

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

на примерах

- **Классическая теория и методы проецирования**
- **Современный подход к изучению свойств геометрических объектов**
- **Ортогональный чертеж — первый шаг развития пространственного воображения**
- **Формализованные алгоритмы решения типовых задач**
- **Согласование ортогональных чертежей с наглядными изображениями**

Павел Талалай

НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ на примерах

Санкт-Петербург

«БХВ-Петербург»

2011

УДК 514.18(075.8)
ББК 22.151.3я73
Т16

Талалай П. Г.

Т16 Начертательная геометрия на примерах. — СПб.: БХВ-Петербург, 2011. —
288 с.: ил. — (Учебное пособие)

ISBN 978-5-9775-0641-0

Книга посвящена изучению одной из базовых дисциплин технического образования — начертательной геометрии. Рассматриваются способы и методы выполнения изображений различных объектов при помощи ортогонального проецирования, решения задач начертательной геометрии как традиционным методом, так и в виде определенного алгоритма, основанного на формальной логике. Приведен теоретический и практический материал, позволяющий не только изучить теорию получения изображений, но и в пошаговом режиме решать типовые задачи. Весь теоретический материал, а также примеры решения задач проиллюстрированы. Рассматривается современная система обозначения проекций.

Для студентов и преподавателей технических вузов и техникумов

УДК 514.18(075.8)
ББК 22.151.3я73

Группа подготовки издания:

Главный редактор	<i>Екатерина Кондукова</i>
Зав. редакцией	<i>Григорий Добин</i>
Редактор	<i>Юрий Рожко</i>
Компьютерная верстка	<i>Натали Смирновой</i>
Корректор	<i>Виктория Пиотровская</i>
Дизайн серии	<i>Игоря Цырульникова</i>
Оформление обложки	<i>Елены Беляевой</i>
Фото	<i>Кирилла Сергеева</i>
Зав. производством	<i>Николай Тверских</i>

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 29.10.10.

Формат 70×100^{1/16}. Печать офсетная. Усл. печ. л. 23,22.

Тираж 1500 экз. Заказ №

"БХВ-Петербург", 190005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29.

Санитарно-эпидемиологическое заключение на продукцию
№ 77.99.60.953.Д.005770.05.09 от 26.05.2009 г. выдано Федеральной службой
по надзору в сфере защиты прав потребителей и благополучия человека.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12.

ISBN 978-5-9775-0641-0

© Талалай П. Г., 2010
© Оформление, издательство "БХВ-Петербург", 2010

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ.....	1
Принятые обозначения и символы	2
ГЛАВА 1. ОБРАЗОВАНИЕ ПРОЕКЦИЙ.....	5
1.1. Методы проецирования	5
1.2. Эпюр. Проецирование точки.....	8
<i>Пример 1.</i> Построить проекции точки $B (-20; -30; 10)$	11
<i>Пример 2.</i> Построить третью проекцию точки A по двум заданным.....	12
1.3. Точки общего и частного положения.....	13
1.4. Четверти и октанты	15
<i>Пример 3.</i> Определить, в каких октантах находятся точки D и E	17
ГЛАВА 2. ПРОЕЦИРОВАНИЕ ПРЯМОЙ ЛИНИИ	19
2.1. Проекция отрезка прямой линии. Точка на прямой	19
2.2. Прямые частного положения	20
2.2.1. Прямые уровня.....	20
2.2.2. Проецирующие прямые	22
2.3. Определение натуральной величины отрезка прямой методом прямоугольного треугольника	23
<i>Пример 4.</i> Определить натуральную величину отрезка AB и угол наклона прямой к плоскости π_1	26
2.4. Следы прямой	27
<i>Пример 5.</i> Построить проекции следов прямой AB	29
2.5. Взаимное положение двух прямых.....	31
ГЛАВА 3. ПРОЕЦИРОВАНИЕ ПЛОСКОСТИ	33
3.1. Способы задания плоскости.....	33
3.1.1. Общие случаи задания плоскости	33
3.1.2. Плоские фигуры.....	35
3.1.3. Следы плоскости.....	36

3.2. Плоскости частного положения	38
3.2.1. Проецирующие плоскости	38
3.2.2. Плоскости уровня	40
3.3. Проецирование плоских углов	42
3.4. Прямая в плоскости	44
3.4.1. Общие случаи принадлежности прямой плоскости	44
<i>Пример 6.</i> Построить три следа плоскости α , заданной двумя пересекающимися прямыми AB и CD	45
3.4.2. Прямая в плоскости частного положения	48
3.4.3. Прямые частного положения в плоскости	49
<i>Пример 7.</i> Через точку B построить линию наибольшего ската плоскости, заданной треугольником ABC	53
3.5. Точка в плоскости	54
<i>Пример 8.</i> По заданной фронтальной проекции треугольника ABC , принадлежащей плоскости α , построить его горизонтальную проекцию	55

ГЛАВА 4. ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ С ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ ИЛИ С ДВУМЯ ПЛОСКОСТЯМИ

4.1. Взаимное положение прямой и плоскости или двух плоскостей	57
4.2. Прямая, параллельная плоскости	58
4.3. Параллельные плоскости	60
<i>Пример 9.</i> Построить следы плоскости β , проходящей через данную точку K и параллельной плоскости α	61
4.4. Пересекающиеся плоскости	62
4.5. Прямая, пересекающая плоскость	65
4.6. Определение взаимной видимости геометрических элементов	67
4.7. Пересечение плоских фигур	69
<i>Пример 10.</i> Построить линию пересечения плоскостей: одна из плоскостей задана двумя пересекающимися прямыми AB и BC , а другая — двумя параллельными прямыми EF и GH	72
4.8. Прямая, перпендикулярная плоскости	73
<i>Пример 11.</i> Определить натуральную величину расстояния от точки K до заданной плоскости α	75
4.9. Взаимно перпендикулярные плоскости	77

ГЛАВА 5. СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОЕКЦИЙ

5.1. Общие сведения о способах преобразования проекций	79
5.2. Способ вращения	79
5.2.1. Основы способа вращения	79
5.2.2. Вращение вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекций	80
Вращение точки	80

Вращение отрезка.....	81
Вращение плоскости.....	83
<i>Пример 12.</i> Способом вращения вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекций, совместить прямую AB с заданной плоскостью α	85
5.2.3. Плоскопараллельное перемещение.....	89
<i>Пример 13.</i> Методом плоскопараллельного перемещения определить натуральную величину треугольника ABC	90
5.2.4. Вращение вокруг оси, параллельной плоскости проекций	91
5.2.5. Способ совмещения (вращение плоскости вокруг одного из ее следов).....	93
5.3. Метод перемены плоскостей проекций	96
5.3.1. Основы метода перемены плоскостей проекций.....	96
5.3.2. Примеры решения задач методом перемены плоскостей проекций	98
<i>Задача 1.</i> Выполнить преобразования так, чтобы прямая общего положения стала параллельна плоскости проекций.	98
<i>Задача 2.</i> Выполнить преобразования так, чтобы прямая общего положения стала перпендикулярна плоскости проекций.	99
<i>Задача 3.</i> Выполнить преобразования так, чтобы плоскость общего положения стала перпендикулярна плоскости проекций	100
<i>Задача 4.</i> Выполнить преобразования так, чтобы плоскость общего положения стала параллельна плоскости проекций.	102
<i>Пример 14.</i> Определить расстояние от точки A до прямой BC	103
<i>Пример 15.</i> Построить общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых AB и CD	105
<i>Пример 16.</i> Определить натуральную величину расстояния от точки K до плоскости, заданной треугольником ABC	106
5.4. Определение натуральной величины углов.....	108
5.4.1. Произвольный плоский угол	108
5.4.2. Угол между прямой и плоскостью.....	109
5.4.3. Угол между двумя пересекающимися плоскостями	111
<i>Пример 17.</i> Методом перемены плоскостей проекций определить угол между двумя пересекающимися плоскостями α и β	112
ГЛАВА 6. КРИВЫЕ ЛИНИИ	115
6.1. Общие сведения о кривых линиях.....	115
6.2. Особые точки и кривизна плоской кривой линии.....	119
6.3. Построение лекальных кривых	122
6.3.1. Эволюта и эвольвента	122
6.3.2. Кривые линии второго порядка.....	123
Эллипс	124
Гипербола.....	126
Парабола	129

6.3.3. Кривые линии третьего порядка	130
Декартов лист	130
Циссоида Диоклеса	131
Строфоида	132
6.3.4. Кривые линии четвертого порядка	133
6.3.5. Спирали	134
6.3.6. Циклические кривые	135
Циклоида	135
Эпициклоида	136
Гипоциклоида	137
6.3.7. Графики тригонометрических функций	138
6.3.8. Составные лекальные кривые	139
6.4. Циркульные кривые линии	140
6.4.1. Окружность	140
6.4.2. Коробовая линия	141
Эвольвента многоугольника	141
Овалы и овоиды	142
6.4.3. Фигуры, ограниченные циркульными кривыми	143
6.5. Пространственные кривые	145
6.5.1. Общие сведения о пространственных кривых линиях	145
6.5.2. Винтовые линии	150
Свойства винтовых линий	150
Цилиндрическая винтовая линия	150
Коническая винтовая линия	152
Глобоидная винтовая линия	154

Глава 7. Многогранники 155

7.1. Общие сведения о геометрических телах и многогранниках	155
7.2. Пирамида и бипирамида	157
7.3. Призма и призматойд	159
7.3.1. Призма	159
7.3.2. Параллелепипед	160
7.3.3. Призматойд	161
7.3.4. Антипризма	161
7.4. Правильные и полуправильные многогранники	162

Глава 8. Кривые поверхности 165

8.1. Образование и типы кривых поверхностей	165
8.2. Поверхности второго порядка	168
8.2.1. Общие сведения о поверхностях второго порядка	168
8.2.2. Эллипсоид	169
8.2.3. Гиперболоид	170
8.2.4. Параболоид	173

8.2.5. Цилиндрическая поверхность	175
8.2.6. Коническая поверхность	177
8.3. Поверхности вращения	178
8.3.1. Общие сведения о поверхностях вращения	178
8.3.2. Тор	180
8.4. Поверхности с плоскостью параллелизма	181
8.5. Поверхности с ребром возврата	183
8.6. Циклические поверхности	184
8.7. Графические поверхности	185
8.8. Поверхности переноса	186
8.9. Винтовые поверхности	187

ГЛАВА 9. ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕЛ..... 191

9.1. Пересечение геометрических тел плоскостью	191
9.1.1. Общие сведения о пересечении геометрических тел плоскостью	191
9.1.2. Пересечение многогранников плоскостью	191
Пересечение пирамиды плоскостью	192
Пересечение призмы плоскостью	195
<i>Пример 18.</i> Построить линию пересечения прямой правильной	
треугольной призмы плоскостью α	197
9.1.3. Пересечение тел с кривыми поверхностями плоскостью	199
Пересечение конуса плоскостью	201
Пересечение цилиндра плоскостью	203
9.2. Пересечение прямой с поверхностью геометрического тела	204
9.2.1. Пересечение прямой с поверхностью многогранника	204
Пересечение прямой с поверхностью пирамиды	205
Пересечение прямой с поверхностью призмы	206
9.2.2. Пересечение прямой с кривой поверхностью	208
Пересечение прямой с поверхностью конуса	209
Пересечение прямой с поверхностью цилиндра	210
<i>Пример 19.</i> Построить точки пересечения прямой LT	
с поверхностью сферы	212
9.3. Взаимное пересечение поверхностей геометрических тел	214
9.3.1. Общие сведения о пересечении геометрических тел	214
9.3.2. Взаимное пересечение поверхностей многогранников	214
9.3.3. Взаимное пересечение кривой и многогранной поверхностей	217
9.3.4. Взаимное пересечение кривых поверхностей	219
Линейчатые поверхности пересекаются по прямым	221
Линейчатые поверхности пересекаются по окружностям	221
Одна линейчатая поверхность пересекается по прямым линиям,	
а другая — по окружности	223
Способ вспомогательных секущих сфер	224
Некоторые частные случаи взаимного пересечения поверхностей	
вращения	226

ГЛАВА 10. РАЗВЕРТЫВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ.....	229
10.1. Общие сведения о разворачивании поверхностей.....	229
10.2. Развертывание многогранных поверхностей.....	230
10.2.1. Развертывание поверхности пирамиды.....	230
10.2.2. Развертывание поверхности призмы.....	232
Развертывание поверхности прямой призмы.....	232
Развертывание наклонной призмы.....	232
Метод нормального сечения.....	233
Метод раскатки.....	235
<i>Пример 20.</i> Построить развертку поверхностей пересекающихся пирамиды и призмы и нанести на них линию пересечения.....	237
10.3. Развертывание линейчатых поверхностей.....	241
10.3.1. Развертывание конической поверхности.....	241
Развертывание поверхности прямого кругового конуса.....	241
Развертывание поверхности наклонного конуса.....	243
10.3.2. Развертывание цилиндрической поверхности.....	244
Развертывание поверхности прямого кругового цилиндра.....	244
Развертывание наклонного цилиндра.....	246
10.4. Условное разворачивание поверхностей вращения.....	248
Способ вспомогательных цилиндров.....	248
Способ вспомогательных конусов.....	250
ГЛАВА 11. АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ.....	251
11.1. Общие сведения об аксонометрических проекциях.....	251
11.2. Прямоугольные проекции.....	254
11.2.1. Прямоугольная изометрическая проекция.....	254
Точка.....	255
Отрезок.....	255
Плоскость.....	256
Правильный шестиугольник.....	256
Окружность.....	256
Многогранник.....	257
11.2.2. Прямоугольная диметрическая проекция.....	258
11.3. Косоугольные проекции.....	260
11.3.1. Косоугольная фронтальная изометрическая проекция.....	260
11.3.2. Косоугольная горизонтальная изометрическая проекция.....	260
11.3.3. Косоугольная фронтальная диметрическая проекция.....	261
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	263
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.....	265

Введение

Потребность в отображении действительности появилась у человека давно. Об этом свидетельствуют многочисленные изображения первобытного человека на стенах пещер и камнях, на предметах и орудиях труда. С развитием человечества совершенствовалась и техника передачи различных символов в виде письменности, рисунков, схем. В Древнем Китае, например, была разработана всеобъемлющая знаковая система, где каждому предмету или явлению соответствовал особый знак — иероглиф. В Древнем Египте при возведении сооружений архитекторы использовали чертежи в виде планов и фасадов.

Основные правила и методы построения изображений (планов зданий, земельных угодий, крепостных укреплений) по законам геометрии были разработаны в эпоху античности. В Древней Греции, за 300 лет до нашей эры, сделаны первые шаги к научному обоснованию метода центрального проецирования. В "Началах" Евклида содержатся 12 аксиом и 61 теорема об условиях "видения" предметов.

Расцвет классической культуры сменился застоєм, и только в эпоху Возрождения, благодаря усилиям школ живописи и архитектуры Италии, Нидерландов и Германии, в истории изображения предметов начинается новый период развития. К этому времени относится введение целого ряда основных понятий метода проецирования.

С развитием архитектуры, машинного производства, горной промышленности к изображениям предметов стали предъявлять все более высокие требования, что и привело к необходимости обобщения и систематизации знаний по "теории изображений". Работа знаменитого французского геометра и инженера периода Великой французской революции Гаспара Монжа (1746—1818) "*Geometrie Descriptive*" (рис. В1) представляет собой первое систематическое изложение общего метода изображения пространственных фигур на плоскости, поднявшее *начертательную геометрию* на уровень самостоятельной научной дисциплины.

Преподавание начертательной геометрии в России началось уже в первые годы XIX в. в Корпусе инженеров путей сообщения и чуть позже в Горном кадетском корпусе. Первый русский профессор начертательной геометрии Я. И. Севастьянов (1796—1849) в 1821 г. составил курс "Основания начертательной геометрии", ставший классическим учебным пособием по этому предмету. В настоящее время начертательная геометрия является базовой общетехнической дисциплиной, составляющей основу высшего технического образования.



Рис. В1. Г. Монж — основоположник современной начертательной геометрии

Основное содержание книги посвящено изложению классических положений начертательной геометрии, основанных на ортогональном проецировании и являющихся базой для построения проекционных чертежей. Было бы, однако, большой ошибкой ограничивать значение начертательной геометрии лишь рамками теоретической основы черчения. Ее методы дают возможность решать самые сложные проблемы в различных областях: машиностроении, прикладных науках, химии, физике и др.

Принятые обозначения и символы

В книге используются условные обозначения и математические символы, являющиеся общепринятыми в современной учебной литературе по начертательной геометрии и инженерной графике. Объяснения используемых обозначений приведены далее в табл. В1—В3.

Таблица В1. Графические обозначения на эпюрах и чертежах

Начертание	Пояснение
○	Точка
————	Видимый контур
-----	Невидимый контур, линии проекционной связи
————	Вспомогательные построения, оси проекций, размерные и выносные линии, линии штриховки и т. д.
	Знак перпендикулярности
	Знак параллельности
	Знак равных расстояний

Таблица В2. Условные обозначения на эпюрах и чертежах

Обозначение	Пояснения
$A, B, C, \dots$, а также $1, 2, 3, \dots$	Точки в пространстве или на плоскости
$a, b, c, \dots$, а также $AB, CD, \dots$	Линии в пространстве или на плоскости
$\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$	Плоскости, поверхности, углы
π_0	Произвольная плоскость проекций
π_1, π_2, π_3	Горизонтальная, фронтальная и профильная плоскости проекций
$\pi_4, \pi_5, \dots$	Дополнительные плоскости проекций
$x, y (y_{\pi_1} \text{ и } y_{\pi_3}), z$	Координатные оси, оси проекций, аксонометрические оси
$\pi_2/\pi_1, \pi_1/\pi_4, \dots$	Оси проекций при введении дополнительных плоскостей проекций
$A_0, B_0, C_0, \dots$ или $A_1^0, A_2^0, A_3^0, \dots$	Проекции точек на произвольную плоскость проекций
$A', B', C', \dots; A'', B'', C'', \dots; A''', B''', C''', \dots$	Проекции точек на горизонтальную, фронтальную и профильную плоскости проекций
$A^{IV}, B^{IV}, C^{IV}, \dots; A^V, B^V, C^V, \dots$	Проекции точек на дополнительные плоскости проекций $\pi_4, \pi_5, \dots$
$h'_{0\alpha}, f''_{0\alpha}, p'''_{0\alpha}$	Горизонтальный, фронтальный и профильный следы плоскости α
$X_\alpha, Y_\alpha, Z_\alpha$	Точки схода следов плоскости α
$\bar{A}', \bar{B}', \bar{C}', \dots; \overline{\bar{A}'}, \overline{\bar{B}'}, \overline{\bar{C}'}, \dots$	Проекции точек после первого и второго преобразований
$\overline{h'_{0\alpha}}, \overline{f''_{0\alpha}}, \overline{p'''_{0\alpha}}, \dots; \overline{\overline{h'_{0\alpha}}}, \overline{\overline{f''_{0\alpha}}}, \overline{\overline{p'''_{0\alpha}}}$	Следы плоскости α после первого и второго преобразований
d, D, r, R	Диаметры и радиусы окружностей или сфер
i, i', i''	Оси (вращения, симметрии и пр.) и их проекции

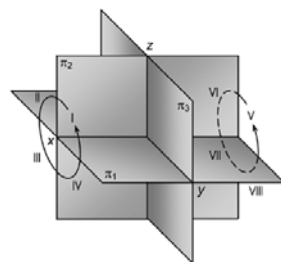
Таблица В3. Математические символы

Символ	Пояснение
(AB)	Прямая, проходящая через точки A и B
$[AB)$	Луч с началом в точке A
$ AB $	Расстояние от точки A до точки B (длина отрезка AB)

Таблица В3 (окончание)

Символ	Пояснение
$[AB]$	Отрезок прямой, ограниченный точками A и B
$\angle ABC$	Угол с вершиной в точке B
$\triangle ABC$	Треугольник с вершинами в точках A , B и C
$\cup AB$	Дуга, ограниченная точками A и B
$=$	Результат геометрического построения, знак равенства
$\equiv$	Знак совпадения геометрических объектов
$\parallel$	Знак параллельности
$\perp$	Знак перпендикулярности
$\in$	Знак принадлежности
$\cap$	Знак пересечения

ГЛАВА 1



Образование проекций

1.1. Методы проецирования

Начертательная геометрия — один из разделов геометрии, в котором свойства пространственных фигур изучают по их изображениям на той или иной поверхности. В качестве поверхности проецирования выбирают, как правило, плоскость.

В начертательной геометрии *чертеж* — основной инструмент решения различных пространственных задач. К выполняемому чертежу предъявляется ряд особых требований, четыре из которых являются наиболее существенными. Чертеж должен быть:

- ◆ наглядным;
- ◆ обратимым;
- ◆ достаточно простым;
- ◆ точным.

Остановимся более подробно на *обратимости* чертежа. Под этим свойством понимается возможность точного воспроизведения формы и размеров предмета по его изображению. Действительно, для всех видов технических чертежей это требование является особенно важным, т. к. по чертежу в машиностроении изготавливается та или иная деталь, в горном деле осуществляется проходка горных выработок, в электротехнике — расчет длины электрических проводников и т. д.

Основным методом получения изображений в начертательной геометрии является *проецирование*. Чтобы понять сущность проецирования, обратимся к рис. 1.1.

Пусть в пространстве имеется некоторая плоскость π_0 , которую будем называть *плоскостью проекций*. Выберем какую-либо точку S , не лежащую в плоскости проекций. Эта точка называется *центром проецирования*. Чтобы спроецировать некоторую точку A пространства на плоскость π_0 , необходимо через центр проецирования S провести *проецирующую прямую* SA до ее пересечения в точке A_0 с плоскостью π_0 .

При этом точка A_0 называется *проекцией* точки A на плоскости π_0 . *Проекцией фигуры* называется совокупность проекций всех ее точек на выбранную поверхность проецирования (например, на рис. 1.1 проекцией треугольника BCD на плос-

кости π_0 является треугольник $B_0C_0D_0$). Описанный метод проецирования путем проведения проецирующих прямых через точки заданной фигуры и центр проецирования называется *центральной*.

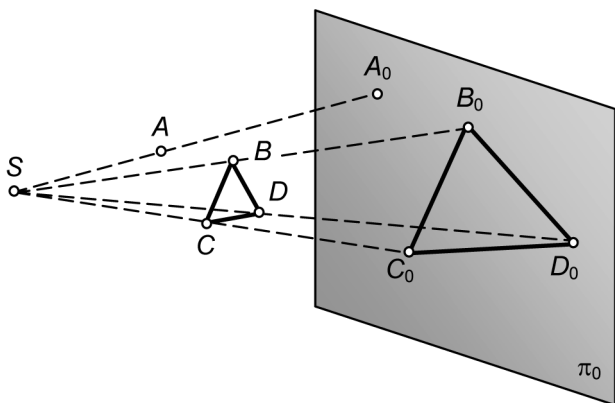


Рис. 1.1. Схема центрального проецирования

Если проецирование осуществляется из бесконечно удаленной точки пространства (рис. 1.2), то все проецирующие прямые окажутся взаимно параллельными. Этот метод проецирования называется *параллельным*, а направление m , по которому оно осуществляется, — *направлением проецирования*.

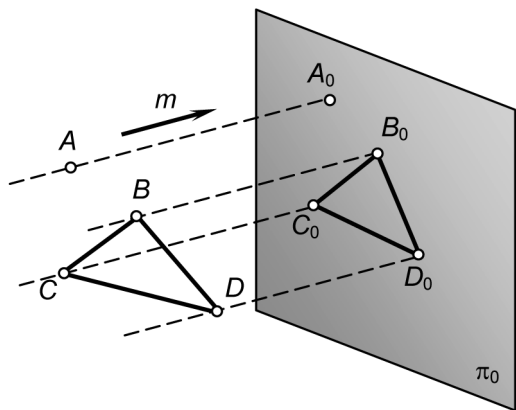


Рис. 1.2. Схема параллельного проецирования

Если направление параллельного проецирования перпендикулярно плоскости проекций, то проецирование называется *прямоугольным* или *ортогональным*. Во всех остальных случаях параллельное проецирование называется *косоугольным*.

Изображения, полученные при помощи центрального проецирования, отличаются хорошей наглядностью, что объясняется устройством зрительного аппарата

человеческого глаза. Однако этот метод имеет существенные недостатки. Во-первых, непросто построить само изображение предмета. Во-вторых, построенные проекции имеют низкие метрические свойства, поэтому вследствие значительных искажений, возникающих при данном методе проецирования, определить истинные размеры предмета весьма сложно. По этим причинам способ центрального проецирования имеет ограниченное применение в практике и используется, когда от чертежа требуется, прежде всего, наглядность.

Несмотря на то, что параллельное проецирование, по сравнению с центральным, имеет меньшую наглядность, параллельные проекции, особенно ортогональные, обладают лучшей измеримостью и простотой построения.

Задачи, решаемые методами начертательной геометрии, принято делить на метрические и позиционные.

Метрические задачи имеют целью определение размеров различных предметов по их изображению. К таким задачам относится определение натуральной величины геометрических фигур, расстояний и углов между ними.

Позиционные задачи позволяют определить взаимное расположение различных объектов: точек, прямых линий, плоскостей, пространственных фигур.

Для быстрого и удобного решения пространственных задач в начертательной геометрии используют несколько систем изображений, особенности которых приведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1. Основные системы изображения, используемые при проецировании

Система изображения	Способ проецирования	Поверхность проецирования	Особенности
Эпюр (ортогональный или комплексный чертеж)	Ортогональное	Две или три взаимно перпендикулярные плоскости	Условное совмещение плоскостей проекций с плоскостью чертежа путем их вращения
Проекции с числовыми отметками	Ортогональное	Плоскость	Расстояние до плоскости проекций определяется числовой отметкой
Перспектива	Центральное	Плоскость, цилиндр, сфера	Ограничение максимального угла между проецирующими лучами
АксонOMETрические проекции	Параллельное или центральное	Плоскость	Проецирование вместе с осями координат

Область применения той или иной системы изображений зависит, прежде всего, от целей, которые ставятся при построении чертежа. Из представленных в табл. 1.1 систем наиболее широкое применение в техническом проектировании имеет эпюра (ортогональный или комплексный чертеж). На его основе выпол-

няются рабочие и сборочные чертежи, эскизы деталей, схемы и т. д. Поэтому в дальнейшем изложении курса основное внимание будет уделено именно этому методу построения.

1.2. Эпюр. Проецирование точки

Любой предмет пространства можно рассматривать как определенную совокупность отдельных точек этого пространства, поэтому для изображения различных предметов необходимо научиться строить изображения точки пространства.

Представим в пространстве три взаимно перпендикулярные плоскости (рис. 1.3):

- ◆ π_1 — горизонтальную плоскость проекций;
- ◆ π_2 — фронтальную плоскость проекций;
- ◆ π_3 — профильную плоскость проекций.

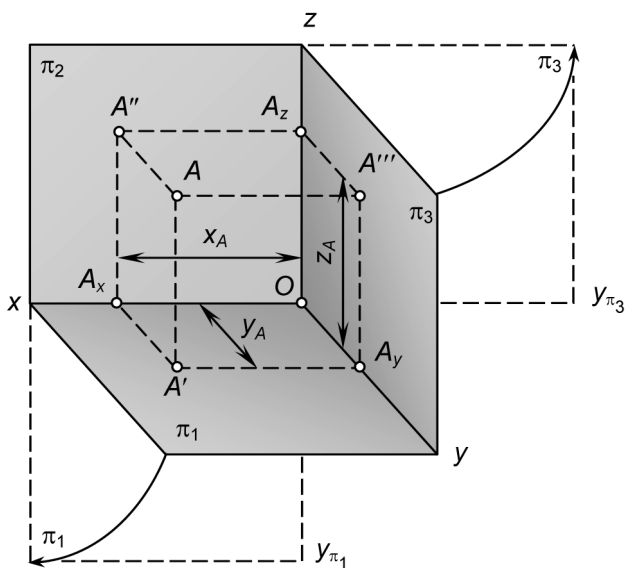


Рис. 1.3. Точка A в системе трех взаимно перпендикулярных плоскостей

Плоскости проекций пересекаются по прямым, которые называются *осями проекций* и обозначаются x , y и z . Точка O — точка пересечения всех трех осей проекций — называется *началом координат*.

Для наглядного изображения плоскостей проекций взята косоугольная диметрическая проекция, известная из курсов геометрии и черчения средней школы. В этой проекции ось x расположена горизонтально и направлена положительным лучом влево, ось z — вертикально и направлена положительным лучом вверх, а ось y наклонена к горизонтальной линии под углом 45° и положитель-

ным лучом направлена к наблюдателю. Коэффициент искажения по осям x и z равен 1, а по оси y — 0,5.

Представим себе в пространстве некоторую точку A . Чтобы получить проекцию точки A на горизонтальной плоскости проекций, необходимо провести через эту точку проецирующую прямую, перпендикулярную плоскости π_1 , и найти точку пересечения A' этой прямой с плоскостью π_1 . Точка A' называется *горизонтальной проекцией* точки A . Путем ортогонального проецирования точки A на фронтальную и профильную плоскости проекций образуются ее *фронтальная* и *профильная проекции* (соответственно точки A'' и A'''). Образованный проецирующими лучами и отрезками осей параллелепипед называют *параллелепипедом проекций*.

Длины отрезков, измеряемые некоторой установленной единицей длины и равные расстояниям от точки A до горизонтальной, фронтальной и профильной плоскостей проекций, называются *прямоугольными (декартовыми) координатами*:

- ♦ по оси x — *абсцисса*, равная длине отрезка $x_A = |AA'''|$;
- ♦ по оси y — *ордината*, равная длине отрезка $y_A = |AA''|$;
- ♦ по оси z — *апplikата*, равная длине отрезка $z_A = |AA'|$.

Три координаты точки однозначно определяют ее положение в пространстве.

Взаимно перпендикулярные плоскости, изображенные на рис. 1.3, дают нам пространственный чертеж. Для получения трех проекций точки в плоскости чертежа плоскости проекций π_1 , π_2 и π_3 условно совмещают с плоскостью чертежа. Это совмещение выполняется следующим образом. Фронтальная плоскость проекций π_2 принимается за плоскость чертежа, горизонтальная плоскость проекций π_1 совмещается с плоскостью чертежа вращением вокруг оси x , а профильная плоскость проекций π_3 — вращением вокруг оси z . Направление вращения на рис. 3 показано стрелками.

При совмещении плоскости π_1 с плоскостью чертежа положительное направление оси y совмещается с отрицательным направлением оси z , а отрицательное направление — с положительным направлением оси z . На чертеже изображение оси y принято обозначать y_{π_1} . При совмещении плоскости π_3 с плоскостью чертежа положительное направление оси y совмещается с отрицательным направлением оси x , а отрицательное направление — с положительным направлением оси x . На чертеже изображение оси y принято обозначать y_{π_3} .

В результате совмещения плоскостей проекций с плоскостью чертежа образуется плоское изображение — *эпюр* (от франц. *epure* — чертеж, проект), или *ортогональный (комплексный) чертеж* (рис. 1.4).

На эпюре изображают только проекции геометрических объектов, а не сами объекты. Любые две проекции точки, изображенные на эпюре, связаны между собой *линией проекционной связи*, перпендикулярной оси проекций (будем обозначать ее штриховой линией):

- ♦ горизонтальная и фронтальная проекции (точки A' и A'') расположены на линии проекционной связи, перпендикулярной оси x ;

- ✧ фронтальная и профильная проекции (точки A'' и A''') — на линии проекционной связи, перпендикулярной оси Z ;
- ✧ горизонтальная и профильная проекции (точки A' и A''') — на линии проекционной связи, перпендикулярной оси Y .

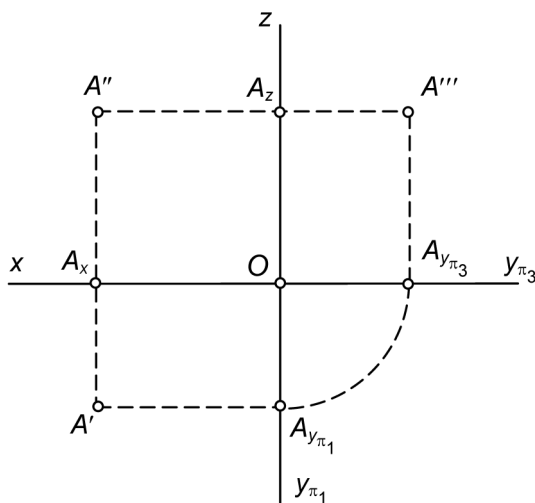


Рис. 1.4. Точка A на эмпоре

Вследствие того, что отрезки $OA_{y_{\pi_1}}$ и $OA_{y_{\pi_3}}$ являются изображением одной и той же координаты Y_A , точки $A_{y_{\pi_1}}$ и $A_{y_{\pi_3}}$ связывают дугой окружности с центром в начале координат.

Каждая проекция точки A определяется двумя координатами:

- ✧ горизонтальная проекция A' — координатами X_A, Y_A ;
- ✧ фронтальная проекция A'' — координатами X_A, Z_A ;
- ✧ профильная проекция A''' — координатами Y_A, Z_A .

Две проекции точки, построенные на эмпоре, однозначно определяют ее положение в пространстве. По двум проекциям заданной точки можно построить третью, и притом только одну.

Положение точки может быть задано как *графически*, так и *аналитически*. Пример графического изображения точки рассмотрен нами на рис. 1.4. Аналитическая форма задания точки представляет собой числовое выражение трех координат этой точки в выбранных единицах длины (миллиметрах, сантиметрах и других системных или внесистемных единицах).

Поскольку линейные размеры на чертежах указывают в миллиметрах и при этом саму единицу измерения (мм) не проставляют, то запись $A(30; 20; 15)$ будет означать, что $X_A = 30$ мм, $Y_A = 20$ мм, $Z_A = 15$ мм. В случае использования

других единиц измерения необходимо указывать, в каких именно, например, B (1 дм, 4 см, 5 см).

От аналитической формы задания точки легко перейти к графическому изображению этой точки на ортогональном чертеже, и наоборот.

Пример 1.

Построить проекции точки B ($-20; -30; 10$).

1. С учетом знака откладываем на осях проекций координатные отрезки (рис. 1.5):

$$x_B = |OB_x| = -20;$$

$$y_B = |OB_{y_{\pi_1}}| = |OB_{y_{\pi_3}}| = -30;$$

$$z_B = |OB_z| = 10.$$

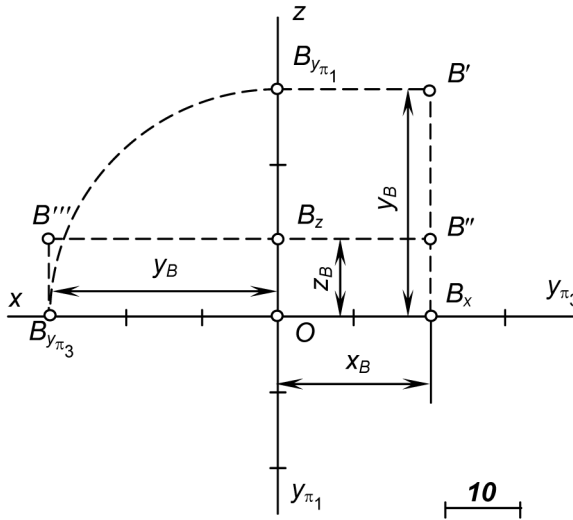


Рис. 1.5. Построение проекций точки B , заданной аналитически

2. Отмечаем точки $B_x, B_{y_{\pi_1}}, B_{y_{\pi_3}}, B_z$.
3. Из построенных точек $B_x, B_{y_{\pi_1}}, B_{y_{\pi_3}}, B_z$ проводим линии проекционной связи, перпендикулярные осям проекций, и на их пересечениях отмечаем проекции точки B :

$$B' = (B_x B' \perp x) \cap (B_{y_{\pi_1}} B' \perp y_{\pi_1});$$

$$B'' = (B_x B'' \perp x) \cap (B_z B'' \perp z);$$

$$B''' = (B_{y_{\pi_3}} B''' \perp y_{\pi_3}) \cap (B_z B''' \perp z).$$

Пример 2. Построить третью проекцию точки A по двум заданным.

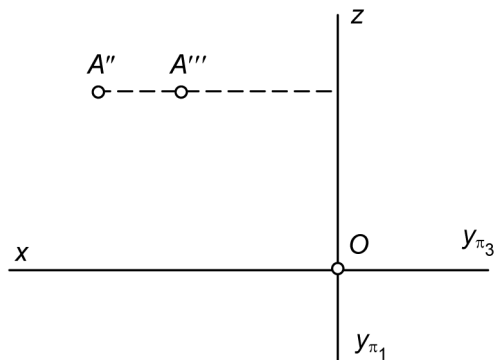


Рис. 1.6. Заданные проекции точки A

1. Даны фронтальная и профильная проекции точки A (рис. 1.6): фронтальная проекция A'' определяется координатами $x_A = |OA_x|$, $z_A = |OA_z|$,

$$A'' = (A_x A'' \perp x) \cap (A_z A'' \perp z);$$

профильная проекция A''' определяется координатами $y_A = |OA_{y_{\pi_3}}|$, $z_A = |OA_z|$,

$$A''' = (A_{y_{\pi_3}} A''' \perp y_{\pi_3}) \cap (A_z A''' \perp z).$$

2. Из имеющихся проекций проводим линии проекционной связи, перпендикулярные осям проекций, и определяем координатные отрезки OA_x , $OA_{y_{\pi_3}}$, OA_z , равные соответствующим координатам точки A (рис. 1.7):

$$|OA_x| = x_A, |OA_{y_{\pi_3}}| = y_A, |OA_z| = z_A.$$

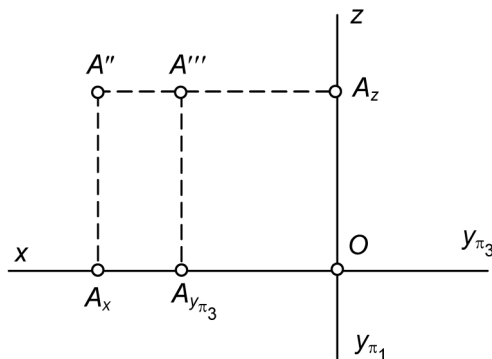


Рис. 1.7. Определение координатных отрезков точки A

3. На пересечении линий проекционной связи с осями проекций отмечаем точки $A_x, A_{y_{\pi_3}}, A_z$.
4. Строим третью, горизонтальную проекцию точки $A - A'$ (рис. 1.8). Горизонтальная проекция A' определяется координатами

$$x_A = |OA_x|, y_A = |OA_{y_{\pi_1}}|,$$

$$A' = (A_x A' \perp x) \cap (A_{y_{\pi_1}} A' \perp y_{\pi_1}).$$

При определении точки $A_{y_{\pi_1}}$ по $A_{y_{\pi_3}}$ перенос осуществляется с оси y_{π_3} на соответствующее по знаку направление оси y_{π_1} .

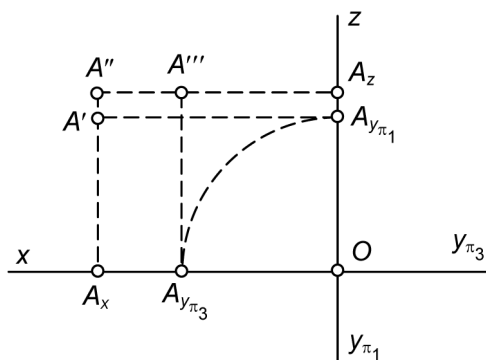


Рис. 1.8. Построение третьей проекции точки A

1.3. Точки общего и частного положения

В зависимости от расположения точки относительно плоскостей проекций различают:

- ♦ *точки общего положения*, не принадлежащие плоскостям проекций (к ним относятся все рассмотренные точки предыдущего раздела);
- ♦ *точки частного положения*, лежащие в плоскостях проекций π_1, π_2, π_3 , на осях проекций x, y, z или в начале координат.

У точки общего положения все три координаты отличны от нуля. Одна или несколько координат точки частного положения равны нулю:

- ♦ если точка лежит в плоскости проекций, то ее координата по оси, перпендикулярной этой плоскости проекций, равна нулю;
- ♦ если точка лежит на оси проекций, то две другие ее координаты равны нулю;
- ♦ если точка лежит в начале координат, то естественно, что все три координаты точки равны нулю.

Рассмотрим некоторые частные случаи положения точки: когда точка лежит в какой-нибудь плоскости проекций или на какой-нибудь оси проекций.

Точка B на рис. 1.9 принадлежит горизонтальной плоскости проекций. Горизонтальная проекция B' этой точки совпадает с самой точкой, фронтальная проекция B'' лежит на оси x , а профильная проекция B''' — на оси y . Координата точки B по оси z равна нулю, и, следовательно, точка B_z лежит в начале координат.

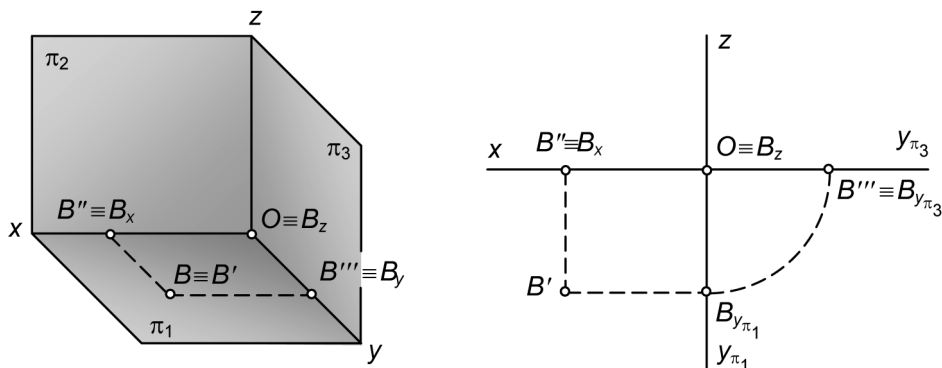


Рис. 1.9. Точка B , лежащая в плоскости π_1 , — в аксонометрии (слева) и на эпюре (справа)

Точка C на рис. 1.10 лежит на оси y . С самой точкой совпадают ее горизонтальная C' и профильная C''' проекции, причем на ортогональном чертеже горизонтальная проекция лежит на оси y_{π_1} , а профильная — на оси y_{π_3} . Фронтальная проекция C'' лежит в начале координат.

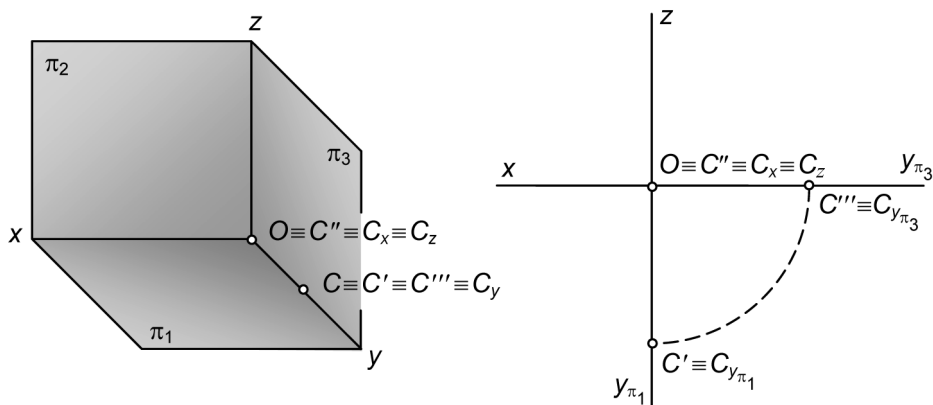


Рис. 1.10. Точка C , лежащая на оси y , — в аксонометрии (слева) и на эпюре (справа)

1.4. Четверти и октанты

Большую часть задач начертательной геометрии можно решить, имея не три, а две проекции геометрических объектов — горизонтальную и фронтальную. Такие чертежи, с двумя проекциями, называют *двухпозиционными*. Плоскости проекций π_1 и π_2 являются неограниченными поверхностями и при взаимном пересечении образуют четыре двугранных угла, которые называют *четвертями* или *квадрантами*. Четверти принято обозначать римскими цифрами и отсчитывать так, как показано на рис. 1.11.

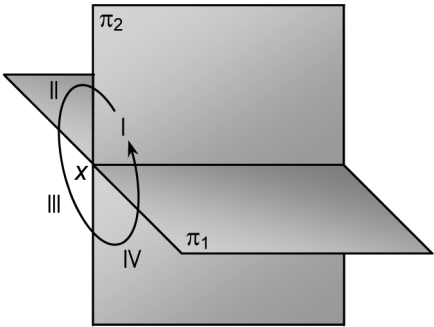


Рис. 1.11. Обозначение четвертей

На рис. 1.12 точка A находится в I-й четверти, точка B — во II-й, точка C — в III-й, а точка D — в IV-й четверти. Точка D одинаково удалена от плоскостей проекций π_1 и π_2 , поэтому проекции D' и D'' совпали между собой. Знаки координат в различных четвертях приведены в табл. 1.2 (эта часть таблицы тонирована).

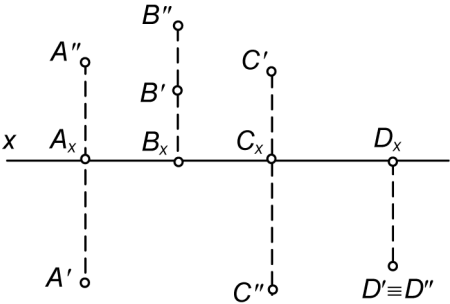


Рис. 1.12. Точки A , B , C и D , заданные в двух проекциях

Таблица 1.2. Знаки прямоугольных координат в различных четвертях и октантах

Номер четверти или октанта	x	y	z
I	+	+	+
II	+	−	+
III	+	−	−
IV	+	+	−
V	−	+	+
VI	−	−	+
VII	−	−	−
VIII	−	+	−

Чаще всего на практике имеет место применение первой четверти пространства, поэтому геометрические объекты при решении задач чаще всего располагают именно здесь.

Тем не менее, ряд задач целесообразно решать, имея три проекции объекта, а некоторые задачи вообще невозможно решить без третьей проекции (как, например, в случаях с осевой плоскостью, о чем будет рассказано в дальнейшем изложении). Чертеж, в котором заданы три проекции точек и имеется возможность определить все три координаты этих точек, называют *трехпозиционным*.

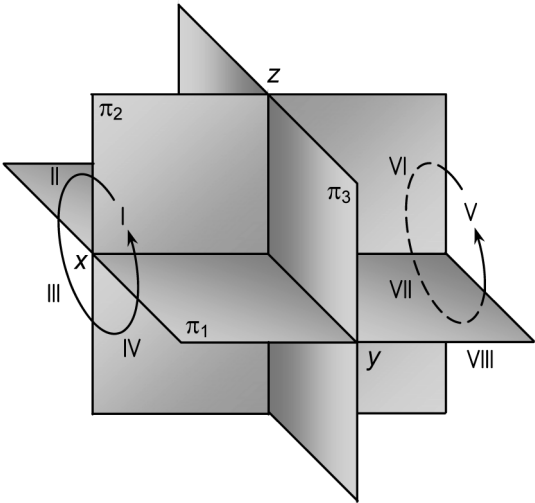


Рис. 1.13. Обозначение октантов

Плоскости проекций π_1 , π_2 и π_3 при взаимном пересечении делят пространство на восемь трехгранных углов, или *октантов* (от лат. *octans* — восьмая часть). Нумерация октантов в полупространствах приведена на рис. 1.13. Как видно, четверти нумеруются как I—IV-й октанты.

Знаки координат в каждом из октантов указаны в табл. 1.2. Геометрические элементы, расположенные в I-й четверти или в I-м октанте, считаются "видимыми".

Пример 3. Определить, в каких октантах находятся точки D и E (рис. 1.14).

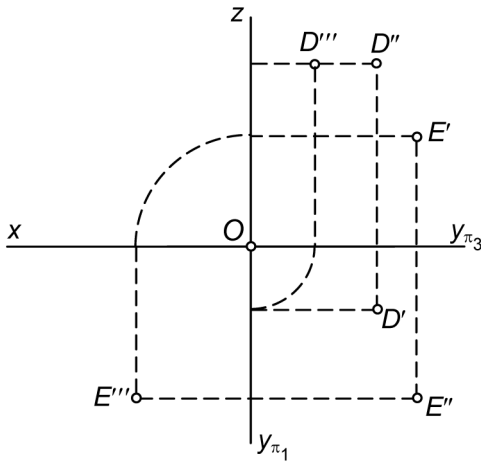
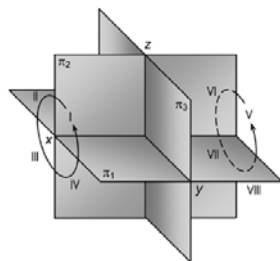


Рис. 1.14. Проекции точек D и E

1. Начнем с определения положения точки D . Проанализируем расположение ее фронтальной проекции D'' (логично начинать рассуждения именно с фронтальной проекции, поскольку плоскость π_2 , в которой лежит эта проекция, не вращается, а принимается за плоскость чертежа). Проекция D'' лежит выше оси x и правее оси z , следовательно сама точка D лежит выше плоскости π_1 и справа от плоскости π_3 . Это возможно, если эта точка будет находиться в одном из двух октантов — V-м или VI-м.
2. Теперь обратимся к горизонтальной проекции D' : она лежит в плоскости проекций π_1 , совмещенной с плоскостью чертежа. Мысленно повернем на 90° эту плоскость вместе с D' , вращая ее вокруг оси x так, чтобы нижняя полуплоскость перемещалась на нас, а верхняя — в противоположном от нас направлении. Горизонтальная проекция D' окажется в ближней к нам полуплоскости, и следовательно, сама точка D тоже будет находиться в ближнем к нам угле пространства, т. е. в V-м октанте.

3. Положение точки D можно определить и другим способом, механически определяя знаки координат. Горизонтальная проекция D' имеет координаты x ("минус") и y ("плюс"), фронтальная проекция D'' — координаты x ("минус") и z ("плюс"). По трем знакам — "минус", "плюс", "плюс" — и с помощью табл. 1.2 определяем, что точка D находится в V-м октанте.
4. Перейдем к точке E . Ее фронтальная проекция E'' лежит ниже оси x и правее оси z , следовательно, сама точка может лежать или в VII-м, или в VIII-м октантах. Мысленно поворачиваем на 90° горизонтальную проекцию E' вместе с плоскостью π_1 вокруг оси x , и эта проекция окажется в дальней от нас полуплоскости. Следовательно, сама точка E будет находиться в дальнем от нас, VII-м октанте. Эти рассуждения подтверждаются знаками координат x , y и z — "минус", "минус", "минус".

ГЛАВА 2



Проецирование прямой линии

2.1. Проекция отрезка прямой линии. Точка на прямой

Прямую линию можно рассматривать как совокупность точек. Из школьного курса геометрии известно, что через две точки можно провести прямую и притом только одну. Пусть нам даны на эюре точки A и B . Две проекции каждой из этих точек однозначно определяют их положение в пространстве (рис. 2.1). Если мы соединим одноименные проекции точек, то получим *проекции прямой*. Точки A и B ограничивают отрезок прямой и определяют положение этой прямой как бесконечной линии.

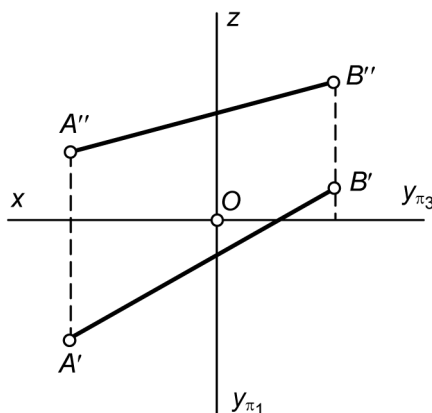


Рис. 2.1. Проекции прямой AB на эюре

Таким образом, прямая линия на эюре может быть задана двумя проекциями отрезка, принадлежащего этой прямой. По двум проекциям отрезка всегда можно построить его третью проекцию и притом только одну.

Если прямая не параллельна ни одной из плоскостей проекций, то она пересекает все плоскости проекций и не проецируется ни на одну из них в натуральную величину. Такую прямую называют *прямой общего положения*. Ни одна из ее проекций не параллельна осям. Прямая AB на рис. 2.1 — это прямая общего положения.

Точка принадлежит прямой линии, если ее проекции лежат на одноименных проекциях этой линии. Если на прямой AB мы выберем какую-либо точку C , то проекции этой точки будут лежать на одноименных проекциях прямой (рис. 2.2).

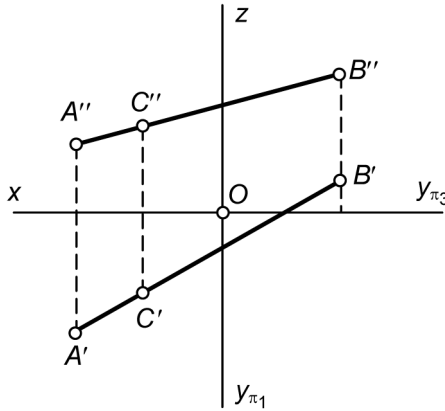


Рис. 2.2. Точка C , принадлежащая прямой AB

Таким образом, если точка принадлежит заданной прямой, то для построения проекций этой точки на эпюре необходимо и достаточно знать положение хотя бы одной проекции точки. Недостающие проекции легко найти в пересечении линий проекционной связи с соответствующими проекциями прямой.

Одним из свойств параллельного проецирования является то, что отношение отрезков прямой равно отношению их проекций. На рис. 2.2 деление проекций $A''B''$ и $A'B'$ точками C'' и C' соответствует делению в пространстве отрезка AB точкой C в том же отношении:

$$\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{|A'C'|}{|C'B'|} = \frac{|A''C''|}{|C''B''|}.$$

2.2. Прямые частного положения

Прямая, параллельная одной или двум плоскостям проекций, называется *прямой частного положения*.

2.2.1. Прямые уровня

Если прямая параллельна одной плоскости проекций, то она называется *прямой уровня*. В этом случае прямая проецируется на эту плоскость в натуральную вели-

чину, а на двух других плоскостях проекции такой прямой — параллельны осям проекций.

В зависимости от расположения прямой уровня различают:

◆ *Горизонтальную прямую* — прямую, параллельную плоскости π_1 (рис. 2.3):

- ◆ горизонтальная проекция отрезка горизонтальной прямой равна его натуральной величине;
- ◆ фронтальная проекция горизонтальной прямой всегда параллельна оси x ;
- ◆ угол φ_2 между горизонтальной проекцией горизонтальной прямой и осью x является углом между этой прямой и фронтальной плоскостью проекций.

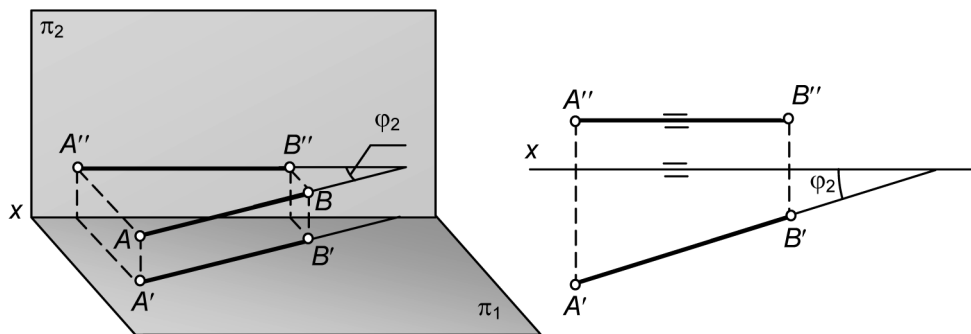


Рис. 2.3. Горизонтальная прямая

◆ *Фронтальную прямую* — прямую, параллельную плоскости π_2 (рис. 2.4):

- ◆ фронтальная проекция отрезка фронтальной прямой равна его натуральной величине;
- ◆ горизонтальная проекция фронтальной прямой всегда параллельна оси x ;
- ◆ угол φ_1 между фронтальной проекцией фронтальной прямой и осью x является углом между фронтальной прямой и горизонтальной плоскостью проекций.

◆ *Профильную прямую* — прямую, параллельную плоскости π_3 (рис. 2.5):

- ◆ профильная проекция отрезка профильной прямой равна его натуральной величине;
- ◆ горизонтальная проекция профильной прямой всегда параллельна оси Y_{π_1} , а фронтальная — оси Z ;
- ◆ угол φ_1 между профильной проекцией профильной прямой и осью Y_{π_3} является углом между прямой и горизонтальной плоскостью проекций, а угол φ_2 между профильной проекцией прямой и осью Z — углом между прямой и фронтальной плоскостью проекций.

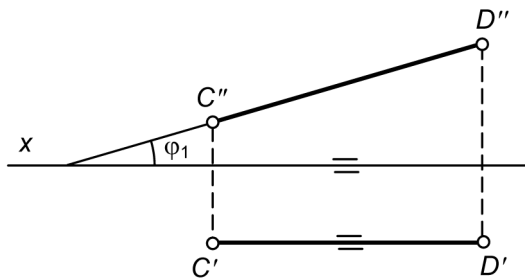


Рис. 2.4. Фронтальная прямая

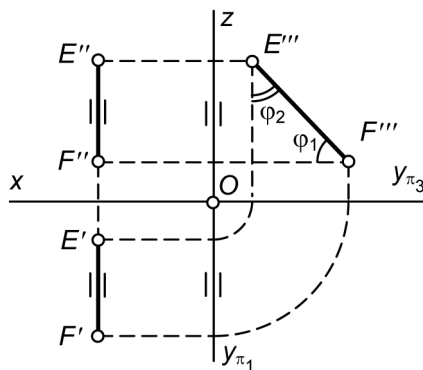


Рис. 2.5. Профильная прямая

2.2.2. Проецирующие прямые

Если прямая параллельна двум плоскостям проекций (т. е. перпендикулярна третьей плоскости проекций), то она называется *проецирующей прямой*. На две плоскости проекции прямая проецируется в натуральную величину, а на третьей — "вырождается" в точку. В зависимости от расположения проецирующей прямой различают:

- ◆ *Горизонтально-проецирующую прямую*, перпендикулярную плоскости π_1 (прямая AB на рис. 2.6):
 - ◆ фронтальная и профильная проекции отрезка горизонтально-проецирующей прямой равны его натуральной величине;
 - ◆ горизонтальная проекция представляет собой точку.
- ◆ *Фронтально-проецирующую прямую*, перпендикулярную плоскости π_2 (прямая CD на рис. 2.6):
 - ◆ горизонтальная и профильная проекции отрезка фронтально-проецирующей прямой равны его натуральной величине;
 - ◆ фронтальная проекция представляет собой точку.

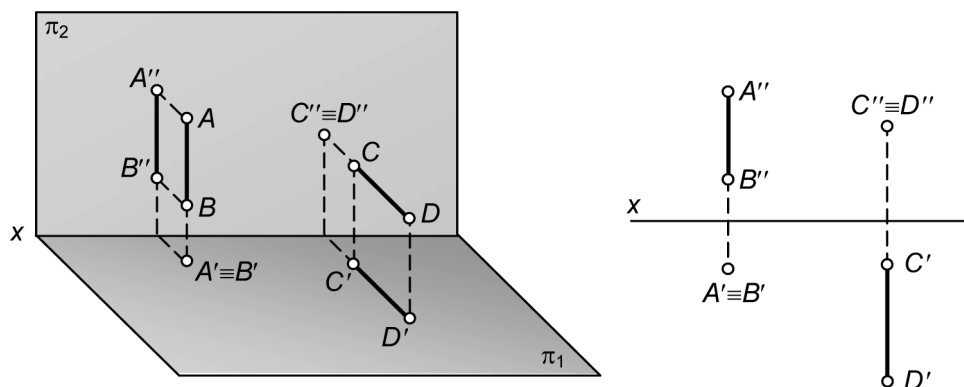


Рис. 2.6. Горизонтально-проецирующая прямая AB и фронтально-проецирующая прямая CD

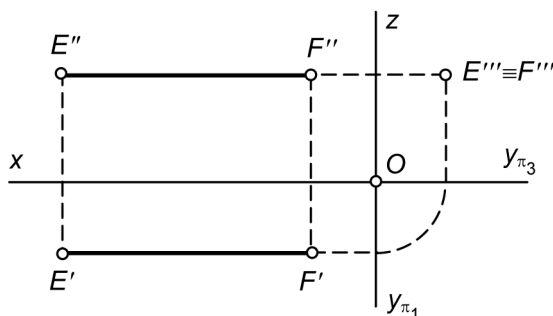


Рис. 2.7. Профильно-проецирующая прямая

- ♦ Профильно-проецирующую прямую, перпендикулярную плоскости π_3 (рис. 2.7):
- ♦ горизонтальная и фронтальная проекции отрезка профильно-проецирующей прямой равны его натуральной величине;
 - ♦ профильная проекция профильно-проецирующей прямой представляет собой точку.

2.3. Определение натуральной величины отрезка прямой методом прямоугольного треугольника

Ортогональная проекция отрезка прямой общего положения на любую плоскость проекций всегда меньше длины самого отрезка. Рассмотрим правила определения натуральной величины¹ отрезка прямой *методом прямоугольного треугольника*.

¹ Натуральной (или истинной) величиной называют такое изображение плоского геометрического объекта (отрезка прямой линии, плоской фигуры, грани многогранника и т. п.), на котором его линейные размеры на эюре равны размерам в натуре.

Предположим, что точки A и B лежат в I-м октанте (рис. 2.8). Соединим эти точки и получим отрезок некоторой прямой AB . Построим горизонтальную и фронтальную проекции этой прямой. Из точки A' проведем линию, параллельную AB , которая в пересечении с линией проекционной связи даст точку B_0 .

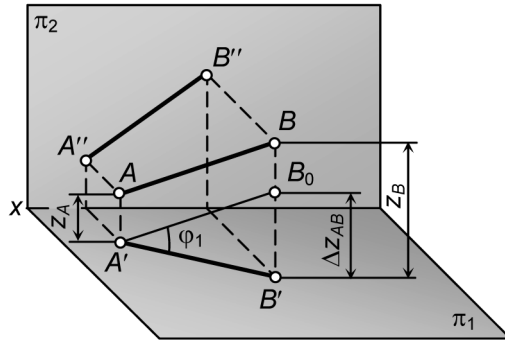


Рис. 2.8. Отрезок AB в аксонометрии

Рассмотрим стороны прямоугольного треугольника $A'B'B_0$:

- ◆ гипотенуза треугольника $A'B_0$ определяет натуральную величину отрезка AB ;
- ◆ один катет $A'B'$ представляет собой горизонтальную проекцию отрезка AB ;
- ◆ второй катет $B'B_0$ равен разности координат точек A и B по оси z :

$$\Delta Z_{AB} = Z_B - Z_A.$$

На эюре оказывается достаточно данных для построения прямоугольного треугольника "по двум катетам", равного рассмотренному (рис. 2.9). Для этого к горизонтальной проекции $A'B'$ "пристроен" второй катет — разность координат ΔZ_{AB} . Гипотенуза $A'B_0$ построенного треугольника равна натуральной величине отрезка AB .

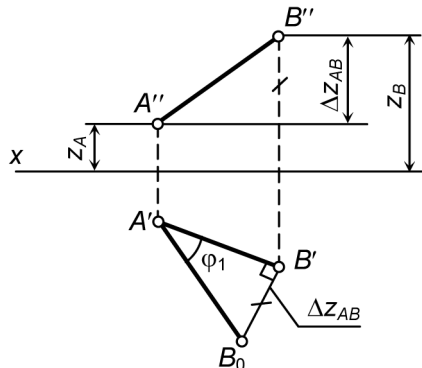


Рис. 2.9. Определение натуральной величины отрезка AB на эюре

Натуральную величину отрезка можно определить, построив прямоугольный треугольник, катетом которого является и фронтальная проекция отрезка (рис. 2.10): при этом второй катет окажется равным разности координат Δy_{AB} . Для треугольника, построенного на профильной проекции отрезка, вторым катетом будет разность координат Δx_{AB} . На рис. 2.10 натуральная величина отрезка AB определена три раза: гипотенузы построенных прямоугольных треугольников имеют равную длину и все они определяют натуральную величину отрезка AB .

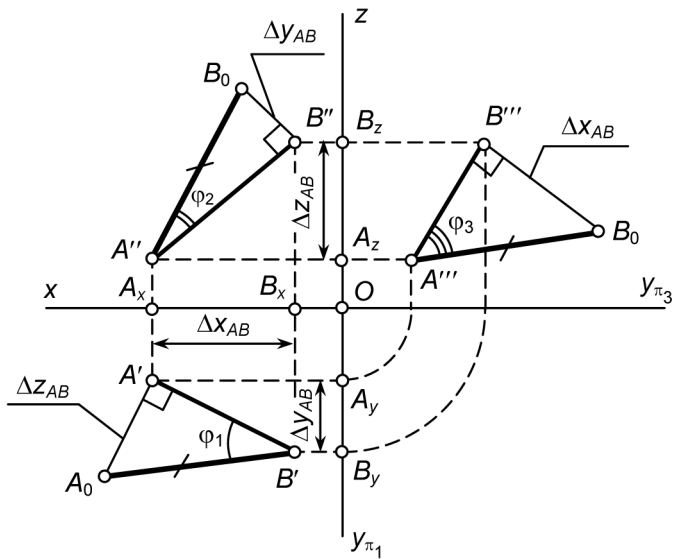


Рис. 2.10. Определение натуральной величины отрезка на разных проекциях

В общем случае, натуральная величина отрезка прямой общего положения равна гипотенузе прямоугольного треугольника, одним катетом которого является проекция отрезка прямой, а вторым — разность "недостающих" координат (табл. 2.1).

Таблица 2.1. Геометрические элементы при определении натуральной величины отрезка прямой AB методом прямоугольного треугольника

Проекция отрезка прямой, выбранная в качестве катета треугольника	Разность координат, используемая в качестве второго катета	Плоскость проекций, к которой определяется угол наклона	Обозначение угла наклона
Горизонтальная $A'B'$	$\Delta z_{AB} = A_z B_z $	π_1	φ_1
Фронтальная $A''B''$	$\Delta y_{AB} = A_y B_y $	π_2	φ_2
Профильная $A'''B'''$	$\Delta x_{AB} = A_x B_x $	π_3	φ_3

Под термином "недостающая" координата подразумевается координата, которая отсутствует в проекции, выбранной в качестве катета прямоугольного треугольника. Так, горизонтальная проекция отрезка строится по координатам x и y , следовательно, "недостающей" координатой в этом случае будет координата z . Аналогично у фронтальной проекции отрезка "недостающей" координатой будем считать координату y , а у профильной — координату x .

Координаты концов отрезка могут иметь разные знаки. Тогда разность координат определяется с учетом знака. Например, если координата z точки A положительная, а точки B отрицательная, то разность координат

$$\Delta z_{AB} = z_A - (-z_B) = z_A + z_B.$$

Угол наклона прямой к плоскости проекций — это угол между прямой и ее проекцией. Следовательно, определяя натуральную величину отрезка прямой методом прямоугольного треугольника, одновременно можно найти и угол ее наклона к плоскости проекций. Угол между гипотенузой и соответствующей проекцией отрезка равен углу наклона этой прямой к данной плоскости проекций.

Пример 4. Определить натуральную величину отрезка AB и угол наклона прямой к плоскости π_1 (рис. 2.11).

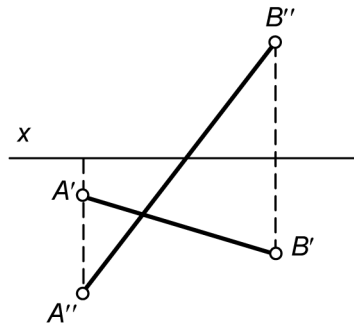


Рис. 2.11. Заданные проекции отрезка AB

1. По табл. 2.1 определяем, что для нахождения угла наклона к плоскости π_1 надо построить прямоугольный треугольник, в котором одним катетом будет горизонтальная проекция отрезка $A'B'$, а вторым — разность координат по оси z .
2. Определяем координаты по оси z точек A и B и их разность (рис. 2.12):

$$\Delta z_{AB} = z_B - (-z_A) = z_B + z_A.$$

3. Строим прямоугольный треугольник, в котором за катет принимаем горизонтальную проекцию $A'B'$. В качестве второго катета откладываем расстояние, равное Δz_{AB} .
4. Гипотенуза построенного треугольника есть натуральная величина отрезка AB , а угол при вершине A' (угол φ_1) — угол наклона прямой к плоскости π_1 .

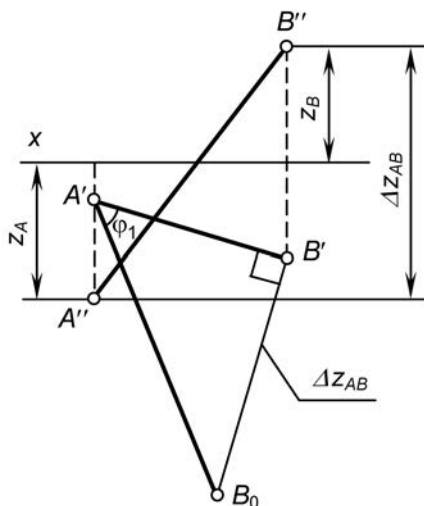


Рис. 2.12. Определение натуральной величины отрезка AB и угла наклона прямой к плоскости π_1

2.4. Следы прямой

Следом прямой называется точка пересечения прямой линии с плоскостью проекций. Прямая общего положения пересекает все три плоскости проекций и, следовательно, имеет три следа. Прямая линия частного положения не имеет следа на плоскости проекций, если она параллельна этой плоскости.

На рис. 2.13 показана прямая, заданная отрезком AB , который находится в I-м октанте. Продолжим эту прямую до пересечения с плоскостями проекций:

- ✧ с плоскостью π_1 в точке M — *горизонтальным следом прямой*;
- ✧ с плоскостью π_2 в точке N — *фронтальным следом прямой*;
- ✧ с плоскостью π_3 в точке P — *профильным следом прямой*.

Следы прямой совпадают с проекциями этих следов в той плоскости, где они расположены:

$$M \equiv M', N \equiv N'', P \equiv P''.$$

Построим другие две проекции следов:

- ✧ Поскольку точка M лежит в плоскости π_1 , ее фронтальная проекция M'' располагается на оси X , а профильная M''' — на оси Y .
- ✧ Горизонтальная проекция N' точки N также располагается на оси X , а профильная проекция N''' лежит на оси Z .
- ✧ Горизонтальная проекция профильного следа P' лежит на оси Y , а фронтальная проекция P'' — на оси Z .

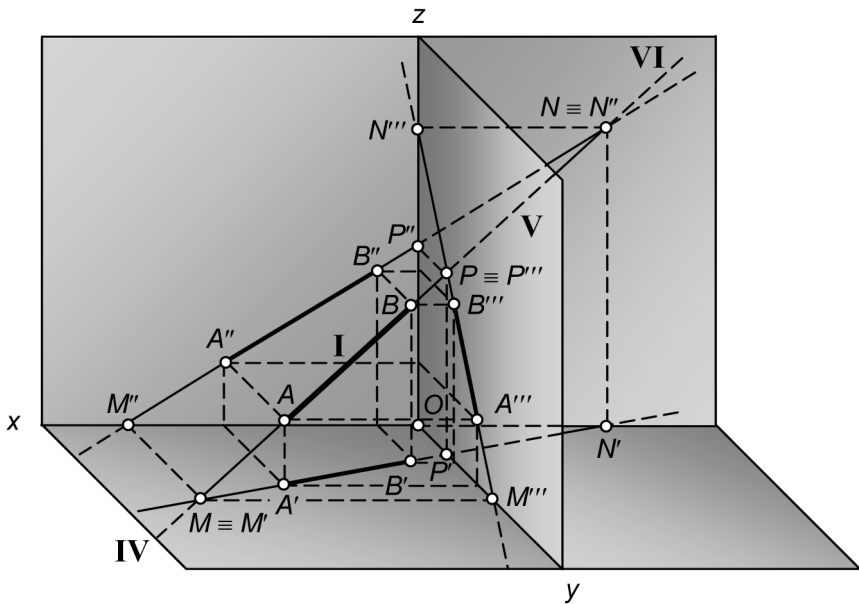


Рис. 2.13. Образование следов прямой в аксонометрии

По положению следов можно судить о том, в каких октантах находятся отрезки или лучи прямой. Прямая AB на рис. 2.13 из I-го октанта за точкой M уходит вниз, в IV-й октант, а направо за точкой P переходит в V-й октант и далее, встречая в точке N плоскость π_2 , — в VI-й.

Охарактеризуем особенности построения каждой проекции каждого из трех следов на эпюре (рис. 2.14):

◆ *Горизонтальный след (M):*

- ◆ фронтальная проекция горизонтального следа M'' лежит на пересечении фронтальной проекции прямой с осью X (с этой точки обычно начинают построения);
- ◆ горизонтальная проекция горизонтального следа M' лежит на пересечении горизонтальной проекции прямой с линией проекционной связи, проведенной из проекции M'' перпендикулярно оси X ;
- ◆ профильная проекция горизонтального следа M''' лежит на пересечении профильной проекции прямой с осью Y_{π_3} .

◆ *Фронтальный след (N):*

- ◆ горизонтальная проекция фронтального следа N' лежит в точке пересечения горизонтальной проекции прямой с осью X ;
- ◆ фронтальная проекция фронтального следа N'' лежит на пересечении фронтальной проекции прямой с линией проекционной связи, проведенной из точки N' перпендикулярно оси X ;
- ◆ профильная проекция фронтального следа N''' лежит на пересечении профильного следа прямой с осью Z .

◆ *Профильный след (P):*

- ◆ горизонтальная проекция профильного следа P' лежит на пересечении горизонтальной проекции прямой с осью y_{π_1} ;
- ◆ фронтальная проекция профильного следа P'' лежит на пересечении фронтальной проекции прямой с осью Z ;
- ◆ профильная проекция профильного следа P''' находится в точке пересечения профильной проекции прямой с линией проекционной связи, проведенной из P'' перпендикулярно оси Z .

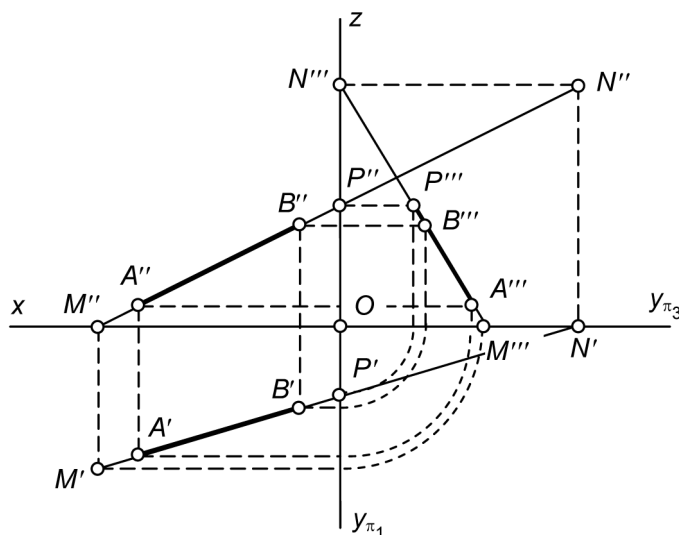


Рис. 2.14. Построение следов прямой на эюре

Необходимо отметить, что построение профильных проекций следов (M''' , N''' , P''') может проводиться по двум уже построенным проекциям (горизонтальной и фронтальной).

Пример 5. Построить проекции следов прямой AB (рис. 2.15).

1. Находим фронтальную проекцию горизонтального следа M'' , продолжив $A'B''$ до пересечения с осью x (рис. 2.16).
2. Из точки M'' проводим линию проекционной связи до ее пересечения с продолжением $A'B'$. Здесь расположена точка M' .
3. По двум проекциям M' и M'' строим третью — M''' , которая может быть также построена как точка пересечения профильной проекции прямой с осью y_{π_3} .
4. Находим горизонтальную проекцию фронтального следа N' в пересечении $A'B'$ с осью x .

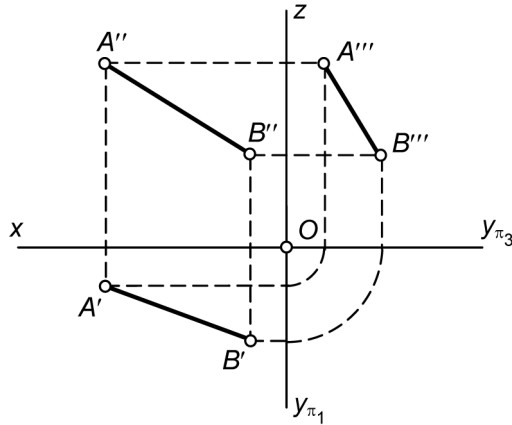


Рис. 2.15. Заданные проекции отрезка AB

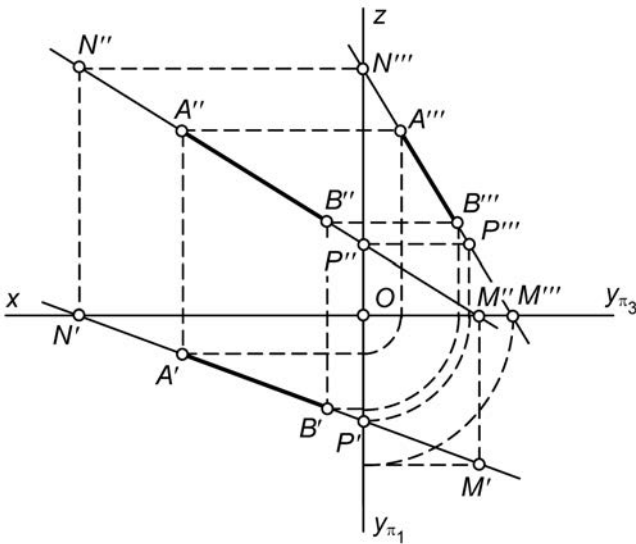


Рис. 2.16. Построение проекций следов прямой AB

5. Из точки N' проводим линию проекционной связи до ее пересечения с фронтальной проекцией прямой $A''B''$ и получаем точку N'' .
6. По двум проекциям фронтального следа N' и N'' строим третью его проекцию — N''' , которая лежит в пересечении профильной проекции прямой с осью z .
7. В пересечении $A'B'$ с осью y_{π_1} строим точку P' (горизонтальную проекцию профильного следа).
8. В пересечении $A''B''$ с осью z получаем фронтальную проекцию профильного следа — точку P'' .

9. По двум проекциям P' и P'' строим профильную проекцию профильного следа P''' ($P''' \in A'''B'''$).
10. Определим, через какие октанты проходит заданная прямая AB . Точки A и B расположены в I-м октанте, т. к. все три координаты этих точек положительные. Следовательно, все точки отрезка NP , которому принадлежат точки A и B , лежат также в I-м октанте. Из I-го октанта через точку N (фронтальный след прямой) прямая переходит во II-й октант, а через точку P (профильный след прямой) прямая AB переходит в V-й октант. Из V-го октанта через точку M (горизонтальный след прямой) прямая AB уходит в VIII-й октант.

2.5. Взаимное положение двух прямых

Две прямые могут относительно друг друга занимать следующее положение:

- ◆ пересекаться,
- ◆ быть параллельными друг другу и
- ◆ скрещиваться.

Пересекающиеся прямые имеют одну общую точку. Если прямые линии пересекаются, то одноименные проекции этих прямых тоже пересекаются (рис. 2.17), причем проекции точки пересечения лежат на одной линии проекционной связи.

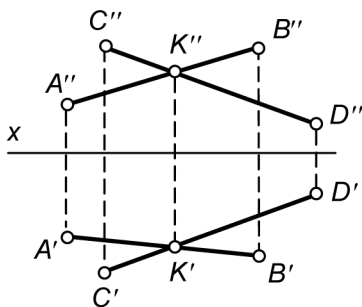


Рис. 2.17. Пересекающиеся прямые

Параллельные прямые лежат в одной плоскости и не имеют общих точек. Одноименные проекции двух параллельных прямых параллельны между собой (рис. 2.18).

Скрещивающиеся прямые, в отличие от пересекающихся и параллельных прямых, не лежат в одной плоскости. Хотя одноименные проекции двух скрещивающихся прямых и могут пересекаться, но точки их пересечения не лежат на одной линии проекционной связи (рис. 2.19).

Две точки, лежащие на пересечении проекций скрещивающихся прямых, называются *конкурирующими*². На рис. 2.19 фронтальные проекции прямых AB и CD

² При помощи конкурирующих точек определяется взаимная видимость прямых и плоскостей относительно друг друга (об этом в следующих разделах).

пересеклись в конкурирующей точке с проекциями $1'' \equiv 2''$. В самом деле в этом месте находится не одна, а две точки, одна из которых принадлежит прямой AB ($1 \in AB$), а другая — прямой CD ($2 \in CD$). Принадлежность точек очевидна из горизонтальных проекций.

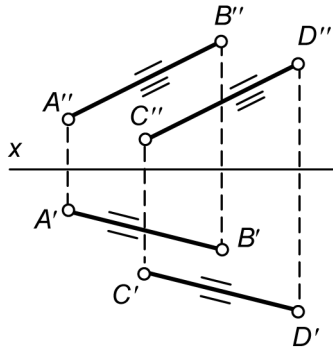


Рис. 2.18. Параллельные прямые

Горизонтальные проекции этих прямых пересеклись в конкурирующей точке с проекциями $3 \equiv 4'$. Причем точка 3 принадлежит прямой AB , а точка 4 — прямой CD , так как

$$3'' \in A''B''; 4'' \in C''D''.$$

Конкурирующие точки позволяют установить, какой объект ближе к наблюдателю, а какой находится дальше. Например, на рис. 2.19 в направлении на плоскость π_2 точка 2 закрывает точку 1 и находится ближе к наблюдателю, а в направлении на плоскость π_1 точка 3 закрывает точку 4 (направление взгляда на плоскости проекций отмечено стрелками).

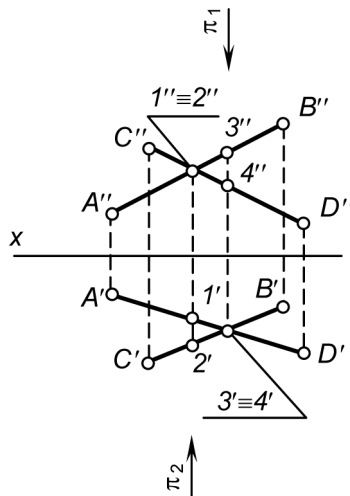
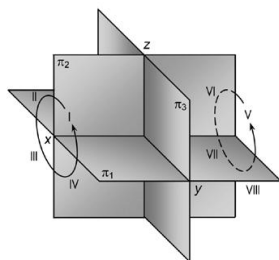


Рис. 2.19. Скрещивающиеся прямые

ГЛАВА 3



Проецирование плоскости

3.1. Способы задания плоскости

3.1.1. Общие случаи задания плоскости

Положение плоскости в пространстве однозначно определяется положением трех ее точек. Следовательно, на эюре плоскость может быть задана следующими способами:

- ♦ проекциями трех точек, не лежащих на одной прямой (рис. 3.1);

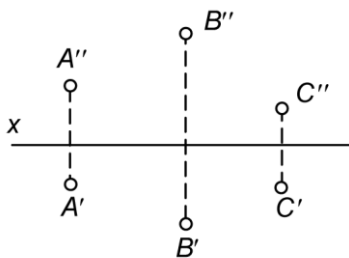


Рис. 3.1. Плоскость, заданная тремя точками, не лежащими на одной прямой

- ♦ проекциями прямой и точки, не принадлежащей этой прямой (рис. 3.2);
- ♦ проекциями двух параллельных прямых (рис. 3.3);
- ♦ проекциями двух пересекающихся прямых (рис. 3.4).

Каждое из представленных на рис. 3.1—3.4 способов заданий плоскости может быть преобразовано одно в другое. Предположим, что плоскость задана тремя точками E , D и F , не лежащими на одной прямой (рис. 3.5, a). Проведя через точки E и D прямую, получим проекции прямой и точки, не лежащей на этой прямой (рис. 3.5, b). От него легко перейти к параллельным прямым, если через

точку F провести прямую, параллельную ED (рис. 3.5, в), или к двум пересекающимся прямым, проводя прямую DF (рис. 3.5, з).

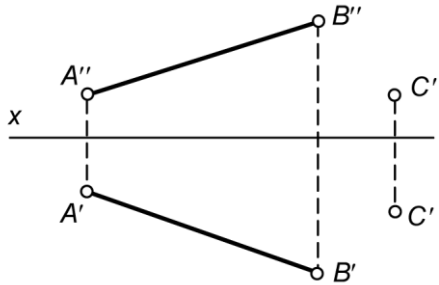


Рис. 3.2. Плоскость, заданная прямой и точкой вне этой прямой

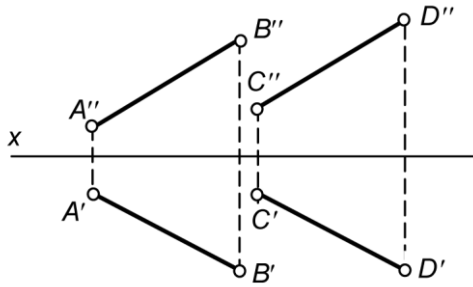


Рис. 3.3. Плоскость, заданная проекциями двух параллельных прямых

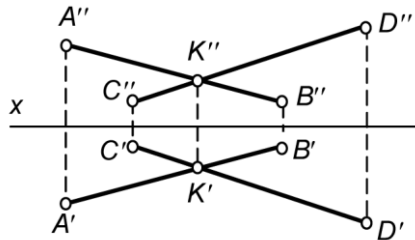


Рис. 3.4. Плоскость, заданная двумя пересекающимися прямыми

Помимо отмеченных общих случаев задания плоскости, рассматриваемых в школьном курсе стереометрии, в начертательной геометрии часто задают плоскость при помощи еще двух способов:

- ◆ проекциями любой плоской фигуры;
- ◆ следами плоскости.

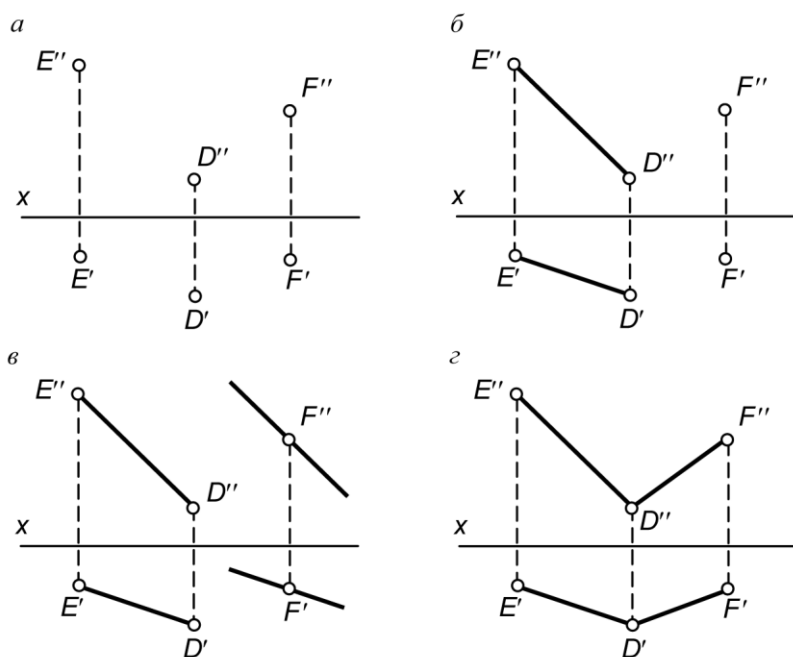


Рис. 3.5. Преобразование способов задания плоскости

3.1.2. Плоские фигуры

Плоской называют такую фигуру, все точки которой лежат в одной плоскости и ограничены линиями, составляющими контур этой фигуры. К плоским фигурам относятся различные многоугольники, окружности, эллипсы и т. д. Самой простой фигурой, при помощи которой может быть задана плоскость, является треугольник (рис. 3.6).

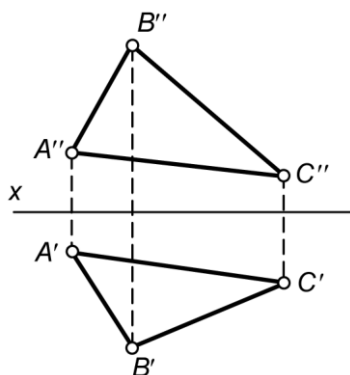


Рис. 3.6. Плоскость, заданная при помощи треугольника

Построение на эпюре проекций плоской фигуры сводится к построению проекций ряда точек, образующих контур этой фигуры, и соединению их кривой или отрезками прямых линий. При построении необходимо убедиться, чтобы все точки плоской фигуры находились в одной плоскости.

Например, четырехугольник может быть задан двумя проекциями трех его вершин и лишь одной проекцией четвертой вершины (рис. 3.7, а). Недостающая проекция вершины лежит на пересечении линии проекционной связи, проведенной из имеющейся проекции вершины многогранника, и проекции диагонали, проходящей, в свою очередь, через точку пересечения диагоналей (рис. 3.7, б).

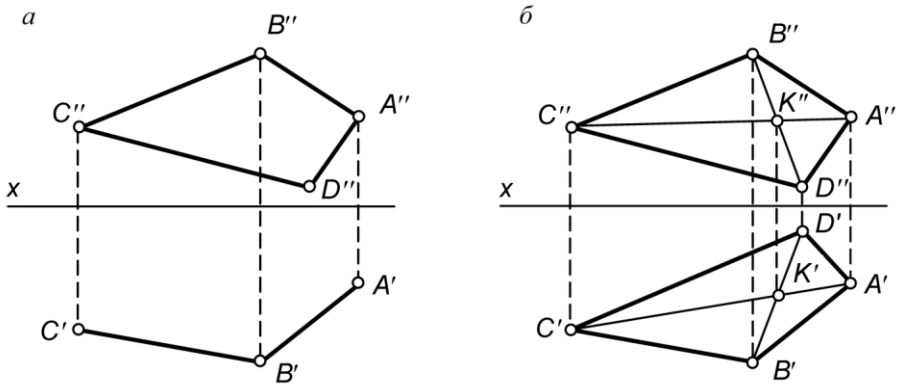


Рис. 3.7. Построение проекций четырехугольника

Плоская фигура, находящаяся в плоскости, не параллельной плоскостям проекций, проецируется с искажением. Определение натуральной величины плоской фигуры достигается одним из способов преобразования эпюра, о которых речь пойдет далее.

3.1.3. Следы плоскости

Наиболее наглядным является изображение плоскости при помощи следов плоскости. *Следами плоскости* называют прямые, по которым плоскость пересекается с плоскостями проекций (рис. 3.8, а). В общем случае у плоскости будет три следа:

- ◆ горизонтальный $h_{0\alpha}$,
- ◆ фронтальный $f_{0\alpha}$ и
- ◆ профильный $p_{0\alpha}$ ¹.

¹ Индекс "0" в обозначении плоскости означает, что этот след образован в пересечении с "нулевой" плоскостью, как раньше называли плоскости проекций.

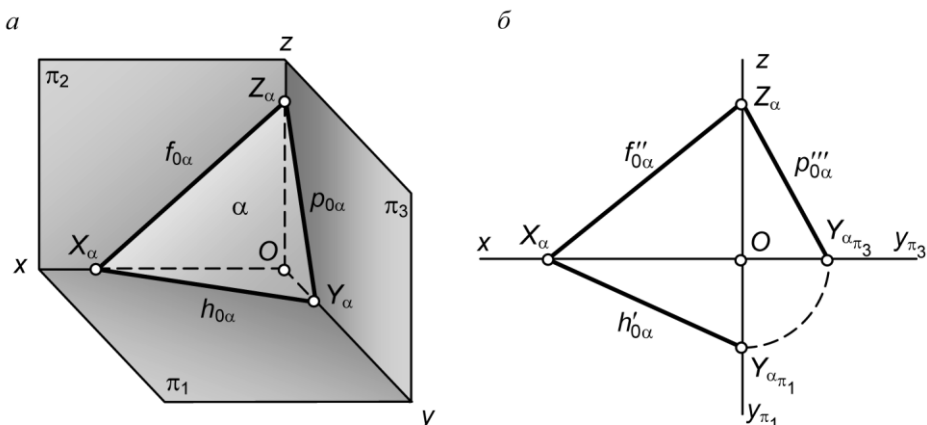


Рис. 3.8. Образование следов плоскости в аксонометрии (а) и на эпюре (б)

Точки на осях координат, в которых пересекаются следы плоскости — X_α , Y_α и Z_α , называют *точками схода следов*. Три точки схода следов плоскости однозначно определяют положение плоскости в пространстве. Зная координаты точек схода следов (или длину отрезков OX_α , OY_α и OZ_α , которые иногда называют *параметрами плоскости*), можно однозначно задать положение плоскости.

Следы плоскости сливаются со своими проекциями на этой плоскости:

$$h_{0\alpha} \equiv h'_{0\alpha}, f_{0\alpha} \equiv f''_{0\alpha} \text{ и } p_{0\alpha} \equiv p'''_{0\alpha}.$$

Учитывая, что на эпюре мы изображаем только проекции геометрических элементов, следы плоскости мы задаем проекциями следов (рис. 3.8, б):

$$h'_{0\alpha}, f''_{0\alpha} \text{ и } p'''_{0\alpha}.$$

Каждый след плоскости проходит через две точки схода следов. Следовательно, любые два следа плоскости однозначно определяют ее положение в пространстве (исключение составляет осевая плоскость — о ней будет рассказано в следующем разделе).

На чертеже принято всегда показывать *видимость следов плоскости*²: "видимыми" считаются части следов, лежащие в гранях I-го октанта или четверти. При нанесении на чертеж линий видимого и невидимого контура используются соответственно сплошная основная и штриховая линии ("невидимую" часть следа показывают, если это необходимо для построений).

Плоскость, пересекающая все три плоскости проекций, называют *плоскостью общего положения*. Если плоскость перпендикулярна одной или двум плоскостям проекций, то ее называют *плоскостью частного положения*.

² Это правило относится не только к следам плоскости, но и другим геометрическим объектам, фигурам или их элементам.

3.2. Плоскости частного положения

3.2.1. Проецирующие плоскости

Плоскость, перпендикулярная одной плоскости проекций, называется *проецирующей*. Здесь возможны три случая частных положений.

- ♦ *Горизонтально-проецирующей* называют плоскость, перпендикулярную плоскости π_1 (рис. 3.9). Фронтальный и профильный следы такой плоскости будут параллельны оси Z . Если в горизонтально-проецирующей плоскости α выбрать произвольную точку A , то горизонтальная проекция этой точки A' будет расположена на горизонтальном следе плоскости α . Таким образом, можно утверждать, что горизонтальные проекции всех точек, лежащих в горизонтально-проецирующей плоскости, находятся на горизонтальном следе этой плоскости.

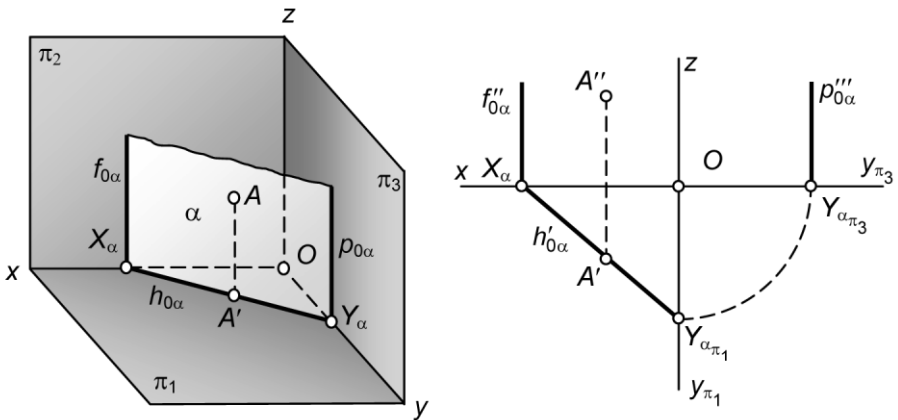


Рис. 3.9. Горизонтально-проецирующая плоскость

- ♦ *Фронтально-проецирующей* называют плоскость, перпендикулярную плоскости π_2 (рис. 3.10). Горизонтальный и профильный следы фронтально-проецирующей плоскости будут параллельны оси Y . Фронтальная проекция любой точки, лежащей в этой плоскости (например, точки B), всегда расположена на фронтальном следе плоскости.
- ♦ *Профильно-проецирующей* называют плоскость, перпендикулярную плоскости π_3 (рис. 3.11). У такой плоскости фронтальный и горизонтальный следы будут параллельны оси X . Профильная проекция любой точки, лежащей в этой плоскости (например, точки C), всегда расположена на профильном следе плоскости.

Осевой называют плоскость, проходящую через ось проекций. Осевая плоскость будет всегда перпендикулярна одной из плоскостей проекций, поэтому ее можно рассматривать как частный случай горизонтально-, фронтально- или про-

фильно-проецирующей плоскости. У осевой плоскости два следа совпадают с одной из осей проекций (на рис. 3.12 — с осью X).

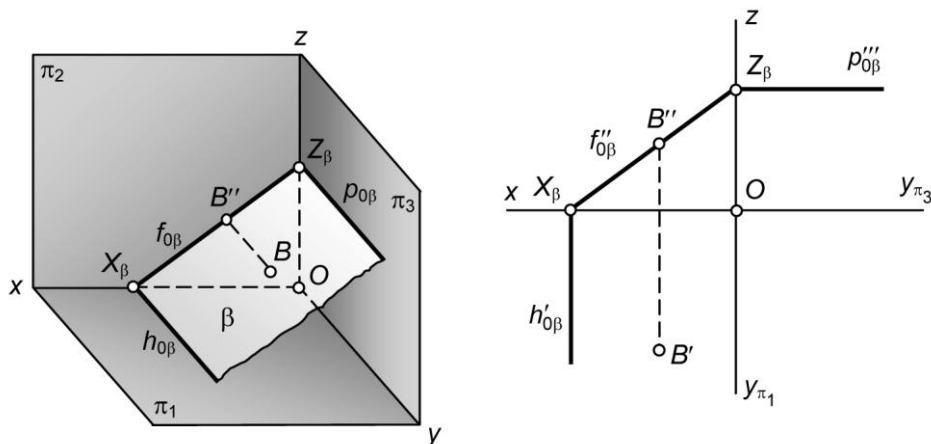


Рис. 3.10. Фронтально-проецирующая плоскость

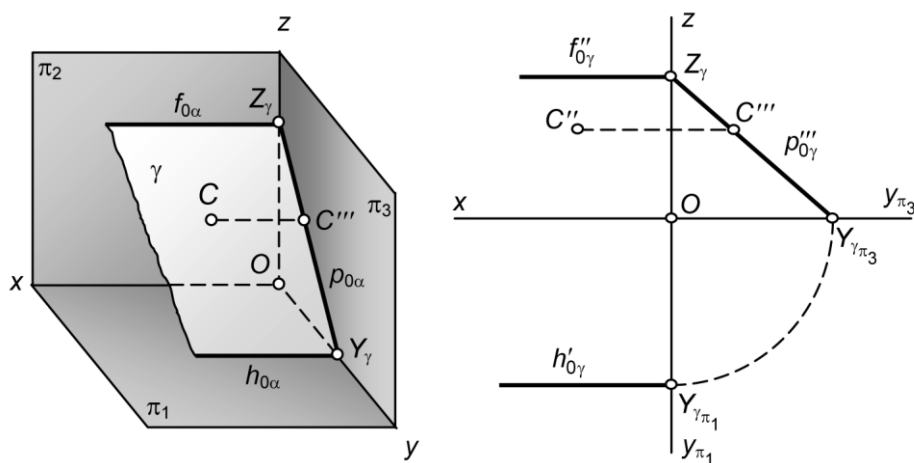


Рис. 3.11. Профильно-проецирующая плоскость

Для однозначного определения положения осевой плоскости необходимо знать положение всех трех ее следов или двух сливающихся следов и еще хотя бы одной точки, лежащей в этой плоскости.

Плоская фигура может спроецироваться в виде отрезка прямой только в случае, если плоскость, в которой лежит эта фигура, перпендикулярна этой плоскости проекций, т. е., другими словами, плоская фигура лежит в проецирующей плоскости. В этом случае говорят, что проекция фигуры "выродилась" в отрезок прямой. При этом "вырожденная" проекция фигуры лежит на следе проецирующей плоскости.

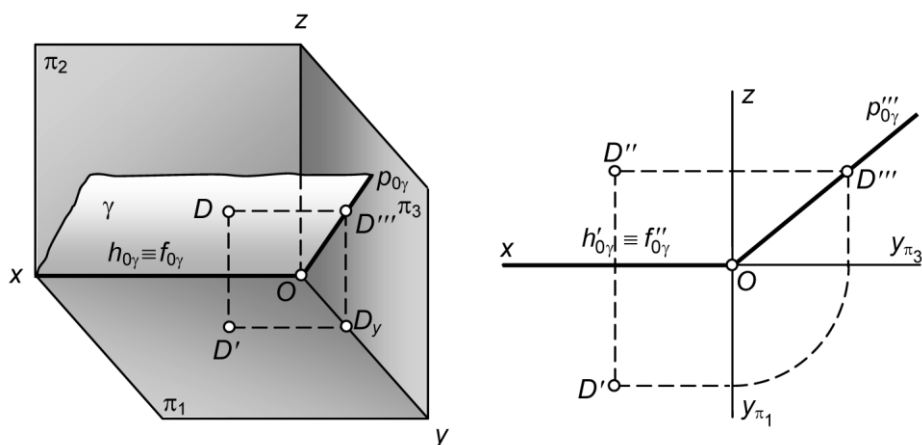


Рис. 3.12. Осовая профильно-проецирующая плоскость

3.2.2. Плоскости уровня

Если плоскость перпендикулярна двум плоскостям проекций, то она параллельна третьей плоскости проекций. Для таких плоскостей встречается общее название — *плоскости уровня*³.

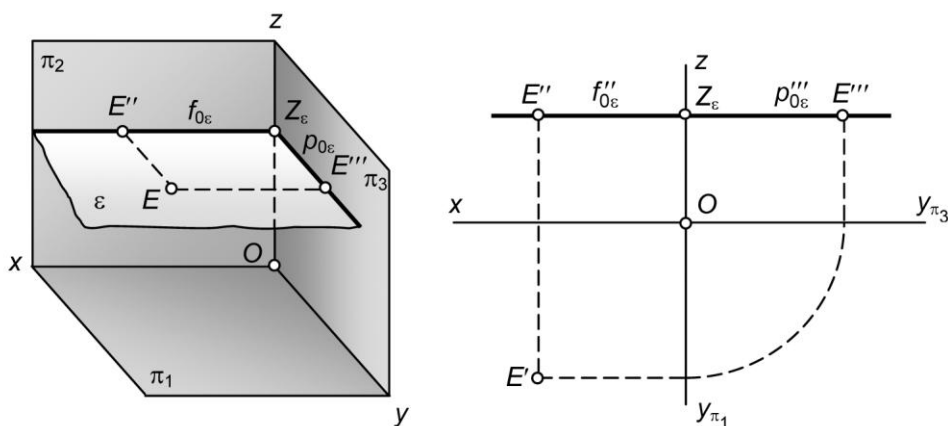


Рис. 3.13. Горизонтальная плоскость

Для плоскостей уровня также возможны три случая частных положений.

- ◆ Плоскость, параллельная плоскости π_1 , называется *горизонтальной плоскостью* (рис. 3.13). На эюре ее фронтальный и профильный следы сливаются в одну

³ Ряд авторов считает, что это название относится только к горизонтальной плоскости.

линию, перпендикулярную оси Z . Фронтальные и профильные проекции точек, лежащих в горизонтальной плоскости (например, точки E), располагаются соответственно на фронтальном и профильном следах плоскости. Любой геометрический объект, лежащий в горизонтальной плоскости, проецируется на плоскость π_1 в натуральную величину.

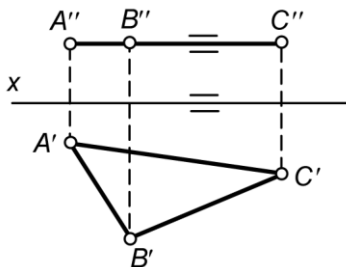


Рис. 3.14. Горизонтальная плоскость, заданная треугольником

На рис. 3.14 горизонтальная плоскость задана проекциями треугольника ABC , у которого

$$A'B'C' \parallel x.$$

- ♦ Аналогичным образом можно построить *фронтальную* и *профильную* плоскости, т. е. плоскости, параллельные соответственно фронтальной и профильной плоскостям проекций (рис. 3.15 и 3.16).

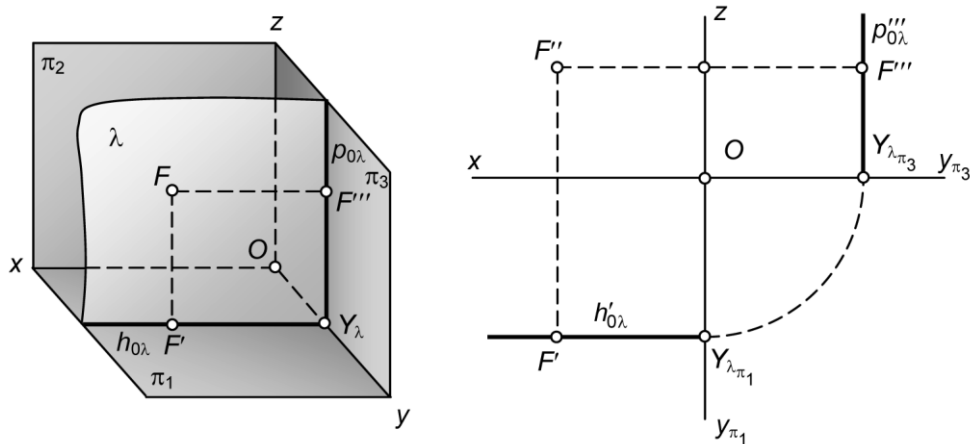


Рис. 3.15. Фронтальная плоскость

Отмеченные особенности проецирования плоскостей частного положения в дальнейшем изложении курса будут использованы для упрощения решения задач.

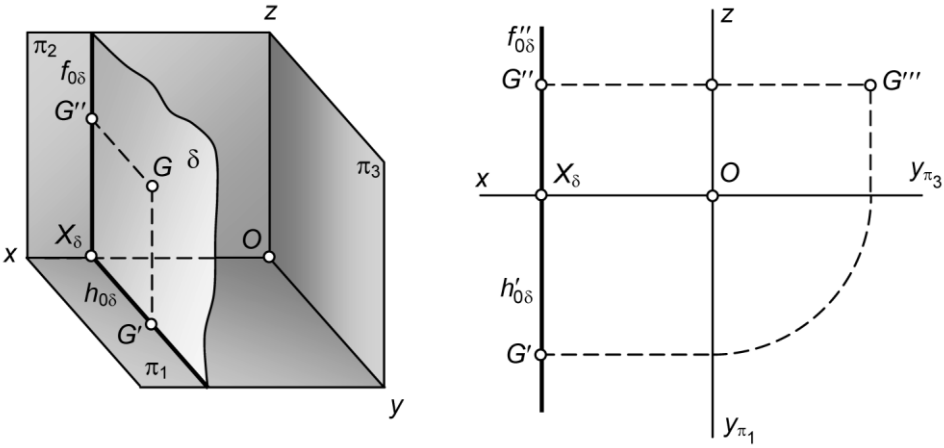


Рис. 3.16. Профильная плоскость

3.3. Проецирование плоских углов

Как известно из школьного курса геометрии, *плоским углом* называется плоская фигура, состоящая из двух лучей с общим началом. Иногда угол определяется как часть плоскости, ограниченная двумя лучами с общим началом.

В общем случае, угол проецируется не в натуральную величину, т. е. с искажением. Однако отметим некоторые особые следующие случаи проецирования плоских углов (первые два — можно отнести к любым плоским фигурам):

- ♦ если плоскость, в которой расположен угол, перпендикулярна плоскости проекций, то он проецируется на эту плоскость в виде прямой линии или луча (рис. 3.17);

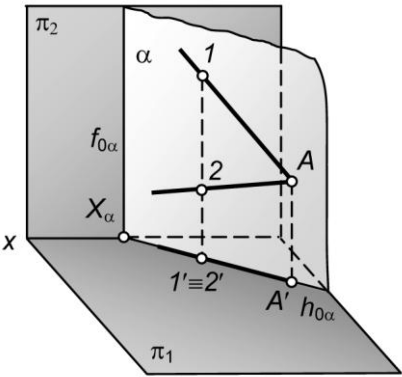


Рис. 3.17. Угол, расположенный в горизонтально-проецирующей плоскости

- ◇ если плоскость, в которой расположен угол, параллельна плоскости проекций, то он проецируется на эту плоскость в натуральную величину (рис. 3.18);

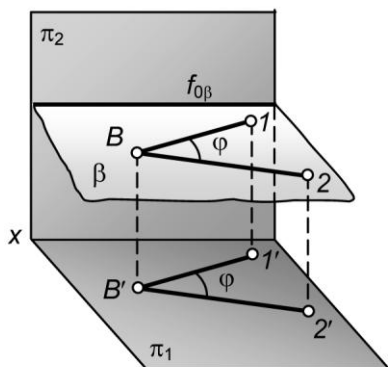


Рис. 3.18. Угол, расположенный в горизонтальной плоскости

- ◇ если плоскость, в которой расположен прямой угол, не перпендикулярна плоскости проекций и хотя бы одна сторона этого прямого угла параллельна плоскости проекций (рис. 3.19), то прямой угол проецируется на эту плоскость проекций в натуральную величину (при этом на другие плоскости проекций этот прямой угол проецируется с искажением);

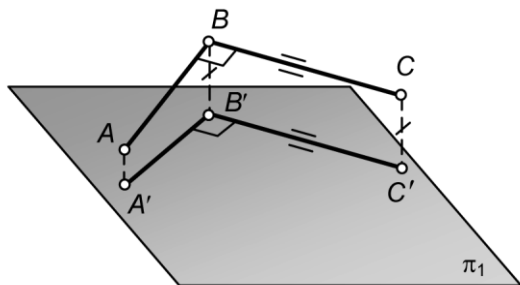


Рис. 3.19. Прямой угол с одной из сторон, параллельной плоскости проекций

- ◇ если плоскость острого или тупого угла не перпендикулярна плоскости проекций и хотя бы одна сторона угла параллельна плоскости проекций, то проекция острого угла представляет собой острый угол, а проекция тупого угла — тупой угол (при этом проекция острого угла меньше проецируемого угла, а проекция тупого больше проецируемого угла).

Последний случай рассмотрим более подробно на конкретном примере (рис. 3.20). Предположим, что прямая BC параллельна плоскости проекций π_1 . Рассмотрим тупой угол EBC , прямой угол ABC , острый угол DBC и их проекции —

соответственно углы $E'B'C'$, $A'B'C'$ и $D'B'C'$. Проекция прямого угла $A'B'C'$ представляет собой также прямой угол, поскольку его сторона BC параллельна плоскости проекций. Угол $A'B'C'$ заключен внутри угла $E'B'C'$ и включает внутри себя угол $D'B'C'$, и, следовательно, угол $E'B'C'$ — тупой, а угол $D'B'C'$ — острый.

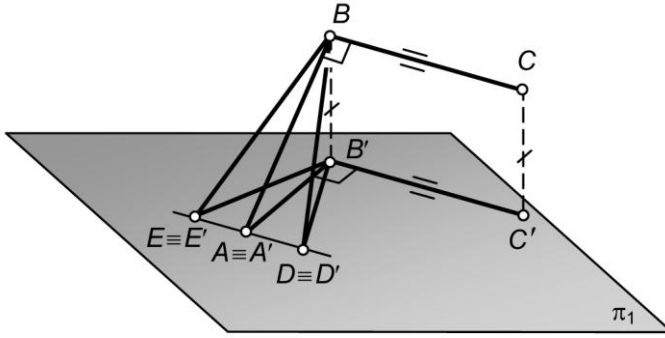


Рис. 3.20. Тупой и острый углы, имеющие одну из сторон, параллельную плоскости проекций

3.4. Прямая в плоскости

3.4.1. Общие случаи принадлежности прямой плоскости

Прямая лежит в плоскости, если проходит через две точки, принадлежащие этой плоскости.

Пусть плоскость задана двумя пересекающимися прямыми AB и BC (рис. 3.21). Проведем в этой плоскости произвольную прямую 12 . Для этого выберем некоторую точку 1 на прямой AB так, что

$$1' \in A'B'; 1'' \in A''B'',$$

и точку 2 на прямой CB , у которой

$$2' \in B'C'; 2'' \in B''C''.$$

Затем проводим прямую 12 с проекциями $1'2'$ и $1''2''$. Эта прямая лежит в заданной плоскости, так как проходит через две точки (точки 1 и 2), лежащие в заданной плоскости.

Рассмотрим вариант, когда плоскость задана следами: прямая лежит в плоскости, если следы прямой лежат на одноименных следах плоскости (рис. 3.22). Это же правило можно сформулировать и иначе: плоскость проходит через прямую, если ее следы проходят через одноименные следы прямой.

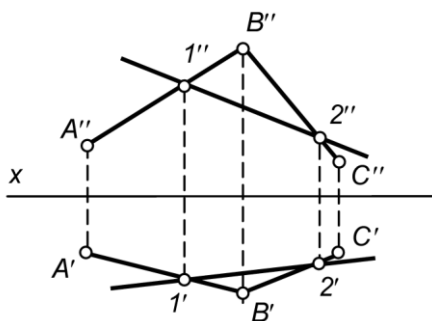


Рис. 3.21. Прямая в плоскости, заданной двумя пересекающимися прямыми

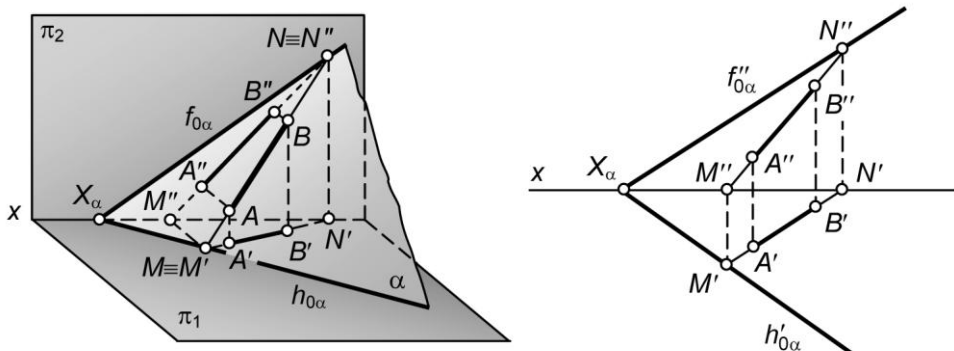


Рис. 3.22. Прямая в плоскости, заданной следами

Если некоторая плоскость задана двумя пересекающимися прямыми, то для построения следов такой плоскости достаточно найти следы этих прямых и одноименные следы соединить прямыми линиями — эти прямые и будут искомыми следами плоскости. Аналогично могут быть построены следы плоскости, заданной двумя параллельными прямыми.

Поскольку случаи задания плоскости тремя точками, не лежащими на одной прямой, и прямой и точкой вне этой прямой всегда могут быть сведены к случаю задания плоскости двумя прямыми, то можно сказать, что для построения следов плоскости, заданной любым известным способом, необходимо построить следы двух любых прямых этой плоскости и через одноименные следы прямых провести искомые следы плоскости.

Пример 6. Построить три следа плоскости α , заданной двумя пересекающимися прямыми AB и CD (рис. 3.23).

1. Строим проекции горизонтальных следов прямых AB и CD (рис. 3.24): $M_1 = AB \cap \pi_1$; $M_2 = CD \cap \pi_1$.

Фронтальные проекции горизонтальных следов лежат на пересечении фронтальных проекций прямых с осью X :

$$M_1'' = A''B'' \cap X;$$

$$M_2'' = C''D'' \cap X.$$

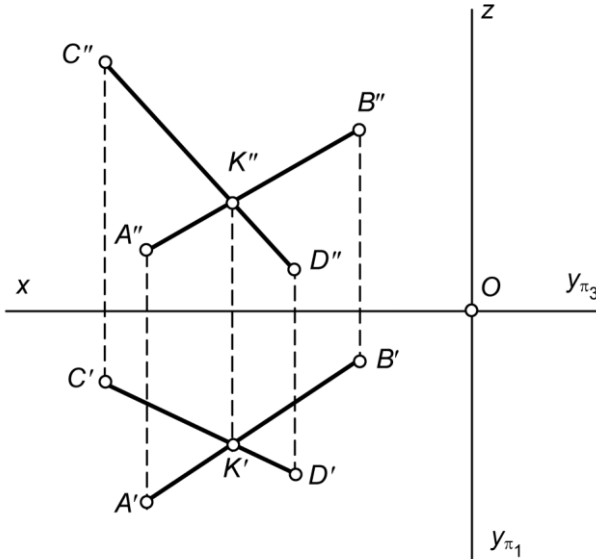


Рис. 3.23. Заданные проекции пересекающихся прямых AB и CD

Горизонтальные проекции горизонтальных следов лежат на пересечении линий проекционной связи, проведенных из точек M_1'' и M_2'' , с соответствующей горизонтальной проекцией прямой:

$$M_1' = A'B' \cap (M_1''M_1' \perp X);$$

$$M_2' = C'D' \cap (M_2''M_2' \perp X).$$

2. Строим проекции фронтальных следов прямых AB и CD : $N_1 = AB \cap \pi_2$; $N_2 = CD \cap \pi_2$. Горизонтальные проекции фронтальных следов лежат в точке пересечения горизонтальных проекций прямых с осью X :

$$N_1' = A'B' \cap X;$$

$$N_2' = C'D' \cap X.$$

Фронтальные проекции фронтальных следов лежат на пересечении фронтальных проекций прямых с линиями проекционной связи, проведенными из точек N_1' и N_2' :

$$N_1'' = A''B'' \cap (N_1'N_1'' \perp X);$$

$$N_2'' = A''B'' \cap (N_2'N_2'' \perp X).$$

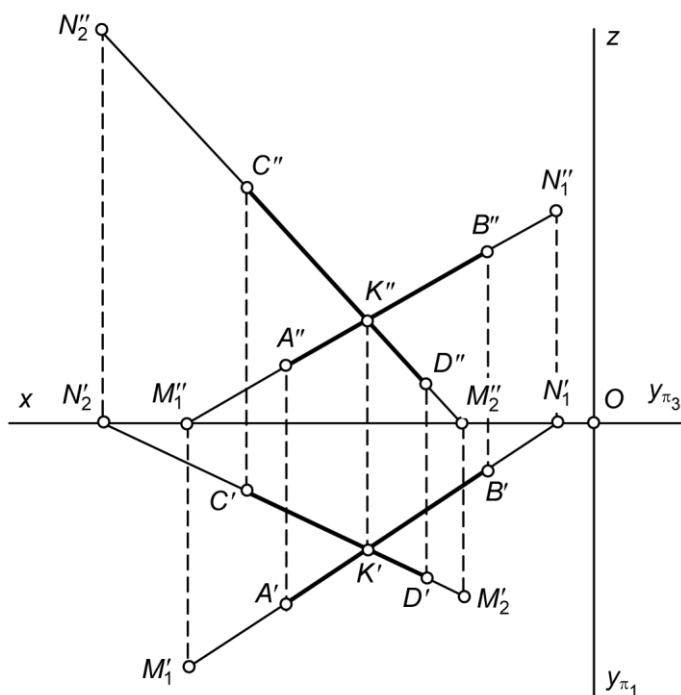


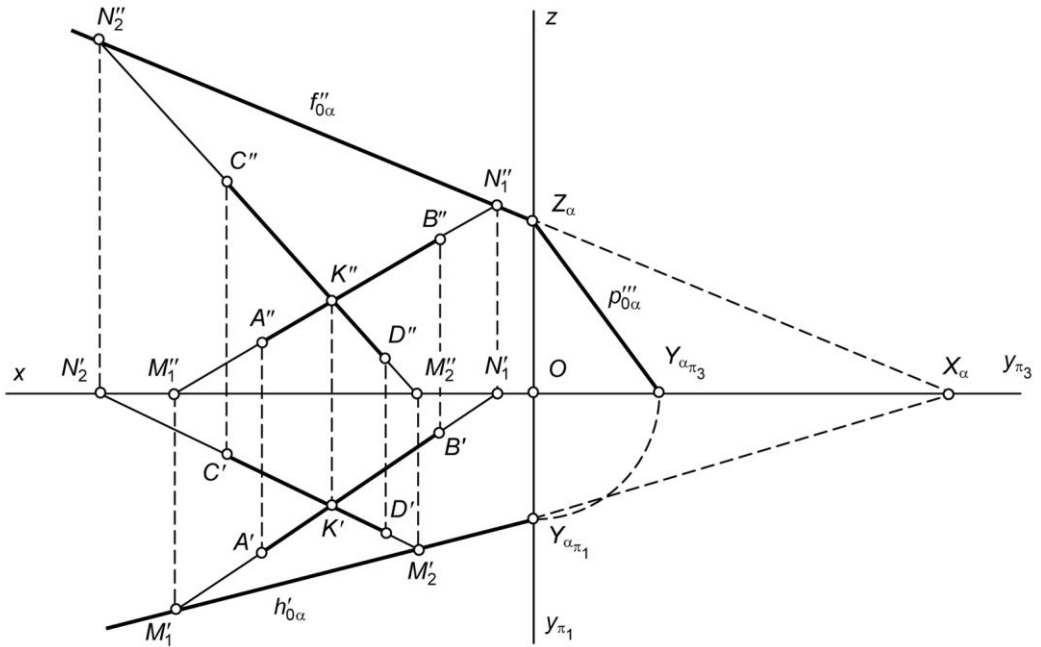
Рис. 3.24. Построение следов заданных прямых

3. Через одноименные проекции следов проводим соответствующие следы плоскости (рис. 3.25). Горизонтальный след плоскости $h'_{0\alpha}$ проводим через горизонтальные проекции горизонтальных следов M'_1 и M'_2 . Фронтальный след $f''_{0\alpha}$ проводим через фронтальные проекции фронтальных следов N'_1 и N'_2 .
4. В пересечении горизонтального $h'_{0\alpha}$ и фронтального $f''_{0\alpha}$ следов с осью x отмечаем точку схода следов X_α и проверяем правильность построений:

$$h'_{0\alpha} \cap f''_{0\alpha} = X_\alpha;$$

$$X_\alpha \in x.$$

5. В пересечении горизонтального $h'_{0\alpha}$ и фронтального $f''_{0\alpha}$ следов с осями проекций y_{π_1} и z отмечаем точки схода следов соответственно $Y_{\alpha\pi_1}$ и Z_α .
6. Точку схода следов $Y_{\alpha\pi_1}$ с оси y_{π_1} переносим на соответствующее по знаку направление оси y_{π_3} , где отмечаем точку $Y_{\alpha\pi_3}$. Через точки схода следов $Y_{\alpha\pi_3}$ и Z_α строим профильный след $p'''_{0\alpha}$.

Рис. 3.25. Построение следов плоскости α

3.4.2. Прямая в плоскости частного положения

При решении ряда позиционных задач требуется через прямую провести плоскость частного положения. Проецирующую плоскость можно провести через любую прямую общего положения. При этом одна из проекций прямой совпадает со следом плоскости:

- ✧ горизонтальная проекция прямой совпадает с горизонтальным следом горизонтально-проецирующей плоскости (рис. 3.26, а);
- ✧ фронтальная проекция прямой — с фронтальным следом фронтально-проецирующей плоскости (рис. 3.26, б);
- ✧ профильная проекция прямой — с профильным следом профильно-проецирующей плоскости.

Через прямую общего положения нельзя провести ни горизонтальную, ни фронтальную, ни профильную плоскость. Такие плоскости можно провести лишь через соответственно расположенные прямые уровня:

- ✧ через горизонтальную прямую — горизонтальную плоскость (рис. 3.27, а);
- ✧ через фронтальную прямую — фронтальную плоскость (рис. 3.27, б);
- ✧ через профильную прямую — профильную плоскость.

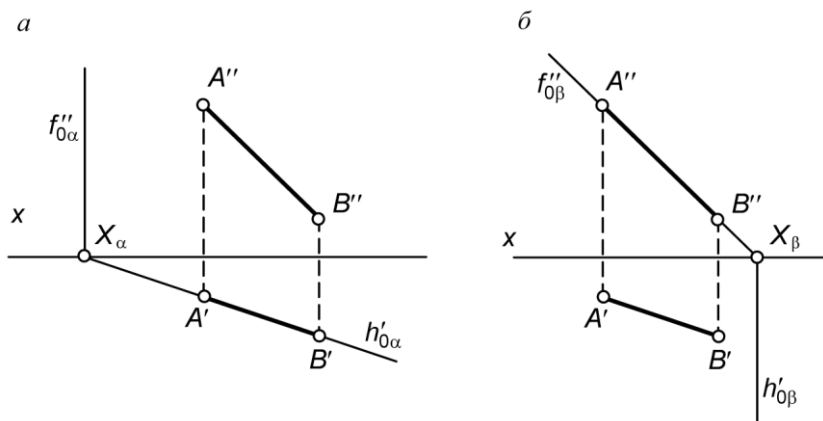


Рис. 3.26. Проведение проецирующей плоскости через прямую общего положения

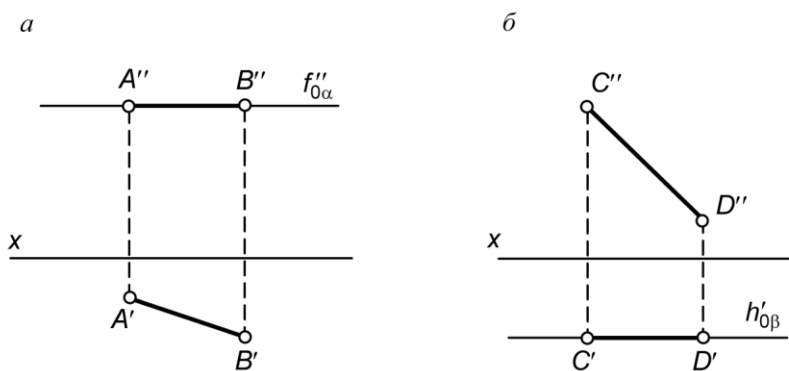


Рис. 3.27. Проведение плоскости уровня через прямую частного положения

3.4.3. Прямые частного положения в плоскости

В каждой плоскости можно провести бесчисленное множество прямых линий частного положения. Рассмотрим некоторые прямые, лежащие в плоскости и занимающие относительно плоскостей проекций частные положения. К таким прямым прежде всего относятся:

- ◆ горизонталь плоскости;
- ◆ фронталь плоскости;
- ◆ линии наибольшего наклона к плоскостям проекций.

Горизонталь плоскости — это прямая, лежащая в плоскости и параллельная горизонтальной плоскости проекций. Она обладает всеми свойствами горизонтальной прямой: ее фронтальная проекция параллельна оси X , а на горизонтальную плоскость проекций она проецируется в натуральную величину.

Построим любую горизонталь плоскости, заданной треугольником ABC (рис. 3.28). Фронтальную проекцию горизонтали 12 получаем, построив $1''2'' \parallel x$ (расстояние от оси x выберем произвольно). Строим горизонтальные проекции точек 1 и 2 :

$$1' \in A'B', 2' \in B'C',$$

и через $1'$ и $2'$ проводим горизонтальную проекцию горизонтали.

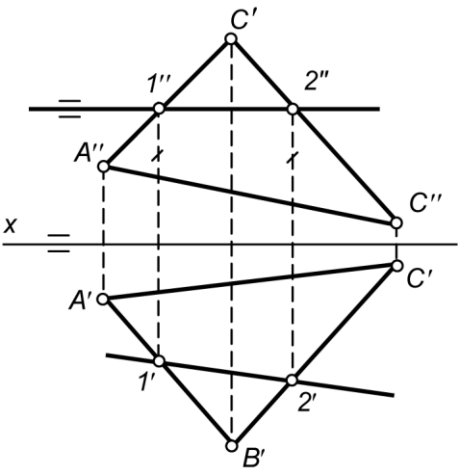


Рис. 3.28. Горизонталь плоскости, заданной треугольником

Если плоскость задана следами (рис. 3.29), то горизонтальная проекция горизонтали параллельна горизонтальному следу плоскости.

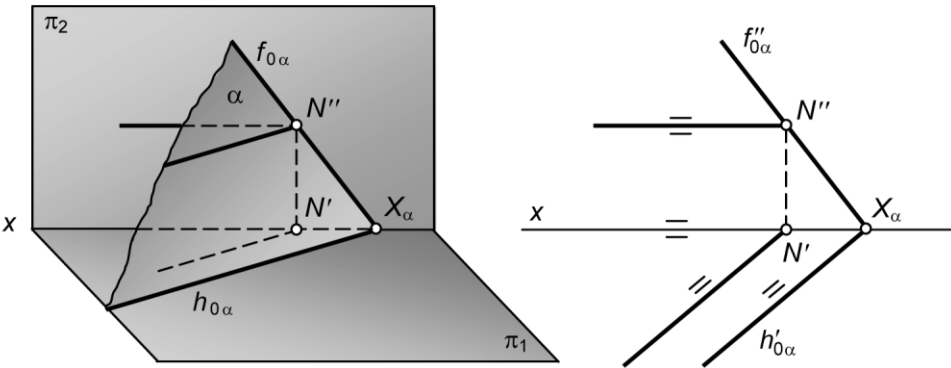


Рис. 3.29. Горизонталь плоскости, заданной следами

Следует отметить одну интересную особенность горизонтальных проекций горизонталей плоскости: все они параллельны между собой и, поскольку они паралл-

лельны горизонтальному следу этой плоскости, положение любой из них определяет направление горизонтального следа плоскости.

Фронталь плоскости — это прямая, лежащая в плоскости и параллельная фронтальной плоскости проекций. Горизонтальная проекция фронтали параллельна оси X , а фронтальная проекция — ее натуральная величина.

Пример построения фронтали плоскости, заданной треугольником ABC , дан на рис. 3.30 (построение выполнено аналогично построению горизонтали на рис. 3.28).

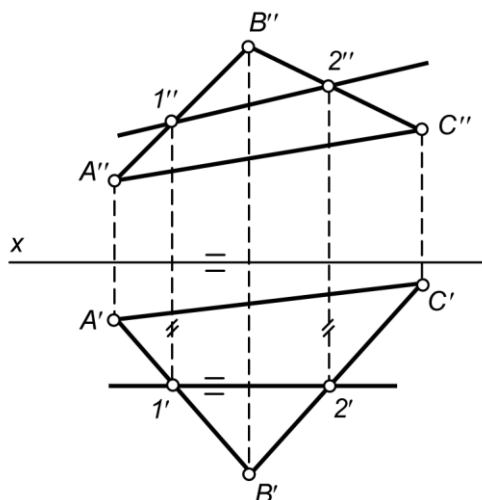


Рис. 3.30. Фронталь плоскости, заданной треугольником

В плоскости, заданной следами, фронтальная проекция фронтали параллельна фронтальному следу плоскости (рис. 3.31).

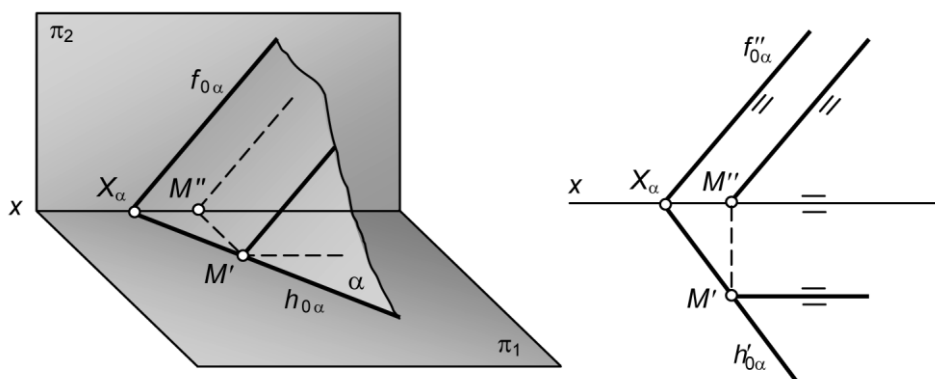


Рис. 3.31. Фронталь плоскости, заданной следами

Линиями наибольшего наклона к плоскостям проекций называются прямые, лежащие в некоторой плоскости и перпендикулярные или горизонталям этой плоскости, или ее фронталям, или ее профильным прямым. В первом случае линия наибольшего наклона определяет угол наклона к плоскости π_1 , во втором — к плоскости π_2 и в третьем — к плоскости π_3 .

Линию наибольшего наклона плоскости к плоскости π_1 называют *линией наибольшего ската* (или просто *линией ската*). Как следует из определения, приведенного выше, это прямая, лежащая в плоскости и перпендикулярная горизонталям этой плоскости.

На рис. 3.32, а показана прямая AM , являющаяся линией наибольшего ската плоскости α (угол φ — угол наклона плоскости α к горизонтальной плоскости проекций). Прямой угол между линией ската плоскости и любой горизонталью этой плоскости проецируется на плоскость π_1 без искажения (на основании правил проецирования плоских углов). Следовательно, горизонтальная проекция линии наибольшего ската перпендикулярна горизонтальной проекции любой горизонтали или горизонтальному следу плоскости.

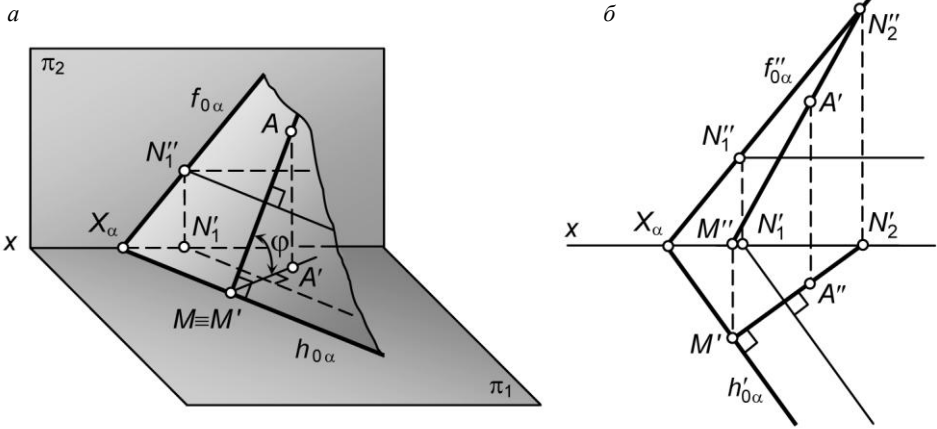


Рис. 3.32. Линия наибольшего ската плоскости, заданной следами в аксонометрии (а) и на эпюре (б)

Чтобы через точку A провести проекции линии ската на эпюре (рис. 3.32, б), сначала проводим ее горизонтальную проекцию так, что

$$A'M' \perp h'_{0\alpha},$$

или $A'M'$ перпендикулярна любой горизонтальной проекции горизонтали, проведенной в этой плоскости. Обозначаем горизонтальные проекции следов линии ската:

$$M' = A'M' \cap h'_{0\alpha}; \quad N' = A'M' \cap x.$$

Находим фронтальные проекции следов линии ската:

$$M'' = (M'M' \perp x) \cap x; \quad N'' = (N'N' \perp x) \cap f''_{0\alpha}.$$

В заключение соединяем M'' и N'' и проверяем правильность построений:
 $A'' \in M''N''$.

Рассмотренные нами прямые частного положения, лежащие в плоскости, главным образом горизонтали и фронтонали, весьма часто применяют в различных построениях в качестве вспомогательных прямых.

Пример 7. Через точку B построить линию наибольшего ската плоскости, заданной треугольником ABC (рис. 3.33).

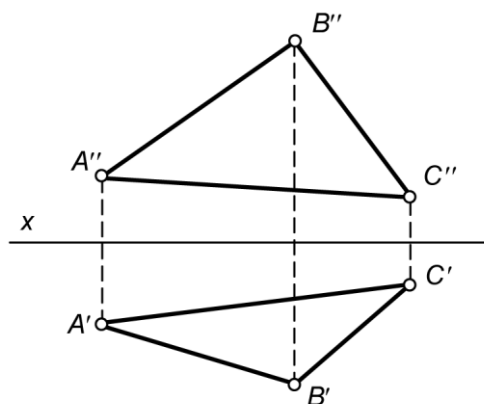


Рис. 3.33. Заданный треугольник ABC

1. Строим произвольную горизонталь 12 плоскости треугольника ABC (рис. 3.34):

$$1''2'' \parallel x.$$

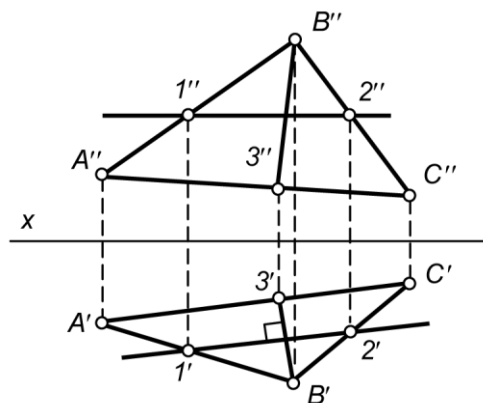


Рис. 3.34. Построение линии наибольшего ската плоскости

2. Прямая $B3$ является линией наибольшего ската плоскости треугольника ABC , так как $B'3' \perp 1'2'$.

3.5. Точка в плоскости

Точка лежит в плоскости, если она лежит на прямой, принадлежащей этой плоскости. Для того чтобы в некоторой плоскости построить произвольную точку, зачастую необходимо предварительно построить некоторую прямую, принадлежащую заданной плоскости, а на прямой — точку.

Пусть плоскость задана двумя пересекающимися прямыми AB и BC , а точка — только ее фронтальной проекцией K'' (рис. 3.35). Известно, что точка K лежит в заданной плоскости. Исходных условий достаточно для построения недостающей проекции точки K (K').

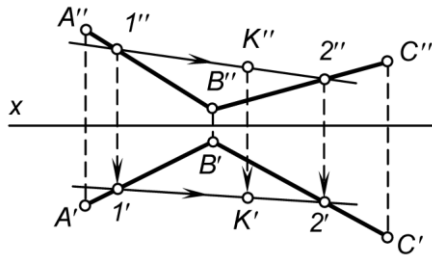


Рис. 3.35. Построение недостающей проекции точки K (K принадлежит плоскости, заданной двумя пересекающимися прямыми AB и BC)

Через точку K проводим произвольную прямую 12 , принадлежащую заданной плоскости:

$$K'' \in 1''2''.$$

Строим горизонтальные проекции точек $1'$ и $2'$:

$$1' \in A'B'; 2' \in B'C'.$$

Через $1'$ и $2'$ проводим горизонтальную проекцию прямой 12 , и в пересечении линии проекционной связи, проведенной из K'' , и линии $1'2'$ находим горизонтальную проекцию точки K .

Если плоскость задана следами, то недостающая проекция точки, принадлежащей заданной плоскости, может быть найдена при помощи горизонтали или фронтали плоскости.

На рис. 3.36, *а* по данной фронтальной проекции A'' точки A , принадлежащей плоскости α , найдена ее горизонтальная проекция. Построение проведено при помощи горизонтали, проходящей через точку A и принадлежащей плоскости α . На рис. 3.36, *б* аналогичная задача решена при помощи фронтали.

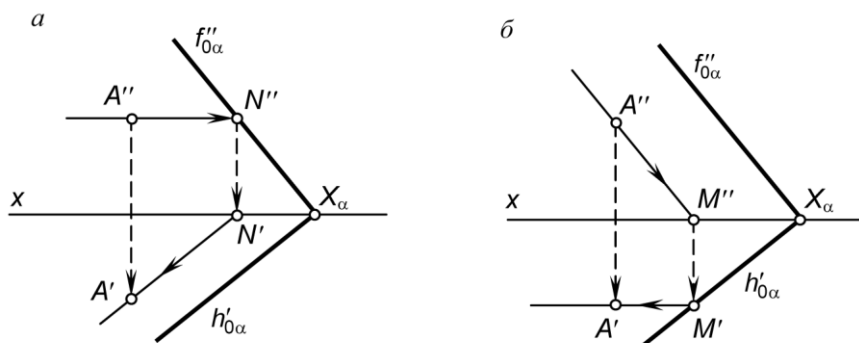


Рис. 3.36. Построение недостающей проекции точки A :
 a — при помощи горизонтали; b — при помощи фронтали

Пример 8. По заданной фронтальной проекции треугольника ABC , принадлежащей плоскости α , построить его горизонтальную проекцию (рис. 3.37).

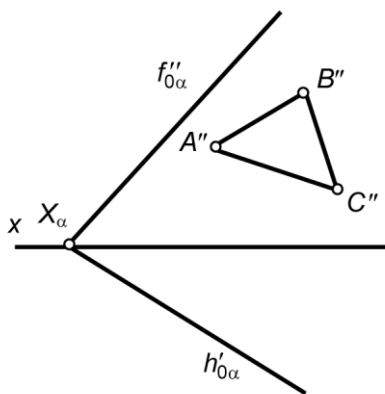


Рис. 3.37. Исходные проекции треугольника ABC и плоскости α

1. Через точки A , B и C проводим в плоскости α прямые частного положения, например горизонтали плоскости α (рис. 3.38). Фронтальные проекции этих прямых проводим через точки A'' , B'' , C'' параллельно оси X . Отмечаем проекции фронтальных следов горизонталей (фронтальные проекции — точки N''_1 , N''_2 , N''_3 — лежат на следе $f''_{0\alpha}$, а горизонтальные проекции — точки N'_1 , N'_2 , N'_3 — на оси X). Проводим горизонтальные проекции горизонталей параллельно следу $h'_{0\alpha}$ через точки соответственно N'_1 , N'_2 , N'_3 .

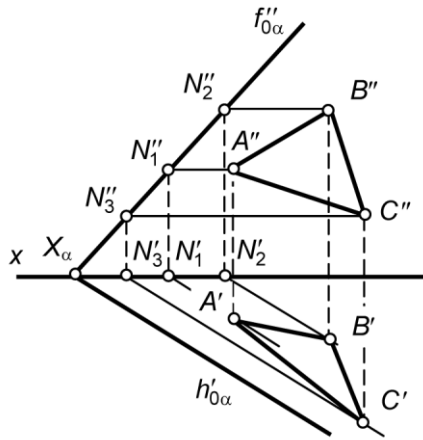
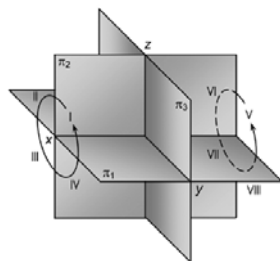


Рис. 3.38. Построение недостающей проекции треугольника ABC

2. Находим горизонтальные проекции точек A, B, C — точки A', B', C' — в пересечении линий проекционной связи, проведенных из A'', B'' и C'' , с соответствующей горизонтальной проекцией горизонтали плоскости. Соединив A', B', C' , получим горизонтальную проекцию треугольника ABC .

ГЛАВА 4



Позиционные задачи с прямой и плоскостью или с двумя плоскостями

4.1. Взаимное положение прямой и плоскости или двух плоскостей

Под позиционными задачами, как уже отмечалось ранее, понимают задачи по установлению взаимного расположения геометрических фигур — задачи на принадлежность, пересечение, параллельность. Некоторые позиционные задачи нами уже были рассмотрены, например, как построить точку, принадлежащую прямой или плоскости. При решении позиционных задач не учитываются метрические свойства фигур, т. е. те их свойства, которые могут быть определены только в результате измерения.

К числу основных позиционных задач относят, прежде всего, задачи на установление взаимного положения прямой и плоскости или двух плоскостей.

Прямая может занимать относительно плоскости следующие положения:

- ♦ лежать в плоскости (о прямой, принадлежащей плоскости, подробно рассказано в предыдущей главе);
- ♦ быть параллельной плоскости (рис. 4.1, а);
- ♦ пересекать плоскость (рис. 4.1, б), или в частном случае пересечения — прямая может быть перпендикулярна плоскости.

Две плоскости могут быть:

- ♦ параллельными (рис. 4.2, а);
- ♦ пересекающимися (рис. 4.2, б), или в частном случае пересечения — плоскости могут быть взаимно перпендикулярными.

В дальнейшем изложении настоящей главы способы решения позиционных задач по установлению взаимного положения прямой и плоскости или двух плоскостей будут чередоваться друг с другом, поскольку этого требует принцип постепенности изложения материала. Например, чтобы построить плоскость, параллельную за-

данной плоскости, надо сначала научиться строить прямую, параллельную плоскости. И, наоборот, для построения точки пересечения прямой с плоскостью, надо знать, как построить линию пересечения двух плоскостей.

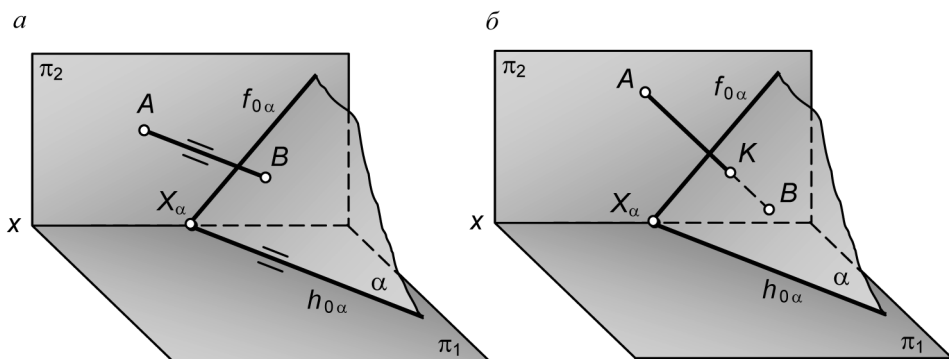


Рис. 4.1. Прямая, параллельная плоскости (а) и пересекающая плоскость (б)

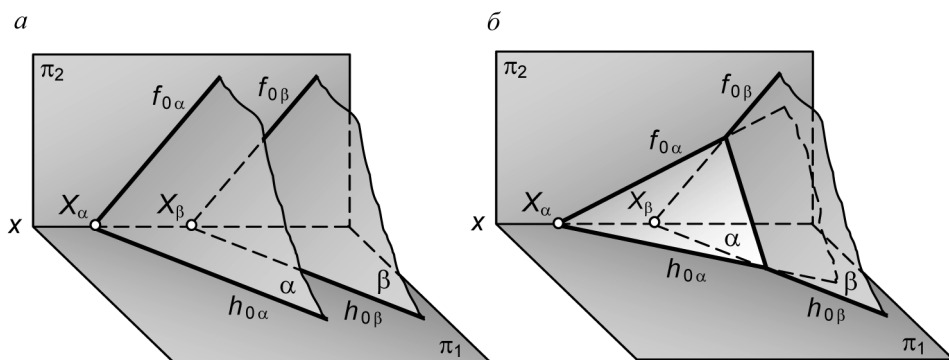


Рис. 4.2. Две параллельные плоскости (а) и пересекающиеся плоскости (б)

4.2. Прямая, параллельная плоскости

Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-либо прямой, лежащей в этой плоскости. Построим через точку K прямую, параллельную плоскости треугольника ABC (рис. 4.3). Сразу отметим, что задача имеет бесчисленное множество решений, т. к. через данную точку можно провести неограниченное количество прямых, параллельных данной плоскости. Через точку K проведена прямая, параллельная стороне треугольника AB . Горизонтальная проекция этой прямой параллельна $A'B'$, а фронтальная — $A''B''$. Эта прямая параллельна плоскости треугольника ABC , т. к. она параллельна прямой, лежащей в плоскости треугольника ABC .

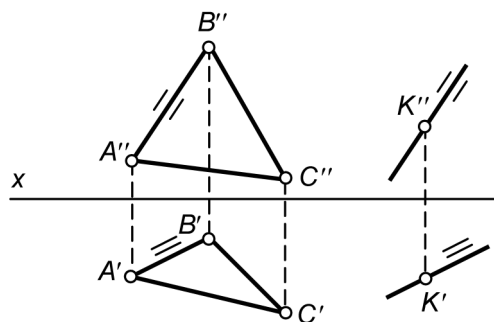


Рис. 4.3. Построение через точку K произвольной прямой, параллельной плоскости треугольника ABC

Теперь рассмотрим приемы построения через некоторую точку K прямой, параллельной плоскости α , которая задана следами.

Первый прием — проведем в плоскости α любую прямую, например прямую MN (рис. 4.4, *а*). Затем через точку K параллельно MN проведем прямую AB :

$$A'B' \parallel M'N'; \quad A''B'' \parallel M''N''.$$

Эта прямая будет параллельна плоскости α , т. к. она параллельна прямой MN , лежащей в этой плоскости.

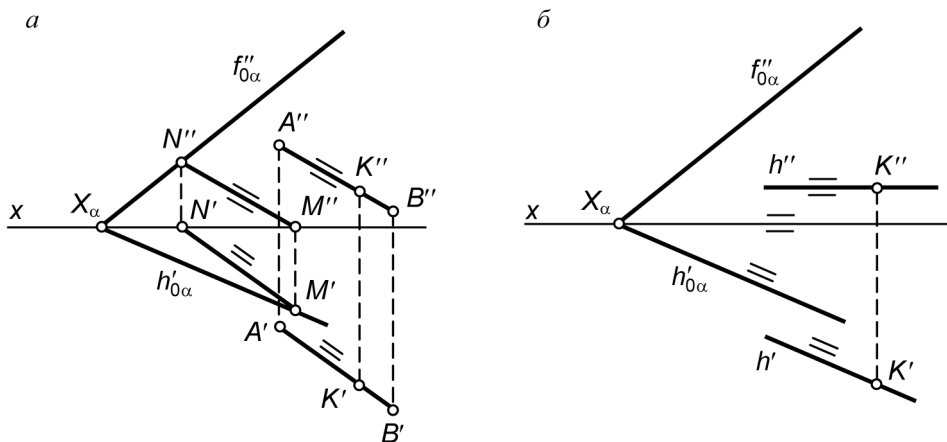


Рис. 4.4. Построение через точку K произвольной прямой, параллельной плоскости α (*а*) и горизонтальной прямой, параллельной плоскости α (*б*)

Эту же задачу можно решить другим способом, проведя через точку K прямую частного положения, например, горизонтальную прямую h (рис. 4.4, *б*). Горизонтальная проекция h' горизонтальной прямой проходит через проекцию K' и параллельна следу $h'_{0\alpha}$, а ее фронтальная проекция h'' проходит через K'' параллельно оси X .

4.3. Параллельные плоскости

Основным признаком параллельности плоскостей является параллельность двух пересекающихся прямых одной плоскости двум пересекающимся прямым другой плоскости (рис. 4.5).

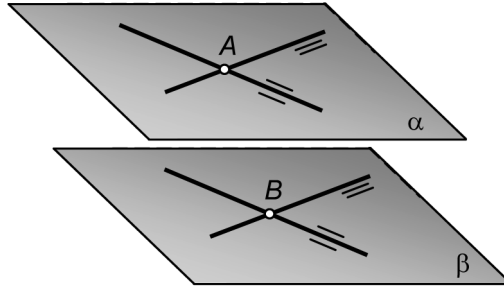


Рис. 4.5. Параллельные плоскости α и β

Например, плоскость, заданная пересекающимися прямыми AB и BC на эюре (рис. 4.6), параллельна плоскости, заданной прямыми LK и KT , т. к. $AB \parallel LK$ и $BC \parallel KT$.

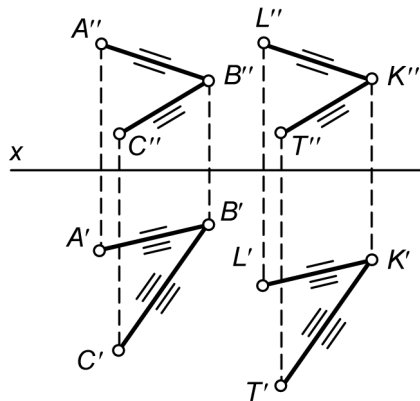


Рис. 4.6. Параллельные плоскости, заданные двумя пересекающимися прямыми

Таковыми прямыми могут служить и следы плоскостей: если два следа одной плоскости параллельны одноименным следам другой плоскости, то такие плоскости взаимно параллельны (рис. 4.7). Исключением из этого правила являются проецирующие плоскости, т. е. плоскости, перпендикулярные одной из плоскостей проекций (об этом далее в следующем разделе).

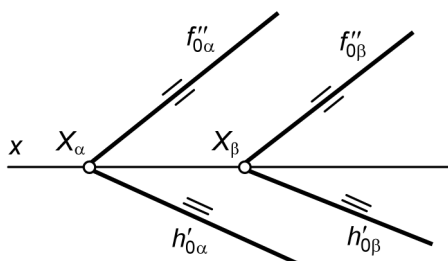
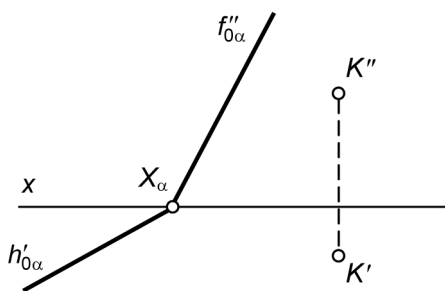


Рис. 4.7. Параллельные плоскости, заданные следами

Пример 9. Построить следы плоскости β , проходящей через данную точку K и параллельной плоскости α (рис. 4.8).


 Рис. 4.8. Исходные проекции точки K и плоскости α

1. Через заданную точку K проводим любую прямую частного положения, например горизонталь (рис. 4.9) искомой плоскости: фронтальная проекция горизонтали проходит через проекцию K'' и параллельна оси X ; горизонтальная проекция горизонтали проходит через K' и параллельна горизонтальному следу $h'_{0\alpha}$ заданной плоскости.
2. Строим проекции фронтального следа этой горизонтали: горизонтальная проекция фронтального следа (точка N') лежит в пересечении горизонтальной проекции горизонтали с осью X ; фронтальная проекция фронтального следа (точка N'') лежит в пересечении линии проекционной связи, проведенной из точки N' , и фронтальной проекции горизонтали.
3. Через точку N'' проводим фронтальный след $f''_{0\beta}$ плоскости β параллельно $f''_{0\alpha}$. В пересечении $f''_{0\beta}$ с осью X отмечаем точку схода следов X_β , через которую параллельно $h'_{0\alpha}$ проводим след $h'_{0\beta}$.

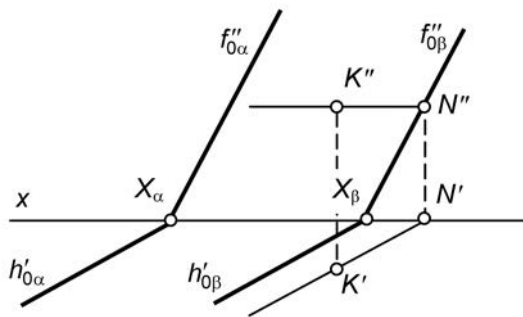


Рис. 4.9. Построение плоскости β , проходящей через заданную точку K и параллельной плоскости α

4.4. Пересекающиеся плоскости

Если хотя бы одна пара одноименных следов двух плоскостей пересекается, то эти плоскости пересекаются (рис. 4.10).

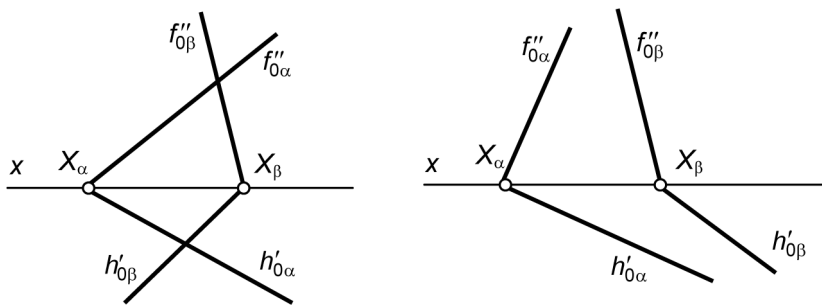
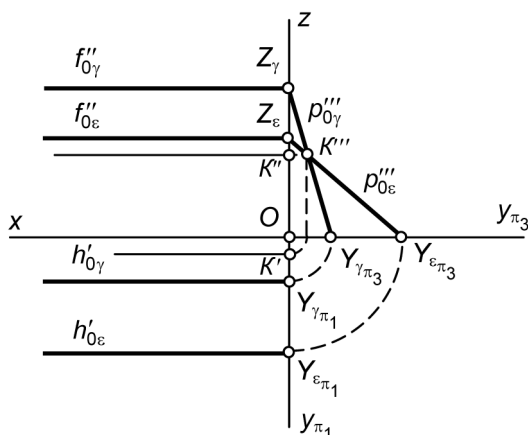
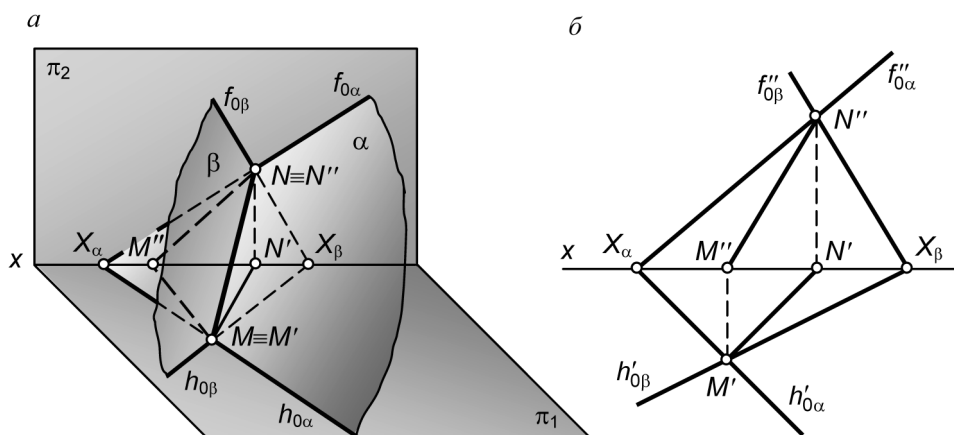


Рис. 4.10. Примеры пересекающиеся плоскостей

На рис. 4.11 изображены профильно-проецирующие плоскости ε и γ , горизонтальные и фронтальные следы которых параллельны между собой, а профильные — пересекаются. Следовательно, плоскости ε и γ также пересекаются.

Линией пересечения двух плоскостей является прямая, все точки которой принадлежат обеим плоскостям. Таким образом, в общем случае для нахождения линии пересечения необходимо найти хотя бы две точки, общие для обеих плоскостей. Такими точками могут быть, например, точки пересечения одноименных следов плоскостей α и β — точки M и N (рис. 4.12, а). Через них и пройдет линия пересечения.


 Рис. 4.11. Пересекающиеся профильно-проецирующие плоскости ε и γ

 Рис. 4.12. Построение линии пересечения плоскостей общего положения α и β , заданных следами в аксонометрии (а) и на эюре (б)

На эюре (рис. 4.12, б) проекции линии пересечения пройдут через точки пересечения одноименных следов плоскостей α и β . В пересечении горизонтальных следов находим проекцию общей точки M' (фронтальная проекция этой точки M'' лежит на оси x), а в пересечении фронтальных следов — точки N'' (горизонтальная проекция N' также лежит на оси x). Соединив одноименные проекции M и N , получаем две проекции линии пересечения.

Но далеко не всегда на эюре мы можем найти эти точки. Рассмотрим несколько примеров.

♦ Пусть дана пара плоскостей, из которых одна — плоскость общего положения α , а другая — горизонтальная плоскость β (рис. 4.13). Одну общую точку — точку N — найти легко в пересечении фронтальных следов. Поскольку плоскость β — горизонтальная, она параллельна плоскости проекции π_1 и, следова-

тельно, не имеет горизонтального следа. Из школьного курса геометрии известно, что две параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью по параллельным прямым. Следовательно, линией пересечения плоскостей α и β будет горизонталь h .

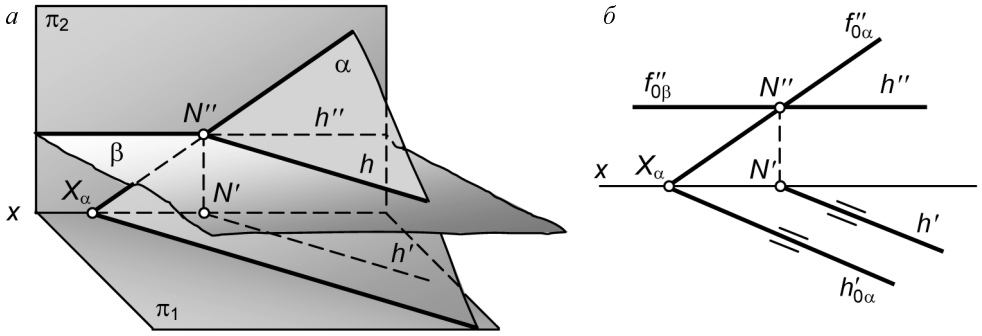


Рис. 4.13. Построение линии пересечения плоскости общего положения α с горизонтальной плоскостью β в аксонометрии (а) и на эпюре (б)

✧ Теперь возьмем две плоскости общего положения α и β , у которых одноименные следы, например фронтальные, в пределах чертежа не пересекаются (рис. 4.14). Первая общая точка — точка M — находится в пересечении горизонтальных следов плоскостей α и β .

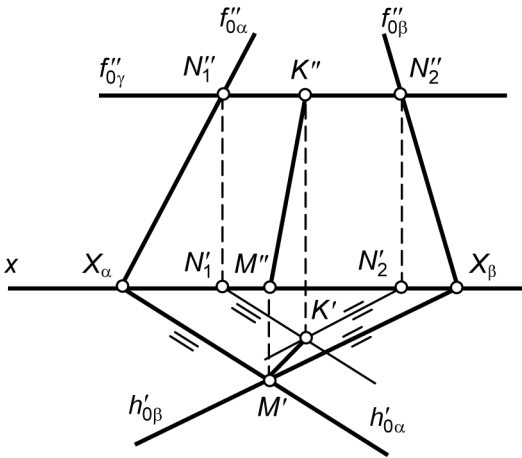


Рис. 4.14. Построение линии пересечения плоскостей общего положения α и β , если их фронтальные следы не пересекаются в пределах чертежа

Для нахождения второй общей точки выбираем произвольную вспомогательную плоскость, например горизонтальную плоскость γ , и строим линии пересечения

чения двух пар плоскостей: α и γ ; β и γ (так, как мы это сделали в предыдущем примере). Эти линии пересеклись в точке K , которая является общей для всех трех плоскостей. Теперь у нас есть точки M и K , общие для плоскостей α и β . Через эти точки можно провести линию пересечения двух этих плоскостей.

- ♦ Если фронтальные следы двух плоскостей параллельны, то линией их пересечения будет фронталь f (рис. 4.15, а). В этом легко убедиться, если воспользоваться вспомогательной горизонтальной плоскостью.

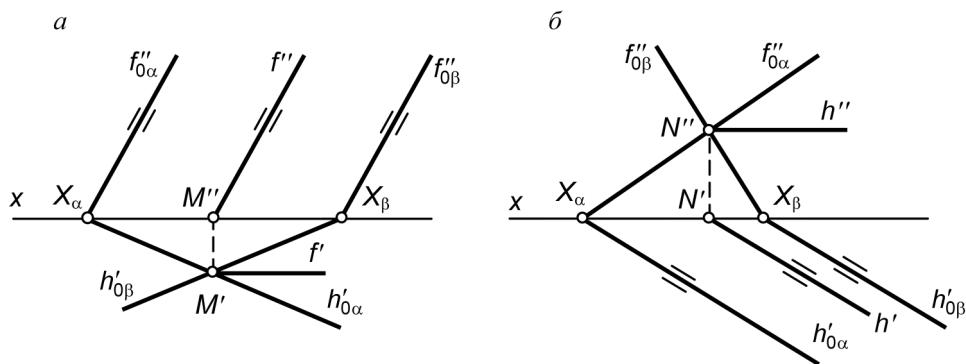


Рис. 4.15. Построение линии пересечения плоскостей с параллельными фронтальными следами (а) и с параллельными горизонтальными следами (б)

- ♦ По аналогии можно доказать, что если у пересекающихся плоскостей параллельны горизонтальные следы, то линией их пересечения будет горизонталь h (рис. 4.15, б).
- ♦ Возвратимся к примеру, изображенному на рис. 4.11. Отметим, что на эпюре имеется одна общая точка пересекающихся профилно-проецирующих плоскостей ε и γ — в пересечении профильных следов: $K''' = p''_{0\varepsilon} \cap p''_{0\gamma}$. Поскольку точка K лежит в плоскости π_3 , ее фронтальная проекция K'' находится на оси Z , а горизонтальная K' — на оси u_{π_3} . Линией пересечения плоскостей ε и γ является профилно-проецирующая прямая: на плоскости π_3 она вырождается в точку, совпадающую с K''' ; на плоскости π_2 линия пересечения спроецируется в линию, проходящую через K'' параллельно оси X ; на плоскости π_1 — в линию, проходящую через K' также параллельно оси X .

4.5. Прямая, пересекающая плоскость

Прямая, пересекающая плоскость, имеет с ней одну общую точку, называемую *точкой пересечения* или *точкой встречи* прямой с плоскостью.

Рассмотрим задачу о нахождении точки пересечения прямой линии с плоскостью в общем виде. Пусть нам дана плоскость α и прямая AB , ее пересекающая

(рис. 4.16). Проводим через прямую AB любую плоскость, например плоскость β . Далее строим линию пересечения плоскостей α и β — прямую 12. Все точки этой прямой являются общими для обеих плоскостей. Следовательно, и точка K , лежащая на прямой AB , принадлежит обеим плоскостям. Точка K будет искомой точкой пересечения прямой AB с плоскостью α .

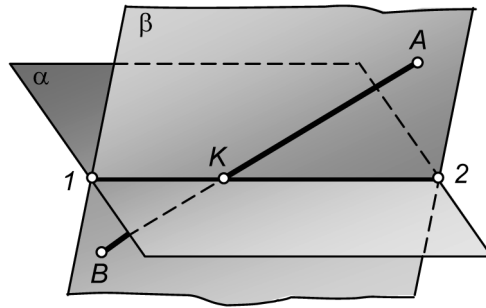


Рис. 4.16. Построение точки пересечения прямой и плоскости в общем виде

Рассмотрим порядок нахождения точки пересечения прямой AB с плоскостью α на эюре (рис. 4.17).

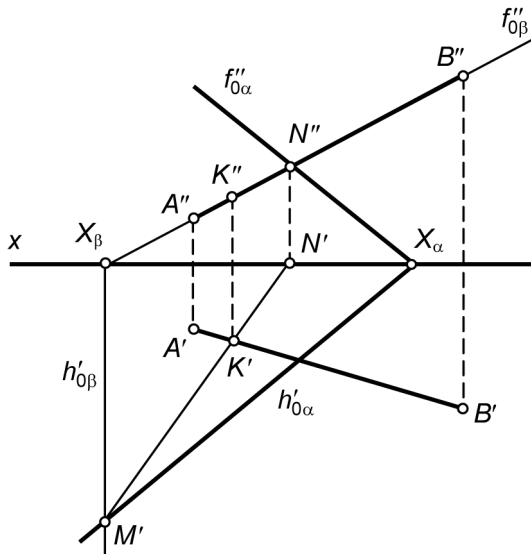


Рис. 4.17. Построение точки пресечения прямой с плоскостью, заданной следами

Через заданную прямую AB проводим любую вспомогательную плоскость (удобнее, если это будет плоскость частного положения — например, фронтально-проецирующая плоскость β). Находим линию пересечения плоскостей α и β —

прямую MN . Горизонтальная проекция K' искомой точки встречи лежит в пересечении горизонтальных проекций прямой $A'B'$ и линии пересечения $M'N'$. В пересечении линии проекционной связи, проведенной из K' , и фронтальной проекции прямой получаем вторую проекцию точки пересечения — точку K'' .

4.6. Определение взаимной видимости геометрических элементов

Взаимная видимость геометрических элементов определяет позиционное отношение одной геометрической фигуры (прямой, плоскости и т. д.) по отношению к другой в определенном направлении. Обычно это направление совпадает с направлением проецирования и для ортогонального чертежа перпендикулярно плоскости проекций.

Взаимная видимость на эюре определяется с помощью *конкурирующих точек*, которые выбирают на той плоскости проекций, в направлении на которую определяют взаимную видимость. Взаимная видимость в направлении на каждую из плоскостей проекций определяется *отдельно*.

Пусть точки A и B принадлежат скрещивающимся прямым a и b и лежат на одном перпендикуляре к горизонтальной плоскости проекций (рис. 4.18, *а*). Направление взгляда на плоскость π_1 показано стрелкой. Вопрос о видимости решается следующим образом: из двух точек считается видимой точка, находящаяся ближе к наблюдателю. В нашем случае точка A видна, а точка B закрыта ею. На эюре (рис. 4.18, *б*) фронтальная проекция показывает, что точка A выше, чем точка B , следовательно, на плоскости π_1 прямая a ближе к наблюдателю, чем прямая b .

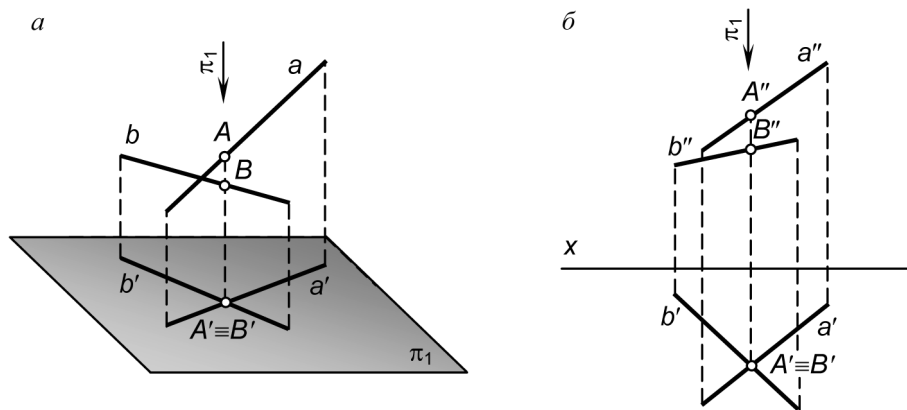


Рис. 4.18. Определение взаимной видимости скрещивающихся прямых в аксонометрии (а) и на эюре (б)

Аналогично взаимную видимость применяют и к другим плоскостям проекций.

Рассмотрим определение взаимной видимости прямой LT и плоскости, заданной треугольником ABC (рис. 4.19). Будем считать треугольник непрозрачным. Прежде всего находим точку пересечения прямой LT с плоскостью треугольника. Через прямую LT проводим вспомогательную плоскость β и строим линию пересечения плоскости β и плоскости треугольника ABC — прямую EF . Находим искомую точку K . Затем последовательно определяем взаимную видимость в направлении на плоскости проекций π_1 и π_2 .

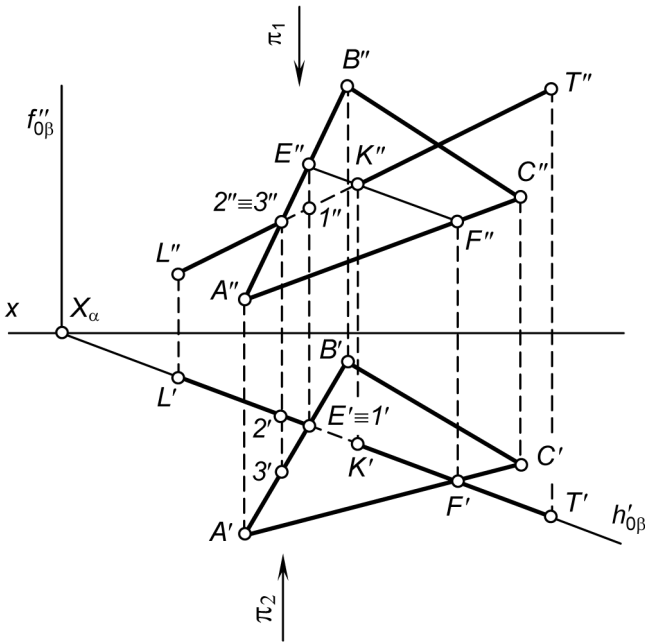


Рис. 4.19. Определение точки пересечения прямой LT с плоскостью треугольника ABC и видимости прямой относительно плоскости треугольника

Для определения видимости в направлении на плоскость π_1 выбираем конкурирующие точки, например E и 1 ($E' \equiv 1'$). Эти точки принадлежат разным геометрическим фигурам ($E \in AB$; $1 \in LT$), но они расположены на одной проецирующей прямой, перпендикулярной плоскости π_1 , поэтому на эту плоскость они проецируются в одну точку. Находим фронтальную проекцию $1''$ точки 1 (проекция E'' уже была найдена при предыдущих построениях).

Из двух точек видимой будет та, фронтальная проекция которой расположена дальше от оси проекций. В нашем примере — это точка E . Следовательно, на горизонтальной проекции видимой будет прямая AB , принадлежащая плоскости треугольника, а отрезок прямой $K1$ — невидимым. В точке K прямая LT пересекает плоскость, и отрезок KT становится видимым.

Для определения взаимной видимости в направлении на π_2 выбираем на ней проекции конкурирующих точек. Пусть это будут точки $2''$ и $3''$ ($2'' \equiv 3''$). При этом условимся, что $2 \in LT$; $3 \in AB$. Находим их горизонтальные проекции и определяем по ним взаимную видимость точек. Далее от оси x будет точка $3'$, принадлежащая треугольнику ABC . Следовательно отрезок $2''K''$ — невидим.

4.7. Пересечение плоских фигур

Линия пересечения двух плоских фигур, как и линия пересечения двух плоскостей, определяется двумя точками, общими для этих фигур. Такие точки могут быть найдены как точки пересечения сторон одной фигуры с плоскостью другой.

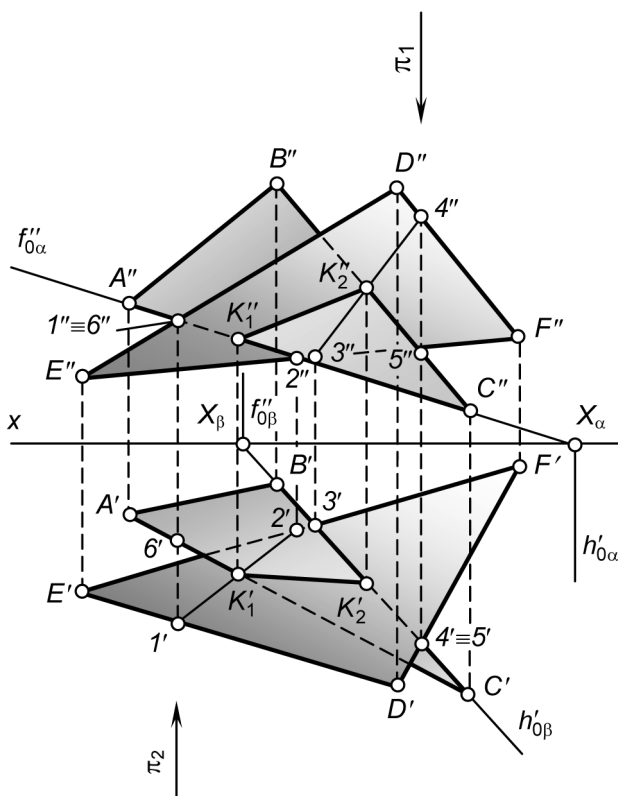


Рис. 4.20. Построение линии пересечения плоскостей, заданных плоскими фигурами

На рис. 4.20 найдена линия пересечения треугольников ABC и EDF . Для этого выполнены следующие построения. Сначала найдена точка K_1 (K_1' , K_1'') пересечения стороны AC треугольника ABC с плоскостью треугольника EDF . Для ее по-

строения точки через сторону AC проведена вспомогательная фронтально-проецирующая плоскость α и построена прямая 12 пересечения вспомогательной плоскости α и треугольника EDF . На пересечении горизонтальных проекций $A'C'$ и $1'2'$ определена горизонтальная проекция K'_1 точки встречи. Ее фронтальная проекция K''_1 построена на фронтальной проекции $A''C''$.

Затем аналогично построена точка K_2 (K'_2, K''_2) пересечения другой стороны, например стороны BC , с плоскостью треугольника EDF . Для ее построения через сторону BC проведена горизонтально-проецирующая плоскость β . Затем построена прямая 34 пересечения плоскости β и треугольника EDF , и на пересечении $3''4''$ с $B''C''$ найдена фронтальная проекция K''_2 . Точка K'_2 построена на горизонтальной проекции $B'C'$.

Зная две точки, общие для заданных плоскостей, проводим через них линию пересечения K_1K_2 с проекциями $K'_1K'_2$ и $K''_1K''_2$.

Выбираем конкурирующие точки для определения взаимной видимости на фронтальной плоскости проекций, например, в пересечении фронтальных проекций $A''C''$ и $E''D''$:

$$\pi_2 (1'' \equiv 6'') \left\{ \begin{array}{l} 1 \in (ED), \\ 6 \in (AC). \end{array} \right.$$

Рассматривая горизонтальные проекции точек 1 и 6 , видим, что точка 1 находится ближе к наблюдателю. Следовательно, в направлении на плоскость π_2 прямая ED закрывает прямую AC , и в этой области треугольник EDF будет ближе к наблюдателю, чем треугольник ABC . Поэтому на фронтальной плоскости проекций часть треугольника ABC , ограниченная прямой ED и линией пересечения K_1K_2 , будет невидимой. Рассуждая от противного, по другую сторону от линии пересечения ближе к наблюдателю окажется треугольник ABC , закрывающий от обзора часть стороны EF треугольника EDF .

Выбираем конкурирующие точки для определения видимости на горизонтальной плоскости проекций, например, в пересечении горизонтальных проекций $B'C'$ и $D'F'$:

$$\pi_1 (4' \equiv 5') \left\{ \begin{array}{l} 4 \in (DF), \\ 5 \in (BC). \end{array} \right.$$

По фронтальной проекции точек 4 и 5 видно, что точка 4 находится выше точки 5 , и поэтому на горизонтальной плоскости проекций прямая DF будет закрывать прямую BC . Следовательно, в этой части треугольник EDF будет ближе к наблюдателю, чем треугольник ABC , и участок треугольника ABC , ограниченный прямой DF и линией пересечения K_1K_2 , будет невидимым. От противного по другую сторону линии пересечения ближе к наблюдателю окажется треугольник ABC , который закроет часть стороны EF треугольника EDF .

Теперь рассмотрим пример, когда одна плоскость задана следами, а другая — плоской фигурой (рис. 4.21). В данном случае такие две общие для заданных плос-

костей точки могут быть найдены как точки пересечения любых сторон плоской фигуры с плоскостью α .

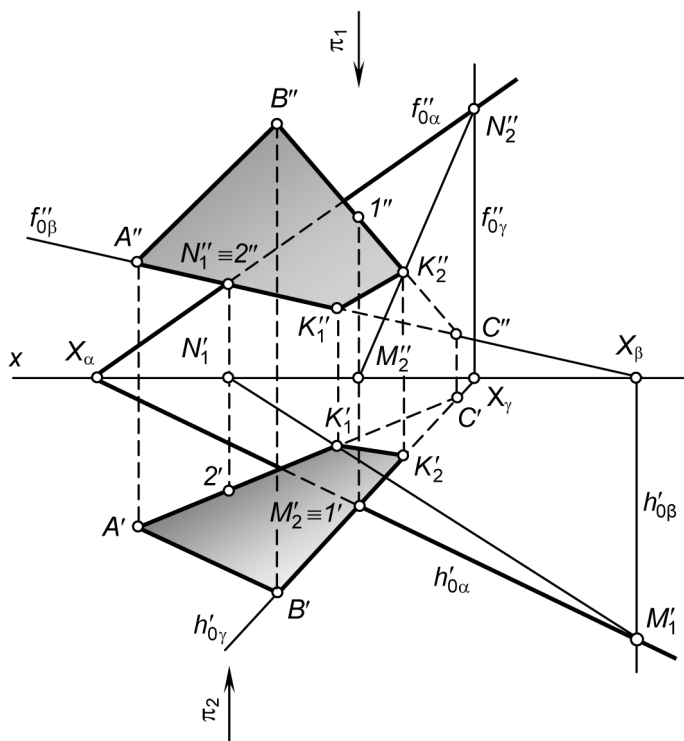


Рис. 4.21. Построение линии пересечения плоскостей, одна из которых задана следами, другая — плоской фигурой

Находим точку пересечения K_1 прямой AC с плоскостью α — через прямую AC проводим вспомогательную плоскость, например, фронтально-проецирующую плоскость β , находим линию пересечения M_1N_1 плоскостей α и β , и в ее пересечении с прямой AC находим искомую точку K_1 с проекциями K'_1 и K''_1 .

Находим точку пересечения K_2 прямой BC с плоскостью α — проводим вторую вспомогательную плоскость, например, горизонтально-проецирующую плоскость γ , находим линию пересечения M_2N_2 плоскостей α и γ и в ее пересечении с прямой BC находим искомую точку K_2 с проекциями K'_2 и K''_2 .

Зная две точки K_1 и K_2 , общие для плоскости α и плоскости треугольника ABC , проводим через них линию пересечения K_1K_2 с проекциями $K'_1K'_2$ и $K''_1K''_2$.

Определяем видимость плоскостей друг относительно друга на основе анализа положения конкурирующих точек, например, точек 1 и M_2 — на горизонтальной плоскости проекций и точек 2 и N_1 — на фронтальной плоскости проекций.

Если обе плоскости заданы геометрическими фигурами (параллельными прямыми, пересекающимися прямыми, прямой и точкой, тремя точками), то в общем случае их пересекают двумя плоскостями (целесообразно, если это будут плоскости частного положения) и ищут линии пересечения вспомогательных и заданных плоскостей. Затем проекции общих точек соединяют.

Пример 10. Построить линию пересечения плоскостей: одна из плоскостей задана двумя пересекающимися прямыми AB и BC , а другая — двумя параллельными прямыми EF и GH (рис. 4.22).

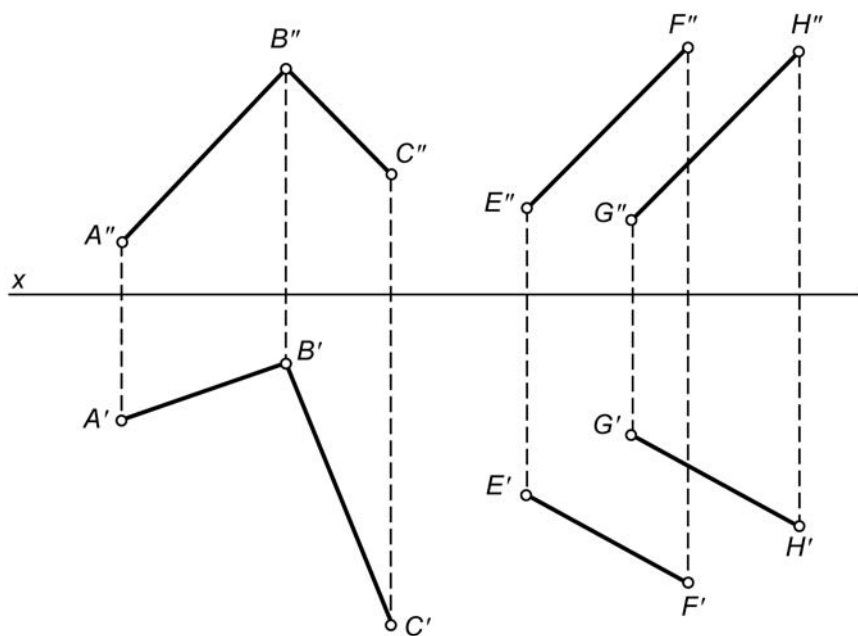


Рис. 4.22. Исходные плоскости в виде двух пересекающихся прямых и двух параллельных прямых

1. Через заданные плоскости проведем две вспомогательные горизонтальные плоскости α и β (рис. 4.23):

$$f''_{0\alpha} \parallel x; f''_{0\beta} \parallel x.$$

2. При пересечении заданных плоскостей с плоскостью α образуются прямые 12 и 34, которые в своем пересечении дают точку K_1 , принадлежащую обеим заданным плоскостям.
3. При пересечении заданных плоскостей плоскостью β образуются прямые 56 и 78, которые в своем пересечении дают вторую общую точку K_2 , общую для заданных плоскостей.

4. Для построения линии пересечения необходимо соединить одноименные проекции точек K_1 и K_2 .

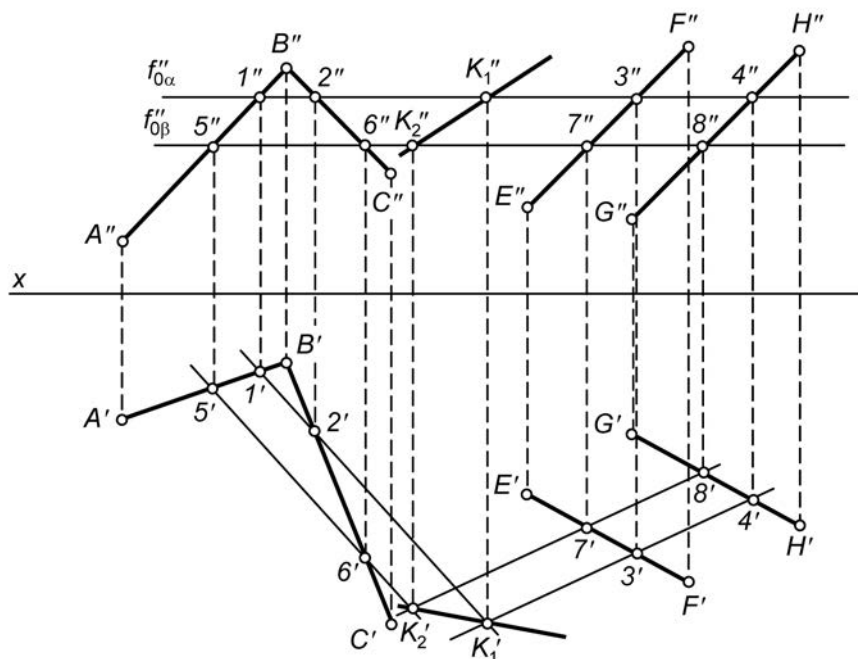


Рис. 4.23. Построение линии пересечения плоскостей, заданных геометрическими фигурами

4.8. Прямая, перпендикулярная плоскости

Предположим, что дана некоторая плоскость α и прямая AK — перпендикуляр к этой плоскости, причем точка K , лежащая в плоскости α , является основанием перпендикуляра (рис. 4.24). Если прямая AK — перпендикуляр, то она перпендикулярна любой прямой, принадлежащей этой плоскости.

Через точку K проведем горизонталь KN . Угол AKN — прямой. Учитывая особенности проецирования прямого угла, у которого хотя бы одна сторона параллельна плоскости проекций, угол $A'K'N'$ — тоже прямой.

Таким образом, горизонтальная проекция перпендикуляра перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали и горизонтальному следу плоскости. Аналогично можно доказать, что фронтальная проекция перпендикуляра перпендикулярна фронтальной проекции фронтали и фронтальному следу плоскости.

Посмотрим на конкретных примерах, как из некоторой точки опустить перпендикуляр к заданной плоскости.

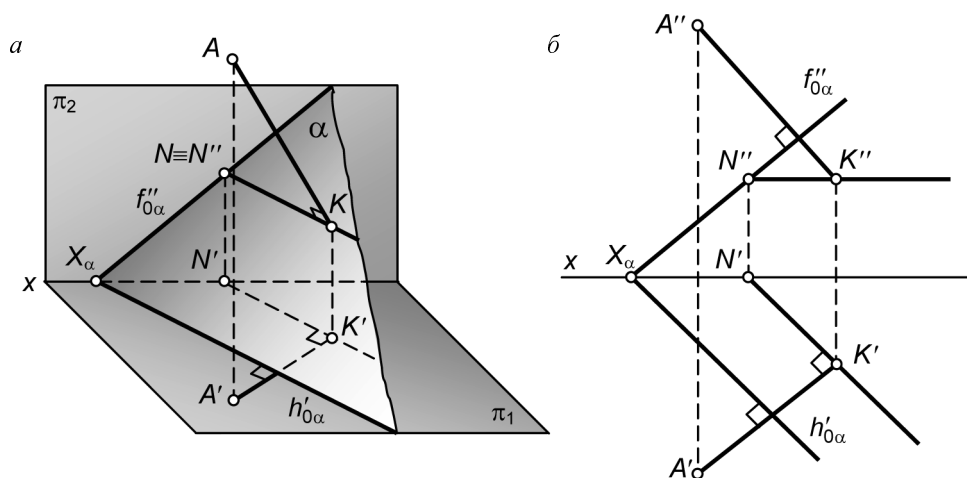


Рис. 4.24. Прямая AK , перпендикулярная плоскости α в аксонометрии (а) и на эпюре (б)

Пусть из точки K требуется опустить перпендикуляр к плоскости α , заданной следами (рис. 4.25). Выполнить построения несложно:

- ◆ горизонтальная проекция перпендикуляра перпендикулярна горизонтальному следу плоскости $h'_{0\alpha}$;
- ◆ фронтальная проекция перпендикуляра перпендикулярна фронтальному следу плоскости $f''_{0\alpha}$.

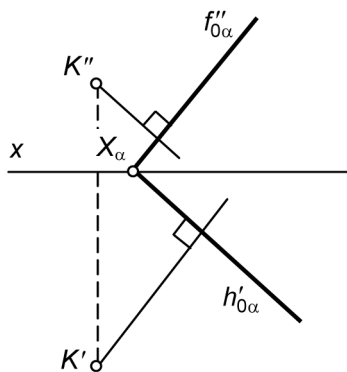


Рис. 4.25. Проведение перпендикуляра к плоскости, заданной следами

Теперь из точки K опустим перпендикуляр к плоскости, заданной треугольником ABC (рис. 4.26). Строим горизонталь $A1$ ($A'1''$, $A'1'$) и фронталь $A2$ ($A'2'$, $A'2''$) заданной плоскости. Из точки K проводим перпендикуляр к заданной плоскости:

- ◆ горизонтальная проекция перпендикуляра перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали $A'1'$;

- ◇ фронтальная проекция перпендикуляра перпендикулярна фронтальной проекции фронтали $A''2''$.

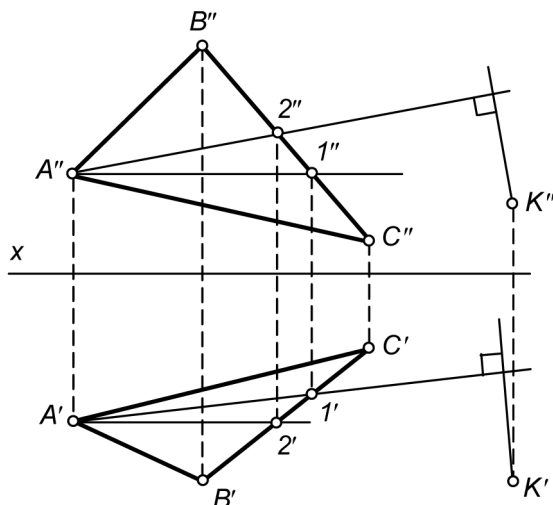


Рис. 4.26. Проведение перпендикуляра к плоскости, заданной треугольником

Пример 11. Определить натуральную величину расстояния от точки K до заданной плоскости α (рис. 4.27).

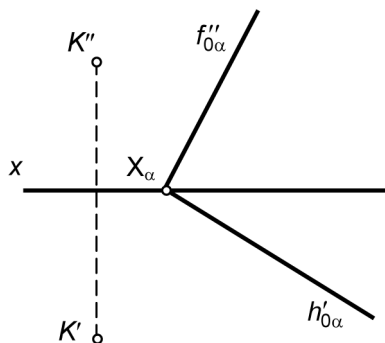


Рис. 4.27. Исходные проекции точки K и плоскости α

1. Опускаем перпендикуляр из точки K на заданную плоскость (рис. 4.28): фронтальная проекция перпендикуляра проводится из точки K'' перпендикулярно фронтальному следу плоскости $f''_{0\alpha}$, а горизонтальная проекция перпендикуляра — из точки K' перпендикулярно горизонтальному следу плоскости $h'_{0\alpha}$.

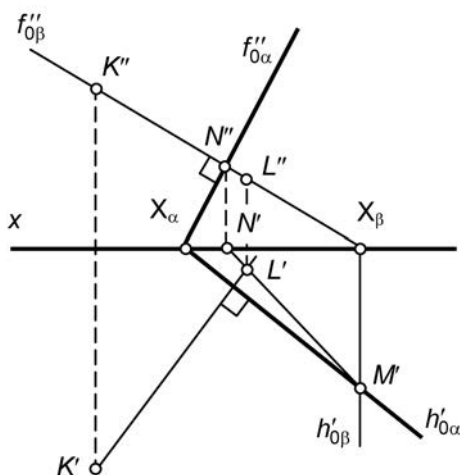


Рис. 4.28. Построение перпендикуляра и его основания из точки K к заданной плоскости

2. Строим основание перпендикуляра — точку пересечения перпендикуляра с плоскостью α , для чего через перпендикуляр проводим вспомогательную плоскость, например, фронтально-проецирующую плоскость β . Точка L (L' , L'') — искомая точка пересечения.
3. Определяем натуральную величину отрезка KL методом прямоугольного треугольника: строим прямоугольный треугольник по двум катетам (один катет — горизонтальная проекция отрезка $K'L'$, другой — алгебраическая разность координат $\Delta z_{KL} = K'K_0$). Гипотенуза K_0L' — искомое расстояние (рис. 4.29).

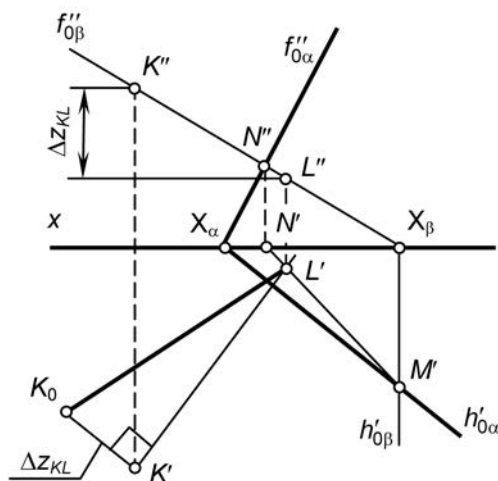


Рис. 4.29. Определение натуральной величины перпендикуляра

4.9. Взаимно перпендикулярные плоскости

Две плоскости взаимно перпендикулярны, если одна из них проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости.

Различают два способа построения плоскости, перпендикулярной плоскости:

- ✧ плоскость проводится через прямую, перпендикулярную другой плоскости;
- ✧ плоскость проводится перпендикулярно прямой, лежащей в другой плоскости.

Для получения единственного решения требуются дополнительные условия.

Рассмотрим построение плоскости β , перпендикулярной плоскости α и проходящей через прямую KL (рис. 4.30).

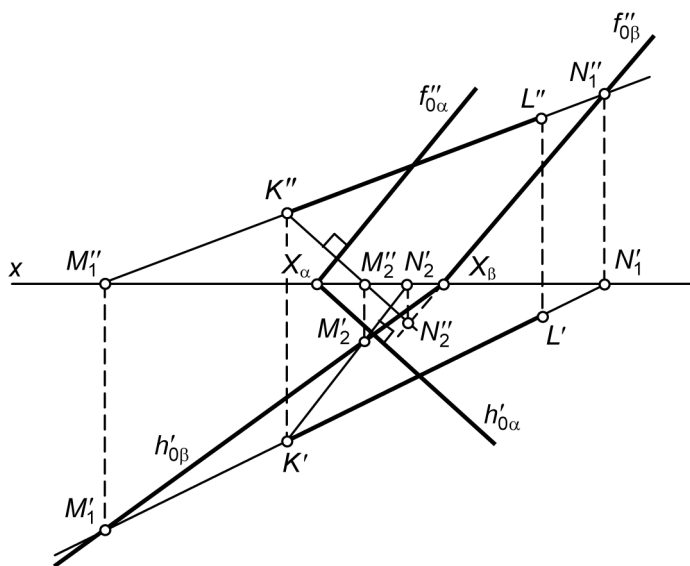


Рис. 4.30. Построение плоскости β , перпендикулярной плоскости α и проходящей через прямую KL

Из любой точки прямой KL , например из точки K , проводим перпендикуляр к заданной плоскости α . Строим проекции следов прямой KL (M_1' и M_1'' , N_1' и N_1'') и перпендикуляра (M_2' и M_2'' , N_2' и N_2'').

Строим следы плоскости β : через горизонтальные проекции горизонтальных следов M_1' и M_2' проводим горизонтальный след плоскости β ; через фронтальные проекции фронтальных следов N_1'' и N_2'' — ее фронтальный след. Проверяем правильность построений: следы $h'_{0\beta}$ и $f''_{0\beta}$ пересекаются в точке схода следов X_β на оси x .

Таким образом, плоскость β перпендикулярна плоскости α , т. к. проходит через прямую KL , перпендикулярную плоскости α . Следует обратить внимание на то, что одноименные следы плоскостей α и β не перпендикулярны друг другу.

Если одна из рассматриваемых плоскостей является плоскостью частного положения, то существует несколько очевидных случаев, когда перпендикулярность следов может служить признаком перпендикулярности самих плоскостей. Например, перпендикулярность горизонтальных следов плоскости общего положения α и горизонтально-проецирующей плоскости β соответствует взаимной перпендикулярности этих плоскостей (рис. 4.31). Это нетрудно доказать, выбрав в плоскости β прямую AB , перпендикулярную плоскости α .

По аналогии с рассмотренным примером перпендикулярность фронтальных следов фронтально-проецирующей плоскости и плоскости общего положения также соответствует взаимной перпендикулярности этих плоскостей.

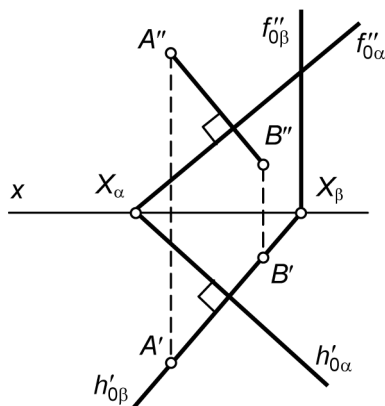


Рис. 4.31. Горизонтально-проецирующая плоскость β , перпендикулярная плоскости общего положения α

Если одноименные следы двух плоскостей общего положения взаимно перпендикулярны, то такие плоскости не перпендикулярны между собой. Несмотря на перпендикулярность горизонтальных следов плоскостей α и β (рис. 4.32), указанные плоскости не перпендикулярны между собой.

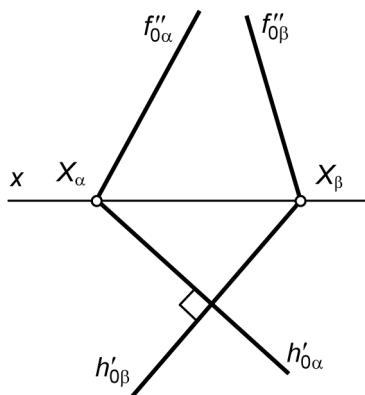
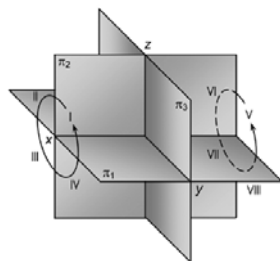


Рис. 4.32. Взаимно неперпендикулярные плоскости α и β

ГЛАВА 5



Способы преобразования проекций

5.1. Общие сведения о способах преобразования проекций

Критерием рациональности решения графических задач является максимальная точность и наглядность, достигнутая при минимальном объеме построений.

Решение, как правило, получается наиболее простым и наглядным, если объекты проецирования занимают одно из частных положений относительно плоскостей проекций. В начертательной геометрии разработан ряд способов, позволяющих любую конкретную графическую задачу привести к частному виду и применить типовой алгоритм ее решения.

Это можно сделать двумя способами:

- ♦ *способом вращения* — изменением положения в пространстве геометрической фигуры путем ее вращения вокруг одной или нескольких осей при неизменном положении плоскостей проекций;
- ♦ *методом перемены плоскостей проекций* — введением одной или нескольких дополнительных плоскостей проекций при неизменном положении геометрической фигуры.

Рассмотрим подробно оба способа на конкретных примерах.

5.2. Способ вращения

5.2.1. Основы способа вращения

Способ вращения базируется на нескольких основных положениях. При вращении вокруг некоторой неподвижной прямой (*оси вращения*):

- ♦ каждая точка вращаемой фигуры перемещается в плоскости (*плоскости вращения*), перпендикулярной оси вращения;

Горизонтальная проекция этой траектории лежит на горизонтальном следе плоскости вращения $h'_{0\gamma}$, параллельной оси x . Точка O_A является центром вращения точки A , а отрезок $AO_A = A''O''_A = R_A$ — радиусом вращения точки A .

Теперь рассмотрим вращение некоторой точки B вокруг оси, перпендикулярной горизонтальной плоскости проекций (рис. 5.2). На горизонтальную плоскость проекций ось вращения i проецируется в точку, а на фронтальную — в прямую, перпендикулярную оси x .

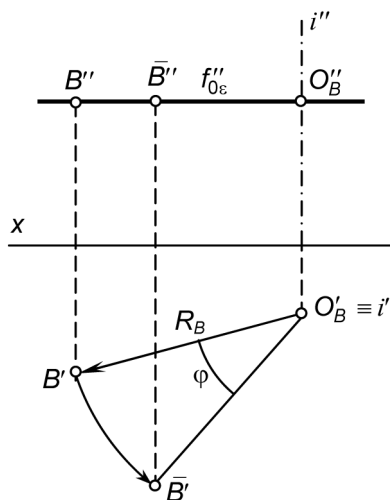


Рис. 5.2. Вращение точки B вокруг оси i , перпендикулярной плоскости π_1 , на произвольный угол ϕ

При вращении точки B вокруг оси i ее горизонтальная проекция вращается по дуге окружности, а фронтальная — перемещается по прямой, совпадающей с фронтальным следом плоскости вращения ϵ .

Таким образом, при вращении точки вокруг оси, перпендикулярной одной из плоскостей проекций, проекция точки на эту плоскость перемещается по дуге окружности радиусом, равным радиусу вращения. Проекция этой точки на другую плоскость проекций перемещается по прямой, перпендикулярной оси вращения.

Вращение отрезка

Для вращения отрезка AB вокруг оси, перпендикулярной плоскости π_1 , на некоторый угол ϕ (рис. 5.3) нужно повернуть на этот угол любые две его точки (например, концы отрезка — точки A и B).

Горизонтальные проекции этих точек при этом перемещаются в горизонтальных плоскостях γ_1 и γ_2 по дугам окружностей на один и тот же угол ϕ . Фронтальные проекции точек A и B перемещаются по прямым, параллельным оси x , являю-

щимся фронтальными следами плоскостей вращения — $f''_{0\gamma_1}$ и $f''_{0\gamma_2}$. Точки O_A и O_B — центры вращения этих точек.

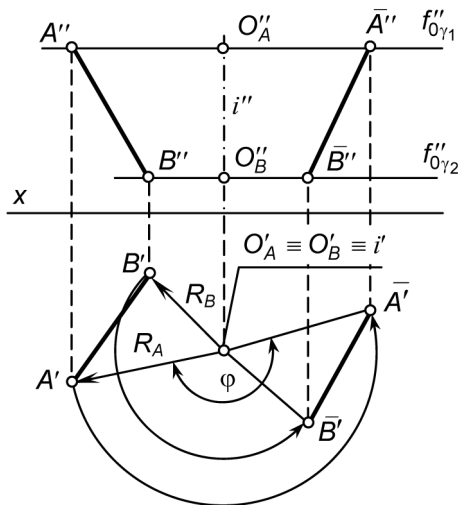


Рис. 5.3. Вращение отрезка AB вокруг оси i , перпендикулярной плоскости π_1 , на произвольный угол ϕ

Таким образом, при вращении отрезка прямой вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекций, длина проекции отрезка прямой на эту плоскость не изменяется.

Вращение прямой значительно упрощается, если ось проходит через одну из точек вращаемой прямой, т. к. при этом достаточно повернуть лишь одну точку, принадлежащую прямой. На рис. 5.4, а ось вращения i проведена перпендикулярно плоскости π_1 через точку B (положение этой точки при преобразовании изменяться не будет).

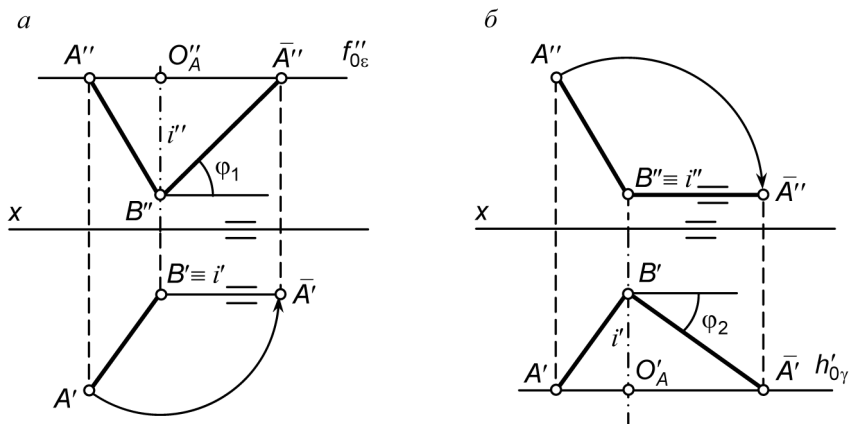


Рис. 5.4. Определение натуральной величины отрезка AB и угла его наклона к плоскостям проекций π_1 (а) и π_2 (б)

Затем отрезок AB повернут вокруг оси i в положение, параллельное плоскости π_2 . При этом горизонтальная проекция отрезка вращается до положения $\bar{A}'B'$, параллельного оси x . Тогда на фронтальную плоскость проекций этот отрезок спроецируется в натуральную величину, а угол φ_1 между ее фронтальной проекцией и осью x будет равен углу наклона этой прямой к плоскости π_1 .

Аналогично, вращением вокруг оси, перпендикулярной плоскости π_2 , может быть найдена натуральная величина отрезка и угол его наклона к плоскости π_2 (рис. 5.4, б).

Вращение плоскости

Вращение плоскости сводится к вращению вокруг заданной оси принадлежащих ей геометрических элементов (точек, прямых линий и пр.).

При вращении плоскости, заданной следами, обычно поворачивают один из ее следов и горизонталь (или фронталь) плоскости. Например, для поворота плоскости α вокруг оси i на некоторый угол φ на горизонтальном следе $h'_{0\alpha}$ выбрана точка A , ближайшая к оси вращения (рис. 5.5). Точка A повернута на угол φ , и через новое положение точки $\bar{A}'$ перпендикулярно $\bar{A}'O'_A$ проведен след $\bar{h}'_{0\alpha}$.

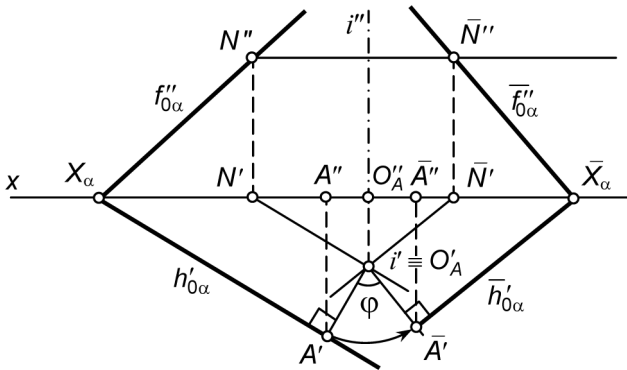


Рис. 5.5. Вращение плоскости α вокруг оси i , перпендикулярной плоскости π_1 , на произвольный угол φ

Затем в плоскости α проведена горизонталь, пересекающая ось вращения. В новом положении горизонтальная проекция горизонтали также будет проходить через ось вращения i' параллельно $\bar{h}'_{0\alpha}$. Фронтальный след $\bar{f}'_{0\alpha}$ проведен через точку схода следов $\bar{X}_\alpha$ и $\bar{N}''$.

Если плоскость общего положения преобразовать в частное положение, то в новом положении можно определить угол наклона этой плоскости к плоскости проекций. Пусть дана плоскость общего положения α , и требуется определить угол ее наклона к горизонтальной плоскости проекций (рис. 5.6).

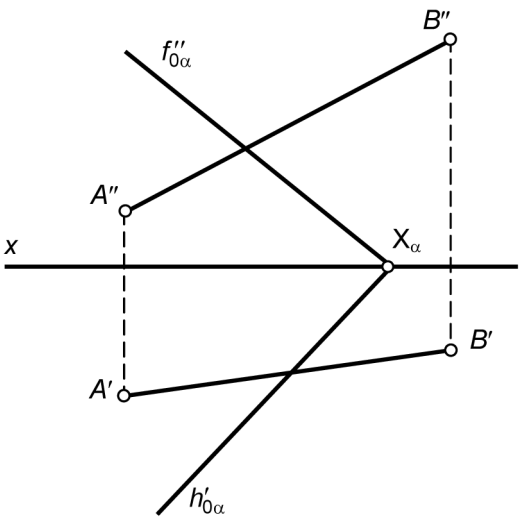


Рис. 5.8. Исходные проекции прямой AB и плоскости α

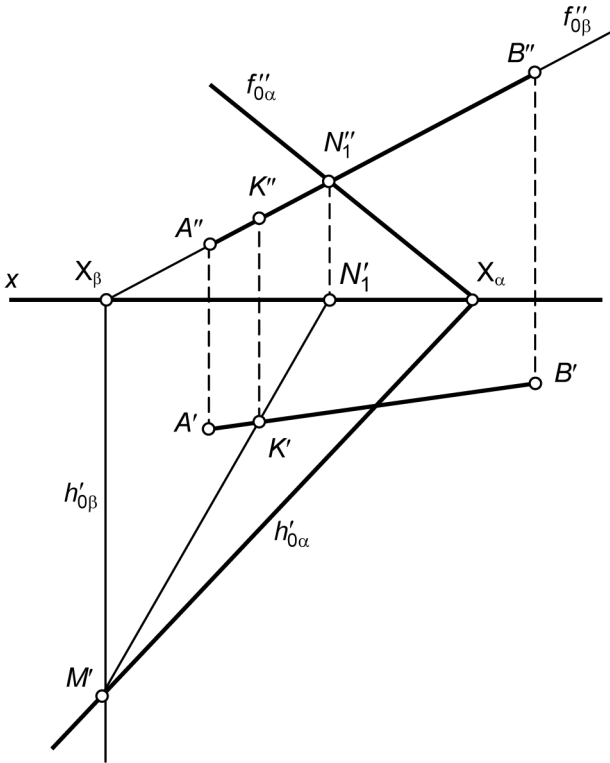


Рис. 5.9. Построение точки пересечения заданной прямой AB с плоскостью α

цию линии пересечения плоскостей α и γ : она пройдет через N'_2 параллельно следу $h'_{0\alpha}$.

- Вращаем точку A вокруг оси i до положения $\bar{A}$, совмещенного с заданной плоскостью α . Горизонтальная проекция точки A (A') перемещается по дуге окружности радиуса $O'_A A'$, фронтальная проекция точки A (A'') — по следу $f''_{0\gamma}$. Для построения горизонтальной проекции $\bar{A}'$ проведем дугу окружности из центра O'_A радиусом $O'_A A'$ до пересечения с горизонтальной проекцией линии пересечения плоскостей α и γ . Фронтальная проекция нового положения точки $\bar{A}$ ($\bar{A}''$) будет находиться на $f''_{0\gamma}$. Находясь на этой линии, точка A окажется в плоскости α .

Вообще говоря, это вращение можно осуществить как по часовой стрелке, так и против нее, и поэтому задача имеет два решения. Поскольку в условии задачи направление вращения не оговаривается, то мы вправе выбрать направление самостоятельно. В рассматриваемом примере вращение точки A проведено по часовой стрелке. $\bar{A}'$ — горизонтальная проекция в совмещенном с плоскостью α положении, а $\bar{A}''$ — ее фронтальная проекция.

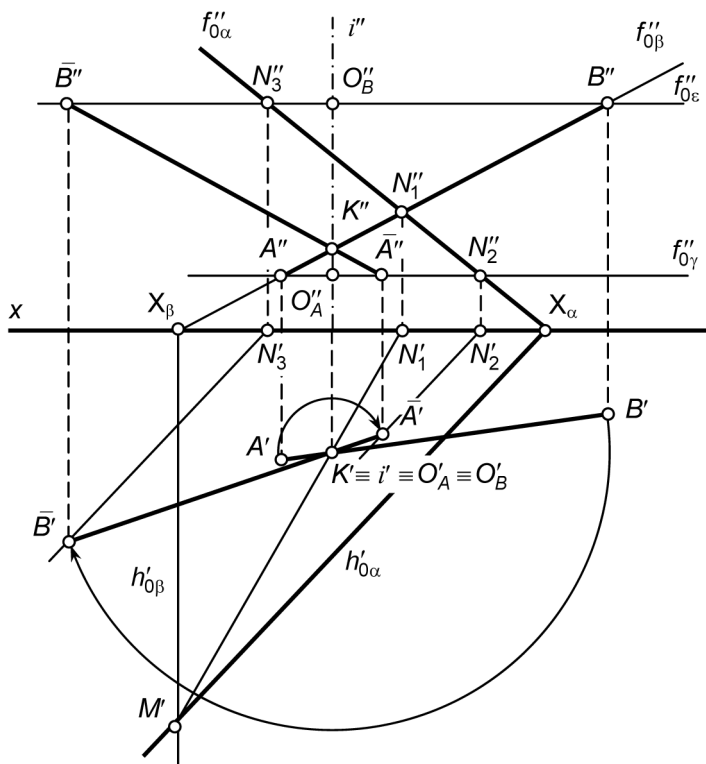


Рис. 5.11. Совмещение с плоскостью α точки B

8. Аналогично совмещаем с плоскостью α точку B (рис. 5.11), проведя плоскость ее вращения ε .
9. Соединяем одноименные проекции точек $A (\bar{A}', \bar{A}'')$ и $B (\bar{B}', \bar{B}'')$ и проверяем правильность построений. Так как точка K с одной стороны лежит на прямой AB , а с другой — на оси вращения i , то при вращении прямой AB ее положение не изменяется:

$$K' \in \bar{A}'\bar{B}'; K'' \in \bar{A}''\bar{B}''.$$

5.2.3. Плоскопараллельное перемещение

Плоскопараллельное перемещение представляет собой частный случай способа вращения вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекций π_1 или π_2 , при котором на чертеже не изображается ось вращения и не устанавливается радиус вращения. Это делается для того, чтобы избежать наложения исходных и дополнительных проекций.

Новые проекции допускается перемещать на свободное поле чертежа. При этом одна из исходных проекций рассматриваемой геометрической фигуры перемещается в требуемое положение, не изменяя своего вида и размера.

Сущность способа разберем на примере определения натуральной величины отрезка прямой общего положения (рис. 5.12). Прямую AB переместим в плоскости вращения так, что ее горизонтальная проекция оказалась параллельной оси x . Тогда сама прямая AB будет параллельна плоскости π_2 и ее фронтальная проекция будет натуральной величиной заданного отрезка. Угол φ_1 между этой проекцией и осью x представляет собой угол наклона прямой к плоскости π_1 .

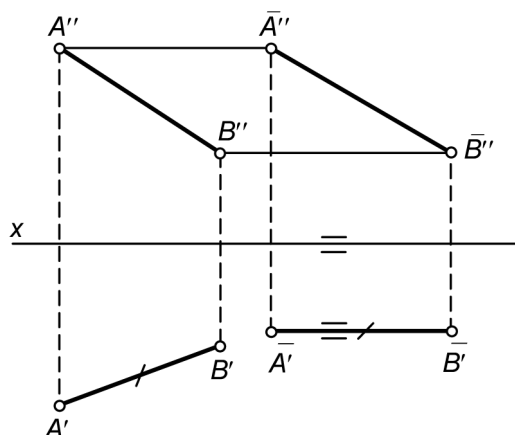


Рис. 5.12. Определение натуральной величины отрезка AB и угла его наклона к плоскости π_1 методом плоскопараллельного перемещения

Пример 13. Методом плоскопараллельного перемещения определить натуральную величину треугольника ABC (рис. 5.13).

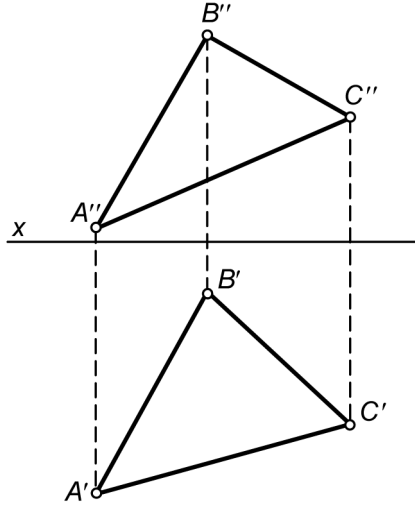


Рис. 5.13. Исходные проекции треугольника ABC

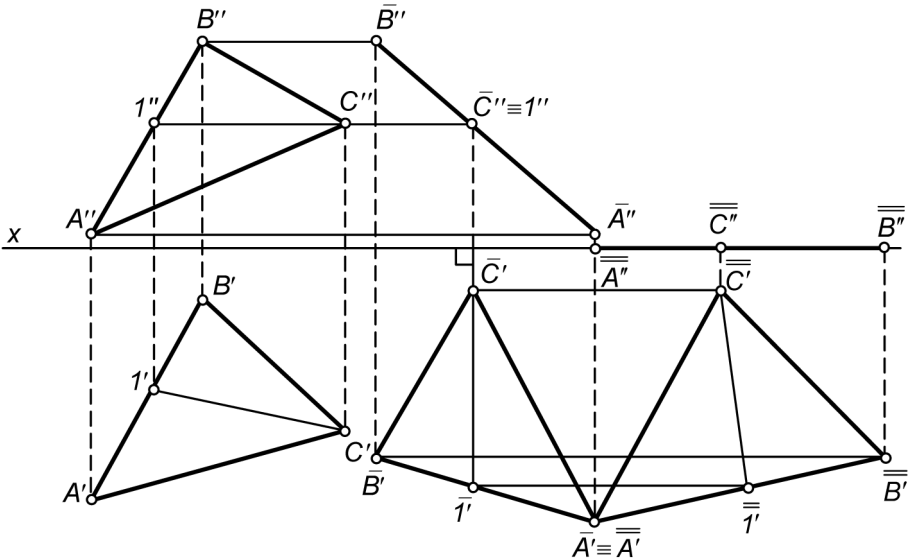


Рис. 5.14. Определение натуральной величины треугольника ABC

1. Задача решается в два приема. Сначала плоскость треугольника ABC преобразуем в положение, перпендикулярное фронтальной плоскости проекций, и она станет

фронтально-проецирующей (рис. 5.14). В этом положении горизонтальная проекция горизонтали $C1$ плоскости треугольника примет положение, перпендикулярное оси x , а на фронтальную плоскость проекций треугольник ABC спроецируется в виде отрезка прямой $\overline{A''} \overline{A''} \overline{N''}$. Горизонтальные проекции треугольников $A'B'C'$ и $\overline{A'} \overline{A'} \overline{N'}$ равны, а место расположения проекции треугольника $\overline{A'} \overline{A'} \overline{N'}$ — произвольное.

- 2. Затем плоскость треугольника ABC поворачиваем в положение, параллельное горизонтальной плоскости проекций (в нашем случае $\overline{A''} \overline{A''} \overline{N''} \in x$). Горизонтальная проекция треугольника $\overline{A'} \overline{A'} \overline{N'}$ будет его натуральной величиной.

5.2.4. Вращение вокруг оси, параллельной плоскости проекций

В этом случае в качестве оси вращения принимают горизонтальную или фронтальную прямую (горизонталь или фронталь плоскости).

Рассмотрим вращение точки A вокруг произвольной горизонтальной прямой h (рис. 5.15, а). Отметим на плоскости π_2 след этой прямой $N \equiv N''$, на оси x найдем N' . Затем построим горизонтальную проекцию этой прямой $h' \parallel h$ и фронтальную проекцию — $h'' \parallel x$. Точка A будет вращаться в плоскости γ , перпендикулярной оси вращения h и, следовательно, являющейся горизонтально-проецирующей плоскостью.

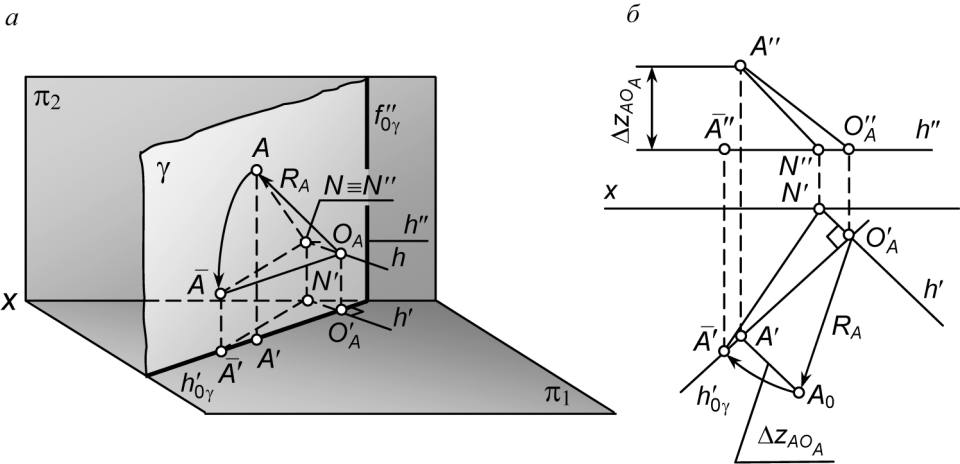


Рис. 5.15. Вращение точки A вокруг горизонтальной прямой h в аксонометрии (а) и на эюре (б)

В пересечении горизонтального следа плоскости вращения γ и h' отметим горизонтальную проекции центра вращения O'_A и по линии связи — O_A . Соединим точ-

ку A с центром O_A — это радиус вращения точки A . Повернем точку A так, чтобы отрезок AO_A , равный радиусу вращения R_A , занял положение, параллельное горизонтальной плоскости проекций. Тогда на эту плоскость отрезок спроецируется без искажения.

Изобразим вращение точки A на эюре (рис. 5.15, б). Радиус вращения точки A как на горизонтальную (отрезок $A'O'_A$), так и на фронтальную (отрезок $A''O''_A$) плоскости проекций проецируется с искажением. Определим натуральную величину радиуса вращения методом прямоугольного треугольника, одним катетом которого является проекция $A'O'_A$, а вторым — разность координат по оси Z — ΔZ_{AO_A} . Гипотенуза построенного прямоугольного треугольника $A'O'_AA_0$ — натуральная величина радиуса вращения точки A .

Новое положение точки $\bar{A}'$ должно находиться на следе $h'_{0\gamma}$ на расстоянии R_A от проекции центра вращения O'_A . Как правило, этот отрезок переносят на след при помощи дуги окружности с центром в точке O'_A .

Рассмотрим треугольник ANO_A (см. рис. 5.15, а). При его вращении вокруг горизонтали h в положение $\bar{A}NO_A$ он окажется параллельным плоскости π_1 . Следовательно, его проекция $\bar{A}'N'O'_A$ будет его натуральной величиной. И на эюре (см. рис. 5.15, б) треугольник $\bar{A}'N'O'_A$ выражает натуральную величину треугольника ANO_A .

Таким образом, любую плоскую фигуру можно повернуть вокруг горизонтали в положение, параллельное горизонтальной плоскости проекций, и получить ее натуральную величину.

Рассмотрим определение натуральной величины треугольника ABC (рис. 5.16). В качестве оси вращения выберем любую горизонталь плоскости треугольника ABC , например проходящую через вершину C ($C''1'' \parallel x$).

При решении задачи будем руководствоваться основными положениями способа вращения:

- ♦ точки C и 1 , расположенные на оси вращения, своего положения в пространстве не изменяют;
- ♦ вершины A и B перемещаются в плоскостях γ_A и γ_B , перпендикулярных оси вращения и являющихся в нашем примере горизонтально-проецирующими. (Таким образом, следы плоскостей вращения $h'_{0\gamma_A}$ и $h'_{0\gamma_B}$ перпендикулярны горизонтальной проекции оси вращения $C'1'$.)

Поскольку ось вращения $C1$ параллельна горизонтальной плоскости проекций, новые положения точек A и B будут находиться на следах плоскостей вращения — соответственно на $h'_{0\gamma_A}$ и $h'_{0\gamma_B}$. Точки O_A и O_B (O'_A, O''_A и O'_B, O''_B) — центры вращения вершин треугольника A и B — лежат в пересечении горизонтальных следов плоскостей вращения с осью вращения. Радиусы вращения вершин A и B проецируются на плоскости проекций π_1 и π_2 с искажением. Для построения нового положения точки B (точки $\bar{B}'$) достаточно методом прямоугольного треугольника найти натуральную величину радиуса вращения R_B ($R_B = O'_BB_0$) и отложить его на

горизонтальном следе плоскости вращения $h'_{0\gamma_B}$. По построению проекция $\bar{A}'$ находится в пересечении прямой $\bar{B}' 1'$ и следа $h'_{0\gamma_A}$.

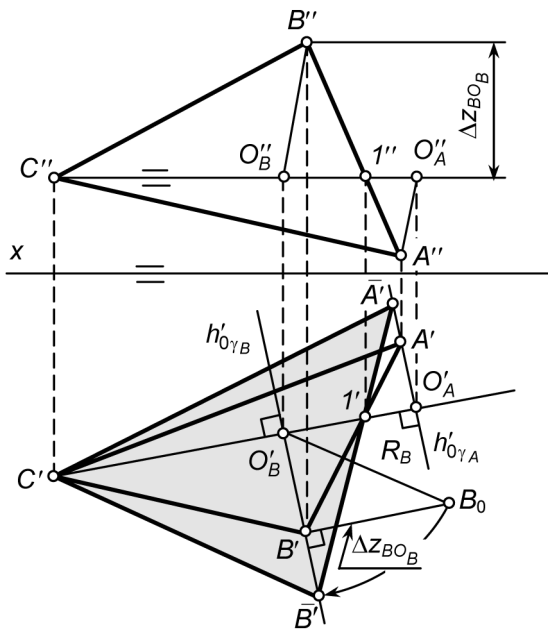


Рис. 5.16. Определение натуральной величины треугольника ABC вращением вокруг горизонтали

Фигура $\bar{A}'\bar{B}'C'$ — натуральная величина заданного треугольника. Аналогично рассмотренному примеру плоскую фигуру можно повернуть и вокруг фронтали, чтобы она оказалась параллельной плоскости π_2 . Тогда преобразованная фронтальная проекция фигуры окажется в натуральную величину.

**5.2.5. Способ совмещения
(вращение плоскости вокруг одного из ее следов)**

Этот способ является частным случаем способа вращения вокруг оси, параллельной плоскости проекций, при котором осью вращения является один из следов плоскости. Цель вращения — совместить заданную плоскость и расположенные в ней геометрические элементы с соответствующей плоскостью проекций. Тем самым можно определить истинные размеры и форму этих элементов. При помощи способа совмещения можно решать и обратные задачи: строить проекции геометрических фигур, лежащих в заданной плоскости, по их истинным размерам и соответствующей точке привязки на плоскости.

Для совмещения плоскости общего положения с плоскостью проекций достаточно совместить с ней одну точку. Совместим плоскость α с горизонтальной плоскостью проекций. При этом положение горизонтального следа $h'_{0\alpha}$, являющегося осью вращения, и точки схода следов X_α не изменится. Подобное преобразование можно провести двумя приемами.

♦ *Первый прием* (рис. 5.17, а). Для определения совмещенного с горизонтальной плоскостью проекций положения фронтального следа $f'_{0\alpha}$ выберем на нем произвольную точку N . Эта точка в процессе вращения будет перемещаться в плоскости γ , перпендикулярной оси вращения — следу $h'_{0\alpha}$. В пересечении следов $h'_{0\alpha}$ и $h'_{0\gamma}$ найдем точку O'_N — горизонтальную проекцию центра вращения точки N . Натуральную величину R_N радиуса вращения этой точки определяем методом прямоугольного треугольника и откладываем ее на следе $h'_{0\gamma}$. Через точку $\bar{N}'$ и точку схода следов X_α проводим совмещенный с горизонтальной плоскостью проекций фронтальный след плоскости $\bar{f}'_{0\alpha}$.

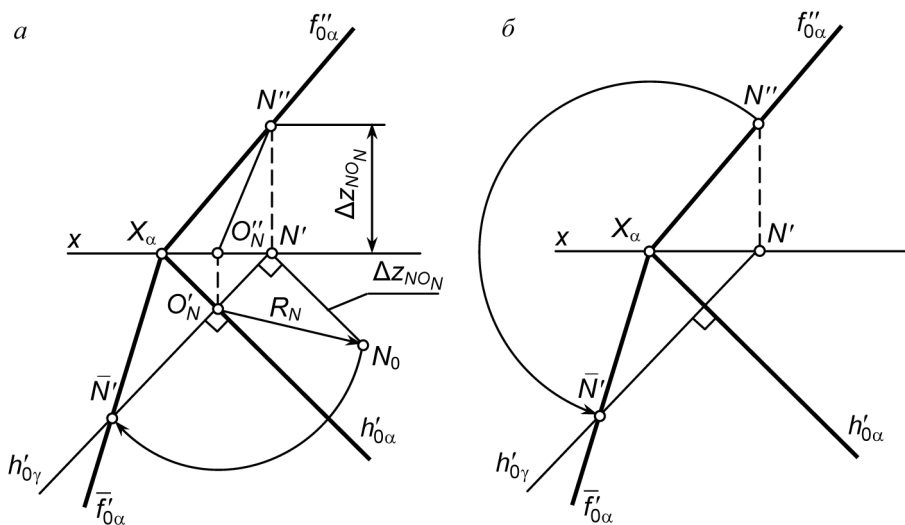


Рис. 5.17. Совмещение плоскости α с горизонтальной плоскостью проекций

♦ *Второй прием* — более простой (рис. 5.17, б). Так же как и в первом случае, на следе $f'_{0\alpha}$ выберем произвольную точку N и построим след плоскости вращения этой точки $h'_{0\gamma}$. Точка $\bar{N}'$, через которую пройдет след $\bar{f}'_{0\alpha}$, найдена на пересечении дуги радиуса $X_\alpha N''$ с горизонтальным следом $h'_{0\gamma}$.

Совместим произвольную точку A плоскости α с горизонтальной плоскостью проекций (рис. 5.18). Через точку A проводим горизонталь a :

$$a' \parallel x, a' \parallel h'_{0\alpha}.$$

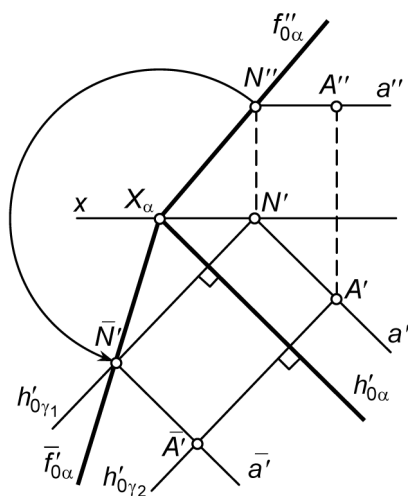


Рис. 5.18. Совмещение точки A , лежащей в плоскости α , с горизонтальной плоскостью проекций

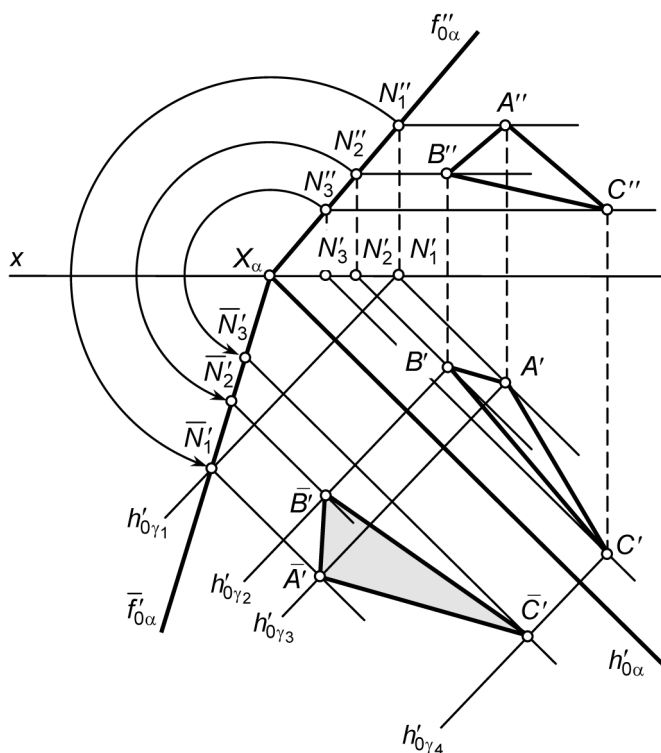


Рис. 5.19. Определение натуральной величины треугольника ABC , лежащего в плоскости α , путем совмещения с плоскостью π_1

Определяем совмещенное с горизонтальной плоскостью проекций положение фронтального следа плоскости $\bar{f}'_{0\alpha}$. Горизонталь $\bar{a}$ в совмещенном положении будет также параллельна горизонтальному следу плоскости:

$$\bar{a}' \parallel h'_{0\alpha}.$$

В свою очередь, проекция совмещенного положения точки A (точка $\bar{A}'$) находится в пересечении горизонтали $\bar{a}'$ со следом плоскости вращения $h'_{0\gamma_2}$.

Рассмотрим пример использования способа совмещения при определении натуральной величины плоской фигуры — треугольника ABC , лежащего в плоскости общего положения α (рис. 5.19). Аналогично ранее рассмотренным примерам построим совмещенное с горизонтальной плоскостью проекций положение фронтального следа $\bar{f}'_{0\alpha}$ плоскости α . Затем проводим горизонтали, проходящие через вершины треугольника, сначала — в пространстве, а затем — в совмещенном с плоскостью π_1 положении (горизонтальные проекции горизонталей будут параллельны горизонтальному следу $h'_{0\alpha}$).

Вершины треугольника $\bar{A}'$, $\bar{B}'$ и $\bar{C}'$ находим на пересечении горизонтальных следов плоскостей вращения $h'_{0\gamma_2}$, $h'_{0\gamma_3}$ и $h'_{0\gamma_4}$ проходящих через точки A' , B' и C' и перпендикулярных горизонтальному следу $h'_{0\alpha}$, с соответствующими горизонталями. Треугольник $\bar{A}'\bar{B}'\bar{C}'$ есть натуральная величина заданного треугольника.

5.3. Метод перемены плоскостей проекций

5.3.1. Основы метода перемены плоскостей проекций

Метод перемены плоскостей проекций заключается в том, что положение проецируемых геометрических элементов в пространстве остается неизменным, а в существующую систему плоскостей проекций вводится одна (или несколько) плоскостей проекций, по отношению к которой та или иная геометрическая фигура будет занимать какое-либо частное положение. Новые проекции точек при введении дополнительных плоскостей проекций обозначают римскими цифрами: например, A^{IV} — проекция точки A на дополнительной плоскости π_4 ; A^{V} — проекция точки A на дополнительной плоскости π_5 и т. д.

Пусть задана точка A с проекциями A' и A'' в системе плоскостей проекций π_1/π_2 (рис. 5.20, а). Строим проекции этой точки в новой системе π_1/π_4 , где дополнительная плоскость проекций π_4 так же, как и плоскость π_2 , перпендикулярна плоскости π_1 . Опустив из точки A перпендикуляр на плоскость π_4 , получаем новую проекцию точки A (точку A^{IV}).

Отметим, что расстояние от точки A до плоскости π_1 в старой и в новой системах одинаковы, т. е.

$$|AA'| = |A''A_x| = |A^{IV}A_{x_1}| = z_A.$$

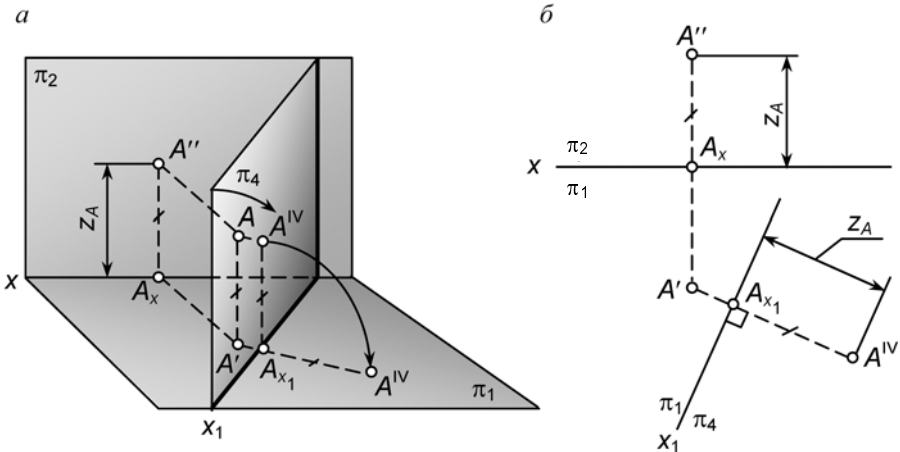


Рис. 5.20. Введение дополнительной плоскости проекций π_4 , перпендикулярной плоскости π_1 , в аксонометрии (а) и на эпюре (б)

Для получения эпюра (рис. 5.20, б) плоскость π_4 вращением вокруг оси проекций X_1 совмещаем с плоскостью π_1 , а затем — с плоскостью чертежа. Оси проекций на эпюре принято дополнительно отмечать в виде дроби, числитель и знаменатель которой — плоскости проекций, пересекающихся по этой оси. Считается, что дробная черта лежит на самой оси, причем обозначения плоскостей ставят со стороны видимых проекций. Например, ось x обозначают как

$$\frac{\pi_2}{\pi_1}.$$

Для построения проекции A^{IV} на эпюре достаточно из проекции A' провести перпендикуляр к новой оси X_1 и от точки A_{x_1} отложить расстояние, равное координате z_A точки A ($z_A = A''A_x$).

Дополнительная плоскость проекций π_4 может быть выбрана и перпендикулярной плоскости π_2 (рис. 5.21). Тогда плоскость π_4 вращением вокруг новой оси проекций X_1 совмещаем с π_2 , которую и принимаем за плоскость чертежа. При этом расстояния от точки A до плоскости π_2 в предыдущей и в новой системе плоскостей проекций одинаковы, т. е.

$$|AA''| = |A'A_x| = |A^{IV}A_{x_1}| = y_A.$$

При помощи метода перемены плоскостей проекций значительно упрощается решение задач, связанных с определением расстояний и углов между геометрическими объектами.

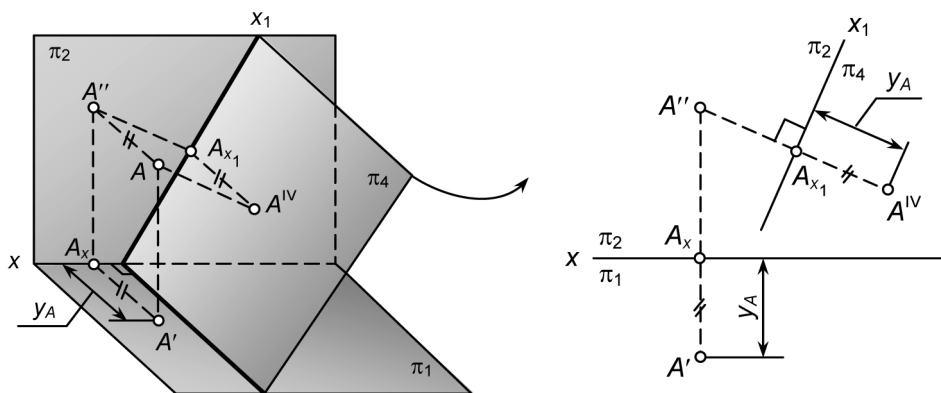


Рис. 5.21. Введение дополнительной плоскости проекций π_4 , перпендикулярной плоскости π_2 , в аксонометрии (а) и на эпюре (б)

5.3.2. Примеры решения задач методом перемены плоскостей проекций

Задачи, решаемые на основе метода перемены плоскостей проекций, подразделяют на четыре основных типа.

Задача 1. Выполнить преобразования так, чтобы прямая общего положения стала параллельна плоскости проекций.

Введем плоскость проекций π_4 , параллельную заданной прямой и перпендикулярную одной из имеющихся плоскостей проекций, например, плоскости π_1 (рис. 5.22, а):

$$\pi_4 \perp \pi_1; \pi_4 \parallel AB.$$

Выполняем переход от системы плоскостей π_1/π_2 к системе π_1/π_4 . На эпюре новая ось проекций X_1 будет параллельна горизонтальной проекции отрезка AB . Вычерчиваем эту ось в любом месте чертежа с условием

$$X_1 \parallel A'B'.$$

Для построения проекций точек A и B на плоскости π_4 из их горизонтальных проекций проводим линии проекционных связей перпендикулярно оси X_1 , на которых откладываем координаты Z соответствующих точек:

$$|A''A_x| = |A^{IV}A_{x_1}|; |B''B_x| = |B^{IV}B_{x_1}|.$$

Соединяем проекции A^{IV} и B^{IV} . Итак, введением дополнительной плоскости мы достигли следующего:

- ✧ прямая AB стала параллельна новой плоскости проекций π_4 (по отношению к ней она является прямой уровня);
- ✧ отрезок $A^{IV}B^{IV}$ равен натуральной величине отрезка AB ;

- ♦ угол φ_1 между новой проекцией отрезка и осью x_1 будет углом наклона прямой AB к плоскости π_1 .

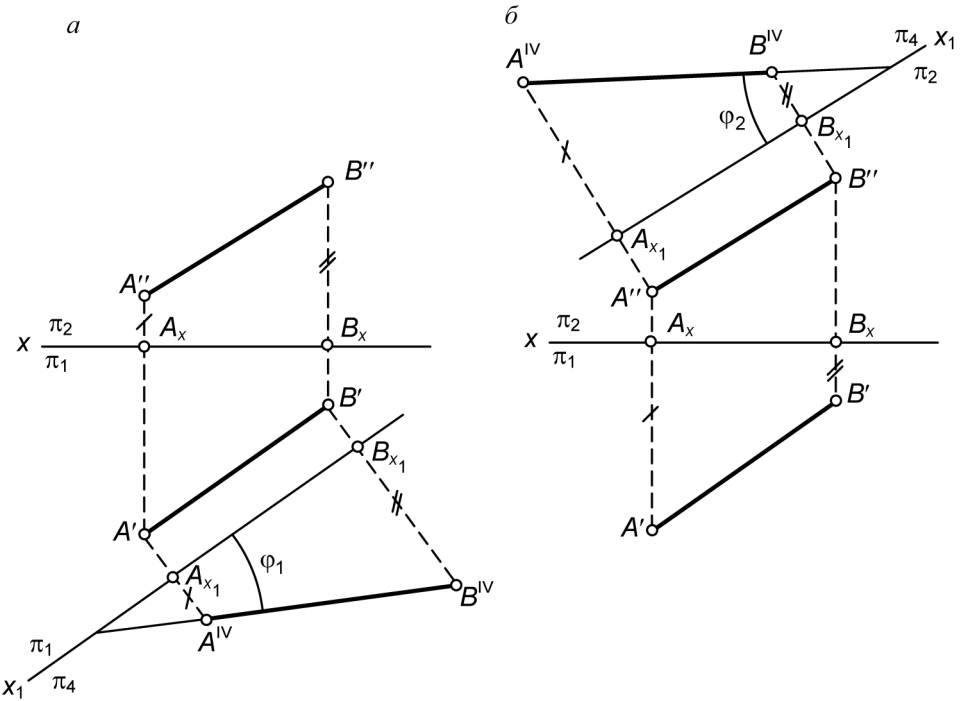


Рис. 5.22. Преобразование прямой общего положения в прямую, параллельную плоскости проекций, в системе π_1/π_4 (а) и в системе π_2/π_4 (б)

Подобным образом можно перейти и к системе π_2/π_4 (рис. 5.22, б). Вводим новую плоскость проекций π_4 из условия

$$\pi_4 \perp \pi_2; \pi_4 \parallel AB.$$

Строим новую ось

$$x_1 \parallel A''B''$$

и новые проекции точек A и B на плоскости π_4 . Для этого по линии проекционных связей, проведенных из фронтальных проекций A'' и B'' перпендикулярно оси x_1 , откладываем координаты y соответствующих точек. Отрезок $A''B''$ будет натуральной величиной отрезка AB , а угол φ_2 — углом наклона к плоскости π_2 .

Задача 2. Выполнить преобразования так, чтобы прямая общего положения стала перпендикулярна плоскости проекций.

Для преобразования прямой общего положения в прямую, перпендикулярную плоскости проекций, надо ввести две новые плоскости проекций: первую — параллельно прямой (как в предыдущей задаче), а вторую — перпендикулярно ей.

Введение первой плоскости проекций π_4 по схеме $\pi_4 \perp \pi_1$ и $\pi_4 \parallel AB$ нам уже знакомо (рис. 5.23). Вводим еще одну плоскость проекций π_5 , переходя от системы π_1/π_4 к системе π_4/π_5 . Новую плоскость π_5 выбираем перпендикулярно π_4 и, кроме того, перпендикулярно AB .

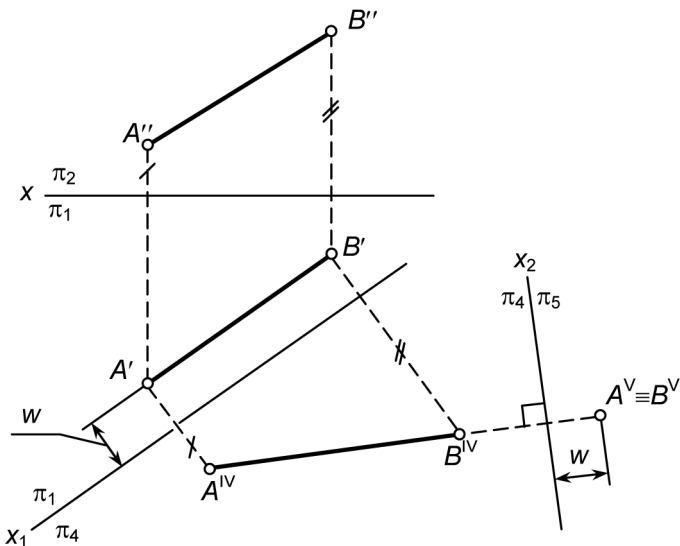


Рис. 5.23. Преобразование прямой общего положения в прямую, перпендикулярную плоскости проекций

В любом месте чертежа строим новую ось X_2 так, что

$$X_2 \perp A^{IV}B^{IV}.$$

Линии проекционной связи, проведенные из A^{IV} и B^{IV} , будут совпадать с проекцией $A^{IV}B^{IV}$. Откладывая от новой оси X_2 на линии связи отрезок w , равный глубине точек прямой AB относительно плоскости π_4 , получим проекцию прямой на плоскости π_5 в виде точки $A^V \equiv B^V$.

Таким образом, после второго преобразования прямая AB стала перпендикулярна плоскости π_5 или, говоря другими словами, стала проецирующей по отношению к ней прямой.

Задача 3. Выполнить преобразования так, чтобы плоскость общего положения стала перпендикулярна плоскости проекций.

Сначала рассмотрим плоскость общего положения α , заданную следами (рис. 5.24).

Введем новую плоскость проекций π_4 так, чтобы по отношению к ней плоскость α стала проецирующей плоскостью:

$$\pi_4 \perp \pi_1; \pi_4 \perp \alpha.$$

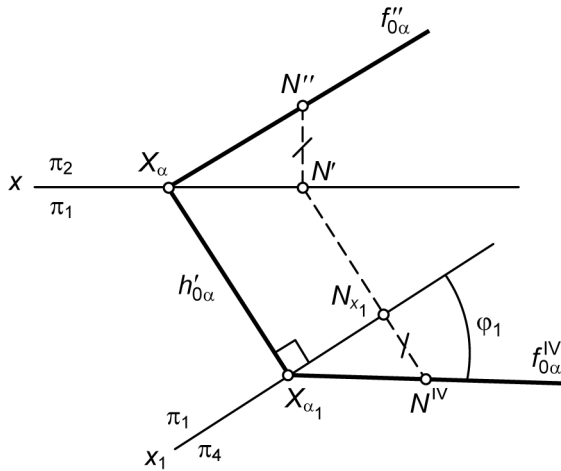


Рис. 5.24. Преобразование плоскости α общего положения в плоскость, перпендикулярную плоскости проекций

Если плоскость α является проецирующей по отношению к новой плоскости проекций π_4 , то на эюре горизонтальный след $h'_{0\alpha}$ должен быть перпендикулярен новой оси проекций x_1 (ось x_1 строим в любом месте чертежа, так, чтобы она оказалась перпендикулярной следу $h'_{0\alpha}$). В пересечении $h'_{0\alpha}$ и оси x_1 получаем точку схода следов X_{α_1} .

Для построения второго следа плоскости α в системе проекций π_1/π_4 выбираем произвольную точку N , лежащую на фронтальном следе плоскости α

$$N'' \in f''_{0\alpha}; N' \in X,$$

и строим ее проекцию N^{IV} в системе π_1/π_4 :

$$|N''N'| = |N_{x_1}N^{IV}|.$$

Через точку схода X_{α_1} следов и N^{IV} проводим новый фронтальный след $f^{IV}_{0\alpha}$ плоскости α . Плоскость α стала проецирующей по отношению к новой плоскости проекций π_4 , а угол φ_1 между следом $f^{IV}_{0\alpha}$ и новой осью x_1 равен углу наклона плоскости α к плоскости проекций π_1 .

Теперь перейдем к варианту, когда плоскость задана в виде плоской фигуры — треугольника ABC (рис. 5.25). Перед тем как ввести новую плоскость проекций, сначала выполним вспомогательные построения, а именно проведем в плоскости треугольника ABC горизонталь $A1$:

$$A''1'' \parallel x; 1' \in B'C'.$$

Переходим от системы проекций π_1/π_2 к системе π_1/π_4 таким образом, чтобы горизонталь $A1$ стала перпендикулярна плоскости проекций π_4 . На чертеже строим новую ось x_1 перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали

$$x_1 \perp A'1'.$$

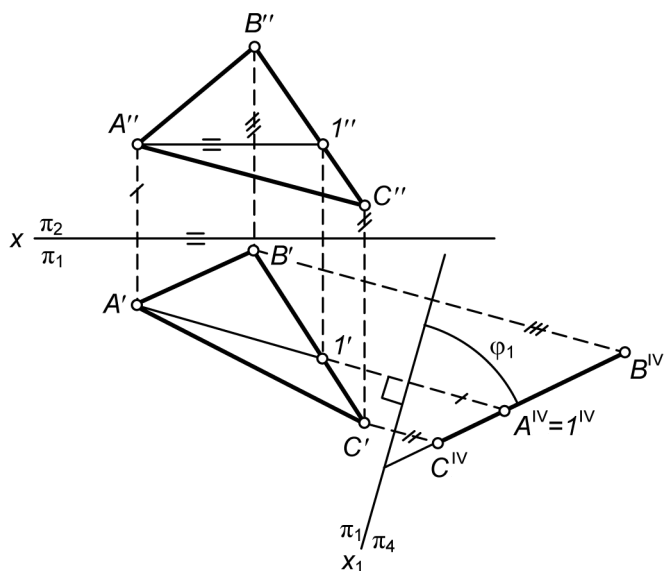


Рис. 5.25. Преобразование плоскости треугольника ABC в плоскость, перпендикулярную плоскости проекций

Перпендикулярно X_1 строим линии проекционных связей и находим положение точек A^{IV} , B^{IV} и C^{IV} , которые должны расположиться на одной прямой. Итак, плоскость треугольника ABC по отношению к плоскости π_4 стала проецирующей, а угол φ_1 , образованный проекцией треугольника и осью X_1 , равен углу наклона плоскости к горизонтальной плоскости проекций.

Задача 4. Выполнить преобразования так, чтобы плоскость общего положения стала параллельна плоскости проекций.

Такое преобразование выполняется введением двух новых плоскостей проекций: первая плоскость должна быть перпендикулярна заданной плоскости, а вторая — параллельна.

Сначала так же, как в предыдущей задаче, переходим от системы π_1/π_2 к системе π_1/π_4 таким образом, чтобы плоскость треугольника ABC стала перпендикулярна вводимой плоскости π_4 (рис. 5.26). Вводим дополнительную плоскость проекций π_4 по следующей схеме:

$$\pi_4 \perp \pi_1; \pi_4 \perp (\Delta ABC).$$

Для этого в плоскости треугольника проводим горизонталь $A1$ ($A''1'' \parallel X$) и строим новую ось проекций X_1 так, чтобы она оказалась перпендикулярной горизонтальной проекции горизонтали:

$$X_1 \perp A'1'.$$

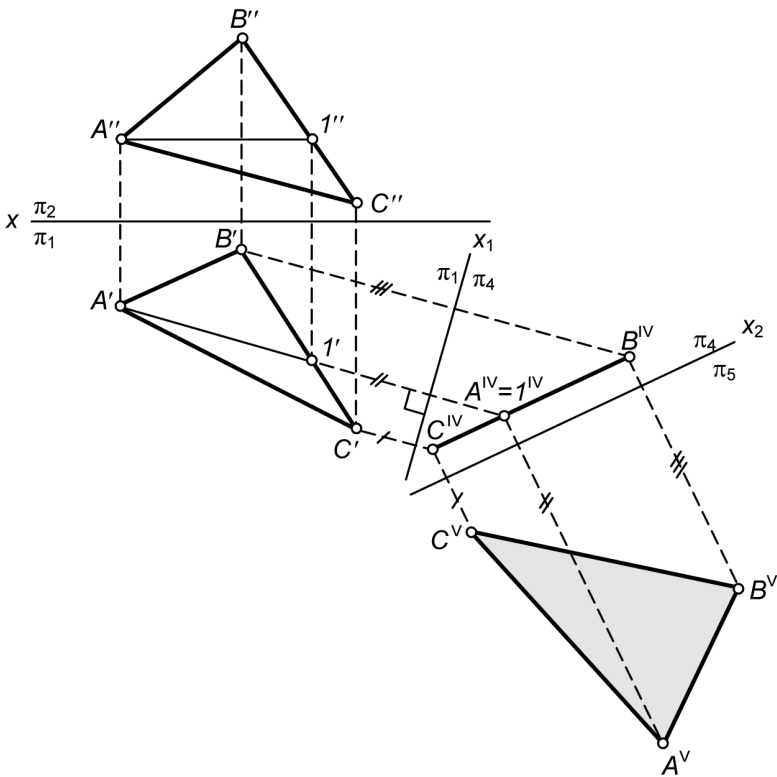


Рис. 5.26. Преобразование плоскости треугольника ABC в плоскость, параллельную плоскости проекций

Поскольку плоскость треугольника ABC перпендикулярна π_4 , он спроецируется на эту плоскость в виде отрезка прямой линии ($C^{IV}B^{IV}$).

Теперь вводим вторую дополнительную плоскость проекций π_5 , перпендикулярную плоскости π_4 и параллельную плоскости треугольника ABC :

$$\pi_5 \perp \pi_4; \pi_5 \parallel (\Delta ABC).$$

Ось проекций x_2 проводим параллельно $C^{IV}B^{IV}$. Строим проекции вершин треугольника на плоскости π_5 . Поскольку плоскость проекций π_5 параллельна плоскости треугольника, на нее треугольник спроецируется без искажения. Треугольник $A^V B^V C^V$ — натуральная величина заданного треугольника.

Пример 14. Определить расстояние от точки A до прямой BC (рис. 5.27).

1. Применяем вторую задачу преобразования чертежа. Вводим дополнительную плоскость проекций π_4 перпендикулярно π_1 так, чтобы она была параллельна прямой BC (рис. 5.28):

$$\pi_4 \perp \pi_1; \pi_4 \parallel BC.$$

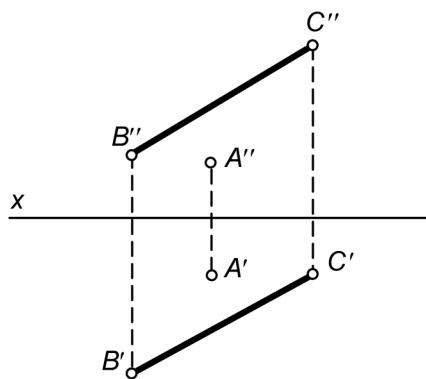


Рис. 5.27. Исходные проекции точки A и прямой BC

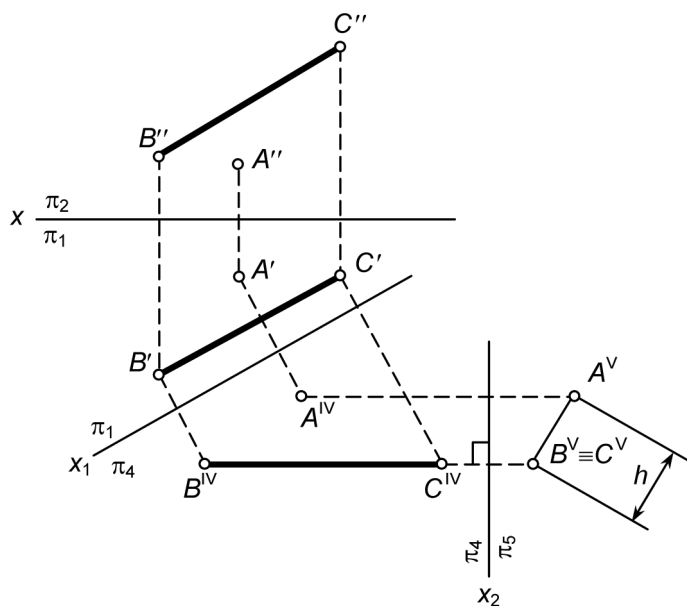


Рис. 5.28. Определение расстояния от точки A до прямой BC

2. Проводим новую ось x_1 параллельно горизонтальной проекции $B'C'$ и строим проекции точки A (A^{IV}) и прямой BC ($B^{IV}C^{IV}$) на плоскости π_4 .
3. После этого вводим вторую дополнительную плоскость проекций π_5 :

$$\pi_5 \perp \pi_4; \pi_5 \perp BC.$$
4. На эюре новая ось x_2 перпендикулярна $B^{IV}C^{IV}$. Прямая BC спроецируется на плоскости π_5 в точку $B^V \equiv C^V$. Поэтому расстояние от проекции A^V до проекции $B^V \equiv C^V$ и будет искомым расстоянием h между точкой A и прямой BC .

Пример 15. Построить общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых AB и CD (рис. 5.29).

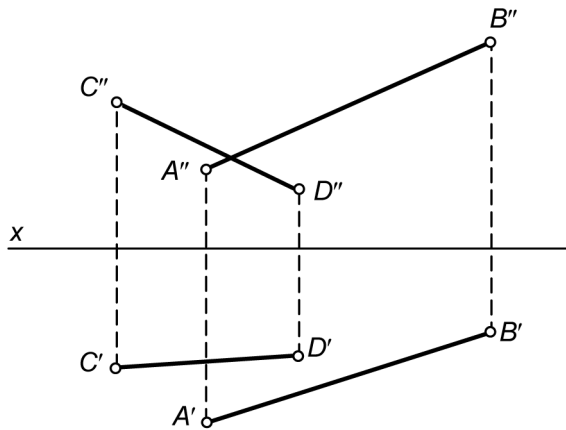


Рис. 5.29. Исходные проекции скрещивающихся прямых AB и CD

1. Среди бесчисленного множества прямых, перпендикулярных к двум данным скрещивающимся прямым, имеется только один общий перпендикуляр, пересекающий эти прямые. Отрезок между точками пересечения определяет в то же время кратчайшее расстояние между прямыми. Задача сводится к тому, чтобы ввести дополнительную плоскость проекций в положение, перпендикулярное одной из заданных прямых.
2. Применяем вторую задачу преобразования чертежа. Вводим первую дополнительную плоскость проекций π_4 таким образом, чтобы эта плоскость была перпендикулярна плоскости π_1 (или π_2) и параллельна одной из заданных прямых, например, прямой AB (рис. 5.30):

$$\pi_4 \perp \pi_1; \pi_4 \parallel AB.$$

3. На эпюре вычерчиваем новую ось проекций параллельно горизонтальной проекции прямой AB :

$$x_1 \parallel A'B'.$$

Строим проекции заданных прямых на плоскости π_4 ($A^{\text{IV}}B^{\text{IV}}$ и $C^{\text{IV}}D^{\text{IV}}$).

4. Вводим вторую дополнительную плоскость проекций π_5 таким образом, чтобы вводимая плоскость была перпендикулярной плоскости π_4 и прямой AB :

$$\pi_5 \perp \pi_4; \pi_5 \perp AB.$$

5. На эпюре строим новую ось перпендикулярно проекции $A^{\text{IV}}B^{\text{IV}}$:

$$x_2 \perp A^{\text{IV}}B^{\text{IV}}.$$

Строим проекции прямых AB и CD на плоскости π_5 ($A^{\text{V}}B^{\text{V}}$ и $C^{\text{V}}D^{\text{V}}$). При этом прямая AB спроецируется в точку $A^{\text{V}} \equiv B^{\text{V}}$. Перпендикуляр, опущенный из этой точки на отрезок $C^{\text{V}}D^{\text{V}}$, и будет общим перпендикуляром к заданным

скрещивающимися прямыми AB и CD , а расстояние h — натуральной величиной расстояния между этими прямыми.

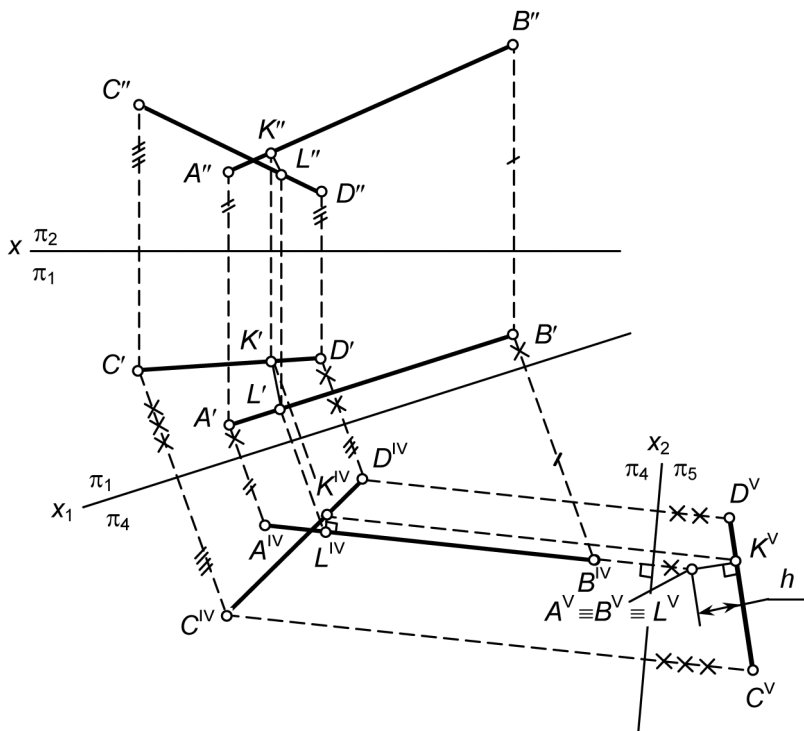


Рис. 5.30. Построение общего перпендикуляра двух скрещивающихся прямых AB и CD

6. Полученное решение можно дополнить построением проекций перпендикуляра KL на плоскостях проекций π_4 , π_1 и π_2 . Построения проекций точки K ($K \in CD$) выполняются обратным ходом:

$$K^V \rightarrow K^{IV} \rightarrow K' \rightarrow K'' \quad (K^V \in C^V D^V; K^{IV} \in C^{IV} D^{IV}; K' \in C' D'; K'' \in C'' D'').$$

Чтобы построить проекцию точки L ($L \in AB$) на плоскости π_4 (L^{IV}), надо из K^{IV} опустить перпендикуляр к $A^{IV} B^{IV}$ и далее

$$L^{IV} \rightarrow L' \rightarrow L'' \quad (L^{IV} \in A^{IV} B^{IV}; L' \in A' B'; L'' \in A'' B'').$$

Пример 16. Определить натуральную величину расстояния от точки K до плоскости, заданной треугольником ABC (рис. 5.31).

1. Применяем третью задачу преобразования чертежа. В плоскости треугольника строим горизонталь $A1$ (рис. 5.32):

$$A''1'' \parallel x; 1' \in B'C'.$$

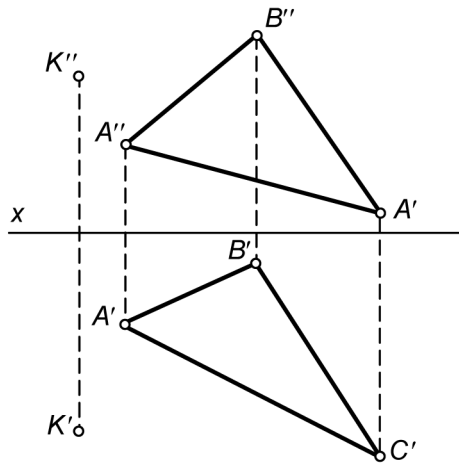


Рис. 5.31. Исходные проекции точки *K* и треугольника *ABC*

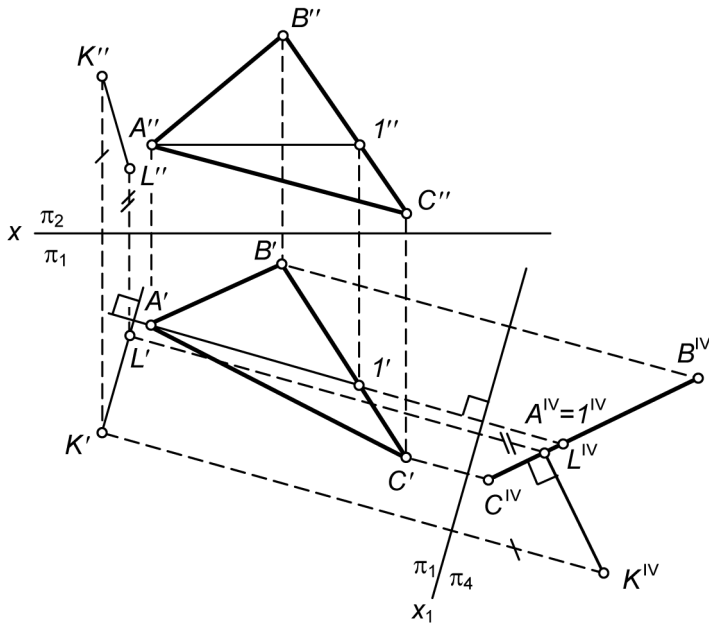


Рис. 5.32. Определение расстояния от точки *K* до плоскости треугольника *ABC*

2. Вводим дополнительную плоскость проекций π_4 так, чтобы плоскость треугольника *ABC* оказалась перпендикулярной новой плоскости. В любом месте чертежа строим ось x_1 проекций

$$x_1 \perp A'1'.$$

3. Поскольку плоскость треугольника ABC перпендикулярна π_4 , он спроецируется на эту плоскость в виде отрезка прямой линии ($A^{IV}B^{IV}$). Построив проекцию точки K на плоскости π_4 (K^{IV}) и опустив из нее перпендикуляр к прямой $A^{IV}B^{IV}$, получим отрезок $K^{IV}L^{IV}$, равный искомому расстоянию.
4. Решение можно дополнить построением проекций перпендикуляра KL на плоскостях π_1 и π_2 . Построения проекций точки L — основания перпендикуляра — выполняются обратным ходом:
 - ♦ точка L' лежит в пересечении линии проекционной связи, проведенной из L^{IV} перпендикулярно x_1 , и горизонтальной проекции перпендикуляра, опущенной из K' перпендикулярно $A'1'$;
 - ♦ точка L'' лежит на линии связи, проведенной из L' , на расстоянии z_L от оси x (это расстояние берется с проекций на плоскости π_4).

5.4. Определение натуральной величины углов

5.4.1. Произвольный плоский угол

О проецировании плоского угла было рассказано в разд. 3.3. Как уже отмечалось, в общем случае плоский угол проецируется с искажением. Теперь рассмотрим нахождение натуральной величины плоского угла.

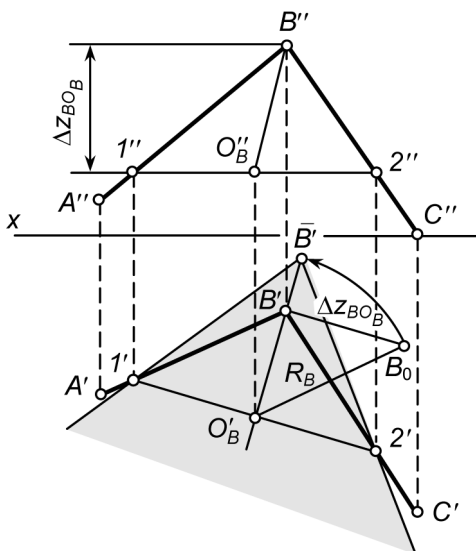


Рис. 5.33. Определение натуральной величины плоского угла ABC

Несколько приемов определения натуральной величины плоской фигуры рассматривалось ранее. Этими же методами можно определить и величину плоского угла. Предлагаем теперь определить угол методом вращения вокруг горизонтали.

Пусть дан угол ABC (рис. 5.33). Вращением вокруг горизонтали повернем угол в положение, параллельное плоскости π_1 . Тогда угол в своей горизонтальной проекции изобразится без искажения.

В плоскости угла проведем горизонталь 12 . Поворот треугольника $1B2$ вокруг горизонтали 12 сводится к повороту одной вершины — точки B . Из B' проведем перпендикулярно $1'2'$ след плоскости вращения этой точки, и в пересечении следа и оси вращения $1'2'$ получаем проекцию центра вращения O'_B . Натуральную величину радиуса вращения R_B получаем при построении прямоугольного треугольника $B'O'_B B_0$, в котором катет $B'O'_B$ представляет собой горизонтальную проекцию радиуса вращения, а катет $B'B_0$ — разницу координат между точками B и O_B по оси Z (Δz_{BO_B}). Точку $\bar{B}'$ соединяем с $1'$ и $2'$ — горизонтальными проекциями точек, расположенных на оси вращения и принадлежащих сторонам угла. Новая горизонтальная проекция $1'\bar{B}'2'$ равна заданному углу ABC .

5.4.2. Угол между прямой и плоскостью

Угол между прямой и плоскостью определяется углом между прямой и ее проекцией на эту плоскость, т. е. углом φ_1 (рис. 5.34). В случаях, когда требуется определить лишь величину этого угла, построение его проекций не является необходимым. Угол между прямой TL и плоскостью α можно определить, построив на чертеже угол φ_2 , составленный заданной прямой и перпендикуляром к плоскости, а искомый угол φ_1 определить как дополнительный до 90° :

$$\varphi_1 = 90^\circ - \varphi_2.$$

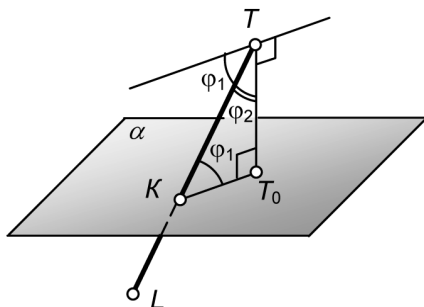


Рис. 5.34. Угол между прямой и плоскостью

Найдем угол между прямой LT и плоскостью α , заданной следами (рис. 5.35).

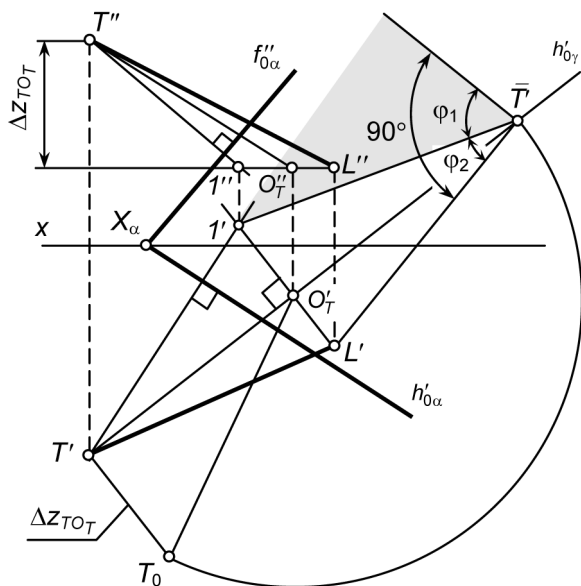


Рис. 5.35. Определение угла между прямой LT и плоскостью α

Проведем из любой точки прямой LT , например, точки T перпендикуляр к плоскости α : фронтальная проекция перпендикуляра перпендикулярна $f''_{0\alpha}$; горизонтальная проекция перпендикуляра перпендикулярна $h'_{0\alpha}$.

В плоскости, заданной прямой LT и перпендикуляром, через любую точку этой плоскости, например, через точку L проводим горизонталь $L1$. Определяем натуральную величину треугольника $1TL$ и, следовательно, натуральную величину угла $1TL$. Вращением вокруг горизонтали $L1$ поворачиваем треугольник $TL1$ в положение, параллельное плоскости π_1 . Вершины L и 1 , лежащие на оси вращения, остаются неподвижными. Необходимо повернуть только точку T . Проводим плоскость вращения точки T — плоскость γ :

$$T' \in h'_{0\gamma}; h'_{0\gamma} \perp 1'L'.$$

Определяем центр вращения O_T (O'_T, O''_T) точки T :

$$O'_T = h'_{0\gamma} \cap 1'L'; O''_T \in 1''L''.$$

Радиус вращения точки T на горизонтальную ($O'_T T'$) и фронтальную ($O''_T T''$) плоскости проекций спроецирован с искажением. Натуральную величину радиуса вращения определим как гипотенузу прямоугольного треугольника $O'_T T' T_0$, катетами которого являются горизонтальная проекция радиуса вращения $O'_T T'$ и разность координат ΔZ_{TOT} . Новое положение точки $\bar{T}'$ находится в пересечении дуги радиуса $O'_T T_0$ с центром в O'_T со следом плоскости вращения точки T — $h'_{0\gamma}$.

Треугольник $\bar{T}'L'1'$ является натуральной величиной треугольника $TL1$, а угол φ_2 — натуральной величиной угла между прямой LT и перпендикуляром к плоскости α . Дополняем угол φ_2 до 90° . Искомый угол между прямой LT и плоскостью α равен углу φ_1 : $\varphi_1 = 90^\circ - \varphi_2$.

5.4.3. Угол между двумя пересекающимися плоскостями

Угол между двумя пересекающимися плоскостями измеряется линейным углом, который образуется прямыми, получающимися в результате пересечения данных плоскостей третьей плоскостью, перпендикулярной к линии их пересечения (рис. 5.36). Этот угол равен углу между перпендикулярами, проведенными из произвольной точки пространства (например, точки K) к данным двум плоскостям.

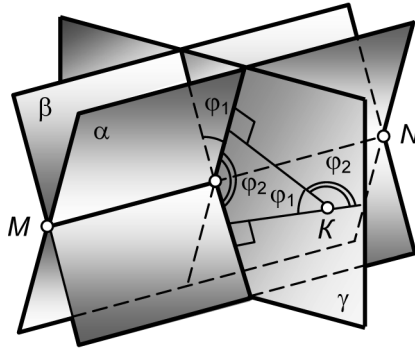


Рис. 5.36. Угол между двумя пересекающимися плоскостями

Считается, что линейный угол двугранного угла должен быть не больше 90° . Следовательно, искомый угол между двумя плоскостями будет равен найденному углу φ_1 , если $\varphi_1 < 90^\circ$, или углу $\varphi_2 = 180^\circ - \varphi_1$, если $\varphi_1 > 90^\circ$.

Определим натуральную величину угла между двумя пересекающимися плоскостями, одна из которых задана следами ($h'_{0\alpha}$ и $f'_{0\alpha}$), а другая — треугольником ABC (рис. 5.37).

Строим проекции перпендикуляров из произвольно выбранной точки K . Для плоскости α проекции перпендикуляров (a' , a'') будут перпендикулярны одноименным следам плоскости ($a' \perp h'_{0\alpha}$ и $a'' \perp f'_{0\alpha}$). Для плоскости, заданной треугольником ABC , предварительно строим проекции горизонтали $C1$ ($C'1'$, $C''1''$) и фронтали $C2$ ($C'2'$, $C''2''$). Горизонтальную проекцию перпендикуляра b' проводим перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали ($b' \perp C'1'$); фронтальную проекцию перпендикуляра b'' — перпендикулярно фронтальной проекции фронтали ($b'' \perp C''2''$).

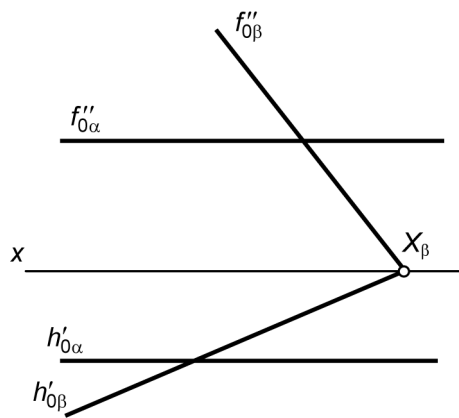


Рис. 5.38. Исходные следы плоскостей α и β

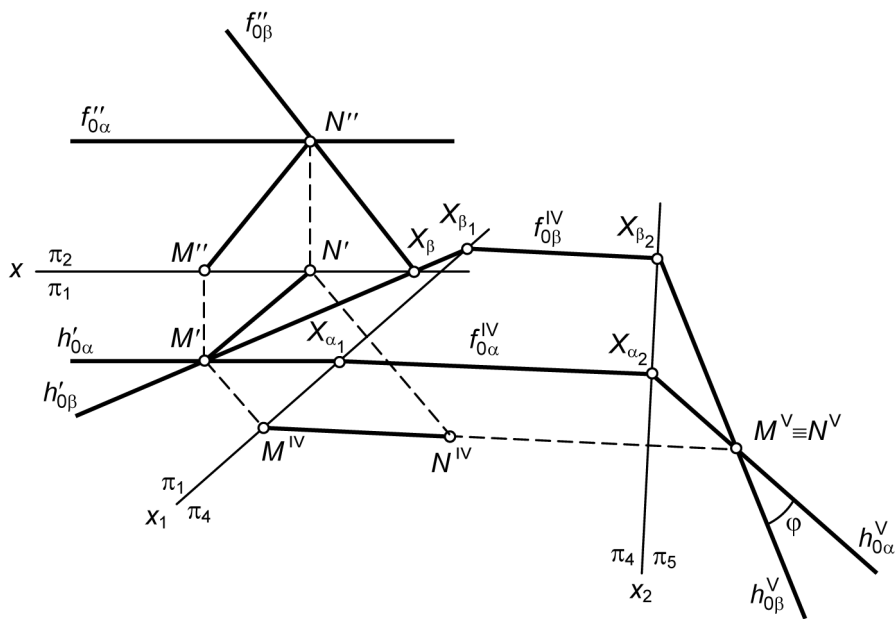


Рис. 5.39. Определение угла между двумя пересекающимися плоскостями α и β

3. На эюре новая ось π_1/π_4 будет параллельна горизонтальной проекции линии пересечения:

$$\pi_1/\pi_4 \parallel M'N'.$$

4. Далее строим проекции линии пересечения MN на плоскости π_4 ($M^{IV}N^{IV}$). Поскольку линия пересечения плоскостей α и β (MN) параллельна плоскости про-

екций π_4 , следы этих плоскостей на данной плоскости проекций будут параллельны ей:

$$f_{0\alpha}^{IV} \parallel f_{0\beta}^{IV} \parallel M^{IV}N^{IV}.$$

5. Вводим вторую дополнительную плоскость проекций — плоскость π_5 таким образом, чтобы линия пересечения плоскостей MN оказалась перпендикулярной вновь вводимой плоскости:

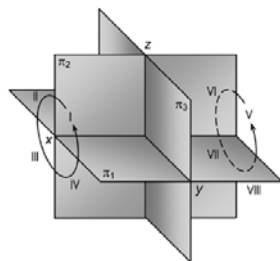
$$\pi_5 \perp \pi_4; \pi_5 \perp MN.$$

На эпюре строим ось π_4/π_5 :

$$\pi_4/\pi_5 \perp M^{IV}N^{IV}.$$

6. В пересечении следов $f_{0\alpha}^{IV}$ и $f_{0\beta}^{IV}$ с осью π_4/π_5 получаем точки схода следов соответственно X_{α_2} и X_{β_2} . Строим проекцию линии пересечения MN на плоскости π_5 ($M^V \equiv N^V$). Новые следы $h_{0\alpha}^V$ и $h_{0\beta}^V$ плоскостей α и β пройдут через точки схода следов X_{α_2} и X_{β_2} и точку $M^V \equiv N^V$.
7. В результате проведенных построений плоскости α и β стали перпендикулярны плоскости проекций π_5 , и угол ϕ между следами $h_{0\alpha}^V$ и $h_{0\beta}^V$ и есть искомый угол между плоскостями.

ГЛАВА 6



Кривые линии

6.1. Общие сведения о кривых линиях

Кривая линия — линия, не имеющая прямолинейных отрезков. Кривую линию можно также рассматривать как траекторию движущейся в пространстве или на плоскости точки. Расстояние между двумя любыми точками кривой линии меньше длины дуги, ограниченной этими точками.

Кривые линии разделяются на *плоские*, все точки которых лежат в одной плоскости, и в противном случае — *пространственные* (или *линии двойной кривизны*).

Положение кривой линии в пространстве однозначно определяется двумя ее проекциями. Все точки плоской кривой линии лежат в одной плоскости, и следовательно все секущие плоской кривой линии также лежат в одной плоскости и по отношению друг к другу являются параллельными или пересекающимися прямыми. Вид кривой линии (пространственный или плоский) можно установить, проведя ряд секущих прямых. Кривая *a* (рис. 6.1) является пространственной, т. к. секущие *AC* и *BD* являются скрещивающимися прямыми (точка пересечения проекций прямых *AC* и *BD* не лежит на одной линии проекционной связи).

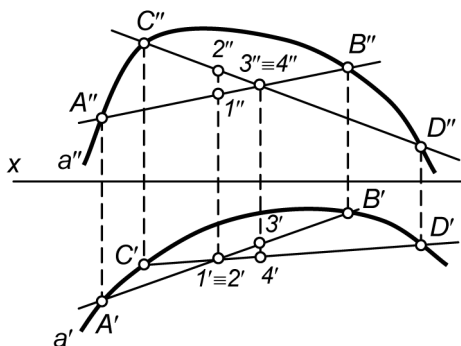


Рис. 6.1. Пространственная кривая линия

Кривая линия называется *плавной* (или *гладкой*), если она во всех своих точках имеет одну непрерывно изменяющуюся касательную. Если при этом не изменяется направление перемещения касательной, то кривая линия является *выпуклой* (рис. 6.2), а все ее точки *регулярными* (*правильными, обыкновенными*).

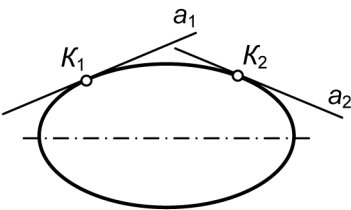


Рис. 6.2. Выпуклая кривая линия

В зависимости от способа образования кривые линии делятся на *закономерные*, т. е. образованные по определенному закону, и *незакономерные*, образование которых носит эмпирический характер. Закономерные кривые линии могут быть заданы графически (на чертеже) и аналитически (при помощи уравнений), *незакономерные* линии — только графически.

В зависимости от вида уравнения, описывающего закономерные кривые линии, они могут быть *алгебраическими*, если в прямоугольных координатах линия определяется алгебраическим уравнением, и *трансцендентными*, если она задается не-алгебраическим уравнением (табл. 6.1).

Таблица 6.1. Основные закономерные кривые линии

Класс кривых линий	Способ задания	Типы кривых линий
Алгебраические кривые линии		
Линии второго порядка	Алгебраическое уравнение второго порядка	Эллипс (в частном случае — окружность), гипербола, парабола
Линии третьего порядка	Алгебраическое уравнение третьего порядка	Декартов лист, строфоида, кубическая и полукубическая параболы, трезубец, локон Аньези, циссоида Диоклеса, трисектриса Маклорена
Линии четвертого порядка	Алгебраическое уравнение четвертого порядка	Декартов овал, улитка Паскаля, каппа, лемниската Бернулли, кардиоида, овал Касини, конхоида Никомеда, кривая Персея, кривая Штейнера
Линии высших порядков	Алгебраическое уравнение высших порядков	Кривая Ламе, синусоидальная спираль, астроида

Таблица 6.1 (окончание)

Класс кривых линий	Способ задания	Типы кривых линий
Трансцендентные кривые линии		
Спирали	Движение точки вокруг другой неподвижной точки (или точек)	Архимедова спираль, гиперболическая и параболическая спирали, спираль Галилея, спираль Ферма, логарифмическая спираль, спираль Корню, жезл
Винтовые линии *	Вращательно-поступательное движение точки вокруг оси	Цилиндрическая винтовая линия, коническая винтовая линия, сферическая винтовая линия
Циклические кривые линии	Траектория точки окружности, катящейся без скольжения	Циклоида, эпициклоида, гипоциклоида, трохоида, эпитрохоида, гипотрохоида
Графики тригонометрических функций	Тригонометрические уравнения	Синусоида, тангенсоида, узорная кривая
Графики показательной и логарифмической функций	Экспоненциальное и логарифмическое уравнения	Экспоненциальная кривая, логарифмическая кривая
Цепная линия	Вид нерастяжимой нити, провисшей под действием силы тяжести	—

Примечание к таблице 6.1
* — пространственные кривые линии

Основной характеристикой алгебраической кривой линии является ее *порядок*. С точки зрения высшей математики порядком кривой линии называется степень ее уравнения. С точки зрения геометрии порядком плоской алгебраической кривой линии считают максимальное количество пересечений этой линии с секущей прямой, а порядком пространственной кривой линии — максимальное количество точек пересечения с секущей плоскостью.

Например, *эллипс* и *параболу* секущая пересекает в двух точках (рис. 6.3, а и б), следовательно, это кривые второго порядка; *лемнискату Бернулли* (рис. 6.3, в) — в четырех точках, значит, это линия четвертого порядка, и т. д.

Особый класс кривых линий составляют линии, производные от других, т. е. полученные от исходных линий путем некоторых построений. К таким линиям относятся, например, эволюта и эвольвента.

Некоторые кривые линии могут состоять из связанных дуг плавных кривых линий. В этом случае кривая называется *составной*, а точки стыка кривых — *вершинами*. Примерами составных линий являются коробовые кривые линии.

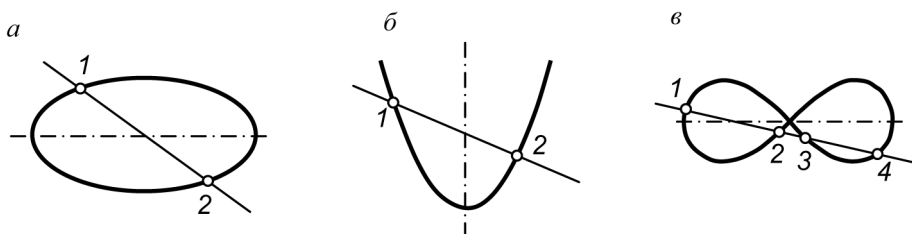


Рис. 6.3. Кривые второго порядка (а и б) и четвертого порядка (в)

Отметим следующие *основные свойства* проекций кривой линии:

- ◆ плоская кривая линия в общем случае проецируется в виде кривой;
- ◆ если направление проецирования параллельно плоскости плоской кривой, то она проецируется в прямолинейную линию (прямую, луч, отрезок);
- ◆ в общем случае проекция алгебраической кривой n -го порядка сохраняет тот же порядок: эллипс и окружность проецируются в эллипс или, в частном случае, в окружность; проекция параболы — парабола, а гиперболы — гипербола;
- ◆ проекцией пространственной кривой линии является плоская кривая линия.

Длины некоторых кривых линий могут быть определены путем алгебраических вычислений (например, длина окружности, виток цилиндрической винтовой линии и т. д.). Однако существует общий графический метод, основанный на аппроксимации кривой линии ломаной, вписанной в эту кривую. Длина этой ломаной может быть приближенно принята за длину дуги кривой линии (этот способ иногда называют *способом хорд*).

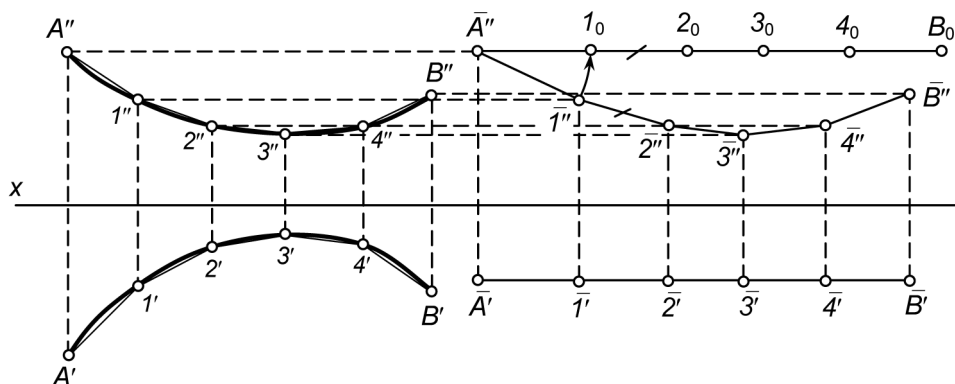


Рис. 6.4. Графическое определение длины дуги AB , заданной горизонтальной и фронтальной проекциями

На рис. 6.4 дано определение длины дуги AB , заданной горизонтальной и фронтальной проекциями. Дугу AB разбиваем на малые части точками 1, 2, 3,... Методом плоскопараллельного перемещения определяем длину ломаной $A1-12-23-34-4B$.

23–34–4В. Для этого горизонтальную проекцию ломаной спрямляем в прямую, параллельную оси X :

$$|\overline{A'1'}| = |A'1'|, |\overline{1'2'}| = |1'2'| \text{ и т. д.}$$

Из построенных точек $\overline{A'}$, $\overline{1'}$, $\overline{2'}$,... проводим линии проекционной связи до пересечения с линиями, проведенными из фронтальных проекций точек деления кривой A'' , $1''$, $2''$,... параллельно оси X . Ломаную $\overline{A'1''} - \overline{1''2''} - \overline{2''3''} - \overline{3''4''} - \overline{4''B''}$ спрямляем в прямую $\overline{A'1_02_03_04_0B_0}$, длина которой с достаточно высокой точностью будет равна длине дуги AB .

6.2. Особые точки и кривизна плоской кривой линии

Направление движения точки, перемещающейся по плоской кривой, определяется положением касательной. Точки, в которых меняется направление касательной, называются *особыми точками* кривой линии. Кривая линия в особой точке может иметь одну или несколько касательных.

Если кривая линия в особой точке имеет одну касательную t , проведенную к различным ветвям этой кривой, то эти точки классифицируются следующим образом:

- ♦ *точка перегиба*, в которой кривая пересекает касательную (рис. 6.5, а);
- ♦ *точка возврата первого рода* ("острие"), в которой кривая изменяет свое направление и располагается по обе стороны касательной (рис. 6.5, б);
- ♦ *точка возврата второго рода* ("клюв"), в которой кривая изменяет свое направление, но остается расположенной по одну сторону от касательной (рис. 6.5, в).

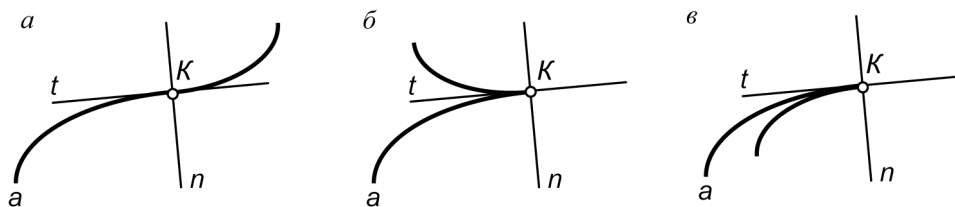


Рис. 6.5. Особые точки кривой линии с одной касательной

В некоторых особых точках кривая линия может иметь две касательные:

- ♦ *точка излома* (или угловая точка), в которой направление касательной меняется скачком (рис. 6.6, а);
- ♦ *узловая точка* (многократная точка, в зависимости от числа самопересечений — двойная, тройная и т. д.) — точка самопересечения кривой линии (например,

декартов лист, изображенный на рис. 6.6, б, имеет узловую точку в начале координат, а касательные, проведенные в узловой точке, совпадают с осями координат);

- ♦ *точка самоприкосновения*, в которой кривая линия встречает саму себя, и касательные, проведенные к различным ветвям кривой, совпадают (рис. 6.6, в).

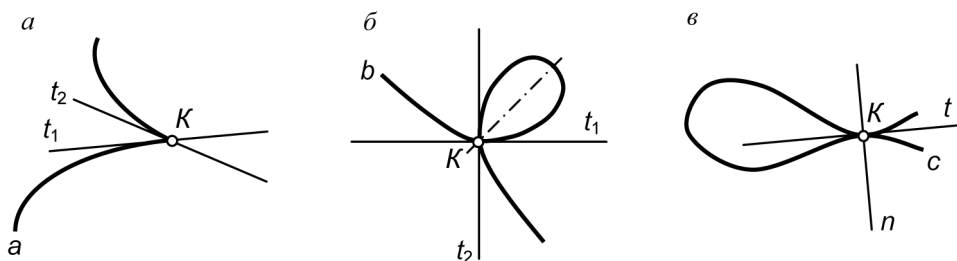


Рис. 6.6. Особые точки кривой линии с двумя касательными

Особые точки могут быть как у плоских, так и пространственных кривых линий. Если для плоской кривой достаточно одной проекции для определения рода этой точки, то для пространственной необходимо иметь две проекции, по которым можно установить характер рассматриваемой точки.

Отклонение кривой линии в некоторой ее точке от прямой, являющейся касательной в этой точке, характеризуется кривизной. На рис. 6.7, а изображена кривая C , к которой в точках K_1 и K_2 проведены касательные t_1 и t_2 . Средней кривизной дуги K_1K_2 является отношение величины угла φ между касательными t_1 и t_2 к длине дуги K_1K_2 . Угол φ может быть представлен также и как угол между нормальными n_1 и n_2 к кривой C в точках K_1 и K_2 .

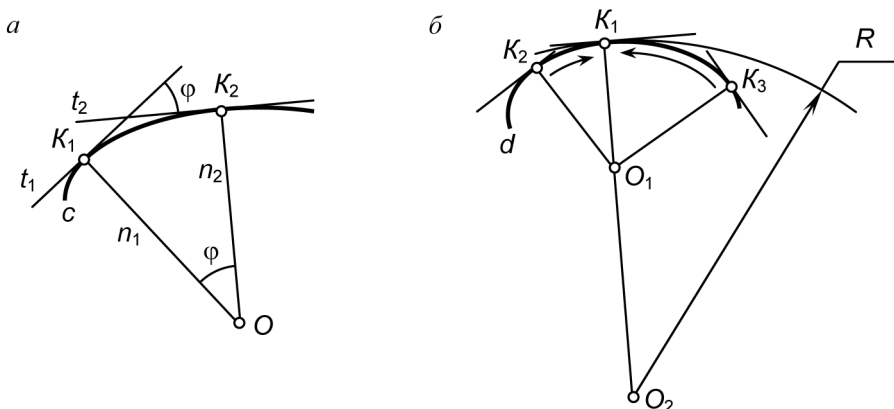


Рис. 6.7. Определение кривизны кривой линии

Предельное значение средней кривизны при стремлении точки K_2 к точке K_1 называется *кривизной* кривой c в точке K_1 . Величина, обратная кривизне, называется *радиусом кривизны*.

Графически эти понятия можно пояснить следующим образом. На рис. 6.7, б показана кривая d , на которой выбрана произвольная точка K_1 . Две соседние с ней точки выбраны так, чтобы нормали к кривой d , проведенные в точках K_1 , K_2 и K_3 , пересекались в одной точке O_1 . При стремлении точек K_2 и K_3 к точке K_1 центр пересечения нормалей займет свое предельное положение в точке O_2 .

Окружность, проведенная через точку K_1 с центром в O_2 , называется *соприкасающейся окружностью* (*окружностью кривизны*), а ее центр (точка O_2) — *центром кривизны* данной кривой в точке K_1 . Радиус R соприкасающейся окружности определяет радиус кривизны кривой d в точке K_1 , а обратная ей величина $1/R$ — кривизну кривой d в точке K_1 .

Соприкасающаяся окружность и кривая линия имеют общую касательную и нормаль, проведенные в точке касания. При этом центр кривизны всегда лежит на общей нормали.

На рис. 6.8 показано приближенное построение центра кривизны в некоторой точке K_0 кривой линии a . В окрестности точки K_0 выбрано несколько точек $K_1, K_2, \dots$. В этих точках, а также в точке K_0 проведены касательные, на которых отложены произвольные, но равные между собой отрезки $K_1L_1, K_2L_2, K_0L_0, \dots$. Построенные точки $L_1, L_2, L_0, \dots$ соединяются кривой линией b . Из точки K_0 проведена нормаль к кривой a , а из точки L_0 — нормаль к кривой b . В пересечении нормалей образуется искомый центр кривизны O кривой a в точке K_0 .

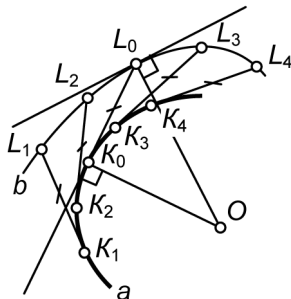


Рис. 6.8. Построение центра кривизны O кривой линии a

Чем меньше отклонение кривой линии в данной точке от ее касательной, тем меньше ее кривизна и больше радиус кривизны. Если прямую линию рассматривать как кривую, то ее кривизна равна нулю, а радиус кривизны — бесконечности. Кривизна окружности во всех ее точках постоянна и равна обратной величине радиуса этой окружности, а радиус кривизны равен радиусу окружности.

По методу построения кривые линии делятся на *лекальные*, которые вычерчиваются при помощи специальных чертежных криволинейных шаблонов — лекал, и *циркульные*, которые можно построить, пользуясь циркулем.

6.3. Построение лекальных кривых

6.3.1. Эволюта и эвольвента

Эволютой называют кривую линию, представляющую множество центров кривизны некоторой другой кривой линии. Сама кривая в данном случае называется *эвольвентой*. Касательные к эволюте являются нормальми в соответствующих точках эвольвенты.

На рис. 6.9 приведена кривая *a* (в данном случае эта кривая является эвольвентой) и ее эволюта — кривая *c*. Данной эволюте (кривой *c*) соответствует семейство эвольвент (кривые *a*, *b*, ...), каждая из которых определяется некоторой первоначальной длиной отрезка касательной к эволюте ($|K_0M_0|$, $|K_0N_0|$, ...).

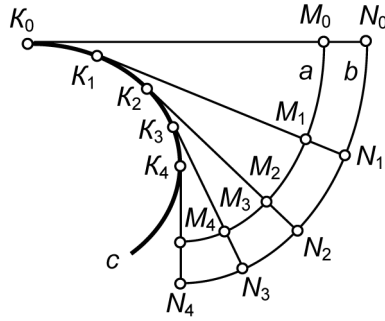


Рис. 6.9. Эволюта *c* и соответствующее ей семейство эвольвент *a*, *b*, ...

Если подобным образом построить некоторое множество центров кривизны кривой *a* и соединить их плавной кривой линией, то таким образом будет построена эволюта данной кривой линии. Сама кривая *a* будет эвольвентой.

У кривой, называемой *эвольвентой окружности*, центры кривизны в различных точках расположены на окружности. Шагом эвольвенты окружности называется длина окружности, являющейся эволютой к данной эвольвенте, т. е. расстояние, равное πD , где *D* — диаметр заданной окружности. Построение эвольвенты можно проводить как в направлении движения часовой стрелки, так и в противоположном направлении. В некоторых случаях эвольвенту окружности аппроксимируют эвольвентой многоугольника — коробовой кривой линией.

Построим эвольвенту окружности заданного диаметра *D* в направлении движения часовой стрелки (рис. 6.10). Заданную окружность разделим на *n* равных частей, например, на двенадцать. Центральный угол, образованный точками деления, равен

$$\phi = \frac{360^\circ}{n} = 30^\circ.$$

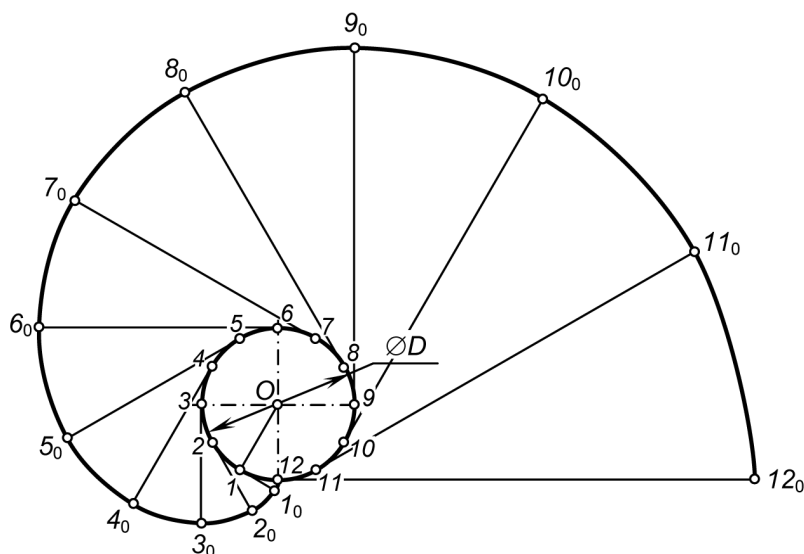


Рис. 6.10. Построение эвольвенты окружности заданного диаметра D

В каждой точке деления проводим касательные к окружности в сторону, противоположную движению часовой стрелки. На проведенных касательных от точки касания откладываем величину

$$\frac{\pi D \varphi_i}{n \cdot 360^\circ},$$

где φ_i — центральный угол между i -ой и начальной точками деления.

На примере, изображенном на рис. 6.10, на касательной, проведенной из первой точки, отложено расстояние $\pi D/12$, из второй — $2\pi D/12$, из третьей — $3\pi D/12$, ..., из двенадцатой — πD . Соединяя плавной кривой линией точки $1_0, 2_0, 3_0, \dots$, получаем эвольвенту заданной окружности.

6.3.2. Кривые линии второго порядка

Кривые линии второго порядка представляют собой геометрическое место точек, координаты которых в прямоугольной системе координат удовлетворяют алгебраическому уравнению второй степени. Линии второго порядка могут быть действительными или мнимыми (в случае, если множество точек является пустым или состоит из одной точки), нераспадающимися или распадающимися на несколько линий.

К действительным нераспадающимся линиям второго порядка, рассматриваемым в начертательной геометрии, относятся эллипс, гипербола и парабола.

Линия второго порядка, имеющая единственный центр симметрии, называется *центральной линией* второго порядка (эллипс, гипербола); линия второго порядка

без центра симметрии или с неопределенным центром — *нецентральной* линией второго порядка (парабола).

Эллипс

Эллипсом называется плоская замкнутая кривая линия, образуемая при пересечении прямого кругового конуса (рис. 6.11, *а*) или прямого кругового цилиндра (рис. 6.11, *б*) плоскостью, наклонной к их оси и пересекающей все образующие этого конуса или цилиндра.

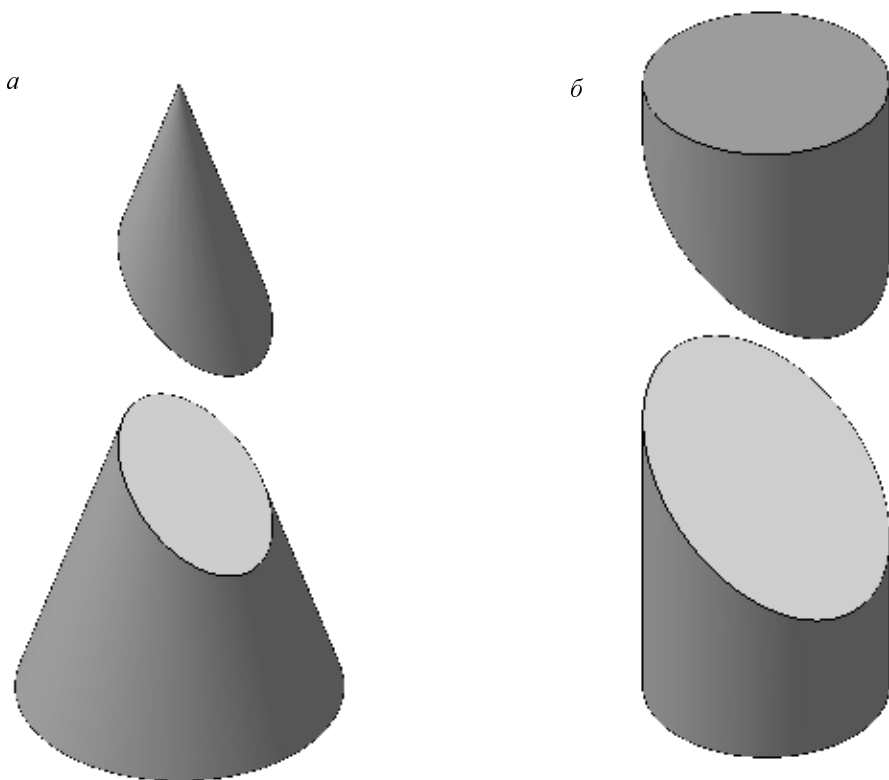


Рис. 6.11. Образование эллипса

При проецировании эллипса возможны следующие варианты:

- ◆ Эллипс, плоскость которого параллельна плоскости проекций, проецируется на эту плоскость в натуральную величину, а на две другие — в виде отрезка.
- ◆ Если плоскость эллипса расположена перпендикулярно одной плоскости проекций, то на эту плоскость эллипс проецируется в виде отрезка прямой линии, а на две другие — в виде эллипса.
- ◆ Если эллипс расположен в плоскости общего положения, то на все три плоскости проекций, он проецируется в виде эллипса (рис. 6.12, *а*).

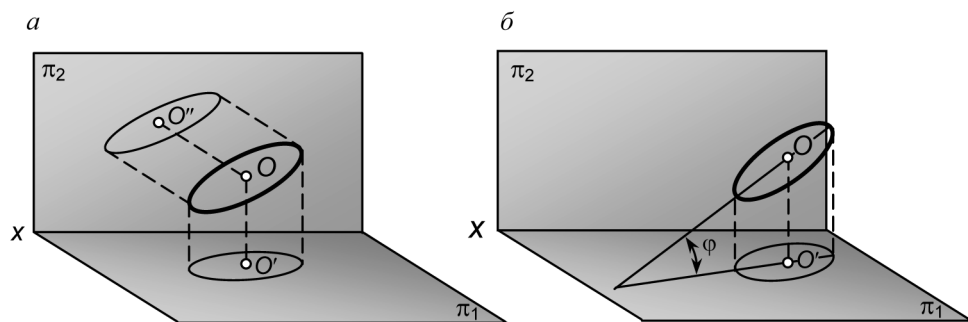


Рис. 6.12. Проецирование эллипса, находящегося в плоскости общего положения

- ♦ Если плоскость эллипса находится в плоскости общего положения, а большая ось эллипса принадлежит линии наибольшего наклона к плоскости проекций и составляет с этой плоскостью проекций угол, равный $\varphi = \arccos(b/a)$, то эллипс проецируется в окружность (рис. 6.12, б).

Отрезки прямой, лежащие на осях симметрии эллипса (рис. 6.13, а), называются *осями* эллипса, а концы этих отрезков — *вершинами* эллипса. Различают *большую ось* (отрезок A_1A_2) и *малую ось* (отрезок B_1B_2). Большая и малая оси эллипса взаимно перпендикулярны и в точке пересечения O (*центре* эллипса) делятся пополам. Две точки (точки F_1 и F_2), лежащие на большой оси эллипса и отстоящие от концов малой оси на расстоянии, равном половине большой оси, называются *фокусами* эллипса. Отрезок прямой между двумя точками эллипса, проходящий через его центр, называется *диаметром* (например, отрезок M_1M_2).

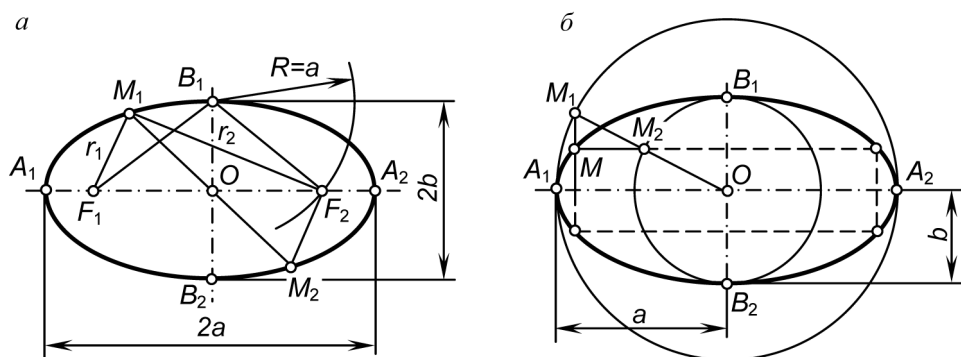


Рис. 6.13. Элементы эллипса (а) и его построение (б)

Эллипс представляет собой множество точек, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек (фокусов) постоянна и равна большой оси эллипса:

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

Отношение b/a ($b/a \leq 1$) отражает форму эллипса (его "вытянутость") и называется *коэффициентом сжатия*. При $a=b$ фокусы эллипса совпадают, и он обращается в окружность, которую можно рассматривать как частный случай эллипса с коэффициентом сжатия, равным единице.

Построение эллипса по двум заданным осям приведено на рис. 6.13, б. На двух взаимно перпендикулярных прямых откладываются расстояния, равные большой a и малой b полуосям эллипса. Из центра O проводятся две концентрические окружности радиусами a и b . На большей окружности выбирается произвольная точка M_1 , и проводится радиус M_1O , который в пересечении с малой окружностью дает точку M_2 . Из точки M_1 проводится прямая, параллельная малой оси эллипса, а из точки M_2 — прямая, параллельная большой оси эллипса. При пересечении этих прямых образуется точка M , принадлежащая эллипсу. Построив одну точку эллипса, можно построить еще три точки, расположенные симметрично относительно осей эллипса и его центра.

Далее в том же порядке можно построить ряд точек, принадлежащих эллипсу. Искомый эллипс образуется при соединении плавной кривой линии с помощью лекала построенных точек, а также точек A_1 , A_2 , B_1 и B_2 , являющихся вершинами эллипса.

Иногда с целью упрощения построения эллипс аппроксимируют овалом, состоящим из сопрягаемых дуг окружностей.

В аксонометрических проекциях окружность в большинстве случаев проецируется в эллипс, большая и малая оси которого образуют с аксонометрическими осями некоторый определенный угол, зависящий от вида проекции.

Гипербола

Гипербола — это линия пересечения прямого кругового конуса плоскостью, не проходящей через вершину конуса и параллельной двум его образующим. Так как в общем случае рассматривают конус, имеющий две полости с общей вершиной и общей осью, то при образовании гиперболы секущая плоскость пересекает обе его полости (рис. 6.14), и, следовательно, кривая состоит из двух разомкнутых, симметрично расположенных ветвей.

Пример построения гиперболы, образуемой при пересечении конуса фронтальной плоскостью α , параллельной его оси, изображен на рис. 6.15. Для построения точки A'' , принадлежащей гиперболе, проведена вспомогательная образующая S_1 . На пересечении горизонтальной и профильной проекций этой образующей с соответствующими следами секущей плоскости α найдены точки A' и A''' , и затем по двум известным проекциям построена A'' . В заключении проверена правильность построений: $A'' \in S''_1$.

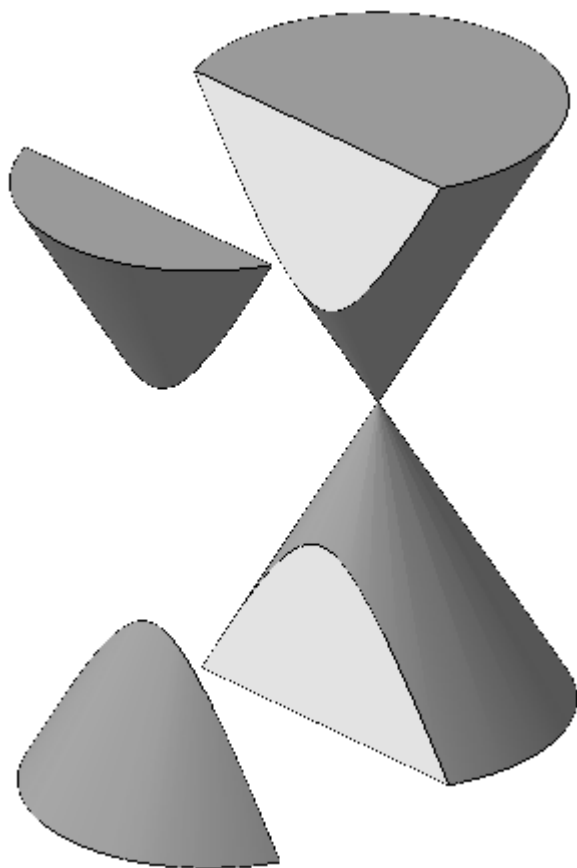


Рис. 6.14. Образование гипербола

На рис. 6.16, *a* приведены элементы гиперболы: прямая AB — *действительная ось*, прямая CD — *мнимая ось*, точки A и B (точки пересечения гиперболы с действительной осью) — *вершины* гиперболы, точка O — *центр* гиперболы, точки F_1 и F_2 — *фокусы* гиперболы.

Расстояние между вершинами, равное $2a$, называется *большой осью* гиперболы; расстояние между точками C и D , равное $2b$, — *малой осью*; расстояние между фокусами, равное $2c$, — *фокусным расстоянием* ($2a < 2c$).

Прямые t_1 и t_2 , к которым ветви гиперболы неограниченно приближаются при удалении в бесконечность, называются *асимптотами* гиперболы. Эксцентриситет гиперболы равен $c/a > 1$.

Гипербола представляет собой геометрическое место точек плоскости, разность расстояний от которых по абсолютной величине до двух заданных точек (фокусов) постоянна:

$$(r_1 - r_2) = 2a.$$

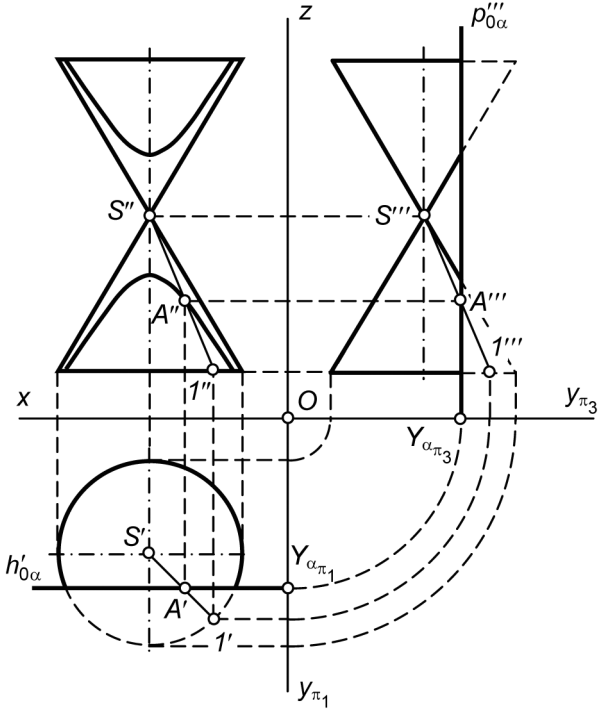


Рис. 6.15. Построение гиперболы, образуемой при пересечении конуса фронтальной плоскостью α

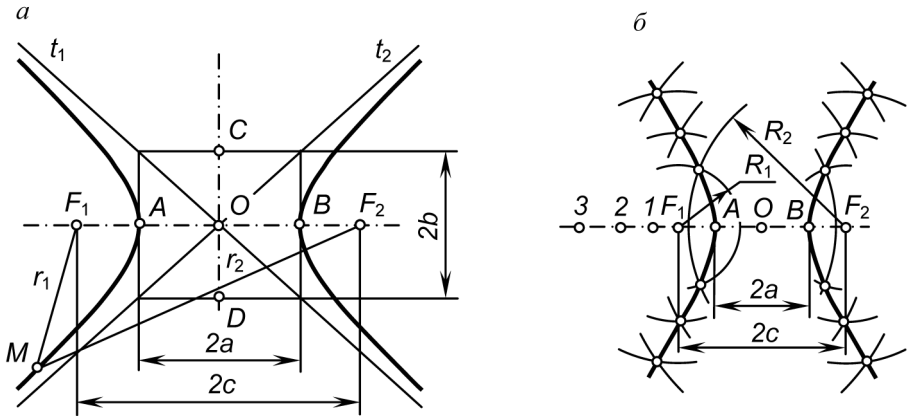


Рис. 6.16. Элементы гиперболы (а) и ее построение (б)

При $a=b$ гипербола называется *равнобочной*, ее асимптоты взаимно перпендикулярны.

На рис. 6.16, б гипербола построена по заданным расстоянию большой оси $2a$ и фокусному расстоянию $2c$. Строится действительная ось гиперболы, на которой

наносится ее центр (точка O), вершины (точки A и B) и фокусы (точки F_1 и F_2). Затем на луче OF_1 на все увеличивающемся расстоянии от точки F_1 наносится ряд произвольных точек $1, 2, 3...$ Из точек F_1 и F_2 проводятся дуги радиусом соответственно $R_1=|1A|$ и $R_2=|1B|$. В пересечении дуг находятся точки, принадлежащие гиперболы. Аналогично строится ряд точек, которые соединяются плавной кривой линией.

Парабола

Парабола — это линия пересечения прямого кругового конуса плоскостью, не проходящей через вершину конуса и параллельной одной из его образующих (рис. 6.17).

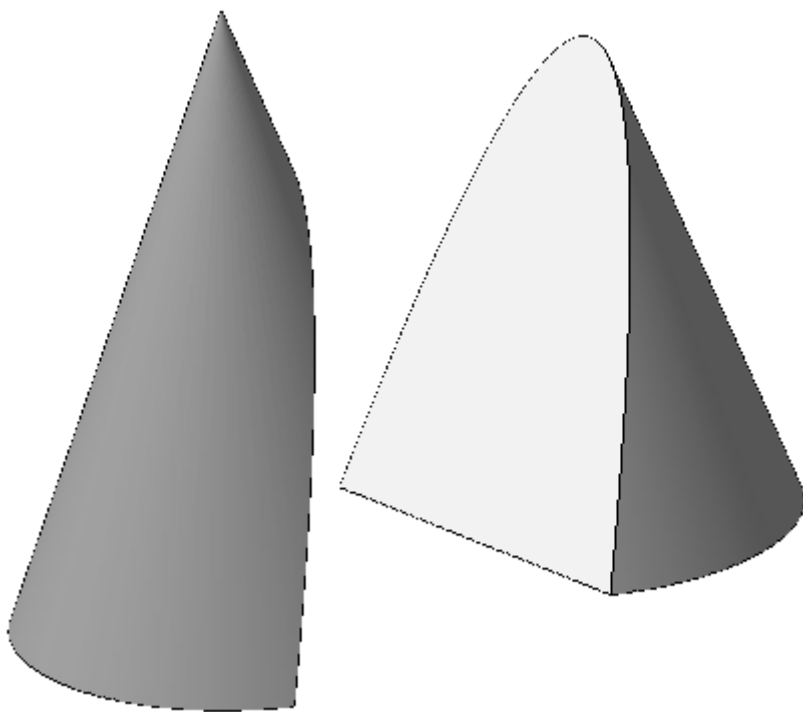


Рис. 6.17. Образование параболы

На рис. 6.18, *a* приведены элементы параболы: точка A — *вершина* параболы, точка F — *фокус*, прямая AF — *ось* параболы, прямая t — *директриса*. Расстояние p от фокуса до директрисы называется *фокальным параметром*. Вершина параболы лежит на середине отрезка FB . Парабола состоит из одной ветви, симметричной относительно оси.

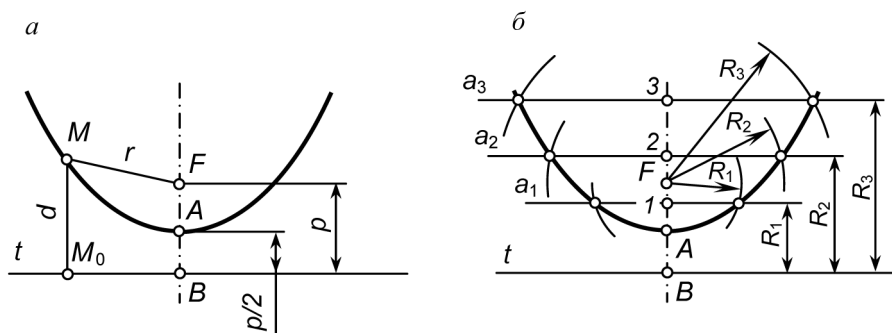


Рис. 6.18. Элементы параболы и ее построение

С точки зрения дифференциальной геометрии парабола представляет собой множество точек плоскости, расстояние от которых до определенной точки (фокуса) равно расстоянию от этих же точек до определенной прямой (директрисы): $r = d$.

На рис. 6.18, б приведено построение параболы по заданной директрисе t и фокусу F . Через фокус F проводится ось перпендикулярно директрисе, и фокальный параметр делится пополам. Точка A , лежащая на середине отрезка FB , является вершиной параболы. Затем на луче BA на все увеличивающемся расстоянии от точки A в направлении фокуса наносится ряд произвольных точек $1, 2, 3, \dots$. Через эти точки проводятся линии $a_1, a_2, a_3, \dots$, параллельные директрисе. Из точки F проводится дуга радиусом, равным $R_1 = |1B|$, которая в пересечении с прямой a_1 дает две точки, принадлежащие параболе. Аналогично строятся следующие пары точек, которые затем соединяются плавной кривой линией.

6.3.3. Кривые линии третьего порядка

Кривые линии третьего порядка представляют собой геометрическое место точек, координаты которых в прямоугольной системе координат описываются алгебраическим уравнением третьей степени. Такие кривые могут иметь одну, две или три бесконечные ветви. При этом если ветвь имеет асимптоту, то ее называют *ветвью гиперболического типа*. В противном случае ветвь кривой будет *параболической*.

Среди большого разнообразия кривых третьего порядка существует ряд так называемых замечательных кривых, построения некоторых из них рассмотрим далее.

Декартов лист

Декартовым листом называется кривая, уравнение которой в прямоугольной системе координат имеет вид:

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0.$$

Кривая симметрична относительно биссектрисы $y=x$. Начало координат является узловой точкой декартова листа. Декартов лист имеет одну асимптоту $y = -x - a$.

Рассмотрим правила построения декартова листа. Наметим узловую точку O и проведем биссектрису b под углом 45° к горизонтали (рис. 6.19). На биссектрисе выберем точку O_1 и из этой точки, как из центра, проведем окружность, радиус которой равен $R=2|OO_1|$. В пересечении построенной окружности и биссектрисы b отметим точки A и B (точка B — вершина декартова листа).

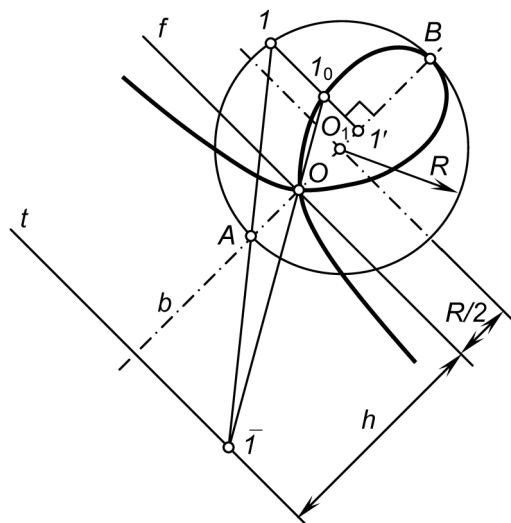


Рис. 6.19. Построение декартова листа

Из точки O проведем прямую f под прямым углом к биссектрисе b и параллельно прямой f на расстоянии h построим прямую t . Возьмем произвольную точку 1 на окружности и проведем прямую $1A$ до пересечения с прямой t в точке $\bar{1}$. Из точки 1 построим перпендикуляр $11'$ к биссектрисе b . Из точки $\bar{1}$ проводим прямую $\bar{1}O$ до ее пересечения в точке 1_0 с прямой $11'$. Геометрическое место точек 1_0 представляет собой декартов лист.

Циссоида Диоклеса

Циссоида Диоклеса является кривой третьего порядка, которая описывается в прямоугольных координатах следующим уравнением:

$$y^2 = \frac{x^3}{a-x}.$$

Кривая симметрична относительно оси абсцисс и имеет две бесконечные ветви. Прямая $x=2a$ служит для нее асимптотой. Начало координат является точкой возврата первого рода.

Построение циссоиды ведут в следующем порядке (рис. 6.20, а). Вычертим окружность радиуса $R = a$ и проведем в точке A касательную t (касательная к производящей окружности служит асимптотой циссоиды). Построим диаметр AO окружности (точка O — точка возврата циссоиды). Из точки O проведем лучи до пересечения с прямой t в точках $1, 2, \dots$. На каждом луче от точки O откладываем отрезки, равные соответственно отрезкам $11', 22', \dots$. Получаем точки $1_0, 2_0, \dots$, принадлежащие циссоиде.

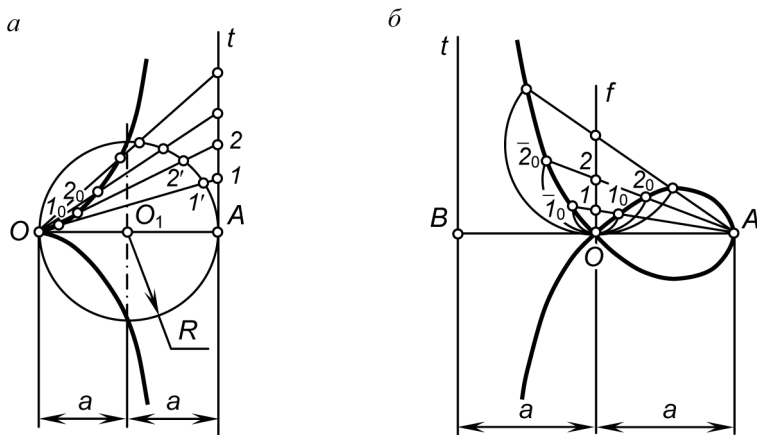


Рис. 6.20. Построение циссоиды (а) и строфоиды (б)

Строфоида

Уравнение *строфоиды* в прямоугольных координатах имеет вид:

$$y^2 = x^2 \frac{a+x}{a-x}.$$

Кривая симметрична относительно оси абсцисс и имеет одну асимптоту $x = a$. В начале координат строфоиды находится узловая точка, в которой касательные $y = \pm x$ пересекаются под прямым углом.

Рассмотрим построение строфоиды (рис. 6.20, б). Отрезок $AB = 2a$ разбиваем точкой O пополам (точка A — вершина строфоиды, точка O — узловая точка). Перпендикулярно AB через точку B проводим прямую t — асимптоту строфоиды, а через точку O — прямую f . От точки O на прямой f намечаем точки $1, 2, \dots$. Из вершины A через точки $1, 2, \dots$ проводим лучи. Из точек $1, 2, \dots$, как из центров, проводим дуги окружностей, радиусы которых равны $1O, 2O, \dots$. В пересечении с соответствующими лучами они образуют точки $1_0, \bar{1}_0, 2_0, \bar{2}_0, \dots$, которые принадлежат строфоиде.

6.3.4. Кривые линии четвертого порядка

Кривые линии четвертого порядка описываются алгебраическими уравнениями четвертого порядка и по числу особых точек делятся на:

- ✧ кривые, не имеющие особых точек;
- ✧ кривые с одной двойной точкой;
- ✧ кривые с двумя двойными точками (*эллиптические кривые*);
- ✧ кривые с тремя двойными точками или одной тройной (*рациональные кривые*).

Одной из самых замечательных алгебраических линий четвертого порядка является *лемниската Бернулли*. Эта кривая обладает целым рядом оригинальных геометрических и механических свойств.

Уравнение лемнискаты Бернулли в прямоугольной системе координат имеет следующий вид:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0.$$

Произведение расстояний r_1 и r_2 в каждой точке лемнискаты Бернулли до двух данных точек F_1 и F_2 (*фокусов*), находящихся на одной линии и одинаковом расстоянии a от точки O , равно постоянному значению a^2 . Кривая симметрична относительно осей и начала координат. Начало координат является узловой точкой с касательными $y = \pm x$ и точкой перегиба.

Рассмотрим, как построить лемнискату Бернулли на чертеже (рис. 6.21). На прямой выбираем центр кривой O , от которой в обе стороны откладываем расстояния a (получаем фокусы кривой F_1 и F_2) и расстояние $a\sqrt{2}$ (получаем вершины кривой — точки A и B). Из точки O проводим перпендикуляр OC так, что $|OC| = a$. Намечаем произвольные точки $1, 2, 3, \dots$, расположенные от точки O на расстоянии не более $2a\sqrt{2}$. Построенные точки соединяем с точкой C и строим перпендикулярные к ним отрезки:

$$1'C \perp 1C; 2'C \perp 2C; 3'C \perp 3C \dots$$

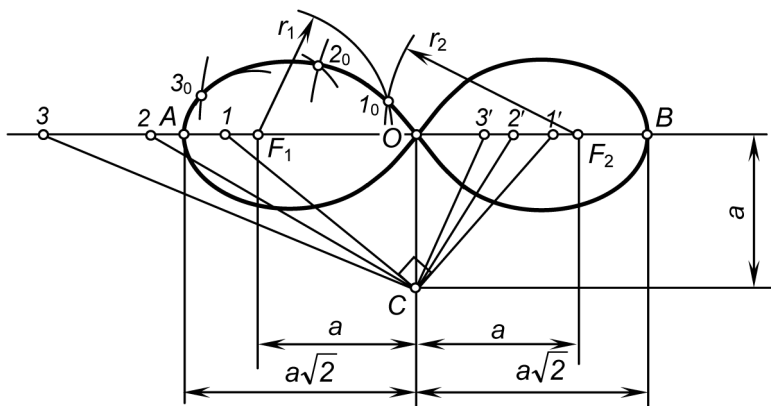


Рис. 6.21. Построение лемнискаты Бернулли

Таким образом, получаем серию прямоугольных треугольников $1C1'$, $2C2'$, $3C3'$, ..., для гипотенуз которых справедливо равенство:

$$|O1| \times |O1'| = |O2| \times |O2'| = |O3| \times |O3'| = \dots = a^2.$$

Для получения точки 1_0 , лежащей на кривой, делаем засечки из фокуса F_1 радиусом, равным $r_1 = O1'$, а из фокуса F_2 радиусом, равным $r_2 = O1$. Аналогично строим другие точки лемнискаты.

6.3.5. Спирали

Спирали представляют собой плоские кривые линии, которые обходят вокруг одной или нескольких точек, приближаясь или удаляясь от них.

В прямоугольных координатах спирали описываются неалгебраическим уравнением, поэтому они относятся к трансцендентным кривым линиям. Однако в полярных координатах уравнения некоторых спиралей могут быть алгебраическими относительно полярного радиуса и полярного угла. Такие спирали условно называют алгебраическими. К ним относятся: архимедова спираль, гиперболическая и параболическая спирали, спираль Галилея, спираль Ферма, жезл.

Спирали, у которых радиус кривизны в каждой точке связан с длиной дуги степенным уравнением, называются *псевдоспиральми*. Если показатель степени равен 1, то образуется логарифмическая спираль; при -1 — спираль Корню.

Рассмотрим более подробно одну из самых интересных кривых — архимедову спираль.

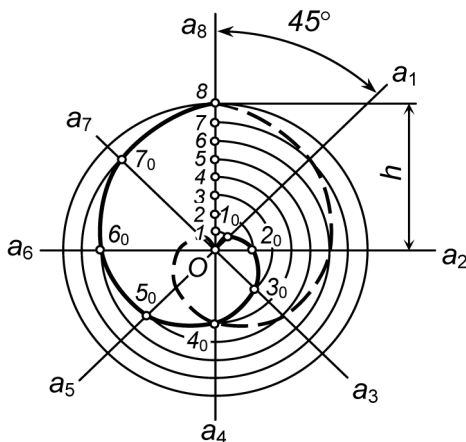


Рис. 6.22. Построение архимедовой спирали

Архимедова спираль представляет собой траекторию движущейся точки, которая равномерно вращается вокруг некоторой неподвижной точки и при этом равномерно удаляется от нее. Вращение точки может быть как в направлении движения часовой стрелки, так и обратном ему. Поэтому в общем случае архимедова

спираль состоит из двух ветвей, исходящих из общего начала. Начальная точка O называется ее *полюсом*, а расстояние h от полюса до конечной точки первого витка — *шагом*.

Построим виток архимедовой спирали, обходящей заданный полюс O по часовой стрелке с шагом h (рис. 6.22). Из полюса O проводим n лучей $a_1, a_2, a_3, \dots$ (в данном случае восемь), образующие между собой одинаковый угол, равный $360^\circ/n$.

На луче a_8 от полюса откладываем шаг спирали h , который делим на n равных частей. Точки деления $1, 2, 3, \dots$ переносим дугами окружностей с центром в точке O на соответствующие лучи, т. е. точка 1 радиусом $O1$ переносится на луч a_1 , точка 2 радиусом $O2$ — на луч a_2 и т. д. Полученные в пересечении точки $1_0, 2_0, 3_0, \dots$ соединяем плавной кривой линией, являющейся витком искомой спирали.

6.3.6. Циклические кривые

Циклические или *циклоидальные кривые* представляют собой траекторию движения точки, лежащей на *производящей окружности*, катящейся без скольжения по неподвижной прямой или по другой окружности (*направляющей*).

Если производящая окружность катится по прямой, то циклическая кривая называется *циклоидой*; если по направляющей окружности, то в зависимости от того, расположена производящая окружность вне или внутри направляющей, она называется *эпициклоидой* или *гипоциклоидой*.

Циклоида

Циклоида представляет собой траекторию одной из точек окружности, перекачиваемой по прямой. В общем случае циклоида состоит из неограниченного количества ветвей, стыкующихся в *вершинах* циклоиды. Вершины циклоиды являются точками возврата первого рода, в которых циклоида меняет свое направление и располагается по обе стороны от касательной, проведенной в этой точке.

Расстояние между смежными вершинами, равное $h = 2\pi r$, где r — радиус производящей окружности, называется *шагом* циклоиды. Рассмотрим образование циклоиды (рис. 6.23). При перекачивании производящей окружности по прямой t точка O , принадлежащая окружности, будет перемещаться вверх и в то же время по направлению движения центра окружности. Производящую окружность делим на n равных частей, например, на восемь.

На прямой f , по которой перемещается центр производящей окружности, откладываем расстояние, равное шагу h . Этот отрезок делим на такое же количество n равных частей. Из точек деления шага проводим окружности радиусом r , а из точек деления производящей окружности — горизонтальные прямые. В их пересечении образуются точки, принадлежащие искомой циклоиде (если центральный угол между исходной точкой и точками деления $1, 2, 3, \dots$ на производящей окружности меньше 180° , то точка, принадлежащая циклоиде, находится в первом пересечении

с окружностью; если угол лежит в пределах $180 \dots 360^\circ$, то — во втором пересечении). Соединяем полученные точки $1_0, 2_0, 3_0, \dots$ плавной кривой линией.

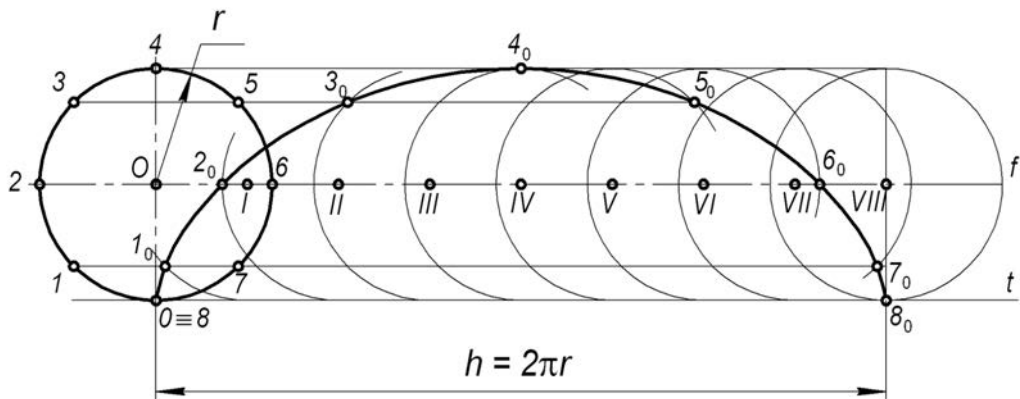


Рис. 6.23. Построение циклоиды

При дальнейшем качении окружности точка вновь начнет описывать такую же кривую — следующую ветвь циклоиды.

Эпициклоида

Эпициклоида является траекторией точки *производящей окружности* радиусом r , катящейся без скольжения по другой неподвижной *направляющей окружности* радиуса R вне ее. Отношение $r/R = m$ называется *модулем*. Форма эпициклоиды зависит от значения m . Если $m = p/q$ (p и q — взаимно простые числа), то исходная точка после q полных оборотов производящей окружности возвращается в первоначальное положение и эпициклоида — замкнутая кривая, состоящая из q ветвей с q точками возврата. При $m = 1$ образуется *кардиода*.

Рассмотрим построение эпициклоиды (рис. 6.24). Производящую окружность делим на n (например, на 12) равных частей и получаем точки $1, 2, 3, \dots$. Из центра направляющей окружности O проводим центровую окружность радиусом $R + r$. Определяем центральный угол α одной ветви эпициклоиды:

$$\alpha = 360r/R.$$

От луча, проходящего через исходную точку O касания производящей и направляющей окружностей, откладываем угол α и делим его на n частей. На направляющей окружности отмечаем точки $1_1, 2_1, 3_1, \dots$, а на центральной окружности — точки $I, II, III, \dots$. Из центра O проводим вспомогательные окружности, проходящие через точки деления производящей окружности (т. е. через точки $1, 2, 3, \dots$).

Приняв за центр точку I , проводим дугу радиусом r до пересечения с дугой, проведенной через точку 1 деления производящей окружности. В пересечении образуется точка 1_0 , принадлежащая кривой. Затем, приняв за центр точку II , проводим следующую дугу радиусом r до пересечения с дугой, проведенной через точку 2 де-

ления окружности. Аналогичные построения проводим из следующих центров *III*, *IV*, *V*, ... Найденные точки $1_0, 2_0, 3_0, \dots$ соединяем плавной кривой линией.

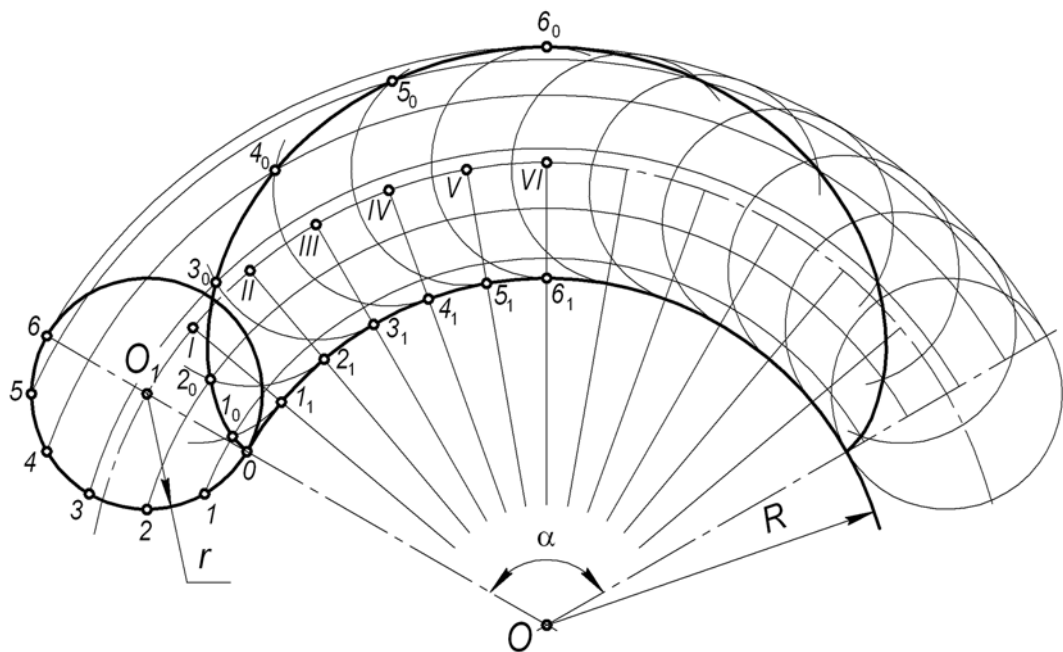


Рис. 6.24. Построение эпициклоиды

Гипоциклоида

Гипоциклоида — плоская кривая, описываемая точкой *производящей* окружности радиусом r , которая катится без скольжения по внутренней стороне другой (большей) *направляющей* окружности радиусом R . Отношение $r/R = m$ называется *модулем*. Если модуль — рациональное число, то гипоциклоида замкнутая. При $m=2$ кривая вырождается в прямую, при $m=1/4$ образуется *астроида*.

Построим гипоциклоиду (рис. 6.25). Производящую окружность делим на n (например, на 12) равных частей и получаем точки $1, 2, 3, \dots$. Из центра O проводим центровую окружность радиусом $R-r$ и определяем центральный угол α одной ветви гипоциклоиды:

$$\alpha = 360r/R.$$

От луча, проходящего через исходную точку O касания производящей и направляющей окружностей, откладываем угол α и делим его на n частей. На направляющей окружности отмечаем точки $1_1, 2_1, 3_1, \dots$, а на центральной — точки $I, II, III, \dots$. Из центра O проводим вспомогательные окружности, проходящие через точки деления $1, 2, 3, \dots$

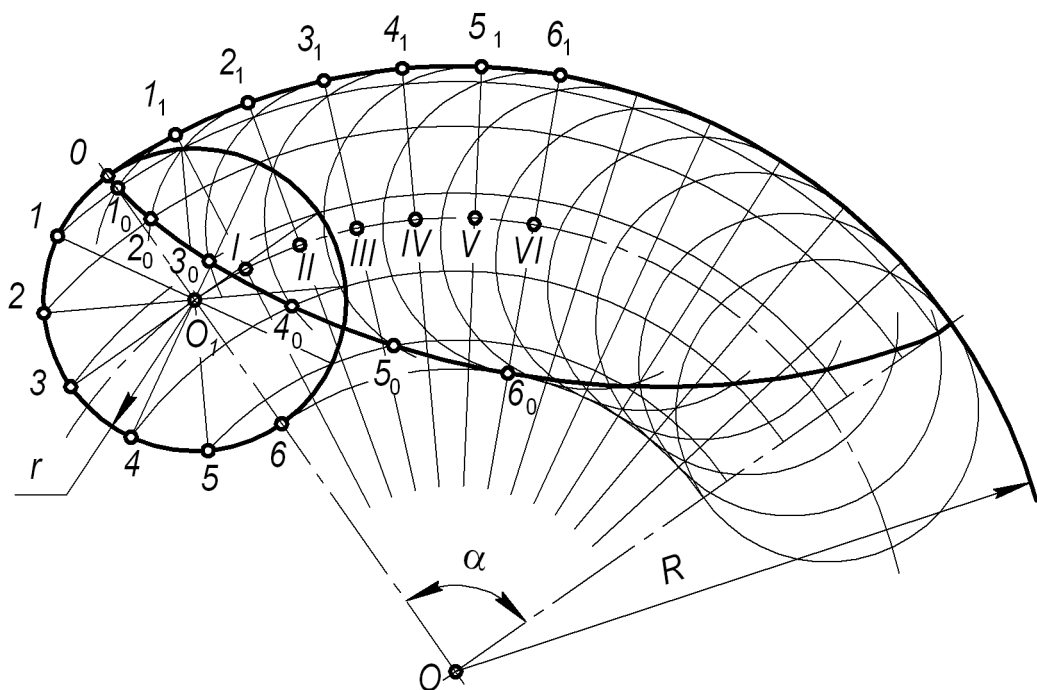


Рис. 6.25. Построение гипоциклоиды

Приняв за центр точку I , проводим дугу радиусом r до пересечения с дугой, проведенной через точку деления 1 . В пересечении образуется точка 1_0 , принадлежащая кривой. Затем, приняв за центр точку II , проводим следующую дугу радиусом r до пересечения с дугой, проведенной через точку деления 2 . Аналогичные построения повторяем, проводя окружности из следующих центров III , IV , V , ... Найденные точки соединяем плавной кривой линией.

6.3.7. Графики тригонометрических функций

Графиками тригонометрических функций являются плоские кривые, которые описываются различными тригонометрическими уравнениями. Среди таких графиков наибольший интерес с точки зрения геометрических свойств представляет синусоида.

С точки зрения геометрии синусоида представляет собой траекторию точки, движение которой складывается из равномерного поступательного движения вдоль прямой (оси синусоиды) и перпендикулярного ему возвратно-поступательного. Причем возвратно-поступательное движение связано с вращением другой точки по окружности, центр которой находится на оси синусоиды.

Синусоида является непрерывной периодической линией, которая путем параллельного переноса вдоль оси накладывается сама на себя. Минимальный отрезок h , при переносе на который синусоида накладывается сама на себя, называется *периодом*. Максимальный отрезок a , вдоль которого точка совершает возвратно-поступательное движение, называется *амплитудой* синусоиды. Точки пересечения синусоиды с ее осью являются точками перегиба, в которых касательная пересекает синусоиду.

В общем случае синусоиду описывает трансцендентное уравнение вида

$$y = k \sin x.$$

При $k=1$ период синусоиды равен $h = \pi a$.

Рассмотрим пример построения синусоиды с заданной амплитудой a и шагом h (рис. 6.26). Строим окружность радиусом $r = 2a$ и разделим ее на n равных частей (например, на 12). Через центр окружности проводим ось синусоиды, на которой откладываем отрезок AB длиной, равной периоду h . Отрезок AB также делим на n равных частей. Через точки деления окружности проводятся прямые, параллельные оси синусоиды, а через точки деления шага — перпендикулярные оси синусоиды. Точки пересечения соответствующих прямых принадлежат искомой синусоиде.

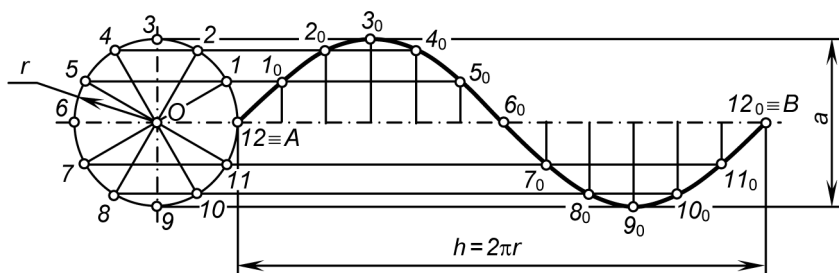


Рис. 6.26. Образование синусоиды

6.3.8. Составные лекальные кривые

Составной кривой линией называется линия, состоящая из связанных дуг плавных кривых линий. Наибольший интерес среди составных линий представляют собой *овалы* — замкнутые выпуклые плоские кривые, состоящие из последовательного ряда дуг монотонных кривых линий, у которых точки стыка (*вершины*) имеют общий центр кривизны.

Основные свойства овала:

- ♦ в каждой своей точке овал имеет одну определенную касательную;
- ♦ любому направлению на плоскости соответствует две и только две касательные, параллельные этому направлению;
- ♦ любой овал имеет не менее четырех точек, в которых его кривизна достигает максимума и минимума.

В элементарной геометрии овал рассматривается как фигура, состоящая из дуг двух одинаковых окружностей с внутренними сопряжениями между ними. Эта группа овалов относится к так называемым *коробовым кривым линиям*, т. е. линиям, состоящим из последовательных соединений дуг окружностей.

6.4. Циркульные кривые линии

6.4.1. Окружность

Циркульными кривыми линиями, как следует из названия, называются кривые, вычерчиваемые при помощи циркуля. При полном обороте циркуля образуется окружность; при неполном — дуга окружности, ее часть, заключенная между какими-либо двумя точками кривой линии.

Как известно из школьного курса геометрии, *окружностью* называют замкнутую плоскую кривую линию, представляющую собой геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки (*центра окружности*). Отрезок, соединяющий центр окружности с какой-либо ее точкой, называется *радиусом*. Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется *хордой*. Хорда, проходящая через центр окружности, называется *диаметром*.

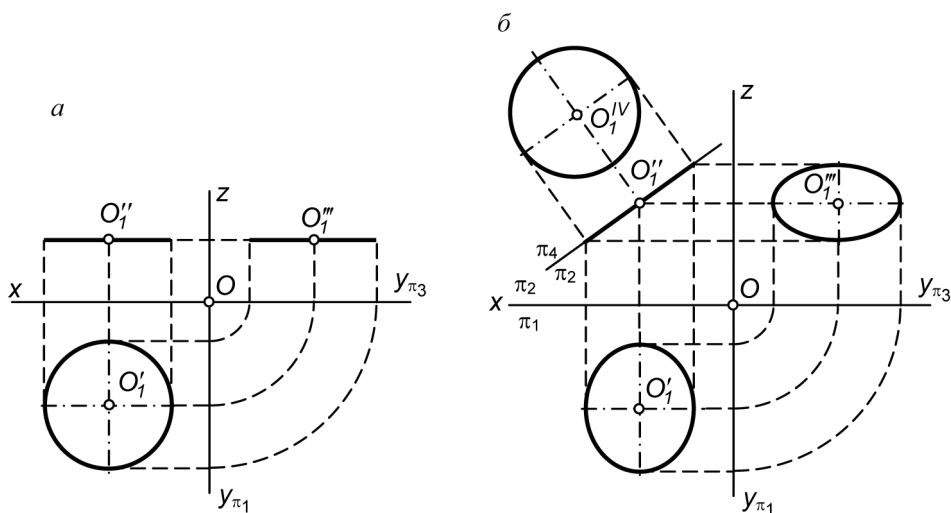


Рис. 6.27. Проецирование окружности, параллельной плоскости π_1 (а), и окружности, перпендикулярной плоскости π_2 (б)

Окружность иногда рассматривают как частный случай эллипса с коэффициентом сжатия, равным единице.

При проецировании окружности возможны следующие варианты:

- ❖ Окружность, плоскость которой параллельна какой-либо плоскости проекций, проецируется на эту плоскость в натуральную величину, а на две другие плоскости проекций — в виде отрезка прямой линии, длина которого равна диаметру окружности (рис. 6.27, *а*).
- ❖ Если плоскость окружности расположена перпендикулярно плоскости проекций, то на эту плоскость окружность проецируется в виде отрезка прямой линии, длина которого равна диаметру окружности, а на две другие плоскости проекций — в виде эллипса (рис. 6.27, *б*). В этом случае достаточно просто определить натуральную величину окружности путем введения дополнительной плоскости проекций π_4 , совпадающей с плоскостью окружности.
- ❖ Если окружность расположена в плоскости общего положения, то на все три плоскости проекций он проецируется в виде эллипса.

6.4.2. Коробовая линия

Коробовой или *центральной* линией называется составная плавная кривая, состоящая из последовательного ряда дуг окружностей с разными радиусами. В *вершинах* коробовой линии (*точках стыка*) может быть проведена только одна касательная.

Примером коробовой кривой линии может быть линия, построенная путем сопряжения двух окружностей. Рассмотрим построение некоторых коробовых линий.

Эвольвента многоугольника

В некоторых случаях эвольвенту окружности аппроксимируют коробовой линией, получаемой при замене окружности многоугольником. Эту кривую называют *эвольвентой многоугольника* или *завитком*, а сам многоугольник — "*глазком*". Получается кривая, приближающаяся по форме к спирали, но выполняемая дугами окружностей.

На рис. 6.28, *а* построен простейший *двухцентровый завиток*, образуемой "развертыванием" отрезка O_1O_2 длиной a . Из центра O_1 радиусом $R_1=a$ проводим полуокружность. Затем из центра O_2 описываем следующую полуокружность радиусом $R_2=2a$. Далее снова из центра O_1 радиусом $R_3=3a$ проводим следующую полуокружность и т. д. Точки сопряжений $1_0, 2_0, 3_0, \dots$ дуг завитка находятся на прямой, соединяющей центры окружностей.

На рис. 6.28, *б* дано построение *эвольвенты квадрата (четырёхцентрового завитка)* со стороной, равной a . Центры дуг окружностей лежат в вершинах квадрата $O_1, O_2, O_3, \dots$, а их радиусы соответственно равны $R_1=a, R_2=2a, R_3=3a, \dots$

Чем больше сторон многоугольника, по отношению к которому строится эвольвента многоугольника, тем ее очертание имеет более плавную форму. Стороны многоугольника направлены по нормальям к кривой, проведенным в точках сопряжения.

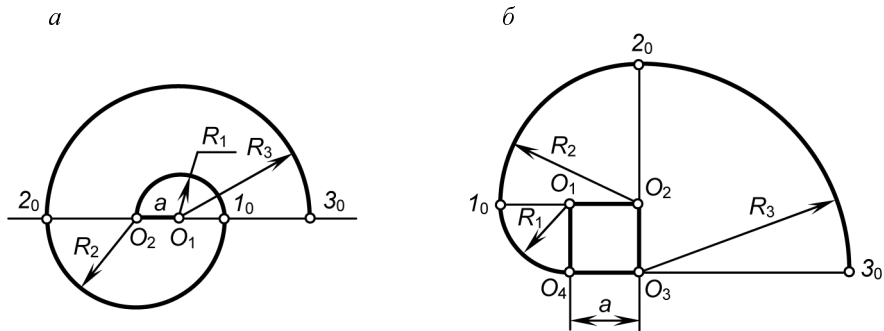


Рис. 6.28. Построение завитков:
а — двухцентровый завиток; б — эвольвента квадрата

Овалы и овоиды

Как мы уже отмечали, в узком смысле *овалом* называют плоскую замкнутую кривую линию из двух дуг окружностей (*опорных окружностей*) с внутренними сопряжениями между ними.

Длина овала *a* называется его *большой осью*, а ширина *b* — его *малой осью*. В зависимости от соотношения между центрами опорных окружностей *s* и их радиусом *r* различают:

- ♦ при $2r < s$ — *открытый овал* (рис. 6.29, а);
- ♦ при $2r = s$ — *замкнутый овал* (рис. 6.29, б);
- ♦ при $2r > s$ — *закрытый овал* (рис. 6.29, в).

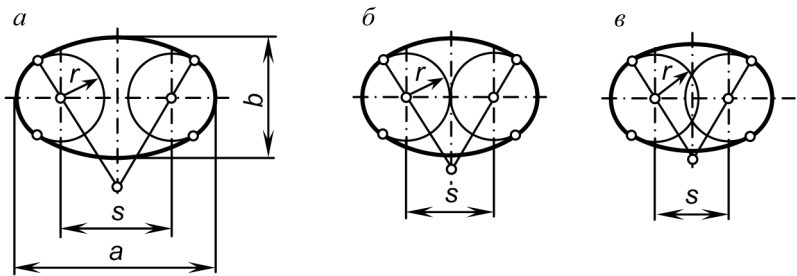


Рис. 6.29. Типы овалов

Рассмотрим построение овала, заданного размерами большой оси *a* и малой оси *b* (рис. 6.30, а). Соединяем вершины овала *C* и *A* и строим прямоугольный треугольник *ACE*. В треугольнике *ACE* проводим биссектрисы и из точки *K* пересечения биссектрис опускаем перпендикуляр к стороне *AC*. В пересечении этого перпендикуляра с прямыми *AB* и *CO* определяются центры *O*₁ и *O*₂ слагаемых дуг

окружностей. Из условия симметрии определяются центры O_3 и O_4 третьей и четвертой слагаемых дуг.

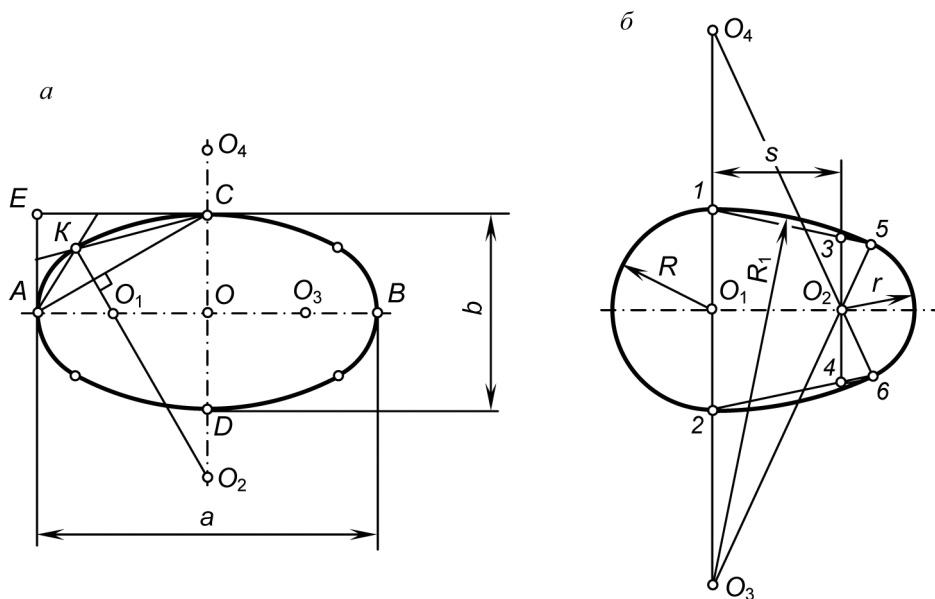


Рис. 6.30. Построение овала (а) и овоида (б)

Овалы, у которых опорные окружности имеют разные радиусы, называют *овоидами*. Центры сопрягаемых дуг овоида располагаются на центральной линии большей опорной окружности.

Рассмотрим построение овоида с заданными радиусами опорных окружностей R и r и расстоянием между центрами опорных окружностей s (рис. 6.30, б). Из отложенных на расстоянии s центров O_1 и O_2 заданными радиусами проводим полуокружности 12 и 34. Через концы полуокружностей (точки 1 и 3, 2 и 4) строим прямые, пересекающие малую опорную окружность в точках 5 и 6. Через точки 5 и O_2 , 6 и O_2 проводим прямые, пересекающие центровую линию большей опорной окружности в точках O_3 и O_4 . Из этих точек радиусом $R_1 = |O_3 1|$ построим дуги окружностей, сопрягающие в точках 1, 5, 2 и 6 опорные окружности. Полученная кривая — плавная и в точках 1, 5, 2 и 6 имеет по одной касательной.

6.4.3. Фигуры, ограниченные циркульными кривыми

Определенный интерес представляют фигуры, ограниченные дугами окружностей. В элементарной геометрии рассматривают две простейшие из них:

♦ *сегмент* — фигуру, ограниченную окружностью и ее хордой (рис. 6.31, а), и

♦ *сектор* — фигуру, ограниченную двумя радиусами и дугой, на которую они опираются (рис. 6.31, б).

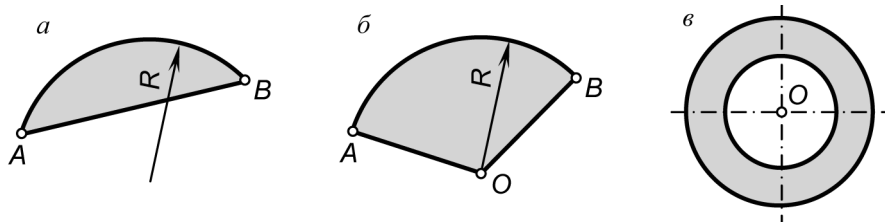


Рис. 6.31. Сегмент (а), сектор (б), кольцо (в)

Иногда фигуру, ограниченную двумя концентрическими окружностями, определяют как *кольцо* (рис. 6.31, в). Рассмотрим некоторые другие фигуры, ограниченные циркульными кривыми.

*Гиппократовы луночки*¹ — серповидные плоские фигуры образованные полуокружностями, построенными на катетах прямоугольного треугольника, и частями полуокружности, построенной на гипотенузе того же треугольника (рис. 6.32, а). Сумма площадей обеих луночек равна площади треугольника.

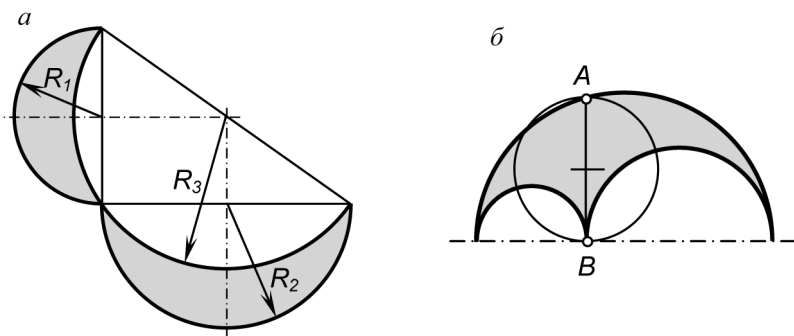


Рис. 6.32. Гиппократовы луночки (а) и арбелон (б)

Арбелон представляет собой плоскую фигуру, ограниченную тремя касающимися полуокружностями, центры которых лежат на одной прямой (рис. 6.32, б). Площадь арбелона равна площади круга диаметра AB .

Важным разделом геометрической теории выпуклых фигур является теория *кривых постоянной ширины*. Так называют кривую линию, для которой расстояние h между каждой парой параллельных касательных прямых (*опорных прямых*) одинаково. В действительности кривых постоянной ширины бесконечно много, однако наибольший интерес представляют собой циркульные кривые.

¹ Названы так по имени древнегреческого математика Гиппократы Хиосского, V в. до н. э.

Простейшей кривой постоянной ширины является окружность. Следующей самой простой кривой постоянной ширины считается *треугольник Рело* (рис. 6.33, а). Для его построения надо вычертить равносторонний треугольник со стороной a и провести дуги окружностей с центрами в вершинах радиусом $R=a$. Полученный "искривленный треугольник" обладает постоянной шириной, равной стороне треугольника.

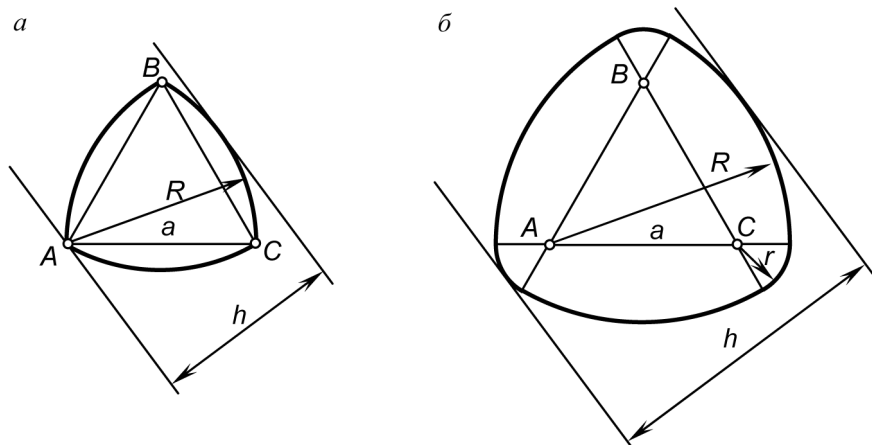


Рис. 6.33. Треугольники Рело

Углы треугольника Рело можно скруглить, проведя из вершин равностороннего треугольника со стороной, равной a , окружности радиуса r и сопрягая их дугами радиуса $R=a+r$ (рис. 6.33, б). Полученная кривая будет по всем направлениям иметь ширину, равную сумме радиусов дуг, описанных из каждой вершины.

Можно построить и другие симметричные кривые постоянной ширины, взяв вместо равностороннего треугольника любой правильный многоугольник с нечетным числом сторон и проделав над ним аналогичную процедуру.

6.5. Пространственные кривые

6.5.1. Общие сведения о пространственных кривых линиях

В отличие от плоских кривых, *пространственные кривые линии* или *кривые "двойкой кривизны"* не лежат всеми своими точками в одной плоскости. Так же как и плоские кривые, пространственные могут быть закономерными (алгебраическими или трансцендентными) и не закономерными.

В общем случае закономерная пространственная кривая описывается параметрическим уравнением²:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t),$$

где $x(t), y(t), z(t)$ — гладкие функции параметра t .

Алгебраической пространственной кривой называется кривая, которая задается как пересечение двух поверхностей в виде системы независимых и совместных уравнений $F(x, y, z) = 0$ и $G(x, y, z) = 0$. С точки зрения геометрии порядок пространственной алгебраической прямой определяется как число точек ее пересечения с произвольной плоскостью.

В качестве примера алгебраической пространственной кривой приведем *гиппопеду Евдокса* или *лошадиную кривую* — кривую, образующуюся при пересечении поверхности кругового цилиндра с поверхностью шара, при этом крайняя образующая цилиндра является касательной к поверхности шара (рис. 6.34, а). В частном случае, когда радиус цилиндра вдвое меньше радиуса сферы, образуется *вивиана* или *кривая Вивиани* (рис. 6.34, б).

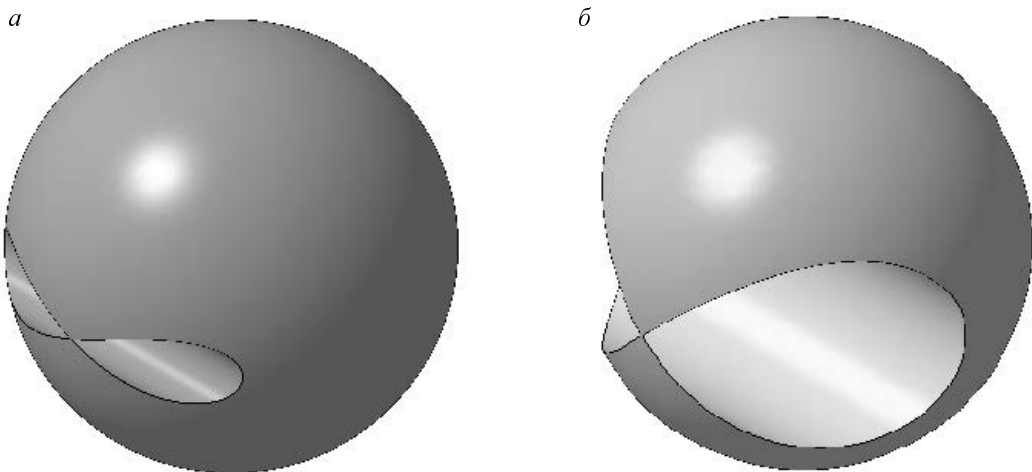


Рис. 6.34. Гиппопеда Евдокса (а) и ее частный случай — вивиана (б)

Проекция гиппопеды Евдокса на плоскость, касательную к шару и цилиндру, представляет собой уже знакомую нам лемнискату Бернулли (рис. 6.35).

Наиболее важными трансцендентными пространственными кривыми являются винтовые линии — о них будет рассказано далее более подробно.

Определение касательной к пространственной кривой аналогично определению касательной к плоской кривой (рис. 6.36): касательной t в точке K пространственной кривой a называется предельное положение секущей KT , когда точка T , оставаясь на кривой a , стремится к точке K .

² Такие кривые исследуют алгебраическими методами и методами математического анализа в аналитической и дифференциальной геометрии.

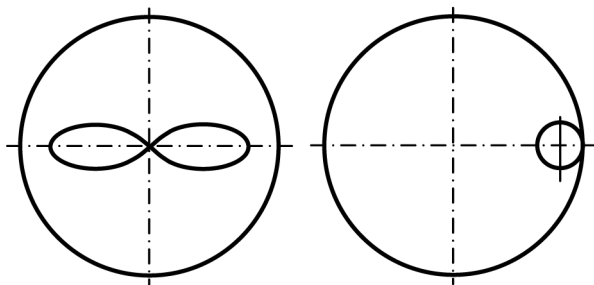


Рис. 6.35. Фронтальная и профильная проекции гиппопеды Евдокса

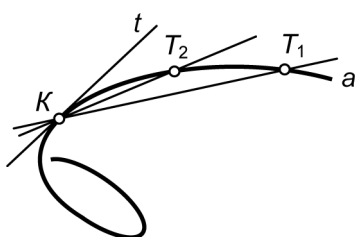


Рис. 6.36. Касательная t к пространственной кривой a

Так же, как и для плоской кривой, касательная к кривой в пространстве проецируется в касательную к проекции этой кривой (рис. 6.37).

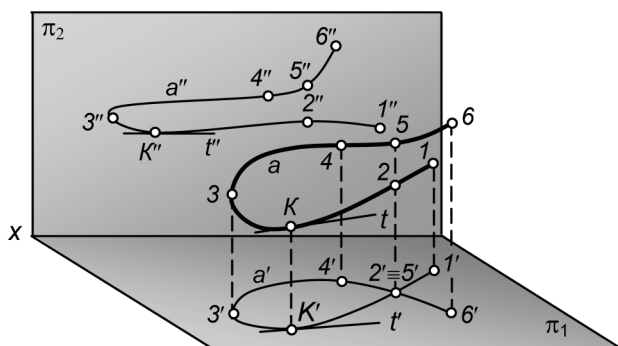


Рис. 6.37. Проецирование касательной t к пространственной кривой a

Обратное утверждение, однако, не верно. Прямая является только тогда касательной к пространственной кривой, когда две ее проекции являются касательными к проекциям кривой.

Любая плоскость, проходящая через касательную к пространственной кривой, называется касательной плоскостью кривой. Через некоторую касательную можно

провести бесчисленное множество касательных плоскостей, среди которых выделяют соприкасающуюся плоскость и спрямляющую плоскость.

Соприкасающейся плоскостью кривой линии называют предельное положение плоскости в некоторой точке пространственной кривой линии, проходящей через эту точку и две другие, принадлежащие кривой и бесконечно приближающиеся к первой точке. Поясним определение соприкасающейся плоскости на примере.

На рис. 6.38, а изображена пространственная кривая a , к которой в точке K проведена касательная t . Вблизи точки K на кривой выбраны еще две точки A и B , и через точки K и A , K и B проведены секущие прямые b и c . Эти пересекающиеся в точке K секущие определяют некоторую плоскость ε . При неограниченном приближении точек A и B к точке K секущие b и c будут стремиться к положению касательной t , а плоскость ε — к положению плоскости α . Плоскость α является соприкасающейся плоскостью кривой a в точке K .

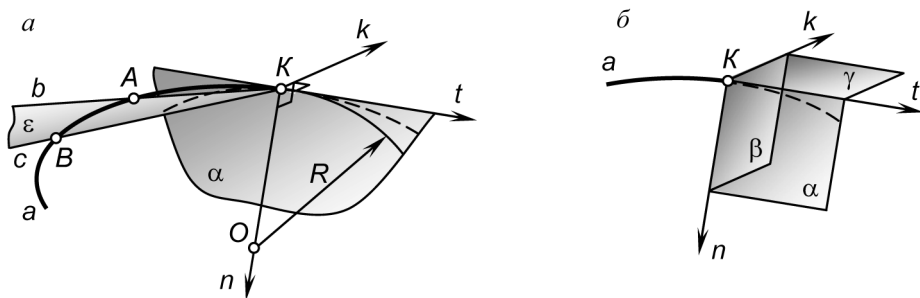


Рис. 6.38. Соприкасающаяся плоскость α (а) и подвижный триэдр (б)

Вблизи точки соприкосновения кривая расположена по разные стороны от соприкасающейся плоскости. Окружность, проведенная через точку K и бесконечно сближающиеся к ней точки A и B , называется *соприкасающейся окружностью*. Нормаль n , лежащая в соприкасающейся плоскости, называется *главной нормалью*; нормаль k , перпендикулярная соприкасающейся плоскости, — *бинормалью*.

Плоскость γ , проходящая через касательную t и бинормаль k , называется *спрямляющей плоскостью* кривой линии, а плоскость β , проходящая через главную нормаль n и бинормаль k , — *нормальной плоскостью* (рис. 6.38, б). Касательная t , главная нормаль n и бинормаль k образуют трехгранный угол, известный как *триэдр*³ кривой линии. Иногда триэдром называют систему единичных векторов, направленных по этим прямым.

Так как направление этих прямых при движении точки по кривой линии меняется, то говорят о подвижном (или сопровождающем) триэдре кривой линии. По-

³ В учебной литературе используются также синонимы термина "триэдр" — основной трехгранник или трехгранник Френе.

ложение некоторой точки кривой линии в пространстве однозначно определяется положением триэдра в этой точке, поэтому анализ положения триэдра применяется в теории пространственных кривых линий.

Интенсивность искривления пространственной линии определяется двумя характеристиками:

- ♦ величиной отклонения от прямой, являющейся касательной к этой кривой (она называется просто *кривизной* или *первой кривизной*);
- ♦ величиной отклонения от соприкасающейся плоскости (эту величину называют *кручением*, или *кривизной кручения*, или *второй кривизной* пространственной кривой линии).

Поэтому пространственные кривые линии иногда называют как *линии "двойкой кривизны"*.

Радиус R соприкасающейся окружности (см. рис. 6.38, а) определяет радиус кривизны пространственной кривой линии, а обратная ей величина — кривизну этой линии. Соприкасающаяся окружность всегда лежит в соприкасающейся плоскости, а ее центр — на главной нормали, проведенной из точки касания.

На рис. 6.39 приведена пространственная кривая b , к которой через точки K_1 и K_2 проведены две соприкасающиеся плоскости — соответственно плоскости α_1 и α_2 . Средним кручением дуги K_1K_2 является отношение величины линейного угла φ между соприкасающимися плоскостями, проведенными в точках K_1 и K_2 , к длине этой дуги. Линейный угол между соприкасающимися плоскостями может быть измерен углом между бинормальными к кривой b в точках K_1 и K_2 .

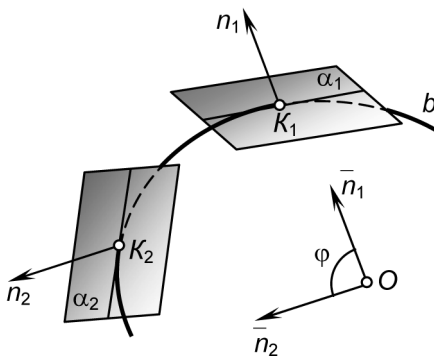


Рис. 6.39. Пространственная кривая b и две соприкасающиеся плоскости α_1 и α_2

Предельное положение среднего кручения при стремлении точки K_2 к точке K_1 называется *кручением* кривой b в точке K_1 . Чем меньше величина кручения, тем она ближе располагается к соприкасающейся плоскости. Для плоской кривой линии кручение во всех ее точках равно нулю, т. к. кривая целиком лежит в одной плоскости — общей соприкасающейся плоскости всех ее точек.

6.5.2. Винтовые линии

Свойства винтовых линий

Винтовой линией называется пространственная кривая линия, являющаяся траекторией точки, которая равномерно вращается вокруг неподвижной прямой (оси винтовой линии) и одновременно перемещается поступательно вдоль этой оси.

Винтовая линия может быть *правой* (с правым ходом) или *левой* (с левым ходом). Винтовая линия называется правой, если при подъеме она закручивается в направлении против движения часовой стрелки. В обратном случае винтовая линия является левой.

Величина перемещения вдоль оси винтовой линии, соответствующая одному полному обороту вокруг оси, называется *шагом*, а длина дуги, соответствующая полному обороту точки вокруг оси, — *витком*. Если величина перемещения точки вдоль оси прямо пропорциональна угловым перемещениям, то винтовая линия имеет постоянный шаг. Если перемещение образующей точки вдоль оси происходит по своему закону, то образуется винтовая линия с переменным шагом.

Угол наклона касательной, проведенной в некоторой точке винтовой линии к плоскости, перпендикулярной оси, называется *углом подъема* винтовой линии.

В зависимости от вида поверхности, по которой происходит перемещение образующей точки, винтовые линии подразделяются на цилиндрические, конические и глобоидные винтовые линии.

Цилиндрическая винтовая линия

Цилиндрическая винтовая линия или *гелиса* образуется при движении точки по поверхности кругового цилиндра (рис. 6.40).

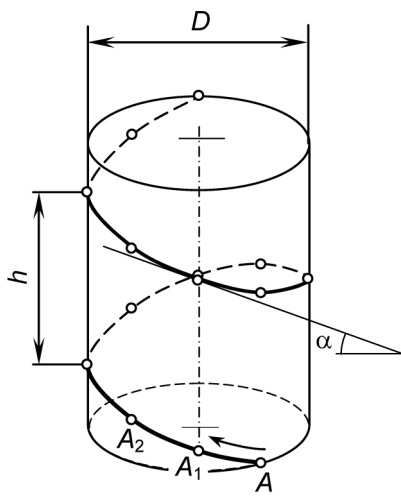


Рис. 6.40. Цилиндрическая винтовая линия

Диаметр цилиндра D и размер шага h являются параметрами цилиндрической винтовой линии.

При равномерном перемещении точки по поверхности цилиндра она совершает сложный вид движения, состоящего из вращательного движения по окружности и поступательного перемещения, перпендикулярного этой окружности. При повороте на некоторый угол ϕ точка A переместится в точку A_1 , а величина ее поступательного перемещения вдоль оси будет равна

$$\Delta h = \frac{h\phi}{360^\circ},$$

где h — шаг цилиндрической винтовой линии.

При этом ее горизонтальная проекция будет перемещаться по окружности, а фронтальная — по синусоиде.

Построение фронтальной проекции цилиндрической винтовой линии проводится аналогично построению синусоиды (рис. 6.41). Окружность основания цилиндра на горизонтальной плоскости проекций делится на n равных частей (например, на двенадцать). Отрезок оси цилиндра, равный шагу h винтовой линии, делится на то же количество n равных частей. Фронтальные проекции точек, лежащих на винтовой линии, находятся в пересечении горизонтальных и вертикальных прямых, проведенных через соответствующие точки деления.

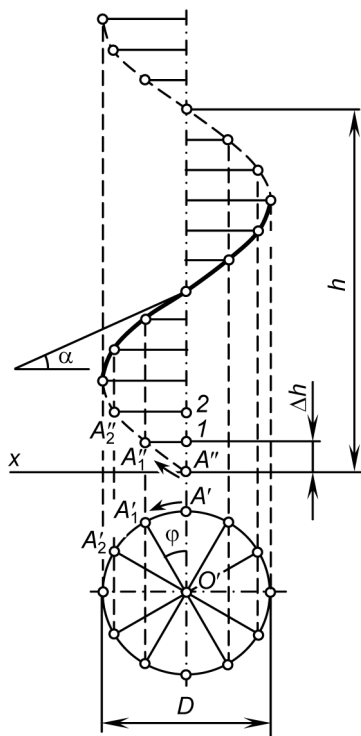


Рис. 6.41. Построение цилиндрической винтовой линии

На горизонтальной проекции точка при ее подъеме вращается против часовой стрелки, следовательно, построенная цилиндрическая винтовая линия является правой.

Перечислим основные свойства цилиндрической винтовой линии:

- ✧ На плоскость проекций, перпендикулярную оси, цилиндрическая винтовая линия проецируется в окружность; на плоскость проекций, параллельную оси, — в синусоиду.
- ✧ Угол подъема α цилиндрической винтовой линии с постоянным шагом h не изменяется и может быть определен по формуле

$$\alpha = \arctg\left(\frac{h}{\pi D}\right).$$

- ✧ Винтовая линия пересекает все образующие цилиндра под постоянным углом, равным $90^\circ - \alpha$.
- ✧ Кривизна и кручение цилиндрической винтовой линии во всех ее точках постоянны.
- ✧ Цилиндрическая винтовая линия обладает симметрией переноса в направлении по ее оси на расстояние, равное шагу; при этом две симметричные дуги полностью совпадают при наложении друг на друга.

Коническая винтовая линия

Коническая винтовая линия образуется при движении точки по поверхности кругового конуса. При этом точка совершает равномерное поступательное движение по образующей конуса, которая в свою очередь равномерно вращается вокруг оси конуса (рис. 6.42). Размеры конуса (например, диаметр его основания D и высота H), а также размер шага h являются параметрами конической винтовой линии. Иногда *шагом* конической винтовой линии называют расстояние h_1 между точками смежных витков, измеренное по образующей.

Для построения проекций конической винтовой линии окружность основания конуса делится на n равных частей (например, на двенадцать), и через точки деления проводятся образующие конуса (рис. 6.43). На оси винтовой линии откладывается отрезок, равный ее шагу h , который делится на то же количество n равных частей. В пересечении горизонтальных прямых, проведенных из точек деления шага, с соответствующими образующими конуса находятся фронтальные проекции точек, принадлежащих искомой винтовой линии. По фронтальным проекциям этих точек строятся их горизонтальные проекции.

На горизонтальной проекции точка при ее подъеме вращается по часовой стрелке, следовательно, построенная коническая винтовая линия является левой.

Перечислим основные свойства конической винтовой линии:

- ✧ На плоскость проекций, перпендикулярную оси, коническая винтовая линия проецируется в архимедову спираль; на плоскость проекций, параллельную оси, — в синусоиду с затухающей амплитудой.

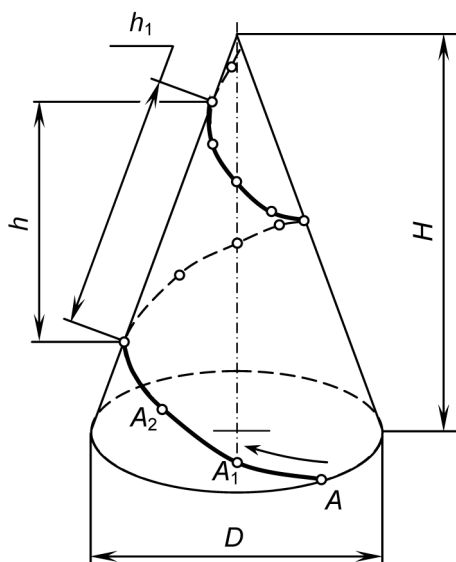


Рис. 6.42. Коническая винтовая линия

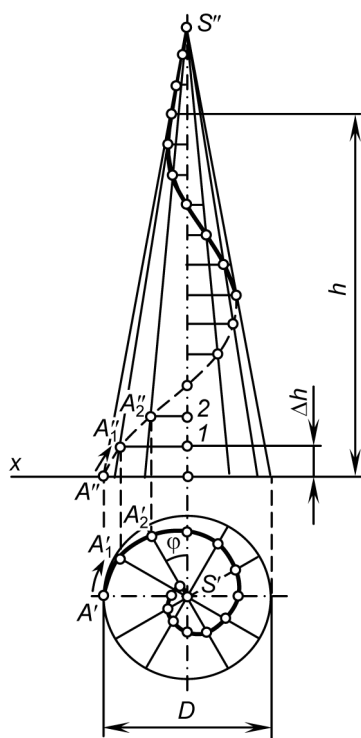


Рис. 6.43. Построение конической винтовой линии

- ◆ Угол подъема конической винтовой линии, имеющей постоянный шаг, не изменяется.
- ◆ Коническая винтовая линия пересекает все образующие под одинаковым углом.

Глобоидная винтовая линия

Глобоидная винтовая линия образуется движением точки, которая перемещается по поверхности глобоида (тела, ограниченного при вращении дуги окружности), равномерно вращаясь вокруг его оси и одновременно перемещаясь поступательно вдоль этой оси. Правила построения глобоидной винтовой линии общие для винтовых линий (рис. 6.44).

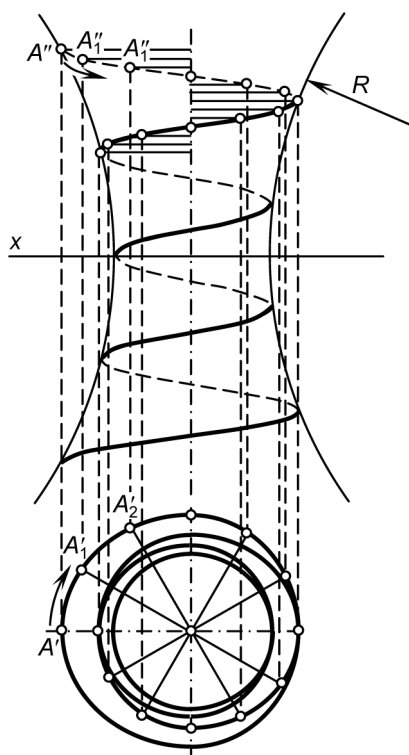
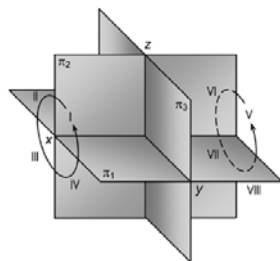


Рис. 6.44. Глобоидная винтовая линия

ГЛАВА 7



Многогранники

7.1. Общие сведения о геометрических телах и многогранниках

Часть пространства, ограниченная замкнутой поверхностью, называется *геометрическим телом*. Геометрические тела делятся на тела, ограниченные многогранной поверхностью, и тела, ограниченные кривой поверхностью. В общем случае *многогранная* или *гранная поверхность* образуется при пересечении двух и более плоскостей (рис. 7.1).

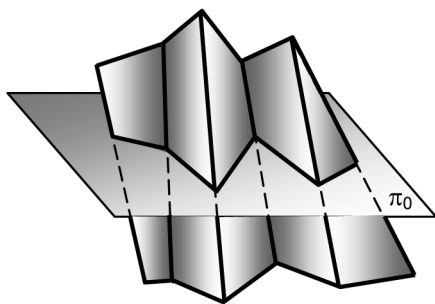


Рис. 7.1. Многогранная поверхность

Под *многогранниками* подразумевают тела, ограниченные многогранной поверхностью так, что каждая сторона любого из многоугольников, из которых состоит эта поверхность, является одновременно стороной другого (но только одного). Многоугольники, ограничивающие многогранник, называются *гранями*, их стороны — *ребрами*, а вершины — *вершинами* многогранника. Совокупность всех ребер многогранника называют его *сеткой*.

Многогранник называется *выпуклым*, если весь он лежит по одну сторону от плоскости любой его грани; при этом его грани являются выпуклыми многоугольниками (рис. 7.2, а). В противном случае — многогранник *невыпуклый* (рис. 7.2, б).

Наиболее важными выпуклыми многогранниками являются пирамида, призма, призматойд, а также правильные и полуправильные многогранники.

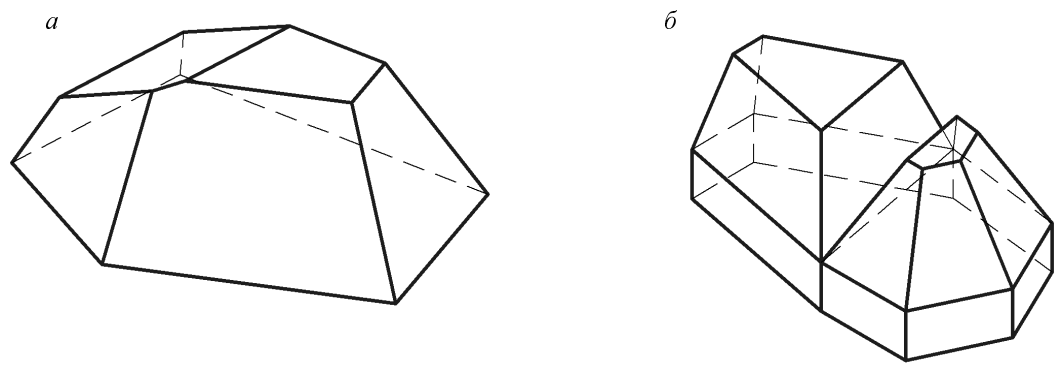


Рис. 7.2. Выпуклый (а) и невыпуклый многогранники (б)

Построение проекций многогранника сводится к построению проекций его сетки (рис. 7.3).

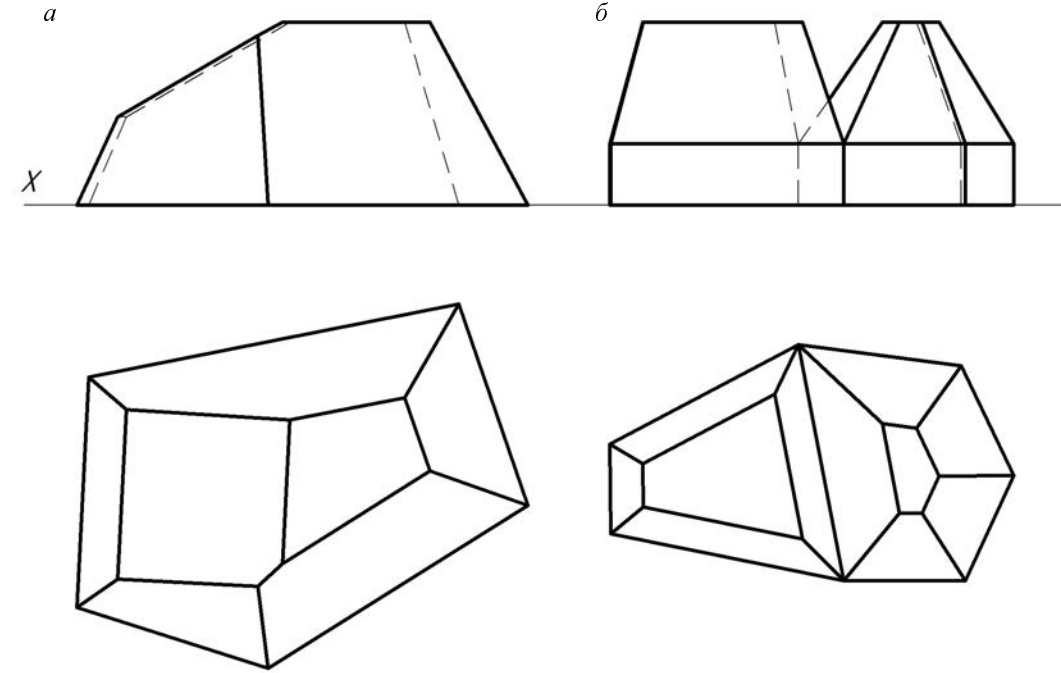


Рис. 7.3. Сетка выпуклого (а) и невыпуклого (б) многогранников

Оно может производиться по заданным проекциям его вершин или нескольких граней. На эюре сетка многогранника показывается с учетом условного обозначе-

ния взаимной видимости геометрических объектов. Наружный очерк проекции многогранника называют *контуром* тела по отношению к выбранной плоскости проекций.

7.2. Пирамида и бипирамида

Пирамида — это выпуклый *многогранник*, одной из граней которого служит многоугольник (*основание* пирамиды), а остальные грани (*боковые*) — треугольники с общей вершиной, которая называется *вершиной* пирамиды. Отрезки, соединяющие вершину пирамиды с вершинами основания, называются *боковыми ребрами*. Перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость ее основания, называется *высотой* пирамиды.

Пирамида называется *прямой*, если ее вершина ортогонально проецируется в центр тяжести основания (рис. 7.4, а). В противном случае пирамида называется *наклонной* (рис. 7.4, б). Прямая пирамида называется *правильной*, если в ее основании лежит правильный многоугольник. *Осью* правильной пирамиды называется прямая, содержащая ее высоту. Боковые ребра правильной пирамиды равны, а боковые грани являются равнобедренными треугольниками. Высота боковой грани правильной пирамиды называется *апофемой*.

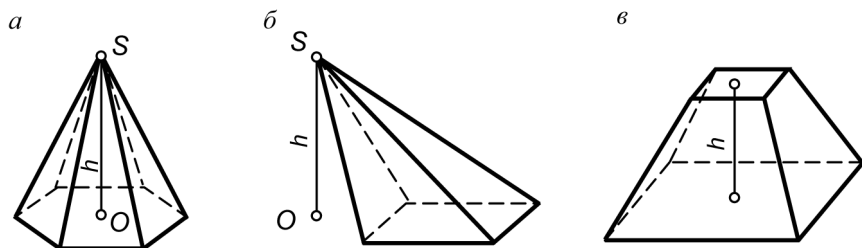


Рис. 7.4. Разновидности пирамиды:
а — прямая правильная; б — наклонная; в — усеченная

В зависимости от количества сторон многоугольника, лежащего в основании, пирамиды делятся на треугольные, четырехугольные и т. д. Частным случаем треугольной правильной пирамиды является тетраэдр.

Часть пирамиды, заключенная между ее основанием и сечением, параллельным основанию, называется *усеченной* пирамидой (рис. 7.4, в). Грани усеченной пирамиды, лежащие в параллельных плоскостях, называются *основаниями*. Боковые грани усеченной пирамиды представляют собой трапеции.

Для построения ортогональных проекций можно задаться:

- ✧ для прямой пирамиды — проекциями ее основания и высотой;
- ✧ для наклонной пирамиды — проекциями ее основания и вершины;
- ✧ для усеченной пирамиды — проекциями обоих оснований.

При этом пирамиду целесообразно располагать так, чтобы ее основание было параллельно или принадлежало плоскости проекций.

На рис. 7.5 изображена наклонная треугольная пирамида с основанием, лежащим в горизонтальной плоскости проекций. На этом же рисунке показано построение фронтальной проекции некоторой точки K , лежащей в грани SAB заданной пирамиды, если известна ее горизонтальная проекция K' . Для этого через вершину S и точку K проведена вспомогательная прямая. В пересечении горизонтальной проекции $S'K'$ этой прямой с горизонтальной проекцией ребра AB образуется точка L' . Далее проведена линия проекционной связи и построена фронтальная проекция L'' ($L'' \in A''C''$). В пересечении прямой $S''L''$ и линии проекционной связи, проведенной из K' , находится искомая проекция K'' (ход построения указан стрелками).

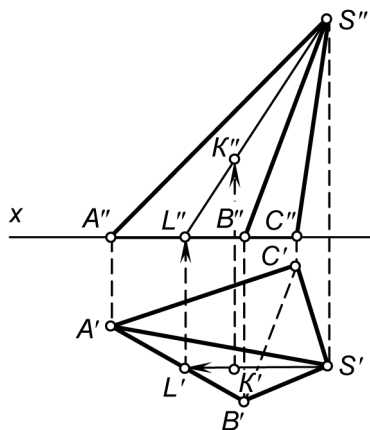


Рис. 7.5. Проекции наклонной треугольной пирамиды

Бипирамидой называют многогранник, состоящий из двух пирамид, имеющих общее основание. Бипирамида, состоящая из равных пирамид, называется *правильной*, в противном случае — *неправильной*.

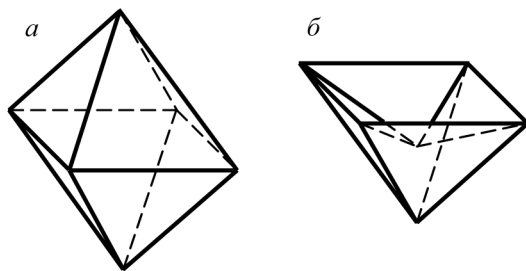


Рис. 7.6. Бипирамида: а — выпуклая; б — вогнутая

Если в основаниях пирамид лежит n -угольник, то число вершин бипирамиды равно $n + 2$, ребер — $3n$, граней — $2n$. Бипирамида может быть выпуклой (рис. 7.6, *а*) и невыпуклой или вогнутой (рис. 7.6, *б*). Четырехугольная бипирамида, все грани которой равносторонние треугольники, называется *октаэдром*.

7.3. Призма и призматойд

7.3.1. Призма

Призмой называется выпуклый многогранник, у которого две противоположные грани (*основания* призмы) — равные многоугольники с параллельными сторонами, а остальные грани (*боковые*) — параллелограммы. Основания призмы лежат в параллельных плоскостях, а боковые ребра равны и параллельны друг другу.

Перпендикуляр, проведенный между плоскостями, в которых лежат основания призмы, называется *высотой* призмы. Отрезок, соединяющий две вершины призмы, не принадлежащие одной грани, называется *диагональю* призмы.

Призма называется *прямой* (рис. 7.7, *а*), если боковые грани перпендикулярны плоскости основания, в противном случае призма называется *наклонной* (рис. 7.7, *б*). Боковыми гранями прямой призмы являются прямоугольники. Часть призмы, рассеченной плоскостью, не параллельной ее основанию, называют *усеченной призмой* (рис. 7.7, *в*).

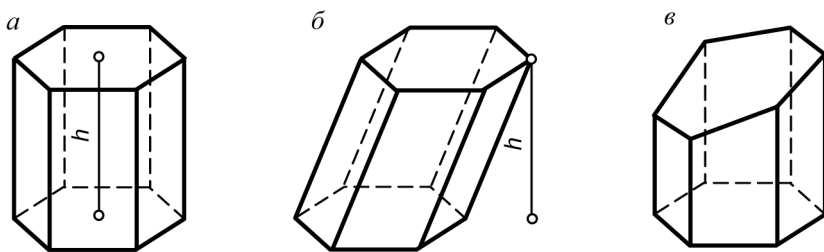


Рис. 7.7. Разновидности призмы: *а* — прямая, *б* — наклонная; *в* — усеченная

Прямую призму называют *правильной*, если ее основанием служит правильный многоугольник. Прямая правильная призма, боковыми гранями которой являются квадраты, называется *призмой Архимеда*.

По количеству сторон многоугольника, лежащего в основании, призмы делятся на треугольные, четырехугольные и т. д.

Для построения проекций призмы можно задаться:

- ♦ для прямой призмы одним из ее оснований и высотой;
- ♦ для наклонной призмы необходимо иметь или проекции обоих оснований (всех вершин) или проекции одного из оснований и одного бокового ребра.

На рис. 7.8 изображена наклонная треугольная призма: горизонтальные и фронтальные проекции боковых ребер параллельны между собой. На этом же рисунке показано построение некоторой точки K по ее фронтальной проекции (точка K лежит в грани $A_1A_2C_2C_1$). Для этого через точку K проведена вспомогательная прямая KL , параллельная боковым ребрам призмы: $K''L''$ параллельна фронтальным проекциям боковых ребер, а $K'L'$ параллельна горизонтальным проекциям боковых ребер. В пересечении линии проекционной связи, проведенной из K'' , и горизонтальной проекцией прямой $K'L'$ образуется точка K' (ход построений указан стрелками).

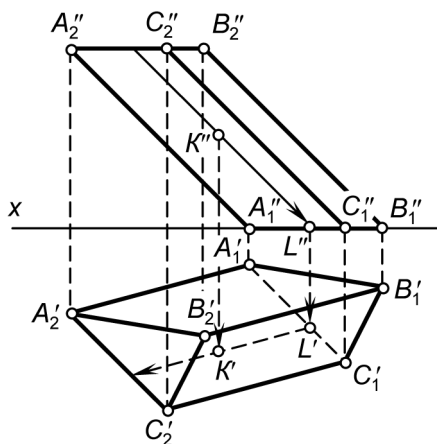


Рис. 7.8. Проекции наклонной треугольной призмы

Частным случаем четырехугольной призмы является параллелепипед.

7.3.2. Параллелепипед

Параллелепипедом называется четырехугольная призма, в основании которой лежит параллелограмм (рис. 7.9). Противоположные грани параллелепипеда попарно параллельны и равны между собой. Параллелепипед имеет 6 граней, 8 вершин и 12 ребер.

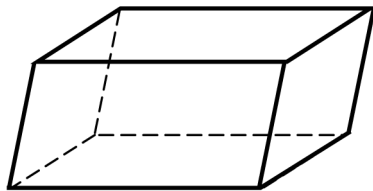


Рис. 7.9. Параллелепипед

Параллелепипед называется *прямым*, если его боковые ребра перпендикулярны плоскости основания (в этом случае боковые грани являются прямоугольниками). Прямой параллелепипед называется *прямоугольным*, если его основанием служит прямоугольник (в этом случае все грани — прямоугольники). Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам. Эта точка является центром симметрии параллелепипеда.

Частным случаем прямоугольного параллелепипеда является *куб* — правильный многогранник.

7.3.3. Призматойд

Призматойд — это многогранник, две грани которого (*основания* призматойда) расположены в параллельных плоскостях, а остальные грани (*боковые*) являются треугольниками или трапециями, вершинами которых служат вершины оснований. У треугольников, являющихся боковыми гранями призматойда, одна сторона, а у трапеций — оба основания являются сторонами оснований призматойда.

На рис. 7.10, *а* даны проекции призматойда, нижнее основание которого — прямоугольник, а верхнее — правильный треугольник. Одна его боковая грань — треугольник, а остальные — трапеции.

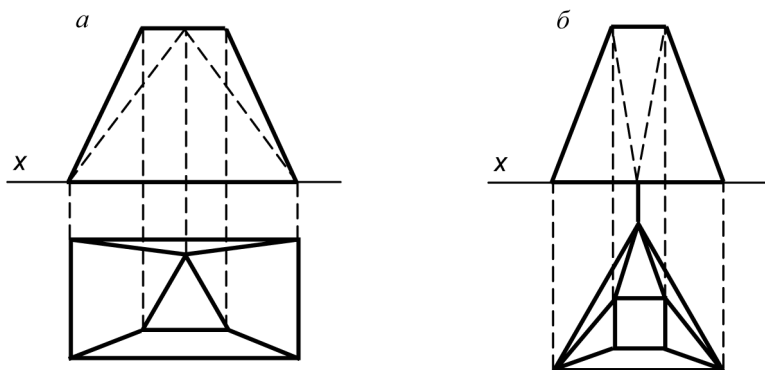


Рис. 7.10. Призматойды

На рис. 7.10, *б* приведен призматойд, у которого нижнее основание — правильный треугольник, а верхнее — квадрат. У этого призматойда одна боковая грань — трапеция, а остальные — треугольники.

Частным случаем призматойда является антипризма.

7.3.4. Антипризма

Антипризмой называется призматойд, верхнее и нижнее основания которого являются равными выпуклыми n -угольниками, развернутыми относительно друг друга на угол $180^\circ/n$, а боковые грани являются треугольниками (рис. 7.11).

Прямой антипризмой называется такая антипризма, центры оснований которой расположены на общем перпендикуляре к ним.

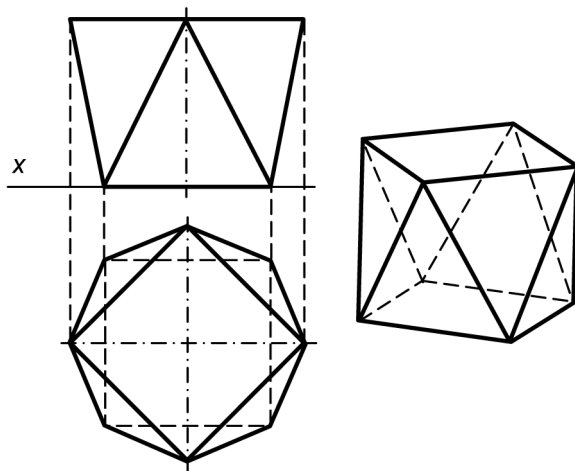


Рис. 7.11. Прямая антипризма

Если боковые грани прямой антипризмы являются правильными треугольниками, то она называется *антипризмой Архимеда* и относится к полуправильным многогранникам.

7.4. Правильные и полуправильные многогранники

Правильными многогранниками (иначе — *телами Платона*¹) называются выпуклые многогранники, у которых все грани являются равными правильными многоугольниками. Всего существует пять правильных многогранников (табл. 7.1):

- ◆ *тетраэдр* — правильная треугольная пирамида, все грани которой являются правильными треугольниками;
- ◆ *куб (гексаэдр)* — параллелепипед, все грани которого являются квадратами (три ребра куба, сходящиеся в одной вершине, взаимно перпендикулярны);
- ◆ *октаэдр* — правильная бипирамида, ограниченная восемью правильными треугольниками;
- ◆ *додекаэдр* — правильный многогранник, имеющий 12 пятиугольных граней;
- ◆ *икосаэдр* — правильный многогранник, имеющий 20 треугольных граней.

¹ Одно из древнейших упоминаний о правильных многогранниках находится в трактате Платона "Тимаус" (хотя известны они были задолго до Платона). Каждый из правильных многогранников Платон ассоциировал с четырьмя "земными" элементами: земля — куб, вода — икосаэдр, огонь — тетраэдр, воздух — октаэдр, а также с "неземным" элементом, небом — додекаэдр.

У правильных многогранников всегда существует описанная сфера, поскольку вершины правильного многогранника равноудалены от его центра (рис. 7.12, а), и во все правильные многогранники можно вписать сферу (рис. 7.12, б).

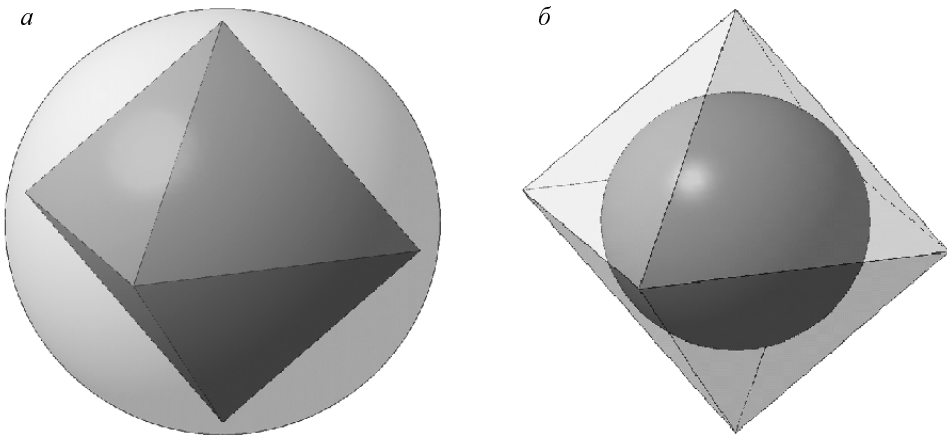
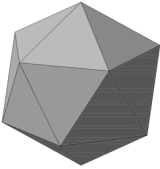


Рис. 7.12. Октаэдр, вписанный в сферу (а), и сфера, вписанная в октаэдр (б)

Таблица 7.1. Число вершин, ребер и граней правильных многогранников

Правильный многогранник	Общий вид	Число вершин	Число ребер	Число граней	Число сторон у каждой грани	Число ребер у каждой вершины
Тетраэдр		4	6	4	3	3
Куб (гексаэдр)		8	12	6	4	3
Октаэдр		6	12	8	3	4

Таблица 7.1 (окончание)

Правильный многогранник	Общий вид	Число вершин	Число ребер	Число граней	Число сторон у каждой грани	Число ребер у каждой вершины
Додекаэдр		20	30	12	5	3
Икосаэдр		12	30	20	3	5

Полуправильными многогранниками (иначе — телами Архимеда²) называют такие выпуклые многогранники, у которых группа поворотов вокруг центра тяжести переводит любую грань (вершину) в любую другую грань (вершину) этого многогранника. Все грани полуправильных многогранников являются правильными многоугольниками нескольких разных наименований (в отличие от правильных многогранников), а многогранные углы при вершинах конгруэнтны. Существует 13 специальных типов полуправильных многогранников, и две бесконечные серии — призма и антипризма Архимеда.

Призмой Архимеда называется прямая правильная призма, боковыми гранями которой являются квадраты, а антипризмой Архимеда — антипризма, у которой боковые грани являются правильными треугольниками. На рис. 7.13, а показана призма, а на рис. 7.13, б антипризма Архимеда, у которых в основании расположен правильный восьмиугольник. Можно сконструировать бесконечное множество подобных тел.

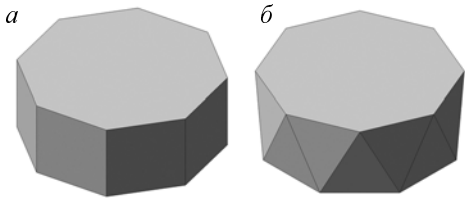
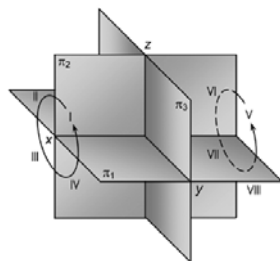


Рис. 7.13. Призма (а) и антипризма (б) Архимеда

² Названы по имени Архимеда, который в не дошедшем до нас сочинении доказал существование 13 типов полуправильных многогранников и две бесконечные серии. Теория полуправильных многогранников была восстановлена И. Кеплером (1619).

ГЛАВА 8



Кривые поверхности

8.1. Образование и типы кривых поверхностей

Поверхность является одним из основных понятий геометрии. В начертательной геометрии под *поверхностью* понимается совокупность всех последовательных положений некоторой перемещающейся в пространстве линии. Такие поверхности носят название *кинематических*, т. к. они образуются непрерывным движением. Линию, производящую поверхность, в каждом ее положении называют *образующей*.

В общем случае в зависимости от формы траектории, описываемой образующей линией, поверхности разделяются на *многогранные*, о которых шла речь в предыдущей главе, и *кривые поверхности*. Соответственно геометрические тела делятся на тела, ограниченные многогранной поверхностью, и тела, ограниченные кривой поверхностью.

При изображении кривой поверхности ограничиваются показом образующей линии лишь в некоторых ее положениях. В понятие "*проекция поверхности*" входит проекция контура (очертания или очерка) этой поверхности и проекции определяющих ее геометрических элементов (точек и линий).

На рис. 8.1 показан пример кривой поверхности, образованной путем поступательного движения образующей кривой линии *AB* на расстояние *l* в направлении *S*. На рисунке показано начальное и конечное положения кривой *AB*.

Если образующая линия перемещается в пространстве по некоторому закону, то кривая поверхность называется *закономерной*, в противном случае образуется *незакономерная* кривая поверхность.

При аналитическом способе задания закономерную поверхность можно рассматривать как геометрическое место точек, координаты которых в прямоугольной системе координат удовлетворяют некоторому заданному уравнению вида $F(x, y, z) = 0$. Если это уравнение является алгебраическим уравнением степени n , то поверхность называется *алгебраической поверхностью n -го порядка*. В частности, плоскость выражается уравнением первой степени, и ее можно назвать поверхно-

стью первого порядка. Поверхности второго порядка являются кривыми поверхностями.

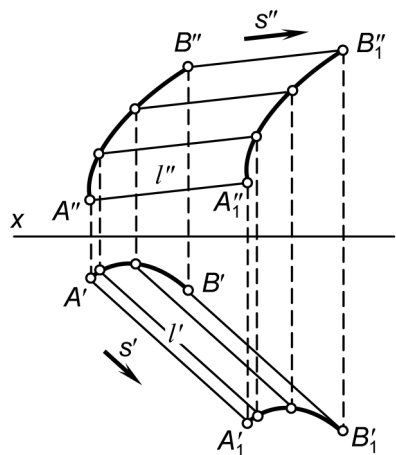


Рис. 8.1. Пример образования кривой поверхности

Если уравнение, описывающее поверхность, является трансцендентным, т. е. содержащим показательную, логарифмическую или тригонометрическую функции, то поверхность называется *трансцендентной*.

Незакономерные поверхности могут задаваться только графически при помощи некоторого количества линий, принадлежащих такой поверхности. К *незакономерным* поверхностям относятся *графические поверхности*.

Кривые поверхности в зависимости от того, могут они быть совмещены с плоскостью чертежа без разрывов и складок или нет, делятся на *развертываемые* и *неразвертываемые* поверхности (о разворачивании поверхностей рассказано в главе 10).

В зависимости от формы образующей линии кривые поверхности подразделяются на *линейчатые*, которые могут быть образованы движением прямой линии, и *нелинейчатые поверхности*.

Основные типы кривых поверхностей, а также их деление на линейчатые и нелинейчатые поверхности приведены в табл. 8.1.

Таблица 8.1. Кривые поверхности

Поверхность	Способ задания	Линейчатые	Нелинейчатые
Поверхность второго порядка	Алгебраическое уравнение второго порядка	Однополостный гиперболоид, гиперболический параболоид, цилиндрическая поверхность, коническая поверхность	Эллипсоид, двуполостный гиперболоид, эллиптический параболоид

Таблица 8.1 (окончание)

Поверхность	Способ задания	Линейчатые	Нелинейчатые
Поверхность вращения	Вращение линии вокруг некоторой оси	Однополостный гиперболоид вращения, круговая цилиндрическая поверхность, круговая коническая поверхность	Все остальные поверхности (тор, катеноид и др.)
Поверхность с плоскостью параллелизма	Движение прямой, параллельной заданной плоскости	Цилиндроид, коноид, гиперболический параболоид	Нет
Поверхность с ребром возврата	Движение прямой, являющейся касательной к кривой линии	Все поверхности	Нет
Циклическая поверхность	Движение окружности постоянного или переменного диаметра	Однополостный гиперболоид вращения, круговая цилиндрическая поверхность, круговая коническая поверхность	Все остальные поверхности
Графическая поверхность	При помощи линий, принадлежащих поверхности	Нет	Все поверхности
Поверхность переноса	Поступательное движение кривой линии	Гиперболический параболоид, цилиндрическая поверхность	Все остальные поверхности
Винтовая поверхность	Винтовое движение линии	Геликоид	Все остальные поверхности

Одна и та же кривая поверхность может быть образована перемещением различных линий и согласно различным условиям, которым должна подчиняться в своем перемещении образующая линия. Например, круговая цилиндрическая поверхность может рассматриваться как:

- ❖ поверхность второго порядка, описываемая алгебраическим уравнением

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1;$$

- ❖ поверхность вращения, образуемая при вращении прямой линии вокруг параллельной ей оси;
- ❖ поверхность с плоскостью параллелизма, образуемая перемещением прямой линии, во всех своих положениях параллельной заданной плоскости и пересекающей две окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных плоскости параллелизма;

- ◇ циклическая поверхность, полученная в результате перемещения окружности постоянного диаметра вдоль прямой, перпендикулярной плоскости этой окружности;
- ◇ поверхность переноса, образуемая в результате непрерывного поступательного движения окружности.

Если кривая поверхность может быть образована по нескольким законам, то из них выбирают тот, который является наиболее простым и удобным для ее изображения и решения задач, связанных с нею.

8.2. Поверхности второго порядка

8.2.1. Общие сведения о поверхностях второго порядка

Поверхностью второго порядка, как уже отмечалось ранее, называется поверхность, которую в прямоугольной системе координат можно выразить алгебраическим уравнением второй степени. Поверхность второго порядка может быть действительной или мнимой. *Мнимая* поверхность не определяет какого-либо геометрического образа, поэтому в начертательной геометрии рассматриваются только действительные поверхности второго порядка.

Поверхность второго порядка, имеющая центр симметрии, называется *центральной*.

Поверхности второго порядка в зависимости от коэффициентов, определяющих ее алгебраическое уравнение, подразделяются на следующие типы:

- ◇ *эллиптическая поверхность* (эллипсоид),
- ◇ *гиперболическая поверхность* (однополостный или двуполостный гиперboloид),
- ◇ *параболическая поверхность* (эллиптический или гиперболический параболоид),
- ◇ *цилиндрическая поверхность* (эллиптическая, гиперболическая или параболическая),
- ◇ *коническая поверхность*.

К линейчатым поверхностям относятся однополостной гиперboloид, гиперболический параболоид, цилиндрическая и коническая поверхности. К нелинейчатым поверхностям относятся эллипсоид, эллиптический параболоид и двуполостной гиперboloид.

Из поверхностей второго порядка к развертываемым поверхностям относятся только цилиндрическая и коническая, остальные являются неразвертываемыми.

Некоторые поверхности второго порядка могут быть образованы путем вращения кривой линии второго порядка вокруг ее действительной или мнимой оси. В этом случае они называются *поверхностями вращения второго порядка*. К ним относятся:

- ◇ эллипсоид вращения (в частности, сфера);

- ◆ гиперболоид вращения (однополостной и двуполостной);
- ◆ параболоид вращения;
- ◆ круговая цилиндрическая поверхность;
- ◆ круговая коническая поверхность.

Сечение поверхности второго порядка любой плоскостью представляет собой линию второго порядка.

8.2.2. Эллипсоид

Эллипсоид представляет собой замкнутую центральную поверхность второго порядка и может быть получен в результате движения деформирующегося эллипса. Эллипсоид имеет три оси симметрии, проходящие через его центр.

Хорды $2a$, $2b$ и $2c$ (рис. 8.2), лежащие на осях симметрии, называются *осями* эллипсоида. В зависимости от соотношения длин осей различают:

- ◆ $2a \neq 2b \neq 2c$ — *трехосный* эллипсоид;
- ◆ $2a = 2b > 2c$ — *сжатый* эллипсоид вращения (*сфероид*);
- ◆ $2a > 2b = 2c$ — *вытянутый* эллипсоид вращения;
- ◆ $2a = 2b = 2c$ — *сфера*.

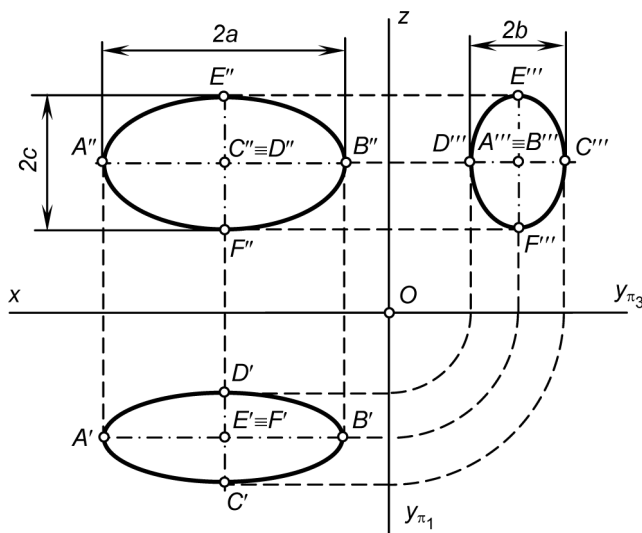


Рис. 8.2. Проекция трехосного эллипсоида

Поверхности сжатого и вытянутого эллипсоидов вращения могут быть получены в результате вращения эллипса вокруг его соответственно малой и большой осей (рис. 8.3). В этом случае эллипсоид можно рассматривать как поверхность вращения.

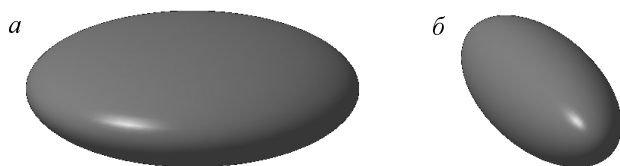


Рис. 8.3. Сжатый (а) и вытянутый (б) эллипсоиды вращения

Для того чтобы получить горизонтальную проекцию произвольной точки K , заданную фронтальной проекцией K'' и лежащей в направлении на плоскость π_2 на видимой поверхности сжатого эллипсоида вращения, необходимо построить сечение вспомогательной горизонтальной плоскостью ε (рис. 8.4, а). На горизонтальной плоскости проекций это сечение спроецируется в окружность. Искомая проекция K' лежит в пересечении построенной окружности и линии связи, проведенной из K'' .

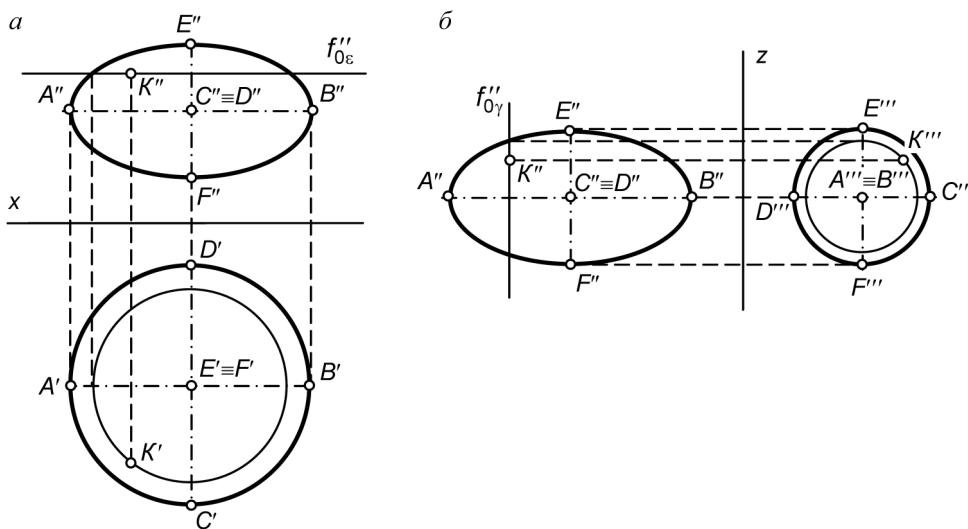


Рис. 8.4. Построение недостающей проекции точки, лежащей на поверхности сжатого (а) и вытянутого (б) эллипсоидов вращения

Аналогично строится недостающая профильная проекция точки, лежащей на поверхности вытянутого эллипсоида вращения (рис. 8.4, б).

В сечении эллипсоида любой секущей плоскостью образуется эллипс (в частном случае — окружность). Эллипсоид относится к неразвертываемым поверхностям.

8.2.3. Гиперболоид

Гиперболоид — незамкнутая центральная поверхность второго порядка. Гиперболоид может быть образован перемещением деформирующегося эллипса в направлении, перпендикулярном его плоскости.

Существует два вида гиперboloида, состоящие из одной или двух частей — *полостей*. Поэтому их разделяют на *однополостные* и *двуполостные*.

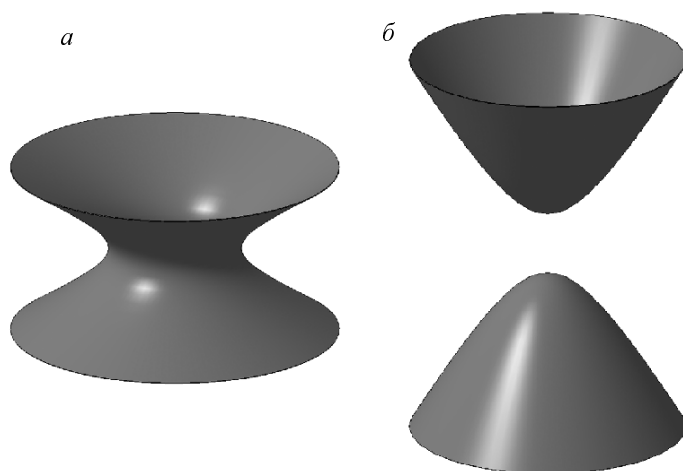


Рис. 8.5. Однополостной (а) и двуполостной (б) гиперboloида вращения

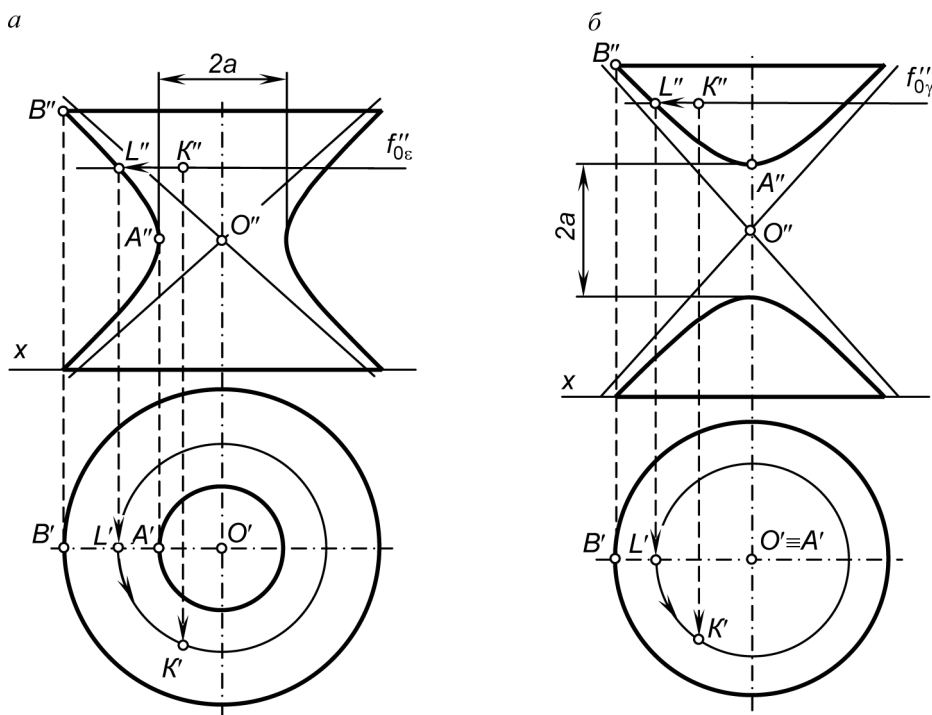


Рис. 8.6. Построение недостающей проекции точки, лежащей на поверхности однополостного (а) и двуполостного (б) гиперboloидов вращения

Гиперболоид вращения может быть получен в результате вращения гиперболы (образующей) вокруг ее мнимой или действительной осей. В первом случае образуется однополостный гиперболоид вращения (рис. 8.5, а), во втором — двуполостный гиперболоид вращения (рис. 8.5, б).

Для получения горизонтальной проекции произвольной точки K , заданной фронтальной проекцией K'' и лежащей в направлении на плоскость π_2 на видимой поверхности однополостного гиперболоида, необходимо построить сечение плоскостью ε (рис. 8.6, а). На горизонтальной плоскости проекций это сечение спроецируется в окружность. Искомая проекция K' лежит в пересечении построенной окружности и линии связи, проведенной из K'' .

Аналогично строится недостающая проекция точки, лежащей на поверхности двуполостного гиперболоида (рис. 8.6, б).

Наименьшая параллель (т. е. сечение в плоскости, перпендикулярной оси) — *горло* однополостного гиперболоида находится в плоскости, проходящей через вершину A образующей гиперболы и центр гиперболы O . Диаметр горла однополостного гиперболоида равен $2a$ — длине большей оси образующей гиперболы.

Кратчайшее расстояние между полостями двуполостного гиперболоида также равно $2a$. Как для однополостного, так и двуполостного гиперболоидов *меридианом* (т. е. сечением в плоскости, параллельной оси) является гипербола. Оба вида гиперболоида являются неразвертываемыми поверхностями.

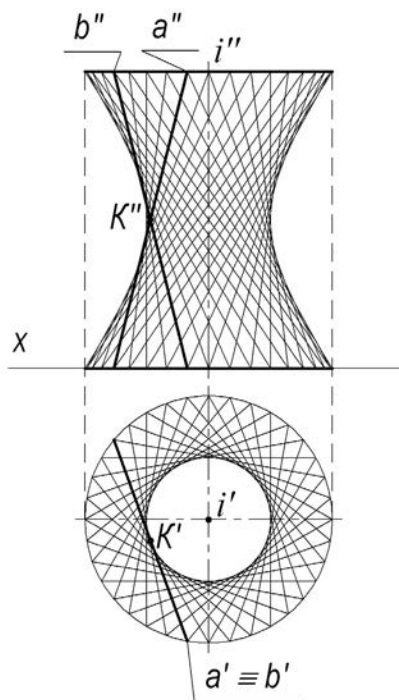


Рис. 8.7. Однополостный гиперболоид, заданный каркасом

Однополостной гиперболоид может быть также получен в результате вращения прямой вокруг скрещивающейся с ней оси, поэтому он относится и к линейчатым поверхностям (рис. 8.7). Через каждую точку однополостного гиперболоида можно провести две прямолинейные образующие, целиком лежащие на его поверхности. Эти прямые принадлежат двум сериям образующих, из которых может быть составлен каркас поверхности гиперболоида.

8.2.4. Параболоид

Параболоид является незамкнутой нецентральной поверхностью второго порядка. Существует два вида параболоида:

- ◆ *эллиптический* (рис. 8.8, а) и
- ◆ *гиперболический* или *косая плоскость* (рис. 8.8, б).

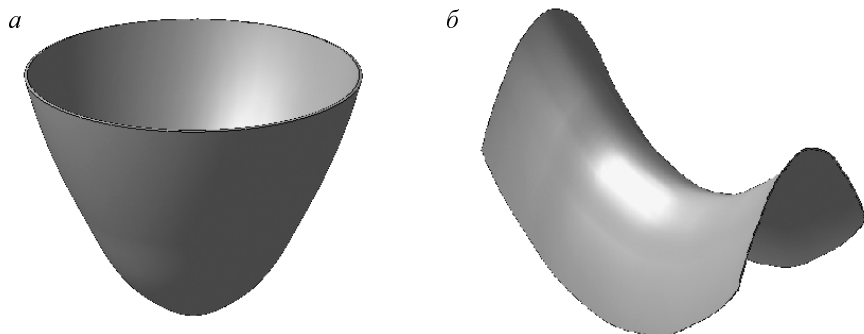


Рис. 8.8. Эллиптический (а) и гиперболический (б) параболоиды

Оба вида параболоида могут быть представлены как поверхности, описываемые при движении одной (подвижной) параболы вдоль другой (неподвижной) так, что вершина подвижной параболы скользит по неподвижной, а плоскость и ось подвижной параболы остаются все время параллельными сами себе. Эллиптический параболоид образуется, если обе параболы обращены "вогнутостью" в одну сторону; а гиперболический параболоид — если параболы обращены "вогнутостью" в разные стороны (поэтому он имеет вид седла).

Гиперболический параболоид может быть также образован при движении прямой по двум скрещивающимся прямым (направляющим) параллельно некоторой плоскости. Поэтому гиперболический параболоид можно рассматривать как одну из разновидностей поверхностей с плоскостью параллелизма.

Гиперболический параболоид является линейчатой поверхностью, через любую точку которой можно провести две прямые, принадлежащие ей, а эллиптический параболоид является нелинейчатой поверхностью. На рис. 8.9 построен каркас поверхности гиперболического параболоида, заданного двумя направляющими прямыми AB и CD и горизонтально-проецирующей плоскостью параллелизма α .

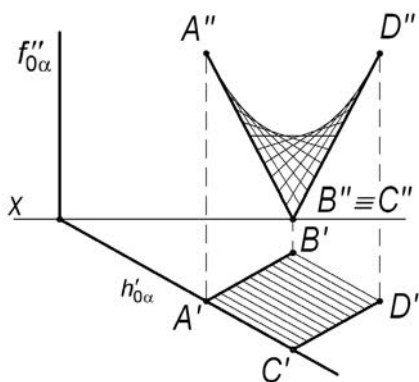


Рис. 8.9. Гиперболический параболоид, заданный каркасом

Параболоид вращения является частным случаем эллиптического параболоида, образующегося в результате вращения параболы вокруг ее оси (рис. 8.10).

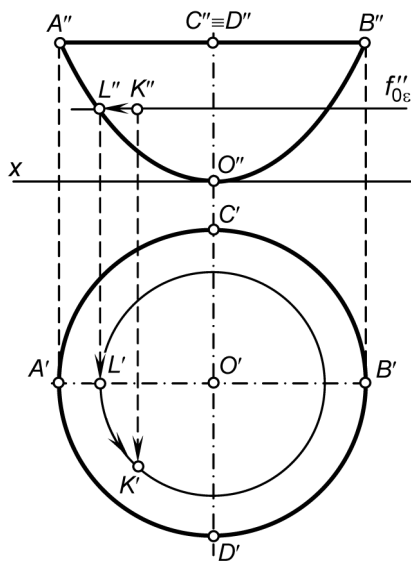


Рис. 8.10. Параболоид вращения

Меридианом параболоида вращения является парабола. Если по фронтальной проекции точки K (K'') требуется построить ее горизонтальную проекцию при условии, что точка лежит на видимой поверхности параболоида, то предварительно необходимо провести горизонтальную проекцию параллели (окружность соответствующего радиуса), а затем по линии связи определить положение K' .

Все разновидности параболоида являются неразвертываемыми поверхностями.

8.2.5. Цилиндрическая поверхность

Цилиндрическая поверхность образуется множеством прямых линий (*образующих*), параллельных заданному направлению и проходящих через все точки некоторой плоской кривой линии (*направляющей*). Цилиндрическая поверхность является линейчатой поверхностью и относится к так называемым развертываемым поверхностям.

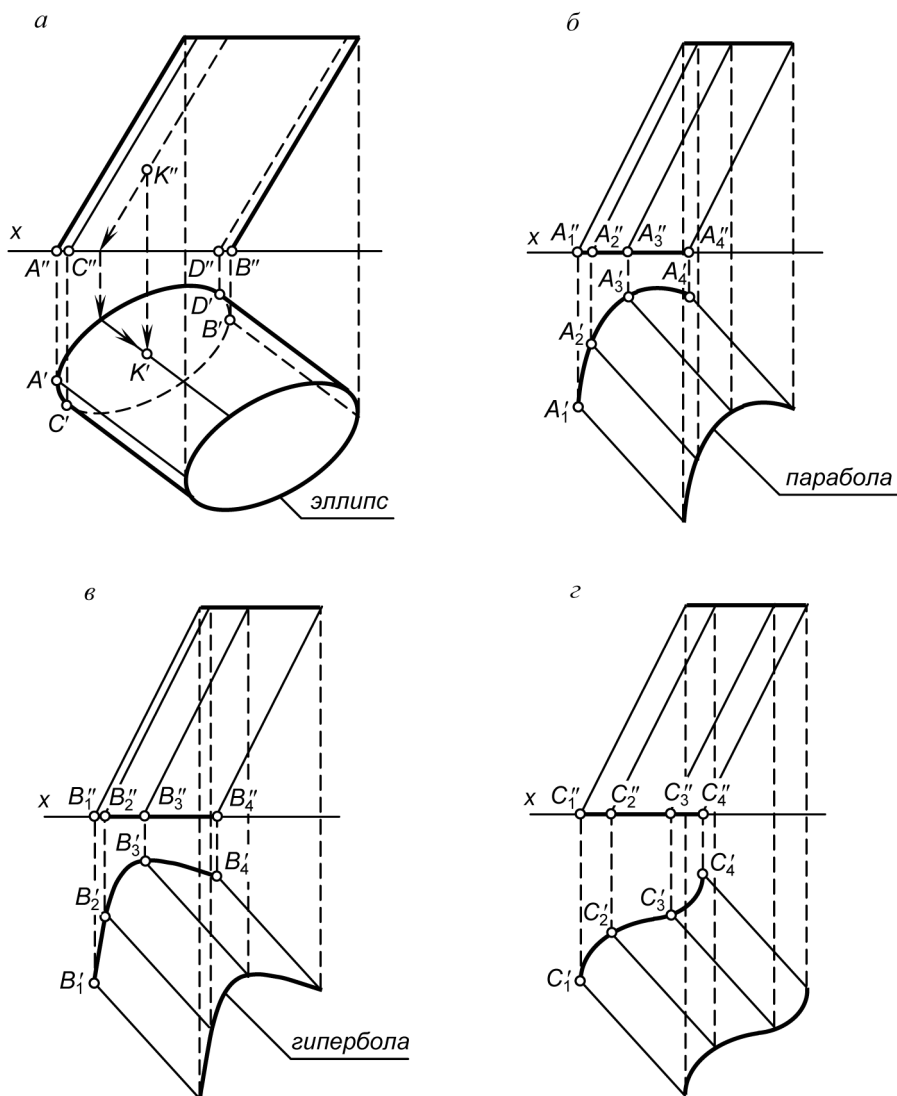


Рис. 8.11. Разновидности цилиндрической поверхности: эллиптическая (а), параболическая (б), гиперболическая (в), общего вида (г)

Если направляющая линия цилиндрической поверхности является линией второго порядка, то образуемая цилиндрическая поверхность является поверхностью второго порядка. При этом рассматривают следующие случаи:

- ❖ если направляющая — эллипс (рис. 8.11, *а*), то цилиндрическая поверхность называется *эллиптической* (в частном случае, *круговой*);
- ❖ если направляющая — парабола (рис. 8.11, *б*), то цилиндрическая поверхность называется *параболической*;
- ❖ если направляющая — гипербола (рис. 8.11, *в*), то цилиндрическая поверхность называется *гиперболической*.

Если направляющая цилиндрической поверхности является неопределенной геометрической линией, то она называется цилиндрической поверхностью *общего вида* (рис. 8.11, *г*).

Чтобы построить очерк цилиндрической поверхности, следует на каждой плоскости проекций наметить видимые образующие, заключающие между собой область, внутри которой находится проекция поверхности. Так, например, на рис. 8.11, *а* на проекциях эллиптической цилиндрической поверхности отмечены точки, через которые проходят проекции видимых образующих: точки *А* и *В* для фронтальной проекции; точки *С* и *Д* для горизонтальной. На этом же рисунке дано построение горизонтальной проекции точки *К*, принадлежащей цилиндрической проекции и заданной одной проекцией *К''*, при условии, что эта точка является невидимой на плоскости π_2 .

Геометрическое тело, ограниченное замкнутой цилиндрической поверхностью (боковой поверхностью) и двумя секущими ее параллельными плоскостями (основаниями), называется *цилиндром*. Цилиндром иногда называют саму цилиндрическую поверхность.

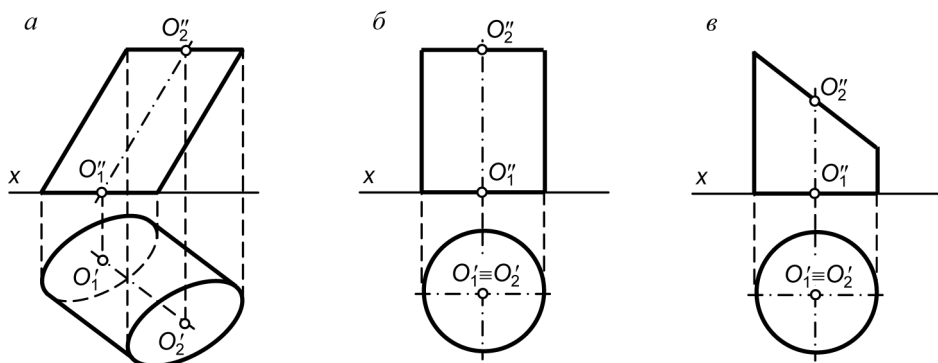


Рис. 8.12. Разновидности цилиндра: эллиптический (*а*), прямой круговой (*б*), усеченный (*в*)

Если боковая поверхность цилиндра является эллиптической цилиндрической поверхностью, то цилиндр называется *эллиптическим* (рис. 8.12, *а*) или, в частном случае, *круговым*. Эллиптический (круговой) цилиндр, у которого образующая

перпендикулярна основанию, называется *прямым* (рис. 8.12, б), в противном случае цилиндр называется *наклонным*. Прямая линия, соединяющая центры оснований эллиптического (кругового) цилиндра, называется его *осью*.

Если цилиндр пересекается плоскостью, непараллельной основанию, то образуется *усеченный* цилиндр (рис. 8.12, в).

8.2.6. Коническая поверхность

В общем случае *коническая поверхность* образуется перемещением прямой линии m (*образующей*), проходящей через неподвижную точку пространства S (*вершину*) и все точки некоторой плоской кривой линии l (*направляющей*). Коническая поверхность имеет две полости с общей вершиной, являющейся центром симметрии этой поверхности (рис. 8.13).

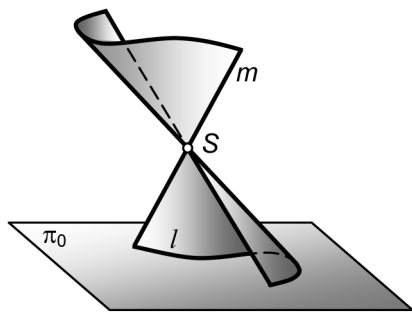


Рис. 8.13. Коническая поверхность общего вида

Коническая поверхность относится к развертываемым поверхностям. Если направляющая конической поверхности является кривой линии второго порядка (эллипсом, параболой, гиперболой), то она относится к поверхностям второго порядка. Так же как и цилиндрическая поверхность, коническая может быть эллиптической (в частном случае, круговой), параболической или гиперболической. Круговая коническая поверхность может рассматриваться как поверхность вращения.

Если направляющая является неопределенной геометрической линией, то поверхность называется конической поверхностью *общего вида*.

Геометрическое тело, ограниченное замкнутой конической поверхностью (*боковой поверхностью*) и секущей ее плоскостью (*основанием*), называется *конусом*. Иногда саму коническую поверхность также называют конусом.

Если боковая поверхность конуса является эллиптической конической поверхностью, то конус называется *эллиптическим* (рис. 8.14, а) или, в частном случае, *круговым*. Эллиптический (круговой) конус, вершина которого ортогонально проектируется в центр его основания, называется *прямым* (рис. 8.14, б); в противном

случае конус называется *наклонным*. Если конус пересекается плоскостью, параллельной его основанию, то образуется *усеченный конус* (рис. 8.14, в). Линия, соединяющая вершину эллиптического (кругового) конуса с центром его основания, называется *осью конуса*.

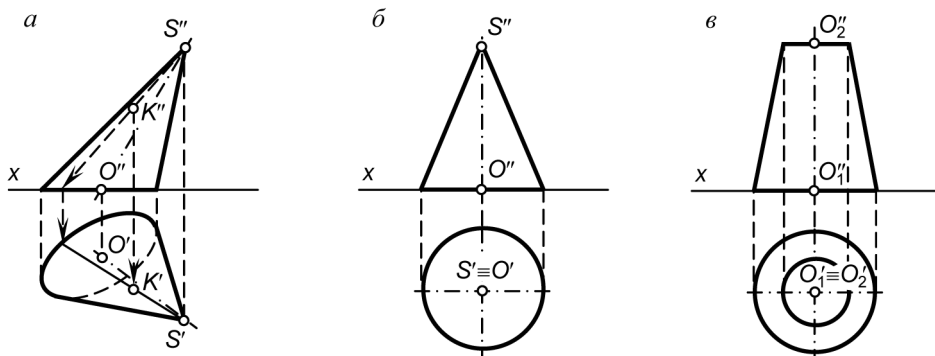


Рис. 8.14. Разновидности конуса: эллиптический (а), прямой круговой (б), усеченный (в)

На рис. 8.14, а показано построение горизонтальной проекции точки K , лежащей на поверхности конуса, по ее фронтальной проекции (в направлении на плоскость π_2 точка K лежит на "невидимой" части поверхности конуса). Построение выполнено при помощи соответствующей образующей — ход построений указан стрелками.

8.3. Поверхности вращения

8.3.1. Общие сведения о поверхностях вращения

Поверхность вращения образуется при вращении некоторой линии (*образующей*) вокруг неподвижной прямой (*оси поверхности*).

Поверхность вращения может быть задана образующей и положением оси (рис. 8.15, а). Здесь ось O_1O_2 лежит в одной плоскости с образующей AB . При вращении каждая точка образующей AB описывает окружность, плоскость которой перпендикулярна оси (рис. 8.15, б). Эти окружности называются *параллелями*. Наибольшая из параллелей (окружность радиусом $O'C'$) называется *экватором*, а наименьшая (окружность радиусом $O'D'$) — *горлом*.

Плоскость, проходящую через ось поверхности, называют *меридианальной плоскостью*, а линии, по которым эти плоскости пересекают поверхность вращения, — *меридианами*. Среди меридианов выделяют *главный меридиан*, параллельный плоскости проекций. Главный меридиан на эту плоскость проекций изображается без искажения.

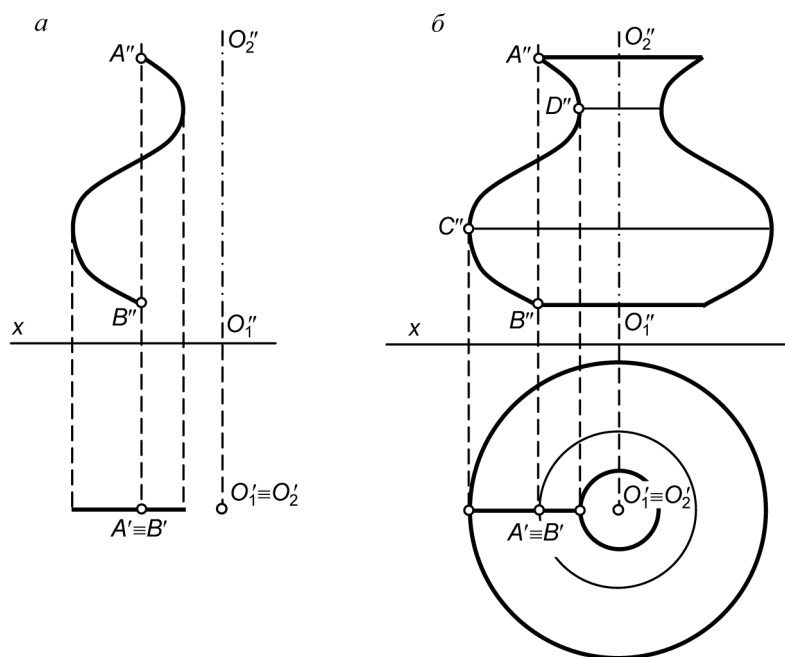


Рис. 8.15. Образование поверхности вращения

Проекции поверхности вращения, как правило, состоят из проекций экватора, горла, верхней и нижней параллелей, главного меридиана, дающих контуры поверхности при ортогональном проецировании.

Перечислим основные *свойства* поверхности вращения.

- ◆ Поверхности вращения обладают свойством сдвигаемости, т. е. вращаясь вокруг своей оси, поверхность может сдвигаться без деформаций.
- ◆ Все поверхности вращения имеют одну или более поворотную ось симметрии n -го порядка.
- ◆ Каждая параллель поверхности вращения пересекает все меридианы под прямым углом.

К закономерным поверхностям вращения относятся тор, катеноид и некоторые поверхности второго порядка, которые могут образоваться путем вращения линии второго порядка вокруг ее действительной или мнимой оси.

К поверхностям вращения второго порядка относятся (о них рассказано в предыдущем разделе):

- ◆ эллипсоид вращения (в частности, сфера);
- ◆ гиперboloид вращения (однopolостной и двуполостной);
- ◆ параболоид вращения;
- ◆ круговая цилиндрическая поверхность;
- ◆ круговая коническая поверхность.

8.3.2. Тор

Тор — это поверхность, образуемая вращением окружности (*образующей*) вокруг неподвижной прямой (*оси тора*), расположенной в плоскости этой окружности, но не проходящей через ее центр. Геометрическое тело, ограниченное такой поверхностью, также называют тором.

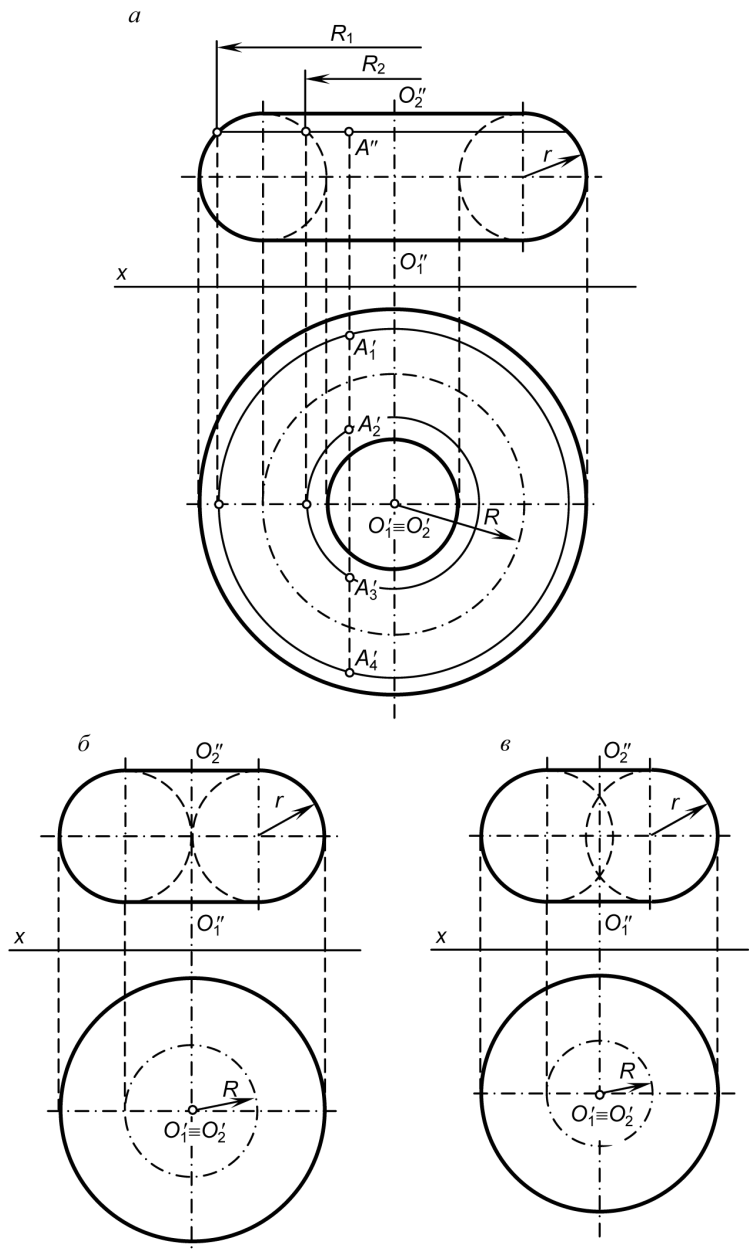


Рис. 8.16. Разновидности тора: открытый (а), замкнутый (б) и закрытый (в)

В зависимости от соотношения между радиусом образующей окружности r и расстояния от ее центра до оси R различают:

- ♦ при $r < R$ — *открытый тор* или *кольцо* (рис. 8.16, а);
- ♦ при $r = R$ — *замкнутый тор* (рис. 8.16, б);
- ♦ при $r > R$ — *закрытый* или *самопересекающийся тор* (рис. 8.16, в).

Центр образующей окружности тора перемещается по окружности, называемой *центральной* (ее радиус равен R). Плоскость, проходящая через центральную окружность, в сечении открытого тора образует наибольшую параллель — *экватор тора* (радиус экватора равен $R+r$) и наименьшую параллель — *горло тора* (радиусом $R-r$). Проекция тора на плоскость, перпендикулярную его оси, задается при помощи проекций этих параллелей.

Точка на поверхности тора определяется с помощью проходящей через нее параллели. Фронтальной проекции A'' (см. рис. 8.16, а) на горизонтальной проекции может соответствовать любая из четырех проекций A'_1, A'_2 , лежащих на параллели радиуса R_1 , и A'_3 или A'_4 , лежащих на параллели радиуса R_2 .

Тор имеет две системы круговых сечений: в плоскостях, перпендикулярных его оси, и в плоскостях, проходящих через его ось. Поверхность тора является неразвертываемой.

8.4. Поверхности с плоскостью параллелизма

Поверхностью с плоскостью параллелизма или *поверхностью Каталана*¹ называется кривая поверхность, образуемая перемещением прямой линии (*образующей*), параллельной во всех ее положениях некоторой плоскости (*плоскости параллелизма*) и пересекающей две скрещивающиеся кривые или прямые линии (*направляющие*).

В зависимости от вида направляющих различают:

- ♦ *цилиндроподы*, если направляющими являются две кривые линии;
- ♦ *коноиды*, если одна направляющая — кривая линия, а другая — прямая;
- ♦ *гиперболический параболоид*, если обе направляющие — прямые линии.

Положение гиперболического параболоида в прямоугольных координатах может быть описано алгебраическим уравнением второй степени, поэтому его рассматривают и как поверхность второго порядка (о построении гиперболического параболоида было рассказано ранее).

При изображении проекций поверхностей с плоскостью параллелизма целесообразно за направляющую плоскость принимать плоскость частного положения или одну из плоскостей проекций.

¹ Названа так по имени бельгийского математика Э. Каталана (1814—1894), исследовавшего свойства этих поверхностей.

На рис. 8.17 приведен пример цилиндроида, образованного перемещением прямой AB по направляющим кривым a и b . В качестве плоскости параллелизма выбрана горизонтально-проецирующая плоскость α . Очевидно, что если направляющие — плоские кривые, то они не должны лежать в одной плоскости.

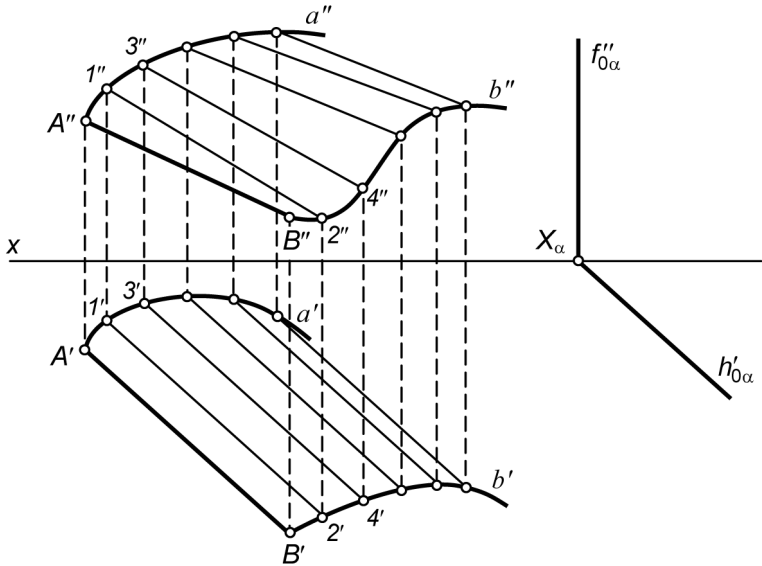


Рис. 8.17. Цилиндр

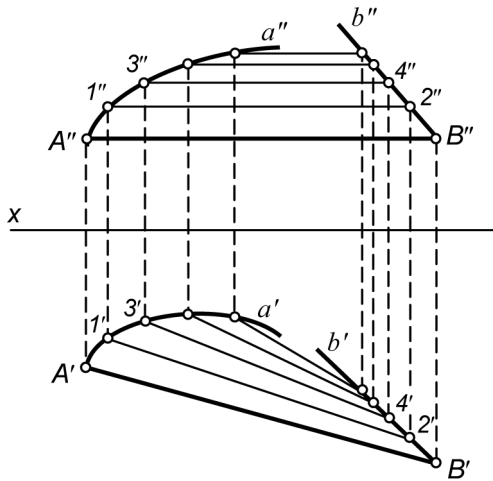


Рис. 8.18. Коноид

Коноид можно рассматривать как частный случай цилиндроида, когда одна из направляющих линий является прямой линией. На рис. 8.18 показано построение

каркаса коноида, имеющего в качестве плоскости параллелизма горизонтальную плоскость проекций, а в качестве направляющих — кривую a и прямую b . В этом случае все образующие коноида являются горизонталями.

Коноид называется *прямым*, если направляющая прямая перпендикулярна его плоскости параллелизма.

Все поверхности с плоскостью параллелизма являются линейчатыми неразвертываемыми поверхностями. Любая плоскость, параллельная плоскости параллелизма, пересекает такую поверхность по прямым линиям.

8.5. Поверхности с ребром возврата

Поверхность с ребром возврата или *торс* — это кривая поверхность, образуемая непрерывным движением прямой линии (*образующей*), во всех своих положениях являющейся касательной к некоторой пространственной кривой линии (рис. 8.19). Эту кривую линию называют *ребром возврата*.

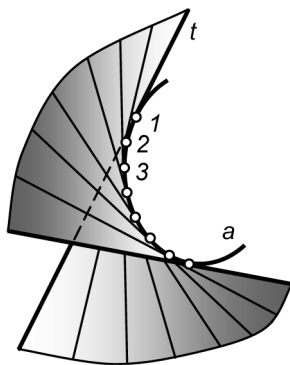


Рис. 8.19. Поверхность с ребром возврата

Ребро возврата делит поверхность на две полости соответственно делению каждой касательной в точке касания на два луча. Если ребро возврата является плоской кривой линией, то поверхность, проведенная через все касательные к такой кривой, вырождается в плоскость.

Поверхности с ребром возврата относятся к классу линейчатых развертываемых поверхностей. Для ее задания на ортогональном чертеже необходимо задать проекции самого ребра возврата.

Пусть поверхность задана ребром возврата a (рис. 8.20). Точка M лежит на этой поверхности и задана фронтальной проекцией M'' . Через M'' проводится касательная к a'' (как известно, касательная к кривой линии проецируется в касательную к проекции этой кривой). В данном случае через M'' можно провести проекции двух касательных t_1'' и t_2'' к кривой a'' . Следовательно, в точку M'' проецируются две конкурирующие точки M_1 и M_2 , лежащие на разных полостях заданной поверхности.

Горизонтальные проекции M_1' и M_2' находятся на касательных к кривой a' , проведенных через проекции точек касания $1'$ и $2'$.

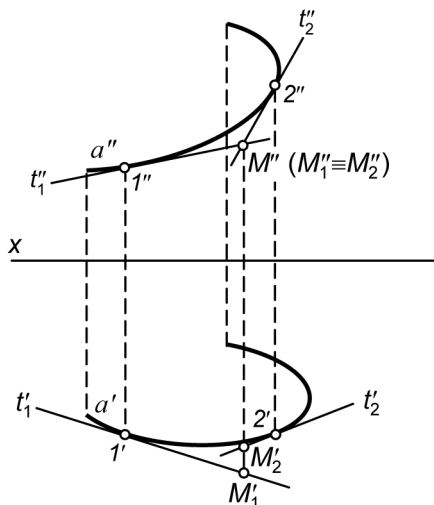


Рис. 8.20. Построение образующих поверхности с ребром возврата

8.6. Циклические поверхности

Циклической поверхностью называется кривая поверхность, образуемая при произвольном перемещении окружности (*образующей*) постоянного или переменного диаметра. Кривая линия, по которой перемещается центр образующей окружности, называется *направляющей*.

Если плоскость образующей окружности в каждом ее положении перпендикулярна направляющей линии, то такая циклическая поверхность называется *каналовой* (рис. 8.21). Диаметр образующей окружности каналовой поверхности является переменным.

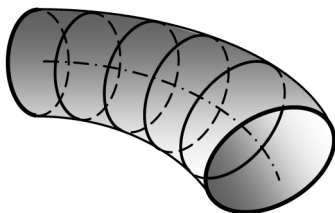


Рис. 8.21. Каналовая циклическая поверхность

При постоянном диаметре образуется так называемая *трубчатая поверхность* (рис. 8.22, а). Направляющей линией для трубчатой поверхности может служить и винтовая линия, в этом случае образуется *винтовая трубчатая поверхность* (рис. 8.22, б). Винтовую трубчатую поверхность иногда называют *винтовым тором*.

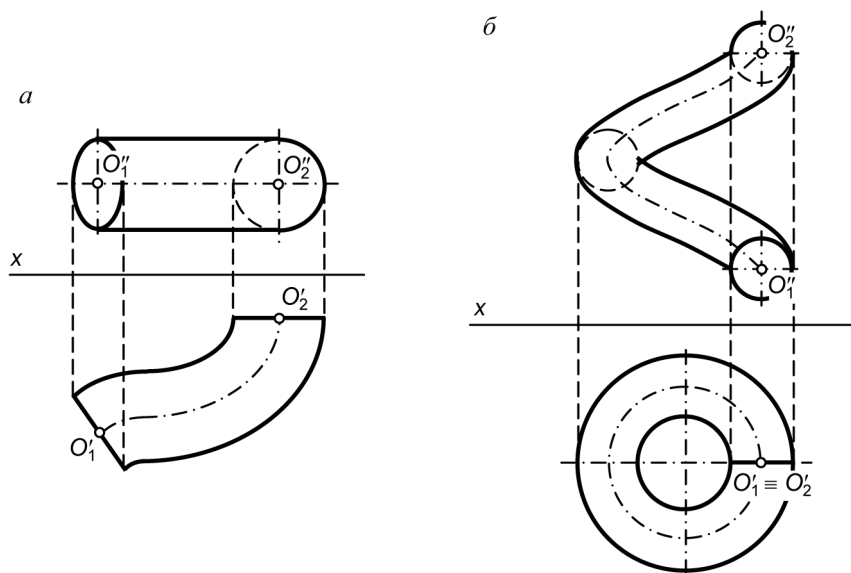


Рис. 8.22. Трубчатая поверхность

В частных случаях образования циклической поверхности могут быть:

- ◆ круговая цилиндрическая поверхность при перемещении окружности постоянного диаметра по прямой;
- ◆ круговая коническая поверхность при движении окружности с равномерно изменяющимся диаметром по прямой;
- ◆ тор при вращении окружности постоянного диаметра вокруг прямой, находящейся в плоскости этой окружности;
- ◆ сфера, при вращении половины дуги окружности постоянного диаметра вокруг прямой, проходящей через концы дуги.

8.7. Графические поверхности

Графическая поверхность — это незакономерная кривая поверхность, задаваемая некоторым количеством линий, принадлежащих ей. Совокупность этих линий называется *каркасом* или *дискретной сетью*, поэтому подобные поверхности иногда называют *поверхностями, задаваемыми каркасом*.

Графическая поверхность может быть образована перемещением некоторой линии (*образующей*), которая в процессе своего движения постоянно деформируется. Образование графических поверхностей не имеет каких-либо закономерностей, оно носит эмпирический (опытный) характер.

Особенностью графической поверхности является то, что точки, не лежащие на линиях каркаса, могут быть построены только приближенно. Поэтому графические поверхности нельзя считать однозначно определенными.

Каркас графической поверхности представляет собой несколько семейств кривых линий, расположенных, как правило, в плоскостях, параллельных плоскостям проекций. На рис. 8.23 изображена графическая поверхность, заданная двумя группами линий. Первая группа линий расположена в горизонтальных плоскостях α_1 , α_2 , α_3 , вторая группа — в плоскости π_2 и фронтальных плоскостях β_1 и β_2 .

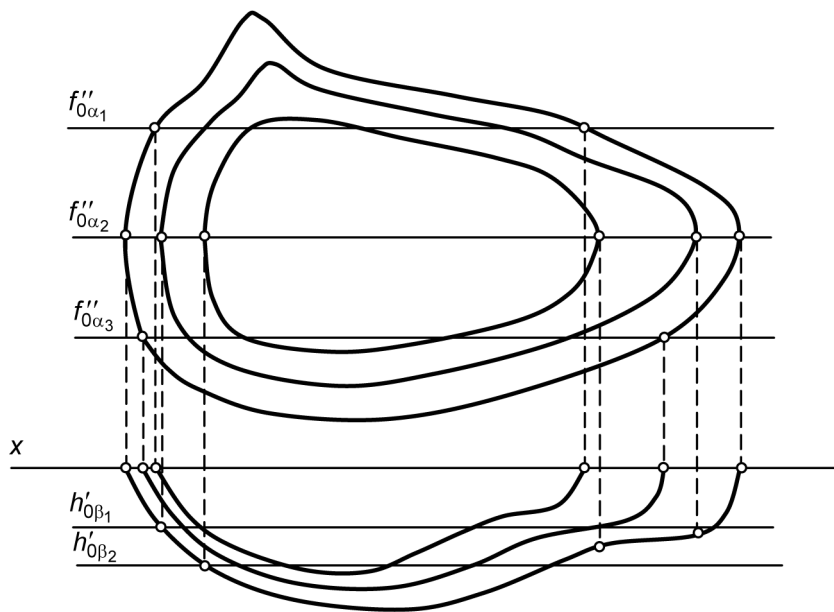


Рис. 8.23. Графическая поверхность

Одной из разновидностей графической поверхности является *топографическая поверхность* — поверхность рельефа Земли.

8.8. Поверхности переноса

Поверхностью переноса называется кривая поверхность, образуемая непрерывным поступательным движением кривой линии (*образующей*) по прямой линии (*направляющей*). Каждая хорда образующей линии остается параллельной сама себе. Пример поверхности переноса изображен на рис. 8.1.

Некоторые поверхности второго порядка (гиперболический параболоид, цилиндрическая поверхность) можно рассматривать как поверхности переноса. Так, например, эллиптическая цилиндрическая поверхность может быть образована перемещением эллипса вдоль некоторой прямой линии.

8.9. Винтовые поверхности

Винтовая поверхность — это кривая поверхность, описываемая *образующей*, которая, равномерно вращаясь вокруг неподвижной прямой (*оси винтовой поверхности*), одновременно совершает поступательное перемещение вдоль этой же оси (рис. 8.24).

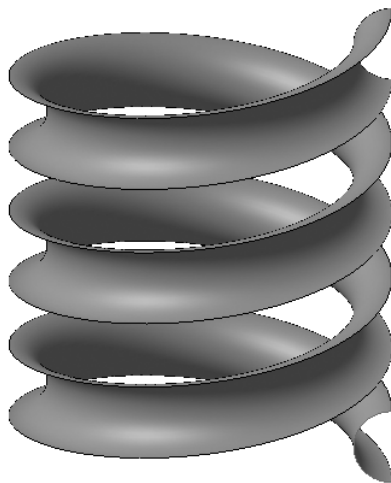


Рис. 8.24. Винтовая поверхность

Все точки, принадлежащие образующей линии, перемещаются по цилиндрической винтовой линии. Величина перемещения образующей вдоль оси винтовой поверхности, соответствующая одному полному обороту, называется *шагом*. Если поступательное перемещение прямо пропорционально угловому перемещению, то образуется винтовая поверхность с *равномерным шагом*. В противном случае образуется винтовая поверхность с *переменным шагом*.

Частным случаем винтовой поверхности является винтовая трубчатая поверхность, образуемая при движении окружности по винтовой линии, о которой мы уже говорили.

В зависимости от того, пересекает образующая линия ось поверхности или нет, образуется *закрытая* или *открытая* винтовая поверхность.

Наибольшее распространение имеют закрытые линейчатые винтовые поверхности — *геликоиды*, у которых образующей линией является прямая. При этом об-

разующая во всех положениях пересекает ось поверхности под постоянным углом. Если образующая пересекает ось под прямым углом, то геликоид называется *прямым* или *минимальным* (рис. 8.25, *а*); в противном случае образуется *косой* или *наклонный* геликоид (рис. 8.25, *б*).

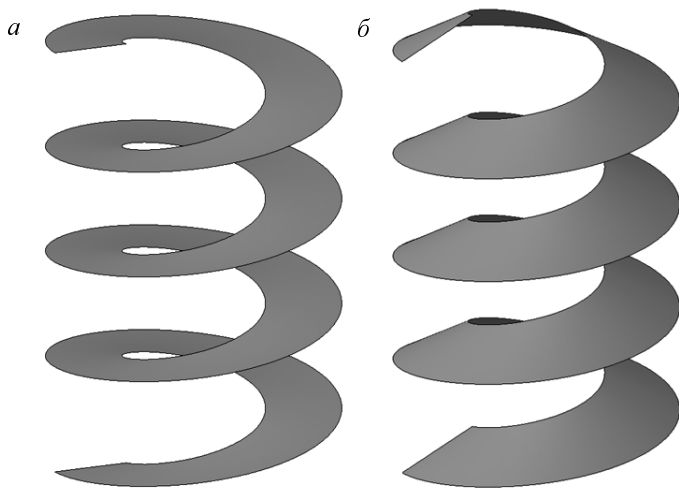


Рис. 8.25. Геликоид: открытый (*а*) и закрытый (*б*)

На рис. 8.26, *а* показаны проекции прямого геликоида с постоянным шагом h , образованного винтовым движением отрезка AB вокруг оси i . Каждая точка этого отрезка описывает в пространстве винтовую линию. Две винтовые линии, образованные при перемещении концов отрезка AB , дают очертания винтовой поверхности: на плоскости проекций, параллельной ее оси (в данном случае на плоскости π_2), они представляют собой две синусоиды с одинаковым периодом, но разной амплитудой; на плоскости проекций, перпендикулярной оси (на плоскости π_1) — две концентрические окружности.

Построение проекций этих винтовых линий производится аналогично построению синусоиды. Концентрические окружности, образуемые в результате вращения отрезка AB , на горизонтальной плоскости проекций делятся на n равных частей (например, на двенадцать). Отрезок оси винтовой поверхности, равный шагу h , делится на то же количество n равных частей. Фронтальные проекции точек, принадлежащие винтовым линиям, находятся в пересечении горизонтальных и вертикальных прямых, проведенных через соответствующие точки деления.

Для определения фронтальной проекции точки K , принадлежащей поверхности прямого геликоида и заданной горизонтальной проекцией K' , необходимо провести образующую, на которой находится точка K , т. е. провести горизонтальную проекцию образующей — радиус $L'M'$, проходящий через K' ; построить точку M'' (она находится на фронтальной проекции винтовой линии) и провести фронтальную проек-

цию этой образующей $L''M''$ параллельно $A''B''$. На пересечении линии проекционной связи, проведенной из K' , и $L''M''$ находится искомая проекция K'' .

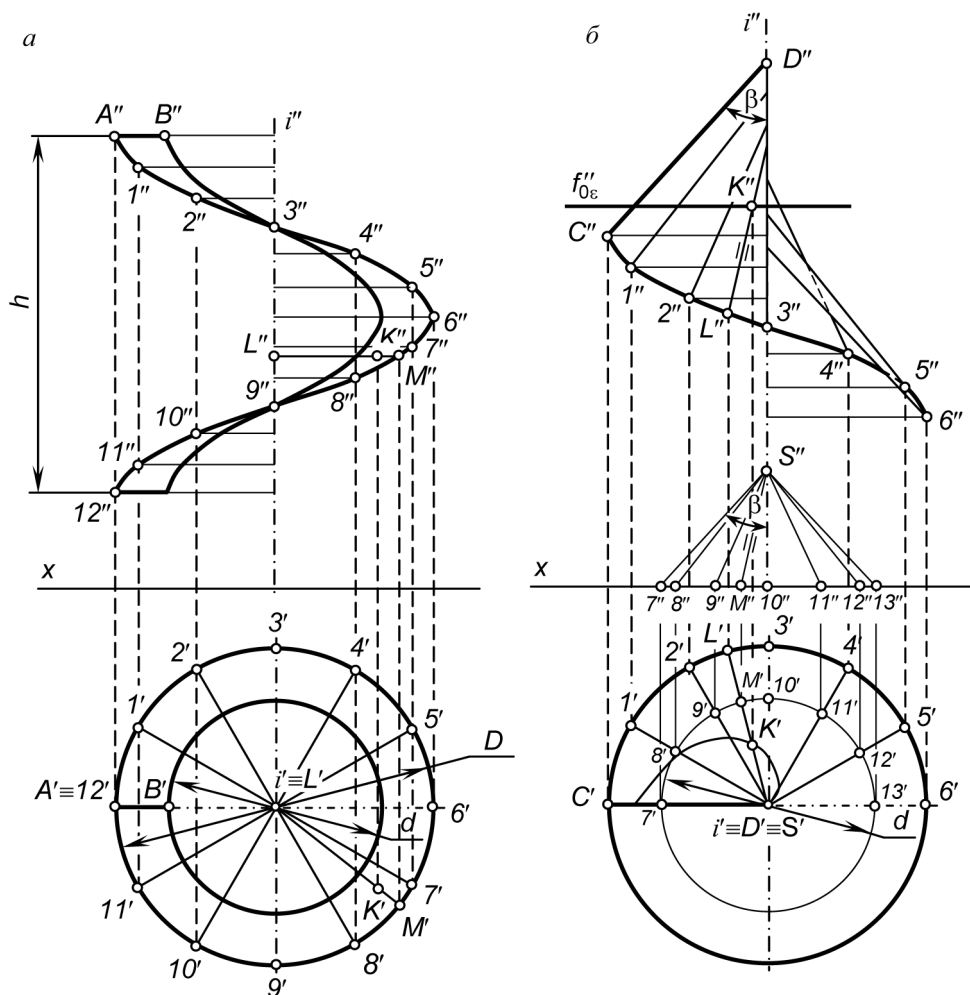


Рис. 8.26. Геликоид: прямой (а) и косой (б)

По способу образования прямой геликоид можно отнести к числу коноидов, т. е. поверхности, образованной движением прямой линии, во всех своих положениях параллельной заданной плоскости и пересекающей две направляющие линии — ось поверхности и некоторую цилиндрическую винтовую линию.

На рис. 8.26, б изображен косой геликоид, образованный винтовым движением прямолинейной образующей CD , пересекающей ось поверхности i под постоянным углом β , не равным 90° . Во всех своих положениях образующая CD параллельна образующим некоторого кругового конуса, ось которого совпадает с осью винтовой линии. Этот конус называется *направляющим конусом* косого геликоида.

На плоскости проекций, параллельной оси косо́го геликои́да, контуры представляют собой одну или две синусоиды; на плоскости проекций, перпендикулярной оси, — окружности. Косой геликоид может задаваться только одной фронтальной проекцией каркаса, состоящего из проекций винтовых линий, описываемой концами образующей прямой, и семейством проекций самой образующей. В сечении косо́го геликои́да, плоскостью, перпендикулярной его оси, образуется архимедова спираль.

Построение фронтальной проекции косо́го геликои́да сводится к построению проекций винтовых линий, описываемых концами образующей линии, и нескольких положений этой образующей. Точка D принадлежит оси геликои́да i и, следовательно, перемещается по прямой. Точка C перемещается по винтовой линии.

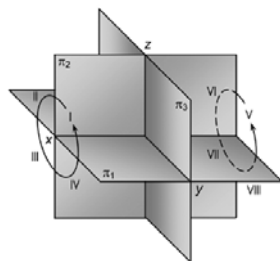
Горизонтальная проекция этой винтовой линии — окружность радиуса $C'D'$ — делится на n равных частей. Отрезок, отложенный на оси косо́го геликои́да и равный шагу, делится на тоже количество n равных частей. Из точек деления проводятся вертикальные и горизонтальные прямые, в пересечении которых лежат точки, принадлежащие винтовой линии.

Затем наносятся фронтальные проекции семейства образующих. Для этого строится направляющий конус, вершина S которого лежит на оси геликои́да, а угол между образующей этого конуса и осью равен β (диаметр основания d может быть любым, на горизонтальной плоскости проекций это основание спроецируется в окружность). Горизонтальные проекции образующих будут в виде радиусов: $S'A'$, $S'1'$, $S'2'$, ... В пересечении с горизонтальной проекцией основания конуса они дают точки $7'$, $8'$, $9'$, ..., по которым строятся $7''$, $8''$, $9''$, ... Затем проводятся фронтальные проекции образующих конуса $S''7''$, $S''8''$, $S''9''$, ... и параллельно им фронтальные проекции образующих косо́го геликои́да.

Для построения фронтальной проекции некоторой точки K , лежащей на поверхности косо́го геликои́да, по ее горизонтальной проекции необходимо построить фронтальную проекцию образующей, на которой лежит эта точка (фронтальная проекция образующей проводится параллельно соответствующей образующей конуса).

Для построения горизонтальной проекции некоторой точки по ее фронтальной проекции необходимо через нее провести секущую плоскость ϵ , и на горизонтальной плоскости построить архимедову спираль, образуемую в сечении.

ГЛАВА 9



Пересечения геометрических тел

9.1. Пересечение геометрических тел плоскостью

9.1.1. Общие сведения о пересечении геометрических тел плоскостью

При пересечении какого-либо геометрического тела или поверхности плоскостью образуется плоская фигура, называемая *сечением*. Сама плоскость при этом называется *секущей плоскостью*. На эюре контуры сечения принято наносить с учетом правил обозначения взаимной видимости геометрических элементов.

Если секущая плоскость не параллельна ни одной из плоскостей проекций, то сечение проецируется с искажением. Для нахождения истинной величины сечения (так называемого "*натурального вида*" или "*истинной величины*" сечения) применяют различные способы преобразования эюра.

Способы построения сечения зависят, прежде всего, от вида рассекаемого геометрического тела. Поэтому изложение методов их построения сгруппируем по типу:

- ◆ пересечение многогранников плоскостью;
- ◆ пересечение тел с кривыми поверхностями плоскостью.

9.1.2. Пересечение многогранников плоскостью

При пересечении многогранника плоскостью образуется многоугольник с количеством сторон, равным числу граней многогранника, попавших в секущую плоскость. В частном случае, если секущая плоскость проходит только через ребро или вершину многогранника, сечение может вырождаться в отрезок или точку.

Вершинами многоугольника, образуемого в сечении, являются точки пересечения ребер многогранника с секущей плоскостью. Следовательно, количество вер-

шин многоугольника равно числу ребер многогранника, пересекаемых секущей плоскостью.

Различают два способа построения сечения многогранников:

- ✧ построение точек пересечения ребер многогранника с секущей плоскостью ("*способ ребер*");
- ✧ построение отрезков прямых, по которым грани многогранника пересекаются секущей плоскостью ("*способ граней*").

В первом случае построение сводится к многократному решению задачи по определению точек пересечения прямой с плоскостью, во втором — линии пересечения двух плоскостей. Возможно комбинированное использование обоих способов. "Способ граней" удобно использовать, когда грани находятся в проецирующих плоскостях.

Сторона многоугольника, образуемого в сечении многогранника, считается "невидимой", если она принадлежит "невидимой" грани многогранника.

Рассмотрим более подробно некоторые случаи при пересечении плоскостью пирамиды и призмы.

Пересечение пирамиды плоскостью

При пересечении n -угольной пирамиды плоскостью в сечении может быть:

- ✧ n -угольник, если секущая плоскость пересекает все боковые грани пирамиды;
- ✧ многоугольник с количеством сторон, равным или меньшим n , если секущая плоскость пересекает хотя бы одно боковое ребро и основание пирамиды;
- ✧ треугольник, если секущая плоскость проходит через вершину пирамиды и ее основание (если секущая плоскость проходит через два несмежных боковых ребра пирамиды, то образуемый в сечении треугольник называется *диагональным сечением*);
- ✧ в частном случае отрезок или точку, если секущая плоскость проходит только через одно ребро или вершину пирамиды.

При построении сечения пирамиды проецирующей плоскостью одна из проекций сечения вырождается в отрезок прямой линии. На рис. 9.1 построено сечение пирамиды $SABC$ фронтально-проецирующей плоскостью α . Фронтальные проекции вершин многоугольника, образуемого в сечении (точки $1''$, $2''$ и $3''$), лежат на пересечении фронтального следа $f''_{0\alpha}$ с фронтальными проекциями ребер пирамиды (фронтальная проекция сечения вырождается в отрезок $1''2''$, лежащий на следе $f''_{0\alpha}$).

По линиям проекционной связи определяются горизонтальные проекции вершин многоугольника — точки $1'$ и $2'$. Так как ребро SB , на котором лежит вершина 3 , является отрезком профильной прямой, то для построения точки $3'$ в грани ASB проведена горизонталь $3K$ ($3''K'' \parallel x$, $3'K' \parallel A'B'$). Треугольник $1'2'3'$ является горизонтальной проекцией сечения. Чертеж на рис. 9.1 выполнен согласно условию, что секущая плоскость α является прозрачной.

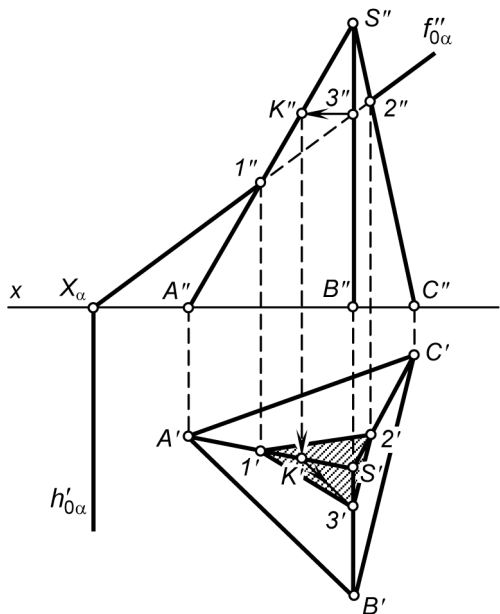


Рис. 9.1. Пересечение пирамиды фронтально-проецирующей плоскостью

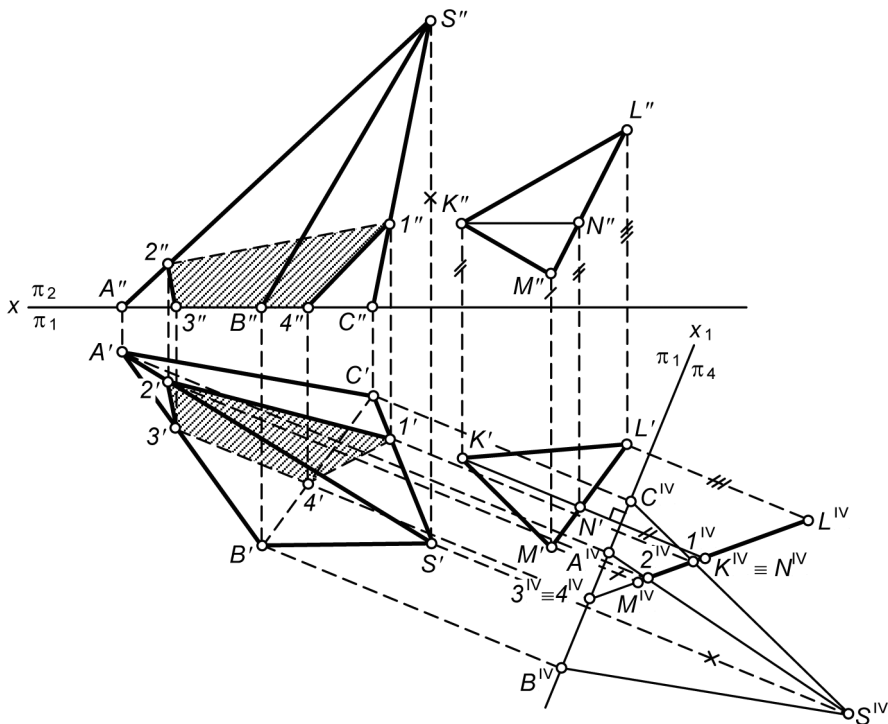


Рис. 9.2. Построение сечения пирамиды методом перемены плоскостей проекций

Практически любая задача по построению сечения пирамиды может быть сведена к решению, рассмотренному на рис. 9.1, путем введения дополнительной плоскости проекций, перпендикулярной одной из имеющихся плоскостей проекций (π_1 или π_2) и секущей плоскости. Тогда секущая плоскость относительно дополнительной плоскости проекций преобразуется в положение проецирующей плоскости.

На рис. 9.2 построено сечение пирамиды $SABC$ плоскостью, заданной треугольником KLM , путем введения дополнительной плоскости проекций π_4 ($\pi_4 \perp \pi_1$, $\pi_4 \perp KLM$). Для этого в треугольнике KLM проведена горизонталь KN и перпендикулярно ее горизонтальной проекции (прямой $K'N'$) построена ось π_1/π_4 . На плоскость π_4 треугольник KLM спроецируется в виде отрезка прямой $M^IV L^IV$, т. е. плоскость этого треугольника преобразовалась в положение проецирующей.

Таким образом, задача сведена к построению сечения пирамиды проецирующей плоскостью. Проекция вершин сечения на плоскости π_4 (точки $1^IV, 2^IV, 3^IV, 4^IV$) лежат в пересечении прямой, проведенной через $M^IV L^IV$ (эта прямая является следом плоскости треугольника KLM на плоскости π_4), и проекций ребер $S^IV A^IV, S^IV C^IV, A^IV B^IV, B^IV C^IV$. По проекции сечения на плоскости π_4 обратным ходом построены ее горизонтальная и фронтальная проекции. Построенный четырехугольник 1234 является искомым сечением.

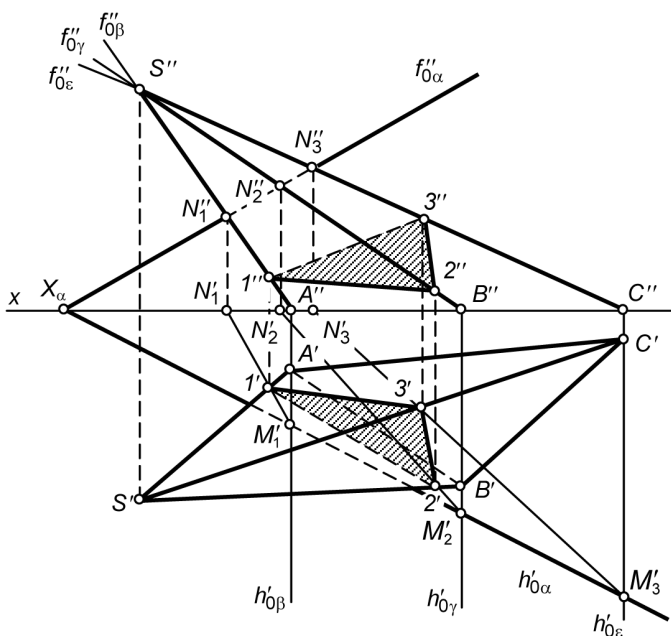


Рис. 9.3. Построение сечения пирамиды "способом ребер"

Рассмотрим построение сечения без применения метода перемены плоскостей проекций на примере наклонной пирамиды $SABC$ и секущей плоскости α , задан-

ной следами (рис. 9.3). Используем для этого "способ ребер", т. е. последовательно находим все точки пересечения ребер пирамиды с секущей плоскостью.

Начнем с ребра SA — найдем точку пересечения этого ребра с плоскостью α . Для этого проводим через SA вспомогательную фронтально-проецирующую плоскость β и строим линию пересечения плоскостей α и β — прямую N_1M_1 . В пересечении горизонтальной проекции линии пересечения $N'_1M'_1$ с проекцией ребра $S'A'$ получаем точку $1'$ — горизонтальную проекцию точки пересечения ребра SA с плоскостью α . По линии проекционной связи, проведенной из $1'$, находим фронтальную проекцию точки пересечения $1''$ на фронтальной проекции ребра $S''A''$.

Аналогично находим проекции точки 2 ($2'$ и $2''$) и точки 3 ($3'$ и $3''$) соответственно на ребрах SB и SC , проведя через них вспомогательные плоскости γ и ε .

Соединив $1', 2', 3'$ на горизонтальной плоскости проекций и $1'', 2'', 3''$ на фронтальной плоскости проекций, получаем проекции сечения пирамиды $SABC$ плоскостью α .

Пересечение призмы плоскостью

При пересечении n -угольной призмы в сечении может образоваться:

- ◆ n -угольник, если секущая плоскость пересекает все боковые ребра призмы;
- ◆ многоугольник с количеством сторон равным или меньшим n , если секущая плоскость пересекает хотя бы одно боковое ребро и основание (основания) призмы;
- ◆ четырехугольник, если секущая плоскость не пересекает ни одного бокового ребра призмы и пересекает оба основания;
- ◆ параллелограмм, если секущая плоскость параллельна боковым ребрам (если секущая плоскость проходит через два несмежных ребра, то образуемый в сечении параллелограмм называется *диагональным сечением*);
- ◆ в частном случае отрезок или точку, если секущая плоскость проходит только через одно ребро или вершину призмы.

При построении сечения призмы проецирующей плоскостью одна из проекций сечения вырождается в отрезок прямой линии. На рис. 9.4 приведен пример построения сечения треугольной призмы $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ фронтально-проецирующей плоскостью α (при этом секущая плоскость считается прозрачной). В пересечении следа f''_{α} с фронтальными проекциями боковых ребер призмы образуются фронтальные проекции вершин сечения (точки $1'', 2''$ и $3''$). Отрезок $1''3''$ является фронтальной проекцией сечения. Горизонтальные проекции вершин сечения найдены на соответствующих проекциях ребер призмы. Эти точки соединены отрезками, и, таким образом, построена горизонтальная проекция сечения — треугольник $1'2'3'$.

Если секущая плоскость является плоскостью общего положения, то с помощью метода перемены плоскостей проекций ее положение может быть преобразовано так, что она окажется в положении проецирующей. При этом дополнительная плоскость проекций должна быть перпендикулярна одной из имеющихся плоско-

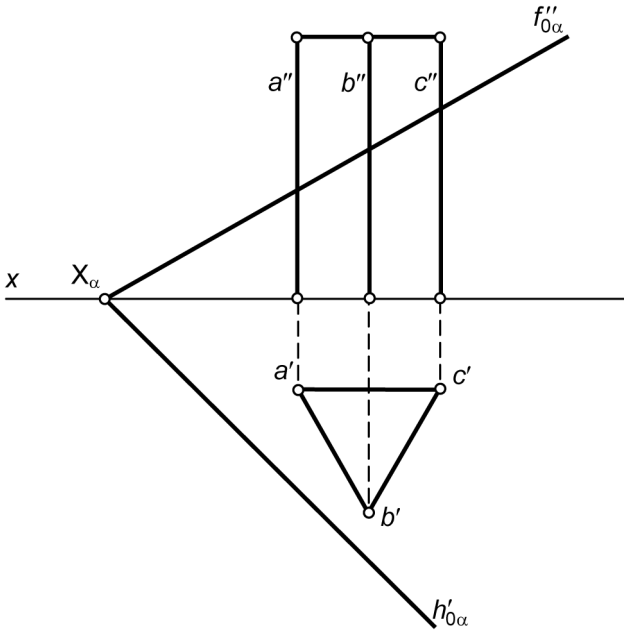


Рис. 9.6. Исходные проекции для построения линии пересечения призмы плоскостью

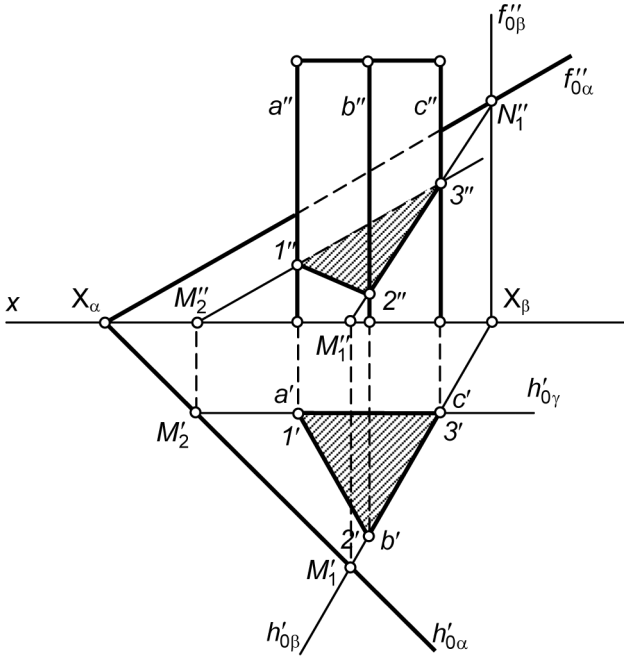


Рис. 9.7. Построение линии пересечения прямой правильной треугольной призмы плоскостью α

3. Отрезок 13 этой фронтали — отрезок, по которому грань $АС$ пересекается с плоскостью α . Вторая сторона сечения построена.
4. Вершины 1 и 2 определили и третью, замыкающую сторону сечения. Фронтальную проекцию стороны 13 сечения изобразим штриховой линией, поскольку фронтальная проекция грани $АС$, в которой лежит этот отрезок, не видна. Участок фронтального следа секущей плоскости $f''_{0\alpha}$, закрываемый телом призмы, также следует показать штриховой линией.

9.1.3. Пересечение тел с кривыми поверхностями плоскостью

Построение сечения геометрического тела с кривой поверхностью сводится к нахождению проекций ряда точек, принадлежащих сечению, и их соединению плавной кривой линией. Среди точек сечения выделяют *характерные* (или *опорные*) точки, занимающие особое расположение по отношению или к плоскостям проекций или к самой кривой. К характерным точкам относятся:

- ♦ наиболее удаленная и наиболее близкая точки к плоскостям проекций (*экстремальные точки*);
- ♦ точки, делящие кривую на видимую и невидимую части (*точки видимости*);
- ♦ точки наибольшей или наименьшей ширины кривой (например, вершины эллипса).

Способ построения сечения кривой поверхности выбирают в зависимости от того, относится данная кривая поверхность к линейчатым или нелинейчатым поверхностям.

Сечение нелинейчатых поверхностей строят при помощи общего метода построения — метода *вспомогательных секущих плоскостей*, который заключается в том, что вводится несколько дополнительных плоскостей (как правило, частного положения), пересекающих заданную поверхность по некоторой линии, а секущую плоскость по прямой. Точки пересечения этих линий принадлежат как поверхности, так и секущей плоскости и, следовательно, лежат на искомой линии сечения.

При подборе вспомогательных секущих плоскостей стремятся к упрощению построений и выбирают их с таким расчетом, чтобы в сечении с поверхностью получались линии наиболее простой формы (окружности или прямые). Расположение самой поверхности относительно плоскостей проекций целесообразно выбрать таким, чтобы проекции линий пересечения на одну из плоскостей проекций получались без искажения. В общем случае точность построения сечения повышается с увеличением количества вспомогательных секущих плоскостей.

Пример построения этим методом приведен на рис. 9.8: тело вращения рассечено фронтально-проецирующей плоскостью α . Положение экстремальных точек очевидно: точки 1 , наивысшей по отношению к плоскости π_1 , и точек 2 и 3 , лежащих в плоскости π_1 .

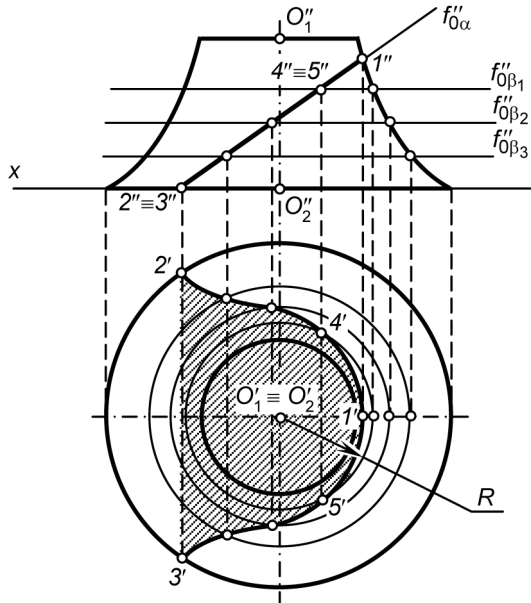


Рис. 9.8. Пресечение тела вращения фронтально-проецирующей плоскостью

Для построения промежуточных точек поверхность и секущая плоскость пересечены рядом вспомогательных горизонтальных плоскостей. Рассмотрим одну из них — плоскость β_1 . Пересекая тело вращения, эта плоскость образует окружность радиусом R , а плоскость α — фронтально-проецирующую прямую 45. Точки пересечения горизонтальной проекции окружности и прямой 4'5' дают горизонтальные проекции точек, принадлежащих одновременно и поверхности вращения и плоскости α . Повторяя эти построения, находится ряд точек, определяющих линию сечения.

В ряде случаев, когда геометрические свойства линии сечения известны, ее проекции могут быть построены на основании законов, определяющих ее форму. Так строится, например, сечение геликоида плоскостью, перпендикулярной его оси (в сечении образуется архимедова спираль).

Сечение линейчатых поверхностей целесообразнее выполнять методом, основанным на аппроксимации кривой поверхности многогранной поверхностью. При этом ребра многогранной поверхности являются образующими линейчатой поверхности. Линия сечения определяется точками пересечения многогранной поверхности с секущей плоскостью. Чем больше граней на аппроксимирующей поверхности, тем она точнее заменяет кривую поверхность и, следовательно, тем точнее построенная линия сечения.

Пересечение конуса плоскостью

При пересечении конуса плоскостью, проходящей через его вершину, в сечении может образоваться (рис. 9.9, а):

- ♦ треугольник, когда секущая плоскость пересекает основание (если секущая плоскость проходит через ось конуса, то образуемый в сечении треугольник называется *осевым сечением*);
- ♦ отрезок образующей, когда секущая плоскость является касательной к боковой поверхности конуса;
- ♦ точка во всех других случаях.

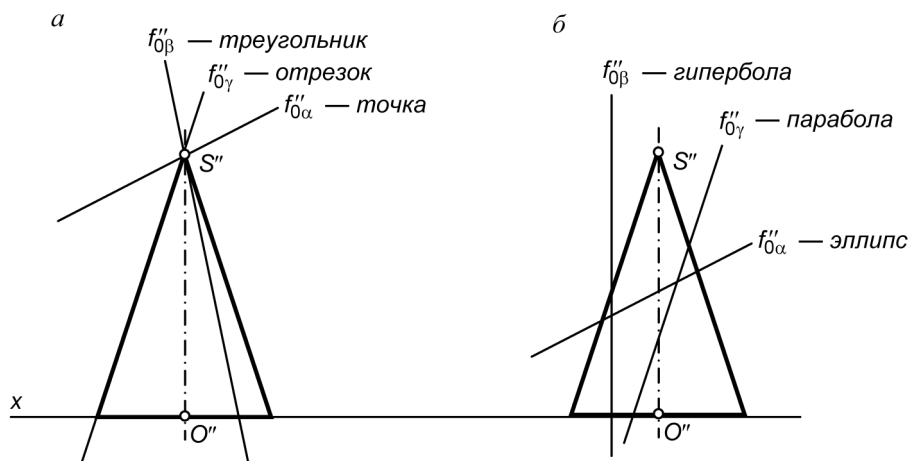


Рис. 9.9. Случаи пересечения конуса плоскостью, проходящей через его вершину (а) и не проходящей через вершину конуса (б)

Кривая линия, которая образуется при рассечении прямого кругового конуса плоскостью, не проходящей через его вершину, называется *коническим сечением* (рис. 9.9, б). В зависимости от расположения секущей плоскости относительно поверхности конуса конические сечения могут быть трех типов:

- ♦ эллипс, если секущая плоскость пересекает все образующие конуса (в частном случае, когда секущая плоскость перпендикулярна оси кругового конуса, образуется окружность);
- ♦ парабола, если секущая плоскость параллельна одной образующей конуса;
- ♦ гипербола, если секущая плоскость параллельна двум образующим конуса.

В планиметрии коническое сечение рассматривается как множество точек, для каждой из которых отношение расстояний до данной точки (*фокуса*) к расстоянию до данной прямой (*директрисы*) равно некоторому положительному числу (*эксцентриситету*) e . При $e < 1$ образуется эллипс; при $e = 1$ — парабола; при $e > 1$ — гипербола. Правила построения этих плоских кривых линий мы уже рассматривали ранее.

Если секущая плоскость, не проходящая через вершину конуса, пересекает его основание, то образуется фигура, ограниченная частью конического сечения (эллипсом, параболой или гиперболой) и отрезком, полученным при пересечении секущей плоскостью основания конуса.

При построении сечения конуса обычно коническую поверхность *аппроксимируют* вписанной в нее боковой поверхностью пирамиды. Сечение конуса можно построить и другим методом — путем проведения вспомогательных плоскостей, однако в большинстве случаев это является нецелесообразным.

На рис. 9.10 дан пример построения сечения наклонного конуса плоскостью α общего положения, заданной следами. В конус вписана шестиугольная пирамида, и найдены точки пересечения боковых ребер пирамиды с плоскостью α (см. предыдущий раздел). Одноименные проекции вершин сечения соединены плавной кривой линией с учетом видимости контуров сечения относительно поверхности конуса (на обеих плоскостях проекций сечение проецируется в виде эллипса).

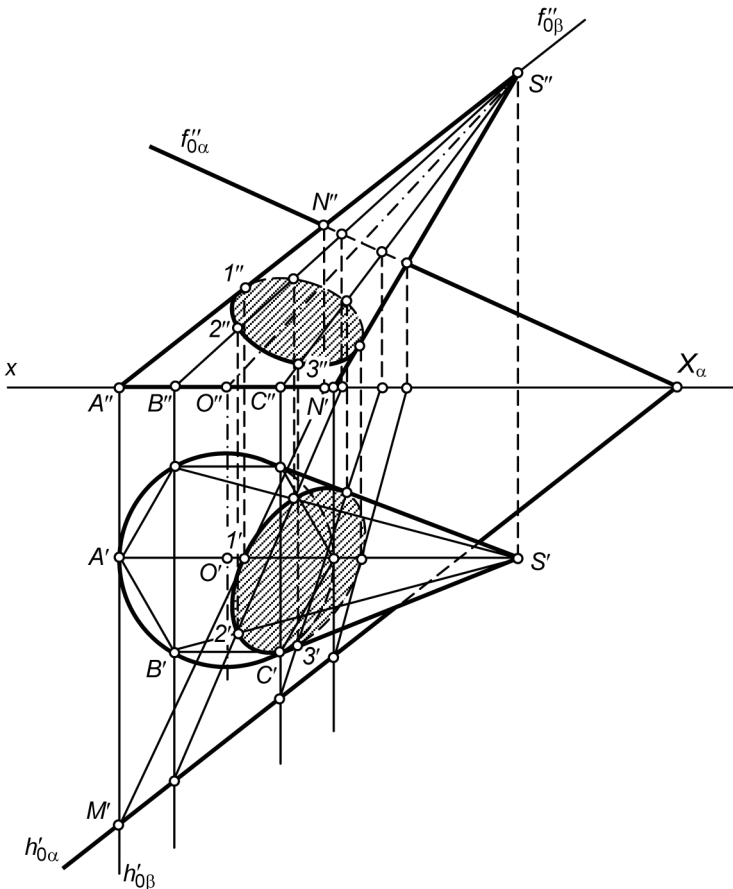


Рис. 9.10. Пересечение конуса плоскостью общего положения

Сечение конуса может быть найдено при помощи метода перемены плоскостей проекций. При этом дополнительную плоскость проекций вводят так, чтобы она была перпендикулярна одной из имеющихся плоскостей проекций (π_1 или π_2) и секущей плоскости. В этом случае секущая плоскость относительно дополнительной плоскости проекций становится проецирующей, а проекция сечения преобразуется в отрезок прямой, совпадающий со следом секущей плоскости.

Пересечение цилиндра плоскостью

В зависимости от расположения секущей плоскости относительно оси кругового цилиндра в сечении возможно образование следующих фигур:

- ❖ окружности, если секущая плоскость перпендикулярна оси цилиндра;
- ❖ параллелограмма, если секущая плоскость параллельна оси цилиндра (если секущая плоскость проходит через ось цилиндра, то образуемый в сечении параллелограмм называется *осевым сечением*; в частном случае при касании секущей плоскости боковой поверхности цилиндра образуется отрезок);
- ❖ эллипса, в любом другом положении секущей плоскости (в частном случае при касании контура основания образуется точка).

Если в сечении цилиндра образуется эллипс, то его малая ось всегда будет равна диаметру цилиндра, величина большой оси зависит от угла между секущей плоскостью и осью цилиндра. В случаях, когда секущая плоскость, не параллельная оси цилиндра, пересекает его основание (основания), в сечении получается фигура, ограниченная частью окружности или эллипса и хордой (хордами). Эта хорда является отрезком прямой, образуемым в пересечении основания цилиндра секущей плоскостью.

Для построения сечения цилиндра целесообразно *аппроксимировать* его боковую поверхность призматической поверхностью, однако это не исключает возможности применения и общего метода построения при помощи вспомогательных секущих плоскостей.

На рис. 9.11 построено сечение наклонного цилиндра плоскостью α . В цилиндр вписана правильная шестиугольная призма $ABCDEF$. Поскольку секущая плоскость α пересекает основание цилиндра, две точки, лежащие в сечении, очевидны: это точки 1 и 2, которые лежат в пересечении горизонтального следа $h'_{0\alpha}$ с нижним основанием цилиндра. Затем через ребра призмы A , B и C проводим вспомогательные плоскости (например, фронтально-проецирующие плоскости β , γ и ε) и строим точки пересечения этих ребер с плоскостью α (точки 3, 4 и 5). Соединив точки 1, 5, 3, 4 и 2 плавной кривой линией, получаем сечение цилиндра плоскостью. В данном случае сечение представляет собой часть эллипса, ограниченного отрезком 12.

На плоскости проекций π_1 часть контура сечения, ограниченная точками 2-1-3-4 и образующей цилиндра, будет невидима, а на плоскости π_2 невидимой будет кривая 2-5-4-3.

Эта же задача может быть решена путем введения дополнительной плоскости проекций, перпендикулярной одной из имеющихся плоскостей проекций (π_1 или π_2)

и заданной секущей плоскости. Тогда положение секущей плоскости относительно дополнительной плоскости проекций преобразуется в положение проецирующей плоскости, а проекция сечения выродится в отрезок прямой линии.

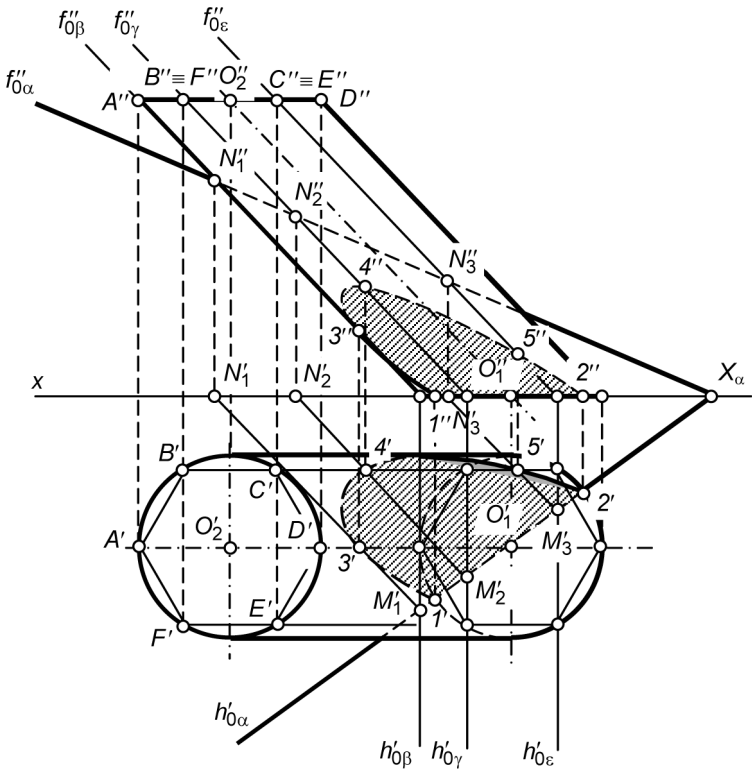


Рис. 9.11. Пересечение цилиндра плоскостью общего положения

9.2. Пересечение прямой с поверхностью геометрического тела

9.2.1. Пересечение прямой с поверхностью многогранника

Точки пересечения прямой с поверхностью геометрического тела иногда называют как *точки встречи* или как *точки входа и выхода* прямой.

Для построения точек пересечения прямой линии с поверхностью многогранника необходимо:

- ◆ через прямую провести вспомогательную плоскость;

- ◆ построить сечение многогранника этой вспомогательной плоскостью;
- ◆ найти искомые точки в пересечении прямой с контурами построенного сечения.

Пересечение прямой с поверхностью пирамиды

Рассмотрим построение точек пересечения прямой LT с поверхностью треугольной наклонной пирамиды $SABC$ (рис. 9.12). Поскольку через прямую линию можно провести любую вспомогательную плоскость, удобнее воспользоваться плоскостью частного положения. Проводим через прямую LT фронтально-проецирующую плоскость α и строим сечение пирамиды этой плоскостью. В этом случае фронтальная проекция сечения $1''-2''-3''$ пирамиды плоскостью совпадает с фронтальным следом плоскости $f''_{0\alpha}$.

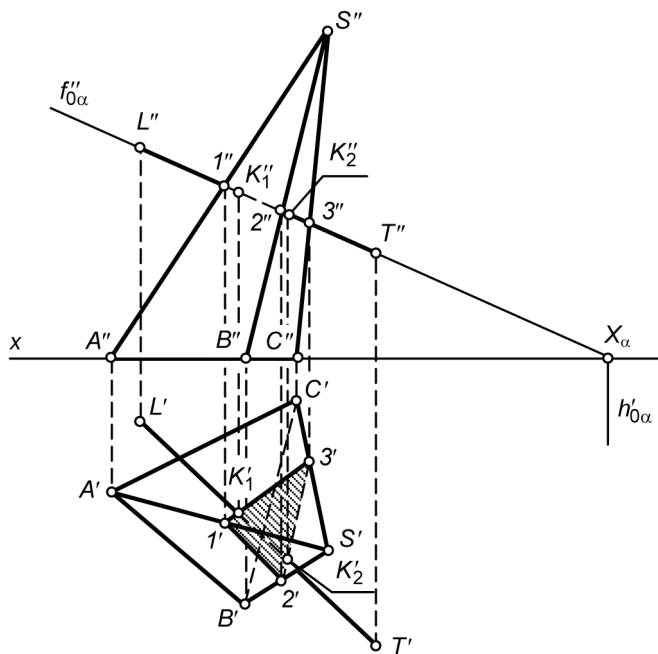


Рис. 9.12. Пересечение прямой общего положения с поверхностью пирамиды

Далее строим горизонтальную проекцию сечения $1'-2'-3'$ и находим проекции точек пересечения прямой с контурами сечения K'_1 и K'_2 . По горизонтальным проекциям этих точек строим их фронтальные проекции. Точки K_1 и K_2 и являются искомыми точками пересечения прямой LT с поверхностью пирамиды.

На рис. 9.12 показана также видимость прямой относительно поверхности пирамиды. На плоскости π_1 будет невидимым отрезок, ограниченный точкой K_1 и ребром SB , а на плоскости π_2 — отрезок, ограниченный точкой K_2 и ребром SA .

Если прямая, пересекающая поверхность пирамиды, является проецирующей (т. е. перпендикулярной одной из плоскостей проекций), то для построения точек встречи целесообразно через заданную прямую провести вспомогательную плоскость, проходящую через вершину пирамиды. Пример построения дан на рис. 9.13. Через прямую LT и вершину S пирамиды проведена вспомогательная горизонтально-проецирующая плоскость α . Затем построена фронтальная проекция сечения этой плоскостью заданной пирамиды — треугольник $1''2''S''$, и определены фронтальные проекции точек пересечения K_1'' и K_2'' . Горизонтальные проекции точек K_1 и K_2 совпадают с вырожденной проекцией прямой LT и на рисунке не показаны.

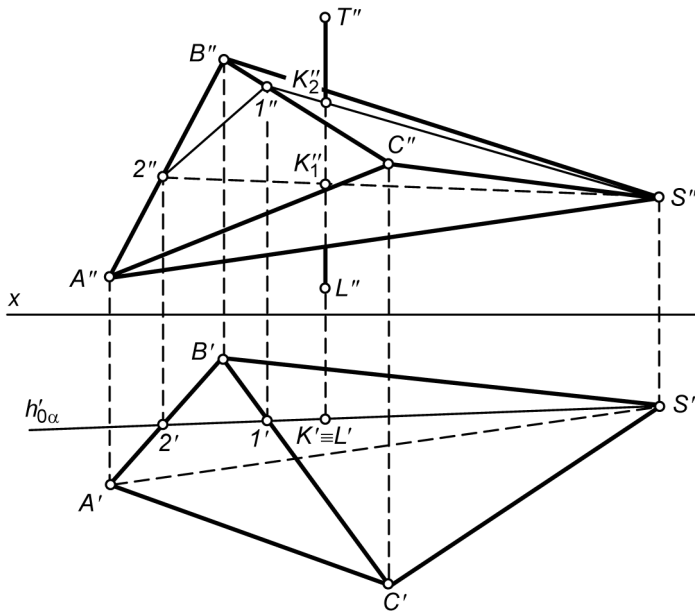


Рис. 9.13. Пересечение горизонтально-проецирующей прямой с поверхностью пирамиды

Пересечение прямой с поверхностью призмы

Рассмотрим простейший случай, когда грани пересекаемой призмы лежат в проецирующих плоскостях. На рис. 9.14 дана призма, боковые грани которой находятся в горизонтально-проецирующих плоскостях, и дана прямая LT общего положения. Положение горизонтальных проекций точек пересечения (точек K_1' и K_2') очевидно, т. к. боковые грани призмы перпендикулярны плоскости π_1 . Фронтальные проекции точек пересечения (точки K_1'' и K_2'') находятся в пересечении

линий проекционной связи, проведенных из K'_1 и K'_2 , и фронтальной проекции прямой. Отрезок K_1K_2 в направлении как на плоскость π_1 , так и на плоскость π_2 считается "невидимым", т. к. он закрывается от непосредственного обзора поверхностью призмы.

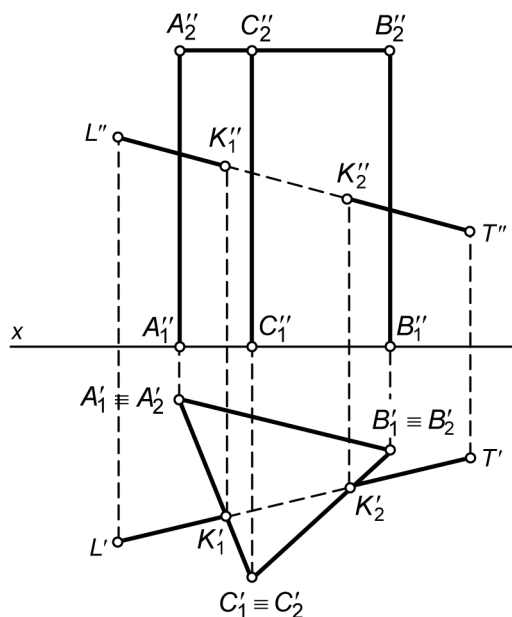


Рис. 9.14. Пересечение прямой общего положения с поверхностью прямой призмы

Общий способ построения точек встречи, при котором через заданную прямую проводится вспомогательная плоскость (как правило, проецирующая), применяется, когда пересекаемые грани находятся в плоскостях общего положения. Реализация этого приема показана на рис. 9.15, где через прямую LT проведена вспомогательная фронтально-проецирующая плоскость α и построено сечение этой плоскостью призмы. Это сечение на фронтальной плоскости проекций спроецируется в отрезок прямой $1''-3''-2''$. В пересечении линий проекционных связей, проведенных из $1''$, $2''$ и $3''$, с соответствующими горизонтальными проекциями ребер призмы получаем точки $1'$, $2'$ и $3'$. Соединив эти проекции, находим горизонтальную проекцию сечения — треугольник $1'2'3'$.

Точки пересечения K_1 и K_2 прямой LT с контурами сечения являются точками пересечения прямой с поверхностью призмы.

Определяем видимость прямой относительно поверхности призмы. В направлении на плоскость π_1 невидимым будет отрезок, ограниченный K_2 и проекцией ребра A_1A_2 , в направлении на π_2 — отрезок между K_1 и K_2 .

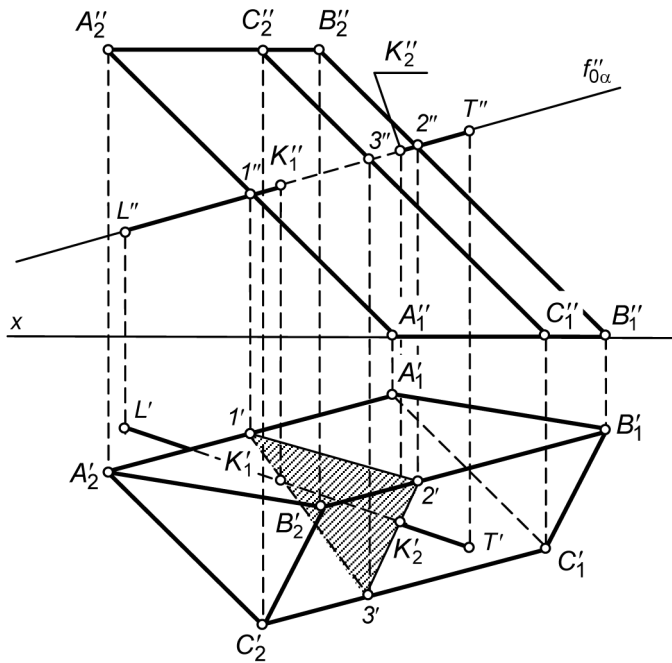


Рис. 9.15. Пересечение прямой общего положения с поверхностью наклонной призмы

9.2.2. Пересечение прямой с кривой поверхностью

Точки пересечения прямой с кривыми поверхностями можно построить двумя способами:

- ◆ Первый способ заключается в том, что через заданную прямую проводят вспомогательную плоскость частного положения и строят сечение кривой поверхности этой вспомогательной плоскостью. Чтобы получить точки, лежащие в сечении, на кривой поверхности проводят ряд образующих и находят точки пересечения образующих со вспомогательной плоскостью (в ряде случаев для получения таких образующих удобно в кривую поверхность вписать многогранник — например, в конус или цилиндр можно вписать соответственно пирамиду или призму). Точки пересечения прямой с построенным сечением есть точки пересечения этой прямой с поверхностью заданного геометрического тела. В результате получаем приближенное решение задачи.
- ◆ Второй способ позволяет получить точное решение, если вспомогательную плоскость выбрать так, чтобы полученное сечение кривой поверхности представляло собой простейшую фигуру — многоугольник или окружность.

Возможность получения такого сечения имеется не всегда — этот способ применим для линейчатых поверхностей и некоторых случаев расположения поверхностей вращения, циклических поверхностей и др.

Пересечение прямой с поверхностью конуса

При пересечении прямой с поверхностью конуса вспомогательную секущую плоскость целесообразно выбрать так, чтобы она проходила через заданную прямую и вершину конуса. Тогда в сечении образуется треугольник, две стороны которого являются образующими конуса.

Используем этот способ для построения точек пересечения наклонного конуса прямой LT (рис. 9.16). Задаем вспомогательную прямую, проходящую через вершину конуса S и любую точку прямой LT , например точку T . Теперь вспомогательная плоскость (общего положения) оказывается заданной двумя пересекающимися прямыми LT и ST .

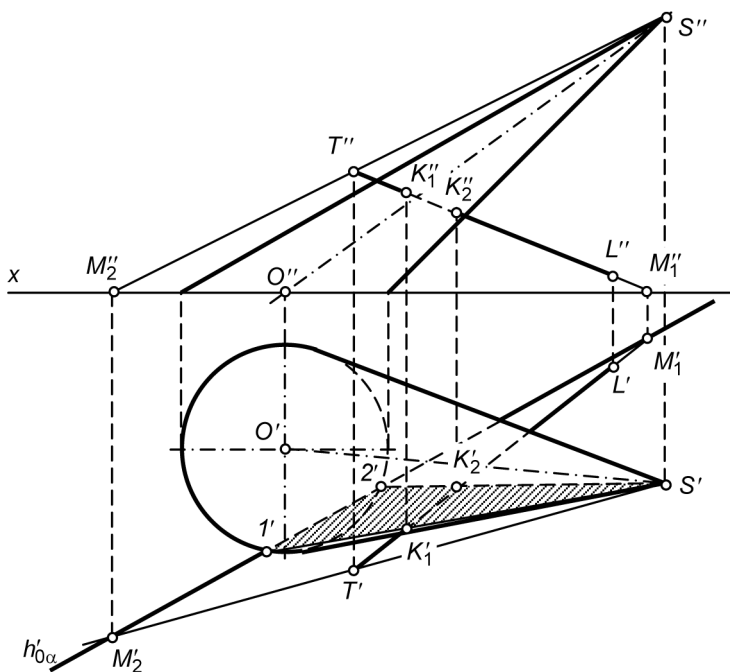


Рис. 9.16. Пересечение прямой общего положения с поверхностью наклонного конуса

Строим проекции горизонтальных следов прямых LT (M'_1) и ST (M'_2). Через эти точки проводим горизонтальный след этой вспомогательной плоскости α — $h'_{0\alpha}$. Этот след пересечет в точках 1 и 2 основание конуса, которое также лежит в плоскости проекций π_1 . Сечение конуса плоскостью α пройдет через вершину

S и представляет собой треугольник $S12$. Искомые точки пересечения прямой LT с поверхностью конуса (K_1 и K_2) найдем в пересечении прямой с контурами построенного сечения.

Если прямая, пересекающая поверхность конуса, является прямой уровня, через прямую целесообразно провести плоскость уровня. На рис. 9.17 через заданную горизонтальную прямую AB проведена вспомогательная горизонтальная плоскость α , которая пересекает конус по окружности радиуса R . Точки пересечения этой окружности с прямой AB являются искомыми точками пересечения.

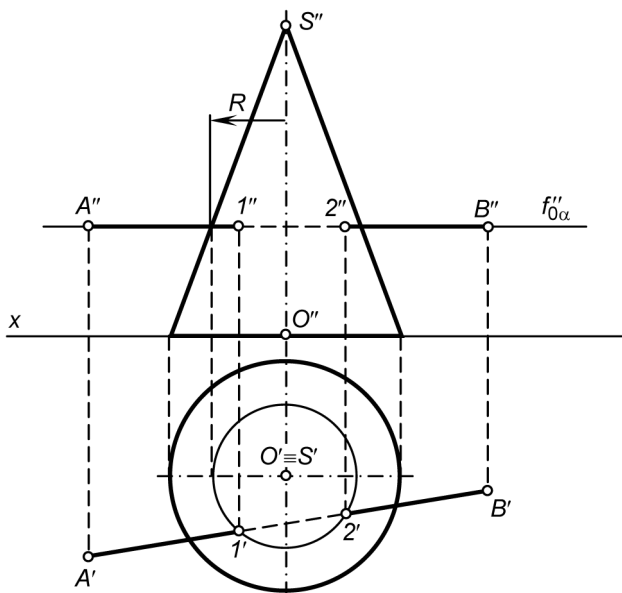


Рис. 9.17. Пересечение горизонтальной прямой с поверхностью прямого конуса

Пересечение прямой с поверхностью цилиндра

Как правило, точки пересечения прямой с поверхностью цилиндра строятся при помощи общего приема построения, включающего проведение через заданную прямую вспомогательной плоскости. Однако в случае, когда образующие цилиндрической поверхности являются проецирующими прямыми, положение точек пересечения становится очевидным.

Например, на рис. 9.18 дан прямой круговой цилиндр, ось которого перпендикулярна плоскости π_1 , и дана прямая AB общего положения. Так как горизонтальная проекция поверхности цилиндра выродилась в окружность, то в пересечении этой окружности с горизонтальной проекцией прямой AB образуются точки $1'$ и $2'$ — горизонтальные проекции точек пересечения. По точкам $1'$ и $2'$ определены их фронтальные проекции.

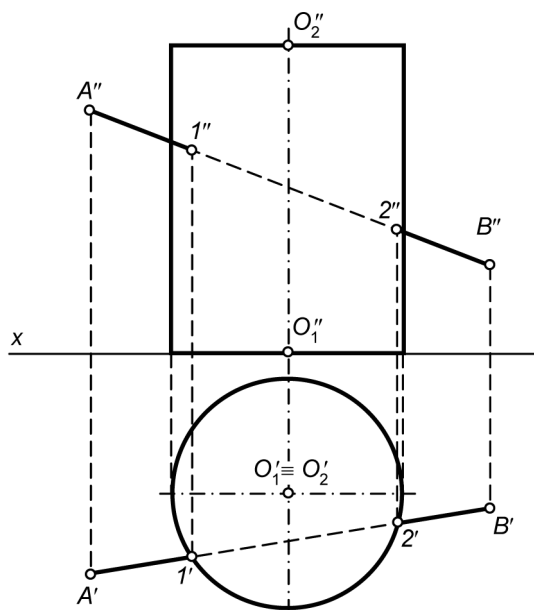


Рис. 9.18. Пересечение прямой общего положения с поверхностью прямого цилиндра

В общем случае для нахождения точек встречи через заданную прямую необходимо провести вспомогательную плоскость. Если эта плоскость не параллельна оси цилиндра, то в сечении цилиндра получится эллипс или окружность, построение проекций которых на эюре достаточно трудоемко. Поэтому наиболее целесообразно проводить вспомогательную плоскость, параллельную оси цилиндра. При этом задать такую плоскость можно двумя пересекающимися прямыми, первая из которых является заданной прямой, а вторая — любой прямой, параллельной оси цилиндра. Если эта вспомогательная плоскость пересечет цилиндр, то в сечении образуется параллелограмм, две стороны которого — образующие цилиндра.

Пример такого построения дан на рис. 9.19. В качестве вспомогательной плоскости выбрана плоскость общего положения, параллельная оси цилиндра и заданная двумя пересекающимися прямыми — прямой LT и прямой, параллельной оси. Такую произвольную прямую можно провести через любую точку прямой LT , например через точку L : ее горизонтальная проекция параллельна $O_1'O_2'$, а фронтальная проекция — параллельна $O_1''O_2''$.

Теперь строим горизонтальный след $h'_{0\alpha}$ секущей плоскости α . Он пройдет через горизонтальные проекции горизонтальных следов прямой LT (M'_1) и вспомогательной прямой (M'_2). В точках 1 и 2 след секущей плоскости пересечет нижнее основание цилиндра и, поскольку вспомогательная плоскость выбрана параллельной

оси цилиндра, сечение будет представлять собой параллелограмм 1-2-3-4. Точки пересечения прямой LT с поверхностью цилиндра (K_1 и K_2) определяются как точки пересечения прямой с контурами построенного сечения.

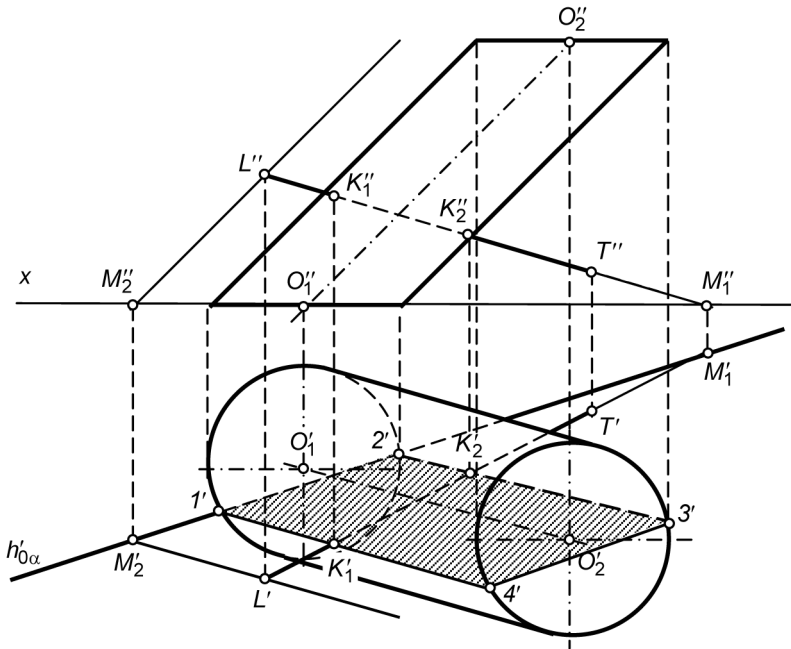


Рис. 9.19. Пересечение прямой общего положения с поверхностью наклонного цилиндра

Пример 19. Построить точки пересечения прямой LT с поверхностью сферы (рис. 9.20).

1. Через прямую LT проведем вспомогательную горизонтально-проецирующую плоскость α (рис. 9.21). Она пересекает сферу по окружности диаметром D .
2. Введем дополнительную плоскость проекций π_4 так, что

$$\pi_4 \perp \pi_1; \pi_4 \parallel \alpha.$$
3. На плоскости проекций π_4 построим проекции отрезка прямой AB и проекцию окружности, по которой плоскость α пересекает сферу. В пересечении сечения и прямой находим точки пересечения K_1 и K_2 сначала на плоскости π_4 , а затем обратным ходом на плоскостях π_1 и π_2 . Обозначаем видимость прямой относительно поверхности сферы.

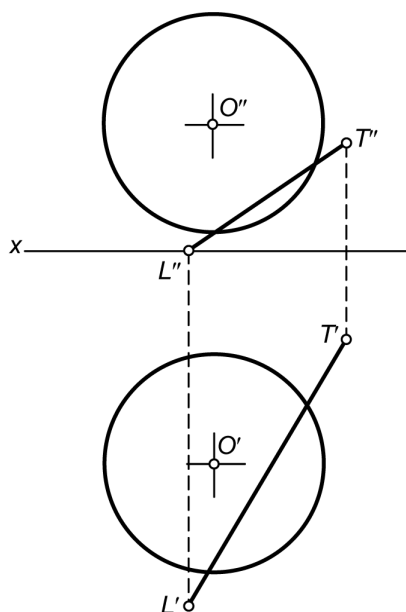


Рис. 9.20. Исходные данные для построения точек пересечения прямой с поверхностью сферы

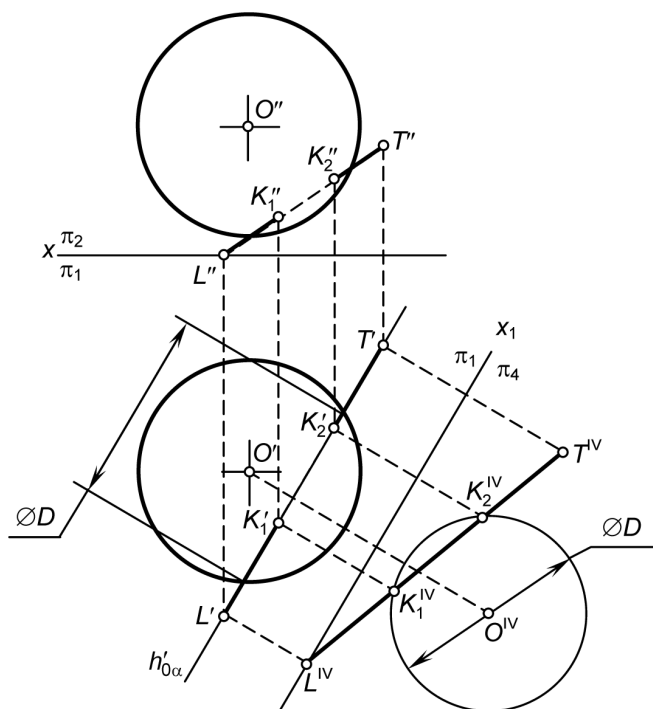


Рис. 9.21. Построение точек пересечения прямой с поверхностью сферы

9.3. Взаимное пересечение поверхностей геометрических тел

9.3.1. Общие сведения о пересечении геометрических тел

Основная задача взаимного пересечения геометрических тел состоит в определении места точек, принадлежащих одновременно обеим поверхностям пересекающихся тел. Это геометрическое место точек представляет собой *линию пересечения* данных поверхностей.

Для нахождения точек, принадлежащих линии пересечения поверхностей, используют:

- ✧ вспомогательные секущие поверхности (плоскости частного или общего положения, кривые поверхности);
- ✧ образующие кривых поверхностей;
- ✧ ребра многогранных поверхностей;
- ✧ вспомогательные прямые линии, лежащие в гранях многогранных поверхностей.

В зависимости от вида пересекающихся поверхностей и их взаимного расположения линия пересечения может быть: а) кривой линией, б) ломаной линией, в) прямой линией. Линия пересечения может быть плоской или пространственной.

Способы построения линии пересечения определяются прежде всего видом пересекающихся поверхностей, поэтому их принято рассматривать отдельно:

- ✧ взаимное пересечение поверхностей многогранников;
- ✧ взаимное пересечение кривой и многогранной поверхности;
- ✧ взаимное пересечение кривых поверхностей.

В необходимых случаях для упрощения или уточнения построений прибегают к способам преобразования эюра.

На чертежах, связанных с построением линии пересечения поверхностей, устанавливают видимость этой линии относительно пересекающихся поверхностей и контуров самих пересекающихся поверхностей относительно друг друга. Линия пересечения считается "видимой", если она принадлежит "видимой" стороне каждой из пересекающихся поверхностей.

9.3.2. Взаимное пересечение поверхностей многогранников

Линия, образуемая при пересечении многогранных поверхностей, представляет собой одну или несколько замкнутых пространственных ломаных линий. В зависимости от способа определения элементов ломаной линии (ее звеньев или вер-

шин) построение линии пересечения поверхностей многогранников может производиться путем:

- ❖ определения отрезков прямых (т. е. определения звеньев ломаной), по которым грани одного многогранника пересекают грани другого — *"способом граней"*;
- ❖ определения точек встречи ребер первого многогранника с ребрами второго и ребер второго многогранника с гранями первого (т. е. определения вершин ломаной) — *"способом ребер"*.

В частном случае вершина ломаной линии может оказаться точкой пересечения ребер многогранников.

В первом способе решения задача сводится к многократному построению линии пересечения плоскостей, в которых лежат грани многогранников, во втором — к построению точек пересечения прямых (ребер) с плоскостями, заданными гранями многогранника.

При построении линии пересечения многогранных поверхностей выбирают тот способ, который дает более простые построения, при этом возможно комбинированное использование обоих способов. На практике пользуются главным образом вторым способом.

Существуют следующие правила, которыми следует руководствоваться при построении линии пересечения двух многогранников:

- ❖ Если хотя бы одна проекция ребра многогранника не пересекает проекцию грани другого многогранника, то данное ребро не пересекает этой грани (однако пересечение всех проекций ребра одного многогранника со всеми одноименными проекциями граней другого многогранника не означает, что эти ребро и грань пересекаются).
- ❖ Проекции линии пересечения располагаются в пределах фигуры, образованной при наложении одноименных проекций двух многогранников.
- ❖ Звенья ломаной, образуемой при пересечении двух многогранников, лежат в одной и той же грани как первого, так и второго многогранника (для определения последовательности соединения вершин ломаной используют вспомогательные диаграммы или таблицы, например, так называемую "сетку" Д. Г. Ананова).
- ❖ При обозначении видимости линии пересечения относительно поверхностей многогранников считается, что звено ломаной является "видимым", если обе грани многогранников, в которых лежит это звено, также "видимые".

На рис. 9.22 показано построение линии пересечения прямой четырехугольной призмы $D_1E_1F_1G_1D_2E_2F_2G_2$ и треугольной пирамиды $SABC$. Построение выполнено способом "ребер", т. е. путем определения точек пересечения ребер одного многогранника с гранями другого.

Проанализируем положение проекций ребер призмы относительно граней пирамиды. На фронтальной плоскости проекций ребра призмы, лежащие в обоих основаниях, не пересекают проекции граней пирамиды, следовательно, они не пересекают поверхность пирамиды. На горизонтальной плоскости проекций ребра

D_1D_2 , G_1G_2 и F_1F_2 , спроецировавшиеся в точку, не пересекают проекций граней пирамиды, поэтому они также не пересекают поверхности пирамиды. Только ребро E_1E_2 призмы может пересекать поверхность пирамиды.

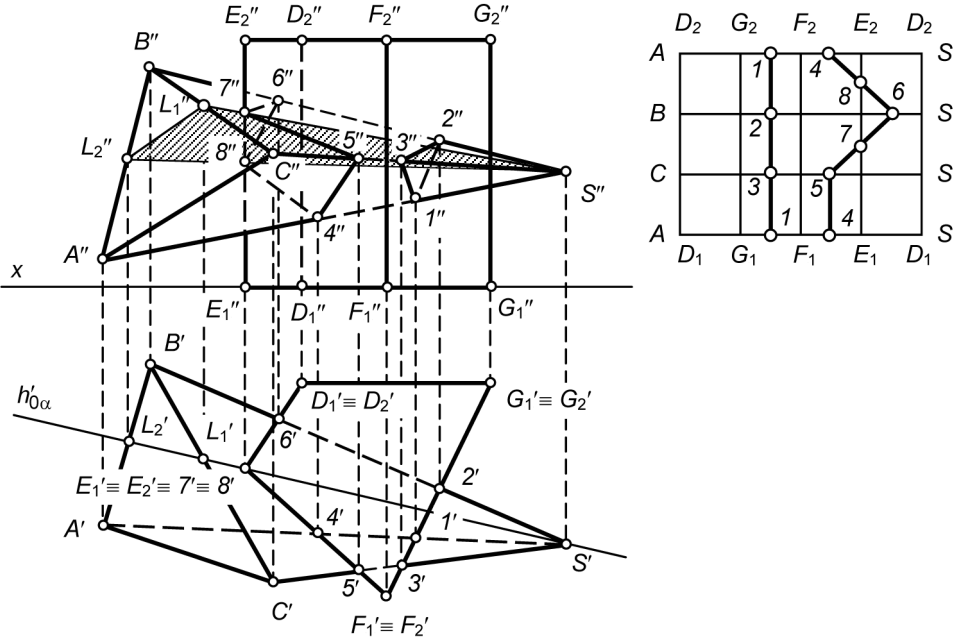


Рис. 9.22. Построение линии пересечения прямой четырехугольной призмы и треугольной пирамиды

Рассуждая аналогичным образом, можно прийти к выводу, что ребра SA , SB и SC пирамиды также могут пересекать поверхность призмы.

Поскольку грани призмы лежат в горизонтально-проецирующих плоскостях, положение горизонтальных проекций точек пересечения (точек $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, $5'$ и $6'$) ребер SA , SB и SC с гранями призмы очевидно. Фронтальные и профильные проекции этих точек лежат на пересечении линий проекционной связи, проведенных из найденных точек, и соответствующих проекций ребер пирамиды.

Для нахождения точек пересечения ребра E_1E_2 призмы с поверхностью пирамиды через это ребро и вершину S пирамиды проведена вспомогательная горизонтально-проецирующая плоскость α . В сечении этой плоскостью пирамиды образуется треугольник SL_1L_2 . В точках пересечения ребра E_1E_2 с контурами сечения образуются точки 7 и 8 — точки пересечения ребра E_1E_2 с поверхностью пирамиды. Эти точки легко найти на фронтальной плоскости проекций. На горизонтальной плоскости проекций ребро E_1E_2 спроецировалось в точку, и следовательно все точки, лежащие на этом ребре (в том числе и точки 7 и 8), находятся в этой выродившейся проекции: $E_1' \equiv E_2' \equiv 7' \equiv 8'$.

Последовательность соединения построенных точек определена при помощи "сетки" Д. Г. Ананова — таблицы, строки и столбцы которой имитируют грани многогранников, а сами линии — их ребра (см. рис. 9.22, справа).

Столбцы таблицы $D_1G_1G_2D_2$, $G_1F_1F_2G_2$ и т. д. отображают боковые грани призмы, а строки $ASSB$, $BSSC$, $CSSA$ — грани ASB , BSC , CSA пирамиды. На диаграмму наносят точки, принадлежащие линии пересечения. Например, точка 2 находится на ребре SB пирамиды и в грани $G_1F_1F_2G_2$ призмы, точка 6 — на этом же ребре пирамиды и в грани $E_1D_1D_2E_2$ призмы, точка 7 — на ребре E_1E_2 призмы и в грани SBC пирамиды и т. д. Построенные на "сетке" Д. Г. Ананова точки соединяются между собой по следующему правилу: можно соединить только те точки, которые лежат в пределах одной ячейки. Точку 1 можно соединить только с точками 2 и 3, точку 2 — только с точками 1 и 3 и т. д.

Таким образом, линия пересечения заданных многогранников распалась на две линии: треугольник 123 и пространственную замкнутую ломаную линию 457684. При помощи алгоритма, найденного по "сетке" Д. Г. Ананова, фронтальные проекции вершин этих фигур следует соединить отрезками прямых с соблюдением правил обозначения взаимной видимости.

На плоскости π_2 в призме "видимыми" будут грани $E_1F_1F_2E_2$ и $F_1G_1G_2F_2$, в пирамиде — грани SBC и SCA . Одновременно этим граням принадлежат отрезки 13, 32, 45 и 57, следовательно, они считаются видимыми; остальные отрезки закрываются от непосредственного обзора поверхностями многогранников.

9.3.3. Взаимное пересечение кривой и многогранной поверхностей

Линия пересечения таких поверхностей представляет собой одну или несколько плоских кривых линий, являющихся пересечением отдельных граней многогранника с заданным телом вращения.

В общем случае для построения линии пересечения кривой поверхности с поверхностью многогранника необходимо найти ряд точек, принадлежащих обоим поверхностям, и соединить их в определенной последовательности замкнутой кривой линией. Эти точки могут быть найдены путем проведения:

- ✧ вспомогательных прямых линий, принадлежащих граням многогранника;
- ✧ вспомогательных образующих кривой поверхности;
- ✧ вспомогательных секущих плоскостей.

Как правило, общие точки определяют путем комбинации перечисленных выше способов с учетом упрощения или уточнения построений. Построение линии пересечения начинают с определения *характерных* (или *опорных*) *точек*, т. е. точек, занимающих особое расположение по отношению к плоскости проекций или к самой линии пересечения.

К характерным точкам относятся:

- ✧ *точки излома* кривой линии (если они имеются) — точки пересечения ребер многогранника с кривой поверхностью;

- ♦ наиболее удаленная и наиболее близкая точки к плоскостям проекций (*экстремальные точки*);
- ♦ точки, делящие кривую на видимую и невидимую части (*точки видимости*);
- ♦ точки наибольшей или наименьшей ширины кривой.

Рассмотрим пример построения линии пересечения треугольной пирамиды и прямого кругового цилиндра (рис. 9.23).

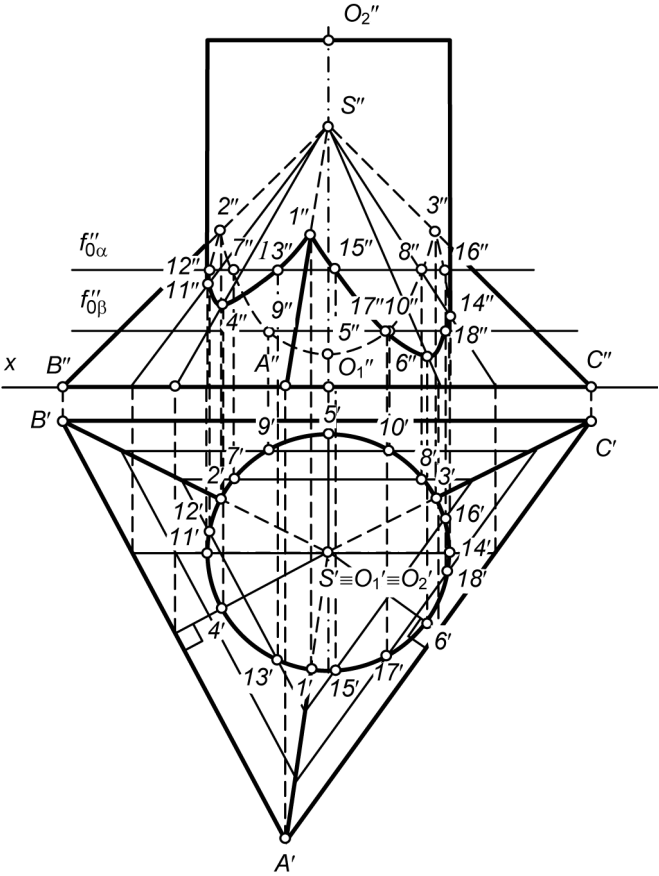


Рис. 9.23. Построение линии пересечения треугольной пирамиды и прямого кругового цилиндра

Характерные точки — точки излома 1, 2 и 3, являющиеся точками пересечения ребер пирамиды с поверхностью цилиндра, определены по пересечению горизонтальных проекций ребер с проекцией поверхности цилиндра (на горизонтальной плоскости проекций она спроецировалась в окружность).

Характерные точки 4, 5 и 6, наиболее близкие к плоскости проекций π_1 , находятся в месте пересечения линий наибольшего ската, проведенных из вершины S

в каждой грани пирамиды, с поверхностью цилиндра (положение этих точек является явным на горизонтальной плоскости проекций).

Дополнительные точки определены при помощи вспомогательных секущих плоскостей α и β , параллельных плоскости π_1 . В сечении цилиндра эти плоскости дают окружности, совпадающие на горизонтальной плоскости проекций с основанием цилиндра, а в сечении пирамиды — треугольники. Точки взаимного пересечения этих сечений принадлежат одновременно поверхности пирамиды и поверхности цилиндра. Положение этих точек (точек $7'$, $8'$, $9'$, $10'$ и т. д.) очевидно на плоскости π_1 : они лежат в пересечении треугольников, образующихся в сечении пирамиды плоскостями α и β , с очерком цилиндра.

В процессе построения выявилась необходимость построения точек 11 и 14 , которые на плоскости π_2 делят кривую на видимую и невидимую части. Для этого в гранях пирамиды SAB и SAC проведены вспомогательные отрезки, параллельные фронтальной плоскости проекций. В пересечении этих прямых с проекцией цилиндра на горизонтальной плоскости проекций определено положение точек $11'$ и $14'$, которые затем перенесены на фронтальную плоскость проекций.

Построенные точки последовательно соединяют замкнутой кривой линией. Линия пересечения представляет собой три дуги эллипсов, соединяющихся между собой в точках пересечения ребер пирамиды с поверхностью цилиндра.

Определим видимость как линии пересечения, так и самих геометрических тел. На плоскости π_1 линия пересечения совпала с очерком цилиндра, и обозначать ее видимость здесь не имеет смысла. На плоскости π_2 видимой будет часть линии пересечения $11-4-13-1-15-17-6-18-14$, а невидимой $14-16-3-8-10-5-9-7-2-12-11$. Верхняя часть пирамиды, ограниченная линией пересечения, считается невидимой, т. к. она находится внутри цилиндра и закрывается от непосредственного обзора его поверхностью. Нижняя часть цилиндра также будет невидимой.

9.3.4. Взаимное пересечение кривых поверхностей

В общем случае линия пересечения двух кривых поверхностей является пространственной кривой линией (или двумя кривыми линиями), однако в некоторых частных случаях она может быть и плоской — окружностью, эллипсом и т. д. Линию пересечения кривых поверхностей иногда называют *линией перехода*.

В общем случае для построения линии пересечения необходимо найти ряд точек, принадлежащих обеим поверхностям, и затем последовательно соединить их кривой линией. Для определения общих точек применяется два основных способа:

- ◆ способ вспомогательных секущих поверхностей;
- ◆ способ вспомогательных образующих линий.

В первом случае заданные кривые поверхности пересекаются третьей поверхностью, которая дает в пересечении с заданными некоторые кривые линии. Точки взаимного пересечения этих кривых линий лежат как в секущей поверхности, так и в заданных, т. е. они принадлежат искомой линии пересечения. Проведя ряд секу-

щих поверхностей, можно найти необходимое количество точек, принадлежащих линии пересечения.

Вспомогательные поверхности подбираются таким образом, чтобы в пересечении с заданными они давали простейшие для построения линии (прямые или окружности). Применяют следующие секущие поверхности:

- ✧ плоскости общего или частного положения (способ вспомогательных секущих плоскостей);
- ✧ кривые поверхности (например, сферы — способ вспомогательных секущих сфер).

В случае использования вспомогательных образующих определяются точки, в которых образующая одной поверхности пересекает другую поверхность. Повторяя этот прием для нескольких образующих, определяют ряд точек, необходимых для построения линии пересечения. Этот способ используется, как правило, при построении линии пересечения поверхностей, когда хотя бы одна из заданных поверхностей является линейчатой, и ее видимые прямолинейные образующие пересекают контуры второй поверхности.

Иногда целесообразно комбинировать различные способы построения. Линия пересечения тем точнее, чем больше точек найдено для ее построения.

Существуют следующие правила, которыми нужно руководствоваться при построении линии пересечения:

- ✧ Проекция линии пересечения образуется в пределах общей части проекций заданных поверхностей.
- ✧ При общем расположении поверхностей для упрощения и уточнения построений их положение необходимо преобразовать в частное, например, при помощи метода перемены плоскостей проекций.
- ✧ Построение линии пересечения начинается с определения ее характерных точек, позволяющих установить границы, внутри которых следует искать промежуточные точки.
- ✧ Линия пересечения алгебраических поверхностей является также алгебраической, причем порядок линии пересечения не выше произведения порядков поверхностей, т. е., к примеру, линией пересечения поверхностей второго порядка может быть кривая линия не выше четвертого порядка (кривую линии четвертого порядка иногда называют *биквадратной кривой*).

Рассмотрим применение основных правил построения линии пересечения кривых поверхностей на примерах геометрических тел, ограниченных линейчатыми поверхностями.

Способ вспомогательных секущих плоскостей применяется, когда секущие плоскости дают в пересечении с каждой из данных поверхностей прямые линии или окружности. При этом возможны следующие случаи пересечения линейчатых поверхностей:

- ✧ обе поверхности пересекаются по прямым линиям;
- ✧ обе поверхности пересекаются по окружностям;
- ✧ одна поверхность пересекается по прямым линиям, а другая — по окружности.

Разберем более подробно эти варианты.

Линейчатые поверхности пересекаются по прямым

Две линейчатые поверхности пересекаются секущей плоскостью по прямым линиям, если плоскость проходит через прямолинейные образующие каждой из этих поверхностей. Точка пересечения образующей одной поверхности с образующей другой принадлежит линии пересечения. Такие секущие плоскости целесообразно проводить при построении линии пересечения:

- ♦ двух наклонных цилиндров (секущие плоскости параллельны плоскости параллелизма, параллельной в свою очередь осям обоих цилиндров);
- ♦ двух наклонных конусов (секущие плоскости проходят через вершины обоих конусов);
- ♦ наклонного конуса и наклонного цилиндра (секущие плоскости проходят через вершину конуса и образующие цилиндра).

Линейчатые поверхности пересекаются по окружностям

В сечении двух круговых конусов или цилиндров, основания которых лежат в параллельных плоскостях или в одной плоскости, образуются окружности. Рассмотрим построение линии пересечения прямых круговых конуса и цилиндра с параллельными осями (рис. 9.24). В общем, принципы построения здесь во многом схожи с принципами рассмотренного выше примера взаимного пересечения поверхностей вращения и многогранника.

Определяем характерные точки линии пересечения. В пересечении видимой образующей конуса с поверхностью цилиндра находим точку 1, наивысшую точку по отношению к плоскости π_1 . В пересечении основания конуса с нижним основанием цилиндра (основания лежат в плоскости π_1) отмечаем общие точки 2 и 3, также лежащие в горизонтальной плоскости проекций.

Таким образом, на фронтальной и профильной плоскостях проекций все точки линии пересечения должны находиться между точками 1 и 2 (3). Заданные геометрические тела рассекаем вспомогательными горизонтальными плоскостями α_1 , α_2 , α_3 и α_4 . В сечении конуса и цилиндра образуются окружности.

Рассмотрим построение общих точек на примере точек 4 и 5. В сечении цилиндра плоскостью α_1 образуется окружность радиуса r , горизонтальная проекция которой совпадает с контуром цилиндра. В сечении конуса этой же плоскостью получается окружность радиуса R_1 . В пересечении этих окружностей находим горизонтальные проекции 4' и 5', а их фронтальные проекции определим по линиям проекционной связи, проведенным до пересечения со следом $f''_{0\alpha_1}$ вспомогательной плоскости.

Аналогично находим ряд точек 6, 7, 8,..., необходимых для построения линии пересечения — замкнутой кривой линии, имеющей две точки излома 2 и 3. Построенные точки последовательно соединяем кривой линией. На горизонтальной

плоскости проекций линия пересечения представляет собой две дуги окружностей радиусами r и R , соединяющиеся в точках $2'$ и $3'$; на фронтальной плоскости проекций — дугу $1''-2''(3'')$.

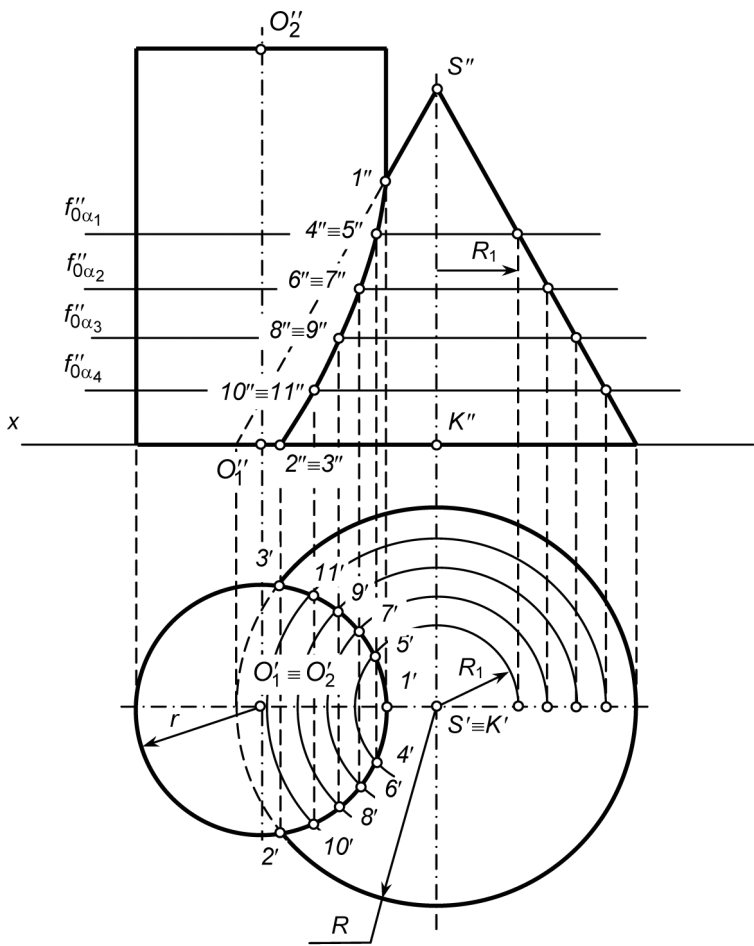


Рис. 9.24. Построение линии пересечения прямых круговых конуса и цилиндра

Определим видимость как линии пересечения, так и самих геометрических тел. На плоскости π_1 линия пересечения совпала с очерком цилиндра, и обозначать ее видимость здесь не имеет смысла. На плоскости π_2 видимая часть линии пересечения $1-4-6-8-10-2$ совпала с невидимой $1-5-7-9-11-3$.

На плоскости π_1 часть основания конуса закрывается цилиндром. На плоскости π_2 части образующих конуса и цилиндра находятся как бы внутри пересекаемых геометрических тел, и следовательно, их необходимо показать штриховой линией.

Одна линейчатая поверхность пересекается по прямым линиям, а другая — по окружности

При пересечении линейчатых тел вращения — конусов или цилиндров, оси которых взаимно перпендикулярны, одна поверхность пересекается секущей плоскостью по прямым линиям, а другая — по окружности.

На рис. 9.25 дано построение линии пересечения двух цилиндров, имеющих взаимно перпендикулярные оси. Характерными точками являются точки пересечения видимых образующих одного цилиндра с контурами другого — точки 1 и 2, наиболее близкие к плоскости π_1 , и точки 3 и 4, наиболее удаленные от плоскости π_1 . Таким образом, на фронтальной плоскости проекций граница построений линии пересечения ограничена по высоте точками $1'' \equiv 2''$ и $3'', 4''$.

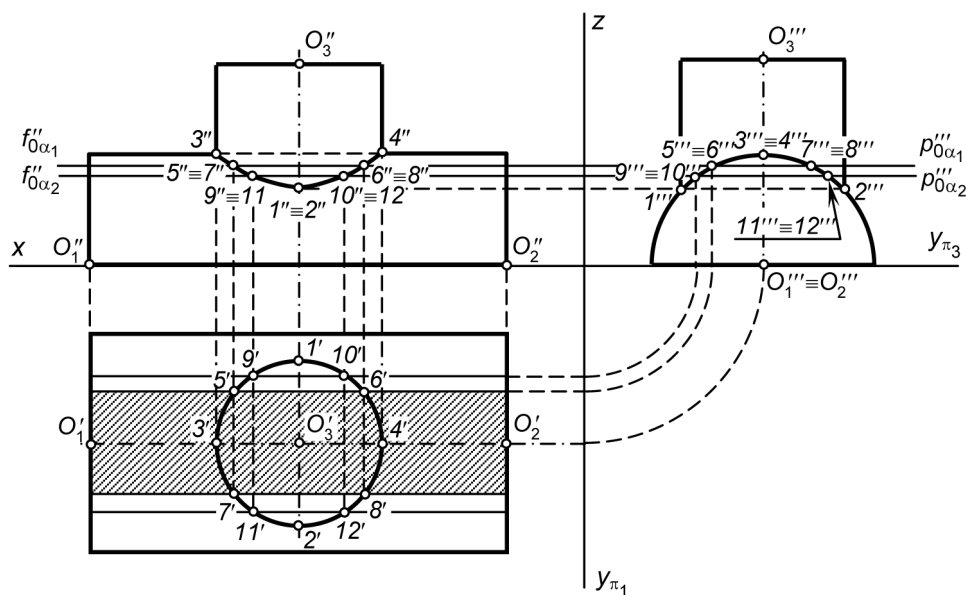


Рис. 9.25. Построение линии пересечения двух цилиндров, имеющих взаимно перпендикулярные оси

Далее используем способ вспомогательных секущих плоскостей. Заданные геометрические тела пересекаются рядом вспомогательных горизонтальных плоскостей $\alpha_1, \alpha_2, \dots$. В сечении плоскостью α_1 цилиндра, ось которого расположена горизонтально, образуется прямоугольник (его горизонтальная проекция заштрихована), в сечении цилиндра с вертикальной осью — окружность (горизонтальная проекция этой окружности совпала с проекцией оснований). В пересечении контуров сечений определяются горизонтальные проекции общих точек: 5', 6', 7' и 8'. Фронтальные проекции этих точек лежат на фронтальном следе $f''_{0\alpha_1}$.

Аналогично находятся точки 9, 10, 11,..., определяющие линию пересечения. На горизонтальной плоскости проекций она совпадает с проекциями оснований вертикального цилиндра; на фронтальной — она представляет собой ветвь гиперболы с вершиной в точке $1'' \equiv 2''$.

Способ вспомогательных секущих сфер

Способ вспомогательных секущих сфер заключается в построении линий взаимного пересечения каждой из заданных поверхностей соосно расположенными сферами. Если прямой круговой конус (рис. 9.26, а) или прямой круговой цилиндр (рис. 9.26, б) рассечь сферой, центр которой находится на оси геометрических фигур, то линия пересечения будет представлять окружности, которые проецируются на плоскость, перпендикулярную оси поверхности, в натуральную величину, а на плоскость, параллельную оси поверхности, в отрезки прямых.

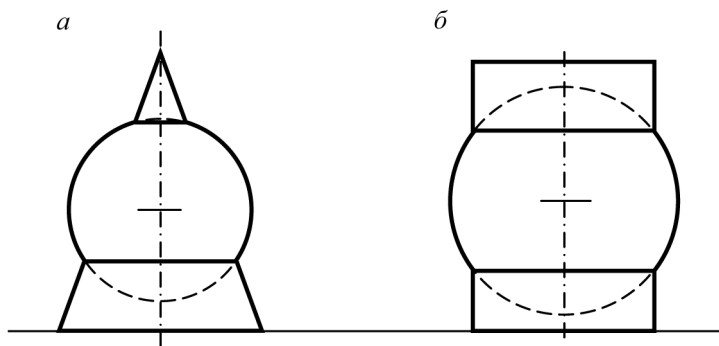


Рис. 9.26. Пересечение сферой прямых круговых конуса (а) и цилиндра (б)

В зависимости от расположения центра сфер различают:

- ♦ способ концентрических сфер, проведенных из одного центра;
- ♦ способ эксцентрических сфер, проведенных из разных центров.

Вспомогательные концентрические сферы применяют для построения линии пересечения поверхностей вращения с пересекающимися осями. В этом случае заданные поверхности пересекаются несколькими вспомогательными сферами, центр которых находится в точке пересечения их осей вращения. Точки пересечения окружностей, по которым сфера пересекается с каждой из поверхностей вращения, являются точками, принадлежащими линии пересечения.

На рис. 9.27 показано построение линии пересечения двух усеченных круговых конусов, оси которых пересекаются под прямым углом в точке О. При этом используется комбинация различных способов: способа вспомогательных образующих линий (для нахождения общих точек 1, 2, 3 и 4), способа вспомогательных секущих плоскостей (для точек 5, 6, 7 и 8) и способа секущих концентрических

сфер (для остальных общих точек). Построение начинается с определения характерных точек.

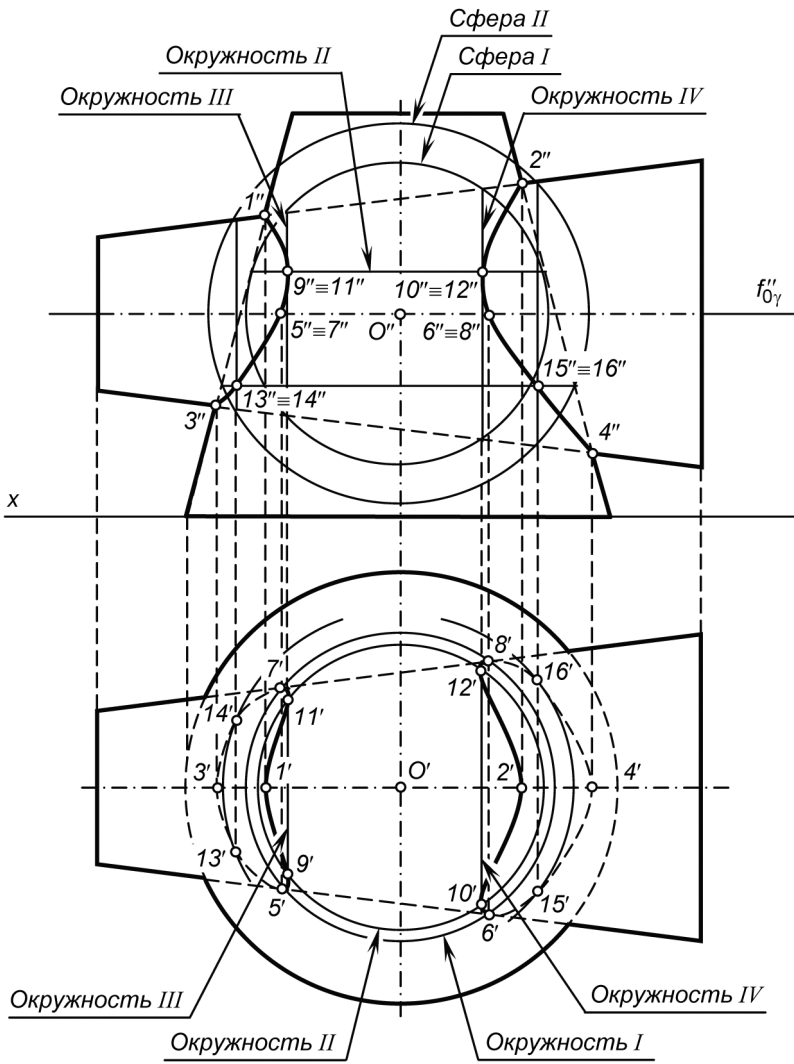


Рис. 9.27. Построение линии пересечения двух конусов, оси которых пересекаются под прямым углом

Фронтальные проекции точек 1, 2, 3 и 4, наиболее удаленных и близких к плоскости π_1 , определяются на пересечении видимых образующих конусов. Характерные точки 5, 6, 7 и 8, в которых на горизонтальной плоскости проекций происходит разделение линии пересечения на "видимую" и "невидимую" части, определены при помощи вспомогательной горизонтальной плоскости γ . В сече-

нии конуса с горизонтальной осью образуется трапеция, проекция которой на плоскости π_1 совпадает с контурами конуса; в сечении плоскостью γ конуса с вертикальной осью образуется окружность I . В пересечении горизонтальных проекций сечений образуются точки $5'$, $6'$, $7'$ и $8'$ (фронтальные проекции $5''$, $6''$, $7''$ и $8''$ находятся на следе $f''_{0\gamma}$).

Характерные точки 9 , 10 , 11 и 12 , наиболее близко расположенные к оси вертикального конуса, находятся при помощи вспомогательной сферы I , вписанной в этот конус. Линией касания сферы I с вертикальным конусом является окружность II , которая на фронтальной плоскости проекций вырождается в отрезок прямой, а на горизонтальной плоскости спроецировалась в натуральную величину. Линией пересечения сферы I с горизонтальным конусом являются две окружности III и IV , которые и на фронтальную и на горизонтальные плоскости проекций спроецировались в отрезки прямых. В пересечении окружностей III и IV с окружностью I находятся общие точки 9 , 10 , 11 и 12 .

Затем из центра O проведена вспомогательная сфера II , и определены промежуточные точки 13 , 14 , 15 , 16 .

В результате последовательного соединения одноименных проекций общих точек образуются две отдельные линии пересечения (в данном случае говорят о проникании конуса с горизонтальной осью в конус с вертикальной осью). На горизонтальной плоскости проекций линия пересечения спроецировалась в виде двух плавных замкнутых кривых линий, а на фронтальной плоскости проекций — в виде гиперболы.

Определение видимости линии пересечения: на плоскости π_2 "невидимая" часть линии пересечения совпала с ее видимой частью; на плоскости π_1 границами видимости являются точки 5 , 6 , 7 и 8 . Следовательно, горизонтальные проекции дуг линии пересечения, ограниченные этими точками и закрываемые от непосредственного обзора конусом с горизонтальной осью, считаются невидимыми. Части образующих конусов, находящиеся в месте их взаимного проникновения, также будут невидимыми. Кроме того, в направлении на π_1 часть основания вертикального конуса закрывается горизонтальным конусом.

Вспомогательные эксцентрические сферы применяются в случаях, когда одна из заданных поверхностей является поверхностью вращения, а для другой характерно наличие круговых сечений, центры которых лежат на одной прямой, пересекающей ось вращения (например, при пересечении кругового конуса и эллиптического цилиндра, тора и кругового конуса и т. д.).

Некоторые частные случаи взаимного пересечения поверхностей вращения

В некоторых частных случаях поверхности вращения пересекаются по прямым или по окружностям. На рис. 9.28, *a* изображены два цилиндра с параллельными

осями, а на рис. 9.28, б два конуса с общей вершиной. В обоих случаях линиями пересечения являются общие образующие этих поверхностей.

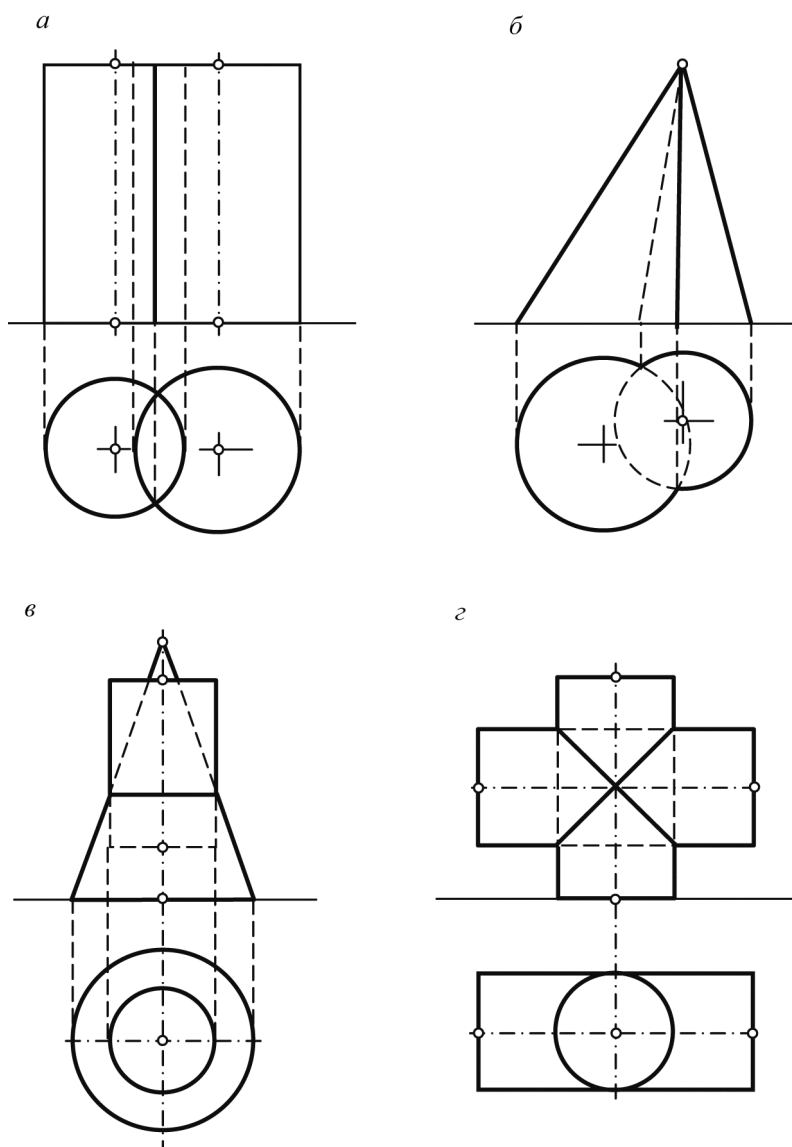


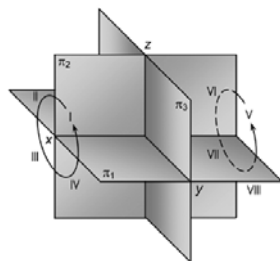
Рис. 9.28. Некоторые частные случаи пересечения поверхностей вращения

Соосные поверхности вращения пересекаются по окружностям. Несколько подобных вариантов было рассмотрено ранее при пересечении кругового конуса и цилиндра сферой (см. рис. 9.26). На рис. 9.28, в дан еще один пример построения

линии пересечения соосных поверхностей вращения — кругового цилиндра и кругового конуса. На фронтальную плоскость проекций окружность, образуемая в пересечении, спроецировалась в виде прямолинейного отрезка, а на горизонтальной плоскости проекций она совпала с проекциями оснований цилиндра.

При взаимном пересечении поверхностей вращения второго порядка в некоторых случаях происходит распадение линии пересечения на две плоские кривые второго порядка (это бывает, когда обе пересекающиеся поверхности вращения описаны вокруг общей для них сферы). На рис. 9.28, *г* показаны два цилиндра равного диаметра с пересекающимися под прямым углом осями. Из точки пересечения может быть проведена сфера, вписанная в оба цилиндра. Поверхности пересекаются по линии, состоящей из двух эллипсов, которые проецируются на плоскость π_2 в виде отрезков прямой линии.

ГЛАВА 10



Развертывание поверхностей

10.1. Общие сведения о развертывании поверхностей

Развертыванием поверхности называется совмещение поверхности геометрического тела с плоскостью чертежа. Фигура, образуемая при развертывании поверхности, называется *разверткой*. Существует два подхода к построению разверток поверхностей.

- ❖ Первый способ — *алгебраический* — заключается в определении геометрических размеров развертки (длин линий, принадлежащих контуру развертки, и величин некоторых углов между этими линиями) путем вычислений. Таким способом, к примеру, легко развертывается поверхность прямого кругового конуса и прямого кругового цилиндра.
- ❖ Второй способ — *графический*. Так как в начертательной геометрии поверхности всегда задаются при помощи каких-либо построений, то этот способ является предпочтительным.

Поверхности делятся на развертываемые и неразвертываемые (или косые).

Развертываемой поверхностью называется поверхность, которая при совмещении с плоскостью чертежа не претерпевает каких-либо повреждений — разрывов, складок и т. д. При этом должны выполняться следующие условия:

- ❖ каждая точка на развертке соответствует единственной точке поверхности;
- ❖ принадлежащие поверхности прямые линии при развертывании остаются прямыми;
- ❖ параллельные прямые также параллельны на развертке;
- ❖ на развертке сохраняются длины линий, лежащих на поверхности, величины углов между линиями и площади фигур, образованные замкнутыми линиями.

К развертываемым поверхностям относятся все многогранные поверхности и некоторые линейчатые поверхности.

Неразвертываемой поверхностью называется поверхность, которая при совмещении с плоскостью чертежа претерпевает какие-либо повреждения. У нераз-

вертываемых поверхностей разверток быть не может, однако на практике в отдельных случаях возникает необходимость в построении приближенной "развертки" таких поверхностей. В этом случае говорят об *условном развертывании*, которое заключается в следующем. Неразвертываемую поверхность аппроксимируют (заменяют) другой развертываемой поверхностью (например, цилиндрической или конической). К неразвертываемым поверхностям относятся все нелинейчатые поверхности и некоторые линейчатые поверхности.

10.2. Развертывание многогранных поверхностей

Развертка многогранной поверхности представляет собой плоскую фигуру, составленную из всех граней этого геометрического тела, изображенных в натуральную величину. Поэтому построение развертки многогранной поверхности сводится к определению натуральных величин отдельных граней ее поверхности. Последовательность расположения отдельных граней на развертке может быть различна.

Существует несколько методов построения развертки многогранной поверхности. Из них выбирают тот, который, во-первых, применим к данному типу многогранников и, во-вторых, является наиболее целесообразным при конкретном расположении проекций многогранника. Допускается комбинированное использование различных методов.

Рассмотрим основные принципы развертывания многогранной поверхности на примерах построения разверток поверхности пирамиды и призмы.

10.2.1. Развертывание поверхности пирамиды

Развертка полной поверхности n -угольной пирамиды состоит из n треугольников, составляющих грани пирамиды, и n -угольника, лежащего в ее основании. Такую развертку строят *методом треугольников*, который заключается в определении натурального вида треугольников, являющихся гранями пирамиды. Эти треугольники строят по известному правилу школьного курса геометрии — по трем сторонам. Поэтому для того, чтобы приступить к построению такой развертки, следует предварительно определить натуральные величины всех ребер пирамиды.

На рис. 10.1 показано построение развертки наклонной треугольной пирамиды $SABC$. Основание пирамиды лежит в горизонтальной плоскости проекций и, следовательно, проецируется на нее в натуральную величину.

Ребра пирамиды SA , SB и SC спроецированы как на горизонтальную, так и на фронтальную плоскости проекций с искажением. Натуральные величины ребер определим способом вращения вокруг оси i , перпендикулярной плоскости π_1 и проходящей через вершину S пирамиды. Рассмотрим определение натуральных величин ребер на примере ребра SA .

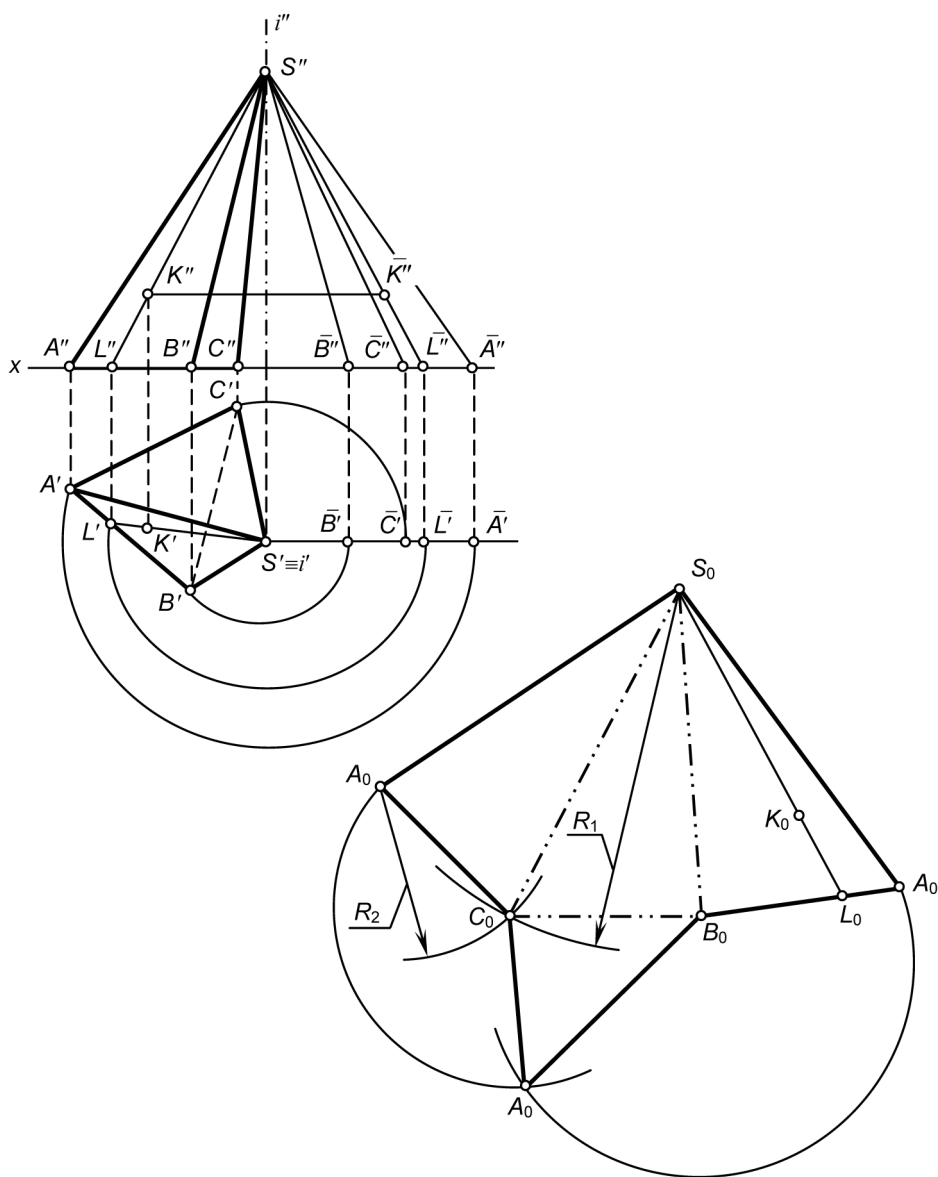


Рис. 10.1. Построение развертки поверхности пирамиды с основанием в натуральную величину

Ребро SA вращается вокруг оси i до положения, параллельного плоскости π_2 . При этом горизонтальная проекция этого ребра вращается вокруг точки i' до положения, параллельного оси x . Из нового положения точки A (точки $\bar{A}'$) проводим линию проекционной связи до пересечения с фронтальным следом плоскости вращения, проведенным из точки A'' перпендикулярно i'' (в данном случае

след совпал с осью x). Образованная в пересечении точка $\bar{A}''$ является фронтальной проекцией нового положения точки A , а отрезок $S''\bar{A}''$ — натуральной величиной ребра SA . Аналогично построены отрезки $S''\bar{B}''$ и $S''\bar{C}''$, являющиеся истинными величинами ребер SB и SC .

Строим треугольники, составляющие грани пирамиды $SABC$, по трем известным сторонам. На чертеже выбираем точку S_0 , из которой в произвольном направлении проводим луч (точки на развертке принято обозначать теми же буквами, что и на эюре, но с добавлением индекса 0, что означает проекцию на плоскость чертежа — нулевую плоскость). На этом луче откладываем натуральную величину отрезка SA , т. е. расстояние $S''\bar{A}''$, и методом засечек находим точку C_0 ($R_1 = |S''\bar{C}''|$ и $R_2 = |A'C'|$). Далее к стороне S_0C_0 пристраиваем треугольник $S_0C_0B_0$, две другие стороны которого определены следующим образом: $|S_0B_0| = |S''\bar{B}''|$ и $|C_0B_0| = |C'B'|$. Аналогично строим и третий треугольник — $S_0B_0A_0$.

Построенную развертку боковой поверхности пирамиды дополняем основанием — треугольником $A_0B_0C_0$. При этом длина его сторон может быть определена или по горизонтальной проекции основания, или по сторонам A_0C_0 , C_0B_0 , B_0A_0 , уже имеющимся на развертке. Контур развертки и линию пересечения выделим сплошной основной линией, линии сгиба — штрихпунктирной с двумя точками.

Рассмотрим построение на развертке некоторой точки K , принадлежащей грани SAB пирамиды. Через эту точку и вершину S пирамиды проведен вспомогательный отрезок с проекциями $S'L'$ и $S''L''$, и методом вращения определена истинная величина отрезка SK ($S''\bar{K}''$). Для построения этого отрезка на развертке на стороне A_0B_0 из точки A_0 отложено расстояние, равное $A'L'$. Построенная точка L_0 соединена с точкой S_0 , и на отрезке S_0L_0 отложено расстояние, равное $S''\bar{K}''$. Точка K_0 развертки соответствует точке K , лежащей на поверхности пирамиды.

10.2.2. Развертывание поверхности призмы

Развертывание поверхности прямой призмы

Развертка поверхности прямой призмы строится весьма просто: развертка ее боковой поверхности представляет собой ряд прямоугольников с общими сторонами. В этом случае построение развертки сводится к определению натуральных величин основания призмы и одного ребра (рис. 10.2).

Развертывание наклонной призмы

Развертка полной поверхности n -угольной наклонной призмы состоит из n параллелограммов, являющихся гранями призмы, и двух n -угольников, лежащих в основаниях.

Для построения развертки наклонной призмы можно использовать два метода:

- ◆ метод нормального сечения и
- ◆ метод раскатки.

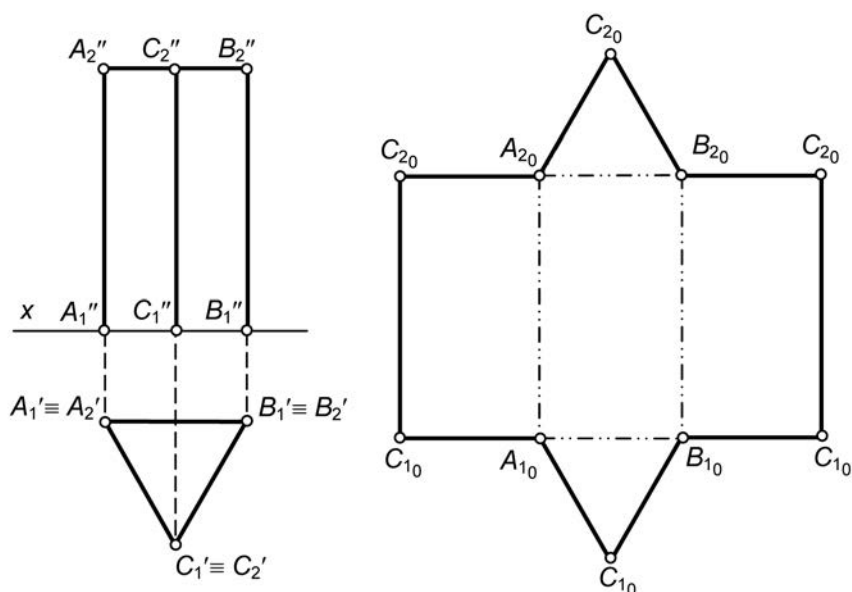


Рис. 10.2. Построение развертки поверхности прямой призмы

Строго говоря, метод треугольников (аналогичный рассмотренному ранее при развертывании пирамиды) также может быть применен для построения развертки поверхности призмы, у которой все грани предварительно разбиты на треугольники. Однако на практике построение развертки призмы этим методом проводится крайне редко в связи с необходимостью выполнения многочисленных построений.

Если основания призмы проецируются с искажением, то для построения развертки следует предпочесть метод нормального сечения. Если же основания на одну из плоскостей проекций проецируются в натуральную величину, то целесообразнее воспользоваться методом раскатки.

Метод нормального сечения

Метод нормального сечения (сечения, перпендикулярного ребрам призмы) включает следующие построения:

- ❖ поверхность многогранника пересекают плоскостью, перпендикулярной его ребрам;
- ❖ определяют натуральную величину нормального сечения;
- ❖ находят натуральную величину ребер многогранника;
- ❖ на свободном месте чертежа контур нормального сечения развертывают в отрезок прямой;
- ❖ через концы отрезков проводят перпендикуляры, на которых откладывают натуральные величины отрезков ребер;
- ❖ концы перпендикуляров соединяют;
- ❖ к построенной развертке боковой поверхности призмы пристраивают основания.

На рис. 10.3 показано построение развёртки треугольной наклонной призмы $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ методом нормального сечения.

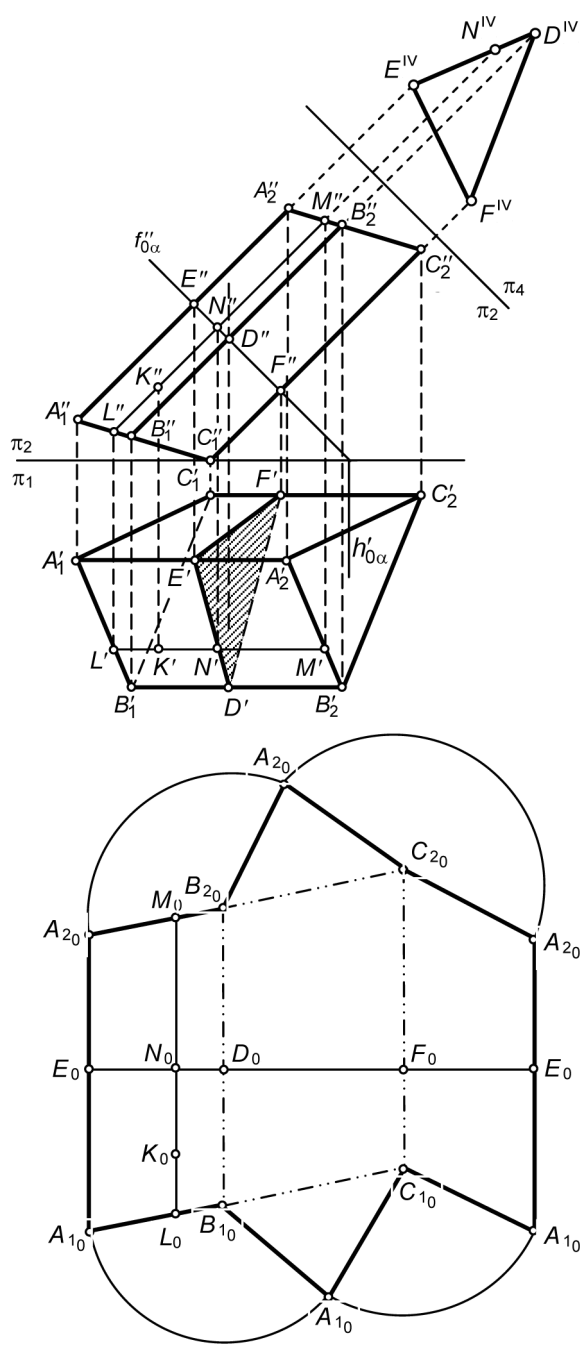


Рис. 10.3. Построение развёртки наклонной призмы методом нормального сечения

Поскольку горизонтальные проекции ребер призмы параллельны оси X (ребра являются отрезками фронтальных прямых), на фронтальную плоскость проекций они проецируются без искажения. Основания $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ лежат во фронтально-проецирующих плоскостях, и, следовательно, на плоскость π_1 они спроецировались с искажением, а на плоскость π_2 — в отрезок прямой.

Заданная призма рассечена вспомогательной фронтально-проецирующей плоскостью α , перпендикулярной ее ребрам. Построено нормальное сечение призмы этой плоскостью — треугольник EDF . Методом перемены плоскостей проекций (плоскость π_4 введена при следующих условиях $\pi_4 \perp \pi_2$; $\pi_4 \perp \alpha$) построен треугольник $E^{\text{IV}}D^{\text{IV}}F^{\text{IV}}$, являющийся истинной величиной нормального сечения.

На чертеже треугольник $E^{\text{IV}}D^{\text{IV}}F^{\text{IV}}$ развернут в отрезок E_0E_0 : $|E_0F_0| = |E^{\text{IV}}F^{\text{IV}}|$, $|F_0D_0| = |F^{\text{IV}}D^{\text{IV}}|$, $|D_0E_0| = |D^{\text{IV}}E^{\text{IV}}|$. Из точек E_0 , F_0 , D_0 , E_0 проведены перпендикуляры, на которых отложена длина отрезков ребер: $|E_0A_{20}| = |E''A_2''|$, $|E_0A_{10}| = |E''A_1''|$, $|D_0B_{20}| = |D''B_2''|$ и т. д.

Точки A_{10} , C_{10} , B_{10} , A_{10} и точки A_{20} , C_{20} , B_{20} , A_{20} соединены отрезками. К ломаной линии $A_{10}C_{10}B_{10}A_{10}$ по известным длинам сторон пристроено верхнее основание — треугольник $A_{10}B_{10}C_{10}$, а к ломаной $A_{20}C_{20}B_{20}A_{20}$ — нижнее основание (треугольник $A_{20}B_{20}C_{20}$).

Для нанесения на развертку некоторой точки K , принадлежащей грани $A_1A_2B_2B_1$ призмы, через нее параллельно боковым ребрам проведена прямая LM , лежащая на той же грани. На отрезке E_0D_0 развертки из точки E_0 отложено расстояние, равное $E^{\text{IV}}N^{\text{IV}}$, и параллельно ребрам вычерчен отрезок L_0M_0 . На этом отрезке из точки L_0 отложена натуральная величина отрезка LK , равная отрезку $L''K''$. Точка K_0 развертки однозначно соответствует точке K , принадлежащей поверхности призмы.

Метод раскатки

Метод раскатки состоит в том, что призму последовательно вращают вокруг ее ребер до совмещения граней с плоскостью чертежа. Пример построения развертки поверхности призмы $A_1B_1C_1A_2B_2C_2$ методом раскатки приведен на рис. 10.4.

Основания призмы спроецированы на плоскость π_1 в натуральную величину, а ее ребра с искажением. Для построения развертки первоначально преобразуем положение призмы так, чтобы ее ребра спроецировались на одну из новых плоскостей проекций в натуральную величину.

Введем дополнительную плоскость проекций π_4 , перпендикулярную плоскости π_1 и параллельную ребрам призмы. Тогда на плоскости π_4 ребра проецируются в натуральную величину (проекции $A_1^{\text{IV}}A_2^{\text{IV}}$, $B_1^{\text{IV}}B_2^{\text{IV}}$ и $C_1^{\text{IV}}C_2^{\text{IV}}$).

Вращением вокруг ребра B_1B_2 совместим с плоскостью чертежа грань $A_1A_2B_2B_1$. Точки B_1 и B_2 лежат на оси вращения и, следовательно, при вращении своего положения не изменяют. Из точки A_1^{IV} перпендикулярно ребру $B_1^{\text{IV}}B_2^{\text{IV}}$ про-

ведем прямую, являющуюся следом плоскости вращения точки A_1 . Затем из точки B_2^{IV} проведем дугу радиусом R , равным натуральной величине стороны основания A_1B_1 ($A_1B_1 = A_1'B_1'$). В пересечении дуги с плоскостью вращения, проведенной ранее из A_1^{IV} , получим точку A_{10} . По той же схеме найдем A_{20} . Параллелограмм $A_{10}B_1^{IV}B_2^{IV}A_{20}$ является натуральной величиной грани $A_1B_1B_2A_2$.

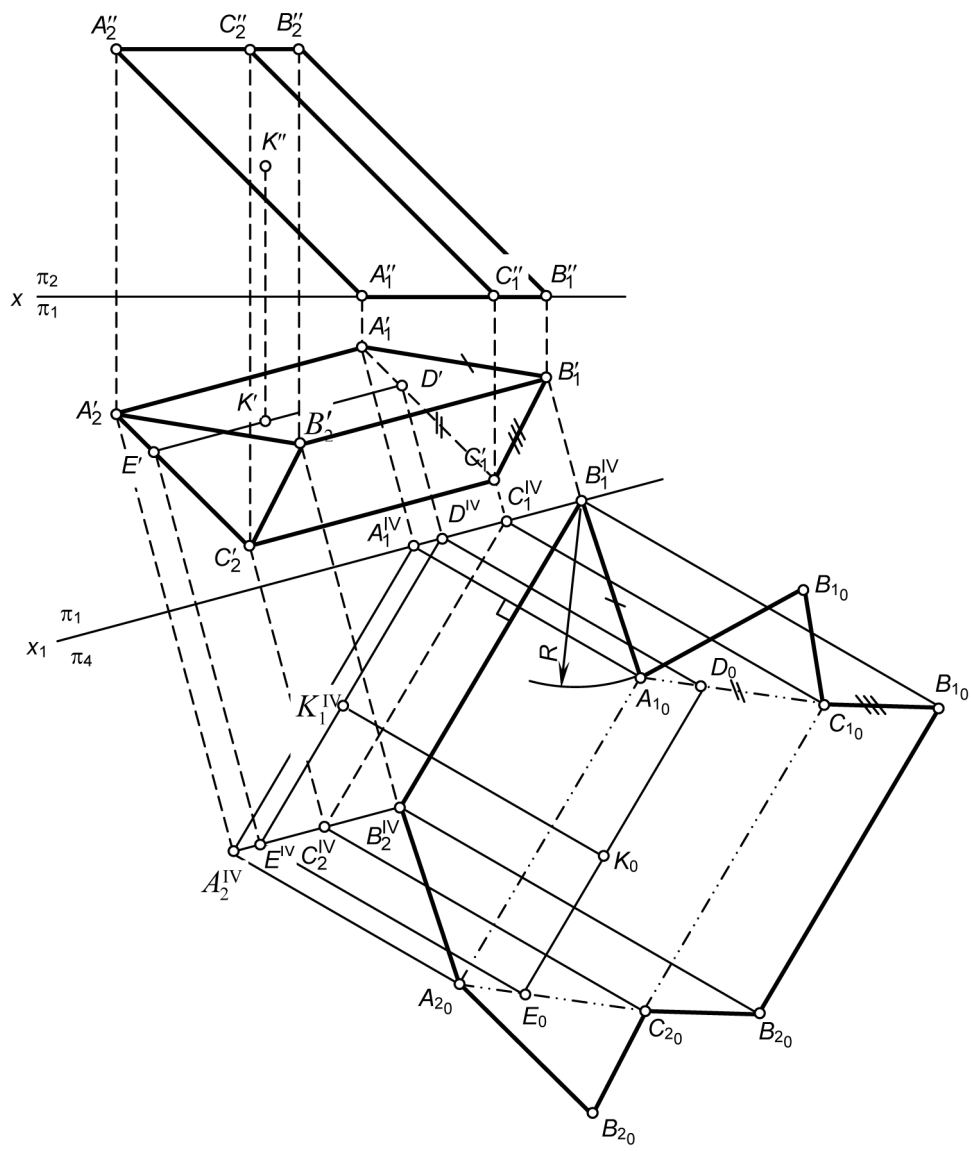


Рис. 10.4. Построение развертки наклонной призмы методом раскатки

Аналогично построим грани $C_{10}C_{20}A_{20}A_{10}$ и $B_{10}B_{20}C_{20}C_{10}$. К полученной развертке боковой поверхности достроим основания $A_{10}B_{10}C_{10}$ и $A_{20}B_{20}C_{20}$. Построенная фигура является разверткой полной поверхности заданной призмы.

Найдем на развертке положение точки K , лежащей в грани $A_1A_2C_2C_1$. Для этого через точку K проводим вспомогательную прямую ED , параллельную ребрам. Затем находим положение этой вспомогательной прямой и точки K на плоскости π_4 и на развертке.

Пример 20. Построить развертку поверхностей пересекающихся пирамиды и призмы (рис. 9.22) и нанести на них линию пересечения.

1. Натуральные величины ребер пирамиды SA , SB и SC определим способом вращения вокруг оси i , перпендикулярной плоскости π_1 и проходящей через вершину S пирамиды (рис. 10.5). Отрезки $S''A''$, $S''B''$ и $S''C''$ являются истинными величинами ребер SA , SB и SC .
2. Перенесем на истинные величины ребер также и точки их пересечения с поверхностью призмы. Для этого из фронтальных проекций $1''$, $2''$, $4''$ и $6''$ проведем следы плоскостей вращения этих точек (следы будут параллельны оси X) до пересечения с соответствующими ребрами. То же можно сделать и с точками 3 и 5 . Однако с учетом того, что проекция $S''C''$ почти горизонтальна, построения оказались бы крайне неточными. Поэтому в этом случае лучше воспользоваться горизонтальной проекцией: перенести точки $3'$ и $5'$ на $S'C'$, а затем — на $S''C''$.
3. Истинную величину основания пирамиды определим методом перемены плоскостей проекций. Сначала перейдем от системы π_1/π_2 к системе π_1/π_4 таким образом, чтобы плоскость треугольника ABC стала перпендикулярной вводимой плоскости π_4 . Вводим дополнительную плоскость проекций π_4 по следующей схеме:

$$\pi_4 \perp \pi_1; \pi_4 \perp (\Delta ABC).$$

Для этого в плоскости треугольника проводим горизонталь $H_1H_2(H_1''H_2'' \parallel X)$ и в любом месте чертежа строим новую ось проекций π_1/π_4 так, чтобы она оказалась перпендикулярной горизонтальной проекции горизонтали:

$$\pi_1/\pi_4 \perp H_1'H_2'.$$

Так как плоскость треугольника ABC перпендикулярна π_4 , то он спроецируется на эту плоскость в виде отрезка прямой линии (A^IVB^IV).

4. Теперь вводим вторую дополнительную плоскость проекций π_5 , перпендикулярную плоскости π_4 и параллельную плоскости треугольника ABC :

$$\pi_5 \perp \pi_4; \pi_5 \parallel (\Delta ABC).$$

Ось проекций π_4/π_5 проводим так, чтобы она совпала A^IVB^IV (можно провести эту ось и параллельно A^IVB^IV). Строим проекции вершин треугольника на плоскости π_5 . Так как плоскость проекций π_5 параллельна плоскости треугольника,

то на нее он спроецируется без искажения. Треугольник $A^VB^VC^V$ есть истинная величина основания пирамиды.

Построим также на плоскостях π_4 и π_5 проекции точек L_1 и L_2 , которые понадобятся для нанесения на развертку линии пересечения.

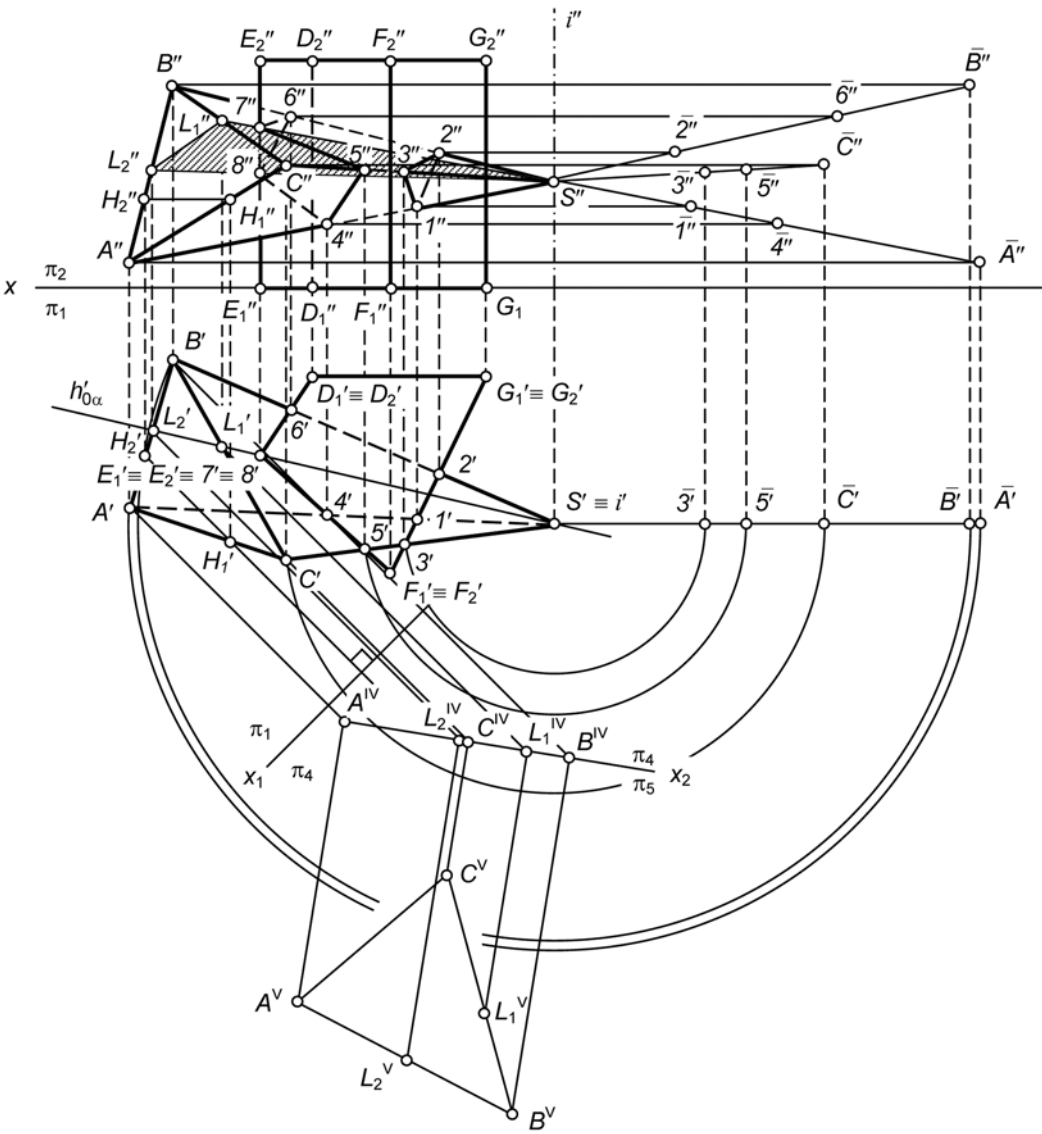


Рис. 10.5. Определение натуральных величин ребер пирамиды

- 5. На чертеже выбираем точку S_0 , из которой в произвольном направлении проводим луч S_0C_0 (рис. 10.6). На этом луче откладываем натуральную величину

отрезка SC , т. е. расстояние $S_0C_0 = S''\bar{C}''$, и методом засечек находим точку A_0 ($R_1 = C^VA^V$ и $R_2 = S''\bar{A}''$). Далее к стороне S_0A_0 пристраиваем треугольник $S_0A_0B_0$, две другие стороны которого определены следующим образом: $S_0B_0 = S''\bar{B}''$ и $A_0B_0 = A^VB^V$. Аналогично построен и третий треугольник $S_0B_0C_0$.

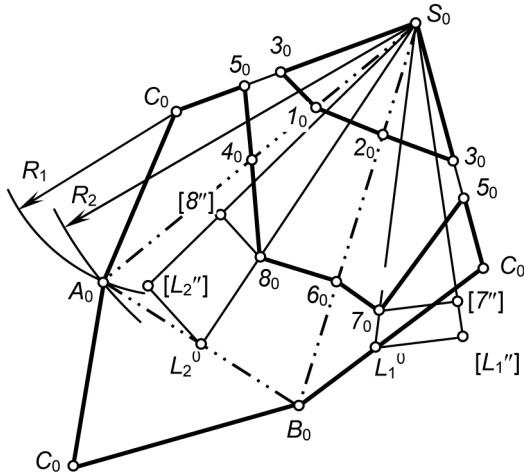


Рис. 10.6. Построение развертки поверхности пирамиды и линии ее пересечения с поверхностью призмы

6. Построенную развертку боковой поверхности пирамиды дополняем основанием — треугольником $A_0B_0C_0$. При этом длины его сторон могут быть определены или по проекции на плоскости π_5 , где треугольник $A^VB^VC^V$ есть истинная величина основания пирамиды, или по сторонам C_0A_0 , A_0B_0 , B_0C_0 , уже имеющимся на развертке.
7. На развертку наносим точки пресечения ребер пирамиды с поверхностью призмы 3_0 , 5_0 , 1_0 , 4_0 , 2_0 и 6_0 . Для этого из вершины S_0 откладываем расстояния $S_03_0 = S''\bar{3}''$; $S_05_0 = S''\bar{5}''$; $S_01_0 = S''\bar{1}''$ и т. д.
8. На развернутое основание пирамиды наносим точки L_1^0 и L_2^0 ($B_0L_1^0 = B^VL_1^V$ и $B_0L_2^0 = B^VL_2^V$) и соединяем их с S_0 . Положение точек 7_0 и 8_0 можно найти, определив натуральные величины расстояний от вершины S до точек 7 и 8 методом вращения или методом перемены плоскостей проекций. Однако можно воспользоваться и методом пропорционального деления отрезка. Проведем из точки S_0 в любом направлении отрезок $S_0[L_1''] = S''\bar{L}_1''$ и нанесем на него точку $[7'']$ ($S_0[7''] = S''\bar{7}''$). Соединим L_1^0 и $[L_1'']$. Из точки $[7'']$ параллельно этому отрезку проведем луч, и в пересечении с $S_0L_1^0$ отметим искомую точку 7_0 . Аналогично на отрезке $S_0L_2^0$ найдем положение точки 8_0 . Соединим нанесенные на развертку точки, принадлежащие линии пересечения.

9. Теперь перейдем к построению развертки прямой призмы. Истинная величина ребер рассматриваемой призмы имеется на фронтальной плоскости проекций (например, $F_1''F_2''$), а истинная величина основания (четыреугольник $F_1'G_1'D_1'E_1'$) — на горизонтальной плоскости проекций. Строим прямоугольники, составляющие грани призмы, а затем к любой из граней пристраиваем верхнее и нижнее основания (рис. 10.7).

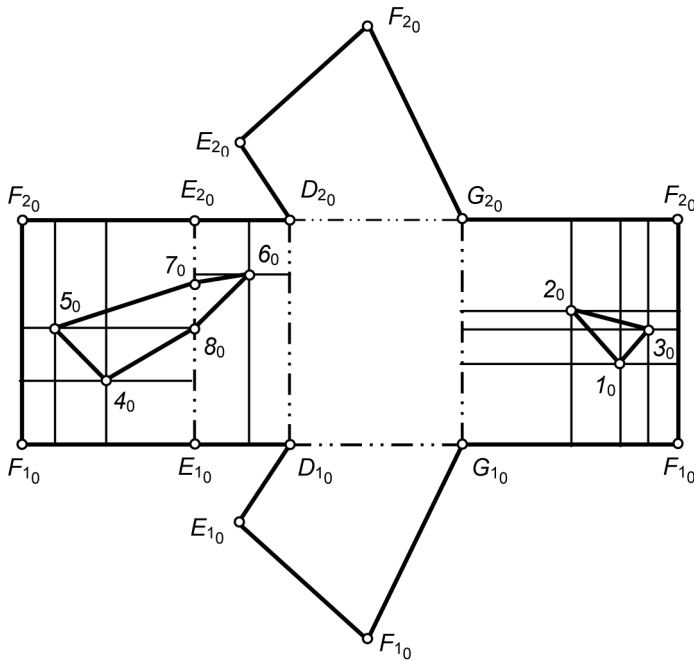


Рис. 10.7. Построение развертки поверхности призмы и линии ее пересечения с поверхностью пирамиды

10. Затем на развертку наносим точки пересечения. Точки 7_0 и 8_0 просто наносим на ребро $E_{10}E_{20}$, взяв соответствующие расстояния с фронтальной или профильной плоскостей проекций.
11. Для нанесения остальных точек в гранях, где лежат точки пересечения, необходимо соорудить своеобразную координатную сетку. Расстояния по горизонтали берутся с горизонтальной проекции призмы, а по вертикали — с фронтальной. Например, чтобы построить точку 3_0 , проводим вертикальную линию на расстоянии $3'F_1'$ от ребра $F_{10}F_{20}$, а горизонтальную линию на расстоянии $x3''$ от $G_{10}F_{10}$. Чтобы построить точку 1_0 , проводим вертикальную линию на расстоянии $1'F_1'$ от ребра $F_{10}F_{20}$, а горизонтальную линию на расстоянии $x1''$ от $G_{10}F_{10}$ и т. д.

10.3. Развертывание линейчатых поверхностей

Линейчатая поверхность является развертываемой, если касательная плоскость, проведенная в какой-нибудь точке поверхности, касается во всех точках прямолинейной образующей, проходящей через эту точку¹. Другими словами, у развертываемой линейчатой поверхности касательная плоскость во всех точках одной образующей постоянна. К числу развертываемых линейчатых поверхностей относятся три типа: коническая, цилиндрическая и торсы.

Развертка линейчатой поверхности строится, как правило, путем аппроксимации, при которой эта линейчатая поверхность заменяется на многогранную, вписанную в данную или описанную около нее.

10.3.1. Развертывание конической поверхности

Развертывание поверхности прямого кругового конуса

Разверткой поверхности прямого кругового конуса является сектор, радиус которого равен длине образующей конуса L , а угол сектора равен

$$\varphi = \frac{360^\circ R}{L}, \quad (10.1)$$

где R — радиус основания конуса.

Рассмотрим построение развертки прямого кругового конуса, рассеченного фронтально-проецирующей плоскостью α (рис. 10.8). Нанесем на развертку также линию пересечения.

Основание конуса разобьем на n частей (например, на 12) точками $A, B, C, D \dots$. На поверхность конуса нанесем ряд образующих $SA, SB, SC, SD \dots$ и построим сечение $1234 \dots$ конуса плоскостью α .

Вычертим развертку боковой поверхности конуса — круговой сектор радиусом R с центральным углом $\varphi = (360^\circ \cdot R)/L$. Разобьем дугу сектора A_0A_0 также на 12 частей и построим положения образующих на развертке $S_0A_0, S_0B_0, S_0C_0 \dots$.

Методом вращения вокруг оси конуса определим натуральные величины отрезков всех образующих между вершиной S и секущей плоскостью α . Две образующие SA и SG на плоскость π_2 проецируются в натуральную величину. Для определения натуральной величины других образующих, например SC , повернем ее до положения образующей SA . Фронтальная проекция $3''$ переместится в положение $\bar{3}''$, и отрезок $S''\bar{3}''$ будет натуральной величиной отрезка $S3$. Аналогичным построением определим натуральные величины отрезков $S1, S2$ и т. д.

¹ Доказательство рассматривается в курсе дифференциальной геометрии.

Откладываем истинные величины расстояний от точки S до точек $1, 2, 3 \dots$ на соответствующих линиях развертки и соединяем точки $1_0, 2_0, 3_0 \dots$ плавной кривой линией.

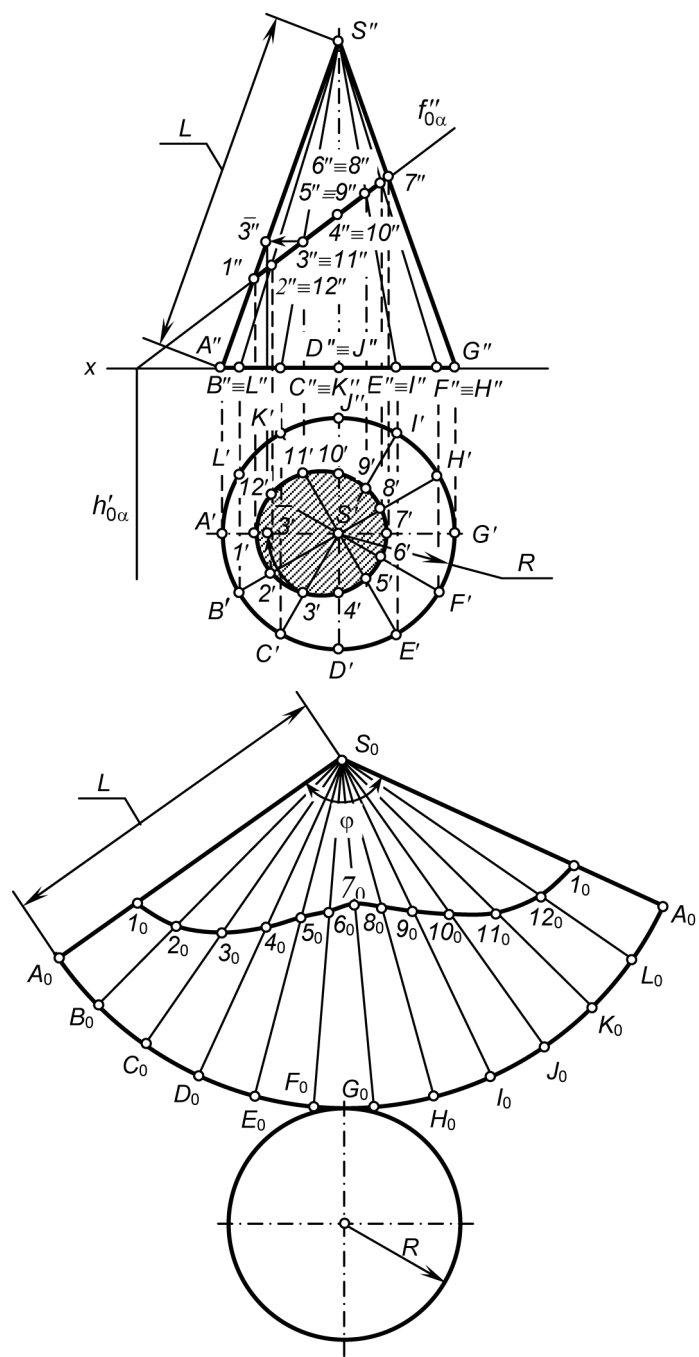


Рис. 10.8. Развертка прямого кругового конуса

Развертывание поверхности наклонного конуса

В общем случае для построения развертки поверхности наклонного конуса в него вписывают пирамиду, ребра которой равны отрезкам образующих конуса, и строят развертку поверхности этого многогранника. Построенные на развертке вершины основания пирамиды соединяют плавной кривой линией, а крайние точки связывают с вершиной конуса отрезками прямой линии. Построенная развертка тем точнее, чем больше граней у пирамиды, вписанной в конус.

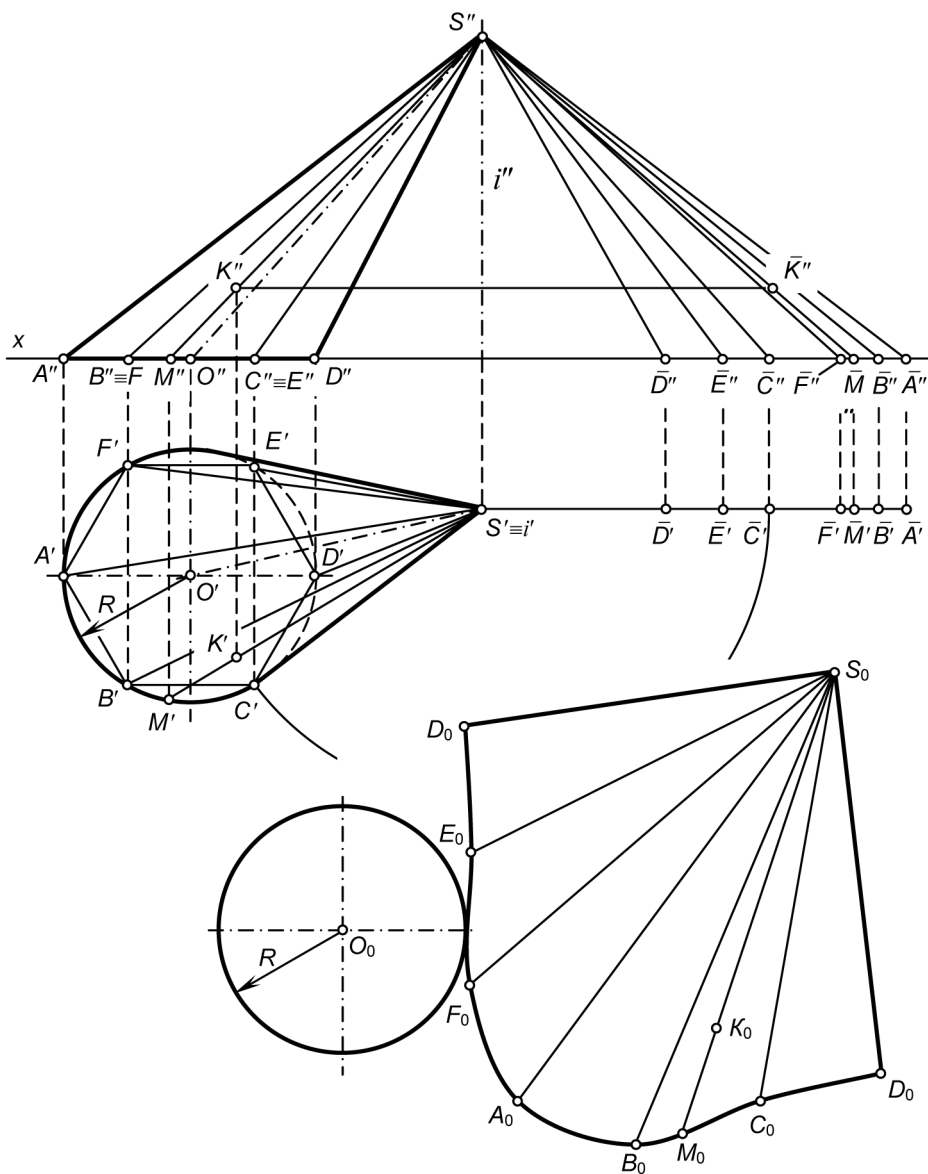


Рис. 10.9. Развертка наклонного конуса с круговым основанием

Для получения полной развертки поверхности конуса развертку боковой поверхности дополняют фигурой, лежащей в основании конуса. Если основание конуса не параллельно плоскости проекций и не лежит в ней, то для построения его на развертке первоначально необходимо найти натуральную величину этой фигуры.

На рис. 10.9 дан пример построения развертки наклонного конуса с круговым основанием. В конус вписана шестиугольная пирамида, основанием которой является правильный шестиугольник $ABCDEF$. Способом вращения вокруг оси i , перпендикулярной плоскости π_1 и проходящей через вершину S , определены натуральные величины ребер этого многогранника. Основания заданного конуса и вписанной в него пирамиды лежат в горизонтальной плоскости проекций и, следовательно, проецируются на эту плоскость без искажения.

Развертку поверхности пирамиды строим методом треугольников. Через найденные на развертке точки $D_0, E_0, F_0 \dots$ проводим плавную кривую линию, концы которой соединяем отрезками с вершиной S_0 . Затем к построенной развертке боковой поверхности конуса пристраиваем основание конуса — окружность, радиус R которой равен радиусу горизонтальной проекции основания.

Для построения на развертке точки, заданной на поверхности конуса, например точки K , проводим через нее образующую с проекциями $S'M'$ и $S''M''$. На кривой $D_0E_0F_0\dots$ из точки B_0 проводим дугу радиуса $B'M'$ и наносим на эту кривую точку M_0 . На отрезке S_0M_0 из точки S_0 откладываем отрезок $S''\bar{K}''$, представляющий собой натуральную величину отрезка SK . Точка K_0 однозначно соответствует точке K , лежащей на поверхности конуса.

10.3.2. Развертывание цилиндрической поверхности

Развертывание поверхности прямого кругового цилиндра

Фигура, образуемая при развертывании поверхности цилиндра, представляет собой "отпечаток", полученный при качении цилиндра по плоскости чертежа. Если цилиндр прямой, то эта фигура является прямоугольником, ширина которого равна длине образующей цилиндра, а длина равна

$$h = 2\pi R, \quad (10.2)$$

где R — радиус основания цилиндра.

На примере, изображенном на рис. 10.10, прямой круговой цилиндр рассечен фронтально-проецирующей плоскостью α , и построена развертка боковой поверхности цилиндра в виде прямоугольника. Развертка дополнена основаниями, при этом радиус основания взят с горизонтальной проекции цилиндра.

Для нанесения линии пересечения на развертку используется метод аппроксимации, когда длина дуги основания принимается равной ее хорде (чем меньше хорда, тем точнее аппроксимация).

Начнем построения, с примера, с точки 1_0 . На фронтальной плоскости проекций образующие цилиндра проецируются без искажения, поэтому достаточно из-

мерить расстояние от нижнего основания до точки $1''$ и отложить его на первой образующей развертки.

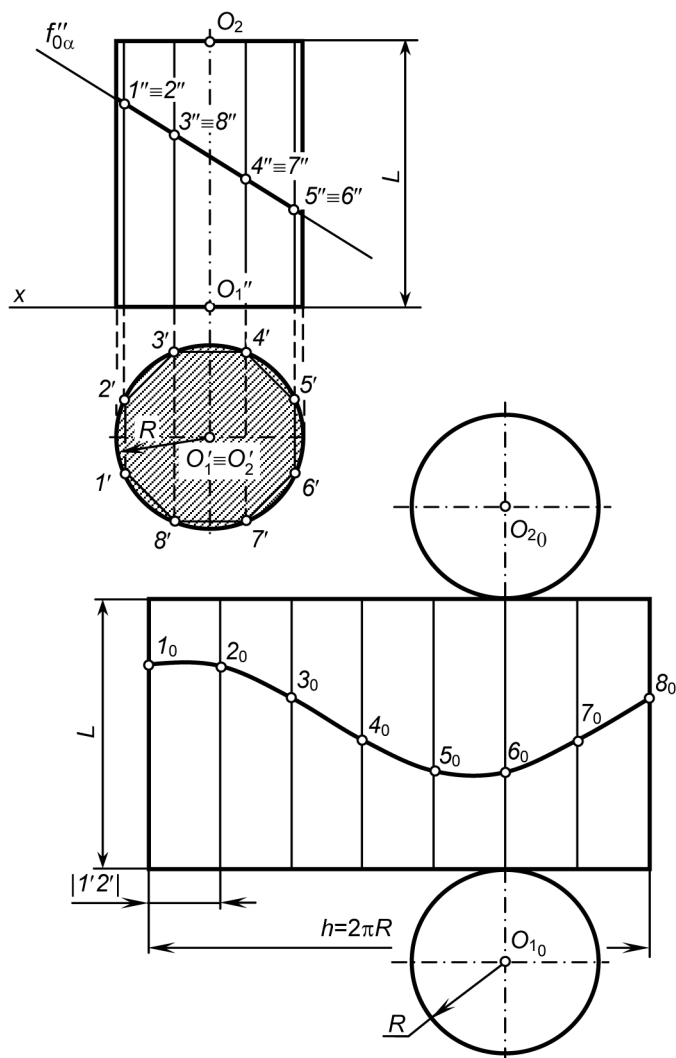


Рис. 10.10. Развертка поверхности прямого кругового цилиндра

Чтобы нанести следующую образующую, проходящую через точку 2, измеряем длину хорды $1'2'$ на горизонтальной плоскости проекций и откладываем его от первой образующей на развернутом основании. Из конца отрезка вертикально проводим образующую и на ней откладываем расстояние от нижнего основания до $2''$ (как уже отмечалось, на плоскости π_2 этот отрезок проецируется в натуральную величину).

Дальше построения повторяются до тех пор, пока на крайней справа образующей не появится снова точка 1_0 . Следует иметь в виду, что основание, построенное методом нанесения на него хорд, может оказаться немного меньше длины, равной $2\pi R$, так как хорды короче аппроксимируемых дуг. Здесь предпочтение надо отдать геометрическим построениям.

Соединим построенные точки линии пересечения плавной кривой линией.

Развертывание наклонного цилиндра

Если цилиндр наклонный, то фигура, образуемая при развертывании его поверхности, ограничена двумя кривыми линиями (синусоидами), концы которых соединены отрезками.

В общем случае развертка поверхности цилиндра строится путем замены поверхности цилиндра поверхностью вписанной в него призмы, ребра которой равны отрезкам образующих цилиндра. Обычно при построении развертки поверхности цилиндра в него вписывают правильную призму, т. к. при этом упрощаются построения, связанные с разметкой развернутых контуров основания. Развертка поверхности тем точнее, чем больше граней у вписанной в цилиндр призмы.

Построенная развертка поверхности дополняется основаниями цилиндра. При этом если основания проецируются на плоскости проекций с искажением, то перед их нанесением на развертку предварительно необходимо найти натуральную величину этих фигур.

Развертка поверхности призмы, вписанной в цилиндр, строится или методом нормального сечения, или методом раскатки. В обоих случаях для развертывания поверхности необходимо, чтобы ребра вписанной в цилиндр призмы были параллельны одной из плоскостей проекций.

Рассмотрим построение развертки наклонного цилиндра с круговым основанием, изображенного на рис. 10.11. В цилиндр вписана правильная шестиугольная призма. Основания как заданного цилиндра, так и вписанной в нее призмы проецируются на плоскость π_1 в натуральную величину, поэтому воспользуемся методом раскатки.

Поскольку ребра призмы являются отрезками прямых общего положения, ее проекция преобразована путем введения дополнительной плоскости проекций π_4 , перпендикулярной π_1 и параллельной ребрам призмы (образующим цилиндра). Для построения новой проекции призмы на плоскости π_4 из вершин призмы проведены линии проекционной связи, перпендикулярные оси π_1/π_4 , и на них отложены отрезки, равные координате Z вершин (проекция нижнего основания призмы совместилась с осью π_1/π_4 , т. к. координаты Z ее вершин равны нулю).

Затем определена натуральная величина грани $B_1B_2C_2C_1$ путем вращения вокруг ребра B_1B_2 в положение, параллельное плоскости π_4 . Для этого из точек C_1^{IV} и C_2^{IV} проведены прямые, перпендикулярные проекции оси вращения — отрезку $B_1^{\text{IV}}B_2^{\text{IV}}$, а из точек B_1^{IV} и B_2^{IV} — дуги радиусом, равным отрезку $B_1^{\text{IV}}C_1^{\text{IV}}$. В их пересечении образуются точки C_{10} и C_{20} .

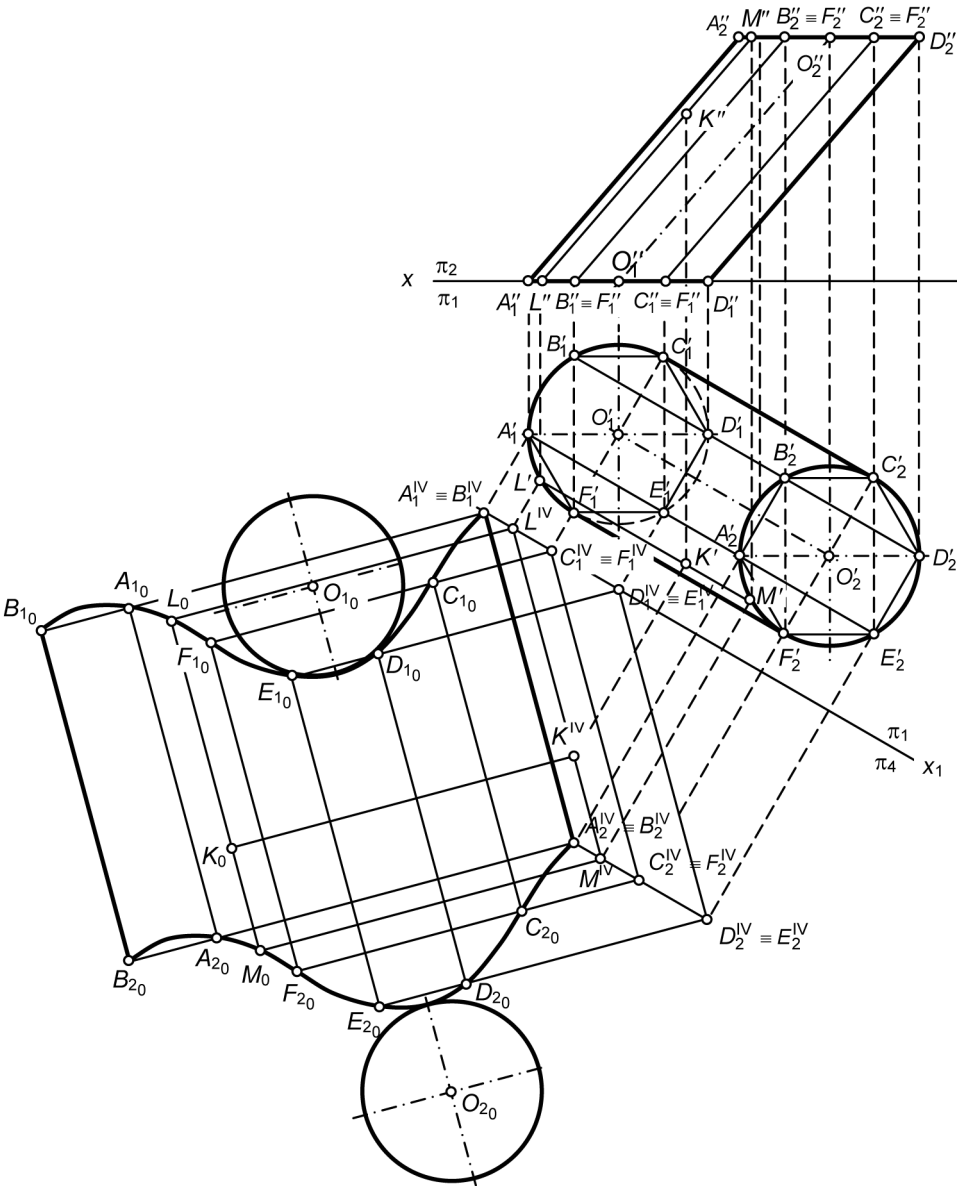


Рис. 10.11. Построение развертки наклонного цилиндра

Построения повторяются до тех пор, пока все грани призмы не станут параллельны плоскости π_4 . Полученные ряды точек B_1^{IV} , C_{10} , D_{10} , E_{10} ,... и B_2^{IV} , C_{20} , D_{20} , E_{20} ,... соединяют плавной кривой линией, а точки B_{10} и B_{20} — отрезком. Для получения развертки полной поверхности цилиндра к его поверхности пристроены основания (радиусы этих окружностей равны радиусам горизонтальных проекций оснований).

Если на развертку необходимо нанести точку, принадлежащую поверхности цилиндра (например, точку K), через нее проводим отрезок образующей (отрезок LM), находим проекции этого отрезка (отрезок $L^IV M^IV$) и заданной точки (точку K^IV) на дополнительной плоскости проекций π_4 и наносим их на развертку.

10.4. Условное развертывание поверхностей вращения

Развертки неразвертываемых поверхностей называют *условными* (строго говоря, у таких поверхностей разверток не может быть). Для построения условных разверток поверхностей вращения применяют два следующих способа:

- ◆ способ вспомогательных цилиндров;
- ◆ способ вспомогательных конусов.

На условных развертках всегда присутствуют разрывы, что, по большому счету, является нарушением одного из основных свойств развертки (такие разрывы можно наблюдать на развертках всех неразвертываемых поверхностей). Но другими способами совместить неразвертываемые поверхности с плоскостью чертежа невозможно.

Способ вспомогательных цилиндров

Способ вспомогательных цилиндров заключается в следующем. Заданную поверхность вращения разбивают на сравнительно узкие, равные между собой части, и каждую часть заменяют цилиндрической поверхностью, касательной к заданной поверхности вращения.

Рассмотрим способ вспомогательных цилиндров на примере условного развертывания сферы (рис. 10.12). Сферу "разрежем" горизонтально-проецирующими плоскостями $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$, проходящими через ось сферы $O_1 O_2$. В нашем примере, сфера поделена шестью вспомогательными плоскостями на 12 частей (фронтальные проекции линий пересечения плоскостей и сферы не показаны). Очевидно, чем больше частей деления сферы, тем точнее условная развертка.

На фронтальной плоскости проекций половину дуги $O_1'' O_2''$ поделим на шесть равных частей: $O_2'' 1'' = 1'' 2'' = 2'' 3''$ и т. д.

Каждую часть деления сферы между вспомогательными плоскостями заменим цилиндрической поверхностью с осью, проходящей через центр сферы параллельно касательной к окружности большого круга (радиус цилиндрической поверхности равен радиусу сферы). Для этого дуги окружности на плоскости π_1 между делениями заменяем отрезками прямых, касательными к очерку сферы (например, дугу $K'-6'-L'$ заменяем отрезком $M'N'$).

Принимая точки $1'', 2'', \dots$ за фронтальные проекции образующих цилиндров, строим их горизонтальные проекции $A'B', CD'$ и т. д.

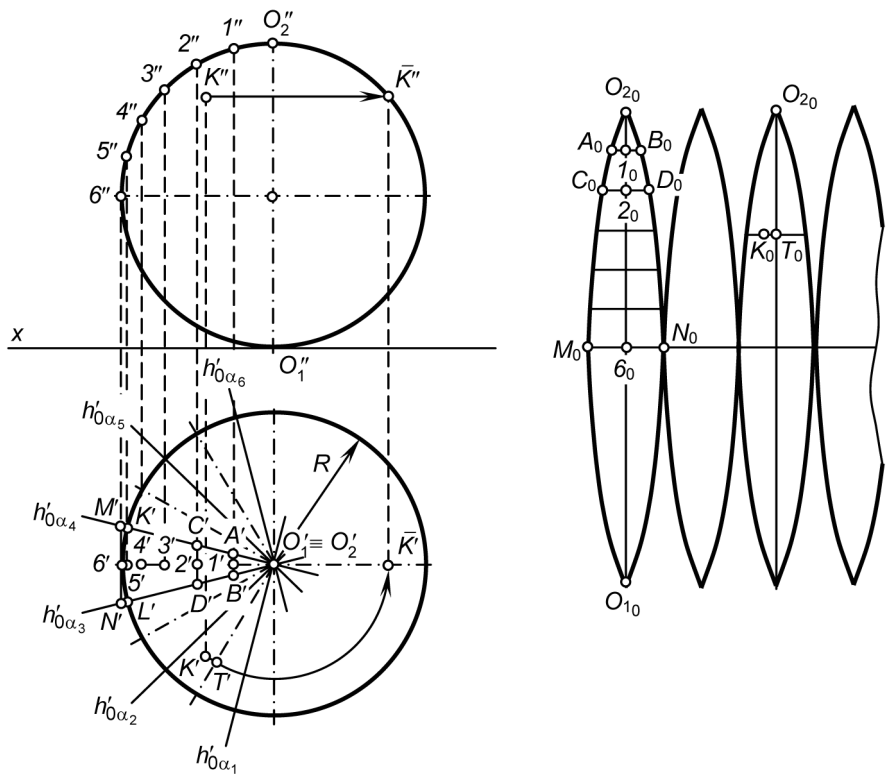


Рис. 10.12. Построение условной развертки сферы способом вспомогательных цилиндров

Переходим к построению развертки. В свободном месте чертежа построим горизонтальную прямую, на которой откладываем отрезок $M_0N_0=M'N'$, и через середину этого отрезка (точку 6_0) проводим перпендикуляр. На перпендикуляре откладываем длину дуги $O_2''6''=\pi R/2$ и на конце отрезка отмечаем точку O_{20} .

Отрезок $O_{20}6_0$ делим точками $1_0, 2_0, \dots$ на шесть равных частей. Через точки деления проводим горизонтальные отрезки, параллельные M_0N_0 , откладывая на них $A_0B_0=A'B', C_0D_0=C'D'$ и т. д. В нижней от отрезка M_0N_0 строим симметричные точки, и построенные точки соединяем плавной кривой линией. В результате получаем один лепесток условной развертки сферы.

Одиннадцать таких же лепестков пристраиваем к уже построенному (на рис. 10.12 для сокращения места нанесено только четыре лепестка).

Если на развертку сферы надо нанести некоторую точку $K(K', K'')$, лежащую на ее поверхности, то предварительно эту точку методом вращения выведем на главный меридиан ($\bar{K}', \bar{K}''$). На развертке в нужном лепестке от его вершины O_{20} откладываем отрезок, равный длине дуги $O_{20}\bar{K}''$ (эту длину можно определить как графически, так и алгебраически) и отмечаем точку T_0 (точку, лежащую на середине лепестка). Через T_0 проводим горизонтальный отрезок, на котором откладываем $T_0K_0=T'K'$.

Способ вспомогательных конусов

Способ вспомогательных конусов, как следует из названия, заключается в замене поверхности вращения другой поверхностью, состоящей из конусов, вписанных в заданную поверхность. Прежде всего, поверхность вращения разбивается меридианами на несколько поясов (чем больше таких поясов, тем точнее получится условная развертка).

В каждый пояс вписывают конус так, что границами образующих конической поверхности служат плоскости меридианов, ограничивающих рассматриваемый пояс. Таким образом, поверхность вращения оказывается разделенной на несколько поясов, каждый из которых заменен конусом.

На рис. 10.13 поверхность вращения разделена на три пояса, и построение развертки свелось к построению развертки трех конусов. Условная развертка двух нижних поясов представлена разверткой прямых круговых усеченных конусов в виде части колец (угол раствора колец определяется по формуле 10.1). Верхняя часть поверхности вращения аппроксимируется прямым круговым конусом, и ее условная развертка является сектором (угол сектора рассчитывается также по формуле 10.1).

Очевидно, что длины дуг, имеющих радиусы R_2 и R_3 , а также радиусы R_4 и R_5 , равны. После того как отдельные конусы свернуты и сложены, окружности, в которых переходят дуги, должны попарно совпадать.

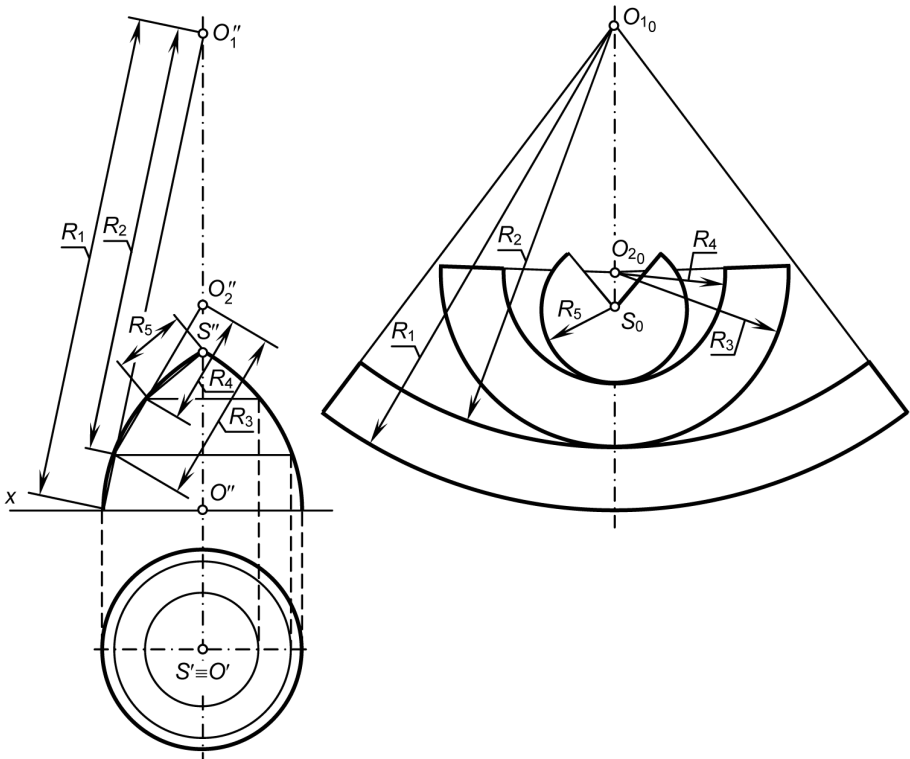
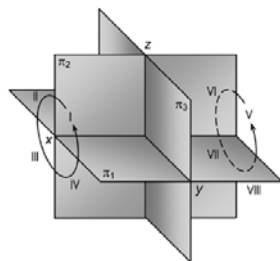


Рис. 10.13. Построение условной развертки поверхности вращения способом вспомогательных конусов

ГЛАВА 11



АксонOMETрические проекции

11.1. Общие сведения об аксонометрических проекциях

АксонOMETрическая проекция, или *аксонометрия* представляет собой изображение предмета на некоторой плоскости, полученное путем проецирования вместе с осями прямоугольных координат, к которым отнесена система точек этого предмета. Аксонометрические проекции обладают свойством наглядности и одновременно свойством обратимости — по таким чертежам легко представить общую форму предметов и их положение в пространстве.

Как правило, аксонометрические проекции образуются путем параллельного проецирования, причем направление проецирования не параллельно ни одной из осей проекций. Рассмотрим получение аксонометрической проекции некоторой точки A пространства (рис. 11.1). Указанная точка A отнесена к системе трех взаимно перпендикулярных плоскостей, пересекающихся по осям x , y и z . По направлению m координатная система вместе с точкой A спроецирована на произвольную плоскость проекций π_0 , и получена ее аксонометрическая проекция A_0 .

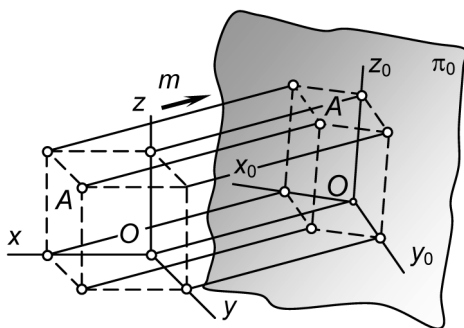


Рис. 11.1. Образование аксонометрической проекции

Если направление проецирования перпендикулярно плоскости чертежа, то аксонометрическая проекция называется *прямоугольной*, в противном случае — *косоугольной*. Проекции осей координат называются *аксонометрическими осями*. Отношение k длины отрезка, расположенного на аксонометрической оси, к натуральной величине отрезка называется *коэффициентом искажения по оси* (численно он равен косинусу угла наклона координатных осей к плоскости проекций).

В зависимости от соотношения между коэффициентами искажения аксонометрические проекции подразделяются на:

- ♦ *изометрические* в случае, когда все три коэффициента искажения равны между собой ($k_x=k_y=k_z$);
- ♦ *диметрические*, когда два коэффициента искажения равны между собой, а третий не равен им (например, $k_x=k_z\neq k_y$);
- ♦ *триметрические*, когда все коэффициенты искажения различны ($k_x\neq k_y\neq k_z$).

Аксонометрическая проекция считается заданной, если известно расположение осей, их положительное направление и коэффициенты искажения. Теоретически любые три пересекающиеся в одной точке прямые могут задать аксонометрические оси. Однако в практике построений с целью обеспечения максимальной наглядности используют лишь некоторые определенные комбинации направлений аксонометрических осей и коэффициентов искажения (табл. 11.1).

Таблица 11.1. Аксонометрические проекции

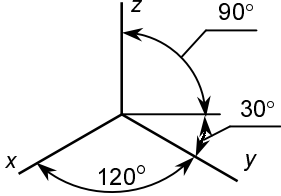
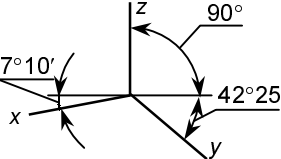
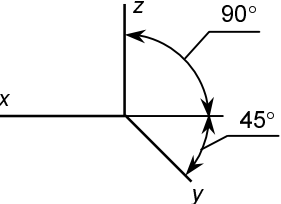
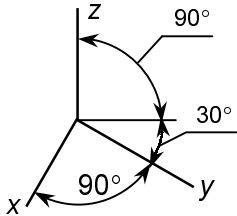
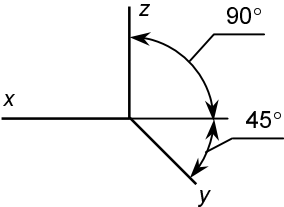
Вид проекции	Расположение аксонометрических осей	Коэффициенты искажения
Прямоугольная изометрическая		$k_x=k_y=k_z=0,82$ (допускается округлять до 1,0)
Прямоугольная диметрическая		$k_y=0,47$; $k_x=k_z=0,94$ (допускается округлять k_y до 0,5; $k_x=k_z$ до 1,0)
Косоугольная фронтальная изометрическая		$k_x=k_y=k_z=1,0$

Таблица 11.1 (окончание)

Вид проекции	Расположение аксонетрических осей	Коэффициенты искажения
Косоугольная горизонтальная изометрическая		$k_x=k_y=k_z=1,0$
Косоугольная фронтальная диметрическая		$k_y=0,5; k_x=k_z=1,0$

При построении аксонетрических проекций следует учитывать некоторые их свойства, которые вытекают из свойств параллельного проецирования.

- ❖ Аксонетрические проекции параллельных прямых взаимно параллельны. Следовательно, если прямая параллельна одной из осей, то ее аксонетрическая проекция тоже параллельна оси.
- ❖ Искажение равных отрезков параллельных прямых одинаково. Поэтому предмет целесообразно расположить так, чтобы линии его контура сориентировались параллельно осям.
- ❖ При изображении симметричных фигур оси координат для упрощения построений лучше совместить с осями симметрии.

Аксонетрическая проекция точки строится по координатам, откладываемым по осям x , y и z . Построение аксонетрического изображения прямой, плоской или пространственной фигуры, кривой линии сводится к построению проекций принадлежащих этим фигурам точек (концов отрезка, вершин многоугольников и многогранников и др.), которые затем соединяются линиями.

Для изображения тел вращения в аксонетрической проекции следует пользоваться правилами построения окружностей в плоскостях, параллельных плоскостям проекций. При использовании косоугольных фронтальных проекций геометрические фигуры следует располагать по отношению к плоскостям проекций так, чтобы сложные плоские фигуры, окружности, дуги плоских кривых находились в плоскости, параллельной плоскости π_2 . Тогда построение их упрощается, т. к. они изображаются без искажений. Ни рис. 11.2 один и тот же цилиндр показан в различных стандартных аксонетрических проекциях.

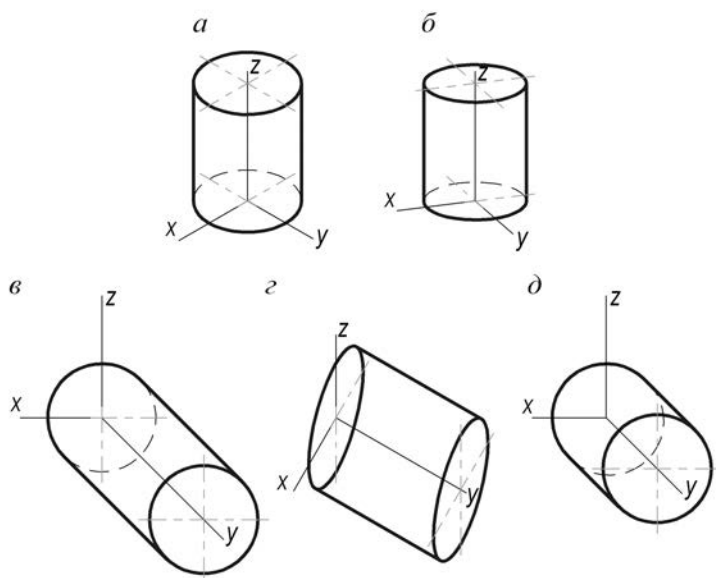


Рис. 11.2. Цилиндр в прямоугольной изометрической проекции (а), прямоугольной диметрической проекции (б), косоугольной фронтальной изометрической проекции (в), косоугольной горизонтальной изометрической проекции (г), косоугольной фронтальной диметрической проекции (д)

Аксонетрические проекции точки, прямой и плоскости мы неоднократно строили в процессе изучения курса. При этом пользовались косоугольной фронтальной диметрической проекцией. Изучим более подробно правила построения геометрических фигур в различных видах аксонетрических проекций.

11.2. Прямоугольные проекции

11.2.1. Прямоугольная изометрическая проекция

Прямоугольная изометрическая проекция одна из самых удобных проекций — аксонетрические оси x , y и z образуют друг с другом углы в 120° , а коэффициенты искажения по всем трем осям одинаковы и равны $0,82$ (см. табл. 11.1).

В целях упрощения изометрическую проекцию выполняют, как правило, без искажения по осям, используя так называемый *приведенный коэффициент искажения*, равный 1 . Каждый отрезок, направленный по осям x , y , z или параллельно им, сохраняет свою величину. Получаемое при этом изображение предмета в изометрической проекции имеет несколько большие размеры (в $1,22$ раза), чем в действительности.

Точка

Пусть точка A задана проекциями на эюре (рис. 11.3, *а*). Определяем координаты точки и наносим их на аксонометрические оси без искажения (рис. 11.3, *б*). Строим параллелепипед проекций, в вершине которого находим аксонометрическую проекцию точки A .

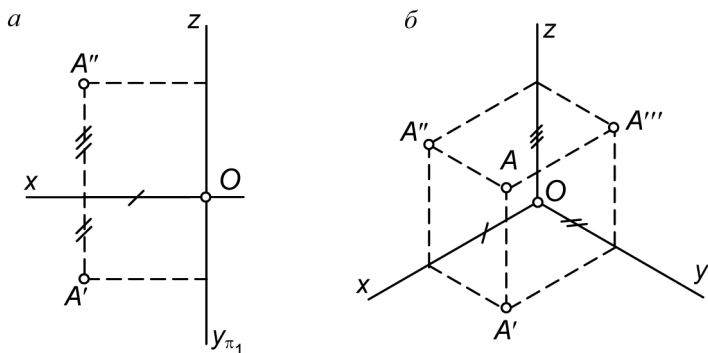


Рис. 11.3. Точка A на эюре (*а*) и в прямоугольной изометрической проекции (*б*)

Отрезок

Для построения аксонометрической проекции отрезка AB надо построить проекции точек A и B , а затем соединить их (рис. 11.4).

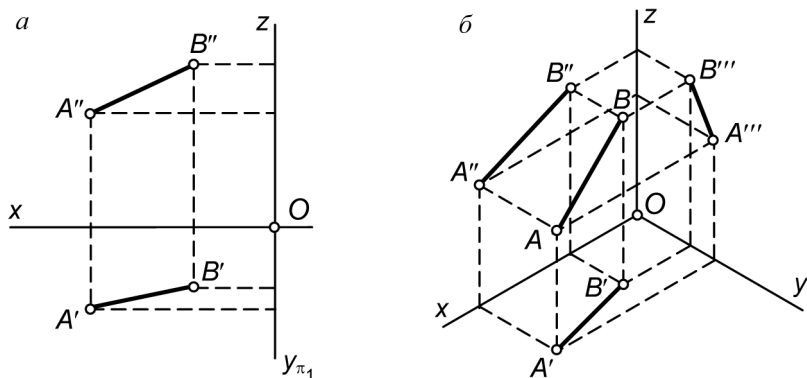


Рис. 11.4. Отрезок AB на эюре (*а*) и в прямоугольной изометрической проекции (*б*)

Плоскость

Чтобы в аксонометрии построить плоскость α , заданную следами (рис. 11.5, *а*), надо измерить координаты точек схода следов и отложить их без искажения по аксонометрическим осям (рис. 11.5, *б*). Затем соединяем точки схода следов и получаем аксонометрическую проекцию плоскости α .

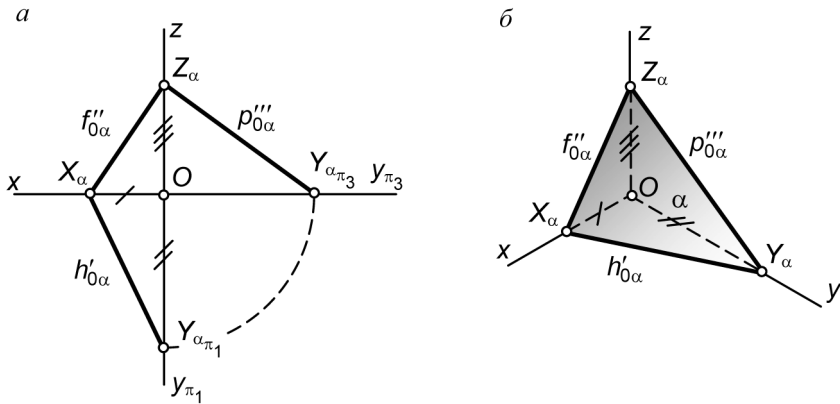


Рис. 11.5. Плоскость общего положения α на эпюре (*а*) и в прямоугольной изометрической проекции (*б*)

Правильный шестиугольник

Рассмотрим построение в горизонтальной плоскости проекций правильного шестиугольника $ABCDEF$ (таким же образом плоская фигура строится в любой плоскости, параллельной плоскости π_1). Наметим центр шестиугольника O' и через него проведем его оси симметрии параллельно аксонометрическим осям (рис. 11.6). По осям симметрии отложим расстояния a и b . На концах отрезка a отметим точки B' и E' , а на концах отрезка b — точки $1'$ и $2'$.

Через точки $1'$ и $2'$ проведем прямые, параллельные оси x , на них отложим отрезки, равные стороне шестиугольника, и отмечаем вершины A' , C' , D' и F' . Соединяем построенные точки: фигура $A'B'C'D'E'F'$ является изображением заданного шестиугольника в изометрической прямоугольной проекции.

Аналогично строятся проекции шестиугольника, расположенного в плоскостях, параллельных фронтальной и профильной плоскостям проекций.

Окружность

Изометрическими проекциями окружностей, расположенных в плоскостях, параллельных плоскостям проекций, являются эллипсы с одинаковыми соотношениями осей (рис. 11.7).

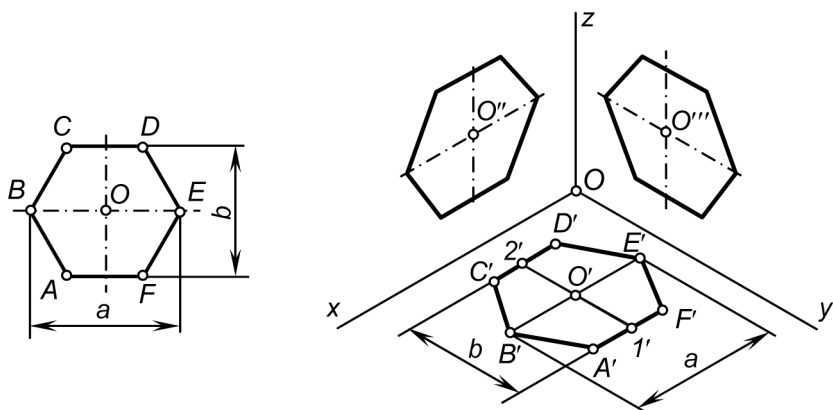


Рис. 11.6. Прямоугольная изометрическая проекция правильного шестиугольника

Большие оси эллипсов перпендикулярны аксонометрической оси, отсутствующей в данной плоскости (например, если строится эллипс в горизонтальной плоскости проекций, его большая ось перпендикулярна оси Z и т. п.).

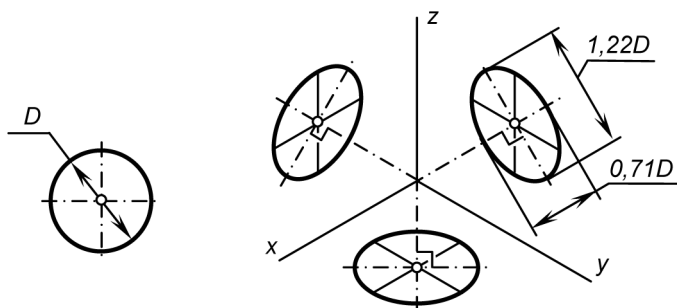


Рис. 11.7. Прямоугольная изометрическая проекция окружности

Если изометрическую проекцию выполняют без искажения по осям x , y и z , то большие оси эллипсов равны $1,22$ диаметра окружности, а малые — $0,71$ диаметра.

Если изометрическую проекцию выполняют с искажением, то большие оси эллипсов равны диаметру окружности, а малые оси — $0,58$ диаметра окружности. Правила и методы построения эллипсов по заданным размерам осей мы рассматривали в разд. 6.3.2.

Многогранник

На рис. 11.8, a многогранник $1234\dots$ задан горизонтальной и фронтальной проекциями сетки. На горизонтальной плоскости проекций контуром (наружным очер-

ком) служит замкнутая ломаная $1'-7'-8'-9'-3'-4'-5'-6'-1'$, а на фронтальной плоскости проекций — ломаная $1''-7''-12''-11''-10''-9''-3''-2''-1''$.

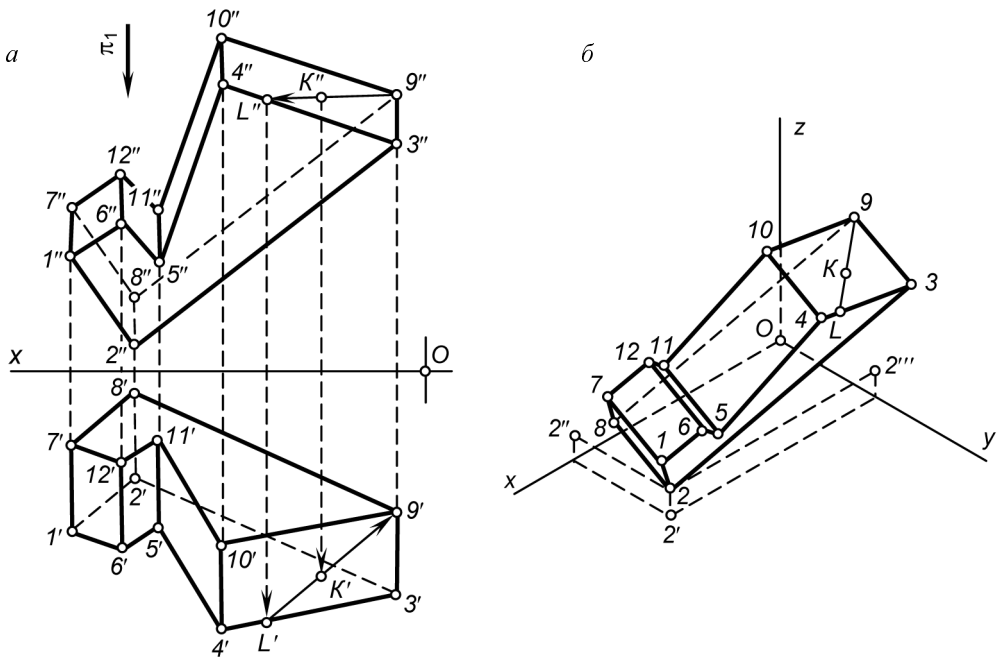


Рис. 11.8. Многогранник 1234... на эюре (а) и в прямоугольной изометрической проекции (б)

По ортогональным проекциям этого многогранника построена его прямоугольная изометрическая проекция (рис. 11.8, б). На эюре измерены натуральные величины координат вершин многогранника (для выбора координат x в произвольном месте задано положение начала координат — точки O) и построены проекции вершин многогранника в аксонометрии. Затем построенные вершины соединены отрезками — ребрами многогранника.

Как на эюре, так и в аксонометрии на примере точки K показан принцип построения произвольной точки, лежащей на одной из граней многогранника.

11.2.2. Прямоугольная диметрическая проекция

В прямоугольной диметрической проекции ось z расположена вертикально, а оси x и y образуют с горизонтальной линией углы соответственно $7^\circ 10'$ и $41^\circ 25'$ (см. табл. 11.1). Приблизленно аксонометрические оси можно построить методом прямоугольного треугольника, нанеся катеты с размерами в соотношении 1:8 для оси x и в соотношении 7:8 для оси y (рис. 11.9).

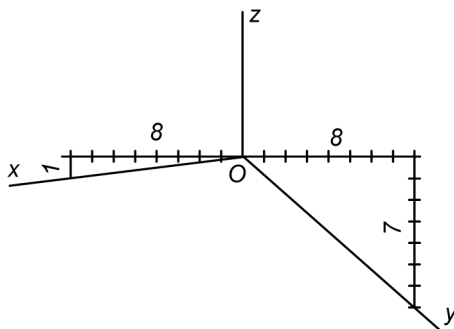


Рис. 11.9. Приближенное нанесение осей в прямоугольной диметрической проекции

Коэффициенты искажения по аксонометрическим осям имеют значения: $k_y=0,47$; $k_x=k_z=0,94$. На практике пользуются приведенными коэффициентами искажения: $k_y=0,5$; $k_x=k_z=1,0$. Изображение при этом получается увеличенным в 1,06 раза.

Окружности, расположенные в плоскостях, параллельных плоскостям проекций, проецируются в виде эллипсов (рис. 11.10). Большие оси эллипсов, как и в изометрической проекции, перпендикулярны оси, отсутствующей в плоскости эллипса.

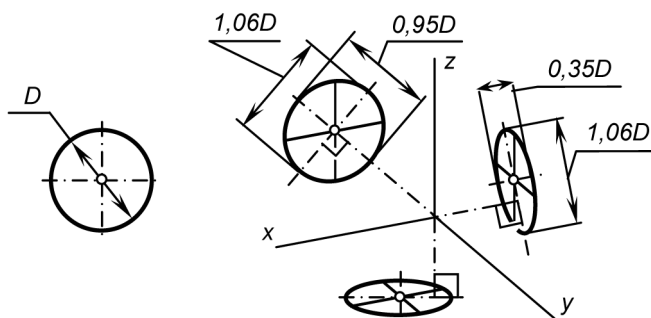


Рис. 11.10. Окружность в прямоугольной диметрической проекции

Если проекцию выполняют без искажения, то большая ось эллипсов равна 1,06 диаметра окружности. Малая ось эллипса, лежащего в плоскости π_2 , равна 0,95 диаметра, а в плоскостях π_1 и π_3 — 0,35 диаметра окружности.

Если диметрическую проекцию выполняют с искажением, то большая ось эллипсов равна диаметру окружности. Малая ось эллипса, лежащего в плоскости π_2 , равна 0,9 диаметра, а эллипсов, лежащих в плоскостях π_1 и π_3 , — 0,33 диаметра окружности.

11.3. Косоугольные проекции

11.3.1. Косоугольная фронтальная изометрическая проекция

В косоугольной фронтальной изометрической проекции ось Z направлена вертикально вверх, ось X расположена горизонтально, положительным направлением налево, а ось Y — под углом 45° к горизонтали и ее положительный луч направлен к наблюдателю (см. табл. 11.1). Допускается применять проекции с углом наклона оси Y в 30 и 60° . Изображения строят без искажения по осям X , Y и Z .

Окружности, лежащие в плоскостях, параллельных фронтальной плоскости проекций, проецируются в натуральную величину в виде окружности (рис. 11.11). Окружности, лежащие в плоскостях, параллельных горизонтальной и профильной плоскостям проекций, проецируются в эллипсы. Большая ось эллипсов расположена под углом $22^\circ 30'$ к осям и равна $1,33$ диаметра окружности. Малая ось искажается с коэффициентом $0,54$ от диаметра окружности.

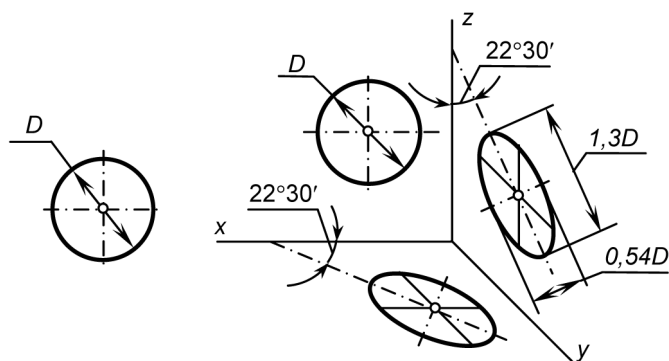


Рис. 11.11. Окружность в косоугольной фронтальной изометрической проекции

Объекты в косоугольной фронтальной изометрической проекции целесообразно располагать так, чтобы сложные плоские фигуры, окружности, дуги кривых находились в плоскостях, параллельных фронтальной плоскости проекций. Тогда их построение упрощается, так как они изображаются без искажения.

11.3.2. Косоугольная горизонтальная изометрическая проекция

Положение аксонометрических осей в косоугольной горизонтальной изометрической проекции приведено в табл. 11.1. Допускается применять проекции с углом

наклона оси y в 45° и 60° , сохраняя угол между осями x и y равным 90° . Изображения выполняются без искажения по осям x , y и z .

Окружности, лежащие в плоскостях, параллельных горизонтальной плоскости проекций, проецируются без искажения, а окружности, лежащие в плоскостях, параллельных фронтальной и профильной плоскостям проекций, — в эллипсы (рис. 11.12).

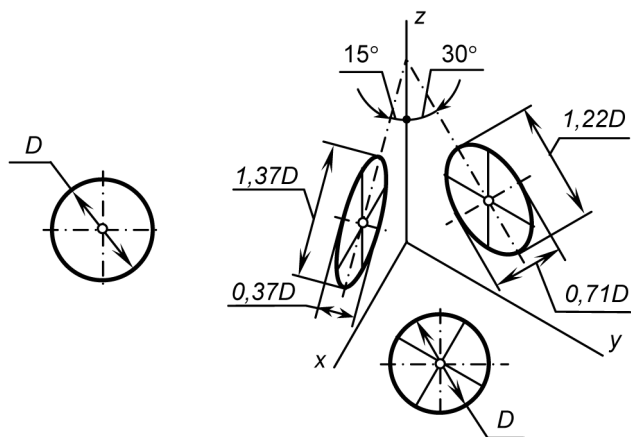


Рис. 11.12. Окружность в косоугольной горизонтальной изометрической проекции

Большая ось эллипса, лежащего в плоскости π_2 , наклонена под углом 15° к оси z и равна $1,37$ диаметра окружности, а его малая ось — $0,37$ диаметра окружности.

Большая ось эллипса, лежащего в плоскости π_3 , наклонена под углом 30° к оси z и равна $1,22$ диаметра окружности. Малая ось этого эллипса равна $0,71$ диаметра окружности.

11.3.3. Косоугольная фронтальная диметрическая проекция

В косоугольной фронтальной диметрической проекции ось z направлена вертикально вверх, ось x расположена горизонтально, а ось y — под углом 45° к горизонтали (см. табл. 11.1). Допускается угол наклона оси y под углом 30 и 60° . Коэффициенты искажения по осям x и z равны 1 , а по оси y — $0,5$.

Окружности, лежащие в плоскостях, параллельных фронтальной плоскости проекций, проецируются в окружности без искажения, а окружности, лежащие в плоскостях, параллельных горизонтальной и профильной плоскостям проекций, — в эллипсы (рис. 11.13).

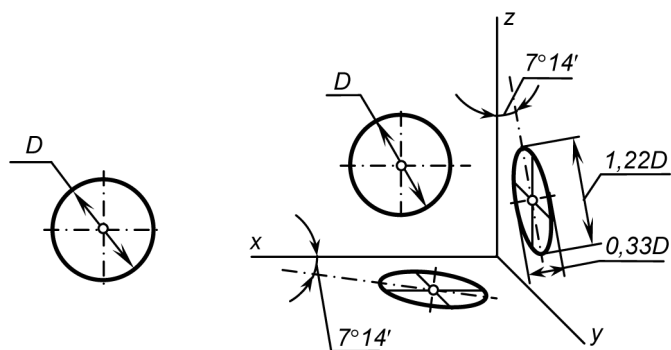


Рис. 11.13. Окружность в косоугольной фронтальной диметрической проекции

Большие оси эллипсов наклонены под углом 7° к осям и равны $1,07$ диаметра окружности. Малые оси эллипсов равны $0,33$ диаметра окружности.

Заключение

Выпускники технических университетов и институтов в своей практической деятельности связаны с самыми сложными и разнообразными пространственными формами: корпусными элементами автомобилей, формами для литейного производства, пластами и залежами полезных ископаемых, топографическими поверхностями, транспортными и энергетическими коммуникациями и т. д.

Реализация многих научно-технических задач в значительной степени облегчается, когда достаточно сложные пространственные формы можно наглядно изобразить и увидеть на плоскости или в пространстве. Поэтому без умения решать практические задачи начертательной геометрии невозможно представить деятельность инженера.

Курс начертательной геометрии строится на задачах и примерах так называемого "общего вида". В этом смысле одной из важнейших задач будущего инженера является умение использовать полученные знания при решении практических задач.

Так как предметом начертательной геометрии является изучение методов построения различных пространственных форм на той или иной поверхности, то ее возможности значительно расширились с развитием вычислительной техники и систем программирования. Широкое использование персональных компьютеров привело буквально к перевороту в инженерной деятельности и рождению новой дисциплины — *компьютерной графики*, занимающейся созданием, хранением и обработкой различных изображений при помощи электронно-вычислительных устройств (компьютеров).

Подходы к внедрению компьютерной графики в учебный процесс можно условно разделить на следующие три категории:

1. Отказ от процесса "ручного" черчения, как это сделано во многих технических университетах США, и переход на полную компьютеризацию графической подготовки;
2. Параллельное обучение начертательной геометрии и инженерной графике на чертежном столе и на компьютере;
3. Последовательное обучение по схеме: начертательная геометрия → инженерная графика → компьютерная графика.

В настоящее время первый вариант можно считать неприемлемым в российских условиях в связи с недостаточной базовой графической подготовкой в школах и необходимостью формирования простейших моторных навыков построения чертежей. Преимущества и недостатки второго и третьего варианта находятся в стадии обсуждения преподавателями и специалистами, и на сегодняшний момент их считают примерно равнозначными.

Возможности интенсификации процесса обучения начертательной геометрии с параллельным изучением компьютерных графических систем изложены автором в учебном пособии "Компьютерный курс начертательной геометрии на базе КОМПАС-3D" (СПб.: БХВ-Петербург, 2010. — 608 с.).

Предметный указатель

А

Абсцисса 9
АксонOMETрическая проекция 251
 диметрическая 252
 изометрическая 252
 косоугольная 252
 горизонтальная
 изометрическая 253, 260
 фронтальная
 диметрическая 253, 261
 фронтальная
 изометрическая 252, 260
прямоугольная 252
 диметрическая 252, 258
 изометрическая 252, 254
триметрическая 252
АксонOMETрические оси 252
Алгебраическая поверхность
 n -го порядка 165
Антипризма 161
 Архимеда 162, 164
 прямая 162
Апофема 157
Аппликата 9
Арбелон 144
Архимедова спираль 134
Астроида 137

Б

Биквадратная кривая 220
Бипирамида 158
 вогнутая 159
 выпуклая 159
 невыпуклая 159
 неправильная 158
 правильная 158

В

Взаимно перпендикулярные
 плоскости 77
Взаимное пересечение:
 геометрических тел 214
 кривой и многогранной поверхно-
 стей 217
 кривых поверхностей 219
 способ вспомогательных обра-
 зующих 219
 способ вспомогательных секущих
 поверхностей 219
 линейчатых поверхностей 220
 способ вспомогательных секущих
 сфер 224
 многогранников 214
 способ граней 215
 способ ребер 215
 поверхностей вращения (частные
 случаи) 226
Вивиана 146
Видимость:
 взаимная 67
 следов плоскости 37
Винтовая линия 150
 глобоидная 154
 коническая 152
 левая 150
 правая 150
 цилиндрическая 150
Винтовая поверхность 187
 геликоид 187
 закрытая 187
 открытая 187
 с переменным шагом 187
 с равномерным шагом 187
Винтовой тор 185

Г

Гексаэдр 162
Геликоид 187
 косой 188
 минимальный 188
 наклонный 188
 прямой 188
Гелиса 150
Геометрические тела 155
 взаимные пересечения 214
Гипербола 126, 127, 201
Гиперболический параболоид 181
Гиперболоид 170
 вращения 172
 двухполостной 171
 однополостной 171
Гипоциклоида 135, 137
Гиппократовы луночки 144
Гиппопеда Евдокса 146
Глобоидная винтовая линия 154
Горизонталь плоскости 49
Горизонтальная:
 плоскость 40
 прямая 21
Горизонтально-проецирующая:
 плоскость 38
 прямая 22
Горизонтальный след прямой 27
График тригонометрической
 функции 138
Графическая поверхность 185, 186

Д

Декартов лист 130
Додекаэдр 162

З

Завиток 141
 двухцентровый 141
 четырёхцентровый 141

И

Икосаэдр 162

К

Каналовая поверхность 184
Кардиода 136
Квадранты 15
Кольцо 144, 181
Коническая винтовая линия 152
Коническая поверхность 177
Конические сечения 201
Конкурирующие точки 31, 67
Коноид 181
 прямой 183
Конус 177
 круговой 177
 пересечение:
 плоскостью 201
 прямой 209
 развертка 241, 243
 эллиптический 177
Координаты прямоугольные
 (декартовы) 9
Коробовая кривая линия 140
Косая плоскость 173
Кривая линия 115
 алгебраическая 116
 пространственная 149
 второго порядка 123
 гипербола 126
 нецентральная 124
 парабола 117, 129
 центральная 123
 эллипс 117, 124
 выпуклая 116
 гладкая 116
 двойкой кривизны 115
 закономерная 116
 коробовая 140
 лекальная 121
 незакономерная 116
 овал 139
 плавная 116
 плоская 115
 постоянной ширины 144
 пространственная 115, 145

Вивиани 146
винтовая 150
гелиса 150
Гиппопеда Евдокса 146
лошадиная 146
псевдоспираль 134
синусоида 138
составная 117, 139
спираль 134
Архимедова 134
трансцендентная 116
третьего порядка 130
декартов лист 130
строфоида 132
циссоида Диоклеса 131
циклическая 135
астроида 137
гипоциклоида 135, 137
кардиоиды 136
циклоида 135
эпициклоида 135, 136
циркулярная 121, 140
двухцентровый завиток 141
завиток 141
коробовая 141
овал 142
овоид 143
окружность 140
центровая 141
четырёхцентровый завиток 141
эвольвента квадрата 141
эвольвента многоугольника 141
четвертого порядка 133
лемниската Бернулли 117, 133
эвольвента 122
окружности 122
эволюта 122
Кривая поверхность 165
закономерная 165
незакономерная 165
пересечение:
взаимное 219
плоскостью 217
прямой 208
Куб 161, 162

Л

Лемниската Бернулли 117, 133
Линейчатые поверхности 166
взаимное пересечение 220
Линия:
кривая 115
наибольшего наклона 52
наибольшего ската 52
пересечения поверхностей 217, 218
проекционной связи 9
Лошадиная кривая 146

М

Метод:
перемены плоскостей
проекций 79, 96
прямоугольного
треугольника 23
Метрические задачи 7
Многогранник 155
выпуклый 155
невыпуклый 155
пересечение:
взаимное 214
плоскостью 191
прямой 204
полуправильный 164
правильный 162

Н

Направление проецирования 6
Начало координат 8
Неразвертываемая
поверхность 229

О

Образующая линия 165
Овал 139, 142
замкнутый 142
замкнутый 142
открытый 142

- Овоид 143
Окружность 140
 кривизны 121
 направляющая 135
 производящая 135
 соприкасающаяся 148
Октанты 17
Октаэдр 159, 162
Ордината 9
Осевая плоскость 38
Оси проекций 8
Отрезок:
 натуральная величина 23, 83, 89, 98
 проекция 19
- П**
- Парабола 117, 129, 201
Параболоид 173
 вращения 174
 гиперболический 173
 эллиптический 173
Параллелепипед 160
 проекций 9
 прямой 161
 прямоугольный 161
Параллельные:
 плоскости 57, 60
 прямые 31
Параметры плоскости 37
Пересекающиеся:
 плоскости 57, 62
 прямые 31
Пересечение плоскостью:
 конуса 201
 многогранников 191
 пирамиды 192
 призмы 195
 тел с кривыми поверхностями 199
 цилиндра 203
Пересечение прямой:
 с кривой поверхностью 208
 с поверхностью конуса 209
 с поверхностью многогранника 204
 с поверхностью пирамиды 205
 с поверхностью призмы 206
 с поверхностью сферы 212
 с поверхностью цилиндра 210
Перпендикуляр к плоскости 73
Пирамида 157
 наклонная 157
 пересечение:
 плоскостью 192
 прямой 205
 правильная 157
 прямая 157
 развертка 230
 усеченная 157
Плоская фигура 35
 взаимное пересечение 69
 натуральная величина 84, 90, 92, 96, 103
 проекции 36
Плоский угол 42
 натуральная величина 108
Плоскопараллельное перемещение 89
Плоскости:
 взаимно перпендикулярные 77
 параллельные 57, 60
 пересекающиеся 57, 62
Плоскость:
 горизонтальная 40
 горизонтально-проецирующая 38
 нормальная 148
 общего положения 37
 осевая 38
 проецирующая 38, 101
 профильная 41
 профильно-проецирующая 38
 секущая 191
 соприкасающаяся 148
 спрямляющая 148
 уровня 40
 фронтальная 41
 фронтально-проецирующая 38
 частного положения 37
Поверхность 165
 алгебраическая n -го порядка 165
 винтовая 187
 вращения 168, 178, 250

- второго порядка 166, 168
 - вращения 168
 - гиперболоид 170
 - действительная 168
 - коническая 177
 - мнимая 168
 - параболоид 173
 - центральная 168
 - цилиндрическая 175
 - эллипсоид 169
 - графическая 166, 185
 - задаваемая каркасом 185
 - каналовая 184
 - Каталана 181
 - кинематическая 165
 - кривая 165
 - линейчатая 166
 - многогранная 155, 165
 - нелинейчатая 166
 - неразвертываемая 229
 - переноса 186
 - развертываемая 229
 - с плоскостью параллелизма 181
 - гиперболический параболоид 181
 - коноид 181
 - цилиндронид 181
 - с ребром возврата 183
 - топографическая 186
 - трансцендентная 166
 - трубчатая 185
 - циклическая 184
- Позиционные задачи 7, 57
- Полуправильные
- многогранники 164
- Правильные
- многогранники 162
 - гексаэдр 162
 - додекаэдр 162
 - икосаэдр 162
 - куб 162
 - октаэдр 162
 - тетраэдр 162
- Призма 159
- Архимеда 159, 164
 - наклонная 159
 - пересечение:
 - плоскостью 195
 - прямой 206
 - правильная 159
 - прямая 159
 - усеченная 159
- Призматоид 161
- Проекция:
- точки 5
 - фигуры 5
- Проецирование 5
- косоугольное 6
 - ортогональное 6
 - параллельное 6, 7
 - прямоугольное 6
 - центральное 6
- Проецирующая:
- плоскость 38, 101
 - прямая 22, 100
- Пространственная
- кривая линия 145
- Профильная:
- плоскость 41
 - прямая 21
- Профильно-проецирующая:
- плоскость 38
 - прямая 23
- Профильный след прямой 27
- Прямая:
- горизонтальная 21
 - горизонтально-проецирующая 22
 - общего положения 20
 - параллельная плоскости 58
 - пересекающая плоскость 65
 - перпендикулярная плоскости 73
 - принадлежащая плоскости:
 - общего положения 44
 - частного положения 48
 - проецирующая 5, 22, 100
 - профильная 21
 - профильно-проецирующая 23
 - уровня 20
 - фронтальная 21
 - фронтально-проецирующая 22
 - частного положения 20

Прямые:

- параллельные 31
- пересекающиеся 31
- скрещивающиеся 31

Псевдоспираль 134

Р

Развертка:

- линейчатой поверхности 241
- многогранной поверхности 230
- наклонного конуса 243
- наклонного цилиндра 246
- наклонной призмы 232
- пирамиды 230
 - метод треугольников 230
- поверхности 229
 - алгебраический способ 229
 - графический способ 229
- призмы:
 - метод нормального сечения 233
 - метод раскатки 235
- прямого кругового:
 - конуса 241
 - цилиндра 244
- прямой призмы 232
- условная 248
 - поверхности вращения 250
 - сферы 248

Развертываемая поверхность 229

Ребро возврата 183

С

Сегмент 143

Сектор 144

Секущая плоскость 191

Сетка Ананова 215, 217

Сечение 191

- конуса 201
 - метод аппроксимации 202
 - метод перемены плоскостей проекций 203
- многогранников:
 - способ граней 192
 - способ ребер 192

пирамиды 192

- метод перемены плоскостей проекций 194
- способ ребер 195

призмы:

- способ граней 197
- способ ребер 196

тел с кривыми поверхностями 199

цилиндра:

- метод аппроксимации 203
- метод перемены плоскостей проекций 204

Синусоида 138

Скрещивающиеся прямые 31

Следы:

- плоскости 36
- прямой 27

Соприкасающаяся

окружность 121, 148

Составная кривая линия 139

Спираль 134

Способ:

- вращения 79
 - вокруг оси, параллельной плоскости проекций 91
 - вокруг оси, перпендикулярной плоскости проекций 80
 - вокруг следа плоскости 93
- преобразования проекций 79
- совмещения 93
- хорд 118

Строфоида 132

Сфера 169

- пересечение прямой 212
- условная развертка 248

Сфероид 169

Т

Тело:

- Архимеда 164
- геометрическое 155
- ограниченное:
 - кривой поверхностью 165
 - многогранной поверхностью 155
- Платона 162

Тетраэдр 157, 162
Топографическая поверхность 186
Тор 180
 винтовой 185
 замкнутый 181
 открытый 181
 самопересекающийся 181
Торс 183
Точка:
 аналитическое задание 10
 встречи (пересечения) прямой:
 с поверхностью геометрического
 тела 204
 с плоскостью 65
 графическое задание 10
 общего положения 13
 принадлежащая плоскости 54
 частного положения 13
Точки схода следов 37
Треугольник Рело 145
Триэдр 148
Трубчатая поверхность 185

У

Угол:
 между плоскостями 111
 между прямой и плоскостью 109
 наклона плоскости к плоскости
 проекций 83, 101
 наклона прямой к плоскости
 проекций 26, 83
 плоский 42

Ф

Фронталь плоскости 51
Фронтальная:
 плоскость 41
 прямая 21
Фронтально-проецирующая:
 плоскость 38
 прямая 22
Фронтальный след прямой 27

Ц

Центр проецирования 5
Циклическая поверхность 184
Циклические кривые линии 135
Циклоида 135
Цилиндр 176
 круговой 176
 пересечение:
 плоскостью 203
 прямой 210
 развертка 244, 246
 эллиптический 176
Цилиндрическая:
 винтовая линия 150
 поверхность 175
 гиперболическая 176
 общего вида 176
 параболическая 176
 эллиптическая 176
Цилиндроид 181
Циркульная кривая линия 140
Циссоида Диоклеса 131

Ч

Чертеж 5
 двухпозиционный 15
 ортогональный (комплексный) 9
 трехпозиционный 16
Четверти 15

Э

Эвольвента 122
 квадрата 141
 многоугольника 141
 окружности 122
Эволюта 122
Эллипс 117, 124, 201
Эллипсоид 169
 вытянутый 169
 сжатый 169
 сфера 169
 трехосный 169
Эпициклоида 135, 136
Эпюр 9