Ю. П. Петров

Новые главы теории управления и компьютерных вычислений

Санкт-Петербург
«БХВ-Петербург»
2004

УДК 681.3.06+519.6
ББК 32.973
П30

Петров Ю. П.

П30 Новые главы теории управления и компьютерных вычислений. — СПб.: БХВ-Петербург, 2004. — 192 с.: ил.

ISBN 5-94157-452-5

В книге изложены новые результаты в области теории управления и компьютерных вычислений, полученные на факультете прикладной математики — процессов управления (ПМ-ПУ) Санкт-Петербургского государственного университета (СПбГУ) в 1990—2002 гг. Эти результаты настолько просты и значимы, что их можно и нужно использовать в компьютерных вычислениях и ввести в учебный процесс. В основе книги лежат спецкурсы, прочитанные автором на факультете ПМ-ПУ СПбГУ. Представлены полученные автором результаты в области синтеза оптимальных систем управления, рассмотрена проблема расчета устойчивости и запасов устойчивости различных технических систем и устройств, рассказано об ошибках, обнаружившихся в популярных пакетах прикладных программ.

Работа выполнялась при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты 01-01-00217 и 04-01-00200.

Для пользователей персональных компьютеров, студентов, инженеров и преподавателей, работающих в области управления и компьютерных вычислений

УДК 681.3.06+519.6
ББК 32.973

Группа подготовки издания:

Главный редактор	*Екатерина Кондукова*
Зам. главного редактора	*Анатолий Адаменко*
Зав. редакцией	*Григорий Добин*
Компьютерная верстка	*Ольги Сергиенко*
Корректор	*Зинаида Дмитриева*
Дизайн обложки	*Игоря Цырульникова*
Зав. производством	*Николай Тверских*

Рецензент — Марусева И. В., доктор педагогических наук, профессор

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 20.01.04.
Формат 70×100 1/16. Печать офсетная. Усл. печ. л. 15,48.
Тираж 1500 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 190005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29.

Гигиеническое заключение на продукцию, товар № 77.99.02.953.Д.001537.03.02
от 13.03.2002 г. выдано Департаментом ГСЭН Минздрава России.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в Академической типографии "Наука" РАН
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12.

ISBN 5-94157-452-5

Содержание

Введение

Настоящая книга посвящена результатам недавних исследований в области теории управления — результатам настолько простым и значимым, что их необходимо включить в учебные курсы университетов и технических университетов по теории управления, теории автоматического управления и регулирования, теории компьютерных вычислений.

В основу книги легли спецкурсы, прочитанные автором на факультете прикладной математики — процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета (СПбГУ). В данной области исследований сотрудники СПбГУ опередили своих зарубежных коллег — это особенно важно подчеркнуть, поскольку последние годы нельзя считать временем, благоприятным для российской науки. Это время трудностей и унижения. Тем важнее отметить, что и в это время наука России может идти впереди других стран.

Книга состоит из трех глав. В *главе 1* изложены новые результаты в области синтеза оптимальных систем управления, полученные автором в СПбГУ в 1990—1995 гг. Опираясь на них, в *главе 2* рассмотрена более общая проблема — проблема расчета устойчивости и запасов устойчивости различных технических систем и устройств. В этой главе, на основе недавно открытых в СПбГУ новых свойств эквивалентных преобразований, показано, что традиционные и до этого повсеместно используемые методы расчета устойчивости не полны, в ряде случаев приводят к ошибкам в расчетах, и эти ошибки становятся затем причинами аварий и даже катастроф. В той же *главе 2* изложены способы восстановления достоверности расчетов устойчивости и избежания опасных ошибок.

Наиболее широкую область приложений имеют новые научные результаты, изложенные в *главе 3*. В ней показано, что открытые в СПбГУ новые свойства эквивалентных преобразований и открытие там же нового, третьего класса задач математики, физики и техники — промежуточного между ранее известными классами корректных и некорректных задач — имеют прямое отношение не только к расчетам устойчивости, но и к очень многим другим алгоритмам компьютерных вычислений.

В *главе 3* (опирающейся на результаты первых двух) рассказано об ошибках, обнаруженных в популярных пакетах прикладных программ (пакеты MATLAB, Mathcad, Scilab и др.), и приведены методы, позволяющие устранить ошибки и восстановить надежность и достоверность компьютерных вычислений.

Результаты, изложенные в *главе 3*, будут полезны всем пользователям персональных компьютеров и всем тем, кто будет на них работать.

* * *

Возвращаясь к *главе 1*, отметим, что она посвящена синтезу систем управления, обеспечивающих наилучшее возможное качество стабилизации и слежения при неизвестном спектре возмущающих воздействий.

Для известного спектра решение этой важной задачи получено давно и давно вошло в учебные курсы. Однако спектр возмущающих воздействий часто не известен или может меняться с течением времени. Поэтому первостепенное значение имеет проблема построения гарантирующего управления, которое гарантировало бы наилучшие возможные результаты при любом спектре.

Совсем недавно было получено решение этой важной проблемы, долго не поддававшейся усилиям многих исследователей. Решение это является настолько простым, что вполне доступно для студентов и может быть включено в учебные курсы. Оно даже проще, чем известное ранее решение для заданного спектра, и позволяет реализовать заветную мечту проектировщиков — еще на стадии проектирования располагать простыми зависимостями, позволяющими для любых возмущающих воздействий сразу указать — какая точность стабилизации и слежения достижима при том или ином ресурсе управления и обратно — какой ресурс управления необходим для обеспечения той или иной точности.

Глава 2 книги посвящена недавно обнаруженной проблеме законности и допустимости привычных и широко используемых преобразований математических моделей исследуемых физических и технических объектов. С одной стороны — без преобразований никак не обойтись, они являются основой любого исследования и расчета, правила законных и эквивалентных преобразований давно и хорошо известны. С другой стороны, недавно было обнаружено, что даже самые привычные и часто используемые эквивалентные преобразования могут таить в себе неожиданные сюрпризы, могут приводить к опасным ошибкам в расчетах сохранения устойчивости при вариациях параметров и в других расчетах. Поэтому студент обязательно должен быть предупрежден об этом.

Поясним сказанное примером.

Рассмотрим несложный объект управления (электропривод постоянного тока), математической моделью которого является следующая система линейных дифференциальных уравнений:

$$(D^3 + 4D^2 + 5D + 2)\, x_1 = (D^2 + 2D + 1)u \tag{1}$$

$$(D^2 + 4D + 5)x_1 = (D + 1)u \tag{2}$$

В уравнениях (1) и (2) $D = \frac{d}{dt}$ — оператор дифференцирования, x — регулируемая переменная, u — управление. Уравнение (1) является моделью объекта управления, уравнение (2) — моделью цепи обратной связи (регулятора). Система уравнений (1) и (2), рассматриваемая совместно, является математической моделью замкнутой цепи. Исключив переменную u из уравнений (1) и (2), получим уравнение замкнутой системы относительно переменной x:

$$(D^3 + 5D^2 + 7D + 3)\, x = 0. \tag{3}$$

Мы убеждаемся, что характеристический полином замкнутой системы имеет вид:

$$\lambda^3 + 5\lambda^2 + 7\lambda + 3, \tag{4}$$

имеет корни $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ и является гурвицевым (напомним, что гурвицевым называют полином, не имеющий ни нулевых корней, ни корней с положительной вещественной частью). Все решения уравнения (3) имеют вид

$$x = c_1 e^{-3t} + (c_2 t + c_3)\, e^{-t} \tag{5}$$

и являются асимптотически устойчивыми, затухающими с течением времени. Простота системы уравнений (1) и (2) позволяет провести ее непосредственное исследование и убедиться, что, будучи воплощенной в металле, она станет работать неудовлетворительно: при неизбежных на практике малых вариациях параметров некоторых коэффициентов системы уравнений (1) и (2) (причем при вариациях только определенного знака) замкнутая система теряет устойчивость и может создать аварийную ситуацию.

Однако прямое непосредственное исследование возможно только для простых систем. Современные сложные системы управления, описываемые многими уравнениями разных порядков, чаще всего предварительно преобразуют: введением новых переменных их приводят к форме Коши, к форме n уравнений первого порядка, что позволяет для вычисления характеристического полинома использовать стандартные методы и программы линейной алгебры. Сведение к форме n уравнений первого порядка называют еще исследованием в пространстве состояний, и оно очень широко применяется в расчетах и проектировании. При преобразованиях математических моделей, разумеется, следят за тем, чтобы преобразования были эквивалентными. А эквивалентными называют такие преобразования, при которых все решения исходной системы совпадают с решениями системы преобразованной.

Приведем к форме Коши уравнение (1), введя переменные

$$\begin{aligned} &x_1 = x;\ \ x_2 = Dx_1 - u \\ &x_3 = Dx_2;\ \ u = u \end{aligned} \tag{6}$$

В новых переменных уравнение (1) имеет вид:

$$\begin{aligned} x_1' &= -2x_1 + x_2 + u \\ x_2' &= x_3 \\ x_3' &= -x_2 - 2x_3 \end{aligned} \tag{7}$$

и станет уравнением в пространстве состояний. Исключив переменные x_2 и x_3, легко привести уравнение (7) обратно к форме (1). Преобразования от (1) к (7) и от (7) к (1) — эквивалентны.

Преобразуем теперь уравнение (2), используя только переносы членов из левой части уравнения в правую с учетом знаков и их группировку. Получим:

$$[(D^2 + 2D)x - Du] + [(2D + 4)x - 2u] + x = -u. \tag{8}$$

В первой группе членов узнаем переменную x_1, во второй — $2x_2$; следовательно, уравнение (2) преобразуем к виду

$$U = -x_1 - 2x_2 - x_3. \tag{9}$$

Замкнув объект управления (7) обратной связью (регулятором) (9), получим уравнение замкнутой системы:

$$\begin{aligned} x_1' &= -3x_1 - x_2 - x_3 \\ x_2' &= x_3 \\ x_3' &= -x_2 - 2x_3 \end{aligned} \tag{10}$$

Характеристический полином уравнения (10) легко вычисляется по правилам линейной алгебры и совпадает с полиномом (4). Это еще раз подтверждает, что все используемые нами преобразования были эквивалентными.

Исследуя теперь поведение замкнутой системы (10) и ее характеристического полинома (4) при вариациях любых коэффициентов, мы убеждаемся, что замкнутая система (10) не только устойчива, но и сохраняет устойчивость не только при малых, но и при больших вариациях всех своих коэффициентов. Поэтому имеются все основания к тому, чтобы рекомендовать систему, математической моделью которой является уравнение (10) и эквивалентные уравнения (1) и (2), и воплощению в металле, что может стать первым шагом к опасной аварии. Действительно, мы уже указывали, что система, описываемая уравнениями (1) и (2), теряет устойчивость при вариациях определенного знака некоторых своих параметров, но при эквивалентных преобразованиях ее к форме (7)—(9) это перестает быть видимым. Поскольку при изготовлении реальной системы в металле малые отклонения действительных значений параметров от расчетных неизбежны, а знак их непредсказуем, то малые вариации могут оказаться в безопасных интервалах и поэтому изготовленная система может успешно пройти проверочные испытания и неопределенно долгое время успешно работать. В дальнейшем, при неизбежном в ходе нормальной эксплуатации малом дрейфе параметров в любой непредсказуемый момент времени знак малой вариации может изменяться и сразу произойдет потеря устойчивости, способная создать аварийную ситуацию, а то и аварию.

Мы в дальнейшем более подробно рассмотрим этот пример и покажем, что рассматриваемое явление не случайно, встречается довольно часто и при недостаточном внимании к нему может быть причиной опасных аварий.

Действительно, используя только эквивалентные (в классическом смысле) преобразования уравнений, мы можем быть уверены в том, что все решения исходной и преобразованной системы совпадают. Но для исследования сохранения устойчивости при малых вариациях параметров (и для многих других физических и технических задач) этого мало. При вариации параметра мы имеем дело уже не с решением, а с его окрестностью, но совпадения окрестностей решений классическая теория эквивалентных преобразований не гарантирует. Окрестности решений в пространстве параметров в классической теории не рассматриваются. Поэтому ошибки, подобные той, что возникла при изучении системы уравнений (1) и (2), могут возникать часто, и для предотвращения аварий нужно существенно уточнить привычные и традиционные представления об эквивалентных преобразованиях уравнений. Коль скоро это опасное явление (открытое в СПбГУ в 1991—94 гг.) обсуждено и опубликовано, с ним обязательно должны быть как можно скорее ознакомлены пользователи персональных компьютеров и студенты (причем не только обучающиеся по специальности «автоматическое управление», но и студенты всех специальностей, использующих математические расчеты), тем более что суть нового открытия проста и доступна.

Поскольку явление потери устойчивости при малых вариациях параметров тесно связано с теорией оптимальных систем, мы рассмотрим его в *главе 2*, после изложения метода синтеза оптимальных систем управления.

Вопросы и пожелания читателей принимаются на E-mail: **petrov1930@mail.ru**.

ГЛАВА 1

Синтез гарантирующих управлений

§ 1. Оптимальные системы, задачи стабилизации и слежения

Дальнейшее изложение будет относиться к системам управления, математическими моделями которых являются обыкновенные линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Такие системы часто встречаются в технике, в банковском и страховом деле, в биологии и медицине. Дифференциальные уравнения различных порядков для унификации чаще всего приводят либо к форме Коши, к форме n уравнений первого порядка, либо к одному уравнению n-го порядка относительно одной, наиболее интересующей нас переменной.

Так, составленная на основе законов аэродинамики математическая модель продольного движения одного из летательных аппаратов (экраноплан, летящий на малой высоте над морем) имеет вид:

$$Dv - (D + 2{,}4)\,\alpha = D\nu_y$$

$$(D^2 + 2{,}46)v + (0{,}4D + 38) = -49u \qquad (11)$$

$$Dh + \alpha - v = \nu_y$$

где v — угол тангажа, α — угол атаки, h — отклонение высоты полета от заданной, u — отклонение руля высоты (управление), ν_y — скорость вертикальных порывов ветра, возмущающее воздействие.

Уравнение (11) можно введением новой переменной $x = Dv$ свести к форме Коши, к форме 4 уравнений первого порядка. Если же для нас наибольший интерес представляет переменная h (высота), то мы можем исключить остальные переменные и свести уравнения (11) к виду:

$$(D^4 + 5{,}25D^3 + 43{,}9D^2)h = 117{,}7u + (2{,}4D^3 + 5{,}88D)\nu_y \qquad (12)$$

Таким образом, можно выделить два стандартных типа математических моделей: уравнения в форме Коши:

$$X' = Ax + Bu, \tag{13}$$

где X — n-мерный вектор регулируемых переменных, A — квадратная $n\times n$ матрица постоянных коэффициентов, B — матрица (а точнее — вектор-столбец) коэффициентов при скалярном управлении u. Исключив все переменные кроме, например, переменной x_i, получим относительно x_i другую форму записи — уравнение

$$A(D)x_i = B_i(D)u, \tag{14}$$

где $A(D) = a_nD^n + \ldots + a_0$; $B_i(D) = b_mD^m + \ldots + b_0$ — полиномы от оператора дифференцирования $D = \dfrac{d}{dt}$, которые связаны простыми соотношениями с матрицами A и B в уравнении (13). Действительно,

$$A(D) = \det[DE - A], \tag{15}$$

т. е. является определителем матрицы $DE - A$, где E — единичная матрица, а полином $B_i(D)$ является определителем той же матрицы, но в которой i-й столбец заменен на вектор-столбец коэффициентов при управлении в уравнении (13). Форма записи (13) более универсальна, форма (14) позволяет сконцентрировать внимание на поведении любой наиболее интересующей нас переменной x_i; сопоставление достоинств и недостатков моделей (13) и (14) дано в [45].

Мы будем рассматривать системы управления при наличии возмущающих воздействий. Математическая модель подобных систем имеет вид

$$A(D)x = B(D)u + \varphi(t), \tag{16}$$

где $\varphi(t)$ — возмущающее воздействие, которое будем считать некоторой функцией времени, в общем случае — случайной, не полностью известной нам; ее называют еще случайным процессом.

При наличии возмущающих воздействий задачей управления часто становится обеспечение возможно малых отклонений регулируемой переменной x от желаемого значения, соответствующего $x = 0$. Это — задача стабилизации движения.

Не менее часто встречаются и задачи слежения. Пусть интересующая нас переменная $y(t)$ (например, положение фрезы в копировально-фрезерном станке) должна хорошо отследить некоторую функцию $z(t)$ — задаваемую, например, положением копира, скользящего по поверхности шаблона. Пусть динамика копировально-фрезерного станка описывается уравнением

$$A(D)y = B(D)u + \varphi_1(t). \tag{17}$$

Введем новую переменную $x = y - z$, где x — разность между действительным положением фрезы и «идеальным» — т. е. $x(t)$ — это погрешность слежения. В новых переменных уравнение (17) примет вид

$$A(D)x = B(D)u - A(D)z + \varphi_1(t). \tag{18}$$

Если теперь обозначить через

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) - A(D)z \tag{19}$$

обобщенное возмущающее воздействие, то мы придем к уравнению (16), к задаче стабилизации. Учитывая это, мы в дальнейшем будем для унификации рассматривать <u>только задачи стабилизации</u>, учитывая, что не менее важные задачи слежения к ним сводятся.

§ 2. Характеристики возмущающих воздействий и выбор критерия качества

Случайные процессы $\varphi(t)$, стоящие в правой части уравнения (16), — это своеобразные математические объекты, соединяющие в себе черты случайной величины и функции.

В каждом конкретном опыте или измерении случайный процесс является обычной функцией времени, которая называется реализацией случайного процесса. Для примера на рис. 1 показана запись реализации угла крена судна в функции времени.

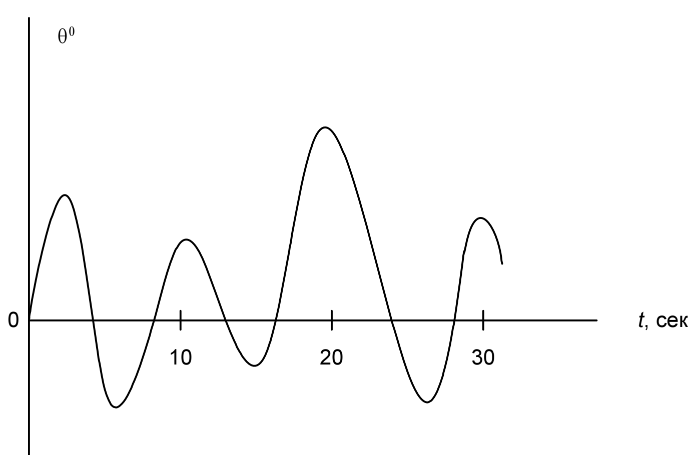

Рис. 1

Напомним, что угол крена является возмущающим воздействием для многих систем судовой автоматики. На рис. 2 приведена запись реализации высоты волны в некоторой точке моря.

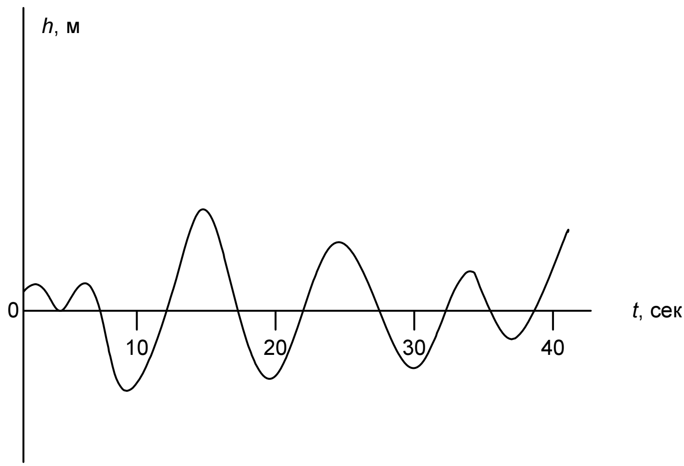

Рис. 2

На рис. 3 показана запись реализации скорости вертикальных порывов ветра, являющейся возмущающим воздействием для полета самолета в турбулентной атмосфере.

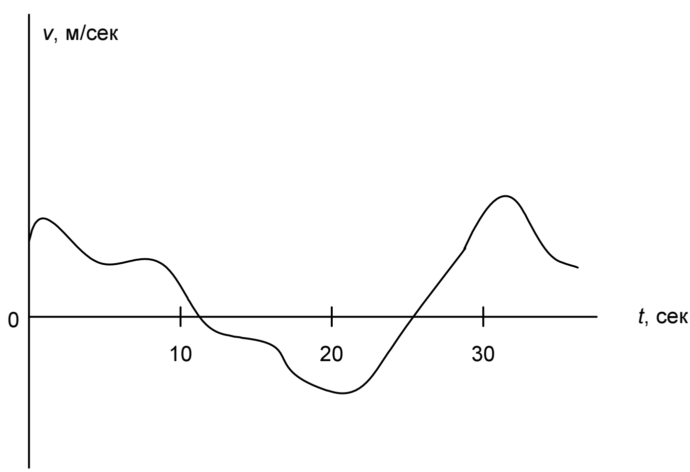

Рис. 3

Аналогично выглядит и, например, реализация курса доллара по отношению к рублю, являющаяся возмущающим воздействием для банков, страховых компаний и т. п.

Характеристиками случайных процессов могут служить:

- Среднее значение (или математическое ожидание)

$$\langle x(t)\rangle = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k(t), \tag{20}$$

где N — число реализаций. Среднее значение получается усреднением по множеству реализаций и является функцией времени, но уже не случайной.

- Средний квадрат (или момент второго порядка):

$$\left\langle x^2(t)\right\rangle = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k^2(t) \tag{21}$$

также является не случайной функцией времени.

- Дисперсия (или средний квадрат отклонения функции от ее математического ожидания):

$$D_x = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}[x_k(t)-\langle x\rangle]^2 . \tag{22}$$

Если у процесса $x(t)$ среднее значение равно нулю, то такие процессы называют центрированными. Для них дисперсия и средний квадрат совпадают. Постоянную составляющую в случайном процессе удобно выделить и рассмотреть отдельно, а оставшуюся после выделения часть рассматривать как центрированную.

Наиболее распространенными и важными являются стационарные случайные процессы, для которых среднее значение, средний квадрат являются постоянными величинами, не зависящими от времени. Мы будем в дальнейшем рассматривать стационарные случайные процессы с эргодическим свойством, для которых осреднение по реализациям эквивалентно осреднению по времени, и поэтому среднее значение и средний квадрат могут быть вычислены как интегралы:

$$\langle x\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^{0} x\,dt , \tag{23}$$

$$\left\langle x^2\right\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^{0} x^2(t) . \tag{24}$$

Отметим, что $<x>$ и $<x^2>$ являются постоянными числами.

Важной характеристикой случайного процесса является его корреляционная функция:

$$K_{\varphi}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{0} x(t)x(t-\tau)dt \,, \tag{25}$$

которая отражает тесноту связи между значениями случайного процесса, разделенными интервалом τ. Свойства корреляционной функции описаны, например, в работах [8; 45; 59].

Важной характеристикой случайного процесса является закон распределения его ординат. Для подавляющего большинства случайных процессов, встречающихся в природе и в технике, ординаты распределены по закону, близкому к нормальному (закону Гаусса), а точнее — к усеченному нормальному. Для нормального закона вероятность того, что значение модуля $|x(t)|$ для любого t не превысит величины $k\sigma_x$ (где $\sigma_x = \sqrt{\langle x^2 \rangle}$) зависит только от k и выражается формулой

$$P[|x| \le k\sigma_x] = \Phi(k)\,, \tag{26}$$

где $\Phi(k)$ — известный «интеграл вероятностей»

$$\Phi(k) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^k e^{-\frac{y^2}{2}} dy\,, \tag{27}$$

для которого имеются подробные таблицы. Полезно помнить краткую выдержку из них:

k	1	1,645	2	3	4,417
$\Phi(k)$	0,6827	0,9	0,9545	0,9973	$1 - 10^{-6}$

Широчайшая распространенность случайных процессов, распределенных по нормальному закону, связана с тем, что этот закон является законом предельным: как известно, сумма достаточно большого числа независимых или слабо зависимых случайных величин, подчиненных каким угодно законам распределения при весьма не жестких ограничениях, стремится в переделе к нормальному закону. А поскольку любое значение реального случайного процесса является следствием большого числа порождающих факторов, то и не удивительно, что на практике почти всегда приходится иметь дело с процессами, распределенными по нормальному или близкому к нормальному закону.

Однако имеет место одна важная оговорка: идеальный нормальный закон является законом предельным, порожденным бесконечным множеством отдельных причин. Именно поэтому для него хотя и мала, но отлична от нуля, как показывает формула (26), вероятность сколь угодно больших значений $x(t)$ (поскольку $\Phi(k) < 1$ для любых k). Реальные процессы порождены конечным, хотя и большим числом факторов и ограничены. Поэтому для лучшего согласия с реальностью формулу (26) дополняют «принципом практической уверенности», принимая, что вероятность неравенства $|x(t)| \geq k_0 \sigma_x$ равна нулю. Постоянную k_0 в этом неравенстве называют «постоянной практической уверенности» и в большинстве приложений принимают равной трем. Отсюда вытекает известное «правило трех сигм», формулируемое так: «отклонений, больших, чем три среднеквадратичных значения, в реальном процессе не встретится». В некоторых особых случаях постоянная практической уверенности k_0 может быть больше, чем $k_0 = 3$.

Из подавляющей распространенности нормальных случайных процессов следует, что для систем стабилизации и слежения естественным критерием качества является именно среднеквадратичный.

Действительно, пусть, например, техническими требованиями к полету экраноплана над морем задано, что предельным допустимым отклонением высоты полета от заданной является h_0 метров. Согласно правилу «трех сигм», это будет обеспечено, если будет $\sigma_h \leq \dfrac{h_0}{3}$. Отсюда и вытекает важнейшая роль среднеквадратичных величин при синтезе оптимальных систем стабилизации и слежения. А сами среднеквадратичные величины легко вычисляются через корреляционную функцию и спектральную плотность мощности случайного процесса.

Спектральной плотностью мощности (или, для краткости, спектром) случайного процесса $\varphi(t)$ называется косинус-преобразование Фурье его корреляционной функции:

$$S_\varphi(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty K_\varphi(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau. \qquad (28)$$

Если спектр случайного процесса $\varphi(t)$ известен, то его средний квадрат вычисляется через интеграл от спектра:

$$\left\langle \varphi^2 \right\rangle = \sigma_\varphi^2 = \int_0^\infty S_\varphi(\omega)\, d\omega. \qquad (29)$$

Из свойств косинус-преобразования Фурье вытекает, как известно [45], простое правило для вычисления среднего квадрата решения дифференциального уравнения со случайной правой частью: если задано уравнение

$$A(D)x = \varphi(t), \tag{30}$$

где $\varphi(t)$ — стационарный случайный процесс, то между спектрами S_x и S_φ имеет место равенство

$$|A(j\omega)|^2 S_x = S_\varphi; \tag{31}$$

отсюда элементарно вычисляется средний квадрат решения $x(t)$ уравнения (30):

$$\sigma_x^2 = \int_0^\infty S_\varphi(\omega) \frac{d\omega}{|A(j\omega)|^2}. \tag{32}$$

Таким образом, для вычисления среднего квадрата достаточно подставить в операторный полином $A(D)$ дифференциального уравнения (30) вместо оператора D мнимое число $j\omega$, вычислить квадрат модуля $|A(j\omega)|^2$ как функцию от ω и взять интеграл (32). Это можно делать в том случае, если полином $A(D)$ — гурвицев. Если он не гурвицев, то расчет по формуле (32) может дать конечное значение σ_x^2, но физического смысла этот результат чаще всего не имеет, поскольку при не гурвицевом полиноме $A(D)$ в формуле (30) значение σ_x^2 в реальном объекте не может быть конечным, т. к. $x(t)\to\infty$ при $t\to\infty$. Формула (32) дает величину среднего квадрата частного решения уравнения (30), остающегося ограниченным при $t\to\infty$. Если нас интересует только частное решение, то формулой (32) можно пользоваться и при не гурвицевом полиноме $A(D)$. Формула (32) лежит в основе всех расчетов линейных систем, находящихся под воздействием возмущающих сил случайного характера. Она легко обобщается и на уравнения вида

$$A(D)x = B(D)\varphi. \tag{33}$$

В этом случае

$$\sigma_x^2 = \int_0^\infty \frac{|B(j\omega)|^2}{|A(j\omega)|^2} d\omega. \tag{34}$$

Мы убеждаемся, что для вычисления σ_x достаточно знать спектр возмущающего воздействия. Его можно получить на основе формулы (28) из корреляционной функции процесса $\varphi(t)$, а корреляционную функцию легко вычислить на основе формулы (25) по наблюдениями за процессом $\varphi(t)$. Разумеется, на практике вместо бесконечного нижнего предела в интеграле (25) берут конечный. Практические вопросы вычисления — как обеспечить нужную точность, когда можно обрывать вычисления и т. п. — с достаточной полнотой освещены во многих руководствах — таких, как, например, [8; 70]. Практические приложения отражены в работах [1—3].

На практике полученные из наблюдений значения корреляционной функции аппроксимируют каким-либо аналитическим выражением. Чаще всего используют аппроксимацию экспонентой:

$$K_\varphi(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha\tau}, \tag{35}$$

подбирая значение α, наилучшим образом соответствующее экспериментальным точкам. Корреляционной функции (35) соответствует спектр

$$S_\varphi(\omega) = \sigma_\varphi^2 \frac{2}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}. \tag{36}$$

Часто используют также аппроксимацию вида

$$K_\varphi = \sigma_\varphi^2 e^{-\alpha\tau} \cos\beta\tau \tag{37}$$

и подбирают два параметра α и β, стремясь к наилучшему совпадению с экспериментальными данными. Корреляционной функции (37) соответствует спектр

$$S_\varphi(\omega) = \sigma_\varphi^2 \frac{2\alpha}{\pi} \frac{\alpha^2 + \beta^2 + \omega^2}{(\alpha^2 + \beta^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}; \tag{38}$$

иногда используют разновидность аппроксимации (37):

$$K_\varphi = \sigma_\varphi^2 e^{-\alpha\tau} (\cos\beta\tau + \frac{\alpha}{\beta} \sin\beta\tau), \tag{39}$$

которой соответствует спектр

$$S_\varphi(\omega) = \sigma_\varphi^2 \frac{4\alpha}{\pi} \frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\alpha^2 + \beta^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}. \tag{40}$$

При малых отношениях α/β спектры (38) и (40) похожи друг на друга и имеют резко выраженные максимумы при $\omega \approx \beta$.

На рис. 4 показан спектр (40) при $\alpha = 0{,}21$ и $\beta = 1$. Такое соотношение α и β характерно для развитого морского волнения в открытом море.

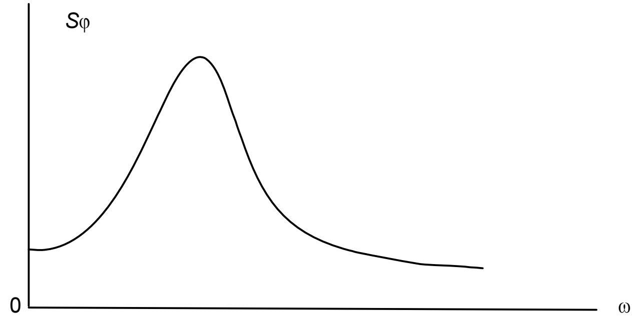

Рис. 4

В общем случае спектр всегда можно аппроксимировать дробно-линейной четной функцией ω:

$$S_\varphi = \frac{a_p \omega^{2p} + a_{p-1}\omega^{2p-2} + \ldots + a_0}{b_q \omega^{2q} + b_{q-1}\omega^{2q-2} + \ldots + b_0} \tag{41}$$

и подобрать коэффициенты a_i и b_i так, чтобы наилучшим образом аппроксимировать полученные в эксперименте данные. Чем выше степени p и q, тем точнее аппроксимация.

Исследуя корреляционные функции, нужно иметь в виду, что они получены на основе наблюдения за прошлым процесса $\varphi(t)$, при $t \le 0$, но дают некоторую информацию о будущем, о значениях $\varphi(t)$ при $t > 0$, и позволяют до известной степени прогнозировать будущее (подробнее о прогнозировании — в [8; 59; 70]). Однако информация о будущем, заключенная в корреляционной функции, является информацией ограниченной, неполной, и точность прогноза падает с ростом t. Чем быстрее затухает с ростом переменной τ корреляционная функция $K_\varphi(\tau)$, тем быстрее падает точность прогноза с увеличением времени.

Корреляционные функции и спектры позволяют перекинуть мост между детерминированными и случайными процессами. Вычисляя корреляционную функцию для гармонического колебания $\varphi(t) = A \sin(\beta t + \theta)$ (т. е. для детерминированного процесса), нетрудно убедиться, что в этом случае корреляционная функция

$$K_\varphi(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos\beta\tau \tag{42}$$

не затухает с ростом τ, а используя формулу (28), можно убедиться, что спектр φ(τ) гармонического колебания вырождается в обобщенную δ-функцию Дирака:

$$S_\varphi(\omega) = \frac{A^2}{2}\delta(\omega - \beta)\ . \tag{43}$$

Как известно, обобщенные δ-функции Дирака равны нулю для всех значений аргумента ω, кроме значения аргумента, равного нулю. При этом значении аргумента δ-функция стремится к бесконечности и в то же время интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx = 1$$

остается равным единице.

Отметим важное свойство δ-функций Дирака: для любой непрерывной функции $f(\omega)$ будет иметь место равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\omega - \beta)f(\omega)d\omega = f(\beta)$$

т. е. интеграл от произведения любой функции $f(\omega)$ на δ-функцию будет зависеть только от значения функции $f(\omega)$ при $\omega = \beta$.

Обобщенную δ-функцию Дирака можно рассматривать как предел многих непрерывных функций. Так, нетрудно убедиться, что непрерывная функция (38) при $\alpha \to 0$ переходит в δ-функцию: она переходит в спектр $S_\varphi(\omega) = \sigma_\varphi^2\delta(\omega - \beta)$.

Точно так же непрерывная функция (36) при $\alpha \to 0$ переходит в δ-функцию: $S_\varphi(\omega) = \sigma_\varphi^2\delta(\omega)$. Следовательно, спектр $S_\varphi = \delta(\omega)$ соответствует детерминированному процессу $\varphi(t) = 1$ — постоянной силе. В общем случае имеет место то же соотношение: спектр случайного процесса — непрерывная функция, спектр детерминированного процесса — это δ-функция или сумма δ-функций.

В заключение рассмотрим еще один своеобразный случайный процесс, для которого $S_\varphi = \text{const}$ — т. е. его спектр постоянен для всех частот. Такой процесс называют «белым шумом», и он, разумеется, является идеализацией, поскольку средний квадрат такого процесса бесконечен. Однако реальные процессы со спектрами вида (36) для больших значений α часто условно заменяют «белым шумом» и это упрощает все расчеты. Для «белого шума», как легко вычислить, корреляционная функция $K_\varphi(\tau) = \sigma_\varphi^2\delta(\tau)$ — т. е. является обобщенной δ-функцией Дирака. Поэтому «белый шум» является «абсолютно непредсказуемым процессом», в его спектре — в отличие от спектров реальных процессов — не содержится никакой информации о поведении $\varphi(t)$ при $t > 0$.

§ 3. Теория синтеза оптимального управления и ее развитие

До появления корреляционной и спектральной теории случайных процессов исследование объектов и систем, находящихся под воздействием возмущающих сил случайного характера было очень затруднительно. Алексей Николаевич Крылов, выполнив в 1914 году в экспедиции на судне «Метеор» большие экспериментальные исследования качки судов в условиях реального нерегулярного морского волнения, убедился, что существовавший в то время математический аппарат не позволял дать описание и расчет нерегулярной качки.

Новый математический аппарат, позволяющий рассчитывать характеристики случайных процессов на основе их корреляционных функций, был разработан в 1938—1943 годах трудами А. Н. Колмогорова, А. С. Хинчина, Н. Винера и их последователей. Вскоре появились простые расчетные формулы, подобные формуле (34).

Встал вопрос о синтезе оптимального регулятора, оптимальной обратной связи, которая обеспечила бы наилучшую возможную точность стабилизации или слежения при возмущающих воздействиях случайного характера.

Задачу синтеза оптимальной системы можно рассматривать, например, в такой постановке: имеется объект управления, математической моделью которого является уравнение

$$A(D)x = B(D)u + \varphi(t). \tag{44}$$

Объект управления замкнут линейной обратной связью (регулятором), имеющей уравнение

$$u = -W(D)x \tag{45}$$

(оператор $W(D)$ может быть дробно-линейной функцией от оператора дифференцирования $D = d/dt$, т. е. $u = \dfrac{W_1(D)}{W_2(D)}x$, где $W_1(D)$ и $W_2(D)$ — полиномы; для удобства выкладок мы сохраним запись (45)).

Задача о синтезе оптимального регулятора равносильна поиску оптимального оператора $W(D)$, который наилучшим образом преобразовал бы функцию $x(t)$ в функцию $u(t)$ — преобразовал бы так, чтобы точность стабилизации и слежения была наилучшей. Задачи о поиске наилучших операторов не имеют для своего решения достаточно удобного математического аппарата. Вот почему огромное значение имеет корреляционная теория случайных процессов, которая позволила трудную задачу поиска оптимального оператора $W(D)$ свести к задаче вычисления функции $W(j\omega)$, которая доставляет минимум довольно несложным функционалам и поэтому может быть найдена традиционными методами вариационного исчисления. А если найдена $W(j\omega)$, то это определяет $W(D)$ — достаточно подставить вместо аргумента $j\omega$ оператор дифференцирования $D = d/dt$.

Действительно, замкнув объект управления (44) регулятором (45), получим уравнения замкнутой системы:

$$[A(D) + B(D)W(D)]x = \varphi(t), \tag{46}$$

$$[A(D) + B(D)W(D)]u = -W(D)\varphi(t). \tag{47}$$

Пользуясь формулой (34), устанавливаем:

$$\sigma_x^2 = \int_0^\infty S_\varphi(\omega)\frac{d\omega}{\left|A(j\omega) + B(j\omega)W(j\omega)\right|^2}, \tag{48}$$

$$\sigma_u^2 = \int_0^\infty S_\varphi(\omega)\frac{\left|W(j\omega)\right|^2 d\omega}{\left|A(j\omega) + B(j\omega)W(j\omega)\right|^2}. \tag{49}$$

Теперь надо найти регулятор, доставляющий минимум σ_x^2, т. е. обеспечивающий наилучшую точность стабилизации и слежения — но с учетом ограничения на ресурс управления. Начиная с первых работ по оптимизации считалось, что ограничение наложено на средний квадрат управления, на σ_u^2 (критика этого далеко не всегда обоснованного предположения и уточненные решения приведены в работе [1]), и тогда проблема поиска оптимального оператора $W(D)$ сводилась к изопериметрической задаче вариационного исчисления — задаче о поиске функции $W(j\omega)$, доставляющей минимум интегралу (48) при заданном значении интеграла (49). Согласно мнемоническому правилу решения задач вариационного исчисления, восходящего еще к Л. Эйлеру, достаточно найти функцию $W(j\omega)$, доставляющую минимум составному функционалу

$$m^2\sigma_x^2 + \sigma_u^2 = \int_0^\infty S_\varphi(\omega)\frac{m^2 + \left|W(j\omega)\right|^2}{\left|A(j\omega) + B(j\omega)W(j\omega)\right|^2}, \tag{50}$$

где m^2 — множитель Лагранжа, подлежащий в дальнейшем определению. Удобно сразу брать этот множитель в виде m^2, в виде неотрицательного числа, потому что при этом сразу выполняется необходимое условие Лежандра вариационного исчисления [19; 42].

Поскольку S_φ не зависит от $W(j\omega)$, то необходимым условием минимума является обращение в нуль первой вариации второго сомножителя в подынтегральном выражении интеграла (50), т. е. функции

$$F = \frac{m^2 + |W(j\omega)|^2}{|A(j\omega) + B(j\omega)W(j\omega)|^2} = \\ = \frac{m^2 + W(j\omega)W(-j\omega)}{[A(j\omega) + B(j\omega)W(j\omega)][A(-j\omega) + B(-j\omega)W(-j\omega)]}. \tag{51}$$

Поскольку

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial W(j\omega)}\delta W(j\omega) + \frac{\partial F}{\partial W(-j\omega)}\delta W(-j\omega),$$

то для обеспечения равенства нулю первой вариации необходимо равенство нулю производных $\dfrac{\partial F}{\partial W(j\omega)}$ и $\dfrac{\partial F}{\partial W(-j\omega)}$. Вычисляя по обычным правилам дифференциального исчисления производную $\dfrac{\partial F}{\partial W(j\omega)}$ и приравнивая ее к нулю, получаем следующее равенство для функции $W_{\text{опт}}(j\omega)$, доставляющей минимум функционалу (50):

$$W_{\text{опт}}(j\omega) = -m^2 \frac{B(-j\omega)}{A(-j\omega)}. \tag{52}$$

Вычисляя производную $\dfrac{\partial F}{\partial W(-j\omega)}$ и приравнивая ее к нулю, получаем снова условие (52). Проверив выполнение достаточных условий минимума, убеждаемся окончательно, что оптимальный регулятор имеет вид:

$$U_{\text{опт}} = -m^2 \frac{B(-D)}{A(-D)}x. \tag{53}$$

Однако, замкнув регулятором (53) объект управления (44), мы убедимся, что он не обеспечивает устойчивости замкнутой системы. Действительно, подставив (53) в (44), получим для замкнутой системы уравнения:

$$[A(D)A(-D) + m^2B(D)B(-D)]x = A(-D)\varphi(t)$$
$$[A(D)A(-D) + m^2B(D)B(-D)]u = m^2B(-D)\varphi(t) \qquad (54)$$

Стоящий в квадратных скобках характеристический полином замкнутой системы не может быть гурвицевым. Действительно, если, например, некоторое комплексное число λ_i с отрицательной вещественной частью является корнем характеристического полинома, то и число $-\lambda_i$ с положительной вещественной частью вследствие симметричности выражения, стоящего в квадратных скобках, также будет его корнем.

Поэтому формула (53) не является окончательным решением поставленной нами задачи и нужно, продолжая решение, искать теперь регулятор вида (45), который бы обеспечивал минимум функционала (50) при учете дополнительного условия — устойчивости замкнутой системы. Определение оптимального регулятора при учете дополнительного условия устойчивости является значительно более сложной задачей, однако она решалась различными методами и не один раз. Решения можно найти в [26; 29; 33; 34; 36; 37; 42; 59; 65; 69] (далее мы разъясним, почему решений и публикаций было так много).

Проведем для иллюстрации один из наиболее простых алгоритмов синтеза оптимального регулятора, пригодный для объектов вида (45) при $B(D) = 1$.

Алгоритм синтеза

1. Предварительно для удобства в аналитической аппроксимации спектра (41) делают замену переменной: $j\omega = s$, после чего спектр $S_\varphi(s)$, являющийся четной функцией переменной s, факторизуют

   $$S_\varphi(s) = S_1(s)S_1(-s), \qquad (55)$$

   т. е. представляют как произведение двух симметричных множителей, один из которых зависит от s, другой — от $-s$. Для выполнения факторизации достаточно найти корни числителя и знаменателя спектра (41). В функцию $S_1(s)$ войдут корни с отрицательными вещественными частями, а в функцию $S_1(-s)$ — симметричные им корни с положительными вещественными частями.

2. Факторизуется полином:

   $$A(s)A(-s) + m^2 = G(s)G(-s). \qquad (56)$$

   При этом $G(s)$ является гурвицевым полиномом;

   $G(-s)$ — не гурвицевым.

3. Выполняется операция сепарации — т. е. разложения на целую часть и правильные дроби с полюсами в разных полуплоскостях комплексного переменного s:

$$\frac{A(s)}{G(-s)}S_1(s) = M_0 + M_+ + M_-, \tag{57}$$

где M_0 — целый полином, M_+ — правильная дробь с полюсами в левой полуплоскости, а M_- — правильная дробь с полюсами в правой полуплоскости.

4. Строится вспомогательная функция:

$$\Phi(s) = \frac{M_0 + M_+}{G(s)S_1(s)}, \tag{58}$$

с использованием которой непосредственно синтезируется оптимальный оператор $W(D)$:

$$W(D) = A(D) - \frac{1}{\Phi(D)}. \tag{59}$$

Пример 1

В качестве примера приведем синтез оптимального оператора для объекта управления

$$Dx = u + \varphi(t). \tag{60}$$

1. Факторизуя спектр, находим:

$$\sigma_\varphi^2 \frac{2}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2 - s^2} = \sigma_\varphi\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha + s}\sigma_\varphi\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha - s},$$

откуда $S_1(s) = \dfrac{1}{\alpha + s}$ (поскольку постоянные множители на вид регулятора не влияют).

2. Факторизуя полином

$m^2 + A(s)A(-s) = m^2 - s^2 = (m + s)(m - s)$,

находим, что

$G(s) = m + s$; $G(-s) = m - s$.

3. Выполняя сепарацию выражения

$$\frac{A(-s)}{G(-s)}S_1(s) = \frac{-s}{(m - s)(\alpha + s)} = \frac{-m}{\alpha + m}\frac{1}{m - s} + \frac{\alpha}{m + \alpha}\frac{1}{\alpha + s},$$

находим, что

$M_0 = 0$ и $M_+ = \dfrac{\alpha}{\alpha + m}\dfrac{1}{\alpha + s}$.

4. Функция $\Phi(s)$ в нашем случае равна

$$\Phi(s) = \frac{M_0 + M_+}{G(s)S_1(s)} = \frac{\alpha}{\alpha + m}\frac{1}{\alpha + s}$$

и, следовательно, оптимальным будет регулятор

$$u = -\left[\frac{m}{\alpha}D + \frac{m(m+\alpha)}{\alpha}\right]x. \tag{61}$$

Мы убеждаемся, что оптимальный регулятор зависит от спектра S_φ, а точнее — от параметра α спектра возмущающего воздействия (36).

Замкнув регулятором (61) объект управления (60), убедимся, что движение замкнутой системы описывается уравнением

$$(D+m)x = \frac{\alpha}{\alpha + m}\varphi \tag{62}$$

и является устойчивым. Вычисляя σ_x^2 и σ_u^2 в замкнутой системе, находим:

$$\sigma_x^2 = \frac{\alpha^2}{m(\alpha + m)}; \quad \sigma_u^2 = \frac{\alpha^2 m + 3\alpha m^2 + m^3}{(\alpha + m)^3}. \tag{63}$$

Если, например, ресурс управления ограничен неравенством $\sigma_u^2 \le 0{,}7$, то из второй формулы (63) находим множитель Лагранжа $m^2 = 1{,}69$. Регулятор (61) в данном случае имеет вид

$u = -[1{,}3D + 3]x$

и обеспечит при σ_u точность стабилизации $\sigma_x^2 = 0{,}0632$.

Нетрудно проверить, что из всех регуляторов вида $u = -k_0 x$ ограничению $\sigma_u^2 \le 0{,}7$ будет удовлетворять регулятор $u = -2{,}33x$ и он обеспечит точность стабилизации $\sigma_x^2 = 0{,}128$. Таким образом, переход от традиционных пропорциональных регуляторов вида $u = -kx$ к оптимальному управлению действительно может существенно улучшить точность стабилизации. В работе [45] показано, что улучшение точности связано с использованием той информации о возмущающем воздействии $\varphi(t)$, которая заключена в его спектре.

* * *

Мы привели простейший из алгоритмов синтеза. Другие алгоритмы можно найти в [26; 29; 37; 42; 65].

Обилие алгоритмов и публикаций связано с тем, что уж вскоре после первых работ по синтезу оптимальных систем стабилизации и слежения [36; 34] обнаружилось, что некоторые оптимальные системы теряют устойчивость даже при малых отклонениях параметров от расчетных значений. Разумеется, это обстоятельство пугало практиков, сразу подрывало любое доверие к оптимальным системам и накрепко перекрывало возможности их практического применения. Несмотря на огромное число исследований, посвященных оптимальным системам, практическое их применение было большой редкостью. Продолжались упорные поиски все новых и новых методов синтеза оптимальных регуляторов, которые не приводили бы к опаснейшей потере устойчивости при неизбежных на практике малых вариациях параметров.

Перелом произошел в 1973 году. В начале года в журнале «Автоматика и телемеханика» [35] в последний раз вспыхнула дискуссия между авторами работы [29] и П. В. Надеждиным, который показал, что предложенный ими очередной алгоритм синтеза приводит, как и предыдущие алгоритмы, к системам, способным терять устойчивость при малых вариациях. Авторы работы [29] защищались (безуспешно) от этого обвинения. Но уже в том же 1973 году в монографии [40] было показано, что дело не в алгоритме, а в том, что у ряда объектов управления минимум критерия качества объективно лежит на границе устойчивости по некоторым из параметров системы и поэтому для получения работоспособной системы нужно изменить саму постановку задачи, ввести требование сохранения устойчивости при вариациях параметров как новое дополнительное условие и для его реализации пожертвовать, если нужно, частью критерия качества.

Успеха удалось добиться потому, что в работе [40] впервые для некоторых объектов управления удалось построить оптимальные регуляторы в замкнутой форме, а не только в виде алгоритма, что и позволило сразу объяснить причину потери устойчивости.

Так, для объектов управления вида (44) при $B(D) = 1$ и возмущающем воздействии со спектром (36) в [40] было доказано, что оптимальный регулятор имеет вид

$$u_{\text{опт}} = \left[A(D) - \frac{G(D)}{K} \right] x, \tag{64}$$

где $K = \dfrac{A(\alpha)}{G(\alpha)}$, а при возмущающем воздействии со спектром (40) оптимальный регулятор имеет вид

$$u_{\text{опт}} = \left[A(D) - \frac{G(D)}{a + bD} \right] x, \tag{65}$$

где коэффициенты a и b вычисляются через вещественную и мнимую части комплексного числа

$$K_1 + jK_2 = \frac{A(\alpha - j\beta)}{G(\alpha - j\beta)}, \tag{66}$$

причем $a = k_1 + \frac{\alpha}{\beta}k_2, b = \frac{k_2}{\beta}$. (Напоминаем, что гурвицев полином $G(D)$ получается из равенства

$$A(D)A(-D) + m^2 = G(D)G(-D)$$

и имеет ту же степень, что и полином $A(D)$.)

Пусть теперь обратной связью (65) замкнут объект управления

$$A_1(D)x = u + \varphi(t), \tag{67}$$

у которого старший коэффициент полинома $A_1(D)$ равен $(1 + \varepsilon_n)\ a_nD^n$ — т. е. отличается от старшего коэффициента расчетного полинома $A(D)$ на малое число ε_n. Характеристический полином замкнутой системы будет равен

$$(a + bD)\varepsilon_n a_n D^n + G(D). \tag{68}$$

Его степень равна $n + 1$, а знак его старшего коэффициента будет зависеть от знака малой вариации ε_n, и тем самым может не совпадать со знаками остальных членов. Это означает, что в зависимости от знака вариации ε_n характеристический полином может перестать быть гурвицевым. Для объекта управления (44) при $B(D) = 1$ и возмущающем воздействии со спектром (40) оптимальная замкнутая система всегда может терять устойчивость при малой вариации старшего коэффициента и это связано с тем, что минимум критерия качества лежит на границе устойчивости или по старшему коэффициенту объекта управления, или по коэффициенту усиления b оптимального регулятора. На рис. 5, приводившемся еще в работе [40], показана зависимость критерия качества от коэффициентов усиления регулятора. Оптимальное значение $b = b_{\text{опт}}$ соответствует одновременно и минимуму критерия и границе устойчивости.

Для получения систем управления, сохраняющих устойчивость при вариациях параметров, необходимо использовать методы регуляризации. Первый метод регуляризации был предложен еще в 1973 году в той же монографии [40]. Однако он был недостаточно совершенным. Более удобный метод регуляризации был предложен в монографии [42]. Он был основан на обнаруженной [42] связи между структурой регулятора (45), т. е. степенями полиномов $W_1(D)$ и $W_2(D)$, и степенями p и q в аналитической аппроксимации спектра возмущающего воздействия (41), а также степенью n полинома $A(D)$ и степенью m полинома $B(D)$ в математической модели объекта управления (44).

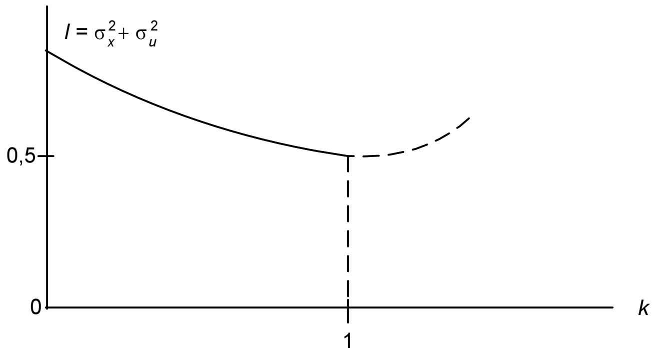

Рис. 5

Так, например, если $p \leq n + q - 1$, то для степени f полинома $W_1(D)$ выполняется неравенство

$$f \leq n + q - 1, \tag{69}$$

а для степени g полинома $W_2(D)$ — неравенство

$$g \leq m + q - 1. \tag{70}$$

Если $m + q - 1 \leq 2n - m + q - 1$, то

$$\begin{aligned} &f \leq n + q - 1, \\ &g \leq p, \end{aligned} \tag{71}$$

и если, наконец, $p > 2n - m + q - 1$, то

$$\begin{aligned} &f \leq m + p - n, \\ &g \leq p. \end{aligned} \tag{72}$$

Неравенства (69)—(72) выполняются почти всегда со знаком равенства (знак неравенства возникает лишь в тех случаях, когда у полиномов $W_1(D)$ и $W_2(D)$ оказываются одинаковые корни) и позволяют довольно много сказать о структуре и свойствах оптимального регулятора еще до его вычисления. Эти неравенства позволили сразу установить критерий возможности потери устойчивости замкнутой оптимальной системой при вариациях ее параметров, опубликованный в [42]: если выполняется неравенство

$$p \geq m + q - 1, \tag{73}$$

то при вариациях параметров устойчивость сохраняется, если это неравенство нарушается, то потеря устойчивости возможна. Позднее Л. Н. Волгин в [15] предложил назвать неравенство (73) критерием Ю. П. Петрова.

Критерий (73) открывает простой путь к построению систем управления, не теряющих устойчивости при вариациях параметров: ведь степени p и q аналитической аппроксимации спектра (41) находятся в наших руках и их всегда можно выбрать так, чтобы критерий Ю. П. Петрова оказался выполненным. Разумеется, удовлетворение дополнительного требования несколько ухудшает степень приближения аппроксимирующей кривой к экспериментальным точкам и приводит к неизбежной потере, жертве, критерия качества. Однако можно добиться того, чтобы расхождение между экспериментальными данными и аппроксимирующей кривой происходило за пределами полосы частот, существенной для системы (существенная полоса — это та область частот ω, внутри которой модуль частотной характеристики замкнутой системы еще не является пренебрежимо малым). При таком выборе потеря критерия качества, неизбежная для удовлетворения дополнительного требования сохранения устойчивости при вариациях параметров, становится минимальной.

После опубликования монографии [40] в 1973 году и монографии [42] в 1977 году наступил перелом в развитии теории синтеза оптимальных систем управления: она пошла по другому пути. Поиски алгоритмов синтеза систем, доставляющих минимум функционалам типа (50) и одновременно свободных от потери устойчивости при вариациях параметров объекта управления, прекратились. Вместо этого стали искать методы регуляризации [1; 42; 56; 71; 73], способные придать оптимальной системе дополнительное свойство сохранения устойчивости при вариациях параметров за счет некоторого ухудшения критерия качества.

К сожалению, наиболее популярными методами регуляризации стали методы, основанные на введении составных функционалов типа:

$$J = \left\langle u^2 \right\rangle + m^2 \left\langle x^2 \right\rangle + k_1 \left\langle x'^2 \right\rangle + \ldots + k_n \left\langle (x^{(n)})^2 \right\rangle, \qquad (74)$$

где только первые два члена имеют физический смысл (качество стабилизации и слежения отражает второй член, располагаемый ресурс управления — первый член, а остальные вводятся для регуляризации). Использование критериев качества вида (74), разумеется, позволяет получить системы управления, сохраняющие устойчивость при вариациях параметров, но неизбежная жертва в критерии качества может при этом оказаться слишком большой. В этом отношении гораздо удобнее метод регуляризации, предложенный в [42], позволяющий добиться минимальной жертвы критерия качества за счет изменения аналитической аппроксимации спектра за пределами полосы частот, существенных для данной системы с целью выполнения критерия Ю. П. Петрова (73). При этом ухудшение критерия качества будет меньше, чем при использовании методики, предложенной, например, в публикациях [56; 71; 73]. К сожалению, монографии [42] и [1] остались мало известными широкому кругу специалистов по системам управления. Предложенные в них методы используют редко. Основное внимание уделялось изучению переводов зарубежных авторов.

Так же остались почти не замеченными выполненные в 1985—87 годах [1; 45] работы по созданию систем управления, удовлетворяющих комплексу технических требований. Действительно, минимум среднеквадратичной погрешности стабилизации или слежения не может быть единственным критерием качества реальной системы. Она должна обязательно быть гибкой, удовлетворять комплексу требований — таких как удобство реализации, устойчивость регулятора как отдельно взятого звена, малая чувствительность к неточно известным коэффициентам системы, хорошие переходные процессы и т. п. Методы синтеза, предложенные в работах [26; 29; 34; 36; 65; 69] не обладали гибкостью. Они позволяли обеспечить минимум среднеквадратичного критерия, но оставалось открытым — а как обеспечить выполнение дополнительных, но важных технических требований. Без их выполнения система работать не будет. Поэтому на практике редко использовались результаты теории синтеза оптимальных систем. Предпочитались методы проектирования более примитивные, но обладающие гибкостью.

В работах [42] и [1] были разработаны и описаны гибкие методы синтеза, позволяющие проектировать системы, удовлетворяющие комплексу технических требований. Это позволило использовать методы теории синтеза оптимальных систем управления уже не только для теоретических оценок, но и для создания реальных систем, действительно позволивших улучшить качество стабилизации и слежения. Некоторые результаты использования подобных систем описаны в монографиях [45; 62], статьях [11; 17; 18; 32].

Резкое снижение спроса на наукоемкую продукцию в России, начавшееся в 1988—89 годах, задержало практическое использование описанных в [1; 42; 45] методов повышения качества систем стабилизации и слежения.

Обратим внимание на еще один результат поворота, произошедшего после опубликования монографий [40; 42]. Освободившись от гипноза поисков алгоритма синтеза, совмещающих минимум среднеквадратичного критерия качества с сохранением устойчивости при вариациях параметров, в США обратили внимание на то, что спектр возмущающего воздействия часто не известен нам, или не может существенно изменяться с течением времени. В этих условиях управление, оптимальное для конкретного спектра, может оказаться совсем не подходящим для реальных условий эксплуатации.

Вернемся к уже рассмотренному нами простому объекту управления (60). Пусть критерием качества является функционал (50) при $m^2 = 1$. Оптимальное управление для спектра (36), как было показано, имеет вид (61), а замкнутая система имеет вид (62). Пусть мы замкнули объект управления регулятором (61), оптимальным для спектра (36) при $\alpha = 1$, а пришло возмущающее воздействие со спектром $S_\varphi = \delta(\omega - 10)$. Тогда, как нетрудно рассчитать, регулятор (61) обеспечит значение критерия качества (50), равное 0,258, в то же время как регулятор, оптимальный для спектра $S_\varphi = \delta(\omega - 10)$, и обеспечил бы значение того же критерия, равное 0,01 — т. е. в 25,8 раз меньше.

Такое различие в качестве управления, разумеется, связано с тем, что модуль частотной характеристики замкнутой оптимальной системы (62) быстро убывает с ростом частоты ω. Если бы удалось найти управление, для которого модуль частотной характеристики был бы пологим, мало зависел бы от частоты ω (а в пределе был бы постоянным для всех частот), то такое управление было бы равномерно-оптимальным для всех спектров возмущающих воздействий.

Основываясь на этой простой идее и используя методы так называемой «H^∞ оптимизации», американские исследователи, начиная с 1981 года, развернули интенсивные исследования по равномерной оптимизации (первой работой по этому направлению считается статья Зеймса, опубликованная в 1981 году — см. обзор [7]). В термине «H^∞ оптимизация» буква H связана с фамилией Харди *(Hardy)*, с чьим именем связывают понятие «пространство Харди» с соответствующей метрикой. Более подробно о «пространствах Харди» и о методике «H^∞ оптимизации» рассказано в обзорах [7; 60].

Нужно прямо сказать, что как обзорные статьи, так и большинство работ по «H^∞ оптимизации» читаются трудно и законченного, ясного представления о предмете, особенно для учащихся, не оставляют.

В настоящем учебном пособии мы не будем рассматривать методики «H^∞ оптимизации» более подробно уже потому, что в задачах синтеза оптимальных систем управления сам принцип стремления к пологой частотной характеристике — даже в предельном случае, когда модуль частотной характеристики постоянен для всех частот — в действительности не является плодотворным. Покажем это на примере.

Пример 2

Задан объект управления

$$(2D + 1)x = u + \varphi(t) \tag{75}$$

с критерием качества

$$J = \sigma_x^2 + \sigma_u^2 \tag{76}$$

(т. е. $m^2 = 1$) и пусть $\sigma_\varphi^2 = 1$, но спектр возмущающего воздействия $\varphi(t)$ может быть любым. Рассмотрим управление

$$u = Dx. \tag{77}$$

Нетрудно проверить, что оно реализует идеал «H^∞ оптимизации». Зависимость от ω критерия качества (76) для объекта управления (75), замкнутого регулятором (77), вырождается в постоянную величину, не зависящую от $S_\varphi(\omega)$. Действительно, замкнув объект (75) регулятором (77), получаем уравнения замкнутой системы:

$$\begin{aligned}(D + 1)x &= \varphi\\(D + 1)u &= D\varphi\end{aligned} \tag{78}$$

откуда следует, что

$$J = \sigma_x^2 + \sigma_u^2 = \int_0^\infty S_\varphi \frac{1+\omega^2}{\omega^2+1} d\omega = \int_0^\infty S_\varphi d\omega = \sigma_\varphi^2 = 1 \tag{79}$$

не зависит от спектра возмущающего воздействия S_φ.

Если же мы замкнем объект управления (75) регулятором $u = -x$, то уравнения замкнутой системы примут вид

$$\begin{aligned}(D + 1)x &= 0{,}5\varphi\\(D + 1)u &= -0{,}5\varphi\end{aligned} \tag{80}$$

и, следовательно,

$$J = \sigma_x^2 + \sigma_u^2 = 0{,}25 \int_0^\infty S_\varphi \frac{d\omega}{\omega^2+1} \le 0{,}25\,. \tag{81}$$

Таким образом, хотя регулятор $u = -x$ и не обеспечивает постоянства частотной характеристики, он обеспечивает для любых спектров возмущающих воздействий значение критерия качества (76) более чем в четыре раза лучше, чем регулятор (77), идеальный с точки зрения «H^∞ оптимизации». Рассмотренный пример показывает, что подход, основанный на «H^∞ оптимизации», не обеспечивает оптимального решения.

Между тем в монографии [40] уже в 1973 году (т. е. значительно раньше американских исследований на ту же тему) уже рассматривалась проблема управления при произвольных, заранее не известных спектрах возмущающих воздействий и был предложен другой и более плодотворный путь к ее решению: сперва следует отыскать наиболее неблагоприятное возмущающее воздействие, построить для него оптимальное управление и найти значение критерия качества. Если удастся доказать, что при том же управлении и любом другом спектре возмущающего воздействия значение критерия качества не будет больше, чем то, что соответствует наихудшему возмущению, то это значение будет гарантированным и, причем наименьшим из всех, которые можно гарантировать.

Возвращаясь к рассмотренному примеру 2, отметим, что для него гарантированным уровнем критерия качества (и при этом наименьшим из возможных) является $J = 0{,}25$, а регулятор $u = -x$ является гарантирующим регулятором (доказательство приведем в следующем разделе). Подобный регулятор дает все то, что требуется для управления при возмущающих воздействиях с неизвестным спектром.

Метод построения гарантирующих регуляторов для важного частного случая объектов управления вида (44) — при $B(D) = \mathrm{const}$ и $A(D)$ — гурвицевом был найден и опубликован еще в 1973 году в [40].

Успех был предопределен тем, что в [40] удалось, во-первых, найти наихудшие спектры возмущающих воздействий (ими оказались спектры в виде δ-функций Дирака), а во-вторых, несколько позже, в [41] было впервые показано, что для таких спектров оптимальный регулятор не единственен и среди множества оптимальных регуляторов можно найти и регулятор гарантирующий. Собственно, опираясь на методику, уже изложенную в [40] и с учетом результата, опубликованного в [41], вполне можно было полностью решить проблему гарантирующего управления для любых объектов управления вида (44), но автор монографии [40] после 1973 года был отвлечен на другую тематику, а никем другим методика, изложенная в [40], в течение 20 лет не была подхвачена. Даже после того, как результаты, полученные в [40] с рядом уточнений, публиковались еще раз в [42], затем в [1; 43], они все же не привлекли внимания и, по-видимому, остались почти неизвестными в кругу исследователей по теории управления. Они остались неизвестными даже тогда, когда публикации работ по «H^∞ оптимизации» привлекли повышенное внимание к проблеме управления при неизвестных спектрах возмущающих воздействий. Во всяком случае, в обзорах [7; 60], появившихся в авторитетных российских научных журналах, приоритет в решении этой важной проблемы был безосновательно отдан не российским, а американским исследователям, хотя, как уже указывалось, монография [40] вышла на 8 лет раньше первой статьи Зеймса по «H^∞ управлению», опубликованной в 1981 году [7].

В следующем разделе мы покажем, каким образом, основываясь на методике, предложенной в [40], можно решить проблему управления при неизвестных спектрах возмущающих воздействий (т. е. проблему гарантирующего управления) в общем виде, для любых объектов вида (44).

§ 4. Синтез гарантирующих управлений

Рассмотрим объект управления вида (44) с критерием качества

$$J = m^2\sigma_x^2 + \sigma_u^2, \qquad (82)$$

где множитель Лагранжа m^2 будем пока считать величиной заданной, и изложим методы синтеза регулятора (обратной связи) вида (45), который гарантировал бы наименьшее значение критерия (82) для возмущающих воздействий $\varphi(t)$ с любыми спектрами $S_\varphi(\omega)$, подчиненными только нормирующему условию $\int\limits_0^\infty S_\varphi(\omega)d\omega = \sigma_\varphi^2 = 1$.

В предыдущем разделе мы уже показали, что критерий (82) можно свести к виду (50) и абсолютный минимум функционала (50) может обеспечить регулятор (53). Замкнув объект управления (44) регулятором (53), мы получим уравнение замкнутой системы (54). Хотя характеристические полиномы этих уравнений не гурвицевы, мы можем — применяя формально формулы (34) — вычислить средние квадраты частных решений уравнений (54), а конкретно — тех решений, которые остаются ограниченными при $t\to\infty$. Применяя к уравнению (54) методику вычисления σ_x^2, σ_u^2 через интеграл (34), получаем сперва σ_x^2, σ_u^2, а затем и минимальное значение критерия качества (82):

$$J_{абс\min} = \int\limits_0^\infty S_\varphi \frac{m^2 d\omega}{|A(j\omega)|^2 + m^2|B(j\omega)|^2}. \qquad (83)$$

(Отметим, что в монографии [40] формула (83) выводилась другим путем — через вычисление σ_x^2, σ_u^2 на экстремалях функционала (82); этот путь является более громоздким, но зато он не требует допущения об обязательной линейности оптимального регулятора.)

Именно формула (83) является, как увидим далее, ключом к синтезу гарантирующих регуляторов. Эти регуляторы не были синтезированы еще в 60-х годах только потому, что формула (83) недооценивалась: считалось, что минимальное значение (83) критерия качества (82) не имеет практического смысла, поскольку оно не достижимо для устойчивых систем с обратной связью, т. к. движение объекта управления (44), замкнутого обратной связью (53), — не устойчиво. Однако в работе [41] было открыто, что оптимальный регулятор для вырожденных спектров может быть не единственным, а значение (83) — достижимым. Неожиданность результата, полученного в [41], заключалась в том, что из формулы (50), казалось бы, неопровержимо следовало, что если функция $W(j\omega)$ интеграла (50) изменится, отклонится от значения $W_{опт}(j\omega)$, соответствующего оптимальному регулятору, то и значение интеграла изменится и перестанет быть оптимальным.

На самом деле это рассуждение верно только для обычных спектров $S_\varphi(\omega)$, зависящих от ω непрерывно. Если же S_φ является вырожденной δ-функцией Дирака, например, $S_\varphi = \delta(\omega - \beta)$, то значение интеграла (50) зависит только от значения функции $W(j\omega)$ в единственной точке $\omega = \beta$. Если регуляторы $u_1 = -W_1(D)x$, $u_2 = -W_2(D)x$ различны, но функции $W_1(j\omega), W_2(j\omega)$ совпадают хотя бы в одной точке $\omega = \beta$, то и значения интеграла (50) для обеих регуляторов совпадут. А это означает, что помимо регулятора (53), не обеспечивающего устойчивость замкнутой системы, то же самое минимальное значение критерия качества может гарантировать и некоторый другой регулятор, обеспечивающий устойчивость, и поэтому значение (83) может быть достижимо и для устойчивых систем с обратной связью. То же самое справедливо и для спектров, являющихся суммой δ-функций, т. е. для воздействий $\varphi(t)$, разлагающихся в ряд Фурье. Из этого факта вытекает любопытное следствие: пусть, например, периодическое возмущающее воздействие является суммой трех гармоник с частотами ω_1, ω_2, ω_3. Для того чтобы некоторый регулятор $u = -W(D)x$, обеспечивающий устойчивость замкнутой системы, доставлял бы еще и абсолютный минимум критерию качества (82), достаточно, чтобы выражение

$$F = \frac{m^2 + |W(j\omega)|^2}{|A(j\omega) + B(j\omega)W(j\omega)|^2}$$

имело равные значения всего в трех точках, при $\omega = \omega_1$; $\omega = \omega_2$; $\omega = \omega_3$. Дробно-рациональную функцию $W(j\omega)$, обеспечивающую выполнение равенства значений в трех точках, можно (хотя и не легко) вычислить. Отсюда следует, что для периодических возмущающих воздействий или отслеживаемых сигналов можно синтезировать регулятор (обратную связь), обеспечивающую абсолютный минимум критерия качества (82). Доказательство этой возможности в общем виде, для любого числа гармоник, дано в публикации [75].

Используя формулу (83), легко найти наихудший спектр S_φ возмущающего воздействия $\varphi(t)$, для которого интеграл (83) максимален. Наихудшим является спектр $S_\varphi = \delta(\omega - \beta)$, где β — это значение ω, для которого достигает наименьшего значения функция

$$M = |A(j\omega)|^2 + m^2|B(j\omega)|^2 . \qquad (84)$$

Для этого спектра интеграл (83) достигает своего максимального значения

$$\max_{\varphi}\min_{u} J = \frac{m^2}{|A(j\beta)|^2 + m^2|B(j\beta)|^2} \ . \tag{85}$$

Заметим, что если попытаться найти функцию $S_\varphi(\omega)$, доставляющую максимум функционалу (83) обычными методами вариационного исчисления, через уравнение Эйлера, то мы не получим правильного решения. Это связано с тем, что уравнение Эйлера, как известно, является необходимым условием максимума функционала только в том случае, если он существует и достигается в классе кусочно-гладких функций. У функционала (83) максимум существует, но достигается на функции $S_\varphi = \delta(\omega - \beta)$, лежащей за пределами класса кусочно-гладких функций. Однако для сравнительно простого функционала (83) уже сам вид подынтегрального выражения сразу показывает, что максимум будет достигаться именно на функции

$S_\varphi = \delta(\omega - \beta)$.

Из формул (50) и (84) непосредственно вытекает важное следствие: для того, чтобы регулятор был гарантирующим и реализовал бы наименьшее из возможных гарантированное значение критерия качества (82), он должен удовлетворять двум условиям:

- Он должен быть оптимальным для спектра

  $S_\varphi = \delta(\omega - \beta)$,

  где β — значение частоты ω, при котором достигает наименьшего значения функция (84).
- Для функции (51) должно выполняться неравенство

  $$F(\omega = \beta) \geq F(\omega \neq \beta), \tag{86}$$

  т. е. верхняя грань функции (51) должна достигаться на частоте β.

Действительно, при выполнении этих двух условий регулятор (45) обеспечит критерию качества (82) значение (85), а неравенство (86) гарантирует, что для всех других спектров критерий (82) не превысит значения (85). Таким образом, — и в этом коренное отличие излагаемой теории от подхода, основанного на методах «H^∞ управления» — на самом деле нет никакой необходимости стремиться к постоянству функции (51). Даже лучше, если она будет резко неравномерной — лишь бы ее наибольшее значение достигалось на частоте $\omega = \beta$.

Отметим, что поскольку δ-функция Дирака может быть пределом различных непрерывных функций, то гарантирующих регуляторов может быть много.

Так, например, спектры:

$$S_1 = \frac{2}{\pi}\frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}, \tag{87}$$

$$S_2 = \frac{4}{\pi}\frac{\alpha^3}{(\alpha^2 + \omega^2)^2} \tag{88}$$

при $\alpha \to 0$ одинаково переходят в $S_p = \delta(\omega)$. Следовательно, если для некоторого объекта управления (44) функция (84) достигает наименьшего значения при $\omega = 0$, то и регулятор, оптимальный для функции (87), и регулятор, оптимальный для функции (88), в пределе, при $\alpha \to 0$, одинаково могут быть гарантирующими — лишь бы выполнялось неравенство (86).

Пример 3

Рассмотрим объект управления

$$(D + 1)x = u + \varphi(t) \tag{89}$$

с критерием качества (82) при $m^2 = 3$. Для возмущающего воздействия со спектром (87) оптимальный регулятор будет иметь вид:

$$u = -(\frac{1}{1+\alpha}D + \frac{3+\alpha}{1+\alpha})x \tag{90}$$

(что нетрудно установить, воспользовавшись алгоритмом синтеза оптимального регулятора, приведенным в § 3, а также в [45]). В пределе, при $\alpha \to 0$, он перейдет в регулятор

$$u = -(D + 3)x. \tag{91}$$

Для спектра (88), как можно установить на основе того же алгоритма, оптимальный регулятор имеет вид:

$$u = -\left[\frac{6 + 6\alpha + \alpha^2 + (3 + 2\alpha)D + D^2}{2 + 2\alpha + \alpha^2 - D}\right]x \tag{92}$$

и в пределе при $\alpha \to 0$ переходит в регулятор

$$u = -\left(\frac{6 + 3D + D^2}{2 - D}\right)x. \tag{93}$$

Таким образом, и регулятор (91), и совершенно отличный от него регулятор (93) оба являются оптимальными для спектра $S_\varphi = \delta(\omega)$, соответствующего возмущающему воздействию в виде постоянной силы, $\varphi(t) = 1$.

Замкнув объект управления (89) регулятором (91), получим следующее уравнение замкнутой системы:

$$(D+2)x = 0{,}5\varphi, \qquad (94)$$

а, замкнув тот же объект регулятором (93), получим уравнение другой замкнутой системы:

$$(D+2)x = 0{,}25(2-D)\varphi. \qquad (95)$$

Оба уравнения соответствуют устойчивым замкнутым системам, поэтому можно по обычным правилам вычислить σ_x, σ_u и критерий качества (82) при $m^2 = 3$ для $\varphi(t) = 1$. Для обоих регуляторов (91) и (93) получим одинаковые значения: $\sigma_x = 0{,}25$ и $\sigma_u = 0{,}75$. Отсюда $J = 3\sigma_x^2 + \sigma_u^2 = 0{,}75$.

Сопоставление с вычислением по формуле (83) показывает, что значение $J = 0{,}75$ для объекта управления (89) и $S_\varphi = \delta(\omega)$ является абсолютным минимумом. Таким образом, оба регулятора — и (91) и (93) — обеспечивают устойчивость замкнутой системы и абсолютный минимум критерия качества [43].

Теперь остается проверить выполнение неравенства (86). Подставив в формулу (51) значения $A(j\omega)$; $B(j\omega)$; $W(j\omega)$, соответствующие объекту управления (89) и регулятору (91), получим:

$$F(\omega) = \frac{12+\omega^2}{16+4\omega^2}. \qquad (96)$$

Функция (96) достигает максимума при $\omega = 0$, и, следовательно, регулятор (91) является гарантирующим. Такая же проверка подтверждает, что регулятор (93) также является гарантирующим, поэтому есть возможность выбора. Предпочтительное выбрать регулятор (91), поскольку он проще, а, кроме того, для регулятора (93), соответствующего спектру (82) и его пределу при $\alpha \to 0$, не выполняется критерий Ю. П. Петрова (73) и поэтому замкнутая им система будет терять устойчивость при сколь угодно малых отклонениях параметров объекта управления или регулятора от расчетных значений.

Помимо регулятора (91) и (93) для объекта управления (89) и спектра $S_\varphi = \delta(\omega)$ гарантирующими будут также регуляторы

$$u = -3x, \qquad (97)$$

$$u = -3(D+1)x \qquad (98)$$

(о методах отыскания таких регуляторов будет сказано несколько позже) и многие другие, так что выбор гарантирующих регуляторов достаточно богат.

Помимо простоты реализации при выборе регулятора следует учитывать также скорость затухания функции (51) при отклонении ее аргумента от $\omega = 0$. Чем быстрее это затухание, тем меньше будет среднее значение критерия качества (82) при приходе возмущающих воздействий с различными спектрами.

Мы убеждаемся, что в отличие от подхода, используемого в теории «H^∞ оптимизации», на самом деле правильнее стремиться не к постоянству функции (51), а наискорейшему убыванию ее — лишь бы максимум функции (51) приходился на частоту $\omega = \beta$, соответствующую наихудшему спектру $S_\varphi = \delta(\omega - \beta)$.

Рассмотрим теперь алгоритм приближенного построения гарантирующих управлений для объектов управления вида (44) с критерием качества (82).

Первый шаг — находим частоту $\omega = \beta$, при которой достигает наименьшего значения функция (84).

Второй шаг — в классе функций вида (44) и для начала — при умеренных значениях p и q — находим спектр с резко выраженным максимумом на частоте $\omega = \beta$ и близкий к нулю для всех остальных значений в полосе частот, существенных для данной системы. При этом можно пользоваться программным обеспечением, разработанным для отыскания аналитических аппроксимаций спектров в известных алгоритмах синтеза оптимальных регуляторов, оптимальных для полученных экспериментально спектров S_φ. При выборе p и q необходимо следить за выполнением критерия Ю. Петрова (73).

Третий шаг — для найденного спектра находим оптимальный регулятор вида (45).

Четвертый шаг — для найденного регулятора вида (45) проверяем выполнение неравенства (86). Если оно не выполнено — возвращаемся ко второму шагу и выбираем спектр вида (41) с другими значениями p и q, но обязательно с резким максимумом при $\omega = \beta$, и повторяем расчет до тех пор, пока неравенство (86) не будет выполнено. Недостаток данного алгоритма — нельзя заранее сказать, сколько циклов расчета потребуется для его завершения. Не доказано даже, что для любых объектов управления вида (44) число циклов всегда будет конечным. Поэтому очень полезно выделить такие классы объектов управления, для которых гарантирующее управление можно синтезировать сразу и без поисков.

1. Первый класс — это объекты управления вида (44), у которых полином $A(D)$ — гурвицев, а полином $B(D)$ является постоянной величиной, которую без потери общности (изменением масштаба) можно привести к значению единица.

Для этого класса одним из гарантирующих будет регулятор

$$u = -\frac{m^2}{|A(j\beta)|^2} A(D)x\,. \tag{99}$$

Регулятор (99) был найден еще в 1973 году [40] чисто вариационными методами. Сперва были построены уравнения экстремалей функционала (82). Затем, исключая функцию $\varphi(t)$ из уравнений (54), определили, что абсолютный минимум функционала (82) доставляет регулятор (53) и этот минимум равен интегралу (83). Кстати, при этом не использовалось допущение о том, что регулятор, доставляющий минимум, должен отыскиваться в классе линейных регуляторов вида (45). Регулятор (53), как было показано в [40], доставляет абсолютный минимум среди любых регуляторов — и линейных, и нелинейных. Далее отыскивался спектр, доставляющий максимум интегралу (83), и было показано, что этот спектр имеет вид $S_\varphi = \delta(\omega - \beta)$ и поэтому наиболее неблагоприятным возмущающим воздействием является гармоническое колебание

$$\varphi(t) = \sqrt{2}\sin(\beta t + \theta)\,, \tag{100}$$

а в частном случае, при $\beta = 0$, постоянная сила $\varphi(t) = 1$.

Далее, пользуясь тем, что для функции (100) оператор дифференцирования эквивалентен операции умножения на число $j\beta$, на основе второго из уравнений (54) сразу получали оптимальное (по возмущению) управление для спектра $S_\varphi = \delta(\omega - \beta)$:

$$u_{\text{опт}} = -\frac{m^2}{|A(j\beta)|^2 + m^2}\varphi(t) \tag{101}$$

и наилучшее из гарантируемых значение критерия качества (82)

$$\left[m^2\sigma_x^2 + \sigma_u^2\right]_{\text{гар}} = \frac{m^2}{|A(j\beta)|^2 + m^2}\,. \tag{102}$$

(Напоминаем, что рассматривается класс объектов, в котором $B(D) = 1$.) Далее, исключая $\varphi(t)$ из уравнений (44) и (101), получали оптимальную обратную связь (регулятор «по отклонению») вида (99). Затем непосредственно проверялось, что для любого другого спектра критерий (82) будет меньше, откуда и вытекало, что регулятор (99) является гарантирующим (точнее — одним из гарантирующих).

Применяя формулу (99) к примеру 3 (объект управления (84) относится к первому классу), получим уже упоминавшийся гарантирующий регулятор (98).

Однако регулятор (99), найденный в 1973 году, не удобен в реализации, поскольку в него входят идеальные производные функции $x(t)$, порядок которых равен порядку объекта управления, но не единственность оптимальных (а значит, и гарантирующих) регуляторов, а тем самым и возможность синтеза удобных для реализации гарантирующих регуляторов была установлена несколько позже, в 1974 году, [41]. Работа [41] не встретила поддержки и отклика, и второй важный класс объектов управления, для которых гарантирующее управление строится без поиска, был открыт только через 20 лет, в 1994 году, [43].

2. Во второй класс входят те из объектов управления вида (44), у которых функции $|A(j\omega)|^2$ и $|B(j\omega)|^2$ достигают наименьшего значения при $\omega = 0$. Важность этого класса определяется тем, что у очень многих (можно условно сказать — у большинства) объектов управления функции $|A(j\omega)|^2$ и $|B(j\omega)|^2$ достигают минимума при $\omega = 0$ и к тому же очень часто возрастают монотонно с ростом частоты (не резонансные объекты). В частности, функции $|A(j\omega)|^2$ и $|B(j\omega)|^2$ будут возрастать монотонно с ростом ω у всех тех объектов управления, у которых все корни полиномов $A(D)$ и $B(D)$ вещественны (действительно, при вещественных корнях функцию $|A(j\omega)|^2$, например, можно представить в виде произведения

$$|A(j\omega)|^2 = a_n^2(\lambda_1^2 + \omega^2)....(\lambda_n + \omega^2), \tag{103}$$

где $\lambda_1....\lambda_n$ — корни полинома $A(D)$; каждый из сомножителей имеет минимум при $\omega = 0$ и возрастает с ростом ω монотонно, а произведение монотонно возрастающих функций также возрастает с ростом аргумента монотонно).

Для объектов с монотонно возрастающими $|A(j\omega)|^2$ и $|B(j\omega)|^2$ функция (84) всегда достигает наименьшего значения при $\omega = 0$, наиболее неблагоприятным возмущающим воздействием является постоянная сила.

Поэтому, если полином

$$A(D) + m^2\frac{a_0}{b_0}B(D) \tag{104}$$

является гурвицевым, то гарантирующим может быть совсем простой пропорциональный регулятор:

$$u = -\frac{m^2 b_0}{a_0}x\,. \tag{105}$$

В формулах (104) и (105) a_0 и b_0 — члены нулевой степени полиномов

$A(D) = a_0 + a_1D + ... + a_nD^n$

и

$B(D) = b_0 + b_1D + ... + b_mD^m$.

Регуляторы вида (105) давно и успешно применяются в технике автоматического управления (именно на основе формулы (105) находились гарантирующие регуляторы $u = -x$ и $u = -3x$ для объектов управления (75) и (89), рассматривавшихся в примерах 2 и 3 и относящихся ко второму классу).

Действительно, для регулятора (105) функция (51) принимает вид

$$F = \frac{m^2 + \frac{m^4 b_0^2}{a_0^2}}{\left| A(j\omega) + \frac{m^2 b_0}{a_0} B(j\omega) \right|^2}, \tag{106}$$

и регулятор (105) будет гарантирующим, если только знаменатель дроби (106) достигает наименьшего значения $\omega = 0$.

Таким образом, во второй класс входят объекты управления вида (44), у которых полином (104) — гурвицев, а функция (84) и знаменатель дроби (106) достигают наименьшего значения при $\omega = 0$. Для объектов управления второго класса наихудшим возмущающим воздействием является постоянная сила, а гарантирующим является регулятор (105).

Таким образом, простой и давно применяемый в технике пропорциональный регулятор (105) является гарантирующим для весьма широкого класса объектов управления. Этим и объясняется его удивительная живучесть: его начали применять еще в XVIII веке и широко применяют до настоящего времени.

Гарантированное (и одновременно — наименьшее из гарантируемых!) значение критерия качества (82) для объектов управления второго класса будет равно:

$$\left[m^2\sigma_x^2 + \sigma_u^2 \right]_{\text{гар}} = \frac{m^2}{a_0^2 + m^2 b_0^2}. \tag{107}$$

3. Третий класс объектов управления, для которых гарантирующий регулятор синтезируется без поиска — это те объекты вида (44), у которых по-

лином $B(D)$ — гурвицев, полином $A(D)+\dfrac{m^2 b_0^2}{a_0}$ — тоже гурвицев, функция $\left|B(j\omega)\right|^2$ возрастает с ростом ω монотонно, а функция

$$\left|A(j\omega)+\frac{m^2 b_0^2}{a_0}\right|^2 \tag{108}$$

достигает наименьшего значения при $\omega = 0$. Для этого класса объектов управления одним из гарантирующих будет регулятор

$$u = -\frac{m^2 b_0^2}{a_0 B(D)} x\,. \tag{109}$$

Действительно, в этом случае замкнутая система будет описываться уравнением

$$\left[A(D)+\frac{m^2 b_0^2}{a_0}\right] x = \varphi(t)\,, \tag{110}$$

функция (51) примет вид

$$F = \frac{m^2 + \dfrac{m^4 b_0^4}{a_0^2 \left|B(j\omega)\right|^2}}{\left|A(j\omega)+\dfrac{m^2 b_0^2}{a_0}\right|^2} \tag{111}$$

и будет достигать наибольшего значения при ω = 0: наиболее неблагоприятным возмущающим воздействием будет постоянная сила, $\varphi(t) = 1$, гарантированным (и наименьшим гарантированным) значением критерия качества (82) будет значение (107).

Пример 4

Примером объекта управления, относящегося к третьему классу, может служить следующий объект второго порядка

$$(D^2 + 3D + 1)x = (D + 1)u + \varphi(t) \tag{112}$$

с критерием качества (82) при $m^2 = 1$.

Для этого объекта полиномы $B(D)$ и $A(D)+\dfrac{m^2 b_0^2}{a_0}=D^2+3D+2$ — гурвицевы, функция (108) принимает вид:

$$\left| A(j\omega)+\frac{m^2 b_0^2}{a_0} \right|^2 = \omega^4+5\omega^2+4 \qquad (113)$$

и достигает минимума при $\omega = 0$. Функция $|B(j\omega)|^2 = 1+\omega^2$ возрастает с ростом ω монотонно, поэтому одним из гарантирующих будет регулятор

$$u=-\frac{1}{D+1}x\,. \qquad (114)$$

Наиболее неблагоприятным возмущающим воздействием будет постоянная сила, а гарантированным значением критерия качества (82) при $m^2 = 1$ будет 0,5.

Помимо рассмотренных трех классов объектов управления, для которых гарантирующий регулятор синтезируется непосредственно, без поиска среди регуляторов, оптимальных для наихудшего возмущающего воздействия, безусловно, существуют и другие. Поиск таких классов должен быть продолжен. Это — интересная тема для научной работы.

Отметим теперь, что рассмотренную нами задачу синтеза гарантирующего управления можно рассматривать и как задачу отыскания оптимальной стратегии «игроков» в дифференциальной игре двух лиц: конструктора гарантирующего регулятора против природы. Природа «выбирает» возмущающее воздействие, которое может оказаться и наиболее неблагоприятным для данного объекта управления, а конструктор синтезирует регулятор, который обеспечит наилучшее из гарантированных значение критерия качества при любом из «выборов» природы.

Дифференциальные игры рассмотрены, например, в [4; 54]. Известно, как редко удается получить решение дифференциальной игры в конечной форме; обычно удается указать только алгоритм получения решения, который можно реализовать лишь после длительных вычислений.

Изложенный нами материал позволяет добавить новые конечные решения к ранее известным. Для первого класса объектов управления наиболее неблагоприятным для конструктора «выбором» природы (его можно условно назвать «наилучшей стратегией природы») является выбор спектра $S_\varphi = \delta(\omega-\beta)$, наилучшей стратегией конструктора — выбор регулятора (99). «Цена игры» выражается формулой (102).

Для второго класса объектов управления наиболее неблагоприятный «выбор» природы — это спектр $S_\varphi = \delta(\omega)$, наилучшая стратегия конструктора — выбор регулятора (105), «цена игры» выражается формулой (107).

Полученные нами результаты допускают простое обобщение на возмущающие воздействия, не имеющие конечного среднеквадратичного значения. Разумеется, у реальных воздействий средние квадраты конечны. Однако для упрощения расчета часто используют идеализированные воздействия типа «белого шума», а, кроме того, при расчете следящих систем, как было показано в § 1, при сведении их к системам стабилизации используют расчетные возмущающие воздействия

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) - A(D)z(t),$$

где $\varphi_1(t)$ — реальное возмущающее воздействие, а $z(t)$ — отслеживаемое движение (см. в § 1 формулу (19)). Даже если $\varphi_1(t)$ и $z(t)$ имеют конечные средние квадраты, средний квадрат $\varphi(t)$ может быть бесконечным.

Подобные процессы с бесконечными значениями среднего квадрата (будем обозначать их $\varphi_\delta(t)$), можно подставить в виде

$$\varphi_\delta(t) = C(D)\varphi(t),$$

где $C(D) = C_k D^k + \ldots + C_0$ — полином от оператора дифференцирования $D = d/dt$, а средний квадрат $\varphi(t)$ равен единице, $\sigma_\varphi^2 = 1$. Поэтому математическую модель объекта управления при возмущающих воздействиях с бесконечным среднеквадратичным значением можно записать в виде:

$$A(D)x = B(D)u + C(D)\varphi(t), \tag{115}$$

где $\sigma_\varphi^2 = 1$ (обобщенное уравнение (44), которое можно считать частным случаем (115) при $C(D) = 1$).

Заменяя во всех выкладках, приведенных в предыдущих разделах уравнение (44) на более общее уравнение (115), убедимся, что интеграл (50) запишется в форме:

$$J = m^2\sigma_x^2 + \sigma_u^2 = \int_0^\infty S_\varphi(\omega)|C(j\omega)|^2 \frac{m^2 + |W(j\omega)|^2}{|A(j\omega) + B(j\omega)W(j\omega)|^2} d\omega. \tag{116}$$

Формула (83) для абсолютного минимума примет вид:

$$J_{абс\min} = \int_0^\infty S_\varphi(\omega) \frac{|C(j\omega)|^2 m^2}{|A(j\omega)|^2 + m^2|B(j\omega)|^2} d\omega, \tag{117}$$

и поэтому наиболее неблагоприятным спектром возмущающего воздействия будет спектр $S_\varphi = \delta(\omega - \beta)$, где β — то значение частоты ω, при котором достигает наибольшего значения функция

$$M_1 = \frac{|C(j\omega)|^2 m^2}{|A(j\omega)|^2 + m^2 |B(j\omega)|^2} \qquad (118)$$

(обобщение формулы (84)).

Дальнейшие расчеты для объекта управления (115) идут так же, как и для объекта (44), но при $C(D) \neq 1$ мы можем столкнуться с тем, что наихудшего спектра не удается отыскать даже в классе обобщенных δ-функций Дирака. Приведем пример.

Пример 5

Рассмотрим движения корабля вокруг его центра масс под действием руля. Оно будет описываться уравнением

$$(a_2 D^2 + a_1 D)y = u + \varphi(t) \qquad (119)$$

где y — курс корабля (т. е. угол между диаметральной плоскостью и направлением на север). a_1 и a_2 — постоянные коэффициенты, причем a_2 равен моменту инерции относительно центра масс, а коэффициент a_1 отражает демпфирующее действие воды, u — момент, создаваемый рулевой установкой, а $\varphi(t)$ — момент сил от ветра и морского волнения, сбивающий корабль с курса. В дальнейшем рассмотрим случай $\varphi = 0$ — т. е. движения корабля на тихой воде. Обозначим через $z(t)$ курс, задаваемый капитаном с учетом внешней обстановки, и пусть $x = y - z$. Задачей рулевой установки является обеспечение наилучшего отслеживания задаваемого капитаном курса, т. е. обеспечение малости функции $x(t)$ и ее среднеквадратичного значения σ_x^2. Относительно переменной x уравнение (119), учитывая, что $y = x + z$, примет вид:

$$(a_2 D^2 + a_1 D)x = u - (a_2 D^2 + a_1 D)z \qquad (120)$$

(т. е. в нашем случае $C(D) = — A(D)$ и $B(D) = 1$). Функция (118) примет вид:

$$M_1 = \frac{m^2 \omega^2 (a_1^2 + a_2 \omega^2)}{\omega^2 (a_1^2 + a_2 \omega^2) + m^2} \qquad (121)$$

и будет монотонно возрастать с ростом частоты от $M_1(0) = 0$ до $M_1(\infty) = m^2$. Следовательно, в данном случае наихудший спектр лежит за пределами класса обобщенных δ-функций Дирака. Это обстоятельство вполне соответствует физическому смыслу: чем выше частота функции $z(t) = \sin \beta t$, тем труднее ее отследить. Однако все это отнюдь не мешает решению задачи; мы просто устанавливаем, какую максимальную частоту β_{max} еще позволяют отследить ограничения на максимальный момент рулевой установки и спектр $S_\varphi = \delta(\omega - \beta_{max})$ будет наихудшим из спектров, имеющих физический смысл. В дальнейшем среди регуляторов, оптимальных для этого спектра, по уже описанной методике ищем гарантирующий.

§ 5. Множители Лагранжа и построение разделяющей кривой

В предыдущем разделе мы рассмотрели синтез оптимального регулятора, оптимальной обратной связи при заданном значении множителя Лагранжа m^2.

Однако этот множитель, как правило, изначально не задан, а подлежит определению, исходя из заданного нам ограничения на ресурс управления

$$\sigma_u \le n_0 . \tag{122}$$

Покажем, каким образом это можно сделать.

Поскольку наихудшим возмущающим воздействием является гармоническое колебание

$$\varphi(t) = \sqrt{2}\sin(\beta t + \theta) \tag{123}$$

(в частном случае, при $\beta = 0$, постоянная сила, $\varphi(t) = 1$), то, подставляя функцию (123) в линейные дифференциальные уравнения оптимальной замкнутой системы (54) и вычисляя средние квадраты ограниченных частных решений $x(t)$ и $u(t)$, которые будут гармоническими функциями той же частоты β, но с другой амплитудой и фазой, после несложных вычислений получим:

$$\sigma_x = \frac{|A(j\beta)|}{|A(j\beta)|^2 + m^2|B(j\beta)|^2}, \tag{124}$$

$$\sigma_u = \frac{m^2|B(j\beta)|}{|A(j\beta)|^2 + m^2|B(j\beta)|^2}. \tag{125}$$

Уравнения (124) и (125) можно рассматривать как параметрические уравнения некоторой кривой на плоскости, где по оси Ox отложено значение σ_x, а по оси Oy — значение σ_u, а m^2 играет роль параметра. Строят эту кривую следующим образом: задавшись некоторым значением m^2, по формуле (84) ищут величину частоты $\omega = \beta$, доставляющей наименьшее значение функции (84).

Затем вычисляют $|A(j\beta)|$ и $|B(j\beta)|$ и соответствующие им значения σ_x и σ_u, получая тем самым одну точку кривой. Задаваясь другими значениями m^2, находят другие точки кривой и строят ее по точкам. В настоящем разделе для начала мы будем ограничиваться теми объектами управления вида (44), у которых $A(D)$ и $B(D)$ — гурвицевы полиномы. Для таких объектов крайняя левая точка кривой, соответствующая $\sigma_u = 0$, лежит на оси ординат: $\sigma_x = \dfrac{1}{|A(j\beta)|}$, $\sigma_u = 0$, а крайняя правая, соответствующая $\sigma_x = 0$, — на оси абсцисс: $\sigma_x = 0$, $\sigma_u = \dfrac{1}{B(j\beta)}$.

Приведем пример построения кривой (пример 5).

Рассмотрим объект управления

$$(D^2 + D + 1)x = (D + 1)\,u + \varphi(t), \tag{126}$$

для которого функция (84) принимает вид

$$M = \omega^4 - \omega^2 + 1 + m^2(1 + \omega^2). \tag{127}$$

Взяв производную $\dfrac{dM}{d\omega^2} = 2\omega^2 - 1 + m^2$ и приравняв ее к нулю, получаем значения β, соответствующие наименьшему значению функции (127). Вычислив β для ряда значений m^2, вычисляем по формулам (124) и (125) приведенные в табл. 1 точки кривой.

Таблица 1

m^2	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	4	∞
β	0,707	0,632	0,548	0,448	0,316	0	0	0
σ_x	0	0,217	0,341	0,43	0,471	0,5	0,8	1
σ_u	1,155	0,878	0,725	0,629	0,556	0,5	0,2	0

Сама кривая показана на рис. 6.

Значение этой кривой и подобных ей кривых, удовлетворяющих уравнениям (124) и (125), заключается в том, что эти кривые являются разделяющими: ниже их лежат значения σ_x, которые заведомо нельзя гарантировать для произвольных спектров возмущающих воздействий (поскольку σ_x и σ_u в формулах (124) и (125) соответствуют абсолютному минимуму функционала (82) и вычисляются на его экстремалях). Построив разделяющие кривые (а построение их не представляет никаких затруднений), мы получаем простое решение одной из важнейших задач проектирования: по заданному ресурсу управления σ_u определить, какая точность стабилизации или слежения σ_x достижима при этом ресурсе и какая точность заведомо не достижима для возмущающих воздействий с неизвестным или переменным спектром. Не меньшее значение имеет и обратная задача: определить, какой ресурс управления σ_u необходим для обеспечения заданной точности σ_x при неизвестном или переменном спектре возмущающих воздействий.

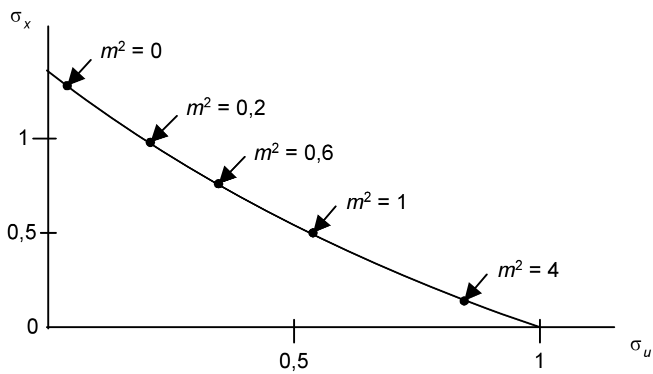

Рис. 6

До появления уравнений разделяющих кривых (впервые опубликованных в 1995 году в [43]) проектировщикам приходилось проводить каждый раз целую серию громоздких расчетов оптимального управления для различных спектров возмущающих воздействий, стараясь выделить из них спектр наихудший. При этом не было никакой гарантии, что действительно удалось нащупать спектр, близкий к наихудшему, и приходилось брать излишний запас, снижающий реальную точность управления.

С появлением разделяющих кривых исполнилась заветная мечта проектировщиков: они получили очень простой метод, позволяющий еще на стадии эскизного проектирования быстро и точно определить — какая точность стабилизации или слежения достижима при заданном ресурсе управления и какой ресурс необходим для достижения заданной точности.

В этом и заключается важнейшая роль разделяющих кривых, определяемых уравнениями (124) и (125), которые, безусловно, станут важнейшим инструментом проектирования систем управления.

Кроме того, с помощью этих кривых легко определяются числовые значения множителей Лагранжа m^2: если заданным является ограничение на ресурс управления, т. е. неравенство (122), то достаточно провести перпендикуляр к оси Ox через точку $\sigma_u = n_0$. Точке пересечения этого перпендикуляра с разделяющей кривой соответствует искомое значение множителя Лагранжа m^2 в функционале (82), поскольку он же является параметром в уравнениях (124) и (125). Получив значение m^2, мы можем синтезировать гарантирующий регулятор (обратную связь), основываясь на формулах (99), (105) и (109) из § 4.

Точно так же, если заданными являются требования к точности управления и они заданы неравенством

$$\sigma_x \le k_0 \tag{128}$$

то, проведя прямую, параллельную оси абсцисс через точку $\sigma_x = k_0$, в точке пересечения ее с разделяющей кривой получаем искомое значение множителя Лагранжа m^2, которое позволяет — основываясь на формулах (99), (105) и (109) — синтезировать гарантирующее управление.

Пример 6

Для объекта управления (126) задан ресурс управления $\sigma_u \le 0{,}5$. Требуется найти значение точности управления (величину σ_x), которую можно гарантировать при заданном ресурсе управления для возмущающих воздействий с любым спектром и синтезировать регулятор, реализующий гарантию.

Первым этапом решения является построение разделяющей кривой. Она была построена при решении примера 5 и показана на рис. 6 (для решения примера 6 достаточно, разумеется, построить только небольшой участок разделяющей кривой вблизи значения $\sigma_u = 0{,}5$). Рис. 6 показывает, что значение $\sigma_u = 0{,}5$ соответствует $m^2 = 1$. Функция (84) для объекта управления (126) при $m^2 = 1$ принимает вид:

$$M = \omega^4 + 2 \tag{129}$$

и достигает наименьшего значения при $\omega = 0$.

Следовательно, наихудшим возмущающим воздействием является в данном случае постоянная сила, $\varphi(t) = 1$. Полином (104) принимает вид

$$D^4 + 2D + 2$$

и является гурвицевым. Функция (106) принимает вид:

$$F = \frac{2}{\omega^4 + 2} \tag{130}$$

и ее знаменатель достигает наименьшего значения при $\omega = 0$. Следовательно, объект управления (126) при $m^2 = 1$ относится ко второму классу и гарантирующим будет регулятор (обратная связь)

$$u = -x. \tag{131}$$

Он гарантирует, что при любом возмущающем воздействии $\varphi(t)$, подчиненном только условию $\sigma_\varphi \le 1$ будет гарантирована точность управления $\sigma_x \le 0{,}5$.

Пример 7

Пусть для того же объекта управления (126) задана необходимая точность управления $\sigma_x \le 0{,}5$. Требуется определить множитель Лагранжа m^2, найти ресурс управления, необходимый для обеспечения заданной точности, и синтезировать регулятор, гарантирующий эту точность для любого возмущающего воздействия.

<u>РЕШЕНИЕ</u>. Первый этап — построение разделяющей кривой. Поскольку она уже построена (см. рис. 6), то сразу устанавливаем, что необходимый для гарантии заданной точности ресурс управления равен $\sigma_u = 0{,}5$ и множитель Лагранжа $m^2 = 1$. Далее строим функции (84) и (106) — они в данном случае имеют вид (129) и (130) — и так же, как и в примере 6, устанавливаем, что рассматриваемый нами объект управления при найденном значении множителя Лагранжа $m^2 = 1$ относится ко второму классу и гарантирующим является регулятор (131).

Отметим, что для ряда частных случаев разделяющая кривая превращается в прямую линию и строится совсем просто, по любым своим двум точкам: разделяющая кривая будет прямой линией во всех тех случаях, когда наименьшее значение функции (84) достигается на одном и том же значении частоты ω для всех m^2. Действительно, в этом случае можно исключить m^2 из уравнений (124) и (125) и мы получаем:

$$\sigma_x = \frac{1}{|A(j\beta)|}\left(1 - |B(j\beta)|\sigma_u\right),$$

т. е. в этом случае при гарантирующем управлении σ_x зависит от σ_u линейно. В частности, разделяющая кривая будет прямой, если:

- полиномы $A(D)$ и $B(D)$ имеют только вещественные корни;
- полином $B(D) = 1$, а полином $A(D)$ — гурвицев (для этого случая линейность зависимости σ_x от σ_u была обнаружена и доказана еще в 1973 году, в [40]).

Разделяющие кривые позволяют разобраться еще в одной тонкости, возникающей при синтезе оптимальных и гарантирующих управлений: мы уже установили, что (при гурвицевых полиномах $A(D)$ и $B(D)$) крайняя правая точка разделяющей кривой соответствует

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_u = \frac{1}{|B(j\beta)|}.$$

Что будет, если заданный ресурс управления σ_u, определяемый неравенством (122), окажется больше, чем $\sigma_u = \dfrac{1}{B(j\beta)}$?

При внимательном рассмотрении ответ очевиден: гарантирующим будет любое управление $u = -W(D)x$, в котором $W(D)$ — гурвицев полином с большими коэффициентами, достаточно большими для того, чтобы характеристический полином замкнутой системы

$$A(D) + W(D)B(D)$$

был гурвицевым, а величина σ_x, определяемая интегралом (48), была бы с достаточной для практических целей точностью близка к нулю (поскольку регулятор с очень большими коэффициентами усиления не удобен в реализации, то не стоит стремиться за счет увеличения коэффициентов полинома $W(D)$ слишком близко приближаться к идеальному равенству $\sigma_x = 0$, достижимому при $W(D) \to \infty$). При управлении $u = -W(D)x$ с большими коэффициентами в полиноме $W(D)$ будет $\sigma_x \approx 0$. Поскольку при ресурсе управления σ_u большем, чем $\sigma_u = \dfrac{1}{B(j\beta)}$ гарантирующее управление строится очень легко, без всяких затруднений, то этот случай можно назвать тривиальным, а гарантирующее управление $u = -W(D)x$, где $W(D)$ — полином с очень большими коэффициентами, можно назвать тривиальным гарантирующим управлением.

Однако к анализу гарантирующего управления нужно подходить внимательно. Если неравенство (122) заменить равенством $\sigma_u = n_0$ и решать задачу синтеза формально, как изопериметрическую задачу вариационного исчисления (а это, к сожалению, иной раз делается), то можно получить ошибочный ответ.

Пример будет приведен в следующем параграфе.

§ 6. Разделяющие кривые для неустойчивых без управления и не минимально фазовых систем

Неустойчивыми без управления будут объекты вида

$$A(D)x = B(D)u + \varphi(t), \tag{132}$$

в которых полином $A(D)$ — не гурвицев. Что касается названия «не минимально фазовые системы», то оно возникло на заре теории автоматического управления и было связано с поведением амплитуд и фаз частотных характеристик. Сейчас это уже не актуально и мы будем называть не минимально фазовыми просто те объекты вида (132), у которых полином $B(D)$ — не гурвицев. Нетрудно проверить, что это определение эквивалентно ранее используемому [9; 66].

Полный анализ оптимальных систем управления при заданном спектре возмущающего воздействия для неустойчивых без управления и не минимально фазовых систем был впервые выполнен в [14] и в монографии [1].

Было показано, что все объекты управления можно разделить на четыре типа:

- Устойчивые без управления и минимально фазовые (когда $A(D)$ и $B(D)$ — оба гурвицевы).
- Неустойчивые без управления, но минимально фазовые ($A(D)$ — не гурвицев, $B(D)$ — гурвицев).
- Устойчивые без управления, но не минимально фазовые ($A(D)$ — гурвицев, $B(D)$ — не гурвицев).
- Неустойчивые без управления и не минимально фазовые ($A(D)$ и $B(D)$ — не гурвицевы).

Опираясь на эту классификацию и на результаты, полученные в [1; 14], мы исследуем гарантирующее управление и характер разделяющих кривых для всех четырех типов объектов управления. Первый тип уже был рассмотрен в предыдущем разделе. Перейдем к исследованию второго типа и начнем с простейшего случая — объектов управления вида (132) при $B(D) = 1$ и не гурвицевом полиноме $A(D)$.

Покажем, что в этом случае не существует никаких гарантирующих управлений, кроме тривиальных — т. е. если в неравенстве (122) $n_0 < 1$, то никаким регулятором, никакой обратной связью гарантировать ничего нельзя, а при $n_0 \geq 1$ гарантирующее управление тривиально (т. е. реализуется регулятором $u = -W(D)x$, где $W(D)$ — любой гурвицев полином с очень большими коэффициентами; при этом $\sigma_x = 0$).

Доказательство будем вести отдельно для двух возможных случаев: не гурвицев полином $A(D)$ имеет либо

- А. Хотя бы один положительный или равный нулю корень α_1.
- Б. Хотя бы одну пару комплексных корней с положительной вещественной частью:

$$\gamma_{1,2} = \alpha \pm j\beta .$$

Начнем со случая А и рассмотрим возмущающее воздействие с корреляционной функцией $k_\varphi(\tau) = e^{-\alpha_1 \tau}$, т. е. показатель экспоненты равен (с обратным знаком) корню α_1 полинома $A(D)$.

В монографии [40] было доказано, что при таком возмущающем воздействии оптимальное управление имеет вид (64), где $k = \dfrac{A(\alpha)}{G(\alpha)}$ и, следовательно, при $\alpha = \alpha_1$ будет $k = 0$. А поскольку процессы, протекающие в объекте управления (132), замкнутом регулятором (64), будут описываться уравнениями

$$G(D)x = k\varphi,$$
$$G(\alpha)u = [kA(D) - G(D)]\varphi, \tag{133}$$

то при $k = 0$ будет $\sigma_x = 0$, $\sigma_u = 1$. Но поскольку управление (64) оптимально, то никакое другое управление не сможет обеспечить меньшего значения σ_u.

Таким образом, при возмущающем воздействии с корреляционной функцией $k_\varphi(\tau) = e^{-\alpha_1 \tau}$ при $\sigma_u<1$ нельзя обеспечить даже устойчивости замкнутой системы, а значит, при $\sigma_u<1$ ничего гарантировать нельзя. При $\sigma_u \geq 1$, как уже было ранее показано, гарантирующее управление тривиально.

Теперь проведем доказательство для случая Б и рассмотрим возмущающее воздействие со спектром (40), для которого оптимальный регулятор имеет вид (65), а коэффициенты a и b вычисляются по формуле (66). Из этой формулы следует, что если параметры α и β спектра (40) совпадают с вещественной и мнимой частью корня $\gamma_2 = \alpha \pm j\beta$ полинома $A(D)$, то $a = b = 0$. А поскольку процессы в объекте управления (132), замкнутом регулятором (40), будут описываться уравнениями

$$G(D)x = (a + bD)\varphi,$$
$$G(D)u = [(a + bD)A(D) - G(D)]\varphi, \tag{134}$$

то при возмущающем воздействии со спектром (40) при α и β, соответствующих корню $\gamma_2 = \alpha \pm j\beta$, и у нас будет $\sigma_x = 0$, $\sigma_u = 1$ и снова при $\sigma_u < 1$ ничего гарантировать нельзя. Наше утверждение доказано.

Для обоих случаев А и Б разделяющая кривая вырождается в единственную точку $\sigma_x = 0$, $\sigma_u = 1$ на оси абсцисс. Заметим, что если ресурс управления задан в форме равенства, $\sigma_u = n_0$ и $n_0 > 1$, то, решая формально изопериметрическую задачу вариационного исчисления и вычисляя σ_x и σ_u по формулам (122) и (123), можно получить неверный ответ.

Пример 8

Рассмотрим простой объект управления

$$(D-1)x = u + \varphi(t), \tag{135}$$

неустойчивый без управления с ресурсом управления $\sigma_u = 2$. Требуется найти регулятор, гарантирующий наилучшую точность управления, наименьшее возможное значение критерия качества σ_x.

Поскольку для объекта управления (135) полином $A(D)$ имеет только вещественные корни, функция (84) для любых m^2 достигает минимума при $\omega = 0$, наихудшим возмущающим воздействием следует признать $\varphi(t) = 1$, гарантирующим регулятором может быть регулятор вида (105), т. е.

$$u = -m^2 x, \tag{136}$$

замкнутая система имеет вид

$$(D + m^2 - 1)x = \varphi \tag{137}$$

и при $m^2 > 1$ — устойчива. При $\varphi(t) = 1$ имеем:

$$\sigma_x = \frac{1}{m^2-1}; \quad \sigma_u = \frac{m^2}{m^2-1} \tag{138}$$

и заданному ресурсу управления $\sigma_u = 2$ соответствует $m^2 = 2$, т. е. регулятор $u = -2x$, который обеспечит $\sigma_x = 1$.

Однако это значение отнюдь не является наименьшим из гарантируемых. Наименьшим из гарантируемых является значение $\sigma_x = 0$ и оно может быть гарантировано, например, регулятором (136) при $m^2 \to \infty$ (при этом $\sigma_u \to 1$). На практике достаточно взять регулятор $u = -1002x$, который обеспечит $\sigma_x < 0{,}001$. При этом будет $\sigma_u = 1{,}001$ — т. е. имеющийся ресурс управления не будет превышен. Этот пример подчеркивает важность сформулированного в [42] правила решения вариационных задач при наличии ограничений в форме интегральных неравенств. Сперва нужно проверить, не существует ли решения вариационной задачи без учета этого неравенства, когда оно выполняется автоматически (в примере 8 таким решением будет, например, функция $W(j\omega) = -1002$), и только если такого решения не существует, следует заменить в интегральном неравенстве знак неравенства на знак равенства и использовать обычное правило решения изопериметрических задач вариационного исчисления при наличии ограничений в форме интегральных равенств (отметим, что неравенство (122) является неравенством интегральным, поскольку σ_u выражается через интеграл (49), включающий в себя функцию $W(j\omega)$, которую мы ищем).

Во многих задачах синтеза гарантирующего управления и без детального анализа ясно, что без полного использования ресурса управления, без перехода неравенства (122) в равенство, гарантирующего управления не построить, но о необходимости подобной проверки надо помнить.

Перейдем теперь к исследованию разделяющих кривых для объектов управления минимально фазовых, но не устойчивых без управления, в более общем случае, когда $B(D) \neq \text{const}$, а полином $A(D)$ имеет один положительный корень α_1.

Путь к построению разделяющей кривой открывает простая формула для минимального ресурса управления, необходимого для обеспечения устойчивости замкнутой системы при возмущающем воздействии со спектром $S_\varphi(\omega)$. Эта формула была выведена автором совместно с Е. И. Веремеем в 1978 году, [14] и опубликована в [1]; ее можно записать в виде:

$$\sigma_{u\,\min} = \sqrt{2\pi\alpha_1}\,\frac{S_1(\alpha_1)}{|B(\alpha_1)|}. \tag{139}$$

В данной формуле $S_1(j\omega)$ — это результат факторизации спектра возмущающего воздействия S_φ, т. е. разложение его на два комплексно-сопряженных множителя:

$$S_\varphi(\omega) = S_1(j\omega)S_1(-j\omega). \tag{140}$$

Для вычисления $\sigma_{u\,\min}$ в выражение для $S_1(j\omega)$ вместо аргумента $j\omega$ подставляется значение положительного корня полинома $A(D)$ — корня α_1. Поскольку, как мы уже установили, при $B(D) = 1$ имеет место равенство

$$\sigma_{u\,\min} = \sqrt{2\pi\alpha_1}\,S_1(\alpha_1) = 1, \tag{141}$$

то при $B(D) \neq 1$ будет выполняться равенство

$$\sigma_{u\,\min} = \frac{1}{|B(\alpha_1)|}. \tag{142}$$

При $\sigma_u < \sigma_{u\,\min}$ ничего гарантировать нельзя — даже устойчивости замкнутой системы. Таким образом, для рассматриваемых нами объектов управления физический смысл имеет не вся разделяющая кривая, описываемая уравнениями (124) и (125), а только та ее часть, которая лежит правее точки с абсциссой (142).

Пример 9

Рассмотрим объект управления

$$(D - 1)x = (D + 1)u + \varphi(t), \tag{143}$$

для которого функция (84) имеет вид:

$$M = (1 + \omega^2) + m^2(1 + \omega^2) \tag{144}$$

и при любых m^2 достигает наименьшего значения при $\omega = 0$. Следовательно, наиболее неблагоприятным возмущающим воздействием будет постоянная сила, $\varphi(t) = 1$ и разделяющая кривая будет прямой линией

$$\sigma_x = 1 - \sigma_u\ . \tag{145}$$

Однако не вся разделяющая кривая (145) будет иметь физический смысл. У объекта управления (143) полином $A(D)$ имеет положительный корень α_1, и поскольку $B(1) = 1 + 1 = 2$, то $\sigma_{u\ \min} = 0{,}5$. Таким образом, разделяющая кривая имеет физический смысл только для $\sigma_u \geq 0{,}5$. На абсциссе $\sigma_u = 0{,}5$, соответствующей значению $m^2 = 1$, лежит крайняя левая точка разделяющей кривой. При $\sigma_u < 0{,}5$ ничего гарантировать нельзя. Физический смысл имеют только те точки разделяющей кривой, которые соответствуют $m^2 \geq 1$ и $\sigma_u \geq 0{,}5$.

Для объекта управления (143) гарантирующим может быть, например, регулятор, оптимальный для спектра (36) при $\alpha \to 0$. Действительно, при $\alpha \to 0$ спектр (36) переходит в $S_\varphi = \delta(\omega)$, что соответствует возмущающему воздействию $\varphi(t) = 1$, наиболее неблагоприятному для объекта (143). Оптимальный регулятор для спектра (36) и объекта управления (143) с критерием качества (82) имеет вид:

$$u = \frac{D + \frac{1}{m^2} + \alpha \frac{1 + m^2}{m^2}}{D + 1} x \tag{146}$$

(оптимальность регулятора (146) можно проверить, проведя расчет по алгоритму, приведенному в учебном пособии [45]). В пределе, при $\alpha \to 0$, регулятор (146) переходит в регулятор

$$u = \frac{D + \frac{1}{m^2}}{D + 1} x\,; \tag{147}$$

вычисляя функцию (51) для объекта управления (143), замкнутого регулятором (147), получаем следующее выражение для функции F:

$$F = \frac{m^2}{1 + m^2}\left(m^2 + \frac{\frac{1}{m^2} + \omega^2}{1 + \omega^2} \right) \tag{148}$$

и убеждаемся, что при $m^2 \geq 1$ она не возрастает с ростом частоты от значения, соответствующего $\omega = 0$, и поэтому регулятор (147) при $m^2 \geq 1$ является гарантирующим.

На рис. 7 штрихпунктиром показаны зависимости σ_x и σ_u для объекта управления (143) при возмущающих воздействиях с корреляционной функцией $k_\varphi(\tau) = e^{-\alpha_1 \tau}$ для различных α, а сплошной линией показана разделяющая кривая.

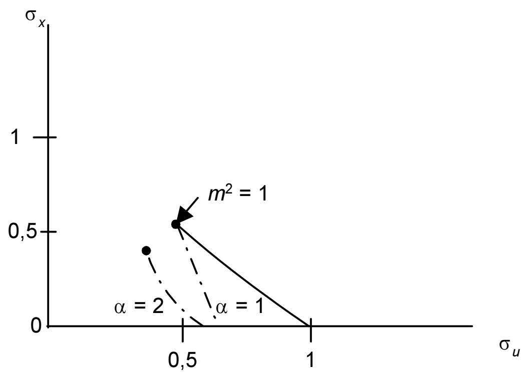

Рис. 7

Перейдем теперь к построению разделяющих кривых для тех объектов управления, у которых полином $A(D)$ — гурвицев, но $B(D)$ — не гурвицев (т. е. устойчивых без управления, но не минимально фазовых). Отдельного исследования для этих объектов производить не надо, поскольку уже сама симметричность объекта управления (132) по отношению к полиномам $A(D)$ и $B(D)$ и переменным x и u указывает на то, что разделяющие кривые будут теми же, что и у рассматриваемых ранее объектов управления, где $A(D)$ — не гурвицев, а $B(D)$ — гурвицев, но с заменой σ_x на σ_u (это означает, что произойдет их зеркальное отражение относительно прямой, расположенной под углом 45 градусов к оси абсцисс).

В частности, если полином $B(D)$ имеет один положительный корень β_1, то разделяющая кривая будет заканчиваться в своей крайней правой точке с ординатой

$$\sigma_{x\min} = \frac{1}{|A(\beta_1)|}. \tag{149}$$

Значение $\sigma_x < \sigma_{x\min}$ нельзя гарантировать при любом ресурсе управления σ_u. Так, например, при возмущающем воздействии с корреляционной функцией

$k_\varphi = e^{-\beta_1 \tau}$ даже при оптимальном управлении нельзя обеспечить $\sigma_x < \sigma_{x\ \min}$ — это легко проверить, пользуясь формулами, приведенными в [45].

Пример 10

Требуется построить разделяющую кривую для объекта управления

$$(D + 1)x = (D - 1)u + \varphi(t), \tag{150}$$

у которого полином $B(D)$ имеет положительный корень $\beta_1 = 1$ и $A(\beta_1) = 2$, поэтому $\sigma_{x\ \min} = 0{,}5$. Поскольку уравнение (150) получается из уравнения (143) заменой переменной x на переменную u и переменной u на переменную х, то и разделяющая кривая для объекта (150) может быть получена из разделяющей кривой для объекта (143) ее зеркальным отражением относительно прямой, проходящей под углом 45 градусов к оси абсцисс. Разделяющая кривая показана на рис. 8 сплошной линией. Она кончается в точке $\sigma_x = \sigma_{x\ \min} = 0{,}5$, соответствующей $m^2 = 1$.

Физический смысл имеют только точки разделяющей кривой, соответствующие $m^2 \le 1$. Штрихпунктирной кривой на рис. 8 показана зависимость σ_x от σ_u для объекта (150) при возмущающем воздействии с корреляционной функцией $k_\varphi = e^{-\tau}$ и при оптимальном управлении. Эта зависимость также заканчивается в точке $\sigma_x = \sigma_u = 0{,}5$. Значений $\sigma_x < 0{,}5$ нельзя гарантировать при любом ресурсе управления. Чтобы подчеркнуть это, на рис. 8 разделяющая кривая дополнена справа от своей крайней правой точки штриховой прямой с уравнением $\sigma_x = 0{,}5$.

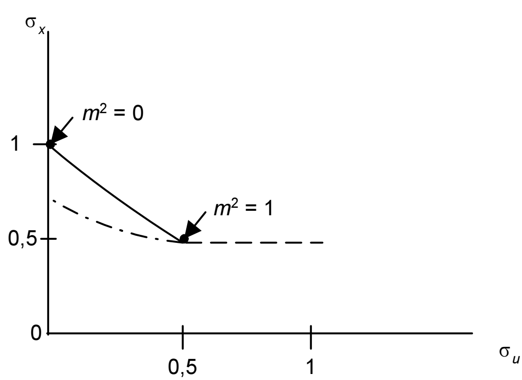

Рис. 8

Перейдем теперь к рассмотрению объектов управления вида (132), у которых оба полинома $A(D)$ и $B(D)$ — не гурвицевы. Такие объекты являются неустойчивыми без управления и не минимально фазовыми. Они соединяют в себе все особенности ранее рассмотренных объектов: для них разделяющая кривая начинается справа от оси ординат в точке с абсциссой $\sigma_u = \sigma_{u\ \min}$ и заканчиваются в точке с ординатой $\sigma_x = \sigma_{x\ \min}$. Если полином $A(D)$ имеет один положительный корень α_1, а $B(D)$ — один положительный корень β_1, то $\sigma_{x\ \min}$ и $\sigma_{u\ \min}$ вычисляются по простым формулам (142) и (149). Для случая, когда $A(D)$ или $B(D)$ имеют комплексные корни с положительными вещественными частями, ясных результатов пока нет. Это — интересная тема для научной работы.

Пример 11

Рассмотрим объект управления

$$(D^2 - 3D - 2)x = (D - 1)u + \varphi(t), \tag{151}$$

в котором полином $A(D)$ имеет один положительный корень $\alpha_1 = 3{,}5616$, а полином $B(D)$ — один положительный корень $\beta_1 = 1$. Для объекта управления (151) функция (84) имеет вид

$$M = \omega^4 + 13\omega^2 + 4 + m^2(1 + \omega^2) \tag{152}$$

и достигает наименьшего значения для всех m^2 при $\omega = 0$. Следовательно, наиболее неблагоприятным возмущающим воздействием будет постоянная сила $\varphi(t) = 1$ со спектром $S_\varphi = \delta(\omega)$.

Разделяющая кривая описывается уравнениями

$$\sigma_x = \frac{2}{4 + m^2}; \quad \sigma_u = \frac{m^2}{4 + m^2}, \tag{153}$$

вытекающими из формул (124) и (125). Исключая m^2 из уравнений (153), получаем, что разделяющая кривая является прямой линией и описывается формулой

$$\sigma_x = 0{,}5(1 + \sigma_u), \tag{154}$$

но только часть разделяющей кривой имеет физический смысл.

Крайняя левая точка разделяющей кривой вычисляется по формуле (142) для $\alpha_1 = 3{,}5616$. Получаем $\sigma_{u\ \min} = 0{,}3904$, что соответствует $m^2 = 2{,}5616$. Крайнюю правую точку вычисляем по формуле (149) для $\beta = 1$. Получаем $\sigma_{x\ \min} = 0{,}25$, что соответствует $m^2 = 4$. Разделяющая кривая (очень короткая) показана на рис. 9. Справа от своей крайней правой точки $\sigma_{x\ \min} = 0{,}25$ она дополнена штриховой прямой $\sigma_x = 0{,}25$, поскольку значений $\sigma_x < 0{,}25$ для системы (151) получить невозможно.

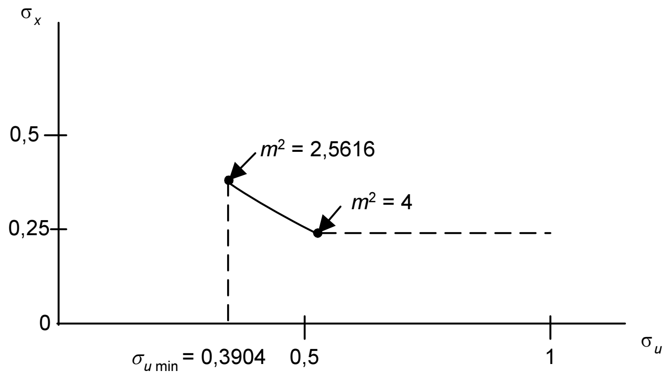

Рис. 9

Объект управления (151) интересен тем, что для него при критерии качества (82) и $m^2 = 1$ методами «H^∞ оптимизации» было найдено управление $u = Dx$, оптимальное для спектра

$$S_\varphi = \frac{4}{\pi}\frac{\omega^2+1}{\omega^4+14\omega^2+1} \tag{155}$$

и обеспечивающее для этого спектра значение $\sigma_x^2 = 0{,}125$; $\sigma_u^2 = 0{,}125$ и значение критерия качества (82) при $m^2 = 1$, равное 0,25. Поскольку при замыкании объекта (151) регулятором (обратной связью) $u = Dx$ уравнения замкнутой системы принимают вид:

$$\begin{aligned} &2\,(D+1)x = \varphi,\\ &2\,(D+1)u = D\varphi, \end{aligned} \tag{156}$$

то, используя формулы (32)—(34), получаем:

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{4}\int_0^\infty S_\varphi \frac{d\omega}{\omega^2+1}; \sigma_u^2 = \frac{1}{4}\int_0^\infty S_\varphi \frac{\omega^2 d\omega}{\omega^2+1} \tag{157}$$

и, следовательно,

$$J = \sigma_x^2 + \sigma_u^2 = \frac{1}{4}\int_0^\infty S_\varphi \frac{\omega^2+1}{\omega^2+1} d\omega = 0{,}25\,. \tag{158}$$

Таким образом, регулятор $u = Dx$ обеспечит одно и то же значение критерия качества (82) при $m^2 = 1$, равное 0,25, для любого спектра возмущающего воздействия $S_\varphi(\omega)$. Следовательно, с точки зрения теории «H^∞ оптимизации» регулятор $u = Dx$ является идеальным; он действительно гарантирует значение критерия качества (82) при $m^2 = 1$, равное 0,25 для любого спектра возмущающего воздействия, и это значение является наименьшим из гарантируемых (иначе регулятор не мог бы быть оптимальным для спектра (155)). При фиксированном m^2 все правильно.

Однако нужно учитывать, что критерий (82) при фиксированном значении множителя Лагранжа m^2 является почти всегда только промежуточным критерием, полуфабрикатом. Реально нам нужно, как уже указывалось, определить — какое значение ресурса управления σ_u может гарантировать нам при любом спектре возмущающего воздействия заданную точность управления — например, значение $\sigma_x^2 = 0{,}125$. Подставляя в интегралы (157) спектр (155), получаем: $\sigma_x^2 = 0{,}125$; $\sigma_u^2 = 0{,}125$. Если считать спектр (155) «наихудшим» для объекта управления (151), то тогда при любом другом спектре для обеспечения заданного значения точности $\sigma_x^2 = 0{,}125$ потребуется ресурс управления $\sigma_u^2 \le 0{,}125$. На самом деле это не так. При $\sigma_u^2 = 0{,}125$ вообще ничего гарантировать нельзя: только для обеспечения устойчивости замкнутой системы при произвольных спектрах возмущающих воздействий требуется, как мы уже установили, ресурс управления $\sigma_{u\,\min} = 0{,}3904$ и значит $\sigma_{u\,\min}^2 = 0{,}1524$.

Приведенный пример высвечивает главный недостаток синтеза, основанного на методах «H^∞ оптимизации»: для заданного коэффициента m^2 в критерии качества (82) еще можно после громоздких вычислений найти управление, обеспечивающее постоянство (или приближенное постоянство) функции (51). Но функция, постоянная при одном значении множителя Лагранжа, перестает быть постоянной при другом его значении, а это значит, что все громоздкие вычисления нужно еще многократно повторить, прежде чем будет найдено значение m^2, соответствующее заданному ресурсу управления (так, например, регулятор $u = Dx$ для объекта управления (151) при $m^2 = 1$ действительно обеспечивает постоянство функции (51): при $m^2 = 1$ будет

$$F = \frac{1+\omega^2}{4(1+\omega^2)} = 0{,}25$$

для всех ω. Но при $m^2 = 10$ получим функцию

$$F = \frac{10+\omega^2}{4(1+\omega^2)} \tag{159}$$

очень далекую от $F = \text{const}$).

Вариационные методы решения задачи о гарантирующем управлении гораздо проще и удобнее. Разделяющие кривые, которые строят по формулам (124) и (125), позволяют предельно просто решить главную часть задачи, т. е. определить, какой ресурс управления σ_u необходим для обеспечения заданной точности управления σ_x. Несколько сложнее решается вторая задача — определить, какой ресурс достаточен для обеспечения заданной точности σ_x, и построить регулятор, который эту точность реализует и гарантирует. Если рассматриваемый объект управления относится к одному из трех классов перечисленных в § 4, для которых гарантирующий регулятор синтезируется по элементарным формулам (99), (105), (109), то все просто. Если нет — то необходим перебор среди регуляторов, оптимальных для спектра $S_\varphi = \delta(\omega - \beta)$, и не доказано, что этот перебор всегда заканчивается через конечное число шагов.

Следующий пример покажет, что среди неустойчивых без управления и не минимально фазовых объектов управления могут быть и такие, для которых не только отдельные участки разделяющей кривой (как в примерах № 8—11), но и вся кривая в целом может не иметь физического смысла.

Пример 12

Рассмотрим объект управления

$$(D-1)x = (D-2)u + \varphi(t), \tag{160}$$

у которого полиномы $A(D)$ и $B(D)$ имеют только вещественные корни и поэтому $\beta = 0$, наихудшим спектром будет $S_\varphi = \delta(\omega)$, а разделяющая кривая является прямой линией, соединяющей точки $\sigma_u = 0$, $\sigma_x = 1$ и $\sigma_x = 0$, $\sigma_u = 0{,}5$. Используя формулы (142) и (149), находим, что $\sigma_{u\ \min} = 1$ и $\sigma_{x\ \min} = 1$. Поскольку в данном случае $\sigma_{u\ \min}$ больше, чем наибольшее значение σ_u на разделяющей кривой, то имеет место особый случай — вся разделяющая кривая в целом не имеет физического смысла и ответ на вопрос о гарантирующем управлении заключается в следующем: если ресурс управления $\sigma_u < 1$, то ничего гарантировать нельзя. Если $\sigma_u \geq 1$, то можно гарантировать только $\sigma_x \geq 1$. Значений $\sigma_x < 1$ нельзя гарантировать при любом ресурсе управления (рис. 10).

Конечно, гарантия очень скромная. Но для не минимально фазовых систем эффективность любого управления ограничена. Причину этого удобно раскрыть как раз на примере объектов управления (150), (151) и (160), у которых полином $A(D)$ имеет один положительный корень. Посмотрев внимательно на правые части уравнений (150), (151) и (160), мы убеждаемся, что воздействие на переменную $x(t)$ самого управления $u(t)$ и воздействие его производной Du противоположны по знаку. Отсюда следует, что при возмущающем воздействии, в спектре которого заметную роль играют высокие частоты, действие управления и его производной взаимно компенсируются, что не позволяет при любом σ_u получить достаточно эффективное уменьшение среднего квадрата переменной $x(t)$ и добиться осуществления неравенства $\sigma_x < \sigma_{x\,\min}$.

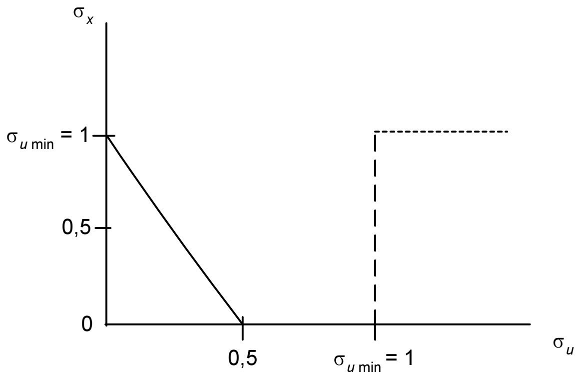

Рис. 10

§ 7. Алгоритм синтеза гарантирующих управлений

На основе утверждений, сформулированных и доказанных в предыдущих разделах, а также в монографиях [1; 40; 42; 45], можно коротко сформулировать следующий алгоритм построения разделяющих кривых синтеза гарантирующих управлений и гарантирующих регуляторов для объектов управления вида (132) при $\sigma_\varphi = 1$:

1. Исследуя корни полиномов $A(D)$ и $B(D)$ устанавливаем — гурвицевы они или нет, имеют ли они одни вещественные или же имеют и комплексные корни.
2. Задавшись числом m^2, вычисляем — на какой частоте $\omega = \beta$ достигает наименьшего значения функция (84).
3. Повторяя эти вычисления для серии значений m^2, вычисляем по точкам функции (124) и (125) и строим на плоскости с осями σ_x и σ_u зависимость σ_x от σ_u — разделяющую кривую. Для каждого заданного σ_u ниже разделяющей кривой лежат значения σ_x, которые заведомо не могут быть гарантированы для произвольного спектра возмущающих воздействий.

   Для каждой заданной точности σ_x слева от разделяющей кривой лежат значения σ_u, заведомо недостаточные для обеспечения заданной точности при произвольном спектре возмущающих воздействий.

Если оба полинома $A(D)$ и $B(D)$ имеют одни вещественные корни, то разделяющая кривая является прямой линией и достаточно по формулам (124) и (125) вычислить любые две ее точки и провести через них прямую. Если $A(D)$ и $B(D)$ имеют комплексные корни, то разделяющей могут быть и прямая и кривая линии.

4. Если $A(D)$ и $B(D)$ оба гурвицевы, то построение разделяющей кривой на этом заканчивается. Если нет, то, пользуясь формулами (142) и (149), отсекаем те участки разделяющей кривой, которые не имеют физического смысла, т. е. $\sigma_u < \sigma_{u\,\min}$ и $\sigma_x < \sigma_{x\,\min}$.

   Пользуясь разделяющей кривой, по заданному ресурсу управления σ_u находим значение множителя Лагранжа m^2 и в дальнейшем ведем синтез гарантирующего управления для этого значения.

5. Для синтеза регулятора (обратной связи), реализующего гарантию, следует прежде всего проверить, не относится ли рассматриваемый объект управления к одному из описанных в § 4 классов, для которых синтез реализуется просто.

   - а). Если полином (104) — гурвицев, а функция (84) и знаменатель дроби (106) достигают наименьшего значения при $\omega = 0$, то одним из гарантирующих будет простой пропорциональный регулятор (105). Наиболее неблагоприятным возмущающим воздействием будет постоянная сила $\varphi(t) = 1$.
   - б). Если $B(D) = \mathrm{const}$, а полином $A(D)$ — гурвицев, то одним из гарантирующих будет регулятор (99).
   - в). Если полиномы $B(D)$ и $A(D) + \dfrac{m^2 b_0^2}{a_0}$ — гурвицевы, а функция $|B(j\omega)|^2$ возрастает монотонно и вместе с (108) достигает наименьшего значения при $\omega = 0$, то одним из гарантирующих будет регулятор (109), а наиболее неблагоприятным возмущающим воздействием будет постоянная сила $\varphi(t) = 1$.

6. Если рассматриваемый объект управления не относится ни к одному из этих классов, то спектр $S_\varphi = \delta(\omega - \beta)$ приближенно аппроксимируют одной из дробно-линейных функций

$$S_\varphi = \frac{a_0 + a_1\omega^2 + \ldots + a_p\omega^{2p}}{b_0 + b_1\omega^2 + \ldots + b_q\omega^{2q}}, \tag{161}$$

начиная с малых значений p и q, синтезируют по известным алгоритмам регулятор $u = -W(D)x$, оптимальный для этой аналитической аппроксимации, и проверяют — выполняется ли для функции (52) неравенство (86). Если нет — продолжают расчет, увеличивая p и q в формуле (161) и следя, чтобы выполнялось неравенство Ю. Петрова (73).

Использование данного алгоритма уже иллюстрировалось примерами.

Если неравенство (86) не выполнено и максимум функции (51) достигается при $\gamma \neq \beta$, но $F(\gamma)$ не слишком превосходит $F(\beta)$, то можно оставить найденный регулятор как гарантирующий критерию качества $J = m^2\sigma_x^2 + \sigma_u^2$ значение $J \leq F(\gamma)$ — т. е. немного большее, чем наименьшее из возможных.

§ 8. Гарантирующее управление при учете погрешностей измерения

В предыдущих разделах мы предполагали, что выход объекта управления, функция $x(t)$, измеряется точно. Это допущение приемлемо, если погрешность измерения составляет малую долю от σ_x. Если этого нет, то необходимо считаться с погрешностью измерения, которая обычно является стационарной случайной функцией времени $\psi(t)$, не зависящей от x. Поэтому реально измеряемый выход системы $y(t)$ является суммой двух функций: $y = x + \psi$, где x — не известное нам истинное значение, а ψ — погрешность измерения. В функцию $\psi(t)$ включаются также различные погрешности, помехи и наводки в цепи обратной связи. Реальный регулятор (обратная связь) будет иметь вид:

$$u = -W(D)y \tag{162}$$

где $y = x + \psi$, а функция $\psi(t)$ является стационарным случайным процессом с известным среднеквадратичным значением σ_ψ, или с оценкой $\sigma_\psi \leq \sigma_{\psi\ \max}$, но неизвестным спектром. Такая постановка задачи связана с тем, что оценку среднеквадратичного значения погрешности получить гораздо легче, чем оценку спектра (в частности, оценка среднеквадратичной погрешности часто приводится в паспорте измерительного прибора).

При наличии заметных погрешностей измерения чаще всего именно они определяют предельную точность систем стабилизации и слежения (ограничения на управление в этом случае не существенны). Поэтому за критерий качества следует выбрать величину σ_x, а величину $B(D)u$ можно принять за новое управление (если $B(D)$ — гурвицев полином, то такая замена вполне допустима). Это позволяет систему управления общего вида (132) свести к более простой системе

$$A(D)x = u + \varphi(t) \tag{163}$$

(т. е. к случаю $B(D) = \text{const}$, который затем простым изменением масштаба сводим к $B(D) = 1$).

Для системы (163) рассмотрим следующие вопросы:

- ❒ какие спектры возмущающих воздействий и погрешностей измерения наиболее неблагоприятны, наиболее опасны?
- ❒ какие значения σ_x могут быть гарантированы для любых спектров возмущающих воздействий и погрешностей измерения?

При решении этих вопросов будем опираться на полученную еще в [42] формулу для абсолютного минимума критерия σ_x^2 для объекта управления (163), замкнутого линейной обратной связью (162). Учитывая, что $y = x + \psi$, уравнение замкнутой системы можно записать в виде:

$$[A(D) + W(D)]x = -W(D)\psi + \varphi \tag{164}$$

(поскольку $W(D)y = W(D)x + W(D)\psi$). Если характеристический полином дифференциального уравнения (164) гурвицев, то, используя формулы (33) и (34) и учитывая, что управляющие воздействия и погрешности в измерениях, как правило, взаимно не коррелированы, получим:

$$\sigma_x^2 = \int_0^\infty \frac{S_\psi |W(j\omega)|^2 + S_\varphi}{|A(j\omega) + W(j\omega)|^2} d\omega . \tag{165}$$

Определяя методами вариационного исчисления функцию $W_э(j\omega)$, доставляющую минимум интегралу (165), получаем:

$$W_э(j\omega) = -\frac{1}{A(-j\omega)} \frac{S_\varphi}{S_\psi} \tag{166}$$

(поскольку интеграл (165) не зависит от производной искомой функции $W(j\omega)$, то достаточно взять производную от подынтегрального выражения в интеграле (165) и приравнять ее к нулю: получим формулу (166); анализ достаточных условий подтверждает, что выражение (166) доставляет минимум функционалу (165)).

Подставив (166) в интеграл (165), найдем наименьшее возможное значение σ_x^2:

$$\sigma_{x\min} = \int_0^\infty S_\varphi S_\psi \frac{1}{|A(j\omega)|^2 S_\psi + S_\varphi} d\omega . \tag{167}$$

Теперь для решения вопроса о наихудшем спектре погрешности измерения (а точнее — о наихудшем сочетании спектров S_φ и S_ψ) достаточно решить методами вариационного исчисления задачу о поиске функции $S_\psi(\omega)$, доставляющей максимум интегралу (167) при учете условия

$$\sigma_\psi^2 = \int_0^\infty S_\psi(\omega)d\omega\,. \tag{168}$$

Составляя, согласно правилу решения изопериметрических задач вариационного исчисления, вспомогательную функцию

$$L = \frac{S_\varphi S_\psi}{|A(j\omega)|^2 S_\psi + S_\varphi} + \lambda_0 S_\psi\,,$$

где λ_0 — множитель Лагранжа (постоянное число), решая уравнение Эйлера $\dfrac{\partial L}{\partial S_\psi} = 0$ и определяя потом множитель Лагранжа λ_0 из условия (168), получим:

$$\frac{S_\psi}{S_\varphi} = \frac{\sigma_\psi^2}{\sigma_p^2}\frac{1}{|A(j\omega)|^2}\,, \tag{169}$$

где σ_p^2 — значение σ_x для объекта управления (163) при $u = 0$, т. е. при разомкнутой обратной связи (отсюда и индекс p). Подставив соотношение (169) в формулу (166), получаем следующее выражение для регулятора, оптимального при наиболее неблагоприятном сочетании спектров возмущающего воздействия и погрешности измерений:

$$u = -\frac{\sigma_p^2}{\sigma_\psi^2}A(D)y\,. \tag{170}$$

Замкнув объект управления (163) регулятором (170), убедимся, что поведение замкнутой системы описывается уравнением

$$A(D)x = \frac{\sigma_\psi^2}{\sigma_p^2 + \sigma_\psi^2}\varphi - \frac{\sigma_p^2}{\sigma_p^2 + \sigma_\psi^2}A(D)\psi\,, \tag{171}$$

у которого характеристический полином совпадает с полиномом $A(D)$ в формуле (163). Следовательно, если этот полином гурвицев, то предположение, которое мы ввели при выходе формулы (165), выполнено и все дальнейшие преобразования и выкладки справедливы. Вычисляя значение σ_x^2 для замкнутой системы (171), получаем:

$$\sigma_x^2 = \frac{\sigma_p^2 \sigma_\psi^2}{\sigma_p^2 + \sigma_\psi^2}. \tag{172}$$

Формула (172) показывает, что при выборе обратной связи в виде (170) значение σ_x^2 возрастает при увеличении σ_p^2, для которой имеет место формула:

$$\sigma_p^2 = \int_0^\infty S_\varphi(\omega) \frac{d\omega}{|A(j\omega)|^2}. \tag{173}$$

Величина σ_p^2 будет наибольшей и равной $\sigma_{p\max}^2$ тогда, когда $S_\varphi = \delta(\omega - \beta)$, где β — частота, при которой достигает наименьшего значения функция $|A(j\omega)|^2$. Имеет место простое соотношение:

$$\sigma_{p\max} = \frac{1}{|A(j\beta)|}. \tag{174}$$

Учитывая, что σ_x^2 возрастает с ростом σ_p^2, можно записать:

$$\sigma_{x\ \text{гар}} = -\frac{\sigma_{p\max} \sigma_\psi}{\sqrt{\sigma_{p\max}^2 + \sigma_\psi^2}}, \tag{175}$$

где $\sigma_{x\ \text{гар}}$ — это гарантированное значение критерия σ_x, которое с помощью регулятора

$$u_{\text{гар}} = -\frac{\sigma_{p\max}^2}{\sigma_\psi^2} A(D) y \tag{176}$$

можно гарантировать для любого, самого неблагоприятного, сочетания спектров возмущающего воздействия и погрешностей измерения.

Отметим, что регулятор (176) является только одним из гарантирующих. Пользуясь изложенной ранее методикой, можно искать другие гарантирующие регуляторы, более удобные в реализации, но обеспечивающие те же значения критерия качества (175).

Рассмотренную нами проблему можно трактовать и как дифференциальную игру трех лиц, в которой первый «игрок», распоряжающийся спектром возмущающего воздействия, и второй «игрок», распоряжающийся спектром погрешностей в измерении, могут вступать в коалицию против третьего «игрока» — конструктора регулятора. Получаем известную из теории игр [4] дифференциальную коалиционную игру трех лиц. Хотя в теории дифференциальных игр очень редко удается получить решения в замкнутой форме, для данной «игры» такое решение построено. Действительно, оптимальной стратегией первого «игрока» является выбор спектра $S_\psi = \delta(\omega - \beta)$. Оптимальной стратегией второго «игрока» является (на основании формул (164) и (174)) выбор спектра $S_\psi = \sigma_\psi^2 \delta(\omega - \beta)$, оптимальной стратегией третьего «игрока» (конструктора регулятора) является выбор регулятора

$$u_{\text{гар}} = -\frac{\sigma_{p\max}^2}{\sigma_\psi^2} A(D) y \,. \tag{177}$$

«Цена игры» в данном случае определяется формулой (175), определяющей гарантируемую точность управления.

На практике не менее часто встречается и несколько другая проблема гарантирующего управления, когда спектр возмущающего воздействия нам известен, и нужно определить наихудший спектр погрешности в измерениях и найти гарантирующий регулятор. В такой постановке проблема гарантирующего управления эквивалентна дифференциальной игре уже двух лиц: «игрока», выбирающего S_ψ, и конструктора регулятора. В этом случае оптимальная стратегия первого «игрока» выражается формулой (169), оптимальная стратегия конструктора определяется формулой (170), а цена игры, гарантируемая точность управления, — формулой (172).

Пример 13

Задан объект управления

$$(D + 2)x = u + \varphi(t) \tag{178}$$

и среднеквадратичная погрешность измерения $\sigma_\psi = 0{,}2$. Требуется найти наихудшие спектры возмущающего воздействия и погрешности в измерениях, синтезировать гарантирующий регулятор и найти гарантированное значение σ_x.

<u>РЕШЕНИЕ</u>. Поскольку для объекта (178) будет $|A(j\omega)|^2 = 4 + \omega^2$ и минимального значения квадрат модуля достигнет при $\omega = 0$, то наихудшим спектром S_φ будет $\delta(\omega)$, наихудшим возмущающим воздействием будет постоянная сила, $\varphi(t) = 1$. Следовательно, и наиболее опасной погрешностью в измерениях будет, согласно формуле (165), статическая ошибка, $\psi(t) = 0{,}2$. Поскольку в данном случае $\sigma_{p\max} = 0{,}5$, то гарантирующим будет определяемый по формуле (177) регулятор

$$u = -6{,}25(D + 2)y \tag{179}$$

и он гарантирует, согласно формуле (175), что $\sigma_x \le 0{,}186$.

Пример 14

Для того же объекта управления (178) известен спектр возмущающего воздействия $S_\varphi = \frac{2}{\pi}\frac{2}{4+\omega^2}$ и по-прежнему среднеквадратичная погрешность измерения $\sigma_\psi = 0{,}2$.

Требуется определить наиболее неблагоприятный спектр погрешности в измерениях S_ψ, синтезировать оптимальный регулятор и найти гарантированное значение точности управления.

<u>РЕШЕНИЕ</u>. В данном случае

$$\sigma_p^2 = \int_0^\infty \frac{4}{\pi}\frac{d\omega}{(1+\omega^2)^2} = \frac{1}{6}. \tag{180}$$

Наиболее неблагоприятным спектром погрешности измерения будет определяемый по формуле (169) спектр

$$S_\psi = \frac{0{,}96}{\pi}\frac{1}{(1+\omega^2)^2}. \tag{181}$$

Гарантирующим будет определяемый по формуле (170) регулятор

$$u = -3{,}33(D+2)y \tag{182}$$

и он гарантирует, что $\sigma_x \le 0{,}128$.

Как и следовало ожидать, если «игроки», распоряжающиеся спектрами S_φ и S_ψ, могут вступать в коалицию, то «цена игры» возрастает.

Если спектр возмущающего воздействия фиксирован, равен $S_\varphi = \frac{2}{\pi}\frac{2}{4+\omega^2}$ и против конструктора регулятора «играет» один «игрок», выбирающий наиболее неблагоприятный спектр погрешностей измерения, то $\sigma_x \le 0{,}128$. Если же против конструктора регулятора играют два игрока, выбирающие спектры S_φ и S_ψ, наиболее неблагоприятные для конструктора и способные вступить в коалицию против него, то $\sigma_x \le 0{,}186$.

Перейдем теперь к исследованию объектов управления вида (163), у которых $A(D)$ — не гурвицев полином. Такие объекты без управления не устойчивы и мы можем использовать результаты, уже полученные при исследовании подобных объектов в § 6, где мы убедились, что для подобных объектов гарантирующее управление сводится к тривиальному, к управлению $u = -W(D)x$, где $W(D)$ — полином с большими коэффициентами и такой, что полином $A(D) + W(D)$ является гурвицевым.

При учете погрешностей измерения гарантирующим будет регулятор

$$u = -W(D)y, \qquad (183)$$

где $W(D)$ — полином с теми же свойствами. Чем больше коэффициенты этого полинома, тем ближе гарантированное значение критерия качества приближается к предельному:

$$\sigma_{x\ \text{гар}} = \sigma_{\psi}. \qquad (184)$$

Итак, для систем, не устойчивых без управления, гарантированное значение σ_x выражается формулой (184). Ее можно рассматривать как предельный случай формулы (175). Действительно, если полином $A(D)$ в уравнении (163) не гурвицев, то σ_p не существует и можно считать, что $\sigma_p \to \infty$ (действительно, если у гурвицевого полинома $A(D)$ один из корней стремится к мнимой оси, а затем переходит в правую полуплоскость комплексного переменного, то по мере приближения корня к мнимой оси σ_p^2 возрастает, а в момент перехода корня в правую полуплоскость $\sigma_p \to \infty$). Но при $\sigma_p \to \infty$ формула (175) переходит в формулу (184).

На этом мы заканчиваем рассмотрение теории гарантирующих управлений. Изложенный материал показывает, что разработанный в Петербургском университете вариационный подход к синтезу гарантирующих управлений значительно проще и нагляднее, чем подход на основе теории «H^{∞} управления».

Действительно, при вариационном подходе к гарантирующему управлению предельно простое решение получает важнейшая проблема оценки гарантии — т. е. оценки наивысшей точности стабилизации и слежения достижимой и гарантируемой при заданном ресурсе управления и любых спектрах возмущающего воздействия. Эта предельно достижимая точность легко вычисляется на основе построения разделяющей кривой, параметрические уравнения которой задаются простыми формулами (124) и (125). На основе той же разделяющей кривой легко решается вопрос о ресурсе управления σ_u, необходимом для гарантии заданной точности управления σ_x для любых спектров возмущающих воздействий.

Если объект управления относится к одному из трех, рассмотренных нами и широко распространенных на практике классов, описанных в § 4, то предельно простое решение получает и проблема синтеза управления, реализующего гарантию, проблема синтеза гарантирующего регулятора. Если объекты управления не относятся ни к одному из рассмотренных в § 4 классов, то задача синтеза решается немного сложнее, но все же вполне доступно.

Не менее простое решение, выражаемое элементарной формулой (175), получает и проблема синтеза гарантирующего управления при учете погрешностей измерения, хотя с точки зрения теории игр мы имеем дело с очень трудной проблемой отыскания цены игры для дифференциальной коалиционной игры трех лиц. На основе вариационного подхода [42] эта проблема получила простое решение в виде конечной формулы, опубликованной ранее в [52].

Вариационный подход к синтезу гарантирующих управлений, изложенный в данной главе, может быть использован и для многомерных систем. Но это — пока еще не изученная область, ожидающая своих исследователей.

ГЛАВА 2

Обеспечение устойчивости при вариациях параметров

§ 1. Параметрическая устойчивость

В *главе 2* мы переходим от изучения оптимального управления к более общим вопросам: к проблемам устойчивости, параметрической устойчивости, эквивалентных преобразований и преобразований, сохраняющих корректность решаемых задач. В этой области совсем недавно были получены новые интересные результаты, причем получены они были на основе углубленного анализа задач оптимального управления.

Поскольку параметры систем управления не могут оставаться идеально постоянными и почти всегда наблюдается их малые отклонения (вариации) от номинальных значений, то для успешной работы систем управления необходимо, чтобы они были не просто устойчивы, а сохраняли устойчивость при вариациях параметров.

Свойство системы сохранять устойчивость при вариациях параметров называют коротко параметрической устойчивостью.

Мы будем различать номинальные значения коэффициентов и параметров математической модели системы управления (будем обозначать их $a_н$) и проварьированные значения:

$$a_в = a_н(1 + \varepsilon), \qquad (1)$$[1]

где ε — числа, малые в сравнении с единицей (они могут быть и положительными и отрицательными). Числа ε, как правило, неизвестны нам и отражают неточность любого измерения параметра $a_н$, его неизбежный малый дрейф с течением времени и т. п. Величины $\varepsilon a_н$ будем называть вариациями параметров.

[1] По настоянию автора со 2-й главы нумерация формул начинается заново. — *Прим. ред.*

Принятое нами определение вариаций через равенства (1) говорит о том, что мы будем изучать влияние относительных изменений коэффициентов и параметров, а не абсолютных. Если номинальное значение какого-либо коэффициента равно нулю, то и вариация его тоже будет нулем. Нуль не варьируется. Случаи, когда коэффициент $a_н = 0$ заменяется на не равную нулю величину (даже сколь угодно малую), мы рассматривать не будем. Нашему определению вариации этот случай не удовлетворяет.

В дальнейшем мы будем рассматривать почти исключительно линейные системы управления с постоянными коэффициентами (точнее — системы, в которых номинальные значения коэффициентов (значения $a_{iн}$) постоянны). Как известно, для таких систем решения для любых начальных условий либо устойчивы и устойчивы асимптотически (т. е. при $t \to \infty$ будет $x_i(t) \to 0$), либо для любых начальных условий решения неустойчивы. Поэтому для линейных систем исследуют не устойчивость решений, а устойчивость системы в целом и различают системы устойчивые и системы не устойчивые. Для нелинейных систем решение может быть устойчивым для одних начальных условий и неустойчивым — для других. Поэтому для нелинейных систем исследуют устойчивость конкретного решения.

Исследование устойчивости линейных систем с постоянными коэффициентами затруднений не представляет: в математической модели системы управляющее воздействие рассматриваем как дополнительное переменное, оператор дифференцирования $D = d/dt$ заменяем на число λ, затем вычисляем характеристический полином системы и его корни. Если все корни имеют отрицательные вещественные части, то система устойчива.

Пример

Объект управления

$$x_1'' + 4x_1' + x_1 = u \tag{2}$$

замкнут регулятором

$$u' + u = x_1 \, . \tag{3}$$

Обозначив $u = x_2$, сведем систему (2) и (3) к виду:

$$\begin{cases} (D^2 + 4D + 1)x_1 = x_2 \\ (D+1)x_2 = x_1 \end{cases} \tag{4}$$

Характеристический полином Δ системы (4) будет являться определителем полиномиальной матрицы системы (4):

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda^2 + 4\lambda + 1 & -1 \\ 1 & -(\lambda + 1) \end{vmatrix} = -(\lambda^3 + 5\lambda^2 + 5\lambda)\,. \tag{5}$$

Характеристический полином (5) имеет нулевой корень: это говорит о том, что система управления (2) и (3) — неустойчива. Если же изменить знак в правой части уравнения регулятора (3) — т. е. заменить положительную обратную связь на отрицательную, то характеристический полином примет вид

$$\Delta = -(\lambda^3 + 5\lambda^2 + 5\lambda + 2)$$

и замкнутая система станет устойчивой.

Особенно просто проверяется устойчивость, если уравнения системы управления приведены к нормальной форме Коши:

$$x' = Ax\,, \tag{6}$$

где x — n-мерный вектор переменных, A — квадратная размера $n \times n$ матрица коэффициентов. В этом случае корни характеристического полинома системы (6) совпадают с собственными значениями матрицы A — т. е. совпадают с корнями определителя матрицы

$$(A - \lambda E), \tag{7}$$

где E — единичная матрица (т. е. матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице, а все остальные элементы — нули). Следовательно, если система управления приведена к нормальной форме Коши, то для вычисления корней можно использовать хорошо разработанные методы вычисления собственных значений матриц и их программное обеспечение.

Поскольку в современных сложных системах управления порядок уравнений, описывающих систему, может быть велик, то уравнения системы всегда стараются привести к нормальной форме Коши, что позволяет использовать для вычисления корней характеристического полинома уже готовые стандартные программы. Приведение к нормальной форме Коши легко реализуется введением новых переменных. Так, например, если в системе (2) и (3) ввести новую переменную $x_2 = x_1'$ и обозначить $u = x_3$, то уравнения (2) и (3) могут быть записаны в нормальной форме

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 - 4x_2 + x_3 \\ x_3' = x_1 - x_3 \end{cases} \tag{8}$$

и задача вычисления корней характеристического полинома системы уравнений (2) и (3) совпадает со стандартной задачей вычисления собственных значений матрицы:

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 1 & \lambda+4 & 1 \\ -1 & 0 & \lambda+1 \end{pmatrix}.$$

Заметим еще, что поскольку в системах управления часто применяют регуляторы без производных, то в этих случаях вычисление корней характеристического полинома сводится к обобщенной задаче о собственных значениях матрицы A — т. е. к вычислению определителей матриц

$$\left(A-\lambda\overline{E}\right), \tag{9}$$

где $\overline{E}$ — не единичная, а квазиединичная матрица, т. е. матрица, у которой на главной диагонали стоят r нулей и n-r единиц, а все остальные элементы — нули.

Так, если объект управления (2) замкнут не регулятором (3), а простым пропорциональным регулятором $u=-2x_1$, то вместо определителя системы (8) нужно будет вычислить определитель системы

$$\begin{cases} x_1'=x_2 \\ x_2'=-x_1-4x_2+x_3 \\ 0=2x_1+3 \end{cases} \tag{10}$$

Этот определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -1 & -4-\lambda & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\lambda^2+4\lambda+3 \tag{11}$$

имеет корни $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=-3$. Замкнутая система устойчива. В целом переход от единичной матрицы E к квазиединичной матрице $\overline{E}$ не вносит затруднений в вычисления.

Перейдем теперь к методике оценки параметрической устойчивости систем управления. Традиционная методика заключается в вычислении корней характеристического полинома замкнутой системы. Если эти корни лежат в левой полуплоскости комплексного переменного далеко от мнимой оси (т. е. их вещественные части велики по абсолютной величине и отрицательны), то традиционно делался вывод: замкнутая система параметрически устойчива и обладает хорошим запасом устойчивости при неизбежных в ходе эксплуатации вариациях параметров.

Этот вывод опирался на известную теорему о непрерывной зависимости корней полинома от его коэффициентов. Из этой теоремы следует, что если отклонения коэффициентов характеристического полинома от номинальных значений являются малыми, то и его корни изменятся мало, не смогут перейти из левой полуплоскости комплексного переменного в правую и система управления должна сохранить устойчивость. На этом соображении основывались расчеты параметрической устойчивости во всех проектно-конструкторских организациях как в России, так и за рубежом. При этом не учитывались особые случаи, о которых далее будет рассказано.

После 1978 года оживились расчеты параметрической устойчивости при не только малых, но и больших отклонениях параметров объекта управления или регулятора от номинальных значений. Расчеты велись следующим образом: сперва устанавливали, в какой мере отклонения реальных параметров системы управления влияют на коэффициенты ее характеристического полинома. Пусть, например, характеристический полином имеет степень n:

$$\Delta = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0 \tag{12}$$

и каждый из его коэффициентов заключен в пределах

$$a_i - \varepsilon_i \le a_i \le a_i + \varepsilon_i. \tag{13}$$

Далее нужно установить: будут ли гурвицевыми все полиномы вида (12), коэффициенты которых заключены в пределах (13). До 1978 года считали, что для этого нужно проверить 2^{n+1} полиномов, ибо таково число сочетаний полиномов с положительными и отрицательными вариациями каждого из его $n+1$ коэффициентов. В 1978 году в публикации [64] молодой ученик В. И. Зубова, сотрудник факультета прикладной математики — процессов управления Санкт-Петербургского (тогда еще Ленинградского) университета В. Л. Харитонов, доказал важную теорему, которая открыла путь к существенному сокращению вычислений: оказалось достаточным проверять не 2^{n+1}, а всего четыре особым образом составленных полинома.

Теорема В. Л. Харитонова получила широкую известность и заслуженное признание, однако и она сводит вопрос о параметрической устойчивости к исследованию характеристического полинома. Всегда ли достаточно такое исследование? Неожиданно оказалось, что нет, недостаточно, поскольку обнаружилось существование систем управления с одним и тем же характеристическим полиномом, но различающихся по параметрической устойчивости.

§ 2. Неожиданности и парадоксы

С неожиданностями и парадоксами при проверке параметрической устойчивости столкнулись в области синтеза оптимальных систем управления.

Еще в 1960 году А. М. Летов [30] установил, что для линейных объектов управления, математической моделью которых является векторно-матричное уравнение:

$$x' = Ax + Bu \tag{14}$$

(где x — n-мерный вектор, B — вектор-столбец, u — управление, скаляр) минимум квадратичного критерия качества доставляет линейный регулятор вида

$$u = kx, \tag{15}$$

где k — вектор-строка. Тот же самый регулятор доставляет минимум и среднеквадратичному критерию качества, если возмущающее воздействие на объект управления является «белым шумом». Методика выбора коэффициентов k_i в регуляторе (15), обеспечивающих устойчивость замкнутой системы и минимум критерия качества, достаточно подробно изложена в [26; 29; 37; 62]. Дополнительные расчеты показали, что регуляторы вида (15), обеспечивающие хорошие переходные процессы, обеспечивают и параметрическую устойчивость замкнутой системы. Однако на практике часть переменных x_1; x_2, ..., x_n объекта очень часто неизмерима и не может быть непосредственно использована в канале обратной связи. Вообще-то в этом нет ничего сложного: если мы хотим сохранить те же переходные процессы в замкнутой системе, хотим сохранить то же значение критерия качества, то мы можем просто исключить не измеряемые переменные из регулятора (15) путем эквивалентных преобразований и заменить их на измеряемые переменные и их производные. Во *введении* мы уже демонстрировали подобные преобразования на примере объекта управления (7) из *введения* замкнутого регулятором (9). Если переменные x_2 и x_3 неизмеримы, то исключив их путем эквивалентных преобразований, придем к уравнениям (1) и (2), которые имеют те же решения (5), что и уравнения (7)—(9). В то же время система уравнений (1) и (2) в отличие от системы (7)—(9) не обладает параметрической устойчивостью — *см. введение*.

Покажем теперь, что этот пример не единичен, что подобные примеры, когда эквивалентные системы, имеющие один и тот же характеристический полином, различаются по параметрической устойчивости, могут встречаться систематически.

Рассмотрим объект управления третьего порядка:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1u \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + b_2u \\ x_3' = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + b_3u \end{cases} \tag{16}$$

с квадратичным критерием качества

$$J = \int_0^\infty (m^2x_3^2 + u^2)dt\ . \tag{17}$$

Известно, что минимум критерию (17) обеспечит регулятор вида

$$u = -k_1x_1 - k_2x_2 - k_3x_3, \tag{18}$$

в котором коэффициенты k_1, k_2, k_3 вычисляются по методике, изложенной, например, в [37; 68]; замкнутая система, состоящая из объекта управления (16) и регулятора (18), параметрически устойчива. Пусть теперь x_1 и x_2 неизмеримы. Исключив x_1 и x_2 из уравнений (16), мы приведем их к виду

$$A(D)x_3 = B(D)u, \tag{19}$$

где:

$$A(D) = \begin{vmatrix} a_{11} - D & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - D & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - D \end{vmatrix} \tag{20}$$

является полиномом третьей степени, а

$$B(D) = \begin{vmatrix} a_{11} - D & a_{12} & -b_1 \\ a_{21} & a_{22} - D & -b_2 \\ a_{31} & a_{32} & -b_3 \end{vmatrix} \tag{21}$$

является полиномом второй степени. Определитель (21) отличается от определителя (20) тем, что в нем последний столбец заменен на столбец коэффициентов при управлении.

Найдем теперь регулятор, использующий только переменную x_3 (и, если надо, ее производные) и обеспечивающий — как и регулятор (18) — минимум критерия качества (17).

Используя формулы (69)—(72), приведенные в *главе 1*, мы устанавливаем, что оптимальный регулятор, доставляющий минимум критерию (67) имеет вид

$$W_1(D)x_3 = W_2(D)u, \tag{22}$$

где полином $W_1(D)$ является полиномом второй степени, а $W_2(D)$ — первой (действительно, в нашем случае $n = 3$, $m = 2$, $p = 0$, $q = 0$; используя формулы (69) и (70), находим степени полиномов $W_1(D)$ и $W_2(D)$).

Характеристический полином замкнутой системы (объекта управления (19) замкнут регулятором (22)) будет равен определителю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} A(D) & -B(D) \\ W_1(D) & -W_2(D) \end{vmatrix} = W_1(D)B(D) - A(D)W_2(D), \tag{23}$$

а поскольку его степень должна быть равна трем, то это означает, что в произведениях $A(D)W_2(D)$ и $B(D)W_1(D)$ старшие члены (члены с четвертой степенью D) равны друг другу и взаимно сокращаются. Конкретный пример такого сокращения мы уже видели в системе уравнений (1) и (2) из *введения*. Полиномы $A(D)$, $B(D)$, $W_1(D)$ и $W_2(D)$ имели в ней значения

$$A(D) = D^3 + 4D^2 + 5D + 2$$

$$B(D) = D^2 + 2D + 1$$

$$W_1(D) = D^2 + 4D + 5$$

$$W_2(D) = (D + 1)$$

Произведения $A(D)W_2(D)$ и $B(D)W_1(D)$ являются полиномами четвертой степени, но члены, содержащие D^4, были равны; они сокращались и характеристический полином становился полиномом третьей степени

$$\Delta = B(D)W_1(D)\text{-}A(D)W_2(D) = D^3 + 5D^2 + 7D + 3 = (D + 3)(D + 1)^2,$$

имеющим три корня $D_1 = -3$, $D_2 = D_3 = -1$, лежащих в левой полуплоскости далеко от мнимой оси. Следуя традиционным методам проверки параметрической устойчивости, мы должны признать систему уравнений (1) и (2) из *введения* параметрически устойчивой.

На самом деле это не так. Даже сколь угодно малые вариации параметров объекта управления или регулятора могут привести к тому, что сокращение старших членов в характеристическом полиноме не произойдет, его четвертый корень может оказаться положительным. Система уравнений (1) и (2) из *введения* параметрической устойчивостью не обладает. Кроме того, мы теперь убедились, что не обладают параметрической устойчивостью и все системы, состоящие из объекта управления (19) и оптимального регулятора (22), обеспечивающего (как и регулятор (18)) минимум критерия (17).

Необычность ситуации заключается в том, что система уравнений (1) и (2) из *введения* эквивалентна системе (7)—(9), обладающей параметрической устойчивостью и эти системы переходят одна в другую после эквивалентных преобразований. Точно так же в общем случае система (16)—(18), параметрически устойчивая, эквивалентна системе (19)—(22), параметрически не устойчивой.

Таким образом, мы убедились в совершенно реальном (и не таком уж редком) существовании явления, которое долгое время казалось неожиданным и парадоксальным: эквивалентные преобразования способны изменить параметрическую устойчивость.

По-видимому, первый пример системы, изменяющей параметрическую устойчивость, привел в 1973 году в публикации [35] П. В. Надеждин, однако существо явления тогда, в 1973 году, еще совершенно не было понято, несмотря на возникшую после публикации [35] дискуссию. П. В. Надеждин считал, что после преобразований изменяется «грубость» системы, но это не так. Важное в теории управления, в теории колебаний и в других областях приложений понятие «грубые системы» было введено в [6]. «Грубыми» назывались там описываемые дифференциальными уравнениями системы, которые не меняют существенно своего поведения при вариациях параметров — с оговоркой, что эти вариации не меняют порядка дифференциальных уравнений, описывающих систему. Эта оговорка очень существенна. Если ее не делать, то вообще вряд ли можно найти пример «грубой системы», «грубого» объекта, — поскольку при вариациях параметров, приводящих к изменению порядка дифференциальных уравнений, поведение системы обязательно меняется.

В последние годы вместо термина «грубость» стал использоваться английский термин «робастность» — от английского слова *robust* — т. е. «крепкий, здоровый». «Робастными» так же называют системы, не изменяющие своего поведения при вариациях параметров с той же подразумеваемой оговоркой: эти вариации не должны изменять порядка дифференциальных уравнений системы. Если этой оговорки не делать, то вряд ли можно будет привести пример хотя бы одной робастной системы.

В то же время в системе уравнений (1) и (2) из *введения* и в общем случае в системах (19)—(22) при вариациях параметров изменяется порядок. Это говорит о том, что в системах, подобных (19)—(22), происходит встреча с новым явлением, не вписывающимся в привычные схемы «грубых» и «не грубых», «робастных» и «не робастных» систем.

Суть неожиданности и парадоксальности нового явления заключается в том, что открылись новые черты в привычном, известном со средней школы и используемом на каждом шагу понятии эквивалентных преобразований. Это понятие оказалось совсем не таким простым, как кажется, и нуждается в более углубленном изучении.

(Заметим, что с изменением параметрической устойчивости — и тоже не понимая еще сущности данного явления — столкнулись ранее при исследовании устойчивости по части переменных [23]; поэтому материал настоящей главы можно рассматривать как продолжение и дальнейшее развитие исследований В. И. Зубова.)

§ 3. Эквивалентные преобразования и эквивалентность в расширенном смысле

Эквивалентные (их называют еще «равносильными») преобразования — это известные еще со средней школы преобразования, не изменяющие решений поставленной задачи. Примеры эквивалентных преобразований: перенос членов уравнения из левой части в правую и обратно с изменением знака, умножение всех членов на число, не равное нулю, подстановка вместо любого члена равного ему выражения и т. п.

Когда в 70-х годах обнаружилось, что эквивалентные преобразования могут изменять параметрическую устойчивость, то это долгое время казалось неожиданным и не имеющим объяснения. Лишь позже, в монографии [45] был поставлен вопрос: а что, собственно, на самом деле означает утверждение: все решения некоторой системы — например, — простейшей системы:

$$x' + x = 0 \tag{24}$$

параметрически устойчивы?

Ведь на самом деле это не суждение о системе (24), а суждение об ее окрестности (окрестности в пространстве коэффициентов и параметров), т. е. суждение о семействе систем

$$(1 + \varepsilon_1)x' + (1 + \varepsilon_2)x = 0\,, \tag{25}$$

где ε_1 и ε_2 малы в сравнении с единицей. Все решения системы (24) параметрически устойчивы тогда и только тогда, когда асимптотически устойчивы все решения семейства (25). Поэтому нет ничего удивительного в том, что эквивалентные преобразования, не меняющие решений самой преобразуемой системы, совсем не обязаны не менять свойств ее окрестности.

Здесь как раз и проявляется существенное различие между устойчивостью (для определенности в дальнейшем будем говорить об устойчивости линейной системы с постоянными коэффициентами) и параметрической устойчивостью: устойчивость — это свойство самой системы, параметрическая устойчивость — это свойство ее окрестности. Поэтому при проверке устойчивости можно пользоваться эквивалентными преобразованиями, при проверке параметрической устойчивости безоглядно делать это уже нельзя.

Это важное различие не замечалось так долго только потому, что оно проявляется редко. Чаще всего при эквивалентных преобразованиях параметрическая устойчивость сохраняется. Но «часто сохраняется» не означает «всегда сохраняется». Вы уже видели примеры, когда эквивалентные преобразования изменяли параметрическую устойчивость.

Для избежания ошибок в работах [51; 53] было предложено ввести новое математическое понятие — понятие преобразований, эквивалентных в расширенном смысле.

Преобразования, эквивалентные в расширенном смысле, — это те преобразования, которые:

- во-первых, эквивалентны в обычном, классическом смысле, т. е. не изменяют решений рассматриваемой задачи;

- во-вторых, не изменяют корректности решаемой задачи и в частном случае — не изменяют параметрической устойчивости преобразуемой системы. Мы далее покажем, что изучаемое нами явление изменения параметрической устойчивости при эквивалентных (в классическом смысле) преобразованиях уравнений является частным случаем более общего явления — изменения корректности решаемой задачи в ходе преобразований, используемых при ее решении. О корректных и некорректных задачах будет рассказано в последующих разделах.

Рассмотренные примеры показывают, что существуют преобразования, эквивалентные в классическом смысле, но не в расширенном. В то же время исследование корней характеристического полинома дает достоверный ответ только в том случае, если характеристический полином был получен из исходных уравнений системы с помощью преобразований, эквивалентных в расширенном смысле.

§ 4. Гарантирует ли существование функции Ляпунова сохранение устойчивости при сколь угодно малых вариациях параметров?

Устойчивость линейных систем с постоянными коэффициентами проверяются по характеристическому полиному. Более общим методом исследования устойчивости, пригодным как для линейных, так и для нелинейных систем является второй метод Ляпунова, основанный на построении функции Ляпунова. Этот метод был разработан великим русским ученым А. М. Ляпуновым и опубликован в 1892 году в [31].

Второй метод Ляпунова подробно изложен, например, в [23], поэтому мы напомним коротко самые основные положения. Пусть задана система уравнений в нормальной форме Коши:

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1;...x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' = f_n(x_1;....x_n) \end{cases}, \tag{26}$$

где $f_i(x_1;....x_n)$ — в общем случае нелинейные функции. Пусть система (26) имеет нулевое решение: $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$. Введем в рассмотрение функцию V переменных x_1; x_2; ..., x_n, которая равна нулю, когда все x_i равны нулю и положительна при всех других значениях переменных. Примером может служить, например, функция $V = x_1^2 + ... + x_n^2$. Вычислим теперь полную производную по времени функции V на решениях системы (26) или (следуя терминологии, принятой в теории управления) вычислим производную функции V «в силу системы» (26). Для этого, пользуясь известной формулой для полной производной

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}$$

подставим вместо каждой из производных dx_i/dt ее значение из уравнений (26). Получим для производной «в силу системы» формулу

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} f_1(x_1;\ldots x_n) + \ldots + \frac{\partial V}{\partial x_n} f_n(x_1;\ldots x_n)\,. \tag{27}$$

Если функция V такова, что производная (27) для всех $x_i \neq 0$ отрицательна, то такую функцию называют функцией Ляпунова.

Если такая функция существует, то, как доказано А. М. Ляпуновым, нулевое решение системы (26) асимптотически устойчиво. Таким образом, если доказано существование функции Ляпунова, то вопрос об устойчивости решен. Найти функцию Ляпунова нелегко, поскольку общих методов отыскания ее в настоящее время не известно. Только для линейных систем доказано, что если характеристический полином системы гурвицев, то функция Ляпунова обязательно существует в виде квадратичной формы переменных $x_1 \ldots x_n$. Поиску функции Ляпунова посвящено очень большое число исследований, поскольку отыскание такой функции решает сразу важнейший вопрос об устойчивости.

Однако фактически нас всегда интересует не просто устойчивость, а сохранение устойчивости при вариациях параметров. Поскольку вариации параметров, малый их дрейф неизбежны, то систему устойчивую, но теряющую устойчивость при сколь угодно малых вариациях параметров, по-настоящему устойчивой считать нельзя.

Поэтому поставим вопрос: гарантирует ли существование функции Ляпунова сохранение устойчивости хотя бы при сколь угодно малых вариациях параметров? К сожалению, ответ на этот вопрос может быть только отрицательным. Действительно, рассмотрим систему уравнений (1) и (2) из *введения*. После приведения ее к форме Коши получим уравнения замкнутой системы (10). Поскольку характеристический полином замкнутой системы гурвицев, то для системы (10) существует, как известно, функция Ляпунова. В то же время исходная система уравнений (1) и (2) хотя и устойчива, но теряет устойчивость при сколь угодно малых вариациях некоторых параметров.

Таким образом, мы установили, что ни хорошие корни характеристического полинома, ни существование функции Ляпунова не гарантирует от потери устойчивости при сколь угодно малых вариациях параметров. Никакое исследование характеристического полинома или функции Ляпунова не может дать надежного ответа на вопрос о сохранении устойчивости, поскольку существуют системы с одним и тем же характеристическим полиномом, с одной и той же матрицей коэффициентов при записи в форме Коши, с одной и той же функцией Ляпунова, но различающиеся по свойству сохранения устойчивости при вариациях параметров. Это свойство может появляться и исчезать при эквивалентных (в классическом смысле) преобразованиях математической модели исследуемого объекта. Теории Ляпунова это не противоречит, все теоремы Ляпунова, разумеется, верны, но практическую применимость и первого и второго методов Ляпунова это недавно обнаруженное обстоятельство ограничивает. Для того чтобы теория устойчивости давала правильные ответы на важные для практики вопросы о сохранении устойчивости, она должна быть дополнена теорией преобразований, эквивалентных в расширенном смысле.

§ 5. Практические приложения

Из материала, изложенного в § 1—4, вытекают следующие выводы:

- Никакое исследование характеристического полинома или матрицы коэффициентов нормальной формы Коши не может всегда, во всех случаях дать правильный ответ на вопрос о параметрической устойчивости исследуемой системы — поскольку существуют системы с одним и тем же характеристическим полиномом, одной и той же матрицей коэффициентов нормальной формы, но различающиеся по свойству параметрической устойчивости.
- Существование у исследуемой системы функции Ляпунова так же не гарантирует параметрической устойчивости, т. е. сохранения устойчивости исследуемого решения при вариациях параметров.
- Традиционные методы проверки параметрической устойчивости и запасов устойчивости без дополнительных расчетов, без проверки использованных преобразований на эквивалентность в расширенном смысле не гарантируют правильного ответа, не страхуют от ошибок.

В то же время ошибки в расчетах параметрической устойчивости и расчетах запасов устойчивости гораздо опаснее, чем просто ошибка в расчетах устойчивости. Если неустойчивая система по расчету признана устойчивой, то это сразу выявится на испытаниях и неустойчивая система будет забракована. Гораздо опаснее, если система устойчива, но параметрически неустойчива, имеет малые запасы устойчивости по вариациям параметров, и поэтому может потерять устойчивость при малых отклонениях параметров от номинальных значений. Такая система вполне может успешно пройти испытания, после испытаний может быть установлена на ответственном объекте и будет неопределенно долгое время исправно работать, ничем не проявляя заложенную в ней опасность. Затем при неизбежном в ходе эксплуатации «дрейфе» параметров в совершенно непредвиденный момент времени устойчивость системы потеряется, и это сразу создаст аварийную ситуацию, которая может перерасти в аварию и даже катастрофу. Есть основания полагать, что некоторые из знаменитых катастроф последних лет имели под собой именно эту причину — ошибки в расчете параметрической устойчивости (более подробно различные аварии и катастрофы, связанные с ошибками расчета, с неверными оценками запасов устойчивости, рассмотрены в монографии [53]).

Таким образом, в отличие от устойчивости как таковой, параметрическую устойчивость трудно выявить на испытаниях. Нужно полагаться на расчет. (Иногда утверждается, что параметрическая устойчивость выявляется, если при испытаниях проводить «покачивание» всех параметров; однако возможны случаи, когда устойчивость теряется лишь при определенных сочетаниях положительных и отрицательных вариаций различных параметров; число таких сочетаний в сложных системах очень велико и «покачивание» параметров в этом случае не поможет.)

Поэтому нужно с особым вниманием относиться к расчету параметрической устойчивости, к обоснованности и надежности методов расчета. Надо помнить, что надежность расчета не может быть гарантирована без проверки использованных преобразований на эквивалентность в расширенном смысле. Заметим, что в прежние годы, до широкого использования быстродействующих вычислительных машин, инженеры при анализе устойчивости использовали расчет «по реальным выходам» без преобразования уравнений к нормальной форме Коши и поэтому ошибок и связанных с ними аварий не возникало. При расчетах на программируемых вычислительных машинах желательно, разумеется, использовать стандартное программное обеспечение, которое составляется для стандартной формы записи уравнений, для нормальной формы Коши. К этой форме и стали преобразовывать уравнения систем управления, пользуясь для этого, конечно, только эквивалентными (в классическом смысле) преобразованиями. То, что преобразования, эквивалентные в классическом, но не в расширенном смысле могут изменить параметрическую устойчивость исследуемых систем управления, было обнаружено совсем недавно [45; 47; 48; 53].

Теперь, когда возможность опасных ошибок известна, избежать их можно различными методами:

- Можно вычислять характеристический полином для уравнений, записанных в реально измеримых переменных на выходе объекта управления, не прибегая к преобразованию в нормальную форму.

- ❒ Можно использовать методику проверки параметрической устойчивости, предложенную в учебном пособии [45] на стр. 212—230.
- ❒ Можно использовать несложный метод «матриц степеней», описанный в [53] на стр. 74—79.
- ❒ Когда будет разработана теория преобразований, эквивалентных в расширенном смысле, можно будет просто проверить использованные преобразования на эквивалентность в расширенном смысле.

Подчеркнем, что если возможность изменения параметрической устойчивости при эквивалентных преобразованиях осознана, то избежать ошибки нетрудно. Опасна неожиданная для расчетчика встреча с преобразованием, эквивалентным в классическом смысле, но не в расширенном, опасно незнание, или нежелание учесть уж опубликованные предостережения о неполноте, недостаточности традиционных методов расчета. В наиболее авторитетном российском журнале по управлению, в «Автоматике и телемеханике», предостережения были опубликованы в 1994 году в [48], а до этого они три года обсуждались с редакцией журнала и опытными специалистами. После опубликования статьи [48] развернулась дискуссия [16; 55] подтвердившая обоснованность предостережений, высказанных в [48]. Еще раз обоснованность выводов работ [47; 48; 51; 53] была подтверждена публикацией [76] в наиболее авторитетном научном журнале России — «Докладах Академии наук».

Существование преобразований, эквивалентных в классическом смысле, но не в расширенном, было обнаружено так поздно потому, что свойства этих преобразований достаточно сложны и запутаны. Вернемся к объекту управления (16), замкнутому регулятором (18). Заменим оператор дифференцирования на число λ и запишем систему (16)—(18) в виде однородной линейной системы четырех алгебраических уравнений с четырьмя переменными x_1, x_2, x_3 и u:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1u = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + a_{23}x_3 + b_2u = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + (a_{33}-\lambda)x_3 + b_3u = 0 \\ k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3 + u = 0 \end{cases} \qquad (28)$$

Для отыскания показателей экспонент λ_1, λ_2, λ_3, образующих общее решение системы уравнений (16)—(18), достаточно составить определитель системы (28):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda & b_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 & 1 \end{vmatrix} \qquad (29)$$

и найти его корни λ_1, λ_2, λ_3. Задача вычисления этих корней методом разложения определителя по минорам последней строки — корректна. Корни не меняются существенно при вариациях коэффициентов.

Если переменные x_1 и x_2 неизмеримы, то их надо исключить из системы (28) путем эквивалентных преобразований. Простейший способ исключения — исключение x_1 из первого уравнения системы (28) путем умножения первого из уравнений (28) на $-a_{21}$, второго — на $a_{11} - \lambda$ и сложения и затем повторения аналогичных операций со вторым и третьим из уравнений (28), потом — с третьим и четвертым. После исключения x_1 и x_2 приходим относительно x_3 и управления u к уравнениям

$$\begin{aligned} &A(D)x_3 = B(D)u, \\ &M(D)x_3 = N(D)u. \end{aligned} \tag{30}$$

Первое из уравнений (30) полностью совпадает с ранее полученным нами уравнением (19), где полиномы $A(D)$ и $B(D)$ равны определителям (20) и (21), а второе из уравнений (30) может совпадать с ранее полученным нами другим способом уравнением (22), но может и не совпадать. В общем случае при $a_{31} \neq 0$ совпадения как раз нет. При $a_{31} \neq 0$ полином $M(D)$ оказывается полиномом третьей степени, полином $N(D)$ — второй степени. Характеристический полином системы (30) имеет вид

$$\Delta = B(D)M(D) - A(D)N(D) \tag{31}$$

и является полиномом четвертой степени, поскольку члены с четвертой степенью D в произведениях $B(D)M(D)$ и $A(D)N(D)$ не равны друг другу и не сокращаются. Это говорит о том, что полином (31) имеет лишний корень λ_4, не являющийся собственным значением для системы (28). Только после исключения этого лишнего корня мы получим истинные собственные значения λ_1, λ_2, λ_3, причем при $a_{31} \neq 0$ задача вычисления собственных значений для системы (28) путем последовательного исключения переменных — корректна, при вариациях параметров системы (30) корни в общем случае при $a_{31} \neq 0$ меняются мало.

Пример

Система

$$\begin{cases} x_1' = x_2 + x_3 + u \\ x_2' = x_1 + x_3 + u \\ x_3' = x_1 + x_2 + 2u \\ u = -x_1 - x_2 - x_3 \end{cases} \tag{32}$$

имеет характеристический полином

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2) = -(\lambda + 1)^2(\lambda + 2) \qquad (33)$$

с корнями $\lambda_1 = -2$; $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$.

Вычисляя полиномы, входящие в формулы (30), получаем:

$A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2$

$B(\lambda) = 2\lambda^2 + 2\lambda$

$M(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1$

$N(\lambda) = -(\lambda + 1)$

Вычисляя полином (31), получаем

$$\Delta = \lambda^4 + 5\lambda^3 + 6\lambda^2 + 7\lambda + 2 = (\lambda + 2)(\lambda + 1)^3 \qquad (34)$$

и мы убеждаемся, что один корень $\lambda_4 = -1$ является лишним. После сокращения на множитель $\lambda + 1$ получаем истинные корни λ_1, λ_2, λ_3.

При исследовании систем управления использование исключения измеряемых переменных описанным нами путем неудобно, поскольку мы приходим к уравнениям объекта управления и регулятора (30), которые, хотя и записаны только в измеряемых переменных, но в замкнутой системе, построенной на основе математической модели (30), переходные процессы не будут совпадать с переходными процессами исходной системы (16)—(18) за счет появления лишнего корня в характеристическом полиноме. Поэтому в [35] был предложен другой метод исключений переменных: левую и правую части первого из уравнений (16) домножают на $r_1 + r_2D$, второго — на $s_1 + s_2D$, третьего — на $t_1 + t_2D$, где все r_1, r_2, ..., t_2 — подлежащие определению коэффициенты. После этого все три уравнения складываются, и к сумме прибавляется уравнение (18). В результате получалась зависимость между управлением, переменными x_1, x_2, x_3 и их производными, и в этой зависимости неизвестные пока коэффициенты r_1, ..., t_2 выбирались так, чтобы обращались в нуль коэффициенты перед x_1 и x_1', перед x_2 и x_2'. Условия обращения в нуль этих коэффициентов давали систему уравнений, необходимых для определения r_1, ..., t_2. Окончательно получались уравнения регулятора в виде:

$$W_1(D)x_3 = W_2(D)u, \qquad (35)$$

где полиномы $W_1(D)$ и $W_2(D)$ совпадали с полиномами $W_1(D)$ и $W_2(D)$ в формуле (22), которые получались на основе методики синтеза оптимального регулятора, приведенной в *главе 1*.

Регулятор (35) обеспечивал в замкнутой системе те же переходные процессы, что и регулятор (18), но параметрической устойчивости (как мы уже убедились) он не обеспечивал.

Интересно отметить, что если в объекте управления (16) коэффициент a_{31} обращался в нуль, то оба метода исключения переменных приводили к одному и тому же регулятору (35), который обеспечивал те же самые переходные процессы, что и регулятор (18), но не обеспечивал параметрической устойчивости.

Иногда встречается редкий случай, когда в полиномах $M(D)$ и $N(D)$ в формулах (30) присутствует общий множитель, который можно сократить. Именно этот случай имеет место в системе (32): полиномы $M(\lambda)$ и $N(\lambda)$ можно сократить на $\lambda + 1$ и мы получаем для системы (32) следующие уравнения объекта управления и регулятора, использующего только переменную x_3:

$$(D^3 - 3D - 2)x_3 = (2D^2 + 2D)u, \tag{36}$$

$$u = (D + 1)x_3. \tag{37}$$

Регулятор (37) обеспечивает в замкнутой системе те же самые переходные процессы, что и регулятор

$$u = -x_1 - x_2 - x_3,$$

но система уравнений (36) и (37) на этот раз параметрически устойчива.

Именно эта сложность и запутанность соотношений между преобразованиями, эквивалентными в классическом смысле и в расширенном, объясняет столь позднее открытие различия между ними: первый исследователь использовал один способ исключения переменных и приходил к системе параметрически устойчивой, второй исследователь, используя другой метод исключения не измеряемых переменных, получал для тех же исходных уравнений систему параметрически устойчивую и ставил под сомнение результаты первого исследователя. Третий брал систему того же вида, но с другими значениями коэффициентов и снова получал параметрическую неустойчивость. Все это создало путаницу, которая была распутана совсем недавно в работах [47; 48; 53].

Зато теперь есть возможность сформулировать четкие правила (они приведены в начале данного параграфа), гарантирующие надежность и достоверность расчетов параметрической устойчивости.

Продолжение исследований в этом направлении позволило получить гораздо более широкие результаты, касающиеся общей проблемы корректности задач прикладной математики. Об этом — в следующих разделах.

§ 6. Общая проблема изменения корректности при эквивалентных преобразованиях

Изложенный в предыдущих разделах материал об изменениях параметрической устойчивости был рассмотрен на примерах, взятых из теории систем управления. Но значение его гораздо шире. Изменение свойства сохранения устойчивости при эквивалентных преобразованиях может происходить в дифференциальных уравнениях, встречающихся в самых различных областях приложений — в технике, физике, биологии, в банковском и страховом деле. Везде неучет различия между преобразованиями, эквивалентными в классическом смысле и в расширенном, может привести к серьезным ошибкам.

Но дело не ограничивается дифференциальными уравнениями. Уточнение понятия эквивалентных преобразований играет важную роль в общей проблеме корректности математических задач, математических моделей.

Как известно, параметры и коэффициенты математических моделей реальных объектов чаще всего только приближенно отражают реальность. Малые отклонения расчетных параметров от действительных, вариации параметров, малый дрейф их почти всегда неизбежны. Поэтому в математике давно различают задачи корректные (или корректно поставленные), в которых малым изменениям параметров соответствуют малые изменения решений, и задачи не корректные, где малым (и даже сколь угодно малым) изменениям параметров, а также начальных или граничных условий и т. п. могут соответствовать большие изменения решений. Практический смысл имеют чаще всего только решения корректных задач. Хотя некорректные задачи не являются абсолютно неразрешимыми, но они требуют совершенно особых (более сложных) методов решения (см., например, [61]), поэтому ошибки в различении корректных и некорректных задач очень опасны.

Простейший (хотя и весьма громоздкий) метод проверки корректности — это неоднократное повторение решения при немного измененных значениях коэффициентов и параметров. Если решения изменяются мало, то задача корректна.

Задача проверки устойчивости для систем, не обладающих параметрической устойчивостью, является одним из примеров некорректных задач. Практического смысла такая проверка устойчивости не имеет.

До последнего времени считалось, что корректные и некорректные задачи жестко отделены друг от друга. Недавно выяснилось, что на самом деле все сложней, что корректность может меняться в ходе решения задачи, при совершенно эквивалентных (в классическом смысле) преобразованиях уравнений, а это, разумеется, затрудняет решение. Примеры, приведенные в § 1—5, показали, что корректность может меняться при преобразованиях систем дифференциальных уравнений. Покажем теперь, что те же явления могут встречаться и при решении простых алгебраических систем.

Пример

Рассмотрим следующую систему четырех однородных линейных уравнений с параметром λ:

$$\begin{cases} (2+\lambda)x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - \lambda x_2 = 0 \\ x_2 + (2+\lambda)x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \tag{38}$$

и поставим задачу — найти значения параметра λ, при которых система имеет ненулевые решения. Эти значения совпадают с корнями определителя системы (38):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2+\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2+\lambda & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Разлагая определитель, например, по минорам последнего столбца, нетрудно проверить, что эта задача корректна. Решениями являются числа $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ и при малых изменениях любых коэффициентов системы собственные значения изменяются мало.

Одним из возможных методов решения поставленных задач является последовательное исключение переменных. Если исключить x_1, x_2, x_3, то относительно x_4 придем к уравнению

$$M(\lambda)x_4 = 0, \tag{39}$$

где полином $M(\lambda)$ — полином третьей степени. Его корни будут искомыми значениями λ. Для системы (38) будет

$$\mathrm{M}(\lambda) = \lambda^3 + 5\lambda^2 + 7\lambda + 3 \tag{40}$$

с корнями $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ — теми же самыми, что были найдены ранее.

Рассмотрим теперь более внимательно промежуточный этап, а также систему уравнений, получившуюся после исключения из системы (38) переменных x_1 и x_2:

$$\begin{cases} (\lambda^3 + \lambda^2 + 5\lambda + 2)x_3 - (\lambda^2 + 2\lambda + 1)x_4 = 0 \\ (\lambda^2 + 4\lambda + 5)x_3 - (\lambda + 1)x_4 = 0 \end{cases} \tag{41}$$

Исключив из системы (41) x_3, получим:

$$[(\lambda^2 + 4\lambda + 5)(\lambda^2 + 2\lambda + 1) - (\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2)(\lambda + 1)]x_4 = 0. \qquad (42)$$

Приведя подобные члены, мы получим уравнение (39) с тремя корнями $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$, поскольку члены, содержащие λ^4, взаимно сократятся. Это говорит о том, что система (41) в отношении задачи о вычислении собственных значений эквивалентна (в классическом смысле) системе (38). Однако эквивалентности в расширенном смысле нет, и задача вычисления значений λ, доставляющих ненулевые решения для системы (41), некорректна. Пока коэффициенты являются целыми числами все, разумеется, идет хорошо. Но при сколь угодно малых вариациях некоторых коэффициентов системы (41), вариациях порядка ε, или при сколь угодно малых ошибках округления, тоже порядка ε, приводящих к вариациям коэффициентов, сокращения членов, содержащих λ^4, может не произойти, полином $M(\lambda)$ в уравнении (39) станет полиномом четвертой степени и помимо трех корней, отличающихся от ранее найденных $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$ на малые величины, появляется большой четвертый корень λ_4, порядка $1/\varepsilon$. При $\varepsilon = 0$ четвертый корень исчезает.

Системы (38) и (41) являются примерами систем, эквивалентных между собой в классическом смысле и не эквивалентных — в расширенном, и это может стать источником ошибок в вычислениях: даже при сколь угодно малых погрешностях округления мы можем получать не три, а четыре корня. Подчеркнем, что мы имеем здесь дело с новым явлением, не совпадающим с хорошо известным ранее случаем не полностью эквивалентных преобразований уравнений, преобразований, добавляющих новые решения, новые корни, не зависящие от вариаций коэффициентов. Нет, система (41) полностью эквивалентна системе (38), при $\varepsilon = 0$ их решения тождественны, но корректность различна, а это является новым источником возможных ошибок. Разумеется, если причина возможных ошибок известна, то избежать их легко; но причину изменения корректности при некоторых преобразованиях нужно хорошо знать. Поэтому весьма полезным является определение, введенное нами ранее в § 3: преобразования, эквивалентные в расширенном смысле, — это те, которые, во-первых, эквивалентны в классическом смысле, а во-вторых, — не изменяют корректности решаемой задачи.

Отметим теперь, что системы, подобные системе (38), не являются редким исключением. Действительно, рассмотрим системы линейных однородных уравнений вида:

$$(A - \lambda\overline{E})x = 0\,, \qquad (43)$$

где A — квадратная размера $n\times n$ матрица, x — n-мерный вектор, $\overline{E}$ — квазиединичная матрица, т. е. матрица, у которой не главной диагонали стоят сперва n-r единиц, затем r нулей, все остальные элементы — нули; λ — параметр и нужно найти значения λ, при которых система (43) имеет ненулевые решения. Эта задача является обобщением широко известной и важной проблемы нахождения собственных чисел матрицы A и переходит в нее, когда $r = 0$. Квазиединичная матрица $\overline{E}$ переходит при $r = 0$ в обычную единичную матрицу. Системы линейных однородных уравнений вида (43) встречаются, как мы уже видели, при решении систем линейных дифференциальных уравнений и систем управления, а также — при вычислении частот малых колебаний механических и электрических систем и в ряде других задач (примеры приведены в [49].

Одним из возможных методов решения поставленной нами обобщенной проблемы собственных чисел матриц является последовательное исключение переменных из системы (43). Исключив x_1, затем x_2 и x_3 и т. п., относительно последнего переменного x_n, придем к уравнению

$$M(\lambda)x_n = 0, \tag{44}$$

где $M(\lambda)$ — полином степени n-r, корни которого и будут решениями.

Однако уже при $n = 4$ и $r = 1$ при исключении x_1 и x_2 мы придем на этом пути при $a_{31} = 0$ к системе двух уравнений, которая будет эквивалентна исходной в классическом смысле, но не в расширенном. Таким образом, системы, подобные системам (38), не являются редким исключением, а будут встречаться систематически. Еще более часто встречаются они для $n > 4$ и $r > 1$ — многочисленные примеры приведены в [49; 53].

Отметим, что при $r = 0$ (т. е. в традиционной и хорошо изученной постановке задачи о собственных значениях) при последовательном исключении переменных нам не встретится систем, эквивалентных исходной в классическом смысле, но не в расширенном. Это и объясняет, почему ранее, в эпоху ручного счета, преобразования, не эквивалентные в расширенном смысле, не были открыты: при ручном счете гораздо удобнее сперва исключить переменные, входящие только в уравнения, не содержащие параметра λ. После их исключения остается классическая, хорошо известная проблема собственных значений, соответствующая $r = 0$, а в дальнейшем исключение переменных к неприятностям уже не приводит. В то же время для вычислительной машины важнее всего унификация. Она будет в системе (43) исключать переменные в порядке их индексов, столкнется при этом с системой, неэквивалентной исходной в расширенном смысле и может выдать ошибочный результат.

Вообще нужно иметь в виду, что переход к машинным вычислениям требует дополнительной проверки и ревизии традиционного математического аппарата. Алгоритмы и программы, закладываемые в машину, должны быть безупречны, поскольку машина интуицией пока не обладает и неточностей алгоритма не исправит. Неточности, не замечаемые при ручном счете, могут стать источником ошибок при вычислениях на ЭВМ. Поэтому уточнение математических методов и подходов будет, безусловно, полезно. С этих позиций следует рассматривать и предложения, высказанные в [49; 50; 53] об уточнении понятия эквивалентных преобразований, о различении преобразований, эквивалентных в классическом смысле и в расширенном.

Следует отметить, что теория преобразований, эквивалентных в расширенном смысле, еще далека от завершения. Здесь большое поле для интересной исследовательской работы.

Обнаружение примеров изменения корректности при эквивалентных преобразованиях, используемых в ходе решения задачи, заставляет еще раз обратить внимание на обеспечение достоверности результатов расчета.

После того, как в 1902 году выдающийся французский математик Жак Адамар открыл существование целого класса некорректных задач, требующих особого подхода, особых методов решения, постепенно было признано, что перед решением любой прикладной задачи проверить — корректна задача или нет. Если некорректную задачу решать как корректную, то ошибка почти неизбежна. Проверку корректности перед решением не всегда и не все производят, но необходимость такой проверыки, по крайней мере, признана.

Обнаружение задач, способных менять корректность в ходе решения, осложняет подобную проверку: надо либо проверять корректность на каждом этапе, после каждого преобразования математической модели, либо — что, разумеется, проще — проверять произведенные преобразования на эквивалентность в расширенном смысле.

В работе [51] было предложено ввести в рассмотрение как отдельный класс задачи, способные изменять свою корректность при преобразованиях, используемых в ходе решения. Было предложено рассматривать эти задачи как особый, третий класс задач математики, физики и техники наряду с издавна известным классом корректных задач и известным с 1902 года классом задач некорректных.

В предыдущем изложении мы уже привели примеры задач, относящихся к третьему классу. Число таких задач со временем, безусловно, будет расти, хотя вполне возможно, что в конечном счете их окажется много меньше, чем принадлежащих к первым двум классам. Однако для задач третьего класса особенно трудно гарантировать достоверность результатов расчета, и поэтому третий класс заслуживает самого внимательного изучения — тем более что исследование задач этого класса только началось.

Встречи с задачами третьего класса могут стать причиной ошибок в компьютерных вычислениях. Об этом в следующей главе.

ГЛАВА 3

Компьютерные вычисления. Ошибки, обнаружившиеся в пакетах прикладных программ (пакет *MATLAB* и другие пакеты), и методы устранения ошибок

§ 1. Ошибки, обнаружившиеся при решении систем дифференциальных уравнений

К настоящему времени для решения типовых, часто встречающихся, математических задач разработаны и широко используются пакеты прикладных программ — такие, как пакеты *MATLAB*, *Mathcad*, *Scilab* и др.

Одной из типовых и часто встречающихся в приложениях задач является задача численного решения различных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этой задачи давно составлены программы ее решения на быстродействующих вычислительных машинах. При использовании этих программ первым этапом решения является приведение исходной системы к нормальной форме Коши, к системе n уравнений первого порядка. Такое приведение к нормальной форме удобно и безусловно целесообразно (иначе пришлось бы составлять много отдельных программ для различных систем, состоящих из уравнений разных порядков). Выполняется приведение к нормальной форме с помощью простых эквивалентных преобразований, и поэтому со времен О. Коши оно сомнений не вызывало. Только совсем недавно (см. публикацию [53]), было замечено, что преобразование к нормальной форме может изменить свойство непрерывной зависимости решений системы дифференциальных уравнений от коэффициентов и параметров.

Поскольку, как уже неоднократно указывалось, любые коэффициенты и параметры математических моделей реальных систем и устройств почти всегда известны лишь с ограниченной точностью, то важнейшей теоремой, лежащей в основе всех практических приложений теории дифференциальных уравнений, является теорема о непрерывной зависимости решений от параметров.

Наличие непрерывной зависимости является необходимым (хотя и недостаточным) условием того, что неизбежные на практике малые отклонения коэффициентов и параметров от номинальных значений не приведут к большим ошибкам в решениях.

Поэтому теорема о непрерывной зависимости решений систем дифференциальных уравнений от параметров приводится и доказывается во всех серьезных учебниках и курсах дифференциальных уравнений. Однако доказательства приводятся для систем дифференциальных уравнений, заданных в нормальной форме Коши. Поскольку другие формы записи системы дифференциальных уравнений почти всегда могут быть путем эквивалентных преобразований приведены к нормальной форме, то молчаливо допускалось, что теорема справедлива для любых систем дифференциальных уравнений.

На самом деле это не так. Рассмотрим простую систему дифференциальных уравнений с параметром m:

$$\begin{aligned}&(D^3 + 4D^2 + 5D + 2)x_1 = (mD^2 + 2D + 1)x_2\\&(D^2 + 4D + 5)x_1 = (D + 1)x_2,\end{aligned} \tag{45}$$

которая является математической моделью системы управления электроприводом постоянного тока.

При $m = 1{,}0001$ система (45) имеет следующее общее решение (с точностью до первого знака):

$$x_1(t) = c_1e^{-3t} + (c_2t + c_3)e^{-t} + c_4e^{-1000t}\,, \tag{46}$$

при $m = 1$ будет

$$x_1(t) = c_1e^{-3t} + (c_2t + c_3)e^{-t}\,, \tag{47}$$

при $m = 0{,}9999$ имеем:

$$x_1(t) = c_1e^{-3t} + (c_2t + c_3)e^{-t} + c_4e^{1000t}\,. \tag{48}$$

Формулы (46)—(48) сразу показывают, что вблизи критического значения параметра $m = 1$ малые изменения параметра приводят к очень большим изменениям решений даже на небольшом временном интервале $0 \le t \le T$, поскольку при переходе от $m = 1{,}0001$ к $m = 0{,}9999$ в общее решение вместо быстро убывающего члена c_4e^{-1000t} входит растущий с огромной скоростью член

c_4e^{1000t} и все поведение решений $x_1(t)$ и $x_2(t)$, их зависимость от времени t, совершенно изменяются. В точке $m = 1$ имеет место разрыв непрерывности в зависимости решений $x_1(t)$ и $x_2(t)$ от параметра m. Поэтому решение системы (45) вблизи значений коэффициента при D^2x_2 в первом уравнении, близких к единице, смысла не имеет: неизбежные малые отклонения реальных значений коэффициентов системы от номинальных приведут к большим ошибкам в решении, к большим расхождениям между рассчитанным и истинным поведением исследуемого объекта или процесса. Ошибки могут быть велики даже для малых значений времени t, а с ростом t стремительно возрастают.

Для систем, не обладающих свойством непрерывной зависимости решений от параметров, задача вычисления решения может быть некорректной. Если же мы будем решать систему путем преобразования ее к нормальной форме Коши, то может произойти встреча с задачей, относящейся к третьему классу, задачей, меняющей корректность в ходе решения.

Теперь заметим, что первичными, исходными уравнениями в математических моделях реальных систем чаще всего оказываются системы, состоящие из уравнений различных порядков, а совсем не нормальная форма Коши. Так, например, уравнения различных механических систем составляются, как известно, чаще всего на основе системы уравнений Лагранжа второго рода, которые являются системой, состоящей из уравнений второго порядка.

Для всех подобных систем непрерывность зависимости решений от коэффициентов и параметров надо проверять, и проверять обязательно до приведения системы к нормальной форме Коши.

Из примера с системой (45) и из материала, изложенного в [53] следует, что в подобных системах непрерывная зависимость решений от параметров будет иметь место только в тех случаях, когда преобразование систем в нормальную форму Коши (для которой непрерывная зависимость доказана) является преобразованием, эквивалентным не только в классическом смысле, но и в расширенном.

Таким образом, знание свойств преобразований, эквивалентных в расширенном смысле, важно не только для тех, кто занимается расчетами систем управления, но и для всех тех, кто производит компьютерные расчеты. Без учета этих свойств нельзя гарантировать правильность результатов расчета. Так, например, при численном решении систем обыкновенных дифференциальных уравнений можно не заметить, что полученное решение не имеет практического смысла, поскольку изменяется коренным образом при неизбежных на практике сколь угодно малых отклонениях реальных величин коэффициентов и параметров от расчетных значений. Подобные ошибки могут стать (и уже не раз становились) причиной аварий и даже катастроф. Более подробно эти вопросы рассмотрены в монографии [53]. Там приведены и конкретные примеры аварий, произошедших от недостаточной разработанности методов расчета.

Отметим, что в используемых до последнего времени пакетах прикладных программ, включающих в себя программы численного решения систем дифференциальных уравнений (пакет *MATLAB*, *Mathcad*, *Scilab* и др.), нет указаний на возможность подобных ошибок при расчетах, и поэтому пользователь подобных пакетов может получить ошибочные результаты. В подобных ошибках не следует, разумеется, винить разработчиков пакетов. Сама возможность ошибок, связанная с изменением корректности решаемой задачи при эквивалентных преобразованиях, используемых в ходе ее решения, была обнаружена совсем недавно и опубликована впервые в [47], [48], [49], [51], [53] (наиболее подробно — в монографии [53]).

Для предупреждения и избежания ошибок пакеты прикладных программ целесообразно дополнить. Так, например, при численном решении систем дифференциальных уравнений ошибки возникают при встрече с особыми системами, решения которых не имеют непрерывной зависимости от некоторых коэффициентов и параметров. Примером является система (45) с параметром m. При $m = 1$ зависимость величины решения $x(t)$ для любого $t = t_0 > 0$ от параметра m терпит разрыв. Причина этого достаточно очевидна: если мы выпишем выражение для характеристического полинома Δ системы (45):

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2 & -m\lambda^2 - 2\lambda - 1 \\ \lambda^2 + 4\lambda + 5 & -\lambda - 1 \end{vmatrix} = (m-1)\lambda^4 + (4m-3)\lambda^3 + 5m\lambda^2 + 7\lambda + 3\,,$$

то сразу убедимся, что при $m = 1$ происходит понижение его степени. При $m \neq 1$ система (45) является системой четвертого порядка, а при $m = 1$ она вырождается в систему третьего порядка. Понятно, что при понижении порядка решение может измениться коренным образом. В случае с системой (45) именно так все и происходит. В любом случае изменение порядка системы уравнений при сколь угодно малых вариациях ее коэффициентов и параметров является предупреждающим сигналом — предупреждающим о возможности ошибки.

Ошибки могут возникнуть и без изменения порядка системы дифференциальных уравнений. Так, система (45) при $m = 1{,}0001$ является системой четвертого порядка. Ее характеристический полином имеет вид

$$0{,}0001\lambda^4 + 10004\lambda^3 + 5{,}0005\lambda^2 + 7\lambda + 3\,. \qquad (49)$$

Если параметр m изменится в сторону уменьшения на 0,02% и станет равным 0,9999, то порядок системы (45) останется прежним, но решения ее изменятся коренным образом: вместо общего решения (46) у системы появится общее решение (48) с чрезвычайно быстро растущим четвертым членом. Поэтому, если мы приведем систему (45) при $m = 1{,}0001$ к нормальной форме, найдем (при любых начальных условиях) ее численное решение, воспользовавшись готовой программой из пакета *MATLAB* или другого пакета, и захотим использовать это решение в каких-либо практических целях, то, наверное, придем к совершенно ошибочным рекомендациям: дело в том, что погрешность определения коэффициентов и параметров в большинстве практических приложений заведомо больше, чем 0,02%, а при такой погрешности решения системы (45) изменяются коренным образом, во много раз (это сразу можно увидеть из формул (46) и (48)).

Иногда утверждают, что малость старшего коэффициента в характеристическом полиноме (49) уже сама по себе служит сигналом опасности и возможной ошибки. Это не так. Дифференциальные уравнения, у которых коэффициент при старшем члене на несколько порядков меньше остальных коэффициентов, встречаются в различных практических задачах и они достаточно хорошо и надежно описывают многие природные процессы — обо всем этом подробно рассказано, например, в известной классической монографии [6], на стр. 70—86. Подобные системы называют часто «жесткими» системами. Их не очень удобно численно решать, но решение вполне возможно и ничего особенного в себе не заключает.

Истинная причина неприятностей и возможных ошибок заключается в том, что малый коэффициент 0,0001 в характеристическом полиноме (49) не просто мал, а является разностью больших (по сравнению с ним) коэффициентов 1,0001 и 1 в исходной системе (45). Теперь понятно, что при совсем малых, порядка 0,02%, а тем самым практически неизбежных погрешностях в задании коэффициентов исходной системы (45) старший коэффициент характеристического полинома (49) может изменить знак, а это сразу коренным образом меняет все решения системы (45) и ведет к неизбежным ошибкам.

Для избежания ошибок пакеты прикладных программ (пакет *MATLAB* и другие пакеты программ численного решения систем дифференциальных уравнений и их приведения к нормальной форме Коши) следует дополнить контрольными программами, проверяющими, не оказались ли коэффициенты решаемого уравнения малой разностью больших (в сравнении с ними) параметров исходной системы.

В следующем разделе мы рассмотрим другие причины возможных ошибок при использовании программ решения систем дифференциальных уравнений и рассмотрим связь между коэффициентами исходной математической модели и преобразованной.

§ 2. Связь между вариациями коэффициентов и параметров в исходной и преобразованной системах уравнений

При изучении математических моделей технических устройств и природных процессов нас интересует зависимость характеристик моделей от параметров — т. е. различных элементов того или иного устройства или процесса. Изучая, например, электрический привод, мы рассматриваем влияние малых колебаний температуры на момент инерции вращающихся масс, на коэффициент трения и другие параметры привода. В свою очередь эти изменения параметров, безусловно, влияют на различные характеристики привода. В уравнениях математической модели мы имеем дело с коэффициентами уравнений, которые являются некоторыми функциями от параметров реального объекта. Рассмотрим поэтому связь между малыми изменениями параметров и малыми изменениями коэффициентов математической модели.

Пусть некоторый коэффициент математической модели a_i является функцией от некоторого параметра a — т. е.

$$a_i = f_1(a).$$

Продифференцировав это равенство, получаем

$$da_i = \frac{df_1(a)}{da} da. \tag{50}$$

Если при рассматриваемом нами значении параметра $a = a_0$ производная $\frac{df_1(a)}{da}$ существует, то из равенства (50) сразу вытекает, что если изменение параметра da является сколь угодно малой величиной, то и изменение коэффициента a_i в уравнениях математической модели тоже является сколь угодно малой величиной. Случай не дифференцируемости функции $f_1(a)$, отсутствия производной $\frac{df_1}{da}$, мы рассмотрим отдельно.

Для всех дифференцируемых в исследуемой нами точке $a = a_0$ функций $f(a)$ из формулы (50) можно сразу сделать общий вывод: для того чтобы исследовать влияние сколь угодно малых изменений любого параметра на поведение реального устройства или процесса, достаточно исследовать поведение математической модели при сколь угодно малых изменениях всех ее коэффициентов. Если при сколь угодно малых изменениях любых коэффициентов модели изменение интересующих нас характеристик сколь угодно мало, то оно останется сколь угодно малым и при малых изменениях любых параметров реального устройства или процесса. Задачи расчета в данном случае корректны.

Теперь рассмотрим изменения коэффициентов и параметров при преобразованиях уравнений. При преобразованиях может изменяться и число коэффициентов, и их вид.

Так, если из уравнений системы управления:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1u \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2u \end{cases} \tag{51}$$

исключить x_2, то мы придем к уравнению

$$\begin{aligned} &\left[D^2 - (a_{11} + a_{22})D + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\right]x_1 = \\ &= \left[b_1D + (b_2a_{12} - b_1a_{22})\right]u \end{aligned} \tag{52}$$

с новыми коэффициентами.

Однако в любом случае новые коэффициенты остаются некоторыми функциями старых коэффициентов, и если для старого коэффициента выполнялось равенство (50), то и для любого нового коэффициента a_2 будет выполняться равенство

$$da_2 = \frac{df_2(a)}{da}da\,. \tag{53}$$

Если при рассматриваемом нами значении параметра $a = a_0$ производная $\dfrac{df_2(a)}{da}$ существует и поэтому дифференцирование законно, то приходим к выводу: в этом случае, если при сколь угодно малых изменениях любых коэффициентов преобразованной системы изменение интересующих нас характеристик сколь угодно мало, то оно будет малым и при малых изменениях любых параметров реального устройства или процесса. Задача расчета характеристик этого устройства или процесса в данном случае корректна. Если же при сколь угодно малом изменении хотя бы одного коэффициента преобразованной системы характеристики модели изменились существенно, то уже нет уверенности в корректности рассматриваемой задачи.

Пример 1

Уравнения электродвигателя, работающего на один из конкретных исполнительных механизмов с переменным моментом сопротивления, могут быть записаны в виде:

$$\begin{cases} x_1' = -\dfrac{k}{m}x_1 + \dfrac{1}{m}x_2 + \dfrac{1}{m}x_4 & (54) \\ x_2' = x_3 & (55) \\ x_3' = -x_2 - 2x_3 & (56) \end{cases}$$

В этих уравнениях x_1 — отклонение частоты вращения от номинальной, k — коэффициент вязкого трения, m — механическая постоянная времени, x_2 — отклонение момента сопротивления от номинального значения. Уравнение (54) является уравнением равновесия моментов на валу двигателя, уравнения (55) и (56) описывают исполнительный механизм (ток якоря x_4 играет роль управления).

Пусть управляющее воздействие в канале обратной связи формируется в виде линейной комбинации всех переменных:

$$x_4 = -x_1 - 2x_2 - x_3, \tag{57}$$

коэффициент вязкого трения $k = 2$ и номинальное значение параметра m равно единице. Уравнения (54)—(57) при $k = 2$ и $m = 1$ будут уравнениями системы управления частотой вращения электропривода. Используя уравнение (57), можно исключить переменную x_4 и записать уравнения системы управления в нормальной форме Коши:

$$\begin{cases} x_1' = -\dfrac{3}{m}x_1 - \dfrac{1}{m}x_2 - \dfrac{1}{m}x_3 \\ x_2' = x_3 \\ x_3' = -x_2 - 2x_3 \end{cases} \tag{58}$$

Согласно известной теореме теории дифференциальных уравнений, решения системы (58) зависят от параметра m непрерывно. Нетрудно проверить, что при $m = 1$ решения системы (58) устойчивы и сохраняют устойчивость при отклонениях параметра m от значения $m = 1$. Действительно, характеристический полином системы (58) имеет вид $\Delta = (m\lambda + 3)(\lambda + 1)^2$ и является гурвицевым как при $m = 1$, так и для всех m, удовлетворяющих неравенству $0 < m < \infty$.

Теперь рассмотрим тот случай, когда переменные x_2 и x_3 непосредственно не измеримы и не могут быть непосредственно использованы в канале обратной связи. Если мы хотим сохранить те же переходные процессы, то нам достаточно исключить переменные x_2 и x_3 путем эквивалентных преобразований, и мы придем к уравнениям

$$[mD^3 + (2 + 2m)D^2 + (4 + m)D + 2]x_1 = (D^2 + 2D + 1)x_4 \tag{59}$$

$$(D^2 + 4D + 5)x_1 = (D + 1)x_4 \tag{60}$$

с новыми коэффициентами, некоторые из которых являются теперь функциями от параметра m. Нетрудно проверить, что при $m = 1$ решения системы (59) и (60) совпадают с решениями системы (58), но зависимость решений от параметра m у системы (58) и у системы (59) и (60) — разная. При значении $m = 1$ у системы (59) и (60) решения уже не зависят от параметра m непрерывно. Характеристический полином системы (59) и (60) имеет вид:

$$\Delta = (1 - m)\lambda^4 + (4 - 3m)\lambda^3 + (8 - 3m)\lambda^2 + (8 - m)\lambda\ . \tag{61}$$

Хотя при $m = 1$ характеристический полином (61) совпадает (как и должно быть у эквивалентных систем) с характеристическим полиномом системы (58) при $m = 1$, но уже при $m = 1 + \varepsilon$, где ε — сколь угодно малое положительное число, он перестает быть гурвицевым и в решении появляется экспоненциально возрастающий член, очень быстро растущий при малых ε.

Ранее мы уже установили тот же факт непосредственным изучением поведения решений системы (59) и (60) для $m = 1$ при вариациях ее коэффициентов. Этот пример наглядно подтверждает, что изучение зависимости решений от параметров можно вести на основании исследования преобразованных уравнений, исследуя вариации их коэффициентов, — если, разумеется, использованные преобразования были эквивалентными не только в классическом смысле, но и в расширенном.

Если же проверки на эквивалентность в расширенном смысле не делать, то можно допустить грубые ошибки. Так, например, если систему (59) и (60) решать традиционным способом, приведением к нормальной форме Коши (а ведь все стандартное программное обеспечение приводится для формы Коши, поэтому без приведения к нормальной форме Коши обычно не обойтись), то мы придем к совершенно неверным ответам на вопросы о непрерывной зависимости решений от параметра и о сохранении устойчивости замкнутой системы при сколь угодно малых отклонениях параметров системы от расчетных значений.

Теперь рассмотрим тот случай, когда функции, выражающие зависимость коэффициентов преобразованной системы от коэффициентов системы исходной, не дифференцируемы при исследуемых значениях коэффициентов и параметров.

Пример 2

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} x_1'' = -x_2' - x_2 \\ x_2' = -mx_1'' + e^{-t} \end{cases} \tag{62}$$

с параметром m и нулевыми начальными условиями:

$x_1(0) = x_1'(0) = x_2(0) = x_2'(0) = 0$.

Систему (62) введением новой переменной $x_3 = x_1'$ (т. е., вполне эквивалентным преобразованием) можно свести к нормальной форме Коши:

$$
\begin{aligned}
x_1' &= x_3 \\
x_2' &= \frac{m}{1-m}x_2 + \frac{1}{1-m}e^{-t} \\
x_3' &= -\frac{1}{1-m}x_2 - \frac{1}{1-m}e^{-t}
\end{aligned}
\tag{63}
$$

Мы убеждаемся, что в преобразованной системе (63) появляются новые коэффициенты, причем при $m = 1$ функциональная зависимость новых коэффициентов от старых теряет непрерывность и дифференцируемость.

Рассматриваемый пример показывает особенно простую причину потери непрерывной зависимости решений и системы (62) и эквивалентной ей системы (63) от параметра m при $m = 1$: пусть мы изменили параметр m вблизи $m = 1$ на малую величину — изменили от $m = 0{,}999$ до $m = 1{,}001$. При этом уравнения в форме Коши изменятся от уравнений

$$
\begin{cases}
x_1' = x_3 \\
x_2' = 999x_2 + 1000e^{-t} \\
x_3' = -1000x_2 - 1000e^{t}
\end{cases}
\tag{64}
$$

до уравнений

$$
\begin{cases}
x_1' = x_3 \\
x_2' = -1001x_2 - 1000e^{-t} \\
x_3' = 1000x_2 + 1000e^{t}
\end{cases}
.
\tag{65}
$$

Мы убеждаемся, что у системы (65) по сравнению с системой (64) коэффициенты изменились очень существенно, некоторые коэффициенты изменили даже знаки. Неудивительно, что и решения систем (64) и (65) при одних и тех же начальных условиях очень быстро расходятся между собой с возрастанием времени.

Таким образом, недифференцируемость зависимости коэффициентов преобразованной системы от коэффициентов исходной системы, или от параметров, является еще одной причиной потери непрерывной зависимости решений от параметров. Но это — более простой случай, сравнительно легко обнаруживаемый при традиционных методах решения, при приведении уравнений к нормальной форме Коши. Так, если мы будем решать систему (62) приведением к форме Коши, то мы быстро обнаружим, что вблизи значения параметра $m = 1$ коэффициенты формы Коши меняются очень сильно, и поэтому мы заранее должны ожидать, что при малых изменениях параметра m вблизи $m = 1$ решения должны изменяться очень существенно и это справедливое ожидание уберегает от возможной ошибки (для простой системы (62) нетрудно получить решение в явном виде:

$$x_2 = e^{\frac{m}{1-m}t} - e^{-t},$$

которое сразу показывает, что на любом интервале времени $0 < t < \infty$ непрерывной зависимости решения от параметра m вблизи $m = 1$ заведомо нет).

Более опасным является случай непрерывной зависимости коэффициентов преобразованной системы от коэффициентов исходной системы. В этом случае традиционный путь решения — приведение к форме Коши для использования стандартных программ — может привести, как уже указывалось, к опасным ошибкам.

§ 3. Необходимость учета физических соображений при компьютерных преобразованиях уравнений

Преобразования систем уравнений к той или иной форме также могут быть поручены компьютеру и могут выполняться по программам, заранее записанным в пакете. Многие пакеты такие программы имеют. При использовании подобных программ, как и вообще при применении любых формальных средств, нужно тщательно следить за физическим смыслом используемых преобразований.

Для примера вернемся к рассмотренной в предыдущем разделе математической модели системы управления частотой вращения электропривода постоянного тока, которая записывается в виде четырех уравнений — (54), (55), (56), (57) с четырьмя переменными и параметром m — механической постоянной времени. Если точнее, то параметр m равен отношению реальной постоянной времени электропривода к постоянной времени, вычисленной для номинального режима. Как известно из теории электропривода, механическая постоянная времени равна времени разгона электропривода от нулевой частоты до номинальной при номинальном вращающем моменте и нулевом моменте сопротивления.

Если переменную t (время) в уравнениях (54)—(57) выражать в долях механической постоянной времени, то в номинальном режиме параметр $m = 1$. Однако неизбежные на практике малые отклонения от номинальных значений воздушного зазора, магнитного потока и т. п. приводят к тому, что в ходе эксплуатации электропривода неизбежны вариации параметра m, малые отклонения его от номинального значения $m = 1$.

Необходимо выяснить — как будут влиять неизбежные вариации параметра m на устойчивость электропривода и на переходные процессы в нем — т. е. на решения $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_4(t)$ системы уравнений (54)—(57) (для определенности принимаем в дальнейшем коэффициент k в уравнении (54) равным $k = 2$).

Первым шагом исследования является вычисление характеристического полинома системы. Для системы уравнений (54)—(57) характеристический полином Δ равен определителю

$$\Delta = \begin{vmatrix} m\lambda + 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda + 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \tag{66}$$
$$= m\lambda^3 + (2m + 3)\lambda^2 + (6 + m)\lambda + 3 = (m\lambda + 3)(\lambda + 1)^2.$$

Мы убеждаемся, что при малых отклонениях параметра m от номинального значения $m = 1$ корни характеристического полинома, а значит — и решения системы (54)—(57) — будут мало отличаться от решения (47), соответствующего, как легко проверить, решению системы (54)—(57) при $m = 1$.

Поскольку переменные x_2 и x_3, как об этом уже говорилось в предыдущем разделе, затруднительно измерить и ввести в канал обратной связи, то их исключают из уравнений (54)—(57) с помощью эквивалентных преобразований, не изменяющих решений x_1 и x_4, и в дальнейшем исследуют влияние вариаций параметра m на решения $x_1(t)$ и $x_4(t)$ в математической модели, включающей в себя только две переменные — $x_1(t)$ и $x_4(t)$.

Именно здесь начинаются сложности и подстерегают возможные ошибки: если из уравнений (54)—(57) исключить переменные x_2 и x_3 формально, по общим правилам алгебры, записанным в программе компьютера, то мы придем к системе уравнений

$$[mD^3 + (2 + 2m)D^2 + (4 + m) + 3]x_1 - (D^2 + 2D + 1)x_4 = 0 \tag{67}$$

$$[mD^2 + (2 + 2m)D + 5]x_1 - (D + 1)x_4 = 0. \tag{68}$$

Уравнение (67) — это уравнение объекта управления, электрического двигателя постоянного тока, уравнение (68) — это уравнение регулятора, уравнение цепи обратной связи. Это уравнение показывает, как формируется управляющее воздействие x_4 в функции от переменной x_1 и ее производных.

Вычисляя характеристический полином Δ системы уравнений (67) и (68):

$$\Delta = \begin{vmatrix} m\lambda^3 + (2+2m)\lambda^2 + (4+m)\lambda + 3 & -\lambda^2 - 2\lambda - 1 \\ m\lambda^2 + (2+2m)\lambda + 5 & -\lambda - 1 \end{vmatrix} = (m\lambda + 3)(\lambda + 1)^2 \tag{69}$$

мы убедимся, что он совпадает с характеристическим полиномом (66), и поэтому мы должны, казалось бы, сделать вывод о том, что и в системе управления, использующей только переменные x_1 и x_4, решения $x_1(t)$ и $x_4(t)$ мало зависят от вариаций параметра m и сохраняют устойчивость при всех m, лежащих в интервале $0<m<\infty$.

Однако этот вывод будет ошибочен! Дело в том, что компьютер (а точнее — программист), исключая переменные x_2 и x_3 из уравнений (54)—(57) формально, не учитывает, что объект управления (двигатель) и регулятор — это различные материальные объекты, и вариации параметров регулятора могут не зависеть от вариаций параметров электропривода и, в частности, от вариаций его механической постоянной времени m.

Рассмотрим простейший случай: параметры регулятора остались теми же, что и в номинальном режиме, при $m = 1$, и поэтому уравнение регулятора имеет вид:

$$(D^2 + 4D + 5)x_1 = (D + 1)x_4, \tag{70}$$

а уравнение электропривода зависит, естественно, от вариаций его механической постоянной времени и поэтому сохраняет вид (67). Система уравнений (67)—(70) более точно отражает процессы, происходящие в системе управления частотой вращения, чем уравнения (67) и (68).

Составляя характеристический полином системы уравнений (67)—(70):

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} m\lambda^3 + (2+2m)\lambda^2 + (4+m)\lambda + 3 & -\lambda^2 - 2\lambda - 1 \\ \lambda^2 + 4\lambda + 5 & -\lambda - 1 \end{vmatrix} = \\ &= \left[(1-m)\lambda^2 + (2-m)\lambda + 3\right](\lambda + 1)^2 \end{aligned} \tag{71}$$

мы убеждаемся, что теперь влияние вариаций параметра m на переходные процессы электропривода, на решения $x_1(t)$ и $x_4(t)$ системы уравнений (67)—(70) стало совсем другим: если $m = 1 + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, то уже при сколь угодно малых ε решения $x_1(t)$ и $x_4(t)$ теряют устойчивость, в них появляются чрезвычайно быстро растущие члены. Устойчивость теряется при сколь угодно малом (но обязательно положительном!) отклонении параметра m от его номинального значения $m = 1$. Проведя эксперимент, мы убедимся, что именно так будут протекать процессы в реальной системе управления частотой вращения электропривода, использующей в канале обратной связи переменную x_1 и ее производные. Реальная система в действительности имеет нулевой запас устойчивости и может срываться в неустойчивость и в аварийный режим при сколь угодно малой положительной вариации параметра m. Ничего этого мы не увидим, если будем исследовать математическую модель системы управления в нормальной форме, или же если будем исследовать уравнения (67) и (68) формально вытекающие из уравнений (54)—(57). Это еще раз подчеркивает, что уравнения (67)—(70) лучше отражают физическую реальность, чем уравнения (67) и (68), или (54)—(57). Данный факт подкрепляет общее правило, которым мы пользовались ранее при анализе влияния вариаций коэффициентов и параметров математической модели: только если при независимых вариациях любых коэффициентов и параметров математической модели устойчивость решений и их непрерывная зависимость от параметров сохраняются, можно быть уверенным, что и реальный объект будет вести себя хорошо, и задача численного решения системы дифференциальных уравнений, или алгебраических уравнений будет безусловно корректной.

Рассмотренный пример говорит о том, при преобразованиях уравнений математических моделей реальных систем нужно правильно учитывать связи (или отсутствие связей) между вариациями параметров различных объектов, входящих в исследуемую нами систему. Нельзя преобразования уравнений целиком передоверять вычислительной машине — даже если в нее заложена программа выполнения таких преобразований.

Особо нужно отметить, что преобразование системы, состоящей из обыкновенных дифференциальных уравнений различных порядков, в нормальную форму Коши является все же, если можно так выразиться, «немного грубоватым» преобразованием. Проведенное правильно, проведенное с помощью эквивалентных (в классическом смысле) преобразований, оно, безусловно, не изменяет самих решений как таковых, но может изменить (и, действительно, иногда изменяет) некоторые тонкие, но важные свойства решений — такие, как параметрическая устойчивость, как непрерывная зависимость решений от параметров. Преобразование к нормальной форме может оказаться эквивалентным в классическом смысле, но не в расширенном.

Характерен пример с преобразованием системы (54)—(57) в уравнения (67)—(68). Это преобразование формально является правильным, но оно не учитывает реальных физических связей между вариациями различных коэффициентов объекта управления и регулятора и поэтому на самом деле оно будет преобразованием неверным. Полезно сравнить с ним преобразование той же системы в уравнения (67)—(70), которое будет преобразованием правильным и по форме и по существу. Эти примеры объясняют, почему различие между преобразованиями, эквивалентными в классическом смысле и в расширенном смысле, было открыто так поздно (первая публикация — [45], более подробная — в [53]). Хотя вопрос о свойствах преобразований относится целиком к прикладной математике, но правильный ответ на него требует еще и инженерного образования, требует хорошего понимания характера взаимодействия различных элементов и узлов технических устройств, математические модели которых мы исследуем.

Заметим, что если использовать часто применяемый в технике «язык структурных схем», то различие между системами уравнений (54)—(57) и (67), (68) станет нагляднее. Системе (54)—(57) при $m = 1$ соответствует структурная схема, показанная на рис. 11, а эквивалентной (в классическом смысле) системе (67) и (68) соответствует структурная схема, показанная на рис. 12. Теперь различие очевидно.

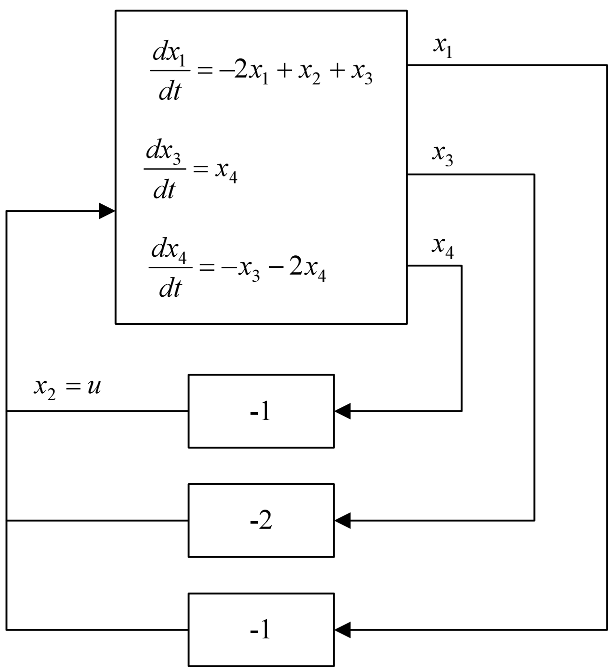

Рис. 11

Еще одной причиной позднего открытия преобразований, эквивалентных в классическом смысле, но не в расширенном, преобразований, изменяющих корректность решаемой задачи, была их редкая встречаемость. Большинство преобразований, эквивалентных в классическом смысле, эквивалентны и в расширенном. Поэтому за века их применения у многих математиков, а затем и у пользователей компьютеров сложилось прочное убеждение в том, что эквивалентные преобразования ничего не должны менять. «Если у Вас что-либо изменилось, значит использованное Вами преобразование на самом деле не было эквивалентным. Ищите ошибку» — вот частая реакция на демонстрацию преобразований, эквивалентных в классическом смысле, но не в расширенном (тем более, что действительно, как известно еще из средней школы, существуют преобразования, похожие на эквивалентные, но ими не являющиеся). Однако эквивалентность легко проверить: если исходная и преобразованная системы имеют тождественные решения, то использованное преобразование было эквивалентным (во всяком случае, в классическом смысле). Убеждение в том, что эквивалентные преобразования ничего не должны менять, как и всякое укоренившееся убеждение, трудно изгнать из сознания, но это нужно сделать, иначе каждая неожиданная встреча с преобразованием, эквивалентным в классическом, но не в расширенном смысле, может стать причиной ошибок в компьютерных расчетах, а значит — в конечном счете — стать причиной аварий и даже катастроф. Примеры аварий и катастроф, произошедших из-за неполноты методов расчета, приведены в монографии [53].

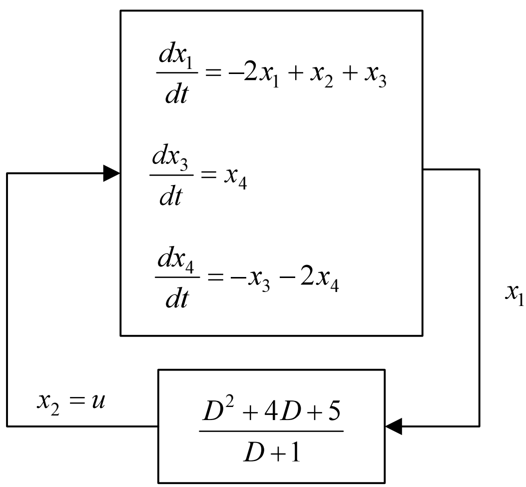

Рис. 12

Отметим, что наши великие предшественники — математики XVII—XVIII веков, выбиравшие названия для математических понятий — различали преобразования эквивалентные и преобразования тождественные. Примером тождественного преобразования может служить, например, преобразование разности квадратов в произведение:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Можно предположить, что великие математики, выбиравшие названия для математических понятий, интуитивно догадывались о том, что эквивалентные преобразования могут что-то изменить. Но то, что эквивалентные (в классическом смысле) преобразования в ряде случаев изменяют корректность решаемой задачи могло быть установлено лишь после исследований выдающегося французского математика Ж. Адамара, который только в 1902 году впервые привел примеры некорректных задач и начал их исследование (см. [86]).

Еще одной причиной позднего открытия преобразований, эквивалентных в классическом смысле, но не в расширенном, и позднего открытия класса задач, промежуточных между корректными и некорректными, была сложность их свойств. Как было показано в § 5 *главы 2*, одно и то же эквивалентное в классическом смысле преобразование для одних систем будет эквивалентным в расширенном смысле, а для других — не будет. Поэтому в монографии [53] было предложено исследовать не свойства преобразований самих по себе, а рассматривать их в составе **триады**:

1. Исследуемая математическая модель.
2. Решаемая задача.
3. Выбранный метод решения.

Только в составе триады получаются однозначные ответы на вопросы: 1) является ли используемое преобразование эквивалентным в расширенном смысле; 2) не относится ли решаемая задача к третьему классу, к классу задач, промежуточных между корректными и некорректными. Более подробно о триадах рассказано в [53], стр. 120—125. Там же приведены и примеры.

Отметим, что при расчетах нередко используют неполностью эквивалентные преобразования, когда преобразованная система помимо решений исходной системы содержит посторонние решения, лишние корни. Если потери решений не происходит, то вторую систему называют, как известно, **следствием** первой, и подобными преобразованиями широко пользуются. Их даже предлагалось ввести в программы средней школы (см. экспериментальный учебник [77]). Действительно, при преобразованиях главное — это не потерять решений, а лишние решения можно отсеять проверкой. Важно только тщательно следить, чтобы использованное преобразование не изменило корректности решаемой задачи.

§ 4. Ошибки в компьютерных расчетах, использующих цепочки преобразований, и другие ошибки

Многие вычислительные алгоритмы используют цепочки эквивалентных преобразований. Так, например, наиболее удобным методом вычисления определителей является последовательное преобразование их в определители все более низкого порядка. Если, например, мы встретились с определителем десятого порядка, то эквивалентными преобразованиями (домножениями всех элементов строки на одно и то же число и сложениями) его можно привести к определителю девятого порядка, затем — восьмого, пока не дойдем до определителя, который легко вычисляется непосредственно.

Точно так же, решая систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса, мы с помощью эквивалентных преобразований, умножений и сложений, постепенно приводим матрицу коэффициентов системы уравнений к треугольной форме, после чего решить систему уже не сложно.

Одним из источников ошибок в вычислениях являются, как известно, погрешности округления. Хотя погрешность каждого округления в отдельности очень не велика, но при большом количестве используемых умножений погрешности округления быстро нарастают. Одним из наиболее универсальных методов борьбы с погрешностями округления является перепрограммирование компьютера на вычисления с удвоенным количеством десятичных знаков. Метод эффективен, хотя и снижает скорость вычислительного процесса. Все это хорошо известно, однако недавно обнаружился еще один новый источник ошибок компьютерных вычислений: хотя бы одно из используемых эквивалентных преобразований может оказаться не эквивалентным в расширенном смысле. Этого уже достаточно для того, чтобы решаемая задача стала некорректной и теперь уже сколь угодно малая погрешность округления может сразу привести к серьезной ошибке.

По сравнению со старыми и хорошо известными источниками ошибок от погрешностей округления, с которыми давно научились бороться, новый источник ошибок обладает следующими характерными чертами:

- ошибка не нарастает медленно, она не пропорциональна количеству вычислений и округлений; ошибка может возникнуть при любом числе преобразований — достаточно, чтобы хотя бы одно из них оказалось эквивалентным в классическом смысле, но не в расширенном — и решение сразу может измениться коренным образом;
- повышение точности вычислений, удвоение числа десятичных знаков, с которыми работает компьютер, не помогает избегнуть ошибки.

Новый источник ошибок был первоначально обнаружен в известной задаче нахождения собственных значений (собственных чисел) системы линейных однородных уравнений с параметром для случая, когда некоторые из уравнений системы параметра не содержат (так называемая обобщенная задача о собственных значениях; она часто встречается в приложениях).

Впервые новый источник ошибок в обобщенной задаче вычисления собственных значений был рассмотрен в монографии [49] (во втором ее издании) на стр. 220—223, а также в [53], стр. 66—87.

Приведем пример вычисления собственных значений, выполненный в дипломной работе К. Г. Черткова. Рассматривалась система линейных однородных уравнений с параметром:

$$\begin{aligned}
&(\sqrt{2}-\lambda)x_1+\sqrt{2{,}5}x_2+\sqrt{3}x_3+\sqrt{3{,}5}x_4+\sqrt{4{,}5}x_5=0\\
&\sqrt{5}x_1+(\sqrt{5{,}5}-\lambda)x_2+\sqrt{6}x_3+\sqrt{6{,}5}x_4+\sqrt{7}x_5=0\\
&\sqrt{7{,}5}x_1+\sqrt{8}x_2+(\sqrt{8{,}5}-\lambda)x_3+\sqrt{9{,}5}x_4+\sqrt{10}x_5=0\\
&\sqrt{10{,}5}x_2+\sqrt{11}x_3+(11{,}5-\lambda)x_4+\sqrt{12}x_5=0\\
&\sqrt{12{,}5}x_1+\sqrt{13}x_2+\sqrt{13{,}5}x_3+\sqrt{14}x_4+\sqrt{14{,}5}x_5=0
\end{aligned} \qquad (72)$$

(пятое уравнение параметра λ не содержит).

Вычисления проводились дважды, каждый раз компьютер программировался на вычисления с различной точностью, с различным числом значащих цифр и в задании коэффициентов уравнений, и в промежуточных вычислениях. Производилось последовательное исключение переменных x_1, x_2, x_3, x_4 путем домножений и сложений до тех пор, пока не получалось уравнение с одним переменным:

$$M(\lambda)x_5 = 0, \qquad (73)$$

где $M(\lambda)$ — полином, среди корней которого находятся собственные значения системы (72).

При вычислении на четыре значащих цифры полином $M(\lambda)$ имел вид:

$$\begin{aligned}
M_4 = &-0{,}4\lambda^7-3379\lambda^6-2843\lambda^5+2312\lambda^4+320{,}7\lambda^3-\\
&-2{,}627\lambda^2-0{,}3388\lambda-0{,}00363.
\end{aligned} \qquad (74)$$

При вычислении на восемь значащих цифр получился полином

$$\begin{aligned}
M_8 = &-0{,}0002\lambda^7-3378{,}8896\lambda^6-2857{,}264\lambda^5+\\
&+2307{,}0121\lambda^4+322{,}77559\lambda^3-2{,}353532\lambda^2-\\
&-0{,}33105373\lambda-0{,}003563899.
\end{aligned} \qquad (75)$$

Мы убеждаемся, что помимо семи коэффициентов при λ^6, λ^5, ..., λ^0 и тем самым шести корней полинома $M(\lambda)$, относительно мало зависящих от погрешностей округления и с увеличением точности счета быстро приближающихся к своим истинным значениям, в полиноме $M(\lambda)$ присутствует причудливо зависящий от погрешностей округления старший член, ответственный за седьмой, большой по абсолютной величине корень, очень сильно зависящий от погрешностей округления, возрастающий по мере увеличения точности расчета и не имеющий ничего общего с истинными собственными значениями системы (72). Он появился из-за того, что одно из преобразований, используемых для исключения переменных, оказалось (как было показано в монографии [53]) не эквивалентным в расширенном смысле и сделало задачу вычисления собственных значений некорректной, зависящей от сколь угодно малых погрешностей округления. Особой опасности в этом нет, корни полинома $M(\lambda)$ все равно нужно проверять подстановкой в исходную систему (72), и тем самым проверять, действительно ли тот или иной корень является собственным значением системы (истинных собственных значений у системы (72) может быть не более четырех). Однако проверять лишний корень, появившийся из-за некорректности задачи, труднее, чем обычные лишние корни, и это надо иметь в виду.

Заметим, что при ручном счете всегда начинали с уравнений, не содержащих λ. Пользуясь ими, выражали одни переменные через другие и приходили к меньшему числу уравнений, каждое из которых уже содержало λ — т. е. приходили к классической (не обобщенной) задаче о собственных значениях, а в классической задаче при исключении переменных, как было показано в [53], изменения корректности не происходит. Для компьютерных вычислений такой подход неудобен (надо использовать две программы вместо одной). Компьютеру удобней исключать переменные в порядке их индексов, но при этом может происходить встреча с новыми явлениями, не встречавшимися при ручном счете.

Поэтому в компьютерных вычислениях нужно проводить тщательную проверку используемых алгоритмов, проверяя особенно тщательно — не использовались ли в них преобразования, эквивалентные в классическом смысле, но не в расширенном.

В заключение приведем еще один интересный и важный пример влияния преобразований, эквивалентных в классическом смысле, но не в расширенном, на достоверность компьютерных вычислений.

Хорошо известно, что для целого ряда практических задач важна устойчивость решений не по всем переменным, а только по части их. Так, например, положение ракеты в ходе ее полета к цели описывается системой уравнений с шестью переменными. Первые три переменных — это текущие координаты центра масс ракеты, еще три переменные — это углы поворота ракеты вокруг трех взаимно-перпендикулярных осей, проходящих через ее центр масс.

Для попадания в цель важна устойчивость движения ракеты по пяти переменным, а устойчивость по шестой переменной — углу поворота относительно продольной оси — не существенна, поскольку относительно этой оси ракета симметрична.

Обеспечить устойчивость по части переменных проще, чем по всем переменным, и поэтому в прикладной математике, в теории компьютерных вычислений давно существует большое и важное научное направление — исследование устойчивости относительно части переменных. Это научное направление развивали такие ученые, как академик В. В. Румянцев, член-корреспондент Российской академии наук В. И. Зубов, А. С. Озиранер, В. И. Воротников (авторы научных монографий, посвященных этой проблеме) и многие другие.

Первая трудность, которая встает перед исследователями устойчивости по части переменных, — это отыскание критерия подобной устойчивости. У наиболее часто встречающихся в различных приложениях систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами для проверки устойчивости по всем переменным существует, как известно, сравнительно простой критерий Гурвица, критерий проверки знаков вещественных частей корней характеристического полинома, но критерия устойчивости по части переменных найти не удавалось.

Тогда был придуман очень интересный и остроумный «метод μ-преобразований»: исходная система уравнений эквивалентными преобразованиями, заменой некоторых комбинаций старых переменных на новые переменные, преобразовывалась к такому виду, который оказывался устойчивым относительно всех переменных — проверить это было уже не трудно. Новые переменные обозначались обычно буквой μ — отсюда и название метода — «метод μ-преобразований». Если в новой системе оставались некоторые из старых переменных — переменных x_1, x_2, ..., x_k — а устойчива она была по всем переменным, то это означало, что исходная система относительно этих переменных x_1, x_2, ..., x_k была устойчива, поскольку преобразование исходной системы в новую форму было преобразованием эквивалентным и устойчивости решений (как и самих решений как таковых) оно не изменяло.

Вот простой пример (ранее рассмотренный в известной монографии В. И. Воротникова «Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных», М. Наука, 1991).

Система третьего порядка с тремя переменными

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 - 2x_3 \\ \dot{x}_2 &= 4x_1 + x_2 \\ \dot{x}_3 &= 2x_1 + x_2 - 2x_3 \end{aligned} \tag{76}$$

не является устойчивой по всем переменным, поскольку ее характеристический полином, равный определителю

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & 2 \\ -4 & \lambda-1 & 0 \\ -2 & -1 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = (\lambda+1)^2(\lambda-1) \tag{77}$$

имеет положительный корень $\lambda_3 = +1$. Не будет ли она устойчивой хотя бы по переменной x_1?

В. И. Воротников предложил для системы (76) ввести новую переменную

$$\mu = x_2 - 2x_3 \tag{78}$$

и преобразовать систему (76) к переменным x_i и μ. Поскольку из (78) следует, что $\dot{\mu} = \dot{x}_2 - 2x_3$, то с учетом второго и третьего из уравнений системы (76) получим, что $\dot{\mu} = -\mu$, и тогда для переменных x_1 и μ получится система уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + \mu \\ \dot{\mu} &= -\mu. \end{aligned} \tag{79}$$

Система уравнений (79) имеет характеристический полином

$$\begin{vmatrix} \lambda+1 & 1 \\ 0 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2 \tag{80}$$

с корнями $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, и поэтому решения x_1 и μ системы (80) будут устойчивыми. А поскольку система (80) была получена из системы (76) путем эквивалентных преобразований, то и решение $x_1(t)$ исходной системы (76) будет устойчивым.

Простота системы (79) позволяет легко найти ее решение:

$$x_1(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}, \tag{81}$$

где c_1 и c_2 — постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий. Исходную систему (76) также можно проинтегрировать непосредственно — решения системы (76), удовлетворяющие начальным условиям: $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$, $x_3(0) = x_{30}$, имеют вид

$$x_1(t) = x_{10}e^{-t} + (x_{20} - 2x_{30})te^{-t} \tag{82}$$

$$x_2(t) = 2(x_{10} + x_{20} - x_{30})e^{t} + 2(x_{30} - x_{20})te^{-t} + (2x_{30} - x_{20} - 2x_{10})e^{-t} \tag{83}$$

$$x_3(t) = (x_{10} + x_{20} - x_{30})e^{t} + (2x_{30} - x_{20})te^{-t} + (2x_{30} - x_{10} - x_{20})e^{-t} \tag{84}$$

$$\mu = x_2 - 2x_3 = (x_{20} - 2x_{30})e^{-t} \tag{85}$$

и мы убеждаемся, что решение $x_1(t)$ исходной системы (76) действительно тоже имеет вид (81) и тоже является устойчивым. Это обстоятельство еще раз подтверждает, что системы уравнений (76) и (79) эквивалентны (во всяком случае по отношению к переменной x_1), и поэтому использованное при переходе от системы (78) к системе (79) «μ-преобразование» является, как и другие «μ-преобразования», используемые в теории устойчивости по части переменных, преобразованием эквивалентным (во всяком случае в классическом смысле). Для проверки наличия устойчивости по части переменных «μ-преобразования» использовать можно, и их долгое время широко применяли. Только много позже было замечено, что использование «μ-преобразований» часто приводит к ошибкам: устойчивость по части переменных чаще всего исчезала при сколь угодно малых, неизбежных на практике, отклонениях реальных параметров исходной системы от их расчетных значений.

Это явление приводит к ошибкам в компьютерных расчетах: нетрудно численно проинтегрировать, например, систему уравнений (76), найти решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, можно даже (путем «покачивания» начальных условий) убедиться, что это решение асимптотически устойчиво, но все эти расчеты практического смысла иметь не будут, а будут только источником ошибочных рекомендаций, которые могут стать причиной аварий и катастроф. Причина проста: как нетрудно проверить, если некоторые из ненулевых коэффициентов системы (76) отклоняются от расчетных значений даже на сколь угодно малые величины, то устойчивость решения $x_1(t)$ системы (76) сразу исчезнет, и мы увидим, что теперь при $t \to \infty$ будет $|x_1| \to \infty$.

В то же время устойчивость решений $x_1(t)$ и $\mu(t)$ системы (79) сохранится при вариациях любых ее ненулевых коэффициентов. Нетрудно вычислить характеристические полиномы всего семейства уравнений

$$\begin{aligned}(1+\varepsilon_1)\dot{x}_1 &= -(1+\varepsilon_2)x_1 + (1+\varepsilon_3)\mu\\ (1+\varepsilon_4)\dot{\mu} &= -(1+\varepsilon_5)\mu.\end{aligned} \tag{86}$$

Эти характеристические полиномы являются определителями вида

$$\begin{vmatrix}(1+\varepsilon_1)\lambda + (1+\varepsilon_2) & 1+\varepsilon_3\\ 0 & (1+\varepsilon_4)\lambda + (1+\varepsilon_5)\end{vmatrix} = \\ = (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)\lambda^2 + +[(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_4) + (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_5)]\lambda + (1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_5) \tag{87}$$

и сразу видно, что при любых $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_5$, малых в сравнении с единицей, все они будут иметь отрицательные вещественные части у всех корней. Система (79) — в отличие от системы (76) — является параметрически устойчивой. Задача проверки устойчивости этой системы по переменной x_1 является задачей корректной, а для исходной системы (76) задача проверки устойчивости по переменной x_1 — не корректна.

Преобразование системы (76) в систему (79) является примером преобразования, эквивалентного в классическом смысле, но не в расширенном. Очень многие из «μ-преобразований», предложенных в теории устойчивости по части переменных, оказались эквивалентными в классическом смысле, но не в расширенном, и именно это обстоятельство объясняет причины многочисленных ошибок, возникших у тех, кто использовал эти преобразования на практике.

Задача проверки устойчивости по переменной x_1 для системы (76) методом «μ-преобразования» к системе (79) является примером задачи, относящейся к третьему классу: она изменяет корректность решаемой задачи при эквивалентном (в классическом смысле) преобразовании, использованном при ее решении. И именно неожиданная для исследователей встреча с задачей третьего класса стала причиной многих ошибок у тех, кто использовал «μ-преобразования».

Сделаем еще одно уточняющее замечание: хотя почти всегда, говоря о тех или иных преобразованиях, говорят: «такое-то преобразование — эквивалентно», «такое-то преобразование — не эквивалентно», но на самом деле надо всегда уточнять и говорить более точно: рассматриваемое преобразование является эквивалентным (в классическом смысле, или в расширенном) по отношению к тем или иным решениям, которые мы ищем. Преобразование системы (76) в систему (79) эквивалентно (в классическом смысле) по отношению к решению x_1 и не эквивалентно по отношению к решениям x_2 и x_3. Этих решений в системе (79) просто нет.

Более простой пример: если имеется система простых алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} &3x + y = 4 \\ &x + y = 2 \end{aligned} \tag{88}$$

и нам нужно найти решение x, а решение y нас не интересует, то преобразование системы (88) в уравнение

$$2x = 2 \tag{89}$$

(путем вычитания второго уравнения из первого) является эквивалентным преобразованием по отношению к решению x (и быстро ведет к правильному ответу $x = 1$), но оно не является эквивалентным преобразованием по отношению к решению y. Необходимость подобного уточнения в широко используемом понятии эквивалентных преобразований всегда нужно иметь в виду.

Пример с системами (76) и (79) показывает, что изменение корректности решаемой задачи при эквивалентных в классическом смысле преобразованиях математической модели может происходить по разным причинам и не сводиться к «обнулению» старших членов в системах дифференциальных уравнений или в математических моделях систем управления. Просто «обнуление» старших членов, исчезающее при вариациях параметров, или появление в преобразованной системе малых членов, которые являются разностью больших членов в исходной системе, является наиболее простой и чаще других встречающейся причиной изменения корректности при эквивалентных преобразованиях. Кроме того, эту причину легче всего выявить и устранить. Устранить ее можно введением дополнительной программы проверки в используемый пакет программ и это, безусловно, целесообразно делать.

Мы убедились, что введение понятия преобразований, эквивалентных в расширенном смысле, позволило разрешить трудности и парадоксы, накопившиеся в теории устойчивости по части переменных, и позволяет избежать ошибок при компьютерных вычислениях различных видов устойчивости и в других вычислениях.

В качестве примеров мы рассмотрели очень часто встречающуюся в приложениях задачу численного решения систем дифференциальных уравнений и обобщенную задачу вычисления собственных значений (собственных чисел) матриц. Эти примеры не исчерпывают всего многообразия задач, относящихся к недавно открытому третьему классу (классу задач, промежуточных между корректными и некорректными). В дальнейшем мы покажем, что задачи, относящиеся к третьему классу, уже обнаружены в области линейного программирования и интегральных уравнений. В скором времени, несомненно, будет открыто немало новых подобных примеров и открытие каждого нового примера будет уменьшать вероятность ошибки, часто возникающей у пользователя компьютера при неожиданной для него встрече с задачей, относящейся к третьему классу. Здесь открыто большое поле для интересной и важной для приложений научной работы, широкое поле для инициативы молодых научных работников.

§ 5. Практические рекомендации

Изложив основы недавно разработанной в СПбГУ теории эквивалентных в расширенном смысле преобразований, позволяющей избежать принципиальных ошибок в компьютерных вычислениях и технологиях, мы приведем теперь простые практические правила, позволяющие на основе этой теории легко избежать если не всех, то во всяком случае наиболее часто встречающихся источников ошибок.

А. Рекомендации по численному решению систем обыкновенных дифференциальных уравнений

Как уже было показано при рассмотрении примера, приведенного в § 1 *главы 3*, одним из источников исчезновения непрерывной зависимости решений системы дифференциальных уравнений от коэффициентов и параметров (как и всех связанных с этим неприятностей) является понижение порядка характеристического полинома системы при номинальных значениях коэффициентов и параметров из-за того, что коэффициент при старшем члене при номинальных значениях параметров системы оказывается разностью одинаковых чисел и обращается в нуль. Понятно, что уже при сколь угодно малых, неизбежных на практике, отклонениях реальных коэффициентов системы от расчетных значений, коэффициент при старшем члене уже не обращается в точный нуль, система повышает свой порядок, в ее общем решении появляются новые члены, и поэтому ее решение (т. е. функция, удовлетворяющая системе и заданным начальным условиям) может при сколь угодно малых вариациях коэффициентов и параметров изменяться коренным образом. Характерный пример — система (1) и (2) из *введения*. В ее характеристическом полиноме

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2; & -(\lambda^2 + 2\lambda + 1) \\ \lambda^2 + 4\lambda + 5; & -(\lambda + 1) \end{vmatrix} = (1-1)\lambda^4 + \lambda^3 + 5\lambda^2 + 7\lambda + 3 \tag{90}$$

коэффициент при старшем члене, при члене λ^4, обращается в нуль и именно отсюда проистекают все неприятности и возможные ошибки, подробно рассмотренные в предыдущих разделах.

Хотя данное обстоятельство не является единственной причиной неприятностей и ошибок, возникающих при неожиданных встречах с задачами третьего класса (промежуточных между корректными и некорректными), и это было показано при рассмотрении задач проверки устойчивости по части переменных, где источник ошибок, связанных с изменением корректности совсем другой, возможное «обнуление» старших членов характеристического полинома встречается довольно часто и проверяется наиболее просто.

Действительно, рассмотрим линейную с постоянными коэффициентами систему двух дифференциальных уравнений с двумя переменными x_1 и x_2:

$$\begin{aligned} &(a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \dots a_0)x_1 + (b_mD^m + b_{m-1}D^{m-1} + \dots b_0)x_2 = 0; \\ &(c_iD^i + c_{i-1}D^{i-1} + \dots c_0)x_1 + (d_kD^k + d_{k-1}D^{k-1} + \dots d_0)x_2 = 0. \end{aligned} \tag{91}$$

Старший член ее характеристического полинома будет иметь вид:

$$a_nd_n\lambda^{n+k} - b_mc_i\lambda^{i+m} \tag{92}$$

и он будет обращаться в нуль при выполнении двух условий:

$$n + k = i + m \tag{93}$$

$$a_nd_k - b_mc_i = 0 \tag{94}$$

При выполнении условий (93) и (94) система (91) оказывается особой и не обладает свойством непрерывной зависимости своих решений от коэффициентов и от параметров, от которых эти коэффициенты зависят. Решение подобной особой системы практического смысла не имеет. Однако условия (93) и (94) очень легко проверяются, и их надо просто проверить перед тем, как приступать к приведению системы (91) к нормальной форме и ее численному решению на компьютере.

Сделаем два дополнительных замечания:

1. На первый взгляд кажется, что одновременное выполнение двух равенств (93) и (94) является очень редким явлением, и поэтому задачи третьего класса при решении систем дифференциальных уравнений будут встречаться крайне редко. На самом деле, как это было показано в *главе 2*, при решении некоторых задач управления — и, в частности, при аналитическом конструировании оптимальных регуляторов — подобные задачи встречаются систематически и не один раз были причиной неприятных аварий. Поэтому пренебрегать возможной встречей с подобными задачами не следует, но простая проверка равенств (93) и (94) сразу убережет от возможных ошибок.
2. Если выполнено равенство (93) для степеней операторных полиномов в системе (91), а разность $a_nd_k - b_mc_i$ в формуле (94) равна не точному нулю, а малому числу ε (малому по сравнению с произведениями a_nd_k и b_mc_i), то коренное изменение решений системы (91) все же может произойти, но только уже не при сколь угодно малых вариациях коэффициентов системы, а при малых конечных вариациях коэффициентов. Поскольку малые конечные вариации коэффициентов вполне возможны и встречаются повсеместно, то нужно рассматривать как опасный и требующий отдельного исследования случай малой разности $a_nd_k - b_mc_i$ в формуле (94) — малой по сравнению с произведениями a_nd_k и b_mc_i.

Если не выполнено равенство (93), либо оно выполнено, но разность $a_nd_k - b_mc_i$ не является малым числом, то это означает, что сокращения старших членов в характеристическом полиноме системы (91) не происходит, система (91) не является вырожденной и можно уже гораздо меньше опасаться того, что она является системой особой, и ее решения окажутся некорректными. В то же время, как показывает пример системы (76), существуют системы не вырожденные, но особые, с некорректными решениями, способными изменяться коренным образом при малых вариациях их коэффициентов и параметров. Поэтому при расчете важных и ответственных объектов не следует пренебрегать прямой проверкой корректности — путем сравнения решений при номинальных и проварьированных коэффициентах, хотя это требует много труда и времени.

Мы рассмотрели простой метод избежания ошибок при численном решении системы двух дифференциальных уравнений с двумя переменными. Для избежания подобных ошибок при решении систем, состоящих из многих уравнений различных порядков и при вычислении собственных значений матриц и систем линейных однородных уравнений в обобщенной задаче о собственных значениях, в монографии [53] был приведен разработанный в СПбГУ простой метод «матриц степеней». В следующем разделе мы изложим его в небольшом сокращении.

Б. Метод «матриц степеней»

Рассмотрим систему линейных однородных уравнений с параметром λ:

$$\begin{aligned}
&(a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n = 0 \\
&a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots a_{2n}x_n + 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots (a_{nn} - \lambda)x_n = 0,
\end{aligned} \tag{95}$$

которую часто записывают в матричном виде:

$$(A - \lambda E)x = 0, \tag{96}$$

где x — n-мерный вектор переменных x_1; x_2 ... x_n, A — матрица коэффициентов системы (95), E — единичная матрица, т. е. матрица вида

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
. & . & . & . & . & . \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix}, \tag{97}$$

в которой на главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы матрицы — нули.

Собственными значениями (или собственными числами) матрицы A называют те значения параметра λ, при которых система (95) имеет ненулевые решения.

Хорошо известно, что задача вычисления собственных значений является одной из важнейших задач вычислительной математики и очень часто встречается в приложениях. Вычисление на компьютере собственных значений является, в частности, одним из этапов решения уравнений и исследования устойчивости решений для систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Собственные значения также используются при вычислении частот малых колебаний механических и электрических систем и во многих других областях приложений.

Помимо классической задачи о собственных значениях, когда параметр λ входит в каждое из уравнений системы (95), не менее часто приходится встречаться с обобщенной задачей о собственных значениях, когда в некоторые из уравнений системы (95) параметр λ не входит. Если, например, последнее из уравнений системы (95) имеет вид:

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nn}x_n = 0, \tag{98}$$

то задача вычисления собственных значений делается не классической, а обобщенной. Ее тоже можно записать в матричном виде, в виде векторно-матричного уравнения:

$$(A - \lambda\bar{E})x = 0, \tag{99}$$

но теперь — в отличие от формулы (96) — символом $\bar{E}$ обозначена не единичная, а квазиединичная матрица, т. е. матрица, в которой на главной диагонали стоит $n - r$ единиц и r нулей, а все остальные элементы квазиединичной матрицы являются нулями. Если, например, система (95) состоит из четырех уравнений и последнее из них не содержит λ, то квазиединичная матрица принимает вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для решения как классической, так и обобщенной задачи о собственных значениях может быть использован, как мы уже говорили, простой метод последовательного исключения переменных x_1; x_2; ... x_{n-1} путем домножений и сложений, пока не придем для последнего переменного x_n к уравнению

$$M(\lambda)x_n = 0, \tag{100}$$

где $M(\lambda)$ — полином, среди корней которого находятся собственные значения системы (95). Действительно, если при некотором значении λ полином $M(\lambda)$ равен нулю, то из равенства (100) следует, что x_n может и не быть нулем, т. е. при этом значении λ ненулевое решение системы (95) действительно существует.

Однако при использовании метода последовательного исключения переменных мы можем столкнуться с некорректностью решения. Докажем сначала существование такой возможности в общем виде для системы вида (95), состоящей из n уравнений, в которой только одно последнее уравнение не содержит параметра λ. Предположим, что мы решаем эту задачу путем последовательного исключения переменных, начиная с x_1, и рассмотрим положение, которое сложится перед последним шагом исключения, когда останутся два уравнения с двумя переменными x_{n-1} и x_n. На основании известных правил решения систем линейных алгебраических уравнений и используя формулы Крамера, можно вычислить, что эти два уравнения будут иметь вид:

$$\begin{aligned} &A_1 x_{n-1} + A_2 x_n = 0 \\ &A_3 x_{n-1} + A_4 x_n = 0, \end{aligned} \tag{101}$$

причем выражения A_1, A_2, A_3, A_4 будут полиномами различных степеней от переменной λ и будут равны следующим определителям $n - 1$ порядка:

$$A_1 = \begin{vmatrix} (a_{1;1} - \lambda) & a_{1;2} & \cdots & a_{1;n-1} \\ a_{2;1} & (a_{2;2} - \lambda) & \cdots & a_{2;n-1} \\ . & . & . & . \\ a_{n-1;1} & a_{n-1;2} & \cdots & (a_{n-1;n-1} - \lambda) \end{vmatrix}, \tag{102}$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} (a_{1;1} - \lambda) & a_{1;2} & \cdots & a_{1;n} \\ a_{2;1} & (a_{2;2} - \lambda) & \cdots & a_{2;n} \\ . & . & . & . \\ a_{n-1;1} & \cdots & \cdots & a_{n-1;n} \end{vmatrix}. \tag{103}$$

Таким образом, определитель (102) составлен из коэффициентов, стоящих в первых $n - 1$ уравнениях системы (95) при первых ее переменных — от переменной x_1 до x_{n-1}.

А определитель (103) будет равен тому же определителю (102), но в котором последний столбец заменен на столбец коэффициентов, стоящих в системе (95) перед переменной x_n. Для полиномов A_3 и A_4 имеем аналогичные соотношения:

$$A_3 = \begin{vmatrix} a_{2;1} & (a_{22} - \lambda) & \cdots & a_{2;n-1} \\ a_{3;1} & a_{3;2} & \cdots & a_{3;n-1} \\ . & . & . & . \\ a_{n;1} & a_{n;2} & \cdots & a_{n;n-1} \end{vmatrix}, \tag{104}$$

т. е. определитель (104) составлен из коэффициентов, стоящих в уравнениях (95) перед переменными от x_1 до x_{n-1}, начиная со второй строки и до последней, а полином A_4 определяется равенством

$$A_4 = \begin{vmatrix} a_{2;1} & (a_{2;2} - \lambda) & \cdots & a_{2;n} \\ a_{3;1} & a_{3;2} & \cdots & a_{3;n} \\ . & . & . & . \\ a_{n;1} & a_{n;2} & \cdots & a_{n;n} \end{vmatrix}, \tag{105}$$

т. е. определитель (105) отличается от определителя (104) тем, что последний столбец определителя (104) заменен в нем на столбец коэффициентов при переменной x_n.

Разлагая определители (102)—(105) по минорам соответствующих строк, нетрудно выписать члены со старшими степенями параметра λ. Получим:

$$\begin{aligned}
A_1 &= (-1)^{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots \\
A_2 &= (-1)^{n-2}a_{n-1;n}\lambda^{n-2} + \ldots \\
A_3 &= (-1)^{n-2}a_{n;1}\lambda^{n-2} + \ldots \\
A_4 &= (-1)^{n-3}(a_{n-1;n}\, a_{n;1} - a_{n-1;1}a_{n;n})\lambda^{n-3} + \ldots,
\end{aligned} \tag{106}$$

где точками обозначены члены с более низкими степенями параметра λ. Исключая из системы (101) переменную x_{n-1}, придем к уравнению

$$(A_2A_3 — A_1A_4)\, x_n = 0. \tag{107}$$

Система (101), а значит и исходная система (95), могут иметь не нулевые решения лишь для тех значений λ, при которых выражение, стоящее в круглой скобке в формуле (107), равно нулю. Выписывая из равенств (106) старшие члены, получим:

$$(A_2A_3 - A_1A_4) = a_{n-1;1}a_{n;n}\lambda^{2n-4} + (a_{n-1;n}a_{n;1} - a_{n-1;n}a_{n;1})\lambda^{2n-4} + \ldots, \tag{108}$$

где точками обозначены члены с более низкими степенями параметра λ (члены степени $2n - 5$ и ниже).

Рассмотрим наиболее интересный случай, когда произведение двух коэффициентов $a_{n-1;1}$ и $a_{n;n}$ равно нулю (это означает, что в исходной системе либо коэффициент $a_{n-1;1} = 0$, либо коэффициент $a_{n;n} = 0$). На первый взгляд кажется, что в этом случае в круглой скобке в формуле (108) стоит разность одинаковых членов, равная нулю, и поэтому полином (108) имеет степень ниже, чем $2n - 4$. Однако на самом деле это не так. При более внимательном анализе можно убедиться, что первое произведение $a_{n-1;1}\cdot a_{n;1}$ пришло в круглую скобку формулы (108) из полиномов A_2 и A_3, а второе произведение $a_{n-1;n}\cdot a_{n;1}$ пришло в круглую скобку из полинома A_4. Но полиномы A_2, A_3, A_4 вычислялись с неизбежными погрешностями округления, причем погрешность округления при вычислении полинома A_4 не зависела, разумеется, от погрешности округления при вычислении полиномов A_2 и A_3. А это означает, что разность, стоящая в круглой скобке в формуле (108), совсем не обязательно равна нулю. Она чаще всего равна малому числу, целиком зависящему от непредсказуемых комбинаций погрешностей округления, накапливающихся при вычислении полиномов A_2, A_3 и A_4. В результате от погрешностей округления оказывается целиком зависящим старший член полинома (108), а тем самым от тех же погрешностей округления зависит число корней этого полинома. Если эти погрешности равны нулю или взаимно компенсируются, то полином имеет одно число корней. Если погрешности не равны нулю, то может появляться лишний корень, а с ним и лишнее (фальшивое) собственное значение.

Прямая проверка показывает, что лишние, фальшивые собственные значения, действительно, часто появляются, хотя и не для любых систем уравнений. Однако, например, задача вычисления собственных значений системы (95), в которой последнее уравнение не содержит параметра λ при наличии равенства $a_{n;n} = 0$ или $a_{n-1;1} = 0$, может оказаться некорректной для любого n. Ранее, в § 4 уже приводился конкретный пример некорректности для системы вида (95) при $n = 5$ (система уравнений (72)).

В то же время если произведение $a_{n-1;1}\, a_{n;n}$ не равно нулю, то та же задача вычисления собственных значений методом последовательного исключения переменных оказывается корректной, поскольку в этом случае зависящее от погрешностей округления малое число, стоящее в круглой скобке формулы (108) (малое по сравнению с произведением $a_{n-1;n}\, a_{n;n}$), не может сколько-нибудь существенно изменить значения корней полинома $A_2A_3 - A_1A_4$.

Покажем теперь, что будет корректной классическая задача вычисления собственных значений, когда параметр λ входит во все уравнения системы (95), в том числе и в последнее. В этом случае полиномы A_1, A_2 и A_3 сохранят свой вид, а полином A_4 изменится и станет равным

$$\overline{A}_4 = (-1)^{n-1} a_{n-1;1} \lambda^{n-1} + \ldots, \tag{109}$$

где точками обозначены члены более низких степеней. В результате определитель системы тоже изменится и станет равным

$$A_2 A_3 - A_1 \overline{A}_4 = a_{n-1;1} \lambda^{2n-2} + \ldots, \tag{110}$$

где точками обозначены члены более низких степеней. Мы убеждаемся, что в классической задаче о собственных значениях вариации коэффициентов системы уравнений и погрешности округления при вычислениях не могут в общем случае изменить степень характеристического полинома и привести к появлению новых, фальшивых, собственных значений.

Для удобства решения проблемы корректности вычисления собственных значений самых различных систем однородных линейных уравнений, содержащих и не содержащих параметра λ, в монографии [53] было предложено ввести понятие о матрицах степеней, т. е. матрицах, в каждой клетке которых стоит число, равное степени полинома от параметра λ, стоящего перед тем или иным переменным в системе линейных однородных уравнений.

Так, для системы (95) при $n = 4$, «матрица степеней» будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{111}$$

(напомним, что постоянное число — это полином нулевой степени), а если последнее из уравнений системы (95) не содержит λ и имеет вид (98), то матрица степеней приобретает вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{112}$$

Для системы уравнений

$$\begin{aligned} &(\lambda^2 + 1)x_1 + 3x_2 = 0 \\ &(\lambda + 1)x_1 + (\lambda^3 + 1)x_2 = 0 \end{aligned} \tag{113}$$

матрица степеней имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}. \tag{114}$$

Теперь рассмотрим, какие изменения происходят в матрице степеней при исключении переменных. Пусть мы хотим исключить переменную x_1 из первых двух уравнений системы (95) для случая $n = 4$. Мы домножаем все члены второго из уравнений системы (95) на полином $(a_{11} - \lambda)$, а первое — на число a_{21}. В матрице степеней это отражается тем, что первые две строки

$$\begin{aligned} &1000 \\ &0100 \end{aligned} \tag{115}$$

переходят в строки

$$\begin{aligned} &1000 \\ &1211 \end{aligned} \tag{116}$$

(т. е. первая строка осталась без изменения и все элементы второй строки выросли на единицу). Затем мы вычитаем второе уравнение из первого. При этом переменная x_1 исключается, остается одно уравнение с тремя переменными x_2; x_3; x_4. В матрице степеней это отразится тем, что первые ее две строки (116) заменятся на одну строку (укороченную), состоящую из трех элементов:

$$2;\ 1;\ 1. \tag{117}$$

Каждый ее элемент равен максимальному из элементов предыдущих строк.

Теперь перейдем к исключению переменной x_1 из второго и третьего уравнения системы (95). Все члены второго уравнения домножаем на a_{31}, все члены третьего — на a_{21}, после чего третье уравнение вычитаем из второго, переменная x_1 исключается. В матрице степеней это отразится тем, что ее вторая и третьи строки

$$\begin{matrix} 0100 \\ 0010 \end{matrix} \qquad (118)$$

на первом этапе (при домножении) сохранят свой вид, а на втором этапе (вычитание третьего уравнения из второго) перейдут в укороченную строку

$$1;\ 1;\ 0. \qquad (119)$$

Теперь делается ясным общее простое правило преобразования матрицы степеней при исключении переменных по парам строк: сперва все числа первой строки из пары увеличиваются на крайнее левое число второй строки данной пары, а все числа второй строки данной пары увеличиваются на крайнее левое число первой строки. Затем в обеих строках отбрасываются крайние левые элементы, и две строки заменяются на одну новую. Каждый элемент новой строки равен наибольшему из соответствующих элементов предыдущих строк. Руководствуясь этим простым правилом, можно быстро и легко преобразовать любую матрицу степеней. Так, преобразуя матрицу (111), имеем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad (120)$$

Мы пришли к матрице размером 2×2, по которой легко установить — возможна или нет потеря корректности при вычислении собственных значений. Последняя из матриц (120) говорит о том, что после исключения переменных x_1 и x_2 мы пришли относительно переменных x_3 и x_4 к системе уравнений

$$\begin{aligned} &A_1x_3 + A_2x_4 = 0 \\ &A_3x_3 + A_4x_4 = 0, \end{aligned} \qquad (121)$$

где полином A_1 имеет третью степень, а полиномы A_2, A_3, A_4 — вторую. Это означает, что определитель системы (121), имеющий вид

$$\Delta = A_2A_3 - A_1A_4 \qquad (122)$$

будет разностью полиномов пятой и четвертой степени. При вариациях коэффициентов и при наличии погрешностей округления степень полинома не изменится, новых корней не будет. Задача вычисления собственных значений для системы (95) при $n = 4$ — корректна (в полном соответствии с ранее проведенным доказательством для произвольного n).

Если же рассмотреть систему (95) при $n = 4$, в которой последнее уравнение не содержит параметра λ и имеет вид (98), то ее матрица степеней имеет вид (122). Преобразуя ее, получим:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{123}$$

Из последней матрицы следует, что после исключения переменных x_1 и x_2 мы пришли относительно x_3, x_4 к уравнениям:

$$\begin{aligned} &A_1x_3 + A_2x_4 = 0 \\ &A_3x_3 + A_4x_4 = 0, \end{aligned} \tag{124}$$

где полином A_1 имеет третью степень, полиномы A_2 и A_3 — вторую, а полином A_4 — первую. Это означает, что определитель системы является разностью двух полиномов четвертой степени. Если старшие члены этих полиномов равны, или мало отличаются друг от друга, то вариации коэффициентов или погрешности округления могут привести к изменению степени определителя и его корней. Задача вычисления собственных значений может быть некорректной.

Из приведенных примеров делается очевидным общее практическое правило: задача вычисления собственных значений может быть некорректной, если в последней из матриц степеней размера 2×2 суммы по диагоналям равны. Если они не равны — задача корректна.

Заметим, что метод «матриц степеней» дает наиболее нужные для практики компьютерных вычислений достаточные условия корректности: если суммы по диагоналям не равны, то задача корректна, если они равны, то задача может быть и корректной и некорректной — в зависимости от конкретных значений коэффициентов (в частности, как уже было установлено — от коэффициентов $a_{n;n}$ и $a_{n-1;1}$). Если рассмотреть систему (95) при $n = 5$, в которой два последних уравнения не содержат параметра λ, то из простого преобразования матрицы степеней:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \tag{125}$$

убеждаемся, что в данном случае обобщенная задача вычисления собственных значений может быть некорректной.

Рассмотрим теперь особенно интересный пример: исследуем все ту же систему (95) при $n = 4$ и пусть все так же в три уравнения входит параметр λ, а четвертое — не входит. Но на этот раз, в отличие от ранее рассмотренного примера с матрицей степеней (112), поставим уравнение без параметра λ на первое место; матрица степеней примет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{126}$$

и будет отличаться от матрицы степеней (112) только порядком строк. Тем не менее, преобразуя матрицу (126) по общим правилам, получим

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}. \tag{127}$$

Суммы по диагоналям не равны, задача вычисления собственных значений — корректна. Пример интересен тем, что всего лишь изменение порядка уравнений в системе (четвертое уравнение поставили на первое место, фактически лишь перенумеровали уравнения, не меняя их) оказалось способным изменить корректность решаемой задачи.

В следующем разделе мы покажем, что корректность может зависеть от метода решения, и в частности — от способа исключения переменных.

B. Другой метод исключения переменных

Удобный метод исключения и преобразования переменных, отличный от изложенного в предыдущем разделе, был разработан в теории управления. Мы изложим его основные положения, сохраняя терминологию, принятую в теории управления. Более подробно метод был изложен в [45].

Метод преобразования и исключения переменных был разработан для линейных объектов управления с постоянными коэффициентами вида

$$x = Ax + Bu, \tag{128}$$

где x — n-мерный вектор переменных x_1; x_2 ... x_n, A — квадратная размера $n \times n$ матрица коэффициентов, u — управление (его можно рассматривать и как дополнительную переменную, как x_{n+1}), B — вектор-столбец коэффициентов при управляющем воздействии.

Объект управления (128) замкнут регулятором

$$u = kx, \tag{129}$$

где k — матрица-строка (т. е. в регуляторе не используются производные от переменных x_1; ... x_n).

Регуляторы вида (129) были предложены — как уже говорилось ранее — в теории аналитического конструирования оптимальных регуляторов и широко применяются в технике.

Поскольку непосредственно измеримыми и непосредственно используемыми в канале обратной связи часто могут быть не сами переменные x, а переменные y, связанные с переменными x прямоугольной матрицей H:

$$y = Hx, \tag{130}$$

то еще в учебном пособии [45] был рассмотрен вопрос: при каких преобразованиях переменных, при каких матрицах H сохранится устойчивость и параметрическая устойчивость замкнутой системы, и следовательно, задача о собственных значениях для системы (128)—(129) будет корректной. В дальнейшем будут изложены результаты исследования и метод исключения переменных для случая $n = 3$.

Поставив на место оператора дифференцирования в уравнение (128) параметр λ, приведем его к виду:

$$\lambda x = Ax + Bu \tag{131}$$

Теперь умножим правую и левую части равенства (130) на λ и подставим вместо λx его значение из (131). Получим

$$\lambda y = HAx + HBu. \tag{132}$$

Умножив правую и левую части этого равенства еще раз на λ и снова подставив вместо произведения λx его значение из (131), получим:

$$\lambda^2 y = HA^2x + HB\lambda u + HBu. \tag{133}$$

Уравнения (130), (132) и (133) можно рассматривать как одно векторно-матричное уравнение, связывающее векторные переменные x, y и u:

$$\begin{pmatrix} y \\ \lambda y - HBu \\ \lambda^2 y - HBu - HABu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H \\ HA \\ HA^2 \end{pmatrix} x\,. \tag{134}$$

Из уравнения (134) следует, что:

$$x = \begin{pmatrix} H \\ HA \\ HA^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} y \\ \lambda y - HBu \\ \lambda^2 y - HB\lambda u - HABu \end{pmatrix}, \tag{135}$$

где с помощью символа

$$\begin{pmatrix} H \\ HA \\ HA^2 \end{pmatrix}^{-1} \tag{136}$$

обозначена матрица, обратная к матрице

$$\begin{pmatrix} H \\ HA \\ HA^2 \end{pmatrix}. \tag{137}$$

Из уравнения (135) следует, что

$$x = L_1 y + L_2(\lambda y - HBu) + L_3(\lambda^2 y - HB\lambda u - HABu), \tag{138}$$

где L_1, L_2 и L_3 — векторы-столбцы, и, следовательно,

$$u = Kx = KL_1 y + KL_2(\lambda y - HBu) + KL_3(\lambda^2 y - HB\lambda u - HABu). \tag{139}$$

В дальнейшем рассмотрим частный случай, когда матрица $H = (0;\ 0;\ 1)$, т. е. является матрицей-строкой. Это означает, что в регуляторе используется только переменная x_3, и мы приходим к уже рассмотренному нами случаю: система уравнений (95) состоит из четырех уравнений с четырьмя переменными x_1; x_2; x_3 и $x_4 = u$, исключаются (только теперь другим способом) переменные x_1 и x_2 и исследуется — корректна ли задача вычисления собственных значений для оставшихся двух уравнений с переменными x_3 и $x_4 = u$.

Поскольку в рассматриваемом нами случае матрица H является матрицей-строкой, а произведение матрицы-строки на матрицу-столбец является числом, то второе уравнение, связывающее x_3 и $x_4 = u$, получает вид

$$(n_1\lambda^2 + n_2\lambda + n_3)x_3 = (n_4\lambda + n_5)x_4, \tag{140}$$

где n_1; n_2; ... n_5 — числа, которые на основе формулы (139) легко вычисляются (первое уравнение, связывающее x_3 и $x_4 = u$, получается непосредственно из уравнения (128) после замены оператора дифференцирования на λ и исключения x_1 и x_2).

Пример: система управления

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + 0{,}75u \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 - x_3 \\ \dot{x}_3 &= -x_1 + x_2 = 0{,}5u \end{aligned} \tag{141}$$

для обеспечения хорошего качества переходных процессов должна быть замкнута регулятором

$$u = -0{,}16x_1 + 0{,}36x_2 + 0{,}88x_3, \tag{142}$$

рассчитанным на основе методики «аналитического конструирования», предложенной в свое время А. М. Летовым. Система (141), замкнутая регулятором (142), устойчива и параметрически устойчива. Замкнутая система имеет хорошие переходные процессы. Если же переменные x_1 и x_2 не измеримы, то после их исключения по описанной выше методике приходим к регулятору, использующему только переменную x_3 и ее производные:

$$(0{,}1D - 0{,}87)u = (0{,}2D^2 + 0{,}56D + 1{,}08)x_3. \qquad (143)$$

У объекта управления (141), замкнутого регулятором (143), параметрической устойчивости уже не будет: устойчивость будет теряться при сколь угодно малых вариациях некоторых коэффициентов объекта управления или регулятора (причем при вариациях только определенного знака).

Задача проверки устойчивости системы уравнений (141)—(143) будет не корректной. Данный пример был ранее и более подробно рассмотрен в [45] на стр. 222—230.

Теперь идет самое интересное: проверка показывает, что описанный в настоящем разделе метод исключения переменных через векторно-матричное уравнение (134) приводит к тому, что задача проверки устойчивости объектов управления (128), замкнутых регуляторами вида (129) при измеримости одной (последней) переменной, является некорректной в общем случае, при любых коэффициентах объекта управления (если только $b_3 \neq 0$). Точно так же делается в общем случае некорректной и задача вычисления собственных значений системы уравнений (95), в которой последнее из уравнений не содержит параметра λ. (Заметим, что к тем же результатам — к некорректности задачи вычисления собственных значений в общем случае при любых значениях коэффициентов системы (95) — приводит и упомянутый в § 5 *главы 2* еще один метод исключения переменных путем умножения на двучлен вида $a + bD$.)

В то же время ранее уже было установлено, что при методе исключения переменных путем домножений и сложений эта задача становится некорректной лишь в частном случае, если либо $a_{n-1;1} = 0$, либо $a_{n;n} = 0$. Таким образом, если мы будем рассматривать систему (95), в которой $a_{n;n}\, a_{n-1;1} \neq 0$, то задача вычисления ее собственных значений при одном методе решения, при одном способе исключения переменных будет корректной, при другом методе решения та же задача станет не корректной (а в предыдущем разделе мы убедились, что корректность или некорректность даже при одном методе решения может зависеть просто от расположения уравнений; переставили уравнения — и корректность решения изменилась).

<u>Практическая рекомендация</u>: если при разных методах решения задачи получены разные результаты, то не следует думать, что в одном из методов обяза-

тельно допущена ошибка. Различие в результатах может быть и объективным явлением, связанным с изменением корректности задачи при изменении метода ее решения.

Г. Объяснение трудностей решения

Изложенные в разделах Б и В обстоятельства объясняют, почему проблема изменения некоторых свойств решений, и прежде всего — их корректности — оказалась трудной, сложной и получила решение только совсем недавно. Причина простая: исследователь решал задачу одним методом и убеждался, что задача корректна, затем ту же задачу он или другой исследователь решали другим методом и обнаруживали некорректность. Получавшуюся запутанную и непривычную ситуацию было очень не просто распутать. Трудности усугублялись от того, что у многих математиков вместо правильного представления об эквивалентных преобразованиях постепенно сложилось представление упрощенное. Правильное представление — эквивалентные преобразования не изменяют решений преобразуемой системы, но совсем не обязаны не изменять некоторые свойства решений, и в частности их корректность.

Упрощенное, неправильное представление: «эквивалентные преобразования ничего не меняют». Это очень живучее неправильное представление сложилось только потому, что эквивалентные преобразования часто, действительно, ничего не меняют. Но часто (и даже очень часто) не означает «всегда». Изменения корректности встречаются редко, но они важны, поскольку неожиданная, непредвиденная встреча с таким изменением может стать причиной ошибки в расчете и порожденной этой ошибкой аварии. Аварии тоже встречаются не часто, но последствия аварий тяжелы и внимание к ним не должно ослабевать.

Трудности в решении возникают еще и оттого, что не удалось найти критерия, позволяющего различать — какие из эквивалентных (в классическом смысле) преобразований изменяют корректность решаемой задачи, а какие — не изменяют.

Оказалось, что самые вроде бы «невинные» преобразования, которые, кажется, ни на что не могут повлиять, корректность все же меняют. Простой пример — исключение переменных из систем уравнений, «матрицами степеней» которых являются, соответственно, матрицы (123) и (126). Уравнения, входящие в систему — одни и те же. Изменилась лишь их нумерация — четвертое уравнение стало первым — и корректность решаемой задачи уже изменилась.

Корректность может зависеть от метода решения. Так, вычисление собственных значений для линейной однородной системы из четырех уравнений, в которой последнее из уравнений не содержит параметра λ, и произведение $a_{n-1;1}\ a_{n;n}$ не равно нулю, будет корректной задачей при их последовательном исключении. описанном в *подразд. Б*. Та же задача станет некорректной, если для исключения переменных использовать метод векторно-матричного уравнения, описанный в *подразд. В*.

Поэтому для того, чтобы получить ясный и определенный ответ, как уже ранее говорилось, следует рассматривать «триаду», состоящую из трех элементов:

1. Исследуемая математическая модель.
2. Решаемая задача (что именно мы хотим получить в результате решения).
3. Выбранный метод решения.

Только что рассмотренный пример с четырьмя линейными однородными уравнениями показывает, что при одной и той же математической модели и при той же решаемой задаче корректность решения может зависеть от метода, избранного для решения (т. е. от второго члена триады).

Практическая рекомендация: надежный ответ на вопрос — будет ли решение рассматриваемой задачи корректным или не будет — может дать (и дает) исследование «триады».

Более подробно о «триадах» рассказано в монографии [53].

Д. Уточнение определений

При изложении новых, недавно полученных научных результатов (а в настоящей книге излагаются новые результаты, полученные автором в 1987—2002 годах) очень важно пользоваться только привычными, общепринятыми определениями. Надо удержаться от соблазна ввести с самого начала новые, авторские определения. Если сделать это, то обсуждение новых научных результатов (и без того далеко не легкое — подробнее об этом будет рассказано в *приложении*) потонет в спорах об определениях, в спорах о преимуществах и недостатках новых определений. Поэтому надо придерживаться старых, привычных определений.

В то же время — и это надо прямо признать — многие привычные определения при более внимательном анализе оказываются не очень удачными. В этих случаях надо — не разрывая со старой традицией, со старыми определениями — осторожно их «подправлять» и уточнять.

Пример: определение эквивалентного (равносильного) преобразования и определение эквивалентных (равносильных) систем уравнений. Согласно наиболее авторитетным источникам («Математическая энциклопедия», том 4, стр. 800, М., Издательство «Советская энциклопедия», 1984 г. и «Математический энциклопедический словарь», стр. 511, М., Научное издательство «Большая российская энциклопедия», 1995 г.), уравнения или системы уравнений называются равносильными (эквивалентными), если множества их решений совпадают. Этим общепризнанным определением мы и пользовались в настоящей книге. Из него вытекает и определение эквивалентного (равносильного) преобразования: преобразование эквивалентно (в классическом смысле), если исходная и преобразованная системы эквивалентны между собой. Однако при более внимательном исследовании стало ясно, что в эти общепризнанные определения необходимо ввести уточнения.

Действительно, вернемся к известному μ-преобразованию системы уравнений (76) в систему (79). Эквивалентны эти системы или нет? Если формально следовать «Математической энциклопедии» или «Математическому энциклопедическому словарю», то они не эквивалентны: система (76) имеет три решения: $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, а система (79) — два решения $x_1(t)$ и $\mu(t)$ и совпадает у этих систем только решение $x_1(t)$. Однако это формальное толкование будет неверным, поскольку преобразование системы (76) в систему (79) проводилось именно для исследования устойчивости решения $x_1(t)$, а решения x_2 и x_3 нас совсем не интересуют и в условия задачи не входили. Поэтому системы (76) и (79) следует признать эквивалентными, а для того, чтобы не было противоречия с общепринятым определением, последнее следует уточнить и ввести уточненное определение: две системы уравнений назовем эквивалентными в отношении интересующих нас решений, если эти решения у обеих систем тождественны. Данное определение, которое использовалось в настоящей книге, не противоречит общепринятому, но уточняет его.

Кроме того, широко использовалось понятие «частично эквивалентных преобразований», когда преобразованная система сохраняет все решения исходной системы, но может иметь дополнительные решения, решениями исходной системы не являющиеся: эти решения необходимо потом отсеивать.

Подобные не полностью эквивалентные преобразования широко используются при исследованиях и расчетах, поскольку отсеять лишние решения не так трудно. Главное — чтобы сохранились неизменными все решения исходной системы. Не полностью эквивалентные системы, системы с дополнительными решениями в пробном учебнике [77] предлагалось называть «следствиями» исходных систем, но этот термин еще нельзя считать общепризнанным (в «Математической энциклопедии» и в «Математическом энциклопедическом словаре» этого термина нет). Поэтому мы пользовались термином «частично эквивалентные преобразования».

Рассмотрим теперь определения, относящиеся к корректным и некорректным задачам. В наиболее авторитетном по этому направлению исследований учебнике — учебнике [61] — на стр. 16 дается следующее определение: задачу называют корректной (или — что то же самое — корректно поставленной), если она удовлетворяет трем условиям:

1. Ее решение существует.
2. Решение определяется однозначно.
3. Задача устойчива — т. е. малым изменениям коэффициентов, параметров, начальных или граничных условий соответствуют малые изменения решений.

Если некоторая задача не удовлетворяет хотя бы одному из этих трех условий, то авторы учебного пособия [61] называют ее некорректной, или — что то же самое — некорректно поставленной.

Данное определение подвергалось критике, поскольку оно неоправданно и необъятно широко расширяет круг некорректных задач. Вряд ли можно, например, все огромное множество задач, не имеющих решения, относить к некорректным задачам.

Для того, чтобы не вмешивать читателя книги в эту еще не завершенную полемику, мы сузили круг рассматриваемых задач, обращая внимание лишь на те некорректные задачи, в которых не выполнялось третье условие — т. е. при сколь угодно малых изменениях коэффициентов, параметров, начальных или граничных условий решения изменялись на конечные величины, или же вообще менялись коренным образом. В результате, мы определяли некорректность задачи через третье условие. Это не входило в противоречие с определением, введенным в известном учебнике [61]. Просто мы рассматривали лишь те задачи, принадлежность которых к классу некорректных была бесспорна, сомнений и дискуссий не вызывала. В этом и заключалась польза используемого нами определения некорректных задач. Оно не противоречило общепринятому определению, но уточняло его.

Точность используемых определений особенно важна в области компьютерных вычислений и технологий. Компьютер работает строго формально — поэтому к точности определений и теорем следует относиться особенно тщательно.

Особенно внимательно следует относиться к различию между некорректными и плохо обусловленными задачами. В некорректных задачах существенные и даже коренные изменения в решениях могут происходить при сколь угодно малых изменениях коэффициентов, параметров, начальных или граничных условий, а в задачах плохо обусловленных существенные изменения решений могут происходить лишь при конечных малых изменениях тех же величин.

Неожиданная, непредвиденная встреча с плохо обусловленной задачей (так же, как и с задачей некорректной) может стать причиной ошибки в расчетах, поскольку истинное поведение исследуемой системы может в этом случае сильно отличаться от рассчитанного.

Некорректные задачи проще для исследования и, если можно так сказать, «менее коварны», чем плохо обусловленные, поскольку потеря корректности сопровождается, как правило, такими изменениями математической модели, которые заметны «на глаз» и служат для исследователя и пользователя компьютера предупреждающим сигналом (происходит, например, понижение степени характеристического полинома в системах дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и в математических моделях систем управления, становятся равными нулю определители в задачах на решение систем алгебраических уравнений и т. п.). В отличие от некорректных задач, задачи плохо обусловленные таких «предупреждающих сигналов» не подают и их труднее выделить и различать. Помощь в их выделении может оказать изучение некорректных задач. Если при некоторых значениях коэффициентов и параметров решаемая задача оказывается некорректной, то это является сигналом: почти наверняка рядом с ней, при других, но близких значениях коэффициентов и параметров лежат задачи плохо обусловленные. Характерный пример — система дифференциальных уравнений (1) и (2) из *введения*. При тех значениях коэффициентов, которые приведены в тексте книги, задача численного решения этой системы некорректна. Сигнал о некорректности подает понижение порядка характеристического полинома системы (1)—(2): по структуре уравнений (1) и (2) из *введения* он должен быть полиномом четвертой степени, а при тех значениях коэффициентов, которые приведены в тексте, он оказывается полиномом третьей степени. Это сигнал, предупреждающий об опасности ошибки. В то же время «рядом» с системой (1) и (2) из *введения* при близких к ней значениях коэффициентов уравнений будут лежать плохо обусловленные системы, которые имеют характеристические полиномы нормальной, четвертой степени; «предупреждающих сигналов» эти системы не подают и поэтому являются более опасными, чем система (1) и (2). Однако уже само существование некорректной задачи является сигналом о существовании «рядом лежащих» плохо обусловленных задач. Примером плохо обусловленной математической модели и плохо обусловленной задачи проверки ее устойчивости может служить рассмотренная в *главе 2* система уравнений (45) при $m = 1{,}0001$. При этом значении параметра m система (45) устойчива, имеет не возбуждающий сомнений характеристический полином четвертой степени с корнями, лежащими в левой полуплоскости комплексного переменного, далеко от мнимой оси. Согласно традиционным методам расчета, систему (45) при $m = 1{,}0001$ необходимо было признать устойчивой и сохраняющей устойчивость при вариациях параметров. На самом же деле она теряла устойчивость при изменении параметра m всего на две десятитысячных доли от его номинального значения, что на практике в ходе эксплуатации почти неизбежно. Поэтому результат традиционного расчета ошибочен, а сигналом неизбежной ошибки являлось превращение задачи расчета устойчивости системы (45) в некорректную при уменьшении параметра m всего на одну десятитысячную от его номинального значения.

Практическая рекомендация: желательно проверить, не станет ли решаемая задача некорректной при малых отклонениях коэффициентов и параметров от номинальных значений. Если это так, то решаемая нами задача является плохо обусловленной, и это говорит о том, что реальное поведение исследуемого объекта может коренным образом отличаться от расчетного при малых (но теперь обязательно конечных!) вариациях коэффициентов и параметров.

Еще одним небольшим уточнением общепринятых понятий и терминов является используемое нами понятие корректного решения. В наиболее авторитетном учебном пособии [61] и других изданиях в основу изложения, как мы уже говорили, положено понятие о корректных и некорректных задачах. Сразу возникает трудный вопрос: разнообразнейшие задачи, не имеющие решения (типа задачи нахождения действительных корней полинома $x^2 + 1$), следует относить к некорректным или не следует? Если придерживаться определения, приведенного в [61], стр. 16, то все необозримое множество подобных задач следует относить к некорректным, но тогда становится очень трудно выделить специфику действительно интересных некорректных задач. Гораздо удобней пользоваться (что мы и делали) понятием некорректного решения, т. е. такого решения, которое даже при сколь угодно малых вариациях коэффициентов, параметров и т. д. может измениться на конечную величину или даже измениться коренным образом. В противоположность этому корректное решение зависит от коэффициентов, параметров и т. д. непрерывно и сколь угодно малым изменениям коэффициентов, параметров или граничных условий соответствуют сколь угодно малые изменения решений. Новый подход — через корректность решения, а не задачи — не противоречит традиционному подходу, но немного уточняет его.

Заметим еще, что традиционно в определении непрерывной зависимости решений от параметров присутствуют бесконечно малые величины: «непрерывная функция характеризуется тем, что бесконечно малому приращению аргумента отвечает бесконечно малое приращение функции» (Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, 2003, том 1, стр. 166). Однако понятие бесконечно малых величин не является ни ясным, ни простым и приводило к большим трудностям в понимании. Там, где в этом понятии нет необходимости, его надо избегать и в определении непрерывной зависимости проще опираться на понятие сколь угодно малой величины: «функция (зависимость) непрерывна, если сколь угодно малому изменению аргумента соответствует сколь угодно малое изменение функции».

Точные, ясные и удобные определения особенно важны для компьютерных вычислений и технологий.

В тесной связи с рассмотренным в данном разделе вопросом о соотношении привычных и уточненных определений стоят трудности, встретившиеся при использовании одного из эквивалентных (в классическом смысле) преобразований — почленного дифференцирования. Это преобразование использовалось в исследованиях Эйлера еще в XVIII веке и им широко пользуются в теории управления. Однако при этом возникают некоторые тонкости, связанные с исторически сложившейся неточностью некоторых определений.

Рассмотрим простое дифференциальное уравнение:

$$\dot{x} + x = 0 \tag{144}$$

с начальным условием $x(0) = 0$. Его единственным решением, удовлетворяющим этому начальному условию, будет решение $x(t) = 0$, из которого следует, в частности, что $\dot{x}(0) = 0$. Если мы продифференцируем все члены уравнения (144), то придем к уравнению второго порядка:

$$\ddot{x} + \dot{x} = 0. \tag{145}$$

Для того чтобы решение уравнения второго порядка (145) было определенным, должны быть заданы два начальных условия, условия для переменной $x(t)$ и ее производной $\dot{x}$ — т. е. должно быть дополнительно задано значение $\dot{x}(0)$. Но, как уже было показано, начальное значение $\dot{x}(0)$ не произвольно, а следует из решения $x(t) = 0$ уравнения (144). Из этого решения, как мы уже говорили, следует, что $\dot{x}(0) = 0$, а с учетом двух начальных условий — прежнего условия $x(0) = 0$ и нового начального условия $\dot{x}(0) = 0$ — единственным решением уравнения (145) будет решение $x(t) = 0$ — то же самое, что и решение уравнения (144).

Этот пример иллюстрирует общее практическое правило (известное еще Л. Эйлеру): дифференцирование всех членов уравнения — при правильном, вытекающем из поведения решений исходного уравнения, назначении дополнительных начальных условий — является эквивалентным (в классическом смысле) преобразованием. Против этого правила иногда выставляется следующее возражение: уравнение (144) имеет общее решение

$$x(t) = c_1 e^{-t} \tag{146}$$

с одной постоянной интегрирования c_1, а общее решение уравнения (145) имеет вид

$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 \tag{147}$$

с двумя постоянными интегрирования. Поскольку общие решения (146) и (147) не тождественны друг другу, то почленное дифференцирование нельзя, якобы, считать эквивалентным преобразованием.

Это рассуждение неправильно и основано на неточной трактовке понятий «общее решение» и «частное решение». После того, как О. Коши стал вполне обоснованно понимать под решением дифференциального уравнения решение, удовлетворяющее начальным (или граничным) условиям, было бы естественным то, что ранее называли «общим решением» (т. е. решение, в которое входят постоянные интегрирования) называть теперь более правильно — «семейством решений». Для уравнений первого порядка это семейство зависит от одной постоянной интегрирования, для уравнений второго порядка — от двух и т. д. При таком подходе к терминологии не получалось бы недоумений и разногласий в ответе на вопрос — является ли почленное дифференцирование эквивалентным преобразованием.

Совершенно понятно, что после почленного дифференцирования семейство решений уравнения стало другим (в результате повышения порядка уравнения), но конкретное решение — удовлетворяющее единственно правильным дополнительным начальным условиям — осталось неизменным.

Разумеется, это не означает, что нужно непременно отказаться от привычных и традиционных определений «общего решения» и «частного решения», но нужно помнить, для уточнения, что «общее решение» является, фактически, семейством решений.

Комбинируя эквивалентные преобразования — дифференцирования всех членов уравнения, умножения их на числа, не равные нулю, и сложения — не трудно доказать, что умножение всех членов дифференциального уравнения на любой операторный полином $A(D)$ также будет — при правильном назначении дополнительных начальных условий — эквивалентным (в классическом смысле) преобразованием.

Пример: рассмотрим уравнение (144), которое можно, разумеется, записать в виде

$$(D + 1)x = 0. \tag{148}$$

Рассмотрим его вместе с начальным условием $x(0) = 0$, которому соответствует решение $x(t) = 0$. Умножив его на операторный полином $D - 1$, придем к уравнению

$$\ddot{x} - x = 0, \tag{149}$$

которое имеет общее решение (а точнее — семейство решений)

$$x(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{t} \tag{150}$$

с двумя постоянными интегрирования, определяемыми из начальных условий. Как уже говорилось ранее, дополнительное начальное условие $\dot{x}(0)$ определяется из решения $x(t)=0$ уравнения (148) с начальным условием $x(0) = 0$. Из этого решения находим, что $\dot{x}(0)=0$, а решение уравнения (149) с начальными условиями $x(0) = 0$; $\dot{x}(0)=0$ будет иметь вид $x = 0$ и совпадает, как и следовало ожидать, с решением исходного уравнения (148).

Преобразование уравнения (144) в уравнение (149) является простейшим примером преобразования, эквивалентного в классическом смысле, но не в расширенном. Решения этих уравнений тождественны, они одинаково тождественно равны нулю, однако у уравнения (144) решение $x(t) = 0$ устойчиво, а у уравнения (149) то же решение $x(t) = 0$ не устойчиво: при сколь угодно малых вариациях начальных условий, сколь угодно малом отклонении их от значений; $x(0) = 0; \dot{x}(0)=0$ решение $x(t)$ уравнения (149), особенно для больших t, может очень далеко отойти от решения $x = 0$.

Практическая рекомендация: почленное дифференцирование и умножение на операторный полином являются эквивалентными преобразованиями при условии правильного, соответствующего решению исходного уравнения, назначения дополнительных начальных условий. Эти преобразования эквивалентны в классическом смысле, но не всегда эквивалентны в расширенном — это надо иметь в виду при решении практических задач.

От определений вообще многое зависит. Так, например, когда мы в начале *главы 2* ввели определение вариаций параметров и проварьированного параметра через равенство (1), из которого следовало, что «нуль не варьируется», то уже одним этим мы направили все дальнейшее исследование на рассмотрение влияния относительных изменений коэффициентов и параметров, а не абсолютных. Можно было идти по другому пути, ввести другое определение и включить в исследование те случаи и примеры, когда какой-либо коэффициент или параметр был нулем, а после изменения стал малым числом ε. Но это будет совсем другая теория, с другим кругом рассматриваемых объектов и с другими результатами исследования.

Поэтому к используемым определениям нужно быть очень внимательным.

Ж. Выделение некорректных и плохо обусловленных задач

В завершение раздела, посвященного практическим рекомендациям, рассмотрим вопрос о выделении типичных задач, имеющих некорректные или плохо обусловленные решения. Вообще говоря, этот вопрос несколько выходит за пределы тематики настоящей книги, которая посвящена новым, недавно открытым научным результатам — эквивалентным преобразованиям, изменяющим корректность, новому, третьему, классу задач, промежуточных между корректными и некорректными и другим новым и неожиданным результатам, полученным в прикладной математике и теории управления на факультете ПМ-ПУ Санкт-Петербургского государственного университета.

В то же время существование некорректных задач было обнаружено Ж. Адамаром еще в 1902 году, т. е. уже более ста лет назад; за прошедшее столетие эти задачи неоднократно были предметом научного исследования, казалось бы все давно рассмотрено и решено, но на самом деле существует немало практических вопросов, важных для всех тех, кто проводит расчеты с использованием вычислительной техники и в то же самое время не получивших исчерпывающего решения; некоторые из этих вопросов мы далее рассмотрим.

Известно, что некорректные задачи требуют к себе особого подхода, и если некорректную задачу решать обычными методами как корректную, то почти неизбежна серьезная ошибка в расчетах. Поэтому перед началом решения любой задачи желательно проверить — корректна решаемая задача или нет. Существует общее правило проверки корректности — повторение решения при немного измененных коэффициентах, параметрах, начальных условиях, граничных условиях и т. д. Общее правило действенно, но громоздко, требует очень много дополнительных вычислений и анализа их. Поэтому желательно выделить «опасные» группы задач, среди которых особенно часто встречаются задачи некорректные или плохо обусловленные.

Встретившись с подобными «опасными» задачами, нужно обязательно проводить подробную проверку корректности решения, в то время как для остальных (т. е. «не опасных») задач этого можно не делать.

1. Вычисление корней полиномов

Задача вычисления корней полинома n-й степени:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_0 \tag{151}$$

и, в частности, задача вычисления его вещественных (не мнимых и не комплексных) корней является одной из задач, наиболее часто встречающихся в приложениях. Она подробно рассмотрена в курсах вычислительной математики и для ее решения давно составлены стандартные программы. Однако и учебные курсы, и стандартные программы относятся к полиномам, коэффициенты которых заданы, имеют некоторые номинальные значения a_{in}. В то же время на практике почти всегда коэффициенты полинома, корни которого требуется вычислить, определяются в конечном счете из некоторого опыта или измерения с ограниченной точностью, и поэтому номинальные значения коэффициентов, которые вводятся в компьютер, могут отличаться от истинных значений. Обычно можно лишь указать только пределы, внутри которых заключены истинные, неизвестные нам значения коэффициентов полинома, т. е. мы можем лишь опираться на неравенства:

$$a_{in}(1-\varepsilon_i) \le a_{i\,\text{ист}} \le a_{in}(1+\varepsilon_i), \tag{152}$$

где $a_{i\,\text{ист}}$ — истинные значения коэффициентов полинома, a_{in} — их номинальные значения, ε_i — числа, характеризующие точность опыта и измерения. В технических измерениях обычно принимают $\varepsilon = 0{,}001$, что соответствует «точности до третьего десятичного знака». Возможны, разумеется, и другие значения ε. Все зависит от конкретной точности опыта или измерения. Но если коэффициенты полинома известны лишь приближенно, то и любая компьютерная программа вычислит его корни тоже только приближенно с неизбежными погрешностями — даже если предположить, что сам расчет проводился идеально точно. Как связаны погрешности в задании коэффициентов с погрешностями вычисления корней?

В этом большом и сложном вопросе полезно выделить наиболее важную часть — т. е. выделить те случаи, когда малым погрешностям коэффициентов могут соответствовать большие погрешности корней.

Ранее уже указывалось, что если полином (151) имеет кратные корни, то задача вычисления его вещественных корней — некорректна. При сколь угодно малых вариациях коэффициентов полинома вещественные кратные корни могут исчезнуть (а кратные корни могут быть только вещественными). Это обстоятельство удобно пояснить на рис. 13, где показан пример зависимости значений полинома (151) от переменной x (кривая 1).

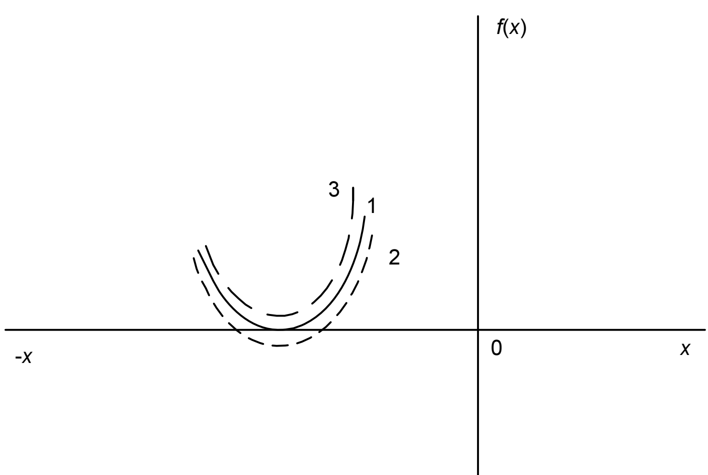

Рис. 13

Наличие кратного корня $x_1 = x_2$ у полинома (151) означает, что кривая 1 касается оси абсцисс. Но уже при сколь угодно малых вариациях коэффициентов полинома (151) касание может исчезнуть, и кривая 1 может перейти либо в кривую типа 2, имеющую два пересечения с осью абсцисс, либо в кривую типа 3, не имеющую ни одного пересечения. В первом случае вместо кратного корня появляются два близких друг к другу вещественных корня, а во втором случае вещественные корни исчезают, появляются два комплексных сопряженных корня. Эти два комплексных корня будут иметь малые (равные друг другу и противоположные по знаку) коэффициенты при своих мнимых частях. Точно так же при малых вариациях коэффициентов полинома (151) график функции $f(x)$ из равенства (151) может сразу перейти из кривой типа 3 в кривую типа 2, и наоборот. Отсюда вытекает простое следствие: пусть при вычислении корней полинома по стандартной компьютерной программе при номинальных значениях его коэффициентов в числе корней оказались два близких друг к другу вещественных корня x_1 и x_2 — настолько близких, что разность $x_2 - x_1$ много меньше, чем сами корни x_1 и x_2. Это сразу говорит об «опасности» решаемой задачи. Вполне может оказаться, что при истинных (не известных нам, но мало отличающихся от номинальных) значениях коэффициентов исследуемый полином вообще не имеет вещественных корней, имеет только комплексные корни. В то же время, как известно, отсутствие вещественных корней может свидетельствовать о том, что практическая задача, математическую модель которой мы рассматривали, не имеет решения; если решением может быть только вещественное число, тогда получается, что расчет при номинальных значениях коэффициентов свидетельствует, что решение есть, а на самом деле, при истинных значениях коэффициентов, решения нет. Такую «опасную» задачу нужно обязательно детально проверить на корректность повторными расчетами, проверить, как ведут себя функция $f(x)$ в равенстве (151) и корни полинома при различных значениях коэффициентов a_i внутри интервала их возможных значений, очерченного неравенствами (152).

Точно так же, если при вычислении корней полинома (151) получилась пара комплексных сопряженных корней и у этой пары коэффициенты при мнимых частях оказались (по абсолютной величине) много меньше, чем коэффициенты при вещественной части, то это снова говорит об «опасности» этой задачи в отношении корректности ее решения. Мы снова не можем быть уверены, что при истинных, не известных нам, но близких к номинальным, значениях коэффициентов полинома его корни не сделаются вещественными вместо комплексных. В этом случае тоже необходима проверка поведения значений полинома и его корней при различных значениях коэффициентов полинома a_i внутри интервала их возможных значений, очерченного неравенствами (152).

Практическая рекомендация: сигналом об «опасности» задачи вычисления вещественных корней полинома, сигналом об ее возможной некорректности или плохой обусловленности является наличие среди корней либо пары очень близких вещественных корней (частный случай — точно совпадающие корни), либо пары комплексно сопряженных корней, у которых коэффициенты при мнимых частях много меньше (по абсолютной величине) коэффициента при вещественной части. Такие «опасные» задачи требуют тщательной проверки внутри всего интервала возможных истинных значений коэффициентов полинома, очерченного неравенствами (152).

Отметим также, что если решением рассматриваемой нами практической задачи могут быть комплексные (а не обязательно вещественные) числа, то задача вычисления корней полинома является корректной. При сколь угодно малых изменениях коэффициентов полинома изменения положения его корней на комплексной плоскости являются сколь угодно малыми.

2. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений

Для определенности будем в дальнейшем рассматривать дифференциальные уравнения второго порядка, т. е. уравнения вида:

$$F(x; y; \dot{y}; \ddot{y}) = 0, \tag{153}$$

зависящие от независимой переменной x, искомой функции y, а также от ее первой и второй производной $\dot{y}$ и $\ddot{y}$.

Задача нахождения решения $y(x)$ уравнения (153) называется краевой (или граничной), если дополнительные условия на функцию y, делающие задачу определенной, заданы не в одной точке, а в двух. Могут быть, например, заданы условия:

$$y(x = a) = y_1;$$

$$y(x = b) = y_2. \tag{154}$$

Условия типа (154) называют краевыми (граничными) условиями. Покажем, что даже для простого уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0 \tag{155}$$

краевая задача может быть некорректной.

Зададим краевые (граничные) условия в виде

$$y(x = 0) = 0; \tag{156}$$

$$y(x = b) = m. \tag{157}$$

Известно, что общее решение уравнения (155) имеет вид

$$y = c_1 \sin x + c_2 \cos x, \tag{158}$$

где c_1 и c_2 — постоянные интегрирования. Из условия (156) следует, что $c_2 = 0$. Из второго краевого условия (157) находим, что $c_1 = \dfrac{m}{\sin b}$.

Таким образом, заданным краевым условиям удовлетворяет решение

$$y_1(x)\frac{m}{\sin b}\sin x\,. \tag{159}$$

Теперь заметим, что величина b в краевом условии (157) известна почти всегда из опыта или измерения с неизбежной малой погрешностью ε и поэтому решение (159) на самом деле имеет вид:

$$y_2(x) = \frac{m}{\sin(b \pm \varepsilon)}\sin x\,. \tag{160}$$

Если $b = \pi$, то краевая задача для уравнения (155) при $m \neq 0$ некорректна: поскольку $\sin \pi = 0$, то при $\varepsilon = 0$ решения не существует; если $\varepsilon \neq 0$, то решение существует, но целиком зависит от погрешности ε даже при сколь угодно малых ε.

Если $b \neq \pi$, но краевое условие (157) мало отличается от $b = \pi$, то краевая задача плохо обусловлена: даже при малых погрешностях ε в задании величины b решения (159) и (160) могут очень сильно отличаться друг от друга. Если, например, $b = 1{,}55$ и $m = 0{,}01$, то при $\varepsilon = -0{,}01$ будет $y(x) = 2 \sin x$, а при $\varepsilon = +0{,}01$ будет $y(x) = 10 \sin x$ — т. е. при погрешности $\varepsilon = +0{,}01$ решение будет в пять раз больше, чем при $\varepsilon = -0{,}01$.

Причину некорректности и плохой обусловленности легко установить из формулы (159): при $x = \pi$ все решения (интегральные кривые) пересекаются. Поэтому понятно, что если в краевом условии (157) величина b близка к $b = \pi$, то малые изменения величины b могут сильно изменить решение, а при точном равенстве $b = \pi$ решение может измениться на любую величину даже при сколь угодно малом ε.

Таким образом, «опасными» в отношении плохой обусловленности могут быть краевые задачи, в которых краевое условие задается при значении x, соответствующем пересечению решений.

Решения краевых задач и корректность этих решений существенно отличаются от решений задачи Коши, когда заданными являются не краевые, а начальные условия. Давно доказано (и доказательство приводится в достаточно подробных учебниках по дифференциальным уравнениям), что для одного дифференциального уравнения любого порядка задачи Коши корректна и решение дифференциального уравнения (при выполнении условий Липшица) непрерывно зависит от параметров и начальных условий. В то же время мы убедились, что решения краевых задач даже для простых дифференциальных уравнений могут не иметь непрерывной зависимости решений от краевых (граничных) условий и решение краевой задачи — даже для одного уравнения, а не для системы уравнений — может быть задачей некорректной.

Практическая рекомендация: при решении краевых задач полезно проверить — не находятся ли краевые условия в точках пересечения различных решений или вблизи этих точек. В первом случае краевая задача для дифференциального уравнения или системы уравнений некорректна, во втором случае она чаще всего оказывается плохо обусловленной.

3. Задачи вариационного исчисления и теории оптимального управления

Простейшей задачей вариационного исчисления является задача отыскания функции $y(x)$, доставляющей экстремум, т. е. максимум или минимум — функционалу

$$J = \int_a^b F(x; y; \dot{y})dx \,, \tag{161}$$

зависящему от независимой переменной x, искомой функции $y(x)$ и ее производной $\dot{y}$ при учете граничных условий: $y(a) = y_1$; $y(b) = y_2$.

Необходимым условием для функции $y(x)$, составляющей экстремум, является выполнение уравнения Эйлера:

$$\frac{dF}{dy} - \frac{d}{dx}\frac{dF}{d\dot{y}} = 0 \,. \tag{162}$$

Для функционалов вида (161) уравнения Эйлера являются дифференциальными уравнениями второго порядка.

Решения уравнения Эйлера называются экстремалями. Если экстремум функционала (161) существует и достигается в классе кусочно-гладких функций, то он может достигаться только на экстремалях.

В учебниках по вариационному исчислению оговаривается, что при решении надо проверить отсутствие у экстремалей сопряженных точек (т. е. точек, в которых пересекаются близкие экстремали, выходящие из точки $x = a$) внутри и на границе интервала $a \le x \le b$. Условие отсутствия сопряженных точек внутри и на границе интервала $a \le x \le b$ называется условием Якоби. Максимум или минимум функционала может существовать лишь в том случае, если условие Якоби выполнено. Однако в учебниках не рассмотрен случай, когда внутри и на границе интервала $a \le x \le b$ сопряженные точки отсутствуют, но лежат недалеко от концов интервала. В этом случае формально все хорошо, условие Якоби выполнено, однако решение вариационной задачи может оказаться некорректным или (что бывает чаще) плохо обусловленным.

Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$J = \int_0^b (y^2 - \dot{y}^2)dx, \tag{163}$$

с граничными условиями $y(0) = 0$, $y(b) = m$. (Заметим, что к исследованию функционала (163) приводит важная практическая задача о критической нагрузке стержня длиной b, сжимаемого продольной силой.) Для функционала (163) имеем

$$\frac{dF}{dy} = 2y; \frac{dF}{d\dot{y}} = 2\dot{y} \tag{164}$$

и уравнение Эйлера принимает уже знакомый вид (155). Как уже было установлено в предыдущем разделе, его решения (в данном случае — экстремали), удовлетворяющие условию $y(0) = 0$, имеют вид:

$$y = c_1 \sin x. \tag{165}$$

Если $b < \pi$, то экстремали (165) не пересекаются, условие Якоби выполнено; казалось бы, все в порядке. Однако, как уже было показано в предыдущем разделе, если разность $\pi - b$ мала, то задача плохо обусловлена и уже малые погрешности в измерении длины стержня могут привести к большим изменениям экстремалей и значений функционала (163). Так, при $b = 1{,}55$ и погрешности $\varepsilon = \pm\, 0{,}01$ экстремали, как было показано в предыдущем разделе, при различных погрешностях ε, лежащих внутри интервала $\varepsilon = \pm\, 0{,}01$, могут измениться в пять раз с соответствующим изменением величины функционала. Если же разность $\pi - b$ меньше возможной погрешности в измерении длины исследуемого стержня, то компьютерное исследование критической нагрузки может дать уже совершенно ошибочный результат, поскольку при $b = \pi$ нарушается необходимое условие Якоби.

Практическая рекомендация: помимо обычной проверки отсутствия сопряженных точек внутри интервала $a \le x \le b$ желательно проверить, нет ли сопряженных точек за пределами его, но вблизи от точки $x = b$.

Рассмотренный пример является одним из наиболее простых и далеко не единственным. В вариационном исчислении и в теории оптимального управления существует много задач с критическими точками, решения которых сильно изменяются или даже меняются коренным образом при неизбежных малых отклонениях действительных параметров исследуемого объекта от значений, полученных в результате измерения и принятых за номинальные при компьютерных расчетах.

Решение задач вариационного исчисления, как известно, сводится чаще всего к краевым задачам для систем дифференциальных уравнений второго порядка — уравнений Эйлера для исследуемого функционала. Поэтому некорректность вариационных задач может возникать, во-первых, из-за некорректности системы дифференциальных уравнений (о которой было рассказано в § 1), во-вторых, из-за некорректности краевой задачи (о которой уже было рассказано), и, наконец, при синтезе оптимальных систем возникают особые случаи некорректности, примеры которых приводились в [45].

Один из таких примеров, связанных с синтезом оптимальных систем управления для объектов, подверженных влияниям не полностью известных возмущающих воздействий, был подробно рассмотрен в *главе 1*.

Некорректность данной задачи синтеза стала в 60—70-х годах XX века причиной ряда аварий при использовании «аналитически сконструированных» оптимальных регуляторов, и лишь потом был найдет простой критерий выделения опасных задач — неравенство (73) в *главе 1*. Исследование этого неравенства позволило выработать простые правила избежания ошибок в компьютерных расчетах оптимизации и порождаемых этими ошибками аварий.

Практическая рекомендация: перед расчетом оптимального управления следует проверить, выполняется ли неравенство (73) из *главы 1*, и если оно не выполняется, то следует изменить аналитическую аппроксимацию спектра возмущающих воздействий — изменить так, чтобы это неравенство было выполнено.

Выполнение приведенных в § 5 несложных практических рекомендаций позволит избежать ошибок и повысить надежность компьютерных вычислений.

Заключение

Изложенный материал показывает, что научные исследования последних лет, выполненные на факультете ПМ-ПУ Санкт-Петербургского государственного университета, позволяют по-новому и более обоснованно подойти и к синтезу гарантирующих управлений, и к различным компьютерным вычислениям и технологиям.

Мы показали это на примере расчета устойчивости и запасов устойчивости (в том числе и по части переменных), на примере вычисления собственных значений систем линейных однородных уравнений с параметром, вычисления решений систем дифференциальных уравнений и некоторых других компьютерных вычислений.

Но этими примерами дело не ограничится. Раз в СПбГУ оказалось уточненным такое важнейшее понятие математики, как эквивалентное преобразование (а эквивалентные преобразования пронизывают сверху донизу всю математику и всю практику компьютерных вычислений), то следствия будут очень глубокими и разнообразными. Они позволят уточнить и улучшить многие разделы прикладной математики и практики компьютерных вычислений. Но сделать это могут специалисты, хорошо знающие те или иные разделы прикладной математики. Вскоре после первых публикаций исследований автора настоящей книги профессор Ф. П. Васильев обнаружил плодотворность использования понятия о преобразованиях, эквивалентных в расширенном смысле в задачах линейного программирования (см. монографию [79]), а профессор В. С. Сизиков применил новое понятие при решении интегральных уравнений и обнаружил, что некоторые из широко используемых преобразований одних видов интегральных уравнений в другие являются преобразованиями, эквивалентными в классическом смысле, но не в расширенном, и это является источником ошибок в компьютерных вычислениях (см. учебное пособие [90]).

Исследования, посвященные проблемам преобразований, эквивалентных в расширенном смысле, посвященные третьему классу задач математики, физики и техники — классу задач, промежуточных между ранее известными классами корректных и некорректных задач — эти исследования ни в коей мере нельзя считать завершенными. Здесь открыто поле для интересной и плодотворной научно-исследовательской работы. Я рад, что в этой работе принимали активное и результативное участие студенты, аспиранты и выпускники факультета ПМ-ПУ Санкт-Петербургского государственного университета — Красноперова Д. Г., Новогран С. С., Фроленков Д. Б., Чертков К. Г. Некоторые из полученных ими научных результатов получили отражение в публикациях [81—84; 85; 92; 93]. Будем надеяться, что и другие молодые люди захотят испытать свои силы на новом и многообещающем научном направлении, о котором кратко рассказано в настоящей книге. Для первоначального знакомства с предметом исследования можно использовать научно-популярные публикации [87; 88].

Одним из возможных направлений исследований является поиск новых задач, изменяющих корректность (в частных случаях — параметрическую устойчивость, непрерывную зависимость решений от коэффициентов и параметров и т. п.) при эквивалентных преобразованиях, используемых при их решениях. В настоящее время подобных примеров обнаружено еще совсем немного, а должно их быть гораздо больше. Обнаружение каждого нового примера изменения корректности при эквивалентных преобразованиях в той или другой области является новым научным результатом и полезным делом, поскольку предостерегает пользователя о возможной ошибке при расчетах и уменьшает тем самым вероятность ошибки.

Необходимо еще отметить, что несмотря на всю новизну и значимость исследований, проведенных на факультете ПМ-ПУ в области эквивалентных преобразований, эти исследования не имеют «революционного» характера, не опровергают каких-либо ранее доказанных теорем. Эти исследования уточняют (хотя и существенно уточняют) традиционные теоремы и методики расчета, которые часто опираются — как это ко всеобщему удивлению выясняется при внимательном анализе — не на доказательства, а на расплывчатые представления и рассуждения. Большинство утверждений современной прикладной математики опираются на надежные доказательства и случаи опровержения опубликованных доказательств в истории математики встречаются не часто (см. [86] стр. 107, 146, 149, 170). Однако до самого последнего времени встречались и встречаются положения, основанные не на доказательстве, а на привычке. Не существует доказательства теоремы: «любые системы дифференциальных уравнений, которые можно привести к нормальной форме Коши, обладают свойством непрерывной зависимости решений от параметров». Существует только привычная уверенность в том, что такая теорема должна быть справедливой. И уверенность эта опирается лишь на то, что для систем в нормальной форме эта теорема, действительно, доказана, а эквивалентные преобразования, преобразующие исходную систему в нормальную форму, как принято думать, не должны, якобы, «ничего изменять». Эта привычная уверенность, как уже говорилось, далеко не безобидна и ведет к ошибкам в расчетах.

Точно так же не существует доказательства теоремы: «любые системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, у которых корни характеристического полинома лежат в левой полуплоскости комплексного переменного далеко от мнимой оси, обладают свойством параметрической устойчивости». Эта никем не доказанная «теорема» до сих пор лежит в основе расчетов устойчивости в большинстве проектно-конструкторских организаций, несмотря на то, что еще в 1987 году, в [45] и потом — в публикациях [47—49; 51; 53; 76] демонстрировались примеры особых систем, для которых эта, никем не доказанная, но привычная «теорема» не верна. В тех же публикациях (наиболее подробно — в [53]) приводились примеры аварий и катастроф, причиной которых стали ошибки в расчетах, порожденные использованием этой неверной «теоремы».

Практика последних лет показала, что преодоление не обоснованных, но ставших привычными представлений — дело трудное и долгое. Ход обсуждения публикаций [47—53] это показал. Как вести себя в таких условиях исследователю, аспиранту, научному работнику, инженеру, работающему над получением новых научных результатов?

Об этом рассказано в *приложении* к основному тексту. Стиль изложения в *приложении* избран другой. Это уже не строгий учебный материал для студентов и пользователей вычислительной техники, а, скорее, просто непринужденная беседа о правилах научного сообщества с моими уважаемыми коллегами — аспирантами, научными работниками, пользователями компьютеров и компьютерных технологий, со всеми теми, кто считает себя членами научного сообщества, всеми теми, кто любит науку и понимает, что наука является самой прекрасной из всех возможных сфер приложения своих сил и способностей.

ПРИЛОЖЕНИЕ

О правилах научного сообщества

В основном тексте книги было рассказано о новых научных результатах, полученных в Санкт-Петербургском государственном университете — результатах настолько простых и значимых, что их необходимо ввести и в учебный процесс, и в практику компьютерных расчетов. Понятно, что любые научные результаты получают практический смысл только тогда, когда они признаны, усвоены научным сообществом (под «научным сообществом» мы подразумеваем сообщество инженеров, пользователей персональных компьютеров, научных работников и преподавателей, интересующихся наукой, следящих за научными публикациями, за новыми научными результатами, готовых обсудить и использовать их в своей работе и в преподавании). Признание научным сообществом новых результатов, как это хорошо известно из истории науки, далеко не всегда проходит быстро и легко.

Дело в том, что научные работники и преподаватели вуза — это двойственные существа. С одной стороны, они, разумеется, понимают, что новый и значимый научный результат является самой большой драгоценностью научного мира, понимают, что без новых научных результатов и наука и преподавание быстро зачахнут и умрут.

С другой стороны, большинство преподавателей и научных работников — это обычные, земные, грешные люди и ничто человеческое им не чуждо. Не чужды им и такие естественные чувства, как консерватизм, нежелание переучиваться, отходить от привычных, хорошо усвоенных представлений в пользу нового и необычного. А иной раз ко всему этому примешивается еще и обычная зависть к более удачливому коллеге: ему посчастливилось найти великую драгоценность — новый и значимый научный результат — а мне, вот, не посчастливилось. Может возникнуть (а часто и действительно возникает) «черная» зависть, которая, разумеется, маскируется под очень «научные» доводы, доказывающие, что новый результат неудачен, недостоверен, а то и просто неверен — это уже в меру фантазии оппонента.

Все эти обстоятельства затрудняют признание новых научных истин, они являются крупным препятствием на пути научного прогресса, и для борьбы с ними научное сообщество еще в XVIII—XIX веках выработало определенные правила и принципы, облегчающие обсуждение и признание новых научных результатов.

Об этих принципах и правилах будет рассказано далее.

В последние десятилетия недавно закончившегося XX века ранее выработанные правила и принципы стали в России забываться и нарушаться, и это не может не тревожить. Принципы и правила, выработанные научным сообществом, можно (разумеется, условно) назвать «грамматикой» науки, и они не менее важны, чем факты, законы и теоремы, которые можно считать (тоже, разумеется условно) «словарем» науки. «Грамматика» науки не менее важна, чем ее «словарь», и мы в настоящем *приложении* изложим очень коротко основные принципы и правила научного сообщества, причем изложим их на материале дискуссий, возникших в ходе обсуждения результатов, опубликованных в *главах 2* и *3* настоящей книги (а ранее — в работах [47—53]). В основу *приложения* легли лекции, написанные для выпускников и аспирантов БГТУ.

§ 1. Принцип контрпримера

Все началось с того, что в ходе исследования систем автоматического управления в 1987—1990 годах были обнаружены системы, для которых традиционные методы расчета и анализа не давали правильного ответа на вопросы об их параметрической устойчивости и о запасах устойчивости. К этому времени считалось общепризнанным, что для анализа запаса устойчивости линейных систем с постоянными коэффициентами достаточно исследовать характеристический полином замкнутой системы (или — что то же самое — исследовать матрицу коэффициентов при записи системы в нормальной форме Коши, или исследовать амплитудно-частотную характеристику системы и т. п.). Считалось общепризнанным, что если все корни характеристического полинома лежат в левой полуплоскости комплексного переменного далеко от мнимой оси, то рассматриваемая система сохранит устойчивость, по крайней мере, при малых отклонениях параметров системы от расчетных значений. И вот в 1987—1991 годах были обнаружены особые системы, примеры которых приводились в *главах 2* и *3*. Эти системы имели прекрасные корни своих характеристических полиномов, говорившие, казалось бы, о хороших запасах устойчивости, и, тем не менее, эти системы могли терять устойчивость даже при сколь угодно малых отклонениях реальных параметров объекта управления или регулятора от расчетных значений. Тем самым стало очевидным, что традиционные методы расчета не полны, что они не могут дать достоверного ответа на важнейшие вопросы об устойчивости и запасах устойчивости, а поэтому традиционные методы расчета и анализа систем управления следует дополнить — дополнить анализом тех преобразований, с помощью которых был получен характеристический полином из исходных уравнений рассматриваемой системы. Было совершенно очевидно, что без таких дополнений не удастся избежать ошибок в расчетах и порождаемых этими ошибками аварий и катастроф самолетов, атомных реакторов и других важных технических объектов.

К сожалению, этот простой и ясный результат был встречен с большим недоверием. Молодые коллеги говорили мне: «Юрий Петрович, у Вас все уж слишком просто. Привели примеры — и все. Нет, Вы покажите: где, в каком месте содержится ошибка в доказательстве теоремы о параметрической устойчивости».

Это возражение сразу показывает, насколько слабо ориентированы молодые научные сотрудники в соотношениях между теоремами, их доказательствами и контрпримерами, т. е. примерами, доказывающими неверность ранее сформулированных теорем. А ведь еще в 30-х годах XX века выдающийся венгерский математик Д. Пойа (в старых переводах — Полиа) справедливо подчеркивал: «Математика состоит из двух вещей — теорем и контрпримеров» (т. е. контрпримеры не менее важны, чем теоремы и их доказательства).

Действительно, в реальной работе математика теорема возникает чаще всего как обобщение подтверждающих утверждение теоремы примеров. Так, легко проверить, что существует много примеров систем с корнями, лежащими в левой полуплоскости комплексного переменного и обладающими параметрической устойчивостью. Отсюда возникает догадка (будущая теорема): все такие системы обладают параметрической устойчивостью. Но еще до того, как начать эту догадку доказывать, превращать в теорему, исследователь проверяет догадку контрпримером — проверяет, а не существует ли систем с корнями, лежащими в левой полуплоскости, но параметрически неустойчивых. Если хотя бы одна такая система обнаружилась — догадке конец, пытаться доказывать ее как теорему — пустая трата времени (а ведь сколько времени тратят впустую те научные работники (к сожалению, многие), которые недооценивают роль контрпримера!). Только если ни одного контрпримера не обнаружено, исследователь начинает доказывать теорему.

А когда теорема (и ее доказательство) опубликованы, то коллеги автора теоремы начинают, прежде всего, с поиска опровергающих ее контрпримеров. Начинают потому, что найти ошибку в чужом доказательстве трудно, очень трудно. Если сомневаешься в утверждении теоремы, то самое простое и эффективное — это искать контрпример. Так в реальной научной жизни чаще всего и поступают; именно так, через контрпример, чаще всего и рушатся опубликованные, но неверные теоремы (а доказательства анализируются редко).

Исторический пример: в 1821 году признанный лидер математики того времени О. Коши опубликовал (с доказательством, разумеется) теорему: «Сумма любого сходящегося ряда непрерывных функций непрерывна». А через пять лет Н. Абель нашел (и опубликовал) всего один сходящийся ряд непрерывных функций, не имеющий непрерывной суммы.

Несмотря на то, что Абелю было тогда всего 24 года, и он был почти никому не известен в математическом мире, после публикации его контрпримера теорема великого Коши была немедленно признана ошибочной. И только через 22 года Зейделем и Стоксом была вскрыта причина ошибки в доказательстве Коши. Как и всякая ошибка гения, она оказалась поучительной и глубокой — Коши не учел (да и не мог учесть) не известного в 1821 году требования равномерной сходимости ряда (см. подробнее [86], стр. 107—108).

Любопытна, разумеется, и непростая причина ошибки в доказательстве теоремы о параметрической устойчивости, но особой необходимости знакомства с этой причиной нет. Если продемонстрирован контрпример, то теорема все равно неверна, в причину можно не вникать. Необходимо лишь, разумеется, заменить опровергнутую теорему другой, более узкой, но верной. Я предложил использовать в расчетах устойчивости следующую теорему: параметрической устойчивостью обладают линейные системы, у которых корни характеристического полинома лежат в левой полуплоскости далеко от мнимой оси, кроме систем особых, и, в частности, тех систем, у которых определитель «матрицы степеней» обращается в нуль. Необходимо, конечно, рассказать, что такое «матрица степеней», но подробный рассказ о ней был опубликован еще в [53] — во всех трех изданиях книги [53] о «матрице степеней» рассказано на стр. 74—82.

Из этой новой теоремы следует простое практическое правило надежного, достоверного расчета: надо сначала проверить, не является ли система особой, после чего уже можно применять традиционные методы.

§ 2. О правилах научной дискуссии

В феврале 2002 года новая теорема о параметрической устойчивости в кругу других интересных вопросов обсуждалась на расширенном научном семинаре на факультете прикладной математики — процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета, и один из наиболее авторитетных присутствующих профессоров выдвинул возражение. По его мнению, «опубликованные [48; 53] контрпримеры не опровергают старой теоремы, поскольку все они относятся к вырожденным системам». Напомню, что вырожденными называют системы дифференциальных уравнений, порядок которых ниже, чем у систем того же вида, но с другими коэффициентами. Вырожденные системы часто встречаются в приложениях.

Данное возражение произвело впечатление на присутствующих на семинаре молодых (да и не только молодых) научных работников. Между тем, при самом простом анализе оно показывает свою несостоятельность. Действительно, старая теорема утверждала: параметрической устойчивостью обладают все системы с «хорошими» корнями. С учетом опровергающих ее контрпримеров, я предложил уточненную формулировку — параметрической устойчивостью обладают системы с «хорошими» корнями, кроме систем особых. Возражение уважаемого профессора равносильно другой формулировке: параметрической устойчивостью обладают системы с «хорошими» корнями, кроме систем вырожденных. Остается лишь доказать, что класс вырожденных систем совпадает с классом систем особых (возражающим это не было доказано) — и мы придем к формулировке, уже опубликованной в [53].

Таким образом, все присутствующие на семинаре 11.02.2002 г., и молодые, и не молодые научные сотрудники не заметили, что в качестве возражения выдвигается не доказанное утверждение, а если оно будет доказано, то не только не опровергнет, а лишний раз докажет оспариваемое возражающим положение, ранее опубликованное в [53].

Данное обстоятельство лишний раз говорит о том, насколько оказалось утерянной культура научной дискуссии, без которой серьезная наука невозможна. А причина простая: в последней трети XX века научные журналы редко публиковали дискуссии, и с каждым десятилетием все реже и реже. Серьезная письменная и печатная дискуссия подменялась ее суррогатом — устным обсуждением на конференциях и семинарах. Но в устной речи, если вопрос сложный, трудно уследить за логикой собеседника, да и высказанные доводы быстро забываются (как сформулировал В. Маканин: «Когда я просто говорю — я за свои слова не отвечаю. Я отвечаю только за то, что написано моим пером»). Необходимо возродить повседневную публикацию дискуссий в научных журналах и шире рассказывать о великих научных дискуссиях прошлого в курсах истории науки. Только тогда мы вырастим настоящих научных работников-исследователей, которых не повергнут в смущение фразы о «вырожденных системах».

Приведем дополнительные примеры.

Формируя правила научной дискуссии, полезно вспомнить очень старый известный ответ Лежандра (1752—1833) Гауссу (1777—1855) во время их дискуссии о приоритете: «Не существует открытия, — писал Лежандр, — которое нельзя было бы приписать себе, сказав, что те же вещи были найдены мной на несколько лет раньше; но если не дано этим словам доказательства, состоящего в указании места, где они были опубликованы, то это утверждение становится беспредметным и представляет собой только обиду для истинного автора открытия».

«В математике случается очень часто, — продолжает Лежандр, — что находят заново те самые вещи, которые уже были открыты другими. Подобное случалось со мной много раз, но я никогда не упоминал об этом и не называл “нашим принципом” принцип, который другой опубликовал раньше меня» (подробнее — в [86], стр. 86—92).

А вот другой пример, уже из XX века: в 1960 году член-корреспондент Академии наук СССР Александр Михайлович Летов предложил метод «аналитического конструирования», т. е., собственно, метод расчета регуляторов вида

$$u = \sum k_i x_i \ , \tag{166}$$

где u — управляющее воздействие, k_i — постоянные коэффициенты, x_i — все переменные, от первой, x_1, до последней, x_n, присутствующие в математической модели объекта управления (опубликовано в [30]). А. М. Летов показал, что можно так рассчитать величины коэффициентов k_i, что будет обеспечена устойчивость системы управления, ее параметрическая устойчивость, а также хорошие переходные процессы. При этом все коэффициенты k_i в регуляторе [166] рассчитывались аналитически (а не подбором, как ранее), почему А. М. Летов и назвал свой метод «аналитическим конструированием».

Поскольку регуляторы вида (166) легко реализовывались и обеспечивали хорошее качество регулирования, они быстро стали широко использоваться на практике. Сообщения об использовании их то на одном, то на другом объекте управления десятками появлялись в 60-х годах на страницах технических журналов того времени.

А потом произошел большой конфуз: «аналитически сконструированные» регуляторы стали причиной нескольких серьезных аварий из-за потери устойчивости, хотя по расчету казалось, что устойчивость обеспечена. Причина заключалась в том, что у многих объектов управления не все переменные x_i доступны для использования в регуляторе и их заменяли измеряемыми, пользуясь, разумеется, только эквивалентными преобразованиями, не изменяющими решений системы и ее переходных процессов. В те годы еще не знали, что эквивалентные (в классическом смысле) преобразования могут изменять параметрическую устойчивость, что и было истинной причиной аварий. Но в те годы этого не знали, и причины аварий списывали на «недостатки» метода аналитического конструирования. В результате «аналитическое конструирование» просто перестали применять, заменив его более сложными методами оптимального управления, не порождающими столь частые аварии.

Таким образом, на практике уже приходилось иметь дело с авариями, причиной которых были ошибки расчета, неразличение преобразований эквивалентных в классическом смысле и в расширенном (о необходимости такого различения было рассказано в *главе 2*). Но тогда, в 60—70-е годы XX века эта причина еще не была выяснена. В результате убрали только наиболее явный источник аварий — использование метода «аналитического конструирования» с исключением части переменных, — но аварии, порождаемые неразличением преобразований, эквивалентных в различных смыслах, хотя и более редко, но все равно происходили (см. публикацию [53], стр. 20—23).

Истинная причина аварий не была раскрыта в те годы потому, что не было тогда проведено на страницах научных журналов полноценной широкой дискуссии по поводу неожиданной и парадоксальной потери параметрической устойчивости. Научное руководство в те годы совсем не поощряло научные дискуссии в печати, на страницах журналов и книг. Я хорошо помню, как мы, специалисты, в своем кругу, устно, очень горячо, обсуждали интереснейшее и таинственное явление потери устойчивости при «аналитическом конструировании», но до истинной причины добраться тогда не удалось (впервые все прояснилось лишь много лет спустя, в 1987 году, в публикации [45], стр. 230).

Устное обсуждение, даже самое горячее и искреннее, не могло заменить тогда полноценной дискуссии в печати. Если бы такая дискуссия прошла тогда, то различие между преобразованиями, эквивалентными в классическом смысле и в расширенном, было бы, наверно, обнаружено много раньше и многих аварий удалось бы избежать.

Эти примеры, взятые как из давней, так и из совсем недавней истории науки, лишний раз свидетельствуют о важности письменного (а еще лучше — печатного) оформления научных дискуссий, когда аргументы оппонентов четко фиксируются на бумаге и могут быть в дальнейшем беспристрастно оценены сторонними лицами. Именно они — сторонние лица — выносят окончательный приговор: кто был прав и кто не прав в научной дискуссии, но сделать это они могут, опираясь только на печатный (в крайнем случае — рукописный) материал.

§ 3. Теоремы или предрассудки?

Математика считается точной наукой, которая исходит из ясных и общепризнанных определений и через доказательные рассуждения приходит к непреложным правилам и закономерностям, формулируемым чаще всего в виде теорем. Так должно быть, но на самом деле, в реальной научной жизни, далеко не всегда бывает так. Предрассудки — как это ни странно — существуют и в математике. Мне пришлось с этим столкнуться при обсуждении новых результатов, полученных в области эквивалентных преобразований.

Согласно общепринятому определению, эквивалентными (или — что то же самое — равносильными) называют преобразования, не изменяющие решений преобразуемой системы. Эквивалентные преобразования очень широко применяются в самых разнообразных расчетах и вычислениях.

Простейшие эквивалентные преобразования (умножение всех членов уравнения на число, не равное нулю, перенос членов из левой части в правую с изменением знака) изучаются еще в средней школе. Там же, в средней школе, обращают внимание учеников на то, что существуют преобразования, внешне похожие на эквивалентные, но на самом деле изменяющие решения преобразуемой системы, но ни в средней школе, ни в вузах ничего не говорится о том, что эквивалентные преобразования не должны изменять никаких свойств решений. Хорошо известно, что одно и то же решение какого-либо дифференциального уравнения — например, решение $x(t) = e^{-t}$ — может быть (в зависимости от уравнения) устойчивым и неустойчивым, может обладать свойством параметрической устойчивости, а может и не обладать.

При решении многих практических задач знание свойств решений часто не менее важно, чем вычисление самих решений как таковых, но из определения эквивалентных преобразований совершенно не следует, что эквивалентные преобразования не могут изменять некоторые свойства решений.

Тем не менее, когда я в 1987—1991 годах опубликовал примеры, в которых при эквивалентных преобразованиях изменялись некоторые важные свойства и характеристики решений (и, в частности — изменялась параметрическая устойчивость), то эти примеры почти всеми были встречены с недоверием. «Юрий Петрович, — говорили мне, — если у Вас что-то изменилось, значит использованные Вами преобразования на самом деле не были эквивалентными. Ищите ошибку».

Оказалось, что к концу XX века у большинства математиков сложилось прочное убеждение (а фактически — предубеждение). Они считали, что «эквивалентные преобразования ничего не должны менять». С этим прочным убеждением (не основанном ни на какой теореме) оказалось нелегко бороться. А ведь наши великие предшественники — математики XVII—XVIII веков, выбиравшие названия для математических понятий, — различали, как я уже говорил, преобразования эквивалентные и преобразования тождественные (пример тождественного преобразования — это преобразование разности квадратов в произведение: $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$.

Многочисленные примеры эквивалентных преобразований, сохраняющих неизменными решения, но изменяющие некоторые важные свойства этих решений, приведены в *главах 2* и *3* этой книги. Ранее они приводились в работах [45; 47; 48; 51; 53] и при каждой публикации неизменно встречались с удивлением и даже с недоверием. Такова сила предубеждения. А ведь никакой теоремы, которая утверждала бы, что из неизменности самих решений при эквивалентных преобразованиях следует неизменность всех свойств решений, никогда не доказывалось и не могло доказываться. Просто постепенно, без всяких доказательств, сформировалось и созрело убеждение: «эквивалентные преобразования ничего не меняют», и это убеждение оказалось очень прочным. Причина укрепления такого убеждения заключается только в том, что эквивалентные преобразования, изменяющие свойства решений и корректность решаемой задачи (т. е. преобразования, эквивалентные в классическом смысле, но не в расширенном) встречаются редко, и на них очень долгое время не обращали внимания.

Уверенность в том, что эквивалентные преобразования ничего не меняют, сыграла роковую роль в компьютерных вычислениях, и, в частности, при численном решении систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

При компьютерных вычислениях, как уже говорилось, очень удобно привести исходную систему дифференциальных уравнений путем эквивалентных преобразований к нормальной форме, к форме n уравнений первого порядка. Для нормальной формы составлены стандартные программы. Поскольку преобразование к нормальной форме выполняется путем эквивалентных преобразований, то решения, полученные компьютером для нормальной формы, тождественны с решениями исходной системы. В части вычисления решений дифференциальных уравнений как таковых преобразование к нормальной форме возражений не вызывает. Это так. Но на практике нас интересуют не только сами решения, но и их свойства, в том числе и важнейшее из свойств — непрерывная зависимость решений от коэффициентов и параметров. Ведь на практике коэффициенты и параметры дифференциальных уравнений почти всегда известны с ограниченной, конечной точностью. При отсутствии непрерывной зависимости от параметров решение теряет практический смысл, поскольку мы уже не можем быть уверены в том, что неизбежная на практике сколь угодно малая погрешность в коэффициентах и параметрах не приведет к большому отклонению реального поведения исследуемого объекта от расчетного, а значит — приведет к опасной ошибке в расчетах.

Поэтому важнейшей теоремой теории дифференциальных уравнений, той теоремой, на которой основаны все практические приложения теории, является теорема о непрерывной зависимости решений от параметров. Эта теорема приводится в учебниках.

Однако — обратите особое внимание на это — данная теорема доказывается в учебниках для систем уравнений в нормальной форме, состоящих из n уравнений первого порядка. Иногда она доказывается еще и для одного дифференциального уравнения *n*-го порядка. Для других многочисленных систем уравнений в учебниках доказательств нет. Почему-то очень долго и у студентов, и у преподавателей не возникал естественный вопрос: «А как же обстоят дела для огромного множества всех прочих систем, например, систем, состоящих из одного уравнения третьего порядка и одного — первого порядка, или для системы из двух уравнений второго порядка и т. п.? Как обстоит дело для таких систем? Их решения всегда зависят от параметров непрерывно или не всегда?»

Я задавал этот вопрос очень многим — и выпускникам, недавно прослушавшим университетский курс математики, и известным, заслуженным, специалистам в области дифференциальных уравнений. Всегда следовал уверенный ответ: «Если исходную систему, состоящую из уравнений разных порядков, можно эквивалентными преобразованиями привести к нормальной форме, то исходная система тоже обладает свойством непрерывной зависимости решений от параметров».

Нетрудно увидеть, что в основе этого ответа лежит убеждение в том, что эквивалентные преобразования ничего не должны менять. Теперь мы убеждаемся, что это распространенное убеждение является на самом деле предубеждением, предрассудком, поскольку в *главах 2* и *3* (а ранее — в публикациях [45; 47; 48; 51; 53] и др.) приводились примеры особых систем, которые приводятся к нормальной форме путем эквивалентных преобразований, но тем не менее не имеют непрерывной зависимости решений от параметров.

А это означает, что для каждого пользователя пакетов стандартных программ (пакета *MATLAB*, *Mathcad*, *Scilab* и других пакетов) любая встреча с особой системой может привести к ошибке в расчетах, которая в свою очередь может стать причиной аварий и даже катастроф. Об этом говорилось в [53].

Мы убеждаемся теперь, что даже в такой строгой и хорошей науке, как математика, все же существуют предубеждения и предрассудки — в том числе и предрассудки совсем не безобидные.

В то же время обнаружение предрассудков, не основанных на доказательствах, позволяет дать ответ тем из моих коллег, которые с недоверием встретили новые результаты, опубликованные в настоящей книге (а ранее — в работах [45; 47; 48; 51; 53] и др.). Недоверие основывалось на том, что в математике очень редко встречаются ошибочные, неверно доказанные теоремы и очень многим казалось невероятным, что в самом конце XX века могла обнаружиться ошибочность давно используемых теорем.

Да, в математике очень редко встречаются ошибочные теоремы и долго такие теоремы обычно не живут — их неверность довольно быстро обнаруживают (об интереснейших примерах ошибочных доказательств см. в [86], стр. 149 и стр. 169—170).

Так что недоверие многих моих коллег имело под собой некоторые основания. Однако — и это нужно особенно подчеркнуть — материал настоящей книги, так же как и более ранних публикаций [45; 47; 48; 51; 53] и др. — не опровергает никаких теорем, не претендует на раскрытие ошибочности чьих-либо доказательств. Материал настоящей книги (как и более ранних публикаций) раскрывает не ошибочность доказанных ранее теорем, а неверность ряда предубеждений и предрассудков, которые никогда не были доказаны, но по ряду причин без доказательств укрепились в научном сообществе.

Мы убеждаемся, что даже в математике — хоть это и кажется странным — существуют не только теоремы, но и предрассудки. А от предрассудков надо избавляться — особенно если они могут быть источником ошибок в компьютерных вычислениях.

Устранение предрассудков, не основанных на доказательствах, нежелание «мирно сосуществовать» с предрассудками (коль скоро их недоказанность и неверность обнаружены) — это одно из основных правил научного сообщества.

§ 4. Справедлива ли для аспирантов и научных работников «презумпция невиновности»?

Когда я рассказывал о результатах предыдущего раздела аспирантам СПбГУ, использующим в своих диссертациях дифференциальные уравнения, и советовал проверить — для обеспечения достоверности — не являются ли исследуемые нами системы особыми, то мне пришлось столкнуться со стойким непониманием: « Юрий Петрович, у нас все правильно, мы считали добросовестно, покажите нам, где у нас ошибка. Если она есть, то тогда (и только тогда) мы заинтересуемся Вашими результатами и посмотрим их». Эта позиция аспирантов была обусловлена позицией их научных руководителей, утверждавших, что «аспирант, как подсудимый в суде, должен пользоваться “презумпцией невиновности” — пока не доказано, что его результат неверен, следует считать, что в диссертации все верно и дополнительных проверок можно не проводить».

Мы убеждаемся теперь, что с «грамматикой науки» плохо знакомы не только аспиранты, но и часть научных руководителей. «Презумпции невиновности» у аспирантов, как и у любого научного работника, нет и быть не может. Скорее уж можно говорить о «презумпции виновности»: любой инженер-практик, желающий использовать новый результат, полученный исследователем, а также и любой рецензент диссертации имеют полное право проявить законное недоверие, потребовать, чтобы им доказали как верность, так и достоверность полученного исследователем (или аспирантом) результата его работы. Если у практика (или рецензента диссертации) возникли сомнения — они в любом случае будут истолкованы не в пользу аспиранта или исследователя. На это не надо обижаться, а нужно просто стараться как можно более доходчиво и ясно доказать достоверность своих результатов.

Если рецензент показал, что ошибка возможна, то долг аспиранта и научного работника доказать, что эта возможность в его диссертации не реализуется, что на самом деле все верно и возможной ошибки, по причине, которую должен четко обосновать диссертант, на самом деле в его диссертации все же нет.

Те же требования предъявляются и к научным работам. Иногда от математиков приходится слышать следующие рассуждения: «Пусть инженеры и пользователи компьютеров относятся к нашим рекомендациям и теоремам разумно. Да, мы подозреваем, что известная теорема: “системы с корнями характеристического полинома, лежащими в левой полуплоскости комплексного переменного далеко от мнимой оси, имеют ненулевой запас устойчивости” в особых случаях не верна. Но зачем нам оговаривать особые случаи и разбираться в них? Пусть инженер поступает разумно, пусть сам разбирается в особых случаях и отсеивает их». Такая позиция совершенно ошибочна. У инженера хватает своих забот. Разбираться в математических рекомендациях и теоремах он не должен и не может. Рекомендации математика должны быть проверены и безусловно верны; все особые случаи должны быть рассмотрены и оговорены. Только тогда рекомендациям ученого будут доверять.

§ 5. Необходимость согласия в определениях

Одно из основных правил научного сообщества, без которого невозможно ни понимание чужих научных работ, ни плодотворная дискуссия, — это необходимость согласия с автором (или оппонентом в дискуссии) в определениях. Если такого согласия нет — все дальнейшее бесполезно. Можно спорить о фактах, о методах и т. д. — нельзя спорить об определениях. Перед любой дискуссией, любым обсуждением, надо проверить, одинаково ли понимают обсуждающие определения тех терминов, которые будут использованы в дискуссии. Иначе обсуждение будет бесплодным. Несмотря на элементарность этого правила научного сообщества, оно все же часто нарушается.

Пример из моей собственной практики: я рассказываю об открытии интереснейшего нового (третьего) класса задач математики, физики и техники, о задачах, которые нельзя отнести ни к корректным, ни к некорректным, поскольку эти задачи меняют корректность при эквивалентных, в классическом смысле, преобразованиях, используемых при решении. Тут же, на доске, я демонстрирую примеры таких задач. Один из слушающих возражает:

«Юрий Петрович, у Вас все неверно, приведенные Вами преобразования не эквивалентны, поскольку не являются взаимно однозначными». Я удивленно спрашиваю: «А почему они должны быть взаимно однозначными? Ведь в определении, которое я привел в начале доклада, было ясно сказано, что единственным требованием, выполнение которого делает преобразование эквивалентным (равносильным), является неизменность решений преобразуемой системы. Никаких других требований нет. Кроме того, используемое мною определение общепринято — загляните в “Математическую энциклопедию”, — издание 1984 г., том 4, стр. 800. Вы найдете такое же определение без всяких требований взаимной однозначности». Возражающий упорствует: «А для меня “Математическая энциклопедия” не авторитет». Что же, в этом случае остается только посочувствовать и пожалеть возражающего — кто не признает определений «Математической энциклопедии» и других авторитетных изданий, тот автоматически ставит себя вне большой сегодняшней науки. Согласие в определениях — первое и непременное условие успеха своей научной работы и понимания научных работ других.

Дополнительные немалые трудности вносит неоднозначность в определениях некоторых терминов, когда разные исследователи один и тот же термин определяют по-разному. Так, термин «аналитическое конструирование» первоначально определялся как метод аналитического определения коэффициентов k_i регуляторов вида (166) для обеспечения хороших переходных процессов в линейных системах. Впоследствии стало иногда употребляться второе определение «аналитического конструирования», как метода, позволяющего аналитически определить структуру и коэффициенты регуляторов, не обязательно вида (166), и не обязательно для линейных систем, а это уже совершенно меняет смысл термина.

Наличие нескольких определений часто приводит к недоразумениям. Так, в одном из моих докладов я рассказывал о неоднократных авариях, происходивших из-за того, что при расчетах систем управления на основе «аналитического конструирования» в 60—70-х годах XX века еще не знали о необходимости различать преобразования, эквивалентные в классическом и в расширенном смысле, и что эти аварии подорвали репутацию методов «аналитического конструирования». Один из весьма квалифицированных слушателей моего доклада возразил: «Не могу согласиться с докладчиком, поскольку “аналитическое конструирование” регуляторов успешно используется в наше время». Недоразумение возникло потому, что я пользовался первым определением понятия «аналитическое конструирование», а возражающий мне — вторым.

Для преодоления недоразумений необходимо, чтобы участники обсуждения сверили определения используемых ими понятий и понимали их одинаково. Иначе любая дискуссия утонет во взаимных недоразумениях.

§ 6. Что обязан, и что не обязан читать и знать аспирант и научный сотрудник

Еще 10 лет назад в ответе на вопрос «что обязан регулярно читать и что обязан знать аспирант» не было разногласий. И научные руководители, и члены ученых советов, и сами аспиранты — все были согласны с тем, что аспирант обязан просмотреть ведущие научные журналы и книги по своей специальности хотя бы за последние 5—10 лет. Он обязан уже не просмотреть, а внимательно прочесть те немногие из этих статей и книг, которые имеют непосредственное отношение к теме его диссертации. Если во время защиты обнаруживалось, что диссертант не знаком с положениями ранее опубликованной статьи или книги, теми положениями, которые могли повлиять на выводы диссертации, то диссертация Ученым Советом безоговорочно отклонялась.

Такое требование обязательного знания всей литературы по теме диссертации отнюдь не является обременительным или чрезмерно жестким. Список ведущих журналов, относящихся к теме диссертации, очень невелик (обычно это всего 5—6 названий), а, просматривая их, аспирант сразу убеждается, что примерно 99 % статей в журналах посвящены частным вопросам, не имеющим отношения к его теме. Такие статьи можно лишь бегло просматривать и откладывать в сторону. Важно не пропустить и внимательно изучить те очень немногие статьи, которые либо непосредственно относятся к твоей теме, либо рассказывают о научных открытиях общего характера, не учитывать которые нельзя. То же самое относится и к книгам.

За последние 10 лет положение аспирантов осложнилось: аспирантская стипендия совершенно недостаточна для самого скромного существования. Подавляющее большинство аспирантов работает, и защитить диссертацию в срок, совмещая учебу и работу, стало очень трудно.

В этих условиях некоторые научные руководители и ученые советы ослабили требования к аспирантам, исключив такое важное требование, как знакомство с научной литературой по теме диссертации. Да, я безоговорочно согласен, что положение сегодняшних аспирантов очень трудное, согласен с тем, что им надо помогать, но ведь не такой же ужасной ценой!

Пример: я спрашиваю одного из аспирантов: «Вот Вы используете математическую модель исследуемого Вами явления в виде системы дифференциальных уравнений, приводите ее перед решением к нормальной форме эквивалентными преобразованиями. Почему Вы не проверили, не является ли Ваша система особой, для которой такое преобразование недопустимо, поскольку может привести к ошибкам? Ведь такая проверка совсем не сложна, а о необходимости ее рассказано, например, в публикации [76], вышедшей 2 года назад и Вам доступной». (А так же в публикациях [16; 48; 53; 56] и др.) Аспирант отвечает: «Научный руководитель сказал мне, что не обязательно читать все публикации, относящиеся к теме диссертации. Можно читать только те, которые нравятся». Проверяю у его научного руководителя и убеждаюсь, что такое «разрешение не читать» действительно было дано.

Я работаю в науке 50 лет (считая с момента написания первой научной работы), много чего слышал, но на этот раз услышанное меня просто испугало. Вот простое сравнение: вы приходите к врачу, нужен анализ крови, и врач собирается колоть вас не одноразовым шприцем. Вы робко спрашиваете: «А вирус СПИДа? Я не заражусь?» Врач вам спокойно отвечает: «Да, я слышал что-то про вирус, знаю, что о нем писали. Но разве можно всю литературу перечитать? А про СПИД мне читать не нравится, я и не читал. Так что, давайте руку, больной, сделаю Вам укол».

Как будете реагировать на такого врача? Ясно, что убежите поскорей, а затем, скорее всего, привлечете такого врача к суду, чтобы он не губил вас и других людей. Правильно сделаете. Но почему же вы думаете, что менее опасным будет пренебрежение аспиранта к новым научным результатам, нежелание (причем одобренное его научным руководителем!) знакомиться с ними. Ведь завтра этот аспирант, став кандидатом наук, будет участвовать в проектировании и расчете, ну, например, самолета. Привыкнув игнорировать «не нравящиеся» ему научные результаты, он будет делать то же самое и при проектировании. Самолет окажется дефектным, потерпит аварию, загубит экипаж и пассажиров. Кто будет больше виноват? Научный руководитель? Или все-таки сам аспирант? Ведь никто не мешал ему знакомиться с «грамматикой науки», а точнее — с ее непременными требованиями о том, что должен знать аспирант, требованиями, выработанными на опыте поколений. Литературы по истории науки достаточно, читать ее никто не запрещает.

Могут, конечно, возразить: ошибка участника проектирования самолета совсем не обязательно приводит к аварии и гибели людей, она лишь увеличивает (может быть даже немного) вероятность аварии. Да, это так. Но ведь и укол многоразовым шприцем совсем не обязательно (и даже редко) ведет сразу к смерти пациента. Однако врача за такой укол судят, и правильно делают. А вот аспиранта (и его научного руководителя) мы не осуждаем. И это напрасно.

Вот печальный недавний пример: в мае 2002 г. в Ученом Совете факультета прикладной математики — процессов управления СПбГУ С. А. Сумачевым защищалась диссертация по исследованию газотурбинного двигателя для самолетов. Двигатель содержал несколько контуров управления, и диссертант рассчитывал их устойчивость традиционными, устаревшими методами, давно доказавшими свою неполноту. Диссертант явно не знал, что неполнота этих методов в 1994 году была доказана мной [48], в 1997 году — профессорами А. Р. Гайдуком [16] и В. А. Подчукаевым [56], в 2000 году — академиком РАН Я. Б. Данилевичем [76]. При этом работы этих авторов были опубликованы в известных авторитетных научных журналах, безусловно, доступных диссертанту. В этих публикациях приводились методы дополнительных проверок, обеспечивающих достоверность расчета. Диссертант мог воспользоваться любым из этих методов — либо моим, либо методом профессора А. Р. Гайдука, либо иным. Он не воспользовался ни одним. В результате выводы диссертации оказались недостоверными, необходимое требование Высшей Аттестационной Комиссии (ВАК) о достоверности результатов оказалось не выполненным, о чем говорилось и на защите. В данном случае Ученый Совет все же присудил диссертанту степень, хотя и рисковал, что решение будет отменено во время контрольной проверки диссертации в ВАК. Рассчитывали на то, что в последние годы ВАК отправляет на контрольную проверку лишь небольшую долю кандидатских диссертаций, так что риск был не очень велик.

Непонятно другое — зачем надо было Ученому Совету идти на неприятный риск? Не проще ли было потребовать с аспиранта (лучше всего на стадии предварительного обсуждения диссертации) проведения дополнительной проверки по одной из опубликованных в [16; 48; 56; 76] методик? Тогда и риска не было бы.

Мы убеждаемся, что игнорирование многих общепринятых ранее правил науки (составляющих в совокупности ее «грамматику»), игнорирование правил научного сообщества стало в последние годы довольно частым явлением, и это не может не огорчать.

§ 7. Как получить достойную зарплату за свой труд

Сегодняшняя зарплата научных работников России очень низка, недопустимо, нищенски низка. То, что ее необходимо крупно (в разы) повышать, нет никаких сомнений. Это бесспорно! Но, уважаемые мои коллеги, научные работники, давайте будем совершенно откровенны: первосортную зарплату естественно требовать за науку первого сорта. А если мы ради облегчения себе жизни потихоньку игнорируем сегодня одно правило научного сообщества, завтра — другое, то во что же быстро превращается наша наука?

Она превращается в «науку второго сорта», за которую и зарплата будет соответствующая — второсортная.

Если хотим получать хорошую зарплату, достойное материальное обеспечение, то лучший путь к этому — заниматься наукой «первого сорта», не поддаваться на соблазны облегчить себе жизнь, проигнорировать пусть обременительные, но необходимые правила научного сообщества. Ведь эти правила появились не случайно, они выросли из опыта столетий развития научных исследований — правила обязательного знания научной литературы предшествующих лет, обязательного отказа от доказательства, опровергнутого контрпримером, согласия в определениях, печатного (в крайнем случае, письменного) оформления научной дискуссии.

Отказ от хотя бы одного из этих правил ведет к потере научной репутации. Если один научный сотрудник позволяет себе отказаться от общепризнанных правил науки, то погибнет репутация этого конкретного человека и не более того, хотя для него самого это трагедия. Потерять репутацию легко — восстановить очень трудно.

Гораздо хуже, если в стенах какого-нибудь научного учреждения игнорирование правил науки не встречает отпора, становится привычным, часто встречающимся. Тогда может сильно пострадать репутация научного учреждения в целом.

Я, разумеется, рассказал далеко не обо всех правилах научного сообщества, остановив внимание на тех, которые нарушались чаще всего на моих глазах.

Не мешает отметить еще одно важное правило: возможность подтверждения или опровержения. Высказанное кем-либо утверждение остается гипотезой до тех пор, пока оно не будет:

1. Доказано (вариант — подтверждено ясными экспериментами).
2. Опровергнуто.

Любопытно, что и это простое правило иной раз бывает нарушено. Пример: астрологические прогнозы. Вы часто можете слышать прогнозы типа: «Родившихся под знаком Овна на этой неделе ожидает успех в делах», «У родившихся под знаком Рака на этой неделе возможны неприятности, старайтесь воздерживаться от принятия решений». Но тщетно вы будете искать подтверждения таких прогнозов типа: «На прошлой неделе мы проследили за 100 предпринимателями, родившимися под знаком Овна. У 80 из них наблюдались успехи в делах. А вот из проверенных 100 человек, родившихся под знаком Рака, у 75 на прошедшей неделе были неприятности».

Вы нигде не найдете подобных проверок астрологами своих «прогнозов». Причина проста: когда подобные проверки проводили независимые исследователи, результаты неизменно заканчивались конфузом: прогнозы не сбывались. Тогда астрологи отказались от проверок и от самого принципа проверяемости. Свои «прогнозы» астрологи постоянно публикуют, а сбываются они или нет — их не интересует.

Но тогда понятно, что отказавшись от такого важнейшего правила научного сообщества, как принцип проверяемости, астрология перешла уже даже не на положение «науки второго сорта», а в «науку вне сортов», или, коротко, на положение лженауки. Таковой она остается и до настоящего времени.

Пренебрежение теми правилами «грамматики науки» и научного сообщества, о которых я рассказывал в предыдущих разделах, не имеет таких катастрофических последствий, но все же тот, кто пренебрегает ими, превращается в научного работника «второго сорта» с соответствующим к нему отношением, а в дальнейшем и с соответствующей зарплатой.

§ 8. О правилах поиска научной истины

В предыдущих разделах шла речь о правилах обсуждения вновь открытой научной истины. Имеет смысл поговорить также и о правилах поиска этой истины, о путях и правилах научных исследований (и особенно — исследований в области прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий, в которых не используется натурный эксперимент). Сами по себе эти правила хорошо известны и немного скучны: «Смотри внимательнее, старайся выделить самую сущность явления, обращай особое внимание на противоречия и парадоксы — именно в них чаще всего скрываются новые, еще не открытые закономерности» — и т. п. Все это, действительно, немного скучно.

Гораздо интереснее будет рассказ о реальном применении этих общих правил к поиску тех новых законов и рекомендаций, которые составили содержание глав *глав 1*, *2* и *3* настоящей книги.

Все, действительно, началось с углубленного исследования известного парадокса: в 70-х годах XX века обнаружилось, что некоторые линейные оптимальные системы теряют устойчивость при сколь угодно малых отклонениях реальных параметров объекта управления или регулятора от расчетных значений, хотя все корни характеристического полинома замкнутой системы лежали в левой полуплоскости комплексного переменного далеко от мнимой оси и не могли — по существовавшим в то время представлениям — «перескочить» в правую полуплоскость при сколь угодно малых вариациях параметров системы. Возможность такого «перескока» строго запрещала (так тогда всем казалось) известная и несомненно верная теорема о непрерывной зависимости корней характеристического полинома от его коэффициентов. В этом и состоял парадокс, который, кстати, имел большое практическое значение, поскольку нередко встречавшиеся потери устойчивости оптимальными системами при вариациях параметров приводили к авариям и закрывали дорогу (как уже говорилось) к практическому приложению теории оптимального управления.

Внимательное исследование позволило в 1973—1977 годах разрешить парадокс: оказалось, что при оптимизации линейных односвязных объектов управления, математической моделью которых является уравнение

$$A(D)x = B(D)u + \varphi(t) \tag{167}$$

используемые в те годы методы приводили к регулятору

$$W_1(D)x = W_2(D)u, \tag{168}$$

где $A(D)$, $B(D)$, $W_1(D)$, $W_2(D)u$ — полиномы различных степеней от оператора дифференцирования $D = \frac{d}{dt}$. При замыкании объекта управления (167) оптимальным регулятором (168) мы приходим к математической модели замкнутой системы:

$$\left[A(D)W_2(D) - B(D)W_1(D)\right]x = W_2(D)\varphi(t)\,. \tag{169}$$

При этом для многих объектов управления оказывалось, что полиномы $A(D)W_2(D)$ и $B(D)W_1(D)$ имели одинаковые степени и одинаковые старшие члены, которые взаимно сокращались. В квадратных скобках оказывался характеристический полином замкнутой системы, который после сокращения старших членов становился полиномом более низкой степени и имел хорошие корни, целиком лежащие в левой полуплоскости комплексного переменного далеко от мнимой оси.

Однако взаимное сокращение старших членов могло происходить лишь в том случае, если все параметры объекта управления и регулятора в точности равнялись расчетным значениям. Уже при сколь угодно малых вариациях параметров взаимного сокращения могло и не произойти, характеристический полином мог повысить степень и получить дополнительный корень, лежащий уже в правой полуплоскости комплексного переменного. Именно этот новый корень приводил к потере устойчивости оптимальной системы, а известная теорема о непрерывной зависимости корней полинома от его коэффициентов на самом деле не препятствовала его появлению, поскольку эта теорема относится к полиномам постоянной степени, но не к переменной, а при вариациях параметров происходило повышение степени характеристического полинома.

Так получил разрешение парадокс, а вслед за этим на факультете ПМ-ПУ Санкт-Петербургского (тогда еще Ленинградского) университета было дано и практическое решение проблемы: при введении требования параметрической устойчивости как дополнительного, полиномы $W_1(D)$ и $W_2(D)$ в регуляторе (168) изменялись так, что сокращения старших членов уже не происходило, оптимальная система сохраняла устойчивость при вариациях параметров и могла успешно применяться на практике. Началось победное шествие оптимальных систем в различных областях приложений (к сожалению, по условиям того времени — чаще всего в закрытых, оборонных, областях, не приводящих к повышению благосостояния народа).

Большие успехи, достигнутые в те годы в области расчета и практического применения оптимальных систем управления, интенсивная работа над заказами промышленности по улучшению качества управления важными техническими объектами — все это на несколько лет отвлекло внимание от теоретических вопросов и проблем.

Однако мне не давал покоя все тот же до конца не разрешенный парадокс с эквивалентными преобразованиями. Было давно замечено, что если в «аналитически сконструированных» оптимальных регуляторах не все переменные доступны для измерения, и их исключают, пользуясь эквивалентными преобразованиями, то преобразованная система теряла параметрическую устойчивость (см. подробно рассмотренный пример в учебном пособии [45] стр. 222—230).

Это означало, что эквивалентные преобразования далеко не всегда «ничего не меняют». А ведь эквивалентные преобразования пронизывают всю математику сверху донизу. Что же еще они меняют, кроме параметрической устойчивости? Сразу было видно, что ответ на этот вопрос будет очень важен для всей математики и всех ее приложений.

И вот здесь моя дорога разошлась с дорогами моих коллег и даже моих учеников. Они считали, что раз мы разработали безупречные методы синтеза оптимальных систем, за которые нас ценят, то не стоит углубляться в сложный и глубокий математический вопрос, любое решение которого, как они предсказывали, вызовет разногласия среди математиков и инженеров. Часть из них отнесется к новым открытиям враждебно, начнутся споры и дискуссии, придет конец спокойной жизни, которую мы заслужили своими прежними работами по оптимизации, к тому времени уже общепризнанными. К сожалению, все предсказания моих коллег осуществились полностью. Все было: и первоначальное непризнание, и неприязнь, и изматывающие споры. Но ведь если слушать предсказания, даже справедливые, то никаким сложным и важным научным вопросом заниматься не будешь. А заниматься надо, иначе наука остановится. Для научных исследований верны известные слова Данте: «Здесь нужно, чтоб душа была тверда; здесь страх не должен подавать совета».

Я продолжал работать один и скоро получил первый важный результат: выяснилось, что эквивалентные преобразования могут изменять параметрическую устойчивость и величину запасов устойчивости в любых системах управления, не только оптимальных. Отсюда сразу следовал очень широкий и важный вывод — вывод о том, что все традиционные методы расчета устойчивости, основанные на проверке корней характеристического полинома, проверке амплитудно-частотной характеристики или основанные на построении функции Ляпунова, заведомо не полны, в ряде случаев могут дать неверный ответ и стать, тем самым, причиной аварий и даже катастроф. Для предотвращения аварий традиционные методы следует дополнить проверкой преобразований, использованных при расчете, — проверкой их на эквивалентность в расширенном смысле. Все эти положения — после основательной проверки и обсуждения в редакциях научных журналов — были опубликованы в 1991—1994 годах в статьях [47; 48]. Примеры аварий и катастроф, произошедших из-за неполноты традиционных методов расчета, были приведены в монографии [53].

Следующим этапом исследования стало обобщение. Какие еще свойства решений, помимо параметрической устойчивости, могут изменяться при эквивалентных преобразованиях? Внимательный анализ показал, что может изменяться корректность решаемой задачи, а изменение параметрической устойчивости является частным случаем изменения корректности.

Отсюда сразу следовал важный вывод — открытие третьего класса математических задач, опубликованное в [51]. До 1998 года, до публикации работы [51] было общепризнанно, что все задачи математики, физики и техники делятся на два класса — на издавна известный класс корректных задач и на открытый в 1902 году выдающимся французским математиком Жаком Адамаром класс задач некорректных, в которых даже сколь угодно малые вариации параметров, коэффициентов, начальных или граничных условий могут привести к большим изменениям решений. Постепенно выяснилось, что некорректные задачи встречаются довольно часто, но требуют к себе совершенно особого подхода, например, регуляризации. Большие и глубокие исследования некорректных задач и их регуляризации были выполнены в СССР известной научной школой академика А. Н. Тихонова (публикация [61] и многие другие). Если некорректную задачу, не обратив на некорректность внимания, решать обычными методами, как корректную, то возникает грубая ошибка. До 1998 года считалось, что классы некорректных и корректных задач жестко отделены друг от друга, и поэтому достаточно перед решением проверить — к какому классу относится поставленная задача, и в соответствии с этим выбрать метод решения. Результаты, опубликованные в 1998 году в [51], показали, что на самом деле все сложнее, что существует еще один, третий класс математических задач, способных изменять корректность в ходе эквивалентных преобразований, используемых при их решении. Для задач третьего класса предварительная проверка корректности может не помочь: проверка подтвердит, что задача сама по себе корректна, но в ходе преобразований, использованных при решении, может просочиться некорректность, и тогда возникает ошибка в расчетах.

Обнаружение третьего класса задач математики, физики и техники расширило направленность исследований, вывело их из области теории управления в более широкую область компьютерных вычислений и технологий. Именно для компьютерных вычислений и технологий неожиданная встреча с задачей третьего класса обычно приводила к ошибкам в расчетах.

Несколько позже в ходе непрерывных поисков был обнаружен особенно важный пример задач третьего класса: были открыты особые системы дифференциальных уравнений, решения которых не обладают свойством непрерывной зависимости от параметров (примеры особых систем приводились в *главах 2* и *3*, ранее они были опубликованы в третьем, дополненном, издании монографии [53]). Задача численного интегрирования особых систем некорректна, но если их решать в соответствии с рекомендациями современных компьютерных технологий через приведение к нормальной форме, то кажется, что некорректность исчезает и это приводит к ошибкам. Поскольку численное решение дифференциальных уравнений очень широко применяется в технике, физике и т. п., то обнаружение нового источника ошибок в этих широко распространенных расчетах и методика избежания этих ошибок (рассмотренные в *главе 3*) имеют большое практическое значение.

Изложенная здесь последовательность научных исследований выглядит на бумаге просто и логично. На самом деле все это потребовало многих лет труда, преодоления многих сложностей и казавшихся тупиковыми ситуаций. Работа шла медленно еще и потому, что она пришлась на самые трудные для российской науки годы (1991—2002), и мне пришлось работать почти совершенно одному. Небольшую помощь оказывали лишь студенты-дипломники и аспиранты, но и они, едва закончив учебу, уходили из науки в другие сферы деятельности, поскольку зарплата молодого научного работника в 1991—2002 годах не обеспечивала даже прожиточного минимума. А ведь один человек не может, разумеется, знать всей математики, область его познаний неизбежно ограничена. Уже позже, после публикаций [48; 53; 51] ознакомившийся с ними профессор Ф. Т. Васильев обнаружил примеры задач третьего класса с изменением корректности при эквивалентных преобразованиях в линейном программировании (публикация [79]), а профессор В. С. Сизиков обнаружил подобные задачи среди интегральных уравнений (см. учебное пособие [90], стр. 146—147).

Эти факты иллюстрируют известное правило научной работы: успешнее всего идут те исследования, которые выполняются дружно, коллективно.

Вместе с тем надо уметь и отойти, если нужно, от магии коллектива. Так, в США в 1981—1995 годах работал прекрасный коллектив исследователей проблемы оптимизации управления при неизвестных или переменных спектрах возмущающих воздействий. Работавшие в этом коллективе исследователи исходили из простой идеи: если с помощью управления с обратной связью модуль амплитудно-частотной характеристики замкнутой системы сделать примерно постоянным в области возможных частот возмущающих воздействий, то можно гарантировать, что определенное качество функционирования системы будет обеспечено при любых спектрах этих воздействий. Опираясь на достаточно сложную, но эффективную методику так называемого «H^∞ управления», эти исследователи, действительно, сумели обеспечить «плоские» модули амплитудно-частотных характеристик и приемлемое качество управления для самых различных или переменных спектров возмущающих воздействий.

Однако после знакомства с работами исследователей США в области «H^∞ управления» у меня возникло сомнение в правильности их основной предпосылки: дело в том, что гарантировать хорошее качество управления при различных возмущающих воздействиях может не только «плоский» модуль амплитудно-частотной характеристики, но и модуль, имеющий максимум на частоте β наиболее опасного спектра, а наиболее опасным является спектр в виде обобщенной δ-функции Дирака $S\varphi = \delta(\omega - \beta)$. Разумеется, для получения хорошего качества управления надо обеспечить, чтобы этот максимум был небольшим. И здесь решающую роль сыграла публикация [41], в которой было неожиданно обнаружено, что для возмущающих воздействий со спектрами в виде δ-функции Дирака оптимальное управление не единственно, и поэтому можно найти управление, которое может обеспечить устойчивость и абсолютный минимум критерия качества (для непрерывных спектров это, как известно, сделать невозможно). В конечном счете это позволило для самых разнообразных возмущающих воздействий получить значительно лучшее качество управления, чем то, что получалось у американских исследователей на основе методики «H^∞ оптимизации». Об этом подробно рассказано в *главе 1* данной книги. Если бы американские исследователи были знакомы с публикацией [41], то они, используя ее, получили бы не менее хороший результат, но публикация [41] не привлекла их внимания и осталась не замеченной.

Все рассказанное является хорошей иллюстрацией к еще одному известному простому правилу научных исследований: надо внимательно следить за научной литературой, за текущими публикациями. В них может найтись ключ к решению проблемы, над которой вы работаете.

Отметим еще, что гарантирующее управление, описанное в *главе 1*, найдено пока лишь для односвязных систем. Распространение результатов *главы 1* на многомерные системы является нерешенной задачей, которая ждет своих молодых и энергичных исследователей.

§ 9. Научное сообщество на стыке тысячелетий

Рассказав о правилах поиска новых результатов и их обсуждения, о правилах постепенно выработанных научным сообществом, еще раз уточним, что термин «научное сообщество» подразумевает не всех научных работников и инженеров, работающих в той или иной области науки, а только тех, кто следит за новыми научными результатами, читает научные журналы по своей специальности, следит за дискуссиями и обсуждениями. Не все поголовно это делали, но в XX веке считалось общепризнанным правилом: не может быть настоящим инженером и, тем более, научным работником тот, кто не следит систематически за научными журналами и книгами по своей специальности (в XXI веке даже это простое правило научного сообщества часто не соблюдается, как об этом свидетельствуют факты, приведенные в § 6).

В 1959 году тираж журнала «Автоматика и телемеханика» (основного и наиболее авторитетного журнала в области теории управления) составил 8050 экземпляров. Это позволяет оценить число членов научного сообщества в 1959 году, интересующихся теорией управления, примерно в 8—12 тыс. человек. Правила жизни и работы научного сообщества вырабатывались постепенно. Так, в 1940 году было созвано Первое всесоюзное совещание по управлению. Проходило оно в узком составе, все материалы совещания составили книжечку объемом в полтораста страниц, изданную тиражом 175 экземпляров. Полезного влияния на теорию и практику управления такое совещание не оказало. Недаром именно к 1941 году относится одна из позорных страниц истории советской науки: в апреле 1941 г. Президиум Академии наук СССР, вопреки мнению академиков Н. Н. Лузина и В. С. Кулебакина, принял в узком кругу административное решение о признании «ошибочными и неверными» опубликованные за два года до этого научные результаты профессора Г. В. Щипанова в области создания инвариантных систем управления (статья [97]). Только с большим опозданием, через много лет, из этих исследований Щипанова выросла известная во всем мире теория инвариантности. Через 14 лет после печальной памяти апрельского заседания Президиума АН СССР в 1941 году академик В. С. Кулебакин, вспоминая о судьбе исследований Г. В. Щипанова, с сожалением говорил: «Его надо было своевременно поправить, поддержать — и тогда принцип инвариантности получил бы более широкое развитие и практическое применение». И «развитие», и «практическое применение» принципа инвариантности позже все же пришли, но произошло это со значительным опозданием (публикация [89], стр. 29—32).

Ошибки первого Совещания были учтены при подготовке в 1955 году Второго всесоюзного совещания по теории автоматического регулирования. В отличие от первого, оно было многолюдным, каждому давали возможность высказаться, велась стенограмма, которая оставила три больших тома общим объемом 1480 страниц, а потом они были изданы хорошим тиражом в 4000 экземпляров каждый том. У всех желающих была возможность ознакомиться с дискуссией, и это способствовало верному решению многих важных вопросов управления.

Не менее демократично проходили и дискуссии в научных журналах. Так, например, в журнале «Электричество» за один только 1958 год было опубликовано обсуждение тридцати трех дискуссионных вопросов, в обсуждении которых на страницах журнала участвовало 96 авторов. Я хорошо помню, как мы, молодые инженеры и научные работники, с особенным интересом читали дискуссионные статьи, и во многом ради них выписывали журнал — недаром тираж журнала «Электричество» в 1958 году составил 15 780 экземпляров. Особенно запомнилась проходившая в 1954—1955 годах дискуссия, в которой обсуждался сложный вопрос о природе и сущности электромагнитного поля, поднятый О. Б. Броном. Каждому участнику дискуссии (а их было много) была предоставлена возможность высказаться, некоторые выступали на страницах «Электричества», повторно, расширяя и дополняя свои первые выступления. В результате прояснился важный и спорный для многих в то время вопрос о природе электромагнитного поля.

Широта и гласность научных дискуссий, большие тиражи научных журналов и книг — все это способствовало быстрому развитию науки в СССР в 1945—1970 годах. В это время были достигнуты выдающиеся успехи в атомной энергии, в космосе. Систематически возраставший тогда уровень жизни граждан СССР опирался прежде всего на использование достижений в науке, опирался на быстрое усвоение научным сообществом как отечественных, так и зарубежных научных открытий.

Например, в 1960 году, в серии статей [30], были опубликованы исследования Александра Михайловича Летова (1911—1974) по аналитическому конструированию регуляторов, а уже через 2—3 года «аналитически конструированные» по методике А. М. Летова регуляторы стали устанавливать на различных технических объектах, получая крупный народнохозяйственный эффект. В последующие годы пришлось преодолевать трудности, связанные с тем, что некоторые из «аналитически сконструированных» регуляторов не обеспечивали параметрической устойчивости и приводили к авариям (об этом уже говорилось в *главах 1* и *2*), но это ни в коей мере не зачеркивает большого народнохозяйственного эффекта, достигнутого в те годы на путях оптимизации управления.

Другой пример: в 1961 году были опубликованы в русском переводе чисто теоретические, но важные исследования американского математика Ричарда Калмана об «управляемых и наблюдаемых» системах. И уже через несколько лет большинство статей, посвященных исследованию многомерных систем, начиналось со слов: «Рассмотрим систему (приводилась конкретная система) управляемую и наблюдаемую по Калману». И это было правильно, поскольку системы, не удовлетворяющие условиям наблюдаемости и управляемости по Калману, обладают особыми свойствами и требуют особого подхода. До исследований Р. Калмана их не различали, что нередко приводило к ошибкам, но уже через несколько лет после публикации Р. Калмана его результаты были усвоены научным сообществом, что позволило в дальнейшем избегать ошибок.

Так жило научное сообщество СССР в свои лучшие времена, а потом все постепенно пошло по-другому. Наука стала все больше бюрократизироваться, свободные научные дискуссии постепенно исчезали. Уже в 1973 году, когда П. В. Надеждин в статье [35] поднял интереснейший вопрос о возможной потере «грубости» при элементарных преобразованиях, то дискуссии по этому вопросу развернуться не дали. Слово было дано лишь группе украинских математиков (Ларин В. Б., Науменко К. Н., Сунцев В. Н. — авторы книги [29]), которые доказали, что при преобразованиях, рассмотренных П. В. Надеждиным, «грубость» системы измениться не может. Да, формально украинские математики были правы, а П. В. Надеждин не прав, «грубость» системы (с учетом важной оговорки о повышении степени, сделанной в известной монографии [6] на стр. 33) действительно не менялась, но ведь аварии в «преобразованных» системах происходили, а это означало, что все-таки что-то менялось. На самом деле (как это было установлено лишь 14 лет спустя в работе [45]) изменялась не «грубость» замкнутой системы, а параметрическая устойчивость, и это вполне могло быть обнаружено еще в 1973 году, если бы искусственно не прервали начавшуюся тогда открытую дискуссию. А ведь своевременное обнаружение изменения параметрической устойчивости при эквивалентных преобразованиях позволило бы избежать многих аварий.

Но тогдашнее руководство наукой ужасно не любило дискуссий на острые темы особенно связанные с аварийностью. Причины аварий предпочитали «засекречивать», а не обсуждать. В 1976 году во время демонстрационного полета под Парижем потерпел аварию и разбился сверхзвуковой пассажирский самолет, гордость Советского Союза, самолет ТУ-144. Только лишь почти через 30 лет признали (а до этого скрывали), что причиной аварии была потеря устойчивости в системе управления полетом самолета, которая, по-видимому, не обладала параметрической устойчивостью, а методы расчета, использованные при проектировании самолета ТУ-144, не позволяли это выявить. О других интересных авариях — в публикации [53], стр. 20—22, 56—57.

В последующие годы отношение руководителей науки к дискуссиям стало еще хуже. Так, например, в 1987 году Л. Н. Волгин, обеспокоенный, как я догадываюсь, непрекращающимися авариями многих технических систем, в своей статье [15] еще раз поднял вопрос о недостатках методов расчета систем автоматического управления, и, в частности, методов, основанных на теории аналитического конструирования оптимальных регуляторов (кратко — ТАКОР). Л. Н. Волгин писал прямо и откровенно: «Библиография работ, посвященных ТАКОР, насчитывает тысячи статей и книг. А между тем практические приложения теории остаются скромными. Причины такого состояния более серьезны и основательны, чем предполагалось вначале. Дело в том, что теория аналитического конструирования в ее классическом виде приводит к неработоспособным регуляторам. При определенных условиях системы, синтезированные на основе этой теории, не обладают свойством грубости и теряют устойчивость при малых отклонениях параметров от расчетных значений. Этот факт был установлен впервые еще в 1973 году в статье П. В. Надеждина [35] и в книге Ю. П. Петрова [40]». Л. Н. Волгин предлагал обстоятельно обсудить пути совершенствования ТАКОР и предотвращения аварий.

Редакция журнала «Известия Академии наук СССР. Техническая кибернетика», где в 1987 году была опубликована статья Л. Н. Волгина, лишь через три года поместила один-единственный отклик на нее — «Письмо в редакцию» В. Б. Ларина, с порога отвергавшего все предложения, опубликованные Л. Н. Волгиным в статье [15]. Л. Н. Волгину было предоставлено шесть строк (да, всего шесть строк!) для ответа В. Б. Ларину, а далее на той же странице журнала шло обширное, занявшее половину страницы, «Заключение» редколлегии. В нем утверждалось, что «аналитическое конструирование оптимальных регуляторов — это высокоэффективный математический аппарат, получивший широкое практическое применение. Для линейно-квадратичных задач он составляет в значительной степени завершенную корректную теорию, не имеющую трудностей, о которых говорит Л. Н. Волгин». (Известия АН СССР, Техническая кибернетика, 1990, № 3, стр. 214.) Конечно, после такой «отповеди» от редколлегии ведущего журнала дискуссия прекратилась. Ну а аварии, разумеется, продолжались.

Так что и до крушения Советского Союза его наука накопила немало отрицательных сторон, следствием которых стало уменьшение числа членов научного сообщества (при постоянном и неуклонном до 1990 года возрастании общей численности научных работников). Уже к 1977 году тираж журнала «Автоматика и телемеханика» сократился до 7010 экземпляров (против 8050 в 1959 г.), хотя общая численность научных работников за эти годы выросла более чем в четыре раза.

Это говорит о том, что значительная часть научных работников перестала быть членами научного сообщества и, в частности, перестала читать и выписывать свой самый авторитетный профессиональный журнал (как и другие журналы по специальности). Перестала во многом потому, что журналы прикрыли свою самую интересную часть — дискуссии и обсуждения.

Но все это не идет ни в какое сравнение с тем погромом, который обрушился на научное сообщество России в страшное для него десятилетие 1992—2002 годов. Сокращение государственного финансирования науки и высшего образования, катастрофическое падение заказов на исследования от промышленности и военно-промышленного комплекса — все это привело к тому, что зарплата молодых научных работников упала часто даже ниже прожиточного минимума, поставила ученых на грань физического выживания, не говоря уже о престиже и уважении. Более половины российских исследователей либо перешли в другие сферы деятельности, покинув науку, либо уехали за границу. Еще более катастрофично сократилась численность и авторитет членов российского научного сообщества. Тираж журнала «Автоматика и телемеханика» сократился с 7010 экз. в 1977 г. до 523 экз. в 1994 г. и до 400 экз. в 2000 г. Статистика тиражей других научных и научно-технических журналов выглядела аналогично. Тираж журнала «Электричество»: 1958 г. — 15 780 экз., 1990 г. — 5048 экз., 1997 г. — 1000 экз.; журнала «Известия высших учебных заведений», серия «Электромеханика»: 1973 г. — 3000 экз., 1996 г. — 273 экз. Аналогичное положение сложилось с тиражами научных книг. Так, например, в 1971 году книга [39] вышла тиражом 7000 экз., в 1977 г. книга [42] вышла тиражом 4100 экз., в 1985 г. — книга [1] была опубликована тиражом 4800 экз. И все эти книги при этом не залеживались на прилавках — менее чем за полгода они распродавались все, до последнего экземпляра. А после 1992 года тиражи научных книг обычно равнялись 1000 экз., а часто не превышали 100—200 экземпляров.

Мы убеждаемся, что тиражи научных журналов и книг сократились гораздо сильнее, чем общее число научных работников России. Это говорит о том, что большинство тех, кто еще работал в науке и высшей школе, перестали быть членами научного сообщества, перестали следить за научной литературой, за новыми научными достижениями, сосредоточившись целиком на проблеме материального выживания. Использование ресурсов сети Интернет немного смягчает последствия катастрофического сокращения тиражей научных журналов, но в целом общение между исследователями за последние 10—15 лет очень сильно сократилось. В результате даже вновь полученные научные достижения не получают распространения и применения.

Характерный пример — открытие неполноты традиционных методов расчета устойчивости, о котором рассказано в *главе 2*. Опубликованы эти новые результаты были еще в 1991—1994 годах в статьях [47] и [48] и потом в монографии [53]. Там же были изложены методы, дополняющие традиционные, позволяющие восстановить надежность расчета, избежать ошибок и порождаемых ошибками аварий. И тем не менее, даже в 2003 году еще только очень немногие проектно-конструкторские организации и пользователи персональных компьютеров использовали новые, надежные методы, а большинству проектно-конструкторских и даже научных организаций новые методы были либо неизвестны, либо просто было «не до того».

Вот еще один пример, особенно наглядно показывающий разницу между отношениями власти и научного сообщества в России и Швеции. В 1993—1995 годах была обновлена значительная часть вспомогательного оборудования Ленинградской атомной электростанции (ЛАЭС), расположенной всего в 90 километрах от Петербурга. Обновлялись насосы, электроприводы, шкафы управления, срок службы которых значительно короче, чем у реакторов. Обновляемое оборудование рассчитывалось, разумеется, уже по-новому: не по «реальным выходам», как ранее, что было более трудоемким, но гарантировало надежность, а рассчитывалось уже на компьютерах, с неизбежным предварительным приведением математической модели рассчитываемого объекта к нормальной форме. Для обычных систем все проходило хорошо, но если математическая модель системы оказывалась особой, типа тех моделей, примеры которых рассматривались в *главах 2* и *3*, то в результате на ЛАЭС оказывалось установленным оборудование с малыми запасами параметрической устойчивости. В первые годы такое оборудование будет работать нормально, а затем при неизбежном в ходе эксплуатации медленном малом «дрейфе» параметров оно может в самый непредвиденный момент потерять устойчивость, «пойти в разнос» и будет сразу отключено защитой. Поскольку на атомных станциях вспомогательные агрегаты резервируются, то отказы и отключения потерявшего устойчивость устройства не катастрофичны, но неприятны. Дело в том, что многие отказы сопровождаются выбросом радиации в окружающую среду и такие выбросы — не катастрофичные, но совсем не полезные для здоровья людей — происходили на ЛАЭС, к сожалению, по несколько раз в год. Если же совпадает отказ и основного и резервного устройства (такое совпадение мало вероятно, происходит редко, но все же возможно), то произойдет уже опасная авария, совершенно не допустимая на атомной электростанции.

Поэтому Санкт-Петербургский государственный университет (СПбГУ) предложил еще в 1995 году проверить расчеты установленного на ЛАЭС вспомогательного оборудования, выявить опасное оборудование с малыми запасами параметрической устойчивости, что позволило бы заменить его на оборудование надежное. Принципы подобной проверки и методы надежного компьютерного расчета были к этому времени в СПбГУ разработаны. Поскольку сотрудники СПбГУ, разработавшие их, еще не успели тогда из-за низких зарплат разбежаться по другим сферам деятельности, то проверка оборудования ЛАЭС могла быть проведена быстро и недорого. Необходимое для данной работы финансирование (в основном — оплата труда программистов) оценивалось как рублевый эквивалент 20 тыс. долларов. Санкт-Петербургский государственный университет сделал официальное предложение провести такую работу сначала дирекции ЛАЭС, затем — Администрации тогдашнего губернатора Петербурга В. А. Яковлева. Одновременно было послано и подробное научное обоснование опасности бездействия. Дирекция ЛАЭС в выявлении опасного оборудования отказала, а Администрация губернатора Петербурга не сочла даже нужным ответить на официальное письмо первого проректора СПбГУ — одного из авторитетнейших высших учебных заведений мира. Обо всем этом стало известно «Партии Зеленых», которая в те годы в Петербурге была весьма активна и серьезно относилась к возможным авариям, опасным для города. Появились негодующие статьи в газетах, но и это не повлияло на поведение Администрации губернатора Петербурга.

В это самое время, в 1996 году, Правительство России, а за ним и Администрация губернатора сочли очень выгодным и престижным для России проведение летних Олимпийских игр 2004 года в Петербурге. Развернулась большая и дорогостоящая кампания по продвижению кандидатуры Петербурга перед Международным Олимпийским комитетом. Когда потом подсчитали, то оказалось, что на продвижение кандидатуры Петербурга было истрачено 20 млн долларов. Одним из конкурентов Петербурга на проведение Олимпиады-2004 была столица Швеции Стокгольм. Шведы хотели, чтобы выгодное и почетное право принять Олимпийские игры было предоставлено им, и они умело использовали отказ Администрации губернатора Петербурга реагировать на предупреждение Университета об опасном оборудовании на Ленинградской атомной электростанции. Научное сообщество Швеции всегда с большим вниманием относилось ко всему, что происходило на ЛАЭС (столица Швеции находится от ЛАЭС на расстоянии менее 700 километров, и аварии на ней для Швеции очень опасны). Шведские ученые следили за печатью «Партии Зеленых», знали о позиции Администрации губернатора Петербурга и умело использовали ее в Международном Олимпийском комитете. Их аргументация была простой и неотразимой: в городе, Администрация губернатора которого способна не реагировать на научно-обоснованное предупреждение своего собственного Университета, может произойти все что угодно, такой город опасен, и Олимпийские игры в нем лучше не проводить. Любопытно отметить, что ученые Петербурга знали о предстоящем демарше шведов перед Международным Олимпийским комитетом, предупреждали об этом и Администрацию губернатора и Правительство В. Черномырдина, который тогда возглавлял также и Комитет по продвижению кандидатуры России на проведение Олимпиады-2004. Время спасти положение еще было: стоило только начать работу по проверке расчетов оборудования ЛАЭС, и демарш шведов лишался бы своего решающего влияния. Но ни от

Правительства России, ни от Администрации тогдашнего губернатора Петербурга на предостережение Университета не последовало никакого внятного ответа, и поэтому в марте 1997 года произошло то, что и предсказывали ученые: на заседании Международного Олимпийского комитета в Лозанне кандидатура Санкт-Петербурга и России на проведение летних Олимпийских игр 2004 года была отвергнута уже в первом туре голосования — по мотиву «небезопасности» города. А Швеция и ее столица Стокгольм успешно прошли первый тур голосования и уступили Греции только во втором туре.

Администрация тогдашнего губернатора Петербурга пожалела отпустить 20 тыс. долларов на реализацию предложения Университета и на повышение безопасности жителей города. В результате пропали 20 млн долларов, напрасно истраченные из городского бюджета на «проталкивание» кандидатуры Петербурга как места проведения Олимпиады-2004. Рассмотренный пример не случаен. Он отражает общее отношение властных кругов России к российской науке. В 1990—2004 годах оно было очень неблагоприятным, пренебрежительным (если судить не по словам, иногда приятным и лестным, а по делам, по реальному финансированию науки). Не видно, чтобы это отношение изменилось и за первые три года нового тысячелетия. На стыке тысячелетий наука России переживает трудные, унизительные времена.

Но и в таких условиях надо работать. Нам, ученым и инженерам, нужно больше думать о своей ответственности. Ведь независимо от губернатора и его Администрации сама Ленинградская атомная электростанция могла принять предложение Университета и произвести проверку параметрической устойчивости своего оборудования по предложенной СПбГУ методике. Возможности для этого были. Помешал настрой большинства сотрудников, не склонных к использованию нового. Доходило до курьезов: во время обсуждения предложений СПбГУ на научно-техническом совете организации, занимающейся разработкой оборудования для атомной энергетики, один из членов Совета заявил: «Для нашей отрасли снижение вероятности аварий не актуально. Это у химиков возникают, действительно, опасные аварии, а у нас, в нашей отрасли — нет». И продолжал: «Вот я, например, попадал в аварии, получил 200 рентген облучения, а вот видите — сижу перед вами, жив и здоров. Так что в нашей отрасли ничего менять не надо, это пусть химики внедряют у себя новые методы предотвращения аварийности». Разумеется, подобные выступления и не кого-нибудь, а работника научного института, подрывают авторитет этого института и науки в целом, а кроме того, служат удобным предлогом для оправдания пренебрежительного отношения власти к российской науке. Нам нужно больше думать об авторитете науки и строже выполнять правила, выработанные научным сообществом.

Список литературы

1. Абдуллаев Н. Д., Петров Ю. П. Теория и методы проектирования оптимальных регуляторов. — Л.: Энергоатомиздат, 1985. — 240 с.
2. Абдуллаев Н. Д., Петров Ю. П. О корреляционных функциях и спектральной плотности мощности колебаний электрической нагрузки промышленных предприятий. — Изв. вузов. «Энергетика», 1979, № 6. — С. 101—104.
3. Абдуллаев Н. Д., Петров Ю. П. Синтез регуляторов возбуждения для синхронных машин с учетом случайного характера нагрузки. — М.: «Электричество», 1981, № 1. — С. 64—65.
4. Айзекс Р. Дифференциальные игры. — М.: Мир, 1967. — 479 с.
5. Александров А. Г. Синтез регуляторов многомерных систем. — М.: Машиностроение, 1986. — 272 с.
6. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. — М.: Наука, 1981. — 568 с. (повторение издания 1937 г.).
7. Барабанов А. Е., Первозванский А. А. Оптимизация по равномерно-частотным показателям (H^∞ теория); обзорная статья. — «Автоматика и телемеханика», 1992, № 9. — С. 3—32.
8. Бендат Д., Пирсол А. Изменение и анализ случайных процессов. — М.: Мир, 1971. — 408 с.
9. Бесекерский В. А., Попов Е. Н. Теория систем автоматического управления. — М.: Наука, 1975. — 767 с.
10. Веремей Е. И. Частотный метод синтеза оптимального регулятора для линейных систем со скалярным возмущением. — Изв. вузов. «Электромеханика», 1985, № 10.
11. Веремей Е. И., Галактионов М. А., Петров Ю. П. Закон управления рулевой установкой судна, обеспечивающий стабилизацию на курсе при малом числе перекладок руля. Материал по обмену опытом НТО им. А. Н. Крылова. — Л.: 1977, вып. 267. — С. 72—82.
12. Веремей Е. И., Еремеев В. В. Синтез оптимальных систем с заданными модальными свойствами. Сборник «Оптимальное управление в механических системах». — Л.: 1983.
13. Веремей Е. И., Корчанов В. М. Фильтрация волновых помех в системах автоматической стабилизации движения судов. Вопросы судостроения. Серия «Судовая автоматика». 1983, вып. 28.
14. Веремей Е. И., Петров Ю. П. Предельные возможности оптимизации линейных систем управления. Вопросы механики и процессов управления. — Саранск: 1978, вып. 2.
15. Волгин Л. Н. Применение полиномиального исчисления к задачам теории автоматического управления. «Известия АН СССР, Техническая кибернетика», 1987, № 6. — С. 133—142.
16. Гайдук А. Р. К исследованию устойчивости линейных систем. «Автоматика и телемеханика», 1997, № 3. — С. 153—160.

17. Галактионов М. А., Петров Ю. П. О возможности улучшения качества систем управления за счет измерения возмущающих воздействий. — Изв. вузов. «Электромеханика», 1985, № 6. — С. 59—61.
18. Галактионов М. А., Петров Ю. П. О построении оптимальных регуляторов при различном числе измеряемых фазовых координат. — Изв. вузов. «Электромеханика», 1981, № 1.
19. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. — М.: Физматгиз, 1961. — 228 с.
20. Дидук Г. А., Коновалов А. С., Орурк И. А., Осипов Л. А. / под ред. А. А. Воронова / Анализ и оптимальный синтез на ЭВМ систем управления. — М.: 1984. — 343 с.
21. Жабко А. П., Прасолов А. В., Харитонов В. Л. Сборник задач по стабилизации программных движений. — Л.: ЛГУ, 1989. — 92 с.
22. Зубов В. И. Теория оптимального управления. — Л.: Судостроение, 1966. — 352 с.
23. Зубов В. И. Математические методы исследования систем автоматического регулирования. — Л.: Машиностроение, 1974. — 335 с.
24. Зубов В. И. Лекции по теории управления. — М.: Наука, 1975. — 495 с.
25. Иванов А. П., Кирин Н. Е. Сопряженные задачи теории управления. — Л.: 1988.
26. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления. — М.: Мир, 1977. — 650 с.
27. Кирин Н. Е. Методы оценивания и управления в динамических системах. — СПб.: СПбГУ, 1993. — 306 с.
28. Колосов Г. Е. Синтез оптимальных автоматических систем при случайных возмущениях. — М.: 1984. — 256 с.
29. Ларин В. Б., Науменко К. Н., Сунцев В. Н. Синтез оптимальных линейных систем с обратной связью. — Киев: Наукова думка, 1973. — 150 с.
30. Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов. «Автоматика и телемеханика», 1960, № 4—6.
31. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. Собр. сочинений. Т. 2, АН СССР, 1956.
32. Марусева И. В., Петров Ю. П. Синтез оптимальных регуляторов для систем управления, не управляемых по Калману. — Изв. вузов. «Электромеханика», 1981, № 7. — С. 749—751.
33. Марусева И. В., Петров Ю. П., Казаков А. Ю. Введение в основы автоматики и информации. — М.: Прометей, 1991. — 155 с.
34. Меррием К. Теория оптимизации и расчет систем управления с обратной связью. — М.: Мир, 1967. — 549 с.
35. Надеждин П. В. О потере грубости при элементарных преобразованиях дифференциальных уравнений управляемых систем. — «Автоматика и телемеханика», 1973, № 1. — С. 185—187.
36. Ньютон Д., Гулд Л., Кайзер Д. Теория линейных следящих систем. — М.: Физматгиз, 1961. — 407 с.
37. Острем К. Ю. Введение в стохастическую теорию управления. — М.: Мир, 1973. — 320 с.
38. Петров Ю. П. Оптимальные регуляторы судовых силовых установок. — Л.: Судостроение, 1966. — 118 с.
39. Петров Ю. П. Оптимальное управление электрическим приводом с учетом ограничений по нагреву. — Л.: Энергия, 1971. — 144 с.

40. Петров Ю. П. Оптимизация управляемых систем, испытывающих воздействие ветра и морского волнения. — Л.: Судостроение, 1973. — 214 с.
41. Петров Ю. П. О не единственности решения задачи синтеза оптимального регулятора. — Изв. вузов. «Электромеханика», 1974, № 2. — С. 221—222.
42. Петров Ю. П. Вариационные методы теории оптимального управления. — Л.: Энергия, издание второе, 1977. — 280 с.
43. Петров Ю. П. Вариационные методы синтеза гарантирующих управлений. — СПб.: СПбГУ, 1995. — 54 с.
44. Петров Ю. П. Синтез устойчивых систем управления, оптимальных по среднеквадратичным критериям качества. — «Автоматика и телемеханика», обзорная статья, 1983, № 7. — С. 5—24.
45. Петров Ю. П. Синтез оптимальных систем управления при не полностью известных возмущающих силах. Учебное пособие. — Л.: ЛГУ, 1987. — 289 с.
46. Петров Ю. П. Соответствует ли направленность курса теории автоматического управления современным требованиям? — Изв. вузов. «Электромеханика», 1991, № 3. — С. 111—116.
47. Петров Ю. П. О скрытых опасностях, содержащихся в традиционных методах проверки устойчивости. — Изв. вузов. «Электромеханика», 1991, № 11. — С. 106—109.
48. Петров Ю. П. Устойчивость линейных систем при вариациях параметров. — «Автоматика и телемеханика», 1994, № 11. — С. 186—189.
49. Петров Ю. П., Червяков В. В. Системы стабилизации буровых судов. — СПб.: СПбГТУ, второе, дополненное, издание, 1997. — 261 с.
50. Петров Ю. П. Три очерка по истории оптимизации и оптимального управления. — СПб.: СПбГУ, 1998. — 53 с.
51. Петров Ю. П. Третий класс задач физики и техники — промежуточных между корректными и некорректными. (Конспект курса лекций). — СПб.: СПбГУ, 1988. — 30 с.
52. Петров Ю. П. Построение H^∞ управления и гарантирующего управления, как решение дифференциальной игры трех лиц. Дифференциальные уравнения. — 1998, том 34, № 3.
53. Петров Ю. П., Петров Л. Ю. Неожиданное в математике и его связь с авариями и катастрофами последних лет. — СПб.: СПбГУ, первое издание, 1999, второе издание, 2000. — 120 с., третье, дополненное, издание, 2002. — 141 с.
54. Петросян Л. А., Кузьмина Т. И. Бескоалиционные дифференциальные игры. — Иркутск, Иркутский университет, 1989. — 148 с.
55. Подчукаев В. А. К проблеме грубости. — Саратов: Сборник «Аналитические методы синтеза регуляторов», 1997. — С. 206—225.
56. Подчукаев В. А. Анализ грубости свойства асимптотической устойчивости регулируемых систем. — М.: Изв. АН СССР. «Техническая кибернетика», 1985, № 6. — С. 131—137.
57. Понтрягин Н. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Физматгиз, 1961. — 391 с.
58. Прасолов А. В. Математические модели управления. — Л.: ЛГУ, 1991. — 90 с.
59. Солодовников В. В. Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. — М.: Физматгиз, 1960. — 655 с.
60. Себряков Г. Г., Семенов А. В. Методы H^∞ теории управления / Обзор /. Изв. АН СССР. «Техническая кибернетика», 1989, № 2. — С. 3—16.
61. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1979. — 285 с.

62. Управление морскими подвижными объектами. Авторы: Лернер Д. М., Лукомский Ю. А., Норневский В. И., Петров Ю. П., Попов С. С., Шлейер Г. Е. — Л.: Судостроение, 1979. — 271 с.
63. Фомин В. Н., Фрадков А. Л., Якубович В. А. Адаптивное управление динамическими объектами. — М.: 1981. — 447 с.
64. Харитонов В. Л. Об асимптотической устойчивости положения равновесия семейства линейных дифференциальных уравнений. Дифференциальные уравнения. — 1978, № 11. — 447 с.
65. Цейтлин Я. М. Проектирование оптимальных линейных систем. — М.: Машиностроение, 1973. — 240 с.
66. Цыпкин Я. З. Основы теории автоматических систем. — Наука, 1977. — 569 с.
67. Цыпкин Я. З., Поляк Б. Т. Робастная устойчивость при комплексных возмущениях параметров. — «Автоматика и телемеханика», 1991, № 8.
68. Чаки Ф. Современная теория управления (пер. с венгерского). — М.: 1975.
69. Чанг Ш. Синтез оптимальных систем автоматического регулирования. — М.: Машиностроение, 1964. — 440 с.
70. Чеголин П. М. Автоматизация спектрального и корреляционного анализа. — М.: Энергия, 1969.
71. Честнов В. Н. О возможной неустойчивости управляемых систем и синтез регуляторов с учетом параметрических возмущений. — Межвузовский сборник «Аналитические методы синтеза регуляторов», отв. редактор А. Г. Александров. — Саратов: 1984.
72. Честнов В. Н. Частотный метод анализа грубости систем, описываемых дифференциальными уравнениями. — Межвузовский сборник «Аналитические методы синтеза регуляторов», отв. редактор А. Г. Александров. — Саратов: 1985.
73. Якубович В. А. Оптимизация и инвариантность линейных стационарных систем управления. — «Автоматика и телемеханика», 1984, № 8. — С. 5—45.
74. Якубович В. А., Якубович Е. Д. Эквивалентные обратные связи в линейных стационарных системах управления. — «Автоматика и телемеханика», 1984, № 2. — С. 54—65.
75. Якубович В. А. Линейно-квадратичная задача оптимального гашения колебаний при неизвестном гармоническом внешнем возмущении. Доклады Академии наук. Т. 333, 1993, № 2.

Дополнительно:

76. Академик Данилевич Я. Б., Петров Ю. П. О необходимости расширения понятия эквивалентности математических моделей. — Доклады Академии наук. Т. 371, № 4. — С. 473—475.
77. Алимов Ш. А. и др. Алгебра и начала анализа. Пробный учебник для 10—11 классов средней школы. — М.: Просвещение, 1990. — 304 с.
78. Андриевский Б. Р., Фрадков А. Л. Элементы математического моделирования в программных средах MATLAB5 и Scilab. — СПб.: Наука, 2001. — 286 с.
79. Васильев Ф. П., Иваницкий А. Ю. Линейное программирование. — М.: «Факториал», 1998. — 174 с.
80. Конев В. Ю., Мироновский Л. А. Основные функции пакета MATLAB. — СПб.: 1994. — 75 с.
81. Красноперова Д. Г., Петров Ю. П., Фроленков Д. Б. Изменения в непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметров при эквивалентных преобразо-

ваниях. Труды Международной научной конференции «Аналитическая теория автоматического управления и ее приложения». — Саратов: 2000.

82. Красноперова Д. Г., Петров Ю. П. Необходимое уточнение теоремы о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметров. Труды Четвертого сибирского конгресса по прикладной и индустриальной математике (ИНПРИМ–2000). 2000.
83. Новогран С. С., Петров Ю. П. Нарушение устойчивости систем управления электродвигателями при вариациях параметров. Сборник докладов конференции «Оптим–2001». — СПб.: 2001.
84. Новогран С. С., Петров Ю. П. О новом источнике ошибок в расчетах, которые могут быть причиной аварий. Сороковые Крыловские чтения. — СПб.: 2001.
85. Петров Ю. П., Фроленков Д. Б. Изменение корректности при преобразованиях уравнения. Вестник Санкт-Петербургского государственного университета, серия 1, выпуск 1, 2000. — С. 52—57.
86. Петров Ю. П. Лекции по истории прикладной математики. — СПб.: СПбГУ, 2001. — 337 с.
87. Петров Ю. П. Управление, устойчивость, оптимизация. Научно-популярные очерки. — СПб.: СПбГУ, 2002. — 94 с.
88. Петров Ю. П. О «грамматике» науки. Цикл лекций для аспирантов и научных работников. — СПб.: СПбГУ, 2003. — 40 с.
89. Петров Ю. П. Очерк истории автоматического управления. — СПб.: СПбГУ, 2004. — 270 с.
90. Петров Ю. П., Сизиков В. С. Корректные, некорректные и промежуточные задачи с приложениями. Учебное пособие. — СПб.: Политехника, 2003. — 261 с.
91. Сизиков В. С. Математические методы обработки результатов измерений. — СПб.: Политехника, 2001. — 239 с.
92. Чертков К. Г. Надежность математических вычислений. «ВДО–2002». — СПб.: 2002.
93. Чертков К. Г. Исследование чувствительности к погрешностям округления собственных значений линейных систем. — Тула: Известия Тульского государственного университета, 2002. — С. 138—140.
94. Черноусько Ф. Л., Колмановский В. Б. Оптимальное управление при случайных возмущениях. — М.: Наука, 1978.— 351 с.
95. Шароватов В. Т. Обеспечение стабильности показателей качества автоматических систем. — Л.: Энергоавтомиздат, 1987. — 176 с.
96. Шмыров А. С. Устойчивость в гамильтоновых системах. — СПб.: СПбГУ, 1995. — 127 с.
97. Щипанов Г. В. Теория и методы проектирования автоматических регуляторов. — «Автоматика и телемеханика», 1939, № 1. — С. 48—64.
98. Юсупов Р. М. (редактор) Теория чувствительности и ее применения. — М.: АН СССР, 1981. — 192 с.
99. Яковенко П. Г. Оптимизация управления электрическими системами и подвижными объектами. — Томск: Томский государственный университет, 2000. — 120 с.

С публикациями [50, 51, 53, 86, 87, 88] можно ознакомиться на сайте:
www.petrov1930.narod.ru