ ($j,\ k = 1,\dots,n$), то

$$\|f_1 + \ldots + f_n\|^2 = \|f_1\|^2 + \ldots + \|f_n\|^2. \tag{1}$$

Действительно, так как $\langle f_j, f_k\rangle = 0$ при $j \neq k$, то

$$\|f_1 + \ldots + f_n\|^2 = \langle f_1 + \ldots + f_n,\ f_1 + \ldots + f_n\rangle = \sum_{j,k=1}^{n} \langle f_j, f_k\rangle = \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|^2.$$

Теорема Пифагора верна и для "бесконечного числа слагаемых". Если функции $f_1, f_2, \ldots$ попарно ортогональны и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ сходится, то

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|^2. \tag{1'}$$

Для доказательства следует лишь перейти к пределу в равенстве (1).

Благодаря скалярному произведению любое n-мерное подпространство L, содержащееся в $\mathscr{L}^2(X,\mu)$, изоморфно как евклидово пространство пространству $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$ (в зависимости от того, какое поле скаляров мы рассматриваем). Поэтому мы можем говорить об ортогональном проектировании функции f на подпространство L. В частности, проекция f на одномерное подпространство, порождаемое ортом e, есть $\langle f, e\rangle e$.

В пространстве $\mathscr{L}^2(X,\mu)$ роль, аналогичную роли ортогональных базисов в конечномерных евклидовых пространствах, играют семейства попарно ортогональных функций.

Определение. Семейство функций $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ называется *ортогональной системой* (сокращенно: ОС) , если $e_\alpha \perp e_{\alpha'}$ при $\alpha \neq \alpha'$ и $\|e_\alpha\| \neq 0$ при любом $\alpha \in A$. Ортогональная система называется *ортонормированной*, если $\|e_\alpha\| = 1$ при любом $\alpha \in A$.

Из теоремы Пифагора (1) сразу следует линейная независимость функций, входящих в ОС. Очевидно, из любой ортогональной системы можно получить ортонормированную, разделив входящие в неё функции на их нормы.

Пусть функции $e_1, \ldots, e_n$ образуют ОС и L — порождённое ими подпространство (т. е. множество всевозможных линейных комбинаций этих функций). Важно выяснить, как наилучшим образом приблизить данную функцию f элементами множества L. Решение этой экстремальной задачи даёт следующая

---

*) **Пифагор** ($\Pi\upsilon\vartheta\alpha\gamma\acute{o}\rho\alpha\varsigma$), около 570–500 до н. э., — древнегреческий философ и математик.

Теорема. *Минимум нормы* $\left\|f-\sum\limits_{k=1}^{n} a_k e_k\right\|$ *достигается в том и только том случае, когда* $a_k = c_k(f)$, *где*

$$c_k(f) = \frac{\langle f, e_k\rangle}{\|e_k\|^2} \qquad (k=1,\dots,n). \tag{2}$$

При этом функция $f-\sum\limits_{k=1}^{n} c_k(f)e_k$ *ортогональна любому элементу множества* L.

Таким образом, наилучшим приближением к f в множестве L является сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k(f)e_k$. Сформулированную теорему можно считать обобщением хорошо известного из школьной геометрии факта: *перпендикуляр, опущенный из точки* f *на* L, т. е. разность $f-\sum\limits_{k=1}^{n} c_k(f)e_k$, *короче любой наклонной* — разности $f-\sum\limits_{k=1}^{n} a_k e_k$.

Доказательство начнём со второго утверждения теоремы: положим $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k(f)e_k$ и проверим, что $(f-S_n)\perp\sum\limits_{k=1}^{n} a_k e_k$. Для этого достаточно убедиться, что $(f-S_n)\perp e_m$ при всех $m=1,\dots,n$. Это в самом деле так, поскольку

$$\langle f-S_n, e_m\rangle = \langle f, e_m\rangle - \langle S_n, e_m\rangle = \langle f, e_m\rangle - \sum_{k=1}^{n} c_k(f)\langle e_k, e_m\rangle = \langle f, e_m\rangle - c_m(f)\|e_m\|^2 = 0.$$

Последнее равенство справедливо в силу определения $c_m(f)$.

Теперь экстремальное свойство суммы S_n вытекает из теоремы Пифагора. Действительно, если $g=\sum\limits_{k=1}^{n} a_k e_k$ — произвольная функция из L, то $S_n - g \in L$ и, следовательно, $(f-S_n)\perp(S_n-g)$. Поэтому по теореме Пифагора

$$\begin{aligned}\|f-g\|^2 = \big\|(f-S_n)+(S_n-g)\big\|^2 = \|f-S_n\|^2 + \|S_n-g\|^2 = \\ = \|f-S_n\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |a_k - c_k(f)|^2\|e_k\|^2.\end{aligned} \tag{3}$$

Отсюда следует, что

$$\left\|f-\sum_{k=1}^{n} a_k e_k\right\|^2 \geqslant \left\|f-\sum_{k=1}^{n} c_k(f)e_k\right\|^2,$$

и равенство возможно в единственном случае — когда $a_k = c_k(f)$ при всех k. ►

При $g=0$ тождество (3) принимает вид

$$\|f\|^2 = \left\|f-\sum_{k=1}^{n} c_k(f)e_k\right\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |c_k(f)|^2\|e_k\|^2,$$

и поэтому справедливо *неравенство Бесселя* *):

$$\sum_{k=1}^{n} |c_k(f)|^2\|e_k\|^2 \leqslant \|f\|^2. \tag{4}$$

*) Фридрих Вильгельм **Бессель** (Bessel), 1784–1846, — немецкий астроном и математик.

1.3. Рассмотрим ОС $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ в пространстве $\mathscr{L}^2(X,\mu)$. Очевидно, в $\mathscr{L}^2(X,\mu)$ имеются функции, не представимые в виде конечной линейной комбинации функций e_n. Поэтому естественно задать вопрос, при каких условиях функция $f\in\mathscr{L}^2(X,\mu)$ является суммой ряда вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e_n$. Из доказанной нами теоремы следует, что единственным рядом такого вида, который может сходиться к f, является ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(f)e_n$, коэффициенты которого вычисляются по формулам (2). Действительно, тождество (3) показывает, что если $a_m\neq c_m(f)$ и $n\geqslant m$, то

$$\left\|f-\sum_{k=1}^{n} a_k e_k\right\|\geqslant |a_m-c_m(f)|\,\|e_m\|^2>0,$$

и поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_k e_k$ не может сходиться к f.

Особая роль, которую играют ряды с коэффициентами, вычисляемыми по формулам (2), даёт основание выделить их с помощью специального определения.

Определение. Пусть $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — ортогональная система, $f\in\mathscr{L}^2(X,\mu)$. Числа $c_n(f)$, получаемые по формуле (2), называются *коэффициентами Фурье* *), а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(f)e_n$ называется *рядом Фурье* функции f относительно рассматриваемой ОС.

Как мы вскоре установим, ряд Фурье любой функции $f\in\mathscr{L}^2(X,\mu)$ сходится по норме $\|\cdot\|$ (хотя и не обязательно к f).

В случае ортонормированной системы формулы (2) упрощаются и принимают вид $c_n(f)=\langle f,e_n\rangle$. Если ортогональная система $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ не нормированная, то можно перейти к системе векторов $\widetilde{e}_n=e_n/\|e_n\|$ (как говорят, "нормировать" данную систему). При этом коэффициенты Фурье, очевидно, могут измениться, но члены ряда Фурье не изменяются, как показывает равенство

$$c_n(f)e_n=\left\langle f,\frac{e_n}{\|e_n\|}\right\rangle\frac{e_n}{\|e_n\|}=\langle f,\widetilde{e}_n\rangle\widetilde{e}_n.$$

Таким образом, слагаемые ряда Фурье функции f суть не что иное, как проекции f на прямые, порождаемые элементами ортогональной системы.

Переходя к пределу при $n\to\infty$ в неравенстве Бесселя (4), мы получаем оценку

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k(f)|^2\|e_k\|^2\leqslant\|f\|^2, \tag{4'}$$

также называемую *неравенством Бесселя.* Как следует из (1′), оно обращается в равенство, если $f=\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(f)e_n$.

1.4. Пока нам не известно, всегда ли ряд Фурье сходится и какова его сумма в случае сходимости. Следующая важная теорема устанавливает, что сумма ряда Фурье всегда существует. Предварительно докажем лемму.

*) Жан Батист Жозеф **Фурье** (Fourier), 1768–1830, — французский математик.

Лемма. *Пусть* $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *— ортогональная система. Ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \tag{5}$$

сходится по норме тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \|e_n\|^2 < +\infty. \tag{5'}$$

В случае сходимости ряд (5) *является рядом Фурье своей суммы.*

Доказательство. Пусть S_n, T_n — частичные суммы рядов (5) и (5′) соответственно. Тогда при любых $n, p \in \mathbb{N}$

$$\|S_{n+p} - S_n\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k e_k \right\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|^2 \|e_k\|^2 = T_{n+p} - T_n.$$

Отсюда следует, что частичные суммы рядов (5) и (5′) фундаментальны одновременно. Поскольку пространство $\mathscr{L}^2(X,\mu)$ полно (см. теорему IX.1.3), это равносильно первому утверждению леммы. Заключительное утверждение следует из возможности скалярно умножать сходящийся ряд почленно: если S — сумма ряда (5), то для любого $m \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\langle S, e_m \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle e_n, e_m \rangle = a_m \|e_m\|^2.$$

Таким образом, $a_m = c_m(S)$ при всех m, т. е. ряд (5) — ряд Фурье своей суммы. ►

Теорема (Рисс, Фишер*)). *Для любой ортогональной системы* $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ряд Фурье функции* $f \in \mathscr{L}^2(X,\mu)$ *сходится по норме. При этом*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(f) e_n + h, \quad \text{где} \quad h \perp e_n \quad \text{при всех} \quad n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Доказательство. По неравенству Бесселя $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |c_n(f)|^2 \|e_n\|^2 \leqslant \|f\|^2 < +\infty$, так что по лемме ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(f) e_n$ сходится. Пусть S — его сумма. Согласно второму утверждению леммы $c_n(f) \equiv c_n(S)$. Поэтому все коэффициенты Фурье разности $h = f - S$ равны нулю, т. е. $h \perp e_n$ при любом n. ►

1.5. Очевидно, сумма ряда Фурье может не совпадать с функцией, порождающей этот ряд. Например, если ОС $e_1, e_2, \ldots$ заменить системой $e_2, e_3, \ldots$, отбросив первый вектор, то все коэффициенты Фурье функции e_1 относительно новой системы будут нулями, и e_1 не будет равна сумме своего ряда Фурье (относительно новой системы).

*) Эрнст Сигизмунд **Фишер** (Fischer), 1875–1954, — немецкий математик.

Определение. Ортогональную систему $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ будем называть *базисом,* если любая функция из $\mathscr{L}^2(X,\mu)$ почти везде совпадает с суммой своего ряда Фурье.

Если $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — базис, то из равенства $f=\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(f)e_n$ вытекает, согласно $(1')$, что $\|f\|^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|c_n(f)|^2\|e_n\|^2$. Таким образом, для базиса неравенство Бесселя превращается в равенство. Это свойство, как мы покажем, является характеристическим для базиса.

Заметим, что если $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — базис, то скалярное произведение двух функций можно вычислить с помощью коэффициентов Фурье, так как

$$\langle f,g\rangle=\Big\langle\sum_{n=1}^{\infty}c_n(f)e_n,g\Big\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}c_n(f)\langle e_n,g\rangle=\sum_{n=1}^{\infty}c_n(f)\overline{c_n(g)}\|e_n\|^2.$$

Это равенство (как и его частный случай при $g=f$) называют *равенством Парсеваля**).

Введём ещё одно важное свойство, которое, как и равенство Парсеваля, оказывается характеристическим для базиса.

Определение. Семейство функций $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ из $\mathscr{L}^2(X,\mu)$ называется *полным,* если из условия

$$f\in\mathscr{L}^2(X,\mu)\quad\text{и}\quad f\perp f_\alpha\ \text{ при любом }\ \alpha\in A$$

следует, что $f=0$ почти везде, т. е. $\|f\|=0$.

Лемма. *Семейство $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ полно, если множество линейных комбинаций входящих в неё функций всюду плотно, т. е. для любой функции $f\in\mathscr{L}^2(X,\mu)$ и любого $\varepsilon>0$ существует такая линейная комбинация $g=\sum\limits_{k=1}^{n}c_kf_{\alpha_k}$, что $\|f-g\|<\varepsilon$.*

Доказательство. Пусть $f\perp f_\alpha$ при любом α. Если $\|f\|\neq 0$, то найдётся такая функция $g=\sum\limits_{k=1}^{n}c_kf_{\alpha_k}$, что $\|f-g\|<\|f\|$. Но так как $f\perp g$, то это ведёт к противоречию:

$$\|f\|^2>\|f-g\|^2=\|f\|^2+\|g\|^2\geqslant\|f\|^2.\ \blacktriangleright$$

Теорема (о характеристике базиса). *Пусть $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — ортогональная система. Следующие утверждения равносильны:*

1) система $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ есть базис;

2) для любой функции $f\in\mathscr{L}^2(X,\mu)$ справедливо равенство Парсеваля:

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n(f)|^2\|e_n\|^2=\|f\|^2;$$

3) система $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ полна.

Доказательство проведём по схеме 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1).

1) $\Rightarrow$ 2) Эта импликация уже доказана после определения базиса.

2) $\Rightarrow$ 3) Допустим, что $f\perp e_n$, т. е. $c_n(f)=0$ при всех $n=1,2,\ldots$ По условию $\|f\|^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}|c_n(f)|^2\|e_n\|^2=0$, что и означает полноту системы $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

---

*) Марк Антуан **Парсеваль** (Parseval), 1755–1836, — французский математик.

3) $\Rightarrow$ 1) Пусть $f \in \mathscr{L}^2(X,\mu)$. По теореме Рисса–Фишера $f = g + h$, где $g = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n(f) e_n$, а $h \perp e_n$ при любом n. Из полноты системы следует, что $h = 0$ почти везде. Ввиду произвольности функции f, это и означает, что рассматриваемая ОС есть базис. ►

Сопоставляя теорему и предшествующую ей лемму, мы видим, что справедливо

Следствие. *Ортогональная система $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ полна в том и только том случае, когда множество линейных комбинаций входящих в неё функций всюду плотно.*

1.6. Как мы увидим в следующем пункте (см. также § 2), нередко естественным образом возникают ортогональные системы, которые удобно "нумеровать" не натуральными числами, а какими-то иными индексами. Поэтому полезно несколько обобщить определение коэффициентов и ряда Фурье. Пусть $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — произвольная ОС в пространстве $\mathscr{L}^2(X,\mu)$, $f \in \mathscr{L}^2(X,\mu)$. Числа $c_\alpha(f) = \frac{\langle f, e_\alpha\rangle}{\|e_\alpha\|^2}$ будем, как и раньше, называть *коэффициентами Фурье* функции f относительно рассматриваемой ОС. Так как для любого конечного набора индексов $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ справедливо неравенство Бесселя $\sum\limits_{k=1}^{n} |c_{\alpha_k}(f)|^2 \|e_{\alpha_k}\|^2 \leqslant \|f\|^2$, то семейство $\left\{|c_\alpha(f)|^2\|e_\alpha\|^2\right\}_{\alpha\in A}$ суммируемо (см. п. I.2.2). Поэтому отличными от нуля могут быть коэффициенты $c_\alpha(f)$ с не более чем счётным множеством индексов A_f (см. п. I.2.2), которое мы можем, занумеровав, записать в виде $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}$. По теореме Рисса–Фишера ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_{\alpha_k}(f) e_{\alpha_k}$ сходится, и его сумму мы по-прежнему будем называть суммой ряда Фурье функции f относительно системы $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$. Чтобы такое определение было корректным, следует убедиться, что при другой нумерации множества A_f сумма ряда не изменится. Изменение нумерации множества A_f приводит, очевидно, к тому, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_{\alpha_k}(f) e_{\alpha_k}$ заменяется рядом, полученным из него перестановкой слагаемых. Поэтому нам достаточно доказать следующее вспомогательное утверждение.

Лемма. *Пусть $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — ортогональная система, а $\omega\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ — некоторая биекция. Тогда ряды*

$$(a)\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n \quad \text{и} \quad (б)\ \sum_{k=1}^{\infty} a_{\omega(k)} e_{\omega(k)}$$

сходятся одновременно и в случае сходимости их суммы равны.

Доказательство. Как установлено в лемме 1.4, ряды (a) и (b) сходятся одновременно с рядами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \|e_n\|^2$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{\omega(k)}|^2 \|e_{\omega(k)}\|^2$ соответственно. Последние два ряда сходятся одновременно, так как при перестановке сумма положительного ряда не изменяется. Этим доказана одновременная сходимость рядов (a), (б). Пусть они сходятся и S_n — частичная сумма ряда (a). Пользуясь теоремой Пифагора (см. равенство $(1')$), мы получаем:

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_{\omega(k)} e_{\omega(k)} - S_n\right\|^2 = \sum_{\omega(k)>n}^{\infty} |a_{\omega(k)}|^2 \|e_{\omega(k)}\|^2 = \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_j|^2 \|e_j\|^2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

откуда вытекает совпадение сумм рядов (a) и (б). ►

Как и в случае последовательностей, система $\{e_\alpha\}_{\alpha\in A}$ называется базисом, если каждая функция есть сумма своего ряда Фурье. Легко видеть, что теорема о характеристике базиса и следствие из неё сохраняют свою силу и в рассматриваемой более общей ситуации.

1.7. Пусть $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ и $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — ортогональные системы в пространствах $\mathscr{L}^2(X,\mu)$ и $\mathscr{L}^2(Y,\nu)$ соответственно. С их помощью можно построить ОС $\{h_{k,n}\}_{k,n\in\mathbb{N}}$ в пространстве $\mathscr{L}^2(X\times Y,\mu\times\nu)$, положив

$$h_{k,n}(x,y)=e_k(x)g_n(y)\qquad(x\in X, y\in Y).$$

Опираясь на теорему Фубини, легко убедиться, что функции $h_{k,n}$ суммируемы с квадратом и попарно ортогональны. Докажем, что при таком построении полнота системы сохраняется.

Теорема. *Если ортогональные системы $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ и $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ полны, то полна и система $\{h_{k,n}\}_{k,n\in\mathbb{N}}$.*

Доказательство. Пусть $f\perp h_{k,n}$ при всех k, $n\in\mathbb{N}$. Это значит, что

$$\int_{X\times Y} f(x,y)\overline{e_k(x)}\,\overline{g_n(y)}\,d(\mu\times\nu)(x,y)=\int_X\left(\int_Y f(x,y)\overline{g_n(y)}\,d\nu(y)\right)\overline{e_k(x)}\,d\mu(x)=0 \qquad (7)$$

при всех $k,n\in\mathbb{N}$. Зафиксируем произвольный номер n и рассмотрим функцию

$$x\mapsto\varphi_n(x)=\int_Y f(x,y)\overline{g_n(y)}\,d\nu(y).$$

Она измерима по следствию 2 из теоремы Тонелли. Кроме того, $\varphi_n\in\mathscr{L}^2(X,\mu)$, так как

$$|\varphi_n(x)|\leqslant\left(\int_Y|f(x,y)|^2\,d\nu(y)\right)^{\frac12}\|g_n\|,$$

и поэтому

$$\int_X|\varphi_n(x)|^2\,d\mu(x)\leqslant\int_X\left(\int_Y|f(x,y)|^2\,d\nu(y)\right)d\mu(x)\|g_n\|^2<+\infty.$$

Равенство (7) означает, что все коэффициенты Фурье функции φ_n относительно системы $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ равны нулю. Поэтому ввиду полноты этой системы $\varphi_n(x)=0$ почти везде. Так как это верно для всех номеров n, то

$$\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n(x)|^2=0\quad\text{почти везде на }X. \qquad (8)$$

Поскольку $\int_X\int_Y|f(x,y)|^2\,d\nu(y)\,d\mu(x)<+\infty$, из теоремы Фубини вытекает, что $\int_Y|f(x,y)|^2\,d\nu(y)<+\infty$ почти везде. Иными словами, при почти всех x функция $y\mapsto f_x(y)=f(x,y)$ суммируема с квадратом. Числа $\varphi_n(x)$ суть не что иное, как её

коэффициенты Фурье относительно системы $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Ввиду полноты этой системы равенство (8) означает, что

$$\int_Y |f(x,y)|^2\,d\nu(y) = \|f_x\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(x)|^2 = 0 \quad \text{почти везде на } X.$$

Интегрируя это равенство по X, мы получаем:

$$0 = \int_X \int_Y |f(x,y)|^2\,d\nu(y)\,d\mu(x) = \|f\|^2,$$

что и доказывает полноту системы $\{h_{k,n}\}_{k,n\in\mathbb{N}}$. ►

С помощью индукции доказанное утверждение очевидным образом переносится на случай, когда рассматриваются не две, а несколько ортогональных систем.

1.8. Лемма 1.4 показывает, что для ортонормированной системы любая последовательность $\{a_n\}_{n\geqslant 1}$, удовлетворяющая условию $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < +\infty$, может быть последовательностью коэффициентов Фурье некоторой функции суммируемой с квадратом. Естественно предположить, что с уменьшением класса рассматриваемых функций скорость убывания коэффициентов Фурье может увеличиваться. С подтверждением этой гипотезы мы встретимся в параграфе 3, рассматривая гладкие функции. Однако если вместо функций, суммируемых с квадратом, рассматривать лишь ограниченные функции (предполагая, естественно, что они входят в $\mathscr{L}^2(X,\mu)$, т. е. что мера μ конечна), то наша гипотеза оказывается неверной: коэффициенты Фурье ограниченных функций стремятся к нулю "не быстрее", чем коэффициенты Фурье произвольных функций из $\mathscr{L}^2$. Более точно этот результат, установленный в [Ha], формулируется следующим образом.

Теорема. *Пусть $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — такая ортонормированная система в $\mathscr{L}^2(X,\mu)$, $\mu(X) < +\infty$, что $\int_X |e_n|\,d\mu \geqslant \beta > 0$, где число β не зависит от n. Тогда для любого ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 = 1$ $(a_n > 0)$ найдётся такая измеримая функция F_a, что $|F_a| \leqslant 1$ и $\big|c_n(F_a)\big| \geqslant \theta\, a_n$ для всех n (коэффициент $\theta > 0$ зависит лишь от $\mu(X)$ и β).*

Отметим, что условие $\int_X |e_n|\,d\mu \geqslant \beta > 0$ заведомо выполнено, если ортонормированная система состоит из равномерно ограниченных функций, поскольку $1 = \int_X |e_n|^2\,d\mu \leqslant \|e_n\|_\infty \int_X |e_n|\,d\mu$.

Доказательство. Мы рассмотрим лишь вещественный случай, оставляя комплексный читателю (см. упр. 6, 7).

Произвольной последовательности знаков $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}$, где $\varepsilon_n = \pm 1$, сопоставим сумму

$$f_\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n\, e_n$$

(ряд в правой части сходится по лемме 1.4). Пусть A — множество, образованное всевозможными функциями f_ε. Оно компактно, поскольку является непрерывным образом

канторова множества (читатель самостоятельно убедится в непрерывности отображения, сопоставляющего числу $\sum\limits_{n=1}^{\infty} t_n 3^{-n}$ ($t_n = 0$ или 2) из канторова множества точку $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (t_n - 1)\, a_n\, e_n$ множества A).

Возьмём теперь функцию Φ класса $C^2(\mathbb{R})$, у которой $|\Phi'|$, $|\Phi''| \leqslant 1$ (выбор Φ уточним позже). Поскольку $|\Phi(u)| \leqslant |\Phi(0)| + |u|$, а мера конечна, интеграл $I(f) = \int_X \Phi(f)\, d\mu$ конечен для любой функции $f \in \mathscr{L}^2(X, \mu)$. Очевидно, он непрерывно зависит от f и, следовательно, по теореме Вейерштрасса достигает на A наибольшего значения: существует такая последовательность знаков $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}$, что $I(f_\varepsilon) \geqslant I(f)$ для любой функции f из A. Покажем, что при подходящем выборе Φ функция $F_a = \Phi'(f_\varepsilon)$ искомая. Так как $|F_a| \leqslant \sup |\Phi'| \leqslant 1$, то нам остаётся оценить коэффициенты Фурье $c_n(F_a)$. Для этого воспользуемся тем, что замена ε_n на $-\varepsilon_n$ оставляет функцию в классе A и, следовательно, не увеличивает интеграл I:

$$\int_X \Big(\Phi\big(f_\varepsilon\big) - \Phi\big(f_\varepsilon - 2\varepsilon_n a_n\, e_n\big)\Big) d\mu \geqslant 0.$$

Применение формулы Тейлора к подынтегральной функции приводит к неравенству

$$\int_X \Big(2\varepsilon_n a_n\, e_n\, \Phi'(f_\varepsilon) - \frac{1}{2}(2\varepsilon_n a_n\, e_n)^2 \Phi''(g_n)\Big) d\mu \geqslant 0, \tag{9}$$

где g_n — функция, значения которой заключены между f_ε и $f_\varepsilon - 2\varepsilon_n a_n\, e_n$.

Сократив неравенство (9) на $2a_n$, мы получим такую оценку коэффициентов Фурье функции $F_a = \Phi'(f_\varepsilon)$:

$$|c_n(F_a)| \geqslant \varepsilon_n \int_X e_n \Phi'(f_\varepsilon)\, d\mu \geqslant a_n \int_X e_n^2 \Phi''(g_n)\, d\mu.$$

Теперь надо выбрать функцию Φ так, чтобы интегралы $J_n = \int_X e_n^2 \Phi''(g_n)\, d\mu$ были отделены от нуля. Если в качестве Φ взять первообразную функции $\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} u$, то

$$J_n = \frac{2}{\pi} \int_X \frac{e_n^2}{1 + g_n^2}\, d\mu.$$

Для оценки этого интеграла воспользуемся неравенством Коши–Буняковского:

$$\beta \leqslant \int_X |e_n|\, d\mu = \int_X \frac{|e_n|}{\sqrt{1 + g_n^2}} \cdot \sqrt{1 + g_n^2}\, d\mu \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2} J_n} \cdot \sqrt{\int_X (1 + g_n^2)\, d\mu}.$$

Так как $|g_n| \leqslant |f_\varepsilon| + |f_\varepsilon - 2\varepsilon_n a_n\, e_n|$, то $\int_X g_n^2 d\mu \leqslant 2\big(\|f_\varepsilon\|^2 + \|f_\varepsilon - 2\varepsilon_n a_n\, e_n\|^2\big) = 4$. Поэтому $J_n \geqslant \theta = \frac{2\beta^2}{\pi(\mu(X)+4)}$ и $|c_n(F_a)| \geqslant \theta\, a_n$ для всех n. ►

УПРАЖНЕНИЯ

1) Дополните лемму 1.4 таким утверждением: если система (вообще говоря, не ортогональная) $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такова, что для любого номера n и любых скаляров $a_1, \ldots, a_n$ выполняется неравенство $\|a_1 e_1 + \ldots + a_n e_n\|^2 \leqslant |a_1|^2 + \ldots + |a_n|^2$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\, e_n$ сходится как только $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < +\infty$.

2) Пусть ортонормированная в $\mathscr{L}^2(X,\mu)$ система $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ равномерно ограничена. Докажите, что $\int_X f\overline{e}_n\,d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ для любой функции f не только из $\mathscr{L}^2(X,\mu)$, но и из $\mathscr{L}^1(X,\mu)$.

3) Пусть $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — ортонормированный базис в $\mathscr{L}^2(X,\mu)$ и $E\subset X$, $0<\mu(E)<+\infty$. Докажите, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_E |e_n|^2\,d\mu \geqslant 1$.

4) Дополните предыдущее упражнение, доказав, что почти везде $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|e_n(x)|^2=+\infty$, если σ-конечная мера μ такова, что каждое множество положительной меры можно разбить на два множества положительной меры. Можно ли отказаться от этого дополнительного условия?

5) Пусть $\{\varphi_n\}$ — ортонормированный базис. Докажите, что система функций $\{\psi_n\}$ полная, если $\sum\limits_n \|\varphi_n-\psi_n\|^2<1$. Если дополнительно известно, что $\{\psi_n\}$ — ортонормированная система, то для её полноты достаточно неравенство $\sum\limits_n \|\varphi_n-\psi_n\|^2<2$. Указание. Допустив, что функция $f=\sum c_n\varphi_n$ ортогональна всем функциям ψ_n, оцените сверху и снизу норму разности $f-\sum\limits_n c_n\psi_n$.

6) Проверьте, что в вещественном случае теорема 1.8 остаётся справедливой, если ортонормированность системы заменить условием из упр. 1 (вместо коэффициентов Фурье оцениваются величины $\langle F_a, e_n\rangle$).

7) Обобщите результат предыдущего упражнения на комплексные системы.

§ 2. Примеры ортогональных систем

Всюду в этом параграфе мы рассматриваем сходимость рядов Фурье только по $\mathscr{L}^2$-норме, которая обозначается символом $\|\cdot\|$. Вместо $\mathscr{L}^2(X,\lambda_m)$, где $X\subset\mathbb{R}^m$, будем писать кратко $\mathscr{L}^2(X)$, опуская указание на меру.

2.1. *Тригонометрические системы.* Важнейшие примеры ортогональных систем доставляют нам вещественная и комплексная *тригонометрические системы* в пространстве $\mathscr{L}^2\big((a,a+2\ell)\big)$:

$$1,\ \cos\frac{\pi x}{\ell},\ \sin\frac{\pi x}{\ell},\ \dots,\ \cos\frac{\pi n x}{\ell},\ \sin\frac{\pi n x}{\ell},\ \dots \qquad \text{и} \qquad \{e^{\frac{\pi i n x}{\ell}}\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

Простую проверку их ортогональности мы оставляем читателю. Ряды Фурье по этим системам имеют соответственно вид

$$A(f)+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n(f)\,\cos\frac{\pi n x}{\ell}+b_n(f)\,\sin\frac{\pi n x}{\ell}\Big) \qquad \text{и} \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\,e^{\frac{\pi i n x}{\ell}},$$

где коэффициенты Фурье вычисляются по формулам

$$A(f)=\frac{1}{2\ell}\int_a^{a+2\ell} f(x)\,dx, \qquad a_n(f)=\frac{1}{\ell}\int_a^{a+2\ell} f(x)\,\cos\frac{\pi n x}{\ell}\,dx,$$

$$b_n(f)=\frac{1}{\ell}\int_a^{a+2\ell} f(x)\,\sin\frac{\pi n x}{\ell}\,dx, \qquad c_n(f)=\frac{1}{2\ell}\int_a^{a+2\ell} f(x)\,e^{-\frac{\pi i n x}{\ell}}\,dx \quad (n\in\mathbb{Z}).$$

При изучении рядов Фурье можно предполагать, что функции определены на промежутке $(0, 2\ell)$, поскольку общий случай с помощью сдвига сводится к случаю $a = 0$. Часто также бывает удобно использовать симметричный промежуток $(-\ell, \ell)$.

Исследование ряда Фурье по тригонометрической системе с каким-то периодом может быть сведено к исследованию ряда Фурье по тригонометрической системе с другим периодом. Следуя традиции, мы будем в дальнейшем рассматривать (за редкими специально оговоренными исключениями) только ряды Фурье

$$A(f) + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n(f)\,\cos nx + b_n(f)\,\sin nx\big) \quad \text{и} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\,e^{inx}$$

по наиболее естественным и удобным 2π-периодическим системам

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \ldots \quad \text{и} \quad \{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}. \tag{T}$$

В последнем случае коэффициент Фурье $c_n(f)$ мы будем обозначать также символом $\widehat{f}(n)$. Таким образом,

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,e^{-inx}\,dx \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

Переход от разложения по одной системе к разложению по другой происходит следующим образом. С функцией $f \in \mathscr{L}^2\big((0, 2\ell)\big)$ свяжем функцию g, положив $g(y) = f\big(\frac{\ell}{\pi}y\big)$, где $y \in (0, 2\pi)$. Очевидно, $g \in \mathscr{L}^2\big((0, 2\pi)\big)$. Между коэффициентами Фурье этих функций (по соответствующим системам) существует очевидная связь: при любом $k \in \mathbb{Z}$

$$c_k(f) = \frac{1}{2\ell}\int_0^{2\ell} f(x)\,e^{-\frac{\pi ikx}{\ell}}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\Big(\frac{\ell}{\pi}y\Big)\,e^{-iky}\,dy = \widehat{g}(k).$$

Следовательно,

$$\sum_{|k|\leqslant n} c_k(f)\,e^{\frac{\pi ikx}{\ell}} = \sum_{|k|\leqslant n} \widehat{g}(k)\,e^{\frac{\pi ikx}{\ell}} = \sum_{|k|\leqslant n} \widehat{g}(k)\,e^{iky},$$

т. е. частичные суммы рядов Фурье функций f и g в соответствующих точках совпадают. Отсюда, в частности, следует, что оба ряда сходятся одновременно и их суммы одновременно совпадают (или не совпадают) со значениями функций f и g. Таким образом, переход от f к g позволяет заменить исследование ряда Фурье по системе с произвольным периодом, исследованием ряда Фурье по 2π-периодической системе.

Благодаря формулам Эйлера системы (T) тесно связаны друг с другом — их линейные оболочки совпадают (входящие в них функции называют *тригонометрическими многочленами*), а коэффициенты Фурье по одной системе выражаются через коэффициенты Фурье по другой системе:

$$\widehat{f}(\pm n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)(\cos nx \mp i\sin nx)\,dx = \frac{a_n(f) \mp ib_n(f)}{2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

и

$$a_n(f) = \widehat{f}(n) + \widehat{f}(-n) \quad \text{и} \quad b_n(f) = i(\widehat{f}(n) - \widehat{f}(-n)) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Отсюда следует, что ряды Фурье по системам (T) по существу совпадают. Точнее, для любого номера n справедливо равенство

$$A(f) + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\big) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\, e^{ikx},$$

показывающее, что частичные суммы ряда Фурье по вещественной системе (T) совпадают с симметричными частичными суммами ряда Фурье по комплексной системе.

В следующей теореме устанавливается важнейшее свойство систем (T).

Теорема. *Вещественная и комплексная тригонометрические системы образуют базисы в* $\mathscr{L}^2\big((0,2\pi)\big)$.

Доказательство сразу вытекает из следствия 1.5, условия которого выполнены в силу теоремы 4 п. IX.3.7. ►

Поскольку система (T) — базис, для неё справедливо равенство Парсеваля: если $f,\, g \in \mathscr{L}^2\big((0,2\pi)\big)$, то

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx = A(f)\,\overline{A(g)} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n(f)\,\overline{a_n(g)} + b_n(f)\,\overline{b_n(g)}\,\big) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\,\overline{\widehat{g}(n)}.$$

В частности, всякая функция f из $\mathscr{L}^2\big((0,2\pi)\big)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx = |A(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\big(|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\big) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2,$$

которое часто называют уравнением замкнутости.

Как мы уже отмечали, и в этих формулах, и в теореме промежуток $(0,2\pi)$ можно заменить на любой промежуток длины 2π, в частности, на $(-\pi,\pi)$.

Рассмотрим некоторые примеры, иллюстрирующие важность этой формулы.

Пример 1. Пусть $f(x) = x$ для $x \in (-\pi,\pi)$. Ряд Фурье этой функции имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{2}{n}\,\sin nx$. Согласно равенству Парсеваля

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} |b_n(f)|^2 = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Тем самым мы пришли к результату, полученному впервые Эйлером: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Те же рассуждения, применённые к функции $f(x) = x^2$ $(|x| \leqslant \pi)$, дают другой его результат: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Пример 2. Как мы видели (см. следствие IX.2.4), 2π-периодические функции, входящие в $\widetilde{\mathscr{L}}^2$, т. е. квадратично интегрируемые на $(-\pi,\pi)$, непрерывны в среднем. С помощью уравнения замкнутости можно получить точное значение для отклонения функции от её сдвига.

Будем считать, что функция $f \in \mathscr{L}^2\big((-\pi,\pi)\big)$ периодически продолжена на $\mathbb{R}$, и пусть $h \in \mathbb{R}$, а f_h — сдвиг f: $f_h(x) = f(x-h)$ при $x \in \mathbb{R}$. Легко проверить, что $\widehat{f_h}(k) = e^{-ikh}\widehat{f}(k)$. Поэтому согласно формуле Парсеваля

$$\|f_h - f\|^2 = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 \big|e^{-ikh} - 1\big|^2 = 8\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 \sin^2 \frac{kh}{2}.$$

Из этой формулы сразу вытекает непрерывность в среднем: $f_h \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f$.

Пример 3. Применим равенство Парсеваля для доказательства изящного неравенства (см. [EF]). Оно позволяет в некоторых случаях оценить среднее значение функции на большем промежутке средним значением на меньшем промежутке.

Пусть коэффициенты Фурье функции φ из $\mathscr{L}^2\big((-\pi,\pi)\big)$ неотрицательны. Тогда для любого числа $\alpha \in (0,\pi)$ справедливо неравенство

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t)|^2 dt \leqslant \frac{3}{2\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha} |\varphi(t)|^2 dt.$$

Поскольку функция $h(t) = \big(1 - \frac{|t|}{\alpha}\big)_+$ не превосходит единицы, нам достаточно оценить снизу интеграл $I = \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t)h(t)|^2 dt$. Произведение $f = \varphi h$, очевидно, принадлежит $\mathscr{L}^2\big((-\pi,\pi)\big)$. Вычислим его коэффициенты Фурье (далее $e_n(t) = e^{int}$):

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\langle \varphi h, e_n\rangle = \frac{1}{2\pi}\langle \varphi, he_n\rangle = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(k)\langle e_k, he_n\rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(k)\,\widehat{h}(n-k) =$$
$$= \sum_{k+j=n} \widehat{\varphi}(k)\,\widehat{h}(j).$$

Теперь равенство Парсеваля даёт нам

$$I = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Bigg|\sum_{k+j=n} \widehat{\varphi}(k)\,\widehat{h}(j)\Bigg|^2.$$

Прямые вычисления показывают, что $\widehat{h}(j) \geqslant 0$ для всех $j \in \mathbb{Z}$ (это следует также из результата примера 2 п. IV.6.6, поскольку функция h выпукла на $(0,\pi)$). Поэтому, заменив квадрат суммы суммой квадратов (именно здесь используются неравенства $\widehat{\varphi}(k) \geqslant 0$), мы получим:

$$I \geqslant 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k+j=n} \widehat{\varphi}^2(k)\,\widehat{h}^2(j) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}^2(k) \sum_{j=-\infty}^{\infty} \widehat{h}^2(j) =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t)|^2\,dt \int_{-\pi}^{\pi} h^2(t)\,dt = \frac{\alpha}{3\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t)|^2\,dt.$$

Итак,

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} |\varphi(t)|^2 dt \geqslant I \geqslant \frac{\alpha}{3\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(t)|^2 \, dt.$$

Пример 4. На неожиданное применение тригонометрических рядов Фурье указал Гурвиц*). Оказывается, с их помощью совсем просто доказывается классическое *изопериметрическое неравенство*, связанное с задачей об определении среди замкнутых плоских кривых длины L той кривой, которая ограничивает фигуру наибольшей площади. Оно имеет вид

$$4\pi S \leqslant L^2,$$

где S — площадь ограничиваемой фигуры. Равенство достигается лишь в случае, когда рассматриваемая кривая — окружность (многомерный вариант изопериметрического неравенства рассматривается в пп. II.8.2 и Д.IV.7).

Рассуждение Гурвица аналитическое. В нём используются лишь уравнение замкнутости и формула для выражения площади в виде криволинейного интеграла.

Пусть $K \subset \mathbb{R}^2$ — компактное множество, граница которого — замкнутая гладкая кривая. Не умаляя общности будем считать, что её длина равна 2π. Рассмотрим натуральную параметризацию (см. VIII.2.3) кривой ∂K: $z(t) = (x(t), y(t))$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Тогда $z(0) = z(2\pi)$, поскольку кривая ∂K замкнутая, и $|z'(t)| \equiv 1$, поскольку параметризация натуральная.

Так как $|z'(t)| \equiv 1$, то пользуясь уравнением замкнутости, равенство $L = 2\pi$ можно переписать в виде

$$L^2 = 2\pi \int_0^{2\pi} |z'(t)|^2 \, dt = 4\pi^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{z'}(n)|^2. \tag{1}$$

Для вычисления площади $S = \lambda_2(K)$ применим равенство

$$S = \frac{1}{2} \int_{\partial^+ K} (-y dx + x dy) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \big(x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\big) \, dt,$$

вытекающее из формулы Грина при $P(x,y) = -y$, $Q(x,y) = x$ (см. п. VIII.6.7). Так как $x(t)y'(t) - y(t)x'(t) = \mathcal{I}m\,(z'(t)\,\overline{z(t)})$, то

$$S = \frac{1}{2i} \int_0^{2\pi} z'(t)\,\overline{z(t)}\, dt.$$

Преобразование этого интеграла с помощью равенства Парсеваля приводит к формуле

$$S = -\pi i \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{z'}(n)\overline{\widehat{z}(n)}. \tag{2}$$

Исключим теперь из равенств (1) и (2) коэффициенты Фурье производной, выразив их через коэффициенты Фурье функции z. Так как $z(0) = z(2\pi)$, то интегрируя по частям, получаем:

$$\widehat{z'}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z'(t) e^{-int} \, dt = \frac{1}{2\pi} z(t) e^{-int} \Big|_{t=0}^{2\pi} + \frac{in}{2\pi} \int_0^{2\pi} z(t) e^{-int} \, dt = i\, n \widehat{z}(n).$$

*) Адольф **Гурвиц** (Hurwitz), 1859–1919, — немецкий математик.

Подстановка этих значений $\widehat{z'}(n)$ в (1) и (2) даёт нам:

$$L^2 = 4\pi^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 |\widehat{z}(n)|^2 \quad \text{и} \quad S = \pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} n|\widehat{z}(n)|^2.$$

Следовательно,

$$L^2 - 4\pi S = 4\pi^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} (n^2 - n)|\widehat{z}(n)|^2 \geqslant 0,$$

что доказывает изопериметрическое неравенство. Кроме того, из последней формулы видно, что равенство возможно лишь если $\widehat{z}(n) = 0$ при $n \neq 0, 1$, т. е. лишь в том случае, когда $z(t) = \widehat{z}(0) + \widehat{z}(1)e^{it}$. При этом $|\widehat{z}(1)| = 1$, так как $|z'(t)| \equiv 1$. Таким образом, кривая длины 2π, для которой в изопериметрическом неравенстве достигается равенство, есть окружность единичного радиуса: $|z - \widehat{z}(0)| = 1$.

2.2. Рассмотрим произведение m экземпляров комплексной тригонометрической системы (см. п. 1.7). Тогда мы получим её многомерный аналог в пространстве $\mathscr{L}^2(Q)$, где $Q = (-\pi, \pi)^m$ (многомерный вариант вещественной тригонометрической системы довольно громоздок, его мы рассматривать не будем). Новая система состоит из экспонент e_n с комплексным показателем, занумерованных мультииндексами $n = (n_1, \dots, n_m)$:

$$e_n(x) = e^{i\langle n, x\rangle}, \quad \text{где} \quad x \in Q, \ n \in \mathbb{Z}^m.$$

Коэффициенты Фурье функции $f \in \mathscr{L}^2(Q)$ по этой системе вычисляются по формулам:

$$\widehat{f}(n) = \frac{\langle f, e_n\rangle}{\|e_n\|^2} = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_Q f(x)\, e^{-i\langle n, x\rangle}\, dx \qquad (n \in \mathbb{Z}^m).$$

Из теоремы 1.7 следует полнота системы $\{e^{i\langle n,x\rangle}\}_{n\in\mathbb{Z}^m}$, а следовательно, и справедливость равенства Парсеваля:

$$\int_Q f(x)\, \overline{g(x)}\, dx = (2\pi)^m \sum_{n\in\mathbb{Z}^m} \widehat{f}(n) \cdot \overline{\widehat{g}(n)}, \qquad f, g \in \mathscr{L}^2(Q).$$

Разумеется, в двух последних формулах куб $Q = (-\pi, \pi)^m$ может быть заменён сдвинутым кубом.

Пример. Пусть $0 < \rho \leqslant \pi$. Рассмотрим функцию $f \in \mathscr{L}^2\big((-\pi, \pi)^3\big)$, равную $\frac{1}{\|x\|}$ при $\|x\| < \rho$ и нулю на $(-\pi, \pi)^3 \setminus B(0, \rho)$. Её норма легко вычисляется с помощью сферических координат:

$$\|f\|^2 = \int_{B(0,\rho)} \frac{1}{\|x\|^2}\, dx = 4\pi \int_0^\rho \frac{1}{r^2}\, r^2\, dr = 4\pi\rho.$$

Для вычисления коэффициентов Фурье воспользуемся формулой, полученной в примере п. VI.2.5, с функцией $f_0(r) = \frac{1}{r}$ на $(0, \rho)$, $f_0(r) = 0$ при $r \geqslant \rho$, и $y = \frac{n}{2\pi}$:

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{B(0,\rho)} \frac{1}{\|x\|}\, e^{-i\langle n, x\rangle}\, dx = \frac{1}{2\pi^2\|n\|} \int_0^\rho \frac{1}{r}\, r\, \sin(\|n\| r)\, dr = \left(\frac{\sin\frac{\rho}{2}\|n\|}{\pi\|n\|}\right)^2,$$

если $n \neq 0$, и $\widehat{f}(0) = \frac{\rho^2}{4\pi^2}$. Равенство Парсеваля для функции f даёт нам

$$4\pi\rho = (2\pi)^3 \sum_{n\in\mathbb{Z}^3} \left(\frac{\sin \frac{\rho}{2}\|n\|}{\pi\|n\|} \right)^4 .$$

Таким образом, для $t = \frac{\rho}{2} \in (0, \frac{\pi}{2}]$ справедливо тождество

$$\frac{\pi^2}{t^3} = \sum_{n\in\mathbb{Z}^3} \left(\frac{\sin \|n\|t}{\|n\|t} \right)^4$$

(слагаемое при $n = 0$ равно 1).

2.3. Тригонометрическая система тесно связана с ортогональной системой $\{z^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ в пространстве $\mathscr{L}^2(S^1, \sigma)$, где $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ — единичная окружность, а σ — длина дуги. Зная полноту тригонометрической системы в $\mathscr{L}^2((-\pi, \pi))$, нетрудно с помощью замены переменной $z = e^{ix}$ $(-\pi < x < \pi)$ убедиться, что система $\{z^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ полна в $\mathscr{L}^2(S^1, \sigma)$ и, следовательно, всякая входящая в это пространство функция f есть сумма ряда $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n z^n$, где $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} f(z)\overline{z}^n \, d\sigma(z)$. Поскольку всякая функция, аналитическая в кольце $r < |z| < R$, раскладывается в ряд Лорана, на ряд Фурье по системе $\{z^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ можно смотреть как на предельную форму ряда Лорана, соответствующую случаю, когда кольцо вырождается в окружность.

Рассмотрим один пример, связанный с системой $\{z^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Пусть $T\colon S^1 \to S^1$ — поворот окружности, т. е. отображение $z \mapsto T(z) = \zeta z$, где $\zeta \in S^1$ — фиксированное число. Зададим себе вопрос — насколько сильно "перемешиваются" точки окружности при итерациях T? Есть ли множества, точки которых никогда их не покидают? Такие множества называются инвариантными. Точнее, множество $E \subset S^1$ называется инвариантным, если оно отличается от своего образа разве лишь на множество меры нуль, т. е. если $\chi_E = \chi_{T(E)}$ почти везде. Конечно, такие множества есть, например, вся окружность S^1 или множество $\{\zeta^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$. Легко построить и другие примеры инвариантных множеств, меры которых равны 2π или нулю. Поэтому нас будет интересовать вопрос о том, существуют ли нетривиальные инвариантные множества, т. е. измеримые инвариантные множества, удовлетворяющие условию $0 < \sigma(E) < 2\pi$. Если $\zeta^m = 1$ при некотором m, то после m итераций отображение T повторяется ($T^{m+1} = T$), и нетривиальное инвариантное множество нетрудно построить, что мы предоставляем сделать читателю. Однако, если ζ не совпадает ни с каким корнем из единицы, то у отображения T нет нетривиальных инвариантных множеств (такие отображения называют *эргодическими*). Докажем это.

Пусть $E \subset S^1$ — измеримое инвариантное множество. Тогда $\chi_E = \chi_{T(E)}$ почти везде, и поэтому $c_n(\chi_{T(E)}) = c_n(\chi_E)$. Вместе с тем, с помощью замены переменной (следствие VI.1.1) мы получаем:

$$c_n(\chi_{T(E)}) = \frac{1}{2\pi} \int_{T(E)} \overline{z}^n \, d\sigma(z) = \frac{1}{2\pi} \int_E \overline{(\zeta z)}^n \, d\sigma(z) = \zeta^{-n} c_n(\chi_E).$$

Таким образом, $c_n(\chi_E)(1 - \zeta^{-n}) = 0$ при всех $n \in \mathbb{Z}$. Так как $1 - \zeta^{-n} \neq 0$ при $n \neq 0$, то отсюда вытекает, что все коэффициенты Фурье χ_E, кроме, возможно, $c_0(\chi_E)$, равны

нулю. Поскольку в силу полноты системы $\{z^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ функция χ_E почти везде совпадает с суммой своего ряда Фурье, она почти везде принимает постоянное значение. Поэтому либо почти везде $\chi_E(x) = 0$ (инвариантное множество имеет меру нуль), либо почти везде $\chi_E(x) = 1$ (инвариантное множество имеет полную меру).

2.4. Приведём некоторые другие примеры ортогональных систем.

Пусть $P_n(x) = (x^n(1-x)^n)^{(n)}$ $(n = 0, 1, \dots)$. Многочлены P_n называются *многочленами Лежандра.* Очевидно, $\deg P_n = n$, так что всякий многочлен есть линейная комбинация многочленов Лежандра. В пространстве $\mathscr{L}^2\big((-1,1)\big)$ они образуют ортогональную систему. В самом деле, при $m < n$

$$\langle P_m, P_n\rangle = \int_{-1}^{1} P_m(x)(x^n(1-x)^n)^{(n)}\,dx = P_m(x)(x^n(1-x)^n)^{(n-1)}\Big|_{-1}^{1} -$$
$$- \int_{-1}^{1} P_m'(x)(x^n(1-x)^n)^{(n-1)}\,dx = -\int_{-1}^{1} P_m'(x)(x^n(1-x)^n)^{(n-1)}\,dx.$$

Проинтегрировав по частям n раз, мы придём к равенству

$$\langle P_m, P_n\rangle = (-1)^n \int_{-1}^{1} P_m^{(n)}(x)\, x^n(1-x)^n\,dx,$$

где $P_m^{(n)}(x) \equiv 0$, так как $\deg P_m < n$. Таким образом, $\langle P_m, P_n\rangle = 0$ при $m \neq n$.

Теорема. *Многочлены Лежандра образуют базис в пространстве* $\mathscr{L}^2\big((-1,1)\big)$.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 2.1, воспользуемся следствием 1.5. Нам нужно проверить, что линейными комбинациями многочленов P_n, т. е. произвольными алгебраическими многочленами можно сколь угодно хорошо аппроксимировать (по $\mathscr{L}^2$-норме) любую функцию из $\mathscr{L}^2\big((-1,1)\big)$. Это, однако, уже установлено в следствии IX.2.3. ▶

Отметим ещё одну полезную ортогональную систему. В пространстве $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$ рассмотрим *функции Эрмита**)

$$h_n(x) = e^{x^2/2}(e^{-x^2})^{(n)},\ n = 0, 1, \dots .$$

Как легко убедиться, $h_n(x) = H_n(x)e^{-x^2/2}$, где H_n — многочлен степени n, называемый *многочленом Эрмита.* Ортогональность функций Эрмита можно установить с помощью интегрирования по частям, исходя из равенства

$$\langle h_m, h_n\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)(e^{-x^2})^{(n)}\,dx,$$

совершенно аналогично тому, как мы это делали при доказательстве ортогональности многочленов Лежандра. Очевидно, ортогональность функций Эрмита в $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$ означает ортогональность многочленов Эрмита в $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}, \mu)$ с мерой $d\mu(x) = e^{-x^2}dx$.

Полнота функций h_n в $\mathscr{L}^2(\mathbb{R})$ или, что то же самое, полнота многочленов H_n в $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}, \mu)$ будет доказана нами позднее (см. следствие п. 5.6).

*) Шарль **Эрмит** (Hermite), 1822–1901, — французский математик.

2.5. Важную роль при использовании методов теории вероятностей в анализе играет последовательность функций Радемахера r_n, определённых в п. VI.4.5. Как было доказано, эти функции независимы в смысле определения VI.4.4. Так как, кроме того, $\int_0^1 r_n(x)\,dx = 0$, то при $1 \leqslant n_1 < n_2 < \ldots < n_m$ справедливо равенство

$$\int_0^1 r_{n_1}(x) r_{n_2}(x) \cdots r_{n_m}(x)\,dx = \prod_{k=1}^{m} \int_0^1 r_{n_k}(x)\,dx = 0. \tag{3}$$

В частности, функции Радемахера образуют ортонормированную систему в пространстве $\mathscr{L}^2\big((0,1)\big)$. Она, конечно, не полна — например, попарные произведения $r_j r_k$ ортогональны всем функциям Радемахера. Чтобы расширить систему Радемахера до полной, поступим следующим образом. Каждому непустому конечному множеству $A \subset \mathbb{N}$ сопоставим функцию $w_A = \prod\limits_{n \in A} r_n$. Кроме того, будем по определению считать, что $w_\varnothing \equiv 1$. Функции w_A называются *функциями Уолша**). Функции Радемахера — это функции Уолша, соответствующие всевозможным одноточечным множествам. В силу равенства (3) функции w_A попарно ортогональны. Система функций Уолша полна в $\mathscr{L}^2\big((0,1)\big)$. Чтобы доказать это, установим предварительно лемму.

Лемма. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Множество линейных комбинаций функций w_A таких, что $A \subset \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, совпадает с множеством линейных комбинаций характеристических функций интервалов $\Delta_{n,k} = (k2^{-n}, (k+1)2^{-n})$ при $k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$.*

Доказательство. Пусть L_1 и L_2 — множества линейных комбинаций функций первой и второй систем. Так как функции $r_1, \ldots, r_n$ постоянны на промежутках $\Delta_{n,k}$, то на них постоянны и рассматриваемые функции Уолша. Поэтому $L_1 \subset L_2$. Вместе с тем, очевидно, размерности L_1 и L_2 одинаковы (равны 2^n). Отсюда вытекает, что $L_1 = L_2$. ▶

Теорема. *Система функций Уолша полна в пространстве $\mathscr{L}^2((0,1))$.*

Доказательство. Воспользуемся следствием из теоремы 1.5 о характеристике базиса. Будем доказывать, что линейными комбинациями функций Уолша можно с произвольной точностью аппроксимировать по норме любую функцию f из $\mathscr{L}^2\big((0,1)\big)$. Если f — характеристическая функция промежутка $(p,q) \subset (0,1)$, то по заданному ε выберем столь большое n, что p и q можно аппроксимировать точками $\frac{j}{2^n}$ и $\frac{k}{2^n}$ с точностью до ε. Тогда $\|f - \chi_\Delta\| < 2\varepsilon$, где χ_Δ — характеристическая функция промежутка $(\frac{j}{2^n}, \frac{k}{2^n})$, которая почти всюду совпадает с суммой $\sum\limits_{s=j}^{k-1} \chi_{\Delta_{n,s}}$ равной, согласно лемме, некоторой линейной комбинации функций Уолша. Умея аппроксимировать характеристические функции промежутков, мы можем аппроксимировать и их линейные комбинации, т. е. ступенчатые функции. Рассмотрим теперь общий случай. По теореме IX.2.2 по заданному ε можно найти такую ступенчатую функцию g, что $\|f - g\| < \varepsilon$. Приблизив g с точностью до ε линейной комбинацией функций Уолша — назовем её h, — мы получаем: $\|f - h\| \leqslant \|f - g\| + \|g - h\| < 2\varepsilon$, что завершает доказательство ввиду произвольности ε. ▶

---

*) Джозеф Леонард **Уолш** (Walsh), 1895–1973, — американский математик.

2.6. С точки зрения теории вероятностей функции Радемахера представляют собой пример последовательности независимых испытаний с двумя равновероятными исходами (простейшая "схема Бернулли"). При этом "элементарным" случайным событием считается выпадение точки $x \in (0,1)$, а вероятностью попадания точки в промежуток (p,q) — длина этого отрезка. "Испытания" состоят в вычислении значений функций Радемахера: первое испытание — вычисление $r_1(x)$, второе испытание — вычисление $r_2(x)$ и т. д. Учитывая связь между значениями функций Радемахера в данной точке и знаками её двоичного разложения, можно в этой схеме заменить $r_n(x)$ на $\varepsilon_n(x)$ — знаки двоичного разложения x.

Одним из первых результатов теории вероятностей является закон больших чисел Я. Бернулли, устанавливающий, что в описанной схеме частота появления нуля или единицы со сколь угодно большой вероятностью становится близкой к $\frac{1}{2}$. На языке теории меры этот результат означает, что на интервале $(0,1)$ среднее арифметическое $\frac{1}{n}\big(\varepsilon_1(x) + \ldots + \varepsilon_n(x)\big)$ (частота появления единицы в двоичном разложении точки x) стремится к $\frac{1}{2}$ по мере. Возвращаясь к функциям Радемахера, можно сказать, что

$$\frac{r_1(x) + \ldots + r_n(x)}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{по мере.}$$

Это утверждение вытекает из того, что

$$\frac{1}{n}\|r_1 + \ldots + r_n\| = \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

а из сходимости по норме следует сходимость по мере.

Два века спустя после Бернулли Борель доказал более сильное утверждение.

Теорема (усиленный закон больших чисел).

$$\frac{r_1(x) + \ldots + r_n(x)}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \textit{почти везде на } (0,1).$$

Доказательство. Положим $S_n(x) = r_1(x) + \ldots + r_n(x)$ и оценим интеграл $\int_0^1 S_n^4(x)\,dx$. Очевидно,

$$S_n^2(x) = \sum_{k=1}^{n} r_k^2(x) + 2\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} r_j(x)r_k(x) = n + 2\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} w_{\{j,k\}}(x).$$

Так как функции Уолша $w_{\{j,k\}}$ образуют ортонормированную систему, то по теореме Пифагора

$$\int_0^1 S_n^4(x)\,dx = \Big\|n\,w_\varnothing + 2\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} w_{\{j,k\}}\Big\|^2 = n^2 + 4\sum_{1\leqslant j<k\leqslant n} 1 < 3n^2.$$

Следовательно, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \big(\frac{1}{n}\,S_n(x)\big)^4\,dx < \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n^2} < +\infty$ и поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \big(\frac{1}{n}\,S_n(x)\big)^4$ сходится почти везде (см. следствие 2 п. IV.8.2). Поскольку члены сходящегося ряда стремятся к нулю, отсюда вытекает утверждение теоремы. ►

2.7. Доказанная теорема допускает различные обобщения, также называемые усиленным законом больших чисел. Наибольший интерес представляют те из них, которые относятся к последовательностям независимых функций с нулевыми средними значениями (очевидно, они образуют ортогональную систему). Прежде чем переходить к этому вопросу рассмотрим неравенство, играющее решающую роль при исследовании рядов из таких функций.

Всюду в этом пункте мы рассматриваем вещественные функции из пространства $\mathscr{L}^2(X,\mu)$, предполагая меру μ нормированной ($\mu(X)=1$).

Теорема (неравенство Колмогорова*)). *Пусть функции $f_1,\dots,f_n$ из $\mathscr{L}^2(X,\mu)$ независимы и имеют нулевые средние значения: $\int_X f_1\,d\mu=\ldots=\int_X f_n\,d\mu=0$. Тогда для любого $t>0$ справедливо неравенство*

$$\mu\Big(\Big\{x\in X\,\Big|\,\max_{1\leqslant k\leqslant n}|f_1(x)+\ldots+f_k(x)|\geqslant t\Big\}\Big)\leqslant\frac{1}{t^2}\sum_{k=1}^n\int_X f_k^2\,d\mu.$$

Доказательство. Положим $S_k=f_1+\ldots+f_k$, $S_k^*=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant k}|S_j|$, $R_k=S_n-S_k$. Нам требуется оценить меру множества $E=\big\{x\in X\,|\,S_n^*(x)\geqslant t\big\}$. Для этого разобьём его на непересекающиеся части $E_k=\big\{x\in X\,|\,S_{k-1}^*(x)<t\leqslant S_k^*(x)\big\}$ (считаем, что $S_0^*\equiv 0$). Тогда

$$\sum_{k=1}^n\int_X f_k^2\,d\mu=\int_X S_n^2\,d\mu\geqslant\int_E S_n^2\,d\mu=\sum_{k=1}^n\int_{E_k}(S_k+R_k)^2\,d\mu=$$
$$=\sum_{k=1}^n\Big(\int_{E_k}S_k^2\,d\mu+2\int_{E_k}S_k\,R_k\,d\mu+\int_{E_k}R_k^2\,d\mu\Big)\geqslant\sum_{k=1}^n\int_{E_k}S_k^2\,d\mu+2\sum_{k=1}^n\int_{E_k}S_k\,R_k\,d\mu.$$

По следствию из леммы VI.4.4 функции $S_k\chi_{E_k}$ и R_k независимы. Поэтому

$$\int_{E_k}S_k\,R_k\,d\mu=\int_X S_k\chi_{E_k}R_k\,d\mu=\int_X S_k\chi_{E_k}\,d\mu\cdot\int_X R_k\,d\mu=0.$$

Поскольку $|S_k|=S_k^*\geqslant t$ на множестве E_k, мы получаем доказываемое неравенство:

$$\sum_{k=1}^n\int_X f_k^2\,d\mu\geqslant\sum_{k=1}^n\int_{E_k}S_k^2\,d\mu\geqslant\sum_{k=1}^n t^2\mu(E_k)=t^2\mu(E).\ \blacktriangleright$$

Дополним теорему, сохранив её обозначения, и убедимся, что для последовательности независимых функций f_n, удовлетворяющих условию теоремы, справедливо

Следствие. *Если $A^2=\sum\limits_{n=1}^\infty\int_X f_n^2\,d\mu<+\infty$, то функция $S^*=\sup\limits_{k\geqslant1}|S_k|=\sup\limits_{k\geqslant1}S_k^*$ суммируема и $\int_X S^*\,d\mu\leqslant 2A$.*

Доказательство. При любом $t>0$ множество $X(S^*\geqslant t)$ исчерпывается последовательностью расширяющихся множеств $X(S_k^*\geqslant t)$. По теореме мера каждого из

*) Андрей Николаевич **Колмогоров**, 1903–1987, — российский математик.

них не превосходит $\frac{A^2}{t^2}$. Следовательно, $\mu\bigl(X(S^* \geqslant t)\bigr) \leqslant \frac{A^2}{t^2}$. Таким образом, $F(t) \leqslant \frac{A^2}{t^2}$, где F — убывающая функция распределения для S^*. Пользуясь формулой предложения VI.4.3 с $p = 1$, мы видим, что

$$\int_X S^*\,d\mu = \int_0^\infty F(t)\,dt = \int_0^A \ldots + \int_A^\infty \ldots \leqslant AF(0) + \int_A^\infty \frac{A^2}{t^2}\,dt \leqslant A + A = 2A. \quad \blacktriangleright$$

2.8. Установленная в предыдущем следствии оценка интеграла от функции S^* приводит к важному результату о поведении ряда $\sum\limits_{n=1}^\infty f_n$, из которого в свою очередь вытекает обобщение теоремы Бореля.

Теорема 1. *Пусть $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность независимых функций с нулевыми средними значениями. Если $\sum\limits_{n=1}^\infty \int_X f_n^2\,d\mu < +\infty$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^\infty f_n$ сходится почти везде.*

Доказательство. Положим

$$S_n = f_1 + \ldots + f_n, \qquad R_n = \sup_{p\geqslant 1} |S_{n+p} - S_n|.$$

Так как $|S_{n+p} - S_n| \leqslant 2R_m$ при $n \geqslant m$ и любых m, p, то нам нужно лишь показать, что $\inf_n R_n = 0$ почти везде. Для этого достаточно проверить соотношение $\int_X R_n\,d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, которое сразу вытекает из следствия 2.7:

$$\int_X R_n\,d\mu \leqslant 2\biggl(\sum_{k=n+1}^\infty \int_X f_k^2\,d\mu\biggr)^{\frac{1}{2}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \quad \blacktriangleright$$

Следствие. *Пусть $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность независимых функций с нулевыми средними значениями. Если $\sum\limits_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}\int_X f_n^2\,d\mu < +\infty$, то $\sigma_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^n f_k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ почти везде.*

Доказательство. По теореме суммы $T_n = \sum\limits_{k=1}^n \frac{1}{k} f_k$ почти везде имеют конечный предел. Тот же предел имеют величины $\theta_n = \frac{1}{n+1}(T_1 + \ldots + T_n)$, и поэтому разность $T_n - \theta_n$ бесконечно мала почти везде. Вместе с тем, как легко подсчитать, $T_n - \theta_n = \frac{1}{n+1}(f_1 + \ldots + f_n)$, что завершает доказательство. $\blacktriangleright$

Аналогичное утверждение можно, отказавшись от независимости, получить и для произвольной ортогональной системы, усилив ограничение на величины $\|f_n\|$ (см. упр. 11).

Если на независимые функции f_n наложить вполне естественное дополнительное ограничение, то условие $\sum\limits_{n=1}^\infty \int_X f_n^2\,d\mu < +\infty$ окажется не только достаточным, но и необходимым для сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^\infty f_n$ почти везде (или, что по закону нуля-единицы то же самое, на множестве положительной меры).

Теорема 2. *Пусть $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность независимых равномерно ограниченных функций с нулевыми средними значениями. Если ряд $\sum\limits_{k=1}^\infty f_k$ сходится почти везде, то $\sum\limits_{k=1}^\infty \int_X f_k^2\,d\mu < +\infty$.*

Доказательство. Положим $S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k$ $(n = 1, 2, \dots)$. Так как сумма S почти везде конечна, то для почти всех x последовательности $\{S_n(x)\}_n$ ограничены. На некотором множестве положительной меры они ограничены равномерно. Поэтому существует столь большое число t, что пересечение $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ множеств $E_n = \{x \in X \,|\, |S_k(x)| \leqslant t \text{ при } k = 1, \dots, n\}$ имеет положительную меру. Найдём рекуррентную оценку для интегралов

$$I_n = \int_{E_n} S_n^2 \, d\mu.$$

Для этого воспользуемся независимостью функций f_{n+1} и $S_n \chi_{E_n}$ (см. следствие из леммы VI.4.4). Она даёт нам

$$\int_{E_n} S_n f_{n+1} \, d\mu = \int_X \chi_{E_n} S_n \, d\mu \cdot \int_X f_{n+1} \, d\mu = 0$$

и

$$\int_{E_n} f_{n+1}^2 \, d\mu = \int_X \chi_{E_n} f_{n+1}^2 \, d\mu = \mu(E_n) \int_X f_{n+1}^2 \, d\mu \geqslant \mu(E) \int_X f_{n+1}^2 \, d\mu.$$

Поэтому, положив $F_n = E_n \setminus E_{n+1}$, мы приходим к неравенству

$$I_{n+1} = \int_{E_n} (S_n + f_{n+1})^2 \, d\mu - \int_{F_n} S_{n+1}^2 \, d\mu \geqslant I_n + \mu(E) \int_X f_{n+1}^2 \, d\mu - \int_{F_n} S_{n+1}^2 \, d\mu.$$

По условию существует такое число c, что для всех n почти везде $|f_n| \leqslant c$. Тогда

$$|S_{n+1}(x)| \leqslant |S_n(x)| + |f_{n+1}(x)| \leqslant t + c \quad \text{для почти всех } x \text{ из } E_n.$$

Таким образом,

$$I_{n+1} - I_n + (t + c)^2 \mu(F_n) \geqslant \mu(E) \int_X f_{n+1}^2 \, d\mu.$$

Так как $\sum\limits_{k=1}^{n} (I_{k+1} - I_k) \leqslant I_{n+1} \leqslant t^2$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} \mu(F_k) \leqslant 1$, то отсюда следует сходимость ряда $\sum\limits_k \mu(E) \int_X f_{k+1}^2 \, d\mu$, что равносильно утверждению теоремы, поскольку $\mu(E) > 0$. ►

УПРАЖНЕНИЯ

1) Докажите полноту систем $1, \cos x, \cos 2x, \dots$ и $\sin x, \sin 2x, \dots$ в пространстве $\mathscr{L}^2\big((0, \pi)\big)$.

2) Пусть μ — мера на интервале $(-1, 1)$, имеющая плотность $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ относительно меры Лебега. Докажите, что функции $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ образуют ортогональный базис в пространстве $\mathscr{L}^2\big((-1, 1), \mu\big)$. Проверьте, что T_n — алгебраический многочлен степени n (*многочлен Чебышева*).

3) Докажите, что функции $x \mapsto e^{x/2}(x^n e^{-x})^{(n)}$ $(n = 0, 1, \dots)$, называемые *функциями Лагерра**), образуют ортогональную систему в пространстве $\mathscr{L}^2\big((0, +\infty)\big)$.

---

*) Эдмон Никола **Лагерр** (Laguerre), 1834–1886, — французский математик.

4) Пусть m — одна из цифр $0, 1, \ldots, 9$ и пусть $c_m(x) = 1$, если десятичное разложение дробной части числа x имеет вид $0, m \ldots$, а в противном случае $c_m(x) = 0$. Проверьте, что

$$\frac{1}{n} \sum_{0 \leqslant k < n} c_m(10^k x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{10} \quad \text{почти везде на } (0,1).$$

5) Обобщая результат предыдущего упражнения, докажите, что почти все числа $x \in (0,1)$ нормальны, т. е. при любом $p \in \mathbb{N}$ разложение x в p-ичную дробь содержит все цифры (числа $0, 1, \ldots, p-1$) "одинаково часто".

6) С помощью неравенства Хинчина дополните теорему 2.6, доказав, что при $p > \frac{1}{2}$

$$\frac{r_1(x) + \ldots + r_n(x)}{n^p} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{почти везде на } (0,1).$$

7) Убедитесь, что при $p = \frac{1}{2}$ результат предыдущего упражнения неверен. Указание. Найдите предел интегралов $\int_0^1 e^{i\sigma_n(x)} dx$, где $\sigma_n(x) = \frac{r_1(x)+\ldots+r_n(x)}{\sqrt{n}}$.

8) Пусть $\sigma^*(x) = \sup\limits_n |\sigma_n(x)|$, где σ_n — функции из следствия 2.8. Докажите, что $\sigma^* \in \mathscr{L}^1(X, \mu)$.

9) Пусть независимые функции f_n равномерно ограничены и имеют нулевые средние значения. Не опираясь на следствие п. 2.8, а следуя доказательству теоремы 2.6, докажите, что для них справедлив усиленный закон больших чисел.

10) Докажите, что если сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n r_n$ ограничена почти везде на некотором невырожденном промежутке, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$.

11) Пусть $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ — такая ортогональная система в $\mathscr{L}^2(X, \mu)$, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\|f_n\|^2}{n^{3/2}} < +\infty$. Докажите, что $\frac{1}{n}(f_1 + f_2 + \ldots + f_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ почти везде на X, причём функция $\sup\limits_n \frac{1}{n}|f_1 + \ldots + f_n|$ принадлежит $\mathscr{L}^2(X, \mu)$.

12) Проверьте, что условие теоремы 2 п. 2.8 можно ослабить, заменив сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ почти везде ограниченностью его частичных сумм в точках некоторого множества положительной меры.

§ 3. Тригонометрические ряды Фурье

Этот и следующие параграфы посвящены гармоническому анализу. Не стремясь излагать эту важную и обширную тему во всей полноте, мы ограничимся изложением лишь избранных разделов, отбор которых мотивируется прежде всего стремлением продемонстрировать применение методов, развитых ранее.

В § 1 были установлены важные свойства рядов Фурье по произвольным ортогональным системам. Теперь мы более детально рассмотрим свойства рядов Фурье по тригонометрической системе. Это исторически первый пример ортогональной системы, а задача о представимости функции в виде суммы тригонометрического ряда была

одной из центральных проблем математики на протяжении почти двухсот лет. Достаточно сказать, что оживлённая дискуссия в XVIII веке, посвящённая этой задаче, дала важный импульс для формирования современного понятия функции, Риман ввёл свое понятие интеграла в связи с исследованием тригонометрических рядов, а Кантор, изучая единственность разложения в такие ряды, пришёл к созданию теории множеств.

3.1. Напомним, что согласно общему определению 2.1 ряды Фурье функции $f \in \mathscr{L}^2\big((0,2\pi)\big)$ по системам

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \dots\ \cos nx,\ \sin nx,\ \dots \qquad \text{и} \qquad \{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$$

имеют соответственно вид

$$A(f) + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n(f)\,\cos nx + b_n(f)\,\sin nx\big) \tag{1}$$

и

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\, e^{inx}, \tag{1'}$$

где коэффициенты Фурье вычисляются по формулам

$$\begin{gathered} A(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx, \\ a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\cos nx\,dx, \qquad b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\sin nx\,dx \quad (n\in\mathbb{N}); \end{gathered} \tag{2}$$

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,e^{-inx}dx \qquad (n\in\mathbb{Z}). \tag{2'}$$

В отличие от предыдущего параграфа, где рассматривались только функции класса $\mathscr{L}^2$, здесь мы будем иметь дело с произвольными функциями, суммируемыми на $(0,2\pi)$. Очевидно, что при этом подынтегральные функции в формулах (2) и (2′) по-прежнему будут суммируемыми. Поэтому для функций из $\mathscr{L}^1\big((0,2\pi)\big)$ мы сохраним все введённые термины (коэффициент Фурье, ряд Фурье и др.). Теперь нас будет интересовать не сходимость ряда по $\mathscr{L}^2$-норме, а другие виды сходимости, прежде всего поточечная. При этом сумма ряда (1′) всегда понимается как предел симметричных частичных сумм

$$S_n(f,x) = \sum_{|k|\leqslant n} \widehat{f}(k)\,e^{ikx}, \tag{3}$$

которые называют также *суммами Фурье* функции f. Как отмечалось в п. 2.1, частичные суммы рядов (1) и (1′) одинаковы. Таким образом, все результаты, полученные для одного ряда, справедливы и для другого. В дальнейшем мы будем рассматривать в основном ряды (1′), поскольку это приводит к некоторым техническим упрощениям.

В заключение этого пункта затронем один вопрос, который может возникнуть при решении задачи о разложении функции в сумму тригонометрического ряда. До сих пор выбор его коэффициентов определялся геометрическими соображениями, изложенными в § 1, и приводил к формулам (2) и (2′). Не может ли случиться так, что

для иной сходимости (например, поточечной или по мере) коэффициенты тригонометрического ряда следует выбирать иначе? Нетрудно, однако, убедиться, что при минимальных дополнительных предположениях свободы в выборе коэффициентов по существу нет и в этом случае. В самом деле, если, например, некоторый тригонометрический ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{ikx}$ сходится к функции f почти везде или по мере, а у его частичных сумм $S_n(x) = \sum\limits_{|k|\leqslant n} c_k\, e^{ikx}$ имеется суммируемая мажоранта, т. е. такая функция $g \in \mathscr{L}^1\big((0,2\pi)\big)$, что $|S_n(x)| \leqslant g(x)$ для всех $x \in (0,2\pi)$ и $n \in \mathbb{N}$, то коэффициенты ряда совпадают с коэффициентами Фурье функции f: $c_k \equiv \widehat{f}(k)$. Действительно, по теореме Лебега интеграл $\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx$ есть предел (при $n \to \infty$) интегралов $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} S_n(x)\, e^{-ikx}\, dx$, каждый из которых при $n \geqslant |k|$ равен c_k.

3.2. Вместо функций, определённых лишь на промежутке $(0,2\pi)$, нам будет удобнее иметь дело с 2π-периодическими функциями. Поскольку всякую функцию, определённую на $(0,2\pi)$, можно продолжить до периодической, мы в дальнейшем будем считать все рассматриваемые функции периодическими (всюду далее периодичность означает 2π-периодичность). Такие функции суммируемы на любом конечном промежутке. Мы неоднократно будем пользоваться независимостью интеграла $\int_a^{a+2\pi} f(x)\, dx$ от параметра a, которую читатель легко установит самостоятельно. Часто, особенно имея дело с чётными или нечётными функциями, в формулах (2) и (2′) удобнее интегрировать по промежутку $(-\pi,\pi)$.

Символами $\widetilde{C}$ и $\widetilde{C}^r$ $(1 \leqslant r \leqslant +\infty)$ обозначим классы периодических функций непрерывных и, соответственно, r раз непрерывно дифференцируемых на $\mathbb{R}$; $\widetilde{\mathscr{L}}^p$ — класс периодических функций, суммируемых на $(-\pi,\pi)$ со степенью $p \geqslant 1$. Для функции $f \in \widetilde{\mathscr{L}}^p$ под $\|f\|_p$ понимается $\mathscr{L}^p$-норма её сужения на $(-\pi,\pi)$.

Отметим простейшие свойства коэффициентов Фурье.

а) $|\widehat{f}(n)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\|f\|_1$ (см. формулу (2′)).

б) $\widehat{f}(n) \underset{|n|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ (см. теорему Римана–Лебега).

Этот качественный результат можно дополнить оценкой, связанной с непрерывностью в среднем — см. упр. 1.

Важную роль играют свойства коэффициентов Фурье, связывающие их со сдвигом, дифференцированием и свёрткой. Напомним, что сдвиг f_h функции $f \in \widetilde{\mathscr{L}}^1$, соответствующий числу h, определяется равенством $f_h(x) = f(x-h)$. Сделав в интеграле $\int_0^{2\pi} f(x-h)e^{-inx}\, dx$ замену $x-h \to x$, мы приходим к формуле

в) $\widehat{f_h}(n) = e^{-inh}\widehat{f}(n)$.

г) Если периодическая функция f абсолютно непрерывна на $\mathbb{R}$ (в частности, если она кусочно-дифференцируема), то

$$\widehat{f'}(n) = in\widehat{f}(n) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

(для доказательства достаточно проинтегрировать по частям). В частности, $\widehat{f}(n) = o(\frac{1}{n})$. Отметим ослабленный вариант этой оценки, относящийся к функциям ограниченной вариации.

г′) Если функция f имеет конечную вариацию на промежутке $[0, 2\pi]$, то $\widehat{f}(n) = O(\frac{1}{n})$. В самом деле, проинтегрировав по частям (см. п. IV.11.4), мы получим

$$2\pi \widehat{f}(n) = \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-inx}\, dx = f(x) \frac{e^{-inx}}{-in}\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{in} \int_0^{2\pi} e^{-inx}\, df(x) = O\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

д) Пусть f, $g \in \widetilde{\mathscr{L}}^1$. Тогда

$$\widehat{f * g}(n) = 2\pi \widehat{f}(n) \cdot \widehat{g}(n) \quad \text{при любых} \quad n \in \mathbb{Z}$$

(определение свёртки периодических функций см. в п. VII.5.5). Проверка производится прямым вычислением с помощью изменения порядка интегрирования:

$$\begin{aligned}\widehat{f * g}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f * g)(x)\, e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\, g(t)\, dt \Big) e^{-inx}\, dx = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\, e^{-int} \Big(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\, e^{-in(x-t)} dx \Big) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\, e^{-int} \Big(\int_{-\pi}^{\pi} f(u)\, e^{-inu} du \Big) dt = 2\pi\, \widehat{g}(n) \cdot \widehat{f}(n).\end{aligned}$$

3.3. Задача о разложении функции в ряд Фурье достаточно сложна и имеет долгую историю. В знаменитой работе Фурье “Аналитическая теория теплоты”, в которой впервые систематически изучались и использовались ряды, вскоре ставшие носить его имя, не было чётко сформулированного условия, гарантирующего разложимость функции в ряд Фурье. Такие признаки появились лишь впоследствии. Ещё позже выяснилось, что даже у непрерывной функции ряд Фурье может расходиться в некоторых точках, а у суммируемой функции, как показал Колмогоров, он может расходиться везде. Пока, даже зная, что ряд Фурье дифференцируемой функции сходится в какой-то точке, мы не можем быть уверенными в совпадении его суммы со значением функции.

В настоящий момент нам известно (см. п. 2.1), что для функций, суммируемых с квадратом, ряд (1′) сходится по $\mathscr{L}^2$-норме и его сумма равна f. В случае, когда функция f предполагается всего лишь суммируемой, вопрос о сходимости ряда Фурье (поточечной, по некоторой $\mathscr{L}^p$-норме или в каком-то ином смысле) для нас пока остаётся открытым.

Исследование сходимости ряда Фурье начнём с вывода важной формулы для его частичных сумм, найденной Дирихле. Опираясь на формулу (2′), преобразуем равенство (3):

$$S_n(f, x) = \sum_{|k| \leqslant n} \Big(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, dt \Big) e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{|k| \leqslant n} e^{ik(x-t)}\, dt.$$

Функция

$$D_n(u) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \leqslant n} e^{iku} = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \cos ku \tag{4}$$

называется n-м *ядром Дирихле*. Очевидно, оно чётно и периодично. Просуммировав геометрическую прогрессию $\sum\limits_{|k|\leqslant n} e^{iku}$, получим:

$$D_n(u) = \frac{\sin\bigl(n+\frac{1}{2}\bigr)u}{2\pi\sin\frac{u}{2}} \quad \text{при} \quad u \notin 2\pi\mathbb{Z}. \tag{4'}$$

Отсюда видно, что при больших n функция D_n сильно колеблется и в окрестности нуля поочерёдно принимает экстремальные значения противоположных знаков, по абсолютной величине сравнимые с $\max D_n = D_n(0) = \frac{1}{\pi}\bigl(n+\frac{1}{2}\bigr)$ (см. рис. 19).

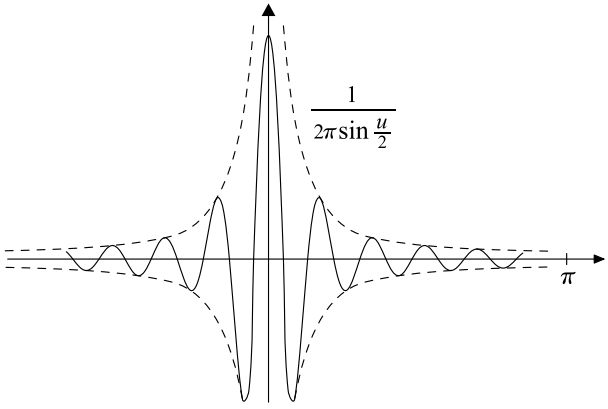


Рис. 19.

Непосредственно из определения вытекает, что сумма Фурье есть свёртка функции с ядром Дирихле:

$$S_n(f,x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)D_n(x-t)\,dt = (f * D_n)(x).$$

Пользуясь периодичностью подынтегральных функций, это равенство можно записать и так:

$$S_n(f,x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)D_n(u)\,du. \tag{5}$$

С аналогичными формулами мы встречались, рассматривая периодические аппроксимативные единицы (п. VII.6.5). Ядра Дирихле удовлетворяют условиям б) и в) определения периодической аппроксимативной единицы: из равенства (4) сразу следует, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u)\,du = 1.$$

Кроме того, при любом $\delta \in (0,\pi)$

$$\int_{\delta<|u|<\pi} D_n(u)\,du = \int_{\delta<|u|<\pi} \frac{\sin\bigl(n+\frac{1}{2}\bigr)u}{2\pi\sin\frac{u}{2}}\,du \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(предельный переход можно обосновать, проинтегрировав по частям или сославшись на теорему Римана–Лебега).

Однако у D_n отсутствует важнейшее свойство, которым должна обладать аппроксимативная единица, — положительность. Ядра Дирихле не только не положительны, но и не удовлетворяют периодическому аналогу условия а′) п. VII.6.1, т. е. имеют неограниченные $\mathscr{L}^1$-нормы. Действительно,

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(u)|\,du = \int_0^{\pi} \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})u|}{\pi \sin\frac{u}{2}}\,du \geqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})u|}{u}\,du =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi(n+\frac{1}{2})} \frac{|\sin v|}{v}\,dv \geqslant \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin v|}{k\pi}\,dv = \frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

Так как $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \geqslant \int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \ln n$, то $\|D_n\|_1 \geqslant \frac{4}{\pi^2}\ln n$ (см. также упр. 11).

Таким образом, общие теоремы, связанные с использованием аппроксимативных единиц, не могут быть применены, и это обуславливает значительные трудности, с которыми мы сталкиваемся при исследовании сходимости рядов Фурье. Эти трудности имеют не технический, а принципиальный характер — как мы убедимся позже, доказательства теорем 2 и 3 п. IX.3.7 не переносятся на свёртки с ядрами Дирихле.

Вместе с тем во многих задачах оказывается существенным тот факт, что нормы $\|D_n\|_1$ растут довольно медленно. Действительно, полученная для них оценка снизу точна по порядку:

$$\|D_n\|_1 = \int_0^{\pi} \frac{|\sin\bigl(n+\frac{1}{2}\bigr)u|}{\pi\sin\frac{u}{2}}\,du \leqslant \int_0^{\pi} \frac{|\sin\bigl(n+\frac{1}{2}\bigr)u|}{u}\,du = \int_0^{\pi(n+\frac{1}{2})} \frac{|\sin v|}{v}\,dv.$$

Следовательно, $\|D_n\|_1 \leqslant 1 + \int_1^{\pi(n+\frac{1}{2})}\frac{dv}{v}$, и поэтому $\|D_n\|_1 \leqslant 2\ln n$ при $n \geqslant 10$. Так как $S_n(f) = f * D_n$, то для ограниченной функции отсюда вытекает оценка её сумм Фурье ($n \geqslant 10$)

$$\|S_n(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \|D_n\|_1 \leqslant 2\|f\|_\infty \ln n. \tag{6}$$

Частичные суммы ряда Фурье вычисляются с помощью формулы (5) и, таким образом, зависят от значений функции, принимаемых на промежутке длины 2π. Тем удивительнее, что, как мы сейчас убедимся, сходимость ряда Фурье в точке x и величина его суммы суть локальные свойства функции — они сохраняются при произвольном изменении функции вне сколь угодно малой окрестности этой точки. Более формально говоря, справедлива следующая

Теорема (принцип локализации Римана). *Если в некоторой окрестности точки x функции $f_1, f_2 \in \widetilde{\mathscr{L}}^1$ совпадают, то их ряды Фурье в этой точке ведут себя одинаково: $S_n(f_1,x) - S_n(f_2,x) \to 0$ при $n \to \infty$.*

Доказательство. Из условия немедленно следует, что функция $\varphi_x(u) = \frac{f_1(x-u)-f_2(x-u)}{\sin\frac{u}{2}}$ (равная нулю в окрестности точки $u=0$) суммируема на $(-\pi,\pi)$. Так как в силу равенства (5)

$$S_n(f_1,x) - S_n(f_2,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_x(u)\sin\Bigl(n+\frac{1}{2}\Bigr)u\,du,$$

то нам остаётся сослаться на теорему Римана–Лебега, согласно которой интеграл в правой части этого равенства бесконечно мал. ►

3.4. Из большого числа различных признаков сходимости рядов Фурье мы приведём лишь два наиболее употребительных — признак Дини*) и признак Дирихле–Жордана**). Они дополняют друг друга и применимы в весьма широком классе случаев.

Предварительно установим полезное свойство ядра Дирихле.

Лемма. *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Тогда*

а) $$D_n(u) = \frac{\sin nu}{\pi u} + \frac{1}{2\pi}(\cos nu + \Delta(u)\sin nu),$$

где Δ — не зависящая от n функция, причём $|\Delta(u)| < 1$ при $|u| \leqslant \pi$;

б) $$\left|\int_0^x D_n(u)\,du\right| \leqslant 2 \text{ при } |x| \leqslant 2\pi.$$

Доказательство. а) Ясно, что

$$D_n(u) = \frac{\sin nu}{2\pi \operatorname{tg}\frac{u}{2}} + \frac{1}{2\pi}\cos nu = \frac{\sin nu}{\pi u} + \frac{1}{2\pi}\left(\cos nu + \left(\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{u}{2}} - \frac{2}{u}\right)\sin nu\right).$$

Осталось заметить, что разность $\Delta(u) = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{u}{2}} - \frac{2}{u}$ $(\Delta(0) = 0)$ убывает на $[-\pi, \pi]$, и поэтому $|\Delta(u)| \leqslant |\Delta(\pi)| = \frac{2}{\pi} < 1$.

б) Достаточно рассмотреть лишь случай $x \in (0, 2\pi)$. Пусть сначала $x \in (0, \pi]$. Тогда, как следует из уже доказанного утверждения а), справедливо неравенство

$$\left|\int_0^x D_n(u)\,du - \int_0^x \frac{\sin nu}{\pi u}du\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^x 2\,du \leqslant 1.$$

Докажем теперь, что интеграл

$$J_n(x) = \int_0^x \frac{\sin nu}{\pi u}\,du = \int_0^{nx} \frac{\sin v}{\pi v}\,dv,$$

заключён между 0 и 1. Чтобы убедиться в этом, разобьём промежуток интегрирования $[0, nx]$ на части, на которых $\sin v$ сохраняет знак. Тогда интеграл $J_n(x)$ распадётся на сумму знакочередующихся слагаемых, абсолютные величины которых убывают ввиду убывания $\frac{1}{v}$. Поэтому

$$0 \leqslant J_n(x) \leqslant \int_0^\pi \frac{\sin v}{\pi v}\,dv \leqslant \int_0^\pi \frac{dv}{\pi} = 1.$$

Таким образом, в случае $0 < x \leqslant \pi$ интеграл $\int_0^x D_n(u)\,du$ лежит между -1 и 2.

Для $x \in (\pi, 2\pi)$ воспользуемся легко проверяемым равенством

$$\int_0^x D_n(u)\,du = 1 - \int_0^{2\pi - x} D_n(u)\,du,$$

из которого следует, что и в этом случае $-1 \leqslant \int_0^x D_n(u)\,du \leqslant 2$. ►

*) Улисс **Дини** (Dini), 1845–1918, — итальянский математик.

) Мари Энмон Камиль **Жордан (Jordan), 1838–1922, — французский математик.

Используя первое утверждение леммы, мы можем записать теперь равенство (5) в таком виде:

$$S_n(f,x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\frac{\sin nu}{\pi u}\,du + \varepsilon_n, \tag{5'}$$

где величина $\varepsilon_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)(\cos nu + \Delta(u)\sin nu)\,du$ бесконечно мала по теореме Римана–Лебега.

В частности, если $f \equiv 1$, то

$$1 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin nu}{\pi u}\,du + o(1). \tag{5''}$$

Сделав замену $nu = t$ и перейдя к пределу при $n \to \infty$, мы ещё раз придём к равенству $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$, установленному другим способом в п. VII.1.6.

Теорема (признак Дини). *Если при некотором $C \in \mathbb{C}$ функция $f \in \widetilde{\mathscr{L}}^1$ удовлетворяет в точке $x \in \mathbb{R}$ условию Дини*

$$\int_0^\pi \left|\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2} - C\right| \frac{du}{u} < +\infty,$$

то её ряд Фурье в этой точке сходится к числу C.

В частности, если функция дифференцируема в этой точке, то условие Дини выполнено с $C = f(x)$, и следовательно, сумма ряда Фурье равна $f(x)$. Если же существуют лишь односторонние пределы $f(x \pm 0)$ и для некоторого $\alpha > 0$

$$|f(x \pm u) - f(x \pm 0)| = O(u^\alpha) \quad \text{при} \quad u \to +0,$$

то ряд Фурье этой функции в точке x сходится к полусумме $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

Доказательство. Из соотношения (5′) следует, что при $n \to \infty$

$$S_n(f,x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\frac{\sin nu}{\pi u}\,du + o(1) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\frac{\sin nu}{\pi u}\,du + o(1).$$

Таким образом,

$$S_n(f,x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x-u)+f(x+u)}{2}\,\frac{\sin nu}{\pi u}\,du + o(1).$$

Вычитая отсюда равенство (5″), умноженное на C, мы видим, что

$$S_n(f,x) - C = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{f(x-u)+f(x+u)}{2} - C\right)\frac{\sin nu}{\pi u}\,du + o(1) =$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi g_x(u)\,\sin nu\,du + o(1),$$

где $g_x(u) = \frac{f(x-u)+f(x+u)-2C}{2u}$. Так как по условию теоремы функция g_x суммируема на $(0,\pi)$, то интеграл в правой части равенства стремится к нулю по теореме Римана–Лебега. ►

Теорема (признак Дирихле–Жордана). *Если периодическая функция f имеет ограниченную вариацию на промежутке $[-\pi,\pi]$, то при любом $x\in\mathbb{R}$ её ряд Фурье сходится к полусумме $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$. При этом* $|S_n(f,x)|\leqslant \sup\limits_{\mathbb{R}}|f|+2\mathbf{V}_{-\pi}^{\pi}(f)$.

Отметим, что в силу принципа локализации сходимость ряда Фурье в точке x сохранится, если предположить, что f имеет ограниченную вариацию лишь локально, в окрестности этой точки.

Доказательство. В силу равенства (5′) надо найти предел интегралов

$$I_n=\int_{-\pi}^{\pi}f(x-u)\frac{\sin nu}{\pi u}\,du=\int_0^{\pi}\varphi(u)\frac{\sin nu}{\pi u}\,du,$$

где $\varphi(u)=f(x-u)+f(x+u)$. Эта функция имеет ограниченную вариацию на $[0,\pi]$ и, следовательно, она представима в виде разности убывающих функций. Поэтому нам достаточно найти предел интегралов I_n в предположении, что функция φ неотрицательна и убывает на $[0,\pi]$. Для этого запишем I_n в виде

$$I_n=\int_0^{\infty}\Phi(u)\frac{\sin nu}{\pi u}\,du=\int_0^{\infty}\Phi\Big(\frac{t}{n}\Big)\frac{\sin t}{\pi t}\,dt,$$

где $\Phi(u)=\varphi(u)\chi_{(0,\pi)}(u)$. По следствию 2 п. VII.4.7 интеграл, стоящий справа, стремится к $\frac{\varphi(+0)}{2}=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.

Чтобы получить равномерную оценку сумм $S_n(f)$, положим $H_n(u)=\int_0^u D_n(t)\,dt$. Тогда

$$S_n(f,x)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x-u)D_n(u)\,du=H_n(u)\,f(x-u)\big|_{u=-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}H_n(u)\,df(x-u).$$

Так как $H_n(\pm\pi)=\pm\frac{1}{2}$, то двойная подстановка равна $\frac{f(x-\pi)+f(x+\pi)}{2}$. Кроме того, $|H_n(u)|\leqslant 2$ согласно лемме и поэтому

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}H_n(u)\,df(x-u)\right|\leqslant 2\mathbf{V}_{x-\pi}^{x+\pi}(f)=2\mathbf{V}_{-\pi}^{\pi}(f),$$

откуда вытекает доказываемая оценка сумм $S_n(f,x)$. ►

В завершение этого пункта приведём альтернативное доказательство признака Дини, не использующее ядер Дирихле (см. [Ch]). Условие Дини означает, что функция

$$g(u)=\Big(\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}-C\Big)\frac{1}{e^{iu}-1}\qquad(u\notin 2\pi\mathbb{Z})$$

принадлежит классу $\widetilde{\mathscr{L}}^1$. Домножив обе части равенства

$$\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}-C=\big(e^{iu}-1\big)g(u)$$

на $\frac{1}{2\pi}\,e^{-iku}$ и проинтегрировав затем по $u \in (-\pi, \pi)$, мы получим

$$\frac{1}{2}\Big(\widehat{f}(k)\,e^{ikx} + \widehat{f}(-k)\,e^{-ikx}\Big) = \widehat{g}(k-1) - \widehat{g}(k), \quad \text{если} \quad k \neq 0,$$
$$\widehat{f}(0) - C = \widehat{g}(-1) - \widehat{g}(0), \qquad \text{если} \quad k = 0.$$

Остаётся сложить все эти равенства при $|k| \leqslant n$:

$$S_n(f,x) - C = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\,e^{ikx} - C = \widehat{g}(-n-1) - \widehat{g}(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \ \blacktriangleright$$

Если же просуммировать их по отдельности при $k = 0, 1, \ldots, n$ и при $k = -1, \ldots, -n$, то становится ясно, что условие Дини влечёт сходимость не только симметричных сумм $\sum\limits_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\,e^{ikx}$, но и "односторонних" сумм $\sum\limits_{k=0}^{n} \widehat{f}(k)\,e^{ikx}$ и $\sum\limits_{k=-n}^{-1} \widehat{f}(k)\,e^{ikx}$. Говоря иными словами, условие Дини гарантирует сходимость каждого из рядов $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \widehat{f}(k)\,e^{ikx}$ и $\sum\limits_{k=-\infty}^{-1} \widehat{f}(k)\,e^{ikx}$ в отдельности. В частности, оно гарантирует сходимость ряда $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} \operatorname{sign}(n)\widehat{f}(n)\,e^{inx}$, называемого сопряжённым к ряду $(1')$.

3.5. Приведём некоторые примеры разложений в ряд Фурье.

Пример 1. Дополним пример 1 п. 2.1: так как периодическая функция, равная x на $(-\pi, \pi)$, дифференцируема во всех точках не равных $(2k+1)\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, то её ряд Фурье сходится не только по $\mathscr{L}^2$-норме, но и поточечно:

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}\,\sin nx \qquad \text{для} \quad x \in (-\pi, \pi).$$

В точках $(2k+1)\pi$ сумма ряда равна нулю, т. е. полусумме односторонних пределов функции. При $x = \frac{\pi}{2}$ разложение в ряд Фурье приводит к равенству

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{2m+1}.$$

Рассматривая в точке π ряд Фурье функции, равной x^2 на $[-\pi, \pi]$, можно ещё раз (см. пример 1 в п. 2.1 или пример 2 в п. IV.6.2) получить равенство Эйлера $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Пример 2. Пусть $w \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$. Рассмотрим периодическую функцию, равную $\cos wx$ на промежутке $[-\pi, \pi]$. Она всюду на $\mathbb{R}$ имеет конечные односторонние производные и поэтому раскладывается в ряд Фурье. После элементарных подсчётов мы получаем, что для $|x| \leqslant \pi$ справедливо равенство

$$\cos wx = \frac{\sin \pi w}{\pi w} + \frac{2}{\pi}\,w\,\sin \pi w \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{w^2 - n^2}\,\cos nx.$$

При $x = \pi$ и $x = 0$ из него вытекают разложения котангенса и косеканса в суммы простейших дробей:

$$\operatorname{ctg} \pi w = \frac{1}{\pi w} + \frac{2w}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{w^2 - n^2} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{w - n};$$

$$\frac{1}{\sin \pi w} = \frac{1}{\pi w} + \frac{2w}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{w^2 - n^2} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{w - n}.$$

Пример 3. Здесь мы убедимся в существовании ненулевого сходящегося числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с необычным свойством: $\sum\limits_{m=1}^{\infty} a_{km} = 0$ для любого номера k. Построение проведём, следуя Ф. Л. Назарову, предложившему использовать для этого ряды Фурье.

Рассмотрим периодические функции, равные нулю в окрестности каждой точки вида πt, $t \in \mathbb{Q}$. Среди них, очевидно, найдётся чётная функция f, удовлетворяющая условиям $\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = 0$ и $0 < \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx < +\infty$. В качестве искомого ряда возьмём $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \widehat{f}(n)$. Это ненулевой ряд, поскольку

$$0 < \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2$$

(мы воспользовались равенством Парсеваля).

В каждой точке $x = 2\pi \frac{j}{k}$ ($j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$) функция f удовлетворяет условию Дини и поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \widehat{f}(n) \cos\Big(2\pi \frac{j}{k} n\Big) = 0.$$

Просуммируем эти равенства при $j = 0, 1, \ldots, k-1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \widehat{f}(n) \sum_{j=0}^{k-1} \cos\Big(2\pi \frac{j}{k} n\Big) = 0.$$

Если номер n делится на k, то внутренняя сумма равна k, а в противном случае, как легко проверить, она равна нулю. Следовательно,

$$k \sum_{m=1}^{\infty} \widehat{f}(km) = 0 \qquad \text{при всех} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Отметим, что построенный ряд не сходится абсолютно. Можно доказать (см. [ПС], отдел первый, задача 129), что в классе абсолютно сходящихся рядов ненулевой ряд с рассматриваемым свойством построить невозможно.

3.6. Как мы уже говорили, ряд Фурье суммируемой и даже непрерывной функции может расходиться (см. также п. 3.9). Однако он обладает замечательным свойством — не заботясь о сходимости, его можно почленно интегрировать по любому конечному промежутку.

Теорема 1. *Пусть $f \in \widetilde{\mathscr{L}}^1$. Тогда для любых $a, b \in \mathbb{R}$ справедливо равенство*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) \int_a^b e^{inx}\,dx$$

(сумма ряда понимается как предел симметричных частичных сумм).

Доказательство. Учитывая периодичность, ограничимся, не умаляя общности, случаем, когда $-\pi \leqslant a < b \leqslant \pi$. Пусть χ — характеристическая функция интервала (a, b). Тогда частичную сумму ряда, стоящего в правой части доказываемого равенства, можно представить в виде:

$$\sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) \int_a^b e^{ikx} dx = \sum_{k=-n}^{n} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-ikt} dt \right) 2\pi \widehat{\chi}(-k) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) S_n(\chi, t)\,dt. \qquad (7)$$

По признаку Дини $S_n(\chi, t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \chi(t)$ для $t \in (-\pi, \pi)$, $t \neq a$, b. Кроме того,

$$S_n(\chi, t) = \int_a^b D_n(x-t)\,dx = \int_{a-t}^{b-t} D_n(u)\,du = \int_0^{b-t} D_n(u)\,du - \int_0^{a-t} D_n(u)\,du.$$

Поэтому лемма 3.4 даёт нам равномерную оценку $|S_n(\chi, t)| \leqslant 4$. По теореме Лебега в правой части равенства (7) можно перейти к пределу:

$$\sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) \int_a^b e^{ikx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, S_n(\chi, t)\,dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\chi(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt. \quad \blacktriangleright$$

Теорема 1 позволяет существенно усилить утверждение о полноте тригонометрической системы, согласно которому две функции класса $\widetilde{\mathscr{L}}^2$, имеющие одинаковые коэффициенты Фурье, совпадают почти везде. Теперь мы можем распространить этот результат на класс $\widetilde{\mathscr{L}}^1$.

Следствие 1. *Функции f, $g \in \widetilde{\mathscr{L}}^1$, имеющие одинаковые коэффициенты Фурье, совпадают почти везде на $\mathbb{R}$.*

Доказательство. Согласно теореме функции f и g имеют совпадающие интегралы на любом конечном промежутке. Поэтому (см. следствие IV.5.4) они совпадают почти везде. ▶

Следствие 2. *Для любой функции $f \in \widetilde{\mathscr{L}}^1$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{b_n(f)}{n}$ сходится.*

Напомним, что $b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\,dx = i\big(\widehat{f}(n) - \widehat{f}(-n)\big)$ — синус-коэффициент Фурье функции f.

Доказательство. Как установлено в теореме, для всех u справедливо равенство

$$\int_0^u f(x)\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) \int_0^u e^{inx}\,dx.$$

Из (7) и оценки $|S_n(\chi,t)| \leqslant 4$ следует, что симметричные частичные суммы этого ряда равномерно ограничены при $u \in [-\pi,\pi]$. Поэтому его можно почленно интегрировать:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\int_0^u f(x)\,dx\Big)du = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(n)\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\int_0^u e^{inx}\,dx\Big)du = -2\pi\sum_{n\neq 0}\frac{\widehat{f}(n)}{in}.$$

Сходимость симметричных частичных сумм ряда $\sum\limits_{n\neq 0}\frac{\widehat{f}(n)}{n}$ равносильна доказываемому утверждению. ►

Следствие 2 даёт условие, необходимое для того, чтобы тригонометрический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$ мог быть рядом Фурье. Всюду сходящийся тригонометрический ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}$ этому условию не удовлетворяет и, следовательно, не является рядом Фурье никакой суммируемой функции. Интересно отметить, что в отличие от синус-коэффициентов косинус-коэффициенты могут стремиться к нулю сколь угодно медленно. Например, ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{\ln n}$ есть ряд Фурье некоторой суммируемой функции (см. теорему 4.2).

На установленное в теореме 1 равенство можно смотреть как на новый вариант формулы Парсеваля, в котором предположение об одной функции ослаблены (она принадлежит $\widetilde{\mathscr{L}}^1$, а не $\widetilde{\mathscr{L}}^2$), а предположение о другой функции сильно ужесточено (это характеристическая функция промежутка). Вместе с тем в доказательстве теоремы свойства функции χ использованы лишь частично. Это позволяет значительно расширить условия применимости формулы Парсеваля.

Теорема 2. *Пусть $f \in \widetilde{\mathscr{L}}^1$, а ограниченная (измеримая и периодическая) функция g такова, что её суммы Фурье $S_n(g,x)$ равномерно ограничены (по x и n). Тогда справедливо равенство Парсеваля:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g}(x)\,dx = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(n)\overline{\widehat{g}(n)}.$$

Класс функций с равномерно ограниченными частичными суммами ряда Фурье достаточно широк. В частности, в него входят гладкие на $[-\pi,\pi]$ функции. Как следует из признака Дирихле–Жордана, он содержит и все функции, имеющие конечную вариацию на $[-\pi,\pi]$ (см. также упр. 9 и 10).

Предположение об ограниченности функции g излишне (см. упр. 8 или теорему Фейера в § 4).

Доказательство. Так как $g \in \widetilde{\mathscr{L}}^2$, то суммы $S_n(g)$ сходятся к g по $\mathscr{L}^2$-норме и тем более по мере. Как легко убедиться, отсюда следует, что

$$f(x)\overline{S_n}(g,x) \to f(x)\overline{g}(x) \quad \text{по мере.}$$

Поэтому на основании теоремы Лебега в левой части равенства

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{S_n}(g,x)\,dx = 2\pi\sum_{|k|\leqslant n}\widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)}$$

можно перейти к пределу, что и требовалось. ►

3.7. Чтобы получить дальнейшее обобщение теоремы единственности для рядов Фурье (см. следствие 1 предыдущего пункта), введём понятие коэффициента и ряда Фурье меры.

Определение. Пусть μ — конечная борелевская мера на промежутке $[-\pi,\pi]$. Её *коэффициенты Фурье* определяются равенствами:

$$\widehat{\mu}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} e^{-inx}\,d\mu(x) \qquad (n\in\mathbb{Z}).$$

Ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{\mu}(n)\,e^{inx}$ называется *рядом Фурье* этой меры.

Если мера μ имеет плотность f относительно меры Лебега, то $\widehat{\mu}(n)=\widehat{f}(n)$ при всех $n\in\mathbb{Z}$ и, следовательно, ряды Фурье меры μ и функции f совпадают. Как и для рядов Фурье функций, непосредственно из определения вытекает, что (симметричная) n-я частичная сумма ряда Фурье меры, которую мы будем обозначать символом $S_n(\mu,x)$, есть свёртка этой меры с ядром Дирихле:

$$S_n(\mu,x)=\int_{[-\pi,\pi]} D_n(x-t)\,d\mu(t)=(D_n*\mu)(x).$$

Распространяя следствие 1 на меры, следует иметь в виду равенство

$$\widehat{\mu}(n)=\frac{(-1)^n}{2\pi}\big(\mu(\{-\pi\})+\mu(\{\pi\})\big)+\frac{1}{2\pi}\int_{(-\pi,\pi)} e^{-inx}\,d\mu(x).$$

Таким образом, коэффициенты Фурье не меняются при перераспределении нагрузок (с сохранением их суммы) в точках $\pm\pi$. Так будет, например, при замене этих нагрузок на $\mu(\{-\pi\})+\mu(\{\pi\})$ (точке $-\pi$) и 0 (в точке π). Поэтому ставить вопрос о том, однозначно ли определяется мера своими коэффициентами Фурье, имеет смысл лишь зафиксировав нагрузку в одной из точек $\pm\pi$. Для определённости мы будем рассматривать только меры, имеющие нулевую нагрузку в точке π.

Теорема. *Пусть μ и ν — конечные борелевские меры на промежутке $[-\pi,\pi]$, удовлетворяющие условию $\mu(\{\pi\})=\nu(\{\pi\})=0$. Если коэффициенты Фурье этих мер совпадают, то совпадают и сами меры.*

Доказательство. Сначала проверим, что ряд Фурье меры, как и ряд Фурье функции, можно интегрировать почленно, то есть, что при $[a,b)\subset[-\pi,\pi)$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{\mu}(n)\int_a^b e^{inx}\,dx=\mu\big([a,b)\big), \tag{8}$$

если $\mu(\{a\})=\mu(\{b\})=0$. В самом деле, пусть $\chi=\chi_{[a,b)}$. Тогда

$$\sum_{|k|\leqslant n}\widehat{\mu}(k)\int_a^b e^{ikx}\,dx=\sum_{|k|\leqslant n}\widehat{\chi}(-k)\int_{[-\pi,\pi]} e^{-ikx}d\mu(x)=\int_{[-\pi,\pi]} S_n(\chi,x)\,d\mu(x). \tag{9}$$

Как установлено при доказательстве теоремы 1 п. 3.6, $|S_n(\chi,t)| \leqslant 4$. Кроме того, $S_n(\chi,t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \chi(t)$ при $t \neq a$, b и, следовательно, μ-почти везде. Поэтому в правой части равенства (9) можно перейти к пределу на основании теоремы Лебега, что приводит к равенству (8). Таким образом, если меры μ и ν имеют одинаковые коэффициенты Фурье, то $\mu\big([a,b)\big) = \nu\big([a,b)\big)$ для любого промежутка $[a,b) \subset [-\pi,\pi)$, удовлетворяющего условию $\mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = \nu(\{a\}) = \nu(\{b\}) = 0$. Так как множество точек с ненулевой мерой не более чем счётно (см. п. I.2.2), то это условие выполнено на плотном в $(-\pi,\pi)$ множестве. Отсюда вытекает (см. замечание I.1.7), что меры совпадают на всех борелевских подмножествах интервала $(-\pi,\pi)$. Вместе с тем по условию $\mu(\{\pi\}) = \nu(\{\pi\}) = 0$ и $\mu\big([-\pi,\pi]\big) = \widehat{\mu}(0) = \widehat{\nu}(0) = \nu\big([-\pi,\pi]\big)$. Следовательно, меры μ и ν имеют одинаковые нагрузки в точке $-\pi$, что завершает доказательство теоремы. ►

Обобщения доказанной теоремы приведены в пп. 4.7, XI.1.9 и XII.3.3.

3.8. Рассматривая далее ряды Фурье, коэффициенты которых достаточно быстро стремятся к нулю, следует иметь в виду, что если ряд Фурье функции f равномерно сходится, то его сумма в силу теоремы единственности совпадает с f почти везде. Поэтому если непрерывная функция имеет равномерно сходящийся ряд Фурье, то она является его суммой. Учитывая это обстоятельство, мы в теоремах этого пункта рассматриваем лишь непрерывные функции. При отказе от этого предположения совпадение функции с суммой её ряда Фурье следует заменить на эквивалентность.

Коэффициенты Фурье гладких периодических функций стремятся к нулю достаточно быстро. Например, если функция удовлетворяет условию Липшица с показателем α, то $\widehat{f}(n) = O\big(|n|^{-\alpha}\big)$. В самом деле, при $h = \frac{\pi}{n}$ из свойства в) п. 3.2 вытекает, что $\widehat{f_{\frac{\pi}{n}}}(n) = -\widehat{f}(n)$. Следовательно, $2\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\big(f(x) - f(x-\frac{\pi}{n})\big)\,e^{-inx}\,dx$, и поэтому

$$2|\widehat{f}(n)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big|f(x) - f\Big(x - \frac{\pi}{n}\Big)\Big|\,dx \leqslant L\,\Big|\frac{\pi}{n}\Big|^{\alpha},$$

где L — константа Липшица для f.

Повторное применение равенства $\widehat{f'}(n) = i\,n\widehat{f}(n)$ (см. свойство г) п. 3.2) показывает, что коэффициенты функции f класса $\widetilde{C}^r$ удовлетворяют соотношению $\widehat{f}(n) = o(|n|^{-r})$ при $|n| \to +\infty$. Это утверждение "почти обратимо": если $\widehat{f}(n) = O\big(|n|^{-r-2}\big)$ для некоторого $r \in \mathbb{N}$, то непрерывная функция f совпадает с функцией класса $\widetilde{C}^r$. Действительно, ряд $\sum\limits_n \widehat{f}(n)\,e^{inx}$ равномерно сходится и согласно сделанному выше замечанию его сумма совпадает с f. Кроме того, благодаря быстрому убыванию коэффициентов ряд Фурье допускает r-кратное почленное дифференцирование, из чего следует, что $f \in \widetilde{C}^r$. Для бесконечно гладких функций мы получаем отсюда исчерпывающее описание.

Теорема 1. *Для того чтобы функция $f \in \widetilde{C}$ была бесконечно дифференцируемой, необходимо и достаточно, чтобы для любого $r \in \mathbb{N}$ выполнялось предельное соотношение $n^r\widehat{f}(n) \to 0$ при $|n| \to +\infty$.*

Более узкий класс голоморфных периодических функций тоже хорошо описывается в терминах коэффициентов Фурье — они должны стремиться к нулю не медленнее геометрической прогрессии. Отметим, что для периодической функции аналитичность

во всех точках прямой $\mathbb{R}$ равносильна тому, что она совпадает на $\mathbb{R}$ с функцией, голоморфной в некоторой горизонтальной полосе $\{z \in \mathbb{C} \mid |\mathcal{I}m\, z| < L\}$. При доказательстве следующей теоремы мы пользуемся некоторыми основными свойствами голоморфных функций (см., например, [K]).

Теорема 2. *Пусть $f \in \widetilde{C}$. Следующие два утверждения равносильны:*

а) *существует голоморфная в полосе $|\mathcal{I}m\, z| < L$ функция F, совпадающая с f на вещественной оси;*

б) *для любого числа $a \in (0, L)$ выполняется соотношение $\widehat{f}(n) = O\big(e^{-a|n|}\big)$ при $|n| \to +\infty$.*

Доказательство. а) $\Rightarrow$ б). Считая $n > 0$, рассмотрим интеграл $\int_C F(z) e^{-inz} dz$, где C — граница лежащего в полосе $|\mathcal{I}m\, z| < L$ прямоугольника P с вершинами в точках $\pm\pi$, $\pm\pi - ai$. Поскольку функция F голоморфна в окрестности P, этот интеграл равен нулю. Кроме того, F имеет период 2π и поэтому сумма интегралов по вертикальным сторонам P равна нулю. Следовательно,

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi - ai}^{\pi - ai} F(z)\, e^{-inz} dz.$$

Поэтому

$$|\widehat{f}(n)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \max_{x \in \mathbb{R}} |F(x - ai)| \left|e^{-in(x - ai)}\right| = \frac{1}{2\pi} e^{-an} \max_{x \in \mathbb{R}} |F(x - ai)| = C_a\, e^{-an}.$$

Коэффициенты Фурье с отрицательными номерами оцениваются точно так же, лишь прямоугольник заменяется на симметричный относительно вещественной оси.

б) $\Rightarrow$ а). Ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\, e^{inz}$ равномерно сходится в полосе $|\mathcal{I}m\, z| \leqslant a$, если $0 < a < L$. По теореме Вейерштрасса его сумма голоморфна в полосе $|\mathcal{I}m\, z| < L$, а на вещественной оси она совпадает с функцией f. ►

3.9. Как мы уже отмечали, ряд Фурье непрерывной периодической функции может расходиться (сопоставьте это с результатом упр. 5). Известно несколько таких примеров. Мы изложим с незначительными изменениями пример, предложенный Шварцем. Определим чётную функцию $f \in \widetilde{C}$, у которой частота колебаний быстро возрастает при приближении к нулю. Точнее, будем считать, что

$$f(0) = 0 \quad \text{и} \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{k}} \sin n_k t \quad \text{для} \quad t \in [t_k, t_{k-1}], \quad k = 2, 3, \ldots,$$

где $n_k = 2^{k!}$, $t_1 = \pi$, $t_k = \frac{2\pi}{n_k}$ при $k > 1$ (см. рис. 20).

Докажем, что суммы $S_n(f, 0)$ стремятся к бесконечности вдоль номеров n_k. Так как в силу (5′)

$$S_n(f, 0) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin nt}{t}\, f(t)\, dt + o(1),$$

то нам достаточно проверить, что интегралы

$$I_k = \int_0^{\pi} \frac{\sin n_k t}{t}\, f(t)\, dt = \int_0^{t_k} \ldots + \int_{t_k}^{t_{k-1}} \ldots + \int_{t_{k-1}}^{\pi} \ldots = F_k + J_k + H_k$$

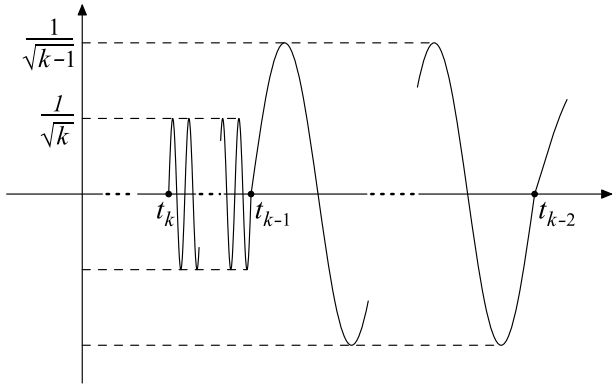


Рис. 20.

стремятся к бесконечности. Убедимся в том, что основной вклад даёт интеграл J_k. Действительно, поскольку $|\sin n_k t| \leqslant n_k t$ и $|f(t)| < \frac{1}{\sqrt{k}}$ на $(0, t_k)$, мы имеем

$$|F_k| = \Big|\int_0^{t_k} \dots \Big| \leqslant \frac{n_k}{\sqrt{k}}\, t_k = \frac{2\pi}{\sqrt{k}} \to 0.$$

Так как подынтегральная функция по абсолютной величине не больше $\frac{1}{t}$, то

$$|H_k| \leqslant \int_{t_{k-1}}^{\pi} \frac{1}{t}\, dt = \ln \frac{\pi}{t_{k-1}} = \ln \frac{n_{k-1}}{2} < (k-1)! \ln 2.$$

Теперь подсчитаем интеграл по среднему промежутку:

$$J_k = \int_{t_k}^{t_{k-1}} \frac{\sin n_k t}{t}\, f(t)\, dt = \frac{1}{\sqrt{k}} \int_{t_k}^{t_{k-1}} \frac{\sin^2 n_k t}{t}\, dt = \frac{1}{\sqrt{k}} \int_{2\pi}^{A_k} \frac{\sin^2 u}{u}\, du,$$

где $A_k = n_k t_{k-1} = \frac{2\pi n_k}{n_{k-1}}$. Следовательно, для достаточно больших номеров k

$$J_k = \frac{1}{2\sqrt{k}} \int_{2\pi}^{A_k} \frac{1 - \cos 2u}{u}\, du = \frac{\ln A_k + O(1)}{2\sqrt{k}} > \frac{k! \ln 2}{3\sqrt{k}}.$$

Итак,

$$I_k = F_k + J_k + H_k \geqslant \frac{k! \ln 2}{3\sqrt{k}} - (k-1)! \ln 2 + o(1) \to +\infty$$

и поэтому $S_{n_k}(f, 0) = \frac{2}{\pi}\, I_k + o(1) \to +\infty$.

В построенном примере нам удалось указать подпоследовательность $\{S_{n_k}(f, 0)\}$, стремящуюся к $+\infty$. Построить непрерывную функцию, у которой $S_n(f, 0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, невозможно, как мы убедимся в п. 4.1. Отметим ещё, что в рассмотренном нами примере оценка (6) сумм Фурье почти достигается (по порядку) на последовательности номеров $\{n_k\}$ (см. также упр. 13).

Несколько усложнив построение, можно привести пример непрерывной функции, ряд Фурье которой расходится на счётном множестве. Должен ли он обязательно сходиться почти везде? Более полувека оставалась открытой эта знаменитая проблема, пока в 1966 году Карлесон*) получил положительный ответ — оказывается, ряд Фурье не только непрерывной, но и любой функции из класса $\widetilde{\mathscr{L}}^2$ сходится к ней почти везде (см. [Ca]). За прошедшее время появилось несколько модификаций и усилений первоначального доказательства, но все они остаются весьма трудными и далеко выходят за рамки этой книги.

3.10. Используя теорему Римана–Лебега, можно получить важный результат, относящийся к произвольным тригонометрическим рядам, т. е. рядам вида

$$A + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (A,\ a_n,\ b_n \in \mathbb{C}). \tag{10}$$

Как мы знаем (см. п. 3.6), даже всюду сходящийся тригонометрический ряд может не быть рядом Фурье. Вместе с тем справедлива следующая

Теорема (Лузин–Данжуа**)). *Если ряд (10) абсолютно сходится на множестве положительной меры, то*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n| + |b_n|) < +\infty. \tag{11}$$

В частности, абсолютная сходимость тригонометрического ряда на множестве положительной меры влечёт его равномерную сходимость на $\mathbb{R}$ и поэтому он является рядом Фурье своей суммы.

Доказательство. Не умаляя общности будем считать, что коэффициенты a_n, b_n вещественны. Положим $\varphi_n(x) = |a_n \cos nx + b_n \sin nx|$. Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n$ сходится на множестве положительной меры, то на некотором меньшем множестве X положительной меры его сумма ограничена:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x) \leqslant C \quad \text{для всех} \quad x \in X.$$

Следовательно (далее λ — одномерная мера Лебега),

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X \varphi_n(x)\, dx \leqslant C\lambda(X).$$

Представим функции φ_n в виде $\varphi_n(x) = c_n|\sin(nx + \theta_n)|$, где $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ и $\theta_n \in \mathbb{R}$. Пользуясь очевидным неравенством $|\sin t| \geqslant \sin^2 t$ и теоремой Римана–Лебега, мы видим, что

$$\int_X \frac{1}{c_n}\varphi_n(x)\, dx \geqslant \int_X \sin^2(nx + \theta_n)\, dx = \int_X \frac{1 - \cos 2(nx + \theta_n)}{2}\, dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\lambda(X)}{2}.$$

*) Леннарт Аксель Эдвард **Карлесон** (Carleson), род. 1928, — шведский математик.

) Арно **Данжуа (Denjoy), 1884–1974, — французский математик.

Поэтому для некоторого N

$$0 < \frac{\lambda(X)}{3} \leqslant \int_X \frac{1}{c_n}\varphi_n(x)\,dx \quad \text{при} \quad n \geqslant N$$

и, следовательно,

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{\lambda(X)}{3} c_n \leqslant \sum_{n=N}^{\infty} \int_X \varphi_n(x)\,dx \leqslant C\lambda(X).$$

Итак, для остатка ряда (11) справедлива оценка:

$$\sum_{n=N}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) \leqslant 2\sum_{n=N}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = 2\sum_{n=N}^{\infty} c_n \leqslant 6C. \quad \blacktriangleright$$

УПРАЖНЕНИЯ

1) Пусть $f \in \widetilde{\mathscr{L}}^1(\mathbb{R}^m)$. С помощью приёма, использованного для второго доказательства теоремы Римана–Лебега, докажите, что $|\widehat{f}(n)| \leqslant \frac{1}{2}\|f - f_\tau\|_1$, где f_τ — сдвиг функции f на вектор $\tau = \frac{\pi n}{\|n\|^2}$.

2) Докажите, что суммы Фурье функции $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k}\cos kx$ равномерно аппроксимируют её почти наилучшим образом: $\|f - S_n(f)\|_\infty \leqslant 3\|f - T\|_\infty$ для любого тригонометрического многочлена T порядка n.

3) Покажите на примере, что абсолютно непрерывная функция может не удовлетворять условию Дини.

4) Убедитесь на примерах, что ни один из признаков Дини и Дирихле–Жордана не следует из другого.

5) Докажите (см. [XP], § 6.7), что

$$\frac{1}{2}\Big(S_n\Big(f, x + \frac{\pi}{2n}\Big) + S_n\Big(f, x - \frac{\pi}{2n}\Big)\Big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x),$$

если функция f из $\widetilde{\mathscr{L}}^1$ непрерывна в точке x. Указание. Проверьте, что функции $\frac{1}{2}\big(D_n\big(x + \frac{\pi}{2n}\big) + D_n\big(x - \frac{\pi}{2n}\big)\big)$ образуют периодическую аппроксимативную единицу.

6) Проверьте, что функция $f \in \widetilde{\mathscr{L}}^1$ принадлежит классу $\widetilde{\mathscr{L}}^2$ тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2$.

7) Докажите, что функция $f \in \widetilde{C}$ является сужением на $\mathbb{R}$ целой функции тогда и только тогда, когда $\sqrt[n]{\big|\widehat{f}(\pm n)\big|} \to 0$ при $n \to \infty$.

8) Докажите, что если последовательность частичных сумм ряда Фурье равномерно ограничена, то функция принадлежит $\widetilde{\mathscr{L}}^\infty$.

9) Пусть ограниченная функция h удовлетворяет условию Дини равномерно:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{h(u) - h(x)}{u - x}\right| du \leqslant \text{const} \quad \text{для всех} \quad x.$$

Докажите, что суммы Фурье $S_n(hg, x)$ произведения hg равномерно ограничены (по n и x), если этим свойством обладает функция g.

10) Пусть функция f (возможно, разрывная) такова, что промежуток $[-\pi,\pi]$ можно разбить на конечное число промежутков, внутри каждого из которых f удовлетворяет условию Липшица порядка $\alpha>0$. Докажите, что суммы Фурье $S_n(f,x)$ равномерно ограничены по x и n.

11) Докажите, что $\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(u)|\,du=\frac{4}{\pi^2}\ln n+O(1)$.

12) Дополните неравенство (6), доказав, что $\|f-S_n(f)\|_\infty=o(\ln n)$ при $n\to\infty$, если $f\in\widetilde{C}$. Убедитесь, что для ограниченных функций такое уточнение, вообще говоря, не верно. Указание. Измените пример Шварца, положив $f(t)=\sin n_k t$ на промежутке $[t_k,t_{k-1}]$.

13) Модифицируя пример Шварца, убедитесь в точности результата предыдущего упражнения: для любой последовательности $\varepsilon_n\downarrow 0$ существует такая функция $f\in\widetilde{C}$, что $S_n(f,0)\geqslant\varepsilon_n\ln n$ вдоль некоторой последовательности номеров $n_k\to\infty$.

14) Покажите, что из сходимости всюду ряда Фурье функции $f\in\widetilde{C}$ не вытекает сходимость ряда Фурье функции f^2. Указание. Изменив пример Шварца, постройте неотрицательную чётную функцию $F\in\widetilde{C}$, $F(0)=F(\pm\pi)=0$, с расходящимся в нуле рядом Фурье и рассмотрите нечётную функцию f, равную $\sqrt{F}$ на $[0,\pi]$.

15) Докажите, что $a_n,\,b_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$, если суммы $a_n\cos nx+b_n\sin nx$ сходятся к нулю на множестве положительной меры.

16) Укажите такое множество $E\subset(0,2\pi)$ мощности континуума и такую последовательность $n_k\to+\infty$, что $\sin n_k x\rightrightarrows 0$ на множестве E.

17) Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(n!\pi x)$.

а) Докажите, что он сходится в точках $x=\sin 1$, $x=\cos 1$, $x=\frac{2}{e}$ и их кратных, а в точках ke ($k\in\mathbb{N}$) сходится лишь при нечётном k. Будет ли сходимость абсолютной?

б) Докажите, что этот ряд расходится в точках $x=\operatorname{sh}1$ и $x=\frac{1}{2}\operatorname{ch}1$.

в) Укажите множество мощности континуума, во всех точках которого ряд абсолютно сходится.

18) Докажите, что $\frac{1}{n}S_n'(f,x)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{\pi}(f(x+0)-f(x-0))$, если периодическая функция f имеет ограниченную вариацию на промежутке $[-\pi,\pi]$.

§ 4. Тригонометрические ряды Фурье (продолжение)

4.1. Поскольку ряд Фурье может расходиться даже в точках непрерывности, возникает мысль получить какую-то информацию о его поведении, рассматривая не классическое, а иное, более слабое определение сходимости. Один из вариантов такого подхода — исследовать сходимость не частичных сумм ряда, а их средних арифметических. Пределом последовательности $\{a_n\}$ в смысле средних арифметических или по Чезаро*) называется предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_0+\ldots+a_{n-1})$. Он может существовать и в том случае, когда сама последовательность расходится, например, если $a_n=(-1)^n$. Вместе с тем, если $a_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}a$, то и $\frac{1}{n}(a_0+\ldots+a_{n-1})\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}a$ (перманентность метода средних арифметических). Для числовых рядов такой подход приводит к понятию обобщённой суммы ряда: говорят, что ряд сходится по Чезаро к некоторому числу, если оно равно пределу по Чезаро последовательности частичных сумм этого ряда.

*) Эрнесто **Чезаро** (Cesaro), 1859–1906, — итальянский математик.

Исходя из этих соображений, положим

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{n}\big(S_0(f,x) + \ldots + S_{n-1}(f,x)\big).$$

Суммы σ_n называются *суммами Фейера* *). Из равенства (5) п. 3.3 вытекает, что

$$\sigma_n(f,x) = \left(f * \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} D_j\right)(x) = \frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x-u)}{\sin\frac{u}{2}} \sum_{j=0}^{n-1} \sin\Big(j+\frac{1}{2}\Big)u\,du. \tag{1}$$

Тригонометрическое тождество

$$\sin\frac{u}{2} + \sin\frac{3}{2}u + \ldots + \sin\Big(n-\frac{1}{2}\Big)u = \frac{1-\cos nu}{2\sin\frac{u}{2}} = \frac{\sin^2\frac{n}{2}u}{\sin\frac{u}{2}} \qquad (u \notin 2\pi\mathbb{Z}),$$

которое мы предоставляем читателю проверить самостоятельно, позволяет преобразовать правую часть равенства (1):

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\left(\frac{\sin\frac{n}{2}u}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2 du.$$

Таким образом, сумма Фейера представляется в виде свёртки f с функцией

$$\Phi_n(u) = \frac{D_0(u) + \ldots + D_{n-1}(u)}{n} = \frac{1}{2\pi n}\left(\frac{\sin\frac{n}{2}u}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2, \tag{2}$$

которая называется n-м *ядром Фейера*. Мы советуем читателю построить эскиз графика функции Φ_n и сравнить его с графиком ядра Дирихле.

Ядро Фейера можно записать в виде

$$\Phi_n(u) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} D_j(u) = \frac{1}{2\pi n}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{|k|\leqslant j} e^{iku} = \frac{1}{2\pi}\sum_{|k|<n}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)e^{iku},$$

и поэтому

$$\widehat{\Phi}_n(k) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\Big(1-\frac{|k|}{n}\Big) & \text{при } |k|<n, \\ 0 & \text{при } |k| \geqslant n. \end{cases} \tag{3}$$

Убедимся, что последовательность $\{\Phi_n\}$ есть аппроксимативная единица. Из равенства (2) ясно, что ядра Фейера неотрицательны и периодичны, а так как $\int_{-\pi}^{\pi} D_j(u)\,du = 1$ для всех j, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(u)\,du = \frac{1}{n}\left(\int_{-\pi}^{\pi} D_0(u)\,du + \ldots + \int_{-\pi}^{\pi} D_{n-1}(u)\,du\right) = 1.$$

*) Липот **Фейер** (Fejér), 1880–1959, — венгерский математик.

Наконец, ядра Фейера обладают фокусирующим свойством в усиленной форме (см. условие в′) п. VII.6.5): из равенства (2) вытекает, что при $\delta < |u| < \pi$

$$\Phi_n(u) = \frac{1}{2\pi n}\left(\frac{\sin\frac{n}{2}u}{\sin\frac{u}{2}}\right)^2 \leqslant \frac{1}{2\pi n\,\sin^2\frac{\delta}{2}} = \frac{C_\delta}{n}.$$

Теперь мы готовы сформулировать основной результат этого параграфа, играющий важную роль в гармоническом анализе.

Теорема (Фейер). *Пусть $f \in \widetilde{\mathscr{L}}^1$ и $x \in \mathbb{R}$. Тогда*

а) если существуют конечные пределы $L_\pm = \lim\limits_{t\to x\pm 0} f(t)$, то $\sigma_n(f,x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{L_+ + L_-}{2}$;

б) если $f \in \widetilde{C}$, то $\sigma_n(f) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} f$ на $\mathbb{R}$;

в) если $f \in \widetilde{\mathscr{L}}^p$ при некотором $p \in [1,+\infty)$, то $\|\sigma_n(f) - f\|_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

г) $\sigma_n(f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ почти везде.

Доказательство. Утверждение б), как и утверждение а) в случае, если существует конечный предел $\lim\limits_{t\to x} f(t)$, есть частный случай теоремы VII.6.5 (с учётом замечания к ней) при $m = 1$, $T = \mathbb{N}$ и $t_0 = +\infty$. Если же односторонние пределы различны, то следует, используя чётность ядер Фейера, применить уже установленный результат к функции $f_0(u) = \frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}$, стремящейся к $\frac{L_+ + L_-}{2}$ при $u \to 0$.

Утверждение в) нам также уже известно — это частный случай теоремы 2 п. IX.3.7.

Чтобы доказать последнее утверждение, оценим "горбатую" мажоранту ядер Фейера $\psi_n(x) = \sup\limits_{|x|\leqslant y\leqslant\pi} \Phi_n(y)$. Поскольку $\Phi_n(y) \leqslant \Phi_n(0) = \frac{n}{2\pi}$ и $\Phi_n(y) \leqslant \frac{1}{2\pi n\sin^2\frac{y}{2}} \leqslant \frac{\pi}{2ny^2}$, мы видим, что $\psi_n(x) \leqslant \frac{1}{2\pi}\min\{n, \frac{\pi^2}{nx^2}\}$. Отсюда немедленно следует, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \psi_n(x)\,dx \leqslant 2 \quad \text{для всех} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, условие теоремы 3 п. IX.3.7 выполнено и поэтому $\sigma_n(f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ почти везде. ►

Благодаря пункту а) теоремы и перманентности метода средних арифметических, мы можем теперь ответить на вопрос, который ставили, приступая к исследованию сходимости рядов Фурье (п. 3.3): если в точке непрерывности суммируемой функции ряд Фурье сходится, то его сумма обязательно равна значению функции в этой точке.

Так как свёртка $f * \Phi_n$ есть тригонометрический многочлен, то теорема Фейера дополняет теорему Вейерштрасса (см. следствие VII.6.5), предъявляя конкретные аппроксимирующие многочлены.

Замечание. Третье и, очевидно, четвёртое утверждения теоремы дают новые доказательства теоремы единственности. Действительно, если функции $f, g \in \widetilde{\mathscr{L}}^1$ имеют одинаковые коэффициенты Фурье, то $\sigma_n(f) = \sigma_n(g)$ для всех n. Поэтому из пункта в) теоремы при $p = 1$ вытекает равенство

$$\|f - g\|_1 = \lim_{n\to\infty} \|\sigma_n(f) - \sigma_n(g)\|_1 = 0.$$

Следовательно, функции f и g равны почти везде.

Как мы убедились, суммы Фейера $\sigma_n(f)$ имеют очевидное преимущество по сравнению с частичными суммами $S_n(f)$ ряда Фурье — они аппроксимируют любую суммируемую функцию в интегральной метрике, а к непрерывной функции сходятся равномерно. Но следует иметь в виду, что за эту универсальность сумм Фейера приходится платить — они не могут быстро сходиться к функции (см. упр. 2). Поэтому, если ряд Фурье сходится быстро, то суммы Фейера хуже аппроксимируют функцию, чем суммы Фурье (см. упр. 2 § 3).

В некоторых случаях суммы Фейера позволяют получить дополнительную информацию о поведении сумм Фурье.

Следствие 1. *Ряд Фурье абсолютно непрерывной периодической функции f сходится к ней равномерно на $\mathbb{R}$.*

В силу второго утверждения теоремы Фейера достаточно проверить, что разность $S_n(f) - \sigma_n(f)$ равномерно стремится к нулю. Ясно, что

$$\bigl|S_n(f,x) - \sigma_n(f,x)\bigr| = \left|\sum_{k=-n}^{n} \frac{|k|}{n}\,\widehat{f}(k)\,e^{ikx}\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=-n}^{n} |k||\widehat{f}(k)|.$$

Согласно условию $f(x) = f(0) + \int_0^x g(t)\,dt$, где $g = f' \in \widetilde{\mathscr{L}}^1$, и поэтому (см. свойство г) п. 3.2) $|k\widehat{f}(k)| = |\widehat{f'}(k)|$. Осталось воспользоваться перманентностью метода средних арифметических: так как $\widehat{f'}(k) \underset{|k|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, то

$$\max_{x\in\mathbb{R}}\bigl|S_n(f,x) - \sigma_n(f,x)\bigr| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=-n}^{n} |\widehat{f'}(k)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \ \blacktriangleright$$

Следствие 2. *Пусть периодическая функция f удовлетворяет условию Липшица порядка α, $0 < \alpha < 1$:*

существует такое число L, что $|f(x) - f(y)| \leqslant L|x-y|^\alpha$ для всех x, $y \in \mathbb{R}$.

Тогда ряд Фурье этой функции сходится равномерно на $\mathbb{R}$, причём

$$|S_n(f,x) - f(x)| \leqslant C_\alpha L\,\frac{\ln n}{n^\alpha} \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Коэффициент C_α зависит только от α (случай $\alpha = 1$ см. в упр. 3).

Доказательство. Оценим сначала отклонение сумм Фейера. Так как

$$\sigma_n(f,x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \bigl(f(x-t) - f(x)\bigr)\Phi_n(t)\,dt,$$

то

$$|\sigma_n(f,x) - f(x)| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f(x-t) - f(x)|\Phi_n(t)\,dt \leqslant \frac{L}{\pi n}\int_0^\pi t^\alpha \left(\frac{\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi L}{n}\int_0^\pi \frac{\sin^2\frac{n}{2}t}{t^{2-\alpha}}dt = \frac{\pi L}{n}\left(\frac{n}{2}\right)^{1-\alpha}\int_0^{\frac{\pi n}{2}} \frac{\sin^2 u}{u^{2-\alpha}}\,du.$$

Таким образом, $\|\sigma_n(f) - f\|_\infty \leqslant \frac{\widetilde{C}_\alpha L}{n^\alpha}$, где $\widetilde{\mathrm{C}}_\alpha = \pi 2^{\alpha-1}\int_0^\infty \frac{\sin^2 u}{u^{2-\alpha}}\,du$.

Чтобы оценить отклонение сумм Фурье, заметим, что так как $S_n\big(\sigma_n(f)\big) = \sigma_n(f)$, то $S_n(f) - f = S_n(\varphi_n) - \varphi_n$, где $\varphi_n = f - \sigma_n(f)$. Поэтому неравенство (6) п. 3.3 даёт нам

$$|S_n(f,x) - f(x)| \leqslant |S_n(\varphi_n, x)| + |\varphi_n(x)| \leqslant 3\|\varphi_n\|_\infty \ln n \leqslant 3\widetilde{C}_\alpha L \frac{\ln n}{n^\alpha}. \quad \blacktriangleright$$

4.2. Неотрицательность ядер Фейера позволяет установить интересные свойства рядов Фурье. Например, если коэффициенты ряда Фурье неотрицательны, то ограниченность функции вблизи нуля влечёт абсолютную сходимость её ряда Фурье. Действительно, пусть функция $f \in \widetilde{\mathscr{L}}^1$ такова, что $\widehat{f}(k) \geqslant 0$ для всех $k \in \mathbb{Z}$ и $|f(x)| \leqslant C$, если $|x| < \delta$. Так как $0 \leqslant \Phi_n(x) \leqslant C_\delta$ при $\delta \leqslant |x| \leqslant \pi$, то

$$|\sigma_n(f,0)| = \left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\Phi_n(x)\,dx\right| \leqslant \int_{-\delta}^{\delta} C\Phi_n(x)\,dx + \int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\pi} C_\delta|f(x)|\,dx \leqslant C + C_\delta\|f\|_1.$$

Поэтому

$$\sum_{|k|<\frac{n}{2}} \widehat{f}(k) \leqslant 2\sum_{|k|<n}\Big(1 - \frac{|k|}{n}\Big)\widehat{f}(k) = 2\sigma_n(f,0) \leqslant 2\big(C + C_\delta\|f\|_1\big).$$

Поскольку это неравенство выполняется для любого n, ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)$ сходится.

Рассмотрим теперь произвольный тригонометрический ряд вида

$$\frac{1}{2}c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos nx, \tag{4}$$

где коэффициенты образуют стремящуюся к нулю выпуклую последовательность (выпуклость последовательности $\{c_n\}_{n\geqslant 0}$ означает, что $c_n \leqslant \frac{1}{2}(c_{n-1}+c_{n+1})$ при всех $n \in \mathbb{N}$). Поточечная сходимость ряда (4) при $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ легко устанавливается с помощью признака Дирихле.

Прежде чем переходить к исследованию суммы ряда (4), докажем лемму, относящуюся к числовым рядам.

Лемма. *Пусть $\{c_n\}_{n\geqslant 0}$ — выпуклая последовательность, стремящаяся к нулю. Тогда*

1) $c_{n-1} \geqslant c_n \geqslant 0$ *при всех* $n \in \mathbb{N}$;
2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k(c_{k-1} - 2c_k + c_{k+1}) = c_0$.

Доказательство. Положим $b_n = c_{n-1} - c_n$. Из выпуклости следует, что $b_n \geqslant b_{n+1}$ и, следовательно, $b_n \geqslant 0$ (поскольку $b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$), что доказывает первое утверждение.

Очевидно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится и его сумма равна c_0. Так как

$$nb_n \leqslant 2\sum_{\frac{n}{2}\leqslant k\leqslant n} b_k \leqslant 2\sum_{k\geqslant\frac{n}{2}} b_k,$$

то $nb_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ вместе с остатком сходящегося ряда. Это соотношение и равенство $c_{k-1} - 2c_k + c_{k+1} = b_k - b_{k+1}$ позволяют доказать второе утверждение:

$$\sum_{k=1}^{n} k(c_{k-1}-2c_k+c_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} k(b_k - b_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} kb_k - \sum_{k=2}^{n+1}(k-1)b_k = \sum_{k=1}^{n} b_k - nb_{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} c_0. \ \blacktriangleright$$

Теорема. *Пусть коэффициенты ряда (4) образуют выпуклую последовательность, стремящуюся к нулю. Тогда его сумма f неотрицательна, суммируема на $(-\pi,\pi)$ и ряд (4) есть её ряд Фурье.*

Доказательство. Преобразуем частичную сумму $S_n(x)$ ряда (4). Воспользуемся равенством $\cos kx = \pi\big(D_k(x) - D_{k-1}(x)\big)$:

$$\frac{1}{\pi}\, S_n(x) = c_0\, D_0(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k\big(D_k(x) - D_{k-1}(x)\big) = c_n\, D_n(x) + \sum_{k=0}^{n-1}(c_k - c_{k+1})D_k(x).$$

Поскольку $D_k(x) = (k+1)\Phi_{k+1}(x) - k\Phi_k(x)$, после простых выкладок мы получим:

$$\frac{1}{\pi}\, S_n(x) = c_n\, D_n(x) + (c_{n-1} - c_n)n\Phi_n(x) + \sum_{k=1}^{n-1}(c_{k-1} - 2c_k + c_{k+1})k\Phi_k(x).$$

Заметим, что $c_{k-1} - 2c_k + c_{k+1} \geqslant 0$ в силу выпуклости последовательности $\{c_k\}_{k\geqslant 0}$. Так как для $x \neq 0$ последовательности $\{D_n(x)\}_{n\geqslant 1}$ и $\{n\Phi_n(x)\}_{n\geqslant 1}$ ограничены (см. формулы (4′) п. 3.3 и (2)), а $c_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, то два первых слагаемых в правой части последнего равенства бесконечно малы. Поэтому, перейдя в нём к пределу при $n \to \infty$, мы видим, что

$$f(x) = \pi \sum_{k=1}^{\infty}(c_{k-1} - 2c_k + c_{k+1})k\Phi_k(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(c_{k-1} - 2c_k + c_{k+1})\left(\frac{\sin\frac{k}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2. \qquad (5)$$

Это доказывает неотрицательность функции f. Так как неотрицательные ряды можно почленно интегрировать (см. следствие 1 п. IV.8.2), то

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \pi \sum_{k=1}^{\infty}(c_{k-1} - 2c_k + c_{k+1})k \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_k(x)\,dx = \pi \sum_{k=1}^{\infty}(c_{k-1} - 2c_k + c_{k+1})k = \pi\, c_0$$

(последнее равенство справедливо согласно утверждению 2) леммы). Таким образом, $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx < +\infty$.

Проверим теперь, что ряд (4) является рядом Фурье функции f. Очевидно, функция f останется мажорантой частичных сумм после домножения ряда (5) на $\cos jx$. Поэтому домноженный ряд можно интегрировать почленно, что приводит к равенству для косинус-коэффициентов Фурье:

$$a_j(f) = \pi \sum_{k=1}^{\infty}(c_{k-1} - 2c_k + c_{k+1})ka_j(\Phi_k).$$

Так как $a_j(\Phi_k) = \widehat{\Phi}_k(j) + \widehat{\Phi}_k(-j)$, то с помощью равенства (3) мы получаем, что при $j \in \mathbb{N}$

$$a_j(f) = \sum_{k=j+1}^{\infty} (c_{k-1} - 2c_k + c_{k+1})(k-j) = \sum_{k=1}^{\infty} (c_{k+j-1} - 2c_{k+j} + c_{k+j+1})k.$$

Числа $\widetilde{c}_k = c_{k+j}$ $(k = 0, 1, 2 \ldots)$ образуют, очевидно, выпуклую последовательность. Применив к ней утверждение 2) леммы, мы видим, что сумма последнего ряда равна $\widetilde{c}_0$. Поэтому $a_j(f) = \widetilde{c}_0 = c_j$. Равенство $A(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2}c_0$ уже получено при доказательстве суммируемости f. ►

Последовательность коэффициентов, удовлетворяющая условию теоремы, может стремиться к нулю сколь угодно медленно (см. упр. 4). Например, поскольку последовательность $\{\frac{1}{\ln n}\}_{n\geqslant 2}$ выпуклая, из доказанной теоремы следует, что сумма ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\ln n}$ принадлежит $\widetilde{\mathscr{L}}^1$, а сам он является её рядом Фурье. Напомним в связи с этим, что всюду сходящийся ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$ не является рядом Фурье, как установлено в п. 3.6.

4.3. В основе метода Фейера лежит обобщение суммы числового ряда, предложенное Чезаро. Возможны и другие обобщения понятия суммы ряда. К одному из них приводит хорошо известная в теории числовых рядов теорема Абеля: если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится к сумме S, то сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\varepsilon n} c_n$ стремится к S при $\varepsilon \to +0$. Этот предел может существовать и у расходящегося ряда, поэтому на него можно смотреть как на обобщённую сумму ряда.

Имея целью приложения к рядам Фурье, естественно рассматривать суммирование не по множеству $\mathbb{N}$, а по $\mathbb{Z}$, и использовать симметричные частичные суммы $S_j = \sum\limits_{|k|\leqslant j} c_k$. Тогда следует считать, что согласно методу Чезаро числовому ряду $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n$ (сходящемуся или нет) должна сопоставляться последовательность сумм

$$\sigma_n = \frac{1}{n}(S_0 + \ldots + S_{n-1}) = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\Big(\sum_{|k|\leqslant j} c_k\Big) = \sum_{|k|<n}\Big(1 - \frac{|k|}{n}\Big)c_k,$$

а согласно методу Абеля — функция

$$A(\varepsilon) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\varepsilon|n|} c_n$$

(чтобы не усложнять изложение, будем рассматривать лишь ограниченные последовательности $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$; для рядов Фурье это условие всегда выполняется). В первом случае вычисляется предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$, а во втором — $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} A(\varepsilon)$. Можно доказать, что из существования первого предела (т. е. из сходимости ряда в смысле Чезаро) вытекает существование второго (т. е. сходимость в смысле Абеля) и эти пределы совпадают. Поэтому говорят, что метод Абеля сильнее метода Чезаро. Мы не будем останавливаться на сравнении этих методов. Вместо этого покажем, что они представляют собой частные случаи общей схемы, которая состоит в следующем.

Пусть M — убывающая и суммируемая на $[0,+\infty)$ функция, $M(0)=\lim\limits_{u\to 0} M(u)=1$. Ясно, что $M\geqslant 0$ и при любом $\varepsilon>0$ ряд $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} M(\varepsilon|n|)$ сходится.

Числовому ряду $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n$, слагаемые которого ограничены, сопоставим абсолютно сходящийся ряд

$$S_M(\varepsilon)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} M(\varepsilon|n|)\,c_n.$$

В случае сходимости исходного ряда он сходится равномерно относительно $\varepsilon>0$ и $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} S_M(\varepsilon)=\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n$. Предел $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} S_M(\varepsilon)$ (если он существует) называют обобщённой суммой исходного ряда. Методу Чезаро соответствуют функция $M(u)=(1-u)_+$, а методу Абеля — $M(u)=e^{-u}$. Обычную сумму ряда мы получим, взяв $M(u)=\chi_{[0,1]}(u)$.

Перейдя к рядам Фурье, мы видим, что каждой функции $f\in\widetilde{\mathscr{L}}^1$ следует сопоставить суммы

$$S_{M,\varepsilon}(f,x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} M(\varepsilon|n|)\,\widehat{f}(n)\,e^{inx}\quad (x\in\mathbb{R}).$$

Чтобы найти для них интегральное представление, воспользуемся свойством д) п. 3.2: $\widehat{f*g}(n)=2\pi\,\widehat{f}(n)\cdot\widehat{g}(n)$. Оно позволяет смотреть на $S_{M,\varepsilon}(f)$ как на ряд Фурье свёртки $f*\omega_\varepsilon$, где

$$\omega_\varepsilon(x)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} M(\varepsilon|n|)\,e^{inx}=\frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} M(\varepsilon n)\,\cos nx\quad (x\in\mathbb{R}).$$

По теореме единственности (следствие 1 п. 3.6) функции $f*\omega_\varepsilon$ и $S_{M,\varepsilon}(f)$ совпадают почти везде, а так как они непрерывны, то и везде.

Чтобы исследовать поведение сумм $S_{M,\varepsilon}(f)$ при $\varepsilon\to+0$, наложим дополнительное ограничение на функцию M. Будем считать в дальнейшем, что она выпукла на $[0,+\infty)$. Тогда последовательность $\{M(\varepsilon n)\}_{n\geqslant 0}$ выпукла и $\omega_\varepsilon(x)\geqslant 0$ по теореме 4.2.

Лемма. *Пусть M — непрерывная и выпуклая на $[0,+\infty)$ функция, стремящаяся к нулю на бесконечности, $M(0)=1$. Тогда функции ω_ε образуют периодическую аппроксимативную единицу с усиленным фокусирующим свойством при $\varepsilon\to+0$. Кроме того, существуют такие мажорирующие ω_ε чётные убывающие на $[0,\pi]$ функции Ω_ε, что $\int_{-\pi}^{\pi}\Omega_\varepsilon(x)\,dx\leqslant 2$.*

Определение усиленного фокусирующего свойства см. в п. VII.6.5.

Доказательство. Очевидно, $\int_{-\pi}^{\pi}\omega_\varepsilon(x)\,dx=1$ и, как уже отмечалось, функция ω_ε неотрицательна. Проверим, что она обладает фокусирующим свойством. Для этого воспользуемся равенством (5) с $f=\pi\omega_\varepsilon$ и $c_n=M(\varepsilon n)$. Из него следует, что при $\delta<|x|<\pi$ и $C_\delta=1/(2\pi\sin^2\frac{\delta}{2})$

$$\omega_\varepsilon(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\big(M(n\varepsilon-\varepsilon)-2M(n\varepsilon)+M(n\varepsilon+\varepsilon)\big)\,n\Phi_n(x)\leqslant$$
$$\leqslant C_\delta\sum_{n=1}^{\infty}\big(M(n\varepsilon-\varepsilon)-2M(n\varepsilon)+M(n\varepsilon+\varepsilon)\big)=C_\delta\big(M(0)-M(\varepsilon)\big)\underset{\varepsilon\to+0}{\longrightarrow}0.$$

Для доказательства последнего утверждения леммы ещё раз воспользуемся предыдущим равенством. Заменив в нём ядро Фейера Φ_n мажорантой ψ_n, построенной при доказательстве теоремы 4.1, мы получим:

$$\omega_\varepsilon(x) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \big(M(n\varepsilon - \varepsilon) - 2M(n\varepsilon) + M(n\varepsilon + \varepsilon)\big)\, n\psi_n(x) \equiv \Omega_\varepsilon(x).$$

Как там установлено, $\int_{-\pi}^{\pi} \psi_n(x)\,dx \leqslant 2$, и поэтому

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Omega_\varepsilon(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \big(M(n\varepsilon - \varepsilon) - 2M(n\varepsilon) + M(n\varepsilon + \varepsilon)\big)\, n \int_{-\pi}^{\pi} \psi_n(x)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant 2\sum_{n=1}^{\infty} \big(M(n\varepsilon - \varepsilon) - 2M(n\varepsilon) + M(n\varepsilon + \varepsilon)\big)\, n = 2M(0)$$

(последнее равенство справедливо согласно второму утверждению леммы 4.2). ►

Теперь мы можем исследовать поведение сумм $S_{M,\varepsilon}(f,x)$.

Теорема. *Пусть $f \in \widetilde{\mathscr{L}}^1$, $x \in \mathbb{R}$, а функция M суммируема на $[0,+\infty)$ и удовлетворяет условию леммы. Тогда*

а) если существуют конечные пределы $L_\pm = \lim\limits_{t\to x\pm 0} f(t)$, то $S_{M,\varepsilon}(f,x) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \frac{L_+ + L_-}{2}$;

б) если $f \in \widetilde{C}$, то $S_{M,\varepsilon}(f) \underset{\varepsilon\to 0}{\rightrightarrows} f$ на $\mathbb{R}$;

в) если $f \in \widetilde{\mathscr{L}}^p$ при некотором $p \in [1,+\infty)$, то $\|S_{M,\varepsilon}(f) - f\|_p \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$.

г) $S_{M,\varepsilon}(f,x) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} f(x)$ почти везде.

Доказательство получается дословным повторением доказательства теоремы Фейера, поскольку в нём использовался лишь тот факт, что сумма $\sigma_n(f)$ есть свёртка функции f с чётной аппроксимативной единицей, обладающей усиленным фокусирующим свойством и горбатой мажорантой, а это в силу леммы справедливо и для суммы $S_{M,\varepsilon}(f)$. ►

Отметим в заключение, что применив к ряду Фурье метод Абеля, т. е. взяв $M(u) = e^{-u}$, мы получим суммы

$$S_\varepsilon(f,x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon|n|}\widehat{f}(n)\, e^{inx},$$

называемые *суммами Абеля–Пуассона.* Соответствующая им аппроксимативная единица ω_ε нам уже встречалась. Действительно, положим $r = e^{-\varepsilon}$, $z = re^{ix}$. Тогда

$$2\pi\omega_\varepsilon(x) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx = \mathcal{R}e\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n\right) = \mathcal{R}e\,\frac{1+z}{1-z} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos x + r^2}.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае функция ω_ε оказывается не чем иным, как ядром Пуассона для круга, введённым в п. VIII.7.10.

4.4. Оставшуюся часть параграфа посвятим кратным рядам Фурье, т. е. рядам по системе $\{e^{i\langle n,x\rangle}\}_{n\in\mathbb{Z}^m}$. В п. 2.2 было отмечено, что это ортогональный базис в пространстве $\mathscr{L}^2\big((-\pi,\pi)^m\big)$. Поэтому $\mathscr{L}^2$-теория кратных рядов Фурье есть частный случай общей теории, гарантирующей сходимость этих рядов по $\mathscr{L}^2$-норме, и здесь мы не будем этого касаться. Иначе обстоит дело с другими видами сходимости таких рядов. Специфическая особенность возникающих при этом задач связана с тем, что в кратном случае нет одного, наиболее предпочтительного определения суммы кратного ряда — можно вычислять предел частичных сумм, взятых по неограниченно расширяющимся шарам, кубам или прямоугольным параллелепипедам и т. д. Оказывается, ответы на многие задачи существенно зависят от выбора определения частичной суммы. Мы не будем подробнее обсуждать эту тему и ограничимся в основном рассмотрением частичных сумм по прямоугольникам. Даже в этом случае при $m>1$ наблюдаются эффекты, отсутствующие в одномерной ситуации.

Введём некоторые необходимые обозначения. Говоря о периодических функциях в $\mathbb{R}^m$, мы всегда будем иметь в виду 2π-периодичность по каждой переменной. Символами $\widetilde{C}(\mathbb{R}^m)$, $\widetilde{C}^r(\mathbb{R}^m)$ $(r\in\mathbb{N})$ обозначим классы периодических непрерывных и гладких в $\mathbb{R}^m$ функций; $\widetilde{\mathscr{L}}^p(\mathbb{R}^m)$ $(1\leqslant p\leqslant+\infty)$ — класс периодических функций, суммируемых с p-й степенью на кубе $Q=(-\pi,\pi)^m$. Для функции f из $\widetilde{\mathscr{L}}^p(\mathbb{R}^m)$ символ $\|f\|_p$ обозначает $\widetilde{\mathscr{L}}^p$-норму её сужения на Q. Для функции $f\in\widetilde{\mathscr{L}}^1(\mathbb{R}^m)$ и мультииндекса $n\in\mathbb{Z}^m$

$$\widehat{f}(n)=\frac{1}{(2\pi)^m}\int_Q f(x)\,e^{-i\langle n,x\rangle}\,dx$$

— её n-й коэффициент Фурье.

При решении задачи о представлении периодической функции в виде суммы тригонометрического ряда $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^m} c_n\,e^{i\langle n,x\rangle}$, как и одномерном случае, по существу нет свободы в выборе его коэффициентов. Доводы, приведённые в конце п. 3.1, полностью сохраняют свою силу и в кратном случае. Точнее, пусть $S_j(x)=\sum\limits_{n\in A_j} c_n e^{i\langle n,x\rangle}$ — частичные суммы этого ряда, соответствующие таким расширяющимся ограниченным множествам $A_j\subset\mathbb{R}^m$, что $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}A_j=\mathbb{R}^m$. Если $S_j\underset{j\to\infty}{\longrightarrow}S$ почти везде или по мере, функцию S можно назвать суммой данного ряда. Если ещё частичные суммы S_j мажорируются некоторой функцией g из $\widetilde{\mathscr{L}}^1(\mathbb{R}^m)$, то коэффициенты исходного тригонометрического ряда определяются однозначно: как следует из теоремы Лебега, $\widehat{S}(n)=\lim\limits_{j\to\infty}\widehat{S}_j(n)=c_n$. Поэтому при сделанных минимальных предположениях представление функции в виде суммы кратного тригонометрического ряда единственно.

Для абсолютно сходящихся рядов Фурье нет проблемы выбора определения частичных сумм, так как в этом случае мы имеем дело с суммируемым семейством. Кроме того, абсолютно сходящийся тригонометрический ряд является, очевидно, рядом Фурье своей суммы. В силу полноты тригонометрической системы (см. теорему 2.2) сумма абсолютно сходящегося ряда Фурье совпадает с функцией почти везде, а если она непрерывна, то и везде (в одномерном случае это было отмечено в начале п. 3.8). Как мы вскоре убедимся, ряды Фурье достаточно гладких функций сходятся абсолютно.

В кратном случае сохраняются как сами основные свойства коэффициентов Фурье, так и их доказательства (далее $n=(n_1,\dots,n_m)\in\mathbb{Z}^m$):

а) $|\widehat{f}(n)| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^m}\|f\|_1$;

б) $|\widehat{f}(n)| \to 0$ при $\|n\| \to +\infty$;

в) коэффициенты Фурье сдвига f_h $(h \in \mathbb{R}^m)$, т. е. функции $f_h(x) = f(x-h)$, связаны с коэффициентами функции f равенствами $\widehat{f_h}(n) = e^{-i\langle n,h\rangle}\widehat{f}(n)$;

г) если $f \in \widetilde{C}^r(\mathbb{R}^m)$ и $g = \frac{\partial^r f}{\partial x_{j_1}\cdots\partial x_{j_r}}$, то $\widehat{g}(n) = i^r n_{j_1}\cdots n_{j_r}\,\widehat{g}(n)$;

д) $\widehat{f*g}(n) = (2\pi)^m\widehat{f}(n)\cdot\widehat{g}(n)$ для любых функций f, g из $\widetilde{\mathscr{L}}^1(\mathbb{R}^m)$.

С помощью свойства г) несложно показать, что функции класса $\widetilde{C}^{(m+1)}(\mathbb{R}^m)$ имеют абсолютно сходящиеся ряды Фурье. Следующая теорема показывает, что требование гладкости можно заметно ослабить.

Теорема. *Если* $f \in \widetilde{C}^r(\mathbb{R}^m)$, $r > \frac{m}{2}$, *то* $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^m}|\widehat{f}(n)| < +\infty$ *и поэтому* $f(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^m}\widehat{f}(n)\,e^{i\langle n,x\rangle}$ *для всех* x.

Доказательство. Действительно, по свойству г) $|n_k|^r|\widehat{f}(n)| = |\widehat{g}_k(n)|$, где $n = (n_1,\dots,n_m) \in \mathbb{Z}_+^m$ и $g_k = \frac{\partial^r f}{\partial x_k^r}$, $k = 1,\dots,m$. Положим

$$c_n = |\widehat{g_1}(n)| + \ldots + |\widehat{g_m}(n)| = \big(|n_1|^r + \ldots + |n_m|^r\big)|\widehat{f}(n)|.$$

Так как $\|n\|^r \leqslant m^{\frac{r}{2}}\max\big\{|n_1|^r,\dots,|n_m|^r\big\} \leqslant m^{\frac{r}{2}}\big(|n_1|^r + \ldots + |n_m|^r\big)$, то при $n \neq 0$

$$|\widehat{f}(n)| = \frac{c_n}{|n_1|^r + \ldots + |n_m|^r} \leqslant \mathrm{const}\frac{c_n}{\|n\|^r}.$$

Ясно, что

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^m} c_n^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}^m}\big(|\widehat{g_1}(n)| + \ldots + |\widehat{g_m}(n)|\big)^2 \leqslant m\sum_{n\in\mathbb{Z}^m}\big(|\widehat{g_1}(n)|^2 + \ldots + |\widehat{g_m}(n)|^2\big) < +\infty$$

в силу неравенства Бесселя. Следовательно,

$$\sum_{n\neq 0}|\widehat{f}(n)| \leqslant \mathrm{const}\sum_{n\neq 0}\frac{c_n}{\|n\|^r} \leqslant \frac{\mathrm{const}}{2}\sum_{n\neq 0}\Big(\frac{1}{\|n\|^{2r}} + c_n^2\Big) < +\infty$$

(ряд $\sum\limits_{n\neq 0}\frac{1}{\|n\|^{2r}}$ сходится, поскольку $2r > m$). ►

4.5. Обратимся теперь к задаче представления рядами Фурье функций из более широкого класса. Как уже было сказано, мы ограничимся рассмотрением частичных сумм кратного ряда по прямоугольникам. При этом нам будут полезны обозначения, введённые в п. I.1.6: для векторов $a = (a_1,\dots,a_m)$ и $b = (b_1,\dots,b_m)$ записи $a \leqslant b$ и $a < b$ означают, что соответственно $a_1 \leqslant b_1,\dots,a_m \leqslant b_m$ и $a_1 < b_1,\dots,a_m < b_m$. Символом $|a|$ обозначим вектор $(|a_1|,\dots,|a_m|)$.

Каждой функции $f \in \widetilde{\mathscr{L}}^1(\mathbb{R}^m)$ и мультииндексу $n = (n_1,\dots,n_m) \in \mathbb{Z}_+^m$ сопоставим частичную сумму ряда Фурье “по прямоугольнику”

$$S_n(f,x) = \sum_{|k|\leqslant n}\widehat{f}(k)\,e^{i\langle k,x\rangle}.$$

Рассуждая так же, как в п. 3.3, нетрудно убедиться, что эта сумма является свёрткой функции f с многомерным ядром Дирихле, равным произведению одномерных ядер Дирихле: $S_n(f) = f * D_n$, где

$$D_n(u) = D_{n_1}(u_1) \cdots D_{n_m}(u_m) \qquad (u = (u_1, \dots, u_m)).$$

Как и в одномерном случае, ядро D_n удовлетворяет равенству (далее $Q = (-\pi, \pi)^m$)

$$\int_Q D_n(u)\, du = 1. \tag{6}$$

В п. 3.3 было отмечено, что $\mathscr{L}^1$-нормы одномерных ядер Дирихле имеют логарифмическую скорость роста. Это верно и для ядер Дирихле, соответствующих прямоугольникам:

$$\|D_n\|_1 = \int_Q |D_n(u)|\, du = \prod_{j=1}^m \int_{-\pi}^{\pi} |D_{n_j}(u_j)|\, du_j \asymp \prod_{j=1}^m \ln n_j.$$

Отсюда следует, что для периодических ограниченных (в частности, непрерывных) функций при $n_1, \dots, n_m > 1$ справедлива оценка:

$$\|S_n(f)\|_\infty \leqslant C_m \left(\prod_{j=1}^m \ln n_j \right) \|f\|_\infty. \tag{7}$$

Следующая теорема показывает, что класс функций с равномерно сходящимся рядом Фурье довольно широк.

Теорема. *Пусть периодическая функция f удовлетворяет условию Липшица порядка α, $0 < \alpha \leqslant 1$: существует такое число L, что $|f(x) - f(y)| \leqslant L\|x - y\|^\alpha$ для всех $x, y \in \mathbb{R}^m$. Тогда суммы $S_n(f)$ равномерно сходятся к f при $\min\{n_1, \dots, n_m\} \to +\infty$.*

Доказательство достаточно провести для $\alpha < 1$. Кроме того, будем считать, что $m = 2$, поскольку в общем случае новых идей не требуется. Так как $S_n(f, x) = (f * D_n)(x) = \int_Q f(x - u) D_n(u)\, du$, то вычитая отсюда равенство (6), умноженное на $f(x)$, мы получаем

$$\Delta = S_n(f, x) - f(x) = \int_Q \big(f(x - u) - f(x)\big)\, D_n(u)\, du.$$

Ради упрощения дальнейших формул изменим обозначения: $n = (j, k)$, $x = (a, b)$ и $u = (s, t)$. Оценивая разность Δ, не умаляя общности будем считать, что первая координата вектора n не больше второй, т. е. $j \leqslant k$.

Приращение функции f запишем в виде суммы приращений по каждой координате:

$$f(x - u) - f(x) = f(a - s, b - t) - f(a - s, b) + f(a - s, b) - f(a, b).$$

Поэтому разность Δ распадается в сумму интегралов I, J, где

$$I = \int_Q \big(f(a - s, b - t) - f(a - s, b)\big) D_j(s) D_k(t)\, ds\, dt$$

и

$$J = \int_Q \big(f(a - s, b) - f(a, b)\big) D_j(s) D_k(t)\, ds\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(a - s, b) - f(a, b)\big) D_j(s)\, ds.$$

Интеграл J мал в силу следствия 2 из теоремы Фейера: $|J| \leqslant C_\alpha\, L\, \frac{\ln j}{j^\alpha}$. Это же следствие позволяет оценить и интеграл I:

$$|I| \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(a-s, b-t) - f(a-s, b)) D_k(t)\, dt \right| \left| D_j(s) \right| ds \leqslant C_\alpha\, L\, \frac{\ln k}{k^\alpha} \int_{-\pi}^{\pi} \left| D_j(s) \right| ds.$$

Так как $\int_{-\pi}^{\pi} \left| D_j(s) \right| ds \leqslant 2 \ln j$ при $j \geqslant 10$ (см. неравенство (6) п. 3.3), то

$$|I| \leqslant 2C_\alpha\, L\, \frac{\ln k}{k^\alpha} \ln j \leqslant 2C_\alpha\, L\, \frac{\ln^2 k}{k^\alpha}.$$

Итак, для всех x выполняется неравенство

$$|S_n(f, x) - f(x)| = |\Delta| \leqslant |I| + |J| \leqslant C_\alpha\, L \left(\frac{\ln j}{j^\alpha} + 2 \frac{\ln^2 k}{k^\alpha} \right). \blacktriangleright$$

4.6. Здесь мы приведём два негативных результата, показывающих, что в поведении двойного ряда Фурье могут встретиться эффекты, невозможные в одномерном случае.

Первый из них связан с принципом локализации Римана (см. теорему 3.3). Оказывается, в буквальном смысле для сумм по прямоугольникам он неверен: существует такая функция $f \in \widetilde{C}$, равная нулю в окрестности начала координат, что частичные суммы её ряда Фурье по прямоугольникам не ограничены в нуле. Чтобы убедиться в этом, возьмём функцию f вида $f(s,t) = \varphi(s)\psi(t)$, где φ, $\psi \in \widetilde{C}$. Нетрудно найти такую функцию φ, равную нулю вблизи нуля, что $S_j(\varphi, 0) \neq 0$ для бесконечного числа номеров j. В качестве второго сомножителя возьмём функцию ψ, у которой последовательность $\{S_k(\psi, 0)\}_{k \in \mathbb{N}}$ не ограничена (см. пример Шварца в п. 3.9). Тогда произведение $f(s,t) = \varphi(s)\psi(t)$ равно нулю не только вблизи начала координат, но и в вертикальной полосе, содержащей вторую координатную ось. Кроме того, $S_{j,k}\big(f, (0,0)\big) = S_j(\varphi, 0)\, S_k(\psi, 0)$. Взяв сколь угодно большой номер j, для которого $S_j(\varphi, 0) \neq 0$, мы можем за счёт выбора номера k сделать сумму $S_{j,k}\big(f, (0,0)\big)$ больше любого наперёд заданного числа.

Можно показать, что принцип локализации сохранится, если вместо обычных рассматривать "крестообразные" окрестности точки (a, b), т. е. множества вида $\big\{(s,t) \mid \min(|s-a|, |t-b|) < \delta\big\}$.

Второй факт, на который мы хотим указать, значительно сложнее. Он связан с теоремой Карлесона (см. конец п. 3.9). Ч. Фефферман*) обнаружил, что на функции нескольких переменных этот результат не переносится — существует периодическая функция двух переменных равномерно непрерывная в квадрате $(0, 2\pi)^2$, у которой суммы Фурье по прямоугольникам не ограничены в каждой точке этого квадрата. "Эффект расходимости" проявляется на функциях f_N, равных e^{iNst} при $0 < s,\, t < 2\pi$ (N — большой параметр). Оказывается, несмотря на то, что $|f_N| = 1$, тем не менее, для любого $N > 1$ и любой точки (s,t) можно подобрать такие номера j, k, что величина $\big|S_{j,k}(f_N, (s,t))\big|$ сравнима с $\ln N$. Мы не будем подробнее обсуждать пример Феффермана, отсылая читателя к упр. 10.

*) Чарлз Луис **Фефферман** (Fefferman), род. 1949 г., — американский математик.

4.7. Как и в одномерном случае, аппроксимацию функции нескольких переменных тригонометрическими многочленами можно получить, используя суммы Фейера. В кратном случае их определение, как и определение частичных сумм ряда Фурье, можно производить различными способами. Мы определим m-мерные суммы Фейера равенством (далее $n, j \in \mathbb{Z}_+^m$ и $k \in \mathbb{Z}^m$)

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{n_1 \cdots n_m} \sum_{0 \leqslant j < n} S_j(f,x) = \sum_{|k|<n} \left(1 - \frac{|k_1|}{n_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{|k_m|}{n_m}\right) \widehat{f}(k)\, e^{i\langle k,x\rangle}.$$

Так как $S_j(f,x) = (f * D_j)(x)$, то $\sigma_n(f,x) = (f * \Phi_n)(x)$, где

$$\Phi_n(y) = \frac{1}{n_1 \cdots n_m} \sum_{0 \leqslant j < n} D_j(y) = \Phi_{n_1}(y_1) \cdots \Phi_{n_m}(y_m).$$

Функцию Φ_n естественно назвать m-мерным ядром Фейера. Из установленных в п. 4.1 свойств одномерного ядра Фейера немедленно следует, что

а) $\Phi_n(y) \geqslant 0$;

б) $\int_Q \Phi_n(y)\, dy = 1$;

в) $\int_{Q \setminus B(\delta)} \Phi_n(y)\, dy \leqslant \frac{C_\delta}{\min\{n_1, \dots, n_m\}}$ для любого $\delta \in (0, \pi)$.

Это позволяет смотреть на функции $\{\Phi_n\}_{n \in \mathbb{Z}_+^m}$ как на аппроксимативную единицу с той оговоркой, что теперь она параметризуется целочисленным вектором n и фокусирующее свойство справедливо при условии, что $\min\{n_1, \dots, n_m\} \to +\infty$. Поэтому для сумм $\sigma_n(f,x)$ справедливы аналоги утверждений б) и в) теоремы 4.1:

Теорема. *1) Если $f \in \widetilde{C}(\mathbb{R}^m)$, то $\sigma_n(f) \rightrightarrows f$ на $\mathbb{R}^m$ при $\min\{n_1, \dots, n_m\} \to +\infty$.*

2) Если $f \in \widetilde{\mathscr{L}}^p([-\pi,\pi]^m)$ при некотором $p \in [1, +\infty)$, то $\|\sigma_n(f) - f\|_p \to 0$ при $\min\{n_1, \dots, n_m\} \to +\infty$.

Как и в одномерном случае (см. замечание п. 4.1), из сходимости сумм Фейера в среднем вытекает, в частности, теорема единственности для кратных рядов Фурье:

Следствие. *Две функции из $\widetilde{\mathscr{L}}^1(\mathbb{R}^m)$ совпадают почти везде, если они имеют одинаковые коэффициенты Фурье.*

(Более общие результаты см. в пп. XI.1.9 и XII.3.3.)

Однако в многомерном случае ядра Фейера не обладают усиленным фокусирующим свойством. Поэтому аналог утверждения а) теоремы 4.1 для них может быть получен лишь при дополнительном предположении, что функция f ограничена (см. теорему VII.6.5). От этого ограничения отказаться нельзя, как показывает модификация примера из предыдущего пункта. Действительно, сохраним в нём первый сомножитель φ, а второй заменим, отказавшись от непрерывности (которая теперь не нужна), и положим

$$\psi(t) = \cos t + \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{1}{3}\cos 3t + \dots .$$

Поскольку $S_k(\psi, 0) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, это же верно и для сумм Фейера: $\sigma_k(\psi, 0) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Кроме того, среди сумм $\sigma_j(\varphi, 0)$ бесконечно много ненулевых, так как этим свойством

обладают суммы Фурье $S_j(\varphi,0)$. Следовательно, суммы $\sigma_{j,k}\big(f,(0,0)\big)=\sigma_j(\varphi,0)\sigma_k(\psi,0)$ не ограничены и тем более не стремятся к нулю, хотя функция f равна нулю в полосе, содержащей вторую координатную ось.

Для сходимости сумм $\sigma_n(f)$ почти везде достаточна принадлежность функции классу $\widetilde{\mathscr{L}}^p(\mathbb{R}^m)$ при некотором $p>1$. Хотя это требование можно несколько ослабить, полностью от него отказаться нельзя.

Трудности, возникающие при исследовании многомерного метода Фейера, относятся к "покоординатным" обобщениям и других методов, например метода Абеля–Пуассона. Мы не будем подробнее обсуждать этот вопрос, отсылая читателя к специальной литературе [Зи], т. II, гл. XVII.

4.8. В заключение отметим, что при $m>1$ есть различные естественные способы образования частичных сумм кратного ряда Фурье и их усреднения. Например, вместо всевозможных сумм по прямоугольникам можно было бы ограничиться частичными суммами по кубам (с центром в нуле) и их средними арифметическими. Хотя соответствующие им ядра не сохраняют знак, тем не менее можно показать, что они определяют обобщённую аппроксимативную единицу, удовлетворяющую не условию а), а менее ограничительному условию а′) (см. п. VII.6.1).

Ещё бóльшие затруднения, чем при исследовании прямоугольных частичных сумм кратного ряда Фурье, возникают при другом естественном определении его частичных сумм, когда суммирование производится не по прямоугольникам, а по шарам. В этом случае мы образуем "шаровые" частичные суммы, полагая для $R>0$

$$S_R(f,x)=(2\pi)^{-m}\sum_{\|k\|<R}\widehat{f}(k)\,e^{i\langle k,x\rangle}.$$

Такую сумму можно, конечно, записать как свёртку с соответствующим "шаровым ядром Дирихле" $D_R(y)=\sum\limits_{\|k\|<R}e^{i\langle k,y\rangle}$, для которого, к сожалению, не известны какие-либо компактные выражения. Важная особенность сумм $S_R(f)$ состоит в том, что для них нельзя получить "логарифмической" оценки подобной неравенству (7). Это происходит из-за быстрого роста норм $\|D_R\|_1$. Оказывается, при $R\to+\infty$ нормы $\|D_R\|_1$ растут (по порядку) как $R^{(m-1)/2}$ (см. [АИН]). К этому неожиданному результату мы вернёмся в конце следующего параграфа.

В двумерном случае для периодической непрерывной функции f средние арифметические круговых сумм Фурье сходятся к ней равномерно (а если $f\in\widetilde{\mathscr{L}}^p(\mathbb{R}^2)$ при $p<+\infty$, то по $\mathscr{L}^p$-норме), но при большом числе переменных этого может уже не быть.

УПРАЖНЕНИЯ

1) Пусть $T(x)=\sum\limits_{k=-n}^{n}c_k\,e^{ikx}$ — тригонометрический многочлен порядка n и $p\in[1,+\infty]$. Докажите *неравенство Бернштейна* *): $\|T'\|_p\leqslant 2n\|T\|_p$. Указание. Проверьте, что $T'=-2nT*\Psi_n$, где $\Psi_n(x)=\Phi_n(x)\sin nx$, Φ_n — ядро Фейера.

2) Докажите, что суммы Фейера не могут быстро сходиться: либо при некотором $\delta>0$ $\|f-\sigma_n(f)\|_1\geqslant\frac{\delta}{n}>0$ для всех $n\in\mathbb{N}$, либо $f\equiv\mathrm{const}$ почти везде. Указание. Вычислите коэффициенты Фурье разности $f-\sigma_n(f)$ и примените неравенство а) п. 3.2.

*) Сергей Натанович **Бернштейн**, 1880–1968, — российский математик.

3) Дополните результат следствия 2 п. 4.1, доказав, что $\|S_n(f)-f\|_\infty \leqslant C\,L\,\frac{\ln n}{n}$ при $\alpha=1$. Указание. Оценивая интеграл $S_n(f,x)-f(x)=\int_{-\pi}^{\pi}(f(x-u)-f(x))D_n(u)du$, на каждом промежутке $[\frac{2k-1}{n+\frac12}\pi,\,\frac{2k+1}{n+\frac12}\pi]$ замените разность $f(x-u)-f(x)$ её значением в середине этого промежутка, а затем убедитесь в том, что интеграл по нему от ядра Дирихле допускает оценку $O\big(\frac{1}{k^2}\big)$.

4) Докажите, что косинус-коэффициенты Фурье могут стремиться к нулю сколь угодно медленно: для любой убывающей к нулю последовательности $\{c_n\}_{n\geqslant1}$ можно найти такую функцию $f\in\widetilde{\mathscr{L}}^1$, что $c_n\leqslant a_n(f)$ при всех $n\in\mathbb{N}$. Указание. Мажорируйте $\{c_n\}_{n\geqslant1}$ выпуклой последовательностью и примените теорему 4.2.

5) Пусть последовательность коэффициентов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n\cos nx$ выпукла. Докажите, что ограниченность $\mathscr{L}^1$-норм частичных сумм ряда и его сходимость в $\widetilde{\mathscr{L}}^1$ равносильны соответственно соотношениям $c_n=O\big(\frac{1}{\ln n}\big)$ и $c_n=o\big(\frac{1}{\ln n}\big)$ при $n\to\infty$.

6) Пусть $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n\sin nx$, $c_n\downarrow0$. Докажите, что ограниченность и непрерывность функции S равносильны соответственно соотношениям $c_n=O\big(\frac1n\big)$ и $c_n=o\big(\frac1n\big)$.

7) Докажите, что для функций $f\in\widetilde{\mathscr{L}}^1$, $g\in\widetilde{\mathscr{L}}^\infty$ справедлив следующий вариант формулы Парсеваля: ряд $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(n)\overline{\widehat{g}(n)}$ сходится по Чезаро к $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g(x)}\,dx$.

8) Докажите, что ряд Фурье любой функции f из $\widetilde{\mathscr{L}}^1(\mathbb{R}^m)$ можно почленно интегрировать по любому прямоугольному параллелепипеду P:

$$\int_P f(x)\,dx=\sum_{n\in\mathbb{Z}^m}\widehat{f}(n)\int_P e^{i\langle n,x\rangle}dx$$

(сумма ряда в правой части этого равенства понимается как предел частичных сумм по прямоугольникам).

9) Пусть функция $f\in\widetilde{\mathscr{L}}^1(\mathbb{R}^m)$ такова, что $\widehat{f}(n)\geqslant0$ для всех $n\in\mathbb{Z}^m$. Докажите, что если f непрерывна в нуле или ограничена, то её ряд Фурье абсолютно сходится (поэтому f почти везде совпадает с функцией класса $\widetilde{C}$). Указание. Воспользуйтесь ограниченностью сумм $\sigma_n(f,0)$.

10) Для построения непрерывной функции двух переменных, у которой ряд Фурье расходится всюду в квадрате $(0,2\pi)^2$ (см. п. 4.6), докажите, что в каждой его точке суммы Фурье $S_{j,k}(f_N)$ функции $f_N(s,t)=e^{iNst}$ $(N\geqslant1,\,0<s,\,t<2\pi)$ по прямоугольникам $[-j,j]\times[-k,k]$ удовлетворяют неравенствам (константы в O-членах зависят только от s и t):

а) $|S_{j,k}(f_N;s,t)|=O(\ln j)$;

б) если $k>2\pi N$, то $|S_{j,k}(f_N;s,t)|=O\big(1+\frac{\ln j}{k-2\pi N}\big)$;

в) $|S_{j,k}(f_N;s,t)|\geqslant\frac{1}{2\pi}\ln N+O(1)$ при $j=[Ns]$ и $k=[Nt]$.

Выведите отсюда, что при достаточно малом $r>0$ и $N_n=e^{n!}$ ряд Фурье функции $F(s,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}r^n\,e^{iN_nst}$ неограниченно расходится (суммы $S_{j,k}(F)$ не ограничены) в каждой точке квадрата $(0,2\pi)^2$.

§ 5. Преобразование Фурье

5.1. Определение. *Преобразование Фурье* $\widehat{f}$ функции f из $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^m)$ определяется равенством

$$\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\, e^{-2\pi i\langle y,x\rangle}\, dx \qquad (y \in \mathbb{R}^m)$$

(здесь, как и раньше, $\langle y, x\rangle$ — скалярное произведение векторов y и x).

Из теоремы VII.1.3 о непрерывности интеграла, зависящего от параметра, следует, что функция $\widehat{f}$ непрерывна. Она ограничена, так как

$$|\widehat{f}(y)| \leqslant \|f\|_1 \quad \text{для всех} \quad y \in \mathbb{R}^m.$$

Кроме того, по теореме Римана–Лебега $\widehat{f}(y) \to 0$ при $\|y\| \to +\infty$.

Напомним, что сдвиг f_h функции f на фиксированный вектор $h \in \mathbb{R}^m$ определяется равенством $f_h(x) = f(x-h)$. Несложные вычисления показывают, как связаны $\widehat{f}$ и $\widehat{f_h}$ (см. также упр. 1):

$$\widehat{f_h}(y) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x-h)\, e^{-2\pi i\langle y,x\rangle} dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(t)\, e^{-2\pi i\langle y,t+h\rangle} dt = e^{-2\pi i\langle y,h\rangle}\, \widehat{f}(y).$$

Другая операция с аргументом функции — сжатие — также просто связана с преобразованием Фурье: если $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $g(x) = f(ax)$, то

$$\widehat{g}(y) = \int_{\mathbb{R}^m} f(ax)\, e^{-2\pi i\langle y,x\rangle} dx = \frac{1}{|a|^m} \int_{\mathbb{R}^m} f(t)\, e^{-2\pi i \frac{1}{a}\langle y,t\rangle} dt = \frac{1}{|a|^m} \widehat{f}\big(\tfrac{y}{a}\big).$$

Важное свойство преобразования Фурье состоит в том, как оно действует на свёртку.

Теорема. *Если* $f, g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^m)$, *то* $\widehat{f * g}(y) = \widehat{f}(y)\, \widehat{g}(y) \quad (y \in \mathbb{R}^m)$. Кроме того, $\int_{\mathbb{R}^m} \widehat{f}(y)\, g(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^m} f(y)\, \widehat{g}(y)\, dy$.

Доказательство получается почти дословным повторением соответствующего рассуждения о коэффициентах Фурье (см. свойство д) п. 3.2):

$$\begin{aligned}
\widehat{f * g}(y) &= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(u) g(x-u)\, du \right) e^{-2\pi i\langle y,x\rangle}\, dx = \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} f(u)\, e^{-2\pi i\langle y,u\rangle} \left(\int_{\mathbb{R}^m} g(x-u)\, e^{-2\pi i\langle y,x-u\rangle}\, dx \right) du = \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} f(u)\, e^{-2\pi i\langle y,u\rangle} \left(\int_{\mathbb{R}^m} g(v)\, e^{-2\pi i\langle y,v\rangle}\, dv \right) du = \widehat{f}(y)\widehat{g}(y).
\end{aligned}$$

Второе равенство доказывается аналогично. ►

Приведём некоторые примеры.

Пример 1. Преобразование Фурье характеристической функции χ промежутка $(-1,1)$ вычисляется совсем просто:

$$\widehat{\chi}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi(x)\, e^{-2\pi i y x}\, dx = \int_{-1}^{1} e^{-2\pi i y x}\, dx = \frac{\sin 2\pi y}{\pi y}.$$

Отметим, что $\widehat{\chi} \notin \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ (это установлено в примере 1 п. IV.6.6).

Пример 2. Рассмотрим функцию $f_t(x) = e^{-\pi t^2 x^2}$ $(x \in \mathbb{R},\ t > 0)$. Её преобразование Фурье по существу вычислено в примере 1 п. VII.1.6:

$$\widehat{f_t}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2 x^2}\, e^{-2\pi i y x}\, dx = 2\int_0^{\infty} e^{-\pi t^2 x^2} \cos 2\pi y x\, dx = \frac{1}{t} e^{-\frac{\pi}{t^2} y^2}. \tag{1}$$

Интересно отметить, что $\widehat{f_t} = \frac{1}{t} f_{\frac{1}{t}}$ и, в частности, $\widehat{f_1} = f_1$.

Из равенства (1) непосредственно вытекает и его многомерный вариант:

$$\int_{\mathbb{R}^m} e^{-\pi t^2 \|x\|^2}\, e^{-2\pi i \langle y,x\rangle}\, dx = \frac{1}{t^m}\, e^{-\frac{\pi}{t^2}\|y\|^2}. \tag{1'}$$

Пример 3. Пусть $f(x) = e^{-|x|}$ $(x \in \mathbb{R})$. Тогда

$$\widehat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\, e^{-2\pi i y x}\, dx = 2\mathcal{R}e\left(\int_0^{\infty} e^{-(1+2\pi i y)x}\, dx\right) = \mathcal{R}e\frac{2}{1+2\pi i y} = \frac{2}{1+(2\pi y)^2}.$$

Пример 4. Получить многомерное обобщение примера 3, т. е. вычислить преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-\|x\|}$ $(x \in \mathbb{R}^m)$, значительно труднее, поскольку в этом случае нельзя использовать разделение переменных. Возникшее затруднение удаётся преодолеть с помощью искусственного приёма, основанного на интегральном представлении функции $e^{-\|x\|}$. Нам потребуется формула:

$$e^{-t} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u^2 - \frac{t^2}{4u^2}}\, du \quad \text{для любого} \quad t > 0.$$

Чтобы получить её, надо записать интеграл, стоящий в правой части, в виде $e^{-t}\int_0^{\infty} e^{-(u-\frac{t}{2u})^2} du$. После замены переменной $v = u - \frac{t}{2u}$ он сводится к интегралу Эйлера–Пуассона $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} dv = \sqrt{\pi}$.

Воспользуемся теперь установленным равенством для вычисления $\widehat{f}$:

$$\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\|x\|} e^{-2\pi i \langle y,x\rangle} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_0^{\infty} e^{-u^2 - \frac{\|x\|^2}{4u^2}} du\right) e^{-2\pi i \langle y,x\rangle}\, dx.$$

Изменив порядок интегрирования и применив затем равенство (1′) с $t = \frac{1}{2\sqrt{\pi} u}$, мы получим

$$\widehat{f}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} \left(\int_{\mathbb{R}^m} e^{-\frac{\|x\|^2}{4u^2}}\, e^{-2\pi i \langle y,x\rangle}\, dx\right) du =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-u^2} (2\sqrt{\pi} u)^m e^{-4\pi^2 u^2 \|y\|^2}\, du = 2^{m+1} \pi^{\frac{m-1}{2}} \int_0^{\infty} u^m e^{-(1+4\pi^2\|y\|^2)u^2} du.$$

Теперь замена переменной $v = \bigl(1+4\pi^2\|y\|^2\bigr)u^2$ позволяет выразить последний интеграл с помощью функции Γ, и мы получаем искомый результат:

$$\widehat{f}(y) = 2^m \pi^{\frac{m-1}{2}} \frac{\Gamma\bigl(\frac{m+1}{2}\bigr)}{(1+4\pi^2\|y\|^2)^{\frac{m+1}{2}}}.$$

Пример 5. Пусть a, $u > 0$ и $f(x) = x^{a-1}e^{-ux}$ при $x > 0$, $f(x) = 0$ при $x < 0$. Тогда $\widehat{f}(y) = \frac{\Gamma(a)}{(u+2\pi i y)^a}$ (используется ветвь степенно́й функции z^a, равная единице при $z = 1$). Это установлено в примере 1 п. VII.1.7.

Прежде чем переходить к более подробному изучению свойств преобразования Фурье, продемонстрируем полезность этого понятия на ещё одном примере.

Пример 6. Пусть функция f из $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ равна нулю вне $(-\pi,\pi)$ и пусть f_0 — её 2π-периодическое продолжение с этого промежутка на $\mathbb{R}$ ($f_0 \in \widetilde{\mathscr{L}}^1$). Коэффициенты Фурье функции f_0 просто выражаются с помощью преобразования Фурье функции f: $\widehat{f_0}(n) = \frac{1}{2\pi}\widehat{f}\bigl(\frac{n}{2\pi}\bigr)$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим ещё функцию $g(x) = e^{itx}$ при $x \in (-\pi,\pi)$, где t — фиксированное число. Так как её коэффициенты Фурье равны

$$\widehat{g}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(t-n)x}dx = \frac{\sin\pi(t-n)}{\pi(t-n)},$$

то обобщённая формула Парсеваля (см. теорему 2 п. 3.6) даёт нам

$$\widehat{f}\Bigl(\frac{t}{2\pi}\Bigr) = \int_{-\pi}^{\pi} f_0(x)\overline{g}(x)\,dx = 2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f_0}(n)\overline{\widehat{g}(n)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{f}\Bigl(\frac{n}{2\pi}\Bigr)\frac{\sin\pi(t-n)}{\pi(t-n)}.$$

Таким образом, для функции $F(t) = \widehat{f}(\frac{t}{2\pi})$ справедлива *формула отсчётов*:

$$F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(n)\frac{\sin\pi(t-n)}{\pi(t-n)} = \frac{\sin\pi t}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{t-n}F(n).$$

Она позволяет восстановить значение функции F в произвольной точке t по её значениям на целочисленной решётке. Этот факт играет большую роль в оптике и радиотехнике, так как иметь дело с дискретной системой значений проще, чем с непрерывно меняющимся сигналом. Многомерный вариант формулы отсчётов приведён в упр. 3.

5.2. Установим простейшие свойства преобразования Фурье, связанные с дифференцированием.

Теорема. *Пусть $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^m)$. Тогда*

1) если при некотором $k = 1,\dots,m$ существует суммируемая и непрерывная частная производная $g = \frac{\partial f}{\partial x_k}$, то

$$\widehat{g}(y) = 2\pi i y_k \widehat{f}(y) \qquad (y \in \mathbb{R}^m);$$

2) если произведение $\|x\|f(x)$ суммируемо, то $\widehat{f} \in C^1(\mathbb{R}^m)$ и для всех $y \in \mathbb{R}^m$ и $k = 1,\dots,m$ справедливо равенство

$$\frac{\partial\widehat{f}(y)}{\partial y_k} = -2\pi i\widehat{f_k}(y), \qquad \text{где} \quad f_k(x) = x_k f(x) \quad (x \in \mathbb{R}^m).$$

Доказательство. 1) Не умаляя общности будем считать $k = m$. Точку $x = (x_1, \dots, x_{m-1}, t)$ отождествим с парой (u, t), где $u = (x_1, \dots, x_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}$. Убедимся сначала, что $f(u,t) \to 0$ при $t \to \pm\infty$ для почти всех точек $u \in \mathbb{R}^{m-1}$. Действительно, так как производная $f'_t = g$ непрерывна, то

$$f(u,t) - f(u,0) = \int_0^t g(u,s)\,ds.$$

Как следует из теоремы Фубини, функция $t \mapsto g(u,t)$ суммируема при почти всех u и поэтому

$$f(u,t) - f(u,0) = \int_0^t g(u,s)\,ds \underset{t\to\pm\infty}{\longrightarrow} \int_0^{\pm\infty} g(u,s)\,ds.$$

Таким образом, при почти всех $u \in \mathbb{R}^{m-1}$ существуют конечные пределы $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f(u,t)$. Но так как (снова по теореме Фубини) функция $t \mapsto f(u,t)$ суммируема при почти всех u, то при таких u они равны нулю, и мы видим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(u,t)\,e^{-2\pi i y_m t}\,dt = f(u,t)\,e^{-2\pi i y_m t}\Big|_{-\infty}^{\infty} - (-2\pi i y_m)\int_{-\infty}^{\infty} f(u,t)\,e^{-2\pi i y_m t}\,dt =$$
$$= 2\pi i y_m \int_{-\infty}^{\infty} f(u,t)\,e^{-2\pi i y_m t}\,dt.$$

Чтобы получить требуемый результат, остаётся домножить это равенство на $e^{-2\pi i(y_1x_1+\dots+y_{m-1}x_{m-1})}$ и проинтегрировать по u.

Для получения равенства 2) надо применить правило Лейбница (см. п. VII.1.5). По условию функции $f_1, \dots, f_m$ суммируемы. Поэтому их преобразования Фурье, а вместе с ними и частные производные первого порядка функции $\widehat{f}$, всюду непрерывны. Следовательно, $\widehat{f} \in C^1(\mathbb{R}^m)$. ▶

Следствие. *Если $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^m)$ — финитная функция, то $\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$; если $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, то для любого $p > 0$ произведение $\|y\|^p \widehat{f}(y)$ суммируемо в $\mathbb{R}^m$.*

Доказательство. Бесконечная дифференцируемость $\widehat{f}$ непосредственно следует из второго утверждения теоремы, поскольку произведение $\|x\|^n f(x)$ суммируемо при любом $n \in \mathbb{N}$.

Если $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, то производные функции f любого порядка суммируемы и при всех $k = 1, \dots, m$ и $n \in \mathbb{N}$

$$\Big(\frac{\partial^n f}{\partial y_k^n}\Big)^{\widehat{}}(y) = (2\pi i y_k)^n \widehat{f}(y).$$

Ввиду ограниченности $\big(\frac{\partial^n f}{\partial y_k^n}\big)^{\widehat{}}(y)$ отсюда вытекает оценка

$$|\widehat{f}(y)| \leqslant \mathrm{const} \cdot \big(1 + |y_1|^n + \dots + |y_m|^n\big)^{-1},$$

обеспечивающая (если взять n достаточно большим) суммируемость $\|y\|^p \widehat{f}(y)$. ▶

Во многих задачах важна скорость убывания преобразования Фурье на бесконечности. Доказанная теорема показывает, что быстрое убывание может быть обеспечено гладкостью функции. Насколько точны эти условия? Что можно ожидать, если гладкость теряется на "небольшом" множестве? Следующие примеры посвящены таким результатам.

Пример 1. Дополняя примеры 2 и 3 п. 5.1, исследуем асимптотику на бесконечности преобразования Фурье функции $f(x) = e^{-|x|^p}$ при $0 < p < 2$. После интегрирования по частям мы видим, что

$$\widehat{f}(y) = 2\int_0^\infty e^{-x^p}\cos(2\pi xy)\,dx = \frac{p}{\pi y}\int_0^\infty e^{-x^p}\,x^{p-1}\sin(2\pi xy)\,dx, \tag{2}$$

откуда следует грубая оценка $\widehat{f}(y) = o\big(\frac{1}{y}\big)$ при $y \to +\infty$. Изучим детальнее поведение $\widehat{f}(y)$ при больших y. В случае $0 < p < 1$ замена $2\pi xy = u$ приводит к равенству

$$\widehat{f}(y) = \frac{2p}{(2\pi y)^{p+1}}\int_0^\infty e^{-\left(\frac{u}{2\pi y}\right)^p}\frac{\sin u}{u^{1-p}}\,du.$$

Интеграл $\int_0^\infty \frac{\sin u}{u^{1-p}}\,du$ от предельной (при $y \to +\infty$) функции сходится и в силу следствия 2 п. VII.4.7 допустим предельный переход:

$$\int_0^\infty e^{-\left(\frac{u}{2\pi y}\right)^p}\frac{\sin u}{u^{1-p}}\,du \underset{y\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^\infty \frac{\sin u}{u^{1-p}}\,du = \Gamma(p)\,\sin\,\frac{\pi p}{2}$$

(равенство установлено в примере 1 п. VII.4.8). Следовательно, для $0 < p < 1$

$$\widehat{f}(y) \sim \frac{C_p}{y^{p+1}} \qquad \text{при} \quad y \to +\infty \tag{3}$$

с константой $C_p = \frac{2\Gamma(p+1)}{(2\pi)^{p+1}}\,\sin\frac{\pi p}{2}$. Отсюда, в частности, следует суммируемость $\widehat{f}$.

Пусть теперь $1 < p < 2$ (случай $p = 1$ рассмотрен в примере 3 п. 5.1). Ещё раз проинтегрировав по частям правую часть (2), приходим к равенству

$$\widehat{f}(y) = \frac{p}{2(\pi y)^2}\left((p-1)\int_0^\infty x^{p-2}e^{-x^p}\cos(2\pi yx)\,dx - p\int_0^\infty x^{2(p-1)}e^{-x^p}\cos(2\pi yx)\,dx\right).$$

Здесь второй интеграл допускает оценку $o\big(\frac{1}{y}\big)$ при $y \to +\infty$, а первый стремится к нулю медленнее. Действительно, почти дословное повторение рассуждения, проведённого для $0 < p < 1$, даёт нам:

$$\int_0^\infty x^{p-2}\,e^{-x^p}\cos(2\pi yx)\,dx \underset{y\to+\infty}{\sim} \frac{1}{(2\pi y)^{p-1}}\Gamma(p-1)\sin\frac{\pi p}{2}.$$

Таким образом, мы снова приходим к соотношению (3), которое справедливо и при $p = 1$; при $p = 2$ коэффициент C_p обращается в нуль, и асимптотика $\widehat{f}$, совершенно меняется (см. примеры 2 и 3 п. 5.1).

Можно доказать, что $\widehat{f}(y) > 0$ при $0 < p \leqslant 2$ (при $0 < p \leqslant 1$ это следует из выпуклости функции e^{-x^p} и результата примера 2 п. IV.6.6).

Пример 2. Выясним, сколь быстро убывает на бесконечности преобразование Фурье характеристической функции единичного шара

$$\widehat{\chi}_B(y) = \int_B e^{-2\pi i\langle y,x\rangle}\,dx = \int_B e^{-2\pi i\|y\|x_1}\,dx = \alpha_{m-1}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\frac{m-1}{2}}e^{-2\pi i\|y\|t}\,dt$$

(α_{m-1} — объём единичного шара в $\mathbb{R}^{m-1}$). При нечётном m "интеграл берётся", и $\widehat{\chi}_B$ можно в явном виде выразить через $\|y\|$. В частности, в одномерном случае $B=(-1,1)$ и $\widehat{\chi}_B(y)=\frac{\sin 2\pi y}{\pi y}$. При $m=3$ $\widehat{\chi}_B(y)=\frac{1}{\pi\|y\|^2}\bigl(\frac{\sin 2\pi\|y\|}{2\pi\|y\|}-\cos 2\pi\|y\|\bigr)$ (это следует также из результата примера п. VI.2.5 с $f_0=\chi_{(0,1)}$).

При чётном m ситуация сложнее — χ_B выражается через функции Бесселя. Однако для нас главный интерес представляет не точная формула для $\widehat{\chi}_B(y)$, а асимптотика этой функции при $\|y\|\to+\infty$. Для её исследования положим $r=2\pi\|y\|$ и рассмотрим интегралы

$$I_m(r)=\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\frac{m-1}{2}}\,e^{-irt}\,dt \qquad (m=0,1,2,\dots).$$

Чем больше m, тем больше производных функции $(1-t^2)^{\frac{m-1}{2}}$ обращается в нуль на концах промежутка интегрирования. Поэтому с ростом m возрастает и скорость стремления интегралов $I_m(r)$ к нулю при $r\to+\infty$. Чтобы описать её детальнее, воспользуемся рекуррентной формулой

$$I_m(r)=\frac{m-1}{r^2}\Bigl((m-2)I_{m-2}(r)-(m-3)I_{m-4}(r)\Bigr) \qquad (m\geqslant 4),$$

которую легко получить двукратным интегрированием по частям. Из неё видно, что для получения асимптотики интеграла $I_m(r)$ достаточно в зависимости от чётности m знать лишь асимптотику интегралов $I_0(r)$ и $I_2(r)$ или $I_1(r)$ и $I_3(r)$. Интегралы $I_1(r)$ и $I_3(r)$ легко вычисляются:

$$I_1(r)=2\frac{\sin r}{r}; \qquad I_3(r)=\frac{4}{r^2}\Bigl(\frac{\sin r}{r}-\cos r\Bigr).$$

Интегралы $I_0(r)$ и $I_2(r)$ совпадают с интегралами $C(r)$ и $S(r)$, рассмотренными в примере п. IX.2.5:

$$I_0(r)=C(r)=\sqrt{\frac{\pi}{r}}\,(\sin r+\cos r)+O\Bigl(\frac{1}{r}\Bigr), \quad I_2(r)=S(r)=\frac{\sqrt{\pi}}{r^{3/2}}\,(\sin r-\cos r)+O\Bigl(\frac{1}{r^2}\Bigr).$$

Последние четыре формулы можно записать единообразно: для $m=0,1,2,3$

$$I_m(r)=\frac{\gamma_m}{r^{\frac{m+1}{2}}}\cos(r-\varphi_m)+O\Bigl(\frac{1}{r^{\frac{m}{2}+1}}\Bigr) \quad (r\to+\infty),$$

где $\varphi_m=\frac{\pi}{4}(m+1)$, а γ_m — положительный коэффициент, зависящий только от m. Рекуррентная формула позволяет распространить это соотношение на все натуральные значения m.

Возвращаясь к преобразованию Фурье функции χ_B, мы видим, что

$$\widehat{\chi}_B(y) = \alpha_{m-1} I_m\big(2\pi\|y\|\big) = \frac{C_m}{\|y\|^{\frac{m+1}{2}}}\cos(2\pi\|y\| - \varphi_m) + O\Big(\frac{1}{\|y\|^{\frac{m}{2}+1}}\Big).$$

Можно проверить, что $C_m = \frac{1}{\pi}$ для всех m.

Интересно сравнить $\widehat{\chi}_B$ с функцией $\widehat{\chi}_Q$, где $Q = (-1,1)^m$. Ясно, что

$$\widehat{\chi}_Q(y) = \prod_{j=1}^{m} \frac{\sin 2\pi y_j}{\pi y_j}.$$

Если углы между вектором y и координатными осями отделены от нуля, то эта функция допускает оценку $O\big(\|y\|^{-m}\big)$ и, таким образом, для большинства направлений она убывает значительно быстрее, чем $\widehat{\chi}_B$. Одно из возможных уточнений этого утверждения таково: при $R \to +\infty$ интегралы $L_B(R) = \int_{\|y\|<R} |\widehat{\chi}_B(y)|\,dy$ растут существенно быстрее интегралов $L_Q(R) = \int_{\|y\|<R} |\widehat{\chi}_Q(y)|\,dy$. Действительно,

$$L_Q(R) \leqslant \int_{[-R,R]^m} |\widehat{\chi}_Q(y)|\,dy = \prod_{j=1}^{m} \int_{-R}^{R} \left|\frac{\sin 2\pi y_j}{\pi y_j}\right| dy_j = \left(\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi R} \frac{|\sin t|}{t}\,dt\right)^m.$$

Отсюда следует, что $L_Q(R) = O(\ln^m R)$ при $R \to +\infty$. В то же время для $m > 2$

$$\begin{aligned} L_B(R) &= \alpha_m \int_0^R \left|\frac{C_m}{r^{\frac{m+1}{2}}}\cos(2\pi r - \varphi_m) + O\Big(\frac{1}{r^{\frac{m}{2}+1}}\Big)\right| r^{m-1} dr = \\ &= \alpha_m C_m \int_0^R r^{\frac{m-3}{2}} |\cos(2\pi r - \varphi_m)|\,dr + O(R^{\frac{m}{2}-1}) \end{aligned}$$

(при $m = 2$ остаточный член имеет порядок $O(\ln R)$). Поэтому $L_B(R) = O\big(R^{\frac{m-1}{2}}\big)$, причём эта оценка точна по порядку:

$$\begin{aligned} L_B(R) &\geqslant \alpha_m C_m \int_{R/2}^R r^{\frac{m-3}{2}} \cos^2(2\pi r - \varphi_m)\,dr + O(R^{\frac{m}{2}-1}) \geqslant \\ &\geqslant \mathrm{const}\, R^{\frac{m-3}{2}} \int_{R/2}^R \big(1 + \cos 2(2\pi r - \varphi_m)\big)\,dr + O(R^{\frac{m}{2}-1}) = \frac{\mathrm{const}}{2} R^{\frac{m-1}{2}} + O(R^{\frac{m}{2}-1}). \end{aligned}$$

Пример 3. Из теоремы следует, что условие $f(x) = O\big(\|x\|^{-p}\big)$ при $\|x\| \to +\infty$ обеспечивает гладкость преобразования Фурье, если $p > m+1$. Оказывается, существенно ослабить это ограничение нельзя. Чтобы убедиться в этом, покажем, что в случае, когда $f(x) \sim \|x\|^{-p}$ при $\|x\| \to +\infty$, дифференцируемость $\widehat{f}$ в нуле влечёт неравенство $p > m+1$.

Не умаляя общности можно считать, что $f \geqslant 0$, поскольку по условию $f(x) \geqslant 0$ при больших $\|x\|$, а изменив функцию в произвольном шаре (например, положив её равной нулю), мы изменим её преобразование Фурье на бесконечно дифференцируемую функцию.

Считая $f \geqslant 0$, исследуем среднее значение разности $\widehat{f}(0) - \widehat{f}$ вблизи нуля (далее B — шар единичного радиуса с центром в нуле, v — его объём). Положим

$$I(r) = \frac{1}{v} \int_B \big(\widehat{f}(0) - \widehat{f}(ry)\big)\, dy.$$

Из дифференцируемости $\widehat{f}$ в нуле сразу следует, что $I(r) = o(r)$ при $r \to +0$. Оценим теперь интеграл $I(r)$ снизу. Так как

$$\widehat{f}(0) - \widehat{f}(ry) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\Big(1 - e^{-2\pi i r\langle y,x\rangle}\Big) dx,$$

то с помощью теоремы Фубини мы получаем

$$I(r) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\bigg(1 - \frac{1}{v}\int_B e^{-2\pi i r s\langle y,x\rangle}\, dy\bigg) dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\Big(1 - \frac{1}{v}\widehat{\chi}(rx)\Big)\, dx,$$

где χ — характеристическая функция шара B. Очевидно, $\widehat{\chi}(x) \in \mathbb{R}$, $|\widehat{\chi}(x)| \leqslant v$ и по теореме Римана–Лебега $\widehat{\chi}(x) \to 0$ при $\|x\| \to +\infty$. Возьмём столь большой радиус R, что $f(x) > \frac{1}{2\|x\|^p}$ и $|\widehat{\chi}(x)| < \frac{v}{2}$ при $\|x\| > R$. Тогда, так как $f \geqslant 0$, то

$$I(r) \geqslant \int_{\|x\| > \frac{R}{r}} f(x)\Big(1 - \frac{1}{v}\widehat{\chi}(rx)\Big)\, dx \geqslant \frac{1}{4}\int_{\|x\| > \frac{R}{r}} \frac{dx}{\|x\|^p} = \frac{\sigma(S^{m-1})}{4}\int_{\frac{R}{r}} \frac{dt}{t^{p-m+1}}.$$

Итак, $I(r) \geqslant \operatorname{const} r^{p-m}$. Поскольку $I(r) = o(r)$ при $r \to 0$, отсюда следует, что $p > m + 1$.

5.3. В одномерном случае для дифференцируемой в точке x функции f справедлива важная формула, позволяющая найти $f(x)$ с помощью $\widehat{f}$. Эта формула, называемая *формулой обращения*, имеет следующий вид:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y)\, e^{2\pi i x y}\, dy.$$

Интеграл в правой части этого равенства называется *интегралом Фурье* функции f. Вообще говоря, это несобственный интеграл, поскольку преобразование Фурье может быть несуммируемым на $\mathbb{R}$ (см. пример 1 п. 5.1). Мы будем говорить, что он сходится, если существует конечный предел частичных интегралов

$$I_A(f, x) = \int_{-A}^{A} \widehat{f}(y)\, e^{2\pi i x y} dy$$

при $A \to +\infty$.

Очевидна аналогия между разложением периодической функции в ряд Фурье и представлением непериодической функции её интегралом Фурье. Следующая теорема показывает, что у этих двух задач есть не только внешнее сходство, но и тесная связь по существу. Чтобы показать это, нам потребуется несложная

Лемма. *Пусть $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ и $x \in \mathbb{R}$. Тогда для любого $A > 0$ справедливо равенство*

$$I_A(f,x) = \int_{-A}^{A} \widehat{f}(y)\, e^{2\pi i x y} dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\, \frac{\sin 2\pi A t}{\pi t}\, dt.$$

Доказательство. Ясно, что

$$I_A(f,x) = \int_{-A}^{A} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{2\pi i (x-u) y} du \right) dy.$$

Поскольку функция $(y,u) \mapsto f(u)\, e^{2\pi i (x-u) y}$ суммируема в полосе $(-A,A)\times\mathbb{R}$, мы можем воспользоваться теоремой Фубини:

$$I_A(f,x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-A}^{A} f(u)\, e^{2\pi i (x-u) y} dy \right) du = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, \frac{\sin 2\pi A (x-u)}{\pi (x-u)}\, du.$$

Осталось сделать замену переменной интегрирования $t = x - u$. ►

По теореме Римана–Лебега для любого $\delta > 0$ интеграл $\int_{|t|\geqslant\delta} f(x-t)\, \frac{\sin 2\pi A t}{\pi t}\, dt$ бесконечно мал при $A \to +\infty$. Поэтому из леммы вытекает асимптотическое соотношение

$$I_A(f,x) = \int_{-\delta}^{\delta} f(x-t)\, \frac{\sin 2\pi A t}{\pi t}\, dt + o(1) \quad \text{при} \quad A \to +\infty \tag{4}$$

(для частичных сумм ряда Фурье подобный результат нам уже известен — см. равенство (5′) п. 3.4). Таким образом, поведение интегралов $I_A(f,x)$ при $A \to +\infty$ определяется лишь значениями функции f, которые она принимает вблизи точки x. Говоря иными словами, для интегралов Фурье справедлив тот же принцип локализации, что и для рядов Фурье. Более того, несложно доказывается равносходимость разложений в ряд и интеграл Фурье. Точнее, справедлива следующая

Теорема. *Если функции $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ и $f_0 \in \widetilde{\mathscr{L}}^1$ совпадают в некоторой окрестности точки x, то в этой точке сходимость интеграла Фурье для f равносильна сходимости ряда Фурье функции f_0, и в случае сходимости справедливо равенство*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y)\, e^{2\pi i x y} dy = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f_0}(n)\, e^{inx}.$$

Из теоремы, очевидно, следует, что на интегралы Фурье переносятся признаки сходимости рядов Фурье, полученные в п. 3.4. В частности, формула обращения справедлива в точке x, если в ней выполнено условие Дини с $C = f(x)$. Формулировку аналога признака Дирихле–Жордана мы оставляем читателю.

Доказательство. Покажем, что справедливо соотношение

$$I_A(f,x) - S_{[2\pi A]}(f_0,x) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0,$$

где $[u]$, как обычно, — целая часть числа u.

Пусть $f(x-t) = f_0(x-t)$ при $|t| < \delta$, где $0 < \delta < \pi$. Согласно равенству (4) и равенству (5′) п. 3.4 при $A, n \to +\infty$

$$I_A(f,x) = \int_{-\delta}^{\delta} f(x-t)\,\frac{\sin 2\pi At}{\pi t}\,dt + o(1) = \int_{-\delta}^{\delta} f_0(x-t)\,\frac{\sin 2\pi At}{\pi t}\,dt + o(1),$$
$$S_n(f_0,x) = \int_{-\pi}^{\pi} f_0(x-t)\,\frac{\sin nt}{\pi t}\,dt + o(1) = \int_{-\delta}^{\delta} f_0(x-t)\,\frac{\sin nt}{\pi t}\,dt + o(1).$$

Если $2\pi A = n \in \mathbb{N}$, то отсюда непосредственно вытекает доказываемое соотношение. Если же число $2\pi A$ не целое, то при $n = [2\pi A]$ справедлива оценка $n < 2\pi A < n+1$, и поэтому

$$|I_A(f,x) - I_{n/2\pi}(f,x)| \leqslant \int_{A-\frac{1}{2\pi}}^{A} |\widehat{f}(y)|\,dy + \int_{-A}^{-A+\frac{1}{2\pi}} |\widehat{f}(y)|\,dy \leqslant 2 \max_{|y|\geqslant A-1} |\widehat{f}(y)| \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Таким образом,

$$I_A(f,x) - S_n(f_0,x) = \Big(I_A(f,x) - I_{n/2\pi}(f,x)\Big) + \Big(I_{n/2\pi}(f,x) - S_n(f_0,x)\Big),$$

где каждая из разностей в правой части бесконечно мала при $A \to +\infty$. ▶

Обратимся ещё раз к примерам 2 и 3, рассмотренным в п. 5.1.

Пример 1. Из теоремы следует, что для функции $f_t(x) = e^{-\pi t^2 x^2}$ $(x \in \mathbb{R},\ t > 0)$ формула обращения справедлива. Впрочем, это вытекает уже и из равенства $\widehat{f_t} = \frac{1}{t} f_{\frac{1}{t}}$, установленного в примере 2 п. 5.1. В самом деле, так как функция $\widehat{f_t}$ чётна и суммируема, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f_t}(y)\,e^{2\pi ixy}\,dy = \big(\widehat{f_t}\big)\widehat{\ }(x) = \frac{1}{t}\big(f_{\frac{1}{t}}\big)\widehat{\ }(x) = f_t(x).$$

Пример 2. Функция $f(x) = e^{-|x|}$ $(x \in \mathbb{R})$ в каждой точке (в том числе и в нуле) удовлетворяет условию Дини. Её преобразование Фурье вычислено в примере 3 п. 5.1. Согласно формуле обращения

$$e^{-|x|} = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y)\,e^{2\pi iyx}\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\,e^{2\pi iyx}}{1+4\pi^2y^2}\,dy = \int_0^{\infty} \frac{4\cos 2\pi yx}{1+4\pi^2y^2}\,dy = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\cos xt}{1+t^2}\,dt.$$

Таким образом, мы ещё раз получили значение интеграла Лапласа

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos xt}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}\,e^{-|x|},$$

вычисленное другим способом в примере 2 п. VII.4.8.

5.4. При обобщении формулы обращения на случай функции нескольких переменных мы ограничимся наиболее важным случаем, предположив, что преобразование

Фурье суммируемо. Отметим в связи с этим, что условие Дини, обеспечивающее справедливость формулы обращения в одномерном случае, — локальное свойство суммируемой функции, в то время как суммируемость преобразования Фурье определяется её поведением всюду.

В отличие от одномерной ситуации, теперь при выводе формулы обращения мы не можем опираться на равносходимость разложений в ряд и интеграл Фурье, поскольку теорема 5.3 не переносится на кратный случай (см. упр. 6).

Преобразование, сопоставляющее функции $g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^m)$ функцию $\breve{g}$, определяемую равенством

$$\breve{g}(x) = \int_{\mathbb{R}^m} g(y)\, e^{2\pi i \langle x,y\rangle}\, dy \qquad (x \in \mathbb{R}^m),$$

называется *обратным преобразованием Фурье*. Очевидно, $\breve{g}(x) = \widehat{g}(-x)$, так что свойства преобразования Фурье легко переносятся на обратное преобразование. С его помощью доказанная в одномерном случае формула обращения может быть записана в виде

$$f(x) = \big(\widehat{f}\,\big)\breve{\ }(x). \tag{5}$$

Этим и мотивируется выбор термина “обратное преобразование” Фурье.

Теорема. *Пусть $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^m)$. Если $\widehat{f} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^m)$, то формула обращения* (5) *справедлива при почти всех x из $\mathbb{R}^m$.*

Заметим, что ввиду суммируемости $\widehat{f}$ правая часть равенства (5) непрерывно зависит от x. Поэтому условие теоремы (суммируемость $\widehat{f}$) может выполняться лишь если функция f эквивалентна непрерывной. Кроме того, равенство (5), будучи справедливым на множестве полной меры, верно во всех точках непрерывности функции f. В частности, если она непрерывна и имеет суммируемое преобразование Фурье, то $f(x) = \big(\widehat{f}\,\big)\breve{\ }(x)$ при всех $x \in \mathbb{R}^m$.

Доказательство. Мы используем аппроксимативную единицу W_t, сыгравшую важную роль в доказательстве теоремы Вейерштрасса (см. п. VII.6.4). Напомним, что $W_t(x) = \frac{1}{t^m}\, e^{-\frac{\pi}{t^2}\|x\|^2}$ $(x \in \mathbb{R}^m,\ t > 0)$. Наше доказательство опирается на уже установленную (см. (1′)) формулу обращения для этой функции:

$$W_t(x) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\pi t^2 \|y\|^2}\, e^{2\pi i \langle x,y\rangle}\, dy. \tag{6}$$

Сначала мы получим для сглаженной функции $f * W_t$ равенство, близкое к (5), а потом убедимся в справедливости утверждения теоремы с помощью предельного перехода.

Используя равенство (6) и меняя порядок интегрирования, мы при любом $t > 0$ получаем:

$$(f * W_t)(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(y) W_t(x-y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^m} f(y) \left(\int_{\mathbb{R}^m} e^{-\pi t^2 \|u\|^2}\, e^{2\pi i \langle x-y,u\rangle}\, du \right) dy =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\pi t^2 \|u\|^2}\, e^{2\pi i \langle x,u\rangle} \left(\int_{\mathbb{R}^m} f(y)\, e^{-2\pi i \langle y,u\rangle}\, dy \right) du.$$

Тем самым мы установили равенство, к которому стремились:

$$(f * W_t)(x) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{-\pi t^2 \|u\|^2} e^{2\pi i \langle x, u\rangle} \widehat{f}(u)\, du. \tag{7}$$

Так как подынтегральная функция в последнем интеграле не превосходит по абсолютной величине $|\widehat{f}|$, то по теореме Лебега при $t \to +0$ этот интеграл стремится к $\big(\widehat{f}\,\big)\check{}\,(x)$ для любого x.

Теперь можно закончить доказательство ссылкой на теорему IX.3.4, из которой следует, что предел левой части равенства (7) почти везде совпадает с $f(x)$. Однако можно обойтись и без использования этой теоремы, опирающейся на понятие точки Лебега и на теорему IV.9.2 о дифференцировании интеграла по множеству. Покажем, что почти везде левая часть равенства (7) стремится к $f(x)$, если t стремится к нулю вдоль некоторой последовательности.

Действительно, если $t_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, то по теореме IX.3.3 $f * W_{t_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ в среднем и тем более по мере (см. теорему IX.1.2). В силу теоремы Рисса (п. III.3.4) существует такая подпоследовательность $\{t_{n_k}\}$, что почти везде $f * W_{t_{n_k}} \to f$ при $k \to \infty$. Заменив в равенстве (7) t на t_{n_k} и перейдя к пределу, мы получим требуемый результат. ►

Пример. Напишем формулу обращения для функции $f(x) = e^{-\|x\|}$ $(x \in \mathbb{R}^m)$, преобразование Фурье которой вычислено в примере 4 п. 5.1:

$$e^{-\|x\|} = 2^m \pi^{\frac{m-1}{2}} \Gamma\Big(\frac{m+1}{2}\Big) \int_{\mathbb{R}^m} \frac{e^{2\pi i \langle x, y\rangle}\, dy}{(1 + 4\pi^2 \|y\|^2)^{\frac{m+1}{2}}} = \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\pi^{\frac{m+1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{\cos\langle x, t\rangle\, dt}{(1 + \|t\|^2)^{\frac{m+1}{2}}}.$$

В одномерном случае эта формула была получена в примере 2 п. 5.3.

Суммируемость преобразования Фурье важна во многих задачах (см., например, п. 6.4). Как показывает результат упр. 7, это условие заведомо выполнено, если $\widehat{f} \geqslant 0$, а функция f непрерывна (или хотя бы ограничена вблизи нуля). Напомним в связи с этим (см. пример 2 п. IV.6.6), что $\widehat{f} \geqslant 0$, если f — чётная и суммируемая на $\mathbb{R}$ функция, выпуклая на $(0, +\infty)$. Вместе с формулой обращения эти рассуждения показывают, что справедливо

Следствие. *Если чётная непрерывная функция f суммируема на прямой и выпукла на положительной полуоси, то она является преобразованием Фурье неотрицательной суммируемой функции.*

Доказанный факт справедлив даже если вместо суммируемости f предположить лишь, что $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, но его доказательство требует в этом случае более тонких рассуждений (см. [Лук], теорема Пойа).

5.5. Здесь мы обсудим ещё одно важное свойство преобразования Фурье — его инъективность на всём классе суммируемых функций. Конечно, в буквальном смысле взаимной однозначности нет, так как различные эквивалентные, т. е. совпадающие почти везде, функции имеют одинаковое преобразование Фурье. Однако, как показывает теорема 5.4, с точностью до эквивалентности инъективность есть на классе функций с суммируемым преобразованием Фурье. Чтобы усилить этот результат, мы несколько обобщим определение 5.1.

Определение. Пусть μ — конечная борелевская мера в $\mathbb{R}^m$. Функция $y \mapsto \widehat{\mu}(y) \equiv \equiv \int_{\mathbb{R}^m} e^{-2\pi i\langle y,x\rangle}\, d\mu(x)$ называется *преобразованием Фурье меры* μ.

Если мера μ имеет плотность f относительно меры Лебега, то $\widehat{\mu} = \widehat{f}$.

Установим теперь важный результат, связанный с инъективностью преобразования Фурье меры.

Теорема. *Если две конечные борелевские меры μ и ν имеют одинаковые преобразования Фурье, то они совпадают.*

Доказательство. Пусть $H_j(t) = \{(x_1, \dots, x_m) \,|\, x_j = t\}$ — плоскость, перпендикулярная j-й координатной оси, и пусть

$$E = \big\{t \in \mathbb{R} \;\big|\; \mu\big(H_j(t)\big) = \nu\big(H_j(t)\big) = 0 \;\text{ при каждом }\; j = 1, \dots, m\big\}.$$

Так как при любом j множество $\{t \in \mathbb{R} \,|\, \mu(H_j(t)) > 0\}$ не более чем счётно (см. п. I.2.2), то множество E всюду плотно. Поэтому борелевская оболочка полукольца $\mathscr{P}_E^m$, состоящего из ячеек, у которых координаты вершин принадлежат E, совпадает с σ-алгеброй борелевских подмножеств пространства $\mathbb{R}^m$ (см. замечание после теоремы I.1.6). Выразим меру ячейки $P = \prod\limits_{j=1}^m \Delta_j$ через $\widehat{\mu}$, считая, что $P \in \mathscr{P}_E^m$.

Очевидно, $\chi_P(x) = \prod\limits_{j=1}^m \chi_{\Delta_j}(x_j)$, где $x_1, \dots, x_m$ — координаты вектора x. По теореме Фубини $\widehat{\chi_P}(y) = \prod\limits_{j=1}^m \widehat{\chi_{\Delta_j}}(y_j)$ для $y = (y_1, \dots, y_m)$ и поэтому

$$I_A(\chi_\Delta, x) = \int_{(-A,A)^m} \widehat{\chi_P}(y)\, e^{2\pi i\langle x,y\rangle}\, dy = \prod_{j=1}^m \int_{-A}^{A} \widehat{\chi_{\Delta_j}}(y_j)\, e^{2\pi i x_j y_j}\, dy_j.$$

Характеристическая функция промежутка всюду, за исключением его концов, удовлетворяет условию Дини. Поэтому для всех $j = 1, \dots, m$

$$\int_{-A}^{A} \widehat{\chi_{\Delta_j}}(y_j)\, e^{2\pi i x_j y_j}\, dy_j \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \chi_{\Delta_j}(x_j)$$

при условии, что x_j не совпадает с концами промежутка Δ_j. Поскольку $P \in \mathscr{P}_E^m$, это означает, что $I_A(\chi_\Delta, x) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \chi_P(x)$ μ-почти везде. Кроме того, полагая $\Delta_j = [a_j, b_j)$, мы видим (см. лемму 5.3), что

$$\int_{-A}^{A} \widehat{\chi_{\Delta_j}}(y_j)\, e^{2\pi i x_j y_j}\, dy_j = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{\Delta_j}(x_j - t) \frac{\sin 2\pi A t}{t}\, dt = \int_{A(x_j - b_j)}^{A(x_j - a_j)} \frac{\sin 2\pi u}{u}\, du.$$

Все эти интегралы ограничены (так как интеграл $\int_0^\infty \frac{\sin 2\pi u}{u}\, du$ сходится), а вместе с ними ограничен (равномерно по x и A) и интеграл $I_A(\chi_\Delta, x)$. Поэтому можно воспользоваться теоремой Лебега о предельном переходе под знаком интеграла:

$$\mu(P) = \int_{\mathbb{R}^m} \chi_P(x)\, d\mu(x) = \lim_{A\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^m} I_A(\chi_\Delta, x)\, d\mu(x) =$$

$$= \lim_{A\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{(-A,A)^m} \widehat{\chi_P}(y)\, e^{2\pi i\langle x,y\rangle}\, dy \right) d\mu(x).$$

Изменив порядок интегрирования, получим:

$$\mu(P) = \lim_{A\to+\infty} \int_{(-A,A)^m} \widehat{\chi_P}(y) \left(\int_{\mathbb{R}^m} e^{2\pi i\langle x,y\rangle}\, d\mu(x) \right) dy = \lim_{A\to+\infty} \int_{(-A,A)^m} \widehat{\chi_P}(y)\widehat{\mu}(-y)\, dy.$$

Это равенство показывает, что значения меры на ячейках, принадлежащих $\mathscr{P}_E^m$, выражаются через её преобразование Фурье. Так как меры μ и ν имеют одинаковые преобразования Фурье, то они совпадают на полукольце $\mathscr{P}_E^m$, а следовательно (по теореме единственности), и на всех борелевских множествах. ►

Из доказанной теоремы следует, что на множестве суммируемых функций преобразование Фурье инъективно с точностью до эквивалентности.

Следствие 1. *Если две суммируемые функции f и g имеют одинаковые преобразования Фурье, то они совпадают почти везде.*

Доказательство. Ясно, что преобразования Фурье функций $\overline{f}$ и $\overline{g}$ также совпадают. Следовательно, функции $\mathcal{R}e\, f = \frac{f+\overline{f}}{2}$ и $\mathcal{R}e\, g = \frac{g+\overline{g}}{2}$, как и мнимые части функций f и g, имеют одинаковые преобразования Фурье. Поэтому мы можем предполагать, что функции f и g вещественные.

Если они неотрицательны, то по доказанной теореме совпадают меры с плотностями f и g. Как было доказано в п. IV.5.4, в таком случае плотности совпадают почти везде.

В общем случае представим f и g в виде $f = f_+ - f_-$, $g = g_+ - g_-$, где $f_\pm, g_\pm \geqslant 0$. Тогда

$$\widehat{f} = \widehat{f}_+ - \widehat{f}_- = \widehat{g} = \widehat{g}_+ - \widehat{g}_-.$$

Следовательно, неотрицательные функции $f_+ + g_-$ и $f_- + g_+$ имеют одинаковые преобразования Фурье и поэтому они совпадают почти везде, что равносильно утверждению следствия. ►

Следствие 2. *Если конечные борелевские меры μ и ν принимают одинаковые значения на всевозможных полупространствах (в $\mathbb{R}^m$), то они совпадают.*

Доказательство. В силу теоремы достаточно проверить, что $\widehat{\mu}(y) = \widehat{\nu}(y)$ для всех $y \in \mathbb{R}^m$. При $y = 0$ это верно, поскольку $\widehat{\mu}(0) = \mu(\mathbb{R}^m)$ и $\widehat{\nu}(0) = \nu(\mathbb{R}^m)$, а из совпадения мер на полупространствах следует их совпадение на всём пространстве. При $y \neq 0$ рассмотрим полупространства

$$H_t = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \langle x,y\rangle < t\} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

и положим $g(t) = \mu(H_t) = \nu(H_t)$, $\Phi(x) = \langle x,y\rangle$. Функция g возрастает, и так как $\Phi^{-1}\big((-\infty,t)\big) = H_t$, то мера Стилтьеса μ_g есть Φ-образ мер μ и ν. Остаётся воспользоваться теоремой VI.1.1 об интегрировании по взвешенному образу меры:

$$\widehat{\mu}(y) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{-2\pi i\langle x,y\rangle}\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi it}\, dg(t) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{-2\pi i\langle x,y\rangle}\, d\nu(x) = \widehat{\nu}(y). \ ►$$

5.6. Опираясь на результаты предыдущего пункта, мы докажем здесь полноту многочленов Эрмита. Используемый нами приём позволяет рассмотреть более общую

ситуацию и для широкого класса мер доказать полноту в $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^m, \mu)$ семейства одночленов от m переменных, т. е. произведений вида $x^n = x_1^{n_1} \cdots x_m^{n_m}$, где $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ и $n = (n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{Z}_+^m$.

Теорема. *Если борелевская мера μ в $\mathbb{R}^m$ при некотором $a > 0$ удовлетворяет условию $\int_{\mathbb{R}^m} e^{a\|x\|}\, d\mu(x) < +\infty$, то семейство всевозможных одночленов полно в пространстве $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^m, \mu)$.*

Доказательство. Пусть функция f из $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^m, \mu)$ ортогональна всем одночленам. Очевидно, $f \perp P$ для любого многочлена P от m переменных. Положим

$$F(y) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\, e^{i\langle y, x\rangle}\, d\mu(x).$$

Так как любые полиномы суммируемы относительно меры μ, а $|e^{i\langle y,x\rangle}| \equiv 1$, то функция F бесконечно дифференцируема и при любом y все её производные можно находить по правилу Лейбница.

Докажем, что $F \equiv 0$. Если $\|y\| < \frac{a}{2}$, то разложив экспоненту в ряд Тейлора, после почленного интегрирования получим, что $F(y) = 0$. Законность почленного интегрирования следует из наличия суммируемой мажоранты $|f(x)|\, e^{\|x\|\,\|y\|}$ для частичных сумм ряда (она суммируема, поскольку обе функции $|f|$ и $e^{\|x\|\,\|y\|}$ входят в $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^m, \mu)$). Чтобы доказать, что $F \equiv 0$, покажем, что внутренность G того множества, где $F(y) = 0$, совпадает с $\mathbb{R}^m$. Так как $G \neq \varnothing$ (поскольку содержит окрестность нуля), достаточно убедиться в замкнутости множества G — тогда равенство $G = \mathbb{R}^m$ окажется следствием связности пространства $\mathbb{R}^m$. Пусть $y \in \overline{G}$. В этой точке функция F и все её производные обращаются в нуль в силу их непрерывности. Вычисляя производные по правилу Лейбница, мы видим, что

$$0 = F^{(n)}(y) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)(ix)^n e^{i\langle x, y\rangle}\, d\mu(x) \qquad (n \in \mathbb{R}_+^m).$$

Таким образом, функция $f_1(x) = f(x)\, e^{i\langle x, y\rangle}$ ортогональна всем одночленам. Заменив f на f_1, мы по доказанному можем утверждать, что в некоторой окрестности нуля функция $F_1(\eta) = \int_{\mathbb{R}^m} f_1(x)\, e^{i\langle x, \eta\rangle}\, d\mu(x)$ принимает лишь нулевые значения. Но $F_1(\eta)$ есть не что иное, как $F(y + \eta)$. Поэтому $F \equiv 0$ в некоторой окрестности точки y, т. е. $y \in G$. Таким образом, $G = \overline{G} = \mathbb{R}^m$ и, следовательно, $F \equiv 0$. Теперь мы можем легко закончить доказательство. Действительно, не умаляя общности можно считать функцию f вещественной. Тождество $F \equiv 0$ означает, что меры $f_+\, d\mu$ и $f_-\, d\mu$ имеют одинаковые преобразования Фурье. Следовательно, по теореме 5.5 эти меры совпадают, что влечёт (в силу теоремы IV.5.4) совпадение функций f_+ и f_- μ-почти везде. Итак, $f = 0$ почти везде относительно μ. ►

Следствие. *Многочлены Эрмита полны в $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}, \mu)$ с $d\mu(x) = e^{-x^2} dx$.*

Это частный случай теоремы при $m = 1$. Отметим также, что из неё вытекает и полнота функций Лагерра (их определение см. в упр. 3 § 2).

Как показывает следующий пример, полученный в теореме результат достаточно точен.

Пример. Убедимся, что многочлены не плотны в пространстве $\mathscr{L}^2(\mathbb{R},\mu)$ с мерой μ, имеющей плотность $e^{-|x|^p}$ $(0<p<1)$ относительно одномерной меры Лебега (при $p\geqslant 1$ этот эффект невозможен в силу доказанной теоремы).

Нам потребуется формула из примера 1 п. VII.1.7: если $a>0$ и $z=e^{i\theta}$, где $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$, то $z^{-a}\Gamma(a)=\int_0^\infty t^{a-1}e^{-zt}\,dt$. Сравнение здесь мнимых частей и подстановка $t=\frac{x^p}{\cos\theta}$ дают нам:

$$\Gamma(a)\sin\,a\theta=\int_0^\infty t^{a-1}e^{-t\cos\theta}\sin(t\sin\theta)\,dt=\frac{p}{\cos^a\theta}\int_0^\infty x^{ap-1}e^{-x^p}\sin(x^p\operatorname{tg}\theta)\,dx.$$

Теперь воспользуемся свободой в выборе параметров a и θ. Положив $\theta=\frac{\pi}{2}p$ и $a=\frac{2}{p}(n+1)$, мы получим

$$\int_0^\infty x^{2n+1}e^{-x^p}\sin\Big(x^p\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}p\Big)\,dx=0\quad\text{для}\quad n=0,1,2\ldots$$

Это означает, что нечётная функция, равная $\sin\big(x^p\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}p\big)$ при $x\geqslant 0$, ортогональна всем многочленам в пространстве $\mathscr{L}^2(\mathbb{R},\mu)$ с мерой $d\mu(x)=e^{-|x|^p}dx$.

5.7. Этот и два следующих пункта посвящены важной теореме Планшереля*) и её следствиям. Её традиционная формулировка потребовала бы введения нескольких понятий, относящихся к функциональному анализу и теории операторов. Чтобы избежать этого, мы установим прежде всего аналитический факт, составляющий центральную часть теоремы.

Теорема (Планшерель). *Если $f\in\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^m)\cap\mathscr{L}^2\,\mathbb{R}^m)$, то $\widehat{f}\in\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^m)$ и $\|\widehat{f}\|_2=\|f\|_2$.*

Доказательство. Пусть $\{\omega_t\}_{t>0}$ — соболевская аппроксимативная единица в $\mathbb{R}^m$ (см. п. VII.6.2) и $f_t=f*\omega_t$.

Сначала докажем утверждение теоремы для сглаженной функции f_t. По свойствам свёртки $f_t\in\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^m)\cap\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^m)$. По теореме 5.1, $\widehat{f_t}=\widehat{f}\,\widehat{\omega_t}$. Это произведение суммируемо, поскольку функция $\widehat{f}$ ограничена, а $\widehat{\omega_t}\in\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^m)$ по следствию 5.2. Пользуясь теоремой Фубини и формулой обращения (5), мы получаем

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^m}\widehat{f_t}(y)\,\overline{\widehat{f_t}(y)}\,dy&=\int_{\mathbb{R}^m}\widehat{f_t}(y)\overline{\Big(\int_{\mathbb{R}^m}f_t(x)\,e^{-2\pi i\langle y,x\rangle}\,dx\Big)}\,dy=\\&=\int_{\mathbb{R}^m}\widehat{f_t}(y)\,\Big(\int_{\mathbb{R}^m}\overline{f_t(x)}\,e^{2\pi i\langle y,x\rangle}\,dx\Big)\,dy=\\&=\int_{\mathbb{R}^m}\overline{f_t(x)}\,\Big(\int_{\mathbb{R}^m}\widehat{f_t}(y)\,e^{2\pi i\langle y,x\rangle}\,dy\Big)\,dx=\int_{\mathbb{R}^m}\overline{f_t(x)}\,f_t(x)\,dx.\end{aligned}$$

Итак,

$$\|\widehat{f_t}\|_2^2=\|f_t\|_2^2. \tag{8}$$

Остаётся убедиться, что в этом равенстве можно перейти к пределу при $t\to 0$.

*) Мишель **Планшерель** (Plancherel), 1885–1967, — швейцарский математик.

Так как $f_t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} f$ по $\mathscr{L}^2$-норме, то в силу непрерывности нормы $\|f_t\|_2 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \|f\|_2$. Проверим, что $\widehat{f} \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^m)$ и $\|\widehat{f}_t\|_2 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \|\widehat{f}\|_2$. Для этого запишем левую часть равенства (8) подробнее:

$$\|\widehat{f}_t\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^m} |\widehat{f}_t(y)|^2\,dy = \int_{\mathbb{R}^m} |\widehat{f}(y)|^2 |\widehat{\omega}_t(y)|^2\,dy. \tag{9}$$

Так как $\widehat{\omega}_t(y) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$ (см. следствие VII.6.3 с $t_0 = 0$ и $g(x) = e^{-2\pi i\langle y,x\rangle}$), то теорема Фату и равенство (8) дают нам

$$\int_{\mathbb{R}^m} |\widehat{f}(y)|^2\,dy \leqslant \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^m} |\widehat{f}(y)|^2 |\widehat{\omega}_t(y)|^2\,dy = \lim_{t\to 0} \|\widehat{f}_t\|_2^2 = \lim_{t\to 0} \|f_t\|_2^2 = \|f\|_2^2 < +\infty.$$

Таким образом, $\widehat{f} \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^m)$. Возвращаясь к равенству (9), мы видим, что подынтегральная функция в интеграле справа имеет суммируемую мажоранту, а именно, $|\widehat{f}|^2$. Поэтому по теореме Лебега в этом интеграле допустим предельный переход:

$$\int_{\mathbb{R}^m} |\widehat{f}(y)|^2 |\widehat{\omega}_t(y)|^2\,dy \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^m} |\widehat{f}(y)|^2\,dy.$$

Теперь переход к пределу в равенстве (8) приводит к требуемому результату. ►

Заключительную часть доказательства теоремы можно несколько сократить. Действительно, так как $|\widehat{\omega}_t| \leqslant \int_{\mathbb{R}^m} \omega(x)\,dx = 1$, то $|\widehat{f}_t| \leqslant |\widehat{f}|$. Поскольку $\widehat{f}_t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \widehat{f}$, предельный переход в левой части равенства (8) допустим в силу обобщения теоремы Б. Леви, приведённого в упр. 4 § IV.8.

5.8. Покажем, как с помощью теоремы Планшереля понятие преобразования Фурье распространяется на функции из $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^m)$.

Лемма. *Пусть $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^m)$. Если последовательность $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ состоит из функций, принадлежащих $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^m)$, и сходится к f по $\mathscr{L}^2$-норме, то последовательность $\{\widehat{f}_n\}_{n\geqslant 1}$ также сходится по $\mathscr{L}^2$-норме. Её предел не зависит (с точностью до эквивалентности) от выбора последовательности $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$.*

Доказательство. Из теоремы Планшереля вытекает фундаментальность последовательности $\{\widehat{f}_n\}_{n\geqslant 1}$:

$$\|\widehat{f}_n - \widehat{f}_k\|_2 = \|\widehat{f_n - f_k}\|_2 = \|f_n - f_k\|_2 \underset{n,k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Существование предела следует из полноты пространства $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^m)$ (теорема IX.1.3). Если $\{g_n\}_{n\geqslant 1}$ — ещё одна последовательность, из $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^m)$ сходящаяся к f по $\mathscr{L}^2$-норме, то к f сходится и последовательность $f_1,\ g_1,\ f_2,\ g_2,\ \ldots$, полученная "перемешиванием" последовательностей $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ и $\{g_n\}_{n\geqslant 1}$. По доказанному, последовательность $\widehat{f}_1,\ \widehat{g}_1,\ \widehat{f}_2,\ \widehat{g}_2,\ \ldots$ имеет предел, который единствен с точностью до эквивалентности и является также пределом её подпоследовательностей. ►

Доказанная лемма позволяет распространить определение преобразования Фурье на функции из $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^m)$.

Определение. Преобразованием Фурье функции $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^m)$ называется предел по $\mathscr{L}^2$-норме функций $\widehat{f}_n$, где $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ — произвольная последовательность функций из $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^m)$ такая, что $\|f_n - f\|_2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Таким образом, преобразование Фурье функции, входящей в $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^m)$, также суммируемо с квадратом. Как и раньше, будем обозначать его символом $\widehat{f}$. Однако следует иметь в виду, что теперь преобразование Фурье определено с точностью до эквивалентности, и символ $\widehat{f}$ можно отнести ко многим функциям. Если функция f суммируема, то среди них содержится и преобразование Фурье, определённое в п. 5.1, которое для уточнения иногда называют классическим преобразованием Фурье. Сказанное относится также и к обратному преобразованию Фурье, обозначаемому по-прежнему $\check{f}$.

Основные свойства преобразования Фурье функций, суммируемых с квадратом, могут быть получены из свойств классического преобразования Фурье с помощью предельного перехода.

Теорема. *Пусть $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^m)$. Тогда*

1) $\|\widehat{f}\|_2 = \|f\|_2$;

2) если $f_n \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^m)$ и $\|f_n - f\|_2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, то $\|\widehat{f}_n - \widehat{f}\|_2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, и аналогичное утверждение справедливо для обратного преобразования Фурье;

3) почти везде справедливы равенства $\big(\widehat{f}\,\big)\check{} = \big(\check{f}\,\big)\widehat{} = f$;

4) $\langle \widehat{f}, \widehat{g}\rangle = \langle f, g\rangle$ для любой функции $g \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^m)$. В частности, преобразование Фурье сохраняет ортогональность: если $f \perp g$, то $\widehat{f} \perp \widehat{g}$.

Доказательство. Пусть последовательность функций $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 1} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ сходится к f по $\mathscr{L}^2$-норме. Очевидно, что и эти функции, и их преобразования Фурье входят в $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^m) \cap \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^m)$.

1) Ясно, что $\|\widehat{\varphi}_n - \widehat{f}\|_2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ по определению $\widehat{f}$. По теореме Планшереля $\|\widehat{\varphi}_n\|_2 = \|\varphi_n\|_2$. Поэтому нам достаточно воспользоваться непрерывностью нормы и перейти к пределу в этом равенстве.

2) Очевидно, $\|\widehat{f}_n - \widehat{f}\|_2 = \|\widehat{f_n - f}\|_2 = \|f_n - f\|_2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

3) Мы докажем только равенство $\big(\widehat{f}\,\big)\check{} = f$ (второе доказывается аналогично). Так как $\varphi_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$, то по определению $\widehat{\varphi}_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \widehat{f}$ и по свойству 2, применённому к обратному преобразованию Фурье, $(\widehat{\varphi}_n)\check{} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \big(\widehat{f}\,\big)\check{}$. Вместе с тем $(\widehat{\varphi}_n)\check{} = \varphi_n$ по теореме 5.4. Таким образом, нам остаётся только перейти к пределу (по $\mathscr{L}^2$-норме) в последнем равенстве.

4) Для доказательства надо воспользоваться тождеством $4f\overline{g} = |f+g|^2 + |f+ig|^2 - |f-g|^2 - |f-ig|^2$ и применить равенство 1) к функциям $f \pm g$ и $f \pm ig$. ►

5.9. Из теоремы Планшереля вытекает неравенство, известное как *принцип неопределённости.* Не касаясь здесь его физического смысла (невозможности одновременно точно определить координату и импульс квантовой частицы), укажем лишь

на его следствие: если $f \neq 0$ лишь вблизи начала координат, то в некоторых далёких точках величина $|\widehat{f}|$ не мала — преобразование Фурье "расплывается". В одномерном случае читатель может увидеть этот эффект на примере функций $\frac{1}{2t}\chi_{(-t,t)}$, образующих аппроксимативную единицу.

В точной формулировке принципа неопределённости мы ограничиваемся бесконечно дифференцируемыми финитными функциями одной переменной (более общие утверждения приведены в упр. 10 и 11).

Теорема. *Если* $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ *и* $\|f\|_2 = 1$, *то*

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2|f(x)|^2\,dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x^2|\widehat{f}(x)|^2\,dx \geqslant \frac{1}{16\pi^2}.$$

Доказательство. Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\big(|f(x)|^2\big)'\,dx = x\,|f(x)|^2\Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx = -1,$$

то по неравенству Коши–Буняковского

$$1 = \left|\int_{-\infty}^{\infty} x\big(|f(x)|^2\big)'\,dx\right| \leqslant 2\int_{-\infty}^{\infty} |xf(x)|\cdot|f'(x)|\,dx \leqslant 2\|g\|_2\|f'\|_2,$$

где $g(x) = |x\,f(x)|$. По теореме Планшереля $\|f'\|_2 = \|\widehat{f'}\|_2$, а по теореме 5.2 $\widehat{f'}(y) = 2\pi i y\widehat{f}(y)$. Следовательно,

$$1 \leqslant 4\|g\|_2^2\,\|f'\|_2^2 = 4\|g\|_2^2\,\|\widehat{f'}\|_2^2 = 4\int_{-\infty}^{\infty} x^2|f(x)|^2dx \cdot 4\pi^2\int_{-\infty}^{\infty} y^2|\widehat{f}(y)|^2\,dy. \quad ►$$

5.10. В завершение параграфа применим преобразование Фурье для оценки шаровых ядер Дирихле (см. п. 4.8)

$$D_R(x) = \sum_{\|k\|<R} e^{-i\langle k,x\rangle} \quad (x \in \mathbb{R}^m)$$

(суммирование производится по точкам k целочисленной решетки $\mathbb{Z}^m$). Покажем, что в случае $m > 1$ их $\mathscr{L}^1$-нормы в отличие от норм ядер Дирихле, соответствующих кубам $(-R,R)^m$, имеют при $R \to +\infty$ не логарифмический, а степенной порядок роста:

$$\|D_R\|_1 = \int_{[-\pi,\pi]^m}\left|\sum_{\|k\|<R} e^{-i\langle k,x\rangle}\right|dx \asymp R^{\frac{m-1}{2}}.$$

Не имея возможности записать ядро D_R в компактном виде, получим для него приближённое интегральное представление, заменив суммирование по шару $B(R)$ интегрированием по близкому к нему множеству. Для этого воспользуемся тем, что среднее значение экспоненты e^{-iat} на промежутке $(a-\frac{1}{2}, a+\frac{1}{2})$ отличается от самой экспоненты лишь множителем, не зависящим от a:

$$e^{-iat} = \frac{t/2}{\sin\frac{t}{2}}\int_{a-\frac{1}{2}}^{a+\frac{1}{2}} e^{-ist}\,ds.$$

Поэтому в кратном случае для сдвинутого единичного куба $Q_k = k + [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^m$ в точке $x = (x_1, \dots, x_m)$ мы имеем

$$e^{-i\langle k,x\rangle} = \theta(x) \int_{Q_k} e^{-i\langle y,x\rangle} dy, \quad \text{где} \ \ \theta(x) = \prod_{j=1}^{m} \frac{\frac{x_j}{2}}{\sin \frac{x_j}{2}}.$$

Положив $T(R) = \bigcup\limits_{\|k\|<R} Q_k$, приходим к равенству

$$D_R(x) = \theta(x) \int_{T(R)} e^{-i\langle y,x\rangle} dy.$$

Таким образом,

$$\|D_R\|_1 = \int_{[-\pi,\pi]^m} \theta(x) \left| \int_{T(R)} e^{-i\langle y,x\rangle} dy \right| dx.$$

Так как $1 \leqslant \frac{t}{\sin t} \leqslant \frac{\pi}{2}$ для $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, то в этом интеграле $1 \leqslant \theta(x) \leqslant \left(\frac{\pi}{2}\right)^m$ и поэтому

$$\|D_R\|_1 \asymp \int_{[-\pi,\pi]^m} \left| \int_{T(R)} e^{-i\langle y,x\rangle} dy \right| dx = (2\pi)^m \int_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^m} |\widehat{\chi}_{T(R)}(u)| \, du.$$

Покажем, что при $m > 1$ интеграл, стоящий в правой части этого соотношения, растёт как $R^{\frac{m-1}{2}}$. Удобнее иметь дело с интегралом не по кубу, а по шару:

$$I_R(\rho) = \int_{B(\rho)} |\widehat{\chi}_{T(R)}(u)| \, du.$$

Поскольку

$$I_R\Big(\frac{1}{2}\Big) \leqslant \int_{[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^m} |\widehat{\chi}_{T(R)}(u)| \, du \leqslant I_R\Big(\frac{\sqrt{m}}{2}\Big),$$

достаточно проверить, что $I_R(\rho) \asymp R^{\frac{m-1}{2}}$ при $R \to +\infty$ для любого фиксированного $\rho > 0$.

При больших R множество $T(R)$ близко к шару $B(R)$. Поэтому естественно заменить $\widehat{\chi}_{T(R)}$ на $\widehat{\chi}_{B(R)}$ и сравнить интеграл $I_R(\rho)$ с “похожим” интегралом

$$J_R(\rho) = \int_{B(\rho)} |\widehat{\chi}_{B(R)}(u)| \, du.$$

Скорость его роста по существу найдена в примере 2 п. 5.2. Действительно, так как

$$\widehat{\chi}_{B(R)}(u) = \int_{\|x\|<R} e^{-2\pi i\langle u,x\rangle} dx = R^m \int_{\|x\|<1} e^{-2\pi i R\langle u,x\rangle} dx = R^m \widehat{\chi}_B(Ru),$$

то интеграл $J_R(\rho)$ сводится к интегралу $L_B(R) = \int_{\|y\|<R} |\widehat{\chi}_B(y)| \, dy$, рассмотренному в этом примере:

$$J_R(\rho) = \int_{B(\rho)} |R^m \widehat{\chi}_B(Ru)| \, du = \int_{B(\rho R)} |\widehat{\chi}_B(y)| \, dy = L_B(\rho R) \asymp (\rho R)^{\frac{m-1}{2}}.$$

Поэтому

$$0 < C_m(\rho R)^{\frac{m-1}{2}} \leqslant J_R(\rho) \leqslant C'_m(\rho R)^{\frac{m-1}{2}}. \tag{10}$$

Чтобы оценить разность $I_R(\rho) - J_R(\rho)$, введём функцию $\eta_R = \chi_{B(R)} - \chi_{T(R)}$. Ясно, что

$$|I_R(\rho) - J_R(\rho)| \leqslant \int_{B(\rho)} |\widehat{\eta}_R(u)|\,du \leqslant \sqrt{\alpha_m \rho^m \int_{B(\rho)} |\widehat{\eta}_R(u)|^2\,du} \leqslant \sqrt{\alpha_m \rho^m}\,\|\widehat{\eta}_R\|_2.$$

Следующий шаг возможен благодаря теореме Планшереля, позволяющей перейти от нормы $\widehat{\eta}_R$ к норме η_R, которую легко оценить (поскольку функция η_R отлична от нуля лишь в сферическом слое $R - \sqrt{m} \leqslant \|x\| \leqslant R + \sqrt{m}$ и $|\eta_R| \leqslant 1$):

$$\|\widehat{\eta_R}\|_2 = \|\eta_R\|_2 \leqslant \sqrt{\alpha_m\big((R+\sqrt{m}\,)^m - (R-\sqrt{m}\,)^m\big)}.$$

Поэтому для $R > 1$ мы имеем

$$|I_R(\rho) - J_R(\rho)| \leqslant \alpha_m \rho^{\frac{m}{2}} \sqrt{2m^{\frac{3}{2}}}(R+\sqrt{m}\,)^{\frac{m-1}{2}} \leqslant A_m \rho^{\frac{m}{2}} R^{\frac{m-1}{2}}, \tag{11}$$

где A_m — коэффициент, зависящий лишь от размерности m. С учётом неравенства (10) отсюда вытекает оценка сверху: $I_R(\rho) = O\big(R^{\frac{m-1}{2}}\big)$ при $R \to +\infty$.

Так как интегралы $I_R(\rho)$ растут с ростом ρ, то оценку снизу достаточно установить при малом ρ. Для этого вновь воспользуемся неравенствами (10) и (11):

$$I_R(\rho) \geqslant J_R(\rho) - |I_R(\rho) - J_R(\rho)| \geqslant C_m(\rho R)^{\frac{m-1}{2}} - A_m \rho^{\frac{m}{2}} R^{\frac{m-1}{2}} = (C_m - A_m\sqrt{\rho}\,)\,(\rho R)^{\frac{m-1}{2}}.$$

Нужный результат получим, взяв, например, $\rho = \big(\frac{C_m}{2A_m}\big)^2$.

УПРАЖНЕНИЯ

1) Найдите преобразование Фурье произведения $e^{2\pi i\langle h,x\rangle} f(x)$, где $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^m)$, $h \in \mathbb{R}^m$.

2) Пусть $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^m)$ и $f_E(x) = \frac{1}{\lambda_m(E)} \int_E f(x+t)\,dt$, где $E \subset \mathbb{R}^m$ — множество конечной положительной меры. Докажите, что $|\widehat{f_E}| \leqslant |\widehat{f}\,|$.

3) Пусть функция f из $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^m)$ равна нулю вне куба $(-\pi,\pi)^m$ и $F(t) = \widehat{f}(\frac{t}{2\pi})$. Докажите, что

$$F(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^m} F(n) \prod_{j=1}^m \frac{\sin \pi(t_j - n_j)}{\pi(t_j - n_j)}$$

(сумма ряда в правой части равенства понимается как предел частичных сумм по прямоугольникам).

4) Заданная в $\mathbb{R}^m$ функция f называется положительно определённой, если

$$\sum_{1\leqslant j,k\leqslant n} f(x_j - x_k) z_j \overline{z}_k \geqslant 0$$

при любых $n \in \mathbb{N}$, $x_j \in \mathbb{R}^m$ и $z_j \in \mathbb{C}$. Докажите, что преобразование Фурье конечной борелевской меры μ есть положительно определённая функция.

5) Докажите, что если g — обобщённая производная функции f по k-й координате (см. упр. 5 § IX.3), то для неё сохраняется равенство п. 1 теоремы 5.2: $\widehat{g}(y) = 2\pi i y_k \widehat{f}(y)$.

6) Убедитесь, что в кратном случае, вообще говоря, нет равносходимости разложений в ряд и интеграл Фурье. Указание. Используйте ту же идею, что и в первой части п. 4.6.

7) Пусть функция $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^m)$ ограничена в окрестности нуля. Докажите, что если $\widehat{f} \geqslant 0$, то $\widehat{f} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^m)$. Указание. С помощью равенства (7) докажите ограниченность при $t > 0$ интегралов $\int_{\mathbb{R}^m} e^{-\pi t^2 \|u\|^2} \widehat{f}(u)\, du$ и воспользуйтесь теоремой Фату.

8) Пусть мера μ в $\mathbb{R}^m$ такова, что $\int_{\mathbb{R}^m} e^{a\|x\|}\, d\mu(x) < +\infty$ при некотором $a > 0$. Обобщая теорему 5.6, докажите, что при $p > 1$ всякая функция $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^m, \mu)$, удовлетворяющая условию

$$\int_{\mathbb{R}^m} f(x)\, x^n\, d\mu(x) = 0 \quad \text{при всех} \quad n \in \mathbb{Z}_+^m,$$

равна нулю μ-почти везде.

9) Пусть функции φ_1, φ_2 , $\dots$ принадлежат $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^m)$. Докажите, что системы $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и $\{\widehat{\varphi}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ полны или нет одновременно.

10) Пусть $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^m)$ и $\|f\|_2 = 1$. Докажите, что для любых a, $b \in \mathbb{R}^m$ выполняется неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^m} \|x-a\|^2 |f(x)|^2\, dx \cdot \int_{\mathbb{R}^m} \|y-b\|^2 |\widehat{f}(y)|^2\, dy \geqslant \frac{m^2}{16\pi^2}.$$

11) Пусть значения функции $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^m)$ малы вне шара $B(a,r)$ в том смысле, что

$$\int_{\mathbb{R}^m \setminus B(a,r)} \|x-a\|^2 |f(x)|^2 dx < \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^m} \|x-a\|^2 |f(x)|^2 dx,$$

а значения $\widehat{f}$ малы (в том же смысле) вне шара $B(b,R)$. Докажите, что тогда $rR > \frac{m}{8\pi}$.

12) Дополните результат примера 3 п. 5.2, доказав, что если $f(x) \underset{\|x\|\to+\infty}{\sim} \|x\|^{-p-m}$, при $\|x\| \to +\infty$ для некоторого $p \in (0,2)$ и функция f чётная, то $\widehat{f}(0) - \widehat{f}(y) \underset{y\to 0}{\sim} C_p \|y\|^p$; при $p = 2$ это соотношение следует заменить на $\widehat{f}(0) - \widehat{f}(y) \underset{y\to 0}{\sim} C\|y\|^2 \ln \frac{1}{\|y\|}$. Коэффициенты C_p и C, зависящие от размерности, можно выразить через значения функции гамма.

§ 6. Формула суммирования Пуассона

В этом параграфе под периодичностью функции мы понимаем её 1-периодичность по каждой переменной. Говоря о ряде Фурье периодической функции суммируемой на кубе $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)^m$, будем иметь в виду ряд по системе экспонент $\left\{e^{2\pi i \langle n,x\rangle}\right\}_{n\in\mathbb{Z}^m}$.

6.1. Как мы видели, свойства преобразования Фурье суммируемой функции f могут быть далеки от свойств f. Гладкая функция может иметь негладкое преобразование Фурье, оно может не быть суммируемым, порядок убывания $\widehat{f}$ может быть совсем

не таким, как у f, и т. д. Однако замечательным образом оказывается, что при весьма широких предположениях можно указать числовую характеристику, сохраняющуюся при переходе от f к $\widehat{f}$. Ограничиваясь функциями одной переменной и не касаясь пока вопроса о сходимости встречающихся рядов, можно сказать, что эта инвариантность состоит в постоянстве суммы значений функции в целых точках. Иными словами, речь идёт о равенстве

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k), \tag{1}$$

известном как *формула суммирования Пуассона.* Несколько обобщая равенство (1), ему можно придать вид

$$\sqrt{t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(tn) = \sqrt{s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(sk), \tag{1'}$$

где $st = 1$ ($s > 0$, $t > 0$). Таким образом, сумма значений f в равноотстоящих узлах tn ($t > 0$) пропорциональна аналогичной сумме для $\widehat{f}$, при условии, что значения $\widehat{f}$ вычисляются в согласованных узлах. Равенство (1′) можно получить, написав (1) для функции g, получающейся из f с помощью подобия $\big(g(x) = f(tx)\big)$.

Наша цель — обосновать формулу Пуассона и дать примеры её использования. Как нередко бывает, для решения задачи её постановку полезно обобщить. Мы будем изучать не просто сумму $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} f(n)$, а функцию S, определяемую равенством

$$S(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) \qquad (x \in \mathbb{R}). \tag{2}$$

Таким образом, для изучения свойств непериодической функции мы сопоставим ей периодическую функцию и будем исследовать свойства последней, используя, в частности, развитый в §§ 3, 4 аппарат рядов Фурье.

Нужные нам факты содержит следующая

Лемма. *Пусть функция f суммируема на $\mathbb{R}$. Тогда*

а) *ряд* (2) *абсолютно сходится для почти всех x;*

б) *его сумма S есть 1-периодическая функция; она суммируема на $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ и равенство* (2) *можно интегрировать почленно;*

в) *коэффициенты Фурье функции S равны значениям $\widehat{f}$ в целых точках:*

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S(x)\, e^{-2\pi i n x} dx = \widehat{f}(n) \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

Доказательство. Рассмотрим неотрицательную измеримую функцию

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(x+n)| \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Так как положительный ряд можно интегрировать почленно, то

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} F(x)\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(x+n)|\,dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx$$

(второе равенство справедливо ввиду счётной аддитивности интеграла). Поэтому функция F суммируема на $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ и, следовательно, почти всюду конечна, что доказывает сходимость ряда $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |f(x+n)|$ почти везде, а вместе с этим и утверждение а).

Поскольку 1-периодичность функции S очевидна, утверждение б) следует из неравенства $|S| \leqslant F$. Так как F мажорирует и все частичные суммы ряда (2), его можно интегрировать почленно.

Для завершения доказательства домножим равенство (2) на $e^{-2\pi ikx}$ и проинтегрируем почленно по $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} S(x)\,e^{-2\pi ikx} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x+n)\,e^{-2\pi ikx}\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,e^{-2\pi ikx}\,dx = \widehat{f}(k).$$

Почленное интегрирование здесь допустимо, так как F — суммируемая мажоранта частичных сумм не только ряда (2), но и ряда $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)\,e^{-2\pi ikx}$. ►

Как установлено в лемме, ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\,e^{2\pi ikx}$ есть ряд Фурье функции S. Поэтому равенство

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\,e^{2\pi ikx} \tag{3}$$

(как и (1), оно называется формулой суммирования Пуассона) означает просто, что в точке x функция S есть сумма своего ряда Фурье. В частности, если функция S непрерывна в этой точке, то равенство (3) справедливо при единственном условии — ряд в правой части сходится.

Пример 1. Пусть $f(x) = e^{-\pi(tx)^2}$ (t — положительный параметр). Как установлено в примере 2 п. 5.1, $\widehat{f}(y) = \frac{1}{t}\,e^{-\pi(y/t)^2}$. Очевидно, сумма $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2(x+n)^2}$ — гладкая функция. Поэтому для f формула (3) справедлива всюду:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi t^2(x+n)^2} = \frac{1}{t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi(n/t)^2}\,e^{2\pi inx} = \frac{1}{t}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi(n/t)^2}\,\cos 2\pi nx\right).$$

При $x = 0$ левая часть этого равенства есть так называемая θ-функция:

$$\theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi(tn)^2}.$$

Из выведенного равенства следует, что она удовлетворяет тождеству Якоби $\theta(t) = \frac{1}{t}\theta(\frac{1}{t})$, играющему важную роль в теории эллиптических функций и теории теплопроводности.

Пример 2. Пусть $g(x) = (1 - |x|)_+$ для $x \in \mathbb{R}$. Очевидно,

$$\widehat{g}(y) = \int_{-1}^{1} (1 - |x|)\, e^{-2\pi i x y} dx = 2 \int_0^1 (1 - x) \cos 2\pi x y \, dx = \Big(\frac{\sin \pi y}{\pi y}\Big)^2.$$

Применим формулу (3) к функции $f = \widehat{g}$. Как нетрудно проверить, сумма $S(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)$ всюду непрерывна и $\widehat{f} = \check{f}$, так что по формуле обращения $\widehat{f} = g$. Поэтому согласно (3)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big(\frac{\sin \pi(x+n)}{\pi(n+x)}\Big)^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\, e^{2\pi i k x} = \widehat{f}(0) = 1.$$

Поскольку $\sin^2 \pi(x+n) = \sin^2 \pi x$ для всех $n \in \mathbb{Z}$, мы получаем отсюда разложение функции $\frac{1}{\sin^2 \pi x}$ в сумму простейших дробей:

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+x)^2} \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}).$$

При $x = \frac{1}{2}$ это приводит к равенству $\pi^2 = 4 \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = 8 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$, из которого легко следует уже известный нам результат $\frac{\pi^2}{6} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Почленно продифференцировав полученное разложение чётное число раз, подобным образом можно вычислить суммы рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$ $(k \in \mathbb{N})$, впервые найденные Эйлером.

Пример 3. Пусть $a > 1$, $u > 0$ и $f(x) = x^{a-1} e^{-ux}$ для $x > 0$, $f(x) = 0$ для $x \leqslant 0$. Эта функция непрерывна всюду, а ряд $S(x) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)$ равномерно сходится на любом конечном промежутке. Так как $\widehat{f}(y) = \frac{\Gamma(a)}{(u+2\pi i y)^a}$ (см. пример 5 п. 5.1), то ряд Фурье функции S абсолютно сходится. Следовательно, равенство (3) выполняется всюду. В частности, при $x = 0$ оно принимает вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{a-1} e^{-nu} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\Gamma(a)}{(u + 2\pi i n)^a}.$$

Отсюда видно, что сумма, стоящая справа, экспоненциально мала при $u \to +\infty$. При $u = 1$ сумму стоящего слева ряда можно рассматривать как дискретный аналог интеграла $\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt$. Из полученной формулы вытекает интересная связь между ними: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{a-1} e^{-n} = \Gamma(a) \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} (1 + 2\pi i n)^{-a}$.

Без каких-либо предположений о функции f (кроме суммируемости) равенство (3) справедливо “в слабом смысле”: после почленного интегрирования его обеих частей по произвольному промежутку получаются сходящиеся ряды, суммы которых совпадают. Это сразу следует из допустимости почленного интегрирования рядов Фурье (теорема 1 п. 3.6).

Отметим ещё, что не только (1) следует из (3), но и (3) можно рассматривать как равенство (1) для сдвига f_{-x} функции f, поскольку $\widehat{f_{-x}}(n) = \widehat{f}(n)\, e^{2\pi i n x}$ (см. начало п. 5.1).

Чтобы вывести равенство (1) из (3), нужно иметь уверенность, что последнее справедливо при $x = 0$. Для этого недостаточно, например, знать, что ряд (3) сходится почти везде. Поэтому особый интерес для нас представляет выяснение условий, при которых функция S всюду раскладывается в ряд Фурье. Одно из них даётся в упр. 2, другие варианты достаточных условий для функций нескольких переменных мы установим в следующем пункте.

6.2. Здесь мы обсудим многомерный вариант формулы суммирования Пуассона для функции f из $\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^m)$:

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^m} f(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} \widehat{f}(k) \tag{4}$$

или в более общем виде

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^m} f(x+n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} \widehat{f}(k)\, e^{2\pi i \langle k,x\rangle}. \tag{5}$$

Их вывод основывается на очевидной модификации леммы п. 6.1, в которой одномерная решётка $\mathbb{Z}$ заменяется многомерной, а промежуток интегрирования $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ — кубом $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^m$. Таким образом, ряд, стоящий в правой части (5), есть ряд Фурье функции $S(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^m} f(x+n)$. Поэтому, как и в одномерном случае, для непрерывной функции S равенство (5) означает, что она раскладывается в ряд Фурье.

Формулу (4) можно модифицировать с помощью линейной замены переменных (сравните с равенством (1′)):

$$\sqrt{|\det(T)|} \sum_{n\in\mathbb{Z}^m} f(T(n)) = \sqrt{|\det(S)|} \sum_{n\in\mathbb{Z}^m} \widehat{f}(S(n)),$$

где T — произвольное линейное невырожденное преобразование, $S = (T^*)^{-1}$, (здесь T^* — сопряжённое отображение).

Приведём два варианта условий, обеспечивающих равенство (5).

Теорема 1. *Пусть непрерывная в $\mathbb{R}^m$ функция f такова, что $f(x) = O\big(\|x\|^{-p}\big)$ и $\widehat{f}(x) = O\big(\|x\|^{-p}\big)$ при $\|x\| \to +\infty$ для некоторого $p > m$. Тогда равенство (5) справедливо для всех $x \in \mathbb{R}^m$.*

Доказательство. Заметим сначала, что $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^m)$: суммируемость на произвольном шаре следует из непрерывности f, а вне шара — из оценки $f(x) = O\big(\|x\|^{-p}\big)$.

При сделанных предположениях ряды, стоящие в левой и правой частях равенства (5), сходятся абсолютно и равномерно в любом шаре, а так как их слагаемые непрерывны, то непрерывны и суммы этих рядов. Таким образом, правая часть (5) есть равномерно сходящийся ряд Фурье суммы, стоящей в левой части. ►

Истолкование суммы кратного ряда не вызывает затруднений при наличии абсолютной сходимости. В противном случае необходимо уточнить, как понимается эта

сумма. В первую очередь это относится к стоящему в правой части равенства (5) ряду Фурье (ряд в левой части абсолютно сходится для почти всех x). Следующая теорема позволяет рассматривать ситуацию, когда ряд в правой части (5) сходится не абсолютно (см. также упр. 3, 4).

Теорема 2. *Пусть функция f удовлетворяет в $\mathbb{R}^m$ условию Липшица с показателем α: существует такое положительное число L, что $|f(x)-f(x')| \leqslant L\|x-x'\|^\alpha$ для всех $x, x' \in \mathbb{R}^m$. Допустим ещё, что она быстро убывает на бесконечности: $f(x) = O\big(\|x\|^{-p}\big)$ при $\|x\| \to +\infty$ для некоторого $p > m$. Тогда равенство (5) справедливо для всех $x \in \mathbb{R}^m$ (сумма ряда Фурье в правой части (5) понимается как предел прямоугольных частичных сумм).*

Доказательство. Как и в предыдущей теореме, $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^m)$. Достаточно убедиться, что функция S удовлетворяет условию Липшица с некоторым показателем β (тогда по теореме 4.5 прямоугольные частичные суммы равномерно стремятся к S). Оценивая разность $S(x+h) - S(x)$, будем считать, что $x \in [0,1]^m$ и $\|h\| \leqslant 1$. Ясно, что

$$|S(x+h) - S(x)| \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}^m} |f(x+h+n) - f(x+n)|. \tag{6}$$

Теперь, зафиксировав большой параметр R (его выбор уточним позже), разобьём слагаемые получившегося ряда на две группы, смотря по тому $\|n\| \leqslant R$ или $\|n\| > R$. Слагаемые первой группы (их число имеет порядок R^m) оценим, используя условие Липшица: $|f(x+h+n) - f(x+n)| \leqslant L\|h\|^\alpha$. Во втором случае применим оценку функции f на бесконечности:

$$|f(x+h+n) - f(x+n)| \leqslant |f(x+h+n)| + |f(x+n)| = O\big(\|n\|^{-p}\big).$$

Подставив эти оценки в неравенство (6), мы получим

$$|S(x+h) - S(x)| \leqslant \mathrm{const}\Bigg(R^m\|h\|^\alpha + \sum_{\|n\|>R} \|n\|^{-p}\Bigg) = O\Big(R^m\|h\|^\alpha + R^{m-p}\Big).$$

Теперь воспользуемся свободой в выборе параметра R и приравняем слагаемые $R^m\|h\|^\alpha$ и R^{m-p}: при $R = \|h\|^{-\frac{\alpha}{p}}$ мы получим, что $|S(x+h)-S(x)| = O\big(\|h\|^\beta\big)$ с $\beta = \alpha(1-\frac{m}{p})$. ►

Следствие. *Если функция f, имеющая ограниченные частные производные первого порядка, удовлетворяет для некоторого $p > m$ соотношению $f(x) = O\big(\|x\|^{-p}\big)$ при $\|x\| \to +\infty$, то для любой точки x справедливо равенство (5) (сумма ряда в правой части понимается как предел прямоугольных частичных сумм).*

6.3. Формула суммирования Пуассона оказалась эффективным инструментом для решения различных задач — см. пп. 6.4, 6.5. Но прежде чем переходить к этим технически более сложным приложениям, дополним с её помощью установленный в п. 5.9 принцип неопределённости, согласно которому функции f и $\widehat{f}$ не могут быть одновременно "сосредоточены на малых множествах" (см. также упр. 10, 11 § 5). Справедлива (см. [Ben]) следующая

Теорема. *Если суммируемая на $\mathbb{R}^m$ функция f такова, что множества $A = \{x \in \mathbb{R}^m \,|\, f(x) \neq 0\}$ и $B = \{y \in \mathbb{R}^m \,|\, \widehat{f}(y) \neq 0\}$ имеют конечные меры, то $f(x) = 0$ почти везде.*

Доказательство. Будем считать, что $\lambda_m(A) < 1$ (этого можно добиться заменой переменной $x \mapsto cx$). Пусть $Q = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^m$. Так как

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}^m} \int_Q \chi_B(y+k)\,dy = \int_{\mathbb{R}^m} \chi_B(y)\,dy = \lambda_m(B) < +\infty,$$

то для почти всех y ряд $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^m} \chi_B(y+k)$ сходится. Следовательно, $\chi_B(y+k) \neq 0$, т. е. $\widehat{f}(y+k) \neq 0$, лишь для конечного числа мультииндексов k. Поэтому для почти всех y функция $f_y(x) = f(x)\,e^{-2\pi i\langle y,x\rangle}$ такова, что среди чисел $\widehat{f_y}(k)$ $(k \in \mathbb{Z}^m)$ лишь конечное число отличных от нуля.

Поскольку k-й коэффициент Фурье функции S_y равен $\widehat{f_y}(k)$ (см. утверждение в) леммы 6.1), мы видим, что S_y почти везде совпадает с тригонометрическим многочленом. Множество $E_y = \{x \in Q \,|\, S_y(x) \neq 0\}$ содержится в объединении $\bigcup\limits_n (-n + A) \cap Q$, и поэтому $\lambda_m(E_y) \leqslant \lambda_m(A) < 1 = \lambda_m(Q)$. Так как ненулевой тригонометрический многочлен почти везде отличен от нуля, то $S_y(x) = 0$ почти везде. Следовательно, $0 = \widehat{S_y}(0) = \widehat{f_y}(0) = \int_{\mathbb{R}^m} f_y(x)\,dx = \widehat{f}(y)$ для почти всех y. По теореме единственности $f = 0$ почти везде. ▶

Отметим, что доказательство теоремы основано не на равенстве (5), а лишь на утверждении в) леммы 6.1 (точнее на его m-мерной модификации).

6.4. Обобщая рассуждения п. 4.3, рассмотрим метод суммирования кратных рядов Фурье, порождённый непрерывной и суммируемой на $\mathbb{R}^m$ функцией M $(M(0) = 1)$. Он состоит в том, что при $\varepsilon > 0$ каждой 1-периодической функции f, суммируемой на кубе $Q = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^m$, сопоставляется сумма

$$S_{M,\varepsilon}(f,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^m} M(\varepsilon n)\widehat{f}(n)\,e^{2\pi i\langle n,x\rangle},$$

а затем изучается её предел при $\varepsilon \to 0$.

Чтобы не усложнять изложение, будем считать функцию M столь быстро стремящейся к нулю на бесконечности, что

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^m} |M(\varepsilon n)| < +\infty \quad \text{для любого} \quad \varepsilon > 0$$

(это условие заведомо выполнено, если M — финитная функция).

Ясно, что $S_{M,\varepsilon}(f) = f * \omega_\varepsilon$, где

$$\omega_\varepsilon(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^m} M(\varepsilon n)\,e^{2\pi i\langle n,x\rangle}.$$

Если окажется, что функции ω_ε образуют аппроксимативную единицу при $\varepsilon \to 0$, то наша задача существенно упростится: при исследовании поведения сумм $S_{M,\varepsilon}(f,x)$ можно будет использовать общие теоремы VII.6.5 и IX.3.7.

В каком случае семейство $\{\omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ — аппроксимативная единица при $\varepsilon \to 0$? В п. 4.3 мы получили некоторое достаточное условие. Теперь, опираясь на формулу суммирования Пуассона, можно дать значительно более полный ответ на поставленный вопрос. Оказывается, достаточна суммируемость преобразования Фурье $\widehat{M}$ (как следует из результата упр. 6, это условие и необходимо).

Проверим условия, характеризующие периодическую аппроксимативную единицу (см. п. VII.6.5). Равенство $\int_{\mathbb{R}^m} \omega_\varepsilon(x)\,dx = 1$ справедливо, так как абсолютная сходимость ряда, определяющего функцию ω_ε, позволяет почленно проинтегрировать его по кубу Q:

$$\int_Q \omega_\varepsilon(x)\,dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}^m} M(\varepsilon n) \int_Q e^{2\pi i\langle n,x\rangle} = M(0) = 1.$$

Как мы покажем ниже, функции ω_ε неотрицательны, если $\widehat{M} \geqslant 0$. Однако независимо от этого условия интегралы $\int_Q |\omega_\varepsilon(x)|\,dx$ ограничены. Чтобы убедиться в этом, положим $N(x) = \widehat{M}(-x)$ и $N_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-m} N(\frac{x}{\varepsilon})$. Тогда по формуле обращения преобразования Фурье (см. теорему 5.4)

$$M(\varepsilon n) = \int_{\mathbb{R}^m} \widehat{M}(y)\, e^{2\pi i\langle \varepsilon n, y\rangle} dy = \varepsilon^{-m} \int_{\mathbb{R}^m} N\Big(-\frac{u}{\varepsilon}\Big)\, e^{2\pi i\langle n,u\rangle} du = \widehat{N_\varepsilon}(n)$$

и согласно формуле суммирования Пуассона

$$\omega_\varepsilon(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^m} \widehat{N_\varepsilon}(n)\, e^{2\pi i\langle n,x\rangle} = \sum_{n\in\mathbb{Z}^m} N_\varepsilon(x+n). \tag{7}$$

Поэтому $\omega_\varepsilon \geqslant 0$, если $N \geqslant 0$, т. е. $\widehat{M} \geqslant 0$, а в общем случае

$$\int_Q |\omega_\varepsilon(x)|\,dx \leqslant \int_Q \sum_{n\in\mathbb{Z}^m} \big|N_\varepsilon(x+n)\big|\,dx = \int_{\mathbb{R}^m} |N_\varepsilon(x)|\,dx = \|N\|_1 = \|\widehat{M}\|_1.$$

Таким образом, $\mathscr{L}^1$-норма (на кубе Q) каждой функции ω_ε не превосходит $\mathscr{L}^1$-нормы (на $\mathbb{R}^m$) преобразования Фурье $\widehat{M}$.

Небольшое уточнение проведённого рассуждения приводит к фокусирующему свойству. Действительно, для любого $\delta \in \big(0, \frac{1}{2}\big)$ мы имеем:

$$\int_{Q\setminus B(\delta)} |\omega_\varepsilon(x)|\,dx \leqslant \int_{\|x\|\geqslant\delta} |N_\varepsilon(x)|\,dx = \int_{\|y\|\geqslant\delta/\varepsilon} |\widehat{M}(y)|\,dy \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Итак, $\{\omega_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ — периодическая аппроксимативная единица и, следовательно, для неё справедливы утверждения а) и б) теоремы VII.6.5.

Пример. Функция $M(u) = e^{-\|u\|}$ порождает “радиальный” метод Абеля–Пуассона суммирования кратных рядов Фурье, при котором каждой 1-периодической функции f, суммируемой на кубе Q, сопоставляются суммы

$$S_\varepsilon(f,x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^m} e^{-\varepsilon\|n\|}\, \widehat{f}(n)\, e^{2\pi i\langle n,x\rangle}.$$

Преобразование Фурье функции M вычислено в примере 4 п. 5.1: $\widehat{M}(y) = C_m(1+4\pi^2\|y\|^2)^{-\frac{m+1}{2}}$. Оно, очевидно, суммируемо. Соответствующее ядро имеет вид (см. формулу (7))

$$\omega_\varepsilon(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^m} e^{-\varepsilon\|n\|}\, e^{2\pi i\langle n,x\rangle} = \sum_{n\in\mathbb{Z}^m} \frac{C_m\varepsilon}{(\varepsilon^2+4\pi^2\|n+x\|^2)^{\frac{m+1}{2}}}.$$

Как читатель легко убедится самостоятельно, оно не только обладает усиленным фокусирующим свойством (см. п. VII.6.5), но и имеет суммируемую "горбатую" мажоранту (см. упр. 8). Поэтому к суммам $S_\varepsilon(f) = f*\omega_\varepsilon$ можно применить теоремы пп. VII.6.5 и IX.3.7. Следовательно, $S_\varepsilon(f) \underset{\varepsilon\to 0}{\rightrightarrows} f$, если 1-периодическая функция f непрерывна, и $\int_Q |S_\varepsilon(f,x)-f(x)|^p dx \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$, если $f\in\mathscr{L}^p(Q)$, $p\geqslant 1$. Кроме того, $S_\varepsilon(f,x) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} L$, если $f(x+t) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} L$, и $S_\varepsilon(f,x) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} f(x)$ почти везде.

6.5. Интересным примером использования тождества Пуассона может служить одно из решений задачи Гаусса о подсчёте числа $N_m(R)$ точек целочисленной решётки $\mathbb{Z}^m$, лежащих в замкнутом шаре большого радиуса R. Число $N_m(R)$ близко к объёму шара: $N_m(R)-\lambda_m(\overline{B}(R)) = O(R^{m-1})$ при $R\to+\infty$. В этом легко убедиться, рассмотрев единичные кубы с центрами в точках решётки, т. е. кубы вида $n+[-\frac12,\frac12]^m$, $n\in\mathbb{Z}^m$. Так как при $n\in\overline{B}(R)$ их объединение содержит шар $B(R-\sqrt{m}\,)$ и содержится в шаре $\overline{B}(R+\sqrt{m}\,)$, то число $N_m(R)$, будучи равным объёму объединения построенных кубов, заключено между $\lambda_m\big(B(R-\sqrt{m}\,)\big)$ и $\lambda_m\big(B(R+\sqrt{m}\,)\big)$. Иными словами, $\alpha_m(R-\sqrt{m}\,)^m \leqslant N_m(R) \leqslant \alpha_m(R+\sqrt{m}\,)^m$, где α_m — объём единичного шара в $\mathbb{R}^m$.

Чтобы уточнить эту элементарную оценку, нам потребуются значительно бóльшие усилия. Но сначала заметим, что в соотношении $N_m(R) = \alpha_m R^m + O(R^\theta)$ показатель θ не может быть меньше $m-2$. Действительно, функция $R\mapsto N_m(R)$ совершает скачок при $R^2\in\mathbb{N}$, величина которого равна числу точек решётки на сфере радиуса R. Так как главный член асимптотики $\alpha_m R^m$ непрерывно зависит от R, то показатель θ должен быть столь большим, что число точек на сфере радиуса R мажорируется слагаемым пропорциональным R^θ. В сферическом слое $R<\|x\|<2R$ порядка R^m точек решётки. Число сфер, содержащих эти точки, не больше $3R^2$ (каждая такая сфера описывается уравнением $\|x\|^2=t$ с целым параметром t, лежащим между R^2 и $(2R)^2$). По крайней мере одна из них содержит не менее $\operatorname{const} R^{m-2}$ точек. Поэтому обязательно $\theta\geqslant m-2$.

Ясно, что (всюду далее $n\in\mathbb{Z}^m$)

$$N_m(R) = \sum_{\|n\|\leqslant R} 1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}^m} \chi\Big(\frac{n}{R}\Big), \tag{8}$$

где χ — характеристическая функция единичного шара $\overline{B}$. Для подсчёта суммы, стоящей в правой части (8), применим формулу суммирования Пуассона. К сожалению этого нельзя сделать напрямую, поскольку функция χ разрывна. Поэтому мы сгладим её и будем оценивать $N_m(R)$, применяя формулу Пуассона к гладким финитным функциям χ_+ и χ_-, аппроксимирующим χ сверху и снизу. Желательно, конечно, чтобы функции $\chi_\pm$ были по возможности близки к χ.

Для их построения возьмём неотрицательную функцию $\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ со свойствами $\operatorname{supp}(\psi)\subset\overline{B}$, $\int_{\mathbb{R}^m}\psi(x)\,dx = 1$ и положим $\psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-m}\psi(\frac{x}{\varepsilon})$, где ε — малый

положительный параметр, выбор которого уточним позже. Бесконечно дифференцируемая (см. следствие VII.5.4) функция $\chi_\varepsilon = \chi * \psi_\varepsilon$, очевидно, равна единице в шаре $\overline{B}(1-\varepsilon)$ и нулю вне шара $\overline{B}(1+\varepsilon)$. Следовательно, функции $\chi_-(x) = \chi_\varepsilon\big((1+\varepsilon)x\big)$ и $\chi_+(x) = \chi_\varepsilon\big((1-\varepsilon)x\big)$ удовлетворяют неравенству $\chi_- \leqslant \chi \leqslant \chi_+$. Таким образом,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}^m} \chi_\varepsilon\Big((1+\varepsilon)\frac{n}{R}\Big) \leqslant N_m(R) \leqslant \sum_{n\in\mathbb{Z}^m} \chi_\varepsilon\Big((1-\varepsilon)\frac{n}{R}\Big),$$

т. е.

$$S_\varepsilon\Big(\frac{R}{1+\varepsilon}\Big) \leqslant N_m(R) \leqslant S_\varepsilon\Big(\frac{R}{1-\varepsilon}\Big), \tag{9}$$

где $S_\varepsilon(r) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^m} \chi_\varepsilon(\frac{n}{r})$.

Чтобы применить формулу суммирования Пуассона (4) к функции $f(x) = \chi_\varepsilon(\frac{x}{r})$, заметим, что

$$\widehat{f}(y) = r^m\widehat{\chi_\varepsilon}(ry) = r^m\widehat{\chi}(ry)\widehat{\psi_\varepsilon}(ry) = r^m\widehat{\chi}(ry)\widehat{\psi}(r\varepsilon y); \quad \text{в частности,} \quad \widehat{f}(0) = \alpha_m r^m.$$

Поскольку функция ψ принадлежит классу $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, её преобразование Фурье (а следовательно, и $\widehat{f}$) быстро убывает на бесконечности. Таким образом, выполнены условия теоремы 1 п. 6.2, которая даёт нам

$$S_\varepsilon(r) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^m} \chi_\varepsilon\Big(\frac{n}{r}\Big) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^m} f(n) = \sum_{n\in\mathbb{Z}^m} \widehat{f}(n) = r^m \sum_{n\in\mathbb{Z}^m} \widehat{\chi}(rn)\widehat{\psi}(r\varepsilon n) =$$
$$= r^m\alpha_m + r^m \sum_{n\neq 0} \widehat{\chi}(rn)\widehat{\psi}(r\varepsilon n).$$

Поэтому

$$|S_\varepsilon(r) - \alpha_m r^m| \leqslant r^m \sum_{n\neq 0} |\widehat{\chi}(rn)| \cdot |\widehat{\psi}(r\varepsilon n)|.$$

Воспользовавшись оценками $\widehat{\psi}(y) = O\big((1+\|y\|)^{-m}\big)$ и $\widehat{\chi}(y) = O\big(\|y\|^{-\frac{m+1}{2}}\big)$ (см. пример 2 п. 5.2), мы получим:

$$|S_\varepsilon(r) - \alpha_m r^m| \leqslant \sum_{n\neq 0} \frac{Cr^m}{\|rn\|^{\frac{m+1}{2}}(1+\|r\varepsilon n\|)^m} = C\varepsilon^{-\frac{m-1}{2}} \sum_{n\neq 0} \frac{(r\varepsilon)^m}{\|r\varepsilon n\|^{\frac{m+1}{2}}(1+\|r\varepsilon n\|)^m}.$$

Так как для любой точки x, принадлежащей кубу с центром в $r\varepsilon n$, $n \neq 0$, и длиной ребра $r\varepsilon$, справедлива оценка $\|x\| \leqslant \|r\varepsilon n\| + \frac{\sqrt{m}}{2}r\varepsilon \leqslant (1+\frac{\sqrt{m}}{2})\|r\varepsilon n\|$, то последняя сумма мажорируется (с некоторым коэффициентом, зависящим только от размерности) интегралом

$$\int_{\mathbb{R}^m} \frac{dx}{\|x\|^{\frac{m+1}{2}}(1+\|x\|)^m} = \alpha_m \int_0^\infty \frac{t^{\frac{m-3}{2}}\,dt}{(1+t)^m} < +\infty.$$

Поэтому

$$|S_\varepsilon(r) - \alpha_m r^m| = O\big(\varepsilon^{-\frac{m-1}{2}}\big).$$

При $r = \frac{R}{1\pm\varepsilon}$ и $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ мы имеем $r^m = R^m(1 + O(\varepsilon))$, так что $|S_\varepsilon\big(\frac{R}{1\pm\varepsilon}\big) - \alpha_m R^m| = O\big(\varepsilon R^m + \varepsilon^{-\frac{m-1}{2}}\big)$. С учётом (9) мы видим, что

$$|N_m(R) - \alpha_m R^m| = O\big(\varepsilon R^m + \varepsilon^{-\frac{m-1}{2}}\big).$$

Минимальный порядок роста суммы $\varepsilon R^m + \varepsilon^{-\frac{m-1}{2}}$ будет при $\varepsilon R^m = \varepsilon^{-\frac{m-1}{2}}$, т. е. при $\varepsilon = R^{-\frac{2m}{m+1}}$. Выбрав ε таким образом, мы приходим к соотношению

$$N_m(R) = \alpha_m R^m + O(R^\theta) \quad \text{при} \quad R \to +\infty \tag{10}$$

с $\theta = m\frac{m-1}{m+1}$.

6.6. Что можно сказать о точности формулы (10)? Так как $\theta = m-2+\frac{2}{m+1}$, то при больши́х m её погрешность близка к минимально возможной $O(R^{m-2})$. Известно, что при $m > 4$ наилучшая оценка достижима: соотношение (10) справедливо с $\theta = m - 2$ (для $m = 4$ оно справедливо при любом $\theta > m - 2$). При $m = 3$ наименьшее значение показателя θ неизвестно до сих пор. Как мы убедились в предыдущем пункте, он не больше $\frac{3}{2}$ и не меньше 1. Существует гипотеза, согласно которой можно взять показатель θ сколь угодно близким к 1, но доказано пока лишь, что $\theta \leqslant \frac{29}{22}$. С историей вопроса можно познакомиться по статье [CI] и книге [ХЛ].

Обсудим подробнее двумерный случай. Мы доказали, что при $m = 2$ формула (10) верна с $\theta = \frac{2}{3}$. Этот первый нетривиальный результат в исследовании задачи Гаусса был получен Серпинским в 1906 году и с тех пор неоднократно улучшался. Более сложные методы позволили уменьшить показатель θ до $\frac{131}{208}$, но до сих пор не известно, можно ли взять θ сколь угодно близким к $\frac{1}{2}$. Эту границу преодолеть нельзя — как независимо установили в 1915 году Харди и Ландау*), соотношение $N_2(R) = \pi R^2 + O\big(R^\theta\big)$ возможно лишь при $\theta \geqslant \frac{1}{2}$. Мы изложим доказательство этого результата, основываясь на работе [EF] (см. также упр. 9).

Пусть $N(R) = N_2(R) = \operatorname{card}\{n \in \mathbb{Z}^2 \mid \|n\| \leqslant R\}$ и $\Delta(R) = N(R) - \pi R^2$. Нам потребуется функция $f(z) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} z^{k^2}$ $(|z| < 1)$, тесно связанная с величинами $N(R)$ и $\Delta(R)$. Действительно,

$$f^2(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^{k^2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} z^{j^2} = \sum_{(k,j)\in\mathbb{Z}^2} z^{k^2+j^2} = \sum_{m=0}^{\infty} \nu(m) z^m,$$

где $\nu(m)$ равно числу точек (k, j), лежащих на окружности радиуса $\sqrt{m}$. Так как $\nu(0) = 1$ и $\nu(m) = N(\sqrt{m}\,) - N(\sqrt{m-1}\,)$ при $m \geqslant 1$, то

$$f^2(z) = \sum_{m=0}^{\infty} N(\sqrt{m}\,) z^m - \sum_{m=1}^{\infty} N(\sqrt{m-1}\,) z^m = (1-z) \sum_{m=0}^{\infty} N(\sqrt{m}\,) z^m.$$

Поскольку $N(\sqrt{m}\,) = \pi m + \Delta(\sqrt{m}\,)$, мы видим, что

$$f^2(z) = \frac{\pi z}{1-z} + (1-z) \sum_{m=0}^{\infty} \Delta(\sqrt{m}\,) z^m. \tag{11}$$

*) Эдмунд Георг Герман **Ландау** (Landau), 1877–1938, — немецкий математик.

Нужное нам неравенство $\theta \geqslant \frac{1}{2}$ получим, сопоставив оценки снизу и сверху интегралов

$$I(r) = \int_{-\pi}^{\pi} \left|f^2(re^{it})\right| dt \qquad \left(\frac{1}{2} < r < 1\right).$$

Оценка снизу. Так как $f(re^{it}) = 1 + 2\sum\limits_{k=1}^{\infty} r^{k^2} e^{ik^2 t}$, то равенство Парсеваля даёт нам:

$$I(r) = 2\pi\left(1 + 4\sum_{k=1}^{\infty} r^{2k^2}\right) \geqslant 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} r^{2k^2} \geqslant 2\pi \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k}^{k+1} r^{2t^2} dt = 2\pi \int_{0}^{\infty} r^{2t^2} dt = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2\ln\frac{1}{r}}}.$$

Поэтому

$$I(r) \geqslant \frac{C_1}{\sqrt{1-r}}$$

(здесь и далее C_1, C_2, ... — положительные коэффициенты, не зависящие от r).

Оценка сверху. Применим результат, установленный в примере 3 п. 2.1, к функции $\varphi(t) = f(re^{it})$: для $\alpha \in (0, \pi)$ (выбор этого параметра уточним позже) справедливо неравенство

$$I(r) \leqslant \frac{3\pi}{\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} |f^2(re^{it})| \, dt.$$

Обозначив сумму, стоящую в правой части равенства (11) через $S(z)$, мы получим

$$I(r) \leqslant \frac{3\pi}{\alpha}\left(\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{\pi dt}{|1 - re^{it}|} + \int_{-\alpha}^{\alpha} |1 - re^{it}| \, |S(re^{it})| \, dt\right) = \frac{3\pi}{\alpha}(I_1 + I_2).$$

С помощью неравенства

$$|1 - re^{it}| = \sqrt{(1-r)^2 + 4r\sin^2\frac{t}{2}} \geqslant \frac{(1-r) + |\sin\frac{t}{2}|}{2} \geqslant \frac{(1-r) + |t|}{2\pi}$$

нетрудно проверить, что

$$I_1 \leqslant C_2 |\ln(1-r)|.$$

Так как $|1 - re^{it}| \leqslant (1-r) + r|t| \leqslant (1-r) + \alpha$, то при $\alpha \geqslant 1 - r$

$$I_2 \leqslant 2\alpha \int_{-\alpha}^{\alpha} \left|S(re^{it})\right| dt \leqslant 2\alpha \sqrt{2\alpha \int_{-\pi}^{\pi} \left|S(re^{it})\right|^2 dt} = (2\alpha)^{\frac{3}{2}} \sqrt{2\pi \sum_{m=0}^{\infty} \Delta^2(\sqrt{m}\,) r^{2m}}.$$

Поэтому, если $\Delta(R) = O(R^{\theta})$ при $R \to +\infty$ для некоторого $\theta > 0$, то

$$I_2 \leqslant C_3 \alpha^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 + \sum_{m=1}^{\infty} m^{\theta} r^{2m}} \leqslant C_3 \alpha^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 + \sum_{m=1}^{\infty} \int_{m}^{m+1} t^{\theta} r^{2(t-1)} dt} \leqslant$$

$$\leqslant 2C_3 \alpha^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 + \int_{0}^{\infty} t^{\theta} r^{2t} dt} = 2C_3 \alpha^{\frac{3}{2}} \sqrt{1 + \frac{\Gamma(1+\theta)}{\ln^{1+\theta}\frac{1}{r^2}}} \leqslant C_4 \frac{\alpha^{\frac{3}{2}}}{(1-r)^{\frac{1+\theta}{2}}}.$$

Таким образом, для $\alpha > 1 - r > 0$ справедливо двойное неравенство

$$\frac{C_1}{\sqrt{1-r}} \leqslant I(r) \leqslant \frac{C_5}{\alpha}\left(|\ln(1-r)| + \frac{\alpha^{\frac{3}{2}}}{(1-r)^{\frac{1+\theta}{2}}}\right),$$

и, следовательно,

$$0 < C_6 \leqslant \frac{1}{\alpha}\sqrt{1-r}\,|\ln(1-r)| + \frac{\sqrt{\alpha}}{(1-r)^{\frac{\theta}{2}}}.$$

Теперь, пользуясь свободой в выборе параметра α, уменьшим правую часть. Она минимальна (по порядку), если слагаемые равны, т. е. при $\alpha = (1-r)^{\frac{1+\theta}{3}}|\ln(1-r)|^{\frac{2}{3}}$. Взяв такое α, мы получим, что для всех $r \in (\frac{1}{2}, 1)$ верно неравенство

$$0 < C_6 \leqslant \frac{2}{\alpha}\sqrt{1-r}\,|\ln(1-r)| = 2(1-r)^{\frac{1-2\theta}{6}}|\ln(1-r)|^{\frac{1}{3}},$$

а это возможно лишь при $\theta \geqslant \frac{1}{2}$.

6.7. Ясно, что число точек целочисленной решётки $\mathbb{Z}^m$, содержащихся в сдвинутом шаре $\overline{B}(t,R)$ большого радиуса R, асимптотически равно объёму шара. Как мы уже убедились, совсем не просто получить хорошую оценку разности

$$\Delta_R(t) = \operatorname{card}\left\{n \in \mathbb{Z}^m \;\middle|\; \|n-t\| \leqslant R\right\} - \alpha_m R^m$$

при $R \to +\infty$ в фиксированной точке t. Однако среднее (по t) значение погрешности $\Delta_R(t)$ оценить значительно легче. Как установлено в [Ke],

$$\int_{[0,1]^m} \left|\Delta_R(t)\right|^2 dt \leqslant C_m R^{m-1}. \tag{12}$$

Чтобы убедиться в этом, вычислим коэффициенты Фурье функции

$$f(t) = \Delta_R(t) + \alpha_m R^m = \operatorname{card}\left\{n \in \mathbb{Z}^m \;\middle|\; \|n-t\| \leqslant R\right\}$$

(очевидно, она имеет период 1 по каждой переменной). Пусть χ — характеристическая функция замкнутого единичного шара (с центром в нуле). Тогда $f(t) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^m} \chi\left(\frac{n-t}{R}\right)$, и при $Q = [0,1)^m$ мы для любого $k \in \mathbb{Z}^m$ получаем:

$$\widehat{f}(k) = \int_Q f(t)\, e^{-2\pi i\langle k,t\rangle}\, dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}^m} \int_Q \chi\left(\frac{n-t}{R}\right) e^{-2\pi i\langle k,t\rangle} dt =$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}^m} \int_{n+Q} \chi\left(\frac{t}{R}\right) e^{-2\pi i\langle k,t\rangle} dt = \int_{\mathbb{R}^m} \chi\left(\frac{t}{R}\right) e^{-2\pi i\langle k,t\rangle} dt = R^m \widehat{\chi}(Rk).$$

Поэтому $\widehat{\Delta_R}(k) = \widehat{f}(k) = R^m \widehat{\chi_B}(Rk)$ при $k \neq 0$ и $\widehat{\Delta_R}(0) = \widehat{f}(0) - \alpha_m R^m = (\widehat{\chi_B}(0) - \alpha_m)R^m = 0$. Равенство Парсеваля даёт нам

$$\int_{[0,1]^m} \left|\Delta_R(t)\right|^2 dt = \sum_{k\in\mathbb{Z}^m} \left|\widehat{\Delta_R}(k)\right|^2 = R^{2m} \sum_{k\neq 0} \left|\widehat{\chi_B}(Rk)\right|^2.$$

Теперь неравенство (12) следует из оценки $\widehat{\chi_B}(y) = O\big(\|y\|^{-\frac{m+1}{2}}\big)$, вытекающей из асимптотической формулы для $\widehat{\chi_B}(y)$ (см. пример 2 п. 5.2).

Интересно отметить, что при $m \neq 1 \pmod 4$ использованная асимптотическая формула для $\widehat{\chi}_B(y)$ позволяет получить и неравенство

$$\int_{[0,1]^m} \big|\Delta_R(t)\big|^2 dt \geqslant \widetilde{C}_m R^{m-1} > 0. \tag{12'}$$

В частности, при $m = 2$ отсюда следует, что в рассматриваемой задаче для сдвинутых кругов $\overline{B}(t, R)$ типичная погрешность имеет порядок роста $\sqrt{R}$.

Если же $m = 4l{+}1$, то при $R \to +\infty$ верхний предел отношения $\frac{1}{R^{m-1}} \int_{[0,1]^m} \big|\Delta_R(t)\big|^2 dt$ положителен, а нижний равен нулю.

УПРАЖНЕНИЯ

1) Дополните утверждение леммы 6.1, доказав, что ряд $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ сходится к $S(x)$ не только почти везде, но и в среднем.

2) Пусть абсолютно непрерывная функция f суммируема на $\mathbb{R}$ вместе со своей производной. Докажите, что равенство (3) справедливо для всех $x \in \mathbb{R}$.

3) Проверьте, что условие Липшица в теореме 2 п. 6.2 можно ослабить, предположив, что для любого $R > 1$ справедливо неравенство $|f(x+h) - f(x)| \leqslant R^q \|h\|^\alpha$, если $\|h\| \leqslant 1$ и $\|x\| \leqslant R$ (здесь q — фиксированное неотрицательное число).

4) Опираясь на результат предыдущего упражнения, покажите, что в следствии 6.2 можно вместо ограниченности производных предполагать лишь, что они мажорируются некоторым полиномом.

5) Пусть $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^m) \cap C(\mathbb{R}^m)$ и $\widehat{f} \geqslant 0$ всюду. Докажите, что равенство (5) справедливо в каждой точке $x \in \mathbb{R}^m$ (ряд в правой части (5) сходится абсолютно).

6) Докажите, что для ограниченности $\mathscr{L}^1$-норм сумм ω_ε (см. формулу (7)) условие $\widehat{M} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^m)$ не только достаточно, но и необходимо.

7) Докажите, что функция ω_ε из примера п. 6.4 допускает оценку $\omega_\varepsilon(x) = O(\varepsilon)\big(1 + (\varepsilon^2 + 4\pi^2\|x\|^2)^{-\frac{m+1}{2}}\big)$ (константа в O-члене зависит лишь от размерности).

8) Докажите, что функции $\omega_\varepsilon(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^m} e^{-\varepsilon\|n\|^2} e^{2\pi i\langle n,x\rangle}$ образуют при $\varepsilon \to 0$ аппроксимативную единицу с усиленным фокусирующим свойством, имеющую горбатую мажоранту.

9) Убедитесь, что рассуждения п. 6.6 позволяют получить более сильный результат (см. [EF]): дробь $\Delta(R)\big/\sqrt{\frac{R}{\ln R}}$ не стремится к нулю при $R \to +\infty$.

Глава XI. ЗАРЯДЫ. ТЕОРЕМА РАДОНА – НИКОДИМА

§ 1. Заряды; интегрирование по заряду

Всюду далее мы будем рассматривать произвольное множество X и фиксированную σ-алгебру $\mathfrak{A}$ его подмножеств. Все рассматриваемые множества считаются по умолчанию измеримыми, т. е. принадлежащими этой σ-алгебре. Напомним, что символом $\bigvee\limits_{\alpha\in A} E_\alpha$ обозначается объединение семейства попарно не пересекающихся множеств.

1.1. Определение. Функция $\varphi\colon \mathfrak{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ называется (*комплексным*) *зарядом,* если она счётно аддитивна, т. е. если для любой последовательности попарно не пересекающихся (измеримых) множеств A_k ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \varphi(A_k)$ сходится и справедливо равенство

$$\varphi\Bigl(\bigvee_{k=1}^{\infty} A_k\Bigr) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(A_k).$$

Заряд, все значения которого принадлежат множеству $\mathbb{R}$, называется *вещественным.*

Примером вещественного заряда может служить, очевидно, разность двух конечных мер. Ниже мы увидим, что верно и обратное (см. следствие 1.5).

Подобно тому как меру удобно представлять себе в виде распределённой по некоторому множеству массы, так и вещественную счётно-аддитивную функцию (точнее, её значение на данном множестве) естественно истолковать как суммарный электрический заряд неподвижно расположенных на этом множестве положительно и отрицательно заряженных частиц. Этой интерпретации и соответствует термин “заряд”.

Отметим некоторые простые свойства зарядов. Символ φ обозначает произвольный заряд.

1. $\varphi(\varnothing) = 0$. Это следует из счётной аддитивности, если в качестве множеств A_k взять пустое множество. ►

2. Заряд — аддитивная функция множества: $\varphi(A \vee B) = \varphi(A) + \varphi(B)$.

Чтобы убедиться в этом, достаточно положить $A_1 = A$, $A_2 = B$, $A_k = \varnothing$ при $k > 2$ и воспользоваться счётной аддитивностью заряда и свойством 1. ►

Отсюда следует, что заряд — конечно-аддитивная функция:

$$\varphi\Bigl(\bigvee_{k=1}^{n} A_k\Bigr) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(A_k).$$

3. Если $B \subset A$, то $\varphi(A \setminus B) = \varphi(A) - \varphi(B)$. Действительно, $A = B \vee (A \setminus B)$. Поэтому в силу аддитивности $\varphi(A) = \varphi(B) + \varphi(A \setminus B)$. ►

1.2. Как и конечные меры, заряды непрерывны сверху и снизу.

Теорема. *Пусть φ — произвольный заряд. Тогда $\varphi(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(A_n)$, если $A_1 \subset \subset A_2 \subset \ldots$, $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ (непрерывность снизу) или если $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$, $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ (непрерывность сверху).*

Доказательство. Непрерывность снизу легко следует из равенства $A = \bigvee\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus A_{n-1})$ (здесь $A_0 = \varnothing$), в силу которого

$$\varphi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n \setminus A_{n-1}) = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi(A_n) - \varphi(A_{n-1})) = \lim_{n\to\infty} \varphi(A_n).$$

Непрерывность сверху можно доказать аналогично, воспользовавшись представлением $A_1 = A \vee \bigvee\limits_{n=2}^{\infty} (A_{n-1} \setminus A_n)$. Подробное рассуждение мы предоставляем провести читателю. ▶

1.3. Оказывается, для вещественных зарядов справедлив аналог теоремы Вейерштрасса: каждый такой заряд достигает своего наибольшего и наименьшего значения. Прежде чем переходить к доказательству этой важной теоремы, установим один вспомогательный факт.

Определение. Множество A будем называть *множеством положительности* заряда φ, если $\varphi(E) \geqslant 0$ для любого множества E, содержащегося в A.

Лемма. 1) *Счётное объединение множеств положительности есть множество положительности.*

2) *Каждое множество A содержит такое множество положительности B, что $\varphi(B) \geqslant \varphi(A)$.*

Доказательство. Первое утверждение леммы немедленно следует из счётной аддитивности заряда.

Докажем второе утверждение. Если $\varphi(A) \leqslant 0$, то можно положить $B = \varnothing$. Будем считать, что $\varphi(A) > 0$.

Проверим сначала, что второе утверждение леммы "выполняется с точностью до ε". При $\varepsilon > 0$ будем говорить, что множество A есть множество ε-положительности, если $\varphi(E) > -\varepsilon$ для любого множества E, содержащегося в A.

Докажем, что при любом $\varepsilon > 0$ множество A содержит такое множество ε-положительности C, что $\varphi(C) \geqslant \varphi(A)$. Действительно, если само множество A не является множеством ε-положительности, то найдётся такое его подмножество e_1, что $\varphi(e_1) \leqslant -\varepsilon$. Положим $A_1 = A \setminus e_1$. Ясно, что $\varphi(A_1) > \varphi(A)$. Теперь мы можем повторить наши рассуждения, заменив A на A_1 и т. д. Этот процесс не может продолжаться неограниченно, так как в противном случае мы получим такую бесконечную последовательность попарно дизъюнктных множеств $\{e_n\}_{n\geqslant 1}$, что $\varphi(e_n) \leqslant -\varepsilon$. Но это невозможно, так как в силу счётной аддитивности $\varphi\Big(\bigvee\limits_{n=1}^{\infty} e_n\Big) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi(e_n)$, а ряд справа расходится.

Если построение e_n нельзя продолжить после N-го шага, то очевидно, разность $A_N = A_{N-1} \setminus e_N$ окажется искомым множеством ε-положительности.

Теперь шаг за шагом выберем множества $\frac{1}{n}$-положительности C_n так, что

$$C_1 \subset A, \quad \varphi(C_1) \geqslant \varphi(A); \quad \ldots \quad C_{n+1} \subset C_n, \quad \varphi(C_{n+1}) \geqslant \varphi(C_n) \ \text{ при } \ n \in \mathbb{N}.$$

Действительно, сначала найдём такое содержащееся в A множество 1-положительности C_1, что $\varphi(C_1) \geqslant \varphi(A)$. Затем найдём такое множество $\frac{1}{2}$-положительности C_2, содержащееся в C_1, что $\varphi(C_2) \geqslant \varphi(C_1)$ и т. д. Так как часть множества ε-положительности снова есть множество ε-положительности, то множество $B = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n$ будет множеством ε-положительности при любом $\varepsilon > 0$, т. е. множеством положительности, причём $\varphi(B) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(C_n) \geqslant \varphi(A)$. ►

Теорема. *Всякий вещественный заряд φ достигает наибольшего и наименьшего значений: существуют такие множества C и C', что*

$$\varphi(C) = \sup\{\varphi(E) \,|\, E \in \mathfrak{A}\}, \quad \varphi(C') = \inf\{\varphi(E) \,|\, E \in \mathfrak{A}\}.$$

Доказательство. Мы докажем лишь первое утверждение (применив его к заряду $-\varphi$, получим и второе). Положим $H = \sup\{\varphi(A) \,|\, A \in \mathfrak{A}\}$. Очевидно, $0 \leqslant H \leqslant +\infty$ (мы не исключаем пока, что $H = +\infty$). Из леммы следует, что

$$H = \sup\{\varphi(B) \,|\, B \ \text{ — множество положительности}\}.$$

Рассмотрим теперь такие множества положительности B_n, что $\varphi(B_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} H$. Их объединение является искомым множеством C, так как

$$H \geqslant \varphi(C) \geqslant \varphi(B_n) \quad \text{ при любом } \ n. \ ►$$

Следствие. *Всякий заряд ограничен, т. е. для каждого заряда φ найдётся такое число L, что $|\varphi(A)| \leqslant L$ для любого $A \in \mathfrak{A}$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть вещественные заряды. Тогда ограниченность сразу вытекает из теоремы, так как по определению заряд принимает лишь конечные значения. ►

1.4. Введём теперь важную характеристику заряда (как вещественного, так и комплексного).

Определение. *Вариацией заряда φ на множестве A* называется величина

$$|\varphi|(A) = \sup\left\{\sum_{k=1}^{n} |\varphi(E_k)| \,\middle|\, \bigvee_{k=1}^{n} E_k \subset A, \quad n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Традиционное обозначение $|\varphi|$ требует известной осторожности: не следует путать $|\varphi|(A)$ с $|\varphi(A)|$.

Перечислим несколько простейших свойств вариации, первые четыре из которых непосредственно следуют из её определения.

1. $|\varphi(A)| \leqslant |\varphi|(A)$.
2. Если $B \subset A$, то $|\varphi|(B) \leqslant |\varphi|(A)$ (монотонность вариации).
3. Вариация конечной меры совпадает с этой мерой.
4. Если $\varphi = a\varphi_1 + b\varphi_2$, то $|\varphi|(A) \leqslant |a|\,|\varphi_1|(A) + |b|\,|\varphi_2|(A)$.

4′. $\big|\,|\varphi_1|(A) - |\varphi_2|(A)\big| \leqslant |\varphi_1 - \varphi_2|(A)$.

5. Если φ — вещественный заряд, то

$$|\varphi|(A) = \sup\{\varphi(B) - \varphi(C) \mid B \vee C \subset A\} = \sup\{\varphi(B) - \varphi(C) \mid B, C \subset A\}. \tag{1}$$

Для доказательства первого из равенств (1) положим

$$S = \sup\{\varphi(B) - \varphi(C) \mid B \vee C \subset A\}.$$

Ясно, что $S \leqslant |\varphi|(A)$. С другой стороны, если $E_1 \vee \ldots \vee E_n \subset A$, то мы можем разделить эти множества на две группы: в одну отнесём те множества E_k, для которых $\varphi(E_k) \geqslant 0$, а в другую — те, для которых $\varphi(E_k) < 0$. Пусть B и C — объединения множеств первой и второй групп соответственно. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} |\varphi(E_k)| = \sum_{\varphi(E_k)\geqslant 0} \varphi(E_k) - \sum_{\varphi(E_k)<0} \varphi(E_k) = \varphi(B) - \varphi(C) \leqslant S.$$

Так как это верно для любого набора $E_1 \vee \ldots \vee E_n \subset A$, то $|\varphi|(A) \leqslant S$ по определению вариации, что вместе с отмеченным выше обратным неравенством даёт нам первое из равенств (1). Для доказательства второго заметим, что если B, $C \subset A$ и $E = B \cap C$, то $(B \setminus E) \cap (C \setminus E) = \varnothing$ и

$$\varphi(B) - \varphi(C) = \varphi(B \setminus E) + \varphi(E) - (\varphi(C \setminus E) + \varphi(E)) = \varphi(B \setminus E) - \varphi(C \setminus E) \leqslant S.$$

Поэтому правая часть равенства (1) не превосходит S. Обратное неравенство очевидно. ►

1.5. Установим основное свойство вариации.

Теорема. *Вариация произвольного заряда φ есть конечная мера.*

Доказательство. Убедимся, что вариация заряда φ есть мера. Пусть $A = \bigvee_{k=1}^{\infty} A_k$. Мы должны доказать, что

$$|\varphi|(A) = \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi|(A_k).$$

Проверим сначала справедливость неравенства

$$|\varphi|(A) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi|(A_k). \tag{2}$$

Пусть $E_1 \vee \ldots \vee E_n \subset A$. Тогда

$$\varphi(E_j) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(E_j \cap A_k)$$

и

$$\sum_{j=1}^{n} |\varphi(E_j)| = \sum_{j=1}^{n} \left|\sum_{k=1}^{\infty} \varphi(E_j \cap A_k)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} |\varphi(E_j \cap A_k)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi|(A_k).$$

Переходя к supremum'у в левой части последнего неравенства, мы получаем (2).

Перейдём к доказательству обратного неравенства. Проверим сначала, что $|\varphi|(A \vee B) \geqslant |\varphi|(A) + |\varphi|(B)$ для любых дизъюнктных множеств A, B. Действительно, если $\bigvee\limits_{j=1}^{n} E_j \subset A$ и $\bigvee\limits_{k=1}^{m} E'_k \subset B$, то $E_1 \vee \ldots \vee E_n \vee E'_1 \vee \ldots \vee E'_m \subset A \vee B$ и поэтому

$$|\varphi|(A \vee B) \geqslant \sum_{j=1}^{n} |\varphi(E_j)| + \sum_{k=1}^{m} |\varphi(E'_k)|.$$

Перейдя к супремуму сначала по всевозможным наборам $E_1, \ldots, E_n$, а затем — по наборам $E'_1, \ldots, E'_m$, мы видим, что $|\varphi|(A \vee B) \geqslant |\varphi|(A) + |\varphi|(B)$. С помощью индукции это неравенство легко обобщить: $|\varphi|(A_1 \vee \ldots \vee A_N) \geqslant |\varphi|(A_1) + \ldots + |\varphi|(A_N)$. Учитывая монотонность вариации, мы видим, что

$$|\varphi|\Bigl(\bigvee_{k=1}^{\infty} A_k\Bigr) \geqslant |\varphi|\Bigl(\bigvee_{k=1}^{N} A_k\Bigr) \geqslant \sum_{k=1}^{N} |\varphi|(A_k).$$

Ввиду произвольности N отсюда следует неравенство, противоположное (2), а следовательно, и счётная аддитивность вариации.

Чтобы убедиться в конечности вариации, достаточно в силу её монотонности проверить, что $|\varphi|(X) < +\infty$. Поскольку вещественная и мнимая части комплексного заряда снова являются зарядами, мы, учитывая свойство 4), можем считать заряд φ вещественным. По следствию 1.3 он ограничен. Поэтому при некотором $L > 0$ для любого множества A справедливо неравенство $|\varphi(A)| \leqslant L$. По свойству 5) мы получаем

$$|\varphi|(X) = \sup\{\varphi(B) - \varphi(C) \mid B, C \subset X\} \leqslant 2L. \ \blacktriangleright$$

Следствие. *Вещественный заряд есть разность конечных мер. Комплексный заряд φ представим в виде $\varphi = \mu_1 - \mu_2 + i(\mu_3 - \mu_4)$, где $\mu_1, \ldots, \mu_4$ — конечные меры.*

Доказательство. Если φ — вещественный заряд, то разность $\mu = |\varphi| - \varphi$ также есть заряд. По первому свойству вариации этот заряд неотрицателен и, следовательно, является мерой (очевидно, конечной). Вместе с тем ясно, что $\varphi = |\varphi| - \mu$.

Для комплексного заряда следует использовать полученное представление вещественных зарядов $\mathcal{R}e\,\varphi$ и $\mathcal{I}m\,\varphi$. $\blacktriangleright$

1.6. Теорема. *Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — произвольное пространство с мерой, $f \in \mathscr{L}^1(X, \mu)$, и пусть заряд φ определяется равенством*

$$\varphi(A) = \int_A f\,d\mu \qquad (A \in \mathfrak{A}).$$

Тогда

$$|\varphi|(A) = \int_A |f|\,d\mu \quad (A \in \mathfrak{A}). \tag{3}$$

Замечание. При выполнении условий теоремы функция f называется *плотностью заряда φ (относительно меры μ)*. Мы будем также говорить, что заряд φ порождён функцией f и символически записывать это так: $d\varphi = f\,d\mu$. Заметим, что плотность определяется зарядом однозначно с точностью до эквивалентности (см. теорему IV.5.4).

Доказательство. Пусть $A_1 \vee \ldots \vee A_N \subset A$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{N} |\varphi(A_k)| = \sum_{k=1}^{N} \left| \int_{A_k} f\, d\mu \right| \leqslant \sum_{k=1}^{N} \int_{A_k} |f|\, d\mu = \int_{A_1 \cup \ldots \cup A_N} |f|\, d\mu \leqslant \int_A |f|\, d\mu.$$

Переходя в левой части последнего неравенства к supremum'у по всевозможным наборам множеств A_k, удовлетворяющих указанным условиям, мы получаем, что

$$|\varphi|(A) \leqslant \int_A |f|\, d\mu. \tag{4}$$

Докажем теперь, что справедливо и обратное неравенство. Рассмотрим сначала случай, когда функция f простая. Пусть $E_1, E_2, \ldots, E_N$ попарно не пересекающиеся множества, $f = \sum\limits_{k=1}^{N} a_k \chi_{E_k}$, где a_k скаляр, а символ χ_{E_k}, как обычно, обозначает характеристическую функцию множества E_k. Тогда

$$|\varphi|(A) \geqslant \sum_{k=1}^{N} |\varphi|(A \cap E_k) \geqslant \sum_{k=1}^{N} |\varphi(A \cap E_k)| = \sum_{k=1}^{N} \left| \int_{A \cap E_k} f\, d\mu \right| = \sum_{k=1}^{N} |a_k|\, \mu(A \cap E_k) = \int_A |f|\, d\mu.$$

Вместе с (4) это даёт нам равенство (3).

Перейдём теперь к случаю произвольной суммируемой функции f и докажем сначала, что неравенство, обратное (4), справедливо со сколь угодно малой погрешностью.

Зафиксируем произвольное положительное число ε и такую простую функцию g, что её отклонение в среднем от f, т. е. величина $\int_X |f - g|\, d\mu$, меньше ε (см. лемму IV.9.2). Пусть ψ — заряд, порождённый функцией g: $\psi(A) = \int_A g\, d\mu$ при $A \in \mathfrak{A}$. Тогда, пользуясь свойством $4'$ вариации, неравенством (4) и тем, что для простых функций равенство (3) уже доказано, мы получаем

$$|\varphi|(A) = |\psi - (\psi - \varphi)|(A) \geqslant |\psi|(A) - |\varphi - \psi|(A) \geqslant \int_A |g|\, d\mu - \int_A |f - g|\, d\mu \geqslant$$
$$\geqslant \int_A |f|\, d\mu - 2\int_A |f - g|\, d\mu \geqslant \int_A |f| - 2\int_X |f - g|\, d\mu \geqslant \int_A |f|\, d\mu - 2\varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε из последнего неравенства вытекает, что $|\varphi|(A) \geqslant \int_A |f|\, d\mu$. Вместе с (4) это влечёт (3). ▶

1.7. Установим теперь одно важное свойство вещественного заряда, ещё раз показывающее, что интерпретация значений вещественной счётно-аддитивной функции как "меры количества электричества", содержащегося в положительно и отрицательно заряженных частицах, распределённых на множестве, о чём мы говорили в начале параграфа, была вполне естественной: всё множество разбивается на две части так, что одна из частей содержит только положительно заряженные, а другая — только отрицательно заряженные частицы.

Теорема. *Пусть φ — вещественный заряд, определённый на σ-алгебре $\mathfrak{A}$ подмножеств множества X. Тогда X можно так разбить на два подмножества X_+, X_-, что*

$$\varphi(A \cap X_+) \geqslant 0, \ \varphi(A \cap X_-) \leqslant 0 \quad \text{для любого множества } A \text{ из } \mathfrak{A}. \tag{5}$$

Представление $X = X_+ \vee X_-$ с указанным в теореме свойством называется *разложением Хана**) заряда φ.

Доказательство. Пусть X_+ — то множество, на котором заряд φ достигает максимального значения (см. теорему 1.3). Оно не может содержать таких подмножеств E, для которых $\varphi(E) < 0$, так как иначе, удаляя E из X_+, мы получили бы множество, на котором значение заряда больше максимального.

Аналогично, если $E \cap X_+ = \varnothing$, то на таком множестве E заряд не может принимать положительного значения (в противном случае, добавляя E к X_+, мы также построили бы множество, на котором заряд принимает слишком большое значение).

Остаётся положить $X_- = X \setminus X_+$, и мы приходим к требуемому разложению. ▶

Разложение Хана $X = X_+ \vee X_-$, вообще говоря, не единственно. В самом деле, если, например, $E \subset X_+$, $E \neq \varnothing$, $|\varphi|(E) = 0$, то, удалив E из X_+ и добавив его к X_-, мы получим новое разложение Хана.

Следствие. *Для вещественного заряда φ положим*

$$\varphi_+(A) = \sup\{\varphi(B) \mid B \subset A\}, \qquad \varphi_-(A) = \sup\{-\varphi(B) \mid B \subset A\} \qquad (A \in \mathfrak{A}).$$

Тогда φ_+, φ_- — конечные меры и

$$\varphi = \varphi_+ - \varphi_-, \qquad |\varphi| = \varphi_+ + \varphi_-. \tag{6}$$

Меры φ_+ и φ_- называются соответственно *положительной и отрицательной вариациями* заряда φ, а представление (6) — *разложением Жордана*. Ясно, что $\varphi_- = (-\varphi)_+$ и $\varphi_+ = (-\varphi)_-$.

Доказательство. Пусть $X = X_+ \cup X_-$ — разложение Хана заряда φ. Убедимся, что

$$\varphi_+(A) = \varphi(A \cap X_+), \quad \varphi_-(A) = -\varphi(A \cap X_-), \tag{7}$$

откуда немедленно следуют равенства (6). Достаточно проверить только первое равенство (7). При этом, поскольку неравенство $\varphi(A \cap X_+) \leqslant \varphi_+(A)$ очевидно, нам нужно проверить лишь противоположное неравенство, а это совсем просто: если $B \subset A$, то

$$\varphi(B) = \varphi(B \cap X_+) + \varphi(B \cap X_-) \leqslant \varphi(B \cap X_+) \leqslant \varphi(A \cap X_+). \ ▶$$

1.8. Пользуясь тем, что каждый вещественный заряд есть разность конечных мер, определим интеграл по заряду.

Определение. Пусть φ — вещественный заряд, заданный на σ-алгебре подмножеств множества X, и f — ограниченная функция, измеримая на X. *Интегралом $\int_X f\,d\varphi$ по заряду φ* от функции f назовём разность

$$\int_X f\,d\varphi = \int_X f\,d\mu_1 - \int_X f\,d\mu_2, \tag{8}$$

где μ_1, μ_2 — произвольные конечные меры такие, что $\varphi = \mu_1 - \mu_2$.

*) Ганс **Хан** (Hahn), 1879–1934, — австрийский математик.

Если φ — комплексный заряд, то мы полагаем

$$\int_X f\,d\varphi = \int_X f\,d\varphi_1 + i\int_X f\,d\varphi_2, \tag{8'}$$

где $\varphi_1 = \mathcal{R}e\,\varphi$, $\varphi_2 = \mathcal{I}m\,\varphi$.

Замечание. Отметим корректность данного определения. В самом деле, если $\varphi = \mu_1 - \mu_2 = \mu_1' - \mu_2'$, то $\mu_1 + \mu_2' = \mu_1' + \mu_2$. Поэтому в силу аддитивности интеграла относительно меры (см. п. IV.4.2, свойство 9)

$$\int_X f\,d\mu_1 + \int_X f\,d\mu_2' = \int_X f\,d\mu_1' + \int_X f\,d\mu_2$$

и, следовательно (конечность интегралов вытекает из ограниченности f),

$$\int_X f\,d\mu_1 - \int_X f\,d\mu_2 = \int_X f\,d\mu_1' - \int_X f\,d\mu_2'. \ \blacktriangleright$$

В частности, используя разложение Жордана мы видим, что

$$\int_X f\,d\varphi = \int_X f\,d\varphi_+ - \int_X f\,d\varphi_-.$$

Последнее равенство можно было бы (снимая вопрос о корректности) принять за определение интеграла и даже обобщить с его помощью определение, предполагая не ограниченность, а лишь суммируемость функции f относительно вариации φ. В таком случае, однако, равенство (8) для неограниченных функций справедливо лишь при условии, что f суммируема относительно μ_1 и μ_2. Во избежание этого дополнительного ограничения мы в определении интеграла рассматриваем лишь ограниченные функции (см. упр. 3).

Интеграл по заряду линеен как относительно функции, так и относительно заряда: если $a, b \in \mathbb{C}$, то для любых ограниченных измеримых функций f, g

$$\int_X (af + bg)\,d\varphi = a\int_X f\,d\varphi + b\int_X g\,d\varphi$$

и для любых зарядов φ, ψ, заданных на общей σ-алгебре,

$$\int_X f\,d(a\varphi + b\psi) = a\int_X f\,d\varphi + b\int_X f\,d\psi.$$

Проверку, которую достаточно провести лишь для вещественных зарядов, мы предоставляем читателю.

Отметим ещё одно свойство, которое будет нам полезно:

$$\overline{\int_X f\,d\varphi} = \int_X \overline{f}\,d\overline{\varphi}, \tag{9}$$

где под $\overline{\varphi}$ понимается заряд $\mathcal{R}e\,\varphi - i\,\mathcal{I}m\,\varphi$. Это равенство проверяется непосредственным вычислением с помощью формулы (8′).

Теорема. *Пусть φ — заряд, определённый на некоторой σ-алгебре подмножеств множества X. Тогда*

1) *если последовательность измеримых функций $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ на X равномерно ограничена и поточечно сходится к функции f, то*

$$\int_X f_n\,d\varphi \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X f\,d\varphi;$$

2) *если заряд φ имеет плотность ω относительно меры μ, то $\int_X f\,d\varphi = \int_X f\omega\,d\mu$ для любой ограниченной измеримой функции f;*

3) *если измеримая функция f ограничена на X, то $\left|\int_X f\,d\varphi\right| \leqslant \sup\limits_X |f|\cdot|\varphi|(X)$.*

Доказательство. Первое утверждение вытекает из теоремы Лебега о сходимости с мажорантой (теорема IV.8.4).

Второе и третье утверждения очевидны для характеристических, а следовательно, и для простых функций. Общий случай исчерпывается с помощью предельного перехода на основании утверждения 1), поскольку функцию f можно поточечно (и даже равномерно) аппроксимировать ограниченной последовательностью простых функций (см. следствие III.2.2). ►

1.9. Определив интегрирование по заряду, мы можем естественным образом обобщить понятия коэффициента и ряда Фурье.

Определение. Пусть φ — заряд, заданный на σ-алгебре борелевских подмножеств промежутка $[-\pi,\pi]$. Числа

$$\widehat{\varphi}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} e^{-inx}\,d\varphi(x) \qquad (n\in\mathbb{Z})$$

называются *коэффициентами Фурье* заряда φ, а ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{\varphi}(n)\,e^{inx}$ — его *рядом Фурье*.

Убедимся, что при минимальном ограничении заряды, как и меры, однозначно определяются своими коэффициентами Фурье (см. теорему X.3.7).

Теорема. *Если заряды, определённые на σ-алгебре борелевских подмножеств промежутка $[-\pi,\pi]$, имеют нулевую нагрузку в точке π, то совпадение их коэффициентов Фурье влечёт совпадение и самих зарядов.*

Доказательство. Достаточно показать, что заряд φ, удовлетворяющий условию $\varphi(\{\pi\}) = 0$ и имеющий нулевые коэффициенты Фурье, равен нулю. Допустим сначала, что φ — вещественный заряд. Для него справедливо разложение Жордана $\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$. Ясно, что меры $\varphi_\pm$ не имеют нагрузок в точке π, а так как $\widehat{\varphi}(n) = 0$ для всех n, то эти меры имеют одинаковые коэффициенты Фурье. Поэтому к ним применима теорема X.3.7, согласно которой $\varphi_+ = \varphi_-$ и, следовательно, $\varphi = \varphi_+ - \varphi_- = 0$.

Рассмотрим теперь общий случай: $\varphi = \psi + i\theta$, где ψ,θ — вещественные заряды (они не имеют нагрузки в точке π). Согласно равенству (9)

$$\overline{\widehat{\varphi}(n)} = \frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} e^{inx}\,d\,\overline{\varphi}(x) = \widehat{\overline{\varphi}}(-n).$$

Поэтому заряд $\overline{\varphi}$, как и φ, имеет нулевые коэффициенты Фурье. Иными словами, при любом n

$$\widehat{\psi}(n) + i\widehat{\theta}(n) = \widehat{\varphi}(n) = 0 \quad \text{и} \quad \widehat{\psi}(n) - i\widehat{\theta}(n) = \widehat{\overline{\varphi}}(n) = 0.$$

Отсюда следует, что вещественные заряды ψ и θ также имеют нулевые коэффициенты Фурье и, следовательно, равны нулю. ►

Многомерный вариант доказанного утверждения рассмотрен в п. XII.3.3.

УПРАЖНЕНИЯ

1) Докажите, что если множество значений заряда бесконечно, то среди них есть сколь угодно малые (отличные от нуля) значения.

2) Проверьте, что совокупность всех значений заряда есть замкнутое множество.

3) Докажите, что измеримая относительно σ-алгебры $\mathfrak{A}$ функция ограничена, если она суммируема относительно любой конечной меры, определённой на $\mathfrak{A}$.

4) Дополните третье утверждение теоремы 1.8: $\left|\int_X f\,d\varphi\right| \leqslant \int_X |f|\,d|\varphi|$.

§ 2. Теорема Радона–Никодима

2.1. Мы уже видели в п. IV.5.3, что вычисление интеграла по мере ν, имеющей плотность p относительно меры μ, можно свести к вычислению интеграла по μ (напомним, что в этом случае мы пишем $d\nu = p\,d\mu$). Такое сведéние часто оказывается весьма полезным, и поэтому желательно иметь критерий того, что данная мера имеет плотность относительно μ. Оказывается, в широком классе случаев очевидное необходимое условие является и достаточным.

Сформулируем необходимое нам

Определение. Пусть меры μ и ν определены на одной и той же σ-алгебре. Говорят, что мера ν *абсолютно непрерывна* относительно меры μ (или *подчинена* ей), если $\nu(E) = 0$ во всех случаях, когда $\mu(E) = 0$.

Абсолютная непрерывность ν относительно μ обозначается следующим образом: $\nu \prec \mu$.

Всякая мера, имеющая плотность относительно меры μ, очевидно, подчинена ей. Оказывается, для σ-конечных мер верно и обратное. Мы докажем это, предполагая сначала, что подчинённая мера конечна.

Теорема (Радон*), Никодим**)). *Пусть меры μ и ν определены на σ-алгебре $\mathfrak{A}$ подмножеств множества X и пусть μ σ-конечна, а ν конечна. Если ν абсолютно непрерывна относительно μ, то она имеет относительно μ суммируемую плотность. Эта плотность единственна с точностью до эквивалентности.*

Доказательство. Сначала найдём максимальную возможную плотность, порождающую меру, не превосходящую ν, а потом докажем, что мера с такой плотностью совпадает с ν. Пусть P — множество всех таких плотностей:

$$P = \left\{ p \in \mathscr{L}^0(X,\mu) \,\middle|\, p \geqslant 0,\ \int_E p\,d\mu \leqslant \nu(E) \ \text{ при любом } E \text{ из } \mathfrak{A} \right\}.$$

*) Иоганн **Радон** (Radon), 1887–1956, — австрийский математик.

) Отто Мартин **Никодим (Nikodym), 1887–1974, — польский математик.

Существенно, что вместе с любыми двумя функциями P содержит и их максимум. В самом деле, пусть $f, g \in P$, $h = \max\{f, g\}$. Рассмотрим разбиение $X = X' \vee X''$, где $X' = X(f \geqslant g)$, $X'' = X(f < g)$. Тогда для любого множества E из $\mathfrak{A}$ мы получим

$$\int_E h\,d\mu = \int_{E\cap X'} f\,d\mu + \int_{E\cap X''} g\,d\mu \leqslant \nu(E\cap X') + \nu(E\cap X'') = \nu(E),$$

откуда и следует, что $h \in P$.

С помощью индукции мы без труда установим, что P содержит максимум любого конечного семейства входящих в него функций.

Пусть $I = \sup\{\int_X p\,d\mu \mid p \in P\}$ и пусть последовательность функций f_n из P такова, что $\int_X f_n\,d\mu \to I$. Ясно, что $I \leqslant \nu(X) < +\infty$. Не умаляя общности последовательность $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ можно считать возрастающей (иначе заменим f_n на $\max\{f_1, \dots, f_n\}$). Положим $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$. По теореме Леви $\int_E f\,d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int_E f_n\,d\mu \leqslant \nu(E)$ для любого E из $\mathfrak{A}$. Поэтому $f \in P$ и $\int_X f\,d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = I$.

Докажем теперь, что f есть плотность ν. Допустим, что это не так. Тогда найдётся такое множество E_0, что

$$\nu(E_0) > \int_{E_0} f\,d\mu. \tag{1}$$

Ясно, что $\mu(E_0) > 0$, так как иначе обе части неравенства равны нулю. Ввиду σ-конечности μ мы можем не умаляя общности считать, что $\mu(E_0) < +\infty$. Действительно, в противном случае можно представить множество E_0 в виде объединения $E_0 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, где $E_n \subset E_{n+1}$ и $\mu(E_n) < +\infty$ при любом $n \in \mathbb{N}$. По непрерывности снизу

$$\nu(E_n) - \int_{E_n} f\,d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \nu(E_0) - \int_{E_0} f\,d\mu > 0,$$

и поэтому неравенство (1) сохраняется, если заменить E_0 на E_n при достаточно большом n.

Итак, мы будем считать, что $\mu(E_0) < +\infty$. Выберем настолько малое положительное число a, что $\nu(E_0) - \int_{E_0} f\,d\mu > a\mu(E_0)$, и рассмотрим заряд $\varphi(E) = \nu(E) - \int_E f\,d\mu - a\mu(E\cap E_0)$. Так как $\varphi(E_0) > 0$, то по лемме 1.3 найдётся такое содержащееся в E_0 множество положительности B заряда φ, что $\varphi(B) \geqslant \varphi(E_0) > 0$. Заметим, что при этом $\nu(B) \geqslant \varphi(B) > 0$.

Убедимся теперь, что $f + a\chi_B \in P$. В самом деле, для любого E из $\mathfrak{A}$

$$\begin{aligned}\int_E (f + a\chi_B)\,d\mu &= \int_{E\setminus B} f\,d\mu + \int_{E\cap B} f\,d\mu + a\mu(E\cap B) = \\ &= \int_{E\setminus B} f\,d\mu + \nu(E\cap B) - \varphi(E\cap B) \leqslant \\ &\leqslant \nu(E\setminus B) + \nu(E\cap B) - \varphi(E\cap B) = \nu(E) - \varphi(E\cap B) \leqslant \nu(E).\end{aligned}$$

Вместе с тем $\mu(B) > 0$, так как $\nu(B) > 0$ и $\nu \prec \mu$. Следовательно,

$$\int_X (f + a\chi_B)\,d\mu = I + a\mu(B) > I.$$

что противоречит определению I. Единственность плотности (с точностью до эквивалентности) установлена в теореме IV.5.4. ►

Замечание. Если в теореме мера ν не конечна, а σ-конечна, то плотность существует, но не суммируема. Убедиться в этом можно представив X в виде объединения таких расширяющихся множеств X_n $(n = 1, \dots)$, что $\nu(X_n) < +\infty$. При каждом n существует суммируемая плотность f_n меры, получающейся сужением ν на индуцированную σ-алгебру $\mathfrak{A} \cap X_n$ (см. п. I.1.2). При этом $f_n(x) = f_{n+1}(x)$ почти везде на X_n в силу единственности плотности. Поэтому можно считать, что f_{n+1} есть продолжение f_n на X_{n+1}. Полагая $f(x) = f_n(x)$ при $x \in X_n$, мы получим функцию, которая, как легко проверить, будет плотностью ν относительно μ. Она, очевидно, суммируема на каждом множестве X_n.

Если ν — борелевская мера в открытом подмножестве $\mathcal{O}$ пространства $\mathbb{R}^m$, конечная на компактных множествах, а $\mu = \lambda_m$ — мера Лебега, то плотность ν относительно λ_m локально суммируема в $\mathcal{O}$.

2.2. Распространим теперь теорему Радона–Никодима на заряды, перенеся на них понятие абсолютной непрерывности.

Определение. Пусть мера μ и заряд φ определены на одной и той же σ-алгебре. Будем говорить, что заряд φ *абсолютно непрерывен* относительно меры (или *подчинён* мере) μ, если $\varphi(e) = 0$ для любого множества μ-меры нуль.

Как и в случае меры, абсолютную непрерывность φ относительно μ мы будем обозначать символом $\varphi \prec \mu$.

Примером заряда, подчинённого мере, может служить любой заряд, порождённый некоторой плотностью. Оказывается, как и в случае, когда φ мера, других зарядов, подчинённых "хорошей" мере, не существует.

Теорема. *Пусть заряд φ и σ-конечная мера μ определены на одной и той же σ-алгебре $\mathfrak{A}$ подмножеств множества X. Следующие утверждения равносильны:*

1) заряд φ подчинён мере μ;

2) вариация заряда φ подчинена мере μ;

3) заряд φ порождается некоторой суммируемой функцией (вещественной для вещественного заряда).

Доказательство. Покажем, что 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1). Последняя импликация тривиальна. Отметим также, что ввиду свойства 1 вариации (см. п. 1.4) очевидна импликация 2) $\Rightarrow$ 1).

1) $\Rightarrow$ 2). Если $\mu(e) = 0$, то для любого множества A, содержащегося в e, $\mu(A) = 0$, а следовательно, и $\varphi(A) = 0$. Поэтому

$$|\varphi|(e) \leqslant \sup\left\{ \sum_{k=1}^{N} |\varphi(A_k)| \;\middle|\; A_k \subset e \right\} = 0.$$

2) $\Rightarrow$ 3). Если заряд φ вещественный, то он представим в виде разности конечных мер: $\varphi = \mu_1 - \mu_2$, где $\mu_1 = |\varphi|$, $\mu_2 = |\varphi| - \varphi$ (см. следствие из теоремы 1.7). Очевидно, меры μ_1, μ_2 подчинены мере μ. Поэтому по теореме Радона–Никодима для мер существуют такие неотрицательные суммируемые функции f_1, f_2, что

$$\mu_1(A) = \int_A f_1 \, d\mu, \quad \mu_2(A) = \int_A f_2 \, d\mu \quad (A \in \mathfrak{A}).$$

Ясно, что тогда при $f = f_1 - f_2$ для любого множества A справедливо равенство $\varphi(A) = \int_A f\,d\mu$, причём функция f вещественна.

Если заряд комплексный, то его вещественная и мнимая части, очевидно, подчинены мере μ. По доказанному они имеют плотности, из чего следует, что и исходный заряд имеет плотность. ►

Следствие. *Плотность заряда φ относительно его вариации по абсолютной величине почти везде равна единице.*

Доказательство. Ясно, что заряд абсолютно непрерывен относительно своей вариации. Пусть ω — соответствующая плотность. Тогда по теореме 1.6 $|\varphi|(A) = \int_A |\omega|\,d|\varphi|$. Вместе с тем $|\varphi|(A) = \int_A 1\,d|\varphi|$. Так как по теореме IV.5.4 плотность единственна (с точностью до эквивалентности), то $|\omega| = 1$ почти везде относительно $|\varphi|$. ►

Замечание. Доказанная теорема позволяет ввести новое понятие, чрезвычайно важное в теории вероятностей. Рассмотрим пространство с мерой $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ и измеримую на X функцию f. Будем предполагать, что $\mu(X) = 1$. В теории вероятностей измеримые множества называются событиями, их мера — вероятностью события, а функция f — случайной величиной. Если f суммируема, то интеграл $\int_X f\,d\mu$ называется математическим ожиданием случайной величины. Зафиксировав событие E ($\mu(E) > 0$) и рассмотрев величину $M(f, E) = \frac{1}{\mu(E)} \int_E f\,d\mu$, мы получим "условное математическое ожидание случайной величины f" (при условии, что "произошло событие E"). Если $E_1, \ldots, E_N$ — "полная система попарно несовместных событий", т. е. конечное разбиение X на измеримые множества положительной меры, то простая функция $g = \sum\limits_{k=1}^{N} M(f, E_k)\chi_{E_k}$ называется условным математическим ожиданием f относительно данного разбиения, а также относительно σ-алгебры $\mathfrak{A}_0$, состоящей из всевозможных объединений элементов разбиения. Важно суметь обобщить это определение на случай, когда $\mathfrak{A}_0$ — произвольная σ-алгебра, содержащаяся в $\mathfrak{A}$. Главным ориентиром при этом обобщении нам будет служить то, что функции g удовлетворяет равенству

$$\int_A g\,d\mu = \int_A f\,d\mu \quad \text{при } A \text{ из } \mathfrak{A}_0. \tag{2}$$

Это свойство кладётся в основу определения условного математического ожидания случайной величины f относительно $\mathfrak{A}_0$. Свяжем с данной суммируемой функцией f заряд, для которого f является плотностью, и рассмотрим его сужение φ на σ-алгебру $\mathfrak{A}_0$. Таким образом,

$$\varphi(A) = \int_A f\,d\mu \quad \text{при} \quad A \in \mathfrak{A}_0.$$

Ясно, что $\varphi \prec \mu$ (точнее, заряд φ подчинён сужению μ на $\mathfrak{A}_0$). Поэтому по теореме Радона–Никодима для зарядов существует такая измеримая относительно $\mathfrak{A}_0$ функция g, что $\varphi(A) = \int_A g\,d\mu$ при любом $A \in \mathfrak{A}_0$. Это означает, что g удовлетворяет равенству (2). Полученная таким образом функция g и называется условным математическим ожиданием функции f относительно σ-алгебры $\mathfrak{A}_0$. Подчеркнём, что в классе функций, измеримых относительно $\mathfrak{A}_0$, условное математическое ожидание определяется однозначно с точностью до эквивалентности.

2.3. В заключение рассмотрим вопрос о выделении из одной меры максимальной части, абсолютно непрерывной относительно другой.

Определение. Пусть меры μ и ν определены на одной и той же σ-алгебре подмножеств множества X. Они называются *взаимно сингулярными*, если существует такое разбиение $X = A \vee B$, что $\mu(B) = \nu(A) = 0$. Для обозначения взаимной сингулярности мер μ, ν мы будем использовать символ $\mu \perp \nu$.

Теорема (Лебег). *Пусть меры μ и ν определены на одной и той же σ-алгебре $\mathfrak{A}$. Если мера ν σ-конечна, то она представима в виде суммы мер $\nu = \nu_a + \nu_s$, где $\nu_a \prec \mu$, а $\nu_s \perp \mu$. Такое представление единственно.*

Представление $\nu = \nu_a + \nu_s$ мы будем называть *разложением Лебега.*

Доказательство. Докажем сначала единственность представления. Пусть $\nu = \nu_a + \nu_s = \nu'_a + \nu'_s$, где меры ν_a, ν'_a абсолютно непрерывны относительно μ, а ν_s, ν'_s взаимно сингулярны с μ. Тогда множество X представимо в виде $X = A \vee B = A' \vee B'$ так, что

$$\mu(B) = \nu_s(A) = 0; \qquad \mu(B') = \nu'_s(A') = 0.$$

Положим $B_0 = B \cup B'$. Тогда $\mu(B_0) = 0$ и, следовательно, $\nu_a(B_0) = 0$. Кроме того, для любого множества E из $\mathfrak{A}$ мы имеем

$$\nu_s(E) = \nu_s(E \cap B) \leqslant \nu_s(E \cap B_0) \leqslant \nu_s(E).$$

Поэтому

$$\nu_s(E) = \nu_s(E \cap B_0) = \nu(E \cap B_0) - \nu_a(E \cap B_0) = \nu(E \cap B_0).$$

Итак, $\nu_s(E) = \nu(E \cap B_0)$ при любом E из $\mathfrak{A}$. Аналогично устанавливается равенство $\nu'_s(E) = \nu(E \cap B_0)$. Тем самым показано, что $\nu_s = \nu'_s$ и, следовательно, $\nu_a = \nu'_a$.

Перейдём к доказательству существования требуемого представления, предполагая сначала, что мера ν конечна.

Рассмотрим систему $\mathcal{N}$ множеств, на которых мера μ аннулируется: $\mathcal{N} = \{e \in \mathfrak{A} \,|\, \mu(e) = 0\}$. Убедимся, что ν достигает наибольшего значения на $\mathcal{N}$. Пусть $C = \sup\{\nu(e) \,|\, e \in \mathcal{N}\}$. Тогда найдутся такие множества $e_n \in \mathcal{N}$, что $\nu(e_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} C$. Положим $B = \bigcup\limits_{n\geqslant 1} e_n$. Ясно, что $\mu(B) = 0$, т. е. $B \in \mathcal{N}$. Кроме того, $C \geqslant \nu(B) \geqslant \nu(e_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} C$. Следовательно, $\nu(B) = C$. Положим теперь

$$\nu_a(E) = \nu(E \setminus B), \quad \nu_s(E) = \nu(E \cap B) \quad \text{при} \quad E \in \mathfrak{A}.$$

Очевидно, $\nu = \nu_a + \nu_s$ и $\nu_s \perp \mu$. Убедимся, что меры ν_a подчинена μ. В самом деле, пусть $\mu(e_0) = 0$. Тогда $B \cup e_0 \in \mathcal{N}$ и

$$\mathrm{C} \geqslant \nu(B \cup e_0) = \nu(B) + \nu(e_0 \setminus B) = C + \nu_a(e_0).$$

Отсюда вытекает, что $\nu_a(e_0) = 0$, что и требовалось. Это завершает доказательство в случае, когда мера ν конечна.

Если $\nu(X) = +\infty$, то рассмотрим разбиение X на части X_n конечной меры ($n \in \mathbb{N}$). Положим $\nu^{(n)}(E) = \nu(E \cap X_n)$. Тогда $\nu = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \nu^{(n)}$, $\nu^{(n)}(X) < +\infty$ и, по доказанному,

$$\nu^{(n)} = \nu_a^{(n)} + \nu_s^{(n)}, \quad \text{где} \quad \nu_a^{(n)} \prec \mu, \ \nu_s^{(n)} \perp \mu.$$

Полагая $\nu_a = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \nu_a^{(n)}$, $\nu_s = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \nu_s^{(n)}$, получаем, как легко проверить, требуемое разложение. ►

УПРАЖНЕНИЯ

1) Пусть μ и ν конечные меры, определённые на одной и той же σ-алгебре. Докажите, что $\nu \prec \mu$ тогда и только тогда, когда $\nu(e) \to 0$ при $\mu(e) \to 0$, т. е. когда

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \text{ если } \ \mu(e) < \delta, \ \text{ то } \ \nu(e) < \varepsilon.$$

2) Докажите, что функция f, построенная при доказательстве теоремы Радона–Никодима, — наибольшая в множестве P в следующем смысле: если $p \in P$, то $p \leqslant f$ почти везде на X (относительно меры μ).

3) Сохраняя обозначения замечания п. 2.2, докажите равенство (2) для функции $g = \sum\limits_{k=1}^{N} M(f, E_k)\chi_{E_k}$.

4) Пусть функция f суммируема на квадрате $[0,1] \times [0,1]$ по мере Лебега. Найдите её условное математическое ожидание относительно σ-алгебры, состоящей из множеств вида $E \times [0,1]$, где $E \in \mathfrak{A}^1$ (“полосатая алгебра”).

5) Пусть меры μ и ν определены на одной и той же σ-алгебре. Докажите, что они взаимно сингулярны тогда и только тогда, когда существуют такие множества E_n, что $\mu(E_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ и $\nu(X \setminus E_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

6) Дополните результат упр. 7 § VI.1, доказав сингулярность меры μ_g. Указание. Используйте указание к упр. 7 § VI.1. Рассмотрите те промежутки Δ_k, у которых число единиц в троичном разложении k не меньше $\sqrt{n}\ln n$.

7) Пусть $Q_m = [-\pi, \pi]^m$, μ — конечная борелевская мера в Q_m, $\mu_j^{\pm}$ — меры в Q_{m-1}, получаемые сужением μ на грани куба, содержащиеся в плоскостях $x_j = \pm\pi$ ($j = 1, \dots, m$). Докажите, что при конечном p тригонометрические многочлены всюду плотны в пространстве $\mathscr{L}^p(Q_m, \mu)$ в том и только том случае, когда меры μ_j^+ и μ_j^- взаимно сингулярны при каждом j (ср. с упр. 8 в § IX.3).

§ 3. Дифференцирование мер

3.1. Здесь мы обобщим теорему Лебега IV.9.2 о дифференцировании интеграла на широкий класс борелевских мер в $\mathbb{R}^m$ (см. определение II.2.3). Мы будем рассматривать только борелевские меры, принимающие конечные значения на ограниченных множествах, и называть такие меры *мерами Радона.* Читатель легко убедится, что этот термин согласуется с общим определением меры Радона (см. п. XII.2.2). Как доказано в теореме II.2.3, меры Радона регулярны.

Далее λ — m-мерная мера Лебега, $V(r)$ — объём шара $B(x,r)$, $\mathfrak{B}^m$ — σ-алгебра борелевских подмножеств пространства $\mathbb{R}^m$.

Определение. Пусть ν — мера Радона в $\mathbb{R}^m$. Если существует (конечный или бесконечный) предел

$$\nu'(x) = \lim_{r\to 0} \frac{\nu\big(B(x,r)\big)}{V(r)},$$

то он называется *производной меры ν в точке $x \in \mathbb{R}^m$.*

Напомним, что похожие пределы мы рассматривали в пп. IV.9.2, VI.2.1. Теперь мы докажем, что всякая мера Радона почти везде имеет локально суммируемую производную.

Предварительно установим полезное вспомогательное утверждение, при доказательстве которого главным инструментом будет теорема Витали II.7.2.

Лемма. *Пусть ν — мера Радона в $\mathbb{R}^m$, $E \in \mathfrak{B}^m$. Тогда*
1) если $\nu'(x) = 0$ для всех x из E, то $\nu(E) = 0$;
2) если $\nu(E) = 0$, то $\nu'(x) = 0$ для почти всех (относительно меры Лебега) x из E.

Доказательство. Очевидно, множество E можно считать ограниченным, что мы и будем делать. Пусть оно содержится в шаре $B(0, R)$.

1) Зафиксируем произвольное положительное число ε. По условию при каждом $x \in E$ выполняется неравенство $\frac{\nu(B(x,5r))}{V(5r)} < \varepsilon$, если число r достаточно мало (далее будем считать, что $r < 1$). Семейство шаров $B(x, r)$ со столь малыми радиусами и центрами $x \in E$ образует покрытие Витали множества E. По теореме Витали среди них найдутся такие попарно не пересекающиеся шары $B(x_k, r_k)$ $(k \in \mathbb{N})$, что $E \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B(x_k, 5r_k)$. Так как $x_k \in E$ и $r_k < 1$ $(k \in \mathbb{N})$, то все шары $B(x_k, r_k)$ содержатся в $B(0, R + 1)$. Учитывая неравенства $\nu\big(B(x_k, 5r_k)\big) < \varepsilon V(5r_k)$, мы получаем:

$$\nu(E) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \nu\big(B(x_k, 5r_k)\big) < \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} V(5r_k) = \varepsilon 5^m \sum_{k=1}^{\infty} \lambda\big(B(x_k, r_k)\big) \leqslant \varepsilon 5^m \lambda\big(B(0, R+1)\big).$$

Ввиду произвольности ε отсюда вытекает, что $\nu(E) = 0$.

2) Необходимо убедиться, что множество $\big\{x \in E \,\big|\, \overline{\lim\limits_{r\to 0}} \frac{\nu(B(x,r))}{V(r)} > 0\big\}$ имеет нулевую меру Лебега. Поскольку оно исчерпывается последовательностью множеств вида $E_\delta = \big\{x \in E \,\big|\, \overline{\lim\limits_{r\to 0}} \frac{\nu(B(x,r))}{V(r)} > \delta\big\}$, нам достаточно показать, что $\lambda(E_\delta) = 0$ при любом положительном δ. Зафиксируем δ до конца доказательства. В силу регулярности меры ν для любого положительного числа ε найдётся такое открытое множество G, что

$$G \supset E, \qquad \nu(G) < \varepsilon\, \delta.$$

По определению множества E_δ в каждой его точке x неравенство $\nu\big(B(x, r)\big) > \delta V(r)$ выполняется для сколь угодно малых радиусов r. Соответствующие шары $B(x, r)$, содержащиеся в множестве G, образуют покрытие Витали множества E. Поэтому из них можно выделить такую последовательность попарно не пересекающихся шаров $B(x_k, r_k)$, что

$$E_\delta \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} B(x_k, 5r_k) \quad \text{и} \quad \nu\big(B(x_k, r_k)\big) \geqslant \delta V(r_k) \quad \text{при всех } k.$$

Оценим меру объединения $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B(x_k, 5r_k)$, покрывающего множество E_δ:

$$\lambda\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} B(x_k, 5r_k)\Big) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \lambda\big(B(x_k, 5r_k)\big) = 5^m \sum_{k=1}^{\infty} \lambda\big(B(x_k, r_k)\big) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{5^m}{\delta} \sum_{k=1}^{\infty} \nu\big(B(x_k, r_k)\big) = \frac{5^m}{\delta}\, \nu\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} B(x_k, r_k)\Big) \leqslant \frac{5^m}{\delta} \nu(G) < 5^m \varepsilon.$$

Таким образом, множество E_δ можно погрузить в множество произвольно малой меры Лебега, что равносильно равенству $\lambda(E_\delta) = 0$. ►

Замечание. Первое утверждение леммы может быть обобщено следующим образом.

Если $\{E_n(x)\}_{x\in E, n\in\mathbb{N}}$ *— произвольное регулярное покрытие множества* E (см. определение II.7.4) *и* $\nu(E)=0$, *то*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\nu(E_n(x))}{\lambda(E_n(x))}=0$$

почти везде по мере Лебега на E.

Действительно, в силу регулярности покрытия мы имеем:

$$E_n(x)\subset B\bigl(x,r_n(x)\bigr),\qquad \theta(x)=\inf_n\frac{\lambda(E_n(x))}{V(r_n(x))}>0,\qquad r_n(x)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Поэтому почти везде на E по мере Лебега

$$\frac{\nu(E_n(x))}{\lambda(E_n(x))}\leqslant\frac{V(r_n(x))}{\lambda(E_n(x))}\cdot\frac{\nu\bigl(B(x,r_n(x))\bigr)}{V(r_n(x))}\leqslant\frac{1}{\theta(x)}\cdot\frac{\nu\bigl(B(x,r_n(x))\bigr)}{V(r_n(x))}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.\ \blacktriangleright$$

Аналогично обобщается и второе утверждение леммы.

3.2. Теорема. *Пусть* ν *— мера Радона в* $\mathbb{R}^m$. *Тогда*

1) *почти везде по мере Лебега существует производная* $\nu'(x)$;

2) *эта производная локально суммируема (и, в частности, почти везде конечна);*

3) *мера* ν *сингулярна* ($\nu\perp\lambda$) *тогда и только тогда, когда* $\nu'=0$ *почти везде по мере Лебега.*

Доказательство. По теореме Лебега о разложении (см. п. 2.3) мера ν представима в виде $\nu=\nu_a+\nu_s$, где мера ν_a подчинена, а мера ν_s взаимно сингулярна с λ. По замечанию 2.1 мера ν_a имеет локально суммируемую плотность f относительно λ, а по определению взаимной сингулярности существует такое борелевское множество E, что $\nu_s(E)=\lambda(\mathbb{R}^m\setminus E)=0$. Применяя лемму к мере ν_s и множеству E, мы видим, что $\nu_s'=0$ почти везде на E, т. е. почти везде в $\mathbb{R}^m$. Вместе с тем, $\nu_a'=f$ почти везде в $\mathbb{R}^m$ по теореме IV.9.2. Таким образом, производная ν' существует почти везде и (почти везде) совпадает с $\nu_a'=f$, что доказывает все три утверждения теоремы. $\blacktriangleright$

Замечание 1. Производная ν' может быть равной $+\infty$ на любом множестве лебеговой меры нуль (см. упр. 1).

Замечание 2. Если $\{E_n(x)\}_{x\in E, n\in\mathbb{N}}$ — регулярное покрытие некоторого множества $E\subset\mathbb{R}^m$, то при почти всех x из E справедливо равенство $\nu'(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\nu(E_n(x))}{\lambda(E_n(x))}$. Это вытекает из следствия IV.9.4 и добавления к лемме 3.1.

3.3. Теорема (Фубини). *Пусть* ν_n $(n\in\mathbb{N})$ *— меры Радона в* $\mathbb{R}^m$,

$$\nu(A)=\sum_{n=1}^{\infty}\nu_n(A)\qquad(A\in\mathfrak{B}^m).\tag{1}$$

Если ряд (1) *сходится для любого компактного множества* A, *то* ν *есть мера Радона и*

$$\nu'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\nu_n'(x)\tag{2}$$

почти везде по мере Лебега.

Доказательство. Как читатель легко убедится самостоятельно, равенство (1) действительно определяет меру, конечную на компактных множествах, т. е. меру Радона. Поэтому по теореме 3.2 $\nu'(x) < \infty$ при почти всех x.

Докажем теперь, что общий член ряда (2) стремится к нулю почти всюду. Так как при любом n

$$\sum_{k=1}^{n} \nu_k\big(B(x,r)\big) \leqslant \nu\big(B(x,r)\big),$$

то разделив на $V(r)$ и перейдя в получающемся неравенстве к пределу, мы получим, что почти всюду $\sum\limits_{k=1}^{n} \nu'_k(x) \leqslant \nu'(x)$. Следовательно, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \nu'_k(x) \leqslant \nu'(x) < \infty$. Таким образом, ряд (2) сходится почти везде, и поэтому почти всюду

$$\nu'_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3}$$

Для доказательства равенства (2) нам, учитывая положительность ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \nu'_k(x)$, достаточно убедиться, что некоторая подпоследовательность его частичных сумм сходится к $\nu'(x)$. Положим $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \nu_k$. Искомую подпоследовательность мы построим следующим образом. При каждом $j \in \mathbb{N}$ найдём такой номер n_j, что

$$\sum_{k>n_j} \nu_k\big(B(0,j)\big) < 2^{-j},$$

и положим $\widetilde{\nu}_j = \nu - S_{n_j} = \sum\limits_{k>n_j} \nu_k$. Если множество A содержится в $B(0,R)$, то $\widetilde{\nu}_j(A) < 2^{-j}$ при $j > R$. Поэтому ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \widetilde{\nu}_j(A)$ сходится для любого ограниченного борелевского множества A. Следовательно, он удовлетворяет тем же условиям, что и исходный ряд (1). По доказанному, для него справедливо соотношение (3), т. е.

$$\widetilde{\nu}'_j(x) = \nu'(x) - S'_{n_j}(x) \underset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

почти везде. Таким образом, построенная нами подпоследовательность $\{S'_{n_j}\}_{j\geqslant 1}$ частичных сумм ряда (2) действительно сходится почти везде к ν'. ►

Замечание. Мера, определённая на борелевских подмножествах открытого множества $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m$ и конечная на его компактных подмножествах, или, как говорят, мера Радона в $\mathcal{O}$, может не быть сужением меры Радона в $\mathbb{R}^m$. Но локально, а точнее — на подмножествах шара, содержащегося в $\mathcal{O}$ вместе с замыканием, она совпадает с сужением некоторой меры Радона в $\mathbb{R}^m$. Поэтому теоремы 3.2 и 3.3 переносятся и на меры Радона в открытых подмножествах евклидова пространства.

3.4. Вопрос о существовании производной “произвольной” функции ставился уже по крайней мере с начала XIX века, но долгое время не получал сколько-нибудь полного ответа. После построения Вейерштрассом примера нигде не дифференцируемой

непрерывной функции он, как могло показаться, был “закрыт”. Однако чисто отрицательный результат Вейерштрасса стал, как это нередко бывает с содержательными вопросами, лишь промежуточным этапом в его решении. Понятие “почти везде”, введённое Лебегом вместе с другими понятиями теории меры, позволило коренным образом модифицировать постановку задачи, что привело к чрезвычайно общим положительным результатам. Оказалось, что выдвинутая ещё Ампером*) гипотеза о существовании производной у “произвольной” функции всюду, кроме некоторых “исключительных и изолированных” значений аргумента, справедлива для любой монотонной функции, если допускать, что “исключительные значения аргумента” образуют множество нулевой меры. Эта теорема, доказанная Лебегом почти сто лет спустя после работы Ампера, может быть установлена с помощью чрезвычайно красивых и вполне элементарных, но весьма тонких рассуждений (см. [РН], гл. I, § 1). Мы же получим её как следствие теоремы 3.2 о дифференцировании мер Радона.

Нам потребуется введённое в § IV.10 понятие меры Лебега–Стилтьеса μ_g, порождённой неубывающей функцией g.

Теорема (Лебег). *Всякая возрастающая на промежутке Δ функция g дифференцируема почти везде на Δ. При этом $g'(x) = \mu'_g(x)$ при почти всех $x \in \Delta$.*

Доказательство. Не умаляя общности, будем считать промежуток Δ открытым. Докажем сначала, что почти везде функция g имеет производную справа. Напомним, что множество её точек разрыва не более чем счётно.

Рассмотрим семейство промежутков $\{[x, x+h)\}_{x\in\Delta, 0<h<h_x}$, где положительные числа h_x настолько малы, что $[x-h_x, x+h_x] \subset \Delta$. Это семейство, как и семейство $\{[x, x+h]\}_{x\in\Delta, 0<h<h_x}$, образует регулярное покрытие Витали для Δ. Так как мера μ_g есть мера Радона на промежутке Δ, то по замечанию 2 к теореме 3.2 почти везде

$$\frac{\mu_g([x, x+h))}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \mu'_g(x), \qquad \frac{\mu_g([x, x+h])}{h} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} \mu'_g(x). \tag{4}$$

Если x — точка непрерывности g и $0 < h < h_x$, то

$$\frac{\mu_g([x, x+h))}{h} = \frac{g((x+h)-0) - g(x)}{h} \leqslant \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{g((x+h)+0) - g(x)}{h} = \frac{\mu_g([x, x+h])}{h}.$$

Вместе с соотношениями (4) эти неравенства показывают, что при почти всех $x \in \Delta$ производная справа $g'_+(x)$ существует и равна $\mu'_g(x)$.

Рассматривая покрытия $\{(x-h, x]\}_{x\in\Delta, 0<h<h_x}$ и $\{[x-h, x]\}_{x\in\Delta, 0<h<h_x}$, мы совершенно аналогично убеждаемся, что производная слева также почти везде существует и равна $\mu'_g(x)$. ►

3.5. Следующее утверждение является частным случаем теоремы 3.3.

Теорема (Фубини). *Сходящийся ряд из возрастающих функций можно почти везде дифференцировать почленно.*

*) Андре Мари **Ампер** (Ampère), 1775–1836, — французский физик и математик.

Доказательство. Пусть g — сумма поточечно сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$, где g_n — неубывающие функции. По теореме 3.3 почти везде справедливо равенство

$$\mu_g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_{g_n}'(x). \tag{5}$$

Вместе с тем, как доказано в теореме 3.4, почти везде $\mu_g'(x) = g'(x)$ и $\mu_{g_n}'(x) = g_n'(x)$ ($n \in \mathbb{N}$). Поэтому при замене производных мер производными функций равенство (5) остаётся справедливым почти всюду. ►

3.6. Проиллюстрируем полученные в этом и предыдущем параграфе результаты примером, тесно связанным с канторовой функцией φ. Как мы знаем (см. п. II.3.2), она непрерывна и возрастает на $\mathbb{R}$ (мы считаем, что $\varphi(x) = 0$ при $x \leqslant 0$ и $\varphi(x) = 1$ при $x \geqslant 1$). По построению φ постоянна на интервалах, дополнительных к канторову множеству, и поэтому имеет на них нулевую производную. Так как лебегова мера канторова множества равна нулю, то канторова функция сингулярна, т. е. её производная почти везде равна нулю. Существует ли сингулярная функция, строго возрастающая на некотором промежутке? Положительный ответ на этот вопрос можно получить разными способами. Для построения соответствующего примера мы используем свёртку канторовой функции с порождённой ею мерой, т. е. функцию g, которая определяется равенством

$$g(x) = \int_0^1 \varphi(x-t)\, d\varphi(t) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Очевидно, функция g непрерывна, не убывает и $g(x) = 0$ при $x \leqslant 0$, $g(x) = 1$ при $x \geqslant 2$. Вскоре мы убедимся, что она строго возрастает на $[0, 2]$. Известно, что функция g сингулярна (см. [JW]). Иными словами, мера Стилтьеса μ_g, порождённая функцией g, взаимно сингулярна с одномерной мерой Лебега. Этот результат можно дополнить, сравнив меру μ_g с мерами Хаусдорфа μ_p при $0 < p \leqslant 1$ (см. § II.6). Оказывается, она взаимно сингулярна не только с мерой Лебега, но и некоторыми мерами μ_p при $p < 1$. В отличие от мер Лебега и Хаусдорфа мера μ_g не инвариантна относительно сдвига. Чтобы подчеркнуть это различие, мы будем называть её также массой.

Существенную роль для нас будет играть связь между мерой μ_g и мерой $\mu_\varphi \times \mu_\varphi$ — декартовым квадратом меры μ_φ, порождённой канторовой функцией.

Лемма 1. *Пусть F, G — определённые на $\mathbb{R}$ непрерывные ограниченные возрастающие функции, μ_F, μ_G — соответствующие им меры Стилтьеса. Тогда мера Стилтьеса μ_H, порождённая функцией H, определяемой равенством*

$$H(x) = \int_{\mathbb{R}} F(x-y)\, dG(y) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

есть образ меры $\mu_F \times \mu_G$ при отображении $(x, y) \mapsto P(x, y) = x + y$, т. е. для любого борелевского множества $E \subset \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\mu_H(E) = (\mu_F \times \mu_G)\big(P^{-1}(E)\big). \tag{6}$$

Доказательство. Ясно, что функция H непрерывна и возрастает. В силу теоремы единственности I.5.1 равенство (6) достаточно проверить в случае, когда

$E = [a, b)$. Тогда множество $P^{-1}(E)$ есть полоса $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a \leqslant x + y < b\}$, и равенство (6) следует из принципа Кавальери. Действительно, сечение $(P^{-1}(E))^y$ есть не что иное, как промежуток $[a - y, b - y)$, и поэтому

$$(\mu_F \times \mu_G)\big(P^{-1}(E)\big) = \int_{\mathbb{R}} \mu_F\big((P^{-1}(E))^y\big)\, d\mu_G(y) = \int_{\mathbb{R}} \mu_F\big([a - y, b - y)\big)\, d\mu_G(y) =$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \big(F(b - y) - F(a - y)\big)\, dG(y) = H(b) - H(a) = \mu_H\big([a, b)\big). \quad \blacktriangleright$$

Нам потребуется также следующее утверждение, с доказательством которого читатель легко справится самостоятельно, используя формулу Стирлинга (см. п. VII.2.6, формула (8)).

Лемма 2. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $|t| \leqslant \frac{1}{4}$. *Тогда*

$$C_n^{[(\frac{1}{2}+t)n]} \leqslant \frac{A}{\sqrt{n}} 2^n e^{-2t^2 n},$$

где A *— абсолютная константа. В частности (при* $t = -n^{-\frac{1}{3}}$, $n \geqslant 4^3$*),*

$$C_n^{[\frac{n}{2} - n^{2/3}]} \leqslant \frac{A}{\sqrt{n}} 2^n e^{-2n^{1/3}}.$$

Из этого неравенства вытекает, что

$$\frac{1}{2^n} \sum_{m \geqslant \frac{n}{2} - n^{2/3}} C_n^m \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 1, \tag{7}$$

поскольку

$$0 \leqslant 1 - \frac{1}{2^n} \sum_{m \geqslant \frac{n}{2} - n^{2/3}} C_n^m = \frac{1}{2^n} \sum_{m < \frac{n}{2} - n^{2/3}} C_n^m < \frac{1}{2^n} \frac{n}{2} C_n^{[\frac{n}{2} - n^{2/3}]} \leqslant A\sqrt{n} e^{-2n^{1/3}} = o(1).$$

Прежде чем переходить к формулировке интересующего нас результата, проведём некоторую подготовительную работу.

Зафиксируем произвольное натуральное число n и разобьём отрезок $[0, 2]$ на промежутки $D_k = [2\frac{k}{3^n}, 2\frac{k+1}{3^n}]$ $(0 \leqslant k < 3^n)$, которые будем называть сегментами n-го ранга. Рассмотрим также сегменты Δ_ε ранга n, получаемые при построении канторова множества, где $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, $\varepsilon_j = 0, 1$ (см. п. II.1.4). Левым концом промежутка Δ_ε является точка $a_\varepsilon = 2 \sum\limits_{j=1}^{n} \varepsilon_j\, 3^{-j}$. Приращение канторовой функции на сегменте n-го ранга равно 2^{-n}, поэтому мера $\mu_\varphi \times \mu_\varphi$ каждого квадрата вида

$$\Delta_\varepsilon \times \Delta_{\varepsilon'} \tag{8}$$

равна 4^{-n}. При проектировании P такой квадрат отображается в некоторый промежуток D_k, левый конец которого есть $a_\varepsilon + a_{\varepsilon'}$. В этом случае

$$\frac{k}{3^n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon_j + \varepsilon'_j}{3^j} \qquad (\text{где } \ \varepsilon_j, \varepsilon'_j = 0, 1). \tag{9}$$

Ясно, что каждая дробь $\frac{k}{3^n}$ может быть представлена в таком виде, и поэтому каждый промежуток D_k есть образ некоторого квадрата вида (8). Отсюда, в частности, следует, что каждый сегмент ранга n имеет положительную массу. Ввиду произвольности n это равносильно строгому возрастанию функции g.

Ключевым моментом для дальнейшего является подсчёт числа квадратов вида (8), проектирующихся на промежуток D_k. Пусть справедливо равенство (9) и $\frac{k}{3^n} = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\sigma_j}{3^j}$, где $\sigma_j = 0, 1$ или 2. Тогда $\sigma_j = \varepsilon_j + \varepsilon'_j$ и неединственность в этом представлении возможна лишь при $\sigma_j = 1$. В этом случае есть два представления: $\varepsilon_j = 1, \varepsilon'_j = 0$ и $\varepsilon_j = 0, \varepsilon'_j = 1$. Если троичное разложение дроби $\frac{k}{3^n}$ (или, что то же, троичное представление числа k) содержит m единиц, то имеется ровно 2^m квадратов вида (8), переходящих при проектировании в промежуток D_k. В этом случае его масса равна $2^m 4^{-n}$. При $m = n$ отсюда, в частности, видно, что приращение g на соответствующем "тяжелом" промежутке (длина которого $2 \cdot 3^{-n}$) равно 2^{-n}. Это свидетельствует, что показатель Липшица функции g не больше, чем у φ, и, следовательно, он равен $\log_3 2$.

Пусть $\mathcal{E}_m \equiv \mathcal{E}_m(n)$ — множество всех промежутков D_k, у которых в троичном разложении k имеется ровно m единиц, а $A_m(n)$ — их объединение. Приращение g на каждом промежутке из $\mathcal{E}_m$ равно $2^m 4^{-n}$. Как легко подсчитать, $\operatorname{card}(\mathcal{E}_m(n))$ — число таких промежутков — есть $C_n^m 2^{n-m}$. Поэтому сосредоточенная на $A_m(n)$ масса равна $4^{-n} \cdot 2^m \cdot C_n^m 2^{n-m} = 2^{-n} C_n^m$.

Докажем, что масса взаимно сингулярна не только с одномерной мерой Лебега, но и с мерами Хаусдорфа μ_p при достаточно больших p.

Теорема. *Мера μ_g взаимно сингулярна с мерой μ_p при $\sigma \leqslant p \leqslant 1$, где $\sigma = \frac{3}{2}\log_3 2 = 0.946393\ldots$. В частности, μ_g сингулярна относительно меры Лебега. При $0 < p < \sigma$ мера μ_g абсолютно непрерывна относительно μ_p.*

Доказательство. Ради некоторого упрощения рассуждений мы докажем первую часть теоремы лишь в случае, когда $p > \sigma$.

Объединяя "достаточно тяжелые" промежутки, положим

$$B_n = \bigcup_{m \geqslant \frac{n}{2} - n^{2/3}} A_m(n).$$

Ясно, что

$$\mu_g(B_n) = \sum_{m \geqslant \frac{n}{2} - n^{2/3}} \mu_g\big(A_m(n)\big) = \sum_{m \geqslant \frac{n}{2} - n^{2/3}} C_n^m 2^{n-m} \cdot 2^m\, 4^{-n} = \frac{1}{2^n} \sum_{m \geqslant \frac{n}{2} - n^{2/3}} C_n^m.$$

Поэтому согласно (7) $\mu_g(B_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.

Положим $E_s = \bigcup\limits_{n=s}^{\infty} B_n$, $E = \bigcap\limits_{s \geqslant 2} E_s$. Очевидно, $\mu_g(E) = 1$.

Докажем, что $\mu_p(E) = 0$ при $p > \sigma$. По определению меры Хаусдорфа для этого достаточно проверить, что для каждого $\varepsilon > 0$ множество E можно покрыть таким семейством промежутков δ_j, что $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |\delta_j|^p < \varepsilon$, где $|\delta|$ обозначает длину промежутка δ. Зафиксировав произвольное s, используем промежутки D_k (всевозможных рангов),

составляющие множество E_s. Тогда мы получим, что

$$T_s \equiv \sum_{n=s}^{\infty} \sum_{m \geqslant \frac{n}{2} - n^{2/3}} \sum_{D_k \in \mathcal{E}_m(n)} |D_k|^p = \sum_{n=s}^{\infty} \sum_{m \geqslant \frac{n}{2} - n^{2/3}} \operatorname{card}\bigl(\mathcal{E}_m(n)\bigr) \left(\frac{2}{3^n}\right)^p =$$

$$= 2^p \sum_{n=s}^{\infty} \frac{1}{3^{np}} \sum_{m \geqslant \frac{n}{2} - n^{2/3}} C_n^m\, 2^{n-m} \leqslant 2^p \sum_{n=s}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}+n^{2/3}}}{3^{np}} \sum_{m \geqslant \frac{n}{2} - n^{2/3}} C_n^m \leqslant 2^p \sum_{n=s}^{\infty} \left(\frac{2^{\frac{3}{2}+n^{-1/3}}}{3^p}\right)^n.$$

Так как $p > \frac{3}{2}\log_3 2 = \log_3 2^{\frac{3}{2}}$, то при больших n дробь $\frac{2^{\frac{3}{2}+n^{-1/3}}}{3^p}$ меньше единицы и даже отделена от неё: $\frac{2^{\frac{3}{2}+n^{-1/3}}}{3^p} \leqslant q < 1$. Поэтому при достаточно большом s справедлива оценка

$$T_s \leqslant 2^p \sum_{n=s}^{\infty} q^n = 2^p \frac{q^s}{1-q} \underset{s\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

из которой и вытекает, что $\mu_p(E) = 0$.

Для доказательства второго утверждения теоремы положим $p = (\frac{3}{2} - t)\log_3 2$. Так как меры Хаусдорфа не возрастают с увеличением параметра, мы можем считать, что $0 < t < \frac{1}{4}$. Разделим промежутки ранга n на “легкие” и “тяжёлые”. К первым отнесём промежутки, на которых приращение g не превосходит $\frac{2^{(\frac{1}{2}+t)n}}{4^n}$, т. е. те, которые входят в $\mathcal{E}_m(n)$ при $m \leqslant (\frac{1}{2}+t)n$, а к тяжёлым — все остальные.

Пусть теперь $\mu_p(e) = 0$ и множество e покрыто последовательностью интервалов δ_j малой длины, почти реализующей хаусдорфову меру, т. е.

$$e \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \delta_j, \quad \sum_{j=1}^{\infty} |\delta_j|^p < \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольно малое число. Ясно, что каждый интервал δ_j, удовлетворяющий условию $3^{-(n+1)} < |\delta_j| \leqslant 3^{-n}$, задевает не более двух промежутков ранга n. Пусть

$$J_n = \{j \in \mathbb{N} \mid 3^{-(n+1)} < |\delta_j| \leqslant 3^{-n},\ \delta_j \text{ задевает легкий промежуток ранга } n\}.$$

Заметим, что если $J_n \neq \varnothing$, то $n \geqslant n(\varepsilon)$ и $n(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} +\infty$ (нетрудно подсчитать, что по порядку $n(\varepsilon)$ не меньше, чем $|\ln \varepsilon|$). Положим

$$e_{\text{л}} = \bigcup_{n \geqslant n(\varepsilon)} \bigcup_{j \in J_n} \delta_j, \qquad e_0 = e \setminus e_{\text{л}}.$$

Тогда e_0 содержится в объединении увеличенных втрое всевозможных тяжелых промежутков ранга $\geqslant n(\varepsilon)$, т. е.

$$e_0 \subset e_{\text{т}} \equiv \bigcup_{n \geqslant n(\varepsilon)} \bigcup_{m > (\frac{1}{2}+t)n} \bigcup_{D_k \in \mathcal{E}_m(n)} \widetilde{D_k},$$

где $\widetilde{D_k}$ — объединение $D_{k-1} \cup D_k \cup D_{k+1}$.

Оценим массу множества $e_л$. Пусть δ_j^*, где $j \in J_n$, — объединение (не более двух) промежутков ранга n, задевающих δ_j (хотя бы один из них — легкий). Заметим, что при переходе от одного промежутка ранга n к соседнему число единиц в троичном разложении номера промежутка изменяется на единицу (в ту или иную сторону), и поэтому приращение g может возрасти не более, чем вдвое. Так как приращение g на легком промежутке ранга n не превосходит $2^{(\frac{1}{2}+t)n}\,4^{-n} = 3^{-pn}$, то при $j \in J_n$

$$\mu_g(\delta_j^*) \leqslant 3^{-pn} + 2 \cdot 3^{-pn} < 9|\delta_j|^p.$$

Поэтому

$$\mu_g(e_л) \leqslant \sum_{n \geqslant n(\varepsilon)} \sum_{j \in J_n} \mu_g(\delta_j) \leqslant \sum_{n \geqslant n(\varepsilon)} \sum_{j \in J_n} \mu_g(\delta_j^*) \leqslant \sum_{n \geqslant n(\varepsilon)} \sum_{j \in J_n} 9|\delta_j|^p < 9\varepsilon. \tag{10}$$

Так как $\mu_g(\widetilde{D_k}) \leqslant 5\mu_g(D_k)$, то, оценивая массу $e_т$, мы видим, что

$$\mu_g(e_т) \leqslant \sum_{n \geqslant n(\varepsilon)} \sum_{m > (\frac{1}{2}+t)n} C_n^m 2^{n-m} 5 \cdot 2^m\, 4^{-n} = \\ = 5 \sum_{n \geqslant n(\varepsilon)} 2^{-n} \sum_{m > (\frac{1}{2}+t)n} C_n^m \leqslant 5 \sum_{n \geqslant n(\varepsilon)} 2^{-n} \frac{n}{2} C_n^{[(\frac{1}{2}+t)n]}.$$

Вместе с леммой 2 это даёт нам:

$$\mu_g(e_т) \leqslant \frac{5}{2} A \sum_{n \geqslant n(\varepsilon)} \sqrt{n} e^{-t^2 n}.$$

Поскольку справа стоит остаток сходящегося ряда, а $n(\varepsilon) \to +\infty$ при $\varepsilon \to 0$, левая часть сколь угодно мала при достаточно малом ε. Вместе с (10) это завершает доказательство теоремы. ►

УПРАЖНЕНИЯ

1) Докажите, что для любого множества $e \subset \mathbb{R}^m$ нулевой меры Лебега найдётся конечная мера Радона, производная которой бесконечна на e.

2) Пусть ν_0 — мера на двухточечном множестве $\{0,1\}$, порождённая нагрузками $\frac{1}{2}$ в точках 0 и 1, и пусть $\nu = \nu_0 \times \nu_0 \times \ldots$ — бесконечное произведение мер ν_0 на множестве двоичных последовательностей $\mathcal{E} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Зафиксируем произвольную последовательность $R = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ положительных чисел r_n, удовлетворяющую условию $\sum\limits_{n=1}^{\infty} r_n < +\infty$, и рассмотрим меру ν_R — образ меры ν относительно отображения $\Phi_R \colon \mathcal{E} \to \mathbb{R}$, определяемого равенством $\Phi_R(\varepsilon) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} r_n \varepsilon_n$, где $\varepsilon = \{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{E}$.

Найдите преобразование Фурье меры ν_R. Найдите меру ν_R для $R = \left\{\frac{1}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ и $R = \left\{\frac{2}{3^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. Какой последовательности соответствует свёртка мер $\nu_{R_1} * \nu_{R_2}$ (по определению $\nu_{R_1} * \nu_{R_2}(E) = \int_{\mathbb{R}} \nu_{R_1}(E - x)\, d\nu_{R_2}(x)$ для борелевского множества $E \subset \mathbb{R}$)?

3) Используя закон нуля–единицы, докажите, что для меры ν_R, описанной в предыдущем упражнении, при любом $p \in (0,1)$ справедлива альтернатива: она либо абсолютно непрерывна, либо сингулярна относительно меры Хаусдорфа μ_p.

§ 4. Дифференцируемость липшицевых функций

4.1. Рассмотрим сначала функции одной переменной. Дифференцируемость почти везде функции f, удовлетворяющей условию Липшица на некотором промежутке, вытекает из теоремы Лебега о дифференцируемости монотонной функции. В самом деле, если L константа Липшица для f, то f представима в виде разности возрастающих функций g и h, где $g(x) = Lx$, $h(x) = Lx - f(x)$. Мы, однако, опираясь на другую теорему Лебега, не только установим дифференцируемость функции f почти всюду, но и убедимся, что она может быть восстановлена по своей производной с помощью интегрирования.

Теорема. *Функция f, удовлетворяющая условию Липшица на промежутке Δ, абсолютно непрерывна на нём. В частности, она почти везде дифференцируема.*

Доказательство. Как видно из приведённого перед теоремой рассуждения, функцию f можно не умаляя общности считать возрастающей. Считая, что это так, рассмотрим порождённую функцией f меру Лебега–Стилтьеса μ_f и убедимся, что она абсолютно непрерывна относительно меры Лебега λ. Действительно, если $e \subset \Delta$, $\lambda(e) = 0$, то для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такая система промежутков $\Delta_k = [a_k, b_k] \subset \Delta$, что

$$e \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \Delta_k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(\Delta_k) < \varepsilon.$$

В таком случае

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_f(\Delta_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (f(b_k) - f(a_k)) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} L(b_k - a_k) < L\varepsilon.$$

Таким образом, множество e можно погрузить в множество, мера μ_f которого произвольно мала. Ввиду полноты меры μ_f это означает, что $\mu_f(e) = 0$. Тем самым абсолютная непрерывность меры μ_f относительно λ доказана. По теореме Радона–Никодима μ_f имеет плотность ω относительно λ. В частности, для любого промежутка $[a, b]$, содержащегося в Δ, справедливо равенство

$$\mu_f([a, b]) = \int_a^b \omega \, d\lambda.$$

Так как мера μ_f конечна на любом компактном промежутке, содержащемся в Δ, то функция ω локально суммируема в Δ. Зафиксировав точку $c \in \Delta$, мы при любом $x \in \Delta$ получаем равенство $f(x) - f(c) = \int_c^x \omega \, d\lambda$, которое по определению и означает абсолютную непрерывность функции f. Дифференцируемость абсолютно непрерывной функции почти везде доказана в теореме Лебега IV.9.3. ▶

Если L — константа Липшица функции f, то $|f(x) - f(y)|/|x - y| \leqslant L$, и поэтому $|\omega(x)| = |f'(x)| \leqslant L$ почти везде. Таким образом, производная функции, удовлетворяющей условию Липшица, почти везде ограничена. Очевидно, верно и обратное: если производная абсолютно непрерывной функции ограничена, то эта функция удовлетворяет условию Липшица.

4.2. Этот пункт посвящён дифференцируемости функции нескольких переменных, удовлетворяющей условию Липшица.

Теорема (Радемахер). *Функция f, удовлетворяющая условию Липшица на множестве $E \subset \mathbb{R}^m$, дифференцируема почти везде на E.*

Доказательство. 1) Так как всякую функцию, удовлетворяющую условию Липшица, можно продолжить на всё пространство с сохранением этого условия (см. п. Д.II.3), будем считать, что f определена на всём пространстве $\mathbb{R}^m$. При любых $x, y \in \mathbb{R}^m$ функция $t \mapsto \varphi_{x,y}(t) = f(x+ty)$ удовлетворяет условию Липшица на прямой, и поэтому она дифференцируема при почти всех $t \in \mathbb{R}$. Пусть $A \subset \mathbb{R}^m$ — множество, где существует (конечная) частная производная f'_{x_m}. Оно измеримо и при каждом $z \in \mathbb{R}^{m-1}$ его сечение есть множество точек $t \in \mathbb{R}$, в которых дифференцируема функция φ_{z,e_m} (мы считаем, что $\mathbb{R}^{m-1}$ канонически вложено в $\mathbb{R}^m$). Множество таких точек имеет полную меру. По принципу Кавальери полную меру имеет и множество A. Из инвариантности меры Лебега относительно вращения вытекает, что при любом $y \neq 0$ производная по направлению $\frac{\partial f}{\partial y}$ существует почти везде в $\mathbb{R}^m$.

В частности, почти везде существуют частные производные $f'_{x_1}, \dots, f'_{x_m}$.

2) Убедимся, что при любом $y \neq 0$ производная по направлению $\frac{\partial f}{\partial y}(x)$ почти везде совпадает с $\langle y, \operatorname{grad} f(x)\rangle$. Сначала мы установим справедливость этого равенства "в слабом смысле". Рассмотрим произвольную функцию $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$. С помощью замены переменной легко убедиться, что

$$\int_{\mathbb{R}^m} (f(x+ty) - f(x))\,\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\,(\varphi(x-ty) - \varphi(x))\,dx.$$

Поэтому при $t \neq 0$

$$\int_{\mathbb{R}^m} \frac{f(x+ty) - f(x)}{t}\,\varphi(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}^m} f(x)\,\frac{\varphi(x-ty) - \varphi(x)}{-t}\,dx.$$

Так как производная по направлению существует почти везде, а подынтегральные функции ограничены и имеют компактные носители, в последнем равенстве можно по теореме Лебега перейти к пределу при $t \to 0$, что даёт нам:

$$\int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial f}{\partial y}(x)\,\varphi(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}^m} f(x)\,\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x)\,dx. \tag{1}$$

Продолжим это равенство:

$$-\int_{\mathbb{R}^m} f(x)\,\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}^m} f(x)\,\langle y, \operatorname{grad}\varphi(x)\rangle\,dx = -\sum_{k=1}^m y_k \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\,\varphi'_{x_k}(x)\,dx.$$

Так как $\int_{\mathbb{R}^m} f(x)\,\varphi'_{x_k}(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}^m} f'_{x_k}(x)\,\varphi(x)\,dx$ согласно равенству (1) (при $y = e_k$), то

$$\int_{\mathbb{R}^m} \frac{\partial f}{\partial y}(x)\,\varphi(x)\,dx = \sum_{k=1}^m y_k \int_{\mathbb{R}^m} f'_{x_k}(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^m} \langle y, \operatorname{grad} f(x)\rangle\,\varphi(x)\,dx.$$

Поскольку это равенство справедливо для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, из леммы Лагранжа IX.3.6 следует, что $\frac{\partial f}{\partial y}(x) = \langle y, \operatorname{grad} f(x)\rangle$ почти везде.

3) Перейдём к заключительному этапу доказательства. Пусть $H \subset S^{m-1}$ — счётное множество, содержащее все орты канонического базиса и всюду плотное в единичной сфере S^{m-1}, а A_0 — множество точек x, где производные по всем направлениям $y \in H$ существуют и вычисляются по формуле $\frac{\partial f}{\partial y}(x) = \langle y, \operatorname{grad} f(x)\rangle$. Так как множество H счётно, то A_0 имеет полную меру. Убедимся, что функция f дифференцируема в каждой точке из A_0.

Пусть L — константа Липшица для функции f, $x \in A_0$, и $C = \|\operatorname{grad} f(x)\|$. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$ и найдём векторы $y_1, \dots, y_N$ из H, образующие ε-сеть для S^{m-1}. Выберем теперь $\delta > 0$ так, что при $|t| < \delta$ неравенства

$$\big|f(x + ty_k) - f(x) - \langle ty_k, \operatorname{grad} f(x)\rangle\big| \leqslant \varepsilon\,|t| \tag{2}$$

выполняются для любого $k = 1, \dots, N$.

Для произвольного вектора $z \neq 0$ положим $y = \frac{z}{\|z\|}$, $t = \|z\|$ и найдём такой вектор $y_j \in H$, что $\|y - y_j\| < \varepsilon$. Тогда при $\|z\| = t < \delta$ мы, пользуясь условием Липшица и оценкой (2), получим:

$$\begin{aligned}\big|f(x+z) - f(x) - \langle z, \operatorname{grad} f(x)\rangle\big| &\leqslant \big|f(x+ty_k) - f(x) - \langle ty_k, \operatorname{grad} f(x)\rangle\big| + \\ &+ |f(x+ty) - f(x+ty_j)| + \big|\langle z, \operatorname{grad} f(x)\rangle - \langle ty_j, \operatorname{grad} f(x)\rangle\big| \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon t + L\|ty - ty_j\| + C\|ty - ty_j\| \leqslant \varepsilon\|z\|(1 + L + C),\end{aligned}$$

что и доказывает дифференцируемость f в точке x. ►

УПРАЖНЕНИЯ

1) Пусть функция f абсолютно непрерывна на промежутке Δ и её производная суммируема на этом промежутке. Докажите, что в этом случае f обладает следующим свойством:

$$\begin{aligned}\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall n\ :\ \text{если}\ \bigvee_{k=1}^{n}(a_k, b_k) \subset \Delta,\ \ \sum_{k=1}^{n}(b_k - a_k) < \delta,\\ \text{то}\ \ \sum_{k=1}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.\end{aligned} \tag{AC}$$

2) Докажите, что если функция удовлетворяет условию (AC) на некотором конечном промежутке, то она имеет на нём ограниченную вариацию, которая также удовлетворяет условию (AC).

3) Рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 4.1, убедитесь, что условие (AC) не только необходимо, но и достаточно для того, чтобы функция, заданная на конечном промежутке, была абсолютно непрерывной на нём и имела суммируемую производную.

Глава XII. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

§ 1. Порядково непрерывные функционалы в пространствах измеримых функций

В этом параграфе $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с σ-конечной мерой μ. Мы будем рассматривать только измеримые (т. е. принадлежащие $\mathfrak{A}$) множества и измеримые почти везде конечные вещественные или комплексные функции, множество которых обозначается $\mathscr{L}^0(X, \mu)$. Как обычно, символами f_+ и f_- обозначаются положительная и отрицательная части вещественной функции f: $f_\pm = \max\{\pm f, 0\}$.

Напомним понятие линейного функционала, известное читателю из курса алгебры.

Определение. Пусть L — произвольное векторное пространство. Отображение Φ из L в поле скаляров называется *линейным функционалом в* L, если

$$\Phi(f+g) = \Phi(f) + \Phi(g) \quad \text{и} \quad \Phi(af) = a\Phi(f)$$

для любых функций f, g из L и любого скаляра a.

1.1. Пусть $E \subset \mathscr{L}^0(X, \mu)$ — множество функций, удовлетворяющее условиям:

1) если f, $g \in E$, то $af + bg \in E$ для любых чисел a, b (линейность множества E);

2) если $f \in E$ и $|g(x)| \leqslant |f(x)|$ почти везде, то $g \in E$;

3) существует строго положительная функция ω_0, входящая в E;

4) существует такая строго положительная функция ω_1, что произведение $f\,\omega_1$ суммируемо для любой функции f из E.

Определение. Множество E, обладающее свойствами 1)–4), будем называть *пространством измеримых функций.*

Из свойства 2) следует, что вместе с f функция $|f|$, а если f вещественная, то и функции $f_\pm$ также входят в E.

Примером пространства измеримых функций может служить введённое в § IX.1 множество $\mathscr{L}^p(X, \mu)$ при $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. Мы предоставляем читателю убедиться (пользуясь σ-конечностью меры μ), что оно обладает свойствами 1)–4).

В пространстве измеримых функций можно естественным образом ввести упорядоченность и сходимость. Именно, для вещественных функций f, g из E мы будем писать $f \leqslant g$ ($g \geqslant f$), если $f \leqslant g$ почти везде на X. Символ $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ обозначает в этом параграфе, что $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ для почти всех $x \in X$, а символ $f_n \uparrow f$ ($f_n \downarrow f$) — что $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ и $f_n \leqslant f_{n+1}$ (соответственно $f_n \geqslant f_{n+1}$) при всех $n \in \mathbb{N}$.

Вместе с пространством измеримых функций E естественно рассматривать и пространство E', которое называют *двойственным к* E. Оно определяется следующим образом:

$$E' = \big\{ g \in \mathscr{L}^0(X,\mu) \,\big|\, fg \in \mathscr{L}^1(X,\mu) \ \text{ для любой функции } f \text{ из } \ E \big\}.$$

Условие 4) определения пространства измеримых функций гарантирует, что двойственное пространство содержит положительные функции. Очевидно, оно является пространством измеримых функций в смысле данного выше определения.

Найдём двойственное пространство в важнейшем частном случае.

Теорема. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Пространством, двойственным к* $\mathscr{L}^p(X,\mu)$, *является пространство* $\mathscr{L}^q(X,\mu)$.

Доказательство. Очевидно, $\mathscr{L}^q(X,\mu) \subset \big(\mathscr{L}^p(X,\mu)\big)'$ в силу неравенства Гёльдера. Убедимся, что справедливо равенство.

Если $p = +\infty$, то это очевидно, так как любая функция g, принадлежащая двойственному пространству, суммируема. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что функция $f_0 = \operatorname{sign} \overline{g}$ принадлежит $\mathscr{L}^\infty(X,\mu)$ (по определению $\operatorname{sign} z = \frac{z}{|z|}$, если $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, и $\operatorname{sign} 0 = 0$).

В дальнейшем мы рассматриваем только конечные p.

Пусть $g \in (\mathscr{L}^p(X,\mu))'$. Ясно, что это пространство содержит и функцию $|g|$. Поэтому, проверяя включение $g \in \mathscr{L}^q(X,\mu)$, мы можем не умаляя общности считать эту функцию неотрицательной. Докажем прежде всего, что

$$C = \sup_{\|f\|_p \leqslant 1} \left| \int_X fg \, d\mu \right| < +\infty.$$

Если предположить противное, то в $\mathscr{L}^p(X,\mu)$ найдутся такие неотрицательные функции f_n, что $\|f_n\|_p \leqslant 1$ и $\left|\int_X f_n g \, d\mu\right| \geqslant 4^n$ при каждом $n \in \mathbb{N}$. Положим $f = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_n$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} f_k$. Так как согласно неравенству треугольника $\|S_n\|_p \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} < 1$, то по теореме Фату $\int_X f^p \, d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \|S_n\|_p^p \leqslant 1$, и поэтому $f \in \mathscr{L}^p(X,\mu)$. Вместе с тем при любом n

$$\int_X fg \, d\mu \geqslant \int_X \frac{1}{2^n} f_n g \, d\mu \geqslant 2^n,$$

и, следовательно, $\int_X fg \, d\mu = +\infty$, что несовместимо с выбором g. Итак, конечность C установлена.

Дальнейшее доказательство разобьём на две части. Рассмотрим сначала случай $1 < p < +\infty$.

Представим X в виде $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, где множества A_n удовлетворяют условиям:

$$A_n \subset A_{n+1}, \quad \mu(A_n) < +\infty \ \text{ и } \ g(x) \leqslant n \ \text{ при } \ x \in A_n,$$

и положим $h_n = g^{\frac{q}{p}} \chi_{A_n}$. Очевидно, $h_n \in \mathscr{L}^p(X,\mu)$. Кроме того,

$$\int_X h_n g \, d\mu = \|h_n\|_p \int_X \frac{h_n}{\|h_n\|_p} \, g \, d\mu \leqslant C \|h_n\|_p.$$

Так как $h_n g = g^q$ на A_n, то это неравенство означает, что

$$\int_{A_n} g^q \, d\mu \leqslant C \left(\int_{A_n} g^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}},$$

то есть

$$\int_{A_n} g^q \, d\mu \leqslant C^q. \tag{1}$$

Поскольку множества A_n расширяются и исчерпывают X, отсюда вытекает включение $g \in \mathscr{L}^q(X, \mu)$.

Пусть теперь $p = 1$. Докажем (по-прежнему считая функцию g неотрицательной), что $g \leqslant C$ почти везде. Допустим противное. Тогда мера множества $Y = X(g > C)$ положительна. В силу σ-конечности меры μ можно считать, что $\mu(Y) < +\infty$ (так как иначе Y можно разбить на счётное частей конечной меры). Положим $f_0 = \frac{1}{\mu(Y)} \chi_Y$. Тогда $\|f_0\|_1 = 1$ и вместе с тем

$$\int_X f_0 g \, d\mu = \frac{1}{\mu(Y)} \int_Y g \, d\mu > \frac{1}{\mu(Y)} \int_Y C \, d\mu = C,$$

что противоречит определению C. ►

Замечание. Из доказательства теоремы видно (см. неравенство (1)), что если $g \in \mathscr{L}^q(X, \mu) = \big(\mathscr{L}^p(X, \mu)\big)'$, то $\|g\|_q \leqslant \sup\limits_{\|f\|_p \leqslant 1} \left| \int_X f g \, d\mu \right|$. Обратное неравенство следует из неравенства Гёльдера. Таким образом,

$$\|g\|_q = \sup_{\|f\|_p \leqslant 1} \left| \int_X f g \, d\mu \right|. \tag{1'}$$

1.2. Обратимся к главному вопросу, которому посвящён этот параграф — исследованию линейных функционалов в пространствах измеримых функций. Примером линейного функционала в E может служить функционал Φ вида

$$\Phi(f) = \int_X f g \, d\mu \qquad (f \in E),$$

соответствующий функции g из двойственного пространства. В силу теоремы Лебега IV.8.4 он обладает следующим свойством:

$$\text{если} \quad f_n \downarrow 0, \quad \text{то} \quad \Phi(f_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2}$$

Это свойство мы положим в основу определения.

Определение. Линейный функционал, обладающий свойством (2), называется *непрерывным* или, точнее, *порядково непрерывным.*

Отметим одно простое, но важное свойство порядково непрерывных функционалов.

Лемма. 1) *Определённый в пространстве E измеримых функций линейный функционал Φ порядково непрерывен тогда и только тогда, когда из условий $f \in E$, $0 \leqslant f_n \uparrow f$ следует, что $\Phi(f_n) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \Phi(f)$.*

2) *На функциях, почти везде равных нулю, непрерывный функционал Φ принимает нулевое значение.*

Доказательство. Очевидно, $f_n \in E$ согласно условию 2) определения пространства измеримых функций. Поскольку $(f - f_n) \downarrow 0$, первое утверждение леммы является простой переформулировкой определения непрерывности.

Для доказательства второго заметим, что если вещественная функция f почти везде равна нулю, то стационарная последовательность $\{g_n\}_{n\geqslant 1}$, где $g_n = f_+$, сходится к нулю почти везде. По определению непрерывности $\Phi(f_+) = \Phi(g_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, т. е. $\Phi(f_+) = 0$. Аналогично, $\Phi(f_-) = 0$, и поэтому $\Phi(f) = \Phi(f_+) - \Phi(f_-) = 0$. ►

1.3. Оказывается, всякий порядково непрерывный функционал допускает интегральное представление. Точнее, справедлива следующая

Теорема. *Пусть Φ — порядково непрерывный линейный функционал в пространстве измеримых функций E. Тогда существует такая функция h из двойственного пространства E', что*

$$\Phi(f) = \int_X fh\,d\mu \quad \text{при всех } f \text{ из } E. \tag{3}$$

Доказательство. Предположим сначала, что пространстве E вещественно, а мера μ конечна, и положим

$$\varphi(A) = \Phi(\chi_A) \ \text{ для } \ A \in \mathfrak{A}.$$

Убедимся, что функция φ счётно аддитивна, т. е. является (вещественным) зарядом. Действительно, пусть $A = \bigvee\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Тогда $\chi_A = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}$. Если S_k — частичные суммы этого ряда, то $S_k \uparrow \chi_A$, и поэтому $\Phi(S_k) \to \Phi(\chi_A) = \varphi(A)$. Следовательно,

$$\varphi(A) = \lim_{k\to\infty} \Phi(S_k) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \Phi(\chi_{A_n}) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \varphi(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n).$$

Из второго пункта леммы вытекает, что заряд φ абсолютно непрерывен относительно μ. Поэтому по теореме Радона–Никодима существует такая суммируемая функция h, что $\varphi(A) = \int_A h\,d\mu$ для любого множества A. Учитывая определение φ, это равенство можно переписать в виде $\Phi(\chi_A) = \int_X \chi_A h\,d\mu$. Ввиду линейности функционала последнее равенство сохраняется и для линейных комбинаций характеристических функций, т. е. $\Phi(f) = \int_X fh\,d\mu$ для любой простой функции f. Таким образом, мы убедились, что равенство (3) верно для простых функций. Покажем теперь, что оно справедливо не только для простых, но и для любых функций из E. При доказательстве мы, очевидно, можем ограничиться только неотрицательными функциями f, а функцию h считать вещественной.

Пусть $\{g_n\}_{n\geqslant 1}$ — возрастающая последовательность простых неотрицательных функций, сходящаяся к функции $f \in E$ (см. теорему III.2.2), и пусть $A_+ = X(h \geqslant 0)$. Тогда $0 \leqslant g_n\chi_{A_+} \uparrow f\chi_{A_+}$ и $0 \leqslant g_n\chi_{A_+}h = g_nh_+ \uparrow fh_+$. Переходя к пределу в равенстве

$$\Phi(g_n\chi_{A_+}) = \int_X g_nh_+\,d\mu, \tag{4}$$

мы видим, что

$$\Phi(f\chi_{A_+}) = \int_X fh_+\,d\mu. \tag{5}$$

При этом в левой части равенства (4) предельный переход осуществляется на основании непрерывности Φ, а в правой — по теореме Леви. В частности, мы получаем, что $\int_X fh_+\,d\mu = \Phi(f\chi_{A_+}) < +\infty$, так что функция fh_+ суммируема. Заменяя A_+ множеством $A_- = X(h < 0)$, а Φ на $-\Phi$, мы можем совершенно аналогично установить суммируемость функции fh_- и равенство

$$-\Phi(f\chi_{A_-}) = \int_X fh_-\,d\mu. \tag{5'}$$

Так как $f = f\chi_{A_+} + f\chi_{A_-}$ и $f\,h = f\,h_+ - f\,h_-$, то из (5) и (5′) следует, очевидно, суммируемость fh и равенство (3).

Пусть теперь $\mu(X) = +\infty$. Рассмотрим функции ω_0, ω_1 из условий 3) и 4) определения пространства измеримых функций. Положим $\omega = \omega_0\omega_1$ и рассмотрим меру ν с плотностью ω относительно μ. Так как функция ω суммируема, то мера ν конечна, а так как $\omega > 0$, то меры ν и μ взаимно абсолютно непрерывны. Поэтому $\mathscr{L}^0(X,\mu) = \mathscr{L}^0(X,\nu)$.

Введём теперь новое функциональное пространство E_0, полагая

$$E_0 = \Big\{\frac{f}{\omega_0}\,\Big|\, f \in E\Big\},$$

и будем рассматривать E_0 как пространство измеримых функций, содержащееся в $\mathscr{L}^0(X,\nu)$. Определим в E_0 функционал Φ_0 равенством

$$\Phi_0(g) = \Phi(g\omega_0) \qquad (g \in E_0).$$

Мы предоставляем читателю стандартную проверку его непрерывности и линейности.

По уже доказанному, существует такая функция h_0, что произведение gh_0 суммируемо относительно ν при всех g из E_0 и справедливо равенство $\Phi_0(g) = \int_X gh_0\,d\nu$. Остальное сводится к переобозначениям. Для $f \in E$ мы имеем

$$\Phi(f) = \Phi_0\Big(\frac{f}{\omega_0}\Big) = \int_X \frac{f}{\omega_0}h_0\,d\nu = \int_X \frac{f}{\omega_0}h_0\omega\,d\mu = \int_X f\,h_0\omega_1\,d\mu.$$

Остаётся положить $h = h_0\omega_1$.

Если пространство E комплексное, представим функционал Φ в виде суммы $\Phi = \Phi_1 + i\Phi_2$, где $\Phi_1 = \mathcal{R}e\,\Phi$, $\Phi_2 = \mathcal{I}m\,\Phi$. Рассмотрев функционалы Φ_1, Φ_2 только на вещественных функциях, входящих в E, и применив к ним уже доказанную часть теоремы, мы получим искомое представление. ►

Опираясь на теорему 1.1, мы получаем

Следствие. *Пусть Φ — порядково непрерывный линейный функционал в пространстве $\mathscr{L}^p(X,\mu)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Тогда существует такая функция h из пространства $\mathscr{L}^q(X,\mu)$, что*

$$\Phi(f) = \int_X fh\,d\mu \quad \textit{при всех } f \textit{ из } \mathscr{L}^p(X,\mu).$$

Как вытекает из (1′), при этом справедливо равенство $\sup\limits_{\|f\|_p \leqslant 1} |\Phi(f)| = \|h\|_q$.

§ 2. Положительные функционалы в пространствах непрерывных функций

В этом параграфе мы будем использовать понятия топологического и, в частности, компактного пространства. Однако устанавливаемые ниже факты совсем нетривиальны уже в случае, когда рассматриваемое топологическое пространство совпадает с $\mathbb{R}^m$ или даже с его компактным подмножеством. Поэтому читатель, не обладающий достаточной математической подготовкой, может без большой потери для освоения основных идей считать, что рассматриваемое нами пространство и есть $\mathbb{R}^m$. В этом случае, как нетрудно заметить, вместо теоремы 2.1 можно использовать теорему VIII.1.7 о гладком спуске или лемму 2 п. Д.II.1 о функциональной отделимости.

Наша цель — описать положительные функционалы в множестве $C(X)$ всех вещественных непрерывных функций, определённых на локально компактном пространстве X, и в его подмножестве $C_0(X)$, состоящем из финитных функций. Решающую роль играет описание функционалов в $C_0(X)$, которому мы уделим основное внимание.

2.1. Напомним некоторые сведения из топологии. Топологическое пространство X называется *локально компактным*, если каждая его точка имеет окрестность, замыкание которой компактно. Для определённой в X функции f замыкание множества $\{x \in X \mid f(x) \neq 0\}$ называется *носителем* и обозначается $\operatorname{supp}(f)$. Функция, определённая в X, называется *финитной*, если её носитель есть компактное множество. Мы будем рассматривать здесь только функции, принимающие вещественные значения. В этом случае, очевидно, множества $C_0(X)$ и $C(X)$ суть векторные пространства над полем вещественных чисел.

В локально компактном пространстве имеется “достаточно много” финитных непрерывных функций. В частности, существуют функции, “сглаживающие” характеристические функции компактных множеств. Точнее, это означает, что справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть X — локально компактное пространство, K — его компактное подмножество, G — открытое множество, содержащее K. Тогда существует такая финитная непрерывная функция φ, что*

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 1, \quad \varphi(x) = 1 \text{ при } x \in K, \quad \operatorname{supp}(\varphi) \subset G.$$

Доказательство этой теоремы приведено, например, в книге [Б-Ф], гл. 2, §§ 12, 13. Если X метризуемо, то оно совсем просто — см. лемму 2 из п. Д.II.1.

2.2. Введём теперь основные для нас понятия положительного функционала и меры Радона.

Определение 1. Линейный функционал $\Phi\colon C_0(X) \to \mathbb{R}$ называется *положительным,* если $\Phi(f) \geqslant 0$ для любой неотрицательной функции f из $C_0(X)$.

Отметим важное свойство положительного функционала — его монотонность:

$$\text{если } \ f, g \in C_0(X) \ \text{ и } \ f \leqslant g, \ \text{ то } \ \Phi(f) \leqslant \Phi(g).$$

Доказательство очевидно: $\Phi(g) - \Phi(f) = \Phi(g - f) \geqslant 0$, так как $g - f \geqslant 0$. ►

Каждая функция из $C_0(X)$ суммируема относительно любой борелевской меры, принимающей конечные значения на компактных множествах, и, очевидно, интеграл по такой мере будет положительным функционалом. Наша основная цель — доказать, что верно и обратное. Оказывается даже, что для представления положительного функционала в виде интеграла не всегда необходимо рассматривать все борелевские меры, которые в некоторых случаях могут быть слишком "плохими". Для дальнейшего нам достаточно ограничиться борелевскими мерами некоторого специального вида.

Определение 2. Пусть X — локально компактное топологическое пространство, μ — мера, определённая на σ-алгебре $\mathfrak{B}_X$ его борелевских подмножеств. Мера μ называется *мерой Радона*, если выполнены условия:

I. $\mu(A) = \inf\{\mu(G) \,|\, G \supset A,\ G$ открытое множество$\}$ для любого борелевского множества A;

II. $\mu(G) = \sup\{\mu(K) \,|\, K \subset G,\ K$ компактное множество$\}$ для любого открытого множества G;

III. $\mu(K) < +\infty$ для любого компактного множества K.

Если пространство X компактно, то, очевидно, конечная борелевская мера есть мера Радона тогда и только тогда, когда она регулярна. В частности, всякая конечная борелевская мера на метризуемом компактном пространстве, будучи регулярной (см. п. Д.III.2, следствие 1), является и мерой Радона. Мерой Радона будет также всякая борелевская мера в $\mathbb{R}^m$, принимающая конечные значения на ограниченных множествах (см. п. II.2.3).

Мера Радона однозначно определяется интегралами от финитных непрерывных функций. Чтобы сформулировать этот результат более точно, положим

$$I(G) = \big\{ f \in C_0(X) \;\big|\; 0 \leqslant f \leqslant 1,\ \operatorname{supp}(f) \subset G \big\}, \tag{1}$$

где G — открытое подмножество пространства X.

Следующее утверждение в дальнейшем послужит нам, в частности, мотивировкой определения 2.4.

Предложение. *Пусть μ — мера Радона в локально компактном пространстве X. Тогда для любого открытого множества G*

$$\mu(G) = \sup\left\{ \int_X f\,d\mu \,\middle|\, f \in I(G) \right\}. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть K — произвольное содержащееся в G компактное множество. По теореме 2.1 в $I(G)$ найдётся такая функция f_0, что $f_0(x) = 1$ на K. Тогда

$$\mu(K) \leqslant \int_X f_0\,d\mu \leqslant \int_X \chi_G\,d\mu = \mu(G).$$

Следовательно,

$$\sup\{\mu(K) \,|\, K \subset G, K - \text{ компактное множество}\} \leqslant \sup\left\{ \int_X f\,d\mu \,\middle|\, f \in I(G) \right\} \leqslant \mu(G).$$

Это доказывает (2), поскольку левая часть этого неравенства по определению меры Радона совпадает с $\mu(G)$. ►

Следствие. *Меры Радона μ и ν совпадают, если $\int_X f\,d\mu = \int_X f\,d\nu$ для любой функции f из $C_0(X)$.*

Совпадение мер μ и ν на открытых множествах вытекает из равенства (2), а их совпадение на произвольных борелевских множествах — из пункта I определения меры Радона. ►

Как мы уже говорили, наша цель — доказать следующую теорему.

Теорема (Рисс, Какутани*)). *Пусть X — локально компактное пространство, Φ — линейный положительный функционал в пространстве $C_0(X)$. Тогда существует единственная мера Радона μ такая, что*

$$\Phi(f) = \int_X f\,d\mu \quad \text{при всех} \quad f \in C_0(X).$$

Единственность меры μ непосредственно вытекает из следствия 2.2.

2.3. Прежде чем приступать к доказательству существования меры μ, представляющей функционал Φ, проведём некоторую подготовительную работу. Начнём с утверждения о разбиении единицы в топологическом пространстве, подобного тому, что установлено в п. VIII.1.8 для пространства $\mathbb{R}^m$. Разумеется, в более общей ситуации мы отказываемся от гладкости и говорим лишь о непрерывности функций, образующих такое разбиение.

Лемма. *Пусть $G_1, \dots, G_N$ — открытое покрытие компактного подмножества K локально компактного пространства X. Тогда существуют такие неотрицательные функции $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ из $C_0(X)$, что*

$$\varphi_1 + \ldots + \varphi_N = 1 \quad \text{на } K, \quad \operatorname{supp}(\varphi_n) \subset G_n \quad \text{при } n = 1, \dots, N.$$

Семейство $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ называется *разбиением единицы для K, подчинённым данному покрытию.*

Доказательство. Как следует из теоремы 2.1, каждой точке множества K можно сопоставить неотрицательную функцию из $C_0(X)$, которая положительна в этой точке и имеет “малый носитель” — он содержится в каком-то из множеств $G_1, \dots, G_N$. Внутренности этих носителей образуют покрытие множества K. Поскольку K компактно, существует конечное подпокрытие. Ему соответствует конечный набор из исходных финитных функций. Пусть ψ_n — сумма тех из них, носители которых содержатся в G_n. Ясно, что $\operatorname{supp}(\psi_n) \subset G_n$ для $n = 1, \dots, N$ и $\theta \equiv \psi_1 + \ldots + \psi_N > 0$ на K. Ещё раз воспользовавшись теоремой 2.1, возьмём такую функцию ω из $C_0(X)$, что $0 \leqslant \omega \leqslant 1$, $\omega(x) = 1$ при $x \in K$ и $\operatorname{supp}(\omega) \subset \{x \in X \mid \theta(x) > 0\}$. Тогда $1 - \omega(x) + \theta(x) > 0$ всюду на X, и мы можем положить $\varphi_n = \frac{\psi_n}{1-\omega+\theta}$ $(n = 1, \dots, N)$. ►

2.4. Теперь мы можем перейти к доказательству теоремы Рисса–Какутани. Построение искомой меры разобьём на три этапа. Сначала с помощью функционала Φ построим вспомогательную внешнюю меру. Затем мы убедимся, что порождаемая ею мера является мерой Радона. На заключительном этапе покажем, что эта мера представляет функционал Φ.

---

*) Сисуо **Какутани** (Kakutani), 1911–2004, — японский математик.

Определение. Для открытого множества $G \subset X$ и произвольного множества $A \subset X$ положим

$$\mu_0(G) = \sup\{\Phi(f) \mid f \in I(G)\},$$
$$\mu^*(A) = \inf\{\mu_0(G') \mid G' \supset A,\ G' - \text{ открытое множество}\}.$$

Отметим, что

$$\mu_0(\varnothing) = 0 \quad \text{и} \quad \mu_0(G) \leqslant \mu_0(G'), \quad \text{если} \quad G \subset G'. \tag{3}$$

Теорема. *Функция μ^* есть внешняя мера, причём $\mu^*(G) = \mu_0(G)$ для любого открытого множества G.*

Как уже говорилось, искомую меру Радона мы хотим построить с помощью μ^*. Учитывая это обстоятельство и предложение 2.2, мы видим, что приведённое выше определение является, по существу, единственно возможным. Если мы хотим получить меру, представляющую функционал, то определение μ_0 диктуется равенством (2), а определение μ^* — условием I из определения меры Радона.

Доказательство. Неравенство $\mu^*(G) \leqslant \mu_0(G)$ непосредственно следует из определения μ^*, а обратное неравенство — из монотонности функции μ_0 (см. неравенство (3)). Очевидно также, что $\mu^*(A) \leqslant \mu^*(B)$, если $A \subset B$.

По определению внешней меры мы должны убедиться, что функция μ^* счётно полуаддитивна и $\mu^*(\varnothing) = 0$. Последнее немедленно вытекает из определения μ^* и равенства $\mu_0(\varnothing) = 0$.

Докажем теперь, что функция μ^* счётно полуаддитивна, т. е. что

$$\mu^*(A) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n), \quad \text{если} \quad A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \tag{4}$$

При этом, разумеется, мы можем и будем считать, что сумма справа конечна, так как в противном случае неравенство тривиально. Предположим сначала, что все множества A_n открыты. Пусть $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ и пусть функция f входит в множество $I(G)$ (см. (1)). Положим $K = \operatorname{supp}(f)$. Ввиду компактности K при некотором N справедливо включение $K \subset A_1 \cup \ldots \cup A_N$. Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ — разбиение единицы для K, подчинённое покрытию $\{A_n\}_{n=1}^N$. Тогда

$$f = \sum_{n=1}^{N} f\varphi_n \quad \text{и} \quad \operatorname{supp}(f\varphi_n) \subset A_n \ \text{ при } \ n = 1, \ldots, N.$$

Поэтому $\Phi(f\varphi_n) \leqslant \mu_0(A_n) = \mu^*(A_n)$ и

$$\Phi(f) = \sum_{n=1}^{N} \Phi(f\varphi_n) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \mu^*(A_n) \leqslant \sum_{n=1}^{N} \mu^*(A_n).$$

Так как это неравенство справедливо для любой функции f из $I(G)$, то переходя в его левой части к supremum'у, мы получаем

$$\mu^*(G) = \mu_0(G) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

и, следовательно,

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*(G) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n),$$

что доказывает неравенство (4), если все множества A_n открыты. В случае произвольных множеств докажем сначала неравенство (4) с точностью до $\varepsilon > 0$. Для этого так выберем открытые множества G_n, что

$$G_n \supset A_n, \quad \mu^*(G_n) < \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \quad \text{при всех } n \geqslant 1.$$

Тогда $A \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, и по доказанному

$$\mu^*(A) \leqslant \mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(G_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\left(\mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε это влечёт (4). ►

2.5. Как известно, сужение всякой внешней меры на σ-алгебру измеримых множеств есть мера. Напомним (см. п. I.4.2), что множество $A \subset X$ измеримо относительно внешней меры μ^*, определённой на подмножествах множества X, если

$$\mu^*(E) \geqslant \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) \tag{5}$$

для любого множества $E \subset X$. Измеримые множества образуют σ-алгебру. Убедимся теперь, что в нашем случае построенная таким образом мера будет определена на всех борелевских множествах. Предварительно установим несложное неравенство.

Лемма. *Пусть $f \in C_0(X)$, $0 \leqslant f \leqslant 1$, $H = supp(f)$, $H_1 = \{x \in X \mid f(x) = 1\}$. Тогда*

$$\mu^*(H_1) \leqslant \Phi(f) \leqslant \mu^*(H). \tag{6}$$

Доказательство. Для доказательства правой части (6) рассмотрим произвольное открытое множество G, содержащее H. Так как $f \in I(G)$ (по поводу определения $I(G)$ см. (1)), то $\Phi(f) \leqslant \mu_0(G)$. Следовательно,

$$\Phi(f) \leqslant \inf\{\mu_0(G) \mid G \supset H,\ G \ \text{ открытое множество}\} = \mu^*(H).$$

Для доказательства левой части неравенства (6) зафиксируем произвольное число ε, $0 < \varepsilon < 1$, и положим $G_\varepsilon = \{x \in X \mid f(x) > 1-\varepsilon\}$. Ясно, что $H_1 \subset G_\varepsilon$. Если $g \in I(G_\varepsilon)$, то

$$g \leqslant \frac{f}{1-\varepsilon} \quad \text{и} \quad \Phi(g) \leqslant \frac{\Phi(f)}{1-\varepsilon}.$$

Поэтому

$$\mu^*(H_1) \leqslant \mu_0(G_\varepsilon) = \sup\{\Phi(g) \mid g \in I(G_\varepsilon)\} \leqslant \frac{\Phi(f)}{1-\varepsilon},$$

что ввиду произвольности ε даёт требуемое. ►

Следствие. *Для всякого открытого множества G*

$$\mu^*(G) = \sup\{\, \mu^*(K) \,|\, K \ \text{— компактное множество, } K \subset G\}. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $\nu(G)$ — правая часть равенства (7). Очевидно, $\nu(G) \leqslant \mu^*(G)$. С другой стороны, если $f \in I(G)$, то, согласно лемме, $\Phi(f) \leqslant \leqslant \mu^*\big(\operatorname{supp}(f)\big) \leqslant \nu(G)$. Переходя к supremum'у в левой части последнего неравенства, мы видим, что $\mu^*(G) \leqslant \nu(G)$. Вместе с полученной выше противоположной оценкой это даёт нам равенство (7). ►

2.6. Теперь мы готовы перейти к следующему этапу.

Теорема. *Всякое борелевское подмножество пространства X измеримо относительно внешней меры μ^*. Сужение μ внешней меры μ^* на σ-алгебру борелевских множеств $\mathfrak{B}_X$ есть мера Радона.*

Доказательство. Поскольку измеримые множества образуют σ-алгебру, для доказательства первого утверждения теоремы достаточно проверить лишь измеримость всевозможных открытых множеств. Мы должны, таким образом, доказать, что для всякого открытого множества A и произвольного множества E справедливо неравенство (5). Допустим сначала, что $E = G$ — открытое множество. Возьмём произвольную функцию f из $I(A \cap G)$ и пусть $H = \operatorname{supp}(f)$. Рассмотрим ещё функцию f_0 из $I(G \setminus H)$. Так как носители функций f и f_0 не пересекаются, то $f + f_0 \leqslant 1$. Кроме того, очевидно, $f + f_0 \in I(G)$. Поэтому

$$\mu^*(G) \geqslant \Phi(f + f_0) = \Phi(f) + \Phi(f_0).$$

Переходя в правой части этого неравенства к supremum'у по всем f_0 из $I(G \setminus H)$, мы видим, что

$$\mu^*(G) \geqslant \Phi(f) + \mu^*(G \setminus H) \geqslant \Phi(f) + \mu^*(G \setminus A).$$

Снова переходя в правой части последнего неравенства к supremum'у по всем функциям f из $I(G \cap A)$, мы получаем, что $\mu^*(G) \geqslant \mu^*(G \cap A) + \mu^*(G \setminus A)$, а это и есть неравенство (5) при $E = G$.

В случае произвольного множества E мы можем считать, что $\mu^*(E) < +\infty$, так как иначе неравенство (5) очевидно. Зафиксируем число $\varepsilon > 0$ и найдём такое открытое множество G, что $G \supset E$ и $\mu^*(G) < \mu^*(E) + \varepsilon$. Тогда

$$\mu^*(E) \geqslant \mu^*(G) - \varepsilon \geqslant \mu^*(G \cap A) + \mu^*(G \setminus A) - \varepsilon \geqslant \mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \setminus A) - \varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε это влечёт (5).

Таким образом, $\mathfrak{B}_X$ содержится в σ-алгебре всех измеримых множеств, и поэтому μ, будучи сужением меры, порождённой μ^*, есть мера.

Нам остаётся провести несложную проверку того, что μ обладает всеми свойствами меры Радона.

Свойством I мера μ обладает по определению, а свойством II — в силу равенства (7). Убедимся, в заключение, что свойство III также налицо. В самом деле, пусть $K \subset X$ — компактное множество. Рассмотрим неотрицательную финитную функцию g, равную единице на K. Тогда по лемме $\mu(K) \leqslant \Phi(g) < +\infty$. ►

2.7. Перейдём к заключительной части наших рассуждений, которая завершит, наконец, доказательство теоремы Рисса–Какутани. Для этого мы должны убедиться, что построенная нами мера μ действительно позволяет получить интегральное представление функционала Φ.

Теорема. *Для построенной в теореме 2.6 меры μ справедливо равенство*

$$\Phi(f) = \int_X f\,d\mu \qquad \text{для любой функции } f \text{ из } C_0(X). \tag{8}$$

Доказательство. Существенная часть наших рассуждений будет заключаться в аппроксимации f линейной комбинацией характеристических функций и последующим их "сглаживанием". С помощью этого приёма мы установим, что равенство (8) справедливо с произвольно малой погрешностью, чего достаточно для его доказательства. Поскольку обе части равенства (8) зависят от f линейно, мы, очевидно, можем — и будем — считать, что $0 \leqslant f < 1$.

Зафиксируем произвольное натуральное число N и рассмотрим множества

$$H_k = \Big\{x \in X \,\Big|\, f(x) \geqslant \frac{k}{N}\Big\}, \qquad G_k = \Big\{x \in X \,\Big|\, f(x) > \frac{k-1}{N}\Big\} \quad (k = 1, 2, \dots, N-1).$$

Пусть ещё $H_0 = \operatorname{supp}(f)$, $G_0 = X$. Ясно, что множества H_k компактны и

$$H_0 \supset G_1 \supset H_1 \supset \ldots \supset G_{N-1} \supset H_{N-1}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1} \chi_{H_k}(x) \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \chi_{H_k}(x). \tag{9}$$

Действительно, если $x \notin H_0$ или $x \in H_{N-1}$, то (9) очевидно. Если же $x \in H_j \setminus H_{j+1}$ при $0 \leqslant j < N-1$, то $\frac{j}{N} \leqslant f(x) < \frac{j+1}{N}$ и поэтому

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1} \chi_{H_k}(x) = \frac{j}{N} \leqslant f(x) < \frac{j+1}{N} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \chi_{H_k}(x).$$

Рассмотрим непрерывные финитные функции f_k, сглаживающие функции χ_{H_k}. Точнее, пусть функция f_k входит в $I(G_k)$ и равна 1 на H_k при $k = 0, 1, \dots, N-1$. Положим также $f_N \equiv 0$. Тогда

$$f_{k+1} \leqslant \chi_{H_k} \leqslant f_k \qquad \text{при } k = 0, 1, \dots, N-1. \tag{10}$$

Из (10) и леммы 2.5 следует, что

$$\Phi(f_{k+1}) \leqslant \mu\big(\operatorname{supp}(f_{k+1})\big) \leqslant \mu(H_k) \leqslant \Phi(f_k) \qquad \text{при } k = 0, 1, \dots, N-1. \tag{11}$$

Интегрируя неравенство (9), мы получаем

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1} \mu(H_k) \leqslant \int_X f\,d\mu \leqslant \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \mu(H_k).$$

Вместе с (11) это даёт нам

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1}\Phi(f_{k+1}) \leqslant \int_X f\,d\mu \leqslant \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\Phi(f_k). \tag{12}$$

С другой стороны, из (9) и (10) вытекает, что

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1} f_{k+1}(x) \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f_k(x).$$

Применяя ко всем частям последнего неравенства функционал Φ, мы получаем

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-1}\Phi(f_{k+1}) \leqslant \Phi(f) \leqslant \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\Phi(f_k). \tag{13}$$

С учётом (12) мы видим, что

$$-\frac{\Phi(f_0)+\Phi(f_1)}{N} \leqslant \Phi(f) - \int_X f\,d\mu \leqslant \frac{\Phi(f_0)+\Phi(f_1)}{N}.$$

Поскольку число N произвольно, отсюда следует равенство (8). ►

2.8. В этом пункте мы рассмотрим положительные функционалы в множестве $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций. Как и в случае функционалов в $C_0(\mathbb{R}^m)$, определённый на $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ линейный функционал Φ называется положительным, если $\Phi(f) \geqslant 0$ для любой неотрицательной функции f из $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$.

Теорема. *Всякий положительный функционал в $C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ допускает интегральное представление с помощью некоторой меры Радона.*

Доказательство. Положим для краткости $L = C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ и убедимся, что определённый в L положительный функционал Φ может быть продолжен до положительного функционала, заданного в $C_0(\mathbb{R}^m)$. Для этого мы используем тот факт, что каждую функцию из $C_0(\mathbb{R}^m)$ можно равномерно на $\mathbb{R}^m$ аппроксимировать функциями из L (см. следствие 2 п. VII.6.4).

Пусть $f \in C_0(\mathbb{R}^m)$, $f \geqslant 0$, и пусть $f_n \in L_+ = \{f \in L \,|\, f \geqslant 0\}$, $f_n \rightrightarrows f$ на $\mathbb{R}^m$. Рассмотрим такую функцию $\varphi \in L_+$, что $\varphi = 1$ на $K = \operatorname{supp}(f)$, и положим $g_n = \varphi \cdot f_n$. Очевидно,

$$g_n \rightrightarrows f \quad \text{на} \quad \mathbb{R}^m \quad \text{и} \quad g_n \in L_+, \quad \operatorname{supp}(g_n) \subset Q \quad \text{при} \quad n = 1, 2, \dots, \tag{14}$$

где $Q \subset \mathbb{R}^m$ — надлежащим образом выбранное компактное множество (можно, например, взять, $Q = \operatorname{supp}(\varphi)$). Пусть h — такая функция из L_+, что $h = 1$ на Q. Ясно, что $|f - g_n| \leqslant c_n h$, где $c_n = \max\limits_{x\in\mathbb{R}^m} |f(x) - g_n(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Тогда

$$-(c_n + c_m)\,h \leqslant g_n - g_m = (g_n - f) + (f - g_m) \leqslant (c_n + c_m)\,h$$

и, следовательно, в силу монотонности функционала Φ

$$|\Phi(g_n) - \Phi(g_m)| = |\Phi(g_n - g_m)| \leqslant (c_n + c_m)\Phi(h).$$

Таким образом, последовательность $\{\Phi(g_n)\}$ сходится в себе, и поэтому существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \Phi(g_n)$. Мы предоставляем читателю проверить, что величина этого предела не зависит от выбора последовательности $\{g_n\}_{n\geqslant 1}$, удовлетворяющей условиям (14). Положив $\widetilde{\Phi}(f) = \lim\limits_{n\to\infty} \Phi(g_n)$, мы, очевидно, получим положительный функционал, заданный на $C_0(\mathbb{R}^m)$ и продолжающий Φ. По теореме Рисса–Какутани он допускает интегральное представление. Поэтому интегральное представление имеет и его сужение — функционал Φ. ►

2.9. Обратимся теперь к описанию положительных линейных функционалов в пространстве $C(X)$ всех непрерывных функций. Как и в случае функционалов в $C_0(X)$, определённый на $C(X)$ линейный функционал Φ называется положительным, если $\Phi(f) \geqslant 0$ для любой неотрицательной функции f из $C(X)$. Пример такого функционала можно построить следующим образом. Зафиксируем произвольную меру Радона μ, сосредоточенную на компактном множестве K, т. е. такую, что $\mu(X \setminus K) = 0$. Это конечная мера, так как $\mu(X) = \mu(K) < +\infty$. Определим функционал Φ, положив

$$\Phi(f) = \int_X f\,d\mu \qquad (f \in C(X))$$

(функция f суммируема, поскольку она ограничена на K, а мера μ конечна).

Мы докажем, что все положительные функционалы в $C(X)$ имеют указанный вид, при дополнительном предположении, что пространство X *σ-компактно*, т. е. представляется в виде объединения некоторой последовательности компактных подмножеств.

При доказательстве мы будем использовать теорему Дини о равномерной сходимости монотонной последовательности непрерывных функций. Напомним её формулировку.

Если K — компактное пространство и $f_n \in C(K)$, $f_n(x) \downarrow 0$ при любом $x \in K$, то $f_n \rightrightarrows 0$ на K.

Теорема. *Пусть X — локально компактное и σ-компактное пространство, Φ — положительный функционал в $C(X)$. Тогда найдётся такая сосредоточенная на компактном множестве мера Радона μ, что*

$$\Phi(f) = \int_X f\,d\mu \ \text{ для любой функции } f \text{ из } C(X). \tag{15}$$

Предположение о σ-компактности пространства X существенно. Можно показать, что без него заключение теоремы неверно.

Доказательство. Рассмотрим сужение Φ на $C_0(X)$. По теореме Рисса–Какутани существует такая мера Радона μ, что равенство (15) справедливо для функций из $C_0(X)$. Для завершения доказательства мы покажем, что, аппроксимируя непрерывные функции финитными и переходя к пределу, можно получить равенство (15)

в полном объёме. При осуществлении этой программы мы, очевидно, можем предполагать функцию f неотрицательной. По условию, существуют такие компактные множества K_n ($n \in \mathbb{N}$), что $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$. Пусть $G_n = \mathrm{Int}(K_n)$. Так как в силу локальной компактности пространства X каждое компактное множество содержится в открытом множестве с компактным замыканием, то не умаляя общности можно считать, что $K_n \subset G_{n+1}$ при любом n.

Убедимся прежде всего, что функционал Φ непрерывен в следующем смысле:

$$\text{если } f_n \in C(X),\ f_n(x) \downarrow 0 \ \text{ при любом } \ x \in X, \ \text{ то } \ \Phi(f_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Действительно, допустим, что $\Phi(f_n) \not\to 0$. Тогда $\Phi(f_n) \geqslant \varepsilon$ при некотором $\varepsilon > 0$ и любом n. Так как в силу теоремы Дини $f_n \rightrightarrows 0$ на каждом компактном множестве $K \subset X$, то переходя в случае необходимости от последовательности $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ к её подпоследовательности, можно считать, что $f_n < 2^{-n}$ на множестве K_n. Положим $g = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n\, f_n$. Поскольку этот ряд равномерно сходится на каждом множестве $G_n \subset K_n$ и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n = X$, функция g непрерывна на X. Так как $g \geqslant n\, f_n$ при любом n, то

$$\Phi(g) \geqslant \Phi(n\, f_n) \geqslant n\varepsilon,$$

что, однако, невозможно ввиду произвольности n. Итак, мы установили, что $\Phi(f_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, и тем самым непрерывность Φ доказана.

Рассмотрим теперь такие функции $g_n \in C_0(X)$, что при всех n

$$0 \leqslant g_n \leqslant 1, \quad g_n(x) = 1 \ \text{ при } \ x \in K_n, \quad \mathrm{supp}(g_n) \subset G_{n+1}.$$

Такие функции существуют по теореме 2.1. Очевидно, $g_n \uparrow 1$. Тогда $f_n = f - f\, g_n \downarrow 0$, и по доказанному $\Phi(f) - \Phi(f\, g_n) = \Phi(f_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Поэтому в равенстве

$$\Phi(f\, g_n) = \int_X f\, g_n\, d\mu$$

мы можем перейти к пределу — в левой части в силу непрерывности Φ, а в правой по теореме Леви. После предельного перехода мы получаем равенство (15).

Остаётся убедиться, что мера μ сосредоточена на компактном множестве. Допустим, что это не так. В таком случае $\mu(X \setminus K_n) > 0$ при любом n, и, переходя в случае необходимости от последовательности $\{K_n\}_{n\geqslant 1}$ к её подпоследовательности, мы можем считать, что $\mu(G_{n+1} \setminus K_n) > 0$. По определению меры Радона найдутся такие компактные множества Q_n, что при каждом $n \in \mathbb{N}$

$$Q_n \subset G_{n+1} \setminus K_n, \quad \mu(Q_n) > 0.$$

Рассмотрим такие непрерывные функции h_n, что

$$0 \leqslant h_n \leqslant 1, \quad h_n(x) = 1 \ \text{ при } \ x \in Q_n, \quad \mathrm{supp}(h_n) \subset G_{n+1} \setminus K_n.$$

Ясно, что носители функций h_n попарно не пересекаются и $\operatorname{supp}(h_{n+1})$ лежит вне K_n. Поэтому при любых $c_n > 0$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n h_n$ равномерно сходится на каждом множестве K_j, а его сумма $\widetilde{g}$, будучи непрерывной на любом множестве G_j, непрерывна и на их объединении. Следовательно, $\widetilde{g} \in C(X)$ и при любом n

$$\Phi(\widetilde{g}) \geqslant \Phi(c_n h_n) = c_n \int_X h_n \, d\mu \geqslant c_n \mu(Q_n).$$

Выбрав c_n так, что $c_n \mu(Q_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$, мы приходим к противоречию, которое завершает доказательство теоремы. ▶

§ 3. Ограниченные функционалы

3.1. В этом пункте буква E обозначает либо пространство $\mathscr{L}^p(X,\mu)$, где μ — σ-конечная мера в X, либо пространство $C(K)$ функций, непрерывных на компактном пространстве K. В пространстве E естественным образом вводится норма: $\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$, если $E = \mathscr{L}^p(X,\mu)$, и $\|f\| = \max_K |f|$, если $E = C(K)$.

Введём ещё одно необходимое нам определение.

Определение. Линейный функционал Φ, заданный в E, называется *ограниченным,* если существует такое число C, что

$$|\Phi(f)| \leqslant C\|f\| \quad \text{при всех} \quad f \in E. \tag{1}$$

Величина $\|\Phi\| = \sup\bigl\{|\Phi(f)| \;\bigm|\; f \in E,\ \|f\| \leqslant 1\bigr\}$ называется *нормой* функционала Φ.

Ясно, что $\|\Phi\|$ — минимальный коэффициент C, для которого выполняется неравенство (1).

Пусть $E = \mathscr{L}^p(X,\mu)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $h \in \mathscr{L}^q(X,\mu)$. Равенство

$$\Phi(f) = \int_X fh \, d\mu \tag{2}$$

определяет в пространстве $\mathscr{L}^p(X,\mu)$ линейный функционал Φ. Он ограничен и $\|\Phi\| = \|h\|_q$ (см. замечание 1.1).

В следствии из теоремы 1.3 отмечалось, что всякий порядково непрерывный функционал в пространстве $\mathscr{L}^p(X,\mu)$ представим в виде (2).

При конечном p всякий функционал, ограниченный в $\mathscr{L}^p(X,\mu)$, порядково непрерывен. Действительно, если $f_n \downarrow 0$, то $\|f_n\|_p \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, и поэтому из неравенства (1) следует, что $\Phi(f_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Таким образом, следствие 1.3 приводит к следующему описанию ограниченных функционалов в $\mathscr{L}^p(X,\mu)$.

Теорема. *Пусть $1 \leqslant p < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Всякий функционал Φ, ограниченный в пространстве $\mathscr{L}^p(X,\mu)$, представим в виде (2). При этом функция $h \in \mathscr{L}^q(X,\mu)$ определяется однозначно с точностью до эквивалентности и $\|\Phi\| = \|h\|_q$.*

3.2. В компактном топологическом пространстве K каждому борелевскому заряду φ соответствует линейный функционал в $C(K)$, задаваемый равенством

$$\Phi(f) = \int_K f\,d\varphi \qquad (f \in C(K)).$$

Он ограничен, поскольку согласно свойствам интеграла по заряду $|\Phi(f)| \leqslant |\varphi|(K)\|f\|$ для любой функции f из $C(K)$.

Вычислим норму этого функционала, ограничившись для простоты случаем, когда пространство K метризуемо. Это позволит нам не заботиться о регулярности встречающихся мер, так как согласно теореме Д.III.2 в метризуемом пространстве всякая конечная борелевская мера регулярна. Рассматриваемые заряды могут быть как вещественными, так и комплексными.

Теорема. *Пусть K — метризуемое компактное пространство, Φ — функционал в $C(K)$, соответствующий борелевскому заряду φ. Тогда $\|\Phi\| = |\varphi|(K)$.*

Доказательство. Оценка нормы функционала сверху

$$\|\Phi\| \leqslant |\varphi|(K) \tag{3}$$

сразу вытекает из уже упомянутого неравенства $|\Phi(f)| \leqslant |\varphi|(K)\|f\|$.

Для получения противоположной оценки рассмотрим плотность ω заряда φ относительно его вариации, которую мы обозначим буквой μ. По теореме XI.1.8

$$\Phi(f) = \int_K f\,d\varphi = \int_K f\omega\,d\mu$$

для любой функции f из $C(K)$. При этом по следствию XI.2.2 $|\omega| = 1$ почти везде относительно μ.

Если бы функция ω была непрерывной, то мы сразу получили бы нужную оценку снизу для $\|\Phi\|$, вычислив $\Phi(\omega)$. Однако, вообще говоря, функция ω разрывна и функционал Φ на ней не определён. Поэтому мы используем не ω, а функции, аппроксимирующие её.

Рассмотрим непрерывные функции g_n, сходящиеся к ω по $\mathscr{L}^1$-норме (см. теорему Д.III.3). Так как из сходимости по $\mathscr{L}^1$-норме вытекает сходимость по мере, то переходя в случае необходимости к подпоследовательности можно считать, что

$$g_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \omega(x) \ \text{ почти везде относительно меры } \ \mu.$$

Функции g_n нельзя использовать для оценки $\|\Phi\|$, поскольку мы ничего не знаем о максимумах их модулей. Поэтому мы “исправим” их, переопределив в тех точках, где их значения велики. Для этого введём функцию

$$\psi(z) = \begin{cases} z & \text{при } \ |z| \leqslant 1, \\ \frac{z}{|z|} & \text{при } \ |z| \geqslant 1 \end{cases}$$

и положим $f_n = \psi \circ g_n$. Очевидно, функции f_n непрерывны и $|f_n| \leqslant 1$. Поэтому

$$\|\Phi\| \geqslant |\Phi(\overline{f_n})| = \left|\int_K \overline{f_n}\omega\,d\mu\right|. \tag{4}$$

Вместе с тем почти везде относительно меры μ

$$f_n(x) = \psi\big(g_n(x)\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \psi\big(\omega(x)\big) = \omega(x),$$

и следовательно, $\int_K \overline{f_n}\omega\, d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_K |\omega|^2\, d\mu = \int_K 1\, d\mu = |\varphi|(K)$. Переходя к пределу в неравенстве (4), мы получаем оценку, противоположную (3). ►

Замечание. Дополним теорему, рассмотрев периодический случай. Пусть $K = [-\pi,\pi]^m$ и пусть функционал Φ определяется, как и в теореме, равенством $\Phi(f) = \int_K f\, d\varphi$, но лишь на множестве 2π-периодических непрерывных функций, которое мы, как обычно, обозначим символом $\widetilde{C}(\mathbb{R}^m)$. Если заряд φ сосредоточен на ячейке $[-\pi,\pi)^m$, то его вариация по-прежнему совпадает с нормой функционала, т. е. $|\varphi|\big([-\pi,\pi]^m\big) = \sup\big\{|\Phi(f)| \;\big|\; f \in \widetilde{C}(\mathbb{R}^m),\ \|f\| \leqslant 1\big\}$.

Чтобы убедиться в этом, достаточно повторить доказательство теоремы, заметив, что функции g_n можно (см. упр. 8 § IX.3) считать 2π-периодическими. ►

3.3. Используем последнее замечание для обобщения теорем X.3.7 и XI.1.9 об однозначной характеристике мер и зарядов с помощью коэффициентов Фурье.

Определение. Пусть φ — борелевский заряд в кубе $Q = [-\pi,\pi]^m$. *Коэффициенты Фурье* $\widehat{\varphi}(n)$ *заряда* φ определим равенством

$$\widehat{\varphi}(n) = \frac{1}{(2\pi)^m}\int_Q e^{-i\langle x,n\rangle}\, d\varphi(x) \qquad (n \in \mathbb{Z}^m).$$

Оказывается, если заряд φ сосредоточен на ячейке $P = [-\pi,\pi)^m$ (т. е. если $|\varphi|(Q \setminus P) = 0$), то он полностью определяется своими коэффициентами Фурье.

Теорема. *Борелевские заряды в* $[-\pi,\pi)^m$, *у которых все коэффициенты Фурье одинаковы, совпадают.*

Доказательство. Достаточно доказать, что заряд с нулевыми коэффициентами Фурье равен нулю. Пусть $\widehat{\varphi}(n) = 0$ при любом $n \in \mathbb{Z}^m$. Определим в $\widetilde{C}(\mathbb{R}^m)$ функционал Φ равенством $\Phi(f) = \int_Q f\, d\varphi$. По условию он обращается в нуль на всех экспонентах $e^{i\langle x,n\rangle}$, а следовательно, и на всех тригонометрических многочленах. По теореме Вейерштрасса (см. следствие VII.6.5) для любой функции $f \in \widetilde{C}(\mathbb{R}^m)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдётся такой тригонометрический многочлен g, что $\|f - g\| < \varepsilon$. Поэтому $|\Phi(f)| = |\Phi(f-g)| \leqslant \|\Phi\|\,\|f-g\| \leqslant \varepsilon\,\|\Phi\|$. Ввиду произвольности ε это означает, что $\Phi(f) = 0$, т. е., что функционал Φ — нулевой. По замечанию к теореме 3.2 $|\varphi|(Q) = \|\Phi\| = 0$. Таким образом, заряд φ равен нулю. ►

3.4. Перейдём теперь к описанию общего вида ограниченных функционалов в пространстве непрерывных функций.

Как легко убедиться, всякий определённый в вещественном пространстве $C(K)$ положительный функционал (см. определение 2.9) ограничен. Очевидно, разность положительных функционалов также есть ограниченный функционал. Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы доказать, что верно и обратное, а именно, что верна следующая

Теорема. *Каждый определённый в вещественном пространстве $C(K)$ ограниченный функционал есть разность положительных.*

Предварительно установим вспомогательное утверждение.

Лемма. *Пусть $f,\ g \in C(K)$, $f,\ g \geqslant 0$, $h = f + g$. Если, $w \in C(K)$, $|w| \leqslant f$, то функция w представима в виде $w = u + v$, где $u,\ v \in C(K)$, $|u| \leqslant f$, $|v| \leqslant g$.*

Доказательство леммы. Положим

$$u(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } h(x) = 0, \\ \frac{w(x)}{h(x)} \cdot f(x), & \text{если } h(x) \neq 0; \end{cases} \qquad v(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } h(x) = 0, \\ \frac{w(x)}{h(x)} \cdot g(x), & \text{если } h(x) \neq 0. \end{cases}$$

Соотношения $|u| \leqslant f$, $|v| \leqslant g$ и $u + v = w$ очевидны. Непрерывность u в точке x_0, где $h(x_0) = 0$ (случай $h(x_0) \neq 0$ тривиален), следует из того, что

$$|u(x) - u(x_0)| = |u(x)| \leqslant f(x) \to f(x_0) = 0 \ \text{ при } \ x \to x_0.$$

Точно так же устанавливается непрерывность функции v. ►

Доказательство теоремы. Пусть Φ — порядково ограниченный функционал, определённый в $C(K)$. Для неотрицательной функции $f \in C(K)$ положим

$$F_0(f) = \sup\{\Phi(u) \,|\, u \in I_f\}, \ \text{ где } \ I_f = \{u \in C(K) \,|\, |u| \leqslant f\}.$$

Так как функционал Φ ограничен, то $F_0(f) < +\infty$. Из определения F_0 непосредственно вытекает, что

1) $F_0(f) \geqslant 0,\ F_0(0) = 0;$ 2) $|\Phi(f)| = \max\{\Phi(f), \Phi(-f)\} \leqslant F_0(f).$

Проверим, что функционал F_0 аддитивен на конусе неотрицательных функций:

$$F_0(f + g) = F_0(f) + F_0(g), \ \text{ если } \ f,\, g \in C(K),\ f,\, g \geqslant 0.$$

Из леммы следует, что $I_{f+g} = \{u + v \,|\, u \in I_f,\, v \in I_g\}$. Поэтому

$$F_0(f + g) = \sup\{\Phi(u + v) \,|\, u \in I_f, v \in I_g\} = \sup\{\Phi(u) + \Phi(v) \,|\, u \in I_f, v \in I_g\} = \\ = \sup\{\Phi(u) \,|\, u \in I_f\} + \sup\{\Phi(v) \,|\, v \in I_g\} = F_0(f) + F_0(g).$$

Аналогично доказывается, что $F_0(af) = a\, F_0(f)$ при $f \geqslant 0$ и $a \geqslant 0$.

Продолжим теперь функционал F_0 на $C(K)$, полагая (далее, как обычно, $f_\pm = \max\{\pm f, 0\}$)

$$F(f) = F_0(f_+) - F_0(f_-).$$

Так как $f_+ = f$, $f_- = 0$ при $f \geqslant 0$, то F совпадает с F_0 на неотрицательных функциях.

Убедимся, что $F(f + g) = F(f) + F(g)$ для любых $f, g \in C(K)$. Положим $h = f + g$. Тогда

$$h_+ - h_- = f_+ - f_- + g_+ - g_-, \ \text{ то есть } \ h_+ + f_- + g_- = h_- + f_+ + g_+.$$

Следовательно, $F_0(h_+ + f_- + g_-) = F_0(h_- + f_+ + g_+)$. Благодаря аддитивности F_0 на конусе неотрицательных функций это даёт нам равенство

$$F_0(h_+) + F_0(f_-) + F_0(g_-) = F_0(h_-) + F_0(f_+) + F_0(g_+).$$

Переписав его в виде

$$F_0(h_+) - F_0(h_-) = F_0(f_+) - F_0(f_-) + F_0(g_+) - F_0(g_-),$$

мы получим требуемое. Аналогично доказывается, что для $F(af) = aF(f)$ для любых $f \in C(K)$, $a \in \mathbb{R}$.

Итак, F — линейный функционал, продолжающий F_0. Он положителен по свойству 1). Положим теперь $H = F - \Phi$. Тогда при $f \geqslant 0$

$$H(f) = F(f) - \Phi(f) \geqslant F(f) - |\Phi(f)| = F_0(f) - |\Phi(f)| \geqslant 0.$$

Последнее неравенство справедливо ввиду свойства 2). Таким образом, функционал H положителен, и теорема доказана, поскольку $\Phi = F - H$. ►

3.5. Теперь мы в состоянии описать все ограниченные функционалы в пространстве $C(K)$. Для простоты мы будем предполагать пространство K метризуемым.

Как уже говорилось, зафиксировав борелевский заряд φ и определив в $C(K)$ функционал Φ равенством $\Phi(f) = \int_K f\,d\varphi$, мы получим ограниченный функционал. Убедимся, что таким образом можно получить любой ограниченный функционал и что соответствие между зарядами и порядково ограниченными функционалами взаимно однозначно.

Теорема. *Пусть K — метризуемое компактное пространство. Всякий ограниченный функционал Φ в пространстве $C(K)$ допускает интегральное представление с помощью заряда, т. е.*

$$\Phi(f) = \int_K f\,d\varphi \quad \text{при любых} \quad f \in C(K), \tag{5}$$

где φ — некоторый заряд, определённый на σ-алгебре борелевских множеств. Заряд, удовлетворяющий равенству (5), определяется однозначно.

Доказательство. Предположим сначала, что рассматриваемое пространство вещественно. По теореме 3.4 функционал Φ представим в виде $\Phi = F - H$, где F и H — положительные функционалы. По теореме Рисса–Какутани каждый из них допускает интегральное представление:

$$F(f) = \int_K f\,d\mu, \quad H(f) = \int_K f\,d\nu \quad (f \in C(K)),$$

где μ и ν — меры Радона. Поэтому $\mu(K) < +\infty$, $\nu(K) < +\infty$. Для получения равенства (5) остаётся положить $\varphi = \mu - \nu$. В комплексном случае введём вещественные функционалы $\Psi = \mathcal{R}e\,\Phi$ и $\Theta = \mathcal{I}m\,\Phi$ и будем рассматривать их только на вещественных непрерывных функциях. Так как эти функционалы ограничены, то по доказанному

$$\Psi(f) = \int_K f\,d\psi, \qquad \Theta(f) = \int_K f\,d\theta$$

где ψ и θ — некоторые вещественные борелевские заряды. Следовательно, для вещественной функции f

$$\Phi(f) = \Psi(f) + i\Theta(f) = \int_K f\, d(\psi + i\theta).$$

Ввиду линейности обеих частей этого равенства оно справедливо не только для вещественных, но и для любых комплексных функций, что даёт представление (5) с $\varphi = \psi + i\theta$.

Докажем теперь единственность заряда, дающего представление (5). Пусть φ и $\widetilde{\varphi}$ — такие борелевские заряды, что

$$\Phi(f) = \int_K f\, d\varphi \quad \text{и} \quad \Phi(f) = \int_K f\, d\widetilde{\varphi} \quad \text{при любых} \quad f \in C(K).$$

Вычитая из первого равенства второе, мы видим, что

$$0 = \int_K f\, d(\varphi - \widetilde{\varphi}) \quad \text{при любых} \quad f \in C(K).$$

Иными словами, заряд $\varphi - \widetilde{\varphi}$ порождает нулевой функционал. Согласно теореме 3.2 $|\varphi - \widetilde{\varphi}|(K) = \|0\| = 0$. Тем самым равенство $\varphi = \widetilde{\varphi}$ доказано. ►

3.6. Используем полученные в пп. 3.1 и 3.5 теоремы об общем виде ограниченных функционалов для описания рядов Фурье функций и зарядов с помощью средних Чезаро (см. также упр. 3–5).

Теорема. *Пусть* $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ *— тригонометрический ряд, а* σ_n *— средние арифметические его (симметричных) частичных сумм. Этот ряд тогда и только тогда является рядом Фурье*

1) некоторой функции из $\mathscr{L}^p\big([-\pi,\pi]\big)$ *при* $1 < p \leqslant +\infty$, *когда нормы* $\|\sigma_n\|_p$ *ограничены;*

2) некоторой суммируемой функции, когда последовательность $\{\sigma_n\}_{n\geqslant 1}$ *сходится по* $\mathscr{L}^1$*-норме;*

3) некоторого заряда, когда нормы $\|\sigma_n\|_1$ *ограничены;*

4) некоторой меры, когда $\sigma_n(x) \geqslant 0$ *при всех* x *и* n.

Доказательство. Чтобы убедиться в необходимости условия 1), воспользуемся представлением $\sigma_n(f) = f * \Phi_n$, где Φ_n — n-е ядро Фейера (см. п. X.4.1). Так как $\|\Phi_n\|_1 = 1$, то по теореме 1 п. IX.3.7 о свойствах свёртки отсюда следует требуемая оценка: $\|\sigma_n(f)\|_p \leqslant \|f\|_p$.

Необходимость условия 2) установлена в теореме Фейера.

Необходимость условий 3) и 4) вытекает из интегрального представления суммы σ_n с помощью ядра Фейера:

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k|<n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \int_{[-\pi,\pi]} e^{ik(x-t)} d\varphi(t) = \int_{[-\pi,\pi]} \Phi_n(x-t)\, d\varphi(t).$$

Поскольку $\Phi_n \geqslant 0$, отсюда следует неотрицательность сумм σ_n, если φ — мера. Если же φ — заряд, то

$$|\sigma_n(x)| \leqslant \int_{[-\pi,\pi]} \Phi_n(x-t)\, d|\varphi|(t).$$

Проинтегрировав это неравенство по промежутку $[-\pi,\pi]$ и изменив затем порядок интегрирования, мы получим неравенство $\|\sigma_n\|_1 \leqslant |\varphi|\big([-\pi,\pi]\big)$.

Переходя к доказательству достаточности, заметим сначала, что коэффициенты Фурье функций σ_n имеют пределы при $n\to\infty$. В самом деле, $\sigma_n(x) = \sum\limits_{|k|<n} \big(1-\frac{|k|}{n}\big) c_k e^{ikx}$, и поэтому при $n > |k|$

$$\widehat{\sigma}_n(k) = \left(1-\frac{|k|}{n}\right) c_k \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} c_k. \tag{6}$$

1) Пусть q — сопряжённый с p показатель, т. е. $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Введём функционалы H_n в $\mathscr{L}^q\big([-\pi,\pi]\big)$, полагая $H_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sigma_n(x)\,dx$ $\big(f \in \mathscr{L}^q\big([-\pi,\pi]\big)\big)$. Заметим, что при любом n

$$|H_n(f)| \leqslant \|\sigma_n\|_p \|f\|_q \leqslant C\,\|f\|_q, \tag{7}$$

где $C = \sup\limits_n \|\sigma_n\|_p$. Убедимся, что для любой функции $f \in \mathscr{L}^q\big([-\pi,\pi]\big)$ существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} H_n(f)$. Действительно, в силу (6) этот предел существует, если f — тригонометрический многочлен. Чтобы доказать, что он существует всегда, убедимся, что последовательность $\{H_n(f)\}_{n\geqslant 1}$ сходится в себе. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$ и найдём такой тригонометрический многочлен T, что $\|f-T\|_q < \varepsilon$. Тогда при любых n, $m \in \mathbb{N}$

$$|H_n(f) - H_m(f)| \leqslant |H_n(f-T)| + |H_n(T) - H_m(T)| + |H_m(f-T)| \leqslant$$
$$\leqslant C\varepsilon + |H_n(T) - H_m(T)| + C\varepsilon = 2C\varepsilon + |H_n(T) - H_m(T)|.$$

Так как последовательность $\{H_n(T)\}_{n\geqslant 1}$ сходится, то $|H_n(T) - H_m(T)| < \varepsilon$ при достаточно больших m, n, что доказывает фундаментальность, а значит, и сходимость последовательности $\{H_n(f)\}_{n\geqslant 1}$.

Положим $H(f) = \lim\limits_{n\to\infty} H_n(f)$. Очевидно, H — линейный функционал в $\mathscr{L}^q\big([-\pi,\pi]\big)$. Из неравенства (7) следует его ограниченность. Поэтому он порождается некоторой функцией g из $\mathscr{L}^p\big([-\pi,\pi]\big)$:

$$H(f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g(x)\, dx \qquad \big(f \in \mathscr{L}^q\big([-\pi,\pi]\big)\big).$$

Полагая $f = e_k$, где $e_k(x) = e^{-ikx}$, мы получаем:

$$\widehat{g}(k) = \frac{1}{2\pi} H(e_k) = \frac{1}{2\pi} \lim_{n\to\infty} H_n(e_k) = \lim_{n\to\infty} \widehat{\sigma}_n(k) = c_k. \tag{8}$$

Таким образом, g — искомая функция.

Случай 2) мы предоставляем читателю рассмотреть самостоятельно.

3) Будем теперь считать, что функционалы H_n определены не в $\mathscr{L}^q\big([-\pi,\pi]\big)$, а в пространстве $C\big([-\pi,\pi]\big)$. Рассуждая, как выше, и пользуясь теоремой Вейерштрасса

о плотности тригонометрических многочленов, мы в этом случае получим, что предел $\lim\limits_{n\to\infty} H_n(f)$ существует для любой непрерывной 2π-периодической функции f. Для функции $g_0(x) = x$ последовательность $\{H_n(g_0)\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена, так как $|H_n(g_0)| \leqslant \|g_0\| \int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n(x)|\,dx$. Поэтому из неё можно извлечь сходящуюся подпоследовательность $\{H_{n_k}(g_0)\}_{k=1}^{\infty}$. Так как всякая непрерывная на промежутке $[-\pi,\pi]$ функция f единственным образом представима в виде $f = g + ag_0$, где $g \in \widetilde{C}$, $a = \frac{f(\pi)-f(-\pi)}{2\pi}$, то функционал H можно определить на всём пространстве $C([-\pi,\pi])$ как предел $\lim\limits_{k\to\infty} H_{n_k}(f)$. При этом

$$|H(f)| \leqslant \sup_n |H_n(f)| \leqslant \sup_n \int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n(x)|\,dx\,\|f\|,$$

и поэтому функционал H ограничен. По теореме 3.5 он порождается некоторым зарядом. С помощью равенства, аналогичного (8), проверяется, что c_k — коэффициенты Фурье этого заряда.

4) Так как

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n(x)|\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n(x)\,dx = c_0,$$

то выполнено условие предыдущего пункта, и поэтому функционал H порождается некоторым зарядом φ, коэффициенты Фурье которого совпадают с c_k. Ввиду положительности σ_n функционалы H_n положительны, а вместе с ними положителен и функционал H. Поэтому порождающий его заряд есть мера. ►

УПРАЖНЕНИЯ

1) Линейный функционал Φ в пространстве измеримых функций E назовём порядково ограниченным, если $\sup\{|\Phi(g)| \mid g \in E,\ |g| \leqslant |f|\} < +\infty$ для любой функции f из E. Обобщая теорему 3.4, докажите, что в вещественном пространстве измеримых функций всякий порядково ограниченный функционал есть разность положительных.

2) Пусть Φ — порядково непрерывный линейный функционал в вещественном пространстве измеримых функций. Не используя интегрального представления докажите, что

а) он порядково ограничен;

б) его положительная часть (функционал F, построенный при доказательстве теоремы 3.4) также порядково непрерывна.

Считая интегральное представление Φ известным, найдите интегральное представление функционала F.

3) С помощью теоремы X.4.7 обобщите теорему 3.6, используя средние Чезаро кратного тригонометрического ряда.

4) Обобщите теорему 3.6, заменив суммы σ_n суммами вида

$$S_{M,\varepsilon}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} M(\varepsilon|n|)\,c_n\,e^{inx},$$

где M — непрерывная, выпуклая и суммируемая на $[0,+\infty)$ функция.

5) Докажите, что для того чтобы тригонометрический ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,e^{inx}$ был рядом Фурье функции класса $\widetilde{\mathscr{L}}^1$, необходимо и достаточно, чтобы его средние Чезаро σ_n удовлетворяли на промежутке $[-\pi,\pi]$ условию: $\sup\limits_n \left|\int_e \sigma_n(x)\,dx\right| \underset{\lambda(e)\to 0}{\longrightarrow} 0$.

ДОБАВЛЕНИЯ

I. Аксиоматическое определение интеграла по отрезку

I.1. Подобно тому как понятие производной связано с задачей о касательной, так и понятие интеграла связано с другой классической геометрической задачей — задачей вычисления площади. Существует много способов, с помощью которых можно ввести интеграл. В простейшем случае, когда мы хотим определить интеграл от непрерывной функции по отрезку, можно непосредственно опираться на понятие площади. Это особенно целесообразно в тех случаях, когда по тем или иным соображениям понятие площади мы можем считать известным. Подчеркивая связь задач интегрирования и построения касательной, можно определять интеграл как приращение первообразной. Стремясь расширить класс интегрируемых функций, можно определять интеграл как предел интегральных сумм (интеграл Римана). Во всех случаях мы будем получать если не вполне равносильные, то почти эквивалентные определения, сохраняя при этом главное — геометрический смысл интеграла.

Наша цель в этом дополнении — рассмотреть одно из возможных определений интеграла по отрезку, которое могло бы на начальном этапе обучения предварить построение интеграла, основанное на теории меры. Мы изложим здесь аксиоматический подход, при котором интеграл истолковывается как отображение, сопоставляющее промежутку и непрерывной на нём функции, определённое число. Это отображение подчиняется двум ограничениям (аксиомам), мотивированным наглядными геометрическими соображениями. Наше определение можно распространить и на некоторые более широкие классы функций, однако стремясь освободиться от второстепенных технических деталей и сделать излагаемую идею максимально прозрачной, мы отказываемся от таких, на наш взгляд не принципиальных, обобщений.

I.2. Далее мы рассматриваем только вещественные функции, непрерывные на замкнутых конечных промежутках (отрезках). Пару $(f, [a, b])$, состоящую из функции f и отрезка $[a, b]$ (возможно, вырождающегося в точку), содержащегося в её области задания, будем называть допустимой.

Определение. *Интегралом* называется функция J, заданная на множестве допустимых пар и обладающая следующими свойствами:

(I) Если пара $(f, [a, b])$ допустима, то при любом $c \in [a, b]$

$$J\big(f, [a, b]\big) = J\big(f, [a, c]\big) + J\big(f, [c, b]\big)$$

(аддитивность интеграла по промежутку);

(II) если пара $(f, [a, b])$ допустима и $A \leqslant f(x) \leqslant B$ для всех $x \in [a, b]$, то

$$A(b - a) \leqslant J\big(f, [a, b]\big) \leqslant B(b - a).$$

В частности, интеграл по вырожденному промежутку равен нулю.

Эти аксиомы становятся особенно естественными, если — считая ясным понятие площади — воспринимать интеграл $J\big(f,[a,b]\big)$ для неотрицательной функции как площадь её подграфика над промежутком $[a,b]$, т. е. множества

$$\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\big|\, x\in[a,b],\ 0\leqslant y\leqslant f(x)\big\}.$$

Чтобы обосновать такую интерпретацию интеграла, разобьём отрезок $[a,b]$ на n равных частей $\Delta_1,\dots,\Delta_n$ длиной $h_n=\frac{b-a}{n}$, и пусть m_k и M_k соответственно наименьшее и наибольшее значение f на Δ_k. Тогда по аксиоме (II) $m_kh_n\leqslant J(f,\Delta_k)\leqslant M_kh_n$. Сложив эти неравенства, мы видим, что

$$s_n=\sum_{k=1}^n m_kh_n\leqslant J\big(f,[a,b]\big)\leqslant S_n=\sum_{k=1}^n M_kh_n.$$

Суммы s_n и S_n имеют простой геометрический смысл — это площади многоугольных фигур, составленных из прямоугольников с основаниями Δ_k и высотами m_k и M_k соответственно. Первая из них содержится в подграфике f, а вторая содержит его. С ростом n суммы s_n и S_n становятся сколь угодно близкими, так как

$$0\leqslant S_n-s_n=h_n\sum_{k=1}^n(M_k-m_k)\leqslant h_nn\omega_f(h_n)=(b-a)\omega_f(h_n)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

(здесь ω_f — модуль непрерывности функции f). В силу монотонности площадь подграфика (при любом её определении) заключена между s_n и S_n. Поэтому она должна совпадать с $J\big(f,[a,b]\big)$.

При такой интерпретации аксиома (I) означает просто, что если разбить подграфик на две части вертикальной прямой, то площадь всего подграфика равна сумме площадей этих частей. Столь же наглядна и вторая аксиома.

Из аксиомы (II) немедленно вытекает, что если функция всюду на $[a,b]$ принимает одно и то же значение C, то $J\big([C,[a,b]\big)=C(b-a)$. Отметим ещё одно важное свойство интеграла, которое так же, как и предыдущее, немедленно следует из аксиомы (II).

Теорема (о среднем). *Если функция f непрерывна на $[a,b]$, то существует такая точка $c\in[a,b]$, что $J\big(f,[a,b]\big)=f(c)(b-a)$.*

Доказательство. Положим $m=\min\limits_{[a,b]}f$, $M=\max\limits_{[a,b]}f$. Так как $m\leqslant f(x)\leqslant M$ при всех x из $[a,b]$, то из аксиомы (II) вытекает, что

$$m\leqslant\frac{1}{b-a}J\big(f,[a,b]\big)\leqslant M.$$

Остаётся воспользоваться тем, что непрерывная функция принимает все значения между m и M. ►

Оставляя в стороне проблему существования интеграла, установим его фундаментальную связь с дифференциальным исчислением, что откроет нам путь к вычислению интеграла в огромном числе конкретных случаев. Чтобы получить этот результат, нам необходимо с каждой функцией f, непрерывной на $[a,b]$, связать ещё одну функцию —

интеграл “с переменным верхним пределом”. Точнее говоря, рассмотрим функцию Φ, определяемую равенством

$$\Phi(x) = J\big(f, [a, x]\big) \text{ при } a \leqslant x \leqslant b. \tag{1}$$

Следующая теорема получена, по существу, Барроу, высказавшим её в более сложной геометрической форме.

Теорема. *Функция Φ дифференцируема в каждой точке x промежутка $[a, b]$ и $\Phi'(x) = f(x)$.*

Доказательство. С каждой точкой $y \in [a, b]$ свяжем отрезок Δ_y с концами x и y. При $y > x$ из аддитивности интеграла сразу вытекает, что $\Phi(y) - \Phi(x) = J(f, \Delta_y)$. Используя теорему о среднем, можно переписать это равенство в виде

$$\frac{\Phi(y) - \Phi(x)}{y - x} = f(\overline{y}),$$

где $\overline{y}$ — некоторая точка, лежащая между x и y. Поменяв x и y ролями, мы видим, что это равенство остаётся справедливым и в случае, когда $y < x$. Очевидно, в силу непрерывности $f(\overline{y}) \to f(x)$ при $y \to x$, что и доказывает нашу теорему. ►

I.3. Результат последней теоремы полезно несколько переформулировать, для чего нам потребуется одно новое понятие.

Определение. Пусть функции f и F определены по крайней мере на промежутке Δ. Функция F называется *первообразной* для f на промежутке Δ, если она дифференцируема на Δ и

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{при любом } x \text{ из } \Delta.$$

Если F_1 и F_2 — две первообразные для f на промежутке Δ, то их разность постоянна, поскольку $(F_1 - F_2)' = 0$.

Используя понятие первообразной, теорему Барроу можно переформулировать следующим образом (мы сохраняем введённые в ней обозначения).

Теорема. *Функция Φ — первообразная для f на промежутке $[a, b]$.*

Из теоремы Барроу вытекает также важнейшее следствие, в котором установленная связь между интегрированием и дифференцированием формулируется в более удобном виде.

Следствие. *Если F — произвольная первообразная для функции f, непрерывной на промежутке $[a, b]$, то справедлива формула Ньютона – Лейбница*

$$J\big(f, [a, b]\big) = F(b) - F(a).$$

Разность $F(b) - F(a)$ называется двойной подстановкой функции F и обозначается символом $F(x)\Big|_{x=a}^{x=b}$ или, короче, $F\Big|_a^b$.

Доказательство. Пусть Φ — первообразная для f, определённая формулой (1). Так как $F = \Phi + C$, где C — некоторая константа, то

$$J\big(f,[a,b]\big) = \Phi(b) = \Phi(b) - \Phi(a) = (F(b) - C) - (F(a) - C) = F(b) - F(a). \quad \blacktriangleright$$

Из формулы Ньютона–Лейбница следует, что для заданного промежутка значение интеграла однозначно определяется по любой первообразной функции f, и, следовательно, может существовать лишь одна функция J, удовлетворяющая аксиомам (I)–(II). Тем самым доказана единственность интеграла.

Единственность интеграла даёт основание ввести для него специальное обозначение. С этого момента вместо $J\big(f,[a,b]\big)$ мы будем, используя общепринятый символ, писать $\int_a^b f(x)\,dx$ (по поводу термина "интеграл" и символа $\int$ см. п. IV.1.2). Функция f называется подынтегральной функцией, число a — нижним, а b — верхним пределом интегрирования. Промежуток $[a,b]$ называют промежутком интегрирования.

С формальной точки зрения обозначение $\int_a^b f(x)\,dx$ небезупречно. Оно содержит "немую" букву x (называемую иногда "переменной интегрирования"), которая ничего не обозначает и может быть заменена любой другой: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(z)\,dz = \int_a^b f(щ)\,dщ$. Исходя из этих соображений, следовало бы предпочесть обозначение $\int_a^b f$. Однако принятое нами традиционное обозначение обладает рядом преимуществ, которые проявляются, когда мы переходим к решению конкретных задач. В частности, это становится заметным, если функция f определяется формулой, содержащей различные буквы (параметры). Например, при $f(x) = x^t$ $(x > 0)$ символ $\int_1^2 x^t\,dx$ показывает, что речь идёт именно об интеграле от (степенно́й) функции f, а не об интеграле $\int_1^2 x^t\,dt$ от (показательной) функции $t \mapsto g(t) = x^t$. Это обозначение удобно также при использовании важных приёмов вычисления интеграла по промежутку (см. в п. IV.6.2 предложения I и II об интегрировании по частям и замене переменной).

I.4. Установленная связь между интегрированием и дифференцированием позволяет нам легко установить дальнейшие важные свойства интеграла — его линейность и монотонность.

Теорема. *Пусть функции f, g непрерывны на промежутке $[a,b]$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда*

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx, \qquad \int_a^b (\alpha f(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx.$$

Отсюда следует линейность интеграла:

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

и, в частности, равенство $\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$. Применив его к разности $f = f_+ - f_-$ (здесь $f_\pm = \max\{\pm f, 0\}$ — положительная и отрицательная части функции f), мы видим, что интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ есть разность площадей подграфиков функций f_+ и f_-.

Доказательство. Пусть F и G — первообразные функций f и g соответственно. Тогда $F+G$ и αF — первообразные функций $f+g$ и αf. Поэтому по формуле Ньютона–Лейбница мы получаем:

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = (F+G)\Big|_a^b = F\Big|_a^b + G\Big|_a^b = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

Однородность интеграла устанавливается аналогично. ►

Следствие 1. *Если функции f и g непрерывны на $[a,b]$ и $f(x) \leqslant g(x)$ при всех $x \in [a,b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$.*

Действительно, так как $g - f \geqslant 0$, то согласно аксиоме (II) $\int_a^b (g(x)-f(x))\,dx \geqslant 0$. Следовательно,

$$0 \leqslant \int_a^b (g(x)-f(x))\,dx = \int_a^b g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx. \ ►$$

Из монотонности интеграла вытекает важная оценка.

Следствие 2. *Если функция f непрерывна на $[a,b]$, то $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$.*

Для доказательства достаточно заметить, что $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$, и воспользоваться монотонностью интеграла. ►

Теперь дальнейшие свойства интеграла от непрерывной функции по отрезку (в частности, предложения I и II п. IV.6.2 и теорема IV.7.3 о пределе интегральных сумм) могут быть получены дословно так же, как в гл. IV, с тем уточнением, что все рассматриваемые там промежутки следует считать замкнутыми.

Отметим, что в предложении II п. IV.6.2 полезно использовать соглашение, несколько обобщающее понятие интеграла. Согласно определению интеграл $\int_a^b f(x)dx$ имеет смысл лишь в том случае, когда $a \leqslant b$. Такое ограничение может иногда привести к некоторым техническим затруднениям, и чтобы избежать их, мы при $a > b$ будем по определению считать, что $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$. Очевидно, это соглашение не нарушает справедливости формулы Ньютона–Лейбница.

II. Продолжение непрерывных функций

Мы рассмотрим здесь важный вопрос о том, когда функция f_0, непрерывная на некотором подмножестве A метризуемого пространства X, будет сужением функции, непрерывной во всём пространстве или, как говорят, когда функцию f_0 можно продолжить до функции, непрерывной в X. Ясно, что, вообще говоря, этого сделать нельзя. Простые контрпримеры мы получим, рассмотрев на множестве $A = (0,1]$ функции $x \mapsto \frac{1}{x}$ и $x \mapsto \sin\frac{1}{x}$. Вторая из них ограничена, но тем не менее её, как и первую, нельзя продолжить до функции непрерывной в нуле. Условие, гарантирующее возможность продолжения функции с некоторого множества на его замыкание, дано в упр. 1.

II.1. Установим предварительно некоторые вспомогательные факты. Напомним, что символом $C(X)$ обозначается множество всех функций, непрерывных на X.

Нам потребуется понятие расстояния от точки до множества. В частном случае, когда $X = \mathbb{R}^m$, оно введено в п. III.4.1.

Определение. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $A \subset X$. Положим

$$\operatorname{dist}(x, A) = \inf\{\, \rho(x, y) \mid y \in A\} \qquad (x \in X).$$

Величина $\operatorname{dist}(x, A)$ называется *расстоянием* от точки x до множества A.

Лемма 1. *Функция $x \mapsto \operatorname{dist}(x, A)$ непрерывна в X. Если множество A замкнуто, то $\operatorname{dist}(x, A) = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in A$.*

Доказательство. Пусть $y \in A$, x, $x' \in X$. Тогда

$$\operatorname{dist}(x, A) \leqslant \rho(x, y) \leqslant \rho(x', y) + \rho(x', x).$$

Переходя в правой части этого неравенства к infimum'у по y, получаем, что $\operatorname{dist}(x, A) \leqslant \operatorname{dist}(x', A) + \rho(x, x')$, т. е.

$$\operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(x', A) \leqslant \rho(x, x').$$

Ввиду равноправия x и x' отсюда следует неравенство

$$|\operatorname{dist}(x, A) - \operatorname{dist}(x', A)| \leqslant \rho(x, x'),$$

которое влечёт непрерывность.

Равенство $\operatorname{dist}(x, A) = 0$ при $x \in A$ очевидно. Если же множество A замкнуто и $x \notin A$, то найдётся такое число $\varepsilon > 0$, что шар $B(x, \varepsilon)$ не пересекается с A. Это означает, что $\rho(y, x) \geqslant \varepsilon$ для любого y из A и, следовательно, $\operatorname{dist}(x, A) \geqslant \varepsilon > 0$. ►

Лемма 2. *Замкнутые непересекающиеся подмножества метризуемого пространства X функционально отделимы, т. е. для любых двух таких подмножеств F, F_0 существует непрерывная в X функция φ, удовлетворяющая условиям:*

$$\varphi = 1 \ \text{ на } F, \qquad \varphi = 0 \ \text{ на } F_0, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 1 \ \text{ на } \ X.$$

Доказательство. Зафиксируем в X метрику, определяющую топологию, что позволит нам говорить о расстоянии от точки до множества. Определим функцию φ равенством

$$\varphi(x) = \frac{\operatorname{dist}(x, F_0)}{\operatorname{dist}(x, F) + \operatorname{dist}(x, F_0)} \qquad (x \in X).$$

Поскольку множества F и F_0 не пересекаются, знаменатель дроби не обращается в нуль. Мы предоставляем читателю проверить, что функция φ обладает всеми требуемыми свойствами. ►

Следствие. *Пусть $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Если замкнутые подмножества F и F_0 метризуемого пространства X не пересекаются, то существует такая функция $\psi \in C(X)$, что*

$$\psi = a \ \text{ на } \ F, \qquad \psi = b \ \text{ на } \ F_0, \qquad a \leqslant \psi \leqslant b \ \text{ на } \ X.$$

Доказательство. Пусть функция φ отделяет множества F и F_0. Тогда функция $\psi = b - (b - a)\varphi$ обладает, очевидно, всеми требуемыми свойствами. ►

II.2. Теперь мы готовы к тому, чтобы рассмотреть вопрос, которому посвящено это добавление.

Теорема (Титце*), Урысон**)). *Всякая функция f_0, непрерывная на замкнутом подмножестве метризуемого пространства X, является сужением некоторой функции из $C(X)$. Если $|f_0| \leqslant C$, то и продолженную функцию можно считать удовлетворяющей этому неравенству.*

Доказательство. Пусть F — замкнутое множество, на котором определена (и непрерывна) функция f_0.

I. Рассмотрим сначала случай, когда f_0 вещественна и ограничена: $|f_0| \leqslant C$. Прежде чем доказывать существование непрерывного продолжения, убедимся, что f_0 допускает достаточно хорошую аппроксимацию с помощью функций из $C(X)$.

Пусть

$$F_- = \left\{x \in F \,\middle|\, f_0(x) \leqslant -\frac{C}{3}\right\}, \qquad F_+ = \left\{x \in F \,\middle|\, f_0(x) \geqslant \frac{C}{3}\right\}.$$

Если оба эти множества непусты, то по следствию из леммы 2 найдётся такая функция g_0 из $C(X)$, что

$$g_0 = -\frac{C}{3} \text{ на } F_-, \quad g_0 = \frac{C}{3} \text{ на } F_+, \quad |g_0| \leqslant \frac{C}{3} \text{ на } X.$$

Если же, например, F_- пусто, то мы полагаем $g_0 \equiv \frac{C}{3}$.

Для $x \in F \setminus (F_- \cup F_+)$ справедливо неравенство

$$|f_0(x) - g_0(x)| \leqslant |f_0(x)| + |g_0(x)| \leqslant \frac{C}{3} + \frac{C}{3} = \frac{2}{3}C.$$

Оно сохраняется и на объединении $F_- \cup F_+$: так как на нём $|g_0| \leqslant |f_0|$ и значения функции g_0 совпадают по знаку со значениями f_0, то $|f_0 - g_0| = |f_0| - |g_0| \leqslant C - \frac{C}{3} = \frac{2}{3}C$. Таким образом,

$$|g_0| \leqslant \frac{1}{3}C \text{ на } X \quad \text{и} \quad |f_0(x) - g_0(x)| \leqslant \frac{2}{3}C \text{ при всех } x \in F. \tag{1}$$

Функция g_0, непрерывная на всём X, и есть искомая аппроксимация для f_0. Теперь, принимая g_0 за начальное приближение и итерируя оценки (1), мы будем последовательно строить все более точные аппроксимации f_0 с помощью функций, непрерывных на X. Заменив f_0 на $f_1 = f_0 - g_0$ и C на $\frac{2}{3}C$, мы, согласно (1), можем найти такую непрерывную на X функцию g_1, что

$$|g_1| \leqslant \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}C \text{ на } X, \qquad |f_1(x) - g_1(x)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^2 C \text{ при } x \in F.$$

Продолжая рассуждение по индукции, построим шаг за шагом такие непрерывные на X функции g_n и такие непрерывные на F функции $f_n = f_{n-1} - g_{n-1}$, что при всех $n \in \mathbb{N}$

$$|g_n| \leqslant \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n C \text{ на } X, \qquad |f_n(x)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n C \text{ при } x \in F. \tag{2}$$

---

*) Генрих Франц Фридрих **Титце** (Titze), 1880–1964, — немецкий математик.

) Павел Самуилович **Урысон, 1898–1924, — российский математик.

Сложив равенства

$$\begin{aligned} f_1 &= f_0 - g_0, \\ f_2 &= f_1 - g_1, \\ &\dots\dots \\ f_{n+1} &= f_n - g_n, \end{aligned}$$

мы получаем, что

$$f_{n+1}(x) = f_0(x) - S_n(x) \quad \text{при} \ \ x \in F, \tag{3}$$

где S_n — n-я частичная сумма ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} g_k$. В силу первого из неравенств (2) этот ряд равномерно сходится на X, и, следовательно, его сумма S непрерывна на X. Кроме того, при всех $x \in X$

$$|S(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |g_k(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n C = C.$$

Вместе с тем, снова по неравенству (2), $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ при $x \in F$. Поэтому, переходя к пределу в равенстве (3), мы получаем, что $f_0(x) = S(x)$ при всех $x \in F$. Таким образом, S есть искомое продолжение.

II. Пусть теперь функция f_0 по-прежнему вещественна, но, вообще говоря, неограничена. Определим вспомогательную функцию h_0 равенством

$$h_0(x) = \frac{f_0(x)}{1 + |f_0(x)|} \qquad (x \in F).$$

Ясно, что функция h_0 непрерывна и $|h_0| < 1$ на F. Как легко проверить, $f_0(x) = \frac{h_0(x)}{1-|h_0(x)|}$. Мы сначала продолжим функцию h_0, а затем, руководствуясь последним равенством, построим и продолжение f_0.

Пусть h — такое непрерывное продолжение h_0 на X, что $|h| \leqslant 1$. К сожалению, мы не можем сразу построить продолжение f_0 на X по формуле $f = \frac{h}{1-|h|}$, так как в отличие от $|h_0|$ функция $|h|$ может принимать значение 1. Поэтому нам необходимо ещё немного "подправить" h. Положим $F_0 = \{x \in X \mid |h(x)| = 1\}$. Ясно, что множество F_0 замкнуто и $F_0 \cap F = \varnothing$ (поскольку $|h(x)| = |h_0(x)| < 1$ при $x \in F$). Пусть φ — функция, разделяющая F и F_0 и равная нулю на F_0. Положим $H = h\,\varphi$. Так как $|H(x)| < 1$ всюду на X и H совпадает с h_0 на F, то непрерывная на X функция $\frac{H}{1-|H|}$ будет, очевидно, продолжением f_0.

III. Если функция f_0 принимает комплексные значения, то её продолжение мы можем получить, продолжив порознь её вещественную и мнимую части (с сохранением ограниченности, если f_0 ограничена). К сожалению, при таком продолжении максимум модуля функции (если она ограничена) может возрасти. Поэтому в этом случае продолженную функцию f следует "исправить". Для этого определим на комплексной плоскости вспомогательную функцию ψ следующим образом:

$$\psi(w) = \begin{cases} w & \text{при} \ \ |w| \leqslant 1, \\ \frac{w}{|w|} & \text{при} \ \ |w| \geqslant 1. \end{cases}$$

Очевидно, что функция ψ непрерывна и $|\psi| \leqslant 1$. Искомое продолжение мы получим, полагая

$$\widetilde{f}(x) = C\,\psi\left(\frac{f(x)}{C}\right) \quad \text{для} \quad x \in X. \quad \blacktriangleright$$

Замечание. При доказательстве мы не использовали метризуемость пространства в полном объёме, а опирались лишь на лемму 2. Поэтому теорема Титце–Урысона справедлива во всех пространствах, где замкнутые непересекающиеся множества функционально отделимы. В частности, так будет во всех компактных пространствах (см. [Б-Ф], гл. 2, § 13, теорема 3).

II.3. Естественно задать вопрос, можно ли продолжить непрерывную функцию с сохранением не только непрерывности, но также и тех или иных дополнительных свойств. Ответ положителен, если рассматривать функции, удовлетворяющие условию Липшица. Точнее, справедлива следующая

Теорема. *Пусть E произвольное подмножество метрического пространства (X, ρ). Если определённая на E функция f удовлетворяет условию Липшица:*

$$|f(x) - f(y)| \leqslant L\rho(x, y) \quad \text{при} \quad x,\, y \in E,$$

то существует функция g, продолжающая f на X и удовлетворяющая условию Липшица с той же константой:

$$|g(x) - g(y)| \leqslant L\rho(x, y) \quad \text{при} \quad x,\, y \in X.$$

Доказательство. Для любого x из X положим

$$g(x) = \inf\{f(y) + L\rho(x, y) \mid y \in E\}$$

и убедимся, что g — искомая функция.

Прежде всего установим, что g — продолжение f. Действительно, если $x,\, y \in E$, то $f(x) - f(y) \leqslant L\rho(x, y)$, и поэтому $f(x) \leqslant g(x)$. Обратное неравенство очевидно.

Проверим теперь, что всюду $g(x) > -\infty$. В самом деле, зафиксируем произвольно точку $y_0 \in E$. Тогда при любом $y \in E$ справедливо неравенство $|f(y_0) - f(y)| \leqslant$ $\leqslant L\rho(y, y_0)$. Поэтому при $x \in X$

$$f(y_0) \leqslant f(y) + L\rho(y, y_0) \leqslant f(y) + L\rho(y, x) + L\rho(x, y_0),$$

т. е. $f(y_0) - L\rho(x, y_0) \leqslant f(y) + L\rho(x, y)$, откуда следует, что $g(x) \geqslant f(y_0) - L\rho(x, y_0)$.

Докажем, наконец, что g удовлетворяет условию Липшица. Пусть $x,\, x' \in X$. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$ и выберем $y \in E$ таким образом, что $g(x) >$ $> f(y) + L\rho(x, y) - \varepsilon$. Так как

$$g(x') \leqslant f(y) + L\rho(x', y) \leqslant f(y) + L\rho(x', x) + L\rho(x, y),$$

то вычитая из этого неравенства предыдущее, мы получаем, что

$$g(x') - g(x) \leqslant L\rho(x', x) + \varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε и равноправия точек x, x', это даёт требуемый результат. $\blacktriangleright$

Замечание. Из доказанной теоремы вытекает, что отображение $f\colon E \to \mathbb{R}^n$, удовлетворяющее условию Липшица, можно продолжить до отображения, определённого на X, также удовлетворяющего условию Липшица, но с большей константой. Однако если $X = \mathbb{R}^m$, то существует и продолжение, для которого постоянная Липшица будет той же самой, что и для f.

УПРАЖНЕНИЯ

1) Докажите, что функцию, равномерно непрерывную на подмножестве A некоторого метрического пространства, можно продолжить на замыкание $\overline{A}$ с сохранением равномерной непрерывности.

2) Пусть F — замкнутое подмножество метризуемого пространства X, $T_0 : F \to \mathbb{R}^m$ — непрерывное отображение, значения которого принадлежат выпуклому телу $A \subset \mathbb{R}^m$. Докажите, что существует непрерывное продолжение T_0 на X, все значения которого также принадлежат A. Указание. Воспользуйтесь гомеоморфностью A и куба $[-1,1]^m$.

3) Пусть $\Delta \subset \mathbb{R}$ — произвольный промежуток, F — замкнутое подмножество метризуемого пространства X. Докажите, что у всякой непрерывной функции, действующей из F в Δ, есть такое непрерывное продолжение, все значения которого в точках из $X \setminus F$ принадлежат внутренности Δ.

III. Регулярные меры

III.1. Среди мер, заданных на σ-алгебре подмножеств топологического пространства, естественно выделить те, свойства которых тем или иным образом связаны с топологией. С примерами такого согласования мы сталкивались, изучая меру Лебега (возможность аппроксимации измеримых функций непрерывными и др.).

Первый шаг в этом направлении — предположение, что рассматриваемая мера определена на всех открытых множествах, но он недостаточен. Наиболее естественная форма согласования свойств меры и топологии в общей ситуации — это регулярность меры. Определение регулярности копирует свойство меры Лебега, доказанное в следствии 2 п. II.2.2.

Мы установим такую согласованность для конечных борелевских мер в метризуемых пространствах. Заметим, что в случаях, когда приходится рассматривать не σ-конечные меры, возможны и другие толкования согласованности меры и топологии (см., например, определение меры Радона в п. XII.2.2).

Напомним, что борелевскими называются множества, входящие в σ-алгебру, порождённую открытыми множествами, а мера, определённая на этой σ-алгебре, называется борелевской мерой.

Определение. Пусть X — топологическое пространство. Мера μ, определённая на σ-алгебре его подмножеств, содержащей все открытые множества, называется *регулярной*, если для любого измеримого множества E справедливы равенства

а) $\mu(E) = \inf\{\, \mu(G) \,|\, G \supset E,\ G$ — открытое множество$\}$,

б) $\mu(E) = \sup\{\, \mu(F) \,|\, F \subset E,\ F$ — замкнутое множество$\}$.

Свойства а) и б) называются соответственно свойствами внешней и внутренней регулярности. Читатель без труда проверит, что в случае конечной меры они эквивалентны. Мы установим сейчас, что в широком классе случаев внешняя регулярность влечёт внутреннюю.

Предложение. *Пусть $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра подмножеств топологического пространства X, содержащая все открытые множества. Если мера μ, определённая на $\mathfrak{A}$, σ-конечна и внешне регулярна, то она регулярна.*

Доказательство основано на "соображениях двойственности". В рассматриваемой ситуации под этим понимается возможность перейти от множества к его дополнению, используя то обстоятельство, что при таком переходе замкнутые множества заменяются открытыми, а открытые — замкнутыми. Точнее говоря, чтобы аппроксимировать данное множество замкнутым, мы аппроксимируем его дополнение открытым, а потом перейдём к дополнениям.

Пусть $E \in \mathfrak{A}$, $E' = X \setminus E$. Ввиду σ-конечности меры, множество E' представимо в виде $E' = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$, где $\mu(E_n) < +\infty$ при всех n. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$ и пользуясь внешней регулярностью найдём такие открытые множества G_n, что

$$G_n \supset E_n, \quad \mu(G_n) < \mu(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Положим теперь $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, $F = X \setminus G$, и убедимся, что $\mu(E \setminus F) < \varepsilon$. В самом деле, так как $E \setminus F = G \setminus E'$, то

$$\mu(E \setminus F) = \mu(G \setminus E') = \mu\Bigl(\bigcup_{n=1}^{\infty}(G_n \setminus E')\Bigr) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \mu(G_n \setminus E_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

Следовательно, $\mu(E) = \mu(F) + \mu(E \setminus F) \leqslant \mu(F) + \varepsilon$. Ввиду произвольности ε последнее неравенство доказывает внутреннюю регулярность μ. ►

III.2. Перейдём к главному результату этого добавления.

Теорема. *Пусть X — метризуемое топологическое пространство, μ — борелевская мера в X. Если μ удовлетворяет условию: существует такая последовательность открытых множеств U_n, что*

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \quad \text{и} \quad \mu(U_n) < +\infty \ \text{ при всех } \ n, \tag{1}$$

то она регулярна.

Условие (1) есть усиление условия σ-конечности меры. Как легко убедиться, оно необходимо для регулярности σ-конечной меры. К этому условию приходится прибегать, поскольку, как можно показать на примерах, σ-конечности меры самой по себе недостаточно для справедливости теоремы (см. упр. 1).

Доказательство. Будем говорить, что произвольное множество $E \subset X$ регулярно (относительно меры μ), если

$$\inf\{\, \mu(G) \,|\, G \supset E,\ G \text{ — открытое множество} \,\} = \\ = \sup\{\, \mu(F) \,|\, F \subset E,\ F \text{ — замкнутое множество} \,\}.$$

Наша цель — доказать, что все борелевские множества регулярны. Доказательство этого мы разобьём на два этапа.

I. Предположим сначала, что мера μ конечна. Нам будет удобно пользоваться следующей переформулировкой определения регулярного множества.

Множество E регулярно, если для каждого положительного числа ε найдутся такие открытое множество G и замкнутое множество F, что

$$F \subset E \subset G \quad \text{и} \quad \mu(G) - \mu(F) < \varepsilon.$$

Про такие множества F, G будем говорить, что они ε-аппроксимируют множество E.

В метризуемом пространстве каждое замкнутое множество есть пересечение последовательности открытых, а каждое открытое есть объединение последовательности замкнутых множеств. Учитывая непрерывность меры сверху и снизу, мы получаем отсюда, что открытые и замкнутые подмножества метризуемого пространства регулярны.

Убедимся, что система всевозможных регулярных множеств является σ-алгеброй. Отсюда будет следовать, что вместе с открытыми множествами она содержит и все борелевские множества, а это и означает регулярность меры μ.

Для доказательства того, что система регулярных множеств является σ-алгеброй, достаточно, как известно, убедиться, что она обладает следующими двумя свойствами (см. предложение I.1.1 и определение I.1.2):

1) дополнение каждого регулярного множества регулярно;

2) объединение последовательности регулярных множеств есть регулярное множество.

Чтобы установить свойство 1), воспользуемся, как и при доказательстве предложения Д.III.1, “соображениями двойственности”. Пусть E — регулярное множество, $E' = X \setminus E$. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$ и найдём множества F, G, ε-аппроксимирующие E. Положим $\widetilde{G} = X \setminus F$, $\widetilde{F} = X \setminus G$. Ясно, что множество $\widetilde{G}$ открыто, множество $\widetilde{F}$ замкнуто и $\widetilde{G} \setminus \widetilde{F} = G \setminus F$. Кроме того,

$$\widetilde{F} \subset E' \subset \widetilde{G}, \qquad \mu(\widetilde{G}) - \mu(\widetilde{F}) = \mu(G) - \mu(F) < \varepsilon.$$

Таким образом, множества $\widetilde{F}$, $\widetilde{G}$ ε-аппроксимируют E', что и доказывает регулярность множества E'.

Переходя к проверке справедливости свойства 2), рассмотрим последовательность регулярных множеств E_n и положим $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Построим множества F, G, ε-аппроксимирующие E.

Пусть множества F_n, G_n $\frac{\varepsilon}{2^n}$-аппроксимируют множества E_n $\quad (n = 1, 2, \dots)$. Положим $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Очевидно, множество G открыто, множество A борелевское, $A \subset E \subset G$ и, кроме того,

$$\mu(G \setminus A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n \setminus A)\right) \leqslant \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (G_n \setminus F_n)\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} (\mu(G_n) - \mu(F_n)) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon. \quad (2)$$

Мы построили два множества, аппроксимирующие E изнутри и снаружи. Множество G открыто, но множество A может не быть замкнутым. Поэтому мы аппроксимируем

его изнутри объединением достаточно большого (но конечного!) числа множеств F_n. Рассмотрим замкнутые множества $H_n = F_1 \cup \ldots \cup F_n$. Так как $\mu(H_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu(A)$ в силу непрерывности меры снизу, то $\mu(A) - \mu(H_n) < \varepsilon$ при достаточно большом n. Поэтому, учитывая (2), мы получаем неравенство

$$\mu(G) - \mu(H_n) = \mu(G) - \mu(A) + \mu(A) - \mu(H_n) = \mu(G \setminus A) + \mu(A) - \mu(H_n) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \quad (3)$$

Таким образом, множества H_n и G 2ε-аппроксимируют множество E, что ввиду произвольности ε означает его регулярность.

II. Рассмотрим теперь случай, когда мера бесконечна. Докажем, что всякое борелевское множество регулярно (это и означает регулярность меры μ). Определим конечные меры μ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ равенствами

$$\mu_n(B) = \mu(B \cap U_n) \quad (B \text{ — борелевское множество}).$$

Заметим, что на борелевских подмножествах множества U_n меры μ и μ_n совпадают.

Представим произвольное борелевское множество E в виде

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \quad \text{где} \quad E_n = E \cap U_n \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Так как меры μ_n конечны, то, по доказанному выше, для каждого множества E_n и произвольного числа $\varepsilon > 0$ можно так подобрать открытые множества G_n и замкнутые множества F_n, что

$$F_n \subset E_n \subset G_n, \quad \mu_n(G_n) - \mu_n(F_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}. \quad (4)$$

Будем считать, что $G_n \subset U_n$ (иначе открытое множество G_n следует заменить его пересечением с U_n, которое также открыто; только в этом месте и используется, что множества U_n открыты). Поэтому, заменив μ_n на μ, неравенство (4) можно переписать так: $\mu(G_n) - \mu(F_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Теперь доказательство завершается почти дословно так же, как на предыдущем шаге. Положим $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Очевидно, множество G открыто. Повторяя выкладку (2), мы видим, что $\mu(G \setminus A) < \varepsilon$. Как и на первом этапе доказательства, рассмотрим замкнутые множества $H_n = F_1 \cup \ldots \cup F_n$. По непрерывности меры снизу $\mu(H_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu(A)$. Далее возможны два случая. Если $\mu(A) < +\infty$, то $\mu(A) - \mu(H_n) < \varepsilon$ при достаточно большом n и тогда справедливо неравенство (3). Таким образом, как и в первом случае, множества H_n и G 2ε-аппроксимируют E, что ввиду произвольности ε влечёт регулярность E.

Если же $\mu(A) = +\infty$, то регулярность множества E очевидна, так как

$$+\infty = \mu(A) = \sup_n \mu(H_n) \leqslant \mu(E) \leqslant \mu(G) \leqslant +\infty. \quad \blacktriangleright$$

Следствие 1. *Конечная борелевская мера в метризуемом пространстве регулярна.*

Следствие 2. *Если борелевская мера в евклидовом пространстве конечна на компактных подмножествах, то она регулярна. Кроме того, условие* 2) *определения регулярности выполняется в этом случае в усиленной форме:*

$$2')\ \mu(E) = \sup\{\ \mu(K) \,|\, K \subset E,\ K \text{ — компактное множество}\}.$$

Равенство 2′) немедленно вытекает из 2), поскольку каждое замкнутое подмножество евклидова пространства есть объединение последовательности компактных множеств.

Как легко убедиться, регулярность меры сохраняется при стандартном продолжении. Благодаря этому из доказанной теоремы вытекает, в частности, регулярность меры Лебега и вообще регулярность любой меры, полученной стандартным продолжением с полукольца ячеек и конечной на компактных подмножествах пространства $\mathbb{R}^m$.

III.3. Регулярность меры позволяет аппроксимировать измеримые функции непрерывными по $\mathscr{L}^p$-норме.

Теорема. *Пусть X метризуемое или локально компактное пространство, μ — регулярная мера в X. Тогда при $1 \leqslant p < +\infty$ множество непрерывных функций всюду плотно в пространстве $\mathscr{L}^p(X, \mu)$.*

Доказательство. Так как простые функции плотны в $\mathscr{L}^p(X, \mu)$ (см. теорему IX.2.1), то нам достаточно доказать, что непрерывными функциями можно аппроксимировать любую характеристическую функцию, входящую в $\mathscr{L}^p(X, \mu)$, т. е. характеристическую функцию произвольного множества конечной меры. Пусть E — такое множество. Зафиксируем произвольно число $\varepsilon > 0$ и пользуясь регулярностью меры μ найдём такие открытое множество G и замкнутое множество F, что

$$F \subset E \subset G, \qquad \mu(G \setminus F) < \varepsilon.$$

По лемме 2 п. Д.II.1 в случае, если X метризуемо, и по теореме XII.2.1 в случае, если X локально компактно, найдётся непрерывная функция φ, удовлетворяющая условиям

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 1, \quad \varphi(x) = 1 \ \text{ при } \ x \in F, \quad \varphi(x) = 0 \ \text{ при } \ x \notin G.$$

Поэтому

$$\|\chi_E - \varphi\|_p^p = \int_G |\chi_E - \varphi|^p \, d\mu \leqslant \int_{G \setminus F} 1 \, d\mu = \mu(G \setminus F) < \varepsilon.$$

Таким образом, функция χ_E может быть с произвольной степенью точности аппроксимирована непрерывной функцией. ►

УПРАЖНЕНИЯ

1) Докажите, что борелевская мера на отрезке $[0, 1]$, порождённая единичными нагрузками в точках $\frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$), внутренне регулярна, но не регулярна.

IV. Выпуклость

IV.1. *Выпуклые множества.* Подмножество пространства $\mathbb{R}^m$ называется *выпуклым,* если вместе с любыми двумя своими точками p и q оно содержит и соединяющий их отрезок $[p, q] = \{(1-t)p + tq \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}$. С помощью индукции легко проверить, что выпуклое множество вместе с любыми своими точками $x_1, \ldots, x_n$ содержит и их выпуклую комбинацию, т. е. точку $c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$, где $c_1, \ldots, c_n$ — такие неотрицательные числа, что $c_1 + \ldots + c_n = 1$. Отметим ещё, что при аффинном отображении выпуклое множество переходит в выпуклое.

Очевидно, пересечение любой совокупности выпуклых множеств выпукло. В частности, для любого множества A, $A \subset \mathbb{R}^m$, выпукло пересечение всех выпуклых множеств, содержащих A. Это наименьшее выпуклое множество, содержащее A. Оно называется *выпуклой оболочкой* A и обозначается $\operatorname{conv}(A)$. Читатель легко проверит, что это множество образовано всевозможными выпуклыми комбинациями точек из A. Выпуклая оболочка конечного множества называется *выпуклым многогранником.* Компактное выпуклое множество, имеющее внутренние точки, будем называть *выпуклым телом.*

Лучом с началом в точке p и направляющим вектором ν, $\nu \neq 0$, называется множество $\ell_p(\nu) = \{p + t\nu \mid t \geqslant 0\}$. Объединение K произвольной совокупности лучей с общим началом p называется *конусом* с вершиной в точке p. Множество $K \setminus \{p\}$ также будем называть конусом.

Отметим некоторые наглядные свойства выпуклых множеств.

1) *Отрезок, соединяющий внутреннюю точку выпуклого множества A с точкой x_0 его замыкания, состоит (кроме x_0) из внутренних точек.*

Действительно, пусть x_1 — внутренняя точка и $B(x_1, r) \subset \operatorname{Int}(A)$. Если $x_0 \in A$, то легко проверить, что каждая точка $x_t = (1-t)x_0 + tx_1$, $0 < t < 1$, промежутка $[x_0, x_1]$ содержится в A вместе с шаром $B(x_t, tr)$. Если же x_0 — граничная точка, то заменив её достаточно близкой точкой множества A, получим, что оно содержит шар $B(x_t, \rho)$ при $\rho < tr$.

2) *Всякий луч, начинающийся во внутренней точке выпуклого множества, пересекает его границу в единственной точке.*

В самом деле, если на таком луче лежат две граничные точки, то та из них, которая ближе к начальной — внутренняя, что невозможно.

3) *Внутренность выпуклого множества A выпукла. Если $\operatorname{Int}(A) \neq \varnothing$, то $\overline{A} = \overline{\operatorname{Int}(A)}$.*

Напомним, что *аффинным подпространством* пространства $\mathbb{R}^m$ называется его подмножество, которое может быть получено сдвигом линейного подпространства. Мы не исключаем при этом случай, когда аффинное подпространство состоит из единственной точки. Другой крайний случай — аффинное (собственное) подпространство максимальной размерности. Его, т. е. сдвиг линейного подпространства коразмерности 1, мы будем ради краткости называть *плоскостью.* Иными словами, плоскость — это множество вида $H = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \langle x, \nu \rangle = C\}$, где C — фиксированное число, а $\nu \neq 0$ — некоторый вектор (нормаль к плоскости). Каждая такая плоскость порождает два открытых полупространства H_- и H_+, точки x которых удовлетворяют неравенствам $\langle x, \nu \rangle < C$ и $\langle x, \nu \rangle > C$ соответственно. Заменив эти неравенства нестрогими, получим замкнутые полупространства $\overline{H}_-$ и $\overline{H}_+$. Полупространства (открытые или замкнутые) — простейшие примеры выпуклых множеств.

Будем говорить, что множество лежит по одну сторону от плоскости H, если оно содержится в одном из полупространств $\overline{H}_\pm$. Плоскость H разделяет два множества, если они лежат по разные стороны от неё, т. е. в разных (замкнутых) полупространствах.

Шар не может лежать по одну сторону от плоскости, проходящей через его центр. Поэтому открытое множество, лежащее по одну сторону от плоскости, не имеет с ней общих точек. Если открытое множество выпукло, то отсутствия общих точек и достаточно для того, чтобы оно лежало по одну сторону от плоскости.

В завершение нашего краткого обзора отметим некоторые геометрически совершенно наглядные (но иногда требующие нетривиальных доказательств) свойства выпуклых множеств. Мы получим их в виде следствий из теоремы Хана–Банаха, которая будет в дальнейшем использована также при исследовании дифференцируемости выпуклых функций. Приводимая нами теорема — весьма частный случай классического результата, играющего фундаментальную роль в функциональном анализе.

Теорема (Хан, Банах). *Пусть $\mathcal{O} \neq \varnothing$ — выпуклое открытое в $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 2$, множество, L — аффинное подпространство в $\mathbb{R}^m$. Если $\mathcal{O} \cap L = \varnothing$, то существует такая плоскость H, что*

$$H \cap \mathcal{O} = \varnothing, \quad H \supset L.$$

Доказательство. Используя в случае необходимости сдвиг, мы можем не умаляя общности предполагать, что L — линейное подпространство, т. е. $0 \in L$.

Рассмотрим сначала нульмерный случай и докажем более слабое утверждение:

если $0 \notin \mathcal{O}$, то существует проходящая через 0 прямая, не пересекающая $\mathcal{O}$.

Для доказательства рассмотрим множество $K = \bigcup\limits_{t>0} t\mathcal{O}$. Ясно, что K — выпуклый открытый конус с вершиной в нуле. Так как $0 \notin K$, то K содержится в проколотом пространстве $R = \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, но не совпадает с ним (в силу выпуклости K). Множество R связно (поскольку $m \geqslant 2$), и поэтому конус K не замкнут в R. Следовательно, существует такая точка $x \in R$, что $x \in \partial K$. При этом $x \notin K$, поскольку конус K открыт. Проверим, что $tx \notin K$ при $t \in \mathbb{R}$. Это очевидно при $t > 0$, так как K — конус. Если же $tx \in K$ при некотором $t \leqslant 0$, то по свойству 1) точки отрезка $[tx, x]$ (кроме x) принадлежат K. В частности, $0 \in K$, а это неверно. Таким образом, вся прямая $\{tx \mid t \in \mathbb{R}\}$ не имеет с K, а подавно и с $\mathcal{O}$, общих точек, что и требовалось доказать.

Переходя к доказательству теоремы в полном объёме, рассмотрим всевозможные линейные подпространства, содержащие L и не пересекающие $\mathcal{O}$. Их размерности не превосходят $m-1$. Выберем среди них какое-то подпространство H максимальной размерности. Убедимся, что оно и есть искомая плоскость, т. е. $\dim H = m-1$. Допустим, что это не так, и пусть M — подпространство, дополнительное к H ($M \cap H = \{0\}$, $M + H = \mathbb{R}^m$). Тогда $\dim M \geqslant 2$. Спроектируем $\mathcal{O}$ в M вдоль H, и пусть G — его образ в M. Образ H в M, очевидно, совпадёт с нулём. Так как $H \cap \mathcal{O} = \varnothing$, то $0 \notin G$. Очевидно, множество G выпукло и открыто в M. Таким образом, G удовлетворяет условиям уже доказанного утверждения. Поэтому в M найдётся прямая, проходящая через нуль и не пересекающая G. Её прообраз H' относительно проектирования не имеет общих точек с $\mathcal{O}$ и содержит H, но не совпадает с ним. Поэтому $\dim H' > \dim H$, что противоречит выбору H. ►

Определение. Плоскость H называется *опорной* к множеству A в точке p, если $p \in A \cap H$ и A лежит по одну сторону от H.

Ясно, что опорная плоскость к множеству не пересекает его внутренность.

Следствие 1. *Через каждую граничную точку p выпуклого множества A проходит плоскость, опорная для $\overline{A}$.*

В самом деле, если A имеет внутренние точки, то для доказательства следует применить теорему Хана–Банаха к множеству $\mathcal{O} = \mathrm{Int}(A)$, считая, что $L = \{p\}$. Если же $\mathrm{Int}(A) = \varnothing$, то всё множество A содержится в некоторой плоскости, которая и будет опорной. ►

Следствие 2. *Если A — замкнутое выпуклое множество и $x_0 \notin A$, то x_0 можно строго отделить от A (существует такая плоскость H, что A и x_0 содержатся в разных открытых полупространствах $H_\pm$).*

Следствие 3. *Всякое выпуклое тело — пересечение замкнутых полупространств.*

Под *внешней нормалью* к выпуклому телу A в точке $p \in \partial A$ мы понимаем нормаль к опорной плоскости, направленную в полупространство, не содержащее A. Единственность опорной плоскости при этом не предполагается (ср. с определением внешней нормали в п. VIII. 6.2).

Замечание. Лучи, начинающиеся в различных точках x, y границы выпуклого тела и соответствующие внешним нормалям, не пересекаются. Действительно, такие лучи будучи перпендикулярными опорным плоскостям, не могут образовывать острые углы с отрезком $[x, y]$ (если ν — внешняя нормаль в точке x, то $\langle y - x, \nu\rangle \leqslant 0$, поскольку точки y и $x + \nu$ лежат по разные стороны от опорной плоскости). Если бы лучи имели общую точку z, то в треугольнике с вершинами x, y, z было бы два не острых угла, что невозможно.

В заключение этого пункта докажем, что любое выпуклое тело можно аппроксимировать многогранниками.

Предложение. *Пусть A и $\widetilde{A}$ — выпуклые тела, $A \subset \mathrm{Int}(\widetilde{A})$. Тогда существует такой многогранник C, что $A \subset C \subset \widetilde{A}$.*

В частности, если $0 \in \mathrm{Int}(A)$, то положив $\widetilde{A} = (1 + \varepsilon)A$, $(\varepsilon > 0)$, мы видим, что существует многогранник C, "сколь угодно близкий" к A: $A \subset C \subset (1 + \varepsilon)A$.

Доказательство. Пусть $\delta > 0$ такое число, что $\|x - y\| \geqslant \delta$ при $x \in A$ и $y \in \partial\widetilde{A}$. Покроем A конечным числом ячеек, диаметры которых не превосходят δ. Если такая ячейка имеет с A хотя бы одну общую точку, то она содержится в $\mathrm{Int}(\widetilde{A})$. Поэтому искомый многогранник мы получим, взяв выпуклую оболочку вершин всех ячеек, задевающих A. ►

IV.2. *Метрическая проекция.* Напомним, что расстоянием от точки x, $x \in \mathbb{R}^m$, до непустого подмножества A пространства $\mathbb{R}^m$ называется величина $\mathrm{dist}(x, A) = \inf\limits_{a \in A} \|x - a\|$. Если существует такая точка a_x, что

$$a_x \in A \quad \text{и} \quad \|x - a_x\| = \mathrm{dist}(x, A),$$

то она называется *наилучшим приближением* к x в A. Если множество A замкнуто, то, как следует из теоремы Вейерштрасса, любая точка имеет в нём наилучшее приближение.

Лемма 1. *Каждая точка x из $\mathbb{R}^m$ имеет единственное наилучшее приближение в замкнутом выпуклом множестве A.*

Доказательство. Существование наилучшего приближения мы уже отметили выше. Доказывая его единственность, будем считать, что $x \notin A$, т. е. $\mathrm{dist}(x, A) = r > 0$. Пусть a_x и $\widetilde{a}_x$ — наилучшие приближения к x в A: $\|x - a_x\| = \|x - \widetilde{a}_x\| = r$. Рассмотрим

точку $a = \frac{1}{2}(a_x + \widetilde{a}_x)$. Она принадлежит множеству A, поскольку оно выпукло и $a_x, \widetilde{a}_x \in A$. Поэтому $\|x - a\| \geqslant r$. С другой стороны, из неравенства треугольника следует, что

$$\|x - a\| = \left\| \frac{1}{2}(x - a_x) + \frac{1}{2}(x - \widetilde{a}_x) \right\| \leqslant \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r = r.$$

Таким образом, $\|x - a\| = r$, т. е. точки a_x, $\widetilde{a}_x$ и $a = \frac{1}{2}(a_x + \widetilde{a}_x)$ лежат на сфере $S(x, r)$, а это возможно лишь при $a_x = \widetilde{a}_x$. ►

Лемма 1 позволяет ввести важное отображение.

Определение. Пусть A — замкнутое выпуклое множество в $\mathbb{R}^m$. Определим в $\mathbb{R}^m$ отображение Φ_A, сопоставляя каждой точке из $\mathbb{R}^m$ (единственное!) наилучшее приближение к ней в A. Это отображение будем называть *метрической проекцией* на A.

Очевидно, $\Phi_A(x) = x$, если $x \in A$, и, следовательно, $\Phi_A(\Phi_A(x)) = \Phi_A(x)$ для любого x. Таким образом, для Φ_A, как и для обычной проекции, справедливо равенство $\Phi_A^2 = \Phi_A$. Кроме того, если $x \notin A$, то $\Phi_A(x) \in \partial A$.

Метрическая проекция непрерывна и даже удовлетворяет условию Липшица. Точнее, справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть $A \subset \mathbb{R}^m$ — замкнутое выпуклое множество. Тогда*

$$\|\Phi_A(v) - \Phi_A(u)\| \leqslant \|v - u\| \quad \text{при любых } v, u \text{ из } \mathbb{R}^m.$$

Доказательство. Не умаляя общности можно считать, что отрезок Δ, соединяющий точки $\Phi_A(u)$ и $\Phi_A(v)$, лежит на первой координатной оси. Пусть $\Phi_A(u) = (s, 0, \ldots, 0)$, $\Phi_A(v) = (t, 0, \ldots, 0)$, $s \leqslant t$. Первая координата u_1 вектора u не больше s, так как в противном случае точка $(s, 0, \ldots, 0)$ не была бы наилучшим приближением к u в Δ, и подавно в A. По тем же причинам первая координата v_1 вектора v не меньше t. Поэтому $\|v - u\| \geqslant v_1 - u_1 \geqslant t - s = \|\Phi_A(v) - \Phi_A(u)\|$. ►

Лемма 3. *Для того чтобы орт ν был внешней нормалью к выпуклому телу A в точке $p \in \partial A$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $\Phi_A(x) = p$ для всех точек x луча $\ell_p(\nu)$ (или для какой-то его точки $x \neq p$).*

Доказательство. Пусть ν — внешняя нормаль к A в точке p и $x = p + r\nu$, $(r > 0)$, — произвольная точка луча $\ell_p(\nu)$. Тогда замкнутый шар $\overline{B}(x, r)$ содержит точку p и не содержит других точек A, так как эти множества лежат по разные стороны от опорной плоскости. Поэтому p — наилучшее приближение к x в A.

Допустим теперь, что $p = \Phi_A(x)$ для некоторой точки $x \neq p$ луча $\ell_p(\nu)$. Проведём через p плоскость H, ортогональную вектору ν. Если она не опорная к A, то в открытом полупространстве, содержащем x, найдётся точка y, принадлежащая A. Ясно, что угол между векторами $y - p$ и $x - p$ острый. Поэтому на отрезке $[p, y] \subset A$ найдутся точки, расположенные к x ближе, чем p, что ведёт к противоречию. Детали рассуждения мы предоставляем провести читателю, рекомендуя рассмотреть плоское сечение, содержащее векторы $x - p$ и $y - p$. ►

Непосредственно из леммы вытекает

Следствие. *Если в точке p опорная к A плоскость единственна, то $\Phi_A(x) = p$ тогда и только тогда, когда x принадлежит лучу $\ell_p(\nu)$, где ν — внешняя нормаль в точке p.*

IV.3. *Выпуклые функции.* Здесь мы коротко обсудим основные свойства выпуклых функций нескольких переменных. В большинстве своём это естественные обобщения результатов классического одномерного анализа, имеющие наглядное геометрическое истолкование.

Определение. Пусть $\mathcal{O}$ — выпуклое подмножество пространства $\mathbb{R}^m$. Функция $f\colon \mathcal{O} \mapsto \mathbb{R}$ называется *выпуклой,* если

$$f\big((1-t)x_0 + tx_1\big) \leqslant (1-t)f(x_0) + tf(x_1) \quad \text{для любых точек} \quad x_0, x_1 \in \mathcal{O} \quad \text{и} \quad t \in [0,1].$$

Это неравенство обращается в равенство при $x_0 = x_1$, а также при $t = 0$ или $t = 1$. Если во всех остальных случаях оно строгое, то говорят, что функция f строго выпуклая. Функция f называется *вогнутой*, если $(-f)$ — выпуклая функция.

Отметим, что множество задания выпуклой функции мы всегда предполагаем выпуклым. Поскольку нас интересуют дифференциальные свойства выпуклых функций, в большинстве случаев мы будем предполагать, что оно открыто.

Из определения сразу следует, что выпуклость функции f равносильна выпуклости её *надграфика* $\Gamma_f^+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{m+1} \,|\, x \in \mathcal{O},\, y \geqslant f(x)\}$. При этом график $\Gamma_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{m+1} \,|\, x \in \mathcal{O},\, y = f(x)\}$ содержится в его границе, а внутренность надграфика не пуста, если $\operatorname{Int}(\mathcal{O}) \neq \varnothing$. По следствию 1 из теоремы Хана–Банаха через каждую точку $(x_0, f(x_0))$ графика проходит плоскость, опорная к надграфику. Если $x_0 \in \operatorname{Int}(\mathcal{O})$, то эта плоскость “не вертикальная”. Иными словами, её точки (x,y) удовлетворяют уравнению $y = f(x_0) + \langle \nu, x - x_0 \rangle$, где ν — некоторый вектор из $\mathbb{R}^m$, зависящий от x_0 (как следует из теоремы Д.IV.4, если функция f дифференцируема, то $\nu = \operatorname{grad} f(x_0)$). Надграфик расположен над этой плоскостью, так как он образован вертикальными лучами $\ell_p(e_{m+1})$, $p \in \Gamma_f$. В частности, над ней лежит и весь график Γ_f, т. е.

$$f(x_0) + \langle \nu, x - x_0 \rangle \leqslant f(x) \quad \text{для любой точки} \quad x \in \mathcal{O}. \tag{1}$$

Если множество $\mathcal{O}$ открыто, то выпуклая комбинация $x_0 = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$ его точек — внутренняя точка и для неё справедливо неравенство (1). В частности, $f(x_0) + \langle \nu, x_j - x_0 \rangle \leqslant f(x_j)$ при $j = 1, \ldots, n$. Умножив это неравенство на c_j и затем сложив все получившиеся неравенства, получим *неравенство Иенсена**)

$$f(c_1x_1 + \ldots + c_nx_n) \leqslant c_1f(x_1) + \ldots + c_nf(x_n).$$

Как нетрудно убедиться, оно справедливо и без предположения, что множество $\mathcal{O}$ открыто. Заметим, что неравенство Иенсена можно доказать и с помощью индукции, не используя опорную плоскость.

В основе многих дифференциальных свойств выпуклых функций лежит простой геометрический факт, описывающий характер изменения углового коэффициента хорды, соединяющей две точки графика.

---

*) Иоганн Людвиг **Иенсен** (Jensen), 1859–1925, — датский математик.

Лемма (о трёх хордах). *Пусть функция φ определена на промежутке $I \subset \mathbb{R}$. Если она выпукла, то для любых точек $x_0 < x < x_1$ из I справедливо неравенство*

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0} \leqslant \frac{\varphi(x_1)-\varphi(x_0)}{x_1-x_0} \leqslant \frac{\varphi(x_1)-\varphi(x)}{x_1-x}.$$

Для доказательства достаточно представить точку x в виде $x = (1-t)x_0 + tx_1$, $0 < t < 1$, и воспользоваться определением выпуклой функции. ►

Из этой леммы следует, что при любом $x \in I$ разностное отношение $\frac{\varphi(x)-\varphi(u)}{x-u}$ возрастает вместе с $u \in I$ $(u \neq x)$, и поэтому выпуклая на интервале функция φ имеет конечные односторонние производные $\varphi'_-(x), \varphi'_+(x)$, которые возрастают и удовлетворяют неравенству $\varphi'_-(x) \leqslant \varphi'_+(x) \leqslant \varphi'_-(\widetilde{x})$ при $x < \widetilde{x}$. Ясно, что $\varphi'_+(x) = \varphi'_-(x)$, если обе производные $\varphi'_\pm$ непрерывны в точке x. Поэтому

выпуклая функция φ дифференцируема везде, за исключением не более чем счётного множества точек x, в которых $\varphi'_-(x) < \varphi'_+(x)$.

Так как функция $u \mapsto \frac{\varphi(x)-\varphi(u)}{x-u}$ возрастает на $I \setminus \{x\}$ и её правосторонний и левосторонний пределы в точке x равны $\varphi'_+(x)$ и $\varphi'_-(x)$ соответственно, то

$$\varphi(x) + (u-x)\varphi'_+(x) \leqslant \varphi(u) \quad \text{при } u \geqslant x \quad \text{и} \quad \varphi(x) + (u-x)\varphi'_-(x) \leqslant \varphi(u) \quad \text{при } u \leqslant x.$$

Поэтому проведённые через точку $p_x = (x, \varphi(x))$ прямые с угловыми коэффициентами $\varphi'_\pm(x)$ — опорные к графику. Более того, из этих неравенств следует, что опорной будет любая проходящая через p_x прямая, если её угловой коэффициент лежит между $\varphi'_-(x)$ и $\varphi'_+(x)$. Других опорных к графику прямых, проходящих через p_x, нет: если $\varphi(x) + \theta \cdot (u-x) \leqslant \varphi(u)$ для всех u из I, то $\theta \leqslant \frac{\varphi(u)-\varphi(x)}{u-x}$ при $u > x$, откуда следует, что $\theta \leqslant \varphi'_+(x)$. Неравенство $\theta \geqslant \varphi'_-(x)$ проверяется аналогично. Из полученного описания опорных прямых вытекает, что

единственность опорной прямой равносильна равенству $\varphi'_-(x) = \varphi'_+(x)$, т. е. дифференцируемости выпуклой функции.

Для доказательства основного результата этого пункта нам будет полезно неравенство, вытекающее из леммы о трёх хордах: если функция φ выпукла и удовлетворяет неравенству $|\varphi| \leqslant \Delta$ на промежутке $[-h, h]$, то

$$\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(\widetilde{x})}{x-\widetilde{x}}\right| \leqslant 4\,\frac{\Delta}{h} \quad \text{при} \quad |x|, |\widetilde{x}| \leqslant \frac{h}{2}. \tag{2}$$

В следующей теореме мы установим, что выпуклая функция локально удовлетворяет условию Липшица и почти всюду имеет частные производные по всем координатам. Последний результат вытекает из теоремы Радемахера XI.4.2, но для выпуклых функций он доказывается гораздо проще, чем в общем случае, и поэтому мы приведём его независимое доказательство.

Теорема. *Пусть f — выпуклая функция, определённая в открытом (выпуклом) множестве $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m$. Тогда*

1) локально f удовлетворяет условию Липшица;

2) почти везде f имеет конечные частные производные по каждой координате.

Из теоремы следует, что функция, выпуклая на произвольном (выпуклом) множестве, непрерывна во всех его внутренних точках. В граничных точках непрерывности может не быть.

Доказательство. Доказывая первое утверждение, достаточно рассмотреть случай, когда $0 \in \mathcal{O}$, и проверить, что f удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности нуля. Прежде всего убедимся, что f ограничена вблизи нуля. Возьмём столь малое положительное число h, что куб $[-h, h]^m$ содержится в $\mathcal{O}$. Так как каждая точка x из этого куба является выпуклой комбинацией его вершин $v_1, \dots, v_n$ $(n = 2^m)$, то ограниченность f сверху вытекает из неравенства Иенсена: $f(x) \leqslant C = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} f(v_j)$. Отсюда вытекает и ограниченность снизу, поскольку $\frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \geqslant f(0)$, и поэтому $f(x) \geqslant 2f(0) - C$. Теперь из неравенства (2) сразу следует, что в кубе $[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}]^m$ функция f удовлетворяет условию Липшица по каждой координате, а это равносильно доказываемому утверждению.

Перейдём к доказательству второго утверждения теоремы. Достаточно проверить, что почти везде существует конечная частная производная по последней координате. Очевидно, для любого $x = (x_1, \dots, x_{m-1}, x_m) \in \mathcal{O}$ функция $u \mapsto f(x_1, \dots, x_{m-1}, u)$ определена и выпукла на некотором интервале, содержащем x_m. Поэтому существуют конечные пределы

$$g_\pm(x) = \lim_{u \to \pm 0} \frac{f(x_1, \dots, x_m + u) - f(x_1, \dots, x_m)}{u}.$$

Так как множество точек недифференцируемости выпуклой на интервале функции не более чем счётно, то для любых $x_1, \dots, x_{m-1}$ множество тех x_m, для которых $x = (x_1, \dots, x_{m-1}, x_m) \in \mathcal{O}$ и $g_-(x) \neq g_+(x)$ не более чем счётно. Поскольку функции $g_\pm$ измеримы, множество E, на котором они не совпадают, измеримо. Как мы выяснили, для любой точки $x' \in \mathbb{R}^{m-1}$ его сечение $E_{x'} = \{t \in \mathbb{R} \mid (x', t) \in E\}$ не более чем счётно и, следовательно, имеет нулевую меру. Согласно принципу Кавальери мера E равна нулю, т. е. функции g_+ и g_- совпадают почти везде в $\mathcal{O}$. Следовательно, почти везде в $\mathcal{O}$ существует конечная частная производная $\frac{\partial f}{\partial x_m}$. ▶

IV.4. *Дифференцируемость выпуклых функций.* Как известно, существование конечных частных производных лишь необходимо для дифференцируемости функции нескольких переменных. Однако для выпуклых функций это условие и достаточно. Кроме того, дифференцируемость выпуклой функции можно описать геометрически, используя лишь понятие опорной плоскости.

Теорема. *Пусть f — выпуклая функция, определённая в открытом (выпуклом) множестве $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m$, $a \in \mathcal{O}$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) f дифференцируема в точке a;

2) существуют (конечные) частные производные $f'_{x_1}(a), \dots, f'_{x_m}(a)$;

3) в точке $p_a = (a, f(a))$ надграфик Γ_f^+ имеет единственную опорную плоскость.

Если эти условия выполнены, то касательная и опорная плоскости в точке p_a совпадают.

Доказательство проведём по схеме: 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1). Первая импликация тривиальна, докажем остальные.

2) $\Rightarrow$ 3). Пусть плоскость, опорная к надграфику Γ_f^+ в точке p_a, задаётся уравнением $y = f(a) + \langle \nu, x - a\rangle$ (существование такой плоскости было установлено в предыдущем пункте). Тогда для любого вектора e_j канонического базиса в $\mathbb{R}^m$ и достаточно малого по модулю числа t выполняется неравенство $f(a + te_j) \leqslant f(a) + t\langle \nu, e_j\rangle$. Следовательно, $\langle \nu, e_j\rangle$ — угловой коэффициент прямой, опорной к надграфику выпуклой функции $t \mapsto f(a + te_j)$ в точке $(0, f(a))$. Производная этой функции при $t = 0$ равна $f'_{x_j}(a)$. Как установлено в предыдущем пункте, у дифференцируемой функции одной переменной лишь касательная прямая является опорной к надграфику. Поэтому $\langle \nu, e_j\rangle = f'_{x_j}(a)$ всех j. Это доказывает единственность опорной плоскости и её совпадение с касательной плоскостью в случае, когда f дифференцируема.

3) $\Rightarrow$ 1). Ради упрощения выкладок будем считать, что $a = 0$. Пусть $y = f(0) + \langle \nu, x\rangle$ — уравнение плоскости, опорной к надграфику в начале координат. Тогда $f(x) \geqslant f(0) + \langle \nu, x\rangle$ для всех x из $\mathcal{O}$. Дифференцируемость функции f равносильна дифференцируемости разности $g(x) = f(x) - f(0) - \langle \nu, x\rangle$. Ясно, что $g(0) = 0$, $g \geqslant 0$ на $\mathcal{O}$, и в начале координат надграфик Γ_g^+ имеет единственную опорную плоскость H_0, которая состоит из точек вида $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}^m$.

Прежде чем доказывать дифференцируемость (выпуклой) функции g в нуле, убедимся, что она имеет в нуле производную по любому направлению e и $\frac{\partial g}{\partial e}(0) = 0$.

Рассмотрим функцию $t \mapsto \varphi(t) = g(te)$, где число $|t|$ достаточно мало. Если производная $\frac{\partial g}{\partial e}(0)$ не существует, то по крайней мере одна из односторонних производных $\varphi'_-(0)$, $\varphi'_+(0)$ не равна нулю. Пусть для определённости $\varphi'_+(0) \neq 0$. Тогда прямая L, проходящая через 0 и точку $(e, \varphi'_+(0))$, не лежит в плоскости H_0. Очевидно, L не может задевать внутренность надграфика Γ_g^+. По теореме Хана–Банаха существует опорная к надграфику плоскость H, содержащая L. Плоскость H не совпадает с H_0, и поэтому в начале координат у надграфика Γ_g^+ имеются разные опорные плоскости, что противоречит условию.

Таким образом, производная $\frac{\partial g}{\partial e}(0)$ существует для любого направления e и равна нулю. В частности, $g(te_j) = o(t)$ при $t \to 0$ $(j = 1, \dots, m)$.

Докажем теперь дифференцируемость функции g в начале координат. Поскольку она неотрицательна, её достаточно оценить сверху. Так как вектор x есть среднее арифметическое векторов $m\,x_1e_1, \dots, m\,x_me_m$, то в силу неравенства Иенсена $g(x) \leqslant \max_j g(m\,x_je_j) = o\big(\|x\|\big)$ при $x \to 0$. Следовательно, функция g, а вместе с ней и функция f, дифференцируема в нуле.

Итак, все три утверждения теоремы равносильны. Совпадение касательной и опорной плоскостей было установлено при проверке импликации 2) $\Rightarrow$ 3). ►

Следствие 1. *Выпуклая на открытом множестве функция дифференцируема почти везде.*

Для доказательства достаточно сопоставить утверждения 1) и 2) теоремы Д.IV.4 и утверждение 2) теоремы Д.IV.3.

Следствие 2. *Пусть выпуклая функция f определена на множестве $\mathcal{O}$. Тогда её частные производные непрерывны на том множестве, где она дифференцируема. В частности, если f дифференцируема всюду в $\mathcal{O}$, то она и непрерывно дифференцируема в $\mathcal{O}$.*

Доказательство. Пусть E — множество точек дифференцируемости функции f. Допустим, что следствие неверно: одна из частных производных не непрерывна

в точке $x_0 \in E$. Тогда найдётся такая сходящаяся к x_0 последовательность точек $x^{(n)} \in E$, что $\operatorname{grad} f(x^{(n)}) \not\to \operatorname{grad} f(x_0)$. Так как локально f удовлетворяет условию Липшица, то последовательность $\{\operatorname{grad} f(x^{(n)})\}_{n\geqslant 1}$ ограничена, и поэтому из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Не умаляя общности будем считать, что $\operatorname{grad} f(x^{(n)}) \to \nu \neq \operatorname{grad} f(x_0)$. Ясно, что плоскость с нормалью $(\nu, -1)$, проходящая через точку $(x_0, f(x_0))$, опорная к надграфику как предельное положение касательных плоскостей в точках $(x^{(n)}, f(x^{(n)})$. При этом она не совпадает с касательной плоскостью, которая также является опорной. Таким образом, сделанное предположение проводит к противоречию с утверждением 3) теоремы. ►

IV.5. *Площадь выпуклых поверхностей.* Этот и следующий пункты посвящены исследованию свойств площади на выпуклых поверхностях, под которыми мы понимаем здесь границы выпуклых тел в $\mathbb{R}^m$. Под площадью понимается $(m-1)$-мерная площадь в смысле определения VIII.2.1. Она обозначается буквой σ, а m-мерная мера Лебега — буквой λ, без указания на размерность.

Убедимся прежде всего, что выпуклая поверхность есть липшицево многообразие.

Предложение. *Локально граница выпуклого тела A с точностью до движения совпадает с графиком выпуклой функции и, следовательно, допускает билипшицевскую параметризацию.*

Доказательство. Пусть $p \in \partial A$. Не умаляя общности будем считать, что начало координат — внутренняя точка множества A и $p = (0, \dots, 0, c)$, где $c < 0$. Пусть $B(0, r) \subset A$. Рассмотрим точку $x \in B(0, r)$ вида $x = (x_1, \dots, x_{m-1}, 0)$. Всякий луч с началом в x и направляющим вектором $(0, \dots, 0, -1) = -e_m$ пересекает ∂A единственный раз. Это значит, что в $(m-1)$-мерном шаре $B^{m-1}(0, r)$ можно определить функцию, график которой содержится в ∂A. Эта функция выпукла, так как любая хорда, соединяющая две точки графика, принадлежит (в силу выпуклости) телу A и, следовательно, лежит над графиком. Каноническая параметризация графика выпуклой функции есть, согласно теореме Д.IV.3, локально липшицевское отображение. Обратное отображение также липшицевское, так как оно сближает точки. ►

Поскольку на липшицевых поверхностях площадь единственна (см. теорему VIII.8.1), она однозначно определена на выпуклых поверхностях. В частности, при преобразовании подобия с коэффициентом $a > 0$ площадь выпуклой поверхности (будучи пропорциональной мере Хаусдорфа) изменяется в a^{m-1} раз.

Так как площадь подмножества графика обращается в нуль одновременно с мерой Лебега его проекции, то существование касательной плоскости для λ-почти всех точек из области задания функции равносильно её существованию для σ-почти всех точек графика. Учитывая доказанное предложение, мы видим, что касательная плоскость к выпуклой поверхности существует в σ-почти всех точках. Следовательно, выпуклое тело имеет единственную опорную плоскость в почти всех точках своей границы.

Следующая важная теорема позволяет сравнивать площади поверхностей выпуклых тел.

Теорема. *Пусть A и B — выпуклые тела. Если $A \subset B$, то $\sigma(\partial A) \leqslant \sigma(\partial B)$.*

В частности, взяв в качестве B достаточно большой куб, мы видим, что граница выпуклого тела имеет конечную площадь.

Доказательство можно провести совсем просто в случае, когда A — многогранник. Действительно, пусть Γ — одна из $(m-1)$-мерных граней A и ν — её внешняя нормаль. Рассмотрим расположенную вне A прямую призму с основанием Γ, т. е. множество $\Pi_\Gamma = \{p + t\nu \,|\, p \in \Gamma,\ t \geqslant 0\}$. В границе множества B она вырезает "окно" $S_\Gamma = \partial B \cap \Pi_\Gamma$. Так как грань Γ есть его образ при ортогональном проектировании на плоскость грани, которое является сближающим отображением, то $\sigma(\Gamma) \leqslant \sigma(S_\Gamma)$. Согласно замечанию Д.IV.1 множества S_Γ, соответствующие разным граням, не пересекаются. Поэтому

$$\sigma(\partial A) = \sum_\Gamma \sigma(\Gamma) \leqslant \sum_\Gamma \sigma(S_\Gamma) = \sigma\Big(\bigcup_\Gamma S_\Gamma\Big) \leqslant \sigma(\partial B),$$

что и требовалось.

В общем случае используем метрическую проекцию $\Phi\colon \mathbb{R}^m \to A$. Рассмотрим точку $p \in \partial A$ и луч ℓ_p, перпендикулярный опорной плоскости, проходящей через точку p, и лежащий с множеством A по разные стороны от этой плоскости. Пусть он пересекает ∂B в точке x_p. Тогда по лемме 3 п. Д.IV.2 точка p есть наилучшее приближение к x_p в A, и поэтому $\Phi(x_p) = p$. Таким образом, ∂A есть образ ∂B относительно сближающего (см. лемму 2 п. Д.IV.2) отображения Φ и поэтому $\sigma(\partial A) \leqslant \sigma(\partial B)$. ►

Следствие. *Пусть $B \subset \mathbb{R}^m$ — произвольное выпуклое тело. Тогда*

$$\sigma(\partial B) = \sup_{A \subset B} \sigma(\partial A) = \inf_{A \supset B} \sigma(\partial A),$$

где буква A обозначает выпуклый многогранник.

Доказательство. Из теоремы вытекает, что $S \equiv \sup \sigma(\partial A) \leqslant \sigma(\partial B)$. Вместе с тем, как мы знаем (см. предложение Д.IV.1), для любого $\varepsilon > 0$ существует такой выпуклый многогранник A, что $A \subset B \subset (1+\varepsilon)A$ (мы предполагаем, не умаляя общности, что $0 \in \operatorname{Int}(B)$). Следовательно,

$$\sigma(\partial B) \leqslant \sigma(\partial(1+\varepsilon)A) = (1+\varepsilon)^{m-1}\sigma(\partial A) \leqslant (1+\varepsilon)^{m-1}S.$$

Ввиду произвольности ε это приводит к первому доказываемому равенству. Второе доказывается аналогично. ►

IV.6. *Непрерывность площади.* Напомним определение метрики Хаусдорфа (см. п. VIII.8.5), которое потребуется нам в следующем предложении. Оно опирается на понятие ε-окрестности множества A, т. е. множества $A_\varepsilon = \bigcup_{x \in A} B(x, \varepsilon) = A + B(0, \varepsilon)$ (как обычно, под суммой $X+Y$ множеств X, Y понимается множество $\{x+y \,|\, x \in X,\ y \in Y\}$). Для ограниченных множеств A, A' расстояние Хаусдорфа ρ определяется равенством

$$\rho(A, A') = \inf\{\varepsilon > 0 \,|\, A' \subset A_\varepsilon,\ A \subset A'_\varepsilon\}.$$

Обсуждая в п. VIII.2.4 пример Шварца, мы говорили, что площадь поверхности (даже цилиндрической) нельзя определить как предел площадей вписанных многогранных поверхностей. Однако положение меняется, если аппроксимирующие поверхности выпуклы. Точнее, справедливо

Предложение. *Пусть A — выпуклое тело в $\mathbb{R}^m$. Если хаусдорфово расстояние $\rho(\partial A, \partial A')$ между ∂A и границей выпуклого тела A' достаточно мало, то площади ∂A и $\partial A'$ сколь угодно близки.*

Доказательство. Не умаляя общности будем считать, что множество A содержит замкнутый шар $\overline{B}(0, 2r)$. Убедимся, что $B(0, r) \subset A'$, если $\rho(\partial A, \partial A') < r$. Допустим противное: некоторая точка x шара $B(0, r)$ не принадлежит A'. Пусть y — ближайшая к x точка в A'. Луч, начинающийся в y и проходящий через x, пересекает границу шара $\overline{B}(0, 2r)$ в некоторой точке z. Поскольку множество A' выпукло, y — точка, ближайшая к z в A'. Кроме того

$$\|z - y\| = \|z - x\| + \|x - y\| > \|z - x\| \geqslant \|z\| - \|x\| = 2r - \|x\| > r.$$

Поэтому шар $B(z, r)$ не пересекается с A' и, следовательно, $z \notin A'_r$. С другой стороны, так как $\partial A \subset (\partial A')_r$, то $A \subset A'_r$ и, следовательно, $z \in \overline{B}(0, 2r) \subset A \subset A'_r$. Полученное противоречие доказывает, что $B(0, r) \subset A'$.

Пусть ε — произвольное число из интервала $(0, r)$ и $\rho(\partial A, \partial A') < \varepsilon$. Тогда $\partial A' \subset \subset (\partial A)_\varepsilon$ и, следовательно,

$$A' = \operatorname{conv}(\partial A') \subset \operatorname{conv}\big((\partial A)_\varepsilon\big) = A_\varepsilon = A + \frac{\varepsilon}{r} B(0, r) \subset A + \frac{\varepsilon}{r} A = \Big(1 + \frac{\varepsilon}{r}\Big) A$$

(мы воспользовались тем, что $B(0, r) \subset A$). Согласно теореме Д.IV.5 включение $A' \subset \subset \big(1 + \frac{\varepsilon}{r}\big) A$ позволяет оценить $\sigma(\partial A')$ сверху:

$$\sigma(\partial A') \leqslant \sigma\Big(\Big(1 + \frac{\varepsilon}{r}\Big)\partial A\Big) = \Big(1 + \frac{\varepsilon}{r}\Big)^{m-1} \sigma(\partial A).$$

Поменяв множества A и A' местами, мы получим

$$\sigma(\partial A) \leqslant \Big(1 + \frac{\varepsilon}{r}\Big)^{m-1} \sigma(\partial A').$$

Таким образом,

$$\big|\sigma(\partial A') - \sigma(\partial A)\big| \leqslant \Big(1 + \frac{\varepsilon}{r}\Big)^{m-1} \Big(\Big(1 + \frac{\varepsilon}{r}\Big)^{m-1} - 1\Big) \sigma(\partial A) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0. \ \blacktriangleright$$

IV.7. *Площадь границы как производная объёма.* В примере 4 п. VIII.3.5 мы уже отмечали совпадение площади поверхности шара и производной его объёма (относительно радиуса). Этот факт имеет далеко идущее обобщение, состоящее в том, что для выпуклых тел площадь поверхности совпадает с площадью в смысле Минковского (см. п. II.8.2). Решающую роль в доказательстве этого утверждения играет следующая

Лемма. *Пусть $C \subset \mathbb{R}^m$ — выпуклый многогранник, $B(0, r) \subset C$, $\varepsilon > 0$. Тогда*

$$\lambda(C_\varepsilon \setminus C) \leqslant \varepsilon \Big(1 + \frac{\varepsilon}{r}\Big)^{m-1} \sigma(\partial C). \tag{3}$$

Если A — выпуклое тело, содержащее C, то

$$\varepsilon \sigma(\partial C) \leqslant \lambda(A_\varepsilon \setminus A). \tag{4}$$

Доказательство. Докажем неравенство (3). Пусть

$$C = \bigcap_{i=1}^{N} \{x \in \mathbb{R}^m \mid \langle x, \nu_i \rangle \leqslant \theta_i\}, \quad \text{где} \quad \|\nu_i\| = 1.$$

Очевидно, $\theta_i \geqslant r > 0$. Пусть Γ_i — грань C, содержащаяся в плоскости H_i, определяемой уравнением $\langle x, \nu_i \rangle = \theta_i$. Рассмотрим параллельные H_i плоскости H_i', определяемые уравнениями $\langle x, \nu_i \rangle = \theta_i + \varepsilon$. Пусть Γ_i' — центральная проекция грани Γ_i на плоскость H_i'. Как легко подсчитать, $\Gamma_i' = \tau_i \Gamma_i$, где $\tau_i = \frac{\theta_i + \varepsilon}{\theta_i} \leqslant 1 + \frac{\varepsilon}{r}$. Поэтому

$$\sigma(\Gamma_i') = \sigma(\tau_i \Gamma_i) \leqslant \left(1 + \frac{\varepsilon}{r}\right)^{m-1} \sigma(\Gamma_i).$$

Введём ещё конусы Q_i с вершиной в нуле, образованные лучами, проходящими через грань Γ_i. Очевидно, они не имеют общих внутренних точек и $\bigcup\limits_{i=1}^{N} Q_i = \mathbb{R}^m$. Положим K_i и K_i' равными пересечению Q_i с полупространствами $\{x \mid \langle x, \nu_i \rangle \leqslant \theta_i\}$ и $\{x \mid \langle x, \nu_i \rangle \leqslant \theta_i + \varepsilon\}$ соответственно. Ясно, что $K_i' = \tau_i K_i$ и $\bigcup\limits_{i=1}^{N} K_i = C$. Убедимся, что $C_\varepsilon \subset C' = \bigcup\limits_{i=1}^{N} K_i'$ (множество C', вообще говоря, не выпукло — сделайте рисунок). Пусть $x \in C_\varepsilon$. Тогда $x \in Q_i$ при некотором i. Вместе с тем, $x = y + z$, где $y \in C$, $\|z\| < \varepsilon$. Следовательно,

$$\langle x, \nu_i \rangle = \langle y, \nu_i \rangle + \langle z, \nu_i \rangle \leqslant \theta_i + \|z\| < \theta_i + \varepsilon.$$

По определению K_i' это означает, что $x \in K_i' \subset C'$. Итак, $C_\varepsilon \subset C'$ и, следовательно,

$$C_\varepsilon \setminus C \subset C' \setminus C = \bigcup_{i=1}^{N} K_i' \setminus K_i.$$

Высота усечённого конуса $K_i' \setminus K_i$ равна ε, а площади сечений, параллельных основаниям, не больше площади Γ_i'. Поэтому

$$\lambda(K_i' \setminus K_i) \leqslant \varepsilon \sigma(\Gamma_i').$$

Таким образом,

$$\lambda(C_\varepsilon \setminus C) \leqslant \sum_{i=1}^{N} \varepsilon \sigma(\Gamma_i') \leqslant \varepsilon \left(1 + \frac{\varepsilon}{r}\right)^{m-1} \sum_{i=1}^{N} \sigma(\Gamma_i) = \varepsilon \left(1 + \frac{\varepsilon}{r}\right)^{m-1} \sigma(\partial C),$$

что и требовалось.

Перейдём к доказательству неравенства (4). Оно доказывается проще, чем (3). В самом деле, пусть Γ — одна из $(m-1)$-мерных граней C. Положим $\Gamma(\varepsilon) = \{x + t\nu \mid x \in \Gamma,\ 0 < t < \varepsilon\}$, где ν — единичная внешняя нормаль к Γ, и $C(\varepsilon) = \bigcup\limits_{\Gamma} \Gamma(\varepsilon)$. По замечанию Д.IV.1 множества $\Gamma(\varepsilon)$, соответствующие разным граням, не имеют общих точек. Поэтому

$$\lambda(C(\varepsilon)) = \sum_{\Gamma} \lambda(\Gamma(\varepsilon)) = \varepsilon \sum_{\Gamma} \sigma(\Gamma) = \varepsilon \sigma(\partial C). \tag{5}$$

Так как каждый луч, перпендикулярный грани Γ, пересекает $A_\varepsilon \setminus A$ по отрезку, длина которого не меньше ε, то из принципа Кавальери вытекает, что, $\lambda(C(\varepsilon)) \leqslant \lambda(A_\varepsilon \setminus A)$. Поэтому из (5) следует, что

$$\varepsilon\sigma(\partial C) = \lambda(C(\varepsilon)) \leqslant \lambda(A_\varepsilon \setminus A). \ \blacktriangleright$$

Теорема. *Площадь поверхности выпуклого тела $A \subset \mathbb{R}^m$ совпадает с его площадью в смысле Минковского, т. е.*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\lambda(A_\varepsilon \setminus A)}{\varepsilon} = \sigma(\partial A).$$

Доказательство. Будем считать, что $\overline{B}(0,r) \subset \mathrm{Int}(A) \subset \overline{B}(0,R)$.

Докажем, что при любом ε, $0 < \varepsilon < 1$, справедливо двойное неравенство

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^{m-1}}\sigma(\partial A) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\lambda(A_\varepsilon \setminus A) \leqslant \alpha(\varepsilon)\sigma(\partial A), \tag{6}$$

где $\alpha(\varepsilon) \to 1$ при $\varepsilon \to +0$. Ясно, что из него следует утверждение теоремы.

Рассмотрим такой многогранник C, что $B(0,r) \subset C \subset A \subset (1+\varepsilon^2)C$. По теореме Д.IV.5

$$\sigma(\partial A) \leqslant \sigma\big(\partial(1+\varepsilon^2)C\big) = (1+\varepsilon^2)^{m-1}\sigma(\partial C).$$

Отсюда следует левое неравенство (6):

$$\frac{1}{(1+\varepsilon^2)^{m-1}}\sigma(\partial A) \leqslant \sigma(\partial C) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\lambda(A_\varepsilon \setminus A)$$

(в конце мы воспользовались неравенством (4)).

Перейдём к доказательству правого неравенства. Ясно, что $A_\varepsilon \subset ((1+\varepsilon^2)C)_\varepsilon$. Как читатель легко убедится самостоятельно, $((1+\varepsilon^2)C)_\varepsilon \subset C_{\varepsilon+R\varepsilon^2}$. Поэтому

$$A_\varepsilon \setminus A \ \subset \ C_{\varepsilon+R\varepsilon^2} \setminus C.$$

Используя неравенство (3) леммы с заменой ε на $\varepsilon + R\varepsilon^2$, мы видим, что

$$\lambda(A_\varepsilon \setminus A) \leqslant \lambda(C_{\varepsilon+R\varepsilon^2} \setminus C) \leqslant (\varepsilon + R\varepsilon^2)\left(1 + \frac{\varepsilon + R\varepsilon^2}{r}\right)^{m-1}\sigma(\partial C) \leqslant \varepsilon\alpha(\varepsilon)\sigma(\partial A), \tag{7}$$

где $\alpha(\varepsilon) = (1+R\varepsilon)\big(1+\frac{(R+1)\varepsilon}{r}\big)^{m-1}$. Это доказывает правую часть неравенства (6). $\blacktriangleright$

Опираясь на доказанную теорему, мы можем для выпуклых множеств переформулировать изопериметрическое неравенство (см. п. II.8.2), используя площадь σ вместо площади в смысле Минковского.

Следствие. *Для любого выпуклого тела $A \subset \mathbb{R}^m$ справедливо неравенство*

$$\sigma(\partial A) \geqslant m\alpha_m^{\frac{1}{m}}\lambda^{\frac{m-1}{m}}(A).$$

Поскольку для шара это неравенство обращается в равенство, отсюда следует, что из всех выпуклых тел с данной площадью поверхности наибольший объём имеет шар, а из всех выпуклых тел с данным объёмом шар имеет наименьшую площадь поверхности.

IV.8. Пусть $A \subset \mathbb{R}^m$ — произвольное выпуклое тело, A_t — его t-окрестность. Положим $V(t) = \lambda(A_t)$ при $t \geqslant 0$, считая $A_0 = A$. Вместе с функцией V рассмотрим также функцию $S(t) = \sigma(\partial A_t)$. Очевидно, функция V непрерывна и возрастает. Такими же свойствами обладает и функция S. Её возрастание следует из теоремы Д.IV.5, а непрерывность — из предложения Д.IV.6. Заменив в неравенствах (6), (7) A_ε на A_t и A на $A_{t-\varepsilon}$, мы видим, что при $t > 0$ функция V дифференцируема не только справа, но и слева, причём обе односторонние производные равны $S(t)$.

Из равенства $V'(t) = S(t)$ следует (поскольку функция S возрастает) выпуклость функции V, что позволяет дополнить неравенство Брунна–Минковского. Действительно, при $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ мы имеем $V(\alpha s + (1-\alpha)t) \leqslant \alpha V(s) + (1-\alpha)V(t)$. Это неравенство можно переписать в следующей форме:

$$\lambda(A_{\alpha s+(1-\alpha)t}) \leqslant \alpha\lambda(A_s) + (1-\alpha)\lambda(A_t),$$

в то время как согласно неравенству Брунна–Минковского

$$\lambda^{\frac{1}{m}}(A_{\alpha s+(1-\alpha)t}) \geqslant \alpha\lambda^{\frac{1}{m}}(A_s) + (1-\alpha)\lambda^{\frac{1}{m}}(A_t).$$

Таким образом, мы получаем двустороннюю оценку для объёмов окрестностей множества A :

$$\left(\alpha\lambda^{\frac{1}{m}}(A_s) + (1-\alpha)\lambda^{\frac{1}{m}}(A_t)\right)^m \leqslant \lambda\left(A_{\alpha s+(1-\alpha)t}\right) \leqslant \alpha\lambda(A_s) + (1-\alpha)\lambda(A_t).$$

Дифференцируемость функции V позволяет модифицировать теорему Д.IV.5 и получить, так сказать, её допредельный вариант.

Теорема. *Пусть A и B — выпуклые тела. Если $A \subset B$, то $\lambda(A_\varepsilon \setminus A) \leqslant \lambda(B_\varepsilon \setminus B)$ при любом $\varepsilon > 0$.*

Доказательство. Пусть $F(t) = \lambda(B_t) - \lambda(A_t)$ $(t \geqslant 0)$, где $A_0 = A$, $B_0 = B$. Так как $A_t \subset B_t$, то $F'(t) = \sigma(\partial(B_t)) - \sigma(\partial(A_t)) \geqslant 0$, и поэтому функция F возрастает. В частности, $F(\varepsilon) \geqslant F(0)$, что равносильно утверждению теоремы. ►

УПРАЖНЕНИЯ

1) Пусть выпуклая на промежутке $[a, b]$ функция f удовлетворяет условию Липшица порядка α, $0 < \alpha \leqslant 1$. Докажите, что $\int_a^b (f''(x))^p dx < +\infty$ для любого $p \in [0, \frac{1}{2-\alpha})$ (пример функции $f(x) = -x^\alpha$ на $[0, 1]$, показывает, что при $\alpha \neq 1$ граница для p точная).

2) Пусть A — выпуклое тело, $a \in \mathrm{Int}(A)$. Докажите, что сферическая параметризация границы A (такая положительная на единичной сфере функция r, что $a + r(\xi)\xi \in \partial A$ при $\|\xi\| = 1$) удовлетворяет условию Липшица.

3) Докажите, что граница ε-окрестности произвольного выпуклого тела есть гладкая поверхность.

4) Докажите, что объём выпуклых тел непрерывен относительно метрики Хаусдорфа.

5) Докажите, что выпуклые функции обладают свойством, сближающим их с гладкими функциями: если выпуклая функция f дифференцируема в точке a, то для любого положительного числа ε найдётся такая окрестность U точки a, что

$$\big|f(y) - f(x) - \langle \operatorname{grad} f(a), y - x\rangle\big| \leqslant \varepsilon \, \|y - x\| \quad \text{для всех} \;\; x,\, y \in U.$$

Это свойство называется строгой дифференцируемостью. На примере функции $x \mapsto f(x) = x^2 \sin^2 \frac{\pi}{x}$ $(x \neq 0)$, $f(0) = 0$, убедитесь, что строгая дифференцируемость не следует из дифференцируемости.

V. Теорема Сарда

Мы докажем здесь два частных случая теоремы, в которой идёт речь о мере множества критических значений гладкого отображения. Введём сначала необходимые определения.

Определение. Пусть $\mathcal{O}$ — открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^m$ и $\Phi \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}^d)$, где $d \leqslant m$. Точка $x_0 \in \mathcal{O}$ называется критической точкой отображения Φ, если $\operatorname{rank}(\Phi'(x_0)) < d$. Образ критической точки x_0, т. е. точка $\Phi(x_0)$, называется критическим значением отображения Φ.

Интересующая нас теорема, известная как теорема Сарда*), гласит, что при $d \leqslant m$ множество критических значений отображения $\Phi \in C^k(\mathcal{O}, \mathbb{R}^d)$ имеет нулевую меру, если $k > m - d$. Мы приведем доказательства этого утверждения, соответствующие крайним частным случаям, когда $d = m$ или $d = 1$.

Как легко убедиться, множество критических точек гладкого отображения замкнуто в $\mathcal{O}$. Следовательно, оно представимо в виде объединения не более чем счётного семейства компактных множеств. Поэтому как оно само, так и его образ, т. е. множество критических значений, измеримы. Это следует, конечно, и из теоремы II.3.1. Напомним ещё, что σ-окрестностью A_σ множества $A \subset \mathbb{R}^m$ называется объединение $\bigcup\limits_{x \in A} B(x, \sigma)$.

V.1. В этом пункте под мерой мы подразумеваем меру Лебега в $\mathbb{R}^m$, которую будем обозначать буквой λ. Нам потребуется одно вспомогательное утверждение.

Лемма. *Пусть A — подмножество собственного аффинного подпространства в $\mathbb{R}^m$, содержащееся в некотором шаре радиуса R. Тогда* $\lambda(A_\sigma) \leqslant 2^m (R + \sigma)^{m-1} \sigma$.

Доказательство. Так как расстояние между точками и мера множества сохраняются при движении, то не умаляя общности можно считать, что центр шара совпадает с началом координат, а подпространство состоит из точек, последняя координата которых равна нулю. Тогда, отождествляя каноническим образом пространство $\mathbb{R}^m$ с декартовым произведением $\mathbb{R}^{m-1} \times \mathbb{R}$, мы получаем, что $A \subset [-R, R]^{m-1} \times \{0\}$. Поэтому $A_\sigma \subset [-R - \sigma, R + \sigma]^{m-1} \times [-\sigma, \sigma]$, откуда немедленно следует нужное неравенство. ▶

Теперь мы можем установить первый из интересующих нас результатов.

*) Артур **Сард** (Sard), 1909–1980, — американский математик.

Теорема. *Пусть $\mathcal{O}$ — открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^m$, $\Phi \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m)$. Тогда множество критических значений отображения Φ имеет нулевую меру.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{N}$ — множество критических точек отображения Φ. Покажем, что $\Phi(\mathcal{N})$ содержится в множестве произвольно малой меры. Сначала рассмотрим не всё множество $\mathcal{N}$, а его часть — пересечение $\mathcal{N}$ с ячейкой Q, содержащейся в $\mathcal{O}$ вместе с замыканием.

По следствию 1 из неравенства Лагранжа (см. п. Д. VII.2)

$$\big\|\Phi(x) - \Phi(x_0) - \Phi'(x_0)(x - x_0)\big\| \leqslant \sup_{y \in Q} \|\Phi'(y) - \Phi'(x_0)\| \|x - x_0\| \quad \text{при } x,\, x_0 \in Q.$$

Зафиксируем положительное число ε и, пользуясь равномерной непрерывностью Φ' на $\overline{Q}$, найдём такое $\delta > 0$, что

$$\|\Phi'(y) - \Phi'(x_0)\| \leqslant \varepsilon, \quad \text{если} \quad y,\, x_0 \in Q \quad \text{и } \|y - x_0\| < \delta.$$

Вместе с предыдущим неравенством это даёт нам, что

$$\big\|\Phi(x) - \Phi(x_0) - \Phi'(x_0)(x - x_0)\big\| \leqslant \varepsilon \|x - x_0\|, \quad \text{если} \quad x, x_0 \in Q \text{ и } \|x - x_0\| < \delta. \tag{1}$$

Пусть $H = \operatorname{diam}(Q)$, $M = \sup\limits_{x \in Q} \|\Phi'(x)\|$. Разобьём Q на N^m конгруэнтных ячеек Q_j, $j = 1, 2, \ldots, N^m$, взяв N настолько большим, что $\operatorname{diam}(Q_j) = \frac{H}{N} < \delta$.

Оценим меру $\Phi(E)$, где $E = Q_j \cap \mathcal{N} \neq \varnothing$. Зафиксировав точку x_0 из E, введём вспомогательное аффинное отображение $\Psi(x) = \Phi(x_0) + \Phi'(x_0)(x - x_0)$. На множестве Q_j отображения Φ и Ψ близки: при x, $x_0 \in Q_j$ из неравенства (1) вытекает, что

$$\|\Phi(x) - \Psi(x)\| \leqslant \varepsilon \, \|x - x_0\| < \varepsilon \operatorname{diam}(Q_j) = \varepsilon \frac{H}{N} \equiv \sigma.$$

Поскольку $E \subset Q_j$, отсюда следует, что $\Phi(E)$ содержится в σ-окрестности множества $\Psi(E)$. Вместе с тем, так как $\det \Phi'(x_0) = 0$, то $\Psi(E)$ — подмножество некоторого собственного аффинного подпространства. Кроме того, оно содержится в шаре радиуса $R = \frac{MH}{N}$, так как

$$\|\Psi(x) - \Phi(x_0)\| = \|\Phi'(x_0)(x - x_0)\| \leqslant \|\Phi'(x_0)\| \|x - x_0\| \leqslant M \frac{H}{N}.$$

По лемме мы получаем, что

$$\lambda\big(\Phi(E)\big) \leqslant \lambda\big((\Psi(E))_\sigma\big) \leqslant 2^m (R + \sigma)^{m-1} \sigma.$$

Следовательно,

$$\lambda\big(\Phi(\mathcal{N} \cap Q)\big) = \sum_{j=1}^{N^m} \lambda\big(\Phi(\mathcal{N} \cap Q_j)\big) \leqslant N^m 2^m (R + \sigma)^{m-1} \sigma = \varepsilon \, (2H)^m (M + \varepsilon)^{m-1}.$$

Ввиду произвольности ε это означает, что $\lambda\big(\Phi(\mathcal{N} \cap Q)\big) = 0$.

Для завершения доказательства остаётся заметить, что $\mathcal{O}$ можно представить в виде объединения последовательности ячеек P_k, замыкания которых содержатся в $\mathcal{O}$ (см. теорему I.1.7). Поэтому

$$\lambda\bigl(\Phi(\mathcal{N})\bigr) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \lambda\bigl(\Phi(\mathcal{N} \cap P_k)\bigr) = 0. \ \blacktriangleright$$

V.2. Перейдём теперь ко второму частному случаю теоремы Сарда. Буква λ в этом пункте обозначает одномерную меру Лебега, а символ $d_x^k f$ — дифференциал k-го порядка функции f в точке x.

Теорема. *Пусть $\mathcal{O}$ — открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^m$, $f \in C^m(\mathcal{O})$. Тогда множество критических значений функции f имеет нулевую меру.*

Доказательство этой теоремы мы проведём не в полном объёме, а лишь для бесконечно дифференцируемых функций, используя индукцию по размерности. База индукции — случай $m = 1$ — обеспечена предыдущей теоремой. Допустим, что теорема справедлива для бесконечно дифференцируемых функций $(m-1)$-ой переменной, и проверим её справедливость для бесконечно дифференцируемых функций m переменных.

Пусть $\mathcal{N}_1$ — множество критических точек функции f,

$$\mathcal{N}_k = \bigl\{x \in \mathcal{O} \bigm| d_x f = \ldots = d_x^k f = 0\bigr\}, \quad E_k = \mathcal{N}_k \setminus \mathcal{N}_{k+1} \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Докажем сначала, что нулевую меру имеет каждое из множеств $f(E_k)$. Благодаря теореме Линделёфа VIII.1.5, позволяющей из всякого открытого покрытия выделять не более, чем счётное, достаточно доказать локальное утверждение: у каждой точки $x \in E_k$ существует такая окрестность U, что $\lambda\bigl(f(E_k \cap U)\bigr) = 0$.

Пусть $x_0 \in E_k$. Так как $x_0 \notin \mathcal{N}_{k+1}$, то хотя бы одна из частных производных k-го порядка функции f, обозначим её буквой g, имеет ненулевой дифференциал в точке x_0. Пусть U — такая окрестность x_0, что $d_x g \neq 0$ в U. Тогда множество $M = \{x \in U \mid g(x) = 0\}$ есть C^∞-гладкая поверхность, причём $E_k \cap U \subset M$. Сужая в случае необходимости U, можно считать поверхность M простой. Пусть Φ — произвольная бесконечно дифференцируемая параметризация M, определённая в области $G \subset \mathbb{R}^{m-1}$. Рассмотрим вспомогательную функцию $h = f \circ \Phi$ и пусть A — множество её критических точек. Очевидно, $h \in C^\infty(G)$, и так как $d_t h = d_{\Phi(t)} f \circ d_t \Phi$, то $\Phi^{-1}(E_k \cap U) \subset A$. Поэтому $f(E_k \cap U) = h\bigl(\Phi^{-1}(E_k \cap U)\bigr) \subset h(A)$. Следовательно, $\lambda\bigl(f(E_k \cap U)\bigr) = 0$, поскольку $\lambda(h(A)) = 0$ по индукционному предположению.

Для завершения доказательства представим множество $\mathcal{N}_1$ в виде

$$\mathcal{N}_1 = E_1 \cup \ldots \cup E_{m-1} \cup \mathcal{N}_m$$

и докажем, что $\lambda\bigl(f(\mathcal{N}_m)\bigr) = 0$. Очевидно, последнее равенство достаточно доказать для пересечения $\mathcal{N}_m$ с произвольным содержащимся в $\mathcal{O}$ компактным множеством.

Зафиксируем такое множество K и такую его δ-окрестность K_δ, что все производные f порядка $m+1$ ограничены в ней. Тогда согласно формуле Тейлора при некотором $C > 0$ и при $x \in K$, $\|x - y\| < \delta$, справедливо неравенство

$$|f(x) - f(y)| \leqslant C\|x - y\|^{m+1}. \tag{2}$$

Возьмём произвольное число ε, $0 < \varepsilon < \delta$, и покроем множество $\mathcal{N}_m \cap K$ попарно дизъюнктными конгруэнтными кубическими ячейками Q_j, диаметр которых равен ε. Очевидно, можно считать, что $K \cap Q_j \neq \varnothing$ и, следовательно, $Q_j \subset K_\delta$ для всех j. Из неравенства (2) вытекает, что $\lambda\bigl(f(Q_j)\bigr) \leqslant C\varepsilon^{m+1} = CL_m\varepsilon\lambda_m(Q_j)$, где коэффициент L_m зависит лишь от размерности. Поэтому

$$\lambda\bigl(f(\mathcal{N}_m \cap K)\bigr) \leqslant \sum_j \lambda\bigl(f(Q_j)\bigr) \leqslant CL_m\varepsilon \sum_j \lambda_m(Q_j) \leqslant CL_m\varepsilon\lambda_m(K_\delta),$$

откуда, ввиду произвольности ε, следует равенство $\lambda\bigl(f(\mathcal{N}_m \cap K)\bigr) = 0$. ►

VI. Интегрирование векторнозначных функций

В этом добавлении мы предполагаем, что читатель знаком с определением и простейшими свойствами банахова пространства. Наша цель здесь — распространить понятие интеграла на отображения со значениями в таком пространстве. Эти отображения называются далее векторнозначными функциями или вектор-функциями. В изложенном в главе IV способе построения интеграла важную роль играет упорядоченность множества вещественных чисел — уже в определении измеримой функции используются лебеговские множества, описываемые с помощью неравенств. Однако теорема об аппроксимации (вместе с теоремой Лебега IV.8.4) показывает, что возможен и другой подход: измеримую функцию можно определить как поточечный предел простых, а интеграл от такой функции — как предел интегралов от простых функций, удовлетворяющих некоторым естественным требованиям. Такой подход к определению интеграла не опирается столь существенным образом, как принятый в главе IV, на упорядоченность вещественной прямой и допускает различные обобщения. Мы рассмотрим обобщение понятия интеграла на векторнозначные функции, предложенное Бохнером*). При этом, в соответствии с намеченной схемой, сначала вводятся простые вектор-функции и определяется интеграл для них, а затем класс интегрируемых функций расширяется с помощью предельного перехода. Свойства определённого таким образом интеграла (не связанные с упорядоченностью) вполне аналогичны свойствам интеграла от скалярных суммируемых функций. Проверка многих из них (сначала для простых вектор-функций, а затем на основе предельного перехода) не вызывает затруднений. В таких случаях мы ограничиваемся минимальными указаниями или совсем обходимся без них.

Всюду далее предполагаются фиксированными пространство $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ с σ-конечной мерой и банахово пространство E, норма в котором обозначается символом $\|\cdot\|$. Мы всегда считаем, что рассматриваемые функции (скалярные или векторнозначные) заданы по крайней мере почти везде на множестве X. Если не оговорено противное, предполагается, что значения векторнозначных функций принадлежат банахову пространству E. В обозначениях векторнозначных функций используется значок “ $\vec{\ }$ ”.

VI.1. *Простые и измеримые функции.* Напомним, что разбиением множества X называется конечное семейство множеств $\{e_k\}_{k=1}^N$, удовлетворяющее условиям:

$$X = \bigcup_{k=1}^N e_k, \quad e_k \cap e_j = \varnothing \quad \text{при} \ \ k \neq j, \ 1 \leqslant k, j \leqslant N.$$

*) Саломон **Бохнер** (Bochner), 1899–1982, — американский математик.

Множества e_k называются элементами разбиения. Как и раньше, мы будем рассматривать лишь такие разбиения, у которых все элементы измеримы. Следующее определение является очевидным обобщением определения III.2.1.

Определение. Векторнозначная функция $\vec{f}$ называется *простой*, если существует разбиение, на элементах которого она постоянна. Такое разбиение будем называть *допустимым* для $\vec{f}$.

Ясно, что любые две простые функции имеют общее допустимое разбиение. Кроме того, если $\vec{f}$ — простая функция, то функция $x \mapsto \|\vec{f}(x)\|$ также простая (вещественнозначная) функция.

Определение. Векторнозначная функция $\vec{f}$ называется *измеримой* (синонимы: *сильно измеримой, измеримой по Бохнеру*), если существует такая последовательность простых функций $\{\vec{f}_n\}_{n\geqslant 1}$, что

$$\vec{f}_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \vec{f}(x) \ \text{ почти везде на } X, \text{ т. е. } \|\vec{f}_n(x) - \vec{f}(x)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ \text{ для почти всех } x \in X.$$

Поскольку в определении требуется аппроксимировать измеримую функцию простыми не поточечно, а лишь в смысле сходимости почти везде, изменение значений функции на множестве меры нуль не нарушает её измеримости.

В скалярном случае, когда банахово пространство совпадает с $\mathbb{R}$, последнее определение благодаря следствию из теоремы III.2.2 об аппроксимации равносильно определению III.1.1.

VI.2. *Свойства измеримых вектор-функций.*

1) *Если функция $\vec{f} : X \to E$ измерима, то измерима и функция $x \mapsto \|\vec{f}(x)\|$.*

2) *Аппроксимация с оценкой. Если $\vec{f}$ — измеримая векторнозначная функция, то существует такая последовательность простых функций $\vec{f}_n$, что*

$$\vec{f}_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \vec{f}(x) \quad \text{почти везде на } X \ \text{ и } \ \|\vec{f}_n(x)\| \leqslant \|\vec{f}(x)\| \ \text{ при } x \in X,\ n \geqslant 1.$$

Докажем это. Пусть $\{\vec{\varphi}_n\}_{n\geqslant 1}$ — произвольная последовательность векторнозначных простых функций почти всюду сходящаяся к $\vec{f}$. Определим на E "срезающую" функцию

$$\omega(v) = \begin{cases} v & \text{при } \|v\| \leqslant 1, \\ \frac{v}{\|v\|} & \text{при } \|v\| \geqslant 1 \end{cases} \qquad (v \in E).$$

Рассмотрим ещё последовательность скалярных простых функций g_n, удовлетворяющих условиям

$$0 \leqslant g_n \leqslant g_{n+1}, \quad g_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|\vec{f}(x)\| \ \text{ всюду на } X \tag{1}$$

(см. теорему III.2.2). Положим теперь

$$\vec{f}_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } g_n(x) = 0, \\ g_n(x)\omega\left(\frac{\vec{\varphi}_n(x)}{g_n(x)}\right), & \text{если } g_n(x) \neq 0. \end{cases}$$

Так как у функций g_n, $\vec{\varphi}_n$ есть общее допустимое разбиение, то $\vec{f}_n$ — простая функция и, очевидно, $\|\vec{f}_n(x)\| \leqslant g_n(x) \leqslant \|\vec{f}(x)\|$. Если $\vec{f}(x) = 0$, то сходимость $\vec{f}_n(x)$ к $\vec{f}(x)$ тривиальна, так как $g_n(x) = 0$ при всех n в силу (1). Если же $\vec{f}(x) \neq 0$, то начиная с некоторого места $g_n(x) \neq 0$ и, следовательно, при достаточно больших n

$$\vec{f}_n(x) = g_n(x)\omega\left(\frac{\vec{\varphi}_n(x)}{g_n(x)}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|\vec{f}(x)\|\omega\left(\frac{\vec{f}(x)}{\|\vec{f}(x)\|}\right) = \vec{f}(x),$$

поскольку $\vec{\varphi}_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \vec{f}(x)$. Таким образом, $\vec{f}_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \vec{f}(x)$ почти везде на X. ►

3) Если g — скалярная, а $\vec{f}$ — векторнозначная измеримые функции, то функция $x \mapsto g(x)\vec{f}(x)$ также измеримая векторнозначная функция. В частности, измерима векторнозначная функция $x \mapsto g(x)v_0$, где $v_0 \in E$.

4) Пусть $X = [a, b]$, μ — мера Лебега. Если функция $\vec{f}\colon [a, b] \to E$ непрерывна, то она измерима.

Доказательство опирается на равномерную непрерывность функции $\vec{f}$. Для любого положительного числа ε найдутся такие точки $x_1, \ldots, x_n$, что $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} = b$ и

$$\|\vec{f}(x) - \vec{f}(x_k)\| < \varepsilon \text{ при } x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1},\ 0 \leqslant k < n.$$

Поэтому функцию $\vec{f}$ можно равномерно с точностью до ε аппроксимировать простыми функциями, принимающими значения $\vec{f}(x_k)$ на промежутках $[x_k, x_{k+1})$ ($k = 0, 1, \ldots, n$). ►

Аналогично доказывается, что всякая непрерывная на компактном пространстве вектор-функция измерима относительно любой борелевской меры.

5) *Предел последовательности измеримых векторнозначных функций снова измерим.*

Пусть $\{\vec{f}_n\}_{n\geqslant 1}$ — последовательность измеримых функций, $\vec{f}\colon X \to E$ — некоторая векторнозначная функция и $\vec{f}_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \vec{f}(x)$ почти везде на X. Докажем, что функция $\vec{f}$ измерима. Рассмотрим простые функции $\vec{f}_{n,k}$, аппроксимирующие $\vec{f}_n$. Это означает, что $\vec{f}_{n,k}(x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \vec{f}_n(x)$ почти везде на X при каждом n. Введём ещё скалярные функции $\varphi_{n,k} = \|\vec{f}_n - \vec{f}_{n,k}\|$. Применяя к функциям $\varphi_{n,k}$ теорему III.3.7 о диагональной последовательности при $g_n = h = 0$, мы получаем, что $\varphi_{n,k_n}(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ почти везде для некоторой последовательности $\{k_n\}_{n\geqslant 1}$. Поэтому

$$\vec{f}_{n,k_n}(x) = (\vec{f}_{n,k_n}(x) - \vec{f}_n(x)) + \vec{f}_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \vec{f}(x) \quad \text{почти везде.}$$

Так как функции $\vec{f}_{n,k_n}$ простые, то это и означает измеримость функции $\vec{f}$. ►

Отметим ещё два простых факта, доказательства которых мы предоставляем читателю.

6) *Если $\vec{f}$ — векторнозначная измеримая функция и Φ — произвольное непрерывное отображение из E в банахово пространство F, то композиция $\Phi \circ \vec{f}$ также измерима.*

7) *Множество измеримых функций линейно, т. е. вместе с любыми двумя функциями содержит и их линейную комбинацию.*

В заключение докажем, что измеримая функция $\vec{f}\colon X \to E$, принимающая значение в замкнутом подпространстве $F \subset E$, измерима и как функция со значениями в F. По техническим соображениям мы сформулируем это свойство в несколько более общем виде.

8) *Пусть $\vec{f}\colon X \to E$ — измеримая функция, почти все значения которой принадлежат множеству $A \subset E$. Тогда существует последовательность простых функций $\vec{g}_n$ со свойствами:*

$$\vec{g}_n(x) \in A, \quad \vec{g}_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \vec{f}(x) \qquad \text{при почти всех } x \in X.$$

Очевидно, мы можем считать, что $\vec{f}(x) \in A$ при всех $x \in X$. Пусть $\{\vec{f}_n\}_{n\geqslant 1}$ — последовательность простых функций, почти всюду сходящаяся к $\vec{f}$. Поскольку значения $\vec{f}_n$ могут, вообще говоря, не входить в A, нам придётся их несколько "исправить".

Пусть $\{e_k^n\}_{1\leqslant k\leqslant m_n}$ — допустимое для $\vec{f}_n$ разбиение и пусть v_k^n — значение $\vec{f}_n$ на множестве e_k^n. Выберем вектор w_k^n из A так, что

$$\|w_k^n - v_k^n\| \leqslant 2\,\mathrm{dist}\,(v_k^n, A) \ \text{ при } 1 \leqslant k \leqslant m_n,\ n \in \mathbb{N},$$

и положим

$$\vec{g}_n(x) = w_k^n \quad \text{при} \quad x \in e_k^n.$$

Ясно, что при любом $x \in X$ справедливо неравенство

$$\|\vec{g}_n(x) - \vec{f}_n(x)\| \leqslant 2\,\mathrm{dist}\,\big(\vec{f}_n(x),\, A\big) \leqslant 2\,\|\vec{f}_n(x) - \vec{f}(x)\|.$$

Поэтому почти везде на X

$$\|\vec{g}_n(x) - \vec{f}(x)\| \leqslant \|\vec{g}_n(x) - \vec{f}_n(x)\| + \|\vec{f}_n(x) - \vec{f}(x)\| \leqslant 3\,\|\vec{f}_n(x) - \vec{f}(x)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \ \blacktriangleright \qquad (2)$$

Замечание. Если функции $\vec{f}_n$ удовлетворяют оценке $\|\vec{f}_n(x)\| \leqslant h(x)$ при почти всех $x \in X$, то, пользуясь (2), мы получаем

$$\|\vec{g}_n(x)\| \leqslant \|\vec{g}_n(x) - \vec{f}(x)\| + \|\vec{f}(x)\| \leqslant 3\|\vec{f}_n(x) - \vec{f}(x)\| + h(x) \leqslant$$
$$\leqslant 3\|\vec{f}_n(x)\| + 3\|\vec{f}(x)\| + h(x) \leqslant 7h(x).$$

VI.3. *Суммируемые векторнозначные функции.* Перейдём к вопросу об интегрировании векторнозначных функций.

Определение 1. Измеримая векторнозначная функция $\vec{f}$ называется *суммируемой*, если $\int_X \|\vec{f}\|\, d\mu < +\infty$.

Если мера конечна, то всякая ограниченная измеримая функция суммируема. В частности, вектор-функция, непрерывная на компактном подмножестве пространства $\mathbb{R}^m$, суммируема относительно меры Лебега.

Определение 2. Пусть $\vec{f}$ — суммируемая простая функция, $\{e_k\}_{k=1}^N$ — допустимое для неё разбиение и v_k — значение $\vec{f}$ на множестве e_k. *Интеграл* функции $\vec{f}$ (по множеству X относительно меры μ) есть сумма $\sum\limits_{k=1}^{N} \mu(e_k)v_k$.

Мера множеств e_k может быть бесконечной, но на таких множествах суммируемая вектор-функция имеет (ввиду суммируемости) нулевые значения. Мы сохраняем обычное соглашение и считаем, что $+\infty \cdot 0 = 0$. Таким образом, сумма, определяющая интеграл, всегда имеет смысл. Как и в скалярном случае, легко проверить, что её величина не зависит от выбора допустимого разбиения. Интеграл от функции $\vec{f}$ мы будем обозначать обычным образом:

$$\int_X \vec{f}(x)\, d\mu(x) \quad \text{или} \quad \int_X \vec{f}\, d\mu.$$

Отметим очевидные свойства суммируемых простых функций.

а) Множество суммируемых функций и множество суммируемых простых функций линейны.

б) На множестве суммируемых простых функций интеграл линеен.

в) Для всякой суммируемой простой функции $\vec{f}$ справедливо неравенство

$$\Big\| \int_X \vec{f}\, d\mu \Big\| \leqslant \int_X \|\vec{f}\|\, d\mu.$$

Прежде чем переходить к определению интеграла от произвольной суммируемой векторнозначной функции, докажем вспомогательное утверждение.

Лемма. *Пусть $\vec{f}\colon X \to E$ — векторнозначная функция. Если существуют такие простые функции $\vec{f}_n : X \to E$, что*

а) $\vec{f}_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \vec{f}(x)$ почти везде,

б) $\|\vec{f}_n(x)\| \leqslant h(x)$ почти везде при всех $n \in \mathbb{N}$,

в) функция h суммируема на X,

то существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X \vec{f}_n\, d\mu$.

Кроме того, этот предел не зависит от выбора последовательности $\{f_n\}$, удовлетворяющей условиям а)–в).

Доказательство. Ясно, что функции $\vec{f}_n$ суммируемы и функция $\vec{f}$ измерима. Из условий а)–б) вытекает, что $\|\vec{f}\| \leqslant h$ почти везде. Положим $I_n = \int_X \vec{f}_n\, d\mu$ и докажем, что последовательность $\{I_n\}_{n\geqslant 1}$ сходится в себе. В самом деле,

$$\|I_n - I_m\| = \Big\| \int_X (\vec{f}_n - \vec{f}_m)\, d\mu \Big\| \leqslant \int_X \|\vec{f}_n - \vec{f}_m\|\, d\mu \leqslant$$
$$\leqslant \int_X \|\vec{f}_n - \vec{f}\|\, d\mu + \int_X \|\vec{f} - \vec{f}_m\|\, d\mu \underset{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Сходимость к нулю следует из теоремы Лебега, поскольку в обоих интегралах подынтегральные функции почти везде стремятся к нулю и имеют суммируемую мажоранту ($\|\vec{f}_n - \vec{f}\| \leqslant 2\,h$). Таким образом, предел $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$ существует.

Докажем, что он не зависит от выбора последовательности $\{f_n\}$. Пусть функции g_n удовлетворяют условиям а)–в). Тогда

$$\Big\| I_n - \int_X \vec{g}_n\, d\mu \Big\| \leqslant \int_X \|\vec{f}_n - \vec{g}_n\|\, d\mu \leqslant \int_X \|\vec{f}_n - \vec{f}\|\, d\mu + \int_X \|\vec{f} - \vec{g}_n\|\, d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \ \blacktriangleright$$

Замечание. Если функция $\vec{f}$ суммируема, то, как следует из свойства 2) п. Д.VI.2 (аппроксимация с оценкой), для неё существует последовательность простых функций, удовлетворяющая условиям леммы, где $h = \|\vec{f}\|$.

Теперь мы готовы дать основное

Определение. *Интегралом* от векторнозначной суммируемой функции $\vec{f}$ называется предел $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X \vec{f}_n \, d\mu$, где $\vec{f}_n$ — простые функции, удовлетворяющие условию леммы.

Из леммы следует, что это определение корректно.

VI.4. *Основные свойства интеграла от суммируемых вектор-функций.*

1) *Линейность интеграла. Если $\vec{f}$, $\vec{g}$ — суммируемые функции, то их линейная комбинация $\alpha\vec{f} + \beta\vec{g}$ также суммируема и*

$$\int_X (\alpha\vec{f} + \beta\vec{g}) \, d\mu = \alpha \int_X \vec{f} \, d\mu + \beta \int_X \vec{g} \, d\mu.$$

Доказательство. Для простых функций это свойство уже известно — см. свойство б). В общем случае мы получаем его с помощью предельного перехода. ►

1′) *Вынесение векторного множителя. Пусть g — скалярная суммируемая на X функция, v — произвольный вектор из E и пусть $\vec{f}(x) = g(x)\, v$ при $x \in X$. Тогда векторнозначная функция $\vec{f}$ суммируема и*

$$\int_X \vec{f} \, d\mu = \int_X (g\, v) \, d\mu = \left(\int_X g \, d\mu \right) v.$$

2) *Оценка нормы интеграла. Для любой суммируемой функции $\vec{f}$ справедливо неравенство $\left\| \int_X \vec{f} \, d\mu \right\| \leqslant \int_X \|\vec{f}\| \, d\mu$.*

3) *Предельный переход под знаком интеграла. Если $\vec{f}$, $\vec{f}_n$ — измеримые функции, удовлетворяющие условиям а)–в) леммы предыдущего пункта, то они суммируемы и $\int_X \vec{f}_n \, d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X \vec{f} \, d\mu$.*

Суммируемость функций $\vec{f}_n$ следует из условия б) леммы, суммируемость $\vec{f}$ вытекает из оценки $\|\vec{f}\| \leqslant h$, получаемой предельным переходом. Используя свойства 1, 2 и теорему Лебега для скалярного случая, мы имеем:

$$\left\| \int_X \vec{f}_n \, d\mu - \int_X \vec{f} \, d\mu \right\| \leqslant \int_X \|\vec{f}_n - \vec{f}\| \, d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

так как $2h \geqslant \|\vec{f}_n - \vec{f}\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ почти везде. ►

4) *Пусть $\vec{f}\colon X \to E$ — суммируемая функция и U — линейное отображение, действующее из E в банахово пространство F. Тогда функция $\vec{g} = U \circ \vec{f}$ суммируема и справедливо равенство $\int_X \vec{g} \, d\mu = U\left(\int_X \vec{f} \, d\mu \right)$.*

Доказательство. Если $\vec{f}$ — простая функция, то требуемое равенство вытекает из линейности оператора U и определения интеграла от простой суммируемой функции. В общем случае рассмотрим сходящуюся почти везде к $\vec{f}$ последовательность простых функций $\vec{f}_n$, нормы которых имеют суммируемую мажоранту h. Положим $\vec{g}_n = U \circ \vec{f}_n$. Ясно, что $\vec{g}_n$ — простые функции и

$$\vec{g}_n(x) = U\big(\vec{f}_n(x)\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} U\big(\vec{f}(x)\big) = \vec{g}(x) \quad \text{почти везде на } X.$$

Кроме того, $\|\vec{g}_n\| \leqslant \|U\|\,\|\vec{f}_n\| \leqslant \|U\|\,h$. Поэтому функция $\vec{g}$ суммируема и по определению

$$\int_X \vec{g}\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \vec{g}_n\,d\mu = \lim_{n\to\infty} U\Big(\int_X \vec{f}_n\,d\mu\Big) = U\Big(\int_X \vec{f}\,d\mu\Big). \ \blacktriangleright$$

Отметим один частный случай свойства 4.

4′) *Если $\vec{f}$ — суммируемая функция, φ — линейный непрерывный функционал в E, то $\varphi\left(\int_X \vec{f}\,d\mu\right) = \int_X \varphi(\vec{f})\,d\mu$, где правая часть равенства–это интеграл от скалярной суммируемой функции.*

Следующее свойство доказывается аналогично свойству 4, в чём читатель легко убедится самостоятельно.

5) *Пусть $E = L(H, H_1)$ — пространство линейных непрерывных операторов, действующих из банахова пространства H в банахово пространство H_1, и пусть $U_x\colon X \to L(H, H_1)$ — операторнозначная суммируемая функция. Тогда при любом v из H функция $x \mapsto U_x(v) \in H_1$ также суммируема и*

$$\int_X U_x(v)\,d\mu(x) = \left(\int_X U_x\,d\mu(x)\right)(v).$$

6) *Пусть L — замкнутое линейное подмножество пространства E, $\vec{f}\colon X \to E$ — суммируемая функция. Если $\vec{f}(x) \in L$ при почти всех $x \in X$, то $\int_X \vec{f}\,d\mu \in L$. Если $\mu(X) = 1$, то утверждение остаётся справедливым для любого замкнутого выпуклого множества L.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность простых функций $\vec{f}_n$, удовлетворяющих условиям а)–в) леммы предыдущего пункта. По свойству 8 п. Д.VI.2 и замечанию к нему можно, не умаляя общности, считать, что значения функций $\vec{f}_n$ принадлежат L. Следовательно,

$$\int_X \vec{f}_n\,d\mu \in L \quad \text{и} \quad \int_X \vec{f}\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \vec{f}_n\,d\mu \in L.$$

Если $\mu(X) = 1$, то первое из указанных включений справедливо не только для линейного, но и для выпуклого множества L, поскольку $\int_X \vec{f}_n\,d\mu$ есть выпуклая комбинация значений $\vec{f}_n$ (все они принадлежат L). $\blacktriangleright$

7) *Точки Лебега вектор-функций.* Пусть $X = \mathbb{R}^m$ и μ — m-мерная мера Лебега. Как мы знаем (см. п. IV.9.2), для локально суммируемой функции почти

все точки являются её точками Лебега. Этот результат справедлив и в более общей ситуации: если измеримая вектор-функция $\vec{f}\colon \mathbb{R}^m \to E$ локально суммируема (т. е. $\int_{B(r)} \|\vec{f}(x)\|\,dx < +\infty$ для любого $r > 0$), то

$$\frac{1}{r^m}\int_{B(x,r)} \|\vec{f}(y) - \vec{f}(x)\|\,dy \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{для почти всех} \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

Для простой функции, т. е. для функции вида $\vec{f} = v_1\chi_{e_1} + \ldots + v_n\chi_{e_n}$, где $v_1, \ldots, v_n$ — точки из E и $e_1, \ldots, e_n$ — измеримые по Лебегу подмножества $\mathbb{R}^m$, это следует из очевидного неравенства

$$\frac{1}{r^m}\int_{B(x,r)} \|\vec{f}(y) - \vec{f}(x)\|\,dy \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{\|v_k\|}{r^m}\int_{B(x,r)} |\chi_{e_k}(y) - \chi_{e_k}(x)|\,dy,$$

правая часть которого почти везде бесконечно мала при $r \to 0$, поскольку почти все точки x суть точки Лебега функций χ_{e_k}.

Доказательство в общем случае можно получить дословным повторением рассуждения из п. IV.9.2 (с заменой абсолютной величины вещественной функции нормой вектор-функции).

VI.5. Пусть на множестве $X \times Y$ определено произведение $\mu \times \nu$ σ-конечных мер μ и ν и пусть измеримая на $X \times Y$ функция f удовлетворяет при некотором p, $1 \leqslant p < +\infty$, условию $\int_Y |f(x,y)|^p\,d\nu(y) < +\infty$ для почти всех $x \in X$. В этом случае возникает векторнозначная функция $\vec{g}\colon X \to \mathscr{L}^p(Y,\nu)$, определяемая равенством $\vec{g}(x) = f(x,\cdot)$ (в § V.3 она обозначалась символом f_x). Естественно спросить, будет ли функция $\vec{g}$ измерима по Бохнеру. Ответ на этот вопрос даёт следующее

Предложение 1. *При сделанных предположениях функция $\vec{g}$ измерима по Бохнеру.*

Доказательство. Предположим сначала, что $\iint_{X\times Y} |f(x,y)|^p\,d\mu(x)d\nu(y) < +\infty$. Так как мера $\mu \times \nu$ получена стандартным продолжением с полукольца обобщённых прямоугольников, то (см. задачу 3 § IX.2) простые функции вида

$$\sum_{k=1}^{n} c_k\chi_{A_k}\chi_{B_k}, \quad \text{где} \quad A_k \subset X,\ B_k \subset Y,\ c_k \text{ — скаляры}, \tag{3}$$

всюду плотны в пространстве $\mathscr{L}^p(X \times Y, \mu \times \nu)$. Поэтому найдётся последовательность функций f_n вида (3), сходящаяся к f в этом пространстве. Очевидно, вектор-функции $\vec{\xi}_n$, соответствующие f_n $(\vec{\xi}_n(x) = f_n(x,\cdot))$, являются простыми и

$$\int_X \|\vec{g} - \vec{\xi}_n\|^p_{\mathscr{L}^p(Y,\nu)}\,d\mu = \iint_{X\times Y} |f(x,y) - f_n(x,y)|^p\,d\mu(x)d\nu(y) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Следовательно, $\|\vec{g} - \vec{\xi}_n\|^p_{\mathscr{L}^p(Y,\nu)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ по мере, и по теореме Рисса существует такая подпоследовательность $\{\vec{\xi}_{n_k}\}_{k\geqslant 1}$, что $\|\vec{g} - \vec{\xi}_{n_k}\|^p_{\mathscr{L}^p(Y,\nu)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ почти везде. Это доказывает измеримость $\vec{g}$.

В общем случае представим X в виде объединения расширяющихся множеств X_n конечной меры и положим $E_n = \{x \in X_n \mid \int_Y |f(x,y)|^p\,d\nu(y) \leqslant n\}$. Заметим, что множество E_n измеримо, поскольку по теореме Тонелли измерима функция $x \mapsto \int_Y |f(x,y)|^p\,d\nu(y)$. Мы предоставляем читателю убедиться, что $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ — множество полной меры. Положим $f_n = f \cdot \chi_{E_n}$. Очевидно,

$$\iint_{X\times Y} |f_n(x,y)|^p\,d\mu(x)d\nu(y) = \iint_{E_n\times Y} |f(x,y)|^p\,d\mu(x)d\nu(y) \leqslant n\mu(X_n) < +\infty.$$

Как было установлено на первом этапе доказательства, вектор-функции $\vec{g}_n$, соответствующие функциям f_n, измеримы по Бохнеру. Кроме того,

$$\int_X \|\vec{g} - \vec{g}_n\|^p_{\mathscr{L}^p(Y,\nu)}\,d\mu = \int_{(X\setminus E_n)\times Y} |f(x,y)|^p\,d\mu(x)d\nu(y) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Поэтому существует такая подпоследовательность $\{n_k\}$, что

$$\|\vec{g}(x) - \vec{g}_{n_k}(x)\|_{\mathscr{L}^p(Y,\nu)} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \mu\text{-почти везде.}$$

Таким образом, вектор-функция $\vec{g}$ измерима как предел измеримых функций. ►

Как мы установили, измеримой функции двух переменных можно сопоставить измеримую вектор-функцию. Справедливо ли обратное? Подробнее, если $\vec{g}\colon X \to \mathscr{L}^p(Y,\nu)$ — измеримая вектор-функция, то можно ли утверждать, что равенство

$$f(x,y) = (\vec{g}(x))(y) \tag{4}$$

определяет измеримую функцию двух переменных? Не вдаваясь в обсуждение соответствующих контрпримеров, отметим, что ответ на этот вопрос отрицателен. Однако мы докажем, что измеримости f можно добиться, изменяя при каждом x функцию $\vec{g}(x)$ на множестве нулевой меры (что, очевидно, не нарушает измеримости вектор-функции $\vec{g}$).

Предложение 2. *Пусть $\vec{g}\colon X \to \mathscr{L}^p(Y,\nu)$ — измеримая вектор-функция. Тогда существует такая измеримая на $X\times Y$ функция h, что при почти всех $x \in X$ равенство $h(x,y) = (\vec{g}(x))(y)$ справедливо почти везде на Y.*

Доказательство. Ограничимся случаем, когда меры μ и ν конечны, а функция $\vec{g}$ суммируема, предоставляя читателю рассмотреть общий случай самостоятельно. Аппроксимируем $\vec{g}$ простыми функциями $\vec{g}_n$:

$$\|\vec{g}(x) - \vec{g}_n(x)\|_{\mathscr{L}^p(Y,\nu)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \ \text{ для почти всех } x \in X.$$

При этом не умаляя общности можно считать, что $\|\vec{g}_n(x)\|_{\mathscr{L}^p(Y,\nu)} \leqslant \|\vec{g}(x)\|_{\mathscr{L}^p(Y,\nu)}$ почти везде. Тогда в силу теоремы Лебега $I_n \equiv \int_X \|\vec{g} - \vec{g}_n\|_{\mathscr{L}^p(Y,\nu)}\,d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Каждая функция $\vec{g}_n$ порождает по формуле (4) функцию f_n двух переменных, которая, очевидно, измерима на $X\times Y$. Убедимся, что последовательность $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$ сходится в себе

в пространстве $\mathscr{L}^1(X \times Y, \mu \times \nu)$. В самом деле,

$$\|f_n - f_m\|_{\mathscr{L}^1(X\times Y,\mu\times\nu)} = \int_X \left(\int_Y |f_n(x,y) - f_m(x,y)|\, d\nu(y) \right) d\mu(x) \leqslant$$
$$\leqslant \int_X \nu(Y)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_Y |f_n(x,y) - f_m(x,y)|^p\, d\nu(y) \right)^{\frac{1}{p}} d\mu(x) =$$
$$= \nu(Y)^{\frac{1}{p'}} \int_X \|\vec{g}_n - \vec{g}_m\|_{\mathscr{L}^p(Y,\nu)}\, d\mu \to 0 \quad \text{при} \quad m, n \to \infty$$

(здесь p' — показатель, сопряжённый к p). Ввиду полноты пространства $\mathscr{L}^1(X \times Y, \mu \times \nu)$ существует предел h последовательности $\{f_n\}_{n\geqslant 1}$. Переходя в случае необходимости к подпоследовательности, можно считать, что

$$f_n(x,y) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} h(x,y) \quad \text{почти везде на} \quad X \times Y. \tag{5}$$

Убедимся, что функция h — искомая. Так как $\mu(X) < +\infty$ и $\|\vec{g}(x) - \vec{g}_n(x)\|_{\mathscr{L}^p(Y,\nu)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ почти везде на X, то по теореме Егорова при каждом $j \in \mathbb{N}$ можно найти такое множество $e_j \subset X$, что

$$\mu(e_j) < \frac{1}{j} \quad \text{и} \quad \|\vec{g}(x) - \vec{g}_n(x)\|_{\mathscr{L}^p(Y,\nu)} \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0 \quad \text{на} \quad E_j = X \setminus e_j.$$

Следовательно, $\vec{g}_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \vec{g}(x)$ по мере при каждом $x \in E_j$. Вместе с (5) это даёт нам, что при почти каждом $x \in E_j$ равенство $h(x,y) = (\vec{g}(x))(y)$ справедливо почти везде на Y. Ввиду произвольности j, это остаётся верным и при почти каждом x из $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j$, т. е. при почти всех x из X. ►

Пример. Пусть функция f измерима на $X \times Y$ и при некотором $p \geqslant 1$ удовлетворяет условию $\int_X \left(\int_Y |f(x,y)|^p\, d\nu(y) \right)^{\frac{1}{p}} d\mu(x) < +\infty$. Тогда соответствующая ей вектор-функция $\vec{g}$ (со значениями в $\mathscr{L}^p(Y,\nu)$) суммируема, и при почти всех $y \in Y$ справедливо равенство $\int_X f(x,y)\, d\mu(x) = \left(\int_X \vec{g}\, d\mu \right)(y)$.

Приведём доказательство, предполагая, что $\nu(Y) < +\infty$ и полагая $\|\vec{g}(x)\| = \|\vec{g}(x)\|_{\mathscr{L}^p(Y,\nu)}$. Пусть $\vec{g}$ — вектор-функция, связанная с f равенством (4). Если функция f простая, то утверждение очевидно.

Суммируемость $\vec{g}$ обеспечивается сделанным предположением:

$$\int_X \|\vec{g}(x)\|\, d\mu(x) = \int_X \left(\int_Y |f(x,y)|^p\, d\nu(y) \right)^{\frac{1}{p}} d\mu(x) < +\infty.$$

Из условия вытекает также суммируемость f на $X \times Y$:

$$\int_X \int_Y |f(x,y)|\, d\mu(x)\, d\nu(y) \leqslant \nu^{\frac{1}{p'}}(Y) \int_X \left(\int_Y |f(x,y)|^p\, d\nu(y) \right)^{\frac{1}{p}} d\mu(x) < +\infty.$$

Поэтому по теореме Фубини функция f суммируема на X при почти всех $y \in Y$. Рассмотрим последовательность простых вектор-функций $\vec{g}_n$, удовлетворяющих условиям:

$$\|\vec{g}_n(x) - \vec{g}(x)\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \|\vec{g}_n(x)\| \leqslant \|\vec{g}(x)\| \quad \text{при почти всех} \quad x \in X.$$

По определению интеграла $\int_X \vec{g}_n\,d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X \vec{g}\,d\mu$ по $\mathscr{L}^p$-норме, а следовательно, и по мере. Вместе с тем, считая, что функции f_n соответствуют вектор-функциям $\vec{g}_n$ согласно формуле (4), мы получаем:

$$\int_Y \left|\int_X f_n(x,y)\,d\mu(x) - \int_X f(x,y)\,d\mu(x)\right| d\nu(y) \leqslant$$
$$\leqslant \iint_{X\times Y} |f_n(x,y) - f(x,y)|\,d\mu(x)\,d\nu(y) \leqslant \nu^{\frac{1}{p'}}(Y) \int_X \|\vec{g}_n - \vec{g}\|\,d\mu \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(сходимость к нулю следует из теоремы Лебега). Отсюда вытекает, что

$$\int_X f_n(x,y)\,d\mu(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X f(x,y)\,d\mu(x) \quad \text{по мере } \nu.$$

Таким образом, последовательность функций $\int_X \vec{g}_n\,d\mu = \int_X f_n(x,\cdot)\,d\mu(x)$ сходится по мере к $\int_X f(x,\cdot)\,d\mu(x)$ и почти везде к $\int_X \vec{g}\,d\mu$, откуда и следует совпадение интегралов $\int_X \vec{g}\,d\mu$ и $\int_X f(x,\cdot)\,d\mu(x)$ почти везде.

Следствие. Пусть $1 \leqslant r < s < +\infty$, f — функция, измеримая на $X \times Y$. Тогда

$$\left(\int_Y \left(\int_X |f(x,y)|^r\,d\mu(x)\right)^{\frac{s}{r}} d\nu(y)\right)^{\frac{1}{s}} \leqslant \left(\int_X \left(\int_Y |f(x,y)|^s\,d\nu(y)\right)^{\frac{r}{s}} d\mu(x)\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Для доказательства нужно при $p = \frac{s}{r}$ примерить полученный в примере результат к функции $|f|^r$ и воспользоваться неравенством $\|\int_X \vec{g}\,d\mu\| \leqslant \int_X \|\vec{g}\|\,d\mu$. ►

VI.6. *Слабая и сильная измеримость.* Пусть E^* — пространство, сопряжённое к банахову пространству E, т. е. пространство всех заданных в E линейных непрерывных функционалов.

Определение 1. Векторнозначная функция $\vec{f}\colon X \to E$ называется *слабо измеримой*, если для любого функционала $\varphi \in E^*$ скалярная функция $x \mapsto \varphi(\vec{f}(x))$ измерима на X.

Из свойства 6) измеримых функций (см. п. Д.VI.2) вытекает, что всякая измеримая функция слабо измерима. Обратное неверно. Соответствующий контрпример мы рассмотрим в следующем пункте.

Установим простое достаточное условие, при выполнении которого слабо измеримая функция будет сильно измерима. Для этого нам потребуется понятие сепарабельного пространства. Напомним, что метрическое пространство называется сепарабельным, если оно содержит счётное всюду плотное множество (что равносильно справедливости для него второй аксиомы счётности).

Лемма. *Если E — сепарабельное нормированное пространство, то существует такая последовательность функционалов $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 1} \subset E^*$, что*

$$\|v\| = \sup_{n\geqslant 1} |\varphi_n(v)| \quad \text{при всех } v \text{ из } E.$$

Доказательство. Пусть $\{v_1, v_2, \dots\}$ — счётное всюду плотное в E множество. По теореме о достаточном числе функционалов, найдутся такие функционалы φ_n, что

$\|\varphi_n\| = 1$ и $\varphi_n(v_n) = \|v_n\|$ при каждом $n \in \mathbb{N}$. Убедимся, что выбранная таким образом последовательность $\{\varphi_n\}_{n\geqslant 1}$ является искомой. В самом деле, если $v \in E$ и $v_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} v$, то

$$\|v\| \geqslant \sup_{n\geqslant 1} |\varphi_n(v)| \geqslant \lim_{k\to\infty} |\varphi_{n_k}(v)| \geqslant \lim_{k\to\infty} \big(|\varphi_{n_k}(v_{n_k})| - |\varphi_{n_k}(v_{n_k} - v)|\big) \geqslant$$
$$\geqslant \lim_{k\to\infty} \big(\|v_{n_k}\| - \|v_{n_k} - v\|\big) = \|v\|. \ \blacktriangleright$$

Чтобы сформулировать основную теорему, нам потребуется ещё одно понятие.

Определение 2. Векторнозначная функция называется *почти сепарабельнозначной*, если множество её значений, принимаемых на некотором множестве полной меры, сепарабельно.

Теорема. *Векторнозначная функция $\vec{f}\colon X \to E$ измерима тогда и только тогда, когда она слабо измерима и почти сепарабельнозначна.*

Доказательство. Если функция $\vec{f}$ измерима, то она и слабо измерима (это было отмечено после определения 1). Для доказательства её почти сепарабельнозначности рассмотрим произвольную последовательность простых функций $\{\vec{f}_n\}_{n\geqslant 1}$, сходящуюся почти всюду к $\vec{f}$. Пусть L — замкнутая линейная оболочка объединения множеств значений функций $\vec{f}_n$. Так как множество значений каждой простой функции конечно, то подпространство L сепарабельно. Поскольку оно замкнуто и содержит все значения функций $\vec{f}_n$, оно содержит и все точки $\vec{f}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \vec{f}_n(x)$. Таким образом, $\vec{f}(x) \in L$ при почти всех $x \in X$, что и означает почти сепарабельнозначность функции $\vec{f}$.

Пусть теперь функция $\vec{f}$ слабо измерима и почти сепарабельнозначна. Заметим прежде всего, что не умаляя общности мы можем считать множество её значений сепарабельным (иначе функцию можно изменить на множестве меры нуль, что не влияет на измеримость). Поэтому и пространство E мы можем (и будем в дальнейшем) считать сепарабельным, заменяя его в противном случае замыканием линейной оболочки множества $\vec{f}(X)$. Отметим также, что при каждом $a \in E$ функция $h_a(x) = \|f(x) - a\|$ $(x \in X)$ измерима. Это следует из равенства

$$\|\vec{f}(x) - a\| = \sup_{n\geqslant 1} |\varphi_n(\vec{f}(x) - a)|,$$

установленного в лемме (φ_n — функционалы из этой леммы) и показывающего, что функция h_a является верхней гранью последовательности измеримых функций $x \mapsto$ $\mapsto \big|\varphi_n(\vec{f}(x)) - \varphi_n(a)\big|$.

Чтобы убедиться в измеримости функции $\vec{f}$, мы покажем, что она есть предел последовательности измеримых функций. Для этого, очевидно, достаточно проверить, что $\vec{f}$ можно равномерно аппроксимировать измеримыми функциями.

Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$ и, пользуясь сепарабельностью множества $\vec{f}(X)$, покроем его последовательностью шаров $B(v_n, \varepsilon)$. Рассмотрим множества

$$X_n = \big\{x \in X \,\big|\, \|\vec{f}(x) - v_n\| < \varepsilon\big\}, \quad Y_1 = X_1, \quad Y_n = X_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} X_k \ \text{ при } \ n > 1.$$

Так как $\bigcup\limits_{n\geqslant 1} B(v_n, \varepsilon) \supset \vec{f}(X)$, то $\bigcup\limits_{n\geqslant 1} X_n = X$. Множества X_n, а с ними и множества Y_n, измеримы ввиду уже отмеченной измеримости функций h_a. Кроме того, множества Y_n,

очевидно, попарно дизъюнктны и $\bigcup\limits_{n\geqslant 1} Y_n = \bigcup\limits_{n\geqslant 1} X_n = X$. Положим теперь $\vec{g}(x) = v_n$, если $x \in Y_n$. Ясно, что функция $\vec{g}$ измерима как сумма поточечно сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \chi_{Y_n} \cdot v_n$ простых функций $\chi_{Y_n} \cdot v_n$. Наконец, если x произвольная точка из X, то при некотором n справедливо включение $x \in Y_n \subset X_n$. В таком случае $\vec{f}(x) \in B(v_n, \varepsilon)$ и

$$\|\vec{f}(x) - \vec{g}(x)\| = \|\vec{f}(x) - v_n\| < \varepsilon.$$

Таким образом, возможность равномерной аппроксимации $\vec{f}$ измеримыми функциями доказана. ►

Пример. Пусть K — компактное метризуемое пространство. Рассмотрим функцию $h\colon \mathbb{R}^m \times K \to \mathbb{C}$, удовлетворяющую условиям

а) для почти всех $x \in \mathbb{R}^m$ она непрерывна по второй переменной;

б) для всех значений $u \in K$ она измерима по первой переменной.

Такие функции, называемые функциями Каратеодори, используются в связи с некоторыми задачами вариационного исчисления. Убедимся, что связанная с функцией Каратеодори вектор-функция $\vec{f}\colon \mathbb{R}^m \to C(K)$, определяемая равенством $\vec{f}(t) = h(t, \cdot)$, измерима по Бохнеру. Ввиду сепарабельности пространства $C(K)$ нам, согласно доказанной теореме, достаточно доказать слабую измеримость функции $\vec{f}$. Учитывая общий вид функционала в $C(K)$, для этого достаточно проверить, что если μ — произвольная конечная борелевская мера в K, то функция

$$x \mapsto \varphi(x) = \int_K h(x, u)\, d\mu(u) \qquad (x \in \mathbb{R}^m)$$

измерима. Это следовало бы из теоремы Фубини, если бы можно было гарантировать измеримость функции h как функции двух переменных. Однако в измеримости функции φ нетрудно убедиться и без этого. В самом деле, это так, поскольку при каждом $x \in \mathbb{R}^m$ интеграл $\int_K h(x, u)\, d\mu(u)$ есть предел последовательности интегральных сумм вида

$$\sum_{j=1}^{n} h(x, u_j)\, \mu(e_j),$$

которые измеримы на $\mathbb{R}^m$ благодаря условию б).

Если функция $x \mapsto \|\vec{f}(x)\| = \max\limits_{u\in K} |h(x, u)|$ локально суммируема, то опираясь на свойство 7) п. Д.VI.4 мы можем утверждать, что почти каждая точка $x \in \mathbb{R}^m$ есть точка Лебега вектор-функции $\vec{f}$. Таким образом, в рассматриваемом случае функция Каратеодори обладает следующим свойством:

$$\frac{1}{r^m} \int_{B(x,r)} \sup_{u\in K} |h(y, u) - h(y, x)|\, dy \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{почти везде.}$$

VI.7. В заключение приведём пример слабо, но не сильно измеримой функции.

Возьмём в качестве E пространство $c_0\big([0, 1]\big)$, состоящее из таких функций $v\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, что множества $\{x \in [0, 1] \mid |v(x)| > \varepsilon\}$ конечны при любом $\varepsilon > 0$. Очевидно, что все такие функции ограничены. Введём в E равномерную норму: $\|v\| = \sup\limits_{[0,1]} |v|$.

Мы предоставляем читателю убедиться, что пространство E, снабжённое этой нормой, полно, а сопряжённое пространство E^* можно отождествить с пространством $l^1\big([0,1]\big)$ всех суммируемых числовых семейств, определённых на $[0,1]$. Напомним, что если $\varphi = \{\varphi_x\}_{x\in[0,1]}$ — суммируемое семейство, то множество $\{x \in X \mid \varphi_x \neq 0\}$ не более, чем счётно. Норма в $l^1\big([0,1]\big)$ и двойственность между $c_0\big([0,1]\big)$ и $l^1\big([0,1]\big)$ устанавливаются с помощью равенств

$$\|\varphi\| = \sum_{x\in[0,1]} |\varphi_x|, \quad \varphi(v) = \sum_{x\in[0,1]} \varphi_x v(x), \qquad \text{где} \quad v \in c_0\big([0,1]\big), \quad \varphi \in l^1\big([0,1]\big).$$

Пусть μ — мера Лебега на промежутке $[0,1]$ и пусть символ $\chi_{\{x\}}$ обозначает характеристическую функцию одноточечного множества $\{x\}$. Положим

$$f_0(x) = \chi_{\{x\}} \in c_0\big([0,1]\big) \ \text{ при } \ x \in [0,1].$$

Тогда при каждом φ из $l^1\big([0,1]\big)$ скалярная функция $x \mapsto \varphi(f_0(x)) = \varphi_x$ измерима, поскольку множество тех x, при которых $w_x \neq 0$, не более чем счётно. Таким образом, функция f_0 слабо измерима. Вместе с тем она не измерима по Бохнеру. Чтобы доказать это, достаточно, согласно теореме Д.VI.6, убедиться, что она не является почти сепарабельнозначной. Мы предоставляем читателю доказать, что справедливо и следующее, более сильное, утверждение:

при отображении f_0 образ всякого несчётного подмножества отрезка $[0,1]$ не сепарабелен

(поскольку он содержит несчётно много точек, расстояние между которыми равно единице).

УПРАЖНЕНИЯ

1) Пусть $(X, \mathfrak{A}, \mu)$ — пространство с мерой, E — банахово пространство. Докажите, что для измеримости векторнозначной функции $\vec{f}\colon X \to E$ необходимо, а если E сепарабельно, то и достаточно, чтобы $\vec{f}$-прообраз всякого открытого множества был измерим. Убедитесь, что от сепарабельности отказаться нельзя.

2) Пусть сильно измеримая функция $\vec{f}\colon X \to E$ удовлетворяет условию:

$$\operatorname*{vraisup}_{x\in X} \big|\varphi(\vec{f}(x))\big| < +\infty \quad \text{ для любого функционала } \varphi \ \text{ из } \ E^*.$$

Докажите, что а) $\sup\limits_{\|\varphi\|\leqslant 1} \operatorname*{vraisup}\limits_{x\in X} \big|\varphi(\vec{f}(x))\big| < +\infty$; б) $\operatorname*{vraisup}\limits_{x\in X} \|\vec{f}(x)\| < +\infty$ (по поводу обозначения $\operatorname*{vraisup}\limits_{x\in X} \|\vec{f}(x)\|$ см. п. IV.4.5).

3) Пусть сильно измеримая функция $\vec{f}\colon X \to E$ слабо суммируема, т. е. удовлетворяет условию: $\varphi \circ \vec{f} \in \mathscr{L}^1(X,\mu)$ для любого функционала φ из E^*. Докажите, что $\sup\limits_{\|\varphi\|\leqslant 1} \int_X |\varphi \circ \vec{f}|\, d\mu < +\infty$. Покажите на примере, что функция $\|\vec{f}\|$ может не быть суммируемой.

4) Пусть $X = [0,1]$, μ — мера Лебега и пусть r_n $(n \in \mathbb{N})$ — функции Радемахера (см. п. VI.4.5). Докажите, что функция $\vec{R}\colon [0,1] \to l^\infty$, определяемая равенством $\vec{R}(x) = \{r_n(x)\}_{n\geqslant 1}$, не будет почти сепарабельнозначной (здесь l^∞ — пространство ограниченных числовых последовательностей $v = \{v_n\}_{n\geqslant 1}$ с нормой $\|v\| = \sup\limits_{n\geqslant 1} |v_n|$).

VII. Гладкие отображения

В этом добавлении приводится сводка основных свойств гладких отображений, используемых в книге. Говоря о них, мы предполагаем, что читатель знаком с понятиями частной производной, дифференцируемой функции и теоремой о дифференцируемости функции, имеющей непрерывные частные производные.

Всюду далее $\mathcal{O}$ — открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^m$. Как и раньше, скалярное произведение векторов x и y из $\mathbb{R}^m$ обозначается символом $\langle x, y\rangle$. Линейное отображение $A\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ отождествляется с матрицей, соответствующей ему в каноническом базисе. Его нормой $\|A\|$ (или нормой соответствующей матрицы) называется $\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1} \|A(x)\|$.

VII.1. Определение. Отображение $T\colon \mathcal{O} \to \mathbb{R}^n$ называется *дифференцируемым* в точке $a \in \mathcal{O}$, если существует такое линейное отображение $A\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, что

$$T(a+h) - T(a) = A(h) + \alpha(h),$$

где $\alpha(h) = o(h)$ при $h \to 0$, т. е. $\frac{\alpha(h)}{\|h\|} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$.

Отображение A, определяемое, как легко убедиться, единственным образом, называется *дифференциалом* отображения T в точке a. Оно обозначается символом d_aT, а его матрица в каноническом базисе — символом $T'(a)$. Отметим, что дифференциал линейного отображения совпадает с ним самим.

Если $f_1, \dots, f_n$ — координатные функции отображения T, то дифференцируемость T равносильна дифференцируемости координатных функций. Матрица T' есть не что иное, как прямоугольная матрица

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}.$$

Она называется *матрицей Якоби* системы функций $f_1, \dots, f_n$.

Следующее утверждение показывает, что обычное правило дифференцирования сложной функции естественным образом обобщается на отображения.

Предложение. *Пусть отображение R есть композиция отображений T и S: $R = S \circ T$. Если T дифференцируемо в точке a, а S дифференцируемо в точке $b = T(a)$, то R дифференцируемо в точке a и*

$$R'(a) = S'(b) \cdot T'(a). \tag{1}$$

Доказательство. Пусть A и B — дифференциалы отображений T и S в точках a и b соответственно. Тогда при достаточно малых h и η

$$T(a+h) - T(a) = A(h) + \|h\|\,\omega(h), \quad \text{где} \quad \omega(h) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0,$$
$$S(b+\eta) - S(b) = B(\eta) + \|\eta\|\,\widetilde{\omega}(\eta), \quad \text{где} \quad \widetilde{\omega}(\eta) \underset{\eta\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Считая, что $\widetilde{\omega}(0) = 0$, подставим в последнее равенство $\eta = T(a+h) - T(a)$. Тогда мы получим:

$$R(a+h) - R(a) = B(T(a+h) - T(a)) + \|T(a+h) - T(a)\|\, \widetilde{\omega}\big(T(a+h) - T(a)\big) = \\ = B \circ A(h) + \gamma(h),$$

где $\gamma(h) = \|h\|\, B(\omega(h)) + \|T(a+h) - T(a)\|\, \widetilde{\omega}\big(T(a+h) - T(a)\big)$. Для завершения доказательства нам остаётся убедиться, что $\gamma(h)$ есть бесконечно малая величина высшего порядка по сравнению с h. Действительно,

$$\frac{\|\gamma(h)\|}{\|h\|} \leqslant \|B\|\, \|\omega(h)\| + \frac{\|T(a+h) - T(a)\|}{\|h\|}\, \|\widetilde{\omega}(T(a+h) - T(a))\|.$$

Поскольку $\|T(a+h) - T(a)\| = O\big(\|h\|\big)$ при $h \to 0$, а $\widetilde{\omega}\big(T(a+h) - T(a)\big) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$, мы видим, что $\frac{\gamma(h)}{\|h\|} \underset{h\to 0}{\longrightarrow} 0$. ►

Отображение T называется C^r-гладким в $\mathcal{O}$ ($r \in \mathbb{N}$), если его координатные функции имеют в $\mathcal{O}$ непрерывные частные производные до порядка r включительно. Отображение, координатные функции которого имеют непрерывные частные производные всех порядков, называется C^∞-гладким. Множество C^r-гладких отображений из $\mathcal{O}$ в $\mathbb{R}^n$ обозначается символом $C^r(\mathcal{O}, \mathbb{R}^n)$ ($r = 1, 2, \ldots, +\infty$).

Из приведённого выше предложения с помощью индукции нетрудно вывести

Следствие. *Композиция отображений класса C^r ($r = 1, 2, \ldots, +\infty$) снова есть отображение того же класса.*

VII.2. Докажем утверждение, обобщающее классическую теорему Лагранжа о приращении дифференцируемой функции.

Теорема (неравенство Лагранжа). *Если отображение T дифференцируемо во всех точках отрезка $[x, y] = \{(1-t)x + ty \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}$, то*

$$\|T(y) - T(x)\| \leqslant \sup_{z \in [x,y]} \|T'(z)\|\, \|y - x\|.$$

Доказательство. Положим $\Delta = T(y) - T(x)$. Чтобы оценить длину этого вектора, введём вспомогательную функцию $\varphi(t) = \big\langle T(x + t(y-x)), \Delta\big\rangle$ ($t \in [0,1]$). Ясно, что $\varphi(0) = \langle T(x), \Delta\rangle$, $\varphi(1) = \langle T(y), \Delta\rangle$ и, следовательно,

$$\|\Delta\|^2 = \big\langle T(y) - T(x),\, \Delta\big\rangle = \varphi(1) - \varphi(0).$$

По предложению Д.VII.1 функция φ дифференцируема и

$$\varphi'(t) = \big\langle T'(x + t(y-x))(y-x),\, \Delta\big\rangle.$$

Согласно теореме Лагранжа существует такое число $c \in (0,1)$, что $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(c)$. Поэтому

$$\|\Delta\|^2 = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(c) = \big\langle T'\big(x + c(y-x)\big)(y-x),\ \Delta\big\rangle \leqslant \\ \leqslant \big\|T'\big(x + c(y-x)\big)(y-x)\big\|\, \|\Delta\| \leqslant \big\|T'\big(x + c(y-x)\big)\big\|\, \|y - x\|\, \|\Delta\|,$$

из чего, очевидно, вытекает утверждение теоремы. ►

Следствие 1. *Если отображение T дифференцируемо во всех точках отрезка $[x_0, x_0+h]$, то*

$$\big\|T(x_0+h)-T(x_0)-T'(x_0)(h)\big\| \leqslant \sup_{z\in[x_0,x_0+h]} \|T'(z)-T'(x_0)\|\,\|h\|. \tag{2}$$

Для доказательства следует применить теорему к отображению $x \mapsto T(x)-T'(x_0)(x)$, пользуясь тем, что дифференциал линейного отображения совпадает с ним самим.

Следствие 2. *Пусть $T \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}^n)$. Тогда на каждом выпуклом компактном множестве K, $K \subset \mathcal{O}$, отображение T удовлетворяет условию Липшица, т. е. при некотором L ($L < +\infty$)*

$$\|T(x)-T(y)\| \leqslant L\,\|x-y\| \quad \text{для любых } x,\, y \in K.$$

Доказательство. Положим $L = \max\limits_{z\in K} \|T'(z)\|$. Так как функция $z \mapsto \|T'(z)\|$ непрерывна в $\mathcal{O}$, то $L < +\infty$. Пользуясь неравенством Лагранжа, мы для любых точек x, y из K получаем

$$\|T(x)-T(y)\| \leqslant \max_{z\in[x,y]} \|T'(z)\|\,\|x-y\| \leqslant L\,\|x-y\|. \ \blacktriangleright$$

VII.3. Перейдём теперь к вопросу об обратимости гладкого отображения. Гладкое отображение $T\colon \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$ ($\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m$), обратное к которому также гладко, называется *диффеоморфизмом*. Необходимое условие того, что отображение T есть диффеоморфизм, состоит в обратимости матрицы $T'(x)$ при всех x в $\mathcal{O}$. В самом деле, если T диффеоморфизм, то $T^{-1}(T(x)) \equiv x$. Согласно формуле (1) дифференцирования композиции $\left(T^{-1}\right)'(T(x)) \cdot T'(x) = \mathrm{id}$. Поэтому

$$\det(T'(x)) \neq 0 \quad \text{при всех } \ x \in \mathcal{O}. \tag{3}$$

Обратимость $T'(x)$ не влечёт, однако, взаимной однозначности отображения T, в чём можно убедиться на примере отображения $T(u,v) = (u^2-v^2, 2uv)$, где $(u,v) \in \mathcal{O} = \mathbb{R}^2 \backslash 0$.

Прежде чем переходить к теореме о гладкости обратного отображения, мы установим, что при выполнении условия (3) отображение T открыто, т. е. преобразует открытые множества снова в открытые множества. Предварительно получим один технический результат.

Лемма. *Пусть $T\colon \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$. Если T дифференцируемо в точке $x_0 \in \mathcal{O}$ и производная $T'(x_0)$ обратима, то существуют такие числа $c > 0$, $\delta > 0$, что $B(x_0,\delta) \subset \mathcal{O}$ и $\|T(x)-T(x_0)\| \geqslant c\|x-x_0\|$ при $\|x-x_0\| < \delta$.*

Доказательство. Если отображение T линейно, то оно обратимо, поскольку $T' = T$. Так как $\|T^{-1}(y)\| \leqslant \|T^{-1}\|\,\|y\|$, то при $y = T(x)$ мы получаем: $\|x\| \leqslant \|T^{-1}\|\,\|T(x)\|$, что доказывает справедливость леммы с $c = \frac{1}{\|T^{-1}\|}$.

В общем случае $T(x)-T(x_0) = A(x-x_0) + \|x-x_0\|\,\omega(x)$, где $A = T'(x_0)$, а $\omega(x) \to 0$ при $x \to x_0$. Следовательно,

$$\|T(x)-T(x_0)\| \geqslant \|A(x-x_0)\| - \|x-x_0\|\,\|\omega(x)\| \geqslant \left(\frac{1}{\|A^{-1}\|} - \|\omega(x)\|\right)\|x-x_0\|.$$

Это доказывает лемму с $c = \frac{1}{2\|A^{-1}\|}$, так как $\|\omega(x)\| < \frac{1}{2\|A^{-1}\|}$ при x достаточно близких к x_0. $\blacktriangleright$

Теорема (об открытом отображении). *Если отображение $T \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m)$ удовлетворяет условию (3), то множество $\mathcal{O}' = T(\mathcal{O})$ открыто.*

Доказательство. Докажем, что каждая точка $y_0 \in \mathcal{O}'$ — внутренняя. Пусть $y_0 = T(x_0)$, $A = T'(x_0)$, и пусть $c > 0$ и $\delta > 0$ — такие, как в лемме:

$$\|T(x_0 + h) - T(x_0)\| \geqslant c\|h\| \quad \text{при} \quad \|h\| < \delta.$$

Уменьшая в случае необходимости δ, можно считать, что $\overline{B}(x_0, \delta) \subset \mathcal{O}$. Тогда $T(x_0 + h) \neq T(x_0)$ при $\|h\| = \delta$. Поэтому $y_0 = T(x_0) \notin Q = T(K)$, где $K = \partial\big(B(x_0, \delta)\big)$. Пусть $\operatorname{dist}(y_0, Q) = 2r$. Убедимся, что $B(y_0, r) \subset \mathcal{O}'$. Заметим, что при $y \in B(y_0, r)$ и $x \in K$ справедливо неравенство $\|T(x) - y\| \geqslant r$. Зафиксируем теперь произвольную точку y из $B(y_0, r)$ и покажем, что она является значением отображения T. Для этого введём вспомогательную функцию $F(x) = \|T(x) - y\|^2$ $(x \in \mathcal{O})$. Очевидно, T принимает в шаре $\overline{B}(x_0, \delta)$ значение y в том и только том случае, если наименьшее значение F в этом шаре равно нулю. Убедимся, что это действительно так. В самом деле, очевидно, $F(x_0) < r^2$ и $F(x) \geqslant r^2$ при $x \in K$. Поэтому наименьшее значение F достигается в некоторой внутренней точке $\overline{x}$ шара $\overline{B}(x_0, \delta)$. Следовательно, в этой точке все частные производные функции F обращаются в нуль. Чтобы записать это подробнее, введём координатные функции $f_1, \dots, f_m$ отображения T и будем считать, что $y = (y_1, \dots, y_m)$. Тогда $F(x) = \sum\limits_{k=1}^{m} (f_k(x) - y_k)^2$ и, следовательно,

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(\overline{x}) = 2\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\overline{x})(f_k(\overline{x}) - y_k) = 0 \quad \text{при} \quad j = 1, \dots, m.$$

Матрица этой однородной линейной системы есть не что иное, как транспонированная матрица $T'(\overline{x})$. Так как $\det(T'(\overline{x})) \neq 0$, то система имеет лишь тривиальное решение, что равносильно равенству $T(\overline{x}) = y$. Таким образом, $y \in T\big(B(x_0, \delta)\big) \subset \mathcal{O}'$. Ввиду произвольности $y \in B(y_0, r)$ это означает, что $B(y_0, r) \subset \mathcal{O}'$, и, следовательно, точка y_0 — внутренняя для $\mathcal{O}'$. ▶

Замечание. Если множество $\mathcal{O}$ является областью (связным открытым множеством), то, очевидно, множество $\mathcal{O}' = T(\mathcal{O})$ также область. Поэтому доказанную теорему называют иногда также теоремой о сохранении области.

VII.4. Пусть $GL(m)$ — множество обратимых матриц размера $m \times m$. Мы будем рассматривать его как подмножество пространства $\mathbb{R}^{m^2}$.

Лемма. *Множество $GL(m)$ открыто и отображение $A \mapsto A^{-1}$ бесконечно гладко на $GL(m)$.*

Доказательство. Убедимся, что множество $GL(m)$ открыто. Пусть $A \in GL(m)$. Тогда $\|A(x)\| \geqslant \frac{\|x\|}{\|A^{-1}\|}$. Поэтому если $B\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ — линейное отображение и $\|B - A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$, то при любом $x \in \mathbb{R}^m$, $x \neq 0$,

$$\|B(x)\| = \big\|A(x) + (B(x) - A(x))\big\| \geqslant \|A(x)\| - \|B(x) - A(x)\| \geqslant \frac{\|x\|}{\|A^{-1}\|} - \|B - A\|\,\|x\| > 0,$$

откуда следует, что $\operatorname{Ker}(B) = \{0\}$, и, следовательно, отображение B обратимо.

Бесконечная дифференцируемость отображения $A \mapsto A^{-1}$ вытекает из того факта, что его координатные функции представляют собой отношения алгебраических дополнений к определителю матрицы A, и поэтому являются дробно-рациональными функциями её элементов. ▶

Теорема (о диффеоморфизме). *Пусть $T \in C^r(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m)$ $(r = 1, 2, \dots, +\infty)$. Если отображение T обратимо и удовлетворяет условию (3), то T^{-1} есть гладкое отображение класса C^r.*

Как мы уже отмечали, условие (3) необходимо для гладкости обратного отображения.

Доказательство. Сначала докажем теорему в случае $r = 1$.

Из теоремы об открытом отображении следует, что множество $\mathcal{O}' = T(\mathcal{O})$ открыто. По этой же теореме образ любого открытого множества $U \subset \mathcal{O}$ открыт. Положив $S = T^{-1}$, равенство $V = T(U)$ можно переписать в виде $V = S^{-1}(U)$. Таким образом, при отображении S прообраз любого открытого множества открыт, что доказывает непрерывность S. Проверим его дифференцируемость в произвольной точке $y_0 \in \mathcal{O}'$. Пусть $y_0 = T(x_0)$, $A = T'(x_0)$. Тогда

$$T(x) - T(x_0) = A(x - x_0) + \|x - x_0\|\, \omega(x), \tag{4}$$

где $\omega(x) \to 0$ при $x \to x_0$, $\omega(x_0) = 0$. Заметим, что

$$\|T(x) - T(x_0)\| \geqslant c\|x - x_0\| \quad \text{для} \quad x \in B(x_0, \delta), \tag{5}$$

где c и δ — числа из леммы Д.VII.3. Рассмотрим произвольную точку $y \in \mathcal{O}'$ и положим $x = S(y)$. Подставляя $x = S(y)$ и $x_0 = S(y_0)$ в (4), мы получаем:

$$y - y_0 = A(S(y) - S(y_0)) + \|S(y) - S(y_0)\|\omega(S(y)),$$

то есть

$$S(y) - S(y_0) = A^{-1}(y - y_0) - \|S(y) - S(y_0)\|\, A^{-1}\big(\omega(S(y))\big).$$

Нам остаётся доказать, что величина $\beta(y) = -\|S(y) - S(y_0)\|\, A^{-1}\big(\omega(S(y))\big)$ при $y \to y_0$ есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с $\|y - y_0\|$. Ввиду непрерывности отображения S точку y можно считать настолько близкой к y_0, что $\|x - x_0\| = \|S(y) - S(y_0)\| < \delta$. Это позволяет воспользоваться неравенством (5) при оценке $\|\beta(y)\|$:

$$\|\beta(y)\| = \|x - x_0\|\, \|A^{-1}(\omega(S(y)))\| \leqslant \frac{1}{c}\|T(x) - T(x_0)\|\, \|A^{-1}\|\, \|\omega(S(y))\| = \\ = \frac{\|A^{-1}\|}{c}\|y - y_0\|\, \|\omega(S(y))\|.$$

Так как $x = S(y) \to x_0$, то $\omega(S(y)) \to 0$ при $y \to y_0$, и поэтому $\beta(y) = o\big(\|y - y_0\|\big)$ при $y \to y_0$, что завершает доказательство дифференцируемости S в точке y_0. При этом из определения дифференцируемости следует, что $S'(y_0) = A^{-1} = (T'(x_0))^{-1}$.

Итак, отображение $S = T^{-1}$ дифференцируемо в каждой точке, причём

$$S'(y) = \big(T'(T^{-1}(y))\big)^{-1}.$$

(Заметим, что до сих пор в нашем доказательстве, как и в теореме об открытом отображении, мы использовали не гладкость, а лишь дифференцируемость отображения T.)

Докажем теперь гладкость отображения S. Переход от y к $S'(y)$ можно представить в виде композиции

$$y \mapsto T^{-1}(y) = x \mapsto T'(x) = A \mapsto A^{-1} = S'(y).$$

Каждое из трёх отображений, указанных этой цепочке, непрерывно, что влечёт непрерывность $S'(y)$, т. е. C^1-гладкость отображения S.

Доказательство гладкости при произвольном r проводится по индукции (при этом следует иметь в виду, что согласно лемме обращение матрицы есть бесконечно гладкое отображение). ►

VII.5. Как мы отмечали, условие (3) не влечёт обратимости отображения. Однако обратимость можно гарантировать, если рассматривать отображение “в малом”.

Теорема (о локальной обратимости). *Пусть $T \in C^1(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m)$, $x_0 \in \mathcal{O}$. Если матрица $T'(x_0)$ обратима, то существует такая окрестность $U \subset \mathcal{O}$ точки x_0, что сужение T на U есть диффеоморфизм.*

Доказательство. Мы должны доказать, что сужение T на некоторую окрестность точки x_0 обратимо и удовлетворяет условию (3).

Так как матрица $T'(x_0)$ обратима, то $\|T'(x_0)(h)\| \geqslant c\,\|h\|$ при некотором $c > 0$ и всех $h \in \mathbb{R}^m$. Зафиксируем такой шар $B(x_0, r) \subset \mathcal{O}$, что $\det(T'(x)) \neq 0$ и $\|T'(x) - T'(x_0)\| < \frac{c}{4}$ при $x \in B(x_0, r)$ (на самом деле первое условие следует из второго, но мы не будем на этом останавливаться). Заметим, что при всех x, $z \in B(x_0, r)$

$$\|T'(x) - T'(z)\| \leqslant \|T'(x) - T'(x_0)\| + \|T'(x_0) - T'(z)\| < \frac{c}{4} + \frac{c}{4} = \frac{c}{2}. \tag{6}$$

Убедимся, что окрестность $U = B(x_0, r)$ — искомая. Согласно предыдущей теореме нам достаточно проверить, что сужение отображения T на U обратимо, т. е. что T взаимно однозначно на U. В самом деле, пусть x, $y \in U$, $y = x + h \neq x$. Очевидно,

$$T(y) - T(x) = T(x+h) - T(x) - T'(x)(h) + \big(T'(x) - T'(x_0)\big)(h) + T'(x_0)(h).$$

Используя неравенства (2) и (6), мы получаем, что

$$\begin{aligned}\|T(y) - T(x)\| &\geqslant \|T'(x_0)(h)\| - \big\|T(x+h) - T(x) - T'(x)(h)\big\| - \big\|(T'(x) - T'(x_0))(h)\big\| \geqslant \\ &\geqslant c\|h\| - \sup_{z \in [x,y]} \|T'(z) - T'(x)\|\|h\| - \|T'(x) - T'(x_0)\|\,\|h\| > \\ &> c\|h\| - \frac{c}{2}\|h\| - \frac{c}{4}\|h\| = \frac{c}{4}\|h\| > 0.\end{aligned}$$

Тем самым взаимная однозначность сужения T на U доказана, а вместе с этим доказана и теорема. ►

VII.6. Здесь мы будем рассматривать гладкое отображение $F\colon G \to \mathbb{R}^n$, определённое на открытом подмножестве G пространства $\mathbb{R}^{m+n}$. Оно отождествляется с декартовым произведением $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, а точка $z \in \mathbb{R}^{m+n}$ — с парой (x, y), где $x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Пусть $F_1, \dots, F_n$ — координатные функции отображения F. Матрица F' имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} & \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}.$$

Левую и правую части этой матрицы

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_m} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

будем обозначать F'_x и F'_y соответственно. Отметим, что F'_y — квадратная $n \times n$ матрица.

Будем исследовать вопрос о разрешимости уравнения

$$F(x,y)=0 \tag{7}$$

относительно y. Для уточнения введём следующее

Определение. Пусть P, Q — открытые параллелепипеды в пространствах $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ соответственно, $P\times Q\subset G$. Будем говорить, что уравнение (7) определяет в $P\times Q$ неявное отображение, если существует такое отображение $f\colon P\to Q$, что

$$F(x,f(x))=0 \qquad \text{при всех } \ x\in P.$$

Заметим, что уравнение (7) определяет в $P\times Q$ единственное неявное отображение в том и только том случае, когда при любом $x\in P$ существует лишь единственная точка $y\in Q$, удовлетворяющая уравнению (7).

Теорема (о неявной функции). *Пусть G — открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^{m+n}$, $F\in C^r(G,\mathbb{R}^n)$ ($r=1,\,2,\,\dots,\,+\infty$), $(a,b)\in G$. Если $F(a,b)=0$ и матрица $F'_y(a,b)$ обратима, то существуют такие открытые кубы $P\subset\mathbb{R}^m$ и $Q\subset\mathbb{R}^n$, $P\times Q\subset G$ с центрами в точках a и b соответственно, что в $P\times Q$ уравнение (7) определяет единственное неявное отображение f. Оно C^r-гладко и при всех $x\in P$*

$$f'(x)=-\bigl[F'_y(x,f(x))\bigr]^{-1}F'_x(x,f(x)). \tag{8}$$

Из теоремы вытекает, что если в точке $z_0\in G$ ранг матрицы F' максимален (равен n), то в окрестности z_0 множество уровня $\{z\in G\,|\,F(z)=F(z_0)\}$ есть простое m-мерное многообразие класса C^r, параметризацией которого служит неявная функция, определяемая уравнением $F(z)-F(z_0)=0$.

Доказательство. Определим вспомогательное отображение $\Phi\colon G\to\mathbb{R}^{m+n}$ равенством

$$\Phi(x,y)=(x,F(x,y)) \qquad ((x,y)\in G).$$

Очевидно, $\Phi\in C^r(G,\mathbb{R}^{m+n})$, $\Phi(a,b)=(a,0)$ и

$$\Phi'=\begin{pmatrix} I & 0\\ F'_x & F'_y\end{pmatrix},$$

где I обозначает единичную $m\times m$ матрицу. Отображение Φ преобразует точки, удовлетворяющие уравнению (7), в точки, принадлежащие подпространству $\mathbb{R}^m\times\{0\}$, которое мы будем отождествлять с $\mathbb{R}^m$. Так как $\det(\Phi'(x,y))=\det(F'_y(x,y))\neq 0$ в окрестности точки (a,b), то по теореме о локальной обратимости найдётся такой содержащийся в G куб $Q_0=Q'\times Q$ с центром в этой точке, что сужение Φ на него есть диффеоморфизм. Множество $G_0=\Phi(Q_0)$ открыто и содержит точку $\Phi(a,b)=(a,0)$. Определённое в G_0 отображение, обратное к сужению Φ на Q_0, обозначим Ψ. Так как Φ не меняет первые m координат аргумента, то таким же свойством обладает и обратное отображение. Поэтому $\Psi(u,v)=(u,H(u,v))$, где $H\colon G_0\to\mathbb{R}^n$. Пересечение $G_0\cap\mathbb{R}^m$ открыто в $\mathbb{R}^m$. Поэтому найдётся такой куб $P\subset\mathbb{R}^m$ с центром в a, что $P\subset G_0\cap\mathbb{R}^m$ (см. рис. 21).

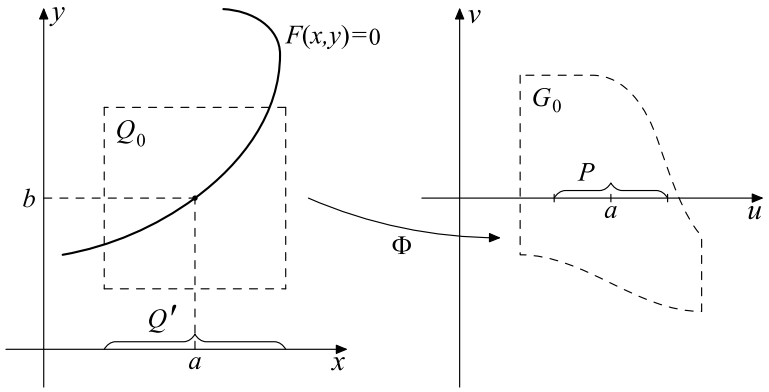


Рис. 21.

При $x \in P$ положим $f(x) = H(x,0)$ и проверим, что P, Q и f удовлетворяют требованиям теоремы. Прежде всего ясно, $f(P) \subset Q$, поскольку $\Psi(P \times \{0\}) \subset \Psi(G_0) = Q_0$. Кроме того, $f \in C^r(P, \mathbb{R}^n)$, так как $\Psi \in C^r(G_0, \mathbb{R}^{m+n})$ по теореме Д.VII.4. Наконец, при $x \in P$, $y = f(x)$ мы имеем:

$$(x, F(x,y)) = \Phi(x,y) = \Phi(\Psi(x,0)) = (x,0),$$

откуда следует, что $F(x, f(x)) = 0$. Дифференцируя это равенство, мы согласно предложению Д.VII.1 получаем:

$$\big(F'_x(x, f(x)),\ F'_y(x, f(x))\big) \cdot \begin{pmatrix} I \\ f'(x) \end{pmatrix} = 0,$$

что можно переписать в виде $F'_x(x, f(x)) + F'_y(x, f(x))\, f'(x) = 0$. Домножение этого равенства слева на $\big[F'_y(x, f(x))\big]^{-1}$ приводит к (8).

Нам остаётся проверить, что в $P \times Q$ уравнение (7) определяет единственную неявную функцию. Действительно, если $x \in P, y \in Q$ и $F(x,y) = 0$, то $\Phi(x,y) = (x,0)$. Действуя на это равенство отображением Ψ, мы получаем:

$$(x,y) = \Psi(\Phi(x,y)) = \Psi(x,0) = (x, H(x,0)) = (x, f(x)),$$

откуда вытекает, что $y = f(x)$. ►

Заметим, что теорема о локальной обратимости может быть, в свою очередь, выведена из теоремы о неявной функции. Для этого по данному гладкому отображению $T\colon \mathcal{O} \to \mathbb{R}^m$, удовлетворяющему условию $\det(T'(x_0)) \neq 0$, следует для $(x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathcal{O}$ определить отображение $F(x,y) = T(y) - x$ и применить к нему теорему о неявной функции в точке (a,b), где $a = T(x_0)$, $b = x_0$.

VII.7. Применим полученные результаты для доказательства равносильности двух определений гладкой поверхности (см. п. VIII.1.1).

Теорема. *Пусть $M \subset \mathbb{R}^m$, $1 \leqslant k < m$, $1 \leqslant r \leqslant +\infty$. Тогда для любой точки p из M следующие два утверждения равносильны:*

I) *существует такая окрестность $U \subset \mathbb{R}^m$ точки p, что пересечение $M \cap U$ есть простое k-мерное многообразие класса C^r;*

II) *существуют такая окрестность $\widetilde{U} \subset \mathbb{R}^m$ точки p и такие определённые в ней функции $F_1, \ldots, F_{m-k}$ класса C^r, что $x \in M \cap \widetilde{U}$ тогда и только тогда, когда*

$$F_1(x) = \ldots = F_{m-k}(x) = 0, \tag{9}$$

и векторы $\operatorname{grad} F_1(p), \ldots, \operatorname{grad} F_{m-k}(p)$ линейно независимы.

Доказательство. I$\Rightarrow$II. Пусть $\Phi \in C^r(\mathcal{O}, \mathbb{R}^m)$ — некоторая параметризация пересечения $M \cap U$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ — её координатные функции и $p = \Phi(t_0)$. По определению параметризации (см. п. VIII.1.1) Φ — гомеоморфизм между $\mathcal{O}$ и $M \cap U$, причём $\operatorname{rank} d_{t_0}\Phi = k$. Изменив в случае необходимости нумерацию координат, мы можем считать линейно независимыми первые k строк матрицы Якоби. В таком случае $\Delta = \frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)}{D(t_1, \ldots, t_k)}(t_0) \neq 0$. Отождествим пространство $\mathbb{R}^m$ с произведением $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$, и пусть L — каноническая проекция $\mathbb{R}^m$ на $\mathbb{R}^k$.

Докажем сначала, что вблизи p многообразие M совпадает с графиком гладкого отображения, определённого в некоторой окрестности точки $L(p)$.

Поскольку якобиан композиции $L \circ \Phi$ в точке t_0 равен Δ и, следовательно, отличен от нуля, можно воспользоваться теоремой Д.VII.5 о локальной обратимости: композиция $L \circ \Phi$ есть диффеоморфизм между некоторыми окрестностями W и V точек t_0 и $L(p)$. Следовательно, сужение L на $\Phi(W)$ взаимно однозначно, и поэтому каждая точка из $\Phi(W)$ определяется своими первыми k координатами, т. е. вектором $x' = L(x)$, лежащим в V (см. рис. 22).

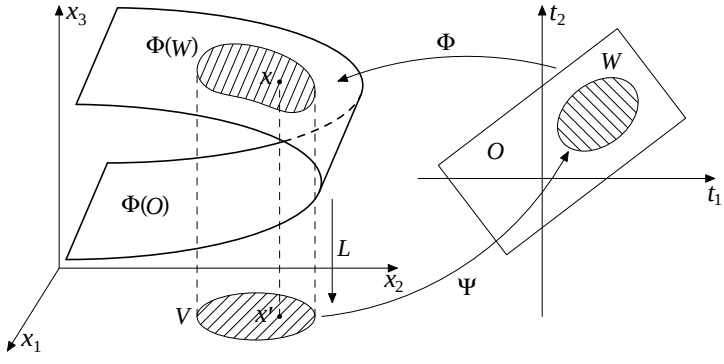


Рис. 22.

Иными словами, $\Phi(W)$ есть график некоторого отображения $f\colon V \to \mathbb{R}^{m-k}$. Чтобы доказать гладкость f, рассмотрим отображение $\Psi\colon V \to W$, обратное к сужению $L \circ \Phi$ на W (это отображение класса C^r). Так как $x' = L \circ \Phi(\Psi(x'))$ при $x' \in V$ и $x' = L((x', f(x'))$, то $f(x') = \Phi(\Psi(x'))$. Поэтому $f \in C^r(V, \mathbb{R}^{m-k})$ как композиция r-гладких отображений. Итак, множество $\Phi(W)$ есть график отображения класса C^r.

Докажем теперь, что $\Phi(W)$ является пересечением $m-k$ поверхностей нулевого уровня гладких функций, заданных в окрестности точки p. Действительно, поскольку $\Phi(W)$ относительно открыто в M, существует такое открытое множество $\widetilde{U} \subset \mathbb{R}^m$, что $\Phi(W) = M \cap \widetilde{U}$. Не умаляя общности можно считать, $\widetilde{U} \subset V \times \mathbb{R}^{m-k}$ (в противном случае надо взять пересечение этих множеств). Для $j = 1, \dots, m-k$ определим в $\widetilde{U}$ функции (класса C^r), положив $F_j(x) = f_j\big(L(x)\big) - x_{k+j}$, где f_j — координатные функции отображения f. Тогда включение $x \in M \cap \widetilde{U} = \Phi(W)$ означает, что $x \in \Gamma_f$, и, следовательно, оно равносильно выполнению равенств (9). Кроме того, градиенты функций $F_1, \dots, F_{m-k}$ линейно независимы, так как ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} \operatorname{grad} F_1 \\ \dots \\ \operatorname{grad} F_{m-k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_k} & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_{m-k}}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_{m-k}}{\partial x_k} & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix},$$

очевидно, равен $m-k$.

Таким образом, множество, являющееся гладким многообразием в смысле первого определения является гладким многообразием того же класса и в смысле второго определения.

Докажем, что справедливо и обратное: II $\Rightarrow$ I.

Так как в точке p градиенты функций $F_1, \dots, F_{m-k}$ линейно независимы, то с точностью до нумерации координат мы можем (и будем) предполагать, что $\frac{D(F_1,\dots,F_{m-k})}{D(x_{k+1},\dots,x_m)}(p) \neq 0$. Считая, как и раньше, что $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$, отождествим точку $x \in \mathbb{R}^m$ — с парой (u, v), где $u \in \mathbb{R}^k$, $v \in \mathbb{R}^{m-k}$, а p — с парой (a, b). По теореме Д.VII.6 о неявной функции существуют такие открытые кубы $P \subset \mathbb{R}^k$ и $Q \subset \mathbb{R}^{m-k}$ с центрами в a и b соответственно и такое отображение $f \in C^r(P, \mathbb{R}^{m-k})$, что

$$U = P \times Q \subset \widetilde{U}, \quad f(P) \subset Q$$

и включение $x = (u, v) \in M \cap U$ равносильно равенству $v = f(u)$. Поэтому отображение $u \mapsto \Phi(u) = (u, f(u))$, где $u \in P$, есть параметризация M-окрестности $M \cap U$ точки p. При этом, очевидно, $\Phi \in C^r(P, \mathbb{R}^m)$ и ранг матрицы Якоби Φ' всюду на P равен k. Таким образом, U — требуемая в определении I окрестность точки p. ►

VII.8. В заключение этого добавления получим один полезный результат о локальном строении гладкой функции. Оказывается, её график в окрестности неособой критической точки с точностью до диффеоморфизма, сколь угодно близкого к движению, совпадает с графиком квадратичной формы.

Предварительно установим алгебраическую лемму, в которой известный алгорифм приведения квадратичной формы к сумме квадратов оформляется нужным нам образом. Квадратную $m \times m$ матрицу мы будем отождествлять с точкой пространства $\mathbb{R}^{m^2}$. Декартовы координаты вектора x из $\mathbb{R}^m$ будем обозначать той же буквой, что и вектор, с соответствующим индексом: $x = (x_1, \dots, x_m)$.

Лемма 1. *Для любой обратимой диагональной $m \times m$ матрицы A существует такая её окрестность U и такое бесконечно гладкое отображение $\omega\colon U \mapsto \mathbb{R}^{m^2}$, что линейная замена $x = \omega(B)(y)$ приводит квадратичную форму $\langle B(x), x\rangle$ к диагональному виду. Точнее,*

$$\langle B(x), x\rangle = \langle A(y), y\rangle \quad \text{при} \ \ x = \omega(B)(y), \ y \in \mathbb{R}^m. \tag{10}$$

Кроме того, $\omega(A)$ есть единичная матрица.

Доказательство проведём индукцией по размерности. При $m = 1$ утверждение очевидно: матрицы A и B можно отождествить соответственно с числами a ($a \neq 0$) и b, а окрестностью U считать интервал $(a - |a|, a + |a|)$. В таком случае отображение ω, определяемое равенством $\omega(B) = \sqrt{\frac{|b|}{|a|}}$, обладает необходимыми свойствами. В частности, $\omega(A) = 1$.

Допустим, что наше утверждение верно для матриц размера $(m-1)\times(m-1)$ и докажем его для $m \times m$-матриц. Диагональные элементы матрицы A обозначим символами $a_1, \dots, a_m$. Вектор, получаемый из вектора x отбрасыванием последней координаты, и матрицу, получающуюся из A вычеркиванием последней строки и последнего столбца, будем обозначать $\widetilde{x}$ и $\widetilde{A}$. Окрестность, отвечающую матрице $\widetilde{A}$ согласно индукционному предположению, и соответствующее отображение будем обозначать символами $\widetilde{U}$ и $\widetilde{\omega}$.

Пусть $Q(x) = \langle B(x), x\rangle$ — квадратичная форма, порождённая матрицей B с элементами b_{jk} $(j, k = 1, \dots, m)$. Ради упрощения формул будем считать матрицу B симметричной (в противном случае её следует заменить матрицей $\frac{1}{2}(B + B^T)$, квадратичная форма при этом не изменится). При $b_{mm} \neq 0$ запишем $Q(x)$, выделив полный квадрат по последней координате:

$$Q(x) = b_{mm}x_m^2 + 2x_m \sum_{k<m} b_{mk}x_k + \sum_{j,k<m} b_{jk}x_jx_k =$$
$$= b_{mm}\left(x_m + \frac{1}{b_{mm}}\sum_{k<m} b_{mk}x_k\right)^2 - \frac{1}{b_{mm}}\left(\sum_{k<m} b_{mk}x_{km}\right)^2 + \sum_{j,k<m} b_{jk}x_jx_k.$$

Если $|a_m - b_{mm}| < |a_m|$, то знак b_{mm} совпадает со знаком a_m. Это позволяет записать $Q(x)$ в виде

$$Q(x) = \widetilde{Q}(\widetilde{x}) + a_m y_m^2, \tag{11}$$

где

$$\widetilde{Q}(\widetilde{x}) = \sum_{j,k<m} b_{jk}x_jx_k - \frac{1}{b_{mm}}\left(\sum_{k<m} b_{mk}x_k\right)^2, \qquad y_m = \sqrt{\frac{|b_{mm}|}{|a_m|}}\left(x_m + \frac{1}{b_{mm}}\sum_{k<m} b_{mk}x_k\right).$$

Пусть C — симметричная матрица, соответствующая квадратичной форме $\widetilde{Q}$. Она непрерывно зависит от элементов матрицы B и сколь угодно близка к $\widetilde{A}$, если B достаточно близка к A. Зафиксируем такую окрестность U матрицы A, что при $B \in U$ матрица C попадает в $\widetilde{U}$ и $|a_m - b_{mm}| < |a_m|$. Теперь остаётся положить

$$\omega(B)(x) = (\widetilde{\omega}(C)(\widetilde{x}), y_m).$$

Тогда согласно индукционному предположению $\widetilde{Q}(\widetilde{x}) = \langle \widetilde{A}(\widetilde{y}), \widetilde{y}\rangle = \sum\limits_{k<m} a_k y_k^2$, и поэтому равенство (11) даёт нам:

$$Q(x) = \widetilde{Q}(\widetilde{x}) + a_m y_m^2 = \sum_{k<m} a_k y_k^2 + a_m y_m^2 = \langle A(y), y\rangle.$$

Из проведённого построения видно, что отображение ω бесконечно гладко (так как по индукционному предположению бесконечно гладко $\widetilde{\omega}$). Если $B = A$, то $y_m = x_m$, и по индукционному предположению $\widetilde{\omega}(\widetilde{A})$ есть единичная матрица. Поэтому матрица $\omega(A)$ также единичная. ►

Равенство (10) означает, что $\big\langle B(\omega(B)(y)),\ \omega(B)(y)\big\rangle = \langle A(y), y\rangle$ при всех $y \in \mathbb{R}^m$, т. е. что $(\omega(B)^T \circ B \circ \omega(B) = A$. Так как $\det(A) \neq 0$, то матрица $\omega(B)$ всегда обратима.

Лемма 2 (Адамар). *Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m$ — выпуклая окрестность нуля, $f \in C^r(\mathcal{O})$, $r = 1, 2, \ldots, \infty$. Тогда существуют такие функции $g_1, \ldots, g_m \in C^{r-1}(\mathcal{O})$, что*

$$f(x) - f(0) = g_1(x)x_1 + \ldots + g_m(x)x_m \quad \textit{при любом} \ \ x \in \mathcal{O}.$$

Если функция f финитна и $f(0) = 0$, то функции g_k также можно считать финитными.

Доказательство. Зафиксируем $x \in \mathcal{O}$ и для $t \in [0, 1]$ положим $h(t) = f(tx)$. Очевидно,

$$h(1) = f(x),\ h(0) = f(0) \ \text{ и } \ h'(t) = \sum_{k=1}^{m} x_k \frac{\partial f}{\partial x_k}(tx).$$

Интегрируя последнее равенство, мы видим, что

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 h'(t)\,dt = \sum_{k=1}^{m} x_k \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_k}(tx)\,dt.$$

По теореме VII.1.5 функции $x \mapsto \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_k}(tx)\,dt$ принадлежат $C^{r-1}(\mathbb{R}^m)$. Однако они могут не быть финитными, даже если f финитна. Чтобы при $f(0) = 0$ получить искомые функции в этом случае, следует положить $g_k(x) = \psi(x)\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_k}(tx)\,dt$, где ψ — бесконечно дифференцируемая финитная функция, равная единице на $\operatorname{supp} f$. ►

Основное утверждение, которое мы хотим здесь доказать, называемое часто леммой Морса, показывает, что заменяя линейное преобразование диффеоморфизмом, можно получить локальный аналог леммы 1 для любых достаточно гладких функций в окрестности невырожденной критической точки.

Напомним, что критической называется точка, в которой градиент функции обращается в нуль. Она называется невырожденной, если в ней матрица Гессе (матрица из вторых производных) обратима.

Теорема (Морс*)). *Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^m$ и $f \in C^r(\mathcal{O})$, $r = 3, 4, \ldots, \infty$. Если $p \in \mathcal{O}$ — невырожденная критическая точка функции f, то существует такая её окрестность V, $V \subset \mathcal{O}$, и такой определённый в V диффеоморфизм Φ класса C^{r-2}, что $J_\Phi(p) = 1$ и при $x \in V$, $y = \Phi(x)$*

$$f(x) - f(p) = \sum_{j=1}^{m} a_j y_j^2,$$

где $2a_k$ — собственные числа матрицы Гессе функции f, вычисленной в точке p.

Отказавшись от условия $J_\Phi(p) = 1$ и полагая $z_j = \sqrt{|a_j|}y_j$ $(j = 1, \ldots, m)$, можно (с точностью до нумерации координат) представить приращение f в окрестности точки p в виде $f(x) - f(p) = \sum\limits_{j=1}^{r} z_j^2 - \sum\limits_{j=1}^{s} z_{r+j}^2$, где r и s — число положительных и отрицательных собственных чисел матрицы Гессе в точке p.

*) Харолд Калвин Марстон **Морс** (Morse), 1892–1977, — американский математик.

Доказательство. Будем считать, что множество $\mathcal{O}$ выпукло и что $p = 0$. По лемме Адамара существуют такие функции $g_1, \dots, g_m \in C^{r-1}(\mathcal{O})$, что в $\mathcal{O}$

$$f(x) - f(0) = x_1 g_1(x) + \ldots + x_m g_m(x)$$

и при этом $g_k(0) = f'_{x_k}(0) = 0$. Снова применяя лемму Адамара, мы видим, что при $x \in \mathcal{O}$ и каждом $j = 1, \dots, m$

$$g_j(x) = x_1 h_{j1}(x) + \ldots + x_m h_{jm}(x),$$

где $h_{jk} \in C^{r-2}(\mathcal{O})$. Подставив полученные разложения функций g_j в формулу для приращения f, мы получим:

$$f(x) - f(0) = \sum_{j,k=1}^{m} h_{jk}(x) x_j x_k = \sum_{j,k=1}^{m} h_{jk}(0) x_j x_k + o\big(\|x\|^2\big). \tag{12}$$

Согласно формуле Тейлора квадратичная форма в правой части этого равенства есть половина второго дифференциала, и поэтому удвоенная матрица $A = \big(h_{jk}(0)\big)_{j,k=1}^{m}$ есть не что иное, как матрица Гессе функции f, вычисленная в точке 0.

Сделав в случае необходимости надлежащую ортогональную замену переменных, можно привести матрицу A к диагональному виду. Поэтому в дальнейшем мы будем считать, что квадратичная форма $\langle A(x), x\rangle$ имеет вид: $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k^2$. Положив $A_x = \big(h_{jk}(x)\big)_{j,k=1}^{m}$, равенство (12) можно переписать в виде

$$f(x) - f(0) = \langle A_x(x), x\rangle. \tag{13}$$

Заметим, что $A_x \to A_0 = A$ при $x \to 0$, и благодаря этому для x достаточно близких к нулю (скажем для x из окрестности нуля V_0) матрица A_x принадлежит окрестности U из леммы 1. Следовательно, при таких x

$$\langle A_x(t), t\rangle = \langle A(s), s\rangle \quad \text{где} \quad s = \omega(A_x)(t), \ t \in \mathbb{R}^m.$$

При $t = x$ это позволяет переписать равенство (13) в виде

$$f(x) - f(0) = \langle A(y), y\rangle,$$

где $y = (\omega(A_x))^{-1}(x) = \Phi(x)$ (как мы отмечали после леммы 1, матрица $\omega(B)$ обратима при $B \in U$). Отображение Φ есть композиция отображений $x \mapsto A_x$, ω, обращения матрицы и билинейного отображения, из которых первое — класса C^{r-2}, а остальные — класса C^{∞}. Поэтому $\Phi \in C^{r-2}(V_0, \mathbb{R}^m)$. Убедимся, что $J_\Phi(0) = 1$. Действительно, так как $\omega(A_0) = \omega(A) = I$ — единичная матрица, то $\omega(A_x) = I + \Theta(x)$, где $\Theta(x) \to 0$ при $x \to 0$. Следовательно,

$$\Phi(x) = (I + \Theta(x))^{-1}(x) = x + o(x) \quad \text{при} \ \ x \to 0,$$

т. е. $\Phi'(0) = I$. По теореме о локальной обратимости отображение Φ есть диффеоморфизм в некоторой окрестности нуля, которая и является искомой окрестностью V. ►

Литература

Полужирным шрифтом отмечены места, где упоминается работа.

[АИН] Алимов Ш.А., Ильин В.А., Никишин Е.М. *Вопросы сходимости кратных тригонометрических рядов и спектральных разложений.* УМН, т. XXXI, вып. 6, 1976; УМН, т. XXXII, вып. 1. 1977. **X.4.8**

[А] Артин Е. *Введение в теорию гамма–функции.* М.;Л.: ГТТИ, 1934. **VII.2.5**

[Б] Богачев В.И. *Основы теории меры.* Тт. I, II. Москва-Ижевск: Регулярная и Хаотическая Динамика, 2006. **I.1.3, I.5.1, I.3.3, IV.8.7**

[Бо] Болтянский В.Г. *Длина кривой и площадь поверхности.* В кн. "Энциклопедия элементарной математики"; книга пятая: Геометрия. М.;Л.: Наука, 1966. **VIII.8.5**

[Б-Ф] Борисович Ю.Г., Близняков Н.М., Израилевич Я.А., Фоменко Т.Н. *Введение в топологию.* М.: Наука. 1995 год. **XII.2.1, Д.II.2**

[БЗ] Бураго Ю.Д., Залгаллер В.А. *Геометрические неравенства.* Л.: Наука, 1980. **II.8.1**

[Бу] Бурбаки Н. *Общая топология. Использование вещественных чисел в общей топологии.* М.: Наука, 1975. **I.1.3, II.3.3**

[Вл] Владимиров В.С. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1988. **VIII.7.9**

[В] Вулих Б.З. *Краткий курс теории функций вещественной переменной.* М.: Наука, 1973. **Предисловие**

[ГО] Гелбаум Б., Олмстед Дж. *Контрпримеры в анализе.* М.: Мир, 1967. **V.2.2**

[Г] Гринлиф Ф. *Инвариантные средние на топологических группах.* М.: Мир, 1973. **II.4.3**

[Зи] Зигмунд А. *Тригонометрические ряды.* Тт. I, II. М.: Мир, 1965. **X.4.7**

[З] Зорич В.А. *Математический анализ.* Тт. I, II. М.: Фазис, 1997. **VII.4.3**

[К] Картан А. *Элементарная теория аналитических функций одного и нескольких комплексных переменных.* М.: ИЛ, 1963. **X.3.8**

[КФ] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* М.: Наука, 1972. **Предисловие**

[Л] Лебег А. *Интегрирование и отыскание примитивных функций.* М.;Л.: ГТТИ, 1934. **V.0**

[Ли] Литлвуд Дж. *Математическая смесь.* М.: Физматгиз, 1961. **VII.6.4**

[Луз] Лузин Н.Н. *Собрание сочинений.* Т. II. М.: Изд-во АН СССР, 1958. **IV.0**

[Лук] Лукач Е. *Характеристические функции.* М.: Наука, 1979. **X.5.4**

[На] Назаров Ф.Л. *Ударное решение задачи о коэффициентах.* Алгебра и Анализ. Т. 9, вып. 2. 1997, сс. 272–287. **X.1.8**

[Н] Натансон И.П. *Теория функций вещественной переменной.* СПб: Лань, 1999. **I.4.1, II.4.3, V.0**

[ПС] Полиа Г., Сеге Г. *Задачи и теоремы из анализа.* Тт. I, II. М.: Наука, 1978. **X.3.5**

[РН] Рисс Ф. и Секефальви-Надь Б. *Лекции по функциональному анализу.* М.: ИЛ, 1954. **X.3.4**

[С] Сакс С. *Теория интеграла.* М.: ИЛ, 1949. **Предисловие, II.7.4**

[Фе] Федерер Г. *Геометрическая теория меры.* М.: Наука, 1987. **II.8.1, VIII.2.2, VIII.4.4, VIII.8.1**

[Ф] Фихтенгольц Г.М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления.* Тт. I–III. М.: Наука, 1970. **VII.4.3**

[Х] Халмош П. *Теория меры.* М.: ИЛ, 1953. **Предисловие**

[ХР] Харди Г.Х., Рогозинский В.В. *Ряды Фурье.* М.: Физматгиз, 1962. **X.3 упр. 5**

[ХЛ] Хуа Ло-ген. *Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел.* М.: Мир, 1964. **X.6.6**

[Ben] Benedicks M. *On Fourier transforms of functions supported on sets of finite Lebesgue measure.* J. Math. An. and Appl. Vol. 106, 1985, pp. 180–183. **X.6.3**

[BM] Bohr H., Mollerup J. *Laerebog i matematisk analyse.* T. III, Kopenhagen, 1922, pp. 149–164. **VII.2.8**

[Ca] Carleson L. *On the convergence and growth of partial sums of Fourier series.* Acta Math. Vol. 116, 1966, pp. 135–157. **X.3.9**

[CI] Chamizo F., Iwaniec H. *On the sphere problem.* Revista Math. Iberoamericana. Vol. 11, No 2, 1995, pp. 417–429. **X.6.6**

[Ch] Chernoff P.R. *Pointwise convergence of Fourier series.* Amer. Math. Monthly, Vol. 87, No. 5, 1980, pp. 399–400. **X.3.4**

[EF] Erdös P., Fuchs W.H.J. *On a problem of additive number theory.* J. London Math. Soc. Vol. 31, 1956, pp. 67–73. **X.2.1, X.6.6**

[JW] Jessen B., Wintner A. *Distribution functions and the Riemann zeta function.* Trans. Amer. Math. Soc., 1935, v.38, No 1, pp.48-88. **XI.3.6**

[Ke] Kendall D.G. *On the number of lattice points inside a random oval.* Quart. J. Math. Oxford Series 19 (1948), pp. 1–26. **X.6.7**

[Ko] Koldobsky A. *Fourier Analysis in Convex Geometry.* Rhode Island: Amer. Math. Soc., 2005. **VI.7.1**

[LO] Leipnik R., Oberg R. *Subvex functions and Bohr's uniqueness theorem.* Amer. Math. Monthly, Vol. 74, 1967, pp. 1093–1094. **VII.2.8**

[M] Matsuoka Y. *An elementary proof of the formula* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Amer. Math. Monthly, Vol. 68, 1961, pp. 486–487. **IV.6.2**

[Mi] Milnor J. *Analytic proofs of the "hairy ball theorem" and the Brouwer fixed point theorem.* Amer. Math. Monthly. Vol. 85, No 7, 1978, pp. 521-524. **VI.6.1**

[NP] Nazarov F.L., Podkorytov A.N. *Ball, Haagerup, and Distribution Functions.* In: Complex analysis, operators, and related topics. Operator Theory: Advances and Applications. V. 113, 2000, pp. 247–267. Birkhauser Verlag, Basel. **VI.7.1**

[R] Rogers C.A. *A less strange version of Milnor's proof of Brouwer's fixed-point theorem.* Amer. Math. Monthly. Vol. 87, No 7, 1980, pp. 525-527. **VI.6.1**

[RS] Rogers C.A., Shephard G.C. *The difference body of a convex body.* Arch. Math. Vol. 8. 1957, pp. 220–233. **VI.4.2**

Именной указатель

Полужирным шрифтом отмечены места, в которых приводятся биографические данные.

Абель — **IV.6.6**; VII.4.5-7; X.4.3, 7; 6.4
Адамар — **II.5.4**; VII.4.10
Ампер — **XI.3.4**
Архимед — V.4.2; **VIII.6.6**
Банах — **II.4.3**, Д.IV.1, 3, 4
Барроу — **IV.6.1**; 9.0, 3 Д.I.2, 3
Бернулли — **IV.1.2**; VIII.1.3; X.2.6
Бернштейн — **X.4 упр. 1**
Бессель — **X.1.2**; 3-6; 4.4; 5.2
Бибербах — **II.8.3**
Бине — **II.5.3**; VIII.3.4
Болл — **VI.7.1**, 3-5
Борель — **I.1.3**; II.3.3; III.1.2, упр. 7; 3.3, 4, 6, 7; IV.10.3, 5; 11.4; VI.4.1, 4 упр. 2; VII.5.5; X.2.6, 8
Бохнер — **Д.VI.0**, 1, 5-7
Брауэр — VI.0, 1, **VI.6.3**, 4, упр. 1-3,
Брунн — **II.8.1**-3, упр. 3; VI.4.2; Д.IV.8
Буземан — **VI.7.1**
Буль — **VI.4 упр. 6**
Буняковский — **IV.4.5**; VIII.7.11; X.1.1,8; 5.9
Валле Пуссен — **IV.8.7**
Валлис — **IV.6.2**; VII.2.3
Ватсон — **VII.3.5**
Вейерштрасс — VI.6.3, 4; VII.1.2, 3; **VII.2.3**, 5; 6.4, 5; IX.2.3; X.1.8; 3.8; 4.1; 5.4; XI.1.3; 3.4; XII.3.3,6; Д.IV.2
Витали — II.6.5, **II.7.2**-4, упр. 1,4; IV.8.7; 9.2; VIII.8.5; XI.3.1,4
Гальярдо — **V.4.4**; VIII.4.5
Гарнак — **VIII.7.11**, упр. 13, 15
Гаусс — **VII.2.3**, 7; VIII.6.1, 3-7; 7.1-3, 10, упр. 4; 8.4; IX.3.5; X.6.5, 6
Гёльдер — **IV.4.5**, 6; V.4.4; VI.4.5; 7.3, 4; VII.2.8; IX.1.1; 3.1-3; XII.1.1
Гессе — **VII.3.7**
Грам — **II.5.3**, 4; VIII.3.4, 5
Грин — VIII.5.4; **VIII.6.7**; 7.2, 9, 10, 13; X.2.1
Гульдин — **VI.4 упр.2**; VIII.3 упр. 2
Гурвиц — **X.2.1**
Данжуа — **X.3.10**
Джон — **II.5.5**
Дини — **X.3.4**-6, упр. 3, 4, 9; 5.3-5.5; XII.2.9
Дирак — **VII.5.1**; 6.1
Дирихле — III.0; 1.7; 2.2, 3 упр. 6; **IV.6.6**; VII.4.6-8; VIII.7, 9, 10, 12, 13; IX.3 упр. 3; X.3.3, 4, 6, 7, упр. 4; 4.1, 2, 4, 5, 8, упр. 3; 5.3, 10
Егоров — **III.3.6**, упр. 10; 4.3; VIII.8.5; Д.III.8
Жордан — **X.3.4**, 6, упр. 4; 5.3; XI.1.7-9
Иенсен — **Д.IV.3**, 4
Кавальери — **V.2.2**; 4.2; 6.1; 7.1, 2; XI.4.2; Д.IV.7
Какутани — **XII.2.2**, 4, 7-9; 3.5
Кантелли — **III.3.3**, 4, 6, 7
Кантор — I.1.3; **II.1.4**; 3.2, упр. 2, 5; IV.7.3; X.3.0
Каратеодори — **I.4.1**, 4, 5; Д.VI.6
Карлесон — **X.3.9**; 4.6
Каталан — **VI.4 упр.2**
Колмогоров — **X.2.7**; 3.3
Коши — **II.5.3**; IV.4.4; 7.2; 8.5; VII.1.7; VIII.3.4; 6.7; 7.11; X.1.1, 8; 5.9

Кронрод — **VIII.4.2**
Лагерр — **X.2 упр.3**; 5.6
Лагранж — VII.1.5, 7; 3.5; 6.4; VIII.3.2; **IX.3.6**, упр. 5; XI.4.2; Д.V.1, Д.VII.2
Ландау — **X.6.6**
Лаплас — VI.7.3; VII.1.7; **VII.3.0**-8; 4.8, упр. 3; VIII.7.1, 9, упр. 2; X.5.3
Лебег — **I.4.1**, 4; II.1.2, 3, упр. 0; 2.0, 2, 3; 3.1-3, упр. 3, 6; 4.0, 2-6; 5.0, 2, 3, упр. 1, 3; 6.0, 4, 6, упр. 8; 7.0; 8.0, 1; III.0; 1.2, 7, упр. 1, 3, 6; 3.1, 2, 4, 6, 7, упр. 2, 3, 12; 4.0, 2, 3; IV.0; 5.4; 6.0, 1, 4; 7.0-3; 8.2-7, упр. 3, 5; 9.0, 2, 3, упр. 3; 10.0, 3-5, упр. 5, 6, 9; 11.3, 4; V.1.3; 2.2, 3, упр. 1; 3.2, 4, 5, упр. 3; 4.0-2, упр. 11; 5.2, упр. 1; VI.1.1, упр. 2-4; 2.0-2; 4.5, упр. 1; 5.1-3, упр. 1; 7.1; VII.1.2; 3.4, 7; 4.1, 4; 5.0, 5; 6.1; VIII.1.1; 2.1, 2; 3.1-3, 6, 7; 4.1; 6.1; 7.10; 8.1, 3, 5; IX.1.0-2, упр. 2; 2.0, 2, 4, 5, упр. 2, 7; 3.4, 5, упр. 4; IX.1 упр. 2; 3.1-4, 6, 7; 3.10, упр. 1; 4.4; 5.1-7; XI.1.8; 2.1, 3, упр. 4; 3.1-4, упр. 1; 4.1, 2; XII.1.2; Д.III.1, 2; Д.IV.5; Д.V.1, 2; Д.VI.0, 2-7, упр. 4
Леви — **IV.2.2**, 3, 5; 5.1, 3; 8.2-4, 6, упр. 2, 4; V.1.2; 2.3; 3.1; VI.1.1; VIII.4.2; X.5.7; XI.2.1; XII.1.3; 2.9
Лейбниц — **IV.1.2**; 6.1, 2; 9.3; VII.1.5, 6; 3.5; 4.4, 5, 8, упр. 1; 5.4; VIII.5.2; 6.1, 3; X.5.2, 6; Д.I.3, 4
Лежандр — **VII.2.4**-7; 3.8; X.2.4
Линделёф — **VIII.1.5**; Д.V.2
Липшиц — **II.3.1**-3, упр. 5, 6; 6.2, упр. 4; IV.6.1; 11.1, упр. 4; VI.5.4; 6.1; VIII.1.2, 4; 3.2; 4.1; 8.1-5; X.3.8, упр. 10; 4.1, 5; 6.2, упр. 3; XI.4.1, 2; Д.II.3; Д.IV.2-4; Д.VII.2
Литлвуд — **IV.9.1**
Лиувилль — **V.4.3**; VIII.7.5, 11, 13
Лузин — **II.3.1**; III.1.7; 4.3; X.3.10
Максвелл — **VIII.3.5**; 5.1
Марцинкевич — **IX.1.4**
Мёбиус — **VIII.5.3**
Минковский — **II.8.1**-3, упр.3; IV.4.6; VI.4.2; VIII.4.4; IX.1.1; Д.IV.7, 8
Морс — **Д.VII.8**
Назаров — X.3.5
Ниренберг — **V.4.4**; VIII.4.5
Ньютон — **IV.6.1**, 2; 9.3; VII.3.4; VIII.5.2; 6.1; Д.I.3, 4
Остроградский — **VIII.6.1**, 3-7; 7.1, 2; 8.4; IX.3.5
Парсеваль — **X.1.5**; 2.1, 2; 3.5, 6; § 4 упр. 7; 5.1; 6.6, 7
Паскаль — **VIII.6.6**
Петти — **VI.7.1**
Пифагор — II.5.3, 4; **X.1.2**, 6; 2.6
Планшерель — **X.5.7**-10
Пуанкаре — **VIII.3.5**; 5.2; 7.8
Пуассон — **IV.6.3**, упр. 8; V.3.2; 4.2; VI.2.4; 4.2; VII.2.1; 6.4; VIII.4 упр. 5; 7.4, 10, 11, 13; IX.3 упр. 2; X.4.3, 7; 5.1; 6.1-5
Радемахер — III.1 упр. 8; **VI.4.5**; VIII.8.1, 3, 5; IX.1 упр. 7; X.2.5, 6; XI.4.2; Д.IV.3; Д.VI упр. 4
Радон — **XI.2.1**, 2, упр. 2; 3.1-4, упр. 1; 4.1; XII.1.3; 2.2, 4, 6, 9; 3.5; Д.III.1
Риман — **IV.8.5**; VIII.6.7; IX.2.5, упр. 7; X.3.0, 2-4, 10, упр. 1; 4.6; 5.1-3; Д.I.1
Рисс — III.3.1, **III.3.4**-6, упр. 5; IV.8.6; VIII.8.5; X.1.4-6; 5.4; XII.2.2, 4, 7-9; 3.5; Д.VI.5
Сард — II.7 упр.4; VIII.4.3, 5; **Д.V.0**, 2
Серпинский — **V.2.2**; X.6.6
Соболев — **V.4.4**; VII.6.2; VIII.4.5
Стеклов — **VII.6.2**
Стилтьес — **IV.10.0**, 3-6, упр. 6,9; 11.4; V.3.4; VI.4.1; X.5.5; XI.3.4; 4.1
Стирлинг — VI.3.3; 4.5; 7.1; **VII.2.6**, 7, упр. 12, 14; 3.3
Суслин — **I.6.2**
Титце — **Д.II.2**, упр. 2; VII.6.4
Томсон — **VIII.7.10**, упр. 9
Тонелли — **V.3.1**, 2-4, упр. 2; 4.2, 3; VI.5.2; VII.3.7; 5.2; VIII.3.7; X.1.7; Д.VI.5
Уолш — **X.2.5**, 6
Урысон — VII.6.4; XII.2.1; **Д.2.2**, упр. 2; XII.2.1
Фату — **IV.8.6**, 7, упр. 5; IX.1.3; X.5.7, упр. 7; XII.1.1
Федерер — **VIII.4.2**

Фейер — X.3.6, **X.4.1**-3, 5, 7, упр. 1, 2; XII.3.6
Фефферман — **X.4.6**
Фишер — **X.1.4**-6
Френель — **IV.6.4**, 5; VII.4.8; IX.2.5
Фреше — **III.4.2**, 3
Фруллани — **IV.6 упр. 15**
Фубини — **V.3.3**-5; VI.2.4; 4.2; 7.2; VII.1.0, 4.4; VIII.4.2; 6.1, 3; X.1.7; 5.2, 3, 5, 7; XI.3.3; Д.VI.5, 6
Фурье — IV.6.2, VI.2.5; 7.2; **X.1.3**-8, упр. 6; 2.0-3; 3.0, 2-10, упр. 2, 8-10, 14; 4.1-8, упр. 2, 4, 8-10; 5.1-6, 8-10, упр. 1, 4, 6; 6.0-5,7; XI.1.9; XII.3.3, 6, упр. 5
Хан — **XI.1.7**; Д.IV.1, IV.3, 4
Харди — **IV.9.1**; X.6.6
Хаусдорф — **II.6.1**-4; VIII.2.2; 3.3; 6.4; 7.0; 8.1; 8.5; IX.3.5; Д.IV.5, 6, упр. 1; 8.2
Хинчин — **VI.4.5**; IX.1 упр. 7; X.2 упр. 6
Чебышев — **IV.4.4**; 8.3; 9.2; V.3 упр. 5; VI.4.3; IX.3.4; X.2 упр. 2
Чезаро — **X.4.1**, 3, упр. 7; XII.3.6, упр. 3, 5
Шварц — **VIII.2.4**; 8.5; X.3.9, упр. 13, 14; 4.6; Д.IV.6
Эйлер — IV.6.2, **IV.6.3**, упр. 7, 8; V.3.2; 4.2, 3; VI.2.4; 4.2; VII.2.0, 1, 3, 5-7, упр. 2; 6.4; X.2.1; 3.5; 5.1; 6.1
Эрмит — **X.2.4**, 5.6
Якоби — **VI.2.0**, 3; 5.1, 3; 6.1; VIII.1.0, 4; 6.6; X.6.1; Д.VII.1

Предметный указатель

Абсолютная непрерывность заряда XI.2.2
— — интеграла IV.5.2
— — интегралов равностепенная IV.8.7
— — одной меры относительно другой XI.2.1
— — функции IV.9.3
аддитивность конечная I.2.1
— счётная I.3.1, XI.1.1
алгебра множеств I.1.2
— — индуцированная I.1.2
аппроксимативная единица VII.6.1
— — периодическая VII.6.5
— — соболевская VII.6.2

Базис ортогональный X.1.5
борелевская мера II.2.3
— оболочка I.1.3
борелевское множество I.1.3
брус нижний, верхний VIII.6.2

Вариация заряда XI.1.4
— — положительная, отрицательная XI.1.7
— функции IV.11.1
векторное поле VI.6.4, VIII.5.1
— — потенциальное VIII.5.2
— — — локально VIII.5.2
весовая функция (вес) IV.5.3, VI.1.1
взвешенный образ меры VI.1.1
внешняя мера I.4.2
— — порождённая мерой I.4.3
— сторона границы VIII.6.2, VIII.6.5
— p-мера Хаусдорфа II.6.1
выпуклая оболочка Д.IV.1
выпуклое множество Д.IV.1
— тело II.5.5, Д.IV.1
выпуклость логарифмическая VII.2.8
выпуклый многогранник Д.IV.1

Гладкое многообразие VIII.1.1
гомотетия II.5.2
график функции V.2.3

Движение в пространстве $\mathbb{R}^m$ II.4.0
диаметр множества I.1.6
дивергенция VIII.6.6
дизъюнктное объединение I.1.1
диффеоморфизм VI.2.0, Д.VII.3
дифференциал отображения Д.VII.1
длина дуги VIII.2.3
— пути VIII.2.3
дуга простая VIII.2.3
— спрямляемая VIII.2.3

Задача Дирихле VIII.7.9-10, 13
закон Архимеда VIII.6.6
— нуля–единицы VI.4.4
заряд вещественный, комплексный XI.1.1
— подчинённый мере XI.2.2

Изгибание VIII.3.6
измеримая функция III.1.2
измеримое по Лебегу множество II.1.2, VIII.3
— пространство III.1.0
измеримый прямоугольник V.1.1
интеграл IV.1.2-3, Д.I.2, Д.VI.3
— Гаусса VIII.7.3
— несобственный сходящийся (расходящийся) IV.6.4
— — — абсолютно, условно IV.6.5
— по заряду XI.1.8
— по пути VIII.5.2
— по функции ограниченной вариации IV.11.4
— Френеля IV.6.4, VII.4.8
— Фурье X.5.3
— Эйлера–Пуассона IV.6.3, V.3.2, VI.2.4, VI.4.2
интегралы Лапласа VII.4.8
интегральная сумма IV.7.3
интегрируемая функция IV.1.3
истинный супремум IV.4.5

Каноническое разбиение I.1.3
канторова функция II.3.2
канторово множество II.1.4
касательный вектор VIII.1.2
кольцо множеств I.1.2
компакт стандартный VIII.6.4
константа Липшица II.3.1
— Эйлера VII.2.3
конус Д.IV.1
координатная линия VI.2.3, VIII.1.2
— окрестность VIII.1.1
координаты полярные, сферические VI.2.4-5
коразмерность многообразия VIII.1.1
коэффициенты Фурье заряда XI.1.9, XII.3.3
— — меры X.3.7
— — функции X.1.3, 1.6, 2.1
кривая VIII.1.1

Лебеговы множества функции III.1.1
лемма Адамара Д.VII.8
— Бореля–Кантелли III.3.3
— Лагранжа IX.3.6
— Морса Д.VII.8
— о дизъюнктном представлении I.1.4
— о трёх хордах Д.IV.3

— об исчерпывании шарами II.6.5
логарифмическая выпуклость VII.2.8
луч Д.IV.1

Матрица Гессе VII.3.7
— Грама II.5.3
— Якоби Д.VII.1
мера I.3.1
— абсолютно непрерывная XI.2.1
— борелевская II.2.3
— Бореля–Стилтьеса IV.10.3
— внешняя I.4.2
— — Хаусдорфа II.6.1
— — порождённая мерой I.4.4
— внутренняя II.2.2
— дискретная I.3.1
— конечная — см. объём конечный
— Лебега II.1.2
— — внешняя, внутренняя II.6.2
— Лебега–Стилтьеса IV.10.3
— подчинённая другой мере XI.2.1
— полная I.4.3
— Радона XII.2.2
— регулярная II.2.3, Д.III.1
— считающая I.3.1
— σ-конечная — см. объём σ-конечный
— Хаусдорфа II.6.3
меры взаимно сингулярные XI.2.3
метрика Хаусдорфа VIII.8.5
метрическая проекция Д.IV.2
многообразие VIII.1.1
— гладкое VIII.1.1
— кусочно-гладкое VIII.1.1
— простое VIII.1
— — липшицево VIII.8.1
многочлены Лежандра X.2.4
— Эрмита X.2.4
множества разделённые II.6.2
множество борелевское I.1.3
— выпуклое Д.IV.1
— измеримое I.3.4
— — относительно внешней меры I.4.2
— — по Лебегу II.1.2, VIII.3.3
— канторово II.1.4
— полной меры IV.3.1
— положительности XI.1.3
— пренебрежимое VIII.6.4
— типа $\mathcal{E}_\sigma$ ($\mathcal{E}_\delta$) I.5.2
— типа F_σ (G_δ) I.1.3
— цилиндрическое V.6.1
монотонность внешней меры I.4.2
— объёма I.2.3
— — усиленная I.2.3
монотонный класс множеств I.6.3

Надграфик функции Д.IV.3
наилучшее приближение Д.IV.2
направление на гладкой кривой VIII.5.2
— соответствующее параметризации VIII.5.2
неподвижная точка VI.6.3
непрерывность абсолютная интеграла IV.5.2
— — интегралов равностепенная IV.8.7
— — одной меры относительно другой XI.2.1
— — функции IV.9.3
— в среднем IX.2.4
— заряда сверху, снизу XI.1.2
— меры сверху, снизу I.3.3-4
— — — условная I.3.4
неравенство Адамара II.5.4
— Бернштейна упр. 1 § X.4
— Бесселя X.1.2-3
— Болла VI.7.3, 5
— Брунна–Минковского II.8.1
— Гальярдо–Ниренберга–Соболева V.4.4, VIII.4.5
— Гарнака VIII.7.11
— Гёльдера IV.4.5
— Иенсена Д.IV.3
— изодиаметральное II.8.3
— изопериметрическое II.8.2, X.2.1, Д.IV.7
— Колмогорова X.2.7
— Коши–Буняковского IV.4.5
— Лагранжа Д.VII.2
— Минковского IV.4.6
— треугольника IX.1.1
— Хинчина VI.4.5
— Чебышева IV.4.4
нетривиальная часть границы бруса VIII.6.2
норма евклидова I.1.6
— функции IX.1.1
— функционала XII.3.1
нормаль внешняя VIII.6.2, Д.IV.1
— соответствующая параметризации VIII.3.4
носитель функции VII.5.3, XII.2.1

Оболочка борелевская I.1.3
— выпуклая Д.IV.1
образ меры VI.1.1
— — взвешенный VI.1.1
объединение дизъюнктное I.1.1
объём I.2.2
— классический I.2.2
— конечный I.2.2
— σ-конечный I.2.2
— непрерывный сверху I.3.4
— — — на пустом множестве I.3.4
— непрерывный снизу I.3.3
— счётно-аддитивный I.3.1
— — полуаддитивный I.3.2

— шара V.4.2
окрестность точки на многообразии VIII.1.1
оператор Лапласа VIII.7.1
опорная плоскость Д.IV.1
определитель Грама II.5.3
ориентированная кривая VIII.5.2
— граница плоского компакта VIII.6.7
ортогональная система X.1.2
ортогональный базис X.1.5
ортонормированная система X.1.2
оснащение разбиения IV.7.3
основание цилиндрического множества V.6.1
отклонение в среднем IX.1.0
отображение билипшицево VIII.8.1
— дифференцируемое Д.VII.1
— сближающее II.6.2
— эргодическое X.2.3

Параллелепипед I.1.6, II.5.3
— прямоугольный I.1.6, II.5.3
— сопровождающий VIII.3.1
параметризация гладкая VIII.1.1
— глобальная, локальная VIII.1.1
— каноническая VIII.1.3
— натуральная VIII.2.3
первообразная Д.I.3
плоскость II.1.3, Д.IV.1
— касательная VIII.1.2
— опорная Д.IV.1
плотность аддитивной функции VI.3.1
— заряда относительно меры XI.1.6
— меры IV.5.3
площадь k-мерная VIII.2.1
— в смысле Минковского II.8.2
поверхность VIII.1.1
— двусторонняя VIII.5.3
подграфик неотрицательной функции V.2.3
подпространство аффинное Д.IV.1
— касательное VIII.1.2
— — аффинное VIII.1.2
покрытие Витали II.7.2
— регулярное II.7.4
полное семейство функций X.1.5
полуаддитивность конечная I.2.3, I.4.2
— счётная I.3.2, I.4.2
полукольцо множеств I.1.4
— ячеек I.1.6
полунепрерывность площади снизу VIII.8.5
потенциал векторного поля VIII.5.2
— логарифмический VIII.7.1
— точечный VIII.7.1
поток векторного поля VIII.5.3
почти везде IV.3.1
почти равномерная сходимость III.3.6
правило Лейбница VII.1.5, VII.4.5
преобразование Лапласа VII.1.7
— Фурье функции VI.2.5, X.5.1, X.5.8
— — меры X.5.5
— — обратное X.5.4
признак Абеля IV.6.6, VII.4.6
— Дини X.3.4
— Дирихле IV.6.6, VII.4.6
— Дирихле–Жордана X.3.4
принцип Кавальери V.2.2
— локализации X.3.3
— максимума для гармонических функций VIII.7.7
— неопределённости X.5.9
— симметрии VIII.7.12
продолжение меры стандартное (по Каратеодори) I.4.5
произведение мер V.1.3
— — бесконечное V.6.1
— объёмов I.2.4
— полуколец I.1.5
— пространств с мерой V.1.3
производная меры XI.3.1
простая функция III.2.1, Д.VI.1
простое гладкое многообразие VIII.1.1
пространство двойственное XII.1.1
— измеримое I.3.4, III.1.1
— измеримых функций XII.1.1
— локально компактное XII.2.1
— с мерой I.3.4
— σ-компактное XII.2.9
путь гладкий, кусочно-гладкий VIII.1.2
— спрямляемый VIII.2.3

Равенство Парсеваля X.1.5, X.2.1
разбиение множества I.1.1
— — допустимое III.2.1, Д.VI.1
— — каноническое I.1.3
— единицы VIII.1.6, XII.2.3
— — подчинённое покрытию VIII.1.8, XII.2.3
разделённые множества II.6.2
разложение Жордана XI.1.7
— Лебега XI.2.3
— Хана XI.1.7
размерность многообразия VIII.1.1
— множества хаусдорфова II.6.6
ранг разбиения IV.7.3
расстояние от точки до множества III.4.1, Д.II.1
растяжение II.6.2
регулярная часть границы VIII.6.4
регулярное покрытие II.7.4, IV.9.4
регулярность меры II.2.2-3

— — внешняя (внутренняя) Д.III.1
— — Лебега II.2.2
ретракция VI.6.2
ряд Фурье заряда XI.1.9
— — меры X.3.7
— — функции X.1.3, X.1.6, X.2.1, X.3.1

Сближение II.6.2
свёртка функций VII.5.1
свойство фокусирующее VII.6.1
сдвиг II.4.1
— функции IX.2.4
семейство суммируемое I.2.2
сечения множества V.2.1
симметричная система множеств I.1.1
совместное распределение функций VI.4.4
сторона гладкой поверхности VIII.5.3
— — — соответствующая параметризации VIII.5.3
— графика верхняя, нижняя VIII.5.3
сумма числового семейства I.2.2
суммы Абеля–Пуассона X.4.3, X.6.4
— интегральные IV.7.3
— Фейера X.4.1, X.4.7
— Фурье X.3.1
сходимость в среднем IX.1.1
— по мере III.3.1
— поточечная III.1.4
— почти везде III.3.1
— почти равномерная III.3.6
— равномерная несобственного интеграла VII.4.2

Теорема Барроу IV.6.1
— Брауэра VI.6.3
— Валле Пуссена IV.8.7
— Вейерштрасса VII.6.4-5
— Витали II.7.2, IV.8.7
— Гаусса (умножения) VII.2.7
— Грина VIII.7.2
— Егорова III.3.6
— Джона II.5.5
— Кельвина VIII.7.10
— Коши VIII.6.7
— Кронрода–Федерера VIII.4.2
— Лебега III.3.2, IV.8.3-4, IV.9.2-3, XI.2.3, XI.3.4
— Леви IV.2.2, IV.8.2
— Линделёфа VIII.1.5
— Лиувилля VIII.7.5
— Лузина III.4.3
— Лузина–Данжуа X.3.10
— Морса Д.VII.8
— о гладком разбиении единицы VIII.1.6
— — спуске VIII.1.7
— о диагональной последовательности III.3.7
— о диффеоморфизме Д.VII.4
— о единственности продолжения меры I.5.1
— о локальной обратимости Д.VII.5
— о мере подграфика V.2.3
— о монотонном классе I.6.3
— о непрерывности в среднем IX.2.4
— о неявной функции Д.VII.6
— о пределе интегральных сумм IV.7.2
— о разбиении единицы, подчинённом покрытию VIII.1.8
— о ретракции VI.6.2
— о среднем IV.7.2, Д.I.2
— — для гармонических функций VIII.7.5
— о характеристике базиса X.1.5
— об аппроксимации III.2.2
— об открытом отображении Д.VII.3
— Радемахера XI.4.2
— Радона–Никодима XI.2.1
— Римана–Лебега IX.2.5
— Рисса III.3.4
— Рисса–Какутани XII.2.2
— Рисса–Фишера X.1.4
— Сарда Д.V.1-2
— Титце–Урысона Д.II.2
— Тонелли V.3.1
— Фату IV.8.6
— Фейера X.4.1
— Фреше III.4.2
— Фубини V.3.3, XI.3.3,5
— Хана–Банаха Д.VI.1
точка допустимая IV.6.4
— Лебега функции IV.9.2
— неподвижная VI.6.3
— плотности множества II.7.3
тривиальная часть границы бруса VIII.6.2
тригонометрическая система X.2.1, 2
тригонометрические многочлены X.2.1

Уравнение Лапласа VIII.7.9
условие Липшица II.3.1
— — порядка α упр. 6 § II.3, X.4.5
— Лебега (L) IV.8.3
— L_{loc} VII.1.2
— существования свёртки VII.5.1

Фильтр упр. 12 § I.1
формула Бине–Коши II.5.3
— Вейерштрасса VII.2.3
— Гаусса–Остроградского VIII.6.5
— Грина VIII.6.7
— дополнения VII.2.5

— интегрирования по частям IV.6.2, IV.6.4, IV.10.6, V.3.4
— Лапласа асимптотическая VII.3.2
— Лежандра VII.2.4
— Лиувилля V.4.3
— Ньютона–Лейбница IV.6.1, VIII.5.2, Д.I.3
— обращения преобразования Фурье X.5.3-4
— отсчётов X.5.1
— Пуассона VIII.7.10
— Стирлинга VII.2.6
— суммирования Пуассона X.6.1-2
— Эйлера–Гаусса VII.2.3
формулы Лапласа асимптотические VII.3.2
фундаментальная последовательность IX.1.3
функции Радемахера VI.4.5, X.2.6
— Лагерра упр. 3 § X.2
— независимые VI.4.4
— ортогональные X.1.2
— Уолша X.2.5
— эквивалентные IV.3.2
— Эрмита X.2.4, X.5.6
функционал IV.2.5
— линейный XII.1.0
— ограниченный XII.3.1
— положительный XII.2.2
— порядково непрерывный XII.1.2
функция абсолютно непрерывная IV.9.3
— аддитивная I.2.1
— — конечно I.2.1
— — счётно I.3.1, XI.1.1
— бета, гамма IV.6.3, V.3.2, VII.2
— весовая IV.5.3, VI.1.1
— выпуклая, вогнутая Д.IV.3
— — логарифмически VII.2.8
— гармоническая VIII.7.1
— гармонически сопряжённая VIII.7.8
— Грина VIII.7.9
— Дирихле III.0
— допустимая IV.6.4
— измеримая III.1.2, Д.VI.1
— — в широком смысле IV.3.3
— — сильно (по Бохнеру) Д.VI.1
— — слабо Д.VI.6
— интегрируемая IV.1.3
— Кантора II.3.2
— максимальная IV.9.1, IX.1.4
— ограниченной вариации IV.11.1
— почти сепарабельнозначная Д.VI.6
— простая III.2.1, Д.VI.1
— распределения (возрастающая, убывающая) VI.4.1, 3
— скачков IV.10.4
— ступенчатая IX.2.2
— суммируемая IV.1.3, Д.VI.3
— — локально IV.9.2, VII.5.3
— финитная VII.5.3, XII.2.1
— характеристическая III.1.2

Хаусдорфова размерность II.6.6

Центр масс VI.3.3

Эргодическое отображение X.2.3

Ядро Дирихле X.3.3, X.4.5, X.4.8
— Пуассона для шара VIII.7.10
— — для полупространства VIII.7.13
— Фейера X.4.1, X.4.7
якобиан отображения VI.2.0, VIII.1.1
ячейка I.1.6

k-мерная площадь VIII.2.1
k-мерное многообразие VIII.2.1
$\mathscr{L}^p$-норма функции IX.1.1
M-окрестность VIII.1.1
ε-окрестность множества II.6.3
ε-покрытие множества II.6.1
σ-алгебра множеств I.1.2
σ-компактное пространство XII.2.9

Оглавление

Предисловие 3

Основные обозначения 6

Глава I. МЕРА 9

§ 1. Системы множеств 9
§ 2. Объём 19
§ 3. Свойства меры 25
§ 4. Продолжение меры 30
§ 5. Свойства стандартного продолжения 38
§ 6. Свойства борелевской оболочки системы множеств 42

Глава II. МЕРА ЛЕБЕГА 46

§ 1. Определение и простейшие свойства меры Лебега 46
§ 2. Регулярность меры Лебега 52
§ 3. Сохранение измеримости при гладком отображении 56
§ 4. Инвариантность меры Лебега при движении 61
§ 5. Изменение меры Лебега при линейном отображении 66
§ 6. Меры Хаусдорфа 74
§ 7. Теорема Витали 84
§ 8. Неравенство Брунна – Минковского 89

Глава III. ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ 94

§ 1. Определение и простейшие свойства измеримых функций 95
§ 2. Простые функции. Теорема об аппроксимации 103
§ 3. Сходимости по мере и почти везде 106
§ 4. Аппроксимация измеримых функций непрерывными. Теорема Лузина 113

Глава IV. ИНТЕГРАЛ 116

§ 1. Определение интеграла 117
§ 2. Свойства интеграла от неотрицательных функций 119
§ 3. Свойства интеграла, связанные с понятием "почти везде" 127
§ 4. Свойства интеграла от суммируемых функций 129
§ 5. Интеграл как функция множества 136
§ 6. Интеграл Лебега от функций одной переменной 140
§ 7. Кратный интеграл Лебега 156
§ 8. Предельный переход под знаком интеграла 159
§ 9. Максимальная функция и дифференцирование интеграла по множеству 169
§ 10. Мера и интеграл Лебега – Стилтьеса 175
§ 11. Функции ограниченной вариации 184

Глава V. ПРОИЗВЕДЕНИЕ МЕР 190

§ 1. Определение произведения мер 190
§ 2. Вычисление меры множества по мерам сечений. Интеграл как мера подграфика 193
§ 3. Кратные и повторные интегралы 199
§ 4. Мера Лебега как произведение мер 206
§ 5. Ещё один подход к определению произведения мер и интеграла 214
§ 6. Бесконечное произведение мер 217

Глава VI. ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ В ИНТЕГРАЛЕ 221

§ 1. Интегрирование по взвешенному образу меры 221
§ 2. Замена переменной в кратном интеграле 225
§ 3. Интегральное представление аддитивных функций 236
§ 4. Функции распределения. Независимые функции 242
§ 5. Вычисление кратного интеграла с помощью интегрирования по сфере 253
§ 6. Некоторые геометрические приложения 259
§ 7. Некоторые геометрические приложения (продолжение) 266

Глава VII. ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА 275

§ 1. Основные теоремы 275
§ 2. Функция гамма 284
§ 3. Метод Лапласа 296
§ 4. Несобственные интегралы, зависящие от параметра 321
§ 5. Условия существовния и основные свойства свёртки 337
§ 6. Аппроксимативная единица 343

Глава VIII. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ 352

§ 1. Предварительные сведения 352
§ 2. Площадь поверхности 365
§ 3. Свойства площади на гладкой поверхности 372
§ 4. Интегрирование по гладкому многообразию 387
§ 5. Интегрирование векторных полей 397
§ 6. Формула Гаусса – Остроградского 405
§ 7. Гармонические функции 421
§ 8. Площадь на липшицевых многообразиях 442

Глава IX. АППРОКСИМАЦИЯ И СВЁРТКА 452

§ 1. Пространства $\mathcal{L}^p$ 452
§ 2. Аппроксимация в пространствах $\mathcal{L}^p$ 459
§ 3. Свёртка и аппроксимативная единица в пространствах $\mathcal{L}^p$ 466

Глава X. РЯДЫ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ 475

§ 1. Ортогональные системы в пространтсве $\mathcal{L}^2(X, \mu)$ 475
§ 2. Примеры ортогональных систем 485
§ 3. Тригонометрические ряды Фурье 498

§ 4. Тригонометрические ряды Фурье (продолжение) 517
§ 5. Преобразование Фурье 533
§ 6. Формула суммирования Пуассона 554

Глава XI. ЗАРЯДЫ. ТЕОРЕМА РАДОНА – НИКОДИМА 568

§ 1. Заряды; интегрирование по заряду 568
§ 2. Теорема Радона – Никодима 577
§ 3. Дифференцирование мер 582
§ 4. Дифференцируемость липшицевых функций 592

Глава XII. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ 595

§ 1. Порядково непрерывные функционалы в пространствах измеримых функций 595
§ 2. Положительные функционалы в пространствах непрерывных функций 600
§ 3. Ограниченные функционалы 610

ДОБАВЛЕНИЯ 618

I. Аксиоматическое определение интеграла по отрезку 618
II. Продолжение непрерывных функций 622
III. Регулярные меры 627
IV. Выпуклость 631
V. Теорема Сарда 646
VI. Интегрирование векторнозначных функций 649
VII. Гладкие отображения 663

Литература 676

Именной указатель 678

Предметный указатель 681