Г. Н. Черкесов

Оценка надежности систем с учетом ЗИП

- Запасное имущество и принадлежности (ЗИП)
- Расчет надежности изделий с использованием показателей достаточности
- Оптимизация комплектов ЗИП по критерию достаточности
- Надежность систем при периодическом и непрерывном пополнении запасов
- Надежность систем при периодическом пополнении запасов с экстренными доставками
- Оптимизация комплектов ЗИП-О по критерию надежности

+cd

bhv®

Г. Н. Черкесов

Оценка надежности систем с учетом ЗИП

Допущено Учебно-методическим объединением вузов
по университетскому политехническому образованию в качестве
учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся
по направлению 230100 "Информатика и вычислительная техника"

Санкт-Петербург
«БХВ-Петербург»
2012

УДК 681.3.06+519(076.1)
ББК 32.973я73
Ч-48

Черкесов Г. Н.

Ч-48 Оценка надежности систем с учетом ЗИП: учеб. пособие. — СПб.: БХВ-Петербург, 2012. — 480 с.: ил. + CD-ROM —
(Учебная литература для вузов)

ISBN 978-5-9775-0634-2

Излагаются основы теории надежности систем, в которых восстановление работоспособности осуществляется с помощью замены отказавших элементов на запасные из комплектов ЗИП. Наряду с приближенной методикой, использующей известные результаты для ремонтируемых систем, рассматриваются методы точного расчета надежности путем прямого включения запасных элементов в модель как ресурса обеспечения надежности. Материал иллюстрирован многочисленными примерами учебного характера и фрагментами реальных проектов.

Прилагаемый CD содержит практические и учебные примеры к соответствующим главам книги, демонстрационную версию программы «Интеллект-ЗИП» и сведения о ней.

Для студентов технических вузов, инженеров и специалистов, работающих в области разработки цифровой аппаратуры

УДК 681.3.06+519(076.1)
ББК 32.973я73

Группа подготовки издания:

Главный редактор	*Екатерина Кондукова*
Зам. главного редактора	*Евгений Рыбаков*
Зав. редакцией	*Елена Васильева*
Редактор	*Григорий Добин*
Компьютерная верстка	*Ольги Сергиенко*
Корректор	*Зинаида Дмитриева*
Дизайн серии	*Инны Тачиной*
Оформление обложки	*Марины Дамбиевой*
Фото	*Кирилла Сергеева*

Рецензенты:

Р. М. Юсупов, чл.-кор. РАН, д-р техн. наук, проф., заслуженный деятель науки РФ, директор СПИИРАН

И. Г. Черноруцкий, д-р техн. наук, проф., декан факультета технической кибернетики, завкафедрой информационных и управляющих систем СПбГПУ

К. С. Хомяков, канд. техн. наук, доц. кафедры "Компьютерные системы и сети" МГТУ им. Н. Э. Баумана

Подписано в печать 30.04.12.
Формат 70×100 1/16. Печать офсетная. Усл. печ. л. 38,7.
Тираж 1000 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 190005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29.

Первая Академическая типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12/28

ISBN 978-5-9775-0634-2

© Черкесов Г. Н., 2012
© Оформление, издательство "БХВ-Петербург", 2012

Оглавление

Введение 13

Глава 1. Запасное имущество и принадлежности (ЗИП): основные понятия 17

1.1. Назначение ЗИП. Его роль в современной концепции технического обслуживания 17
1.2. Структура системы ЗИП 19
1.2.1. Одиночный комплект ЗИП (ЗИП-О) 19
1.2.2. Групповой комплект ЗИП (ЗИП-Г) 20
1.2.3. Двухуровневая система ЗИП (ЗИП-2У) 20
1.2.4. Многоуровневая система ЗИП (ЗИП-МУ) 20
1.3. Стратегии пополнения ЗИП 20
1.3.1. Периодическое пополнение ($\alpha = 1$) 20
1.3.2. Периодическое пополнение с экстренными доставками ($\alpha = 2$) 21
1.3.3. Непрерывное пополнение ($\alpha = 3$) 21
1.3.4. Пополнение по уровню ($\alpha = 4$) 21
1.4. Показатели достаточности комплектов ЗИП 22
1.4.1. Коэффициент готовности ЗИП 22
При периодическом пополнении ($\alpha = 1$) 22
При периодическом пополнении с экстренной доставкой ($\alpha = 2$) 24
При непрерывном пополнении ($\alpha = 3$) 26
При пополнении по уровню m ($\alpha = 4$) и L запасных частях в комплекте ЗИП 26
1.4.2. Средняя задержка в выполнении заявки на ЗЧ 30
1.4.3. Вероятность достаточности ЗИП 31
1.5. Потребление запасных частей в однофункциональных и многофункциональных системах 32
1.5.1. Режим длительного непрерывного применения (НПДП) 33
1.5.2. Режим многократного циклического применения (МКЦП) 34
1.6. Учет отказов запасных частей при хранении в показателях достаточности ЗИП 35
1.6.1. Нерезервированная система 35
При периодическом пополнении 35
При периодическом пополнении с экстренными доставками 35
При непрерывном пополнении 36

1.7. Учет пополнения комплекта ЗИП за счет ремонтного органа....37
1.7.1. Последовательно-параллельная система с облегченным резервом с дробной кратностью и отказами ЗЧ при хранении (модель 1.3.1)....38
1.7.2. Последовательно-параллельная система с облегченным резервом с дробной кратностью и безотказными запасными частями при хранении (модель 1.3.2)....39
1.7.3. Последовательно-параллельная система с ненагруженным резервом и безотказными запасными частями при хранении (модель 1.3.3)....40
1.7.4. Резервированная система с облегченным резервом с дробной кратностью и отказами ЗЧ при хранении (модель 1.2.1) 40
1.7.5. Резервированная система с облегченным резервом с дробной кратностью и безотказными запасными частями при хранении (модель 1.2.2)....40
1.7.6. Резервированная система с ненагруженным резервом с дробной кратностью и безотказными запасными частями при хранении (модель 1.2.3)....41
1.7.7. Последовательная система с отказами ЗЧ при хранении (модель 1.1.1) 41
1.7.8. Последовательная система с безотказными запасными частями при хранении (модель 1.1.3) 41
1.8. Заключение....41
1.9. Вопросы для самоконтроля 42

Глава 2. Расчет надежности изделий с использованием показателей достаточности комплектов ЗИП 43
2.1. Общие положения....43
2.2. Оценка показателей надежности нерезервированных систем 45
2.2.1. Показатели безотказности....45
2.2.2. Показатели готовности....46
2.3. Оценка показателей надежности однородных резервированных систем 46
2.3.1. Дублированная система (модель 2)....47
2.3.2. Мажорированная система (модель 3) 48
2.3.3. Система с групповым дублированием (модель 4)....48
При периодическом пополнении (ПП)....49
При стратегии ПЭД....49
При стратегиях НП и ПУ....49
2.3.4. Система с групповым мажорированием (модель 5) 50
2.3.5. Последовательное соединение двух дублированных подсистем (модель 6)....51
2.3.6. Последовательное соединение двух мажорированных подсистем (модель 7)....51
2.3.7. Последовательное соединение дублированной, мажорированной и нерезервированной подсистем (модель 8)....52
2.3.8. Резервирование по схеме «1 из 3» (модель 9) 53
2.3.9. Последовательное соединение двух мажорированных и дублированной подсистем (модель 10)....54
2.3.10. Дублирование структур типа модели 4 (модель 11) 54
2.3.11. Дублирование структур типа модели 6 (модель 12) 55
2.3.12. Дублирование структур типа модели 7 (модель 13) 56
2.4. Оценка показателей надежности неоднородных резервированных систем 57
2.4.1. Неоднородная дублированная система с однородными ветвями (модель М2-Н)....57
2.4.2. Неоднородная дублированная система с одной однородной и одной неоднородной ветвями (модель М2-НН). 58
2.4.3. Дублированная система с одинаковыми неоднородными ветвями (модель 14) 59

2.4.4. Дублированная система с различными неоднородными ветвями (модель 15) 61
2.4.5. Система с групповым дублированием и однородными ветвями (модель 16) 63
2.5. Заключение.....65
2.6. Вопросы для самоконтроля 65

Глава 3. Проектирование и оптимизация комплектов ЗИП по критерию достаточности 66
3.1. Общие положения.....66
3.1.1. Нормируемый показатель надежности — вероятность безотказной работы изделия. Нормируемый показатель достаточности — вероятность достаточности 67
3.1.2. Нормируемый показатель надежности — вероятность безотказной работы изделия. Нормируемый показатель достаточности — коэффициент готовности ЗИП. Изделие содержит только нерезервированные модули.....67
3.1.3. Нормируемый показатель надежности — вероятность безотказной работы изделия. Нормируемый показатель достаточности — коэффициент готовности ЗИП. Изделие содержит только резервированные модули.....68
3.1.4. Нормируемый показатель надежности — вероятность безотказной работы изделия. Нормируемый показатель достаточности — коэффициент готовности ЗИП. Изделие содержит нерезервированные и резервированные модули.....68
3.1.5. Нормируемый показатель надежности — средняя наработка до отказа изделия. Нормируемый показатель достаточности — коэффициент готовности ЗИП ...69
3.1.6. Нормируемый показатель надежности — коэффициент готовности изделия. Нормируемый показатель достаточности — коэффициент готовности ЗИП.....69
3.1.7. Нормируемый показатель надежности — коэффициент готовности изделия. Нормируемый показатель достаточности — среднее время задержки в выполнении заявки на ЗЧ.....69
3.2. Оценка и оптимизация комплекта одиночного ЗИП (ЗИП-О) по показателям достаточности 70
3.2.1. Оценка и оптимизация комплекта ЗИП-О по показателям достаточности при заданной стратегии пополнения запасов 70
Расчет базового комплекта.....70
Оптимизация комплекта ЗИП 72
Оценка запасов в комплекте ЗИП-О.....72
Расчет запасов в комплекте ЗИП 73
3.2.2. Оценка и оптимизация комплекта ЗИП-О по показателям достаточности при варьировании стратегии пополнения запасов 74
3.3. Оценка и оптимизация комплекта группового ЗИП (ЗИП-Г) по показателям достаточности 75
3.3.1. Модели функционирования группового ЗИП 75
Модель 1 75
Модель 2 75
Модель 3 76
3.3.2. Оценка запасов в комплекте группового ЗИП 76
Непосредственное обслуживание образцов аппаратуры 76
Обслуживание комплектов одиночного ЗИП (модель 2).....77
3.3.3. Расчет и оптимизация запасов в комплекте ЗИП-Г по критерию суммарных затрат при нормировании ПД 86
Расчет запасов в комплекте ЗИП-Г, обеспечивающий заданный ПД с учетом затрат 86
Расчет оптимальных запасов в комплекте ЗИП-Г 87

3.4. Оценка и оптимизация двухуровневой системы ЗИП (ЗИП-2У) по показателям достаточности 90
3.4.1. Модели функционирования системы ЗИП (ЗИП-2У) 90
Модель 1 90
Модель 2 90
3.4.2. Непосредственное обслуживание образцов аппаратуры (модель 1) 91
Периодическое пополнение (модель 1.1) 91
Периодическое пополнение с экстренными доставками (модель 1.2) 91
Непрерывное пополнение (модель 1.3) 93
Пополнение по уровню (модель 1.4) 93
3.4.3. Обслуживание комплектов одиночного ЗИП (модель 2) 93
Периодическое пополнение ЗИП-О (модель 2.1) 93
Периодическое пополнение с экстренными доставками (модель 2.2) 93
Непрерывное пополнение (модель 2.3) 94
Пополнение по уровню (модель 2.4) 96
3.5. Заключение 96
3.6. Вопросы для самоконтроля 97

Глава 4. Логико-вероятностное описание систем при использовании ЗИП 98
4.1. Классификация систем по структурным признакам 98
Пример 4.1 100
4.2. Модели и методы анализа надежности невосстанавливаемых систем с последовательно-параллельной структурой 104
4.2.1. Исчисление вероятностей в схеме независимых событий 105
Общее нагруженное резервирование с целой кратностью (см. рис. 4.8, *а*) 105
Общее нагруженное резервирование с дробной кратностью (см. рис. 4.8, *б*) 106
Раздельное нагруженное резервирование 106
4.2.2. Марковская модель 107
4.2.3. Композиция распределений 110
4.2.4. Логико-вероятностное описание последовательно-параллельных систем 110
4.3. Модели и методы анализа надежности невосстанавливаемых систем со сложной структурой 111
4.3.1. Метод перебора гипотез для систем с однородной структурой 111
Пример 4.2 112
4.3.2. Метод эквивалентных схем 112
Пример 4.3 113
Пример 4.4 113
4.3.3. Логико-вероятностный метод 114
Теорема 1 115
Пример 4.5 115
Теорема 2 115
Пример 4.6 116
Теорема 3 116
Алгоритм разрезания 116
Пример 4.7 117
Алгоритм ортогонализации 117
Пример 4.8 117
4.3.4. Решение систем логических уравнений 118
Пример 4.9 119

4.4. Модифицированный логико-вероятностный метод 119
Теорема 1 120
Пример 4.10 120
Теорема 2 (первая теорема разложения) 120
Теорема 3 121
Пример 4.11 121
Теорема 4 121
Теорема 5 (вторая теорема разложения) 122
Пример 4.12 122
Теорема 6 (третья теорема разложения) 123
Пример 4.13 123
Теорема 7 (четвертая теорема разложения) 123
Пример 4.14 124
4.5. Применение модифицированного ЛВМ для расчета надежности систем с ветвящейся структурой 124
4.5.1. Классификация ветвящихся структур 124
4.5.2. Расчет надежности и выбор структурных параметров многосвязных систем при полном оповещении о состоянии сети 129
Многосвязная система первого класса 130
Многосвязная система второго класса 131
Многосвязная система третьего класса 131
4.5.3. Расчет надежности многосвязных систем при неполном оповещении о состоянии сети 131
Система с оповещением о состоянии выходящих линий связи 132
Система с оповещением о состоянии прямой линии связи 132
4.5.4. Распределение числа работоспособных ветвей при полном оповещении о состоянии сети 133
Этап 1. Запись логической функции работоспособности одной ветви 134
Этап 2. Составление СФФВ для одной ветви 134
Этап 3. Составление производящего полинома для одной ветви 134
Этап 4. Возведение производящего полинома в степень 134
Этап 5. Замещение логических переменных, относящихся к $n-1$ ярусу 135
Этап 6. Возведение в степень и замещение логических переменных, относящихся к старшим ярусам 135
4.5.5. Распределение числа работоспособных ветвей при неполном оповещении о состоянии сети 136
4.6. Применение логико-вероятностных методов для анализа надежности систем при наличии ЗИП 136
4.6.1. Коэффициент готовности систем 137
4.6.2. Средняя наработка системы до отказа 137
4.6.3. Средняя наработка на отказ 138
4.6.4. Вероятность безотказной работы 138
4.7. Заключение 138
4.8. Вопросы для самоконтроля 139

Глава 5. Надежность однофункциональных систем при периодическом пополнении запасов в комплекте ЗИП-О 141
5.1. Общие положения 141
5.2. Расчет надежности последовательной однородной системы (модель П1) 142
5.2.1. Показатели безотказности 143
5.2.2. Показатели готовности 145

5.3. Расчет надежности однофункциональных систем с последовательно-параллельной структурой и однородными резервированными группами. Общий случай....147
5.3.1. Вероятность безотказной работы....148
Дифференциальный метод....148
Интегральный метод....149
5.3.2. Частота и интенсивность отказов....151
5.3.3. Средняя наработка до отказа....152
5.3.4. Коэффициент готовности и коэффициент оперативной готовности....152
5.3.5. Показатели надежности системы с последовательным соединением резервированных групп....153
5.4. Дублированная система (модель П2)....154
5.5. Мажорированная система (модель П3)....160
5.6. Последовательное соединение дублированной и нерезервированной подсистем (модель П4)....162
5.7. Последовательное соединение мажорированной и нерезервированной подсистем (модель П5)....168
5.8. Последовательное соединение двух дублированных и нерезервированной подсистем (модель П6)....172
5.9. Последовательное соединение двух мажорированных и нерезервированной подсистем (модель П7)....179
5.10. Последовательное соединение дублированной, мажорированной и нерезервированной подсистем (модель П8)....186
5.11. Резервирование по схеме «один из *m*» (модель П9)....198
5.12. Последовательное соединение дублированной и троированной подсистем (модель П10)....203
5.13. Дублирование структур типа П4 (модель П11)....209
5.14. Дублирование структур типа П6 (модель П12)....212
5.15. Дублирование структур типа П7 (модель П13)....217
5.16. Неоднородные системы с независимыми однородными подсистемами....220
5.16.1. Неоднородная дублированная система с однородными ветвями (модель П2-Н)....220
5.16.2. Неоднородная дублированная система с неоднородными ветвями (модель П2-НН)....222
5.17. Общее дублирование неоднородных систем (модель П14)....223
5.18. Неоднородная дублированная система с различными зависимыми ветвями (модель П15)....230
5.19. Система с неоднородным групповым дублированием (модель П16)....234
5.20. Системы со сложной структурой (модель П17)....243
Пример 5.1....244
Пример 5.2....248
5.21. Вопросы для самоконтроля....255

Глава 6. Надежность многофункциональных систем при периодическом пополнении запасов в комплекте ЗИП-О....257
6.1. Общие положения....257
6.1.1. Приближенные оценки первого типа....258
6.1.2. Приближенные оценки второго вида....259
6.1.3. Точные методы расчета надежности....260
Дифференциальный метод....260
Интегральный метод....262

6.2. Последовательная система (модель МП1)....263
6.3. Дублированная система (модель МП2)....268
6.4. Мажорированная система (модель МП3)....272
6.5. Последовательное соединение дублированной и нерезервированной подсистем (модель МП4)....276
6.6. Последовательное соединение мажорированной и нерезервированной подсистем (модель МП5)....280
6.7. Последовательное соединение двух дублированных и нерезервированной подсистем (модель МП6)....283
6.8. Последовательное соединение двух мажорированных и нерезервированной подсистем (модель МП7)....289
6.9. Последовательное соединение дублированной, мажорированной и нерезервированной подсистем (модель МП8)....294
6.10. Последовательное соединение резервированной по схеме «один из *m*» и нерезервированной подсистем (модель МП9)....298
6.11. Последовательное соединение дублированной и троированной подсистем (модель МП10)....306
6.12. Дублирование структур типа МП4 (модель МП11)....310
6.13. Дублирование структур типа МП6 (модель МП12)....313
6.14. Дублирование структур типа МП7 (модель МП13)....316
6.15. Общее дублирование неоднородных систем (модель МП14)....319
6.16. Неоднородная дублированная система с различными ветвями (модель МП15)....322
6.17. Система с неоднородным групповым дублированием (модель МП16)....326
6.18. Пример расчета надежности многофункциональной системы при ограниченном комплекте ЗИП....331
6.19. Вопросы для самоконтроля....342

Глава 7. Надежность многофункциональных систем при непрерывном пополнении запасов в комплекте ЗИП-О....344
7.1. Общие положения....344
7.2. Последовательная система (модель МН1)....345
7.3. Дублированная система (модель МН2)....347
7.4. Мажорированная система (модель МН3)....349
7.5. Последовательное соединение дублированной и нерезервированной подсистем (модель МН4)....351
7.5.1. Частичная реконфигурация....353
7.5.2. Полная реконфигурация....354
7.6. Последовательное соединение мажорированной и нерезервированной подсистем (модель МН5)....356
7.7. Последовательное соединение двух дублированных подсистем (модель МН6)....359
7.7.1. Частичная реконфигурация....361
7.7.2. Групповая реконфигурация....362
7.7.3. Полная реконфигурация....363
7.8. Последовательное соединение двух мажорированных подсистем (модель МН7)....364
7.8.1. Частичная реконфигурация....366
7.8.2. Групповая реконфигурация....367
7.8.3. Полная реконфигурация....368
7.9. Последовательное соединение мажорированной, дублированной и нерезервированной подсистем (модель МН8)....369

7.10. Общее резервирование с целой кратностью (модель МН9) 372
7.11. Последовательное соединение дублированной подсистемы и подсистемы с общим резервированием с целой кратностью (модель МН10) 376
7.12. Система с общим дублированием частично резервированной подсистемы (модель МН11) 380
7.13. Дублирование структур типа МН6 (модель МН12) 386
7.14. Вопросы для самоконтроля 390

Глава 8. Надежность однофункциональных систем при периодическом пополнении запасов с экстренными доставками 391
8.1. Стратегии пополнения комплекта ЗИП 391
8.2. Методы расчета надежности однородных систем при различных стратегиях пополнения типа ПЭД (класс XX1) 392
8.2.1. Класс 111 392
Оценка 1 (экспоненциальная модель) 395
Оценка 2 (по медленному движению) 395
Оценка 3 396
8.2.2. Класс 121 (одиночная ЭД после отказа системы) 397
8.2.3. Класс 211 (полная экстренная доставка после отказа комплекта ЗИП) 397
Показатели безотказности 398
Показатели готовности 399
8.2.4. Класс 221 (одиночная ЭД после отказа комплекта ЗИП) 401
Показатели безотказности 401
Показатели готовности 401
8.3. Нерезервированная система (модель ПЭД1) 401
8.3.1. Стратегия X11 (полная ЭД) 402
Оценки 1, 2 и 3 402
8.3.2. Стратегия X21 (одиночная ЭД) 405
8.4. Дублированная система (модель ПЭД2) 406
8.4.1. Стратегия 111 406
Оценка 1 (экспоненциальная модель) 407
Оценка 2 (по медленному движению) 408
8.4.2. Стратегия 121 (одиночная ЭД) 411
8.4.3. Стратегия 211 412
Показатели безотказности 412
Показатели готовности 414
8.4.4. Стратегия 221(одиночная ЭД по отказу ЗИП) 418
Показатели безотказности 418
Показатели готовности 420
8.5. Мажорированная система (модель ПЭД3) 423
8.5.1. Стратегия 111 423
Оценка 1 (экспоненциальная модель) 426
Оценка 2 (по медленному движению) 426
8.5.2. Стратегия 121 (одиночная ЭД) 428
8.5.3. Стратегия 211 429
Показатели безотказности 429
Показатели готовности 432

8.5.4. Стратегия 221 (одиночная ЭД по отказу ЗИП) 435
Показатели безотказности 435
Показатели готовности 436
8.6. Вопросы для самоконтроля 438

Глава 9. Оптимизация комплектов ЗИП-О по критерию надежности 439
9.1. Постановка задачи 439
9.1.1. Нормируемый показатель надежности — вероятность безотказной работы изделия 441
9.1.2. Нормируемый показатель надежности — средняя наработка до отказа изделия 441
9.1.3. Нормируемый показатель надежности — коэффициент готовности изделия 441
9.2. Оптимизация комплекта ЗИП-О по показателям надежности при заданных способах пополнения запасов 442
9.2.1. Расчет базового комплекта 442
9.2.2. Оптимизация комплекта ЗИП 443
9.2.3. Оценка запасов в комплекте ЗИП-О 444
9.2.4. Расчет запасов в комплекте ЗИП 445
Пример 9.1 445
9.3. Оптимизация комплекта ЗИП-О по показателям надежности при варьировании стратегии пополнения запасов 447
Пример 9.2 448
9.4. Средства программной поддержки расчетов и оптимизации комплектов ЗИП-О по критерию надежности 450
9.5. Пример расчета и оптимизации комплекта ЗИП-О с помощью программы «Интеллект-ЗИП» 453

Основные обозначения и сокращения 467

Описание компакт-диска 471

Список литературы 472

Введение

Запасное имущество и принадлежности (ЗИП) как ресурс обеспечения надежности занимает значительное место в практике проектирования и эксплуатации технических изделий в течение, по крайней мере, последних 50 лет. Однако в теории надежности восстанавливаемых систем проблематика ЗИП представлена слабо. Теория надежности рассматривает восстановление работоспособности путем ремонта. Ремонт как способ восстановления работоспособности на самом деле не является универсальным способом по ряду причин. Известно достаточно большое количество различных по масштабам и назначению систем, в том числе систем управления, для которых не удается организовать восстановление работоспособности путем ремонта. Во-первых, далеко не всегда на месте эксплуатации может быть развернута ремонтная база. Это относится не только к системам, имеющим серьезные ограничения по весу и габаритам, например к бортовым системам, но и ко многим системам военного назначения, системам управления на транспорте, системам, эксплуатируемым в малонаселенных труднодоступных регионах страны. Во-вторых, при современном высокотехнологичном производстве ремонт часто невозможен или экономически нецелесообразен вне крупных хорошо оснащенных специализированных предприятий.

При использовании ЗИП восстановление работоспособности сводится к замене отказавшего модуля (составной части) на работоспособную запасную часть (ЗЧ), что вполне может быть выполнено эксплуатационным персоналом. В этом случае возникает другая проблема. По соображениям ограничений на суммарную стоимость запасных частей не удается создать такие большие начальные запасы модулей, которые позволяли бы гарантированно иметь ЗЧ при любом отказе в системе. Это значит, что кроме ранее указанной причины отказа резервированной системы (новый отказ до завершения восстановления) появляется и другая причина, а именно отсутствие в комплекте ЗИП необходимой ЗЧ. Поскольку время пополнения запасов в комплекте существенно превышает допустимое время восстановления работоспособности, изделие после исчерпания запасов становится фактически невосстанавливаемым по отказам данного типа до ближайшего регламентного или случайного момента пополнения комплекта ЗИП.

Впервые понятие запасного элемента введено еще в 1964 году в книге [84], где рассмотрена экспоненциальная модель надежности с непополняемым комплектом ЗИП. Модель надежности дублированной системы с непополняемым или периодически пополняемым комплектом ЗИП рассмотрена в [14]. Способы пополнения запасов и показатели достаточности комплектов ЗИП довольно широко обсуждаются в конце 1960-х годов [16, 35–38, 64]. Методика [25] является, по-видимому, первым в нашей стране нормативным документом по расчету потребности в запасных частях (ЗЧ). В 1970-х годах опубликовано значительное количество работ [2, 6, 8, 19–21, 39, 42–43, 57, 58, 61, 62, 85–86], детализирующих стратегии пополнения запасов и предлагающие модели их учета при оценке характеристик комплектов ЗИП. Стратегия периодического пополнения запасов обсуждается в работах Послависко-

го О. Ф. [31, 40], Сафарова Б. Г. [52, 54, 56], Шура-Бура А. Э. [29, 86]. Стратегия периодического пополнения запасов с экстренными доставками обсуждается в работе [53], стратегия непрерывного пополнения рассмотрена в [85]. Широкий круг моделей функционирования ЗИП, в том числе при стратегиях периодического пополнения с экстренными доставками и пополнения по уровню, представлен в [29, 87]. Вопросы оптимизации рассмотрены в работах [1, 9, 17, 19, 20, 44, 51, 59]. В 1985 году Госстандарт СССР опубликовал для использования при разработке и эксплуатации техники Руководящий документ [4], содержащий методики оценки и расчета запасов в комплекте ЗИП. Проблема ЗИП нашла отражение и в десятитомном справочнике по надежности [30]. Научные достижения теории ЗИП закреплены в нормативных документах [10, 11, 41].

При всем разнообразии вариантов структуры запасов, стратегий пополнения и моделей функционирования ЗИП, рассмотренных в опубликованных работах, постановки задач и способы их решения имеют много общего. Для наиболее известных и широко используемых в промышленности методик, нашедших отражение в работах [4, 29, 41], идея учета ЗИП при оценке надежности сводится к следующему.

На основе данных о структуре системы, режимах ее функционирования, перечнях элементов, значениях показателей надежности элементов определяются параметры (интенсивности) потоков заявок в комплекты ЗИП на поставку ЗЧ каждого типа. Если для каждого типа запасов известны стратегия пополнения и параметры стратегии, то находят значения установленного показателя достаточности (ПД) для каждого типа запасов и для всего комплекта ЗИП в целом.

Расчетом ПД не заканчивается решение задачи. В государственном стандарте есть норма, согласно которой номенклатура и количество ЗЧ при заданной стратегии пополнения должны рассчитываться с учетом требований к надежности изделия. Поэтому полученные значения ПД используются далее для коррекции параметров модели надежности восстанавливаемой системы. В качестве последней выбирают подходящую модель надежности системы, восстанавливаемой путем ремонта с неограниченным ресурсом, и проводят расчет показателей надежности (ПН) при скорректированных параметрах модели. Эти значения должны удовлетворять требованиям к надежности изделия.

Способ учета ПД при расчете ПН зависит от наличия или отсутствия структурного резервирования. Для нерезервированных систем ПН системы с учетом ЗИП находят как произведение ПН при неограниченном комплекте ЗИП и ПД используемого фактически комплекта ЗИП. Для структурно резервированных систем учет ЗИП проводят путем коррекции среднего времени восстановления по известному значению ПД комплекта ЗИП.

Методики расчета, основанные на коррекции модели надежности с неограниченным комплектом ЗИП, имеют свои достоинства и недостатки. Несомненным достоинством является их значительная универсальность, т. к. они позволяют использовать весь накопленный арсенал моделей надежности систем с восстановлением путем ремонта [7, 46, 84, 98–113]. Вместе с тем, они являются приближенными и содержат методическую погрешность. Поэтому вполне естественно поинтересоваться величиной и знаком погрешности, т. к. возможны ошибки первого и второго рода. Если расчеты дают нижнюю оценку точного значения ПН типа вероятности безотказной работы или средней наработки до отказа, то могут возникать избыточный запас элементов и некоторые экономические потери на создание дополнительного запаса элементов. Если же оценка, напротив, верхняя, то созданный комплект ЗИП фактически не обеспечивает необходимую надежность и изделие не удовлетворяет требованиям к надежности.

Используемые в настоящее время в промышленности методики расчета надежности восстанавливаемых систем при наличии ЗИП являются приближенными, имеющими знакопере-

менную погрешность, значение которой не известно как по знаку, так и по абсолютной величине.

Выборочная проверка точности показывает, что существуют области применения, где погрешность достигает сотен и тысяч процентов: системы с групповым дублированием, дублированные системы при оценке показателей готовности.

Методика содержит несколько источников погрешности: разделение задач расчета показателей достаточности и показателей надежности, погрешность пересчета показателей достаточности, различия в способах соединения показателей достаточности и показателей надежности для нерезервированных и резервированных систем. Этот вид погрешности проявляется в том случае, когда в однородной подсистеме только часть элементов резервирована.

Следует обратить внимание на одно важное обстоятельство. Существует распространенное мнение о том, что приближенная методика [4, 29] обладает универсальностью благодаря использованию арсенала моделей надежности ремонтируемых систем с неограниченным ресурсом восстановления. На самом деле это не совсем так. Фактически методика позволяет найти показатели надежности для однофункциональных систем последовательно-параллельного типа, в которых последовательно соединены однородные подсистемы, в каждой из которых используются однотипные элементы и известна схема резервирования.

В других случаях, например в неоднородных резервированных системах последовательно-параллельного типа, возникают существенные трудности. Яркой иллюстрацией этих трудностей является пример расчета, рассмотренный в работах [3, 73].

Существуют области, которые вообще не охвачены приближенными методиками: системы со сложной структурой («мостиковые» структуры), многофункциональные структуры в полном объеме.

В приближенных методиках возникает еще одна трудность. Для расчета состава комплекта ЗИП необходимо знать нормативное значение показателя достаточности, с которым сравнивается фактическое значение при известном составе комплекта ЗИП. Поскольку нормативные значения не являются самостоятельными и должны рассчитываться исходя из требований к надежности, возникает непростая задача вычисления нормативного значения показателя достаточности по заданным нормативным значениям показателя надежности. Эта задача становится особенно сложной для структурно резервированных систем.

Широкое распространение ЗИП как способа восстановления работоспособности, большая практическая значимость оценок надежности систем с ЗИП, тяжелые последствия оценок показателей надежности с погрешностью, исчисляемой десятками, сотнями и даже тысячами процентов, требуют разработки нового раздела в теории надежности, а именно теории надежности систем с восстановлением с помощью ЗИП.

Идея построения этого раздела состоит в прямом включении ресурсов ЗИП в модели надежности. Это позволяет исключить методическую погрешность, характерную для приближенных методик [4, 41]. Именно в этом смысле в книге употребляется словосочетание «точная методика», которая использует прямое включение ресурсов ЗИП в модели надежности. Это вовсе не значит, что «точная методика» не содержит других видов погрешностей.

Наряду с ЗИП в системе могут использоваться и другие средства (ресурсы) для обеспечения надежности, такие как широко известные виды резервирования: структурное, функциональное, временное и пр.

В модели надежности учитывают особенности стратегии пополнения запасов, ее параметры, структура обслуживаемой системы и структура системы ЗИП, условия хранения запа-

сов, многофункциональность изделия, возможности реконфигурации структуры, неодинаковые условия доступности запасов для различных подсистем, приоритетность доступа к запасам со стороны подсистем и функционально самостоятельных операций; возможности маневрирования ресурсами, в частности, возможности реконфигурации (перевода части работоспособных, но не участвующих в функционировании элементов деградированной структуры в состав комплекта ЗИП) и пр.

При прямом включении ЗИП в модель надежности отпадает необходимость в вычислении показателей достаточности. Поэтому они могут рассчитываться только для сведения и для планирования работы системы технического обслуживания. Однако они не нужны при формировании комплекта ЗИП по критерию надежности.

Учебный процесс в высших учебных заведениях по направлению подготовки 230100 «Информатика и вычислительная техника» практически не обеспечен учебными пособиями, содержащими сведения о ЗИП. В настоящее время только одно учебное пособие [71] имеет главу по тематике ЗИП, но и она не полностью обеспечивает потребности дисциплины «Надежность, эргономика и качество АСОИУ». В этой дисциплине согласно государственному образовательному стандарту ГОС СД.09 предусмотрено изложение в достаточном объеме и должного качества основных расчетных моделей для оценки показателей надежности аппаратуры, методов обеспечения надежности и видов избыточности. С учетом бурного развития теории надежности по проблематике ЗИП и важности ЗИП как вида избыточности можно утверждать, что обучение студентов должно соответствовать современным требованиям и опираться на учебные пособия, оперативно отражающие новые результаты в этой области знаний.

Предлагаемая книга опирается на последние достижения теории надежности и содержит необходимые материалы, как для чтения курса лекций, так и для составления расчетных заданий, выполнения практических занятий, курсовых проектов, лабораторного практикума. Значительное внимание уделено самостоятельной работе.

Кроме студентов по направлению подготовки 230100, читателями книги могут быть и другие категории обучающихся. Книга может использоваться для совершенствования и переподготовки сотрудников служб надежности и качества промышленных предприятий, проектно-конструкторских и эксплуатирующих организаций, для самообразования аспирантов и научных работников в области информатики и вычислительной техники.

Книга содержит 9 глав и 9 приложений. В *главе 1* излагаются основные понятия и определения, классификация комплектов ЗИП по структурным признакам, условиям применения и пополнения, показатели достаточности комплектов ЗИП, постановки задач оценки показателей с учетом различных факторов.

В *главе 2* рассматриваются некоторые типовые модели надежности систем с учетом ЗИП на основе приближенной сертифицированной методики. В *главе 3* дается общее описание методик и алгоритмов оптимизации комплектов ЗИП по показателям достаточности. В *главе 4* приводятся краткие сведения о различных способах логико-вероятностного описания систем с двухполюсной и ветвящейся структурой при наличии комплектов ЗИП.

В *главах 5–8* излагаются новые методы расчета надежности путем прямого включения ЗИП в модели надежности при различных стратегиях пополнения запасов. Методики расчета не содержат погрешностей, характерных для приближенной методики, и дают точное решение задачи надежности с учетом ЗИП.

В *главе 9* рассматриваются методы и алгоритмы оптимизации комплектов ЗИП по критерию надежности, которые можно использовать вместо известных алгоритмов оптимизации по критерию достаточности.

В *приложениях П1–П9* на компакт-диске приводятся практические и учебные примеры, предназначенные для использования в упражнениях, расчетных заданиях, при выполнении курсовых работ, а также обширный расчетный материал, позволяющий проводить анализ свойств технических изделий при наличии ЗИП. Этот материал полезно использовать при выполнении бакалаврских работ и подготовке магистерских диссертаций по тематике надежности.

Автор выражает благодарность В. В. Чуркину, разработавшему алгоритмы и программы расчета и оптимизации комплектов ЗИП по критерию надежности и подготовившему материалы *разд. 3 главы 9*. Автор выражает также искреннюю признательность чл.-кор. РАН, д. т. н., профессору Юсупову Р. М., д. т. н., профессору Зеленцову В. А. и д. т. н., профессору Черноруцкому И. Г. за полезные советы и замечания, способствовавшие улучшению книги.

ГЛАВА 1

Запасное имущество и принадлежности (ЗИП): основные понятия

1.1. Назначение ЗИП. Его роль в современной концепции технического обслуживания

Современная теория надежности восстанавливаемых систем исходит из модели надежности, в которой устранение отказа и восстановление работоспособности осуществляется путем ремонта в ремонтном органе (РО), имеющем в своем составе одну или несколько ремонтных бригад (РБ). При этом принимается допущение о том, что возможное количество восстановлений за время функционирования, вообще говоря, не ограничено [7]. Однако могут быть ограничения на время одного восстановления или на суммарное время восстановления. Тогда возникают модели надежности с резервом времени (временной избыточностью) [77]. Отказом признается событие, при котором время восстановления превысит допустимое (резервное) время. Если резерв времени отсутствует, то применяют структурное резервирование и тогда отказ наступает, если время восстановления превысит время до отказа резервного элемента.

Многие технические системы имеют такие условия функционирования, когда ремонтный орган (ремонтная база) находится в непосредственной близости от места эксплуатации системы и имеет технические и технологические возможности устранения практически любого отказа, возникающего при эксплуатации. Тогда вполне обоснованным является допущение о неограниченном количестве возможных восстановлений.

Однако известно значительное количество различных по масштабам и назначению систем, восстановление работоспособности которых путем ремонта не удается организовать по следующим причинам.

Во-первых, далеко не всегда на месте эксплуатации может быть развернута ремонтная база. Это относится к системам, имеющим серьезные ограничения по массе и габаритам, например к бортовым системам (на самолетах, судах, обитаемых и необитаемых космических аппаратах), к наземным транспортным системам, системам, эксплуатируемым в малонаселенных труднодоступных регионах страны.

Во-вторых, при современном высокотехнологичном производстве (hi-tech) ремонт часто не возможен или экономически не целесообразен вне крупных, хорошо оснащенных современным технологическим оборудованием предприятий.

Кроме того, при современной международной технической и технологической кооперации и высоком уровне интегральности структурных элементов, например, в компьютерной технике, ремонт может оказаться не возможным в принципе из-за того, что эти элементы созданы как неремонтируемые (БИС в электронной технике, интегрированные модули, зали-

тые компаундом и пр.). В других случаях системы изготовлены из покупных импортных модулей, изготовление и ремонт которых не может быть освоен в стране по технологическим или юридическим причинам (отсутствие лицензии, патента, авторских прав).

Альтернативой ремонту является использование комплектов запасного имущества и принадлежностей (ЗИП), когда восстановление работоспособности сводится к замене отказавшего модуля (сменной части, СЧ) работоспособной запасной частью (ЗЧ), что вполне может выполнить эксплуатационный персонал. В этом случае, однако, возникает другая проблема. По соображениям ограничений на суммарную стоимость начальных запасов в комплекте ЗИП не удается создать большие начальные запасы модулей, которые позволяли бы обеспечить с высокой вероятностью возможность замены отказавшего модуля. Это значит, что кроме упомянутых появляется новая причина отказа, а именно отсутствие в комплекте ЗИП необходимой ЗЧ. Отсутствие ЗЧ в комплекте ЗИП делает систему невосстанавливаемой по отказам данного типа и приводит немедленно или с некоторой задержкой к отказу системы.

Влияние ЗИП на надежность системы существенно зависит от соотношения между временем замены отказавшего элемента работоспособной ЗЧ и допустимым временем перерыва в работе системы. Здесь возможны три варианта:

- обычно время замены составляет несколько десятков минут. Если вследствие инерционности протекающих в системе процессов перерыв такой длительности не приводит к нарушению качества ее функционирования, то в модели надежности время замены можно не учитывать;
- если же резерв времени, создаваемый инерционностью процессов, сравним с временем замены, то при оценке надежности надо использовать модели надежности с мгновенно пополняемым резервом времени [77];
- третий вариант возникает тогда, когда допустимое время перерывов в работе мало, и за это время практически невозможно выполнить замену отказавшего модуля. Тогда комплект ЗИП не может обеспечить повышение надежности, т. е. эффективность его создания близка к нулю. В этом случае для обеспечения эффективности применения ЗИП совершенно необходимо использовать встроенное структурное резервирование. Работоспособность системы на время замены обеспечивается структурным резервом. Система не откажет, если замена будет проведена до отказа резервного элемента.

Комплект ЗИП является разновидностью ресурса, предназначенного для повышения надежности. Его можно рассматривать как разновидность ненагруженного резерва и применять к нему признаки классификации структурного резервирования.

Эффективность применения комплекта ЗИП определяется различными факторами, в том числе:

- структурой системы ЗИП;
- стратегией пополнения начальных запасов;
- приспособленностью изделия к восстановлению работоспособности путем использования ЗЧ;
- правилами потребления запасов при наличии нескольких потребителей: бесприоритетное обслуживание, приоритетное обслуживание;
- правилами и условиями хранения запасов;
- правилами и условиями обмена запасами между различными комплектами ЗИП в многоуровневой структуре.

Рассмотрим эти факторы подробнее.

1.2. Структура системы ЗИП

По структурным признакам можно выделить следующие варианты комплектов ЗИП [4, 30].

1.2.1. Одиночный комплект ЗИП (ЗИП-О)

Одиночный комплект ЗИП предназначен для восстановления работоспособности одного образца изделия и размещается вблизи места его эксплуатации, чтобы обеспечить малое время замены, включающее время доставки ЗЧ к месту эксплуатации изделия, собственно время замены и время проверки готовности к применению:

$$T_з = T_д + T_{зс} + T_п . \qquad (1.1)$$

В состав комплекта ЗИП-О входят запасные части нескольких типов. Количество ЗЧ i-го типа обозначим через L_i, i = 1, ..., N. Вообще говоря, не все типы модулей, работающих в составе системы, должны быть представлены в комплекте ЗИП-О. Поэтому $N \le N_c$, где N_c — количество различных типов модулей в составе изделия. Общее количество запасных частей L получают как сумму запасов различных типов. Запасы элементов в комплекте ЗИП-О пополняются непосредственно из неиссякаемого источника пополнения (НИП) (рис. 1.1, *а*).

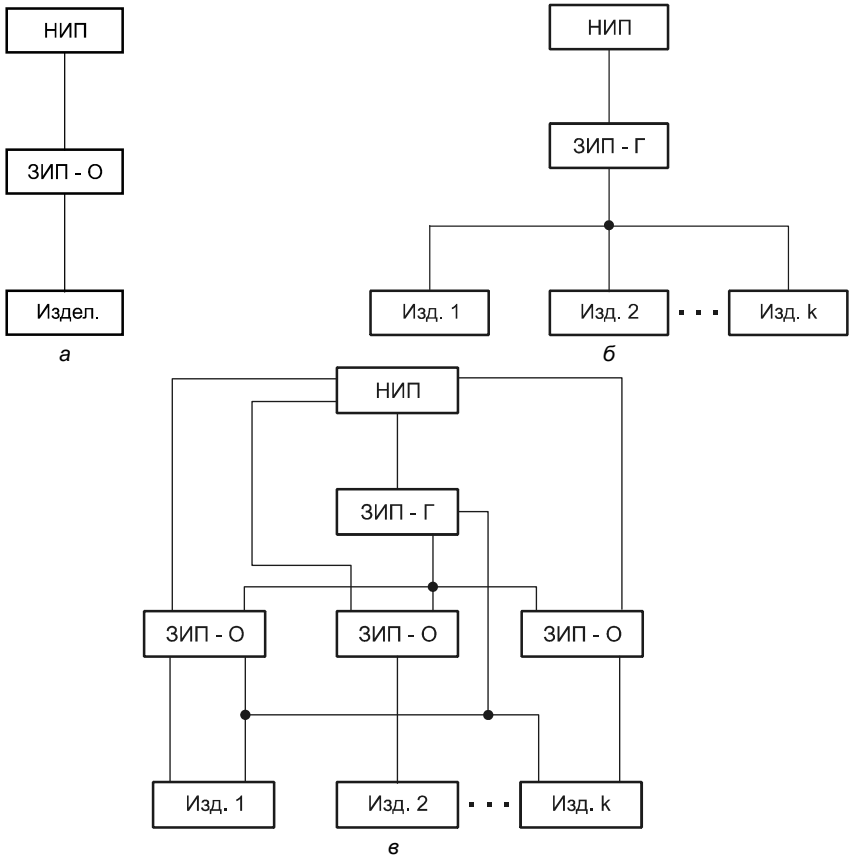


Рис. 1.1. Типовые структуры ЗИП: *а*, *б* — одноуровневая структура; *в* — двухуровневая структура

В качестве НИП может быть предприятие-изготовитель составных частей или оптовая база снабжения. Порядок пополнения запасов в комплекте ЗИП-О определяется стратегией пополнения.

1.2.2. Групповой комплект ЗИП (ЗИП-Г)

Групповой комплект ЗИП обслуживает несколько образцов изделия, эксплуатируемых в одном месте или территориально распределенных на незначительное расстояние, так что время доставки ЗЧ к каждому из образцов остается приемлемым (рис. 1.1, *б*). Очевидно, что сосредоточение ЗЧ в составе комплекта группового ЗИП увеличивает эффективность их использования за счет увеличения доступности по сравнению с одиночным комплектом ЗИП, т. к. запасы ЗЧ определенного типа в ЗИП-О доступны только для одного образца изделия и не доступны для остальных образцов. Однако при этом увеличивается время доставки, что ухудшает вероятностные характеристики системы и комплекта ЗИП. Итоговые результаты действия этих двух факторов можно оценить при количественной оценке надежности.

Комплект ЗИП-Г пополняется в соответствии с принятой стратегией пополнения, а обеспечивает обслуживание по запросам R образцов изделия.

1.2.3. Двухуровневая система ЗИП (ЗИП-2У)

На первом (нижнем) уровне размещаются комплекты одиночного ЗИП (ЗИП-О), на втором (верхнем) уровне находится комплект группового ЗИП (ЗИП-Г) (рис. 1.1, *в*). Комплект ЗИП-Г пополняется из НИП, а комплекты ЗИП-О могут пополняться либо из комплекта ЗИП-Г, либо из НИП, если ЗЧ данного типа отсутствуют в ЗИП-Г. Замена отказавших модулей в изделии может проводиться либо из «своего» комплекта ЗИП-О, либо из комплекта ЗИП-Г, если время доставки приемлемо. Поэтому комплект ЗИП-Г может содержать запасные части, которых нет в ЗИП-О. Из-за того, что различные образцы изделия могут находиться на различном удалении от комплекта ЗИП-Г, различные комплекты ЗИП-О могут иметь различный состав типов ЗЧ, т. к. в целях повышения эффективности использования запасов все, что возможно, следует передавать с нижнего уровня на верхний.

1.2.4. Многоуровневая система ЗИП (ЗИП-МУ)

Эта система является обобщением двухуровневой системы, так что можно представить появление третьего уровня, снабжающего запасными частями второй уровень, на котором могут находиться несколько комплектов ЗИП-Г. Распределение суммарных запасов между уровнями проводится на основе решения задачи оптимизации по критерию максимума надежности или минимума стоимости запасов при заданном уровне надежности.

1.3. Стратегии пополнения ЗИП

На каждом уровне структуры системы ЗИП могут быть использованы различные стратегии пополнения.

1.3.1. Периодическое пополнение ($\alpha = 1$)

При периодическом пополнении (стратегия ПП) через фиксированные, заранее заданные промежутки времени T_i, запасы данного типа восстанавливаются до начального уровня. При

этом T_i для запасов различного типа могут не совпадать. Поэтому параметром стратегии является, вообще говоря, вектор $(T_1, T_2, ..., T_N)$. Только в случае, когда периоды пополнения по всем типам запасов одинаковы, параметр стратегии становится скалярной величиной T. Период T либо назначается заранее, либо выбирается при решении задачи оптимизации.

1.3.2. Периодическое пополнение с экстренными доставками ($\alpha = 2$)

При стратегии пополнения с экстренными доставками (ПЭД) кроме пополнения с заданным интервалом могут проводиться экстренные доставки по определенному признаку при возникновении особых событий. Особые события и их признаки могут быть различными. Основным признаком является отказ системы в результате отказа элемента *i*-го типа при отсутствии соответствующей ЗЧ в комплекте ЗИП. Другим признаком может быть невыполнение заявки на ЗЧ определенного типа. Для нерезервированных систем оба признака совпадают. Для резервированных систем запрос на ЭД может формироваться при работоспособном состоянии системы и поэтому ЭД может произойти еще до того, как система откажет. Экстренная доставка означает, что будет поступление ЗЧ из комплекта более высокого уровня или из НИП, позволяющее восстанавливать работоспособность системы, частично или полностью восстанавливать базовую структуру со всеми ее резервными элементами, частично или полностью восстанавливать начальные запасы в комплекте ЗИП. Таким образом, возникает некоторое разнообразие стратегий ПЭД. Крайними вариантами являются стратегии, когда при появлении признака запасы всех типов пополняются до начального уровня и когда в заявку на ЭД включается только одна ЗЧ того типа, для которого и появился признак потребности в ЭД. Между ними есть множество других вариантов. Более подробная классификация приведена в *главе 8*. Параметрами стратегии являются вектор периодов пополнения $T = (T_1, T_2, ..., T_N)$ и вектор средних значений времени экстренной доставки $T_{ЭД} = (T_{ЭД1}, T_{ЭД2}, ..., T_{ЭДN})$.

1.3.3. Непрерывное пополнение ($\alpha = 3$)

Заявка формируется после каждого уменьшения уровня запасов любого типа. Параметром стратегии является вектор средних значений времени доставки $T_д = (T_{д1}, T_{д2}, ..., T_{дN})$.

1.3.4. Пополнение по уровню ($\alpha = 4$)

При стратегии пополнения по уровню (ПУ) заявка на пополнение запасов формируется по признаку: количество ЗЧ данного типа уменьшилось до заданного уровня. Этот минимальный уровень устанавливается для каждого типа запасов и, в частности, может быть принят равным нулю. Как и при ПЭД, в заявку могут быть включены ЗЧ только того типа, который вызвал появление признака пополнения, нескольких типов, всех типов. Количество ЗЧ, включенных в заявку, тоже может быть различным: от одной ЗЧ до уровня начальных запасов. Это создает разнообразие стратегий в классе ПУ. Более детальная классификация приведена в *главе 9*. Общая особенность всех стратегий ПУ состоит в том, что заявки формируются при работоспособном состоянии системы. Параметрами стратегии ПУ является вектор средних значений времени доставки $T_д = (T_{д1}, T_{д2}, ..., T_{дN})$ и вектор минимальных уровней запасов $L = (L_1, L_2, ..., L_N)$.

1.4. Показатели достаточности комплектов ЗИП

Процессы потребления запасов (расходования ЗЧ) являются стохастическими. Характеристики комплектов ЗИП являются вероятностными и связаны с некоторыми случайными событиями или случайными величинами. Поэтому сначала надо ввести и дать определения случайных событий и величин, для которых в дальнейшем будут разыскиваться вероятностные характеристики.

Базовым понятием для надежности комплекта ЗИП является «отказ комплекта ЗИП». Согласно [87], отказом комплекта ЗИП называется такое событие в системе «изделие — ЗИП», которое вызывает полную или частичную потерю работоспособности изделия при отсутствии в комплекте ЗИП соответствующей ЗЧ. Из этого определения следует, что событие, называемое «отказ комплекта ЗИП», на самом деле связано не только с состоянием запасов, но и с состоянием системы, наличием или отсутствием структурного резерва. Отсутствие ЗЧ в комплекте ЗИП в данном контексте не рассматривается как отказ комплекта ЗИП, т. к. отказавший элемент, возможно, был резервирован. Это значит, что пока изделие сохраняет работоспособность, комплект ЗИП находится в безотказном состоянии, даже если он пуст и даже если к нему уже поступило несколько неудовлетворенных заявок на ЗЧ. Чтобы устранить двоякое толкование термина, в дальнейшем будем относить его только к нерезервированным системам. Для резервированных систем будем считать все элементы, в том числе и резервные, соединенными последовательно.

Основными случайными величинами, используемыми при определении вероятностных показателей ЗИП, являются:

- T_o — время доставки ЗЧ в комплект ЗИП (время от момента формирования заявки во внешний источник пополнения до фактического поступления ЗЧ в комплект ЗИП);
- $T_{ЭД}$ — время экстренной доставки ЗЧ;
- $T_з$ — время задержки в выполнении заявки на ЗЧ (время от момента формирования заявки на ЗЧ от изделия до фактического поступления ЗЧ к месту эксплуатации изделия). В статистику величины включают все значения задержки — при наличии и при отсутствии ЗЧ в комплекте ЗИП;
- $T_{з1}$ — время задержки при отсутствии ЗЧ в комплекте ЗИП, т. е. при необходимости доставки ЗЧ из внешнего источника.

Используя рассмотренные здесь случайные события и величины, вводим показатели достаточности ЗИП.

1.4.1. Коэффициент готовности ЗИП

Коэффициент готовности ЗИП $K_{гЗИП}$ есть стационарная вероятность застать систему «изделие — ЗИП» в состоянии, когда отсутствуют неудовлетворенные заявки от изделия на ЗЧ. С учетом приведенного толкования понятия «отказ комплекта ЗИП» [87] и сделанного ранее замечания можно трактовать коэффициент готовности ЗИП как стационарную вероятность застать нерезервированное изделие в работоспособном состоянии при восстановлении с помощью ЗИП.

При периодическом пополнении ($\alpha = 1$)

В этом случае коэффициент готовности ЗИП можно найти по формуле:

$$K_{гЗИП}(T) = \frac{\bar{\tau}_1(T)}{\bar{\tau}_1(T) + \Delta T_{ЗИП}(T)}, \qquad (1.2)$$

где:

$\bar{\tau}_1(T)$ — средняя наработка системы в периоде пополнения T;

$\Delta T_{ЗИП}(T) = MT_{з1}$ — средняя задержка в доставке ЗЧ, математическое ожидание величины $T_{з1}$.

Среднюю наработку находят по формуле:

$$\bar{\tau}_1(T) = TP(T) + \int_0^T xf(x)dx = \int_0^T P(x)dx\,, \tag{1.3}$$

где:

$f(x)$ — плотность распределения наработки до отказа изделия с учетом ЗИП;

$P(T)$ — вероятность безотказной работы изделия с учетом ЗИП.

Средняя задержка:

$$\Delta T_{ЗИП}(T) = \int_0^T (T-x)f(x)dx = T(1-K_{гЗИП}(T))\,. \tag{1.4}$$

Подставляя (1.3) и (1.4) в (1.2), получим:

$$K_{гЗИП}(T) = \frac{1}{T}\int_0^T P(x)dx\,. \tag{1.5}$$

Отсюда следует, что коэффициент готовности ЗИП при периодическом пополнении запасов есть среднее значение ВБР последовательной системы по периоду пополнения.

Полагая, что запасные части в комплекте ЗИП при хранении не отказывают и что элементы системы (основные и резервные) имеют постоянные интенсивности отказов, при L запасных частях данного типа в комплекте ЗИП, найдем выражение для ВБР однородной системы, имеющей в своем составе k элементов:

$$P(t,L) = \sum_{i=0}^{L}\frac{(k\lambda t)^i}{i!}e^{-k\lambda J}\,. \tag{1.6}$$

Подставляя (1.6) в (1.5), получим:

$$K_{гЗИП}(T,L) = \frac{1}{A}\sum_{i=0}^{L} I(A,i+1) = 1 - I(A,L) + \frac{L+1}{A}I(A,L+1), A = k\lambda T\,, \tag{1.7}$$

где $I(x,m)$ — функция распределения Эрланга, неполная гамма-функция

$$I(x,m) = 1 - \sum_{i=0}^{m-1}\frac{x^i}{i!}e^{-x}\,. \tag{1.8}$$

В частности, при $L = 1$ и 2 имеем:

$$K_{гЗИП}(T,1) = \frac{1}{A}(I(A,1) + I(A,2)) = \frac{1}{A}(2-(2+A)e^{-A})\,, \tag{1.9}$$

$$K_{гЗИП}(T,2) = \frac{1}{A}(I(A,1) + I(A,2) + I(A,3)) = \frac{1}{A}(3-(3+2A+A^2/2)e^{-A})\,. \tag{1.10}$$

Коэффициент готовности учитывает только количество ЗЧ и суммарный поток заявок на ЗЧ от изделия. Поэтому в формулах (1.6)–(1.10) k — это количество нагруженных элементов данного типа без учета структуры их соединения (последовательное, параллельное). Коэф-

фициент готовности можно трактовать как вероятность того, что в периоде пополнения заявка на ЗЧ не возникнет, а если возникнет, то будет удовлетворена из запасов в комплекте ЗИП.

Выражение $1 - K_{гЗИП}(T, L)$ можно трактовать как вероятность того, что в периоде пополнения возникнет такая заявка на ЗЧ, которая не будет удовлетворена из-за отсутствия ЗЧ в комплекте ЗИП.

При периодическом пополнении с экстренной доставкой ($\alpha = 2$)

В этом случае поток моментов ЭД является рекуррентным с ведущей функцией потока $H(t)$ и функцией распределения интервалов Z_i между соседними моментами ЭД $F(t)$. Изображения этих функций и функции интенсивности потока $\omega(t)$, полученные с помощью преобразования Лапласа — Карсона [67], связаны известными соотношениями:

$$H^*(s) = \frac{F^*(s)}{1 - F^*(s)}, \omega^*(s) = sH^*(s). \tag{1.11}$$

Поскольку интервал между моментами ЭД является суммой наработки и времени экстренной доставки с распределениями $F_0(t)$ и $F_{ЭД}(t)$ соответственно, то

$$H^*(s) = \frac{F_0^*(s)F_{ЭД}^*(s)}{1 - F_0^*(s)F_{ЭД}^*(s)}. \tag{1.12}$$

Нестационарное значение коэффициента готовности ЗИП получим из известного соотношения:

$$K_{гЗИП}^*(s, L) = \frac{1 - F_0^*(s)}{1 - F_0^*(s)F_{ЭД}^*(s)}. \tag{1.13}$$

При экспоненциальном распределении времени ЭД имеем:

$$H^*(s) = \frac{\mu F_0^*(s)}{s + \mu(1 - F_0^*(s))}, \mu = 1/\overline{T}_{ЭД},$$

$$K_{гЗИП}^*(s, L) = 1 - \frac{sF_0^*(s)}{s + \mu(1 - F_0^*(s))} = 1 - \overline{T}_{ЭД}\omega^*(s). \tag{1.14}$$

Обратное преобразование в (1.14) дает:

$$K_{гЗИП}^*(t, L) = 1 - \overline{T}_{ЭД}\omega(t, L). \tag{1.15}$$

Среднее по периоду пополнения значение коэффициента готовности:

$$K_{гЗИП}(T, L) = 1 - \frac{\overline{T}_{ЭД}}{T}H(T, L). \tag{1.16}$$

Рассмотрим частные случаи.

1. При экспоненциальном распределении наработки и времени экстренной доставки изображения функций в (1.12) и (1.13) имеют вид:

$$F_0^*(s) = \left(\frac{k\lambda}{s + k\lambda}\right)^{L+1}, F_{ЭД}^*(s) = \frac{\mu}{s + \mu},$$

$$\omega^*(s) = \frac{s\mu(k\lambda)^{L+1}}{(s+\mu)(s+k\lambda)^{L+1} - \mu(k\lambda)^{L+1}}, \tag{1.17}$$

$$K^*_{гЗИП}(s,L) = 1 - \overline{T}_{ЭД}\omega^*(s) = 1 - \frac{s(k\lambda)^{L+1}}{(s+\mu)(s+k\lambda)^{L+1} - \mu(k\lambda)^{L+1}}. \tag{1.18}$$

При $L = 0$ обратное преобразование в (1.17) и (1.18) дает:

$$\omega(t,0) = \omega(1 - e^{-\omega_1 t}), \omega = 1/(\overline{T}_0 + \overline{T}_{ЭД}), \omega_1 = \frac{1}{\overline{T}_0} + \frac{1}{\overline{T}_{ЭД}} = k\lambda + \mu, \tag{1.19}$$

$$K^*_{гЗИП}(t,0) = \frac{\mu}{k\lambda+\mu} + \frac{k\lambda}{k\lambda+\mu}e^{-\omega_1 t}. \tag{1.20}$$

После интегрирования по периоду пополнения получим:

$$H(T,0) = \omega T - \frac{\omega}{\omega_1}(1 - e^{-\omega_1 T}), K_{гЗИП}(T,0) = 1 - \omega\overline{T}_{ЭД} + \frac{\omega\overline{T}_{ЭД}}{\omega_1 T}(1 - e^{-\omega_1 T}). \tag{1.21}$$

При $L = 1$ имеем:

$$\omega(t,1) = \omega\left(1 - \frac{s_1 e^{-s_0 t} - s_0 e^{-s_1 t}}{s_1 - s_0}\right), \omega = 1/(2\overline{T}_0 + \overline{T}_{ЭД}) = \frac{k\lambda\mu}{k\lambda + 2\mu}, \tag{1.22}$$

$$K^*_{гЗИП}(t,1) = 1 - \omega\overline{T}_{ЭД}\left(1 - \frac{s_1 e^{-s_0 t} - s_0 e^{-s_1 t}}{s_1 - s_0}\right),$$

$$s_{0,1} = \frac{\mu}{2}(1 + 2k\rho \mp \sqrt{1 - 4k\rho}), \rho = \lambda/\mu, k\rho < 0{,}25,$$

$$H(T,1) = \omega T - \frac{\omega}{s_1 - s_0}\left(\frac{s_1}{s_0}(1 - e^{-s_0 T}) - \frac{s_0}{s_1}(1 - e^{-s_1 T})\right), K_{гЗИП}(T,1) = 1 - \frac{\overline{T}_{ЭД}}{T}H(T,1).$$

При $L \geq 2$ для получения точных значений характеристик надо численно находить корни полинома степени $L + 1$. Если это затруднительно, то следует использовать приближенные оценки.

2. Приближенные значения характеристик можно найти, используя идею медленного движения. Идея состоит в том, чтобы оставлять в смеси экспонент, полученных после обратного преобразования (1.17) или (1.18), только одну или две экспоненты с наименьшим затуханием. Представим (1.17) в виде

$$\omega^*(s) = \frac{\mu(k\lambda)^{L+1}}{s^{L+1} + a_L s^L + \ldots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}, a_0 = (k\lambda)^L((L+1)\mu + k\lambda), \tag{1.23}$$

$$a_1 = (k\lambda)^{L-1}(L+1)(\mu L/2 + k\lambda), a_2 = (k\lambda)^{L-2}(C^3_{L+1}\mu + C^2_{L+1}k\lambda).$$

Если оставить одну экспоненту, то из (1.23) получим:

$$\omega^*(s) \approx \frac{\mu(k\lambda)^{L+1}}{a_1 s + a_0} = \frac{\mu(k\lambda)^2}{(L+1)(\mu L/2 + k\lambda)s + k\lambda((L+1)\mu + k\lambda)}. \tag{1.24}$$

Отсюда

$$\omega(t,L) \approx \omega(1-e^{-s_1 t}), \omega = \frac{\mu k\lambda}{(L+1)\mu + k\lambda}, s_1 = \frac{k\lambda}{L+1}\frac{(L+1)\mu + k\lambda}{\mu L/2 + k\lambda}, \quad (1.25)$$

$$H(T,L) \approx H_{пр1}(T,L) = \omega T - \frac{\omega}{s_1}(1-e^{-s_1 T}), K_{гЗИП}(T,L) \approx 1 - \frac{\overline{T}_{ЭД}}{T} H_{пр1}(T,L). \quad (1.26)$$

Если оставлять две экспоненты, то

$$\omega^*(s) \approx \frac{\mu(k\lambda)^{L+1}}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{\mu(k\lambda)^2}{(C_{L+1}^3\mu + C_{L+1}^2 k\lambda)s^2 + k\lambda(C_{L+1}^2\mu + C_{L+1}^1 k\lambda)s + (k\lambda)^2((L+1)\mu + k\lambda)},$$

$$\omega(t,L) \approx \omega\left(1 - \frac{s_1 e^{-s_0\mu t} - s_0 e^{-s_1\mu t}}{s_1 - s_0}\right), \omega = \frac{\mu k\lambda}{(L+1)\mu + k\lambda},$$

$$s_{0,1} = k\rho\frac{0{,}5(L+1)(L+2k\rho) \mp \sqrt{0{,}25(L+1)^2(L+2k\rho)^2 - 2L(L+1)((L-1)/3 + k\rho)(L+1+k\rho)}}{L(L+1)((L-1)/3 + k\rho)},$$

$$H_{пр2}(T,L) = \omega T - \frac{\omega}{s_1 - s_0}\left(\frac{s_1}{s_0}(1-e^{-s_0\mu T}) - \frac{s_0}{s_1}(1-e^{-s_1\mu T})\right), K_{гЗИП}(T,L) \approx 1 - \frac{\overline{T}_{ЭД}}{T} H_{пр2}(T,L). \quad (1.27)$$

При непрерывном пополнении (α = 3)

В этом случае процесс потребления и пополнения запасов можно свести к процессу массового обслуживания в системе *MML*, где L — число запасных частей данного типа. Согласно известному результату [32] модель функционирования системы *MML* является моделью схемы гибели и размножения, для которой найдены формулы расчета стационарных вероятностей состояний. Поэтому имеем:

$$K_{гЗИП}(L) = 1 - p_{L+1} = 1 - \frac{A^{L+1}}{(L+1)!} / \sum_{i=0}^{L+1}\frac{A^i}{i!}, A = k\lambda\overline{T}_{д}, \quad (1.28)$$

где $\overline{T}_{д}$ — среднее время доставки ЗЧ.

При пополнении по уровню *m* (α = 4) и *L* запасных частях в комплекте ЗИП

В этом случае заявка на пополнение формируется в тот момент, когда количество ЗЧ данного типа достигло порога *m*. В заявку включается всегда одно и то же количество ЗЧ, а именно $L - m$. Причем следующая заявка может быть сформирована не раньше, чем удовлетворена предыдущая заявка. Далее рассмотрим четыре случая:

1. $m = 0, L = 1$.
2. $m = 0, L \geq 2$.
3. $m \geq 1, m + 1 \leq L \leq 2m + 1$.
4. $L \geq 2m + 2$.

В первом случае граф состояний имеет линейный вид, как в схеме гибели и размножения (рис. 1.2, *а*).

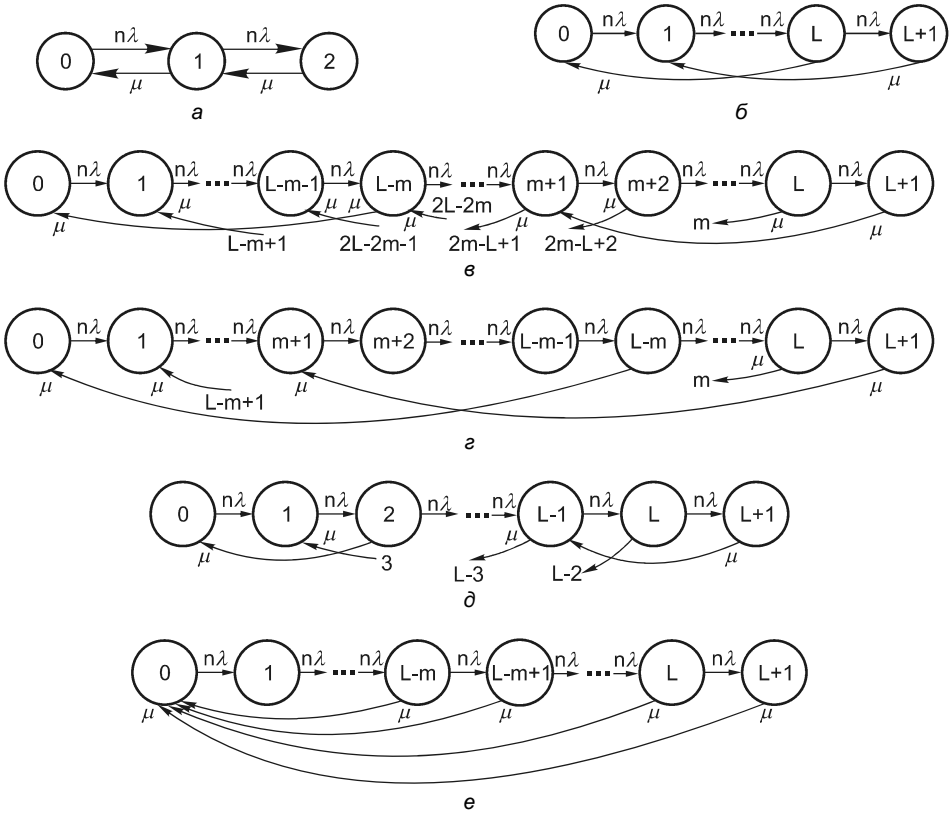


Рис. 1.2. Графы состояний последовательной системы при пополнении по уровню *m*:
а) m = 0, *L* = 1; *б*) *m* = 0, *L* ≥ 2; *в*) *m* ≥ 1, *m* + 1 ≤ *L* ≤ 2*m* + 1; *г*) *L* ≥ 2*m* + 2; *д*) *L* = 2*m* + 2; *е*) *L* ≥ 2*m* + 1

Тогда коэффициент готовности есть стационарная вероятность застать систему в состояниях 0 или 1. Поэтому

$$K_{гЗИП}(1, m=0) = 1 - p_2 = 1 - \frac{A^2}{1 + A + A^2}, A = k\lambda\overline{T}_д, \quad (1.29)$$

где $\overline{T}_д = 1/\mu$ — среднее время доставки ЗЧ.

Во втором случае система уравнений для стационарных вероятностей в соответствии с графом состояний (рис. 1.2, *б*) имеет вид:

$$Ap_0 = p_L, Ap_1 = Ap_0 + p_{L+1}, p_i = p_{i-1}, i = 2,...L-1, (1+A)p_L = Ap_{L-1}, p_{L+1} = Ap_L. \quad (1.30)$$

Отсюда

$$K_{гЗИП}(L, m=0) = 1 - p_{L+1} = 1 - \frac{A^2}{(1+A)L + A^2}. \quad (1.31)$$

При *L* = 1 из (1.31) получим (1.29).

В третьем случае при *m* + 1 ≤ *L* ≤ 2*m* + 1 граф состояний имеет вид, приведенный на рис. 1.2, *в*. По структурным признакам связей с соседними состояниями в графе можно выделить пять групп состояний:

1. Состояние 0, которое имеет одну выходящую стрелку с интенсивностью переходов $k\lambda$ и одну выходящую стрелку с интенсивностью μ.
2. Состояния 1 ... $L - m - 1$ с двумя входящими стрелками из состояний $i - 1$ и $i + L - m$ с интенсивностями переходов $k\lambda$ и μ соответственно и одну выходящую стрелку с интенсивностями переходов $k\lambda$.
3. Состояния $L - m$ ... $m + 1$ с двумя входящими стрелками из состояний $i - 1$ и $i + L - m$ с интенсивностями переходов $k\lambda$ и μ соответственно и двумя выходящими стрелками с интенсивностями переходов $k\lambda$ и μ; при $L = 2m + 1$ множество имеет только одно состояние с номером $m + 1$ и исчезает при $L = 2m + 2$.
4. Состояния $m + 2$ ... L имеют одну входящую и две выходящих стрелки в состояния $i + 1$ и $i - L + m$.
5. Состояние $L + 1$ имеет одну входящую из L и одну выходящую стрелку в состояние $m + 1$. При $L = m + 1$ граф состояний превращается в линейный граф схемы гибели и размножения.

Система уравнений для стационарных вероятностей имеет вид:

$$Ap_0 = p_{L-m}, Ap_i = Ap_{i-1} + p_{L-m+i}, i = 1,...,L-m-1, \quad (1.32)$$

$$(1+A)p_i = Ap_{i-1} + p_{L-m+i}, i = L-m,...,m+1,$$

$$(1+A)p_i = Ap_{i-1}, i = m+2,...,L, p_{L+1} = Ap_L, A = k\lambda\overline{T}_\partial .$$

В четвертом случае при $L \geq 2m + 2$ граф состояний имеет вид, приведенный на рис. 1.2, *г*. По структурным признакам связей с соседними состояниями в графе можно выделить пять групп состояний:

1. Состояние 0 имеет одну выходящую стрелку с интенсивностью переходов $k\lambda$ и одну выходящую стрелку с интенсивностью μ.
2. Состояния 1 ... $m + 1$ имеют две входящие стрелки из состояний $i - 1$ и $i + L - m$ и одну выходящую стрелку с интенсивностью переходов $k\lambda$.
3. Состояния $m + 2$ ... $L - m - 1$ имеют одну входящую стрелку из состояния $i - 1$ и одну выходящую стрелку с интенсивностью переходов $k\lambda$. При $L = 2m + 2$ множество полностью отсутствует и появляется только при $L \geq 2m + 2$.
4. Состояния $L - m$ ... L имеют одну входящую и две выходящих стрелки в состояния $i + 1$ и $i - L + m$.
5. Состояние $L + 1$ имеет одну входящую из L и одну выходящую стрелку в состояние $m + 1$.

Система уравнений для стационарных вероятностей имеет вид:

$$Ap_0 = p_{L-m}, Ap_i = Ap_{i-1} + p_{L-m+i}, i = 1,...,m+1; p_i = p_{i-1}, i = m+1,...,L-m-1$$

$$(1+A)p_i = Ap_{i-1}, i = L-m,...,L, p_{L+1} = Ap_L, A = k\lambda\overline{T}_\partial . \quad (1.33)$$

В общем случае решение системы (1.32) можно искать только по схеме Крамера путем разложения определителей. Поэтому рассмотрим некоторые часто используемые частные случаи.

Пусть $L = m + 1$. Тогда из графа схемы гибели и размножения находим:

$$K_{г3ИП}(L, L-1) = (1 - A^{L+1}) / (1 - A^{L+2}), A = k\lambda\overline{T}_\partial . \quad (1.34)$$

При $L = m + 2$ граф состояний имеет вид, приведенный на рис. 1.2, *д*. Эти параметры также относятся к третьему случаю, т. к. неравенство $L \le 2m + 1 = 2(L - 2) + 1 = 2L - 3$ справедливо при $L \ge 3$. Составляя уравнения по графу состояний для двух частных случаев, легко найти следующие выражения:

$$K_{гЗИП}(3,1) = 1 - \frac{A^3}{2(1+A)^2 + A^3}, \tag{1.35}$$

$$K_{гЗИП}(4,2) = 1 - \frac{A^4}{2(1+A)^3 + A^4 - 2A^3} = 1 - \frac{Ab^3}{2(1-b^3) + Ab^3}, b = \frac{A}{1+A}.$$

Найдем теперь решение (1.33). Сначала из третьего и четвертого уравнения получим:

$$p_{L-m} = bp_{L-m-1} = Ap_0, b = A/(1+A); p_{L-m-1} = p_{L-m-2} = ... = p_{m+i} = (1+A)p_0.$$

Затем из четвертого и пятого уравнений имеем:

$$p_{L-m+i} = b^i Ap_0, i = 0,...,m; p_L = b^m Ap_0; p_{L+1} = Ap_L = b^m A^2 p_0.$$

Из второго уравнения получим:

$$p_1 = p_0 + \frac{1}{A} p_{L-m+1} = p_0(1+b); p_2 = p_1 + \frac{1}{A} p_{L-m+2} = p_0(1+b+b^2).$$

С помощью метода полной математической индукции доказываем общую формулу:

$$p_i = p_0(1+b+...+b^i) = p_0(1+A)(1-b^{i+1}), i = 1...m.$$

Из нормировочного условия находим p_0, а затем коэффициент готовности ЗИП:

$$K_{гЗИП}(L,m) = 1 - \frac{A^{m+2}}{A^{m+2} + (L-m)(1+A)^{m+1}}, L \ge 2m+2. \tag{1.36}$$

При $m = 0$ эта формула совпадает с (1.31).

Изменим стратегию пополнения запасов и будем корректировать заявку, если во время ожидания пополнения произойдут новые отказы элементов. Коррекция состоит в том, что после каждого отказа элемента в заявку добавляется одна ЗЧ, так что при поступлении партии ЗЧ их достаточно, чтобы восстановить структуру и пополнить запасы до начального уровня. Тогда граф состояний имеет вид, приведенный на рис. 1.2, *е*.

Решение соответствующей системы уравнений дает следующий результат:

$$K_{гЗИП}(L,m) = 1 - p_{L+1} = 1 - \frac{A^{m+2}}{(L-m+A)(1+A)^{m+1}}. \tag{1.37}$$

Сравнивая стратегии пополнения по уровню и непрерывного пополнения, из формул (1.28) и (1.36) находим, что при максимально возможном уровне пополнения $m = L - 1$ непрерывное пополнение обеспечивает более высокое значение коэффициента готовности ЗИП, чем пополнение по уровню. Риск неудовлетворения заявки при пополнении по уровню в $1 + (L - 1)\,b$ раз больше, чем при непрерывном пополнении.

Очевидно, что периодическое и непрерывное пополнение являются крайними стратегиями с точки зрения уровня показателя достаточности $K_{гЗИП}$. Остальные занимают промежуточное положение. Это дает удобный ориентир при сравнении различных стратегий.

В заключение сделаем два замечания:

- во-первых, надо иметь в виду, что значения $K_{гЗИП}$ не зависят от того, какая схема резервирования использована, т. к. нагруженные резервные элементы потребляют ЗЧ так же,

как и основные элементы. Это значит, что $K_{гЗИП}$ не является показателем надежности, а характеризует скорее систему восстановления и через нее влияет на показатели безотказности и готовности;

- во-вторых, для стратегий ПП, ПЭД и НП коэффициент готовности $K_{гЗИП}$ может быть рассчитан даже при $L = 0$, когда комплект ЗИП просто отсутствует. Это значит, что показатель достаточности не совсем соответствует повсеместно принятому названию. Очевидно, что можно добиться весьма высокого значения $K_{гЗИП}$, не имея ЗИП, но имея высоконадежную исходную систему. Для нерезервированных систем $K_{гЗИП}$ может трактоваться для стратегий ПП и ПЭД как среднее по периоду пополнения значение коэффициента готовности системы, а для стратегии НП и ПУ как стационарный коэффициент готовности системы.

1.4.2. Средняя задержка в выполнении заявки на ЗЧ

Под этим названием рассматриваются, вообще говоря, две характеристики:

- средняя задержка в доставке ЗЧ после исчерпания запасов $\Delta T_{ЗИП}(L)$, т. е. среднее время от момента отказа элемента при отсутствии запасов данного типа в комплекте ЗИП до удовлетворения заявки из внешнего источника;
- средняя задержка в доставке ЗЧ после каждого отказа элемента $\Delta t_{ЗИП}(L)$, независимо от состояния запасов в комплекте ЗИП.

Первая характеристика учитывает только связи между ЗИП-О и внешними источниками ЗЧ (НИП, ЗИП-Г, склады верхнего уровня). Вторая характеристика учитывает и внешние связи, и движение ЗЧ между комплектом ЗИП-О и изделием. Пока в комплекте ЗИП-О есть ЗЧ, задержка мала (десятки минут). При отсутствии ЗЧ задержка резко возрастает (до сотен и тысяч часов). Очевидно, что $\Delta T_{ЗИП}(L)$, обычно больше $\Delta t_{ЗИП}(L)$. Найдем формулы для расчета средней задержки при четырех основных стратегиях пополнения запасов.

При периодическом пополнении $\Delta T_{ЗИП}(L)$ определяют по формуле (1.4), а $\Delta t_{ЗИП}(L)$ по формуле:

$$\Delta t_{ЗИП}(L) = \frac{1}{k\lambda}(1 - K_{гЗИП}(L)) / K_{гЗИП}(L). \qquad (1.38)$$

Связь между характеристиками следует из формулы:

$$K_{гЗИП}(T, L) = \frac{\bar{\tau}_1(T)}{\bar{\tau}_1(T) + \Delta T_{ЗИП}(T)} = \frac{1/k\lambda}{1/k\lambda + \Delta t_{ЗИП}(T)}. \qquad (1.39)$$

Отношение $\Delta t_{ЗИП}(T) / \Delta T_{ЗИП}(T) = k\lambda\bar{\tau}_1(T) < 1$. Оно тем меньше, чем меньше период пополнения и чем больше количество ЗЧ. При достаточно высоком значении ВБР отношение приближенно равно $k\lambda T$.

При периодическом пополнении с экстренными доставками средняя задержка при любых запасах

$$\Delta t_{ЗИП}(T) = \frac{1}{k\lambda}(1 - K_{гЗИП}(T)) / K_{гЗИП}(T) = \frac{1}{k\lambda}\frac{\bar{T}_{ЭД} H(T, L)}{T - \bar{T}_{ЭД} H(T, L)}. \qquad (1.40)$$

Средняя задержка при отсутствии запасов

$$\Delta T_{ЗИП}(T) = \int_0^T f(x)dx[(T - x)(1 - F_{ЭД}(T - x)) + \int_0^{T-x} y f_{ЭД}(y)dy], \qquad (1.41)$$

где $f(x)$ — плотность распределения наработки до формирования заявки на ЭД.

Здесь учтены два случая: 1) ЭД произойдет еще в том же периоде пополнения, в котором сформирована заявка; 2) ЭД не успевает и пополнение запасов происходит по регламенту в момент T. Из (1.41) при экспоненциальном распределении времени ЭД имеем:

$$\Delta T_{ЗИП}(T) = \overline{T}_{ЭД}\int_0^T F_{ЭД}(T-x)f(x)dx = \overline{T}_{ЭД}\int_0^T (1-e^{-\mu(T-x)})\frac{(k\lambda)^{L+1}x^L}{L!}e^{-k\lambda x}dx =$$

$$= \overline{T}_{ЭД}[I(A,L+1) - e^{-D}\left(\frac{A}{A-D}\right)^{L+1} I(A-D,L+1)], D = \mu T = T/\overline{T}_{ЭД}\,. \qquad (1.42)$$

Сравним $\Delta t_{ЗИП}(T)$ и $\Delta T_{ЗИП}(T)$ при $L = 0$:

$$k\lambda\Delta t_{ЗИП}(T,0) = \frac{\overline{T}_{ЭД}H(T,0)}{T-\overline{T}_{ЭД}H(T,0)}, H(T,0) = \omega T - \frac{\omega}{\omega_1}(1-e^{-\omega_1 T})\,,$$

$$k\lambda\Delta T_{ЗИП}(T,0) = \frac{A}{D}\left[1-e^{-a}+\frac{A(e^{-D}-e^{-A})}{D-A}\right], \qquad (1.43)$$

где ω и ω1 находят по формуле (1.19).

При пополнении по уровню и непрерывном пополнении средняя задержка определяется по формулам:

$$\Delta T_{ЗИП}(T) = \overline{T}_{д}, \Delta t_{ЗИП}(T) = \frac{1}{k\lambda}(1-K_{гЗИП}(T))/K_{гЗИП}(T)\,, \qquad (1.44)$$

где $K_{гЗИП}$ находят по формуле (1.28) или (1.36).

Заметим, что приведенная в работах [4, 29] формула для расчета средней задержки

$$k\lambda\Delta t_{ЗИП}(L) = -\ln K_{гЗИП}(L) \qquad (1.45)$$

является приближенной. Точная связь устанавливается формулой (1.44), справедливой для всех стратегий пополнения. Погрешность формулы (1.45) имеет порядок $(1 - K_{гЗИП})^2/2$. При значениях $K_{гЗИП}$, близких к единице, погрешность приемлема.

1.4.3. Вероятность достаточности ЗИП

Вероятность достаточности ЗИП $P_д(t)$ есть вероятность того, что любая заявка на ЗЧ в комплект ЗИП в заданном интервале времени (периоде пополнения, интервале функционирования) будет удовлетворена за счет запасов в комплекте ЗИП.

При периодическом пополнении запасов (α = 1) и периодическом пополнении с экстренными доставками (α = 2), потоке заявок $k\lambda$ и L запасных частях вероятность достаточности ЗИП

$$P_д(t,L) = 1 - I(k\lambda t, L+1), t \le T\,, \qquad (1.46)$$

$$P_д(t,L,T) = P_д^m(T,L)P_д(t-mT,L), mT \le t \le (m+1)T, m = 1,2,\ldots.$$

При непрерывном пополнении (α = 3) для получения точной формулы надо сначала найти определитель системы уравнений

$$k\lambda p_0^*(s) - \mu p_1^*(s) = s, (s+k\lambda+\mu)p_i^*(s) = k\lambda p_{i-1}^*(s) + \mu p_{i+1}^*(s), i = 1,\ldots,L-1\,,$$

$$(s+k\lambda+\mu)p_L^*(s) = k\lambda p_{L-1}^*(s), sp_{L+1}^*(s) = k\lambda p_L^*(s)\,. \qquad (1.47)$$

Затем провести разложение полинома на простые множители:

$$s^{L+1} + a_L s^L + ... + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 = (s + s_0)(s + s_1)...(s + s_L).$$

Находя численно корни полинома, получим точное выражение для вероятности достаточности:

$$P_{\partial ЗИП}(t, L) = \sum_{i=0}^{L} e^{-s_i t} / \prod_{j=0, j\neq i}^{L} \left(1 - \frac{s_i}{s_j}\right). \quad (1.48)$$

Приближенные выражения с использованием одной или двух медленно затухающих экспонент имеют вид:

$$P_{\partial ЗИП, пр1}(t, L) = \exp(-t / \overline{T}_{0ЗИП}), k\lambda\overline{T}_{0ЗИП} = \sum_{i=0}^{L} \frac{1 - (k\rho)^{i+1}}{(1 - k\rho)(k\rho)^i}, \rho = \frac{\lambda}{\mu}, \quad (1.49)$$

$$P_{\partial ЗИП, пр2}(t, L) = 1 - \frac{s_1 e^{-s_0 t} - s_0 e^{-s_1 t}}{s_1 - s_0}, s_{0,1} = \frac{a_1 \mp \sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2}}{2a_2}.$$

При пополнении по уровню ($\alpha = 4$) структура точной и приближенных формул сохраняется как при непрерывном пополнении и имеет вид (1.48)–(1.49). Только в них будут другие корни полинома. Чтобы найти новые полиномы и новые корни, надо составить систему уравнений типа (1.47) по графам состояний на рис. 1.2, запретив предварительно переход из состояния $L + 1$ в состояние $m + 1$.

1.5. Потребление запасных частей в однофункциональных и многофункциональных системах

Значительное количество технических систем являются многофункциональными (МФС). К ним относятся практически все автоматизированные системы управления, информационные системы, компьютерные сети, сети связи, технологические системы. При расчете надежности МФС рассчитывают показатели безотказности или готовности для каждой функциональной самостоятельной операции (ФСО), предназначенной для выполнения одной или группы функций [12, 13].

Для выполнения одной функции может быть использована только часть технических средств системы. При этом номенклатура модулей, участвующих в выполнении одной ФСО, может совпадать или не совпадать с полной номенклатурой модулей системы. Отсюда следует, что некоторые типы запасов в комплекте ЗИП потребляются не только той частью системы, которая участвует в выполнении рассматриваемой ФСО (назовем ее основной подсистемой ОПС), но и другой частью, которая не участвует в выполнении данной ФСО (назовем ее дополнительной подсистемой ДПС).

В связи с этим требуется формализация процесса потребления запасов в комплекте ЗИП. Пусть система содержит модули M типов в количестве n_i для i-го типа. Тогда состав системы характеризуется вектором (n_1, n_2, ..., n_M). Комплект ЗИП содержит запасные части N типов в количестве L_i $i = 1, ..., N$. При этом $N \leq M$, т. е. не все типы модулей могут быть представлены в комплекте ЗИП. Более того, возможен вариант, когда $N = 0$, т. е. в комплекте ЗИП нижнего уровня не имеется ни одной запасной части. Тогда восстановление осуществляется периодически по регламенту или в режиме экстренной доставки. Такая же ситуация может возникнуть и при непрерывном пополнении.

При выполнении *i*-й ФСО (i = 1, ..., s) количество типов используемых в ОПС модулей M_i может быть меньше M. Количество модулей j-го типа k_{ij} также может быть меньше n_j. Зная вектор количества модулей в системе n, вектор количества модулей, занятых в выполнении i-й ФСО:

$$k_i = (k_{i1}, k_{i2}, ..., k_{iM_i}),$$

можно установить подвектор $\vec{L_i} = (L_1, L_2, ..., L_{N_i})$ вектора $\vec{L}$ (i = 1,...s, $N_i \le N$), в котором указано количество ЗЧ каждого типа, которое может быть использовано в ОПС. При расчете потребления ЗЧ рассмотрим несколько вариантов.

1.5.1. Режим длительного непрерывного применения (НПДП)

Потребление ЗЧ может происходить по двум основным причинам:

- ❒ отказы элементов (сменных частей СЧ) в процессе работы;
- ❒ отказы запасных частей при хранении в комплекте ЗИП.

Для элементов ν-го типа при выполнении *i*-й ФСО интенсивность замен

$$\Lambda_{i\nu} = \sum_{j=1}^{k_{i\nu}} K_{\lambda i\nu}^{(j)} \lambda_{i\nu} + \lambda_{xp\nu} L_{i\nu}, \qquad (1.50)$$

где:

$K_{\lambda i\nu}^{(j)}$ — коэффициент облегчения режима j-го элемента ν-го типа при выполнении i-й ФСО;

$\lambda_{i\nu}$ — интенсивность отказов элемента ν-го типа при выполнении i-й ФСО;

$\lambda_{xp\nu}$ — интенсивность отказов ЗЧ ν-го типа при хранении в комплекте ЗИП;

$k_{i\nu}$ — количество элементов ν-го типа, занятых при выполнении i-й ФСО. При определении $K_{\lambda i\nu}^{(j)}$ могут учитываться карты рабочих режимов элементов и коэффициент использования.

Если элементы находятся в нагруженном режиме, то все коэффициенты облегчения режима одинаковы и равны 1. Тогда

$$\Lambda_{i\nu} = K_{i\nu} \lambda_{i\nu} + \lambda_{xp\nu} L_{i\nu}. \qquad (1.51)$$

Суммарный поток замен при выполнении i-й ФСО имеет интенсивность:

$$\Lambda_i = \sum_{\nu=1}^{N_i} \Lambda_{i\nu}. \qquad (1.52)$$

Суммарный поток запросов на восстановление при выполнении i-й ФСО имеет интенсивность:

$$\Lambda_{i\text{в}} = \sum_{\nu=1}^{M_i} \Lambda_{i\nu}. \qquad (1.53)$$

Если в процессе эксплуатации проводятся профилактические работы, то к слагаемым в формуле (1.46) добавляется еще одно слагаемое:

$$\Lambda_{i\nu} = \sum_{j=1}^{k_{i\nu}} K_{\lambda i\nu}^{(j)} \lambda_{i\nu} + \lambda_{xp\nu} L_{i\nu} + k_{i\nu} \alpha_\nu \lambda_{i\nu}^{TO}, \qquad (1.54)$$

где:

α_ν — доля времени пребывания СЧ ν-го типа в режиме замен при ТО;

$\lambda_{i\nu}^{TO}$ — интенсивность отказов в режиме замен при ТО.

Суммарные интенсивности замен и запросов определяются по формулам (1.52) и (1.53).

1.5.2. Режим многократного циклического применения (МКЦП)

Потребление ЗИП может происходить при возникновении следующих событий:

- ❒ отказ СЧ в рабочем режиме;
- ❒ отказ СЧ в режиме ожидания применения;
- ❒ замена СЧ при проведении профилактических работ;
- ❒ отказ ЗЧ при хранении в комплекте ЗИП.

Долю времени пребывания СЧ в рабочем режиме называют коэффициентом интенсивности эксплуатации $K_{иэ}$. Тогда интенсивность замен (запросов на восстановление) элементов ν-го типа при выполнении *i*-й ФСО:

$$\Lambda_{i\nu} = K_{иэi\nu}\sum_{j=1}^{k_{i\nu}} K_{\lambda i\nu}^{(j)}\lambda_{i\nu} + (1-K_{иэi\nu})\sum_{j=1}^{k_{i\nu}} K_{\lambda i\nu}^{(j)}\lambda_{i\nu}^{ожс} + \lambda_{хр\nu}L_{i\nu} + k_{i\nu}\alpha_\nu\lambda_{i\nu}^{TO}. \quad (1.55)$$

При нагруженном режиме:

$$\Lambda_{i\nu} = K_{i\nu}(K_{иэi\nu}\lambda_{i\nu} + (1-K_{иэi\nu})\lambda_{i\nu}^{ожс} + \alpha_\nu\lambda_{i\nu}^{TO}) + \lambda_{хр\nu}L_{i\nu}. \quad (1.56)$$

Для оценки потребления ЗЧ в комплекте группового ЗИП (ЗИП-Г) необходимо определить следующие параметры:

- ❒ $N_г$ — общее количество типов запасов;
- ❒ s — количество обслуживаемых образцов аппаратуры (комплектов ЗИП-О);
- ❒ r_i — среднее количество ЗЧ *i*-го типа в одной заявке в ЗИП-Г;
- ❒ $\Lambda_{iг}$ — интенсивность потока заявок на ЗЧ *i*-го типа в ЗИП-Г;
- ❒ $L_{iг}$ — начальный уровень запасов *i*-го типа в ЗИП-Г.

Если образцы (комплекты) не одинаковы, то

$$r_i = \sum_{j=1}^{s} r_{ij}\frac{\Lambda_{ijг}}{\Lambda_{iг}}, \Lambda_{iг} = \sum_{j=1}^{s}\Lambda_{ijг}. \quad (1.57)$$

Величина r_i зависит от стратегии пополнения. При периодическом пополнении и отсутствии внутреннего резервирования:

$$r_{ij} = a_{ij} = \Lambda_{ij}T_{ij}, \Lambda_{ijг} = 1/T_{ij}, \quad (1.58)$$

где:

T_{ij} — период пополнения запасов *j*-го типа в *i*-м образце;

Λ_{ij} — интенсивность потока замен СЧ *j*-го типа в *i*-м образце.

При ПЭД к среднему количеству (1.58) добавляется среднее количество ЗЧ при ЭД. Тогда

$$r_{ij} = a_{ij} + (L_{ij} + 1)H(T_{ij}, L_{ij}), \tag{1.59}$$

где $H(T_{ij}, L_{ij})$ определяется по формуле (1.12).

Интенсивность потока заявок (регулярных и ЭД) на ЗЧ j-го типа от i-го образца

$$\Lambda_{ijэ} = (1 + H(T_{ij}, L_{ij}))/T_{ij}. \tag{1.60}$$

Далее надо использовать (1.53).

При непрерывном пополнении $r_{ij} = 1$, $\Lambda_{ijэ} = \Lambda_{ij}$. При пополнении по уровню:

$$r_{ij} = L_{ij} - m_{ij}, \Lambda_{ijэ} = \Lambda_{ij}/(L_{ij} - m_{ij}). \tag{1.61}$$

В многофункциональной системе надо ввести еще один индекс ν — номер ФСО.

1.6. Учет отказов запасных частей при хранении в показателях достаточности ЗИП

1.6.1. Нерезервированная система

Система содержит k элементов определенного типа и в комплекте ЗИП-О имеется L запасных частей этого же типа. В рабочем режиме элемент имеет интенсивность отказов λ, запасные части при хранении имеют интенсивность отказов σ.

При периодическом пополнении

В этом случае процесс функционирования является процессом гибели с интенсивностями переходов:

$$\Lambda_i = k\lambda + (L-i)\sigma, i = 0, ..., L-1; \Lambda_L = k\lambda.$$

Вероятность достаточности ЗИП находят по формуле [87]:

$$P_д(t, L) = \sum_{i=0}^{L} e^{-\Lambda_i t} / \prod_{j=0, j\neq i}^{L} \left(1 - \frac{\Lambda_i}{\Lambda_j}\right) = \sum_{i=0}^{L} e^{-(k\lambda+(L-i)\sigma)t} / \prod_{j=0, j\neq i}^{L} \frac{(i-j)\sigma}{k\lambda + (i-j)\sigma}, t \le T. \tag{1.62}$$

Коэффициент готовности ЗИП в соответствии с (1.5) находят путем осреднения вероятности достаточности по периоду пополнения:

$$K_{гЗИП}(T, L) = \sum_{i=0}^{L} \frac{1}{A + (L-i)B} / \prod_{j=0, j\neq i}^{L} \frac{(i-j)\sigma}{k\lambda + (i-j)\sigma}, A = k\lambda T, B = \sigma T. \tag{1.63}$$

Средняя задержка в выполнении заявки определяется по формуле (1.38) или (1.45).

При периодическом пополнении с экстренными доставками

В этом случае в качестве функции распределения $F(t)$ в формуле (1.11) надо взять $F_0(t) = 1 - P_д(t, L)$. При $L = 0$ имеем то же, что и при $\sigma = 0$. Поэтому надо использовать формулы (1.20) и (1.21). При $L = 1$ вероятность достаточности ЗИП

$$P_д(t, 1) = e^{-k\lambda t} + \frac{k\lambda}{\sigma} e^{-k\lambda t}(1 - e^{-\sigma t}).$$

Из (1.17)–(1.18) находим:

$$\omega(t,1)=\omega\left(1-\frac{s_1e^{-s_0\mu t}-s_0e^{-s_1\mu t}}{s_1-s_0}\right),\ \omega=\mu\frac{k\rho(k\rho+\beta)}{k\rho(2+k\rho)+\beta(1+k\rho)},\beta=\frac{\sigma}{\mu},\qquad(1.64)$$

$$H(T,1)=\omega T-\frac{\omega}{s_1-s_0}\left(\frac{s_1}{s_0}(1-e^{-s_0\mu T})-\frac{s_0}{s_1}(1-e^{-s_1\mu T})\right),K_{гЗИП}(T,1)=1-\frac{\overline{T}_{ЭД}}{T}H(T,1),$$

$$s_{0,1}=\frac{1}{2}(1+2k\rho+\beta\mp\sqrt{(1-2k\rho-\beta)^2-4k\rho(k\rho+\beta)}),\rho=\frac{\lambda}{\mu}.$$

При $L \geq 2$ надо вычислять корни полинома или использовать приближенную формулу, основанную на выделении медленного движения при обратном преобразовании выражения:

$$\omega^*(s,L)=\frac{s\mu F_0^*(s)}{s+\mu(1-F_0^*(s))},F_0^*(s)=\prod_{i=0}^{L}\frac{\Lambda_i}{s+\Lambda_i},\Lambda_i=k\lambda+(L-i)\sigma.\qquad(1.65)$$

При непрерывном пополнении

В этом случае граф состояний является графом схемы гибели и размножения с интенсивностями переходов $\Lambda_i = k\lambda + (L - i)\sigma$, $M_i = i\mu$. Поэтому коэффициент готовности ЗИП:

$$K_{гЗИП}(L)=1-p_{L+1}=1-\frac{\theta_{L+1}}{1+\theta_1+...+\theta_{L+1}},\theta_i=\frac{\Lambda_0\Lambda_1...\Lambda_{i-1}}{M_1M_2...M_i}=\prod_{j=0}^{i-1}(k\rho+(L-j)\beta)/i!\qquad(1.66)$$

При $\beta = 0$ отсюда получим, в частности, формулу (1.28).

При пополнении по уровню для $m = 0$ (рис. 1.2, *б*) система уравнений относительно стационарных вероятностей имеет вид:

$$\Lambda_0p_0=\mu p_L,\Lambda_1p_1=\Lambda_0p_0+\mu p_{L+1},\Lambda_ip_i=\Lambda_{i-1}p_{i-1},i=2,...L-1$$

$$(\mu+\Lambda_L)p_L=\Lambda_{L-1}p_{L-1},\mu p_{L+1}=\Lambda_Lp_L,\sum_{i=0}^{L+1}p_i=1.\qquad(1.67)$$

Отсюда находим

$$K_{гЗИП}(L,m=0)=1-p_{L+1}=1-\frac{\Lambda_0\Lambda_L}{\mu^2}/\left(1+\left(1+\frac{\Lambda_L}{\mu}\right)\left(\frac{\Lambda_0}{\mu}+\sum_{i=1}^{L-1}\frac{\Lambda_0}{\Lambda_i}\right)\right).\qquad(1.68)$$

При $\sigma = 0$ отсюда получим, в частности, формулу (1.31).

При $m > 0$ и $L \geq 2m + 2$ согласно графу состояний (рис. 1.2, *г*) система уравнений относительно стационарных вероятностей имеет вид:

$$\Lambda_0p_0=\mu p_{L-m},\Lambda_1p_1=\Lambda_0p_0+\mu p_{L-m+1},\Lambda_ip_i=\Lambda_{i-1}p_{i-1}+\mu p_{L-m+i},i=1,...,m+1$$

$$p_i=p_{i-1},i=m+1,...,L-m-1,\Lambda_ip_i=\Lambda_{i-1}p_{i-1},i=m+2,...L-m-1$$

$$(\mu+\Lambda_i)p_i=\Lambda_{i-1}p_{i-1},i=L-m,...,L,\mu p_{L+1}=\Lambda_Lp_L,\sum_{i=0}^{L+1}p_i=1.\qquad(1.69)$$

Решение системы (1.69):

$$K_{гЗИП}(L,m) = 1 - p_{L+1} = 1 - \frac{\Lambda_0 b_{m+1}}{\mu} / \left(\sum_{i=0}^{m} \frac{\Lambda_0}{\Lambda_i} c_i + \left(1 + \frac{\Lambda_{L-m}}{\mu}\right) \sum_{i=m+1}^{L-m-1} \frac{\Lambda_0}{\Lambda_i} + \frac{\Lambda_0 c_{m+1}}{\mu} \right), \quad (1.70)$$

$$b_0 = 1, b_i = \prod_{j=0}^{i} \frac{\Lambda_{L-m+j-1}}{\mu + \Lambda_{L-m+j}}, i = 1...m+1, \Lambda_{L+1} = 0, c_i = \sum_{j=0}^{i} b_j, i = 0...m+1 .$$

При $m \geq 1$, $m + 1 \leq L \leq 2m + 1$ система уравнений имеет вид:

$$\Lambda_0 p_0 = \mu p_{L-m}, \Lambda_i p_i = \Lambda_{i-1} p_{i-1} + \mu p_{L-m+i}, i = 1,..., L-m-1 , \quad (1.71)$$

$$(\mu + \Lambda_i) p_i = \Lambda_{i-1} p_{i-1} + \mu p_{L-m+i}, i = L-m,..., m+1 ,$$

$$(\mu + \Lambda_i) p_i = \Lambda_{i-1} p_{i-1}, i = m+2,..., L, \mu p_{L+1} = \Lambda_L p_L .$$

Как и при $\sigma = 0$, эта система в общем виде не имеет простого замкнутого решения. Поэтому надо использовать схему Крамера и находить вероятность P_{L+1} как отношение определителей. Для некоторых частных случаев это удается сделать.

При $m = L - 1$ граф состояний является графом процесса гибели и размножения. Тогда

$$K_{гЗИП}(L, L-1) = 1 - \frac{\theta_{L+1}}{1 + \theta_1 + ... + \theta_{L+1}}, \theta_i = \prod_{j=0}^{i-1} (A + (L-j)\beta), A = k\lambda \overline{T}_{\partial} . \quad (1.72)$$

При $m = L–2$ для $L = 3$ и 4 имеем:

$$K_{гЗИП}(3,1) = 1 - \frac{A(A+\beta)(A+3\beta)}{(1+A)(1+(A+3\beta)(1+A+\beta+1/(A+2\beta))) + (A+3\beta)(A+\beta)/(A+2\beta)} ,$$

$$K_{гЗИП}(4,2) = 1 - A(A+\beta)(A+2\beta)(A+4\beta) / [(1+2A+\beta)((1+(A+4\beta)(1+A+$$

$$+2\beta + \frac{1}{A+3\beta})) + (A+2\beta)(A+4\beta)(A(A+\beta) + \frac{1+A}{A+3\beta})] . \quad (1.73)$$

При $\sigma = 0$ отсюда получим, в частности, формулы (1.35).

1.7. Учет пополнения комплекта ЗИП за счет ремонтного органа

Здесь рассматривается процедура пополнения запасов, когда нет внешнего источника (НИП, ЗИП-Г), а пополнение происходит путем ремонта отказавших модулей в ремонтном органе, расположенном недалеко от места эксплуатации изделия и расположения комплекта ЗИП-О. Эта схема пополнения запасов обычно применяется для дорогостоящих модулей, конструктивно приспособленных к быстрому ремонту. Для выполнения ремонта необходимо иметь ремонтный ЗИП, технологическое оснащение (измерительные приборы, инструменты, принадлежности), ремонтный персонал. Очевидно, что такой вид пополнения создавать весьма сложно или экономически нецелесообразно для изделий класса hi-tech. Но для некоторых изделий или их составных частей пополнение запасов путем ремонта вполне допустимо и может быть даже экономически целесообразно как основной способ пополнения или совместно с другими стратегиями пополнения. Организация работ поясняется на рис. 1.3.

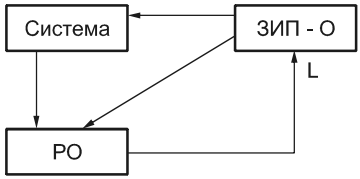


Рис. 1.3. Структурная схема организации пополнения комплекта ЗИП-О при наличии ремонтного органа

Отказавшие СЧ поступают в ремонтный орган, а на их место в изделии устанавливают работоспособные ЗЧ из комплекта ЗИП-О. Отремонтированные модули возвращаются в комплект ЗИП-О в качестве ЗЧ.

Рассмотрим некоторые модели надежности, используемые для расчета коэффициента готовности изделия с учетом ЗИП [87]. Максимальное количество элементов, которое может оказаться в РО при безотказной работе изделия, равно $n = L + l$, где l — число резервных элементов, L — число ЗЧ. Полагаем, что мощности РО достаточно для параллельного ремонта всех отказавших элементов. Время ремонта одного элемента имеет экспоненциальное распределение с параметром μ. Далее рассмотрим несколько моделей функционирования. При описании моделей воспользуемся классификационной схемой, предложенной в работе [87]. Для обозначения модели вводятся три разряда. В первом разряде указывается способ (стратегия) пополнения: 1 — путем ремонта, 2 — периодическое пополнение из внешнего источника, 3 — периодическое пополнение с экстренными доставками, 4 — непрерывное пополнение, 5 — пополнение по уровню. Во втором разряде указывается тип структуры системы: 1 — нерезервированная система, 2 — система с общим резервированием, 3 — система из двух подсистем: нерезервированной и дублированной. В третьем разряде указывается тип модели отказов: 1 — отказы возможны в рабочем режиме, в резерве и при хранении ЗЧ, 2 — отказы возможны в рабочем режиме и в резерве, 3 — отказы возможны только в рабочем режиме.

1.7.1. Последовательно-параллельная система с облегченным резервом с дробной кратностью и отказами ЗЧ при хранении (модель 1.3.1)

Структура системы представлена на рис. 1.4.

Система содержит m элементов в нерезервированной части, r элементов в дублированной подсистеме, l резервных элементов и L запасных частей в комплекте ЗИП-О. Граф состояний приведен на рис. 1.5.

Система уравнений относительно стационарных вероятностей состояний имеет вид:

$$\Lambda_0 p_0 = \mu p_1, (\Lambda_i + i\mu) p_i = \Lambda_{i-1} p_{i-1} + (i+1)\mu p_{i+1}, i = 1,..., L-1; \Lambda_i = k\lambda + l\lambda_1 + (L-i)\sigma,$$
$$(\mathrm{M}_L + L\mu + m\lambda) p_L = \Lambda_{i-1} p_{i-1} + (L+1)\mu(p_{L+1} + p_{L+l+2}), \mathrm{M}_L = r\lambda + l\lambda_1, k = m + r,$$
$$(\mathrm{M}_{L+i} + (L+i)\mu + m\lambda) p_{L+i} = \mathrm{M}_{L+i-1} p_{L+i-1} + (L+i+1)\mu(p_{L+i+1} + p_{L+l+i+2}),$$
$$\mathrm{M}_{L+i} = r\lambda + (l-i)\lambda_1, i = 1...l,$$
$$(L+l+1)\mu p_{L+l+1} = \mathrm{M}_{L+l} p_{L+l}, (L+i+1)\mu p_{L+l+i+2} = m\lambda p_{L+i}, i = 0...l. \qquad (1.74)$$

Решение системы (1.74) позволяет найти коэффициент готовности ЗИП и коэффициент готовности изделия с учетом ЗИП:

$$K_{гЗИП}(L) = \sum_{i=0}^{L} \theta_{L+l+i} \Big/ \sum_{i=0}^{L+2l+2} \theta_i \,, \tag{1.75}$$

$$K_{г}(L,l) = \sum_{i=0}^{L+l} \theta_{L+l+i} \Big/ \sum_{i=0}^{L+2l+2} \theta_i = 1 - \sum_{i=1}^{l+2} \theta_{L+l+i} \Big/ \sum_{i=0}^{L+2l+2} \theta_i \,,$$

$$\theta_0 = 1, \theta_i = \frac{\Lambda_0 \Lambda_{1...} \Lambda_{i-1}}{i! \mu^i}, i = 1...L; \theta_i = \frac{\Lambda_0 \Lambda_{1...} \Lambda_{i-1} M_L ... M_{i-1}}{i! \mu^i}, i = L+1...L+l+1 \,,$$

$$\theta_{L+l+2} = \frac{\Lambda_0 \Lambda_{1...} \Lambda_{L-1} m\lambda}{(L+1)! \mu^{L+1}}, \theta_{L+l+2+i} = \frac{\Lambda_0 \Lambda_{1...} \Lambda_{L-1} M_L ... M_{L+i-1} m\lambda}{(L+i+1)! \mu^{L+i+1}}, i = 1...l \,.$$

Рассмотренная модель является наиболее общей в данной группе моделей. Поэтому другие результаты получаются как частный случай формул (1.75).

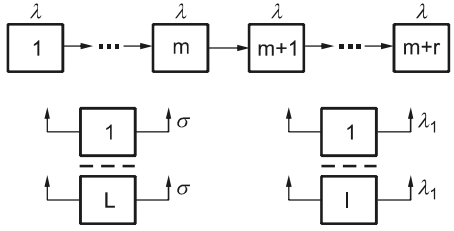


Рис. 1.4. Структурная схема последовательно-параллельной системы

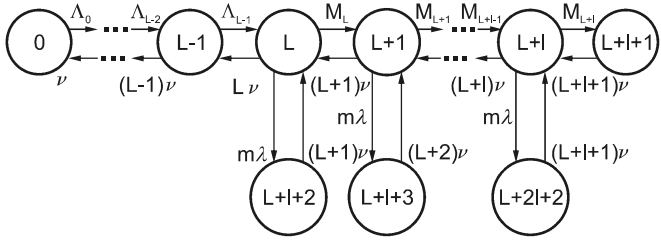


Рис. 1.5. Граф состояний последовательно-параллельной системы

1.7.2. Последовательно-параллельная система с облегченным резервом с дробной кратностью и безотказными запасными частями при хранении (модель 1.3.2)

Полагая σ = 0, из (1.75) получим:

$$\theta_i = \frac{(k\lambda + l\lambda_1)^i}{i! \mu^i}, i = 1...L; \theta_{L+1} = \frac{(k\lambda + l\lambda_1)^L (r\lambda + l\lambda_1)}{(L+1)! \mu^{L+1}}, \tag{1.76}$$

$$\theta_{L+i} = \frac{(k\lambda + l\lambda_1)^L (r\lambda + l\lambda_1)...(r\lambda + (l-i+1)\lambda_1)}{(L+i)! \mu^{L+i}}, i = 1...l \,,$$

$$\theta_{L+l+1}=\frac{(k\lambda+l\lambda_1)^L(r\lambda+l\lambda_1)...(r\lambda+\lambda_1)r\lambda}{(L+l+1)!\mu^{L+l+1}},\theta_{L+l+2}=\frac{(k\lambda+l\lambda_1)^L m\lambda}{(L+1)!\mu^{L+1}},$$

$$\theta_{L+l+2+i}=\frac{(k\lambda+l\lambda_1)^L(r\lambda+l\lambda_1)...(r\lambda+(l-i+1)\lambda_1)m\lambda}{(L+1+i)!\mu^{L+1+i}},i=1...l\ .$$

Расчет коэффициента готовности проводят по формуле (1.75). При $r = 0$ формула (1.75) совпадет с (1.28).

1.7.3. Последовательно-параллельная система с ненагруженным резервом и безотказными запасными частями при хранении (модель 1.3.3)

Полагая $\sigma = \lambda_1 = 0$, из (1.75) получим:

$$\theta_i=\frac{(k\rho)^i}{i!},\rho=\frac{\lambda}{\mu},i=1...L;\theta_{L+1}=\frac{(k\rho)^L(r\rho)}{(L+1)!}, \tag{1.77}$$

$$\theta_{L+i}=\frac{(k\rho)^L(r\rho)^i}{(L+i)!},i=1...l+1;\theta_{L+l+2+i}=\frac{(k\rho)^L(r\rho)^i m\lambda}{(L+i+1)!},i=1...l\ .$$

Далее надо использовать формулу (1.75) для расчета коэффициента готовности.

1.7.4. Резервированная система с облегченным резервом с дробной кратностью и отказами ЗЧ при хранении (модель 1.2.1)

Полагая $m = 0$, из (1.75) получим:

$$K_{c3ИП}(L)=\sum_{i=0}^{L}\theta_{L+l+i}\Big/\sum_{i=0}^{L+l+1}\theta_i,K_c(L,l)=1-\theta_{L+l+1}\Big/\sum_{i=0}^{L+l+1}\theta_i\ , \tag{1.78}$$

$$\theta_0=1,\theta_i=\frac{\Lambda_0\Lambda_{1...}\Lambda_{i-1}}{i!\mu^i},i=1...L;\theta_i=\frac{\Lambda_0\Lambda_{1...}\Lambda_{i-1}\mathrm{M}_L...\mathrm{M}_{i-1}}{i!\mu^i},i=L+1...L+l+1,$$

$$\Lambda_i=r\lambda+l\lambda_1+(L-i)\sigma,\mathrm{M}_{L+i}=r\lambda+(l-i)\lambda_1,i=0...l\ .$$

1.7.5. Резервированная система с облегченным резервом с дробной кратностью и безотказными запасными частями при хранении (модель 1.2.2)

Полагая $\sigma = m = 0$, из (1.75) получим:

$$\theta_i=\frac{(r\rho+l\beta)^i}{i!},\rho=\frac{\lambda}{\mu},\beta=\frac{\lambda_1}{\mu},i=1...L, \tag{1.79}$$

$$\theta_{L+i}=\frac{(r\rho+l\beta)^L}{(L+i)!}\prod_{j=0}^{i-1}(r\rho+(l-j)\beta),i=1...l+1\ .$$

Далее надо использовать формулы (1.78).

1.7.6. Резервированная система с ненагруженным резервом с дробной кратностью и безотказными запасными частями при хранении (модель 1.2.3)

Полагая $\sigma = m = \lambda_1 = 0$, из (1.75) получим:

$$\theta_i = \frac{(r\rho)^i}{i!}, \rho = \frac{\lambda}{\mu}, i = 1...L + l + 1 . \quad (1.80)$$

Далее надо использовать формулу (1.75) для расчета коэффициента готовности.

1.7.7. Последовательная система с отказами ЗЧ при хранении (модель 1.1.1)

Полагая $l = r = \lambda_1 = 0$, из (1.75) получим:

$$K_{гЗИП}(L) = K_г(L) = 1 - \theta_{L+1} / \sum_{i=0}^{L+1} \theta_i, \theta_i = \prod_{j=0}^{i-1} (m\rho + (L - j)\beta), i = 1...L + 1 . \quad (1.81)$$

1.7.8. Последовательная система с безотказными запасными частями при хранении (модель 1.1.3)

Полагая $l = r = \lambda_1 = \sigma = 0$, из (1.75) получим формулы Эрланга:

$$K_{гЗИП}(L) = K_г(L) = 1 - \frac{(m\rho)^{L+1}}{(L+1)!} / \sum_{i=0}^{L+1} \frac{(m\rho)^i}{i!} . \quad (1.82)$$

1.8. Заключение

В *приложении 1*, размещенном на прилагаемом к книге компакт-диске, приведены примеры по расчету показателей достаточности и количественный анализ свойств ПД (там же размещены *приложения 2–8* к *главам 2–8* соответственно). По результатам анализа можно сделать выводы:

- при периодическом пополнении запасов среднее время задержки в выполнении заявки на запасную часть оказывается обычно существенно больше, чем среднее время восстановления работоспособности при ремонте, и может достигать сотни и даже тысячи часов (десятки суток). При этом коэффициент готовности ЗИП может иметь значение, достаточно близкое к единице (более 0,95);
- приближенная формула (1.45) для расчета среднего времени задержки достаточно точна. Ошибка составляет всего несколько процентов. Однако она дает оценку снизу, т. е. улучшает показатель достаточности по сравнению с точной формулой (1.38). Это в дальнейшем приводит к завышению оценки показателя надежности;
- возможность экстренной доставки при периодическом пополнении запасов существенно улучшает все показатели достаточности: увеличивает коэффициент готовности ЗИП и уменьшает среднее время задержки (в 5–10 и более раз). Степень улучшения зависит от соотношения $D = T / \overline{T}_{ЭД}$;

- стратегии непрерывного пополнения и пополнения по уровню весьма эффективны. При прочих равных условиях они дают более высокое значение коэффициента готовности ЗИП, чем другие стратегии, в том числе и стратегия ПЭД;
- при учете отказов запасных частей при хранении выясняется, что влияние этих отказов на значения ПД не велико. Даже если интенсивность отказов ЗЧ при хранении такая же, как основного элемента при работе, вклад этого потока в снижение $K_{гЗИП}$ во много раз (8–10 раз и более) меньше, чем вклад потока отказов основных элементов. Это можно объяснить тем, что число ЗЧ обычно значительно меньше числа основных элементов. Поскольку в реальных условиях интенсивность отказов при хранении существенно меньше интенсивности отказов элемента при работе (коэффициент снижения равен 0,01–0,05), то вклад потока отказов при хранении оказывается еще меньше (доли процентов).

1.9. Вопросы для самоконтроля

- Какие способы пополнения запасов в комплектах ЗИП применяют при эксплуатации техники? Чем они отличаются друг от друга?
- Какие виды комплектов ЗИП используют в технике? Дайте им краткую характеристику.
- Какие факторы учитывают при создании комплектов ЗИП и выборе вида комплекта?
- Какие факторы учитывают при выборе способа пополнения запасов?
- При каких условиях можно не учитывать время собственно замены отказавшего модуля запасной частью?
- Как повысить эффективность использования ЗИП в системе, не допускающей больших перерывов в работе для замены отказавшего модуля?
- Какие показатели достаточности используют для характеристики комплекта ЗИП, при каких условиях выбирают тот или иной показатель? Какова взаимосвязь между показателями достаточности?
- Чему равен коэффициент готовности комплекта ЗИП, которого нет (в составе комплекта нет ни одной запасной части)?
- Какими факторами определяется успех выполнения заявки конкретного изделия на доставку запасной части из комплекта ЗИП?
- Какие источники пополнения запасов возможны для одиночного комплекта ЗИП, группового комплекта ЗИП?

ГЛАВА 2

Расчет надежности изделий с использованием показателей достаточности комплектов ЗИП

2.1. Общие положения

Идея использования показателей достаточности при расчете надежности изделий при наличии ЗИП возникла в конце 70-х — начале 80-х годов прошлого века и изложена в ряде научных публикаций [39, 52, 87]. Позднее она была реализована в нормативных документах и вошла в проектную практику [4]. Действующими нормативными документами широко пользуются проектные организации и промышленные предприятия и в настоящее время.

Сущность идеи состоит в том, чтобы единую задачу расчета надежности изделий при наличии ЗИП декомпозировать и свести к двум последовательно решаемым самостоятельным задачам. В первой задаче определяются показатели достаточности (ПД): вероятность достаточности (при стратегии ПП), коэффициент готовности ЗИП, среднее время задержки в выполнении заявки на ЗЧ. Для каждого типа запасов и по комплекту ЗИП в целом. Затем решается вторая задача — расчета надежности изделия при неограниченном ЗИП. Учет ЗИП происходит путем коррекции параметров модели надежности следующим образом. Для нерезервированных систем предлагается перемножать значения показателя достаточности и показателя надежности при неограниченном ЗИП. При оценке вероятности безотказной работы (ВБР) перемножают вероятность достаточности и ВБР при неограниченном ЗИП. При оценке коэффициента готовности перемножают коэффициент готовности ЗИП и коэффициент готовности изделия при неограниченном ЗИП.

Для резервированных систем схема учета иная. Сначала определяют коэффициент готовности ЗИП. Затем вычисляют среднее время задержки по приближенной формуле (1.45) или по точным формулам. Потом корректируют среднее время восстановления работоспособности путем прибавления среднего времени задержки к среднему времени восстановления при неограниченном ЗИП. Далее используется соответствующая модель надежности восстанавливаемой системы с заданными показателями безотказности элементов и скорректированными показателями восстановления.

В работе [87] приводится следующее обоснование возможности перемножать коэффициенты готовности для нерезервированных систем:

$$K_г(L) = K_г(\infty) K_{гЗИП}(L) . \qquad (2.1)$$

Пусть изделие эксплуатируется в течение времени $T_\Sigma = t_{p\Sigma} + t_{в\Sigma}$, где $t_{p\Sigma}$ — суммарная наработка в течение времени эксплуатации, $t_{в\Sigma}$ — суммарное время восстановления. По определению коэффициент готовности

$$K_г = \lim_{T_\Sigma \to \infty} \frac{t_{p\Sigma}}{t_{p\Sigma} + t_{в\Sigma}} . \qquad (2.2)$$

Пусть за время T_Σ произошло M отказов изделия и m отказов ЗИП. Тогда

$$T_0 = \frac{t_{p\Sigma}}{M}, T_{0ЗИП} = \frac{t_{p\Sigma}}{m}, \quad t_{в\Sigma} = MT_{в\infty} + mT_{вЗИП}, \quad T_в = \frac{t_{в\Sigma}}{M} = T_{в\infty} + \frac{m}{M}T_{вЗИП}, \quad \frac{T_0}{T_{0ЗИП}} = \frac{m}{M}. \quad (2.3)$$

Разделив почленно правую часть (2.2) на M, получим:

$$K_г(L) = \frac{\overline{T}_0}{\overline{T}_0 + \overline{T}_{в\infty} + \overline{T}_{вЗИП}\dfrac{\overline{T}_0}{\overline{T}_{0ЗИП}}} = \frac{\overline{T}_0}{\overline{T}_0 + \overline{T}_{в\infty}} \frac{\overline{T}_{0ЗИП}}{\overline{T}_{0ЗИП} + \overline{T}_{вЗИП}\dfrac{\overline{T}_0}{\overline{T}_0 + \overline{T}_{в\infty}}} =$$

$$= K_г(\infty)\frac{\overline{T}_{0ЗИП}}{\overline{T}_{0ЗИП} + \overline{T}_{вЗИП} - \overline{T}_{вЗИП}(1 - K_г(\infty))} = K_г(\infty)K_{гЗИП}(L)\frac{1}{1-(1-K_г(\infty))(1-K_{гЗИП}(L))}. \quad (2.4)$$

Ошибка имеет порядок $O((1 - K_{г\infty})(1 - K_{гЗИП}))$. Эта величина имеет порядок 10^{-2}–10^{-4}.

Обоснования других упомянутых способов учета ЗИП в расчетах надежности, в том числе коррекции среднего времени восстановления, отсутствуют.

Очевидно, что метод расчета надежности путем декомпозиции задачи и использования ПД является приближенным. Именно с этим связаны основные его недостатки.

Для приближенного метода важно знать величину погрешности. Однако этот вопрос недостаточно исследован. Более того, не известен даже знак погрешности, т. е. не известно, является ли оценка завышенной или заниженной и на сколько (во сколько раз) оценка отличается от истинного значения. В результате приходится принимать оценки, которые могут иметь неприемлемую погрешность.

Нет ясности в применении метода, когда для различных составных частей, использующих одноименные элементы, надо рассчитывать различные показатели достаточности. Например, для системы, имеющей в своем составе нерезервированную и резервированную подсистемы, требуется использовать два правила: для нерезервированной подсистемы рассчитывать коэффициент готовности ЗИП, а для резервированной подсистемы рассчитывать среднее время задержки и корректировать среднее время восстановления. Если это так, то остается вопрос, какое количество ЗЧ надо принимать в расчетах ПД. Если одно и то же значение, равное числу ЗЧ в комплекте ЗИП, то это приведет к существенному завышению надежности, т. к. в модели число ЗЧ фактически удваивается: нерезервированная подсистема имеет L запасных частей и столько же имеет резервированная подсистема. Если же брать разное количество, но так что их сумма равна L, то получим заниженное значение, т. к. такая схема означает неполную доступность всех ЗЧ обеим подсистемам, что не соответствует действительности. В более сложных схемах резервирования ситуация получается еще более запутанной.

Метод не учитывает такие факторы, как возможность приоритетного обслуживания комплектом ЗИП различных составных частей изделия.

Метод не разработан для многофункциональных систем, для которых расчет надежности осуществляется отдельно для каждой функционально самостоятельной операции (ФСО) и в выполнении каждой ФСО участвует только часть общего оборудования при общем ресурсе — комплекте ЗИП.

Вместе с тем, метод обладает определенной степенью универсальности, обусловленной развитостью теории надежности восстанавливаемых систем, в том числе резервированных систем. Поэтому во всех случаях, когда не удается предложить точные методы прямого учета

ЗИП в моделях надежности (без декомпозиции задачи), приближенный метод остается приемлемым инструментом учета ЗИП в оценках надежности.

Далее будет продемонстрировано применение метода расчета с использованием ПД к последовательным системам и к ряду типовых схем резервирования.

2.2. Оценка показателей надежности нерезервированных систем

Последовательная система содержит элементы M типов по k_i элементов i-го типа, i = = 1, ..., M. В составе ЗИП-О содержится L_i запасных частей i-го типа, i = 1, ..., M. При этом для некоторых типов L_i = 0. Поэтому в комплекте ЗИП-О представлены ЗЧ только N типов ($N \le M$). Интенсивность отказов элемента i-го типа равна λ_i. Запасные части при хранении не отказывают. Найдем для этой системы показатели безотказности и готовности.

2.2.1. Показатели безотказности

Пусть время замены отказавшего элемента i-го типа случайное с распределением $F_{вi}(t)$, допустимое время замены постоянно и равно $t_{доп i}$. Тогда вероятность успешной замены всех отказавших элементов i-го типа при условии неограниченности ЗИП и наличия мгновенно пополняемого резерва времени [77]:

$$P_i(t, t_{доп i}, \infty) = \exp(-k_i \lambda_i \max(0, t - t_{доп i})(1 - F_{вi}(t_{доп i}))) . \qquad (2.5)$$

Вероятность безотказной работы группы элементов i-го типа с учетом ЗИП:

$$P_i(t, L_i) = P_i(t, t_{доп i}, \infty) P_{дЗИПi}(t, L_i) , \qquad (2.6)$$

где $P_{дЗИПi}(t, L_i)$ — вероятность достаточности ЗИП по запасам i-го типа.

Вероятность достаточности ЗИП находят по формулам *разд. 1.4.3*.

Вероятность безотказной работы изделия:

$$P(t, L) = \prod_{i=1}^{M} P_i(t, L_i) . \qquad (2.7)$$

В частности, при периодическом пополнении ПП и ПЭД с учетом (1.46) имеем:

$$P(t, L, T) = \exp\left(-\sum_{i=1}^{M} k_i \lambda_i \max(0, t - t_{доп i})(1 - F_{вi}(t_{доп i})) \right) \prod_{i=1}^{M} P_{дi}^{m_i}(T_i, L_i) P_{дi}(t - m_i T_i, L_i) ,$$

$$P_{дi}(t, L_i) = 1 - I(k_i \lambda_i t, L_i + 1), t \le T_i, m_i = [t / T_i] , \qquad (2.8)$$

где $[x]$ — целая часть x.

Если фактическое время замены оказывается меньше предельно допустимого значения с вероятностью, близкой к единице, то ВБР изделия практически совпадает с вероятностью достаточности ЗИП:

$$P(t, L, T) \approx P_{дЗИП}(t, L) = \prod_{i=1}^{M} P_{дЗИПi}(t, L_i) . \qquad (2.9)$$

2.2.2. Показатели готовности

Коэффициент готовности изделия с учетом ЗИП определяется по формуле (2.1), коэффициент готовности ЗИП для различных стратегий пополнения можно найти по формулам разд. 1.4.1. Для расчета коэффициента готовности изделия при неограниченном ЗИП и допустимом времени замены $t_{\partial on}$ надо использовать формулы для средней наработки и среднего времени восстановления в условиях мгновенно пополняемого резерва времени [77]:

$$\overline{T}_{o\infty}(t_{\partial on}) = \left(\frac{1}{k\lambda} + \int_0^{t_{\partial on}} x dF_в(x) \right) / (1 - F_в(t_{\partial on})) + t_{\partial on}, \qquad (2.10)$$

$$\overline{T}_{в\infty}(t_{\partial on}) = \left(\overline{T}_{в\infty} - \int_0^{t_{\partial on}} x dF_в(x) \right) / (1 - F_в(t_{\partial on})) - t_{\partial on}, \overline{T}_{в\infty} = \int_0^{\infty} (1 - F_в(x)) dx .$$

Отсюда коэффициент готовности:

$$K_г(t_{\partial on}, \infty) = 1 - \frac{\overline{T}_{в\infty}(t_{\partial on})}{\overline{T}_{o\infty}(t_{\partial on}) + T_{в\infty}(t_{\partial on})} = \left(1 + k\lambda \int_0^{t_{\partial on}} (1 - F_в(x)) dx \right) / (1 + k\lambda \overline{T}_{в\infty}) . \qquad (2.11)$$

При экспоненциальном распределении времени замены из (2.11) имеем:

$$K_г(t_{\partial on}, \infty) = 1 - \frac{k\rho}{1 + k\rho} e^{-\lambda t_{\partial on}/\rho}, \rho = \lambda \overline{T}_{в\infty}(t_{\partial on}) . \qquad (2.11,а)$$

Подставляя (2.11) в (2.1), получим:

$$K_г(L) = \prod_{i=1}^{M} K_{гi}(t_{\partial oni}, \infty) K_{г ЗИПi}(L_i) = \left(\prod_{i=1}^{M} \frac{1 + k_i \lambda_i \int_0^{t_{\partial oni}} (1 - F_{вi}(x)) dx}{1 + k_i \lambda_i \overline{T}_{в\infty i}} \right) K_{г ЗИП}(L) . \qquad (2.12)$$

Из (2.8) и (2.12) следует, что для последовательной системы надо знать показатель достаточности для всего комплекта ЗИП, а не по отдельным видам запасов.

2.3. Оценка показателей надежности однородных резервированных систем

В виду большого разнообразия различных схем резервирования, здесь приводятся лишь некоторые иллюстративные примеры для наиболее известных типовых схем, имеющие целью продемонстрировать применение метода учета ЗИП в моделях надежности с помощью показателей достаточности. Типовые схемы выбраны из следующих соображений. Во-первых, схемы классифицируются по признаку однородности или неоднородности, т. е. по признаку: схема резервирования содержит элементы только одного типа или нескольких типов. Далее рассматривается признак сложности структуры. Разделяются схемы последовательно-параллельные и схемы со сложной («мостиковой») структурой. В этом разделе будут рассмотрены только однородные последовательно-параллельные структуры, а в следующем разделе — неоднородные последовательно-параллельные структуры. Системы со сложной структурой требуют специального языка для описания логики отказов, и он будет

изложен в *главе 4*. Там же будут рассмотрены примеры расчета надежности структурно сложных резервированных систем. Перечень моделей в данной главе составлен еще с таким расчетом, чтобы была возможность сравнить различные методы оценки надежности в *главах 2* и *5–8*.

Общее положение при оценке надежности с помощью показателей достаточности состоит в том, что сначала необходимо найти коэффициент готовности ЗИП по запасам *i*-го типа, используя формулы *разд. 1.4.1*, затем по формуле (1.45) найти среднюю задержку в выполнении заявки на ЗЧ $\Delta t_{ЗИП}(L)$ и скорректировать среднее время восстановления:

$$\overline{T}_в(L) = \overline{T}_{в\infty} + \Delta t_{ЗИП}(L). \qquad (2.13)$$

Далее надо использовать известные из теории надежности восстанавливаемых систем формулы для расчета показателей безотказности и готовности. Здесь при расчете ВБР будут использованы асимптотические формулы экспоненциального приближения точного значения, которые имеют малую погрешность при быстром восстановлении. Следует помнить, что асимптотические формулы могут давать значительную ошибку по вероятности отказа в переходном периоде при малых значениях *t*. Модели пронумерованы и к номеру при необходимости добавляются сведения о стратегии пополнения (например, модель П2, ПЭД2, НП2, ПУ2).

2.3.1. Дублированная система (модель 2)

Структура системы с общим дублированием приведена на рис. 2.1, *а*. При периодическом пополнении (ПП) и периодическом пополнении с экстренной доставкой (ПЭД) коэффициент готовности ЗИП находят по формуле (1.7), при периодическом пополнении с экстренной доставкой (ПЭД) — по формуле (1.16), при непрерывном пополнении — по формуле (1.28), при пополнении по уровню — по формулам (1.29)–(1.37).

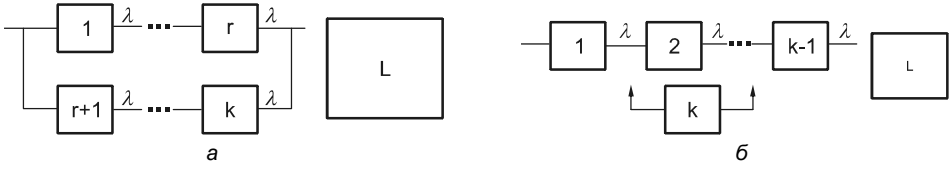


Рис. 2.1. Структурная схема дублированной системы: *а* — при общем резервировании; *б* — при скользящем резервировании

Среднее время восстановления при наличии L запасных частей и экспоненциальном распределении времени замены:

$$\overline{T}_в(L) = \overline{T}_{в\infty}(t_{доп}) + \Delta t_{ЗИП}(L) = \overline{T}_{в\infty} e^{-\mu t_{доп}} - \frac{1}{k\lambda} \ln K_{гЗИП}(L). \qquad (2.14)$$

Вероятность безотказной работы, средняя наработка до отказа и коэффициент готовности изделия рассчитываются по формулам:

$$P(t, L) = \exp(-\rho k^2 \lambda t / (2 + 3k\rho)), \rho = \lambda \overline{T}_в(L), \qquad (2.15)$$

$$\overline{T}_o(L) = \frac{1}{k\lambda}\left(3 + \frac{2}{k\rho}\right), \; K_г(L) = 1 - \frac{(k\rho)^2 / 2}{1 + k\rho + (k\rho)^2 / 2}.$$

При скользящем дублировании (рис. 2.1, *б*)

$$\overline{T}_в(L) = \overline{T}_{в\infty}(t_{доп}) + \Delta t_{ЗИП}(L) = \overline{T}_{в\infty} e^{-\mu t_{доп}} - \frac{1}{(r+1)\lambda} \ln K_{гЗИП}(L), \qquad (2.16)$$

$$P(t, L) = \exp(-\rho r(r+1)\lambda t / (1 + (1+2r)\rho)), \rho = \lambda \overline{T}_в(L),$$

$$\overline{T}_o(L) = \frac{1}{(1+2r)r\lambda}(1 + (1+2r)\rho), K_г(L) = 1 - \frac{r(r+1)\rho^2}{1 + (r+1)\rho + r(r+1)\rho^2}.$$

2.3.2. Мажорированная система (модель 3)

Мажорированная система состоит из $3r$ однотипных элементов с интенсивностью отказов λ и отказывает, если отказывают любые две ее ветви (рис. 2.2).

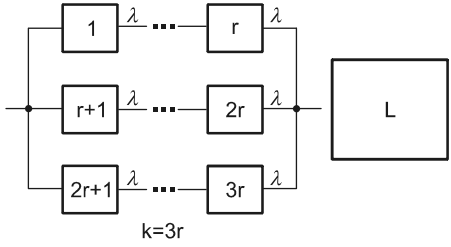


Рис. 2.2. Структурная схема мажорированной системы

Расчет $K_{гЗИП}$, $\Delta t_{ЗИП}(L)$ и $\overline{T}_в(L)$ проводится по тем же формулам, что и для модели 2. Вероятность безотказной работы, средняя наработка до отказа и коэффициент готовности изделия рассчитываются по формулам:

$$P(t, L) = \exp(-2k^2\rho\lambda t / (3 + 5k\rho)), \rho = \lambda \overline{T}_в(L), \qquad (2.17)$$

$$\overline{T}_o(L) = \frac{1}{2k^2\rho\lambda}(3 + 5k\rho), K_г(L) = 1 - \frac{2(k\rho)^2/3}{1 + k\rho + 2(k\rho)^2/3}.$$

2.3.3. Система с групповым дублированием (модель 4)

Однородная система является последовательным соединением двух подсистем: дублированной подсистемы по r элементов в каждой ветви и нерезервированной подсистемы из $k - 2r$ элементов (рис. 2.3).

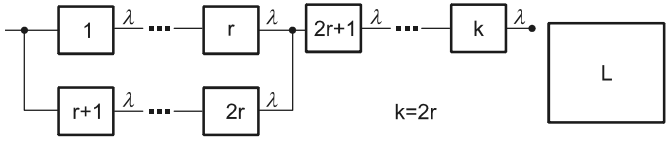


Рис. 2.3. Структурная схема смешанной системы с последовательным соединением дублированной и нерезервированной подсистем

Особенность данной модели заключается в том, что согласно правилам методики расчета для двух подсистем должны быть выбраны различные показатели достаточности: для нерезервированной — вероятность достаточности или коэффициент готовности ЗИП, а для ре-

зервированной подсистемы — среднее время задержки $\Delta t_{ЗИП}(L)$. Поскольку в обеих формулах для расчета ПД есть параметр L — количество ЗЧ, обслуживающих подсистему, то необходимо разделить общий ресурс на две автономные части L_1 и L_2 с ограниченной доступностью. Разделение порождает дополнительную ошибку. Среди различных вариантов разделения есть два крайних: 1) $L_1 = L_2 = L$, 2) $L_1 + L_2 = L$. В первом варианте происходит завышение надежности, во втором, напротив, занижение надежности.

При периодическом пополнении (ПП)

В этом случае вероятность безотказной работы рассчитывают по формулам:

$$P(t, L_1, L_2) = P_1(t, L_1) P_{дЗИП2}(t, L_2) P_2(t, t_{доп}, \infty), \tag{2.18}$$

$$P_1(t, L_1) = \exp(-2\rho_1 r^2 \lambda t / (1 + 3r\rho_1)),$$

$$\rho_1 = \lambda \overline{T}_{в1}(L_1) = \lambda \overline{T}_{в\infty 1}(t_{доп}) - \frac{1}{2r} \ln K_{гЗИП1}(L_1),$$

$$K_{гЗИП1}(L_1) = \frac{1}{A_1} \sum_{I=0}^{L_1} I(A_1, L_1 + 1), A_1 = 2r\lambda T,$$

$$P_{дЗИП2}(t, L_2) = 1 - I((k - 2r)\lambda t, L_2 + 1), t \le T,$$

$$P_2(t, t_{доп}, \infty) = \exp(-(k - 2r)\lambda \max(0, t - t_{доп})(1 - F_в(t_{доп}))),$$

где $\overline{T}_{в1}(t_{доп})$ рассчитывают по формуле (2.10).

Средняя наработка системы до отказа:

$$\overline{T}_o(L_1, L_2) = \frac{1}{\lambda} / \left(\frac{2r^2 \rho_1}{1 + 3r\rho_1} + \frac{k - 2r}{L_2} \right). \tag{2.19}$$

Коэффициент готовности системы:

$$K_г(L_1, L_2) = K_{г1}(L_1) K_{гЗИП2}(L_2) K_{г2}(t_{доп}, \infty) =$$

$$= \frac{1 + 2r\rho_1}{1 + 2r\rho_1 + 2(r\rho_1)^2} \frac{1}{A_2} \sum_{i=0}^{L_2} I(A_2, L_2 + 1) \left(1 - \frac{(k - 2r)\rho_2}{1 + (k - 2r)\rho_2} e^{-\lambda t_{доп}/\rho_2} \right),$$

$$A_2 = (k - 2r)\lambda T, \rho_2 = \lambda \overline{T}_{в\infty}(t_{доп}). \tag{2.20}$$

При стратегии ПЭД

В этом случае ВБР и среднюю наработку рассчитывают по тем же формулам (2.18) и (2.19), что и для стратегии ПП. При нахождении коэффициента готовности системы для расчета $K_{гЗИП1}(L_1)$ и $K_{гЗИП2}(L_2)$ надо использовать формулы (1.16)–(1.27).

При стратегиях НП и ПУ

В этом случае для расчета вероятности достаточности $P_{дЗИП2}(t, L_2)$ вместо формулы (2.18) надо использовать (1.48)–(1.49), а для расчета коэффициента готовности ЗИП $K_{гЗИП1}(L_1)$ и $K_{гЗИП2}(L_2)$ — формулы (1.28)–(1.37).

2.3.4. Система с групповым мажорированием (модель 5)

Однородная система является последовательным соединением двух подсистем: мажорированной подсистемы по r элементов в каждой ветви и нерезервированной подсистемы из $k-3r$ элементов (рис. 2.4).

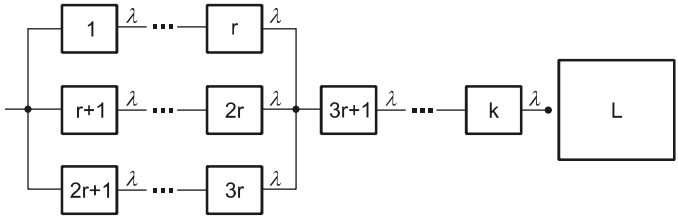


Рис. 2.4. Структурная схема смешанной системы с последовательным соединением мажорированной и нерезервированной подсистем

Как и в модели 4, здесь надо назначать два числа ЗЧ для двух подсистем: L_1 и L_2 с ограниченной доступностью. Далее составляются формулы для расчета показателей надежности системы, аналогичные формулам в модели 4. При периодическом пополнении вероятность безотказной работы рассчитывают по формулам:

$$P(t,L_1,L_2)=P_1(t,L_1)P_{д3ИП2}(t,L_2)P_2(t,t_{доп},\infty)\,, \tag{2.21}$$

$$P_1(t,L_1)=\exp(-6\rho_1 r^2\lambda t/(1+5r\rho_1))\,,$$

$$\rho_1=\lambda\overline{T}_{в1}(L_1)=\lambda\overline{T}_{в\infty 1}(t_{доп})-\frac{1}{3r}\ln K_{г3ИП1}(L_1)\,,$$

$$K_{г3ИП1}(L_1)=\frac{1}{A_1}\sum_{I=0}^{L_1} I(A_1,L_1+1),\ A_1=3r\lambda T\,,$$

$$P_{д3ИП2}(t,L_2)=1-I((k-3r)\lambda t,L_2+1),\ t\le T\,,$$

$$P_2(t,t_{доп},\infty)=\exp(-(k-3r)\lambda\max(0,t-t_{доп})(1-F_в(t_{доп})))\,.$$

Средняя наработка системы до отказа:

$$\overline{T}_o(L_1,L_2)=\frac{1}{\lambda}\Big/\left(\frac{6r^2\rho_1}{1+5r\rho_1}+\frac{k-3r}{L_2}\right). \tag{2.22}$$

Коэффициент готовности системы:

$$K_г(L_1,L_2)=K_{г1}(L_1)K_{г3ИП2}(L_2)K_{г2}(t_{доп},\infty)=$$

$$=\frac{1+3r\rho_1}{1+3r\rho_1+6(r\rho_1)^2}\frac{1}{A_2}\sum_{i=0}^{L_2} I(A_2,L_2+1)\left(1-\frac{(k-3r)\rho_2}{1+(k-3r)\rho_2}e^{-\lambda t_{доп}/\rho_2}\right),$$

$$A_2=(k-3r)\lambda T,\ \rho_2=\lambda\overline{T}_{в\infty}(t_{доп})\,.$$

Для других стратегий пополнения надо использовать формулы, указанные в предыдущем разделе при описании модели 4.

2.3.5. Последовательное соединение двух дублированных подсистем (модель 6)

Однородная система является последовательным соединением двух дублированных подсистем, имеющих по *r* элементов в каждой ветви (всего в системе 4 *r* элементов) (рис. 2.5).

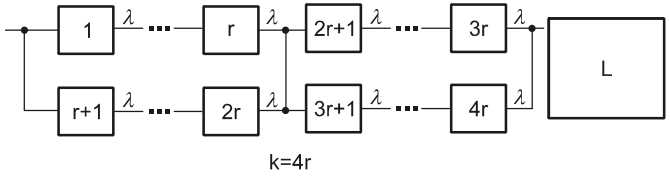


Рис. 2.5. Структурная схема системы с последовательным соединением двух дублированных подсистем

При периодическом пополнении показатели надежности рассчитывают по формулам:

$$P(t,L)=\exp(-4\rho r^2\lambda t/(1+3r\rho)), \qquad (2.23)$$

$$\rho=\lambda\overline{T}_{в}(L)=\lambda\overline{T}_{в\infty}(t_{доп})-\frac{1}{k}\ln K_{гЗИП}(L), k=4r, \overline{T}_{в\infty}(t_{доп})=\overline{T}_{в\infty}e^{-\mu t_{доп}},$$

$$K_{гЗИП}(L)=\frac{1}{A}\sum_{I=0}^{L}I(A,L+1), A=4r\lambda T, \overline{T}_{o}(L)=\frac{1+3r\rho}{4r^2\rho\lambda},$$

$$K_{г}(L)=\left(\frac{1+2r\rho}{1+2r\rho+2(r\rho)^2}\right)^2.$$

Для других стратегий пополнения надо взять соответствующие формулы для расчета коэффициента готовности ЗИП из *разд. 1.4.1 главы 1*.

2.3.6. Последовательное соединение двух мажорированных подсистем (модель 7)

Однородная система является последовательным соединением двух мажорированных подсистем (рис. 2.6), имеющих по *r* элементов в каждой ветви (всего в системе 6 *r* элементов).

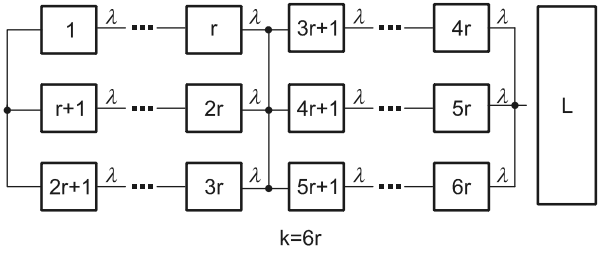


Рис. 2.6. Структурная схема системы с последовательным соединением двух мажорированных подсистем

При периодическом пополнении показатели надежности рассчитывают по формулам:

$$P(t,L)=\exp(-12\rho r^2\lambda t/(1+5r\rho)), \tag{2.24}$$

$$\rho=\lambda\overline{T}_{в}(L)=\lambda\overline{T}_{в\infty}(t_{доп})-\frac{1}{k}\ln K_{гЗИП}(L), k=6r, \overline{T}_{в\infty}(t_{доп})=\overline{T}_{в\infty}e^{-\mu t_{доп}},$$

$$K_{гЗИП}(L)=\frac{1}{A}\sum_{i=0}^{L}I(A,L+1), A=6r\lambda T, \overline{T}_{о}(L)=\frac{1+5r\rho}{12r^2\rho\lambda},$$

$$K_{г}(L)=\left(\frac{1+3r\rho}{1+3r\rho+6(r\rho)^2}\right)^2.$$

Для других стратегий пополнения надо взять соответствующие формулы для расчета коэффициента готовности ЗИП из *разд. 1.4.1 главы 1*.

2.3.7. Последовательное соединение дублированной, мажорированной и нерезервированной подсистем (модель 8)

Однородная система является последовательным соединением дублированной, мажорированной подсистем, имеющих по r элементов в каждой ветви (всего 5 r элементов), и нерезервированной подсистемы, имеющей $k-5r$ элементов (рис. 2.7).

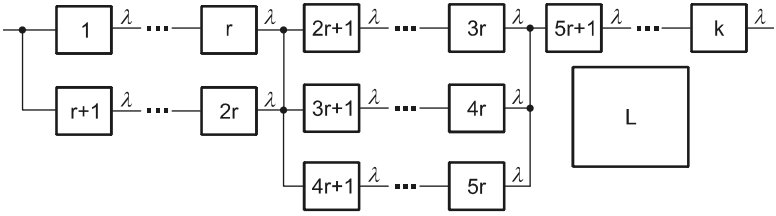


Рис. 2.7. Структурная схема смешанной системы с последовательным соединением дублированной, мажорированной и нерезервированной подсистем

Формулы данной модели получаются путем комбинирования формул моделей 1, 2 и 3. Из-за наличия нерезервированной подсистемы запасы разделяются на две виртуальные части, L_1 и L_2, с ограниченной доступностью: запас L_1 обслуживает первые две подсистемы, а L_2 — нерезервированную подсистему. Тогда при периодическом пополнении запасов вероятность безотказной работы:

$$P(t,L_1,L_2)=P_1(t,L_1)P_{дЗИП2}(t,L_2)P_2(t,t_{доп},\infty), \tag{2.25}$$

$$P_1(t,L_1)=\exp(-2\rho_1 r^2\lambda t/(1+3r\rho_1)-6\rho_1 r^2\lambda t/(1+5r\rho_1)),$$

$$\rho_1=\lambda\overline{T}_{в1}(L_1)=\lambda\overline{T}_{в\infty1}(t_{доп})-\frac{1}{5r}\ln K_{гЗИП1}(L_1),$$

$$K_{гЗИП1}(L_1)=\frac{1}{A_1}\sum_{i=0}^{L_1}I(A_1,L_1+1), A_1=5r\lambda T,$$

$$P_{дЗИП2}(t, L_2) = 1 - I((k-5r)\lambda t, L_2 + 1), t \le T,$$

$$P_2(t, t_{доп}, \infty) = \exp(-(k-5r)\lambda \max(0, t - t_{доп})(1 - F_в(t_{доп}))).$$

Средняя наработка системы до отказа:

$$\overline{T}_o(L_1, L_2) = \frac{1}{\lambda} / \left(\frac{2r^2\rho_1}{1+3r\rho_1} + \frac{6r^2\rho_1}{1+5r\rho_1} + \frac{k-5r}{L_2} \right). \quad (2.26)$$

Коэффициент готовности системы:

$$K_г(L_1, L_2) = K_{г1}(L_1) K_{гЗИП2}(L_2) K_{г2}(t_{доп}, \infty) =$$

$$= \frac{1+2r\rho_1}{1+2r\rho_1+2(r\rho_1)^2} \frac{1+3r\rho_1}{1+3r\rho_1+6(r\rho_1)^2} \frac{1}{A_2} \sum_{i=0}^{L_2} I(A_2, L_2+1) \left(1 - \frac{(k-5r)\rho_2}{1+(k-5r)\rho_2} e^{-\lambda t_{доп}/\rho_2} \right),$$

$$A_2 = (k-5r)\lambda T, \rho_2 = \lambda \overline{T}_{в\infty}(t_{доп}). \quad (2.27)$$

При стратегии ПЭД ВБР и среднюю наработку рассчитывают по тем же формулам, что и для стратегии ПП. При нахождении коэффициента готовности системы для расчета $K_{гЗИП1}(L_1)$ и $K_{гЗИП2}(L_2)$ надо использовать формулы (1.16)–(1.27).

При стратегиях НП и ПУ для расчета вероятности достаточности $P_{дЗИП2}(t, L_2)$ вместо формулы (2.25) надо использовать формулы (1.45, *в*, *г*), а для расчета коэффициента готовности ЗИП $K_{гЗИП1}(L_1)$ и $K_{гЗИП2}(L_2)$ — формулы (1.28)–(1.37).

2.3.8. Резервирование по схеме «1 из 3» (модель 9)

Однородная система состоит из $3r$ однотипных элементов с интенсивностью отказов λ, расположенных в трех одинаковых параллельных ветвях, и отказывает, если отказывают все три ее ветви (рис. 2.8, *а*). Граф состояний имеет вид, изображенный на рис. 2.8, *б*.

При периодическом пополнении запасов вероятность безотказной работы:

$$P(t, L) = \exp(-t / \overline{T}_o(L)), \lambda \overline{T}_o(L) = \frac{1}{3r} \left(1 + \frac{1+3r\rho}{2r\rho} + \frac{1+3r\rho+6(r\rho)^2}{2(r\rho)^2} \right), \quad (2.28)$$

$$\rho = \lambda \overline{T}_в(L) = \lambda \overline{T}_{в\infty}(t_{доп}) - \frac{1}{3r} \ln K_{гЗИП}(L),$$

$$K_{гЗИП}(L) = \frac{1}{A} \sum_{i=0}^{L} I(A, L+1), A = 3r\lambda T, \overline{T}_{в\infty}(t_{доп}) = \overline{T}_{в\infty} e^{-\mu t_{доп}}.$$

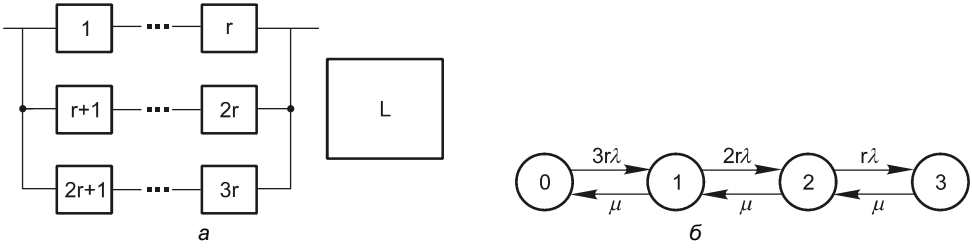


Рис. 2.8. Структурная схема (*а*) и граф состояний (*б*) резервированной системы по схеме «1 из 3»

Коэффициент готовности системы:

$$K_г(L) = 1 - \frac{6(r\rho)^3}{1 + 3r\rho + 6(r\rho)^2 + 6(r\rho)^3}. \qquad (2.29)$$

Для других стратегий пополнения надо взять соответствующие формулы для расчета коэффициента готовности ЗИП из *разд. 1.4.1 главы 1*.

2.3.9. Последовательное соединение двух мажорированных и дублированной подсистем (модель 10)

Однородная система является последовательным соединением двух мажорированных и одной дублированной подсистем, имеющих по r элементов в каждой ветви (все ветви одинаковы, всего в системе $8r$ элементов) (рис. 2.9).

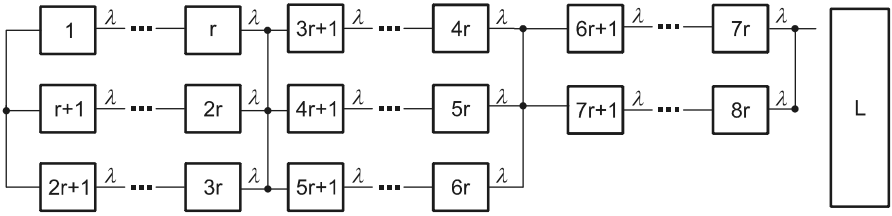


Рис. 2.9. Структурная схема системы с последовательным соединением двух мажорированных и дублированной подсистем

При периодическом пополнении показатели надежности рассчитывают по формулам:

$$P(t, L) = \exp(-2\rho r^2 \lambda t / (1 + 3r\rho) - 12\rho r^2 \lambda t / (1 + 5r\rho)), \qquad (2.30)$$

$$\rho = \lambda \overline{T}_в(L) = \lambda \overline{T}_{в\infty}(t_{доп}) - \frac{1}{8r} \ln K_{гЗИП}(L) K_{гЗИП}(L) = \frac{1}{A} \sum_{i=0}^{L} I(A, L+1),\ A = 8r\lambda T,$$

$$\lambda \overline{T}_о(L) = \frac{1}{2r^2\rho} \Big/ \left(\frac{1}{1 + 3r\rho} + \frac{6}{1 + 5r\rho} \right),$$

$$K_г(L) = \frac{1 + 2r\rho}{1 + 2r\rho + 2(r\rho)^2} \left(\frac{1 + 3r\rho}{1 + 3r\rho + 6(r\rho)^2} \right)^2.$$

2.3.10. Дублирование структур типа модели 4 (модель 11)

Система состоит из двух одинаковых параллельных ветвей, в каждой из которых имеется r однотипных элементов. В каждой из ветвей два элемента образуют дублированную пару, а остальные $r - 2$ элемента соединены последовательно (рис. 2.10).

Для расчета показателей надежности здесь будет использовано эквивалентирование групп элементов с расчетом эквивалентной интенсивности отказов.

Для дублированной пары:

$$\lambda_э = 2\lambda / (1 + 3\rho), \rho = \lambda \overline{T}_в(L) = \lambda \overline{T}_{в\infty}(t_{доп}) - \frac{1}{2r} \ln K_{гЗИП}(L).$$

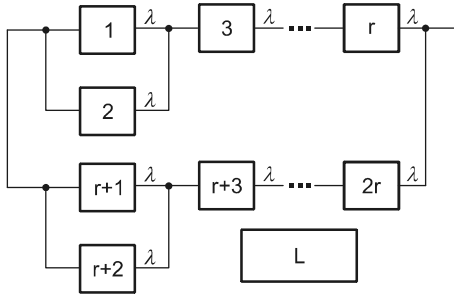


Рис. 2.10. Структурная схема системы при дублировании структур типа модели 4 (структура 3-го порядка)

Для одной ветви: $\Lambda_э = \lambda_э + (r-2)\lambda$.

Тогда средняя наработка системы до отказа:

$$\overline{T}_o(L) = [1 + 3\Lambda_э \overline{T}_в(L)] / (2\Lambda_э^2 \overline{T}_в(L)) . \qquad (2.31)$$

Вероятность безотказной работы:

$$P(t, L) = \exp(-t / \overline{T}_o(L)) . \qquad (2.32)$$

Коэффициент готовности системы:

$$K_г(L) = 1 - (1 - p^{r-1}(2-p))^2, p = \frac{1}{1+\rho} . \qquad (2.33)$$

Если ρ мало, а p близко к единице, то можно использовать приближенную формулу:

$$K_г(L) \approx 1 - (r-2)^2 \rho^2 .$$

2.3.11. Дублирование структур типа модели 6 (модель 12)

Система содержит всего восемь элементов, расположенных в двух параллельных ветвях. Каждая ветвь является последовательным соединением двух дублированных пар (рис. 2.11).

Для одной ветви эквивалентная интенсивность отказов:

$$\Lambda_э = \frac{4\lambda\rho}{1+3\rho}, \rho = \lambda \overline{T}_в(L) = \lambda \overline{T}_{в\infty}(t_{доп}) - \frac{1}{2r} \ln K_{гЗИП}(L) .$$

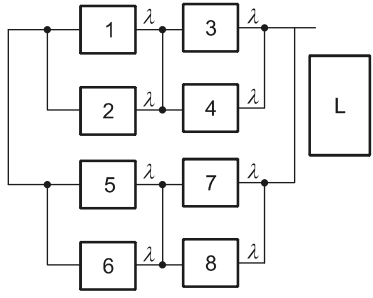


Рис. 2.11. Структурная схема системы при дублировании структур типа модели 6 (структура 3-го порядка)

Средняя наработка до отказа системы:

$$\overline{T}_o(L) = [1 + 3\Lambda_э \overline{T}_в(L)] / (2\Lambda_э^2 \overline{T}_в(L)) = \frac{1}{8\lambda} \frac{(1+3\rho)(1+3\rho+12\rho^2)}{4\rho^3}. \quad (2.34)$$

Вероятность безотказной работы:

$$P(t, L) = \exp(-t / \overline{T}_o(L)).$$

Коэффициент готовности системы:

$$K_г(L) = 1 - (1 - (1 - q^2)^2)^2 = 1 - 4\rho^4 \frac{(1 + 2\rho + 0,5\rho^2)^2}{(1+\rho)^8}, p = 1 - q = \frac{1}{1+\rho}. \quad (2.35)$$

2.3.12. Дублирование структур типа модели 7 (модель 13)

Система содержит всего двенадцать элементов, расположенных в двух параллельных ветвях. Каждая ветвь является последовательным соединением двух мажорированных троек элементов (рис. 2.12).

Для одной ветви эквивалентная интенсивность отказов:

$$\Lambda_э = \frac{12\lambda\rho}{1+5\rho}, \rho = \lambda \overline{T}_в(L).$$

Средняя наработка до отказа системы:

$$\overline{T}_o(L) = [1 + 3\Lambda_э \overline{T}_в(L)] / (2\Lambda_э^2 \overline{T}_в(L)) = \frac{1}{12\lambda} \frac{(1+5\rho)(1+5\rho+36\rho^2)}{24\rho^3}. \quad (2.36)$$

Вероятность безотказной работы рассчитывают по формуле (2.32).

Коэффициент готовности системы:

$$K_г(L) = 1 - (1 - (p^2(3-2p))^2 = 1 - 36\rho^4 \frac{(1 + 20\rho + 15\rho^2 + 6\rho^3 + \rho^4)^2}{(1+\rho)^{12}}, p = \frac{1}{1+\rho}. \quad (2.37)$$

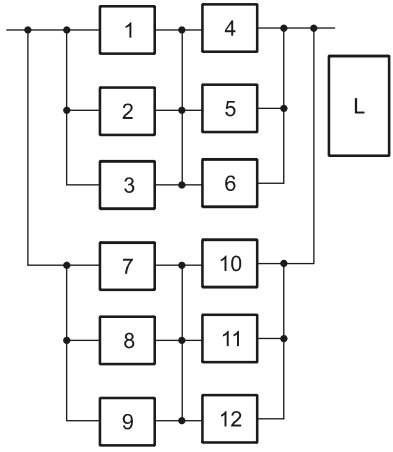


Рис. 2.12. Структурная схема системы при дублировании структур типа модели 7 (структура 3-го порядка)

2.4. Оценка показателей надежности неоднородных резервированных систем

В этом классе рассматриваются четыре группы моделей:

- неоднородные системы с общим резервированием с однородными ветвями;
- неоднородные системы с общим резервированием с неоднородными ветвями;
- неоднородные системы с общим резервированием с однородными и неоднородными ветвями;
- неоднородные системы с групповым резервированием.

2.4.1. Неоднородная дублированная система с однородными ветвями (модель М2-Н)

В системе имеется две параллельные ветви, каждая из которых состоит из элементов только одного типа (рис. 2.13, *а*). В первой ветви расположены k_1 элементов первого типа с интенсивностью отказов λ_1, во второй ветви — k_2 элементов второго типа с интенсивностью отказов λ_2.

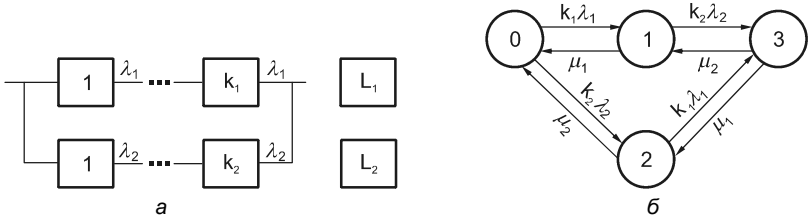


Рис. 2.13. Структурная схема (*а*) и граф состояний (*б*) неоднородной дублированной системы с однородными ветвями

В комплекте ЗИП-О имеется L_1 и L_2 запасных частей первого и второго типов соответственно. Для каждого типа запасов проводится расчет коэффициента готовности ЗИП. В частности, при периодическом пополнении:

$$K_{гЗИПi}(L_i) = \frac{1}{A_i}\sum_{I=0}^{L_i} I(A_i, L_i + 1), A_i = k_i\lambda_i T_i, i = 1,2\,. \qquad (2.38)$$

Чтобы найти среднюю наработку системы до отказа, составляем систему уравнений по графу состояний (рис. 2.13, *б*):

$$\overline{T}_o = \frac{1 + k_1\lambda_1\overline{T}_1 + k_2\lambda_2\overline{T}_2}{k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2}, \overline{T}_1 = \frac{1 + \mu_1\overline{T}_0}{\mu_1 + k_2\lambda_2}, \overline{T}_2 = \frac{1 + \mu_2\overline{T}_0}{\mu_2 + k_1\lambda_1}\,.$$

Отсюда средняя наработка до отказа системы:

$$\overline{T}_o(L_1, L_2) = \frac{(\mu_1 + k_2\lambda_2)(\mu_2 + k_1\lambda_1) + k_1\lambda_1(\mu_2 + k_1\lambda_1) + k_2\lambda_2(\mu_1 + k_2\lambda_2)}{k_1\lambda_1 k_2\lambda_2(\mu_1 + \mu_2 + k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2)}\,. \qquad (2.39)$$

Вероятность безотказной работы:

$$P(t, L_1, L_2) = \exp(-t / \overline{T}_o(L_1, L_2))\,. \qquad (2.40)$$

При расчете коэффициента готовности полагаем, что работоспособные элементы отказавшей ветви выключаются до восстановления работоспособности ветви. Тогда

$$K_{с}(L_1, L_2) = 1 - (1 - K_{с1}(L_1))(1 - K_{с2}(L_2)), K_{сi}(L_i) = \frac{1}{1 + k_i \lambda_i \overline{T}_{вi}(L_i)}, i = 1,2 . \quad (2.41)$$

2.4.2. Неоднородная дублированная система с одной однородной и одной неоднородной ветвями (модель М2-НН).

Система содержит три типа элементов (рис. 2.14, *а*). Элементы первого типа соединены последовательно и образуют первую ветвь. Элементы второго и третьего типов образуют вторую ветвь. Элементы второго типа соединены последовательно, а $4r_3$ элементов третьего типа образуют структуру модели 6 (две последовательно соединенные дублированные подсистемы).

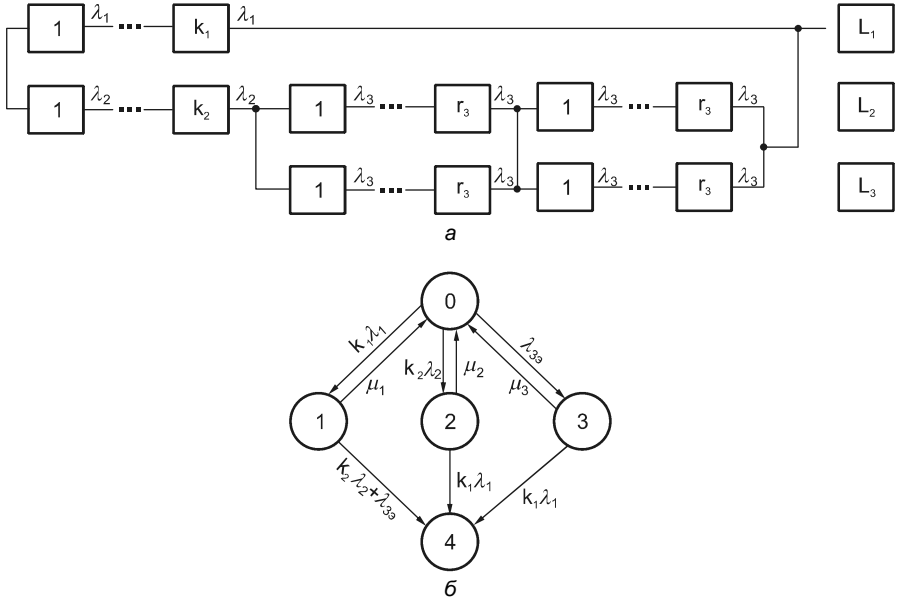


Рис. 2.14. Структурная схема (*а*) и граф состояний (*б*) неоднородной дублированной системы с одной однородной и одной неоднородной ветвями

Для оценки показателей надежности проводится замена группы элементов третьего типа эквивалентным элементом с интенсивностью отказов:

$$\lambda_{3э} = 4r_3\lambda_3 / (1 + 3\rho_3), \rho_3 = r_3\lambda_3 \overline{T}_{в3}(L_3) = r_3\lambda_3 \overline{T}_{в\infty 3}(t_{доп}) - \frac{1}{4}\ln K_{гЗИП3}(L) .$$

Интенсивности отказов первой и второй ветвей:

$$\Lambda_1 = k_1\lambda_1, \Lambda_2 = k_2\lambda_2 + \lambda_{3э} .$$

Среднюю наработку находим из системы уравнений, составленной по графу состояний (рис. 2.14, *б*):

$$\overline{T}_o = \frac{1+\Lambda_1\overline{T}_1+k_2\lambda_2\overline{T}_2+\lambda_{3э}\overline{T}_3}{k_1\lambda_1+k_2\lambda_2+\lambda_{3э}}, \overline{T}_1 = \frac{1+\mu_1\overline{T}_0}{\mu_1+\Lambda_2}, \overline{T}_2 = \frac{1+\mu_2\overline{T}_0}{\mu_2+\Lambda_1}, \overline{T}_2 = \frac{1+\mu_3\overline{T}_0}{\mu_3+\Lambda_1}. \quad (2.42)$$

Решение (2.42) имеет вид:

$$\overline{T}_o(L_1,L_2,L_3) = \frac{1+\dfrac{\Lambda_1}{\mu_1+\Lambda_2}+\dfrac{\Lambda_2}{\mu_2+\Lambda_1}}{\dfrac{\Lambda_1\Lambda_2}{\mu_1+\Lambda_2}+\dfrac{k_2\lambda_2\Lambda_1}{\mu_2+\Lambda_1}+\dfrac{\lambda_{3э}\Lambda_1}{\mu_3+\Lambda_1}}. \quad (2.43)$$

Вероятность безотказной работы:

$$P(t,L_1,L_2,L_3) = \exp(-t/\overline{T}_o(L_1,L_2,L_3)). \quad (2.44)$$

Коэффициент готовности системы:

$$K_г(L_1,L_2,L_3) = 1-(1-K_{г1}(L_1))(1-K_{г2}(L_2)K_{г3}(L_3)), \quad (2.45)$$

$$K_{гi}(L_i) = \frac{1}{1+k_i\lambda_i\overline{T}_{вi}(L_i)}, i=1,2, K_{г3}(L_3) = \frac{1+2\rho_3}{1+2\rho_3+2\rho_3^2}, \rho_3 = \rho_3 = r_3\lambda_3\overline{T}_{в3}(L_3).$$

2.4.3. Дублированная система с одинаковыми неоднородными ветвями (модель 14)

Система состоит из двух одинаковых параллельных неоднородных ветвей (рис. 2.15, *а*). Каждая ветвь является последовательным соединением элементов N типов по r_i элементов i-го типа (i = 1...N). Комплект ЗИП-О имеет L_i запасных частей i-го типа.

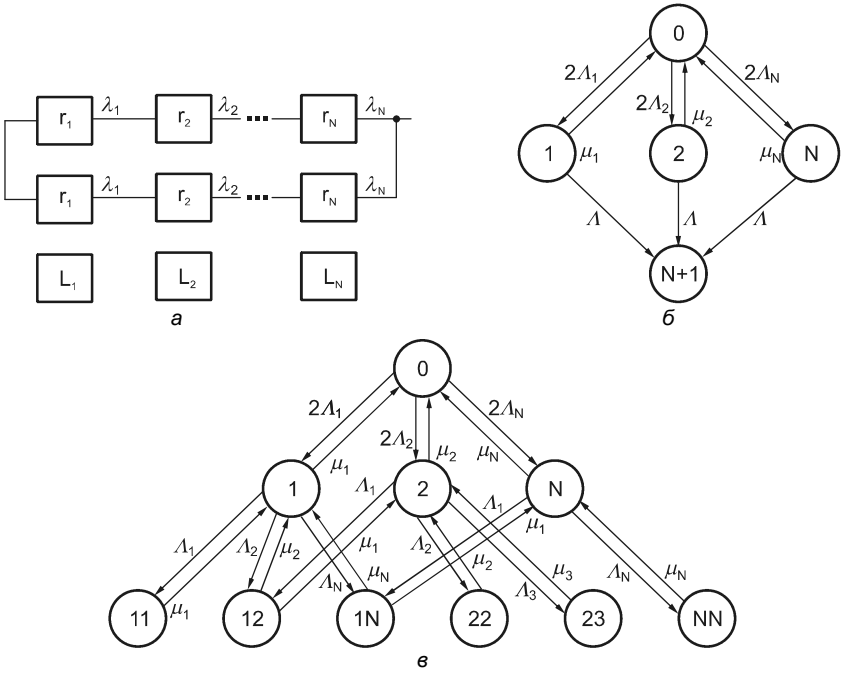


Рис. 2.15. Структурная схема (*а*) и графы состояний для расчета ВБР (*б*) и коэффициента готовности (*в*) неоднородной резервированной системы с неоднородными ветвями

По графу состояний (рис. 2.15, *б*) составляем систему уравнений для определения средней наработки до отказа:

$$\overline{T}_o = \frac{1}{2\Lambda} + \sum_{i=1}^{N} \frac{\Lambda_i}{\Lambda} \overline{T}_i, \overline{T}_i = \frac{1 + \mu_i \overline{T}_0}{\mu_i + \Lambda}, i = 1...N, \Lambda_i = r_i \lambda_i, \Lambda = \sum_{i=1}^{N} \Lambda_i \ .$$

Отсюда

$$\overline{T}_o(L) = \frac{1}{\Lambda} + \frac{1}{2\Lambda} / \sum_{i=1}^{N} \frac{\Lambda_i}{\mu_i + \Lambda}, \mu_i = 1 / \overline{T}_{вi}(L_i) \ . \qquad (2.46)$$

Вероятность безотказной работы:

$$P(t, L) = \exp(-t / \overline{T}_o(L)) \ .$$

При расчете коэффициента готовности рассмотрим два варианта. Сначала предполагаем, что все работоспособные элементы того же типа, что привел к отказу ветви, выключаются до восстановления работоспособности ветви, а другие работоспособные элементы не выключаются и могут потреблять ЗЧ. Тогда группы по r_i элементов можно рассматривать как структурные элементы, функционирующие независимо друг от друга, что позволяет провести расчет коэффициента готовности по схеме Бернулли независимых событий:

$$K_г(L) = 1 - \left(1 - \prod_{i=1}^{N} \frac{\mu_i}{\mu_i + \Lambda_i}\right)^2 . \qquad (2.47)$$

Пусть теперь все работоспособные элементы в отказавших ветвях выключаются, в том числе и того типа, который привел к отказу ветви. Тогда составляем систему уравнений по графу состояний (рис. 2.15, *в*):

$$2\Lambda p_0 = \sum_{i=1}^{N} \mu_i p_i, (\mu_i + \Lambda) p_i = 2\Lambda_i p_0 + \sum_{j=1}^{N} \mu_j p_{ij}, \mu_i p_{ii} = \Lambda_i p_i, i = 1...N \ ,$$

$$(\mu_i + \mu_j) p_{ij} = \Lambda_j p_i + \Lambda_i p_j, j \neq i; i, j = 1...N \ .$$

В частности, при $N = 2$ отсюда имеем:

$$K_г(L_1, L_2) = 1 - \frac{\rho_1^2 + \rho_1\rho_2 + \rho_1^2}{0,5 + \rho_1 + \rho_2 + \rho_1^2 + \rho_1\rho_2 + \rho_1^2}, \rho_i = r_i \lambda_i \overline{T}_{вi}(L_i), i = 1,2 \ . \qquad (2.48)$$

При $N = 3$ отсюда имеем:

$$K_г(L_1, L_2, L_3) = (\Delta + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3) / \left(\Delta + \Delta_1 \left(1 + \rho_1 + \frac{\Lambda_2}{\mu_1 + \mu_2} + \frac{\Lambda_3}{\mu_1 + \mu_3} \right) + \right.$$

$$\left. + \Delta_2 \left(1 + \rho_2 + \frac{\Lambda_1}{\mu_1 + \mu_2} + \frac{\Lambda_3}{\mu_2 + \mu_3} \right) + \Delta_3 \left(1 + \rho_3 + \frac{\Lambda_1}{\mu_1 + \mu_3} + \frac{\Lambda_2}{\mu_2 + \mu_3} \right) \right), \qquad (2.49)$$

где Δ — определитель системы уравнений:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\Lambda_2}{\mu_1 + \mu_2} + \frac{\Lambda_3}{\mu_1 + \mu_3} & -\frac{\rho_1 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} & -\frac{\rho_1 \mu_3}{\mu_1 + \mu_3} \\ -\frac{\rho_2 \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} & 1 + \frac{\Lambda_1}{\mu_1 + \mu_2} + \frac{\Lambda_3}{\mu_2 + \mu_3} & -\frac{\rho_2 \mu_3}{\mu_2 + \mu_3} \\ -\frac{\rho_3 \mu_1}{\mu_1 + \mu_3} & -\frac{\rho_3 \mu_2}{\mu_2 + \mu_3} & 1 + \frac{\Lambda_1}{\mu_1 + \mu_3} + \frac{\Lambda_2}{\mu_2 + \mu_3} \end{vmatrix} ,$$

а определители Δ_i получаются после установки в соответствующий столбец Δ вектора-столбца свободных членов $(2\rho_1, 2\rho_2, 2\rho_3)^T$.

2.4.4. Дублированная система с различными неоднородными ветвями (модель 15)

Система имеет три типа элементов и две параллельные ветви (рис. 2.16, *а*). В первой ветви последовательно r_1 элементов первого типа и k_2 элементов второго типа. Во второй ветви последовательно r_1 элементов первого типа и k_3 элементов третьего типа. Комплект ЗИП-О имеет L_i запасных частей *i*-го типа.

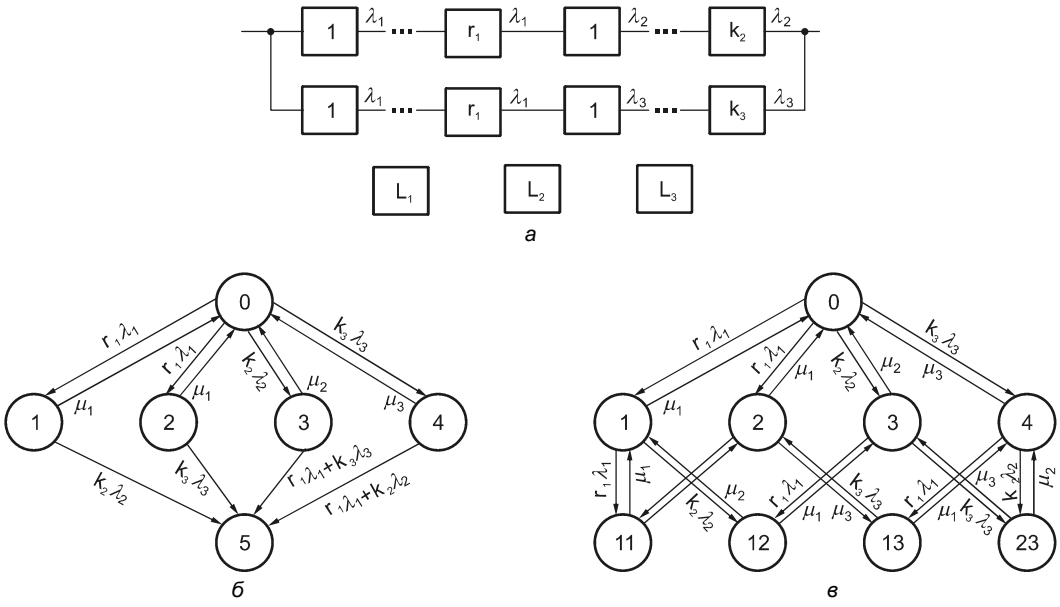


Рис. 2.16. Структурная схема (*а*) и графы состояний для расчета ВБР (*б*) и коэффициента готовности (*в*) неоднородной дублированной системы с неоднородными ветвями

Система уравнений для определения средней наработки до отказа имеет вид (рис. 2.16, *б*):

$$\overline{T}_o = \frac{1 + r_1\lambda_1(\overline{T}_1 + \overline{T}_2) + k_2\lambda_2\overline{T}_3 + k_3\lambda_3\overline{T}_4}{k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + k_3\lambda_3}, \overline{T}_1 = \frac{1 + \mu_1\overline{T}_0}{\mu_1 + k_2\lambda_2}, \overline{T}_2 = \frac{1 + \mu_1\overline{T}_0}{\mu_1 + k_3\lambda_3}$$

$$\overline{T}_3 = \frac{1 + \mu_2\overline{T}_0}{\mu_2 + r_1\lambda_1 + k_3\lambda_3}, \overline{T}_4 = \frac{1 + \mu_3\overline{T}_0}{\mu_3 + r_1\lambda_1 + k_2\lambda_2}.$$

Отсюда

$$\overline{T}_o(L_1, L_2, L_3) = \frac{1 + \dfrac{r_1\lambda_1}{\mu_1 + k_2\lambda_2} + \dfrac{r_1\lambda_1}{\mu_1 + k_3\lambda_3} + \dfrac{k_2\lambda_2}{\mu_2 + r_1\lambda_1 + k_3\lambda_3} + \dfrac{k_3\lambda_3}{\mu_3 + r_1\lambda_1 + k_2\lambda_2}}{\dfrac{r_1\lambda_1 k_2\lambda_2}{\mu_1 + k_2\lambda_2} + \dfrac{r_1\lambda_1 k_3\lambda_3}{\mu_1 + k_3\lambda_3} + \dfrac{k_2\lambda_2(r_1\lambda_1 + k_3\lambda_3)}{\mu_2 + r_1\lambda_1 + k_3\lambda_3} + \dfrac{k_3\lambda_3(r_1\lambda_1 + k_2\lambda_2)}{\mu_3 + r_1\lambda_1 + k_2\lambda_2}}, \qquad (2.50)$$

Вероятность безотказной работы находим по формуле (2.44).

При расчете коэффициента готовности рассмотрим два варианта. Сначала предполагаем, что все работоспособные элементы того же типа, что привел к отказу ветви, выключаются до восстановления работоспособности ветви, а другие работоспособные элементы не выключаются и могут потреблять ЗЧ. Тогда группы по r_i элементов можно рассматривать как структурные элементы, функционирующие независимо друг от друга, что позволяет провести расчет коэффициента готовности по схеме Бернулли независимых событий:

$$K_г(L_1,L_2,L_3)=1-(1-p_1p_2)(1-p_1p_3),\ p_i=\frac{1}{1+\rho_i}. \tag{2.51}$$

$$\rho_1=r_1\lambda_1\overline{T}_{в1}(L_1),\rho_i=k_i\lambda_i\overline{T}_{вi}(L_i),i=2,3.$$

Если на самом деле работоспособные элементы выключаются, то (2.51) можно рассматривать как нижнюю оценку коэффициента готовности.

Пусть теперь все работоспособные элементы в отказавших ветвях выключаются, в том числе и того типа, который привел к отказу ветви. Тогда составляем систему уравнений по графу состояний (рис. 2.16, *в*):

$$(k_1\lambda_1+k_2\lambda_2+k_3\lambda_3)p_0=\mu_1(p_1+p_2)+\mu_2p_3+\mu_3p_4, \tag{2.52}$$

$$(\mu_1+r_1\lambda_1+k_2\lambda_2)p_1=r_1\lambda_1p_0+\mu_1p_{11}+\mu_2p_{12},(\mu_1+r_1\lambda_1+k_3\lambda_3)p_2=r_1\lambda_1p_0+\mu_1p_{11}+\mu_3p_{13},$$

$$(\mu_2+r_1\lambda_1+k_3\lambda_3)p_3=k_2\lambda_2p_0+\mu_1p_{11}+\mu_3p_{23},(\mu_3+r_1\lambda_1+k_2\lambda_2)p_4=k_3\lambda_3p_0+\mu_1p_{13}+\mu_2p_{23},$$

$$2\mu_1p_{11}=r_1\lambda_1(p_1+p_2),(\mu_1+\mu_2)p_{12}=k_2\lambda_2p_1+r_1\lambda_1p_3,(\mu_1+\mu_3)p_{13}=k_3\lambda_3p_2+r_1\lambda_1p_4,$$

$$(\mu_2+\mu_3)p_{23}=k_3\lambda_3p_3+k_2\lambda_2p_4.$$

Исключая вероятности p_{ij}, можно свести (2.52) к системе четырех уравнений:

$$\left(\mu_1+\frac{1}{2}r_1\lambda_1+\frac{k_2\lambda_2\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\right)\theta_1-\frac{1}{2}r_1\lambda_1\theta_2-\frac{r_1\lambda_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\theta_3=r_1\lambda_1, \tag{2.53}$$

$$-\frac{1}{2}r_1\lambda_1\theta_1+\left(\mu_1+\frac{1}{2}r_1\lambda_1+\frac{k_3\lambda_3\mu_1}{\mu_1+\mu_3}\right)\theta_2-\frac{r_1\lambda_1\mu_3}{\mu_1+\mu_5}\theta_4=r_1\lambda_1,$$

$$-\frac{k_2\lambda_2\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\theta_1+\left(\mu_2+k_3\lambda_3+\frac{r_1\lambda_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\right)\theta_3=k_2\lambda_2,$$

$$-\frac{k_3\lambda_3\mu_1}{\mu_1+\mu_3}\theta_2+\left(\mu_3+k_2\lambda_2+\frac{r_1\lambda_1\mu_3}{\mu_1+\mu_3}\right)\theta_4=k_3\lambda_3,\theta_i=p_i/p_0.$$

Из (2.52) и (2.53) находим:

$$\theta_1=\frac{r_1\lambda_1[(\mu_1+\mu_2)(\mu_2+k_3\lambda_3)+\mu_2(r_1\lambda_1+k_2\lambda_2)]}{(\mu_1+\frac{1}{2}r_1\lambda_1)[(\mu_1+\mu_2)(\mu_2+k_3\lambda_3)+\mu_2r_1\lambda_1]+k_2\lambda_2\mu_1(\mu_2+k_3\lambda_3)},$$

$$\theta_2=\frac{r_1\lambda_1(1+\theta_1/2)[(\mu_1+\mu_3)(\mu_3+k_2\lambda_2)+\mu_3r_1\lambda_1]+k_3\lambda_3\mu_3}{(\mu_1+\frac{1}{2}r_1\lambda_1)[(\mu_1+\mu_3)(\mu_3+k_2\lambda_2)+\mu_3r_1\lambda_1]+k_3\lambda_3\mu_1(\mu_3+k_2\lambda_2)},$$

$$\theta_3=\frac{k_2\lambda_2[(1+\theta_1)\mu_1+\mu_2]}{(\mu_1+\mu_2)(\mu_2+k_3\lambda_3)+\mu_2r_1\lambda_1},\theta_4=\frac{k_3\lambda_3[(1+\theta_2)\mu_1+\mu_3]}{(\mu_1+\mu_3)(\mu_3+k_2\lambda_2)+\mu_3r_1\lambda_1},$$

$$\theta_{11} = \frac{1}{2}\rho_1(\theta_1 + \theta_2), \theta_{12} = \frac{k_2\lambda_2\theta_1 + r_1\lambda_1\theta_3}{\mu_1 + \mu_2}, \theta_{13} = \frac{k_3\lambda_3\theta_2 + r_1\lambda_1\theta_4}{\mu_1 + \mu_3},$$

$$\theta_{23} = \frac{k_3\lambda_3\theta_2 + r_1\lambda_1\theta_4}{\mu_1 + \mu_3}, \rho_1 = r_1\lambda_1\overline{T}_{в1}(L_1), \mu_i = 1/\overline{T}_{вi}(L_i).$$

Коэффициент готовности системы:

$$K_c(L_1, L_2, L_3) = 1 - \frac{\theta_{11} + \theta_{12} + \theta_{13} + \theta_{23}}{1 + \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_{11} + \theta_{12} + \theta_{13} + \theta_{23}}. \qquad (2.54)$$

2.4.5. Система с групповым дублированием и однородными ветвями (модель 16)

Система состоит из двух одинаковых подсистем, соединенных последовательно (рис. 2.17, *а*). В каждой подсистеме есть две параллельные ветви. В первой ветви последовательно соединены r_1 элементов первого типа, во второй ветви — r_2 элементов второго типа. В комплекте ЗИП-О имеется L_1 и L_2 запасных частей первого и второго типов соответственно.

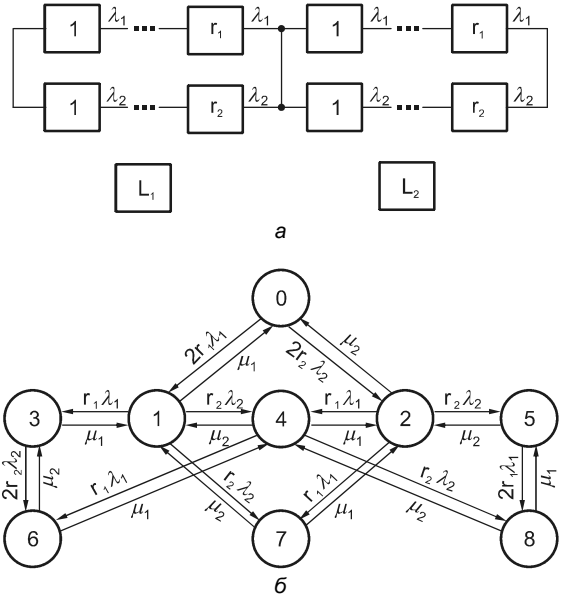


Рис. 2.17. Структурная схема (*а*) и граф состояний (*б*) неоднородной системы с групповым дублированием и однородными ветвями

Отличие данной системы от той, которая была рассмотрена в *разд. 2.4.1*, состоит лишь в том, что там была применена схема общего дублирования, а здесь схема группового дублирования, создающая дополнительные возможности для сохранения работоспособности.

Для определения средней наработки до отказа по графу состояний (рис. 2.17, *б*) составляем систему уравнений:

$$\overline{T}_o = \frac{0,5 + \Lambda_1\overline{T}_1 + \Lambda_2\overline{T}_2}{\Lambda_1 + \Lambda_2}, \overline{T}_1 = \frac{1 + \mu_1\overline{T}_0 + \Lambda_1\overline{T}_3 + \Lambda_2\overline{T}_4}{\mu_1 + \Lambda_1 + 2\Lambda_2}, \Lambda_i = r_i\lambda_i, \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2,$$

$$\overline{T}_2 = \frac{1+\mu_2\overline{T}_0 + \Lambda_1\overline{T}_4 + \Lambda_2\overline{T}_5}{\mu_2+2\Lambda_1+\Lambda_2}, \overline{T}_3 = \frac{1+\mu_1\overline{T}_1}{\mu_1+2\Lambda_2}, \overline{T}_4 = \frac{1+\mu_2\overline{T}_1+\mu_1\overline{T}_2}{\mu_1+\mu_2+\Lambda_1+\Lambda_2}, \overline{T}_5 = \frac{1+\mu_2\overline{T}_2}{\mu_2+2\Lambda_1}.$$

Исключая здесь $\overline{T}_3$, $\overline{T}_4$ и $\overline{T}_5$, получим систему трех уравнений:

$$\overline{T}_o - \frac{\Lambda_1}{\Lambda}\overline{T}_1 - \frac{\Lambda_2}{\Lambda}\overline{T}_2 = \frac{1}{2\Lambda}, \mu = \mu_1+\mu_2, \tag{2.55}$$

$$-\mu_1\overline{T}_0 + \left(\mu_1 + \frac{2\Lambda_1\Lambda_2}{\mu_1+2\Lambda_2} + \frac{(\mu_1+\mu+2\Lambda)\Lambda_2}{\mu+\Lambda}\right)\overline{T}_1 - \frac{\Lambda_2\mu_1}{\mu+\Lambda} = 1 + \frac{\Lambda_1}{\mu_1+2\Lambda_2} + \frac{\Lambda_2}{\mu+\Lambda},$$

$$-\mu_2\overline{T}_0 - \frac{\Lambda_1\mu_2}{\mu+\Lambda}\overline{T}_1 + \left(\mu_1 + \frac{2\Lambda_1\Lambda_2}{\mu_2+2\Lambda_1} + \frac{(\mu_2+\mu+2\Lambda)\Lambda_1}{\mu+\Lambda}\right)\overline{T}_2 = 1 + \frac{\Lambda_1}{\mu+\Lambda} + \frac{\Lambda_2}{\mu_2+2\Lambda_1}.$$

Решение (2.55) получают численно, как отношение определителей:

$$\overline{T}_0(L_1, L_2) = \Delta_0 / \Delta. \tag{2.56}$$

Вероятность безотказной работы находим по формуле (2.40).

Система уравнений для стационарных вероятностей состояний имеет вид:

$$2\Lambda p_0 = \mu_1 p_1 + \mu_2 p_2, (\mu_1+\Lambda_1+2\Lambda_2)p_1 = 2\Lambda_1 p_0 + \mu_1 p_3 + \mu_2 p_4,$$
$$(\mu_2+\Lambda_2+2\Lambda_1)p_2 = 2\Lambda_2 p_0 + \mu_1 p_4 + \mu_2 p_5 + \mu_1 p_7, (\mu_1+2\Lambda_2)p_3 = \Lambda_1 p_1,$$
$$(\mu+\Lambda)p_4 = \Lambda_2 p_1 + \Lambda_1 p_2 + \mu_1 p_6 + \mu_2 p_8, (\mu_2+2\Lambda_1)p_5 = \Lambda_2 p_2,$$
$$\mu p_6 = 2\Lambda_2 p_3 + \Lambda_1 p_4, \mu p_7 = \Lambda_2 p_1 + \Lambda_1 p_2, \mu p_8 = \Lambda_2 p_4 + 2\Lambda_1 p_5. \tag{2.57}$$

Исключаем из системы p_3, p_5, p_6, p_7, p_8. Остается три уравнения относительно θ_1, θ_2 и θ_4:

$$\mu_1\theta_1 + \mu_2\theta_2 = 2\Lambda; \left(\mu_1 + \Lambda_2 + \frac{2\Lambda_1\Lambda_2}{\mu_1+2\Lambda_2} + \frac{\Lambda_2\mu_1}{\mu}\right)\theta_1 - \frac{\Lambda_1\mu_2}{\mu}\theta_2 - \mu_2\theta_4 = 2\Lambda_1,$$

$$-\frac{\Lambda_2\mu_1}{\mu}\theta_1 + \left(\mu_2 + \Lambda_1 + \frac{2\Lambda_1\Lambda_2}{\mu_2+2\Lambda_1} + \frac{\Lambda_1\mu_2}{\mu}\right)\theta_1 - \frac{2\Lambda_1\Lambda_2}{\mu_2+2\Lambda_1} - \mu_1\theta_4 = 2\Lambda_2, \theta_i = p_i / p_0.$$

Отсюда

$$\theta_1 = \frac{2\Lambda - A}{\mu_1(1+B)}, A = \frac{2\Lambda_2\mu_2 - 2\Lambda_1\mu_1}{\mu_2+2\Lambda_1+\frac{2\Lambda_1\Lambda_2}{\mu_2+2\Lambda_1}}, B = \frac{\mu_1+2\Lambda_2+\frac{2\Lambda_1\Lambda_2}{\mu_1+2\Lambda_2}}{\mu_2+2\Lambda_1+\frac{2\Lambda_1\Lambda_2}{\mu_2+2\Lambda_1}},$$

$$\theta_2 = \frac{1}{\mu_2}\frac{2\Lambda B + A}{1+B}, \theta_3 = \frac{\Lambda_1}{\mu_1+2\Lambda_2}\theta_1, \theta_5 = \frac{\Lambda_2}{\mu_2+2\Lambda_1}\theta_2, \theta_6 = \frac{2\Lambda_2}{\mu}\theta_3 + \frac{\Lambda_1}{\mu}\theta_4,$$

$$\theta_4 = \frac{1}{\mu^2+\Lambda_1\mu_2+\Lambda_2\mu_1}\left(\Lambda_2\left(\mu + \frac{2\Lambda_1\mu_1}{\mu_1+2\Lambda_2}\right)\theta_1 + \Lambda_1\left(\mu + \frac{2\Lambda_2\mu_2}{\mu_2+2\Lambda_1}\right)\theta_2\right),$$

$$\theta_7 = \frac{\Lambda_2}{\mu}\theta_1 + \frac{\Lambda_1}{\mu}\theta_2, \theta_8 = \frac{\Lambda_2}{\mu}\theta_4 + \frac{2\Lambda_1}{\mu}\theta_5. \tag{2.58}$$

Коэффициент готовности системы:

$$K_г(L_1, L_2) = 1 - \frac{\theta_6+\theta_7+\theta_8}{1+\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5+\theta_6+\theta_7+\theta_8}. \tag{2.59}$$

2.5. Заключение

В *приложении 2* приведены примеры по расчету показателей надежности изделий по приближенной методике и показателей достаточности комплектов ЗИП и выполнен количественный анализ свойств ПД. По результатам анализа можно сделать выводы:

- допустимое время замены оказывает заметное влияние на эффективность использования ЗИП. Для учета этого влияния надо использовать методы теории надежности систем с временной избыточностью. Для оценки степени влияния времени замены на эффективность ЗИП можно использовать отношение

$$\delta(t_{доп}) = \frac{P(t, t_{доп}, L) - P(t, t_{доп}, 0)}{P(t, \infty, L) - P(t, \infty, 0)}.$$

  Расчеты показывают, что если допустимое время замены сравнимо со средним фактическим временем замены, то эффективность оказывается на уровне 0,4–0,5. Чтобы допустимое время замены практически не влияло на эффективность ($\delta \geq 0{,}995$), надо чтобы оно было, по крайней мере, в 6 раз больше среднего времени замены. Хотя не все рассмотренные в *главе 2* модели учитывают допустимое резервное время, не трудно учесть этот фактор и в других моделях, используя методы теории временной избыточности [67, 71, 77];

- сравнение вероятности безотказной работы системы и коэффициента готовности ЗИП показывает, что ВБР системы может быть как больше, так и меньше $K_{гЗИП}$. Это значит, что по показателю достаточности $K_{гЗИП}$ практически нельзя судить о возможном значении ВБР. Это можно объяснить существенной ролью встроенного (внутреннего) резервирования: ВБР зависит от принятой схемы резервирования, а $K_{гЗИП}$ определяется только суммарной интенсивностью потока замен;

- коэффициент готовности нерезервированной системы совпадает с коэффициентом готовности ЗИП, если проводить расчеты по формуле (1.38). При расчетах по приближенной формуле (1.45) значения этих показателей не совпадают. Однако коэффициент готовности системы близок и немного больше, чем $K_{гЗИП}$. Для резервированных систем коэффициент готовности системы всегда больше коэффициента готовности ЗИП при любых значениях запасов.

2.6. Вопросы для самоконтроля

- Какие показатели достаточности могут использоваться при расчете различных показателей надежности и при каких условиях?
- Какие факторы могут приводить к снижению эффективности ЗИП?
- Какая идея используется для приближенного расчета показателей надежности структурно резервированных систем при наличии ограниченного ЗИП?
- Как найти показатели безотказности однородных структурно резервированных восстанавливаемых систем при неограниченном ЗИП?
- Как найти показатели готовности однородных структурно резервированных восстанавливаемых систем при неограниченном ЗИП?
- Как найти показатели безотказности неоднородных структурно резервированных восстанавливаемых систем при неограниченном ЗИП?
- Как найти показатели готовности неоднородных структурно резервированных восстанавливаемых систем при неограниченном ЗИП?

ГЛАВА 3

Проектирование и оптимизация комплектов ЗИП по критерию достаточности

3.1. Общие положения

При проектировании комплектов ЗИП следует различать задачи анализа и синтеза. При решении задачи анализа определяют значения показателей достаточности и суммарных затрат (СЗ) на ЗЧ по известному составу комплекта ЗИП и заданному (принятому) способу пополнения запасов. В работе [4] задача анализа названа оценкой запасов в комплекте ЗИП.

Оценка запасов состоит из оценок запасов каждого типа в отдельности. Оценку запасов проводят в следующих случаях:

- при проектировании ЗИП после формирования комплекта (системы) ЗИП, в том числе после процедуры оптимизации, с целью определения фактических значений ПД и СЗ на ЗЧ и исключения возможных ошибок расчета состава комплекта (системы) ЗИП (контрольная проверка);
- при приемке опытных образцов аппаратуры для проверки соответствия разработанных комплектов заданным в техническом задании требованиям;
- при необходимости перерасчета разработанных ранее комплектов ЗИП (при изменении условий эксплуатации аппаратуры, интенсивности замен сменных частей, способов пополнения запасов или их параметров).

Задача синтеза заключается в определении начального уровня запасов, удовлетворяющих определенным требованиям к показателям достаточности, к показателям суммарных затрат или надежности при принятом способе пополнения запасов. В нормативных документах [4,10] задача синтеза названа расчетом запасов в комплекте (системе) ЗИП. Расчет запасов в комплекте (системе) ЗИП обычно сводится к расчету запасов каждого типа в отдельности.

В зависимости от этапа проектирования расчет запасов проводят без оптимизации или с оптимизацией. Без оптимизации расчет проводят на стадии эскизного проектирования, когда не известны или не полностью известны данные, необходимые для оптимизации. Расчет с оптимизацией проводят на стадии технического проектирования, когда необходимые данные известны.

При оптимизации с использованием показателей достаточности возможны постановки прямой и обратной задачи. При решении прямой задачи минимизируются суммарные затраты при ограничениях на ПД. При решении обратной задачи находят максимум показателя достаточности при ограничениях на суммарные затраты.

Для формулировки прямой задачи необходимо назначить или вычислить нормативное значение ПД ($ПД^0$). Его назначают, если еще отсутствует модель надежности или не установ-

лена связь между нормативным значением показателя надежности ($ПН^0$) и нормативным значением ПД. В остальных случаях нормативное значение $ПД^0$ вычисляют по заданному нормативному значению показателя надежности $ПН^0$ с помощью моделей связи ПН и ПД. Рассмотрим различные варианты.

3.1.1. Нормируемый показатель надежности — вероятность безотказной работы изделия. Нормируемый показатель достаточности — вероятность достаточности

Требования к надежности заданы в виде неравенства:

$$P(t, L) \geq P^0(t). \tag{3.1}$$

Вероятность достаточности применяют только при периодическом пополнении запасов при одинаковых периодах пополнения $T_i = T$. По значению $P^0(t)$ надо найти нормативное значение $P_o^0(T)$. При $t \leq T$ связь между нормативными значениями устанавливается соотношением:

$$P^0(T) = P_o^0(T) P(T, \infty), \tag{3.2}$$

где $P(T,\infty)$ – ВБР при неограниченном ЗИП. Требования к вероятности достаточности определяются неравенством:

$$P_o(T) \geq P_o^0(T) = P^0(T) / P(T, \infty). \tag{3.3}$$

Если $t = kT$, $k = 2, 3, \ldots$, то возникает проблема, т. к. ПН устанавливается для времени функционирования t, а ПД — для периода T, т. е. требуется перерасчет. Если распределение наработки изделия $1 - P(t,L)$ экспоненциальное или близкое к нему, то перерасчет проводится по формуле:

$$P^0(T) = (P^0(t))^{1/k}. \tag{3.4}$$

Тогда вместо (3.3) можно использовать неравенство:

$$P_o(T) \geq P_o^0(T) = (P^0(t))^{1/k} / P(T, \infty). \tag{3.5}$$

Если распределение не экспоненциальное, то для всех $\tau = iT < t$ выполняется:

$$P(\tau, L) > (P(t, L))^{i/k}, i = 1, 2, \ldots \tag{3.6}$$

3.1.2. Нормируемый показатель надежности — вероятность безотказной работы изделия. Нормируемый показатель достаточности — коэффициент готовности ЗИП. Изделие содержит только нерезервированные модули

При стратегиях ПП и ПЭД нормативное значение $K_{гЗИП}^0(T)$ находят из соотношения:

$$2K_{гЗИП}^0(T) - 1 = (P^0(t))^{1/k} / P(T, \infty). \tag{3.7}$$

Обоснование этому следующее. Из соотношения (1.5) путем дифференцирования находим:

$$P_o(T) = K_{гЗИП}(T) + TK'_{гЗИП}(T). \tag{3.8}$$

Для производной используем оценку:

$$K'_{гЗИП}(T) \approx -\frac{1}{T}(1 - K_{гЗИП}(T)) .$$

Подставляя в (3.8) и учитывая (3.3) и (3.5), получим (3.7).

Для стратегий НП и ПУ пересчет проводится по формуле:

$$K^0_{гЗИП} = P^0(t) / P(T, \infty) . \quad (3.9)$$

3.1.3. Нормируемый показатель надежности — вероятность безотказной работы изделия. Нормируемый показатель достаточности — коэффициент готовности ЗИП. Изделие содержит только резервированные модули

При заданной схеме резервирования полагают для всех модулей одинаковое среднее значение времени восстановления:

$$\overline{T}_в = \overline{T}_{в\infty} + \Delta t_{ЗИП} . \quad (3.10)$$

По модели надежности находят формулу для расчета ВБР изделия и решают уравнение:

$$P(t, \infty, \overline{T}_в) = P^0(t) . \quad (3.11)$$

Отсюда находят $\overline{T}^0_в$, а затем нормативное значение $\Delta t^0_{ЗИП}$ и нормативное значение:

$$K^0_{гЗИП} = \exp(-\lambda_c \Delta t^0_{ЗИП}) . \quad (3.12)$$

В суммарную интенсивность отказов изделия λ_c включают интенсивности отказов всех основных и всех резервных модулей.

3.1.4. Нормируемый показатель надежности — вероятность безотказной работы изделия. Нормируемый показатель достаточности — коэффициент готовности ЗИП. Изделие содержит нерезервированные и резервированные модули

Нормативное значение ВБР $P^0(t)$ распределяется определенным образом между нерезервированной и резервированной частями:.

$$P^0(t) = P^0_0(t) P^0_1(t) . \quad (3.13)$$

При стратегиях ПП и ПЭД для нерезервированной части проводят сначала перерасчет $P^0_0(t)$ в $P^0_0(T)$. Затем по формуле (3.7) находят $K^0_{гЗИП,0}$. Для резервированной части используют (3.11) и (3.12) и находят $K^0_{гЗИП,1}$. Для всего комплекта нормативное значение:

$$K^0_{гЗИП} = K^0_{гЗИП,0} K^0_{гЗИП,1} . \quad (3.14)$$

Для стратегий НП и ПУ при расчете $K^0_{гЗИП,0}$ используют формулу (3.9), а затем (3.11), (3.12) и (3.14).

3.1.5. Нормируемый показатель надежности — средняя наработка до отказа изделия. Нормируемый показатель достаточности — коэффициент готовности ЗИП

Используя экспоненциальную модель по нормативному значению средней наработки $\overline{T}_o^0$, находят нормативное значение ВБР:

$$P^0(T) = \exp(-T / \overline{T}_o^0). \tag{3.15}$$

Далее используют формулы *разд. 3.1.2–3.1.4*.

3.1.6. Нормируемый показатель надежности — коэффициент готовности изделия. Нормируемый показатель достаточности — коэффициент готовности ЗИП

Требование к ПН выражено в виде неравенства:

$$K_г(L) \geq K_г^0. \tag{3.16}$$

Нормативное значение ПД находят из условия:

$$K_г^0 = K_{гЗИП}^0 K_г(\infty). \tag{3.17}$$

Требование к ПД выражается в виде неравенства:

$$K_{гЗИП}(L) \geq K_г^0 / K_г(\infty). \tag{3.18}$$

Здесь $K_г(\infty)$ не зависит от стратегии пополнения, а $K_{гЗИП}(L)$ определяется по формулам *главы 2*.

3.1.7. Нормируемый показатель надежности — коэффициент готовности изделия. Нормируемый показатель достаточности — среднее время задержки в выполнении заявки на ЗЧ

Требование к ПД выражается в виде неравенства:

$$\Delta t_{ЗИП} \leq \Delta t_{ЗИП}^0. \tag{3.19}$$

По нормативному значению средней наработки находят $K_{гЗИП}^0$, используя формулу (3.12). Далее следует использовать (3.17) и (3.18). Если выполняется (3.18), то выполняется и (3.19).

Однако следует иметь в виду, что многие приведенные в разделе формулы являются приближенными. Это значит, что нормативные значения ПД определяются с погрешностью. Поэтому выполнение условий (3.1) и (3.16) не гарантируется, т. к. не известен знак погрешности. Проверка выполнения условий возможна только после вычисления ПН по формулам (2.6)–(2.8). Однако эти формулы также приближенные с неизвестным знаком погрешности. Поэтому и эта проверка не гарантирует выполнение требований к надежности. Гарантировать выполнение требований может только использование точных формул расчета ПН с прямым включением ЗИП в модель надежности. Об этом будет идти речь в *главах 5–8*.

3.2. Оценка и оптимизация комплекта одиночного ЗИП (ЗИП-О) по показателям достаточности

При наличии многих типов запасов, предусмотренных в комплекте ЗИП, существует много вариантов выполнения требований к показателю достаточности или показателю надежности. Выбрать один из них можно путем решения задачи оптимизации по заданному критерию (целевой функции). Наиболее естественно использовать в качестве критерия суммарные затраты на создание начальных запасов в комплекте ЗИП. Тогда прямая задача оптимизации формулируется следующим образом.

Необходимо обеспечить минимум критериальной функции

$$C^0_{\Sigma ЗИП} = \sum_{i=1}^{N} C_i L_i^0 = \min_{(L_1,...,L_N)} \sum_{i=1}^{N} C_i L_i \qquad (3.20)$$

при ограничении $ПД(L_1,...,L_N) \geq ПД^0$, (3.21)

где $(C_1, ..., C_N)$ — вектор стоимостей запасных частей, $(L_1, ..., L_N)$ — оптимальный комплект ЗИП, $ПД^0$ — нормативное значение показателя достаточности.

В обратной задаче оптимизации максимизируется ПД, а суммарные затраты играют роль ограничения, задающего область поиска оптимального комплекта. Поэтому задача формулируется так.

Необходимо обеспечить максимум критериальной функции

$$ПД^0 = ПД(L_1^0,...,L_N^0) = \max_{(L_1,...,L_N)} ПД(L_1,...,L_N) \qquad (3.22)$$

при ограничении $\sum_{i=1}^{N} C_i L_i \leq C^0_{\Sigma ЗИП}$. (3.23)

Область оптимизации может быть расширена за счет вектора $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_N)$ индикаторов способа пополнения запасов. При этом часть типов запасов может быть исключена из вектора α. Тогда соответствующему номеру присваивается значение $\alpha_i = 0$. Рассмотрим далее несколько вариантов алгоритмов и процедур оптимизации.

3.2.1. Оценка и оптимизация комплекта ЗИП-О по показателям достаточности при заданной стратегии пополнения запасов

Алгоритм состоит из четырех укрупненных составных частей:

- расчет базового комплекта;
- оптимизация комплекта ЗИП;
- оценка запасов в комплекте ЗИП-О;
- расчет запасов в комплекте ЗИП.

Расчет базового комплекта

Для расчета базового комплекта выполняют следующие действия.

1. Проводят подготовку исходных данных в форме таблицы формуляров (табл. 3.1), в которой заполняют первые семь граф.

Таблица 3.1. Таблица формуляров

i	n_i	λ_i	C_i	α_i	T_i	β_i	L_i	A_i
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	n_1	λ_1	C_1	α_1	T_1	β_1	L_1	A_1
...	...	...	...	...	...	...	...	...
N	n_N	λ_N	C_N	α_N	T_N	β_N	L_N	A_N

В графах указывают:

- порядковый номер типа запасов i;
- количество модулей i-го типа в основной аппаратуре n_i;
- интенсивность отказов одного модуля λ_i;
- стоимость одной запасной части i-го типа C_i;
- способ пополнения запасов α_i (α_i = 1, 2, 3 или 4);
- первый основной параметр T_i способа пополнения (период пополнения или среднее время доставки ЗЧ);
- второй параметр способа пополнения β_i (среднее время экстренной доставки при способе пополнения ПЭД, когда α = 2, или уровень пополнения запасов при способе ПУ, α = 3).

2. Задают нормативное значение ПД R^0 ($P^0_{ЗИП}$, $K^0_{гЗИП}$ или $\Delta t^0_{ЗИП}$) и вычисляют

$$D = -\ln R^0, \tag{3.24}$$

$$R^0 = P^0_{ЗИП}, R^0 = K^0_{гЗИП}, R^0 = \exp(-\sum\nolimits_{i=1}^{N} n_i \lambda_i \Delta t^0_{ЗИП}) . \tag{3.25}$$

3. Вычисляют $A_i = n_i \lambda_i T_i$ и записывают в графу 9 таблицы формуляров.
4. Дополняют таблицу формуляров графами 10, 11 и 12.

Таблица 3.1. Таблица формуляров (дополнение)

$-\ln R_i$	$-\ln R_i(L_i+1, A_i)$	Δ_i	$\delta_i = C_i\Delta_i$
10	11	12	13

5. Для каждого i находят минимальное значение L_i^0, удовлетворяющее условию

$$-\ln R_i(L_i^0, A_i) \le D, \tag{3.26}$$

где в качестве R_i используют показатель достаточности комплекта: вероятность достаточности (для α_i = 1, $T_i = T$) или коэффициент готовности комплекта $K_{гЗИП}$:

$$A_i = n_i \lambda_i T, -\ln R_i = -\ln K_{гЗИП}(L_i, T_i, \alpha_i, \beta_i) . \tag{3.27}$$

Значения L_i^0 записывают в графу 8, а $-\ln R_i$ в графу 10 таблицы формуляров.

6. Определяют сумму чисел в графе 10

$$-\ln R = -\sum_{i=1}^{N} \ln R_i \tag{3.28}$$

и убеждаются, что не выполняется неравенство

$$-\ln R \le D\ . \tag{3.29}$$

Оптимизация комплекта ЗИП

В многошаговой процедуре оптимизации выполняют следующие действия.

7. Для каждого i вычисляют $-\ln R_i(L_i+1, A_i)$ и записывают в графу 11 таблицы формуляров.
8. Вычисляют $\Delta_i = (\ln R_i(L_i+1, A_i) - \ln R_i(L_i, A_i))/C_i$ и записывают в графу 12.
9. Выбирают максимальное число Δ_i в графе 12 и определяют номер строки i_*, в которой оно стоит.
10. В строке с номером i_* меняют числа в графах 8, 10–12: в графе 8 увеличивают число ЗЧ на единицу, в графу 10 переносят число из графы 11, в графах 11 и 12 записывают значения, соответствующие новым значениям в графах 8 и 10.
11. Вычисляют сумму значений в графе 10.

    При этом можно избежать суммирования всех N чисел в графе 10, а из предыдущего значения суммы вычесть $C_i\Delta_{i*}$, где Δ_{i*} — значение в графе 12 на предыдущем шаге. Иначе говоря,

$$-\ln R^{(l)} = -\ln R^{(l-1)} - C_i \Delta_{i_*}^{(l-1)}, \tag{3.30}$$

    где l — номер шага оптимизации.
12. Если не выполняется условие (3.29), то следует вернуться к п. 9. Если, напротив, условие (3.29) выполняется, то требование к показателю достаточности удовлетворено и комплект ЗИП, представленный в графе 8 таблицы формуляров, является оптимальным.
13. Вычисляют суммарные затраты на оптимальный комплект по формуле

$$C_{\Sigma ЗИП} = \sum_{i=1}^{N} C_i L_i\ . \tag{3.31}$$

Оценка запасов в комплекте ЗИП-О

Назначение оценки состоит в определении фактических характеристик комплекта при известных исходных данных, записанных в графах 1–8 таблицы формуляров. Для этого выполняют следующие действия.

14. Вычисляют $A_i = n_i\lambda_i T_i$ и записывают в графу 9 таблицы формуляров.
15. Вычисляют $-\ln R_i(L_i, A_i)$ по формулам (3.27) и записывают в графу 10 таблицы формуляров.
16. Суммируют значения в графе 10 и находят показатель достаточности по одной из формул

$$P_{ЗИП} = e^{\ln R}, K_{г ЗИП} = e^{\ln R}, \Delta t_{ЗИП} = -\ln R / \sum_{i=1}^{N} n_i\lambda_i\ . \tag{3.32}$$

17. Определяют суммарные затраты по формуле (3.31).

    Если оценка проводится сразу же после оптимизации, то все действия, кроме (п. 16), уже выполнены. Поэтому остается лишь найти показатель достаточности.

Ввиду дискретности процесса оптимизации после последнего шага в цикле по пп. 9–12 может образоваться некоторый запас по ПД: $\Delta_{ПД} = D + \ln R$. Это создает возможность уменьшить комплект ЗИП, не нарушая условие (3.29), выполнив следующие действия.

18. Таблицу формуляров дополняют графой 13 и в нее записывают значения $\delta_i = C_i\Delta_i = \ln R_i(L_i+1, A_i) - \ln R_i(L_i, A_i)$.

19. Выделяют множество индексов i, для которых $\delta_i \le \Delta_{ПД}$. Если это множество пусто, то уменьшение комплекта невозможно.

20. Если множество не пусто, то в нем определяют строку, в которой находится минимальное число Δ_i, и соответствующий ему номер i_{**}.

    Удаление одной ЗЧ этого типа приводит к минимальному снижению ПД при максимальном уменьшении стоимости комплекта.

21. Уменьшают на единицу значение L_i в графе 8 и изменяют значения в графах 10–12 строки с номером i_{**}.

22. Суммируют значения в графе 10 и проверяют условие (3.29).

    Если условие выполняется, то возвращаются к п. 20. Если же не выполняется, то аннулируются результаты последнего цикла и полученный комплект объявляется окончательным.

23. Рассчитывают суммарные затраты по формуле (3.31). Вместо процедуры оптимизации может использоваться упрощенная одношаговая процедура расчета комплекта ЗИП, основанная на идее пропорционального вклада всех типов запасов в сумму $-\ln R$.

Расчет запасов в комплекте ЗИП

В качестве исходных данных используют таблицу формуляров с заполненными графами 1–7. При расчете выполняют следующие действия.

24. Вычисляют $A_i = n_i\lambda_i T_i$ и записывают в графу 9 таблицы формуляров.

25. Определяют вклад i-го типа запасов в значение ПД по формуле

$$d_i = A_i C_i D / \sum_{j=1}^{N} A_j C_j, i = 1...N . \qquad (3.33)$$

26. Вычисляют минимальное число L_i^*, удовлетворяющее условию

$$-\ln R_i(L_i^*, A_i) \le d_i , \qquad (3.34)$$

    и записывают его в графу 8 таблицы формуляров.

27. Вычисляют $-\ln R_i(L_i^*, A_i)$ по формулам (3.27) и записывают в графу 10 таблицы формуляров.

28. Суммируют значения в графе 10 и проводят контрольную проверку значения ПД по одной из формул (3.32).

    Если контрольное значение не соответствует заданному значению, то проверяют расчет с целью устранения ошибки в вычислениях. Если соответствует, то найденный комплект (L_i^*, $i = 1...N$) объявляется окончательным.

29. Рассчитывают суммарные затраты по формуле (3.31). Комплект (L_i^*, $i = 1...N$) является избыточным по сравнению с оптимальным. Поэтому может быть предпринята попытка его уменьшения с помощью процедуры пп. 18–23.

3.2.2. Оценка и оптимизация комплекта ЗИП-О по показателям достаточности при варьировании стратегии пополнения запасов

Потребность в изменении способа пополнения для одного или нескольких типов запасов может возникнуть тогда, когда имеется ограничение на суммарную стоимость комплекта ЗИП и не удается выполнить это ограничение, не меняя способа пополнения. Это значит, что задача оптимизации в постановке, изложенной в *разд. 3.2.1*, не имеет решения.

Чтобы в этих условиях сформировать оптимальный комплект ЗИП-О, надо для всех или нескольких типов запасов выбрать другой способ пополнения, заведомо лучше используемого в том смысле, что при неизменном комплекте ЗИП-О он обеспечивает более высокие показатели достаточности. В этом смысле, например, пополнение по уровню лучше периодического пополнения, а непрерывное лучше периодического и пополнения по уровню при прочих равных условиях.

Процедура оптимизации предусматривает следующие действия.

1. Выполняют пошаговую оптимизацию, рассмотренную в *разд. 3.2.1*. На каждом шаге проверяют условие

$$C_{\Sigma ЗИП}(L^{(i)}) \le C^{0}_{\Sigma ЗИП}\,. \tag{3.35}$$

   Если неравенство (3.35) нарушается еще до того, как выполнено требование к ПД, то переходят к следующему шагу.

2. Из множества типов запасов в комплекте ЗИП-О, полученном на предыдущем шаге, выделяют подмножество типов, для которых допустимо изменение способа пополнения.

3. Таблицу формуляров дополняют графами 13 и 14.

Таблица 3.1. Таблица формуляров (дополнение)

$-\ln R_i$	$-\ln R_i(L_i+1, A_i)$	Δ_i	$-\ln R_i(L_i, \alpha_i = j)$	$\delta_i = -\ln R_i(L_i, \alpha_i = j) + \ln R_i(L_i, \alpha_i = 1)$
10	11	12	13	14

4. Вычисляют $-\ln R_i(L_i, \alpha_i = j)$ для всех i из выделенного подмножества и заносят в графу 13.

5. Вычисляют $\delta_i = -\ln R_i(L_i, \alpha_i = j) + \ln R_i(L_i, \alpha_i = 1)$ и записывают в графу 14.

6. Находят максимальное число в графе 14 и определяют соответствующий ему номер i_*.

7. В графе 5 строки i_* изменяют значение α_i и переносят значение $-\ln R_i$ из графы 13 в графу 10, а значения в графах 13 и 14 обнуляют.

8. Суммируют значения в графе 10 и проверяют условие (3.29).

   Если условие не выполнено, то возвращаются к п. 6 из *разд. 3.2.1*. Если выполнено, то найден оптимальный комплект.

9. Для уменьшения комплекта выполняют действия, аналогичные пп. 18–23 из *разд. 3.2.1*.

   Процедура практически не меняется, если вместо показателя надежности в качестве R_i используют показатель достаточности.

3.3. Оценка и оптимизация комплекта группового ЗИП (ЗИП-Г) по показателям достаточности

3.3.1. Модели функционирования группового ЗИП

Групповой ЗИП может непосредственно обслуживать несколько образцов аппаратуры, а может пополнять запасы нескольких комплектов одиночного ЗИП, которые обслуживают по одному образцу аппаратуры. Возможен и комбинированный вариант, когда по некоторым типам запасов происходит пополнение комплектов ЗИП-О по их заявкам, а по остальным типам запасов — непосредственное обслуживание образцов аппаратуры. Соответственно могут рассматриваться различные модели функционирования ЗИП-Г, в состав моделей включаются и допущения о стратегиях пополнения ЗИП-Г. Приведем здесь несколько моделей.

Модель 1

Комплект ЗИП-Г обслуживает непосредственно M образцов аппаратуры, в которых формируются заявки на ЗЧ i-го типа, $i = 1,...,N_г$. Количество элементов i-го типа в одном образце равно k_i , интенсивность отказов одного элемента равна λ_i . Различные образцы аппаратуры работают независимо. В заявке указана только одна ЗЧ. Запасные части при хранении в ЗИП-Г не отказывают. В зависимости от стратегии пополнения будем различать модели 1.1, 1.2, 1.3 и 1.4.

Модель 2

Комплект ЗИП-Г обслуживает M комплектов одиночного ЗИП. Принимаются следующие допущения:

- комплекты ЗИП-О функционируют одинаково и независимо;
- время до поступления очередной заявки на ЗЧ от ЗИП-О случайное и распределено по экспоненциальному закону с параметром $\Lambda_i = M\lambda_i$;
- ЗЧ при хранении в комплекте ЗИП-Г не отказывают;
- количество ЗЧ, обозначенное во всех заявках на пополнение ЗЧ i-го типа от ЗИП-О, одно и то же, равное r_i . Группа ЗЧ в количестве r_i называется элементом запасов i-го типа комплекта ЗИП-Г. Начальные запасы комплекта ЗИП-Г i-го типа на самом деле содержат $L_{iг} = g_i r_i$ запасных частей. Далее будем различать модели 2.1, 2.2, 2.3 и 2.4.

Величины Λ_i и r_i либо задают, либо определяют как характеристики случайных величин.

При периодическом пополнении j-го типа запасов i-го комплекта ЗИП-О с периодом T_{ijO} интенсивность заявок принимается равной

$$\Lambda_{ijг} = 1 / T_{ijO} . \qquad (3.36)$$

Количество ЗЧ в заявке определяется как среднее количество отказавших модулей j-го типа в i-м образце аппаратуры:

$$r_{ij} = a_{ijO} = \Lambda_{ijO} T_{ijO} . \qquad (3.37)$$

где:

T_{ijO} — период пополнения запасов j-го типа в i-м комплекте ЗИП-О;

Λ_{ijO} — интенсивность запросов на ЗЧ j-го типа от i-го комплекта ЗИП-О.

При безотказном хранении ЗЧ в комплекте ЗИП-О:

$$\Lambda_{ijO} = k_j \lambda_j .$$

При стратегии ПЭД учитываются плановые заявки и заявки на экстренную доставку. Плановые заявки учитываются как при стратегии ПП. При расчете числа заявок на ЭД учитывают среднее количество моментов ЭД в периоде пополнения $H(L_{ijO}, a_{ijO})$, определяемое по формуле (1.16). С учетом двух источников заявок:

$$r_{ij} = a_{ijO} + (L_{ijO} + 1)H(L_{ijO}, a_{ijO}),\ \Lambda_{ijг} = (1 + H(L_{ijO}, a_{ijO}))/T_{ijO} . \quad (3.38)$$

При непрерывном пополнении

$$r_{ij} = 1, \Lambda_{ijг} = \Lambda_{ijO} = k_{ij}\lambda_{ij}, \Lambda_{jг} = \sum_{i=1}^{M} k_{ij}\lambda_{ij} . \quad (3.39)$$

Если все комплекты ЗИП-О одинаковы, то

$$r_j = 1, \Lambda_{jг} = M\Lambda_{jO} = Mk_j\lambda_j . \quad (3.40)$$

При пополнении по уровню

$$r_{ij} = L_{ijO} - m_{ijO}, \Lambda_{ijг} = \Lambda_{ijO}/(L_{ijO} - m_{ijO}) . \quad (3.41)$$

Модель 3

Комплект ЗИП-Г обслуживает M комплектов одиночного ЗИП. Комплект ЗИП-Г имеет периодическое пополнение запасов с периодом T. Количество ЗЧ в начале периода равно $L_г$. Комплекты одиночного ЗИП могут иметь различные стратегии пополнения. При периодическом пополнении с экстренной доставкой допускается только одна ЭД в периоде пополнения. При совпадении периодов пополнения в одиночных и групповом комплектах ЗИП пополнение комплекта ЗИП-Г проводится только после удовлетворения всех заявок от комплектов ЗИП-О. Прочие допущения совпадают с допущениями модели 2. Далее будем различать модели 3.1 и 3.2.

3.3.2. Оценка запасов в комплекте группового ЗИП

Рассмотрим восемь различных моделей.

Непосредственное обслуживание образцов аппаратуры

Периодическое пополнение (модель 1.1)

Для расчета коэффициента готовности комплекта ЗИП-Г по запасам i-го типа можно использовать формулу (1.7) при потоке заявок с интенсивностью $\Lambda_{iг} = M\Lambda_{iO} = Mk_i\lambda_i$:

$$K_{гЗИП-Г,i}(T_i, L_i) = \frac{1}{C_i}\sum_{j=0}^{L} I(C_i, j+1) = 1 - I(C_i, L_i) + \frac{L_i + 1}{C_i} I(C_i, L_i + 1), C_i = Mk_i\lambda_i T_i . \quad (3.42)$$

Коэффициент готовности комплекта ЗИП-Г:

$$K_{гЗИП-Г}(T, L) = \prod_{i=1}^{N_г} K_{гЗИП-Г,i}(T_i, L_i) . \quad (3.43)$$

При оценке запасов по вероятности достаточности для запаса каждого типа вычисляют:

$$P_{diг}(L_i, a_i) = 1 - I(a_i, L_i + 1), a_i = \Lambda_{iг}T . \quad (3.44)$$

Для всего комплекта вероятность достаточности:

$$P_{\partial z}(L,T)=\prod_{i=1}^{N_z}P_{\partial iz}(L_i,a_i)\,. \tag{3.45}$$

Периодическое пополнение с экстренными доставками (модель 1.2)

Коэффициент готовности комплекта ЗИП-Г по запасам *i*-го типа

$$K_{zЗИП-Г,i}(T_i,L_i)=1-\frac{\overline{T}_{ЭДi}}{T_i}H(T_i,L_i),H(T_i,L_i)=\sum_{j=1}^{\infty}I(C_i,j(L_i+1)),C_i=Mk_i\lambda_iT\,. \tag{3.46}$$

Непрерывное пополнение (модель 1.3)

Коэффициент готовности комплекта ЗИП-Г по запасам *i*-го типа

$$K_{zЗИП-г,i}(L_i,\overline{T}_{\partial i})=1-\frac{C_i^{L_i+1}}{(L_i+1)!}/\sum_{j=0}^{L_i+1}\frac{C_i^j}{j!},C_i=Mk_i\lambda_i\overline{T}_{\partial i}\,. \tag{3.47}$$

Пополнение по уровню (модель 1.4)

Коэффициент готовности комплекта ЗИП-Г по запасам *i*-го типа

$$K_{zЗИП-Г,i}(L_i,m_i)=1-\frac{C_i^{m_i+2}}{C_i^{m_i+2}+(L_i-m_i)(1+C_i)^{m_i+1}},L_i\geq 2m_i+2,C_i=Mk_i\lambda_i\overline{T}_{\partial i}\,. \tag{3.48}$$

Переход к среднему времени задержки выполнения заявки на ЗЧ осуществляется с помощью формулы (1.45).

Обслуживание комплектов одиночного ЗИП (модель 2)

Комплект ЗИП-Г обслуживает M комплектов ЗИП-О, от каждого из которых поступает простейший поток заявок интенсивностью Λ_i, в каждой заявке указывается r_i запасных частей. Значения Λ_i и r_i рассчитываются по формулам (3.36)–(3.41). Количество элементов запаса *i*-го типа определяется как целая часть отношения $g_i = [L_i/r_i]$. Рассмотрим теперь различные стратегии пополнения комплекта ЗИП-Г.

Периодическое пополнение (модель 2.1)

Система, состоящая из комплекта ЗИП-Г и M комплектов ЗИП-О, может находиться в $g_i + M + 1$ состояниях (рис. 3.1).

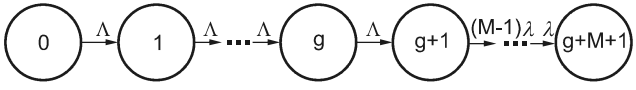


Рис. 3.1. Граф состояний системы (модель 2.1)

С вероятностью $P_0(t)$, ..., $P_g(t)$ ни одна заявка не будет ждать, т. к. в ЗИП-Г есть запасные элементы. С вероятностью $P_{g+i}(t)$, i = 1, ..., M, будут ожидать исполнения i заявок. Математическое ожидание общего времени задержки всех заявок в интервале $(t,t+\Delta t)$ равно [87]

$$T_{\Sigma}(t,\Delta t)=\sum_{i=1}^{M}iP_{g+j}(t)dt\,.$$

Математическое ожидание общего времени задержки всех заявок в интервале $(0,T)$ равно

$$T_{\Sigma}(T) = \sum_{j=1}^{M} j \int_{0}^{T} P_{g+j}(t)dt . \tag{3.49}$$

Среднее число заявок, поступивших в ЗИП-Г в интервале $(0,T)$, равно $M\lambda_i$. Среднее время задержки одной заявки:

$$\Delta t_{ЗИП-Г,i}(T) = T_{\Sigma}(T) / M\lambda_i T = \frac{1}{M\lambda_i} \sum_{j=1}^{M} j \frac{1}{T} \int_{0}^{T} P_{g+j}(t)dt . \tag{3.50}$$

Отсюда

$$\Lambda_i \Delta t_{ЗИП-Г,i}(T) = \sum_{j=1}^{M} j \frac{1}{T} \int_{0}^{T} P_{g+j}(t)dt = \sum_{j=1}^{M} j \overline{P}_{g+j}(T) . \tag{3.51}$$

Чтобы найти вероятности $P_{g+i}(t)$, i = 1, ..., M, составим систему дифференциальных уравнений (индекс типа запаса опускаем):

$$P_0^{'}(t) = -\Lambda P_0(t), P_i^{'}(t) = -\Lambda P_i(t) + \Lambda P_{i-1}(t), i = 1,..., g, \Lambda = M\lambda ,$$

$$P_{g+i}^{'}(t) = -(M-i)\lambda P_{g+i}(t) + (M-i+1)\lambda P_{g+i-1}(t), i = 1,..., M-1 ,$$

$$P_{g+M}^{'}(t) = \lambda P_{g+M-1}(t) . \tag{3.52}$$

Начальные условия: $P_0(0) = 1, P_i(0) = 0, i = 1,..., g+M$.

Решение (3.52) в операционной форме имеет вид:

$$P_g^*(s) = \frac{s\Lambda^g}{(s+\Lambda)^{g+1}}, P_{g+i}^*(s) = \frac{s(M-1)...(M-i+1)\lambda^{i-1}}{(s+\Lambda-\lambda)...(s+\Lambda-i\lambda)} \left(\frac{\Lambda}{s+\Lambda}\right)^{g+1}, i = 1,..., M-1 ,$$

$$P_{g+M}^*(t) = \frac{\lambda^{M-1}(M-1)!}{(s+\lambda)...(s+(M-1)\lambda)} \left(\frac{\Lambda}{s+\Lambda}\right)^{g+1} . \tag{3.53}$$

Представим $P_{g+i}^*(s)$, i = 1, ..., M, в виде:

$$P_{g+i}^*(s) = A_i^*(s) \left(\frac{\Lambda}{s+\Lambda}\right)^{g+1}, i = 1,..., M$$

и найдем оригинал функции $A_i^*(s)$.

$$A_i(t) = \sum_{j=1}^{i} A_{ij} e^{-(M-j)\lambda t}, A_{ij} = \frac{(M-1)!}{(M-j)!} / \prod_{k=1,k\neq j}^{i} (j-k), i = 1,..., M-1 ,$$

$$A_M(t) = 1 - \sum_{j=1}^{M-1} A_{Mj} e^{-(M-j)\lambda t}, A_{Mj} = \frac{(M-1)!}{(M-j)!} / \prod_{k=1,k\neq j}^{M-1} (j-k) . \tag{3.54}$$

Теперь получим вероятности:

$$P_{g+i}(t) = \int_{0}^{t} \sum_{j=1}^{i} A_{ij} e^{-(M-j)\lambda(t-x)} \frac{\Lambda^{g+1} x^g}{g!} e^{-\Lambda x} dx = \sum_{j=1}^{i} A_{ij} e^{-(M-j)\lambda t} \left(\frac{M}{j}\right)^{g+1} I(j\lambda t, g+1), i = 1...M-1 ,$$

$$P_{g+M}(t) = I(\Lambda t, g+1) - \sum_{j=1}^{M-1} A_{Mj} e^{-(M-j)\lambda t} \left(\frac{M}{j}\right)^{g+1} I(j\lambda t, g+1) . \tag{3.55}$$

После интегрирования имеем среднее по интервалу $(0,T)$ значение вероятностей:

$$\overline{P}_{g+i}(T)=\frac{1}{T}\int_0^T P_{g+i}(t)dt=\sum_{j=1}^{i}A_{ij}e^{-(M-j)\lambda T}\left(\frac{M}{j}\right)^{g+1}\frac{1-e^{-(M-j)\lambda T}}{(M-j)\lambda T}-\sum_{k=1}^{g}B_{ik}\frac{I(M\lambda T,k+1)}{M\lambda T},$$

$$\overline{P}_{g+M}(T)=1-\sum_{k=1}^{g}(1-\sum_{j=1}^{M-1}A_{Mj}e^{-(M-j)\lambda t}\left(\frac{M}{j}\right)^{g+1-k})\frac{I(M\lambda T,k+1)}{M\lambda T},$$

$$B_{ik}=\sum_{j=1}^{i}A_{ij}\left(\frac{M}{j}\right)^{g+1-k},i=1,...,M-1. \qquad (3.56)$$

Далее надо подставить (3.56) в (3.51), восстановив индекс i по типу запаса.

Для всего комплекта ЗИП-Г имеем:

$$\Lambda_{\Gamma}\Delta t_{ЗИП-\Gamma}(T)=\sum_{i=1}^{N_{\Gamma}}\frac{\Lambda_i}{\Lambda_{\Gamma}}\Delta t_{ЗИП-\Gamma,i}(T_i),\Lambda_{\Gamma}=\sum_{i=1}^{N_{\Gamma}}\Lambda_i. \qquad (3.57)$$

Значение среднего времени задержки можно использовать для оценки надежности той части изделия, которая содержит резервные элементы.

Точные формулы весьма сложны. Поэтому желательно перейти к упрощенной модели и упрощенным приближенным формулам. В упрощенной модели принимаются следующие дополнительные допущения:

- поток заявок является простейшим всегда, независимо от количества уже пришедших в ЗИП-Г заявок, т. е. вместо интенсивностей перехода в графе состояний $\Lambda_i = (M - i)\lambda$ принимаются интенсивности Λ;
- количество неудовлетворенных заявок неограниченно, т. е. количество состояний в графе бесконечно.

Тогда вероятность состояния вместо (3.55) рассчитывается по формуле:

$$P_{g+i}(t)=\frac{(\Lambda t)^{g+i}}{(g+i)!}e^{-\Lambda t},i=1,2,... \qquad (3.58)$$

Среднее по интервалу $(0,T)$ значение вероятностей:

$$\overline{P}_{g+i}(T)=\frac{1}{T}\int_0^T P_{g+i}(t)dt=\frac{I(\Lambda T,g+i+1)}{\Lambda T}=\frac{e^{-a}}{a}\sum_{j=g+i+1}^{\infty}\frac{a^j}{j!},a=\Lambda T. \qquad (3.59)$$

Подставим (3.59) в (3.51) при $M\to\infty$ и получим:

$$\Lambda\Delta t_{ЗИП-\Gamma}(T)=\frac{e^{-a}}{a}\sum_{i=1}^{\infty}i\sum_{j=g+i+1}^{\infty}\frac{a^j}{j!}. \qquad 3.60)$$

Именно эта формула рекомендована в [4] для промышленного использования. Из допущений ясно, что приближенное значение завышает точное значение среднего времени задержки. Соответствующий ему коэффициент готовности комплекта ЗИП-Г дает заниженное значение по сравнению с точным значением.

Преобразуем (3.60) к виду:

$$\Lambda\Delta t_{ЗИП-\Gamma}(T)=\frac{e^{-a}}{a}\sum_{j=g}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}i\frac{a^{i+j+1}}{(i+j+1)!}=\frac{e^{-a}}{a}\sum_{j=g}^{\infty}\sum_{i=j+2}^{\infty}(i-j-1)\frac{a^i}{i!}=\sum_{j=g}^{\infty}(1-K_{г ЗИП}(a,j)). \qquad (3.61)$$

Здесь $K_{гЗИП}(a,j)$ следует рассчитывать по формуле (1.7). Реально в (3.61) рассчитывают конечное число слагаемых до такого $j = L_*$, для которого выполняется условие:

$$F_1(L_*, a) = -\ln K_{гЗИП}(a, L_*) \le \frac{\delta}{2},$$

где δ — заданная точность вычислений. Тогда вместо (3.61) имеем:

$$\Lambda\Delta t_{ЗИП-Г}(T, g) = \sum_{j=g}^{L_*}(1 - K_{гЗИП}(a, j)), a = \Lambda T . \quad (3.62)$$

Этой формулой можно пользоваться при любых стратегиях пополнения ЗИП-О. При периодическом пополнении в (3.62) следует взять:

$$a = Mk\lambda T_Г, g = L_Г / r = L_Г / (Mk\lambda T_o), \Lambda_Г = Mk\lambda,$$

где:

a — среднее число заявок в комплект ЗИП-Г за период пополнения;

r — среднее количество ЗЧ в одной заявке.

При периодическом пополнении с экстренной доставкой:

$$a = MT_Г(1 + H(a_o, L_o)) / T_o, H(a_o, L_o) = \sum_{j=1}^{\infty} I(a_o, j(L_o + 1)), a_o = k\lambda T_o,$$

$$g = L_Г / r, r = a_o + (L_o + 1)H(a_o, L_o), \Lambda_Г = M(1 + H(a_o, L_o)) / T_o . \quad (3.63)$$

При непрерывном пополнении:

$$a = Mk\lambda T_Г, g = L_Г, r = 1, \Lambda_Г = Mk\lambda . \quad (3.64)$$

При пополнении по уровню m:

$$a = Mk\lambda T_Г / (L_o - m), g = L_Г / (L_o - m), r = L_o - m, \Lambda_Г = Mk\lambda / (L_o - m) .$$

Заметим, что при увеличении g коэффициент готовности комплекта ЗИП-Г стремится к единице, а среднее время задержки, согласно (3.61), стремится к нулю. Это значит, что по своим характеристикам ЗИП-Г приближается к НИП.

Для учета ПД ЗИП-Г при оценке надежности изделия надо провести коррекцию параметров комплекта ЗИП-О следующим образом. При периодическом пополнении ЗИП-О надо увеличить период пополнения:

$$T_o(L_Г) = T_o + \Delta t_{ЗИП-Г}(L_г) .$$

При периодическом пополнении ЗИП-О с экстренными доставками надо увеличить период пополнения и среднее время экстренной доставки:

$$T_o(L_Г) = T_o + \Delta t_{ЗИП-Г}(L_Г), \overline{T}_{ЭД}(L_Г) = \overline{T}_{ЭД} + \Delta t_{ЗИП-Г}(L_Г) .$$

При непрерывном пополнении и пополнении по уровню корректируют среднее время доставки ЗЧ:

$$\overline{T}_o(L_Г) = \overline{T}_o + \Delta t_{ЗИП-Г}(L_Г) .$$

Далее надо корректировать среднее время восстановления, согласно методике, изложенной в *разд. 3.2*, для одиночного ЗИП.

Периодическое пополнение с экстренными доставками (модель 2.2)

Среднее время задержки заявки на ЗЧ определяют по формуле, аналогичной (1.45):

$$\Lambda_{iГ}\Delta t_{ЗИП-Г,i} = -\ln K_{гЗИП-Г,i}(g_i, T_{iГ}). \quad (3.65)$$

Коэффициент готовности ЗИП-Г находят по формуле, аналогичной (1.16):

$$K_{гЗИП-Г,i}(g_i, T_{iГ}) = 1 - \frac{\overline{T}_{ЭД,iГ}}{T_{iГ}} H_2(T_{iГ}, g_i) = 1 - b. \quad (3.66)$$

С другой стороны, согласно (3.65):

$$K_{гЗИП-Г,i}(g_i, T_{iГ}) = e^{-\Lambda_{iГ}\Delta t_{ЗИП-Г,i}} \approx 1 - x + \frac{x^2}{2}, x = \Lambda_{iГ}\Delta t_{ЗИП-Г,i}. \quad (3.67)$$

Приравнивая (3.66) и (3.67), получим уравнение:

$$x^2 - 2x + 2b = 0. \quad (3.68)$$

Отсюда

$$x = 1 - \sqrt{1-2b}.$$

Разлагая квадратный корень в ряд по степеням b и оставляя два слагаемых, получим

$$\Lambda_{iГ}\Delta t_{ЗИП-Г,i} = b(1+\frac{b}{2}) = \frac{\overline{T}_{ЭД,iГ}}{T_{iГ}} H_2(T_{iГ}, g_i)(1 + \frac{1}{2}\frac{\overline{T}_{ЭД,iГ}}{T_{iГ}} H_2(T_{iГ}, g_i)). \quad (3.69)$$

Для рекуррентного потока заявок во втором малом слагаемом (3.69) можно использовать линейную асимптотическую формулу при расчете среднего числа заявок:

$$H_2(T_{iГ}, g_i) \approx \Lambda_{iГ} T_{iГ}.$$

Поэтому окончательное выражение

$$\Lambda_{iГ}\Delta t_{ЗИП-Г,i} = \frac{\overline{T}_{ЭД,iГ}}{T_{iГ}}(1 + \frac{1}{2}\Lambda_{iГ}\overline{T}_{ЭД,iГ}) H_2(T_{iГ}, g_i). \quad (3.70)$$

Именно эта формула рекомендована в [4] для промышленного использования. Среднее значение числа заявок на ЭД в периоде пополнения находят по формуле (1.16).

Для расчета среднего числа моментов ЭД используем известное выражение для ведущей функции рекуррентного потока:

$$H_2^*(s) = \frac{F_0^*(s)}{1 - F_0^*(s)}, \quad (3.71)$$

где $F_0^*(s)$ — изображение по Лапласу — Карсону функции распределения времени между соседними моментами ЭД. При наличии в ЗИП-Г g_i элементов i-го типа изображение имеет вид:

$$F_0^*(s) = \left(\frac{a_{iГ}}{s + a_{iГ}}\right)^{g_i+1}, a_{iГ} = \Lambda_{iГ} T_{iГ}. \quad (3.72)$$

Подставим (3.72) в (3.71), разложим функцию по степеням $F_0^*(s)$ и выполним обратное преобразование:

$$H_2(T_{iГ}, g_i) = \sum_{j=1}^{\infty} I(a_{iГ}, j(g_i + 1)). \quad (3.73)$$

Непрерывное пополнение (модель 2.3)

Рассмотрим два варианта модели:

- ❒ время доставки $T_д$ фиксированное;
- ❒ время доставки $T_д$ случайное с экспоненциальным распределением:

$$F_д(t) = P\{T_д < t\} = 1 - e^{-\mu t}.$$

При фиксированном времени доставки граф состояний имеет вид, приведенный на рис. 3.2.

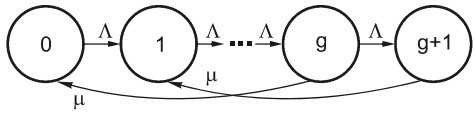


Рис. 3.2. Граф состояний системы (модель 2.3)

Заявка формируется при появлении одного запроса на ЗЧ от ЗИП-О. В заявке указывается ровно одна ЗЧ. Однако завершение формирования заявки происходит к концу интервала $(0, T_д)$, так что при пополнении в комплекте ЗИП-Г всегда оказывается предусмотренный начальный запас в $L_{iГ}$ запасных частей i-го типа.

Если к концу интервала общее число запросов от ЗИП-О не превысило g_i, то задержка равна нулю: $\Delta t_{ЗИП-Г,i} = 0$. В состоянии g_i+1 возникает отказ комплекта ЗИП-Г. В интервале доставки $(0, T_д)$ комплект ведет себя как при периодическом пополнении с периодом $T_д$ и начальным запасом $g_i - 1$. Поэтому среднее время задержки:

$$\Lambda_{iГ}\Delta t_{ЗИП-Г,i} = \Lambda_{iГ}T_д(1 - K_{гЗИП-О}(T_д, g_i - 1)), \qquad (3.74)$$

где $K_{гЗИП-О}(T, L)$ определяют по формуле (1.7). Именно эта формула рекомендована в [4] для промышленного использования.

Если время доставки случайное, то с помощью формулы (1.28) находим:

$$\Lambda_{iГ}\Delta t_{ЗИП-Г,i} = -\ln K_{гЗИП-Г,i}(T_д, g_i) = -\ln(1 - \frac{C_i^{g_i+1}}{(g_i+1)!} / \sum_{j=0}^{g_i+1}\frac{C^j}{j!}), \qquad (3.75)$$

где $C_i = \Lambda_{iГ}\overline{T}_д, \Lambda_{iГ} = Mk_i\lambda_i$.

Пополнение по уровню (модель 2.4)

Среднее время задержки выполнения заявки при пополнении по уровню m находят с помощью формулы, аналогичной (136):

$$\Lambda_Г\Delta t_{ЗИП-Г}(\overline{T}_д) = -\ln(1 - \frac{C^{m+2}}{C^{m+2} + (g-m)(1+C)^{m+1}}) \approx \frac{C^{m+2}}{C^{m+2} + (g-m)(1+C)^{m+1}}, C = \Lambda_Г\overline{T}_д. \qquad (3.76)$$

Периодическое пополнение (модель 3.1)

В каждой заявке от комплекта ЗИП-О может быть указано случайное число ЗЧ от 0 до L_0+1 с распределением:

$$p_{0j} = \frac{A^j}{j!}e^{-A}, j = 0,...L_0, p_{0,L_0+1} = I(A, L_0+1). \qquad (3.77)$$

Отказ ЗИП-Г наступает, когда не удовлетворена или удовлетворена не полностью хотя бы одна заявка от ЗИП-О.

Производящая функция распределения:

$$\Phi_0(z) = \sum_{i=0}^{L_0} \frac{A^j}{j!} e^{-A} z^j + z^{L_0+1} I(A, L_0+1), A = k\lambda t . \quad (3.78)$$

Производящая функция распределения числа ЗЧ во всех заявках от ЗИП-О:

$$\Phi_\Gamma(z) = \Phi_0^M(z) = \sum_{j=0}^{M(L_0+1)} p_{\Gamma j} z^j . \quad (3.79)$$

Если $L_\Gamma \geq M(L_0+1)$, то коэффициент готовности ЗИП-Г равен 1. И он меньше 1, если $L_\Gamma < M(L_0+1)$. Тогда коэффициент готовности в конце периода пополнения:

$$K^*_{г ЗИП-\Gamma}(t, L_\Gamma, T) = 1 - \sum_{j=L_\Gamma+1}^{M(L_0+1)} p_{\Gamma j}(t) . \quad (3.80)$$

Среднее по периоду пополнения значение коэффициента готовности:

$$K_{г ЗИП-\Gamma}(L_\Gamma, T) = \frac{1}{T} \int_0^T K^*_{г ЗИП-\Gamma}(t, L_\Gamma, T) dt . \quad (3.81)$$

При этом может быть так, что в некоторых ЗИП-О будут отказы, а в комплекте ЗИП-Г отказов не будет, т. к. все заявки будут удовлетворены.

Возведение в степень производящего полинома и отбор нужных вероятностей можно автоматизировать. Тогда формула (3.80) является конечной.

Рассмотрим несколько частных случаев.

1) Пусть $L_0 = 1$, $M = 2$, $L_г = 2$. Тогда

$$K^*_{г ЗИП-\Gamma}(t, 2, T) = 1 - p_{\Gamma 3}(t) - p_{\Gamma 4}(t) = 1 - I(A,2)(2Ae^{-A} + I(A,2)) =$$

$$= e^{-A}(2 - (1 - A^2)e^{-A}), A = k\lambda t . \quad (3.82)$$

Среднее по периоду пополнения значение коэффициента готовности:

$$K_{г ЗИП-\Gamma}(2, T) = \frac{2}{A} I(A,1) - \frac{1}{2A} I(2A,1) + \frac{1}{4A} I(2A,3), A = k\lambda T . \quad (3.83)$$

При малых A приблизительно имеем:

$$K^*_{г ЗИП-\Gamma}(t, 2, T) = 1 - A^3 - \frac{17}{12} A^4, K_{г ЗИП-\Gamma}(2, T) = 1 - \frac{A^3}{4} - \frac{17}{60} A^4 . \quad (3.84)$$

2) Пусть $L_0 = 2$, $M = 2$, $L_г = 4, 5$. Тогда

$$\Phi_0(z) = e^{-A} + Ae^{-A} z + \frac{A^2}{2!} e^{-A} z^2 + I(A,3) z^3 ,$$

$$K^*_{г ЗИП-\Gamma}(t, 4, T) = 1 - p_{\Gamma 5}(t) - p_{\Gamma 6}(t) = 1 - I(A,3)(A^2 e^{-A} + I(A,3)) =$$

$$= 2(1 + A)e^{-A} - \left(1 + 2A + A^2 - \frac{A^4}{4}\right) e^{-2A} ,$$

$$K^*_{гЗИП-Г}(t,5,T) = 1 - p_{Г6}(t) = 1 - I^2(A,3) =$$

$$= 2(1 + A + A^2/2)e^{-A} - (1 + 2A + 2A^2 + A^3 + A^4/4)e^{-2A}. \quad (3.85)$$

Среднее по периоду пополнения значение коэффициента готовности:

$$K_{гЗИП-Г}(4,T) = \frac{2}{A}(I(A,1) + I(A,2)) - \frac{1}{2A}(I(2A,1) + I(2A,2) + \frac{1}{2}I(2A,3) - \frac{3}{8}I(2A,5)),$$

$$K_{гЗИП-Г}(5,T) = \frac{2}{A}(I(A,1) + I(A,2) + I(A,3)) -$$

$$-\frac{1}{2A}(I(2A,1) + I(2A,2) + I(2A,3) + \frac{3}{4}I(2A,4) + \frac{3}{8}I(2A,5)). \quad (3.86)$$

При малых A приблизительно имеем:

$$K^*_{гЗИП-Г}(t,4,T) = 1 - \frac{A^5}{6} - \frac{19}{72}A^6, K_{гЗИП-Г}(4,T) = 1 - \frac{A^5}{36} - \frac{17}{504}A^6. \quad (3.87)$$

Периодическое пополнение с экстренными доставками (модель 3.2)

Для упрощения формул принимаем здесь $\overline{T}_{ЭД} = 0$. Фактическое значение среднего времени экстренной доставки учтем при коррекции среднего времени задержки с помощью формулы:

$$\Delta t_{ЗИП-Г}(L_Г, \overline{T}_{ЭД}) = \Delta t_{ЗИП-Г}(L_Г, 0) + \overline{T}_{ЭД}\, p_{ЭД}. \quad (3.88)$$

Что касается допущения только об одной разрешенной экстренной доставке для ЗИП-О, то оно может оказаться отражением реальных правил применения комплектов ЗИП-О. Если же разрешается более одной ЭД, то допущение также приемлемо, если L_o выбрано так, что вероятность более одной ЭД мала. Тогда оценка коэффициента готовности будет приближенной нижней оценкой. Отказ ЗИП-Г наступает, когда не удовлетворена или удовлетворена не полностью хотя бы одна заявка от ЗИП-О.

Если $L_Г \geq 2M(L_o + 1)$, то коэффициент готовности ЗИП-Г равен 1. И он меньше 1, если $L_Г < 2M(L_o + 1)$.

Найдем распределение общего числа ЗЧ в двух возможных заявках от одного ЗИП-О, т. е. в заявке на ЭД и заявке после периода T. Всего к концу периода T комплект ЗИП-О может оказаться в одном из двух L_o+2 состояний. До момента ЭД вероятности состояний:

$$p_{0j} = \frac{A^j}{j!}e^{-A}, j = 0,...L_o. \quad (3.89)$$

При L_0+1-м отказе возникает потребность в ЭД. Плотность вероятности момента ЭД имеет вид:

$$f_0(x) = \frac{(k\lambda)^{L_o+1}x^{L_o}}{L_o!}e^{-k\lambda x}. \quad (3.90)$$

Вероятности состояний после удовлетворения ЭД:

$$p_{0,L_o+1+j} = \int_0^T \frac{(k\lambda(T-x))^j}{j!}e^{-k\lambda(T-x)}f_0(x)dx = \frac{A^{L_o+1+j}}{(L_o+1+j)!}e^{-A}, j = 0,...L_o. \quad (3.91)$$

Здесь использовано известное тождество:

$$\sum_{i=0}^{j}(-1)^i C_{L_0+i}^{i} C_{L_0+1+i}^{j-i} = 1. \qquad (3.92)$$

Вероятность последнего состояния:

$$p_{0,2L_0+2} = 1 - \sum_{j=0}^{2L_0+1} p_{0,j} = I(A,2L_0+2). \qquad (3.93)$$

Производящая функция распределения:

$$\Phi_0(z) = \sum_{i=0}^{2L_0+1} \frac{A^j}{j!} e^{-A} z^j + z^{2L_0+2} I(A,2L_0+2), A = k\lambda t. \qquad (3.94)$$

Производящая функция распределения числа ЗЧ во всех заявках от всех ЗИП-О:

$$\Phi_{\Gamma}(z) = \Phi_0^M(z) = \sum_{j=0}^{2M(L_0+1)} p_{\Gamma j} z^j. \qquad (3.95)$$

Коэффициент готовности в конце периода пополнения:

$$K^*_{г ЗИП-\Gamma}(t, L_{\Gamma}, T) = 1 - \sum_{j=L_{\Gamma}+1}^{2M(L_0+1)} p_{\Gamma j}(t). \qquad (3.96)$$

Среднее по периоду пополнения значение коэффициента готовности находят по формуле (3.81). Рассмотрим несколько частных случаев.

1) Пусть $L_0 = 1$, $M = 2$, $L_г = 2; 4$. Тогда

$$\Phi_0(z) = e^{-A} + Ae^{-A}z + \frac{A^2}{2}e^{-A}z^2 + \frac{A^3}{6}e^{-A}z^3 + I(A,4)z^4, \Phi_{\Gamma}(z) = \Phi_0^2(z), \qquad (3.97)$$

$$K^*_{г ЗИП-\Gamma}(t,2,T) = p_{\Gamma 0}(t) + p_{\Gamma 1}(t) + p_{\Gamma 2}(t) = e^{-2A}(1+2A+2A^2), A = k\lambda t,$$

$$K^*_{г ЗИП-\Gamma}(t,4,T) = \sum_{j=0}^{4} p_{\Gamma j}(t) = 1 - I(2A,5) + e^{-A} I(A,5) - \frac{A^4}{24} e^{-2A}. \qquad (3.98)$$

Среднее по периоду пополнения значение коэффициента готовности:

$$K_{г ЗИП-\Gamma}(2,T) = \frac{2}{A}(I(A,1) + I(A,2) + I(A,3)) - \frac{1}{2A}(I(2A,1) + I(2A,2)), A = k\lambda T,$$

$$K_{г ЗИП-\Gamma}(4,T) = \frac{1}{A} I(A,1) + \frac{1}{4A} I(2A,2) + \frac{3}{8A} I(2A,3) + \frac{7}{16A}(I(2A,4) + I(2A,5)). \qquad (3.99)$$

2) Пусть $L_0 = 2$, $M = 2$, $L_{\Gamma} = 4; 5; 6$. Тогда

$$\Phi_0(z) = e^{-A} + Ae^{-A}z + \frac{A^2}{2}e^{-A}z^2 + \frac{A^3}{6}e^{-A}z^3 + \frac{A^4}{24}e^{-A}z^4 + \frac{A^5}{120}e^{-A}z^5 + I(A,6)z^6,$$

$$\Phi_{\Gamma}(z) = \Phi_0^2(z). \qquad (3.100)$$

При $L_{\Gamma} = 4$ и 5 только один комплект ЗИП-О может рассчитывать на ЭД. При $L_{\Gamma} = 6$ на ЭД могут рассчитывать два комплекта ЗИП-О. Коэффициенты готовности рассчитывают по формулам:

$$K^*_{гЗИП-Г}(t,4,T)=1-I(2A,5), K^*_{гЗИП-Г}(t,5,T)=1-I(2A,6),$$

$$K^*_{гЗИП-Г}(t,6,T)=1-I(2A,6)+2e^{-A}I(A,6)+\frac{31}{32}\frac{(2A)^6}{6!}e^{-2A},$$

$$K_{гЗИП-Г}(4,T)=\frac{1}{2A}\sum_{i=1}^{5}I(2A,i), K_{гЗИП-Г}(5,T)=\frac{1}{2A}\sum_{i=1}^{6}I(2A,i),$$

$$K_{гЗИП-Г}(6,T)=\frac{2}{A}I(A,1)-\frac{1}{2A}(I(2A,1)+\frac{1}{4A}I(2A,3)+\frac{3}{8A}I(2A,4)+$$

$$+\frac{7}{16A}I(2A,5)+\frac{15}{32A}I(2A,6)+\frac{31}{64A}I(2A,7). \qquad (3.101)$$

3) Пусть L_0 =1, M = 3, $L_г$ = 4; 5. Тогда

$$\Phi_0(z)=e^{-A}+Ae^{-A}z+\frac{A^2}{2}e^{-A}z^2+\frac{A^3}{6}e^{-A}z^3+I(A,4)z^4, \Phi_\Gamma(z)=\Phi_0^3(z).$$

Коэффициент готовности в конце периода пополнения:

$$K^*_{гЗИП-Г}(t,4,T)=3e^{-2A}I(A,4)+e^{-3A}\left(1+3A+\frac{(3A)^2}{2}+\frac{(3A)^3}{18}+\frac{13A^4}{4}\right), \qquad (3.102)$$

$$K^*_{гЗИП-Г}(t,5,T)=3(1+2A)e^{-2A}I(A,4)+e^{-3A}\left(1+3A+\frac{(3A)^2}{2}+\frac{(3A)^3}{18}+\frac{13A^4}{4}+\frac{7A^5}{4}\right).$$

Среднее по периоду пополнения значение коэффициента готовности:

$$K_{гЗИП-Г}(4,T)=\frac{3}{2A}I(2A,1)-\frac{2}{3A}I(3A,1)+\frac{2}{9A}I(3A,3)+\frac{2}{27A}I(3A,4)+\frac{26}{81A}I(3A,5),$$

$$K_{гЗИП-Г}(5,T)=\frac{3}{2A}(I(2A,1)+I(2A,2))-\frac{2}{3A}(I(3A,1)+I(3A,2))-$$

$$-\frac{2}{9A}I(3A,3)-\frac{4}{27A}I(3A,4)+\frac{2}{9A}I(3A,5)+\frac{70}{243A}I(3A,6). \qquad (3.103)$$

3.3.3. Расчет и оптимизация запасов в комплекте ЗИП-Г по критерию суммарных затрат при нормировании ПД

Расчет и оптимизация запасов по вероятности достаточности проводится только для комплектов ЗИП-Г, непосредственно обслуживающих группу образцов аппаратуры. Расчет и оптимизация запасов по коэффициенту готовности и среднему времени задержки проводится как для комплектов ЗИП-Г, непосредственно обслуживающих группу образцов аппаратуры, так и для комплектов ЗИП-Г, пополняющих группу комплектов одиночного ЗИП.

Расчет запасов в комплекте ЗИП-Г, обеспечивающий заданный ПД с учетом затрат

Идея расчета состоит в том, чтобы требования к ПД в виде неравенства $ПД \geq ПД_0$ (или $ПД \leq ПД_0$) распределить по определенному критерию между различными видами запасов и

сформировать требования в виде $ПД_i \geq ПД_{0i}$ (или $ПД_i \leq ПД_{0i}$), $i = 1, ..., N_Г$. Затем по каждому типу находят значение запасов g_i^* как минимальное значение, удовлетворяющее условию

$$ПД_i(g_i, a_i) \geq ПД_{0i} (ПД_i(g_i, a_i) \leq ПД_{0i}),$$

где $a_i = \Lambda_i T_i$, T_i — период пополнения для стратегий ПП и ПЭД, среднее время доставки для стратегий НП и ПУ. Вектор значений (g_i^*, $i = 1,..., N_Г$) является характеристикой комплекта ЗИП-Г. Рассмотрим подробнее алгоритм расчета.

1. В качестве исходных данных подготавливают векторы (Λ_i, r_i, C_i, α_i, T_i, β_i).
2. Вычисляют значения $a_i = \Lambda_i T_i$ для всех $i = 1,..., N_Г$. При этом у различных типов запасов могут быть различные стратегии пополнения и различные параметры стратегий.
3. Вычисляют значения:

$$\Lambda_Г = \sum_{i=1}^{N_Г} \Lambda_i, C_r = \sum_{i=1}^{N_Г} a_i r_i C_i, D_Г = \Lambda_Г \Delta t^0_{ЗИП-Г}, D_Г = -\ln P^0_{дГ}(T), d_{iГ} = D_Г \frac{a_i r_i C_i}{C_r}, \quad (3.104)$$

   где C_i — затраты на одну ЗЧ.
4. Определяют минимальное значение запасов, которое удовлетворяет условию:

$$R_i(g_i^*, a_i) \leq d_{iГ}, R_i(g_i, a_i) = \Lambda_{iГ} \Delta t_{ЗИП-Г,i}, R_i(g_i, a_i) = -\ln P_{дГ,i}(g_i, a_i). \quad (3.105)$$

$$R_i(g_i, a_i) = \Lambda_{iГ} \Delta t_{ЗИП-Г,i} = -\ln K_{гЗИП-Г,i}(g_i, a_i).$$

   Расчет $R_i(g_i, a_i)$ по той или другой формуле проводят в зависимости от выбранного ПД: вероятности достаточности или среднего времени задержки.
5. Уровень запасов *i*-го типа определяется как целая часть

$$L_{iГ} = [g_i^* r_i + 0,5]. \quad (3.106)$$

6. Проводят контрольную оценку ПД. Для этого суммируют $R_i(g_i^*, a_i)$ и затем определяют $\Delta t_{ЗИП-Г}$ или $P_{дГ}$.
7. Определяют суммарные затраты: $C_{\Sigma ЗИП-Г} = \sum_{i=1}^{N_Г} L_{iГ} C_i$.

Расчет оптимальных запасов в комплекте ЗИП-Г

Исходные данные для расчета

К общим исходным данным относятся:

- вид ПД;
- вид затрат на ЗЧ и единица его измерения, требуемое значение ограничений по затратам $C_{ЗИП\text{-}Г,0}$;
- общее количество типов ЗЧ (номенклатура) $N_Г$;
- количество обслуживаемых образцов аппаратуры (комплектов ЗИП-О) S;
- доля ошибочных изъятий СЧ относительно потока отказов $\delta_{ош}$.

По каждому типу запасов приводятся данные, указанные в табл. 3.2.

Таблица 3.2. Таблица формуляров для комплекта ЗИП-Г

i	r_i	Λ_i	C_i	α_i	T_i	β_i	g_{zi}
1	2	3	4	5	6	7	8
1	Среднее количество ЗЧ в одной заявке	Интенсивность потока заявок	Стоимость одной СЧ	Способ пополнения	Первый параметр	Второй параметр	Количество ЗЧ в ЗИП-Г

При непосредственном обслуживании образцов аппаратуры $r_i = 1$, при обслуживании комплектов ЗИП-О $r_i = L_{oi} + 1$.

При неодинаковых образцах аппаратуры: $\Lambda_i = \sum_{j=1}^{S} \Lambda_{ij}$.

При одинаковых образцах аппаратуры: $\Lambda_i = S\Lambda_{ij}$.

Интенсивность потока заявок определяется по формуле

$$\Lambda_{ij} = (K_{uэ}(m_{ij}\lambda_{ij,op} + l_{ij}\lambda_{ij,pp}) + (1 - K_{uэ})(m_{ij} + l_{ij})\lambda_{ij,ож}(1 + \delta_{ош}) + (m_{ij} + l_{ij})\lambda_{ij,mo} + L_{ij}\lambda_{ij,xp},$$

где:

$K_{uэ}$ — коэффициент интенсивности эксплуатации;

m_{ij} и l_{ij} — количество основных и резервных СЧ;

$\lambda_{ij,op}$, $\lambda_{ij,pp}$, $\lambda_{ij,ож}$, $\lambda_{ij,mo}$, $\lambda_{ij,xp}$ — интенсивности отказов СЧ в основном режиме, в резерве, в режиме ожидания применения, при техническом обслуживании и при хранении;

$\delta_{ош}$ — доля ошибочных изъятий составных частей изделия относительно общего потока отказов.

Значения L_{zi} являются результатом оптимизации.

Расчет оптимальных запасов в комплекте ЗИП-Г

Таблицу 3.2 дополняют четырьмя графами 9–12 и с помощью ранее заполненных граф 1–7 начинают заполнять графы 8–12.

Таблица 3.2. Таблица формуляров для комплекта ЗИП-Г (продолжение)

i	...	g_i	$R_i(g_i, a_i)$	$R_i(g_i, a_i + 1)$	Δ_i	$\Delta_i / C_i r_i$
1	...	8	9	10	11	12
1	...					
...	...					
$N_Г$	...					

Для всех типов запасов при ПД $\Delta t_{ЗИП\text{-}Г}$, $i = 1, ..., N_Г$, по соответствующим формулам в зависимости от способа пополнения выбирают такое минимальное значение количества элементов запасов i-го типа, которое удовлетворяет условию:

$$R_i(g_i^0, a_i) \le D_Г . \qquad (3.107)$$

Здесь R_i находят по формулам (3.105).

Найденное значение записывают в графу 8, а соответствующие значения $R_i(g_i, a_i)$ и $R_i(g_i, a_i + 1)$ — в графы 9 и 10. Затем вычисляют разность чисел в графах 9 и 10:

$$\Delta_i = R_i(g_i, a_i) - R_i(g_i, a_i + 1) \tag{3.108}$$

и отношение разности к затратам на одну заявку. Эти значения попадают в графы 11 и 12. Далее суммируют значения чисел в графе 9:

$$R_\Gamma = R_\Gamma^0 = \sum_{i=1}^{N_\Gamma} R_i(g_i, a_i). \tag{3.109}$$

Если выполняется неравенство

$$R_\Gamma = R_\Gamma^0 \le D_\Gamma, \tag{3.110}$$

то работа алгоритма заканчивается. Рассчитанные значения g_i^0 преобразуются в вектор L_{zi} по формуле (3.106). Показатель достаточности $\Delta t_{ЗИП\text{-}\Gamma}$ рассчитывают по формуле:

$$\Delta t_{ЗИП-\Gamma} = R_\Gamma / \Lambda_\Gamma = R_\Gamma^0 / \Lambda_\Gamma. \tag{3.111}$$

Полученное значение ПД сравнивают с заданным (для контроля), а суммарные затраты вычисляют по формуле:

$$C_{\Sigma ЗИП-\Gamma} = \sum_{i=1}^{N_\Gamma} \Lambda_{i\Gamma} C_i. \tag{3.112}$$

Если неравенство (3.110) не выполняется, то процесс оптимизации продолжают. Работу ведут по шагам до тех пор, пока на *l*-м шаге впервые будет выполнено неравенство (3.110). Очередной *l*-й шаг выполняется в следующем порядке. В графе 12 находят максимальное число и фиксируют номер i_*, в котором оно стоит. Число $g_{i_*}^{l-1}$ в графе 8 увеличивают на 1:

$$g_{i_*}^{l} = g_{i_*}^{l-1} + 1. \tag{3.113}$$

Затем вычисляют новое значение:

$$R_\Gamma^l = R_\Gamma^{l-1} - \Delta_{i_*}^{l-1} \tag{3.114}$$

и вновь проверяют (3.110). Если неравенство выполнено, то работа алгоритма завершена. Если не выполнено, то продолжают процесс оптимизации. В графу 9 строки i_* переписывают новое значение из графы 10 $R_i(g_i, a_i + 1)$, а на его место вычисляют новое значение с увеличенным уровнем запасов. Затем обновляют графы 11 и 12.

Возможная ошибка в затратах по сравнению с установленной нормой не превосходит $C_{i_*} r_{i_*}$. Как и при одиночном ЗИП, образовавшуюся разность можно выбрать путем уменьшения количества более дешевых элементов.

3.4. Оценка и оптимизация двухуровневой системы ЗИП (ЗИП-2У) по показателям достаточности

3.4.1. Модели функционирования системы ЗИП (ЗИП-2У)

Рассмотренные в предыдущем разделе показатели достаточности ЗИП-Г являются групповыми, т. е. они характеризуют возможности удовлетворения заявок от группы образцов аппаратуры или группы комплектов ЗИП-О. В отличие от них здесь будут рассмотрены показатели достаточности, которые характеризуют возможности удовлетворения заявок от одного конкретного образца аппаратуры или одного комплекта ЗИП-О. При этом неудовлетворение заявки от других образцов аппаратуры или других комплектов ЗИП-О не считается отказом системы ЗИП. Отказом системы ЗИП-2У является событие, когда не удовлетворена заявка на ЗЧ от «нашего» («меченого») образца аппаратуры (или соответствующего комплекта ЗИП-О). При использовании ЗИП-О возможна приближенная оценка коэффициента готовности ЗИП:

$$K_{гЗИП-2У} = K_{гЗИП-О} K_{гЗИП-Г}.$$

Однако эта упрощенная формула может давать большую погрешность, т. к. независимого функционирования комплектов ЗИП-О и ЗИП-Г на самом деле нет и пополнение комплекта ЗИП-О существенно зависит от состояния комплекта ЗИП-Г. Поэтому нужны специальные модели функционирования двухуровневой системы. Далее рассмотрим два типа моделей, аналогичных моделям 1 и 2 для ЗИП-Г.

Модель 1

Комплект ЗИП-Г обслуживает непосредственно M образцов аппаратуры, в которых формируются заявки на ЗЧ i-го типа, $i = 1,...,N_Г$. Количество элементов i-го типа в меченом образце равно k_i , во всех образцах — n_i, интенсивность отказов одного элемента равна λ_i . Различные образцы аппаратуры работают независимо. В заявке указана только одна ЗЧ. Запасные части при хранении в ЗИП-Г не отказывают. В зависимости от стратегии пополнения комплекта ЗИП-Г будем различать модели 1.1, 1.2, 1.3 и 1.4.

Модель 2

Комплект ЗИП-Г обслуживает M комплектов одиночного ЗИП. Принимаются следующие допущения:

- комплекты ЗИП-О функционируют одинаково и независимо;
- время до поступления очередной заявки на ЗЧ от меченого комплекта ЗИП-О случайное и распределено по экспоненциальному закону с параметром λ_i, от всех комплектов — $\Lambda_i = M\lambda_i$;
- ЗЧ при хранении в комплекте ЗИП-Г не отказывают;
- количество ЗЧ, обозначенное во всех заявках на пополнение ЗЧ i-го типа от ЗИП-О, одно и то же, равное r_i .

  Группа ЗЧ в количестве r_i называется элементом запасов i-го типа комплекта ЗИП-Г. Начальные запасы комплекта ЗИП-Г i-го типа на самом деле содержат $L_{iГ} = g_i r_i$ запасных частей. Далее будем различать модели 2.1, 2.2, 2.3 и 2.4.

3.4.2. Непосредственное обслуживание образцов аппаратуры (модель 1)

Периодическое пополнение (модель 1.1)

Период пополнения запасов равен T.

Коэффициент готовности системы ЗИП в момент времени $t < T$ находим с помощью графа состояний, приведенного на рис. 3.3, *а*.

Рис. 3.3. Графы состояний системы при двухуровневом ЗИП для моделей 1.1 (*а*) и 1.3 (*б*)

Отказ системы наступает при переходе в состояние $L + 1$. Интенсивности переходов $\Lambda_i = n\lambda = M k\lambda$, $i = 0, \ldots L - 1$; $\Lambda_L = k\lambda$. Изображение для функции вероятности состояния $L + 1$ имеет вид:

$$P^*_{L+1}(s) = 1 - K^*_{гЗИП-2У}(s) = \frac{k\lambda}{s + k\lambda}\left(\frac{n\lambda}{s + n\lambda}\right)^L . \qquad (3.115)$$

Обратное преобразование в (3.115) дает:

$$K^*_{гЗИП-2У}(t) = e^{-k\lambda t}\left(\frac{n}{n-k}\right)^L + \sum_{i=0}^{L-1}\left(1 - \left(\frac{n}{n-k}\right)^{L-i}\right)\frac{(n\lambda t)^i}{i!}e^{-n\lambda t} . \qquad (3.116)$$

Среднее по периоду пополнения значение коэффициента готовности:

$$K_{гЗИП-2У}(L,T) = \frac{1}{T}\int_0^T K^*_{гЗИП-2У}(t)dt = \left(\frac{C}{B}\right)^L \frac{1 - e^{-A}}{A} + \frac{1}{C}\sum_{i=0}^{L-1}\left(1 - \left(\frac{n}{n-k}\right)^{L-i}\right) I(C, i+1) ,$$

$$A = k\lambda T, C = n\lambda T, B = C - A . \qquad (3.117)$$

Периодическое пополнение с экстренными доставками (модель 1.2)

Экстренная доставка ЗЧ в комплект ЗИП-Г увеличивает коэффициент готовности не только потому, что после отказа системы ЗИП еще в периоде пополнения может поступить новая партия ЗЧ, но и потому, что ЭД может быть инициирована другими образцами аппаратуры. И тогда поступление новой партии ЗЧ произойдет при отсутствии отказа системы ЗИП.

При составлении уравнения для коэффициента готовности системы ЗИП учтем три несовместных события:

- ❒ до момента t не произойдет отказа системы ЗИП (с вероятностью $dF_0(x)$);
- ❒ произойдет отказ комплекта ЗИП-Г из-за неудовлетворения заявки одного из других (кроме меченого) образцов аппаратуры, при этом заявка на ЭД не будет выполнена до момента t, а в оставшемся интервале времени в меченом образце не будет новых отказов;
- ❒ будет сформирована заявка на ЭД и она будет удовлетворена до момента t.

Составляя вероятности несовместных событий, получим уравнение:

$$K^*_{гЗИП-2У}(t) = 1 - F_0(t) + \int_0^t (1 - F_{ЭД}(t-x)) e^{-k\lambda(t-x)} dF_0(x) +$$

$$+ \int_0^t \int_0^{t-x} K^*_{гЗИП-2У}(t-x-y) dF_{ЭД}(y) dF_0(x), \qquad (3.118)$$

где:

$F_0(x)$ — функция распределения времени до отказа комплекта ЗИП-Г;

$F_{ЭД}(y)$ — функция распределения времени доставки.

Переходя в (3.118) к изображениям по Карсону, получим решение:

$$K^*_{гЗИП-2У}(s) = \frac{1 - F_0^*(s)\frac{\mu + k\lambda}{s + \mu + k\lambda}}{1 - F_0^*(s)\frac{\mu}{s+\mu}} = 1 - \frac{F_0^*(s)\frac{sk\lambda}{s+\mu+k\lambda}}{s + \mu(1 - F_0^*(s))} = 1 - \frac{\omega^*(s)}{\mu}\frac{k\lambda}{s+\mu+k\lambda}, \qquad (3.119)$$

где $\omega(t)$ — интенсивность потока заявок на ЭД. Изображение этой функции находят по формуле:

$$\omega^*(s) = \frac{sF_0^*(s)F_{ЭД}^*(s)}{1 - F_0^*(s)F_{ЭД}^*(s)} = \frac{s\mu F_0^*(s)}{s + \mu(1 - F_0^*(s))}. \qquad (3.120)$$

Из (3.119) имеем:

$$K^*_{гЗИП-2У}(t) = 1 - k\lambda \overline{T}_{ЭД} \int_0^t \omega(t-x) e^{-(\mu + k\lambda)x} dx. \qquad (3.121)$$

Среднее по периоду пополнения значение коэффициента готовности системы ЗИП:

$$K_{гЗИП-2У}(T) = 1 - \frac{\overline{T}_{ЭД}}{T} \int_0^T H(T-x) e^{-(\mu + k\lambda)x} d(k\lambda x), \qquad (3.122)$$

где $H(t)$ — среднее число заявок на ЭД в интервале $(0, t)$.

Функция распределения $F_0(x)$ является распределением Эрланга и имеет изображение:

$$F_0^*(s) = \left(\frac{n\lambda}{s + n\lambda}\right)^{L+1} = \left(\frac{Mk\lambda}{s + Mk\lambda}\right)^{L+1}. \qquad (3.123)$$

Для получения приближенного значения используем очевидное неравенство:

$$H(T-x) \le H(T)\frac{T-x}{T}, H(T) = \sum_{i=1}^{\infty} I(C, i(L+1)), C = n\lambda T.$$

Тогда из (3.123) получим:

$$K_{гЗИП-2У}(T) \ge 1 - \frac{\overline{T}_{ЭД}}{T}\beta(T)H(T), \beta(T) = \frac{A}{A+D}[I(A+D,1) - \frac{I(A+D,2)}{A+D}], D = \mu T. \qquad (3.124)$$

Непрерывное пополнение (модель 1.3)

Граф состояний приведен на рис. 3.3, *б*. Стационарное значение коэффициента готовности системы ЗИП определяется по формуле:

$$K_{гЗИП-2У} = 1 - p_{L+1} = 1 - \frac{k\rho(n\rho)^{L+1}}{(L+1)!} / (\sum_{i=0}^{L} \frac{(n\rho)^i}{i!} + \frac{k\rho(n\rho)^{L+1}}{(L+1)!}). \quad (3.125)$$

Пополнение по уровню (модель 1.4)

Граф состояний имеет вид, приведенный на рис. 1.2, *д*. Отличие состоит лишь в значениях интенсивностей перехода: переходы слева направо имеют интенсивности $n\lambda = Mk\lambda$, кроме перехода из состояния L в состояние $L + 1$, для которого интенсивность равна $k\lambda$. Переходы справа налево имеют то же значение $\mu = 1/\overline{T}_{\partial}$. Система уравнений имеет вид:

$$Cp_0 = p_{L-m}, Cp_i = Cp_{i-1} + p_{L-m+i}, i = 1,...,m+1; p_i = p_{i-1}, i = m+1,...,L-m-1,$$

$$(1+C)p_i = Cp_{i-1}, i = L-m,...,L, p_{L+1} = Ap_L, C = n\lambda\overline{T}_{\partial}, A = k\lambda\overline{T}_{\partial}. \quad (3.126)$$

Решение (3.126) дает:

$$K_{гЗИП-2У}(L,m) = 1 - \frac{AC^{m+1}}{AC^{m+1} + (L-m)(1+C)^{m+1}}, L \geq 2m+2. \quad (3.127)$$

3.4.3. Обслуживание комплектов одиночного ЗИП (модель 2)

Комплект ЗИП-Г пополняется с периодом T. При этом комплекты ЗИП-О могут иметь различные стратегии пополнения.

Периодическое пополнение ЗИП-О (модель 2.1)

В отличие от одноуровневой системы ЗИП, когда комплекты ЗИП-О пополняются из НИП, здесь пополнение происходит из группового комплекта. Успех такого пополнения определяется коэффициентом готовности комплекта ЗИП-Г. Поэтому коэффициент готовности системы ЗИП при одинаковых периодах пополнения ЗИП-О и ЗИП-Г находят по формуле:

$$K_{гЗИП-2У}(T) = K_{гЗИП-О}(T)K_{гЗИП-Г}(T) = K_{гЗИП-О}(T)e^{-\Lambda\Delta t_{ЗИП-Г}}, \quad (3.128)$$

где:

$K_{гЗИП-О}(T)$ определяется по формуле (1.7);

$\Delta t_{ЗИП-Г}$ — по формуле (3.60);

Λ — по формуле (3.36).

Периодическое пополнение с экстренными доставками (модель 2.2)

В заявке на ЭД всегда указывается ровно $L_0 + 1$ запасных частей. Они образуют один элемент запаса ЗИП-Г. Всего в комплекте ЗИП-Г имеется g элементов. В модели функционирования принимаются следующие допущения:

- для каждого комплекта ЗИП-О в периоде пополнения T допускается только одна экстренная доставка;

- отказом системы ЗИП считается событие, когда сформирована заявка на ЭД, но ЭД не состоялась, либо когда ЭД состоялась, но из-за новых отказов запас в ЗИП-О исчерпан и заявка в ЗИП-О от образца аппаратуры на ЗЧ не удовлетворена;
- время ЭД считаем равным 0, а фактическое значение среднего времени ЭД учитываем при коррекции среднего времени восстановления образца аппаратуры.

Если $g \geq M$, то ЭД состоится с вероятностью 1. Если $g < M$, то ЭД состоится с вероятностью $Q = P(Y \leq g-1\}$, где Y — число заявок на ЭД от других комплектов ЗИП-О, имеющее биномиальное распределение с параметрами $M-1$ и p_{L_0+1}, здесь p_{L_0+1} — вероятность формирования заявки на ЭД. Отсюда следует, что

$$Q = \sum_{i=0}^{g-1} C_{M-1}^{i} p_{L_0+1}^{i} (1-p_{L_0+1})^{M-1-i},\ p_{L_0+1} = I(A, L_0+1),\ A = k\lambda t\,. \qquad (3.129)$$

В формуле (3.129) не учтен «эффект гонок». С учетом динамики поступления заявок на ЭД вероятность ЭД увеличится, т. к. схема доступа ЗИП-О к запасам ЗИП-Г бесприоритетная. Согласно этой схеме, тот комплект, который прислал заявку раньше, получит пополнение, а тот, кто опоздал, не получит его. Формула (3.129) предполагает, что все комплекты ЗИП-О прислали заявки раньше меченого комплекта. Это значит, что формула (3.129) является приближенной и дает оценку снизу.

Коэффициент готовности системы ЗИП в момент времени t находят по формуле:

$$K^{*}_{гЗИП-2У}(t) = 1-(1-Q)p_{L_0+1} - Qp_{2L_0+2} = 1-I(A, L_0+1)+Q(I(A, L_0+1)-I(A, 2L_0+2))\,. \qquad (3.130)$$

При составлении формулы учтены два события, указанные во втором допущении модели.

Среднее по периоду пополнения значение коэффициента готовности:

$$K_{гЗИП-2У}(T) = \frac{1}{A}\left(\sum_{i=0}^{L_0} I(A, i+1) + Q\sum_{i=L_0+1}^{2L_0+1} I(A, i+1)\right),\ A = k\lambda T\,. \qquad (3.131)$$

В этой формуле не учтено значение времени ЭД (принято $\overline{T}_{ЭД} = 0$). Чтобы учесть фактическое значение $\overline{T}_{ЭД}$, надо использовать формулы:

$$K_{гЗИП-2У}(T, \overline{T}_{ЭД}) = K_{гЗИП-2У}(T, 0)\exp(-p_{L_0+1}k\lambda\overline{T}_{ЭД})\,, \qquad (3.132)$$

$$\Delta t_{ЗИП-2У} = -\frac{1}{k\lambda}\ln K_{гЗИП-2У}(T, 0) + \overline{T}_{ЭД}\,p_{L_0+1}\,,$$

$$\overline{T}_{в}(L_0, g) = \overline{T}_{в\infty} + \Delta t_{ЗИП-2У}(L_0, g)\,.$$

Среднее время экстренной доставки умножается на вероятность того, что экстренная доставка необходима.

Непрерывное пополнение (модель 2.3)

В модели функционирования принимаются следующие допущения:

- время доставки ЗЧ из комплекта ЗИП-Г в комплект ЗИП-О считаем равным 0, а фактическое значение среднего времени ЭД учитываем при коррекции среднего времени восстановления образца аппаратуры и среднего времени задержки согласно формулам, аналогичным (3.132);
- отказом системы ЗИП считается событие, когда не удовлетворена заявка на ЗЧ ни комплектом ЗИП-О, ни комплектом ЗИП-Г;

- комплект ЗИП-Г пополняется периодически с периодом T, среднее время доставки ЗЧ равно $\overline{T}_{\partial}$.

Поскольку в модели принято $\overline{T}_{\partial} = 0$, то можно считать, что ЗИП-О транслирует заявку на ЗЧ в ЗИП-Г до тех пор, пока в ЗИП-Г еще есть невостребованные ЗЧ, и только потом начинает тратить свои запасы. Поэтому граф состояний имеет вид, характерный для процесса гибели. Переходы из состояний 0 ... $L_{\Gamma} - 1$ имеют интенсивности $n\lambda = Mk\lambda$, а переходы из состояний $L_{\Gamma} \ldots L_{\Gamma} + L_O$ имеют интенсивности $k\lambda$. Отказ системы ЗИП происходит при попадании в состояние $L_{\Gamma} + L_O + 1$. Коэффициент готовности в момент времени $t < T$ имеет изображение:

$$K^*_{г\text{ЗИП}-2У}(s) = 1 - p_{L_o+L_{\Gamma}+1} = 1 - \left(\frac{n\lambda}{s+n\lambda}\right)^{L_{\Gamma}} \left(\frac{k\lambda}{s+k\lambda}\right)^{L_0+1}. \qquad (3.133)$$

Обратное преобразование дает:

$$K^*_{г\text{ЗИП}-2У}(t) = 1 - I(A, L_o+1) * I(A, L_{\Gamma}), A = k\lambda t, \qquad (3.134)$$

где в правой части формулы * — знак операции свертки.

Непосредственное интегрирование в (3.134) дает:

$$K^*_{г\text{ЗИП}-2У}(t) = 1 - I(n\lambda t, L_{\Gamma}) + e^{-k\lambda t} \sum_{i=0}^{L_0} \sum_{j=0}^{i} C^j_{L_{\Gamma}+j-1} \frac{(k\lambda t)^{i-j}}{(i-j)!} \frac{M^{L_{\Gamma}}(-1)^j}{(M-1)^{L_{\Gamma}+j}} I((M-1)k\lambda t, L_{\Gamma}+j). \qquad (3.135)$$

Приближенную формулу можно получить, используя известное неравенство:

$$I(A, L_o+1) * I(A, L_{\Gamma}) \le I(A, L_o+1) I(A, L_{\Gamma}).$$

Тогда

$$K^*_{г\text{ЗИП}-2У}(t) \ge 1 - I(A, L_o+1) I(A, L_{\Gamma}), A = k\lambda t. \qquad (3.136)$$

Среднее по периоду пополнения значение коэффициента готовности находим по общей формуле:

$$K_{г\text{ЗИП}-2У}(T) = \frac{1}{T} \int_0^T K^*_{г\text{ЗИП}-2У}(t) dt. \qquad (3.137)$$

Рассмотрим два частных случая.

1) Пусть $L_O = 1$, $M = 5$, $L_{\Gamma} = 5$. Согласно (3.135) получим:

$$K^*_{г\text{ЗИП}-2У}(t,1,5) = 1 - I(5A,5) + e^{-A}(1+A)\left(\frac{5}{4}\right)^5 I(4A,5) - \left(\frac{5}{4}\right)^6 I(4A,6). \qquad (3.138)$$

Приближенное значение:

$$K^*_{г\text{ЗИП}-2У}(t,1,5) \ge 1 - I(A,2) I(A,5), A = k\lambda t. \qquad (3.139)$$

Среднее по периоду пополнения значение коэффициента готовности:

$$K_{г\text{ЗИП}-2У}(T,1,5) \ge \frac{1}{A}(I(A,1) + I(A,2)) + \frac{1}{C} \sum_{i=0}^{4} I(C, i+1) -$$

$$- \frac{1}{A+C} \sum_{i=0}^{4} \left(\frac{C}{A+C}\right)^i I(A+C, i+1) - \frac{1}{C(A+C)} \sum_{i=0}^{4} i \left(\frac{C}{A+C}\right)^i I(A+C, i+1),$$

$$A = k\lambda T, C = MA. \qquad (3.140)$$

2) Пусть $L_o = 3$, $M = 5$, $L_\Gamma = 3$. Приближенные значения коэффициента готовности:

$$K^*_{г\text{ЗИП}-2У}(t,3,3) \geq 1 - I(A,4)I(A,3), A = k\lambda t\,, \tag{3.141}$$

$$K_{г\text{ЗИП}-2У}(T,3,3) \geq \frac{1}{A}\sum_{i=0}^{3} I(A,i+1) + \frac{1}{C}\sum_{i=0}^{2} I(C,i+1) - \frac{1}{A+C}\sum_{i=0}^{3} i\left(\frac{A}{A+C}\right)^i I(A+C,i+1) -$$

$$-\frac{C}{(A+C)^2}\sum_{i=0}^{3}(i+1)\left(\frac{A}{A+C}\right)^i I(A+C,i+2) - \frac{C^2}{(A+C)^3}\sum_{i=0}^{3} C_{i+2}^2\left(\frac{A}{A+C}\right)^i I(A+C,i+3)\,.$$

Пополнение по уровню (модель 2.4)

Модель функционирования имеет аналогии с моделью 2.2 (ПЭД). Если в модели 2.2 заявка на пополнение формируется после попадания в состояние $L_o + 1$ (после $L_o + 1$-го отказа элемента), то здесь заявка формируется после попадания в состояние $L_o - m$. Заявка всегда содержит требование доставки $L_o - m$ запасных частей. Поэтому число элементов запаса в комплекте ЗИП-Г равно:

$$g = [\frac{L_\Gamma}{L_o - m}],\ L_o \geq 2m + 2\,.$$

Как и раньше, будем предполагать, что в периоде пополнения ЗИП-Г допускается только одно пополнение ЗИП-О. Вероятность того, что заявка будет выполнена:

$$Q = P(Y \leq g-1\} = \sum_{i=0}^{g-1} C_{M-1}^i p_{L_o-m}^i (1 - p_{L_o-m})^{M-1-i}\,. \tag{3.142}$$

Если пополнение не состоялось, то конечным будет состояние $L_o + 1$ с вероятностью p_{L_0+1}.

Если пополнение состоялось, то всего будет $2L_o - m + 2$ состояний (от 0 до $2L_o - m + 1$). Вероятности состояний определяют по формулам:

$$p_j = \frac{A^j}{i!}e^{-A}, j = 0...2L_o - m, p_{2L_o-m+1} = 1 - \sum_{j=0}^{2L_o-m} p_j = I(A,2L_o - m + 1)\,. \tag{3.143}$$

Коэффициент готовности системы ЗИП в момент времени t находим по формуле:

$$K^*_{г\text{ЗИП}-2У}(t) = 1 - (1-Q)p_{L_o+1} - Qp_{2L_o-m+1} = 1 - I(A,L_o+1) + Q(I(A,L_o+1) - I(A,2L_o - m + 1))\,. \tag{3.144}$$

Среднее по периоду пополнения значение коэффициента готовности:

$$K_{г\text{ЗИП}-2У}(T) = \frac{1}{A}(\sum_{i=0}^{L_o} I(A,i+1) + Q\sum_{i=L_o+1}^{2L_o-m} I(A,i+1)), A = k\lambda T\,. \tag{3.145}$$

3.5. Заключение

В *приложении 3* приведены примеры по расчету и оптимизации состава комплектов ЗИП по показателям достаточности и количественный анализ результатов оптимизации. По результатам анализа можно сделать выводы:

- из расчетов в примерах П3.1 и П3.2, в частности, следует, что для увеличения вероятности безотказной работы образца аппаратуры вовсе не обязательно увеличивать запасы и

значение показателя достаточности комплекта ЗИП. Варьируя стратегиями пополнения и параметрами стратегии, можно выбрать вариант, в котором вероятность будет увеличена до требуемого значения при одновременном снижении коэффициента готовности ЗИП и суммарных затрат на создание начальных запасов;

- при обслуживании комплектов ЗИП-О оптимизация запасов в комплекте ЗИП-Г проводится в предположении, что размер кластера (элемента запасов) остается неизменным, т. е. количество запасных частей каждого типа в комплекте ЗИП-О фиксировано. Это значит, что в пределах этой постановки задачи оптимизации задача оптимального распределения запасов между уровнями в двухуровневой системе ЗИП не решается. Однако если разрешить перебор вариантов по составу кластеров, то возможна и оптимизация распределения запасов между уровнями. Правда, этот путь весьма трудоемкий, т. к. количество рассматриваемых вариантов может быть велико;
- при обслуживании комплектов ЗИП-О влияние ограниченности запасов в комплекте ЗИП-Г на показатели достаточности ЗИП-О относительно не велико: снижение коэффициента готовности ЗИП-О составляет всего несколько процентов. Поэтому при предварительных расчетах это влияние можно не учитывать.

3.6. Вопросы для самоконтроля

- Какие способы нормирования показателей достаточности известны в технике?
- Сформулируйте прямую и обратную задачи оптимизации комплекта ЗИП по критериям достаточности и стоимости.
- Какие этапы предусматривает алгоритм оптимизации комплекта одиночного ЗИП и каково их назначение?
- Какое правило выбора запасной части используют при многошаговой оптимизации комплекта ЗИП-О?
- На какой идее основана упрощенная одношаговая процедура расчета комплекта ЗИП-О?
- Как выбирают тип запасной части и новую стратегию пополнения в процессе многошаговой оптимизации при возможном варьировании стратегии пополнения?
- Дайте характеристику трех основных моделей функционирования группового ЗИП (ЗИП-Г).
- Какое правило выбора запасной части используют при многошаговой оптимизации комплекта ЗИП-Г?
- На какой идее основана упрощенная одношаговая процедура расчета комплекта ЗИП-Г?
- Как учесть среднее время задержки в выполнении заявки комплектом ЗИП-Г при оценке надежности образца аппаратуры, обслуживаемого комплектом ЗИП-Г?
- Дайте характеристику двух основных моделей функционирования двухуровневой системы ЗИП (ЗИП-2У).
- В чем состоят различия в трактовке показателей достаточности комплекта ЗИП-Г и системы ЗИП-2У?
- При каких условиях комплект ЗИП-Г и второй уровень системы ЗИП-2У будут иметь характеристики НИП?

ГЛАВА 4

Логико-вероятностное описание систем при использовании ЗИП

4.1. Классификация систем по структурным признакам

Для отражения логики связи отказа системы и отказов ее элементов используют графический и аналитический методы.

Графический метод основан на использовании эквивалентной схемы проводимости или структурной схемы надежности. Каждому работоспособному элементу сопоставляют один эквивалентный элемент цепи с бесконечной проводимостью (нулевым сопротивлением), а неработоспособному элементу — один элемент цепи с нулевой проводимостью (бесконечным сопротивлением). Работоспособному состоянию системы сопоставляется проводящее состояние эквивалентной цепи. Обрыв эквивалентной цепи истолковывается как отказ системы. Пересечению событий «работоспособное состояние элемента» соответствует эквивалентная система с последовательным соединением элементов. Это соответствие и объясняет происхождение названия соединения. Последовательное соединение в структурной схеме надежности вовсе не означает обязательного последовательного электрического соединения. Например, для диодов такое соответствие имеет место (рис. 4.1, *а*).

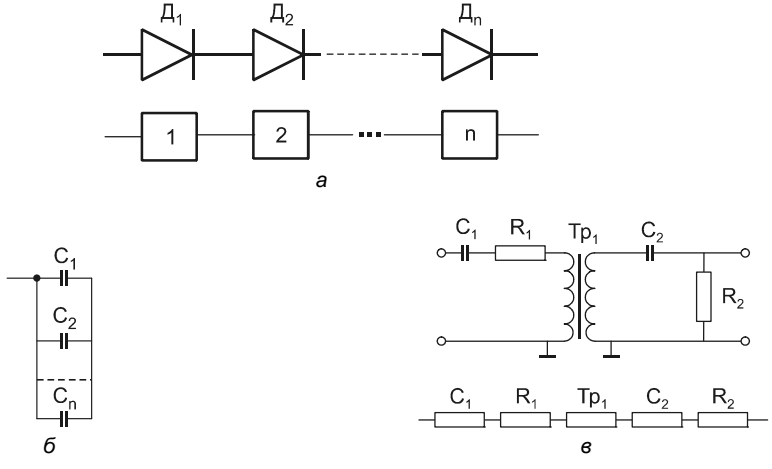


Рис. 4.1. Примеры последовательных систем: *а* — диодная схема; *б* — конденсаторная схема; *в* — связанные контуры

Однако для конденсаторов при отказах типа «замыкание» последовательному соединению в структурной схеме соответствует параллельное электрическое соединение (рис. 4.1, *б*). Может быть и так, что элементы, стоящие рядом в эквивалентной схеме проводимости, вообще не имеют непосредственного электрического соединения, например, как в контуре, содержащем резисторы ($R1$, $R2$), конденсаторы ($C1$, $C2$) и трансформатор Тр1 (рис. 4.1, *в*). Кроме того, в эквивалентной схеме допускаются любые перестановки элементов в пределах последовательной цепочки (вследствие коммутативности операции умножения), чего нельзя делать в электрической схеме.

В системах со структурным резервированием для графического отображения логики отказов используют параллельное соединение. Причем к параллельному соединению относят схемы резервирования с нагруженным, ненагруженным, облегченным резервом, с целой и дробной кратностью (рис. 4.2).

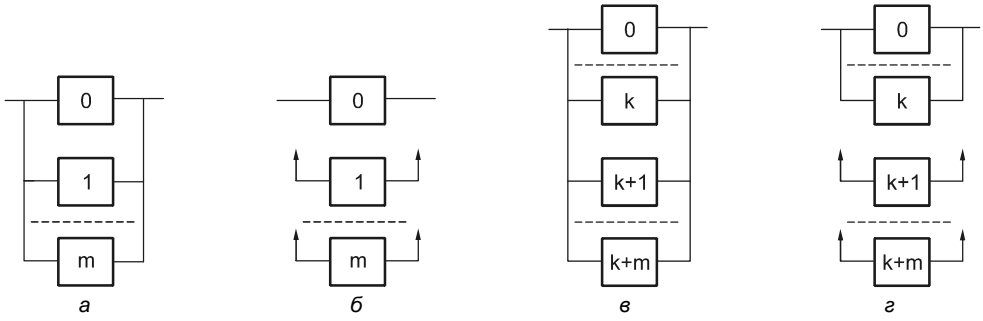


Рис. 4.2. Примеры параллельного соединения с целой и дробной кратностью:
а, *б* — нагруженное и ненагруженное резервирование с целой кратностью;
в, *г* — нагруженное и ненагруженное резервирование с дробной кратностью

Комбинируя схемы рис. 4.2 и 4.1, получают различные варианты структурного резервирования с последовательно-параллельным или параллельно-последовательным соединением элементов. В этом определении первым названо внутреннее соединение, а вторым — внешнее. По этой классификации система с общим структурным резервом относится к классу последовательно-параллельных (рис. 4.3, *а*), а с раздельным резервированием — к классу параллельно-последовательных (рис. 4.3, *б*). Рекурсивно можно построить и более сложные схемы, например, последовательно-параллельно-последовательные (рис. 4.3, *в*) или параллельно-последовательно-параллельные (рис. 4.3, *г*) и т. д.

По количеству вложенных друг в друга различных типов соединений будем различать последовательно-параллельные структуры второго, третьего и более высоких порядков.

Система с последовательно-параллельной структурой обладает такой особенностью, что ее путем декомпозиции можно расчленить на совокупность схем только с последовательным или только с параллельным соединением элементов. При декомпозиции рекомендуется следующий порядок действий:

1. Определяют, какое соединение (последовательное или параллельное) является внешним. Например, в схеме (рис. 4.3, *в*) внешним является последовательное соединение, а в схеме (рис. 4.3, *г*) внешним является параллельное соединение.
2. Все подсистемы, имеющие между собой внешнее соединение, заменяют эквивалентными элементами высшего (первого) уровня.

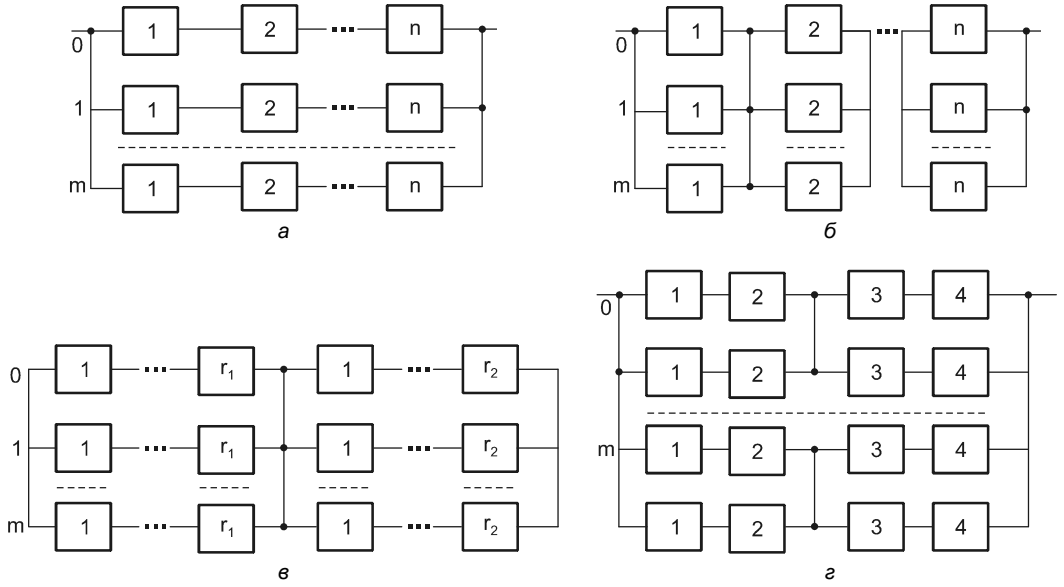


Рис. 4.3. Примеры последовательно-параллельных систем 2-го и 3-го порядков:
а, *б* — структуры 2-го порядка; *в*, *г* — структуры 3-го порядка

3. В каждой из подсистем, являющихся эквивалентными элементами предыдущего уровня, определяют тип внешнего соединения.
4. В каждой из подсистем рассматриваемого уровня с определенным в предыдущем пункте типом соединения выделяют эквивалентные элементы следующего уровня.
5. Действия пп. 3 и 4 выполняют до тех пор, пока эквивалентные элементы не совпадут с элементами исходной структуры.
6. Для каждой из подсистем нижнего уровня определяют показатели надежности по формулам последовательного или параллельного соединения. Эти показатели используют далее как характеристики эквивалентных элементов в подсистемах более высокого уровня.
7. Поскольку эквивалентные элементы также соединены между собой последовательно или параллельно, для определения показателей надежности подсистемы более высокого уровня используют те же методики и расчетные формулы, что и в п. 6. Такое «восхождение» продолжается до тех пор, пока не будут получены показатели надежности исходной системы.

Пример 4.1

Для повышения надежности в невосстанавливаемой системе применено структурное резервирование согласно рис. 4.4.

Элементы 1′, 3′, 4′ и 5′ находятся в нагруженном резерве, элемент 2′ — в ненагруженном резерве, а элемент 3″ — в облегченном резерве с коэффициентом облегчения k. Необходимо найти вероятность безотказной работы системы при следующих функциях распределения наработки до отказа элементов:

$$F_i(t) = 1 - e^{-(\lambda_i t)^{m_i}},\ m_1 = 2, m_2 = m_3 = m_7 = 1, m_4 = m_5 = 1{,}5,\ F_6(t) = 1 - (1 + \lambda_6)e^{-\lambda_6 t}.$$

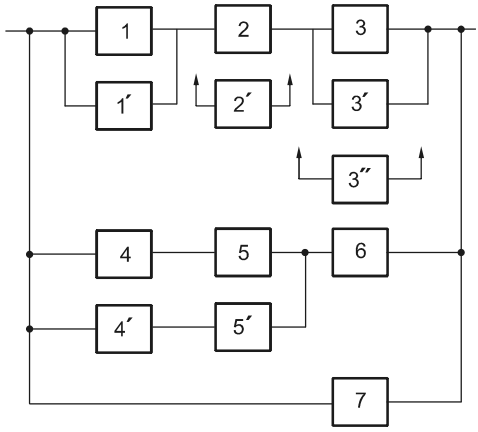


Рис. 4.4. Структурная схема системы (к примеру 4.1)

Решение

Декомпозиция исходной структуры приводит к последовательности структур, изображенных на рис. 4.5.

Используя известные формулы для последовательного соединения, нагруженного, ненагруженного и облегченного резерва, находим:

$$P_c(t) = 1 - F_I(t)F_{II}(t)F_7(t); F_I(t) = 1 - P_{11}(t)P_{12}(t)P_{13}(t); F_{II}(t) = 1 - P_{21}(t)P_6(t),$$

$$P_{11}(t) = 1 - F_1^2(t), P_{12}(t) = (1+\lambda_2)e^{-\lambda_2 t},$$

$$P_{13}(t) = \frac{2}{k(1+k)}e^{-(2+k)\lambda_3 t} - \frac{2+k}{k}e^{-2\lambda_3 t} + \frac{2(2+k)}{1+k}e^{-\lambda_3 t},$$

$$P_{21}(t) = 1 - F_{211}^2(t), F_{211}(t) = 1 - P_4(t)P_5(t), F_i(t) = 1 - P_i(t). \qquad (4.1)$$

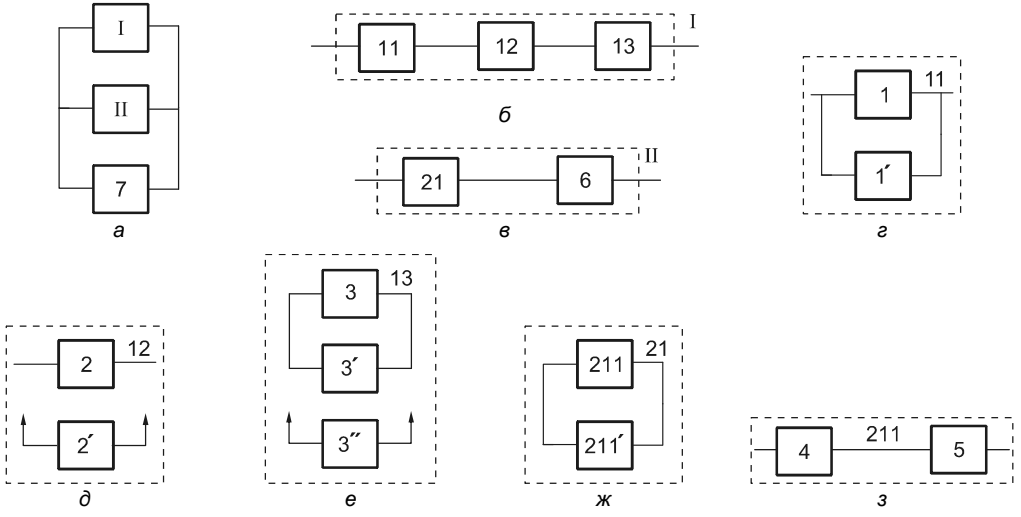


Рис. 4.5. Декомпозиция структуры (к примеру 4.1):
а — укрупненные подсистемы первого уровня; *б, в* — структуры подсистем первого уровня;
г, д, е, ж — структуры подсистем второго уровня; *з* — структура подсистемы 211

Расчеты в формулах (4.1) надо проводить, начиная с самого низкого уровня иерархии и переходя к элементам более высокого уровня.

Все системы с последовательно-параллельным соединением любого уровня объединяются в класс последовательно-параллельных структур. Главным признаком этого класса является возможность расчленить структуру на элементы с помощью декомпозиции.

Однако некоторые структуры не поддаются расчленению на элементы с помощью декомпозиции. Это значит, что они не могут быть отнесены к классу последовательно-параллельных структур. Классическим примером такой схемы является так называемая мостиковая схема (рис. 4.6).

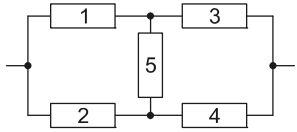


Рис. 4.6. Мостиковая схема

Это может быть система передачи данных с двумя ретрансляционными станциями А и Б. Тогда элементы 1–5 представляют собой не что иное, как каналы связи. Такая же структурная схема может возникнуть в системе электроснабжения аппаратуры, если элементы 1 и 2 — источники первичного питания, 3 и 4 — генераторы постоянного тока, а 5 — коммутирующее устройство, позволяющее подсоединить источник 1 к генератору 4 или источник 2 к генератору 3. Эта схема является представителем класса сложных структур.

Все точки соединения в любой структурной схеме можно подразделить на периферийные и внутренние. Периферийной точкой или полюсом называют входную и выходную точки соединения в эквивалентной схеме проводимости (структурной схеме надежности). Все остальные точки называют внутренними. По количеству входных и выходных полюсов все структурные схемы можно разделить на несколько классов. Если структура имеет один входной и один выходной полюс, ее называют двухполюсной. Если структура имеет один входной и несколько выходных полюсов или один выходной и несколько входных, ее называют ветвящейся. Наконец, если структура имеет несколько входных и несколько выходных полюсов, ее называют многополюсной. Далее в этом разделе рассматриваются только двухполюсные структуры.

Внутренние точки соединения могут быть двух типов: узлами или простыми точками. Внутреннюю точку называют узлом, если после удаления всех элементов, соединенных с обоими полюсами, разрезание в точке соединения приводит к потере связности структурной схемы, т. е. структурная схема распадается на два изолированных фрагмента. Узлами структурной схемы исходной системы являются также узлы любого фрагмента этой схемы, расположенного между двумя узлами или между узлом и одним из полюсов. В последнем случае фрагмент становится изолированным после разрезания в полюсе и узле. Внутреннюю точку соединения, не являющуюся узлом, называют простой точкой соединения. Разрезание структуры в простой точке не приводит к потере связности. Используя введенные понятия внутренних точек, можно дать более строгие определения классов структур.

Определение 1

Последовательно-параллельной называют структуру, в которой все внутренние точки соединения являются узлами.

Определение 2

Сложной называют структуру, в которой есть хотя бы одна простая внутренняя точка соединения.

Установить принадлежность любой структурной схемы к одному из этих классов можно с помощью многошаговой процедуры с двумя операциями: удаление элементов, соединенных с обоими полюсами, и разрезание по внутренним точкам соединения. Если применение этих операций во внутренних точках соединения исходной структуры и всех ее изолированных фрагментов приводит к расчленению структурной схемы на изолированные элементы, то она последовательно-параллельная. Если в результате применения процедуры остается хотя бы один фрагмент, который не удается расчленить на изолированные элементы, структура является сложной.

При анализе надежности систем со сложной структурой принимаются следующие допущения: соединения всех элементов в структурной схеме постоянные (режим работы нагруженный), отказы элементов — независимые события, для каждого элемента задана функция вероятности безотказной работы.

По количеству полюсов сложные структуры можно разделить на подклассы: двухполюсные, ветвящиеся многополюсные. В двухполюсной структуре есть только один входной и один выходной полюс. В ветвящейся структуре есть один входной и несколько выходных полюсов или несколько входных и один выходной полюс. В многополюсной структуре имеется несколько входных и несколько выходных полюсов.

В зависимости от логики взаимодействия и характеристик входных и выходных элементов одна и та же система может рассматриваться и как двухполюсная, и как многополюсная. Например, система электроснабжения группы потребителей энергии, имеющая в своем составе несколько генераторов электрического тока, может быть двухполюсной, если требуется обеспечить энергией обязательно всех потребителей и для этого требуется мощность всех имеющихся генераторов. Но эта же система может считаться многополюсной, если интересуются количеством потребителей, обеспеченных электроэнергией (с определенной вероятностью), и имеется запас мощности совокупности генераторов.

Для систем, восстанавливаемых с помощью ЗИП, существенное значение имеет еще один признак классификации: однородность или неоднородность. Для однородных структур создается общий ресурс запасных элементов. Для неоднородных структур создаются запасы стольких типов, сколько различных элементов имеется в невосстанавливаемой системе. В зависимости от расположения элементов внутри одной и той же структуры, в нее встраиваются запасы различных типов. Поэтому одной и той же невосстанавливаемой структуре может соответствовать несколько различных структур с учетом ЗИП. В связи с этим, по двум признакам можно выделить следующие четыре класса;

- **класс 1** — однородные последовательно-параллельные структуры. Внутри этого класса будем различать структуры 1-го, 2-го, 3-го и более высоких порядков;
- **класс 2** — неоднородные последовательно-параллельные структуры. Внутри этого класса также будем различать структуры 1-го, 2-го, 3-го и более высоких порядков. Однако они будут также отличаться количеством и расположением внутри одной и той же структуры элементов определенного типа, представленных запасами этого же типа в комплекте ЗИП. Примеры структур класса 2 первого, второго и третьего порядков приведены на рис. 4.2 и 4.3;
- **класс 3** — однородные сложные структуры. Внутри этого класса будем различать структуры с ориентированными и неориентированными связями. Примеры двухполюсных структур класса 3 приведены на рис. 4.7. Все элементы с различными номерами имеют одни и те же показатели надежности и режимы функционирования;
- **класс 4** — неоднородные сложные структуры. Внутри этого класса также будем различать структуры с ориентированными и неориентированными связями. Примеры двухпо-

люсных структур класса 4 приведены на рис. 4.7. Только здесь элементы с различными номерами имеют, вообще говоря, различные показатели надежности и/или режимы функционирования.

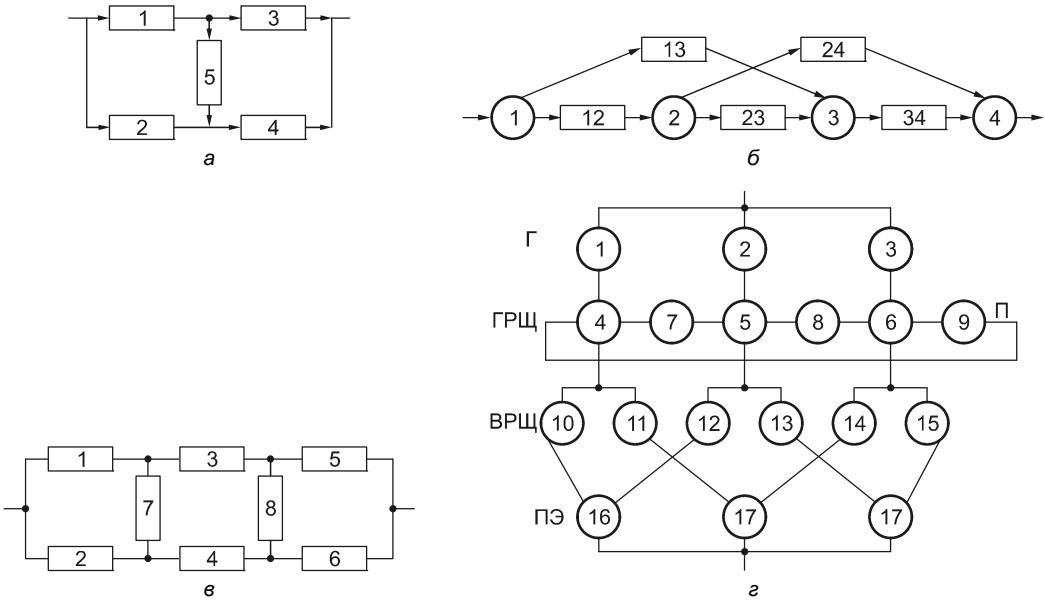


Рис. 4.7. Примеры ориентированных (*а*, *б*) и неориентированных (*в*, *г*) структур

Графический способ при своей наглядности все же не столь универсален. В некоторых случаях не удается сопоставить системе никакой эквивалентной схемы, не используя фиктивных элементов. При разработке модели и анализе надежности обычно используют структурную схему, если удается с ее помощью правильно отразить логику отказов системы. Если же не удается, то переходят к записи логической функции работоспособности (ЛФРС) или логической функции неработоспособности системы (ЛФНС).

4.2. Модели и методы анализа надежности невосстанавливаемых систем с последовательно-параллельной структурой

Если интенсивности отказов элементов постоянны (или кусочно постоянны), то распределения наработки системы до ближайшего изменения состояния будут экспоненциальными. Тогда модель системы будет марковской. Ее особенностью является то, что такая система «не помнит» своей предыстории. Ее вероятностные характеристики на некотором отрезке времени зависят только от того, в каком состоянии система находится в начальный момент времени, и не зависит от того, каким образом она попала в это состояние. Это свойство называют марковским, а момент времени, в котором марковское свойство выполняется, называют марковской точкой. В марковской модели каждый момент времени является марковской точкой. Если количество марковских точек конечно или счетно, то модель называют полумарковской. Прочие модели являются немарковскими.

Анализ марковских и полумарковских моделей надежности систем проводят с помощью аппарата теории марковских и полумарковских случайных процессов соответственно. Немарковские модели поддаются анализу только в предположении о независимости отказов элементов системы, т. к. сводятся к схеме независимых событий (схеме Бернулли) и анализируются с помощью исчисления вероятностей случайных событий. Рассмотрим далее методы анализа надежности применительно к конкретным схемам структурного резервирования.

4.2.1. Исчисление вероятностей в схеме независимых событий

Исчисление вероятностей случайных событий используют в том случае, когда все резервные элементы находятся в нагруженном режиме. Анализ надежности проводят при следующих допущениях:

- в элементах могут возникать внезапные отказы только одного типа (типа «обрыв» или «короткое замыкание»);
- известны функции распределения $F_i(t)$ наработки i-го элемента до отказа;
- отказы различных элементов есть независимые (в совокупности) события;
- отказы в системе обнаруживаются практически в момент их возникновения;
- переключение резерва производится идеальным автоматом переключения, т. е. автоматом, срабатывающим мгновенно и безотказно при появлении сигнала об отказе основного элемента.

Рассмотрим теперь частные случаи (рис. 4.8).

Общее нагруженное резервирование с целой кратностью (см. рис. 4.8, *а*)

Обозначая через A_i случайное событие «отказ i-го элемента» и применяя теорему умножения для независимых событий, находим следующее выражение для вероятности отказа системы [67, 71]:

$$Q_c(t) = P(A_0 A_1 ... A_m) = P(A_0)P(A_1)...P(A_m) = F_0(t)F_1(t)...F_m(t), \qquad (4.2)$$

где $F_0(t)$ и $F_i(t)$ — функции распределения наработки до отказа основного и резервных элементов.

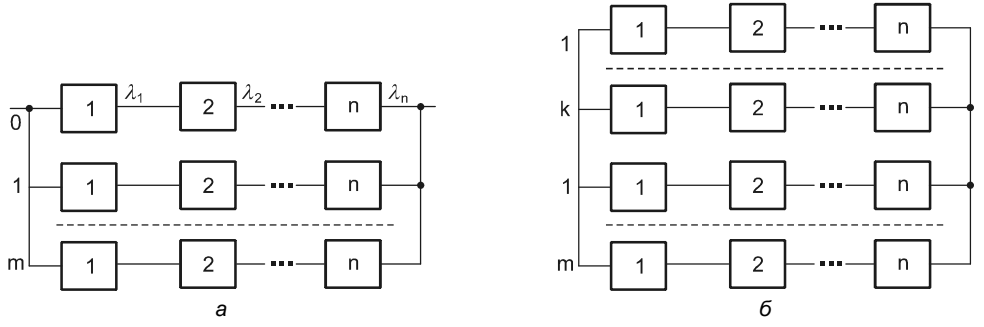


Рис. 4.8. Схемы структурного резервирования:
а — с целой кратностью; *б* — с дробной кратностью

Вероятность безотказной работы

$$P_c(t) = 1 - Q_c(t) = 1 - F_0(t)F_1(t)...F_m(t)\,. \qquad (4.3)$$

В частности, при экспоненциальных распределениях наработки

$$P_c(t) = 1 - \prod_{i=0}^{m}(1 - \exp(-\lambda_i t))\,. \qquad (4.4)$$

Общее нагруженное резервирование с дробной кратностью (см. рис. 4.8, *б*)

Используя теорему сложения несовместных событий, для случая одинаковых элементов системы получим следующее выражение для вероятности безотказной работы:

$$P_c(t) = \sum_{i=0}^{m} C_{k+m}^{i}(1 - F(t))^{k+m-i} F^i(t)\,, \qquad (4.5)$$

где:

$F(t)$ — функция распределения наработки до отказа одного элемента;

$C^{\,i}_{m+k}$ — число сочетаний из $k+m$ элементов по i;

i — число неработоспособных элементов.

В частности, при экспоненциальных распределениях наработки элементов имеем

$$P_c(t) = e^{-k\lambda t}\sum_{i=0}^{m} C_{k+m}^{i}(1 - e^{-\lambda t})^i e^{-(m-i)\lambda t}\,. \qquad (4.6)$$

При $k = 1$ формулы (4.5)–(4.6) совпадают с формулами (4.3)–(4.4). Формулу (4.5) легко обобщить на случай различных элементов. Для этого необходимо каждое слагаемое в этой формуле представить как сумму $C^{\,i}_{m+k}$ слагаемых, каждое из которых есть произведение вероятностей отказа элементов выбранного подмножества i элементов и вероятностей безотказной работы остальных элементов.

В схемах общего резервирования в качестве структурного элемента может быть последовательная система, для которой вероятность безотказной работы находят по соответствующей формуле. Тогда функции $F_i(t)$ и $F(t)$ в формулах (4.2) и (4.5) следует трактовать как вероятность отказов последовательной системы.

Раздельное нагруженное резервирование

При резервировании с целой кратностью система является последовательным соединением n резервированных групп, каждая из которых имеет структуру, приведенную на рис. 4.8, *а*. В состав i-й группы входят один основной и m_i резервных элементов. Все элементы одной группы одинаковы и имеют одну и ту же функцию распределения наработки до отказа $F_i(t)$. Вероятность безотказной работы i-й группы находят по формуле (4.2) с учетом того, что элементы одинаковы

$$P_{1i}(t) = 1 - F_i^{m_i+1}(t)\,. \qquad (4.7)$$

Подставляя (4.7) в формулу последовательного соединения, найдем вероятность безотказной работы системы

$$P_c(t) = \prod_{i=1}^{n} P_{1i}(t) = \prod_{i=1}^{n}(1 - F_i^{m_i+1}(t))\,. \qquad (4.8)$$

При экспоненциальных распределениях наработки до отказа формула (4.8) приобретает вид

$$P_c(t) = \prod_{i=1}^{n}(1 - (1 - e^{-\lambda_i t})^{m_i+1})\,. \qquad (4.9)$$

В частности, при $m_i = m$, $\lambda_i = \lambda$ имеем

$$P_c(t) = (1-(1-e^{-\lambda t})^{m+1})^n . \quad (4.10)$$

При $n = 1$ формулы (4.10) совпадают с (4.4).

При резервировании с дробной кратностью резервированная группа имеет структуру, приведенную на рис. 4.8, *б*, с k_i основных и m_i резервных элементов. Вероятность безотказной работы резервированной группы находят по формуле (4.6) при $k = k_i$, $m = m_i$, $\lambda = \lambda_i$. Подставляя (4.6) в (4.8), найдем вероятность безотказной работы системы. При экспоненциальных распределениях наработки до отказа и одинаковых элементах во всех резервированных группах имеем

$$P_c(t) = e^{-kn\lambda t}(\sum_{i=0}^{m} C_{k+m}^{i}(1-e^{-\lambda t})^i e^{-(m-i)\lambda t})^n . \quad (4.11)$$

В случае мажорирования по схеме «два из трех» $k = 2$, $m = 1$, и тогда формула (4.11) приобретает вид

$$P_c(t) = P^n, P = p^2(1+2q), q = 1-p = F(t) . \quad (4.12)$$

Формула (4.12) верна и при неэкспоненциальных распределениях $F(t)$.

4.2.2. Марковская модель

Основным допущением марковской модели является допущение о постоянстве интенсивности отказов элементов. В этом случае распределение времени до ближайшего изменения состояния системы вследствие отказа какого-либо элемента будет экспоненциальным. Экспоненциальными должны быть распределения и других случайных величин, которые учитываются в модели надежности и могут влиять на изменение состояния системы, например времени подключения резерва, времени обнаружения отказа, времени реконфигурации структуры. Безусловно, это серьезное ограничение, которого нет в схеме Бернулли. Однако оно всегда выполняется, если техническое изделие находится на участке нормальной эксплуатации. Вместе с тем, теоретико-вероятностная схема, соответствующая марковской модели, позволяет в значительной степени освободиться от существенного допущения в схеме Бернулли о независимости отказов. Вместо гипотезы о независимости здесь принимается гипотеза о том, что интенсивность отказов каждого элемента постоянна только при неизменном состоянии системы и может скачкообразно меняться при каждом изменении состояния. Это дает возможность анализировать надежность при ненагруженном и облегченном резерве, а также при комбинированном резерве, когда в одной и той же системе различные резервные элементы находятся в нагруженном, облегченном и ненагруженном режимах. Для анализа надежности используют математический аппарат теории марковских случайных процессов с непрерывным временем и дискретным пространством состояний.

Основные этапы метода следующие:

1. Устанавливают все различные состояния системы, причем каждое состояние системы определяют как некоторую совокупность состояний ее элементов.
2. Составляют граф состояний системы как совокупность индексов состояний с указанными с помощью стрелок возможными переходами.
3. На графе состояний указывают интенсивности переходов из одного состояния в другое, равные сумме интенсивностей отказов элементов, вызвавших переход.
4. На графе выделяют подмножества работоспособных E_+ и неработоспособных E_- состояний.

5. Для каждого состояния вводят вероятность $P_i(t)$ того, что в момент времени t система окажется в состоянии i.
6. Для вероятностей $P_i(t)$ составляют систему линейных дифференциальных уравнений.
7. Выполняют операционное преобразование дифференциальных уравнений по Лапласу — Карсону и находят изображения $P_i^*(s)$.
8. Составляют выражения для изображений функции вероятности безотказной работы и вероятности отказа системы:

$$P_c^*(s) = \sum_{i \in E_+} P_i^*(s), Q_c^*(s) = \sum_{i \in E_-} P_i^*(s) . \quad (4.13)$$

9. Выполняют обратное преобразование в формулах (4.13).

При составлении системы дифференциальных уравнений относительно $P_i(t)$ для каждого состояния определяют два подмножества непосредственно связанных с ним состояний: L_{1i} — подмножество состояний, из которых возможет переход в состояние i, L_{2i} — подмножество состояний, в которые возможен переход из состояния i. Система дифференциальных уравнений имеет вид [67]

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = -\sum_{j \in L_{2i}} \Lambda_{ij} P_i(t) + \sum_{k \in L_{1i}} \Lambda_{ki} P_k(t), i \in E_+ . \quad (4.14)$$

Начальные условия имеют вид: $P_0(0) = 1$, $P_i(0) = 0$, $i > 0$.

Проиллюстрируем применение метода марковских процессов к анализу надежности системы с одинаковыми элементами при общем комбинированном резервировании с дробной кратностью. Система состоит из k основных и m резервных элементов, подключаемых автоматически с помощью идеального переключателя. Все элементы одинаковы. Резервные элементы могут находиться в любом из трех режимов: нагруженном, облегченном, ненагруженном. При отказе основного элемента один из резервных элементов переходит в рабочий режим, а другие могут изменить свой режим, например, перейти из ненагруженного режима в облегченный или нагруженный. Кроме того, в элементах, сохранивших свой режим, могут изменяться по определенному закону интенсивности отказов. В соответствии с изложенной ранее последовательностью этапов выделим в системе $m + 1$ работоспособное состояние: 0, 1, 2, ..., m, где номер состояния совпадает с количеством отказавших элементов. Состояние $m + 1$, когда работоспособно только $k - 1$ элемент, будет уже неработоспособным. Вследствие ординарности потока отказов в системе возможен переход только в соседнее состояние с номером, на единицу большим. Интенсивность переходов из состояния i в состояние $i + 1$ совпадает с суммарной интенсивностью отказов Λ_i всех работоспособных элементов в i-м состоянии. Полученную вероятностную схему называют схемой гибели.

Для схемы гибели система уравнений (4.14) имеет вид:

$$P_0'(t) = -\Lambda_0 P_0(t) , \quad P_{m+1}'(t) = \Lambda_m P_m(t) ,$$
$$P_i'(t) = \Lambda_{i-1} P_{i-1}(t) - \Lambda_i P_i(t), i = 0,1,...,m . \quad (4.15)$$

Начальные условия: $P_0(0)=1$, $P_i(0)=0$, $i>0$.

Операционное преобразование Карсона в (4.15) дает:

$$(s + \Lambda_0) P_0^*(s) = s , \quad -\Lambda_m P_m^*(s) + s P_{m+1}^*(s) = 0 , \quad (4.16)$$
$$-\Lambda_{i-1} P_{i-1}^*(s) + (s + \Lambda_i) P_i^*(s) = 0, i = 0,1,...,m .$$

Если в системе нет резервных ненагруженных элементов, то решение (4.16) относительно $P_{m+1}^*(s)$ можно представить в виде

$$Q_c^*(s) = P_{m+1}^*(s) = \frac{\Lambda_0\Lambda_1...\Lambda_m}{(s+\Lambda_0)(s+\Lambda_1)...(s+\Lambda_m)}. \quad (4.17)$$

Здесь все Λ_i различны, поэтому функция (4.17) имеет только простые полюса:

$$s_i = -\Lambda_i,\ i = 0...m,\ s_{m+1} = 0.$$

Определяя вычеты в простых полюсах, находим

$$P_c(t) = 1 - Q_c(t) = \sum_{i=0}^{m} e^{-\Lambda_i t} / \prod_{j=0,\,j\neq i}^{m}(1-\Lambda_i/\Lambda_j). \quad (4.18)$$

Используя тауберову теорему [67], найдем выражение для средней наработки до отказа системы

$$\overline{T}_{0c} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}(1-Q_c^*(s)) = \sum_{i=0}^{m}\frac{1}{\Lambda_i}. \quad (4.19)$$

Если в системе имеется r элементов в ненагруженном резерве и они расходуются в первую очередь, то интенсивности переходов $\Lambda_i = \Lambda_0$ для $i = 1...r$ и тогда изображение для функции вероятности отказов приобретает вид

$$Q_c^*(s) = \frac{\Lambda_0^{r+1}\Lambda_{r+1}...\Lambda_m}{(s+\Lambda_0)^{r+1}(s+\Lambda_{r+1})...(s+\Lambda_m)}. \quad (4.20)$$

Полюс $s_0 = -\Lambda_0$ имеет кратность $r + 1$. Вычет в этом полюсе находят по формуле

$$\operatorname{Re} s(-\Lambda_0) = \lim_{s\to-\Lambda_0}\frac{1}{r!}\frac{d^r}{ds^r}\frac{\Lambda_0^{r+1}\Lambda_{r+1}...\Lambda_m}{s(s+\Lambda_{r+1})...(s+\Lambda_m)}e^{st} = -A(t)e^{-\Lambda_0 t}. \quad (4.21)$$

Находя вычеты в простых полюсах функции (4.20) и учитывая (4.21), получим выражение для вероятности безотказной работы системы

$$P_c(t) = 1 - Q_c(t) = A(t)e^{-\Lambda_0 t} + \sum_{i=r+1}^{m} e^{-\Lambda_i t} / \left(\left(1-\frac{\Lambda_i}{\Lambda_0}\right)\prod_{j=r+1,\,j\neq i}^{m}\left(1-\frac{\Lambda_i}{\Lambda_j}\right)\right). \quad (4.22)$$

Другой способ получения расчетной формулы состоит в том, чтобы представить формулу (4.20) в виде произведения

$$Q_c^*(s) = Q_1^*(s)Q_2^*(s), \quad (4.23)$$

$$Q_1^*(s) = (\Lambda_0/(s+\Lambda_0)),\ Q_2^*(s) = \prod_{i=r+1}^{m}(\Lambda_i/(s+\Lambda_i)).$$

Произведению изображений в области оригиналов соответствует интеграл типа свертки, функции $Q_1^*(s)$ соответствует распределение Эрланга с параметрами Λ_0 и $r + 1$, функции $Q_2^*(s)$ соответствует функция типа (4.18). Поэтому формулу для вероятности отказа системы находят путем интегрирования

$$Q_c(t) = \int_0^t Q_2(t-x)\frac{\Lambda_0^{r+1}x^r}{r!}e^{-\Lambda_0 x}dx, \quad (4.24)$$

$$Q_2(t) = 1 - \sum_{i=r+1}^{m} e^{-\Lambda_i t} / \prod_{j=r+1,\,j\neq i}^{m}(1-\Lambda_i/\Lambda_j).$$

Для каждой конкретной схемы резервирования можно убедиться, что формулы (4.22) и (4.24) приводят к одинаковому результату.

4.2.3. Композиция распределений

Этот метод используется для анализа надежности систем с общим ненагруженным резервом. Он основан на том, что наработка отказа системы может быть представлена в виде суммы независимых слагаемых

$$T_{oc} = T_{01} + T_{02} + \ldots + T_{0,m+1},$$

где T_{0i} — наработка до i-го отказа элемента. Для суммы независимых случайных величин функция распределения наработки системы до отказа может быть получена как m-кратная свертка распределения $F(t)$ наработки до отказа одного элемента

$$Q_c(t) = (F(t))^{*(m+1)}, \tag{4.25}$$

где * — знак операции композиции (свертки).

При неэкспоненциальном распределении $F(t)$ формула (4.25) соответствует резервированию с целой кратностью. При экспоненциальном распределении она верна также и при резервировании с дробной кратностью. Если в системе есть k основных и m резервных элементов и каждый из них в нагруженном состоянии имеет интенсивность отказов λ, то $F(t) = 1 - \exp(-k\lambda t)$. Тогда с учетом (4.25) получим

$$Q_c(t) = 1 - \sum_{i=0}^{m} \frac{(k\lambda t)^i}{i!} e^{-k\lambda t} = I(k\lambda t, m+1), \tag{4.26}$$

где $I(k\lambda t, m+1)$ — неполная гамма-функция с целочисленным параметром.

Если наработка элемента до отказа имеет распределение Эрланга с параметрами k и λ, то при ненагруженном резервировании с целой кратностью вероятность отказа системы находят по формуле

$$Q_c(t) = I(\lambda t, k(m+1)). \tag{4.27}$$

В реальных технических проектах возникают схемы резервирования, требующие применения нескольких методов расчета надежности. Конкретные расчетные формулы для различных схем резервирования приведены в [71, глава 6].

4.2.4. Логико-вероятностное описание последовательно-параллельных систем

Для описания логики отказов можно использовать индикаторы безотказной работы (работоспособного состояния) или индикаторы отказов (неработоспособного состояния). В первом случае индикатор $x_i = 1$, если i-й элемент работоспособен, и $x_i = 0$, если неработоспособен. Во втором случае индикатор $y_i = 1$, если элемент неработоспособен, и $y_i = 0$, если работоспособен. Очевидно, что индикаторы связаны соотношением $x_i = \overline{y_i}$. Используя индикаторы x_i и y_i, составим логические функции работоспособности системы F (ЛФРС) или неработоспособности последовательной системы G (ЛФНС), используя операции конъюнкции и дизъюнкции

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 x_2 \ldots x_n, G(y_1, y_2, \ldots, y_n) = y_1 \vee y_2 \vee \ldots \vee y_n.$$

Функции связаны между собой операцией логического отрицания. Поэтому

$$F = \overline{y}_1\overline{y}_2...\overline{y}_n, G = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee ... \vee \overline{x}_n .$$

Для параллельной системы ЛФРС и ЛФНС имеют вид:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1 \vee x_2 \vee ... \vee x_n, G(y_1, y_2, ..., y_n) = y_1 y_2 ... y_n .$$

Для однородной системы при резервировании с дробной кратностью *m/k*:

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = \bigvee_{(i_j = 1...k+m)} \overset{m}{\underset{j=1}{\&}} x_{i_j}, i_1 \neq i_2 \neq ... \neq i_m ,$$

$$G(y_1, y_2, ..., y_n) = \bigvee_{(i_j = 1...k+m)} \overset{k+1}{\underset{j=1}{\&}} y_{i_j}, i_1 \neq i_2 \neq ... \neq i_{k+1} .$$

В частности, для схемы мажорирования «2 из 3» имеем

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3, G(y_1, y_2, y_3) = y_1y_2 \vee y_1y_3 \vee y_2y_3 .$$

4.3. Модели и методы анализа надежности невосстанавливаемых систем со сложной структурой

4.3.1. Метод перебора гипотез для систем с однородной структурой

Этот метод используется для анализа надежности систем, состоящих из одинаковых элементов. Согласно этому методу вероятность безотказной работы разыскивается в виде [67]

$$P_c(t) = \sum_{i=l}^{n} A_i p^i q^{n-i} , \qquad (4.28)$$

где:

l — глубина схемы, число элементов в минимальном замыкающем множестве;

A_i — число различных замыкающих множеств, состоящих из i элементов;

$p = 1 - q$ — вероятность безотказной работы элемента. Замыкающим называют такое множество элементов, работоспособное состояние которых обеспечивает работоспособность системы.

Вместо (4.28) можно использовать формулу

$$Q_c(t) = 1 - P_c(t) = \sum_{i=s}^{n} B_i q^i p^{n-i} , \qquad (4.29)$$

где:

s — ширина схемы, число элементов в минимальном размыкающем множестве;

B_i — число различных размыкающих множеств, состоящих из i элементов. Размыкающим называют такое множество элементов, отказ которых приводит к отказу системы.

Вычисляя несколько первых членов суммы в (4.28) и (4.29), удается получить двустороннюю оценку точного значения вероятности

$$\sum_{i=l}^{n_1} A_i p^i q^{n-i} \leq P_c(t) \leq 1 - \sum_{i=s}^{n_2} B_i q^i p^{n-i} . \qquad (4.30)$$

Пример 4.2

Найти вероятность безотказной работы системы, структурная схема соединения элементов которой приведена на рис. 4.6.

Решение

Глубина схемы равна $l = 2$. Поэтому необходимо найти четыре коэффициента A_i. Замыкающие множества содержат следующие элементы: (13, 24) при $i = 2$; (135, 134, 123, 245, 124, 234, 145, 235) при $i = 3$; (1234, 1235, 1245, 2345) при $i = 4$; (12345) при $i = 5$. Подставляя значения A_i в формулу (4.28), получим

$$P_c(t) = 2p^2q^3 + 8p^3q^2 + 5p^4q + p^5 . \quad (4.31)$$

Ширина схемы $s = 2$. Размыкающие множества содержат следующие элементы: (13, 24) при $i = 2$; (125, 124, 123, 134, 234, 345, 145, 235) при $i = 3$; (1234, 1235, 1245, 2345) при $i = 4$; (12 345) при $i = 5$. Подставляя значения B_i в формулу (4.29), получим

$$Q_c(t) = 2p^3q^2 + 8p^2q^3 + 5pq^4 + q^5 . \quad (4.32)$$

Путем несложных преобразований можно убедиться в том, что из (4.31) и (4.32) получается одно и то же значение вероятности безотказной работы системы.

Метод перебора гипотез может быть обобщен на случай различных элементов системы. При этом также составляются перечни замыкающих и размыкающих множеств, как и в случае однотипных элементов. Только вероятности возникновения каждого множества определяются отдельно для каждого из них в соответствии с исходными данными о надежности элементов. Поэтому в формулах (4.28) и (4.29) вместо каждого из слагаемых появляется сумма из A_i или B_i слагаемых, каждое из которых есть произведение вероятностей безотказной работы или вероятностей отказа элементов. Например, вместо первого слагаемого в (4.31) появится сумма: $p_1q_2p_3q_4q_5 + q_1p_2q_3p_4q_5$, а вместо первого слагаемого в (4.32) сумма: $q_1p_2q_3p_4p_5 + p_1q_2p_3q_4p_5$.

4.3.2. Метод эквивалентных схем

Метод эквивалентных схем основан на использовании формулы полной вероятности в виде

$$P_c(t) = f(p_1, p_2, ..., p_n) = p_1P(t \mid p_1 = 1) + q_1P(t \mid p_1 = 0) . \quad (4.33)$$

Входящие в (4.33) условные вероятности представляют собой вероятности безотказной работы систем, одна из которых отличается от исходной лишь тем, что у нее первый элемент идеально надежный, а в другой первый элемент вообще отсутствует. Операция разбиения функции $P_c(t)$ на два слагаемых в (4.33) называется разрезанием по элементу 1. Вообще говоря, разрезание может быть проведено по любому элементу системы. Последовательность действий при использовании метода эквивалентных схем следующая:

1. В исходной системе выбирают элемент, по которому будет производиться разрезание. Обычно им становится элемент, расположенный между простыми точками соединения.
2. Исходную структурную схему преобразуют в две эквивалентные схемы, в одной из которых выбранный элемент заменяется безотказной перемычкой, а в другой удаляется.

Если обе полученные в предыдущем пункте схемы являются последовательно-параллельными, то для расчета их надежности используют методы, изложенные в *разд. 4.2*. После подстановки в (4.33) получают искомую вероятность. Если же одна или обе схемы остаются в классе сложных структур, то в ней проводят действия в соответствии с п. 1 и 2 и так до тех пор, пока все эквивалентные схемы не станут последовательно-параллельными.

Пример 4.3

Найти вероятность безотказной работы системы, структурная схема которой представлена на рис. 4.6.

Решение

Здесь можно провести разрезание по элементу 5. Замыкание и обрыв приводят к схемам с последовательно-параллельным соединением элементов (рис. 4.9).

Рис. 4.9. Эквивалентные схемы системы с мостиковой структурой:
а — структура системы при замыкании элемента 5; *б* — структура системы при удалении элемента 5

Используя формулы общего и раздельного резервирования с целой кратностью, находим

$$P_c(t) = p_5(1-q_1q_2)(1-q_3q_4) + q_5(1-(1-p_1p_3)(1-p_2p_4)), \tag{4.34}$$

где $p_i = 1–q_i$ — вероятность безотказной работы i-го элемента. В частности, при одинаковых элементах из (4.34) имеем

$$P_c(t) = 2p^5 - 3p^4 + 2p^3 + 2p^2. \tag{4.35}$$

Нетрудно установить, что формула (4.35) дает такой же результат, что и формулы (4.31) и (4.32).

Разрезание можно проводить и по нескольким элементам одновременно. При этом получается 2^m эквивалентных схем, а в формуле для вероятности безотказной работы будет 2^m слагаемых, где m — количество элементов, по которым проводится разрезание. В частности, при разрезании по двум элементам с номерами i и j вместо формулы (4.33) имеем

$$P_c(t) = p_i p_j P_c(t \mid p_i = p_j = 1) + q_i p_j P_c(t \mid p_i = 0, p_j = 1) +$$
$$+ p_i q_j P_c(t \mid p_i = 1, p_j = 0) + q_i q_j P_c(t \mid p_i = p_j = 0). \tag{4.36}$$

Пример 4.4

Найти вероятность безотказной работы системы, структурная схема которой представлена на рис. 4.7, *в*.

Решение

Проводя разрезание по элементам 7 и 8, получим четыре эквивалентных схемы, каждая из которых относится к классу последовательно-параллельных схем (см. рис. 4.10).

Используя формулы *разд. 4.2*, получим

$$P_c(t) = p_7p_8(1-q_1q_2)(1-q_3q_4)(1-q_5q_6) + q_7p_8(1-(1-p_1p_3)(1-p_2p_4))(1-q_5q_6) +$$
$$+ p_7q_8(1-(1-p_3p_5)(1-p_4p_6))(1-q_1q_2) + q_7q_8(1-(1-p_1p_3p_5)(1-p_2p_4p_6)) \tag{4.37}$$

При $p_5 = p_6 = p_8 = 1$ формула (4.37) совпадает с (4.34).

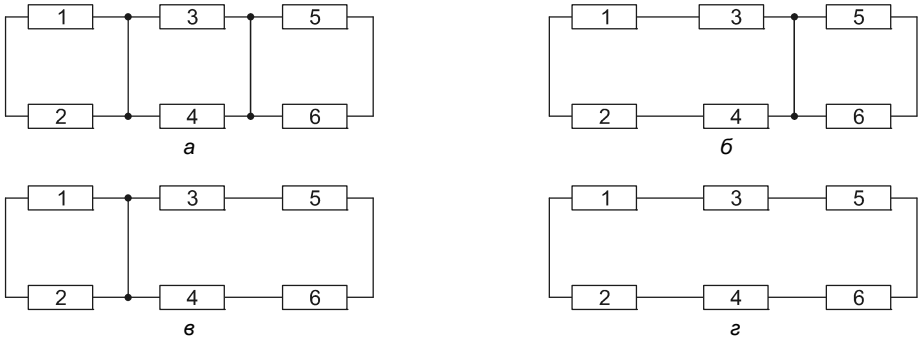


Рис. 4.10. Эквивалентные схемы системы со сложной структурой типа «лестница»: *а* — структура системы при замыкании элементов 7 и 8; *б* — структура системы при удалении элемента 7 и замыкании элемента 8; *в* — структура системы при замыкании элемента 7 и удалении элемента 8; *г* — структура системы при удалении элементов 7 и 8

4.3.3. Логико-вероятностный метод

В теории надежности термин «логико-вероятностный метод» впервые был введен в употребление, по-видимому, в 1964 году в работе [93]. Основы логико-вероятностного метода (ЛВМ), в том числе алгоритмы разрезания и ортогонализации, были разработаны в 1962–1964 гг. в серии работ [22, 24, 89–92]. Табличная форма алгоритмов разрезания и ортогонализации была предложена в 1967 году [46]. Эта форма удобна при ручном решении задач расчета надежности. Однако с появлением программных средств поддержки расчетов она потеряла свою актуальность. В начале 70-х годов автором данной книги был разработан модифицированный логико-вероятностный метод (МЛВМ), основанный на специально разработанной для этой цели алгебре смешанных форм [66]. Систематическое изложение алгебры смешанных форм и модифицированного метода проведено в работах [67] и [48, главы 6–8]. Модифицированный метод обладает высокой эффективностью и существенно расширяет класс и сложность анализируемых систем. В настоящее время он остается единственным методом, позволяющим проводить расчеты вероятностных характеристик связности сложных ветвящихся структур и информационной нагрузки элементов двухполюсных и многополюсных структур. В последующие годы арсенал математических средств ЛВМ пополнился двумя существенными результатами: разработаны вероятностные методы анализа чувствительности, использующие понятия веса и значимости [33, 47], и теоретические основы общего логико-вероятностного метода моделирования систем [26–28, 97, 94, 95]. На основе общего логико-вероятностного метода создан программный комплекс, позволяющий автоматизировать сложные расчеты [96].

Основная идея метода состоит в использовании математического аппарата булевой алгебры на начальной стадии анализа надежности структурно сложных систем [22, 24, 67, 71]. Процесс построения расчетной формулы состоит из трех этапов:

- **этап 1** — каждому элементу сопоставляется логическая переменная x_i, принимающая два значения: 1, если элемент работоспособен, и 0, если неработоспособен. Затем из условий работоспособности системы составляется логическая функция работоспособности (ЛФРС) вида $f(X)$, где $X = (x_1, x_2,..., x_n)$ — вектор-строка логических переменных, многомерный аргумент функции. Функция $f(X) = 1$, если есть хотя бы один работоспособный путь от входного полюса к выходному. Путь работоспособен, если работоспособны все входящие в него элементы. Каждому пути в логической функции работоспособности соответствует элементарная конъюнкция булевых переменных, соответствующих входя-

щим в путь элементам, в $f(X)$ есть дизъюнкция всех элементарных конъюнкций, соответствующих возможным путям между входным и выходным полюсами. Полученная таким образом форма функции является исходной;

- **этап 2** — исходная форма преобразуется к одной из стандартных форм, называемых формами перехода к полному замещению (ФППЗ) и допускающих замещение логических переменных вероятностями, а логических операций арифметическими;
- **этап 3** — в стандартной форме логической функции проводится замещение логической переменной x_i вероятностью $p_i = P(x_i = 1)$, отрицания логической переменной x_i' вероятностью $q_i = 1 - p_i = P(x_i = 1)$, дизъюнкции $\vee$ сложением +, конъюнкции $\wedge$ умножением $\times$, логического отрицания $\neg y$ вычитанием из единицы $1 - P(y = 1)$.

В настоящее время известно несколько форм перехода к полному замещению. Рассмотрим здесь три из них. Для этого сформулируем три теоремы.

Теорема 1

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ) является формой перехода к полному замещению (ФППЗ-1). Доказательство теоремы сводится к констатации того, что конституенты единицы, входящие в СДНФ, ортогональны и поэтому можно использовать формулу сложения исчисления вероятностей для несовместных событий.

Пример 4.5

Логическая функция работоспособности мажорированной системы по схеме «2 из 3» имеет вид

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3 . \tag{4.38}$$

Найти вероятность $P_c = P(f = 1)$.

Решение

Используя правила преобразования логических функций, приведем дизъюнктивную нормальную форму (ДНФ) вида (4.38) к СДНФ

$$f = x_1x_2x_3' \vee x_1x_2x_3 \vee x_1x_2'x_3 \vee x_1'x_2x_3 .$$

Отсюда замещением находим

$$P_c = P(f = 1) = p_1p_2p_3 + p_1p_2q_3 + p_1q_2p_3 + q_1p_2p_3 .$$

СДНФ является не совсем удобной формой перехода к полному замещению из-за большой трудоемкости преобразований на втором этапе и громоздкого вида конечной формулы. Однако она хорошо приспособлена к формализации процесса анализа.

Теорема 2

Бесповторная форма логической функции в базисе «конъюнкция — отрицание» является формой перехода к полному замещению (ФППЗ-2).

Бесповторной называют форму логической функции, если в ней каждая переменная входит не более одного раза. Для получения бесповторной формы могут использоваться операции поглощения, склеивания, распределительный закон булевой алгебры, а для исключения операции дизъюнкции — правило де Моргана

$$x_1 \vee x_2 = (x_1'x_2')' . \tag{4.39}$$

Пример 4.6

Пусть $f = x_1 \vee x_2 x_3' \vee x_2 x_4$. Необходимо найти $P_c = P(f = 1)$.

Решение

Сначала с помощью распределительного закона получаем бесповторную форму функции

$$f = x_1 \vee x_2 (x_3' \vee x_4) .$$

Затем дважды применяем правило де Моргана

$$f = (x_1' (x_2 (x_3 x_4')')')' .$$

Проводим здесь замещение

$$P_c = 1 - q_1 (1 - p_2 (1 - p_3 p_4)) .$$

Теорема 3

Дизъюнкция ортогональных бесповторных форм в базисе «конъюнкция — отрицание» является формой перехода к полному замещению (ФППЗ-3).

ФППЗ-3 имеет вид

$$f = Y_1 \vee Y_1 \vee \ldots \vee Y_m , \tag{4.40}$$

где:

$Y_i Y_j = 0$ для $i \neq j$;

Y_i — бесповторная форма в базисе «конъюнкция — отрицание».

Теорема 3 является обобщением теоремы 2. В (4.40) бесповторность должна быть только в пределах каждого дизъюнктивного члена, а в различных Y_i переменные могут повторяться. Теоремы 2 и 3 легко доказать, если перейти от булевой алгебры к алгебре событий и использовать формулы сложения и умножения исчисления вероятностей случайных событий.

Основной трудностью в применении логико-вероятностного метода является преобразование исходной формы ЛФРС к виду (4.40). Чтобы сделать это преобразование упорядоченным и пригодным к автоматизации, были разработаны два алгоритма [22, 24].

Алгоритм разрезания

Алгоритм основан на использовании формулы разложения функций в булевой алгебре

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 f(1, x_2, \ldots, x_n) \vee x_1' f(0, x_2, \ldots, x_n) . \tag{4.41}$$

Оба логических слагаемых в (4.41) ортогональны по построению. Последовательность действий в алгоритме следующая.

1. Подсчитывают количество вхождений каждой переменной в исходную форму f и выбирают букву x_i с наибольшим числом вхождений.
2. Проводят разрезание функции f по переменной x_i в соответствии с формулой (4.41).
3. В каждом из слагаемых выполняют преобразования с целью получить бесповторную форму в базисе $(\wedge, \neg)$ типа ФППЗ-2.
4. Если хотя бы в одном из слагаемых не удается получить ФППЗ-2, то проводят разрезание в этом слагаемом по другой переменной согласно п. 1 и 2 алгоритма. Если же во всех слагаемых получены формы ФППЗ-2, то алгоритм заканчивает работу.

Пример 4.7

С помощью алгоритма разрезания найти вероятность безотказной работы системы с мостиковой структурой (рис. 4.6).

Решение

ЛФРС имеет вид

$$f = x_1(x_3 \vee x_4x_5) \vee x_2(x_4 \vee x_3x_5) \ . \tag{4.42}$$

Подсчитывая число вхождений, убеждаемся, что дважды входят три переменные: x_3, x_4, x_5 . Выбираем x_5 и проводим разрезание

$$f = x_5(x_1(x_3 \vee x_4) \vee x_2(x_3 \vee x_4)) \vee x_5'(x_1x_3 \vee x_2x_4) .$$

Преобразуем здесь каждое слагаемое к ФППЗ-2

$$f = x_5(x_1 \vee x_2)(x_3 \vee x_4) \vee x_5'(x_1x_3 \vee x_2x_4) =$$

$$= x_5((x_1'x_2')'(x_3'x_4')')' \vee x_5'((x_1x_3)'(x_2x_4)')' .$$

Отсюда

$$P_c = P(f = 1) = p_5(1 - q_1q_2)(1 - q_3q_4) + q_5(1 - (1 - p_1p_3)(1 - p_2p_4)) . \tag{4.43}$$

Формула (4.43) совпадает с (4.34). Это неслучайно. Алгоритм разрезания представляет собой иную форму метода эквивалентных схем.

Алгоритм ортогонализации

Исходной формой функции в этом алгоритме является ДНФ. Ее преобразование к ФППЗ-3 основано на использовании следующих формул булевой алгебры:

$$f = Q_1 \vee Q_2 \vee ... \vee Q_m = Q_1 \vee Q_1'Q_2 \vee Q_1'Q_2'Q_3 \vee ... \vee Q_1'...Q_{m-1}'Q_m , \tag{4.44}$$

$$(xf)'x = f'x, (x'f)'x = x, (xf_1)'(xf_2)' = (x(f_1'f_2')')' \ . \tag{4.45}$$

Последовательность действий в алгоритме следующая:

1. Исходную форму ЛФРС преобразуют к ДНФ и все элементарные конъюнкции располагают в порядке возрастания числа букв.
2. ДНФ преобразуют к ортогональной дизъюнктивной форме по формуле (4.44).
3. Каждое слагаемое упрощают с помощью формул (4.45), пока не будут получены бесповторные формы ФППЗ-2.
4. Проводят замещение булевых переменных и логических операций.

Пример 4.8

Найти с помощью алгоритма ортогонализации вероятность безотказной работы системы с мостиковой структурой (рис. 4.6).

Решение

Функцию (4.42) преобразуем к виду

$$f = x_1x_3 \vee x_2x_4 \vee x_1x_4x_5 \vee x_2x_3x_5 .$$

Проводим ортогонализацию

$$f = x_1x_3 \vee (x_1x_3)'x_2x_4 \vee (x_1x_3)'(x_2x_4)'x_1x_4x_5 \vee (x_1x_3)'(x_2x_4)'(x_1x_4x_5)'x_2x_3x_5 .$$

Упрощаем с помощью формул (4.45)

$$f = x_1x_3 \vee (x_1x_3)'x_2x_4 \vee x_2'x_3'x_1x_4x_5 \vee x_1'x_4'x_2x_3x_5 .$$

Отсюда

$$P_c = P(f=1) = p_1p_3 + (1-p_1p_3)p_2p_4 + p_1q_2q_3p_4p_5 + q_1p_2p_3q_4p_5 . \quad (4.46)$$

Сравнение формул (4.43) и (4.46) показывает, что в данном примере метод разрезания дает более компактные формулы: формула (4.43) содержит 14 чисел, включая константы, и 14 операций, тогда как формула (4.46) имеет 17 чисел и 16 операций. В других примерах алгоритм ортогонализации имеет преимущество. В целом по большому количеству примеров различной сложности можно заключить, что ни один из приведенных алгоритмов не имеет ощутимого преимущества. Поэтому оба алгоритма могут быть рекомендованы к применению для решения практических задач.

4.3.4. Решение систем логических уравнений

На первом этапе решения задачи надежности с помощью логико-вероятностного метода необходимо составить логическую функцию работоспособности (ЛФРС). В простых случаях ЛФРС составляется как дизъюнкция элементарных конъюнкций, каждая из которых представляет путь между полюсами системы. Однако не всегда это просто сделать, т. к. таких различных путей могут быть сотни. Тогда удобнее составлять логические уравнения как компактную форму записи связи между различными элементами системы. В особенности это полезно для систем с неориентированными (двусторонними связями). Но в дальнейшем все равно надо представлять ЛФРС в явном виде, чтобы получить ФППЗ. Поэтому возникает задача решения систем логических уравнений. Наиболее известны два метода: метод определителей и метод подстановки [88, 48]. Рассмотрим здесь метод определителей.

Для многих технических систем ЛФРС можно представить в виде зависимости от других функций алгебры логики (ФАЛ) , связанных системой уравнений:

$$y = y(f_1, f_2, ..., f_n), \quad f_i = a_i \vee a_{i1}f_1 \vee a_{i2}f_2 \vee,,,\vee a_{in}f_n, i = 1,...,n . \quad (4.47)$$

где a_i — ФАЛ, выраженная через логические переменные. Форма записи ЛФРС в виде (4.47), во-первых, компактна, а во-вторых, удобна, т. к. учитывает только непосредственные логические связи элементов системы, легко просматриваемые даже в сложной системе. Очевидность логических связей и простота составления позволяют избежать ошибок на этапе записи ЛФРС.

Представим систему линейных логических уравнений (4.47) в векторной форме:

$$f = A_1 \vee Af , \quad (4.48)$$

где:

A_1 — вектор-столбец свободных членов;

$A = \left\| a_{ij} \right\|$ — матрица коэффициентов уравнений, причем $a_{ii} = 1$.

Так как все диагональные элементы матрицы равны 1, то определитель системы $\Delta = 1$. Неизвестные функции f_i находятся путем подстановки в определитель Δ на место i-го вектора свободных членов с последующим раскрытием определителя по правилам, аналогичным существующим в алгебре действительных чисел. Только здесь знак умножения заменяется знаком конъюнкции, а знаки сложения и вычитания — знаком дизъюнкции.

Пример 4.9

Рассмотрим систему, представленную на рис. 4.7, *г*. Это электроэнергетическая система, состоящая из трех генераторов (элементы 1, 2 и 3), трех главных распределительных щитов (4, 5 и 6), трех перемычек (7, 8 и 9), шести вторичных распределительных щитов (10–15) и трех групп потребителей электроэнергии (16, 17 и 18). Полагаем, что по условиям функционирования электроэнергией должны быть обеспечены непременно все три группы потребителей. Для питания всех трех групп достаточно мощности одного генератора. Необходимо найти вероятность безотказной работы системы при отсутствии восстановления.

Решение

Обозначим через f_i — логическую функцию-индикатор события, состоящего в том, что от элемента с номером i есть хотя бы один работоспособный путь к одному из генераторов. Тогда ЛФРС электроэнергетической системы можно выразить в виде:

$$y(x_1, x_2, ..., x_{15}) = (x_{10}f_4 \vee x_{12}f_5)(x_{11}f_4 \vee x_{14}f_6)(x_{13}f_5 \vee x_{15}f_6)\,. \quad (4.49)$$

Функции f_i удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$f_4 = x_4(x_1 \vee x_7f_5 \vee x_9f_6),\ f_5 = x_5(x_2 \vee x_7f_4 \vee x_8f_6),\ f_6 = x_6(x_3 \vee x_8f_5 \vee x_9f_4)\,. \quad (4.50)$$

Составляем определители для неизвестных функций:

$$f_4 = \begin{vmatrix} x_1x_4 & x_4x_7 & x_4x_9 \\ x_2x_5 & 1 & x_5x_8 \\ x_3x_6 & x_6x_8 & 1 \end{vmatrix},\ f_5 = \begin{vmatrix} 1 & x_1x_4 & x_4x_9 \\ x_5x_7 & x_2x_5 & x_5x_8 \\ x_6x_9 & x_3x_6 & 1 \end{vmatrix},\ f_6 = \begin{vmatrix} 1 & x_4x_7 & x_1x_4 \\ x_5x_7 & 1 & x_2x_5 \\ x_6x_9 & x_6x_8 & x_3x_6 \end{vmatrix}.$$

Раскрываем определители:

$$f_4 = x_4(x_1 \vee x_2x_5(x_7 \vee x_6x_8x_9) \vee x_3x_6(x_9 \vee x_5x_7x_8))\,, \quad (4.51)$$

$$f_5 = x_5(x_2 \vee x_1x_4(x_7 \vee x_6x_8x_9) \vee x_3x_6(x_8 \vee x_4x_7x_9))\,,$$

$$f_6 = x_6(x_3 \vee x_1x_4(x_9 \vee x_5x_7x_8) \vee x_2x_5(x_8 \vee x_4x_7x_9))\,.$$

Если подставить (4.51) в (4.49) и раскрыть скобки, то убедимся, что ЛФРС системы содержит 1000 конъюнктивных членов, т. е. в структурной схеме есть 1000 различных путей между полюсами. Составить такую ЛФРС непосредственно весьма затруднительно.

4.4. Модифицированный логико-вероятностный метод

Логико-вероятностный метод, изложенный в *разд. 4.3.3* и применяемый для анализа надежности двухполюсных сложных структур, содержит три этапа: запись логической функции работоспособности (ЛФРС), преобразование логической функции к форме перехода к полному замещению (ФППЗ) и полное замещение всех логических переменных вероятностями и логических операций арифметическими операциями. Модифицированный логико-вероятностный метод содержит еще один промежуточный этап — частичное замещение логических переменных вероятностями [48, 67, 71]. Поэтому вместо ФППЗ логическая функция преобразуется к форме перехода к частичному замещению (ФПЧЗ), а в результате частичного замещения появляется так называемая смешанная форма функции вероятностей (СФФВ), содержащая одновременно и вероятности, и логические переменные, арифметиче-

ские и логические операции. После некоторых преобразований в СФФВ выполняется постепенное (многошаговое) замещение остальных логических переменных с целью перехода к искомой развернутой форме функции вероятностей (РФФВ). Запись СФФВ по заданной функции алгебры логики (ФАЛ) проводится на основании следующих теорем.

Теорема 1

Пусть: 1) задана функция алгебры логики вида

$$f(X)=\left(\bigvee_{i=1}^{n}(\&_{j\in K_i}x_j)^{\sigma_i}f_i(X_i)\right)\left((\&_{j\in K_0}x_j)^{\sigma_0}f_0(X_0)\right), \tag{4.52}$$

где:

$\vee$ и & — логические операции дизъюнкции и конъюнкции;

X и X_i — векторные аргументы логических функций f и f_i соответственно;

σ_i — постоянные коэффициенты, равные нулю или единице: $x^{\sigma}=\bar{x}$ при $\sigma_i=0$ и $x^{\sigma}=x$ при $\sigma_i=1$;

x_j — бесповторные логические переменные;

$j\in K=\bigcup_{i=0}^{n}K_i$, f_i — функции алгебры логики произвольного вида.

2) события $x_j=\sigma_j$ независимы в совокупности, причем вероятности $P(x_j=1)=p_j$.

Тогда $f(X)$ есть форма перехода к частичному замещению и ей соответствует СФФВ

$$P_f=P(f(X)=1)=P(f_0,f_1,...,f_n)=(1-a_0^{f_0})(1-\prod_{i=1}^{n}a_i^{f_i}), \tag{4.53}$$

где $a_i=\prod_{j\in K_i}p_j,\sigma_i=0;a_i=1-\prod_{j\in K_i}p_j,\sigma_i=1,i=0...n;a_i^{f_i}=a_i,f_i=1;a_i^{f_i}=1,f_i=0$.

Доказательство теоремы можно найти в [67, с. 206–207].

Пример 4.10

Пусть $f(X)=x_4(x_{41}f_1\vee x_{42}f_2\vee x_{43}f_3)$, где x_4, x_{41}, x_{42}, x_{43} — бесповторные переменные. Надо найти вероятность $P(f(X)=1)$.

Решение

Бесповторные логические переменные заменяем вероятностями $p_i=P(x_i=1)$, а логические операции конъюнкции и отрицания — арифметическими операциями умножения и вычитания. Поскольку здесь $\sigma_i=1$, то $a_i=q_i=1-p_i$, а поэтому

$$P(f=1)=p_4(1-q_{41}^{f_1}q_{42}^{f_2}q_{43}^{f_3}). \tag{4.54}$$

Дальнейшая развертка (4.54) к РФФВ проводится путем разрезания по незамещенным логическим переменным в соответствии с теоремой разложения.

Теорема 2 (первая теорема разложения)

Пусть задана некоторая СФФВ $P(x_1, x_2, ..., x_n)$, зависящая от логических переменных $x_1, x_2,..., x_n$, и пусть события $A_i=(x_i=\sigma_i)$ независимы в совокупности.

Тогда

$$p(x_{s+1},...,x_n) = \sum_{(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_s)} P(x_i = \sigma_i, i = 1...s)\, p(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_s, x_{s+1},...,x_n)\,. \quad (4.55)$$

Утверждение теоремы следует непосредственно из формулы полной вероятности.

Теорема 3

Пусть заданы две логические функции

$$G_1(x_1, x_2,..., x_n, X_1, X_2,..., X_n) = \bigvee_{i=1}^{n} x_i f_i(X_i)\,,$$

$$G_2(x_1, x_2,..., x_n, Y_1, Y_2,..., Y_n) = \bigvee_{i=1}^{n} x_i g_i(Y_i)\,. \quad (4.56)$$

Составим третью функцию

$$f(x_1, x_2,..., x_n, X_1, X_2,..., X_n, Y_1, Y_2,..., Y_n) = \bar{G}_1 G_2\,. \quad (4.57)$$

Тогда: 1) если f_i и g_i ортогональны, т. е. то $f_i\, g_i = 0$ для $i = 1...n$, то (4.57) является формой перехода к частичному замещению и ей соответствует СФФВ

$$P_f = P(f = 1) = \prod_{i=1}^{n} q_i^{f_i} (1 - \prod_{i=1}^{n} q_i^{g_i})\,, \quad (4.58)$$

2) если f_i и g_i не ортогональны, то формой перехода к частичному замещению является выражение

$$f = \overline{\bigvee_{i=1}^{n} x_i f_i(X_i)} \left(\bigvee_{i=1}^{n} x_i \bar{f}_i g_i(Y_i) \right) \quad (4.59)$$

и ему соответствует СФФВ

$$P_f = P(f = 1) = \prod_{i=1}^{n} q_i^{f_i} (1 - \prod_{i=1}^{n} q_i^{\bar{f}_i g_i})\,. \quad (4.60)$$

Доказательство теоремы можно найти в [67, с. 208–209].

Пример 4.11

Пусть $f(X) = \overline{x_1 x_4 \vee x_2 x_3 \bar{x}_4}\,(x_1 x_3 \vee x_2 x_4)$. Найти $P(f(X) = 1)$.

Решение

Здесь $f_1 = x_4, f_2 = x_3 \bar{x}_4, g_1 = x_3, g_2 = x_4$. Функции f_2 и g_2 ортогональны. Поэтому ортогонализация необходима лишь для f_1 и g_1. Используя (4.60), получим

$$P(f = 1) = q_1^{x_4} q_2^{x_3 \bar{x}_4} (1 - q_1^{x_3 \bar{x}_4} q_2^{x_4})\,.$$

Здесь проведем разрезание сначала по x_4, а затем по x_3

$$P(f = 1) = p_4 q_1 (1 - q_2) + q_4 q_2^{x_3} (1 - q_1^{x_3}) = p_4 q_1 p_2 + q_4 p_3 q_2 p_1\,.$$

Теорема 4

Дизъюнкция и конъюнкция ФАЛ

$$A(X) = \bigvee_{(s)} A_s(X),\ A(X) = \&_{(s)} A_s(X)\,, \quad (4.61)$$

где $A_s(X)$ — логические функции вида (4.52), в которых x_j — бесповторные переменные для всех $j \in K = \bigcup_{(s,i)} K_{si}$, являются формой перехода к частичному замещению и им соответствуют СФФВ

$$Q_A = P(\vee_{(s)} A_s = 0) = \prod_{(s)} (1 - P(A_s = 1)), P_A = P(\&_{(s)} A_s = 1) = \prod_{(s)} P(A_s = 1). \quad (4.62)$$

Вероятности $P(A_s(X) = 1)$ находят по формуле (4.53). Если в дизъюнкции все слагаемые ортогональны, то достаточна бесповторность лишь в пределах одной функции $A_s(X)$.

Теорема 4 является обобщением теоремы 1. При ее доказательстве используется основной прием — сведение рассматриваемой задачи к схеме независимых событий путем замещения бесповторных переменных и перевода логических функций с повторяющимися переменными в показатели степени вероятностей.

В следующих трех теоремах рассматриваются производящие полиномы дискретных распределений, содержащие в качестве коэффициентов смешанные формы функции вероятностей.

Теорема 5 (вторая теорема разложения)

Пусть

$$\Phi(z, x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=0}^{r} p_i(x_1, x_2, ..., x_n) z^i \quad (4.63)$$

есть производящий полином некоторого дискретного распределения с коэффициентами, записанными в смешанной форме и зависящими от логических переменных x_1, x_2, ..., x_n. Тогда

$$\Phi(z, x_{s+1}, x_{s+2}, ..., x_n) = \sum_{(\sigma_1, ..., \sigma_s)} P(x_i = \sigma_i, i = 1...s) \Phi(z, \sigma_1, ..., \sigma_s, x_{s+1}, ..., x_n). \quad (4.64)$$

Данная теорема является одним из следствий теоремы 1.

Пример 4.12

Пусть $p_0(x_1, x_2) = q^{x_1 \vee x_2}$, $p_1(x_1, x_2) = q^{x_1} p^{x_2}$, $p_0(x_1, x_2) = 1 - q^{x_1 x_2}$. Необходимо найти производящий полином распределения.

Решение

Составим

$$\Phi(z, x_1, x_2) = q^{x_1 \vee x_2} + zq^{x_1} p^{x_2} + z^2 (1 - q^{x_1 x_2}). \quad (4.65)$$

Проведем сначала разрезание по x_1

$$\Phi(z, x_2) = p_1(q + zqp^{x_2} + z^2 (1 - q^{x_2})) + q_1(q^{x_2} + zp^{x_2}).$$

В каждом из слагаемых проведем разрезание по x_2 и получим окончательно

$$\Phi(z) = p_1 p_2 (q + zqp + pz^2) + p_1 q_2 (q + zqp) + q_1 q_2 (1 + z).$$

Теорема 6 (третья теорема разложения)

Пусть

$$\varphi(z, x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=0}^{m} p_i(x_1, x_2, ..., x_n) z^i \,, \tag{4.66}$$

$$\varphi(z, \sigma_1, ..., \sigma_s, x_{s+1}, ..., x_n) = \sum_{i=0}^{m} p_i(\sigma_1, ..., \sigma_s, x_{s+1}, ..., x_n) z^i \,, \tag{4.67}$$

$$\Phi(z, x_1, x_2, ..., x_n) = \varphi^r(z, x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=0}^{mr} P_i(x_1, x_2, ..., x_n) z^i \,. \tag{4.68}$$

Тогда

$$\Phi(z, \sigma_1, ..., \sigma_s, x_{s+1}, ..., x_n) = \varphi^r(z, \sigma_1, ..., \sigma_s, x_{s+1}, ..., x_n) \,. \tag{4.69}$$

Доказательство теоремы можно найти в [67, с. 211–212].

Пример 4.13

Пусть полином $\varphi(z, x_1, x_2)$ определен формулой (4.65), а полином

$$\Phi(z, x_1, x_2) = \varphi^2(z, x_1, x_2) \,.$$

Надо найти $\Phi(z, 1, 1)$.

Решение

Возведение в степень полинома (4.65) дает

$$\Phi(z, x_1, x_2) = (1 - q^{x_1 x_2})^2 z^4 + 2q^{x_1} p^{x_2} (1 - q^{x_1 x_2}) z^3 + (q^{2x_1} p^{2x_2} +$$
$$+ 2q^{x_1 \vee x_2} (1 - q^{x_1 x_2})) z^2 + 2q^{x_1 \vee x_2} q^{x_1} p^{x_2} z + q^{2(x_1 \vee x_2)} \,. \tag{4.70}$$

Непосредственно имеем

$$\Phi(z, 1, 1) = p^2 z^4 + 2p^2 q z^3 + (q^2 p^2 + 2pq) z^2 + 2q^2 pz + q^2 \,.$$

С другой стороны, по теореме 6 имеем $\Phi(z, 1, 1) = (q + pqz + pz^2)^2$. Нетрудно убедиться, что обе формулы совпадают.

Теорема 7 (четвертая теорема разложения)

Пусть

$$\Phi(z, x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{(j)} \Phi_j(z, x_1, x_2, ..., x_n) \,,$$

$$\Phi_j(z, x_{s+1}, x_{s+2}, ..., x_n) = \sum_{(\sigma_1, ..., \sigma_s)} P(x_i = \sigma_i, i = 1...s) \Phi_j(z, \sigma_1, ..., \sigma_s, x_{s+1}, ..., x_n) \,,$$

$$\Phi(z, x_{s+1}, x_{s+2}, ..., x_n) = \sum_{(\sigma_1, ..., \sigma_s)} P(x_i = \sigma_i, i = 1...s) \Phi(z, \sigma_1, ..., \sigma_s, x_{s+1}, ..., x_n) \,.$$

Тогда

$$\Phi(z, x_{s+1}, x_{s+2}, ..., x_n) = \sum_{(j)} \Phi_j(z, x_{s+1}, x_{s+2}, ..., x_n) \,. \tag{4.71}$$

Теорема легко доказывается путем изменения порядка суммирования.

Пример 4.14

Пусть

$$\Phi_1(z,x_1,x_2)=q^{x_1}+zp^{x_1}+z^2(1-q^{x_2}),\Phi_2(z,x_1,x_2)=q^{x_2}+zp^{x_2}+z^2(1-q^{x_1}),$$

$$\Phi(z,x_1,x_2)=\Phi_1(z,x_1,x_2)+\Phi_2(z,x_1,x_2)=$$

$$=(q^{x_1}+q^{x_2})+z(p^{x_1}+p^{x_2})+z^2(2-q^{x_1}-q^{x_2}). \qquad (4.72)$$

Надо найти Φ(z).

Решение

Разрезанием по x_1 и x_2 непосредственно из (4.70) находим

$$\Phi(z)=(2p_1p_2q+q(p_1q_2+q_1p_2)+2q_1q_2)+z(2p_1p_2p+$$

$$+(p+1)(p_1q_2+q_1p_2)+2q_1q_2)+z^2(2p_1p_2p+p(p_1q_2+q_1p_2)).$$

С другой стороны, по теореме 7 имеем

$$\Phi(z)=\Phi_1(z)+\Phi_2(z)=$$

$$=(q_1+p_1q+z(q_1+p_1q)+z^2p_2p)+(q_2+p_2q+z(q_2+p_2q)+z^2p_1p).$$

Не трудно убедиться в том, что обе формулы дают одинаковый результат.

4.5. Применение модифицированного ЛВМ для расчета надежности систем с ветвящейся структурой

4.5.1. Классификация ветвящихся структур

Структурная схема надежности технической системы не всегда может быть сведена к двухполюсной схеме (последовательно-параллельной или сложной). Это происходит тогда, когда в системе управления создается несколько уровней (рангов) управления и каждому органу (звену) управления некоторого уровня непосредственно подчинено несколько органов (звеньев) управления более низкого уровня (ранга) или исполнительных органов (звеньев), а сам он находится в подчинении и управляется органом (звеном) управления более высокого уровня (ранга). Такие системы называют иерархическими [48], а структуру системы называют многоуровневой или ветвящейся. Ветвящейся структурой обладают и подсистемы сбора (передачи) данных, обслуживающих иерархические системы управления. Ветвящейся может оказаться и внутренняя структура органа управления. Например, в автоматизированной системе управления блоком атомной электрической станции (АЭС) конфигурация вычислительной системы содержит процессор и несколько периферийных модулей (гибкие и жесткие магнитные диски с дисководами, мониторы, принтеры и пр.), сопрягаемые с помощью интерфейсных карт.

При формализации процесса функционирования системы с ветвящейся структурой удобно пользоваться терминологией теории графов и называть органы и звенья управления вершинами, а элементы подсистемы передачи данных вместе с каналами связи и магистрали передачи данных — дугами, обозначая их соответственно кружками и сплошными линиями со стрелками или без них (рис. 4.11).

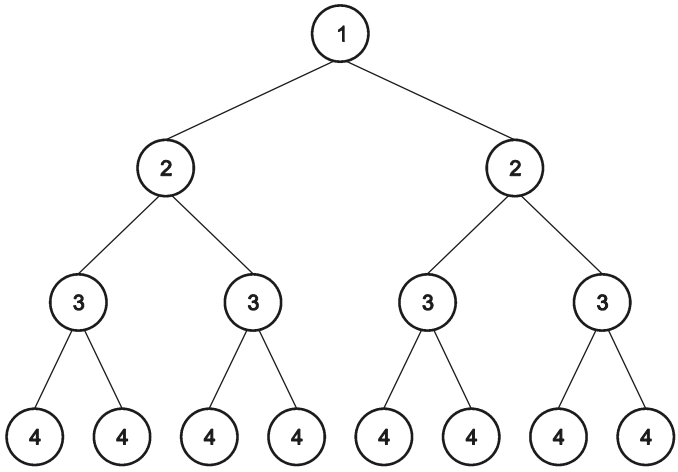


Рис. 4.11. Формализованная ветвящаяся структура типа «дерево» (число уровней $n = 4$, коэффициенты ветвления $r_1 = r_2 = r_3 = 2$)

В линейной структуре управления каждая вершина имеет связь только с вершинами соседних рангов (меридианные связи), но не имеет связей в пределах данного ранга (рокадных связей) и через несколько рангов. Такие структуры называют еще структурами непосредственного подчинения или структурами типа «дерево». В общем случае возможны произвольные меридианные связи между вершинами различных рангов и произвольные рокадные связи (рис. 4.12).

В системах связи меридианные связи между вершинами несоседних рангов и рокадные связи часто создаются с целью повышения надежности и живучести (рис. 4.12, *а*). В системах управления они приводят к так называемым паталогическим структурам [67]. Простейший пример паталогии — двойное подчинение (рис. 4.12, *б*, *г*), когда для некоторого звена существуют две вершины управления, которым оно непосредственно подчиняется. Чтобы такая система могла нормально функционировать, должно быть четкое разделение функций между звеньями более высокого ранга, которым подчинено данное звено. Существуют ситуации, когда неоднозначное подчинение осуществляется временно, например, на период временной неработоспособности основного звена. К паталогическим относят структуры, в которых некоторому звену подчиняется только одно звено более низкого ранга (рис. 4.12, *в*). Этот вырожденный случай означает, что один из уровней управления лишний. Однако если вводится двойное управление, то такой вариант получает объяснение и оправдание в связи с дублированием функций управления в интересах надежности. Еще один вид нарушений в иерархической структуре связан с межранговым управлением (рис. 4.12, *а*, *г*). Центральное звено, имеющее первый ранг, управляет звеньями нижнего ранга, минуя промежуточные уровни. Межранговое управление может возникнуть по различным причинам: ввиду исключительной важности некоторых звеньев нижнего ранга, особого характера выполняемых ими функций, риска отказа или потери по другим причинам звена непосредственного управления. В нормальных условиях управление звеном третьего ранга осуществляется центром через звено второго ранга. В особых условиях центр управляет периферийными звеньями непосредственно: при деградации структуры, при необходимости ускорения выполнения функции управления звеном 3 и др. При этом звено 2 должно быть уведомлено о том, что центр берет управление звеном 3 на себя во избежание двойного управления.

При распределении функций управления между различными звеньями более высокого ранга возможна ситуация, когда и в нормальных условиях периферийное звено управляется

звеньями нескольких рангов (например, звено 3 получает различные управляющие воздействия от звеньев 2 и 1). Тогда считается особым случай, когда некоторое звено находится под управлением только одного ближайшего по рангу звена. Это происходит при передаче центром части или всех своих функций на временной основе нижестоящим звеньям управления. Такое перераспределение функций возникает в интересах повышения оперативности управления, для разгрузки центра и по другим причинам и называется «делегированием полномочий».

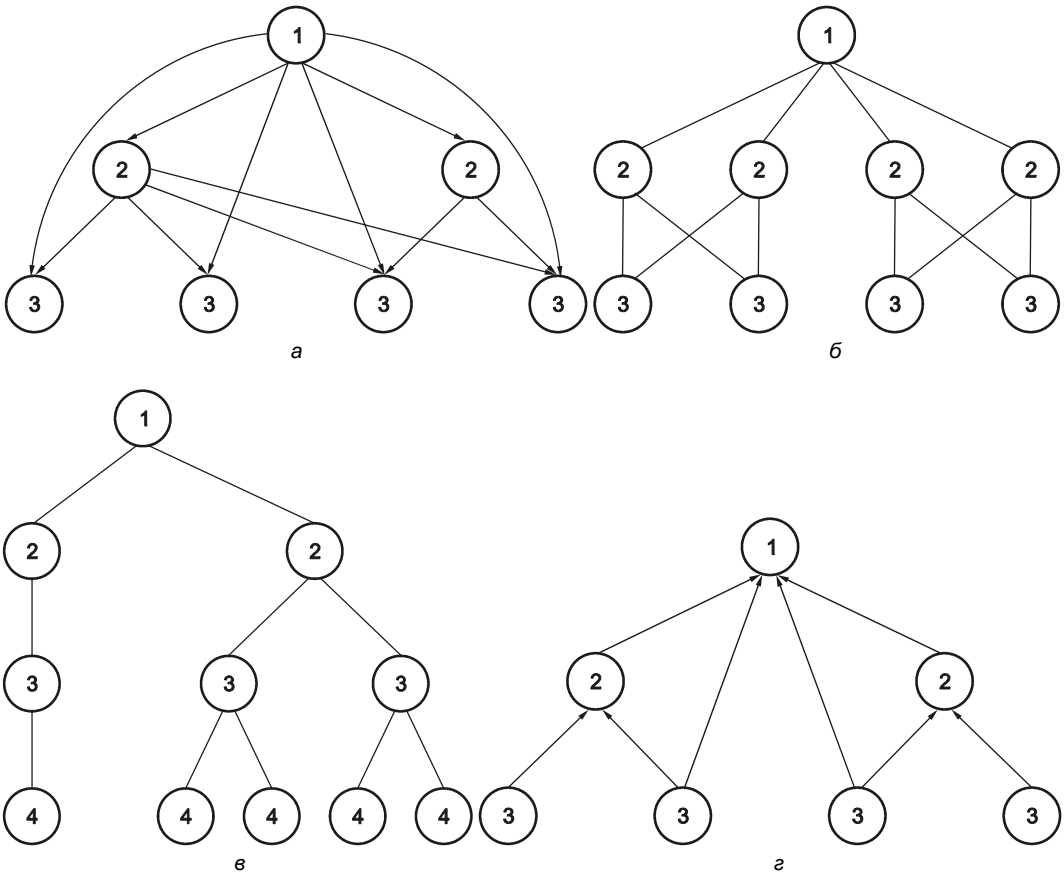


Рис. 4.12. Варианты ветвящихся структур с многоуровневым и неоднозначным подчинением: *а* — трехуровневая двусвязная структура с двойным подчинением и прямым управлением из центра ($n = 3$, $r_1 = r_2 = 2$); *б* — трехуровневая структура с неоднозначным подчинением на втором уровне ($n = 3$, $r_1 = 4$, $r_2 = 2$); *в* — паталогическая четырехуровневая структура; *г* — трехуровневая двусвязная структура с прямым управлением из центра ($n = 3$, $r_1 = r_2 = 2$)

В системах с меридианными связями полезно ввести понятие ветви. Ветвью называют фрагмент ветвящейся структуры, содержащий центральное звено, одно периферийное звено и все линии связи и звенья промежуточных рангов, которые принимают или могут принять участие во взаимодействии центрального и периферийного звеньев в процессе управления или сбора данных. Если ветвь содержит не более одного звена каждого ранга, оно называется простым. Прочие ветви называют сложными. Простые ветви могут быть односвязными, как в структуре типа «дерево», многосвязными или полносвязными. В полносвязной ветви

каждое звено связано прямыми линиями связи со всеми остальными звеньями этой ветви. Многосвязные звенья занимают промежуточное положение. Ветвящаяся система, имеющая хотя бы одну сложную ветвь, является системой с неоднозначным подчинением. Если все ветви системы одинаковы по структуре, то система называется изотропной, в противном случае неизотропной.

О надежности систем можно говорить только в том случае, если удается четко сформулировать критерии отказа, т. е. разделить все состояния системы на два подмножества: работоспособные и неработоспособные состояния. В системах с ветвящейся структурой снижение качества при отказах периферийных или промежуточных звеньев происходит постепенно, так что затруднительно отнести многие состояния к работоспособным или неработоспособным. Однако чтобы сформулировать задачу надежности, надо сконструировать критерий отказа. В настоящее время существует несколько предложений, как преодолеть эту трудность. Приведем здесь два из них. Для простоты будем рассматривать изотропную систему с меридианными связями, поскольку все рассуждения несложно обобщить на другие системы.

Первый подход состоит в использовании, в качестве промежуточных, показателей эффективности с последующим переходом к такому показателю надежности, как коэффициент сохранения эффективности. Сначала формулируется понятие работоспособности одной ветви: ветвь работоспособна, если есть хотя бы один работоспособный путь от центрального звена к периферийному (или в обратном направлении). Далее определяются вероятности того, что в заданный момент времени работоспособно ровно k ветвей из общего числа R

$$P_k(t) = P(K(t) = k)\,, \tag{4.73}$$

где $K(t)$ — случайное число работоспособных ветвей. Для каждого состояния $A_k = (K(t) = k)$ вводится весовой коэффициент a_k, характеризующий уровень качества функционирования системы в этом состоянии, и после этого вычисляется показатель эффективности по формуле

$$E = \sum\nolimits_{k=0}^{R} \alpha_k P_k(t)\,. \tag{4.74}$$

При идеально надежной аппаратуре показатель эффективности равен $E_0 = \alpha_R$. Коэффициент сохранения эффективности $K_э = E / E_0$. В частности, если функция изменения качества описывается полиномом m-й степени

$$\alpha_k = \sum\nolimits_{i=0}^{m} a_i k^i\,, \tag{4.75}$$

то

$$E = \sum\nolimits_{i=0}^{m} a_i M(N^i)\,, \tag{4.76}$$

где $M(N_i)$ — i-й начальный момент распределения числа работоспособных ветвей. Главная трудность в реализации этого подхода состоит в том, что в большинстве практических случаев не удается объективно установить весовые коэффициенты или обосновать их выбор. Вследствие значительной доли субъективности в выборе весовых коэффициентов ценность расчетов коэффициента сохранения эффективности бывает невысока.

Второй подход состоит в том, чтобы вычислять показатель надежности по заданному допустимому уровню снижения качества функционирования системы и соответствующему ему допустимому уровню деградации структуры. Тогда для невосстанавливаемых систем вероятность безотказной работы можно вычислить по формуле

$$P_c(t) = \pi_n(t) = \sum\nolimits_{k=0}^{R} P_k(t) = P(T_0 > t)\,, \tag{4.77}$$

где T_0 — наработка системы до того момента, когда откажет $R–n+1$ ветвь, а $P_k(t)$ находят по формуле (4.73). При различных n получают семейство зависимостей вероятностей от времени. Вместо семейства (4.77) можно находить семейство

$$\pi_t(n) = \sum_{k=0}^{R} P_k(t) = P(N(t) \geq n), \tag{4.78}$$

вычисляемое для заданного t.

Для восстанавливаемых систем также вычисляют вероятность того, что в момент t будет работоспособно не менее n ветвей. Эта вероятность не что иное, как нестационарный коэффициент готовности (функция готовности) системы при заданном пороге деградации структуры

$$K_{гс}(t,n) = \sum_{k=n}^{R} P_k(t). \tag{4.79}$$

Вместо семейства (4.79) можно при заданном t определять семейство

$$K_{гсt}(n) = \sum_{k=n}^{R} P_k(t) = P(N(t) \geq n). \tag{4.80}$$

Для стационарного участка эксплуатации вместо (4.80) получим семейство чисел, выражающих коэффициент готовности системы при заданном пороге деградации n

$$K_{гс}(n) = P(N \geq n). \tag{4.81}$$

Кроме дискретных распределений (4.78) и (4.81), для оценки надежности можно использовать моменты этих распределений

$$M(N^i) = \sum_{k=1}^{R} k^i P_k. \tag{4.82}$$

В частности, среднее число работоспособных ветвей как мера надежности

$$M(N) = \bar{N} = \sum_{k=1}^{R} kP_k. \tag{4.83}$$

Если $a_1 = 1$, а остальные $a_i = 0$, то согласно (4.76) имеем

$$E = MN = RP_в, E_0 = R, K_э = E / E_0 = P_в, \tag{4.84}$$

где $P_в$ — вероятность работоспособности одной ветви.

Далее будет рассматриваться второй подход как основной.

Система с многосвязной ветвящейся структурой обладает функциональной избыточностью. Поэтому определенная часть оборудования в каждой конкретной операции передачи данных или управляющего воздействия не участвует в процессе взаимодействия центрального и периферийного звеньев, пока нет отказов в основных направлениях связи этих звеньев, даже если это оборудование работоспособно. Поэтому возникает задача определения степени загрузки избыточных элементов и групп элементов выполнением функций основной подсистемы. Для оценки загрузки используют следующие показатели:

- коэффициент информационной загрузки i-й подсистемы одной ветви структуры $K_{иi}$, выражающий вероятность того, что в произвольный момент времени подсистема (путь, звено, линия связи, группа путей и т. д.) работоспособна, причем согласно принятому алгоритму распределения маршрутов в сети именно эта подсистема участвует в обеспечении взаимодействия центрального и периферийного звеньев;
- коэффициент полезного времени i-й подсистемы одной ветви $K_{пвi}$, равный отношению $K_{иi}$ к коэффициенту готовности $K_{гi}$ и выражающий долю времени работоспособного состояния, в течение которого используется данная подсистема;

- распределение числа работоспособных ветвей, в которых в заданный или произвольный момент времени используется данная подсистема.

Далее будут рассмотрены изотропные системы с меридианными связями и однозначным подчинением звеньев в ветвях. Для анализа надежности будет использоваться модифицированный логико-вероятностный метод (МЛВМ), представляющий собой развитие метода, рассмотренного в *разд. 4.3.3*. Основные математические результаты этого метода приведены в *разд. 4.4*.

4.5.2. Расчет надежности и выбор структурных параметров многосвязных систем при полном оповещении о состоянии сети

В невосстанавливаемых системах модифицированный логико-вероятностный метод используется для определения вероятности безотказной работы $P_c(t)$ и производных от нее показателей, а в восстанавливаемых системах — для определения коэффициента готовности $K_{гс}$ и функции готовности $K_{гс}(t)$ при условии независимого функционирования элементов как по отказам, так и по восстановлению. Последние два показателя являются локальными характеристиками надежности, относящимися к заданному t или произвольному моменту времени (но не к интервалу времени) и выражающими вероятность того, что в системе будет работоспособно не менее 6 заданного числа ветвей. В качестве аргументов для показателей надежности системы выступают соответствующие показатели для элементов ($P_i(t)$, $K_{гi}$, $K_{гi}(t)$). Поскольку методика нахождения указанных показателей надежности одна и та же, далее будем использовать обобщенный показатель $P_c\,(p_1, ..., p_n) = P\{F(x_1, ..., x_n) = 1\}$, где $p_i = P\{x_i = 1\}$, подразумевая под ним любой из приведенных выше показателей.

Одна многосвязная ветвь системы с ветвящейся структурой является двухполюсной системой и может быть представлена в виде ориентированного графа, в котором все элементы (звенья и линии связи) могут быть неработоспособными с ненулевыми и, вообще говоря, различными вероятностями (рис. 4.12, *а*). Ориентированный граф ациклический, т. е. в нем отсутствуют контуры, а все пути между полюсами простые — в них все звенья упорядочены в порядке возрастания или убывания ранга. Для определенности будем считать, что выходной полюс имеет минимальный номер (максимальный ранг), а входной полюс — максимальный номер (минимальный ранг) и ни одна вершина с большим номером не достигается ни из какой вершины с меньшим номером.

Введем для многосвязной двухполюсной ориентированной структуры понятие ранга связности. Рангом связности будем называть максимум разности номеров вершин, имеющих прямую связь с помощью дуги между ними. Максимальный ранг связности, который может иметь звено i-го ранга, равен $i - 1$. Максимальный ранг связности равен рангу периферийного звена минус единица. Звенья могут иметь, вообще говоря, различные ранги связности. Однако если все звенья с номерами $i > s$ имеют одинаковые ранги s, то всю двухполюсную структуру называют s-связной. Если же ранги не одинаковы, то граф системы может быть всегда достроен до s-связного путем дополнения его фиктивными дугами с вероятностями работоспособного состояния $p_i = 0$.

При полном оповещении о состоянии сети любой путь между полюсами может быть использован для передачи данных или управляющих воздействий (УВ), если он работоспособен и нет априорных ограничений на его использование. Выбор направления передачи УВ зависит от возможности перераспределения функций управления между звеньями различных рангов. По этому признаку можно выделить три класса систем. В классе 1 нет ограничений на распределение функций между звеньями управления различных рангов и поэтому

любое звено может принять управление звеньями более низких рангов. В классе 2 есть ограничения на распределение функций, но они связаны с состоянием элементов только данной ветви. В классе 3 ограничения зависят от состояния элементов и других ветвей системы. В классе 1 ветвь работоспособна, если есть хотя бы один работоспособный путь между полюсами. Путь считается работоспособным, если работоспособны все его элементы: звенья и линии связи. В классе 2 при составлении логической функции работоспособности (ЛФРС) реализуется логика распределения функций между звеньями управления. В классе 3 при составлении ЛФРС появляется зависимость работоспособности одного пути от состояния элементов других ветвей. Рассмотрим теперь правила расчета и расчетные формулы для ветвей различных классов.

Многосвязная система первого класса

Составление ЛФРС

Система содержит n вершин и имеет связность структуры ранга s (рис. 4.12, *а*). Обозначим через f_n ЛФРС системы, а через f_i — ЛФРС подсистемы, получаемой путем перехода входного полюса из периферийной вершины ранга n в вершину i . Тогда ЛФРС системы находят из системы логических уравнений

$$\begin{aligned} f_n &= x_n(x_{n,n-1}f_{n-1} \vee x_{n,n-2}f_{n-2} \vee ... \vee x_{n,n-s}f_{n-s}), s \le n-1, \\ f_i &= x_i(x_{i,i-1}f_{i-1} \vee x_{i,i-2}f_{i-2} \vee ... \vee x_{i,i-s}f_{i-s}), i = s+1...n-1, \\ f_i &= x_i(x_{i,i-1}f_{i-1} \vee x_{i,i-2}f_{i-2} \vee ... \vee x_{i1}f_1), i \le s. \end{aligned} \qquad (4.85)$$

Общее число переменных в функции f_n равно $N = n + s(n - s - 1) + s(s + 1)/2$.

Преобразование к ФПЧЗ (форме перехода к частичному замещению)

Формулы (4.85) относятся к ФПЧЗ типа 1. Поэтому дополнительное их преобразование не требуется. ЛФРС имеет следующие бесповторные переменные: x_n, x_{ni}, $i = n - s...n - 1$ для f_n; x_i, x_{ij}, $j = i - s...i - 1$ для f_i.

Запись СФФВ (смешанной формы функции вероятностей)

Используя формулы *разд. 4.4*, запишем смешанную форму в виде

$$P_n = P\{f_n = 1\} = p_n(1 - \prod_{i=n-s}^{n-1} q_{ni}^{f_i}), P_i = P\{f_i = 1\} = p_i(1 - \prod_{j=m}^{i-1} q_{ij}^{f_j}), \qquad (4.86)$$

где:

$p_i = P\{x_i = 1\}$;

$q_{ij} = P\{x_{ij} = 1\}$;

$m = \max(1, i - s)$.

При записи СФФВ замещаются $s + 1$ логических переменных из общего количества $N_1 = (s + 1)(n - s/2)$.

Получение вероятностной функции ВФ

В многошаговой процедуре замещению подлежат функции f_i в такой последовательности: сначала f_{n-1}, затем f_{n-2}, ..., f_1. В течение первых $n - s$ шагов замещается по $s + 1$ переменной, а в последних s шагах замещается s, $s - 1$, ..., 1 переменных. После первых двух шагов имеем

$$P_n^{(n-2)}(f_{n-2},...,f_{n-s-1}) = p_n(p_{n-1}(1 - \prod_{i=\max(n-s-1,1)}^{n-2} q_{n-1,i}^{f_i})(1 - q_{n,n-1}\prod_{j=n-s}^{n-2} q_{ij}^{f_j}) +$$

$$+(q_{n-1} + p_{n-1}\prod_{i=\max(n-s-1,1)}^{n-2} q_{n-1,i}^{f_i})(1 - \prod_{j=n-s}^{n-2} q_{ij}^{f_j}),$$

$$P_n^{(n-3)}(f_{n-3},...,f_{n-s-1}) = p_{n-2}(1-\prod\nolimits_{i=\max(n-s-2,1)}^{n-3} q_{n-2,i}^{f_i})P_n^{(n-2)}(1,f_{n-3},...,f_{n-s-1}) +$$
$$+(q_{n-2}+p_{n-2}\prod\nolimits_{i=\max(n-s-2,1)}^{n-3} q_{n-2,i}^{f_i})P_n^{(n-2)}(0,f_{n-3},...,f_{n-s-1}).$$

Многосвязная система второго класса

Если обозначить $f_{ij} = x_{ij}f_j$, то формулу (4.85) для звена *i*-го ранга можно представить в виде дизъюнкции $f_i = x_i(\bigvee_{(j)} f_{ij})$, выражающей возможность в системах первого класса неограниченного перераспределения функций и полной взаимозаменяемости звеньев более высокого ранга при управлении звеном *i*-го ранга. Для систем второго класса вместо операции дизъюнкции используется произвольная функция алгебры логики φ_i от аргументов f_{ij}. Поэтому

$$f_n = x_n\varphi_n(f_{n,n-s},...,f_{n,n-1}), f_i = x_i\varphi_i(f_{i,m},...,f_{i,i-1}), m = \max(i-s,1).$$

Для дальнейшего преобразования логической функции к ФПЧЗ и перехода к смешанной форме удобно определить функцию φ_i в виде дизъюнктивной нормальной формы ее аргументов. Далее надо использовать правила преобразования, разработанные для модифицированного логико-вероятностного метода.

Согласно этим формулам звено пятого ранга может управляться совместно звеньями четвертого и третьего ранга или единолично звеньями первого и второго рангов. Причем звено первого ранга, не имея прямой линии связи со звеном 5, может управлять им только через звено второго ранга. Звено четвертого ранга может управляться совместно звеньями третьего и второго рангов или единолично звеном первого ранга. Звено третьего ранга управляется совместно звеньями первого и второго ранга.

Многосвязная система третьего класса

Особенности систем этого класса отражаются в ЛФРС с помощью дополнительных множителей в дизъюнктивных членах логической функции

$$f_n = x_n(\bigvee_{(j)} x_{nl}f_i\varphi_i), f_i = x_i(\bigvee_{(j)} x_{ij}f_j\varphi_j). \quad (4.87)$$

Здесь φ_i — логические функции, выражающие условия использования направления *ij* и зависящие от переменных, входящих в функцию f_j. В системе с линейным управлением ЛФРС удается свести к виду

$$y_n = f_n(X)\varphi_n(X),$$

где f_n и φ_n — ЛФРС основной и управляющей (распределяющей) подсистем. Составление f_n и φ_n и их дальнейшее преобразование проводят по правилам, разработанным для модифицированного логико-вероятностного метода (МЛВМ).

4.5.3. Расчет надежности многосвязных систем при неполном оповещении о состоянии сети

Условия функционирования систем этого типа такие же, как и систем, рассмотренных в предыдущем разделе. Однако есть одно дополнительное условие: оповещение о состоянии сети неполное. Из-за ограниченной информации не всегда удается эффективно использовать имеющуюся структурную избыточность, т. к. не удается собрать работоспособный

путь между полюсами при реконфигурации системы, хотя при полном оповещении такой путь удалось бы найти. В условиях неполного оповещение не удается гарантировать с вероятностью единица, что выбранный маршрут (путь) будет работоспособным. Неопределенность возникает при эксплуатации и является причиной возможных ошибок в выборе маршрута, однако алгоритм реконфигурации и выбора маршрута закладывается при проектировании. Поэтому надо уметь решать две задачи: задачу анализа надежности с учетом заданного алгоритма выбора маршрута и неполноты информации оповещения и задачу выбора (синтеза) оптимального маршрута по критерию надежности. Алгоритм составляют так, чтобы в условиях некоторой неопределенности обеспечить наибольшее значение вероятности работоспособного состояния системы среди значений, достигаемых в заданном классе алгоритмов.

Система с оповещением о состоянии выходящих линий связи

Структура одной ветви иерархической системы представлена на рис. 4.7, *б*. Алгоритм выбора маршрута представляет собой набор рядов приоритетности выходящих линий связи на каждом из узлов системы. На узле с номером k этот набор имеет вид: ki_{k1}, ki_{k2},...,$ki_{k,ks}$ при $k > s$ и ki_{k1}, ki_{k2},...,$ki_{k,k-1}$ при $k \le s$. На каждом узле в маршрут включается работоспособная линия связи с наивысшим приоритетом. Рассмотрим основные этапы анализа.

Составление ЛФРС

Логическая функция работоспособности ветви имеет

$$f_k = x_k(x_{ki_{k1}} f_{i_{k1}} \vee x'_{ki_{k1}} x_{ki_{k2}} f_{i_{k2}} \vee ... \vee (\underset{j=1}{\overset{m-1}{\&}} x'_{ki_{kj}}) x_{ki_{km}} f_{i_{km}}), m = \min(s, k-1), k = 2...n\,. \quad (4.88)$$

В частности, если наибольший приоритет имеет линия связи, соединяющая узел k с узлом, имеющим наименьший номер (наивысший ранг), то

$$f_k = x_k(\underset{j=1}{\overset{m}{\vee}}(\underset{i=j+1}{\overset{m}{\&}} x'_{k,k-i}) x_{k,k-j} f_{k-j}), m = \min(s, k-1), k = 2...n\,. \quad (4.89)$$

Запись СФФВ

Поскольку в (4.89) все слагаемые ортогональны, а каждое слагаемое является ФПЧЗ (форма 1), то

$$K_э = P\{f_n = 1\} = p_n(1 - q_{n,n-s}^{f_{n-s}} + \sum_{i=n-s+1}^{n-1} \prod_{j=1}^{i+s-n} q_{n,i-j}(1 - q_{ni}^{f_i})), n > s,$$

$$P\{f_k = 1\} = p_k(1 - q_{k,k-s}^{f_{k-s}} + \sum_{i=k-s+1}^{k-1} \prod_{j=1}^{i+s-k} q_{k,i-j}(1 - q_{ki}^{f_i})), s+1 \le k \le n-1, \quad (4.90)$$

$$P\{f_k = 1\} = p_k(1 - q_{k1}^{f_{k1}} + \sum_{i=2}^{k-1} \prod_{j=1}^{i-1} q_{k,i-j}(1 - q_{ki}^{f_i})), 2 \le k \le s\,.$$

Получение вероятностной функции

Поскольку все слагаемые в (4.90) ортогональны, многошаговую процедуру замещения можно проводить в каждом слагаемом отдельно и независимо от других слагаемых. Это упрощает вид конечной формулы. Замещение проводят по правилам разрезания МЛВМ.

Система с оповещением о состоянии прямой линии связи

Дополнительно к информации о выходящих линиях связи каждый узел получает от смежных узлов информацию о состоянии линии связи между этим узлом и центральным узлом. Это позволяет обеспечить полную информацию о некоторых путях от данного узла к цен-

тральному. Для других же путей сохраняется некоторая неопределенность. Поэтому алгоритм выбора маршрута создается из двух частей: ряда приоритетности путей, состояния которых полностью известны, и ряда приоритетности направлений связи, используемого тогда, когда все пути из первого ряда неработоспособны. Кроме того, наличие информации о состоянии прямой линии связи рассматривается как свидетельство работоспособности отправившего ее узла.

Составление ЛФРС

При $k > 2s + 1$ на узле нет ни одного пути, состояние которого было бы известно полностью. В этом случае в алгоритме выборе маршрута ряд приоритетности путей отсутствует и алгоритм включает в себя только ряд приоритетности линий связи, как и в системе предыдущего раздела. При этом ЛФРС составляют по формулам (4.88)–(4.89). При $k \le 2s + 1$ ЛФРС составляется с использованием двух рядов приоритетности

$$f_k = x_k x_1 (B_k \vee B_k' (\bigvee_{i=1}^{k-3} x_{kj_{ki}} f_{j_{ki}} (\&_{r=1}^{i-1} (x_{kj_{kr}} x_{j_{kr}})'))\,, \tag{4.91}$$

$$B_k = x_{k1} \vee x_{k2} x_2 x_{21} \vee \ldots \vee x_{km} x_m x_{m1}, m = \min(k-1, s+1)\,.$$

Запись СФФВ

Смешанная форма имеет вид

$$P_k^{(k-1)} = P(f_k = 1) = p_k p_1 (1 - q_{k1}(1 - p_{ki} p_i p_{i1}) \prod_{i=2}^{m} (1 - p_{ki} p_i p_{i1}) + \\ + q_{k1} \sum_{\nu=1}^{k-3} (1 - q_{kj_{k\nu}}^{g_{k\nu}}) \prod_{i=1}^{\nu-1} q_{kj_{ki}}^{x_{j_{ki}}} \prod_{i=\nu}^{m} q_{kj_{ki}}^{x_{j_{ki}} x_{j_{ki}1}}), g_{k\nu} = (x_{j_{k\nu}} x_{j_{k\nu}1})' f_{j_{k\nu}}, k \le n. \tag{4.92}$$

Получение вероятностной функции

Замещение в (4.92) происходит путем последовательного разрезания по незамещенным логическим переменным.

4.5.4. Распределение числа работоспособных ветвей при полном оповещении о состоянии сети

Рассмотрим сначала изотропную систему с однозначным подчинением. Параметры структуры системы: n — число рангов, r_i — коэффициент разветвления на i-м ярусе, равный числу звеньев $i + 1$-го ранга, подчиненных одному звену i-го ранга. Общее число периферийных звеньев $R = r_1 r_2 \ldots r_{n-1}$. Поскольку все ветви идентичны, то достаточно задать для элементов системы лишь следующие вероятности: p_i — вероятность работоспособного состояния звена i-го ранга, p_{ij} — вероятность работоспособного состояния линии связи между звеньями i-го и j-го рангов.

Заметим, что все связи между звеньями различных рангов существуют лишь в полносвязной сети, а в многосвязных сетях некоторые связи отсутствуют. Далее будет рассматриваться только полносвязная сеть, т. к. другие системы получаются из нее как частный случай, когда некоторые вероятности $p_{ij} = 0$.

При нахождении распределения вероятностей числа работоспособных ветвей будем использовать аппарат производящих функций и разыскивать полином вида

$$\Phi_n(z) = \sum_{k=0}^{R} P_k z^k\,, \tag{4.93}$$

где P_k — вероятность того, что работоспособно ровно k ветвей.

Логико-вероятностный метод предусматривает следующие этапы при построении распределения.

Этап 1. Запись логической функции работоспособности одной ветви

ЛФРС имеет вид, аналогичный (4.85)

$$f_n = x_n(x_{n1}f_1 \vee x_{n2}f_2 \vee ... \vee x_{n,n-1}f_{n-1}), \quad (4.94)$$

где f_i — логическая функция работоспособности ветви при наличии i рангов. Для функций f_i формулы имеют аналогичный вид

$$f_i = x_i(x_{i1}f_1 \vee x_{i2}f_2 \vee ... \vee x_{i,i-1}f_{i-1}), i = 1...n-1. \quad (4.95)$$

Решение системы n логических уравнений (4.94) и (4.95) позволяет выразить f_n через логические переменные, соответствующие элементам структуры.

Этап 2. Составление СФФВ для одной ветви

В формуле (4.94) логические переменные x_n и x_{ni} — бесповторные, поэтому можно провести частичное замещение, используя теорему 1

$$P_n(f_1, f_2, ..., f_{n-1}) = p_n(1 - \prod_{i=1}^{n-1} q_{ni}^{f_i}). \quad (4.96)$$

Этап 3. Составление производящего полинома для одной ветви

Поскольку ветвь может находиться только в двух состояниях: «1» (работоспособна) или «0» (неработоспособна), то полином имеет вид

$$\Phi_n^{(n)}(z, f_1, f_2, ..., f_{n-1}) = 1 - P_n + P_n z = 1 + (z-1)P_n. \quad (4.97)$$

Здесь нижний индекс указывает на число рангов в системе, верхний — на ранг звена, к которому относится полином.

Этап 4. Возведение производящего полинома в степень

В теории вероятностей умножение производящих полиномов и возведение их в степень проводится при выполнении операции свертки (композиции) распределений независимых случайных величин. Здесь также можно ввести случайные величины X_{ni}, равные 1 или 0 в зависимости от состояния i-й ветви. Тогда (4.97) следует рассматривать как производящий полином распределения X_{ni} . Для группы из $r_n - 1$ ветвей с различными звеньями n-го ранга, но общими звеньями более высоких рангов можно ввести целочисленную случайную величину

$$X_{n-1,i} = \sum_{j=1}^{r_{n-1}} X_{nj}, \quad (4.98)$$

равную числу работоспособных ветвей в группе. Слагаемые в (4.98) в общем случае зависимы, т. к. некоторые пути в различных ветвях содержат общие элементы. Поэтому не удается получить производящий полином распределения величины $X_{n\text{-}1,i}$ перемножением (возведением в степень) производящих полиномов слагаемых. Однако здесь эту трудность удается обойти благодаря применению смешанной формы функции вероятностей. Если ее логические переменные, соответствующие общим элементам путей, перевести в показатель степени, как это сделано в (4.97), то можно воспользоваться закономерностями, известными

в теории вероятностей для независимых случайных величин. В этом состоит один из главных замыслов при разработке алгебры смешанных форм и одно из главных достоинств модифицированного логико-вероятностного метода. Таким образом, если коэффициенты производящих полиномов распределения слагаемых в (4.98) записаны в смешанной форме, то производящий полином для суммы получается перемножением полиномов для слагаемых, а в случае одинаковых ветвей — возведением в степень $r_{n\text{-}1}$ полинома для одного из слагаемых

$$\Phi_n^{(n-1)}(z, f_1, f_2, ..., f_{n-1}) = (\Phi_n^{(n)}(z, f_1, f_2, ..., f_{n-1}))^{r_{n-1}}. \qquad (4.99)$$

Этап 5. Замещение логических переменных, относящихся к n – 1 ярусу

Используя вторую и третью теоремы разложения, а также теорему 1 *разд. 4.4*, и учитывая формулу (4. 95), преобразуем (4.99)

$$\begin{aligned}&\Phi_n^{(n-1)}(z, f_1, f_2, ..., f_{n-2}) = \\ &= P(f_{n-1}=1)\Phi_n^{(n-1)}(z, f_1, f_2, ..., 1) + P(f_{n-1}=0)\Phi_n^{(n-1)}(z, f_1, f_2, ..., 0) = \\ &= P(f_{n-1}=1)(\Phi_n^{(n)}(z, f_1, f_2, ..., 1))^{r_{n-1}} + P(f_{n-1}=0)(\Phi_n^{(n)}(z, f_1, f_2, ..., 0))^{r_{n-1}}.\end{aligned} \qquad (4.100)$$

Здесь $P(f_{n-1}=1) = 1 - P(f_{n-1}=0) = p_{n-1}(1 - \prod_{i=1}^{n-2} q_{n-1,i}^{f_i})$.

Этап 6. Возведение в степень и замещение логических переменных, относящихся к старшим ярусам

Представляя, как и на этапе 4, число работоспособных с общим звеном i-го ранга в виде суммы чисел ветвей с различными звеньями i + 1-го ранга ($i = n - 2, ..., 1$), можно вновь применить процедуру свертки распределений с вероятностями, записанными в смешанной форме. Для этого возводим полином (4.100) в степень $r_{n\text{-}2}$ и замещаем переменные, относящиеся к $n - 2$ ярусу, затем возводим в степень $r_{n\text{-}3}$ и замещаем переменные, относящиеся к $n - 3$ ярусу, и т. д., т. е. процедура содержит несколько шагов, на каждом из которых проводится преобразование

$$\begin{aligned}&\Phi_n^{(i)}(z, f_1, f_2, ..., f_{i-1}) = \\ &= P(f_i=1)\Phi_n^{(i)}(z, f_1, f_2, ..., f_{i-1}, 1) + P(f_i=0)\Phi_n^{(i)}(z, f_1, f_2, ..., f_{i-1}, 0),\end{aligned} \qquad (4.101)$$

где

$$P(f_i=1) = 1 - P(f_i=0) = p_i(1 - \prod_{j=1}^{i-2} q_{ij}^{f_j}), i = 1...n-2. \qquad (4.102)$$

Изложенная методика иллюстрируется примерами П4.4 и П4.5 в *приложении 4*.

Методика расчета надежности систем с изотропной структурой может быть обобщена на случай неизотропных структур и систем с неоднозначным подчинением. В неизотропных системах основным отличием методики от рассмотренной ранее является то, что на этапах 4 и 6 возведение в степень заменяется умножением полиномов, а на этапе 1 необходимо записать столько логических функций работоспособности, сколько различных групп ветвей есть в системе. При этом надо иметь в виду, что различными являются не только ветви с различными структурами, но и ветви с одинаковыми структурами, но различными показателями надежности элементов, занимающих одинаковое положение в структуре.

В системах с неоднозначным подчинением логическая функция имеет более сложный вид. Она должна включать все дополнительные пути через резервное звено промежуточного

ранга. Если это звено не входит в другую ветвь, то дальнейшая обработка не отличается от случая простых ветвей. Если же оно входит в две и более ветвей, то на этапе 4 надо заменить возведение в степень умножением, а на этапе 5 замещение логических переменных, соответствующих различным звеньям промежуточного ранга, проводить отдельно.

4.5.5. Распределение числа работоспособных ветвей при неполном оповещении о состоянии сети

Условия функционирования данной системы такие же, как и у системы, рассмотренной в *разд. 4.5.4*, однако системы отличаются объемом и содержанием информации оповещения. При оповещении только о исходящих линиях связи логическая функция работоспособности одной ветви определяется формулами (4.88)–(4.89), а при оповещении еще и о прямой линии связи с центральным звеном — формулой (4.91). В полносвязной системе с оповещением об исходящих линиях связи полином для одной ветви имеет вид

$$\Phi_n^{(n)}(z, f_1, f_2, ..., f_{n-1}) = 1 + (z-1)p_n(1 - q_{n1}^{f_1} + q_{n1}(1 - q_{n2}^{f_2}) + ... + q_{n1}\prod_{k=2}^{n-2} q_{ni_k}(1 - q_{ni_{n-1}}^{f_{i_{n-1}}}), \quad (4.103)$$

где $i_1 = 1$, i_2, …, i_{n-1} — ряд приоритетности направлений связи на узле n. В частности, если ряд приоритетности имеет вид: 1, 2, …, полином приобретает вид

$$\Phi_n^{(n)}(z, f_1, f_2, ..., f_{n-1}) = 1 + (z-1)p_n(1 - q_{n1}^{f_1} + q_{n1}(1 - q_{n2}^{f_2}) + ... + q_{n1}\prod_{k=2}^{n-2} q_{nk}(1 - q_{n,n-1}^{f_{n-1}}). \quad (4.104)$$

Далее выполняется многошаговая процедура возведения в степень и замещения логических переменных

$$\begin{aligned} &\Phi_n^{(i-1)}(z, f_1, f_2, ..., f_{i-2}) = P_{i-1}(f_1, ..., f_{i-2})(\Phi_n^{(i)}(z, f_1, ..., f_{i-2}, 1))^{r_{i-1}} + \\ &+Q_{i-1}(f_1, ..., f_{i-2})(\Phi_n^{(i)}(z, f_1, ..., f_{i-2}, 0))^{r_{i-1}}, i = 3...n, \\ &\Phi_n(z) = q_1 + p_1(P_2(1)\Phi_n^{(2)}(z,1,1) + Q_2(1)\Phi_n^{(2)}(z,1,0))^{r_1}, \end{aligned} \quad (4.105)$$

где $P_i = 1 - Q_i = P\{f_i = 1\}$ определяются по формулам (4.90).

4.6. Применение логико-вероятностных методов для анализа надежности систем при наличии ЗИП

В невосстанавливаемых системах основным допущением модели надежности является независимость отказов элементов, позволяющая свести модель надежности к схеме Бернулли, схеме независимых событий. В восстанавливаемых системах схема Бернулли возникает при выполнении двух требований: независимость отказов элементов и неограниченное восстановление. Последнее означает, что в системе технического обслуживания отсутствуют очереди на восстановление работоспособности или вероятность возникновения такой очереди очень мала. Если эти требования выполняются, то любые изменения состояний любого элемента не зависят от состояния других элементов. Это значит, что индикаторы состояния элементов x_i, $i = 1…n$, являются независимыми случайными величинами. Тогда можно составлять логические функции работоспособности системы (ЛФРС) по правилам, изложенным в *разд. 4.3.3*, в виде

$$Y(t) = F(x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)). \quad (4.106)$$

Очевидно, что вероятность $P\{Y(t) = 1\}$ имеет смысл коэффициента готовности системы.

В системах с ЗИП условия схемы Бернулли выполняются, если каждый структурный элемент представлен в комплекте ЗИП. Тогда они восстанавливаются независимо. Если же несколько структурных элементов выполнены на основе одного и того же технического устройства и имеют общий ЗИП, то условия схемы Бернулли будут выполнены, если в качестве структурного элемента будет фигурировать неоднородная структура из перечня типовых моделей в *главе 2*.

4.6.1. Коэффициент готовности систем

Используя логико-вероятностный метод, с помощью ЛФРС можно находить как стационарный, так и нестационарный коэффициенты готовности системы как функции соответственно стационарных или нестационарных коэффициентов готовности элементов

$$K_{гс} = P\{Y = 1\} = K_{гс}(p_1, p_2, ..., p_n),\ p_i = K_{гi},$$

$$K_{гс}(t) = P\{Y(t) = 1\} = K_{гс}(p_1(t), p_2(t), ..., p_n(t)),\ p_i(t) = K_{гi}(t). \qquad (4.107)$$

Для расчетов коэффициентов готовности элементов $K_{гi}$ и $K_{гi}(t)$ используют формулы *главы 2*.

4.6.2. Средняя наработка системы до отказа

Для расчета средней наработки до отказа можно использовать систему алгебраических уравнений. В общем случае, когда все элементы системы различны, граф состояний имеет большое число состояний и анализ надежности становится громоздким, хотя и не встречает принципиальных трудностей. В случае одинаковых элементов граф состояний упрощается. Для вывода расчетной формулы можно использовать следующий алгоритм.

1. По исходной структурной схеме изделия S_0 устанавливают минимальный d и максимальный m запасы живучести. Минимальный запас живучести равен числу элементов в минимальном замыкающем множестве, уменьшенном на единицу, т. е. $d = s–1$. Максимальный запас живучести равен максимальному количеству отказавших элементов, при котором сохраняется хотя бы один работоспособный путь между полюсами в сложной структуре. В мостиковой схеме (см. рис. 4.7) $d = 1$, $m = 3$, а в схеме (см. рис. 4.9) $d = 1$, $m = 5$.
2. Выделяют m уровней деградации (от 1 до m) и на каждом уровне находят все различные работоспособные структуры S_{ij}, $i = 1...m$. Номер уровня деградации совпадает с количеством отказавших элементов.
3. Каждому типу структуры S_0 и S_{ij} сопоставляют состояние в графе состояний системы. При этом каждому состоянию присваивается номер соответствующей структуры. Допускается и сквозная нумерация состояний. Кроме того, создается обобщенное неработоспособное состояние системы.
4. Устанавливают возможные переходы между различными работоспособными состояниями, а также между работоспособными и неработоспособным («нрс») состояниями. Очевидно, что переход в неработоспособное состояние возможен только из состояний уровня i при $s = d + 1 \le i \le m$.
5. Взвешивают граф состояний, устанавливая интенсивности переходов.
6. Составляют алгебраические уравнения типа (2.42).
7. Решают систему алгебраических уравнений относительно значения $\overline{T}_0$, которое и есть средняя наработка системы $\overline{T}_{ос}$.

4.6.3. Средняя наработка на отказ

Если найдена зависимость (4.109) коэффициента готовности системы от значений коэффициентов готовности элементов, то среднюю наработку системы на отказ можно найти по формулам

$$\overline{T}_{нс} = K_{гс} / \sum_{i \in E} \lambda_i p_i \frac{\partial}{\partial p_i} K_{гс}(p_1, p_2, ..., p_n) =$$

$$= (1 - K_{нс}) / \sum_{i \in E} \mu_i q_i \frac{\partial}{\partial p_i} K_{нс}(q_1, q_2, ..., q_n),$$

$$K_{нс} = 1 - K_{гс}, q_i = 1 - p_i, i = 1...n. \qquad (4.108)$$

Функция $K_{гс}(p_1, ..., p_n)$ может быть найдена с помощью методов исчисления вероятностей случайных событий или логико-вероятностных методов, изложенных в *разд. 4.3* и *4.4*.

4.6.4. Вероятность безотказной работы

При наличии графа состояний для марковской модели надежности вероятность безотказной работы системы можно найти, составляя систему дифференциальных уравнений или систему интегральных уравнений. Решение обеих систем находят путем операционного преобразования Лапласа — Карсона, последующего решения систем алгебраических уравнений и обратного операционного преобразования. Этот путь универсален, но достаточно сложен, т. к. уже в весьма простых задачах обратное преобразование аналитическими методами становится очень трудоемким и часто практически не реализуемым. Поэтому используют приближенную формулу, основанную на асимптотическом поведении функции вероятности безотказной работы при «быстром» восстановлении, когда отношение среднего времени восстановления элемента к средней наработке до отказа элемента стремится к нулю. При этом условии точную расчетную формулу для вероятности безотказной работы системы можно представить как взвешенную смесь экспонент, из которых только одна имеет малый по абсолютной величине показатель и поэтому медленно затухает. Остальные экспоненты имеют значительно большие по абсолютной величине отрицательные показатели и затухают практически до нуля в конце переходного периода, оцениваемого величиной 3–5 средних значений времени восстановления. По окончании переходного периода вероятность безотказной работы достаточно точно можно оценить по приближенной формуле

$$P_c(t) \approx \exp(-t / \overline{T}_{ос}) > \exp(-t / \overline{T}_{нс}), \qquad (4.109)$$

где $\overline{T}_{ос}$ — средняя наработка до отказа системы при полностью работоспособном начальном ее состоянии. Формула (4.109) дает оценку снизу точного значения вероятности. Если $\overline{T}_{ос}$ не удается найти, но известна средняя наработка на отказ, то в (4.109) можно заменить $\overline{T}_{ос}$ на $\overline{T}_{нс}$. Однако надо иметь в виду, что $\overline{T}_{нс} < \overline{T}_{ос}$ и поэтому погрешность приближенной формулы увеличивается.

4.7. Заключение

В *приложении 4* приведены примеры по применению модифицированного логико-вероятностного метода при расчете надежности систем и сетей со сложной структурой и вероятностных характеристик информационной нагрузки отдельных фрагментов сетей, в том числе и при восстановлении с помощью ЗИП.

По результатам анализа можно сделать выводы:

- логико-вероятностный (ЛВМ) и модифицированный логико-вероятностный (МЛВМ) методы играют важную роль при расчетах надежности восстанавливаемых систем при наличии ЗИП, т. к. позволяют существенно расширить область применения теории надежности за пределы классических вариантов последовательно-параллельных резервированных структур;
- опыт применения ЛВМ и МЛВМ не только для решения классических задач надежности по определению показателей безотказности и готовности, но и для оценки других вероятностно-временных характеристик (ВВХ) двухполюсных и ветвящихся структур, представленный в работе [48, главы 6, 7, 8], вполне может быть использован и в новом направлении теории надежности восстанавливаемых систем, использующих ЗИП. Эти методы приспособлены для расчета ВВХ как когерентных, так и некогерентных структур. Они полезны также и при анализе надежности последовательно-параллельных структур высокого порядка (третьего и более), позволяя сводить задачу анализа таких структур к анализу надежности более простых структур первого и второго порядка, создавая благоприятные условия для автоматизации расчетов с помощью программных комплексов типа [27];
- следует обратить особое внимание на возможности модифицированного метода (МЛВМ), использующего алгебру смешанных форм [66] и обеспечивающего компактную многоскобочную форму записи расчетных формул. Для многополюсных и ветвящихся структур метод позволяет ускорить анализ и получить выигрыш во времени анализа в 2–3 порядка;
- если каждый элемент сложной структуры представлен в комплекте ЗИП собственным запасом ЗЧ, то применение ЛВМ и МЛВМ не требует дополнительной разработки и не имеет особенностей по сравнению со случаем восстановления путем ремонта. Если же несколько структурных элементов сложной структуры связаны между собой общим запасом ЗЧ, то требуется декомпозиция задачи путем сведения ее к задачам надежности типовых структур. Этот прием продемонстрирован в примере П4.9;
- рассмотренные здесь модели надежности можно усовершенствовать, учитывая ограничения на допустимое время замены и используя методы временного резервирования [67, 71, 77].

4.8. Вопросы для самоконтроля

- При каких допущениях можно применять метод исчисления вероятностей для анализа надежности?
- При каких допущениях можно использовать марковские модели для анализа надежности?
- Что называют композицией распределений?
- В чем состоит основная идея логико-вероятностного метода? Какие допущения делают возможным применение этого метода?
- Что такое ЛФРС, ЛФНС, ФАЛ, ФППЗ?
- Какие этапы предусматривает основной вариант ЛВМ и в чем их суть?
- Что такое ФПЧЗ, СФФВ, РФФВ?
- Что такое алгебра смешанных форм, какова ее специфика?

- Какие этапы предусматривает модифицированный логико-вероятностный метод, в чем их суть?
- Как можно трактовать смешанную форму функции вероятностей?
- Назовите основные признаки сложных структур.
- Какие показатели используют для характеристики надежности ветвящихся структур?
- Что такое информация оповещения и как ее используют при расчете вероятностных характеристик связности?

ГЛАВА 5

Надежность однофункциональных систем при периодическом пополнении запасов в комплекте ЗИП-О

5.1. Общие положения

Отличительной особенностью однофункциональных систем (ОФС) является то, что созданные в комплекте ЗИП-О запасы сменных модулей расходуются для устранения отказов только тех элементов, которые участвуют в выполнении единственной функции системы.

Время восстановления работоспособности системы состоит из нескольких составных частей:

- времени обнаружения и локализации отказов;
- времени замены отказавшей сменной части (СЧ) на работоспособную запасную часть (ЗЧ);
- времени настройки и проверки работоспособности.

Обычно суммарное время восстановления исчисляется десятками минут. Влияние этого перерыва на функционирование системы зависит от назначения системы и скорости протекания в ней процессов функционирования.

Здесь можно выделить два крайних случая. В первом случае допустимое время перерывов в работе велико, и простой системы при восстановлении работоспособности не ухудшает ее характеристики. Тогда в модели надежности можно считать восстановление мгновенным, а время восстановления равным нулю.

Во втором случае допустимое время перерыва в работе мало и вероятность восстановления работоспособности за это время также мала. Тогда можно считать, что практически каждый отказ элемента приводит к отказу системы независимо от состава комплекта ЗИП. Чтобы введение ЗИП было эффективным, необходимо внутреннее резервирование с мгновенным переключением резерва. Это позволит использовать запасные части комплекта ЗИП без нарушения процесса функционирования системы. В этом случае требования ко времени восстановления системы существенно ослабляются: оно должно быть не более времени до ближайшего отказа основного элемента в резервированной группе. В реальных системах такое требование выполняется с большим запасом. Поэтому в модели надежности время восстановления также считается равным нулю.

Все прочие случаи являются промежуточными, когда допустимое время перерыва в работе не мало и не велико. Тогда учет времени замены отказавшей СЧ на работоспособную ЗЧ следует проводить с помощью методов теории временного резервирования [77].

По структурным признакам все системы можно подразделить на четыре класса:

- последовательно-параллельные системы с поэлементным или групповым резервированием при однородной структуре второго порядка в каждой резервированной группе;
- последовательно-параллельные системы с однородной структурой третьего порядка в каждой резервированной группе;
- последовательно-параллельные системы с поэлементным или групповым резервированием при неоднородной структуре каждой резервированной группы;
- системы со сложной структурой.

В соответствии с этой классификацией формируются множества типовых структур, обладающих признаками одного из четырех классов. В первом классе выделяются десять структур (П1...П10). Во втором классе рассмотрены три типовые структуры (П11...П13). В третьем классе рассмотрены три типовые структуры (П14...П16). В четвертом классе рассмотрен один пример со сложной структурой, имеющий целью продемонстрировать общий подход к анализу надежности структур подобного класса (модель П17).

Совокупности моделей не претендуют на полноту. Каждая из них может быть дополнена и расширена. Анализ надежности каждой из новых моделей может быть проведен с помощью общих методов по аналогии с уже проанализированными моделями, представленными в данной главе.

Чем более сложным является класс структур, тем больше в нем разнообразие типовых структур. Поэтому совокупность типовых структур необходимо ограничивать. Именно по этой причине в четвертом классе рассмотрена только одна структура, иллюстрирующая общий подход к анализу надежности структур данного класса.

Переходим к анализу надежности типовых структур.

5.2. Расчет надежности последовательной однородной системы (модель П1)

Рассмотрим систему (рис. 5.1), состоящую из последовательно соединенных групп элементов N типов и содержащую по k_i элементов i-го типа ($i = 1...N$). Для каждого типа элементов в комплекте одиночного ЗИП имеется L_i запасных частей.

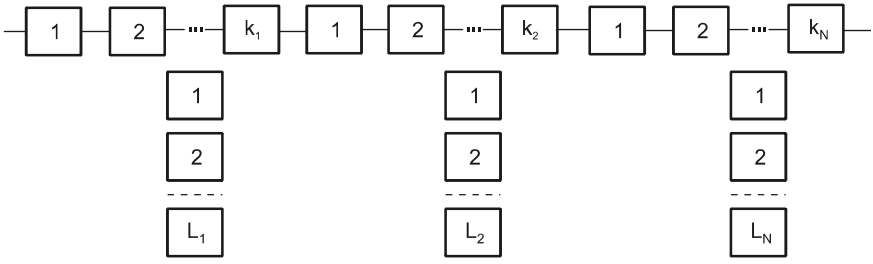


Рис. 5.1. Структурная схема последовательной системы

Запасы пополняются периодически, в общем случае с различными периодами T_i, $i = 1...N$. Интенсивность отказов элементов равна λ_i. Суммарный поток отказов, определяющий интенсивность потребления запасов, имеет параметр $\lambda_{\Sigma i} = k_i \lambda_i$. Средний расход запасов i-го за период пополнения равен $A_i = k_i \lambda_I T_i = k_i a_i$, $a_i = \lambda_I T_i$.

Полагаем, что перерывы в работе для замены отказавших элементов (составных частей) на работоспособную запасную часть (ЗЧ) и последующей настройки и пуска системы допустимы и относительно не велики. Поэтому считаем их дальше равными нулю.

Режимы применения системы могут быть разными: однократного применения (ОКРП), непрерывного длительного применения (НПДП), многократного циклического применения (МКЦП). В режиме НПДП для оценки надежности используют показатели безотказности. В режимах ОКРП и МКЦП используют показатели готовности.

5.2.1. Показатели безотказности

Вероятность безотказной работы находят по формулам

$$P_c(t,L)=\prod_{i=1}^{N}P_i(t,L_i)\,, \tag{5.1}$$

$$P_i(T_i,L_i)=\sum_{j=0}^{L_i}\frac{A_i^j}{j!}e^{-A_i}\,,\ A_i=k_i\lambda_iT_i\,, \tag{5.2}$$

$$P_i(t,L_i)=\sum_{j=0}^{L_i}\frac{(k_i\lambda_it_i)^j}{j!}e^{-k_i\lambda_it}\,,t\le T_i\,, \tag{5.3}$$

$$P_i(t,L_i)=P_i^m(T_i,L_i)P_i(t-mT_i,L_i),mT_i\le t<(m+1)T_i,m\ge 1\,.$$

Приращение вероятности при увеличении числа запасных частей на единицу:

$$\Delta P_i(T_i,j)=P_i(T_i,j)-P_i(T_i,j-1)=\frac{A_i^j}{j!}e^{-A_i}\,. \tag{5.4}$$

Интенсивность отказов системы

$$\lambda_c(t,L)=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i(t,L_i)\,, \tag{5.5}$$

$$\lambda_i(t,L_i)=a_i(t,L_i)/P_i(t,L_i),t\le T_i\,, \tag{5.6}$$

$$\lambda_i(t,L_i)=\lambda_i(t-mT_i,L_i),mT_i\le t<(m+1)T_i,m\ge 1\,. \tag{5.7}$$

Частота отказов системы

$$a_c(t,L)=\lambda_c(t,L)P_c(t,L)\,,$$

где $\lambda_c(t,L)$ и $P_c(t,L)$ — рассчитывают по формулам (5.5) и (5.1). Частота отказов *i*-й группы однотипных элементов

$$a_i(t,L_i)=-P_i'(t,L_i)=\frac{(k_i\lambda_i)^{L_i+1}t^{L_i}}{L_i!}e^{-k_i\lambda_it}\,,0\le t<T_i\,, \tag{5.8}$$

$$a_i(t,L_i)=P_i^m(T_i,L_i)a_i(t-mT_i,L_i),mT_i\le t<(m+1)T_i,m\ge 1\,. \tag{5.9}$$

Средняя наработка до отказа *i*-й группы однотипных элементов

$$T_{cpi}=\int_0^\infty P_i(t,L_i)dt=\sum_{i=0}^{\infty}\tau_i,\tau_i=\int_{(j-1)T_i}^{jT_i}P_i(t,L_i)dt\,. \tag{5.10}$$

Учитывая (5.3), не трудно установить, что

$$\tau_j = P_i^{j-1}(T_i, L_i)\tau_{1i}, \tau_{1i} = \int_0^{T_i} P_i(t, L_i)dt \,. \tag{5.11}$$

Подставляя (5.11) в (5.10), получим

$$T_{cpi}(L_i) = \tau_{1i} / Q_i(T_i, L_i), Q_i(T_i, L_i) = 1 - P_i(T_i, L_i) \,. \tag{5.12}$$

Подставляя (5.2) в (5.11) и интегрируя, получим

$$k_i\lambda_i\tau_{1i}(L_i) = \sum_{j=0}^{L_i} I(A_i, j+1), A_i = k_i\lambda_i T_i, I(x,k) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{x^i}{i!}e^{-x} \,. \tag{5.13}$$

В частности, имеем

$$k_i\lambda_i\tau_{1i}(1) = 2 - (2 + A_i)e^{-A_i} \,.$$

Подставляя (5.13) в (5.12), находим

$$k_i\lambda_i T_{cpi}(L_i) = 1 + \sum_{j=1}^{L_i} I(A_i, j) / I(A_i, L_i + 1) \,. \tag{5.14}$$

Приближенный расчет средней наработки до отказа, основанный на линейной аппроксимации функции на отрезке длительностью T, можно проводить по формуле

$$\tau_1 = \frac{T}{2}(1 + P(T, L)), k\lambda T_{cp,np}(T, L) = \frac{k\lambda\tau_1}{Q(T, L)} = A\left(\frac{1}{Q(T, L)} - \frac{1}{2}\right). \tag{5.14, а}$$

Эта формула верна для любой модели надежности. В частности, для модели П1 имеем

$$k\lambda T_{cp,np}(T, L) = A\left(\frac{1}{I(A, L+1)} - \frac{1}{2}\right). \tag{5.15}$$

При увеличении периода пополнения средняя наработка до отказа асимптотически стремится к средней наработке невосстанавливаемой системы

$$\lim_{T\to\infty} k\lambda T_{cp}(T, L) = 1 + L \,. \tag{5.16}$$

При малых значениях A_i расчета ВБР и средней наработки можно использовать приближенные формулы

$$P_i(T_i, L_i) \approx 1 - \frac{A_i^{L_i+1}}{(L_i+1)!}, k\lambda\tau_1 \approx A \,, \tag{5.17}$$

$$k_i\lambda_i T_{cpi}(L_i) \approx (L_i + 1)! / A_i^{L_i} \,. \tag{5.18}$$

Вероятность безотказной работы (5.3) достаточно хорошо аппроксимируется экспоненциальной функцией

$$P_i(t, L_i) \approx \exp(-t / T_{cpi}(L_i)) \,. \tag{5.19}$$

Это позволяет найти приближенное значение средней наработки до отказа системы

$$T_{cp,c}(T, L) = \left(\sum_{i=1}^{N} (1 / T_{cpi}(T_i, L_i))\right)^{-1} \,. \tag{5.20}$$

5.2.2. Показатели готовности

Коэффициент готовности системы находят, используя схему независимых событий

$$K_{гс}(T, L) = \prod_{i=1}^{N} K_{гi}(T_i, L_i)\,, \tag{5.21}$$

$$K_{гi}(T_i, L_i) = \frac{1}{T_i}\int_0^{T_i} P_i(t, L_i)dt = \frac{1}{A_i}\int_0^{T_i} k_i\lambda_i P_i(t, L_i)dt = k_i\lambda_i\tau_{1i} / A_i\,. \tag{5.22}$$

При L = 1 и 2 имеем

$$K_{гi}(T_i, 1) = \frac{1}{A_i}\left(2 - (2 + A_i)e^{-A_i}\right), \tag{5.23}$$

$$K_{гi}(T_i, 2) = \frac{1}{A_i}\left(3 - (3 + 2A_i + A_i^2 / 2)e^{-A_i}\right). \tag{5.24}$$

Здесь значения T_i следует рассматривать как параметры системы, а не как момент времени, к которому относится коэффициент готовности системы. На самом деле коэффициент готовности относится к произвольно выбранному моменту времени внутри любого периода пополнения в режиме МКЦП.

Если длительность цикла применения в режиме МКЦП такова, что вероятностью отказа за время τ нельзя пренебречь, то вместо коэффициента готовности используется коэффициент оперативной готовности

$$K_{огс}(\tau, T, L) = K_{гс}(T, L)\exp(-\sum_{i=1}^{N} k_i\lambda_i\tau)\,. \tag{5.25}$$

В *приложении 5* приведены примеры П5.1 и П5.2 по расчету и анализу показателей надежности последовательной системы (модель П1). По результатам анализа можно сделать выводы:

- вероятность безотказной работы однородной нерезервированной системы с одной или несколькими ЗЧ в комплекте ЗИП-О имеет очевидную не экспоненциальную зависимость от времени. Функция содержит участки, равные периоду пополнения T, в каждом из которых зависимость от времени определяется эрланговским распределением и выпукла вверх. Сравнение с приближенной экспоненциальной зависимостью показывает, что формула (5.19) дает почти всюду оценку снизу для ВБР. Причем по отношению к вероятности отказа $Q_c = 1 - P_c$ относительная погрешность может быть значительна (до 300 % и больше). В точках, кратных периоду пополнения, знак погрешности меняется: для вероятности отказа (оценка сверху) и погрешность мала: от долей процента до нескольких процентов. Именно для этих значений времени функционирования можно рекомендовать применение приближенных формул. Точки, кратные периоду пополнения, являются практически марковскими точками. И для этих точек однородная восстанавливаемая система может быть заменена эквивалентным невосстанавливаемым элементом с интенсивностью отказов, равной величине, обратной средней наработке до отказа;
- интенсивность отказов всегда равна нулю в точках, кратных периоду пополнения, и возрастает в промежутке между этим точками. «Пилообразный» характер зависимости интенсивности отказов от времени объясняет то волнообразное отклонение точного значения ВБР от приближенной зависимости ВБР от времени, выражаемое с помощью экспоненты. Следует ожидать, что при уменьшении периода пополнения расхождение точ-

ного и приближенного значений будет уменьшаться. Точное значение интенсивности отказов полезно сравнить со средним значением по периоду пополнения и с величиной, обратной средней наработке до отказа, рассчитываемой по формуле (5.12). Оказывается, что средняя интенсивность отказов и величина, обратная средней наработке до отказа, близки друг к другу, но средняя интенсивность отказов немного больше;

- из расчетов следует, что мгновенное значение интенсивности отказов может отличаться от среднего значения в 2–3 раза (в 1,79 раза при $L = 1$ и в 2,66 раза при $L = 2$);
- коэффициент готовности комплекта ЗИП (в данной системе — это одновременно и среднее значение ВБР на периоде пополнения) существенно отличается от ВБР в конце периода пополнения. Это значит, что показатели достаточности комплекта ЗИП нельзя использовать для расчетов ВБР, и такой расчет надо проводить по точным формулам данного раздела;
- в системе, состоящей из двух однородных подсистем, для каждой из которых имеется собственный запас элементов в комплекте ЗИП, при оценках ВБР большое значение имеет величина периода пополнения. Если периоды пополнения или интенсивности отказов различны, то обнаруживаются новые эффекты. Во-первых, «волнообразное» изменение функции ВБР не столь выражено. Вместе с тем, приближенная формула, основанная на экспоненциальном распределении, дает уже большую ошибку, чем при одинаковых периодах пополнения. Причем приближенная формула дает для ВБР приближение снизу всюду, кроме точек, кратных обоим периодам пополнения;
- если в неоднородной системе периоды пополнения запасов различных типов не одинаковы, то сначала находят зависимости ВБР от времени для каждого элемента, а затем значение ВБР для всей системы находят как произведение вероятностей для подсистем. Чем больше период пополнения, тем меньше ВБР, причем различия в значениях ВБР для подсистем возникают только при $t > T_{\min} = \min(T_1, T_2,...)$. С увеличением времени различия в значениях ВБР возрастают, тем быстрее, чем больше запасы в комплекте ЗИП-О;
- при различных значениях среднего числа отказов подсистем в периоде пополнения запасов интенсивность отказов системы никогда не падает до нуля, кроме точек, кратных обоим периодам пополнения. Она уменьшается скачком до значения интенсивности отказа того элемента, запасы которого в данный момент не пополнены. При большом числе элементов и примерно равных вкладах различных элементов в ненадежность системы следует ожидать, что при разнообразии периодов пополнения интенсивность отказов системы будет иметь небольшие колебания относительно среднего значения. Тогда экспоненциальная модель будет давать хорошую точность при расчетах всех показателей надежности, в том числе ВБР и интенсивности отказов;
- зависимость частоты отказов от времени также имеет «пилообразный» характер. Однако, в отличие от интенсивности отказов, значение этого показателя меняется от периода к периоду, уменьшаясь в пропорции, указанной в формуле (5.9).

В заключение анализа отметим, что указанные свойства обнаружены в предположении, что перерывы в работе для замены отказавшего элемента на работоспособную запасную часть не снижают качество функционирования и любой перерыв допустим. Если это не так и имеются ограничения на время перерыва, например, в виде указанного заранее или случайного допустимого времени перерыва, то полученные формулы требуют коррекции, а все показатели надежности будут иметь зависимость от распределения случайного времени замены и допустимого времени перерыва в работе.

5.3. Расчет надежности однофункциональных систем с последовательно-параллельной структурой и однородными резервированными группами. Общий случай

Рассматривается система с последовательным соединением резервированных групп, каждая из которых состоит из однотипных элементов, соединенных по схеме группового или поэлементного резервирования со структурой S_{0i} , $i = 1...N$ (рис. 5.2). Для каждой резервированной группы в комплекте одиночного ЗИП предусматривается запас в виде L_i запасных частей i-го типа.

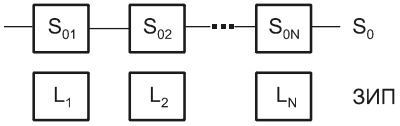


Рис. 5.2. Общий вид структуры последовательно-параллельной резервированной системы

Базовая структура S_{0i} сохраняется до тех пор, пока не израсходован полностью запас элементов данного типа в комплекте ЗИП-О. Далее начинается многоступенчатая деградация структуры. Каждая резервированная группа выдерживает отказ одного или нескольких элементов, сохраняя работоспособность. Это свойство характеризуется минимальным d и максимальным m запасом живучести [78]. Если после исчерпания ЗЧ происходит j отказов, то при $j \le d$ отказ любых j элементов не приводит к отказу системы. При $d < j \le m$ работоспособность сохраняется только при некоторых сочетаниях отказов элементов. При других сочетаниях отказ j элементов приводит к потере работоспособности. Доля случаев, когда при отказе j элементов сохраняется работоспособность, называется коэффициентом живучести R_j [78], имеющим смысл условной вероятности сохранения работоспособности на j-м уровне деградации. При $d < j \le m$ этот коэффициент меньше единицы, при $j \le d$ он равен 1, а при $j > m$ он равен 0.

С учетом сказанного можно представить граф состояний резервированной структуры в виде, представленном на рис. 5.3. В графе состояний через M_j обозначено подмножество состояний резервированной группы на j-м уровне деградации $j = 1...m + 1$.

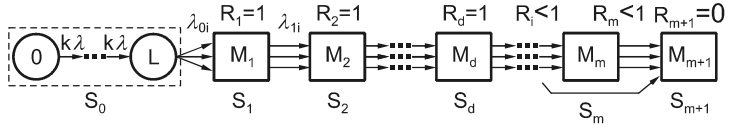


Рис. 5.3. Обобщенный граф состояний резервированной системы

В простейшем случае граф состояний является графом процесса гибели. Тогда в каждом подмножестве M_j будет только одно состояние, которое характеризуется интенсивностями переходов по входу и выходу, и ему соответствует только одна структура S_j j-го уровня деградации. При $j \le d$ происходит переход только в ближайшее состояние. При $d < j \le m$ из каждого состояния имеется два перехода: в соседнее работоспособное и неработоспособное состояния из подмножества M_{m+1}. При этом коэффициент выживаемости

$$R_j = \frac{\lambda_{j,j+1}}{\lambda_{j,j+1} + \lambda_{j,m+1}}. \qquad (5.26)$$

Каждое состояние подмножества M_j характеризуется коэффициентом выживаемости

$$R_i^{(j)} = 1 - \frac{\lambda_{i,m+1}}{\lambda_i}, i \in M_j . \quad (5.27)$$

В общем случае на каждом уровне деградации может быть несколько работоспособных структур S_{ji} . Соответствующие этим структурам состояния как раз и образуют подмножество M_j . Поскольку структура S_{ji} может возникнуть при различных переходах из состояний предыдущего уровня деградации, то ее характеризуют условными вероятностями возникновения

$$\beta_{li}^{(j)} = \frac{\lambda_{li}}{\sum_{k \in M_j} \lambda_{lk}}, l \in M_{j-1}, \sum_{i \in M_j} \beta_{li}^{(j)} = 1 . \quad (5.28)$$

Безусловная вероятность возникновения структуры S_{ji} определяется из рекуррентного соотношения

$$\beta_i^{(j)} = \sum_{l \in M_{j-1}} \beta_l^{(j-1)} \beta_{li}^{(j)} . \quad (5.29)$$

Отсюда следует, что

$$1 - R_i^{(j)} + R_i^{(j)} \sum_{l \in M_{j+1}} \beta_{il} = 1, \lambda_{li} = R_l^{(j-1)} \beta_{li}^{(j)} \lambda_l, l \in M_{j-1}, i \in M_j . \quad (5.30)$$

Уровень деградации, содержащий подмножество состояний M_j, также может характеризоваться коэффициентом выживаемости

$$R_j = \sum_{l \in M_j} R_i^{(j)} \beta_i^{(j)} . \quad (5.31)$$

Соответствующий общему случаю граф состояний будет отличаться от графа процесса гибели, но будет соответствовать обобщенной структуре (см. рис. 5.3).

Рассмотрим теперь методы нахождения различных показателей надежности резервированной структуры.

5.3.1. Вероятность безотказной работы

Пусть исходная система имеет k работоспособных элементов в рабочем режиме, образующих базовую структуру S_0, и L запасных элементов в комплекте ЗИП-О. Для нахождения ВБР можно использовать дифференциальный или интегральный метод.

Дифференциальный метод

Составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний (см. рис. 5.3):

$$P_0'(t) = -k\lambda P_0(t), \quad (5.32)$$

$$P_i'(t) = k\lambda P_{i-1}(t) - k\lambda P_i(t), i = 1...L,$$

$$P_i'(t) = \lambda_{Li} P_L(t) - \lambda_i P_i(t), i \in M_1, \lambda_i = \sum_{(r)} \lambda_{ir},$$

$$P_i^{'}(t) = \sum_{l \in M_1 \cup \ldots \cup M_{j-1}} P_l(t)\lambda_{li} - \lambda_i P_i(t), i \in M_j, \lambda_i = \sum_{(r)} \lambda_{ir}, j = 2...m,$$

$$P_{m+1}^{'}(t) = \sum_{l \in M_{d+1} \cup \ldots \cup M_m} P_l(t)\lambda_{l,m+1} .$$

Преобразуем (5.32) с помощью операционного преобразования Лапласа — Карсона [67]. Тогда получим систему алгебраических уравнений относительно изображений функций вероятности

$$P_L^*(s) = \frac{s(k\lambda)^L}{(s+k\lambda)^{L+1}}, P_i^*(s) = \frac{\lambda_{Lj}}{s+\lambda_i} P_L^*(s), i \in M_1, \tag{5.33}$$

$$P_i^*(s) = \sum_{l \in M_1 \cup \ldots \cup M_{j-1}} P_l^*(s) \frac{\lambda_{li}}{s+\lambda_i}, i \in M_j, j = 2...m,$$

$$P_{m+1}^*(s) = Q^*(s,0,S_0) = \sum_{l \in M_{d+1} \cup \ldots \cup M_m} \frac{1}{s} P_l^*(s)\lambda_{l,m+1}$$

Учитывая, что подграф графа состояний, начиная от состояния L до состояний подмножества M_{m+1}, является графом состояний резервированной системы при отсутствии ЗИП, можно записать соотношение для изображения вероятности отказа

$$Q^*(s,L,S_0) = Q^*(s,0,S_0)\frac{(k\lambda)^L}{(s+k\lambda)^L} . \tag{5.34}$$

Детальное изучение состояний системы в подмножестве $M_1 \cup \ldots \cup M_m$ требуется только при нахождении коэффициента оперативной готовности. Для нахождения вероятности безотказной работы достаточно знать вероятность отказа невосстанавливаемой резервированной системы без разбиения ее на отдельные слагаемые, соответствующие различным неработоспособным состояниям. Используя соотношение (5.37), можно найти изображение для вероятности отказа при любом заданном числе ЗЧ. Алгебраическому соотношению (5.34) в области оригиналов соответствует интегральное соотношение

$$Q(t,L,S_0) = \int_0^t \frac{(k\lambda)^L x^{L-1}}{(L-1)!} e^{-k\lambda x} Q(t-x,0,S_0)dx . \tag{5.35}$$

Применение формул (5.34) и (5.35) существенно упрощает анализ графа состояний.

Интегральный метод

В соответствии с графом состояний можно составить следующую систему интегральных уравнений относительно вероятности отказа при различных стартовых состояниях системы, определяемых количеством ЗЧ и стартовой структурой:

$$Q(t,L,S_0) = \int_0^t \frac{(k\lambda)^L x^{L-1}}{(L-1)!} e^{-k\lambda x} Q(t-x,0,S_0)dx , \tag{5.36}$$

$$Q(t,L,S_0) = \int_0^t \sum_{i \in M_1} \lambda_{Li} \frac{(k\lambda)^L x^L}{L!} e^{-k\lambda x} Q(t-x,0,S_{1i})dx, \sum_{i \in M_1} \lambda_{Li} = k\lambda ,$$

$$Q(t,0,S_{1i}) = \int_0^t \sum_{j\in M_2} \lambda_{ij} e^{-\lambda_i x} Q(t-x,0,S_{2j})dx, \sum_{(r)} \lambda_{ir} = \lambda_i, i \in M_1,$$

$$Q(t,0,S_{li}) = \int_0^t \sum_{j\in M_{l+1}} \lambda_{ij} e^{-\lambda_i x} Q(t-x,0,S_{l+1,j})dx, \sum_{(r)} \lambda_{ir} = \lambda_i, i \in M_l, 1 \le l \le d-1, \lambda_{ij} = \lambda_i \beta_{ij}^{(l+1)},$$

$$Q(t,0,S_{li}) = (1-R_i)(1-e^{-\lambda_i t}) + \int_0^t \sum_{j\in M_{l+1}} \lambda_{ij} e^{-\lambda_i x} Q(t-x,0,S_{l+1,j})dx, i \in M_l, d \le l \le m,$$

$$1 - R_i = \frac{1}{\lambda_i} \sum_{r\in M_{m+1}} \lambda_{ir}, i \in M_l, \lambda_{ij} = \lambda_i R_i \beta_{ij}^{(l+1)}, i \in M_l, j \in M_{l+1}.$$

Операционное преобразование в (5.36) дает

$$Q^*(s,L,S_0) = \sum_{i\in M_1} \beta_{Li} \frac{(k\lambda)^{L+1}}{(s+k\lambda)^{L+1}} Q^*(s,0,S_{1i}), \beta_{Li} = \frac{\lambda_{Li}}{k\lambda}, \quad (5.37)$$

$$Q^*(s,0,S_{li}) = (1-R_i)\frac{\lambda_i}{s+\lambda_i} + \sum_{j\in M_{l+1}} R_i \beta_{ij}^{(l+1)} \frac{\lambda_i}{s+\lambda_i} Q^*(s,0,S_{l+1,j}), i \in M_l, 1 \le l \le m.$$

Для $1 \le l \le m$ коэффициент выживаемости $R_i = 1$, поэтому первое слагаемое в уравнении (5.37) отсутствует.

Решение (5.33) и (5.37) дает один и тот же результат. Обращение функции $Q^*(s,L,S_0)$ дает явное выражение для функции вероятности отказа. Заметим, что промежуточные функции в в обеих системах уравнений имеют различный смысл. В (5.32) и (5.33) $P_i(t)$ и $P_i^*(s)$ имеют смысл вероятностей состояний системы в момент t. В (5.36) и (5.37) вероятности $Q(t,0,S_{li})$ имеют смысл вероятностей отказа при условии старта в момент t из состояния S_{li}. Поэтому в некоторых случаях может возникнуть потребность в решении обеих систем уравнений.

После нахождения вероятности отказа и вероятностей состояний находят ВБР. При этом могут оказаться полезными следующие формы представления ВБР.

Форма 1 (общий вид)

$$P(t,L) = 1 - Q(t,L), t \le T, \quad (5.38)$$

$$P(t,L) = P^m(T,L)P(t-mT,L), mT \le t \le (m+1)T, \quad (5.39)$$

где $Q(t,L)$ — находят из интегрального соотношения (5.35) либо из системы интегральных уравнений (5.36).

Форма 2 (в приращениях)

$$P(t,L) = P(t,L-1) + \Delta P(t,L) = P(t,0) + \sum_{i=1}^{L} \Delta P(t,i), \quad (5.40)$$

где:

$P(t,0)$ — вероятность безотказной работы при отсутствии ЗИП;

$\Delta P(t,i)$ — приращение вероятности, обусловленное добавлением еще одной ЗЧ к ранее имеющимся $i-1$.

Форма 3 (с разложением на слагаемые по уровням деградации)

$$P(t,L) = P(t,L,S_0) + \sum_{i \in M_1 \cup \ldots M_m} P(t,S_i), \tag{5.41}$$

$$P(t,L,S_0) = \sum_{i=0}^{L} P_i(t,L) = 1 - I(A,L+1). \tag{5.42}$$

Здесь:

$I(A, k)$ — неполная гамма-функция с целочисленным параметром k;

M_i — множество работоспособных состояний системы при наличии i отказавших элементов;

m — максимальное число отказавших элементов, при котором система еще сохраняет работоспособность. Слагаемые в (5.41) имеют следующий смысл: система в интервале $(0, t)$ работоспособна и в момент t оказалась в состоянии S_i.

При $t > T$ слагаемые в (5.41) находят по формулам:

$$P(t,L,S_0) = P^m(T,L)P(t-mT,L,S_0), mT \le t \le (m+1)T,$$

$$P(t,S_i) = P^m(T,L)P(t-mT,S_i). \tag{5.43}$$

Вместо (5.39) можно использовать приближенное выражение

$$P(t,L) = \left(P(T,L)\right)^{t/T}, t \ge T. \tag{5.44}$$

Эта формула точна при значениях t, кратных T.

5.3.2. Частота и интенсивность отказов

Для резервированной группы частота отказов находится путем дифференцирования функции вероятности отказа:

$$a(t,L) = \frac{d}{dt}Q(t,L), 0 \le t \le T, \tag{5.45}$$

$$a(t,L) = P^m(T,L)a(t-mT,L), mT \le t \le (m+1)T, m = 1,2,... \tag{5.46}$$

Функция частоты отказов кусочно-непрерывная с разрывом второго рода в точках $t = mT$. В каждом интервале T функция максимальна при $t = mT - 0$, в которой частота отказов

$$a(mT-0,L) = a(T-0,L)\exp(m\ln P(T,)).m = 0,1,2,... \tag{5.47}$$

Поскольку $\ln P(T,L) < 0$, с увеличением m частота отказов уменьшается до нуля.

Интенсивность отказов является периодической функцией времени с периодом T:

$$\lambda(t,L) = a(t,L) / P(t,L), 0 \le t < T, \tag{5.48}$$

$$\lambda(t,L) = \lambda(t-mT,L) = mT \le t \le (m+1)T, m = 1,2,... \tag{5.49}$$

Максимум функции достигается при $t = T$. Максимум увеличивается с ростом T, асимптотически приближаясь к величине $k\lambda$, и уменьшается с ростом числа ЗЧ.

5.3.3. Средняя наработка до отказа

При расчетах средней наработки до отказа будем исходить из общей формулы:

$$T_{cp}(L) = \int_0^{\infty} P(t, L)dt \,. \tag{5.50}$$

Поскольку частота отказов кусочно-непрерывная функция, функция ВБР не является гладкой и имеет изломы в точках $t = mr$.

Поэтому вычисление интеграла проводим по участкам:

$$T_{cp}(L) = \sum_{i=0}^{\infty} \tau_i, \tau_i = \int_{(i-1)T}^{iT} P(t, L)dt \,. \tag{5.51}$$

Используя (5.39), получим

$$\tau_i = \tau_1 P^{i-1}(T, L) \,. \tag{5.52}$$

Подставляя (5.52) в (5.51), находим

$$T_{cp}(L) = \tau_1 \sum_{i=0}^{\infty} P^i(T, L) = \frac{\tau_1}{Q(T, L)}, \tag{5.53}$$

$$\tau_1 = \int_0^T P(t, L)dt \,. \tag{5.54}$$

Формула (5.53) точная и требует вычисления интеграла (5.54) после определения функции ВБР. Приближенный расчет основан на линейной аппроксимации

$$\tau_1 = T(1 + P(T, L)) / 2, k\lambda T_{cp}(L) = \frac{A}{2}\frac{1 + P(T, L)}{1 - P(T, L)} = A\left(\frac{1}{Q(T, L)} - \frac{1}{2}\right). \tag{5.55}$$

Оценка (5.55) является оценкой снизу.

5.3.4. Коэффициент готовности и коэффициент оперативной готовности

При периодическом пополнении запасов коэффициент готовности может оцениваться как вероятность успешного выполнения цикла в режиме МКЦП при очень малой длительности цикла. При этом оценка может быть проведена как по наихудшему циклу, расположенному в конце периода пополнения, так и по произвольно взятому циклу в любом месте периода пополнения. При оценке по наихудшему циклу при периодическом пополнении запасов коэффициент готовности совпадает с вероятностью безотказной работы:

$$K_г^*(T, L) = P(T, L) \,. \tag{5.56}$$

При оценке по произвольному циклу, выполняемому в случайный момент времени внутри интервала T, коэффициент готовности получается осреднением функции (5.56) по интервалу:

$$K_г(T, L) = \frac{1}{T}\int_0^T K_г^*(t, L)dt = \tau_1 / T = k\lambda\tau_1 / A, A = k\lambda T \,. \tag{5.57}$$

В отличие от ВБР коэффициент готовности не уменьшается при увеличении времени функционирования, а остается на уровне, определяемом формулами (5.56) и (5.57).

Подставляя (5.41) в (5.57) и учитывая (5.42), получим

$$K_г(T,L)=\sum_{i\in M_0\cup\ldots\cup M_m}K_г(T,L,S_i)=\frac{1}{A}\sum_{i=0}^{L}I(A,L+1)+\sum_{i\in M_1\cup\ldots\cup M_m}\frac{1}{T}\int_0^T P(t,S_i)dt\,. \qquad (5.58)$$

Как и (5.57), эта формула верна при любых t, в том числе и при $t > T$.

При конечной длительности цикла τ вместо $K_г(T,L)$ используется коэффициент оперативной готовности. Если принять допущение о том, что во время выполнения цикла замена отказавших элементов уже не допускается, то коэффициент оперативной готовности следует рассчитывать по формуле

$$K_{ог}(\tau,T,L)=\sum_{i\in M_0\cup\ldots\cup M_m}K_г(T,L,S_i)P(\tau,S_i)\,, \qquad (5.59)$$

где:

S_0 — полная резервированная структура;

S_i — одна из деградированных работоспособных структур;

$P(\tau, S_i)$ — ВБР невосстанавливаемой системы с начальной структурой S_i .

В некоторых системах может быть разрешена реконфигурация, при которой оставшиеся работоспособные элементы в структуре S_i перегруппировываются так, чтобы восстановить работоспособность в случае ее потери. Тогда все приведенные ранее формулы сохраняют силу. Только в них всюду принимаются $R_i = 1$, в том числе и при уровне деградации $j > d$.

5.3.5. Показатели надежности системы с последовательным соединением резервированных групп

Для системы с последовательно-параллельной структурой (см. рис. 5.2) при независимых отказах элементов показатели надежности связаны с показателями надежности однородных резервированных групп с помощью следующих формул:

$$P_c(t,T,L,S_0)=\prod_{i=1}^{N}P_i(t,T_i,L_i,S_{0i})\,, \qquad (5.60)$$

$$\lambda_c(t,T,L,S_0)=\sum_{i=1}^{N}\lambda_i(t,T_i,L_i,S_{0i})\,, \qquad (5.61)$$

$$a_c(t,T,L,S_0)=\lambda_c(t,T,L,S_0)P_c(t,T,L,S_0)\,, \qquad (5.62)$$

$$K_{гс}(T,L,S_0)=\prod_{i=1}^{N}K_{гi}(T_i,L_i,S_{0i})\,, \qquad (5.63)$$

$$K_{огс}(\tau,T,L,S_0)=\prod_{i=1}^{N}K_{огi}(\tau,T_i,L_i,S_{0i})\,. \qquad (5.64)$$

Заметим, что здесь уже нельзя рассчитывать коэффициент оперативной готовности системы как произведение коэффициента готовности системы на вероятность безотказной работы в течение цикла τ, что было возможно в однородной последовательной системе. При наличии резервирования необходимо сначала найти коэффициент оперативной готовности для каждой группы с учетом схемы резервирования, а затем значения коэффициентов для различных групп перемножить.

Точное значение средней наработки системы до отказа с помощью аналитической формулы найти не удается, но можно найти это значение численно путем интегрирования функции ВРБ. Приближенное значение средней наработки можно найти, исходя из экспоненциального приближения ВБР каждой группы:

$$P_{i,np}(t, T_i, L_i, S_{0i}) = \exp(-t / T_{cp,i}(T_i, L_i, S_{0i})), \quad (5.65)$$

где $T_{cp,i}(T_i, L_i, S_{0i})$ находят по формуле (5.53). Тогда средняя наработка до отказа системы

$$T_{cp,c} \approx \left(\sum_{i=1}^{N} T_{cp,i}^{-1} \right)^{-1}. \quad (5.66)$$

Эта формула совпадает с формулой (5.20) для последовательной системы. Заметим, что для последовательной системы эта формула всегда давала приближение снизу для точного значения. Для резервированных систем это требует дополнительного анализа.

Далее рассматриваются некоторые типовые резервированные структуры, удовлетворяющие следующим условиям:

- резервированная группа состоит из однотипных элементов;
- в каждой группе применяется только один вид резервирования: либо общее, либо групповое, либо поэлементное;
- при групповом или поэлементном резервировании группа состоит из нескольких подгрупп;
- одна из подгрупп может быть не резервирована.

Приведенные далее 17 моделей могут быть сгруппированы по структурным признакам:

- однородные последовательно-параллельные системы с двухранговой структурой (П2...П10);
- однородные параллельно-последовательные системы с трехранговой структурой (П11...П13);
- неоднородные последовательно-параллельные или параллельно-последовательные системы (П14...П16);
- системы со сложной структурой (П17).

Набор типовых структур всегда может быть дополнен читателем самостоятельно, с использованием общих методов, изложенных в данном разделе.

5.4. Дублированная система (модель П2)

Система состоит из k однотипных элементов (рис. 5.4, *а*), образующих две параллельные ветви по r элементов. В системе используется общее нагруженное дублирование. Для восстановления работоспособности в комплекте ЗИП-О предусмотрены L запасных частей. Запасы пополняются с периодом T. Граф состояний системы приведен на рис. 5,5, *а*.

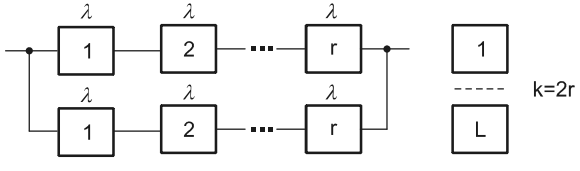
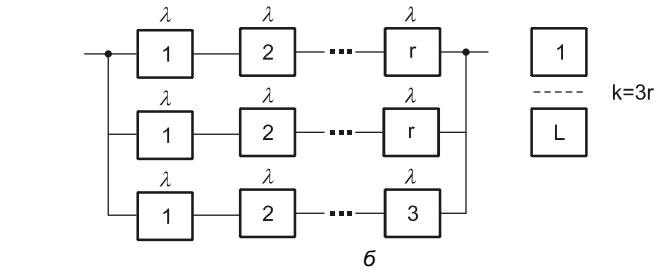
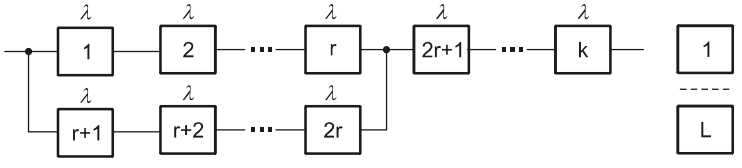


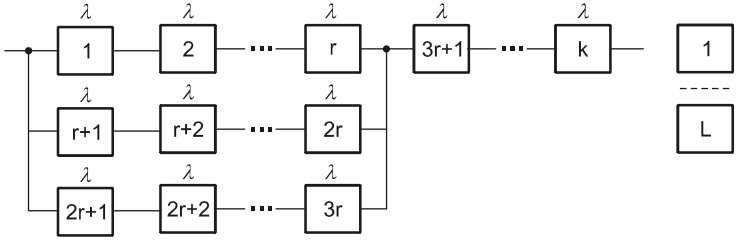
Рис. 5.4. Варианты структур резервированной системы: *а* — дублированная система (модель П2)



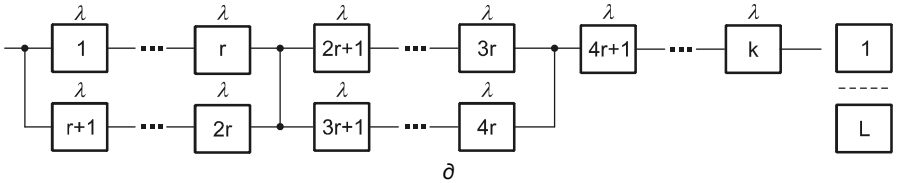
б



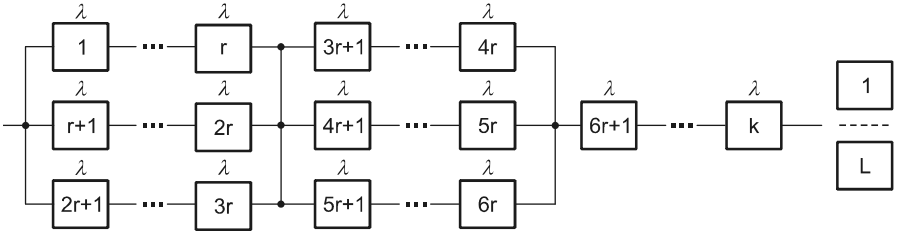
в



г



д



е

Рис. 5.4. Варианты структур резервированной системы:
б — мажорированная система (модель П3); *в* — смешанная система (модель П4);
г — смешанная система (модель П5); *д* — последовательное соединение двух дублированных и нерезервированной подсистем (модель П6); *е* — последовательное соединение двух мажорированных и нерезервированной подсистем (модель П7)

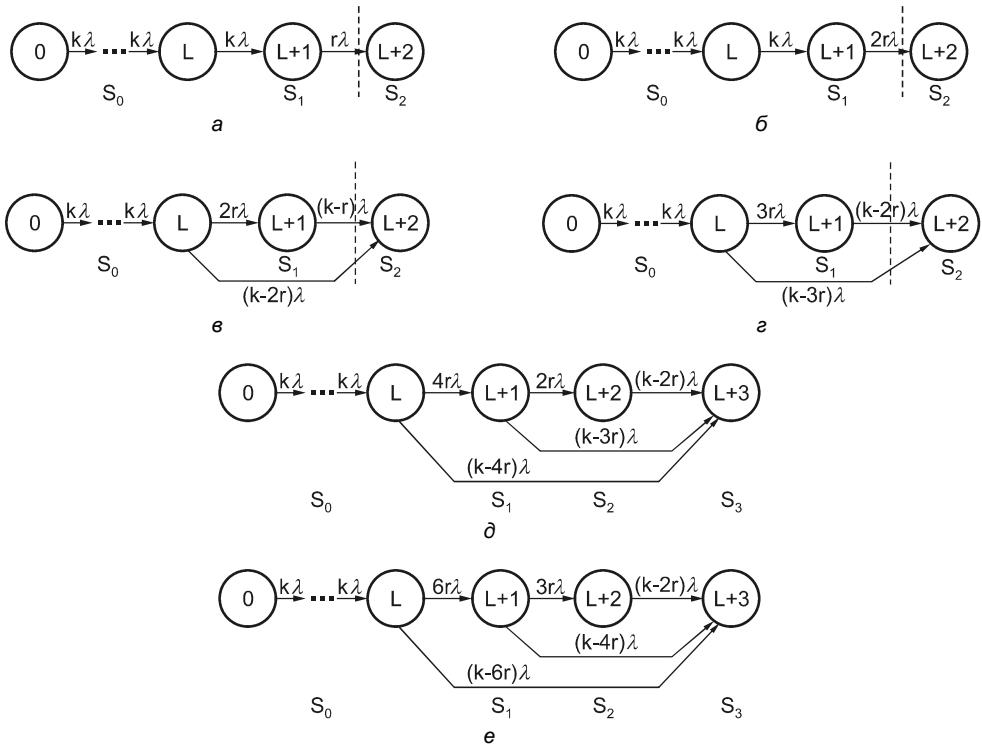


Рис. 5.5. Графы состояний резервированной системы: *а* — модель П2; *б* — модель П3; *в* — модель П4; *г* — модель П5; *д* — модель П6; *е* — модель П7

Вероятность отказа системы при отсутствии ЗИП определяют по формуле

$$Q(t,0) = 1 - e^{-r\lambda t}(2 - e^{-r\lambda t}). \tag{5.67}$$

Используя формулу (5.34), получим

$$Q(T,L) = \int_0^T \frac{(k\lambda)^L x^{L-1}}{(L-1)!} e^{-k\lambda x} Q(T-x,0)dx =$$

$$= \int_0^T \frac{(k\lambda)^L x^{L-1}}{(L-1)!} e^{-k\lambda x}(1 - e^{-r\lambda(T-x)}(2 - e^{-r\lambda(T-x)}))dx =$$

$$= I(A, L+1) - 2^{L+1} e^{-A/2} I(A/2, L+1). \tag{5.68}$$

Отсюда вероятность безотказной работы

$$P(T,L) = \sum_{i=0}^{L} \frac{A^i}{i!} e^{-A} + 2^{L+1} e^{-A/2} I(A/2, L+1), A = k\lambda T. \tag{5.69}$$

В частности, при $L = 1$ и 2 имеем

$$P(T,1) = e^{-A/2}(4 - (3+A)e^{-A/2}), \tag{5.70}$$

$$P(T,2) = e^{-A/2}(8 - (7 + 3A + A^2/2)e^{-A/2}).$$

Поскольку данная система имеет только две работоспособных структуры (одна базовая и одна деградированная), то форма (5.41) представления ВБР имеет вид:

$$P(T,L) = P(T,L,S_0) + P(T,L,S_1), \tag{5.71}$$

$$P(T,L,S_0) = 1 - I(A,L+1), P(T,L,S_1) = 2^{L+1} e^{-A/2} I(A/2, L+1).$$

Представление в приращениях:

$$P(T,L) = P(T,0) + \sum_{i=1}^{L} 2^i e^{-A/2} I(A/2, i+1), \tag{5.72}$$

$$P(T,0) = e^{-A/2}(2 - e^{-A/2}), \Delta P(T,i) = 2^i e^{-A/2} I(A/2, i+1).$$

Чтобы найти среднюю наработку до отказа, преобразуем (5.71) к виду:

$$P(T,L) = 2^{L+1} e^{-A/2} - \sum_{i=0}^{L} (2^{L+1-i} - 1) \frac{A^i}{i!} e^{-A}. \tag{5.73}$$

Интегрируя в (5.73) согласно (5.54), получим

$$k\lambda\tau_1 = 2^{L+2}(1 - e^{-A/2}) - \sum_{i=0}^{L} (2^{L+1-i} - 1) I(A, i+1). \tag{5.74}$$

Согласно (5.53) средняя наработка до отказа

$$k\lambda T_{cp}(T,L) = k\lambda\tau_1 / (I(A,L+1) - 2^{L+1} e^{-A/2} I(A/2, L+1)). \tag{5.75}$$

В частности, при L = 1 и 2 имеем

$$k\lambda T_{cp}(T,1) = (4 - 8e^{-A/2} + (4+A)e^{-A}) / (1 - 4e^{-A/2} + (3+A)e^{-A}), \tag{5.76}$$

$$k\lambda T_{cp}(T,2) = \frac{5 - 16e^{-A/2} + (11 + 4A + A^2/2)e^{-A}}{1 - 8e^{-A/2} + (7 + 3A + A^2/2)e^{-A}}. \tag{5.77}$$

Из (5.75) не трудно установить, что при увеличении периода пополнения средняя наработка до отказа стремится к средней наработке невосстанавливаемой системы

$$\lim_{T \to \infty} k\lambda T_{cp}(T,L) = 3 + L. \tag{5.78}$$

При малых A можно использовать приближенную формулу. Для этого надо провести разложение формулы (5.71) по степеням A и выделить главный член разложения. Не трудно установить, что вероятность отказа

$$Q(T,L) \approx \frac{A^{L+2}}{2(L+2)!}. \tag{5.79}$$

Используя (5.53) и учитывая, что $k\lambda\tau_1 \approx A$, получим приближенную формулу для средней наработки

$$k\lambda T_{cp}(T,L) \approx 2(L+2)! / A^{L+1}. \tag{5.80}$$

Приближенное значение ВБР на основе экспоненциальной модели находят по формуле

$$P(t,L) \approx \exp(-k\lambda t Q(T,L) / (k\lambda\tau_1)). \tag{5.81}$$

Частота и интенсивность отказов

$$a(T,L)\setminus(k\lambda)=2^{L}e^{-A/2}I(A/2,L+1))\,, \tag{5.82}$$

$$\lambda(T,L)\setminus(k\lambda)=a(T,L)\setminus(k\lambda P(T,L))\,. \tag{5.83}$$

В частности, при L = 1 и 2 имеем:

$$\lambda(T,1)\setminus(k\lambda)=(2-(2+A)e^{-A/2})/(4-(3+A)e^{-A/2})\,, \tag{5.84}$$

$$\lambda(T,2)\setminus(k\lambda)=4I(A/2;3)/(8-(7+3A+A^{2}/2)e^{-A/2})\,.$$

При t = 0 интенсивность отказов равна 0. Чтобы найти предел при $T\to\infty$, преобразуем (5.83) к виду

$$\lambda(T,L)\setminus(k\lambda)=\frac{1}{2}\left(1-\sum_{i=0}^{L}\frac{A^{i}}{i!}e^{-A}/P(T,L)\right). \tag{5.85}$$

Отсюда следует, что интенсивность отказов дублированной системы имеет пределом интенсивность отказов нерезервированной системы:

$$\lim_{T\to\infty}\lambda(T,L)=k\lambda/2=r\lambda\,. \tag{5.86}$$

Для расчета показателей надежности системы при произвольном значении t надо использовать формулы (5.47) и (5.50).

Явное выражение для коэффициента готовности легко найти с помощью формул (5.57) и (5.74). Представим это выражение в виде двух слагаемых:

$$K_{г}(T,L)=K_{г}(T,L,S_{0})+K_{г}(T,L,S_{1})\,, \tag{5.87}$$

$$K_{г}(T,L,S_{0})=\frac{1}{A}\sum_{i=0}^{L}I(A,i+1)\,,$$

$$K_{г}(T,L,S_{1})=\frac{2}{A}\left(2^{L+1}(1-e^{-A/2})-\sum_{i=0}^{L}2^{L-i}I(A,i+1)\right).$$

Отсюда легко записать выражения для коэффициента оперативной готовности:

$$K^{*}_{огс}(\tau,T,L)=P(T,L,S_{0})e^{-\alpha/2}(2-e^{-\alpha/2})+P(T,L,S_{1})e^{-\alpha/2}\,, \tag{5.88}$$

$$K_{огс}(\tau,T,L,S_{0})=K_{г}(T,L,S_{0})e^{-\alpha/2}(2-e^{-\alpha/2})+K_{г}(T,L,S_{1})e^{-\alpha/2}\,. \tag{5.89}$$

В *приложении 5* приведены примеры П5.3–П5.5 по расчету и анализу показателей надежности дублированной системы (модель П2). По результатам анализа можно сделать выводы:

- расчеты показывают, что при увеличении периода пополнения ухудшаются все показатели надежности. При этом зависимость ВБР от периода пополнения существенно отличается от экспоненциальной. Однако приближенное значение ВБР, полученное по формуле (5.65), дает очень хорошее приближение точного значения ВБР. Относительная погрешность δ_{Q} составляет всего несколько процентов, а в наиболее интересной для практики области ($P\geq 0{,}90$) не превышает 2,5 %. Для $P\geq 0{,}99$ эта погрешность составляет всего несколько десятых процента. Такой эффект можно объяснить тем, что с ростом T уменьшается средняя наработка до отказа, а среднее значение по интервалу $(0,T)$ интенсивности отказов ($1/T_{ср}$), напротив, растет;
- вероятность безотказной работы состоит из участков с волнообразным изменением значения вероятности. В точках, кратных T, приближенное значение, полученное на основе

экспоненциальной модели, практически совпадает с точным значением. В других точках, особенно в начале периода пополнения, расхождение приближенного значения с точным может быть существенным, а вероятности отказа различаться в десятки раз. Это значит, что в этих случаях расчет ВБР надо проводить по точным формулам, оставляя приближенные формулы для расчета в опорных точках $t = mT$. Коэффициент готовности и средняя наработка до отказа зависят только от периода пополнения и количества запасных частей, а при неизменных T и L являются константами;

- интенсивность отказов увеличивается с ростом T, асимптотически приближаясь к интенсивности отказов нерезервированной системы $r\lambda = k\lambda/2$. При этом $\lambda(T,L)\backslash(k\lambda)$ приближается к 0,5;
- коэффициент готовности системы, рассчитанный для произвольно выбранного момента времени в интервале $(0,T)$, также уменьшается с ростом T, но остается всюду существенно больше, чем ВБР;
- добавление к комплекту ЗИП второй ЗЧ значительно улучшает показатели надежности. Средняя наработка до отказа увеличивается в 2,46 раза при $A = 2$ и в 20,3 раза при $A = 0{,}2$. Интенсивность отказов уменьшается в 1,9 раза при $A = 2$ и в 7,7 раза при $A = 0{,}2$;
- характер зависимости показателей надежности от времени в дублированной системе качественно не отличается от аналогичных зависимостей нерезервированной системы;
- если периоды пополнения запасов или средние значения наработки до отказа для различных подсистем различаются, то зависимость ВБР от времени становится более сложной. Сравнивая точное и приближенное значения ВБР, можно заметить, что до больших значений A приближенное значение является оценкой снизу. Причем погрешность возрастает по сравнению со случаем, когда периоды пополнения одинаковы;
- функция интенсивности отказов также имеет разрывы в моменты времени, кратные периоду пополнения. Однако всюду интенсивность отказов больше нуля, колеблясь вокруг среднего значения $\lambda_{c,cp} = 1/T_{c,cp}$, которое в данном случае в 8–28 раз меньше интенсивности отказов нерезервированной системы;
- при уменьшении T и соответствующем уменьшении параметров A_1 и A_2 все показатели надежности улучшаются, приближаясь к значениям идеально надежной системы. Поэтому всегда можно подобрать такой период пополнения, который обеспечивает любое заранее заданное значение показателя надежности. Однако практически не всегда оказывается целесообразным выбирать очень малый период пополнения. Кроме того, часто бывает целесообразным перейти к другой стратегии пополнения;
- сравнение точных формул и приближенных формул из *главы 2* показывает, что приближенная формула (5.65) дает более высокую точность, чем формула (2.15). Внутри периода пополнения обе формулы дают значительную погрешность по вероятности отказа (сотни процентов). Однако для значений времени эксплуатации, кратных периоду пополнения, обе формулы имеют небольшую погрешность (несколько процентов) и могут быть рекомендованы для использования в проектной практике. Приближенное значение средней наработки до отказа, рассчитанное по формуле (2.15), также близко к точному значению. Рассчитанное по формулам примера П2.2 приближенное значение коэффициента готовности системы существенно больше точного значения. Коэффициенты простоя отличаются в несколько раз.

5.5. Мажорированная система (модель П3)

Система состоит из трех одинаковых групп элементов (см. рис. 5.4, *б*). Граф состояний системы приведен на рис. 5.5, *б*.

Вероятность отказа при отсутствии ЗИП определяют по формуле

$$Q(T,L)=\int_0^T\frac{(k\lambda)^L x^{L-1}}{(L-1)!}e^{-k\lambda x}(1-e^{-2r\lambda(T-x)}(3-2e^{-r\lambda(T-x)}))dx=$$

$$=I(A,L+1)-3\left(\frac{k}{r}\right)^L e^{-2ra}I(ra,L+1),a=\lambda T\,. \tag{5.90}$$

Отсюда вероятность безотказной работы

$$P(T,L)=P(T,L,S_0)+P(T,L,S_1)=\sum_{i=0}^{L}\frac{A^i}{i!}e^{-A}+3^{L+1}e^{-2ra}I(ra,L+1)\,. \tag{5.91}$$

Представление ВБР в приращениях:

$$P(T,L)=P(T,0)+2\sum_{i=1}^{L}3^i e^{-A+ra}I(ra,i+1), \tag{5.92}$$

$$P(T,0)=e^{-2ra}(3-2e^{-ra}),\Delta P(T,i)=2(3^i)e^{-A+ra}I(ra,i+1)\,.$$

Согласно (5.54) и (5.55), интегрируя (5.92), находим сначала τ_1, а затем среднюю наработку до отказа

$$k\lambda\tau_1=(3^{L+2}/2)(1-e^{-2ra})-\sum_{i=0}^{L}(3^{L+1-i}-1)I(A,i+1)\,, \tag{5.93}$$

$$k\lambda T_{cp}(T,L)=k\lambda\tau_1/(I(A,L+1)-3^{L+1}e^{-2ra}I(ra,L+1))\,. \tag{5.94}$$

В частности, при L = 1 и 2 имеем

$$k\lambda T_{cp}(T,1)=\frac{13,5(1-e^{-2ra})-8(1-e^{-A})-2I(A,2)}{I(A,2)-9e^{-2ra}I(ra,2)}=$$

$$=\frac{3,5-13,5e^{-2ra}+2(5+A)e^{-A}}{I(A,2)-9e^{-2ra}I(ra,2)}\,, \tag{5.95}$$

$$k\lambda T_{cp}(T,2)=\frac{40,5(1-e^{-2ra})-26(1-e^{-A})-8I(A,2)-2I(A,3)}{I(A,3)-27e^{-2ra}I(ra,3)}$$

При увеличении периода пополнения средняя наработка до отказа стремится к значению

$$\lim_{T\to\infty}k\lambda T_{cp}(T,L)=2,5+L\,. \tag{5.96}$$

При малых A вероятность отказа рассчитывают по приближенной формуле

$$Q(T,L)\approx\frac{2A^{L+2}}{3(L+2)!}\,. \tag{5.97}$$

Средняя наработка до отказа

$$k\lambda T_{cp}(T,L) \approx 2(L+2)!/\ A^{L+1}, L \geq 1. \tag{5.98}$$

Приближенное значение ВБР на основе экспоненциальной модели находим по формуле (5.81), где $k\lambda\tau_1$ и $Q(T,L)$ следует брать из (5.93) и (5.90).

Частота и интенсивность отказов

$$a(T,L) \setminus (k\lambda) = 2(3^L)e^{-2ra} I(ra, L+1)), \tag{5.99}$$

$$\lambda(T,L) \setminus (k\lambda) = 2(3^L) I(ra, L+1)) \setminus (\sum_{i=0}^{L} \frac{A^i}{i!} e^{-ra} + 3^{L+1} I(ra, L+1)). \tag{5.100}$$

В частности, при L = 1 и 2 имеем

$$\lambda(T,1) \setminus (k\lambda) = \frac{6I(ra,2)}{(1+A)e^{-ra} + 9I(ra,2)} = \frac{6I(ra,2)}{9-(8+2A)e^{-ra}}, \tag{5.101}$$

$$\lambda(T,2) \setminus (k\lambda) = 18I(ra,3) / ((1+A+A^2/2)e^{-ra} + 27I(ra,3)). \tag{5.102}$$

Отсюда видно, что при t = 0 интенсивность отказов равна 0. Чтобы найти предельное значение при увеличении периода пополнения, представим (5.100) в виде

$$\lambda(T,L) \setminus (k\lambda) = \frac{2}{3}\left(1 - \sum_{i=0}^{L} \frac{A^i}{i!} e^{-A} / P(T,L)\right). \tag{5.102}$$

Из (5.102) следует, что $\lim\limits_{T\to\infty} \lambda(T,L) = (k-r)\lambda$, т. е. интенсивность отказов мажорированной системы стремится к интенсивности отказов нерезервированной системы.

При произвольном времени t значение частоты и интенсивности отказов рассчитывают с помощью формул (5.48) и (5.50).

Среднее по интервалу (0, T) значение коэффициента готовности определяют по формуле (5.57), где $k\lambda\tau_1$ следует брать из (5.93). В результате имеем

$$K_г(T,L) = \frac{1}{A}\left(\frac{1}{2}3^{L+2} I(2ra,1) - \sum_{i=0}^{L} (3^{L+1-i} - 1) I(A, i+1)\right). \tag{5.103}$$

Чтобы найти коэффициент оперативной готовности при выполнении последнего в периоде пополнения или случайного выбранного цикла, используем представление ВБР в виде двух слагаемых (5.91) и представление $k\lambda\tau_1$ также в виде двух слагаемых, соответствующих структурам S_0 и S_1:

$$k\lambda\tau_1 = k\lambda\tau_1^0 + k\lambda\tau_1^1, k\lambda\tau_1^0 = \sum_{i=0}^{L} I(A, i+1), \tag{5.104}$$

$$k\lambda\tau_1^1 = (3^{L+2}/2)(1 - e^{-2ra}) - \sum_{i=0}^{L} 3^{L+1-i} I(A, i+1).$$

Тогда

$$K^*_{огс}(\tau, T, L) = P(T, L, S_0)e^{-2\alpha/3}(3 - 2e^{-\alpha/2}) + P(T, L, S_1)e^{-2\alpha/3}, \alpha = k\lambda\tau, \tag{5.105}$$

$$K_{огс}(\tau, T, L, S_0) = K_г(T, L, S_0)e^{-2\alpha/3}(3 - 2e^{-\alpha/2}) + K_г(T, L, S_1)e^{-2\alpha/3}, \tag{5.106}$$

$$K_г(T, L, S_i) = k\lambda\tau_1^i / A, i = 0;1.$$

В *приложении 5* (пример П5.6) проведены расчеты и анализ показателей надежности мажорированной системы (модель П3). По результатам анализа можно сделать выводы:

- зависимость вероятности безотказной работы и коэффициента готовности мажорированной системы от периода пополнения близка к экспоненциальной для всех значений запасов в комплекте ЗИП;
- приближенная формула (5.81) для расчета вероятности безотказной работы дает оценку сверху точного значения вероятности и имеет небольшую погрешность (от долей процентов до нескольких процентов по вероятности отказа). Это дает основание для замены дублированной системы с комплектом ЗИП эквивалентным марковским элементом в более сложных структурах;
- коэффициент готовности уменьшается при увеличении периода пополнения. Однако при неизменном периоде при увеличении времени функционирования он никогда не становится меньше значения $K_г(A)$, тогда как вероятность безотказной работы продолжает уменьшаться вплоть до значений, близких к нулю;
- интенсивность отказов системы даже при $A = 2$ еще весьма далека от предельного значения, равного интенсивности потока заявок в комплект ЗИП на доставку запасных частей. Среднее значение интенсивности по периоду пополнения еще меньше и составляет 30–40 % от значения в конце периода пополнения;
- пилообразный характер зависимости интенсивности и частоты отказов от времени отражает расход ресурсов в течение периода пополнения и свидетельствует о том, что внутри периода марковское поведение системы нарушается.

5.6. Последовательное соединение дублированной и нерезервированной подсистем (модель П4)

Система состоит из двух параллельных ветвей по r элементов каждая, образующих дублированную подсистему, и соединенной с ней последовательно нерезервированной подсистемы, содержащей $k - 2r$ элементов (см. рис. 5.4, *в*). Граф состояний содержит $L + 3$ состояний (см. рис. 5.5, *в*).

Вывод формулы для расчета ВБР проведем двумя способами.

Первый способ основан на использовании формулы (5.38). При отсутствии ЗИП вероятность отказа находят по формуле

$$Q(T,0) = 1 - e^{-(k-r)a}(2 - e^{-ra}). \tag{5.107}$$

Согласно (5.38) вероятность отказа при наличии L запасных частей

$$Q(T,L) = \int_0^T \frac{(k\lambda)^L x^{L-1}}{(L-1)!} e^{-k\lambda x}(1 - e^{-(k-r)\lambda(T-x)}(2 - e^{-r\lambda(T-x)}))dx =$$

$$= I(A, L+1) - 2\left(\frac{k}{r}\right)^L e^{-(k-r)a} I(ra, L+1). \tag{5.108}$$

Второй способ основан на анализе графа состояний. Сначала находим вероятности состояний, сохраняющих базовую структуру S_0, и их изображения по Карсону:

$$P_i(T) = \frac{A^i}{i!} e^{-A}, P_i^*(s) = \frac{s(k\lambda)^i}{(s + k\lambda)^{i+1}}, i = 0...L. \tag{5.109}$$

Изображение для функции вероятности состояния $L+1$ (вероятности появления деградированной структуры S_1) имеет вид

$$P^*_{L+1}(s) = \frac{2r\lambda}{s+(k-r)\lambda} P^*_L(s) = \left(\frac{k\lambda}{s+k\lambda}\right)^{L+1} \frac{\delta s}{s+(k-r)\lambda}, \delta = \frac{2r}{r}, \tag{5.110}$$

где δ — коэффициент выживаемости при возникновении $(L+1)$-го отказа.

Переходя от (5.110) к оригиналу, получим

$$P_{L+1}(T,L) = P(T,L,S_1) = \delta \int_0^T \frac{(k\lambda)^{L+1} x^L}{L!} e^{-k\lambda x} e^{-(k-r)\lambda(T-x)} dx =$$

$$= \delta \left(\frac{k}{r}\right)^L e^{-(k-r)a} I(ra, L+1). \tag{5.111}$$

Теперь, суммируя вероятности (5.109) и (5.111), получим искомую формулу для вероятности безотказной работы:

$$P(T,L) = P(T,L,S_0) + P(T,L,S_1) = 1 - I(A, L+1) + 2\left(\frac{k}{r}\right)^L e^{-(k-r)a} I(ra, L+1). \tag{5.112}$$

В частности, при $L = 1$ и 2 имеем:

$$P(T,1) = \frac{2k}{r} e^{-(k-r)a} - \left(\frac{2k}{r} - 1 + A\right) e^{-A}, \tag{5.113}$$

$$P(T,2) = 2\left(\frac{k}{r}\right)^2 e^{-(k-r)a} - \left(2\left(\frac{k}{r}\right)^2 - 1 + A\left(\frac{2k}{r} - 1\right) + \frac{A^2}{2}\right) e^{-A}. \tag{5.114}$$

При $k = 2r$ формулы (5.112)–(5.114) совпадают с (5.69)–(5.70).

Представление ВБР в приращениях:

$$P(T,L) = P(T,0) + \sum_{i=1}^{L} \Delta P(T,i), \tag{5.115}$$

$$P(T,0) = e^{-(k-r)a}(2 - e^{-ra}),$$

$$\Delta P(T,i) = 2\left(\frac{k}{r}\right)^{i-1} \left(\frac{k}{r} - 1\right) e^{-(k-r)a} I(ra, i) - \frac{A^i}{i!} e^{-A}, 1 \le i \le L.$$

Представим (5.112) в виде:

$$P(T,L) = 2\left(\frac{k}{r}\right)^L e^{-(k-r)a} - \sum_{i=0}^{L} \left(2\left(\frac{k}{r}\right)^{L-i} - 1\right) \frac{A^i}{i!} e^{-A}$$

и проинтегрируем в интервале $(0,T)$. Тогда найдем

$$k\lambda\tau_1 = \frac{2k}{k-r}\left(\frac{k}{r}\right)^L \left(1 - e^{-(k-r)a}\right) - \sum_{i=0}^{L} \left(2\left(\frac{k}{r}\right)^{L-i} - 1\right) I(A, i+1). \tag{5.116}$$

Разделив (5.116) на вероятность отказа (5.108), получим среднюю наработку до отказа

$$k\lambda T_{cp}(T,L) = k\lambda\tau_1 / Q(T,L)\,.$$

В частности, при $L = 1$ и 2 имеем:

$$k\lambda T_{cp}(T,1) = \frac{\dfrac{2k^2}{(k-r)r}\left(1-e^{-(k-r)a}\right)-\left(\dfrac{2k}{r}-1\right)(1-e^{-A})-I(A,2)}{I(A,2)-\dfrac{2k}{r}e^{-(k-r)a}I(ra,2)}\,. \tag{5.117}$$

$$k\lambda T_{cp}(T,2) = \frac{\dfrac{3k-r}{k-r}-\dfrac{2k^3}{r^2(k-r)}e^{-(k-r)a}+e^{-A}\left(\dfrac{2k(k+r)}{r^2}-1+\dfrac{2k}{r}A+\dfrac{A^2}{2}\right)}{1-2\left(\dfrac{k}{r}\right)^2 e^{-(k-r)a}+e^{-A}\left(\dfrac{2k^2}{r^2}-1+\dfrac{2k-r}{r}A+\dfrac{A^2}{2}\right)}\,. \tag{5.118}$$

При увеличении периода пополнения средняя наработка стремится к значению

$$\lim_{T\to\infty} k\lambda T_{cp}(T,L) = \frac{k+r}{k-r}+L\,. \tag{5.119}$$

При $k = 2r$ формула (5.119) совпадает с (5.78).

При малых A можно использовать приближенные формулы:

$$Q(T,L) \approx \left(1-\frac{2r}{k}\right)\frac{A^{L+1}}{(L+1)!}+\left(1+\frac{2r}{k}\left((k-r)(L+2)-r\right)\right), \tag{5.120}$$

$$k\lambda T_{cp}(T,L) \approx \frac{(L+2)!}{A^L\left(1-\dfrac{2r}{k}\right)\left(L(1-A)+2\right)+A^{L+1}\left(\dfrac{4r}{k}-\dfrac{2r^2}{k^2}-1\right)}\,. \tag{5.121}$$

Частота и интенсивность отказов

$$a(T,L)\setminus(k\lambda) = \frac{A^L}{L!}e^{-A}\left(1-\frac{2ra}{A}\right)+2\left(1-\frac{ra}{A}\right)\left(\frac{A}{ra}\right)^L e^{-A+ra}I(ra,L+1) \tag{5.122}$$

$$\lambda(T,L)\setminus(k\lambda) = a(T,L)\setminus(k\lambda P(T,L))\,. \tag{5.123}$$

В частности, при $L = 1$ и 2 имеем:

$$\lambda(T,1)\setminus(k\lambda) = \frac{Ae^{-A}\left(1-\dfrac{2ra}{A}\right)+2\left(\dfrac{A}{ra}-1\right)e^{-A+ra}I(ra,2)}{\dfrac{2k}{r}e^{-A+ra}-\left(\dfrac{2k}{r}-1+A\right)e^{-A}}\,, \tag{5.124}$$

$$\lambda(T,2)\setminus(k\lambda) = \frac{\left(1-\dfrac{2ra}{A}\right)\dfrac{A^2}{2}e^{-A}+\dfrac{2A}{ra}\left(\dfrac{A}{ra}-1\right)e^{-A+ra}I(ra,3)}{\left(1+A+\dfrac{A^2}{2}\right)e^{-A}+2\left(\dfrac{k}{r}\right)^2 e^{-A+ra}I(ra,3)}\,. \tag{5.125}$$

При $k = 2r$ формулы (5.124) и (5.125) совпадают с формулами (5.84).

Чтобы найти предел функции $\lambda(T,L)$ при $T \to \infty$, сократим в числителе и знаменателе (5.123) на $\exp(-A + ra)$, устранив неопределенность типа «ноль на ноль», и устремим выражение к пределу. В результате имеем интенсивность отказов нерезервированной системы:

$$\lim_{T\to\infty} \lambda(T,L) = (k-r)\lambda\,. \tag{5.126}$$

Среднее по интервалу $(0, T)$ значение коэффициента готовности

$$K_г(T,L) = k\lambda\tau_1 / A = \frac{1}{A}\left(\frac{2A}{A-ra}\left(\frac{A}{ra}\right)^L\left(1-e^{-A+ra}\right) - \sum_{i=0}^{L}\left(2\left(\frac{A}{ra}\right)^{L-i} - 1\right)I(A,i+1)\right). \tag{5.127}$$

Чтобы найти коэффициент оперативной готовности, представим (5.116) в виде двух слагаемых:

$$k\lambda\tau_1 = k\lambda\tau_1^0 + k\lambda\tau_1^1, k\lambda\tau_1^0 = \sum_{i=0}^{L} I(A,i+1), \tag{5.128}$$

$$k\lambda\tau_1^1 = \frac{2A}{A-ra}\left(\frac{A}{ra}\right)^L\left(1-e^{-A+ra}\right) - 2\sum_{i=0}^{L}\left(\frac{A}{ra}\right)^{L-i} I(A,i+1)\,.$$

Тогда коэффициент оперативной готовности

$$K^*_{oг}(\tau,T,L) = P(T,L,S_0)e^{-\alpha+r\beta}(2-e^{-r\beta}) + P(T,L,S_1)e^{-\alpha+r\beta}\,, \tag{5.129}$$

$$K_{oг}(\tau,T,L,S_0) = K_г(T,L,S_0)e^{-\alpha+r\beta}(2-e^{-r\beta}) + K_г(T,L,S_1)e^{-\alpha+r\beta},\ \alpha = k\lambda\tau = k\beta\,,$$

где $P(T,L,S_0)$ и $P(T,L,S_1)$ следует взять из (5.112).

Рассмотрим теперь случай, когда в системе возможна реконфигурация структуры. Реконфигурация состоит в том, что после исчерпания ЗИП и отказа одного из элементов в параллельной ветви дублированной подсистемы оставшиеся работоспособные элементы отключаются и направляются в комплект ЗИП-О для использования в качестве запасных частей для восстановления нерезервированной подсистемы. Для восстановления работоспособности оставшейся параллельной ветви дублированной подсистемы эти ЗЧ не используются, т. к. время замены существенно больше, чем допустимое время перерыва в работе этой подсистемы. Граф состояний системы с учетом реконфигурации имеет вид, приведенный на рис. 5.6, *а*.

Рассмотрим сначала точное решение задачи определения ВБР. Составляя дифференциальные уравнения и выполняя операционное преобразование Лапласа — Карсона, получим:

$$P_i^*(s) = \frac{s(k\lambda)^i}{(s+k\lambda)^{i+1}}, i = 0...L; P_{L+1}^*(s) = \frac{2r\lambda}{s+(k-r)\lambda}P_L^*(s)\,,$$

$$P_{L+i}^*(s) = \frac{(k-2r)\lambda}{s+(k-r)\lambda}P_{L+i-1}^*(s), 2 \le i \le r\,. \tag{5.130}$$

Отсюда

$$P^*(s,L) = \sum_{i=0}^{L+r} P_i^*(s), P_{L+1}^*(s) = \frac{2r\lambda s(k\lambda)^L}{(s+(k-r)\lambda)(s+k\lambda)^{L+1}}\,, \tag{5.131}$$

$$P_{L+i}^*(s) = \delta_i\frac{s((k-r)\lambda)^{i-1}}{(s+(k-r)\lambda)^i}\left(\frac{k\lambda}{s+k\lambda}\right)^{L+1}, \delta_i = \frac{2r}{k}\left(1-\frac{r}{k-r}\right)^{i-1}, 2 \le i \le r\,.$$

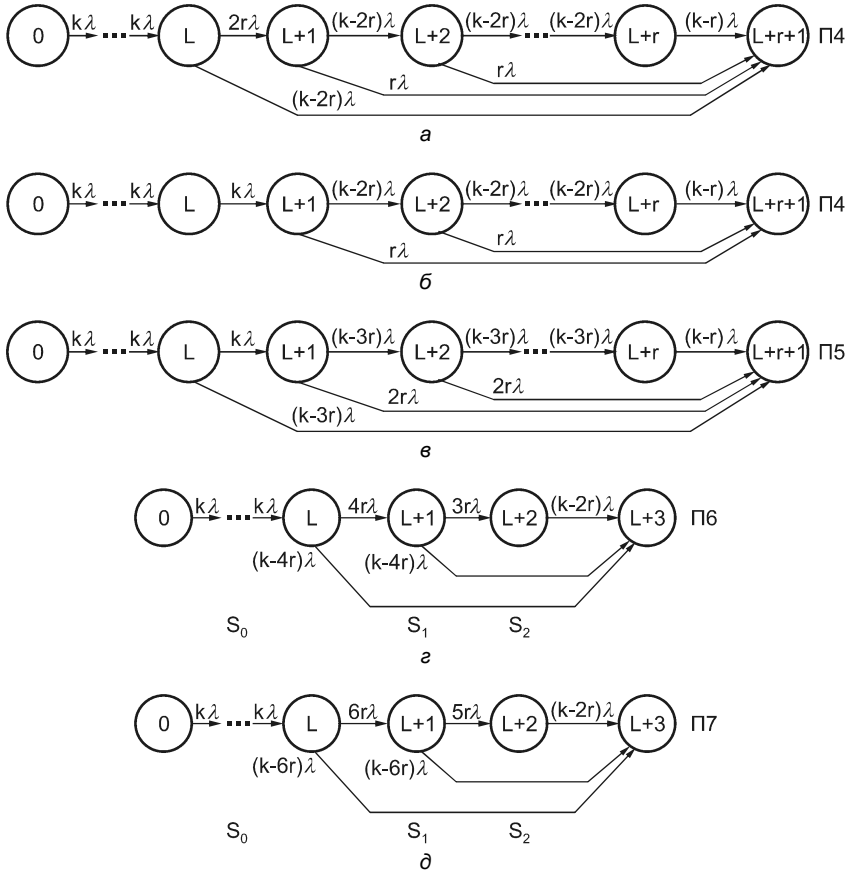


Рис. 5.6. Графы состояний резервированной системы при реконфигурации структуры: *а* — модель П4; *б* — модель П4, усиленная реконфигурация; *в* — модель П5; *г* — модель П6; *д* — модель П7

Выполняем обратное преобразование и находим

$$P(T,L,r)=\sum_{i=0}^{L}\frac{A^i}{i!}e^{-A}+\sum_{i=1}^{r}\delta_i\left(\frac{A}{ra}-1\right)^{i-1}\left(\frac{A}{ra}\right)^{L+1}e^{-A+ra}\sum_{j=0}^{i-1}C_{L+j}^{j}(-1)^j\frac{(ra)^{i-1-j}}{(i-1-j)!}I(ra,L+1+j)\,. \tag{5.132}$$

В частности, при $r = 2$ имеем:

$$P(T,L,2)=\sum_{i=0}^{L}\frac{A^i}{i!}e^{-A}+2\left(\frac{A}{2a}\right)^{L}e^{-A+2a}I(2a,L+1)+$$

$$+2\left(1-\frac{4a}{A}\right)\left(\frac{A}{2a}\right)^{L+1}e^{-A+2a}\left(2aI(2a,L+1)-(L+1)I(2a,L+2)\right). \tag{5.133}$$

Чтобы упростить расчеты, можно использовать приближенные формулы для $P_{L+i}(T)$, $i = 2...r$. Для этого заменим в (5.131) коэффициент $k - r$ в знаменателе выражения на k. Поскольку замена означает увеличение интенсивности потребления ЗЧ, то получим оценку снизу для ВБР.

После замены и обратного преобразования найдем:

$$P(T,L,r)=\sum_{i=0}^{L}\frac{A^i}{i!}e^{-A}+\sum_{i=1}^{r}\delta_i^*\left(\frac{A}{ra}\right)^{L+i}e^{-A+ra}I(ra,L+i)\,, \tag{5.134}$$

$$\delta_i^*=\frac{2ra}{A}\left(1-\frac{2ra}{A}\right)^{i-1},2\le i\le r\,.$$

Если в (5.134) заменить δ_i^* на $\delta_i^{**}=\frac{2ra}{A}\left(1-\frac{ra}{A-ra}\right)^{i-1}$, то получим оценку сверху.

В частности, из (5.134) при L = 1 и 2 имеем:

$$P(T,1,r)=(1+A)e^{-A}+\frac{2A}{ra}e^{-A+ra}I(ra,2)+\sum_{i=2}^{r}\delta_i^*\left(\frac{A}{ra}\right)^{i+1}e^{-A+ra}I(ra,i+1)\,, \tag{5.135}$$

$$P(T,2,r)=\left(1+A+\frac{A^2}{2}\right)e^{-A}+2\left(\frac{A}{ra}\right)^2e^{-A+ra}I(ra,3)+\sum_{i=2}^{r}\delta_i^*\left(\frac{A}{ra}\right)^{i+2}e^{-A+ra}I(ra,i+2)\,.$$

Обе формулы являются приближенными и дают оценку снизу для точного значения ВБР. Причем сумма по i от 2 до r выражает приращение вероятности от использования реконфигурации.

Приращение точного значения вероятности от добавления одной ЗЧ имеет вид:

$$\Delta P(T,L)=P(T,L)-P(T,L-1)=2\left(\frac{A}{ra}\right)^{L-1}\left(\frac{A}{ra}-1\right)e^{-A+ra}I(ra,L)-\frac{A^L}{L!}e^{-A}+$$

$$+\sum_{i=2}^{r}\delta_i\left(\frac{A}{ra}-1\right)^{i-1}\left(\frac{A}{ra}\right)^{i}e^{-A+ra}\sum_{j=0}^{i-1}\frac{(ra)^{i-1-j}}{(i-1-j)!}\left(\frac{A}{ra}C_{L+j}^{j}I(ra,L+1+j)-C_{L-1+j}^{j}I(ra,L+j)\right). \tag{5.136}$$

Для нахождения средней наработки до отказа будем использовать оценку снизу точного значения ВБР. Представим ВБР в виде:

$$P(T,L)=C_0e^{-A+ra}-\sum_{j=0}^{L+r-1}B_j\frac{A^j}{j!}e^{-A}\,, \tag{5.137}$$

$$C_0=2\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{A}{ra}\right)^{L+1-i}\left(1-\frac{2ra}{A}\right)^{i-1},B_j=2\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{A}{ra}\right)^{i-1+L-j}\left(1-\frac{2ra}{A}\right)^{i-1}-1,0\le j\le L\,,$$

$$B_j=2\sum_{i=j+1-L}^{r}\left(\frac{A}{ra}\right)^{i-1+L-j}\left(1-\frac{2ra}{A}\right)^{i-1},L+1\le j\le L+r-1\,.$$

Интегрируя (5.137), получим:

$$k\lambda T_{cp}(T,L)=\left(\frac{A}{A-ra}C_0(1-e^{-A+ra})-\sum_{j=0}^{L+r-1}B_jI(A,j+1)\right)/Q(T,L)\,. \tag{5.138}$$

Коэффициент готовности находим по общей формуле (5.57), а коэффициент оперативной готовности — по формулам (5.129), где следует взять:

$$P(T,L,S_0)=\sum_{i=0}^{L}\frac{A^i}{i!}e^{-A},P(T,L,S_1)=P(T,L)-P(T,L,S_0),$$

$$k\lambda\tau_1^0=\sum_{j=0}^{L}I(A,j+1),k\lambda\tau_1^1=k\lambda\tau_1-k\lambda\tau_1^0. \quad (5.139)$$

Возможен вариант усиленной реконфигурации, когда после исчерпания ЗИП и отказа нерезервированной подсистемы восстановление системы происходит путем отключения одной работоспособной ветви из дублированной подсистемы и использования ее элементов в качестве ЗЧ. Тогда граф состояний приобретает вид, приведенный на рис. 5.6, *б*.

Сравнивая графы на рис. 5.6, *а* и 5.6, *б*, видим, что они очень похожи. Поэтому для расчета ВБР можно использовать формулу (5.134), где в качестве коэффициентов выживаемости нижней и верхней оценок следует взять:

$$\delta_i^*=\left(1-\frac{2ra}{A}\right)^{i-1},\delta_i^{**}=\left(1-\frac{r}{k-r}\right)^{i-1},1\le i\le r. \quad (5.140)$$

Среднюю наработку до отказа можно оценить по формуле

$$k\lambda T_{ср}(T,L)\approx A(1/(1-P(T,L))-0{,}5). \quad (5.141)$$

В случае реконфигурации структуры вероятность безотказной работы $P(T,L)$ следует вычислять по формулам (5.132) или (5.134), а при усиленной реконфигурации — по формуле (5.134) с использованием коэффициентов (5.140).

В *приложении 5* (пример П5.7) проведены расчеты и анализ показателей надежности смешанной системы (модель П4). По результатам анализа можно сделать выводы:

- зависимость ВБР смешанной системы от сложности последовательной и дублированной подсистем при наличии ЗИП различается не столь существенно как при отсутствии ЗИП. Это можно объяснить тем, что ЗИП поддерживает базовую структуру и той, и другой подсистем. С увеличением L различия все более нивелируются;
- сравнивая смешанную систему с чисто дублированной системой (модель П2), видим, что даже при небольшой доле последовательной подсистемы (около 10 %) снижение показателей надежности весьма существенно. Так при $L = 1$ в смешанной системе для $A = 1{,}1$ и $2ra = 1$ вероятность безотказной работы $P(T) = 0{,}9169$, а в дублированной системе при $A = 1$ вероятность $P(T) = 0{,}9546$;
- пилообразный характер зависимости интенсивности отказов от времени сохраняется, что свидетельствует о том, что внутри периода пополнения модель надежности немарковская.

5.7. Последовательное соединение мажорированной и нерезервированной подсистем (модель П5)

Система состоит из трех параллельных ветвей по r элементов каждая, образующих мажорированную подсистему, работающую по схеме голосования «два из трех», и соединенной с ней последовательно нерезервированной подсистемы, содержащей $k-3r$ элементов (см. рис. 5.4, *г*). Граф состояний содержит $L + 3$ состояний (см. рис. 5.5, *г*).

В соответствии с графом состояний находим изображения по Лапласу — Карсону для вероятностей состояний:

$$P_i^*(s) = \frac{s(k\lambda)^i}{(s+k\lambda)^{i+1}}, i = 0...L,$$

$$P_{L+1}^*(s) = \frac{3r\lambda}{s+(k-r)\lambda} P_L^*(s) = \delta\left(\frac{k\lambda}{s+k\lambda}\right)^{L+1} \frac{s}{s+(k-r)\lambda}, \delta = \frac{3r}{r}. \quad (5.142)$$

Отсюда

$$P(T,L) = P(T,L,S_0) + P(T,L,S_1) = \sum_{i=0}^{L} \frac{A^i}{i!} e^{-A} + 3\left(\frac{A}{ra}\right)^L e^{-A+ra} I(ra, L+1). \quad (5.143)$$

В частности, при $L = 0$ имеем:

$$P(T,0) = e^{-A+ra}(3 - 2e^{-ra}). \quad (5.144)$$

Второй способ вывода формулы для ВБР и вероятности отказа состоит в использовании соотношения (5.38). Интегрируя в интервале (0, T), получим:

$$Q(T,L) = \int_0^T \frac{(k\lambda)^L x^{L-1}}{(L-1)!} e^{-k\lambda x}(1 - e^{-(k-r)\lambda(T-x)}(3 - 2e^{-r\lambda(T-x)}))dx =$$

$$= I(A, L+1) - 3\left(\frac{k}{r}\right)^L e^{-(k-r)a} I(ra, L+1). \quad (5.145)$$

В частности, при $L = 1$ и 2 имеем:

$$P(T,1) = (1+A)e^{-A} + \frac{3A}{ra} e^{-A+ra} I(ra, 2), \quad (5.146)$$

$$P(T,2) = \left(1 + A + \frac{A^2}{2}\right) e^{-A} + 3\left(\frac{A}{ra}\right)^2 e^{-A+ra} I(ra, 3).$$

Выразим ВБР в приращениях

$$P(T,L) = P(T,0) + \sum_{i=1}^{L} \Delta P(T,i), P(T,0) = e^{-A+ra}(3 - 2e^{-ra}), \quad (5.147)$$

$$\Delta P(T,i) = 3\left(\frac{A}{ra}\right)^{i-1}\left(\frac{A}{ra} - 1\right) e^{-A+ra} I(ra, i) - 2\frac{A^i}{i!} e^{-A}, 1 \le i \le L.$$

Чтобы найти среднюю наработку до отказа, представим ВБР в виде:

$$P(T,L) = 3\left(\frac{A}{ra}\right)^L e^{-A+ra} - \sum_{i=0}^{L}\left(3\left(\frac{A}{ra}\right)^{L-i} - 1\right)\frac{A^i}{i!} e^{-A}. \quad (5.148)$$

Интегрируя в (5.148) и используя (5.54), получим:

$$k\lambda\tau_1 = \frac{3A}{A-ra}\left(\frac{A}{ra}\right)^L (1 - e^{-A+ra}) - \sum_{i=0}^{L}\left(3\left(\frac{A}{ra}\right)^{L-i} - 1\right) I(A, i+1), \quad (5.149)$$

$$k\lambda T_{cp}(T,L)=\frac{\frac{3A}{A-ra}\left(\frac{A}{ra}\right)^{L}(1-e^{-A+ra})-\sum_{i=0}^{L}\left(3\left(\frac{A}{ra}\right)^{L-i}-1\right)I(A,i+1)}{I(A,L+1)-3\left(\frac{A}{ra}\right)^{L}e^{-A+ra}I(ra,L+1)}. \qquad (5.150)$$

В частности, при $L = 1$ и 2 имеем:

$$k\lambda T_{cp}(T,1)=\frac{\frac{3A^2}{ra(A-ra)}(1-e^{-A+ra})-\left(\frac{3A}{ra}-1\right)I(A,1)-2I(A,2)}{I(A,2)-3\left(\frac{A}{ra}\right)\ e^{-A+ra}I(ra,2)}, \qquad (5.151)$$

$$k\lambda T_{cp}(T,2)=\frac{\frac{3A^3}{(ra)^2(A-ra)}(1-e^{-A+ra})-\left(3\left(\frac{A}{ra}\right)^2-1\right)I(A,1)-\left(\frac{3A}{ra}-1\right)I(A,2)-2I(A,3)}{I(A,3)-3\left(\frac{A}{ra}\right)^2e^{-A+ra}I(ra,3)}.$$

При $k = 3r$ формулы (5.147)–(5.151) совпадают с соответствующими формулами модели П3.

При увеличении периода пополнения средняя наработка до отказа асимптотически стремится к значению

$$k\lambda T_{cp}(T,\infty)=\frac{A+2ra}{A-2ra}+L. \qquad (5.152)$$

При малых A можно использовать приближенные формулы

$$Q(T,L)\approx\frac{A^{L+1}}{(L+1)!}\left(1-\frac{3ra}{A}\right)-\frac{A^{L+2}}{(L+2)!}\left(\left(1-\frac{3ra}{A}\right)\left(L+1-\frac{3ra}{A}\right)-6\left(\frac{ra}{A}\right)^2\right), \qquad (5.153)$$

$$k\lambda T_{cp}(T,L)\approx\frac{(L+2)!}{A^L}/\left(\left(1-\frac{3ra}{A}\right)\left(L+2-A\left(L+1-\frac{3ra}{A}\right)\right)+6A\left(\frac{ra}{A}\right)^2\right). \qquad (5.154)$$

Частота и интенсивность отказов

$$a(T,L)\setminus(k\lambda)=\frac{A^L}{L!}e^{-A}\left(1-\frac{3ra}{A}\right)+3\left(1-\frac{ra}{A}\right)\left(\frac{A}{ra}\right)^{L}e^{-A+ra}I(ra,L+1), \qquad (5.155)$$

$$\lambda(T,L)\setminus(k\lambda)=a(T,L)\setminus(k\lambda P(T,L)). \qquad (5.156)$$

В частности, при $L = 1$ и 2 имеем:

$$\frac{\lambda(T,1)}{k\lambda}=\left(A-3ra+3\left(\frac{A}{ra}-1\right)\left(e^{ra}-1-ra\right)\right)/\left(\frac{3A}{ra}\left(e^{ra}-1\right)+1-A\right), \qquad (5.157)$$

$$\frac{\lambda(T,2)}{k\lambda}=\frac{A\left(\frac{A-3ra}{2}+\frac{3}{ra}\left(\frac{A}{ra}-1\right)\left(e^{ra}-1-ra-\frac{(ra)^2}{2}\right)\right)}{1+A+A^2\left(\frac{3}{(ra)^2}\left(e^{ra}-1-ra\right)-1\right)}. \qquad (5.158)$$

Среднее по интервалу (0, T) значение коэффициента готовности получается после подстановки (5.149) в (5,57):

$$K_г(T,L)=\frac{1}{A}\left(\frac{3A}{A-ra}\left(\frac{A}{ra}\right)^L\left(1-e^{-A+ra}\right)-\sum_{i=0}^{L}\left(3\left(\frac{A}{ra}\right)^{L-i}-1\right)I(A,i+1)\right). \qquad (5.159)$$

Чтобы найти коэффициент оперативной готовности, представим (5.149) в виде двух слагаемых:

$$k\lambda\tau_1=k\lambda\tau_1^0+k\lambda\tau_1^1, k\lambda\tau_1^0=\sum_{i=0}^{L}I(A,i+1), \qquad (5.160)$$

$$k\lambda\tau_1^1=\frac{3A}{A-ra}\left(\frac{A}{ra}\right)^L\left(1-e^{-A+ra}\right)-3\sum_{i=0}^{L}\left(\frac{A}{ra}\right)^{L-i}I(A,i+1).$$

Тогда

$$K^*_{oг}(\tau,T,L)=P(T,L,S_0)e^{-\alpha+r\beta}(2-2e^{-r\beta})+P(T,L,S_1)e^{-\alpha+r\beta}, \qquad (5.161)$$

$$K_{oг}(\tau,T,L,S_0)=K_г(T,L,S_0)e^{-\alpha+r\beta}(3-2e^{-r\beta})+K_г(T,L,S_1)e^{-\alpha+r\beta}. \qquad (5.162)$$

Рассмотрим теперь случай, когда возможна реконфигурация структуры системы и после отказа одной из ветвей мажорированной подсистемы $r-1$ элементов переводится в ЗИП. Тогда граф состояний имеет вид, приведенный на рис. 5.6, *в*.

Согласно графу состояний функции вероятности состояний имеют изображения по Лапласу — Карсону:

$$P_i^*(s)=\frac{s(k\lambda)^i}{(s+k\lambda)^{i+1}}, i=0...L; P_{L+1}^*(s)=\frac{3r\lambda}{s+(k-r)\lambda}P_L^*(s),$$

$$P_{L+i}^*(s)=\frac{(k-3r)\lambda}{s+(k-r)\lambda}P_{L+i-1}^*(s), 2\le i\le r. \qquad (5.163)$$

Решая систему алгебраических уравнений (5.163), выполняя обратное преобразование и суммируя вероятности работоспособных состояний, получим

$$P(T,L)=\sum_{i=0}^{L}\frac{A^i}{i!}e^{-A}+\sum_{i=1}^{r}\delta_i\left(\frac{A}{ra}-1\right)^{i-1}\left(\frac{A}{ra}\right)^{L+1}e^{-A+ra}\sum_{j=0}^{i-1}C_{L+j}^j(-1)^j\frac{(ra)^{i-1-j}}{(i-1-j)!}I(ra,L+1+j),$$

$$\delta_i=\frac{3r}{k}\left(1-\frac{2r}{k-r}\right)^{i-1}, 1\le i\le r. \qquad (5.164)$$

В частности, при $r=2$ имеем:

$$P(T,L)=\sum_{i=0}^{L}\frac{A^i}{i!}e^{-A}+3\left(\frac{A}{2a}\right)^L e^{-A+2a}I(2a,L+1)+$$

$$+3\left(1-\frac{6a}{A}\right)\left(\frac{A}{2a}\right)^{L+1}e^{-A+2a}\left(2aI(2a,L+1)-(L+1)I(2a,L+2)\right). \qquad (5.165)$$

Приближение снизу и сверху для ВБР можно найти по формуле (5.134), если там взять соответственно коэффициенты

$$\delta_i^* = \frac{3ra}{A}\left(1-\frac{3ra}{A}\right)^{i-1}, \delta_i^{**} = \frac{3ra}{A}\left(1-\frac{2ra}{A-ra}\right)^{i-1}, 2 \le i \le r. \quad (5.166)$$

При $L = 1$ и 2 можно использовать формулы (5.135), если там взять коэффициенты из формулы (5.166). Представление ВБР в приращениях можно получить с помощью формулы (5.136), если в ней выразить коэффициент δ_i по формуле (5.164).

Чтобы найти среднюю наработку до отказа, используем (5.137), где

$$C_0 = 3\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{A}{ra}\right)^{L+1-i}\left(1-\frac{2ra}{A-ra}\right)^{i-1}, B_j = 3\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{A}{ra}\right)^{i-1+L-j}\left(1-\frac{3ra}{A}\right)^{i-1} - 1, 0 \le j \le L,$$

$$B_j = 3\sum_{i=j+1-L}^{r}\left(\frac{A}{ra}\right)^{i-1+L-j}\left(1-\frac{3ra}{A}\right)^{i-1}, L+1 \le j \le L+r-1. \quad (5.167)$$

Далее надо использовать формулу (5.138).

Коэффициент готовности и коэффициент оперативной готовности следует вычислять по общим формулам (5.57) и (5.129).

При усиленной конфигурации для нахождения оценок ВБР снизу и сверху следует в формуле (5.134) использовать коэффициенты выживаемости

$$\delta_i^* = \left(1-\frac{3ra}{A}\right)^{i-1}, \delta_i^{**} = \left(1-\frac{2ra}{A-ra}\right)^{i-1}, 1 \le i \le r. \quad (5.168)$$

При использовании различных вариантов реконфигурации при пополнении запасов в конце периода T происходит не только восстановление запасов в комплекте ЗИП-О, но и полное восстановление структуры S_0.

В *приложении 5* (примеры П5.8–П5.9) проведены расчеты и анализ показателей надежности смешанной мажорированной системы (модель П5). По результатам анализа можно сделать выводы:

- общие закономерности, подмеченные в смешанной системе с дублированием и охарактеризованные в *разд. 5.6*, проявляются и в этой смешанной системе, только влияние мажорированной подсистемы здесь больше, чем влияние дублированной подсистемы в модели П4;
- при прочих равных условиях показатели надежности смешанной мажорированной системы хуже, чем соответствующие показатели в смешанной дублированной системе.

5.8. Последовательное соединение двух дублированных и нерезервированной подсистем (модель П6)

Система состоит из $4r$ элементов, соединенных в две дублированные подсистемы, и $k - 4r$ элементов нерезервированной подсистемы (см. рис. 5.4, *д*). Граф состояний имеет вид, приведенный на рис. 5.5, *д*.

Вероятность отказа при отсутствии ЗИП:

$$Q(T,0) = 1 - 4e^{-(k-2r)a} + 4e^{-(k-r)a} - e^{-ra}. \quad (5.169)$$

Используя (5.38), находим вероятность отказа при наличии L запасных частей

$$Q(T,L)=\int_0^T\frac{(k\lambda)^L x^{L-1}}{(L-1)!}e^{-k\lambda x}(1-4e^{-(k-2r)\lambda(T-x)}+4e^{-(k-r)\lambda(T-x)}-e^{-r\lambda(T-x)})dx=$$

$$=I(A,L+1)-4\left(\frac{A}{2ra}\right)^L e^{-A+2ra}I(2ra,L)+4\left(\frac{A}{ra}\right)^L e^{-A+ra}I(ra,L). \qquad (5.170)$$

При $A=4ra$ из (5.170) получим:

$$P(T,L)=1-I(A,L+1)+2^{L+2}e^{-2ra}I(2ra,L)-4^{L+1}e^{-3ra}I(ra,L). \qquad (5.171)$$

Второй способ вывода формулы для ВБР состоит в использовании графа состояний. По графу состояний легко найти изображения функций вероятности сохранения базовой структуры S_0 и появления деградированных структур S_1 и S_2 :

$$P^*(s,L,S_0)=\sum_{i=0}^{L}\frac{s(k\lambda)^i}{(s+k\lambda)^{i+1}},P^*(s,L,S_1)=\frac{s(k\lambda)^L}{(s+k\lambda)^{L+1}}\frac{k\lambda\delta_1}{s+(k-r)\lambda}$$

$$P^*(s,L,S_2)=\frac{2r\lambda}{s+(k-2r)\lambda}\frac{k\lambda\delta_1}{s+(k-r)\lambda}\frac{s(k\lambda)^L}{(s+k\lambda)^{L+1}},\delta_1=\frac{4r}{k}. \qquad (5.172)$$

Выполняя здесь обратное преобразование, находим:

$$P(T,L,S_0)=\sum_{i=0}^{L}\frac{A^i}{i!}e^{-A},P(T,L,S_1)=4\left(\frac{A}{ra}\right)^L e^{-A+ra}I(ra,L+1),$$

$$P(T,L,S_2)=4\left(\frac{A}{2ra}\right)^L e^{-A+2ra}I(2ra,L+1)-8\left(\frac{A}{ra}\right)^L e^{-A+ra}I(ra,L+1). \qquad (5.173)$$

Суммируя вероятности (5.173), имеем:

$$P(T,L)=1-I(A,L+1)+4\left(\frac{A}{2ra}\right)^L e^{-A+2ra}I(2ra,L+1)-4\left(\frac{A}{ra}\right)^L e^{-A+ra}I(ra,L+1). \qquad (5.174)$$

Легко показать, что формулы (5.174) и (5.170) дают одинаковый результат.

В частности, при $L=1$ и 2 имеем:

$$P(T,1)=(1+A)e^{-A}+\frac{2A}{ra}e^{-A+2ra}(1-e^{-ra})^2, \qquad (5.175)$$

$$P(T,2)=\left(1+A+\frac{A^2}{2}\right)e^{-A}+\left(\frac{A}{ra}\right)^2 e^{-A+2ra}\left(I(2ra,2)-4e^{-ra}I(ra,2)\right).$$

В частности, при $A=4ra$ из (5.175) получим:

$$P(T,1)=8e^{-2ra}-16e^{-3ra}+(9+4ra)e^{-4ra}, \qquad (5.176)$$

$$P(T,2)=16e^{-2ra}-64e^{-3ra}+e^{-4ra}(49+36ra+8(ra)^2).$$

Представим (5.174) в форме приращений. Для этого выразим

$$\Delta P_i(T)=Q(T,i-1)-Q(T,i)$$

в виде изображения по Лапласу — Карсону

$$\Delta P_i^*(s) = \left(\frac{k\lambda}{s+k\lambda}\right)^{i-1} \frac{s}{s+k\lambda} Q^*(s,0) = \left(\frac{k\lambda}{s+k\lambda}\right)^{i-1} \Delta P_1^*(s)\,. \qquad (5.177)$$

Сначала найдем $\Delta P_1(T)$, выполняя обратное преобразование:

$$\Delta P_1(T) = \int_0^T e^{-k\lambda(T-x)} dQ(x,0) = 2\left(\frac{A}{ra}-2\right)e^{-A+2ra} - 4\left(\frac{A}{ra}-1\right)e^{-A+ra} + \left(\frac{2A}{ra}+A\right)e^{-A}.$$

Затем найдем $\Delta P_i(T)$, используя связь (5.177):

$$\Delta P_i(T) = \int_0^T \frac{(k\lambda)^{i-1}x^{i-2}}{(L-1)!} e^{-k\lambda x} \Delta P_1(T-x)dx =$$

$$= \frac{A^i}{i!}e^{-A} + 2\left(\frac{A}{ra}-2\right)\left(\frac{A}{2ra}\right)^{i-1} e^{-A+2ra} I(2ra,i) - 4\left(\frac{A}{ra}-1\right)\left(\frac{A}{ra}\right)^{i-1} e^{-A+ra} I(ra,i)\,. \qquad (5.178)$$

В частности, при $A = 4ra$ из (5.174) и (5.178) получим:

$$P(T,L) = 1 - I(A,L+1) + 2^{L+2} e^{-2ra} I(2ra,L+1) - 4^{L+1} e^{-3ra} I(ra,L+1)\,. \qquad (5.179)$$

$$\Delta P_i(T) = \frac{A^i}{i!}e^{-A} + 2^{i+1} e^{-2ra} I(2ra,i) - 3\left(4^i\right)e^{-3ra} I(ra,i)\,.$$

Чтобы найти среднюю наработку до отказа, представим ВБР из (5.174) в виде:

$$P(T,L) = 4\left(\frac{A}{2ra}\right)^L e^{-A+2ra} - 4\left(\frac{A}{ra}\right)^L e^{-A+ra} + \sum_{i=0}^{L} \frac{A^i}{i!} e^{-A}\left(1 - 4\left(\frac{A}{2ra}\right)^{L-i} + 4\left(\frac{A}{ra}\right)^{L-i}\right). \qquad (5.180)$$

Интегрируем в (5.180):

$$k\lambda\tau_1(T,L) = \frac{4A}{A-2ra}\left(\frac{A}{2ra}\right)^L (1-e^{-A+2ra}) - \frac{4A}{A-ra}\left(\frac{A}{ra}\right)^L (1-e^{-A+ra}) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{L}\left(1 - 4\left(\frac{A}{2ra}\right)^{L-i} + 4\left(\frac{A}{ra}\right)^{L-i}\right) I(A,i+1)\,. \qquad (5.181)$$

В частности, при $L = 1$ и 2 имеем:

$$k\lambda\tau_1(T,1) = \frac{2A^2}{(A-2ra)ra}(1-e^{-A+2ra}) - \frac{4A^2}{(A-ra)ra}(1-e^{-A+ra}) + \left(1+\frac{2A}{ra}\right) I(A,1) + I(A,2)\,, \qquad (5.182)$$

$$k\lambda\tau_1(T,2) = \frac{A^3}{(A-2ra)(ra)^2}(1-e^{-A+2ra}) - \frac{4A^3}{(A-ra)(ra)^2}(1-e^{-A+ra}) +$$

$$+ \left(1+\frac{3A^2}{(ra)^2}\right) I(A,1) + \left(1+\frac{2A}{ra}\right) I(A,2) + I(A,3)\,. \qquad (5.183)$$

При увеличении периода пополнения средняя наработка до отказа стремится асимптотически к пределу

$$k\lambda T_{cp}(\infty) = \frac{4raA}{(A-ra)(A-2ra)} + L + 1. \tag{5.184}$$

При $A = 4ra$ имеем:

$$k\lambda T_{cp}(\infty) = \frac{11}{3} + L. \tag{5.185}$$

При малых A можно использовать асимптотические формулы, полученные путем разложения (5.174) и (5.181) по степеням A и выделения главного члена:

$$Q(T,L) \approx \frac{A^{L+1}}{(L+1)!}\left(1-\frac{4ra}{A}\right) - \frac{A^{L+2}}{(L+2)!}\left(\left(1-\frac{4ra}{A}\right)\left(L+1-\frac{4ra}{A}\right) - 4\left(\frac{ra}{A}\right)^2\right), \tag{5.186}$$

$$k\lambda T_{cp}(T,L) \approx \frac{(L+1)!}{A^L} \Big/ \left(\left(1-\frac{4ra}{A}\right)\left(1-\frac{A}{L+2}\left(L+1-\frac{4ra}{A}\right)\right) - 4\left(\frac{ra}{A}\right)^2\right). \tag{5.187}$$

В частности, при $A = 4ra$ из (5.186) и (5.187) получим:

$$Q(T,L) \approx \frac{A^{L+2}}{4(L+2)!}, \quad k\lambda T_{cp}(T,L) \approx \frac{4(L+2)!}{A^{L+1}}. \tag{5.188}$$

Частота и интенсивность отказов:

$$a(T,L)\setminus(k\lambda) = \frac{A^L}{L!}e^{-A} + 4\left(1-\frac{2ra}{A}\right)\left(\frac{A}{2ra}\right)^L e^{-A+2ra} I(2ra,L) - 4\left(1-\frac{ra}{A}\right)\left(\frac{A}{ra}\right)^L e^{-A+ra} I(ra,L)$$

$$\lambda(T,L)\setminus(k\lambda) = a(T,L)\setminus(k\lambda P(T,L)). \tag{5.189}$$

В частности, при $L = 1$ и 2 имеем:

$$\frac{\lambda(T,1)}{k\lambda} = \frac{A + 2\left(\frac{A}{ra}-2\right)(e^{2ra}-1) - 4\left(\frac{A}{ra}-1\right)(e^{ra}-1)}{1 + A + \frac{2A}{ra}(e^{2ra}-1) - 4\frac{A}{ra}(e^{ra}-1)}, \tag{5.190}$$

$$\frac{\lambda(T,2)}{k\lambda} = \frac{\frac{A^2}{2} + \frac{A}{ra}\left(\frac{A}{ra}-2\right)(e^{2ra}-1-2ra) - 4\frac{A}{ra}\left(\frac{A}{ra}-1\right)(e^{ra}-1-ra)}{1 + A + \frac{A^2}{2} + \left(\frac{A}{ra}\right)^2(e^{2ra}-1-2ra) - 4\left(\frac{A}{ra}\right)^2(e^{ra}-1-ra)}.$$

Среднее по интервалу $(0, T)$ значение коэффициента готовности:

$$K_c(T,L) = \frac{4}{A-2ra}\left(\frac{A}{2ra}\right)^L\left(1-e^{-A+2ra}\right) - \frac{4}{A-ra}\left(\frac{A}{ra}\right)^L\left(1-e^{-A+ra}\right) +$$

$$+ \frac{1}{A}\sum_{i=0}^{L}\left(1-4\left(\frac{A}{2ra}\right)^{L-i} + 4\left(\frac{A}{ra}\right)^{L-i}\right) I(A,i+1). \tag{5.191}$$

Чтобы найти коэффициент оперативной готовности, представим (5.181) в виде суммы:

$$k\lambda\tau_1 = k\lambda\tau_1^0 + k\lambda\tau_1^1, k\lambda\tau_1^0 = \sum_{i=0}^{L} I(A, i+1), \tag{5.192}$$

$$k\lambda\tau_1^1 = \frac{4A}{A-ra}\left(\frac{A}{ra}\right)^L \left(1-e^{-A+ra}\right) - 4\sum_{i=0}^{L}\left(\frac{A}{ra}\right)^{L-i} I(A, i+1).$$

Перед тем как интегрировать (5.174), представим $P(T, L, S_2)$ в виде суммы взвешенных экспонент:

$$P(T, L, S_2) = 4\left(\frac{A}{2ra}\right)^L e^{-A+2ra} - 8\left(\frac{A}{ra}\right)^L e^{-A+ra} - 4\sum_{i=0}^{L}\left(\left(\frac{A}{2ra}\right)^{L-i} - 2\left(\frac{A}{ra}\right)^{L-i}\right)\frac{A^i}{i!}e^{-A}. \tag{5.193}$$

Интегрируем в (5.193):

$$k\lambda\tau_1^2 = \left(\frac{A}{2ra}\right)^L \frac{4A}{A-2ra}\left(1-e^{-A+2ra}\right) - \frac{8A}{A-2ra}\left(\frac{A}{ra}\right)^L \left(1-e^{-A+ra}\right) -$$

$$-4\sum_{i=0}^{L}\left(\left(\frac{A}{2ra}\right)^{L-i} - 2\left(\frac{A}{ra}\right)^{L-i}\right) I(A, i+1). \tag{5.194}$$

Коэффициент оперативной готовности для наихудшего цикла τ:

$$K_{o2}^*(\tau, T, L) = e^{-\alpha+2r\beta}(P(T, L, S_0)(2-e^{-r\beta})^2 + P(T, L, S_1)(2-e^{-r\beta}) +$$

$$+P(T, L, S_2)), \alpha = k\beta, \beta = \lambda\tau. \tag{5.195}$$

Коэффициент оперативной готовности для среднестатистического цикла:

$$K_{o2}(\tau, T, L) = e^{-\alpha+2r\beta}(k\lambda\tau_1^0(2-e^{-r\beta})^2 + k\lambda\tau_1^1(2-e^{-r\beta}) + k\lambda\tau_1^2)/A. \tag{5.196}$$

Рассмотрим теперь вариант реконфигурации, когда после исчерпания ЗИП и отказа двух ветвей одной дублированной подсистемы резервная ветвь второй дублированной подсистемы переводится в режим основной ветви отказавшей подсистемы. Очевидно, что схема резервирования S_0 становится схемой «два из четырех». Граф состояний приобретает вид, изображенный на рис. 5.6, *г*.

При отсутствии ЗИП вероятность отказа системы

$$Q(T, 0) = 1 - 6e^{-(k-2r)a} + 8e^{-(k-r)a} - 3e^{-ra}. \tag{5.197}$$

В соответствии с (5.35) вероятность отказа при наличии ЗИП

$$Q(T, L) = \int_0^T \frac{(k\lambda)^L x^{L-1}}{(L-1)!} e^{-k\lambda x}(1 - 6e^{-(k-2r)\lambda(T-x)} + 8e^{-(k-r)\lambda(T-x)} - 3e^{-r\lambda(T-x)})dx =$$

$$= I(A, L+1) - 6\left(\frac{A}{2ra}\right)^L e^{-A+2ra} I(2ra, L+1) + 8\left(\frac{A}{ra}\right)^L e^{-A+ra} I(ra, L+1). \tag{5.198}$$

Представим ВБР в виде трех слагаемых, соответствующих базовой структуре S_0 и двум деградированным структурам S_1 и S_2. Сравнивая графы состояний на рис. 5.5, *д* и рис. 5.6, *г*, видим, что вероятности $P(T,L,S_0)$ и $P(T,L,S_1)$ для систем без реконфигурации и с реконфигурацией совпадают. Поэтому их можно находить по формулам (5.173).

Для вероятности $P(T,L,S_2)$ по графу состояний находим изображение:

$$P^*(s,L,S_2)=\frac{3r\lambda}{s+(k-2r)\lambda}\frac{\kappa\lambda\delta_1}{s+(k-r)\lambda}\frac{s(k\lambda)^L}{(s+k\lambda)^{L+1}},\delta_1=\frac{4r}{k}.$$

Отсюда

$$P(T,L,S_2)=6\left(\frac{A}{2ra}\right)^L e^{-A+2ra}I(2ra,L+1)-12\left(\frac{A}{ra}\right)^L e^{-A+ra}I(ra,L+1). \qquad (5.199)$$

Суммируя вероятности, получим

$$P(T,L)=1-I(A,L+1)+6\left(\frac{A}{2ra}\right)^L e^{-A+2ra}I(2ra,L+1)-8\left(\frac{A}{ra}\right)^L e^{-A+ra}I(ra,L+1). \quad (5.200)$$

Для нахождения приращений ВБР от добавления запасной части воспользуемся соотношением (5.177) между первым приращением и вероятностью отказа при отсутствии ЗИП:

$$\Delta P_1(T)=\int_0^T e^{-k\lambda(T-x)}dQ(x,0)=3\left(\frac{A}{ra}-2\right)e^{-A+2ra}-8\left(\frac{A}{ra}-1\right)e^{-A+ra}+\left(\frac{5A}{ra}+3A-2\right)e^{-A}. \quad (5.201)$$

Теперь получим приращение ВБР при добавлении *i*-й запасной части:

$$\Delta P_i(T)=\int_0^T\frac{(k\lambda)^{i-1}x^{i-2}}{(L-1)!}e^{-k\lambda x}\Delta P_1(T-x)dx=\left(\frac{5A}{ra}-2\right)\frac{A^{i-1}}{(i-1)!}e^{-A}+3\frac{A^i}{i!}e^{-A}+$$

$$+3\left(\frac{A}{ra}-2\right)\left(\frac{A}{2ra}\right)^{i-1}e^{-A+2ra}I(2ra,i-1)-8\left(\frac{A}{ra}-1\right)\left(\frac{A}{ra}\right)^{i-1}e^{-A+ra}I(ra,i-1). \qquad (5.202)$$

В частности, при $k = 4r$ имеем

$$P(T,L)=1-I(A,L+1)+3\left(2^{L+1}\right)e^{-2ra}I(2ra,L+1)-2\left(4^{L+1}\right)e^{-3ra}I(ra,L+1), \qquad (5.203)$$

$$\Delta P_i(T)=3\frac{A^i}{i!}e^{-A}+18\frac{A^{i-1}}{(i-1)!}e^{-A}+3\left(2^i\right)e^{-2ra}I(2ra,i-1)-6\left(4^i\right)e^{-3ra}I(ra,i-1).$$

Чтобы найти среднюю наработку до отказа, представим (5.200) в виде

$$P(T,L)=6\left(\frac{A}{2ra}\right)^L e^{-A+2ra}-8\left(\frac{A}{ra}\right)^L e^{-A+ra}+\sum_{i=0}^{L}\frac{A^i}{i!}e^{-A}\left(1-6\left(\frac{A}{2ra}\right)^{L-i}+8\left(\frac{A}{ra}\right)^{L-i}\right).$$

Проинтегрировав это выражение, получим:

$$k\lambda\tau_1(T,L)=\frac{6A}{A-2ra}\left(\frac{A}{2ra}\right)^L(1-e^{-A+2ra})-\frac{8A}{A-ra}\left(\frac{A}{ra}\right)^L(1-e^{-A+ra})+$$

$$+\sum_{i=0}^{L}\left(1-6\left(\frac{A}{2ra}\right)^{L-i}+8\left(\frac{A}{ra}\right)^{L-i}\right)I(A,i+1). \qquad (5.204)$$

В частности, при $L = 1$ и 2 имеем:

$$k\lambda\tau_1(T,1)=\frac{3A^2}{(A-2ra)ra}(1-e^{-A+2ra})-\frac{8A^2}{(A-ra)ra}(1-e^{-A+ra})+\left(1+\frac{5A}{ra}\right)I(A,1)+3I(A,2),$$

$$k\lambda\tau_1(T,2)=\frac{1,5A^3}{(A-2ra)(ra)^2}(1-e^{-A+2ra})-\frac{8A^3}{(A-ra)(ra)^2}(1-e^{-A+ra})+$$

$$+\left(1+\frac{13A^2}{2(ra)^2}\right)I(A,1)+\left(1+\frac{5A}{ra}\right)I(A,2)+3I(A,3). \qquad (5.205)$$

При увеличении периода пополнения средняя наработка до отказа асимптотически стремится к значению:

$$k\lambda T_{cp}(\infty)=\frac{4ra(A+ra)}{(A-ra)(A-2ra)}+L+1. \qquad (5.206)$$

В частности, при $k = 4r$ имеем:

$$k\lambda T_{cp}(\infty)=\frac{13}{3}+L.$$

При малых значениях A используем приближенные формулы

$$Q(T,L)\approx\left(1-\frac{4ra}{A}\right)\left(\frac{A^{L+1}}{(L+1)!}-\frac{A^{L+2}}{(L+2)!}\left(L+1-\frac{4ra}{A}\right)\right), \qquad (5.207)$$

$$k\lambda T_{cp}(T,L)\approx\frac{(L+1)!}{A^{L-1}(A-4ra)}\Big/\left(1-\frac{A}{L+2}\left(L+1-\frac{4ra}{A}\right)\right),\ A>4ra.$$

Частоту и интенсивность отказов получим путем дифференцирования (5.198):

$$a(T,L)\setminus(k\lambda)=3\frac{A^L}{L!}e^{-A}-2(L-1)\frac{A^{L-1}}{(L-1)!}e^{-A}+$$

$$+6\left(1-\frac{2ra}{A}\right)\left(\frac{A}{2ra}\right)^L e^{-A+2ra}I(2ra,L)-8\left(1-\frac{ra}{A}\right)\left(\frac{A}{ra}\right)^L e^{-A+ra}I(ra,L). \qquad (5.208)$$

$$\lambda(T,L)\setminus(k\lambda)=a(T,L)\setminus(k\lambda P(T,L)).$$

Коэффициент готовности находим по общей формуле (5.191), используя (5.204). Чтобы найти коэффициент оперативной готовности, представим (5.204) в виде суммы:

$$k\lambda\tau_1=k\lambda\tau_1^0+k\lambda\tau_1^1+k\lambda\tau_1^2. \qquad (5.209)$$

Значения $k\lambda\tau_1^0$ и $k\lambda\tau_1^1$ находим по формулам (5.192), $k\lambda\tau_1^2$ получим путем интегрирования (5.199):

$$k\lambda\tau_1^2=\left(\frac{A}{2ra}\right)^L\frac{6A}{A-2ra}\left(1-e^{-A+2ra}\right)-\frac{12A}{A-2ra}\left(\frac{A}{ra}\right)^L\left(1-e^{-A+ra}\right)-$$

$$-6\sum_{i=0}^{L}\left(\left(\frac{A}{2ra}\right)^{L-i}-2\left(\frac{A}{ra}\right)^{L-i}\right)I(A,i+1). \qquad (5.210)$$

В частности, при $k = 4r$ имеем:

$$k\lambda\tau_1^0 = \sum_{i=0}^{L} I(A, i+1), k\lambda\tau_1^1 = \frac{16}{3}4^L\left(1-e^{-3ra}\right) - 4\sum_{i=0}^{L} 4^{L-i} I(A, i+1), \qquad (5.211)$$

$$k\lambda\tau_1^2 = 12\left(2^L\right)\left(1-e^{-2ra}\right) - 4^{L+2}\left(1-e^{-3ra}\right) - 6\sum_{i=0}^{L}\left(2^{L-i} - 2\left(4^{L-i}\right)\right)I(A, i+1).$$

В обобщенном виде можно оценить введение реконфигурации как действие, эквивалентное добавлению в комплект ЗИП еще одной запасной части.

В *приложении 5* (примеры П5.10–П5.11) проведены расчеты и анализ показателей надежности системы с групповым дублированием (модель П6). По результатам расчетов можно сделать следующие выводы:

- хотя отказы элементов однородной системы из двух дублированных подсистем являются независимыми событиями, а модель надежности при отсутствии ЗИП является марковской, при появлении ЗИП модель перестает быть марковской и отказы элементов, с учетом восстановления, становятся зависимыми через общий ресурс;
- при двух запасных частях в комплекте ЗИП обе дублированные подсистемы имеют неограниченный и равный доступ к запасам. Если ограничить доступ подсистем к запасным частям, например, если первая дублированная пара может воспользоваться только первой ЗЧ, а вторая — только второй ЗЧ, то вероятность безотказной работы системы можно рассчитать с помощью формул модели П2. И тогда выясняется, что ограничение доступа существенно влияет на эффективность использования такого ресурса, как одиночный ЗИП;
- приближенная формула (5.65), основанная на экспоненциальном распределении, дает существенно более высокую точность, чем формула (2.23), основанная на приближенной методике, в особенности для значений времени функционирования, кратных периоду пополнения. Приближенное значение средней наработки рассчитывают по формуле (2.23), отличается незначительно от точного значения (до 10 %). Приближенное значение коэффициента готовности системы $К_{гс,пр} = 0{,}99686$ существенно больше точного, а коэффициент простоя меньше точного значения в 3–4 раза;
- если подсистемы имеют ограниченный доступ к запасным частям, например, если в комплекте ЗИП-О имеется две ЗЧ и первая дублированная пара может воспользоваться только первой ЗЧ, а вторая — только второй ЗЧ, то вероятность безотказной работы и коэффициент готовности системы можно получить возведением в квадрат характеристик надежности из примера П5.5. Тогда $P(T,2) = 0{,}95460^2 = 0{,}91127$, $K_{гс}(T,2) = 0{,}98715^2 = 0{,}97447$. Это существенно меньше значений, полученных по формулам модели П6. Отсюда следует, что степень доступности ЗЧ весьма существенно влияет на показатели надежности.

5.9. Последовательное соединение двух мажорированных и нерезервированной подсистем (модель П7)

Система состоит из k элементов, из которых $6r$ элементов соединены в две мажорированные подсистемы по схеме «два из трех», а остальные $k - 2r$ элементов образуют нерезервированную подсистему (см. рис. 5.4, *е*). Граф состояний приведен на рис. 5.5, *е*.

При отсутствии ЗИП вероятность отказа

$$Q(T,0) = 1 - 9e^{-(k-2r)a} + 12e^{-(k-r)a} - 4e^{-ka}. \quad (5.212)$$

При наличии ЗИП

$$Q(T,L) = \int_0^T \frac{(k\lambda)^L x^{L-1}}{(L-1)!} e^{-k\lambda x} Q(T-x,0)dx =$$

$$= I(A,L+1) - 9\left(\frac{A}{2ra}\right)^L e^{-A+2ra} I(2ra,L+1) + 12\left(\frac{A}{ra}\right)^L e^{-A+ra} I(ra,L+1). \quad (5.212, \text{а})$$

В соответствии с графом состояний разложим ВБР на сумму вероятностей, соответствующих базовой структуре S_0 и двум деградированным структурам S_1 и S_2:

$$P(T,L,S_0) = \sum_{i=0}^{L} \frac{A^i}{i!} e^{-A}, P(T,L,S_1) = \delta_1 \left(\frac{A}{ra}\right)^{L+1} e^{-A+ra} I(ra,L+1), \delta_1 = \frac{6r}{k},$$

$$P(T,L,S_2) = 3\delta_1 \left(\frac{A}{2ra}\right)^L e^{-A+2ra} I(2ra,L+1) - 3\delta_1 \left(\frac{A}{ra}\right)^L e^{-A+ra} I(ra,L+1). \quad (5.213)$$

Суммируя эти вероятности, получим вероятность безотказной работы:

$$P(T,L) = 1 - I(A,L+1) + 9\left(\frac{A}{2ra}\right)^L e^{-A+2ra} I(2ra,L+1) - 12\left(\frac{A}{ra}\right)^L e^{-A+ra} I(ra,L+1). \quad (5.214)$$

В частности, при L = 1 и 2 имеем:

$$P(T,1) = \left(1 + 4A + \frac{15A}{2ra}\right)e^{-A} + \frac{9A}{2ra} e^{-A+2ra} - \frac{12A}{ra} e^{-A+ra},$$

$$P(T,2) = \left(1 + A + 2A^2 + \frac{15A^2}{2ra} + \frac{39A^2}{4(ra)^2}\right)e^{-A} + \left(\frac{3A}{2ra}\right)^2 e^{-A+2ra} - 12\left(\frac{A}{ra}\right)^2 e^{-A+ra}. \quad (5.215)$$

Представим (5.214) в форме суммы приращений. Первое приращение:

$$\Delta P_1(T) = \int_0^T e^{-k\lambda(T-x)} dQ(x,0) = 9\left(\frac{A}{2ra} - 1\right)e^{-A+2ra} - 12\left(\frac{A}{ra} - 1\right)e^{-A+ra} + \left(\frac{15A}{2ra} + 4A - 3\right)e^{-A}.$$

Другие приращения:

$$\Delta P_i(T) = \int_0^T \frac{(k\lambda)^{i-1} x^{i-2}}{(L-1)!} e^{-k\lambda x} \Delta P_1(T-x)dx = \frac{4A^i}{i!} e^{-A} +$$

$$+9\left(\frac{A}{2ra} - 1\right)\left(\frac{A}{2ra}\right)^{i-1} e^{-A+2ra} I(2ra,i) - 12\left(\frac{A}{ra} - 1\right)\left(\frac{A}{ra}\right)^{i-1} e^{-A+ra} I(ra,i). \quad (5.216)$$

Чтобы найти среднюю наработку до отказа, представим (5.214) в виде:

$$P(T,L) = 9\left(\frac{A}{2ra}\right)^L e^{-A+2ra} - 12\left(\frac{A}{ra}\right)^L e^{-A+ra} +$$

$$+\sum_{i=0}^{L} \frac{A^i}{i!} e^{-A}\left(1 - 9\left(\frac{A}{2ra}\right)^{L-i} + 12\left(\frac{A}{ra}\right)^{L-i}\right). \quad (5.217)$$

Интегрируем (5.217):

$$k\lambda\tau_1(T,L)=\frac{9A}{A-2ra}\left(\frac{A}{2ra}\right)^L(1-e^{-A+2ra})-\frac{12A}{A-ra}\left(\frac{A}{ra}\right)^L(1-e^{-A+ra})+$$

$$+\sum_{i=0}^{L}\left(1-9\left(\frac{A}{2ra}\right)^{L-i}+12\left(\frac{A}{ra}\right)^{L-i}\right)I(A,i+1)\,. \qquad (5.218)$$

В частности, при L = 1 и 2 имеем:

$$k\lambda\tau_1(T,1)=\frac{9A^2}{2(A-2ra)ra}(1-e^{-A+2ra})-\frac{12A^2}{(A-ra)ra}(1-e^{-A+ra})+\left(1+\frac{15A}{2ra}\right)I(A,1)+4I(A,2)\,,$$

$$k\lambda\tau_1(T,2)=\frac{9A^3}{4(A-2ra)(ra)^2}(1-e^{-A+2ra})-\frac{12A^3}{(A-ra)(ra)^2}(1-e^{-A+ra})+$$

$$+\left(1+\frac{39A^2}{4(ra)^2}\right)I(A,1)+\left(1+\frac{15A}{2ra}\right)I(A,2)+4I(A,3)\,. \qquad (5.219)$$

При увеличении периода пополнения средняя наработка до отказа стремится к величине:

$$k\lambda T_{cp}(\infty)=\frac{6ra(A+ra)}{(A-ra)(A-2ra)}+L+1\,. \qquad (5.220)$$

В частности, при $k = 6r$ имеем: $k\lambda T_{cp}(\infty)=3{,}1+L$.

При малых значениях A используем асимптотические формулы:

$$Q(T,L)\approx\frac{A^{L+1}}{(L+1)!}\left(1-\frac{6ra}{A}\right)-\frac{A^{L+2}}{(L+2)!}\left(\left(1-\frac{6ra}{A}\right)\left(L+1-\frac{6ra}{A}\right)-12\left(\frac{ra}{A}\right)^2\right). \qquad (5.221)$$

$$k\lambda T_{cp}(T,L)\approx\frac{(L+1)!}{A^L}\Big/\left(\left(1-\frac{6ra}{A}\right)\left(1-\frac{A}{L+2}\left(L+1-\frac{6ra}{A}\right)\right)-12\left(\frac{ra}{A}\right)^2\right).$$

Частота отказов:

$$\frac{a(T,L)}{k\lambda}=\left(1-\frac{6ra}{A}\right)\frac{A^L}{L!}e^{-A}+9\left(1-\frac{2ra}{A}\right)\left(\frac{A}{2ra}\right)^L e^{-A+2ra}I(2ra,L+1)-$$

$$-12\left(1-\frac{ra}{A}\right)\left(\frac{A}{ra}\right)^L e^{-A+ra}I(ra,L+1)\,. \qquad (5.222)$$

Интенсивность отказов вычисляется по формуле (5.189).

В частности, при L = 1 и 2 имеем:

$$\frac{a(T,1)}{k\lambda}=\left(1-\frac{6ra}{A}\right)Ae^{-A}+9\left(\frac{A}{2ra}-1\right)e^{-A+2ra}I(2ra,2)-12\left(\frac{A}{ra}-1\right)e^{-A+ra}I(ra,2)\,,$$

$$\frac{a(T,2)}{k\lambda}=\left(1-\frac{6ra}{A}\right)\frac{A^2}{2}e^{-A}+\frac{9A}{2ra}\left(\frac{A}{2ra}-1\right)e^{-A+2ra}I(2ra,3)-\frac{12A}{ra}\left(\frac{A}{ra}-1\right)e^{-A+ra}I(ra,3)\,. \qquad (5.223)$$

Среднее по интервалу (0, T) значение коэффициента готовности:

$$K_c(T,L)=\frac{9}{A-2ra}\left(\frac{A}{2ra}\right)^L\left(1-e^{-A+2ra}\right)-\frac{12}{A-ra}\left(\frac{A}{ra}\right)^L\left(1-e^{-A+ra}\right)+$$

$$+\frac{1}{A}\sum_{i=0}^{L}\left(1-9\left(\frac{A}{2ra}\right)^{L-i}+12\left(\frac{A}{ra}\right)^{L-i}\right)I(A,i+1). \qquad (5.224)$$

Найдем теперь слагаемые в формуле (5.209) путем интегрирования в (5.213):

$$k\lambda\tau_1^0=\sum_{i=0}^{L}I(A,i+1),k\lambda\tau_1^1=\frac{6A}{A-ra}\left(\frac{A}{ra}\right)^L\left(1-e^{-A+ra}\right)-6\sum_{i=0}^{L}\left(\frac{A}{ra}\right)^{L-i}I(A,i+1),$$

$$k\lambda\tau_1^2=\left(\frac{A}{2ra}\right)^L\frac{9A}{A-2ra}\left(1-e^{-A+2ra}\right)-\frac{18A}{A-ra}\left(\frac{A}{ra}\right)^L\left(1-e^{-A+ra}\right)-$$

$$-9\sum_{i=0}^{L}\left(\left(\frac{A}{2ra}\right)^{L-i}-2\left(\frac{A}{ra}\right)^{L-i}\right)I(A,i+1). \qquad (5.225)$$

Используя (5.213) и (5.225), можно записать формулы для коэффициента оперативной готовности:

$$K_{oc}^*(\tau,T,L)=e^{-\alpha+2r\beta}(P(T,L,S_0)(3-2e^{-r\beta})^2+P(T,L,S_1)(3-2e^{-r\beta})+$$

$$+P(T,L,S_2)),\alpha=k\beta,\beta=\lambda\tau, \qquad (5.226)$$

$$K_{oc}(\tau,T,L)=e^{-\alpha+2r\beta}(k\lambda\tau_1^0(3-2e^{-r\beta})^2+k\lambda\tau_1^1(3-2e^{-r\beta})+k\lambda\tau_1^2)/A. \qquad (5.227)$$

В частности, при $k=6r$ имеем:

$$P(T,L)=1-I(A,L+1)+3^{L+2}e^{-4ra}I(2ra,L+1)-2\left(6^{L+1}\right)e^{-5ra}I(ra,L+1),$$

$$P(T,L,S_0)=\sum_{i=0}^{L}\frac{A^i}{i!}e^{-A},P(T,L,S_1)=6^{L+1}e^{-5ra}I(ra,L+1),$$

$$P(T,L,S_2)=3^{L+2}e^{-4ra}I(2ra,L+1)-3\left(6^{L+1}\right)e^{-5ra}I(ra,L+1),$$

$$\Delta P_i(T)=\frac{4A^i}{i!}e^{-A}+2\left(3^{i+1}\right)e^{-4ra}I(2ra,i)-10\left(6^i\right)e^{-5ra}I(ra,i),$$

$$k\lambda\tau_1(T,L)=\frac{1}{2}3^{L+3}(1-e^{-4ra})-\frac{2}{5}6^{L+2}(1-e^{-A+ra})+\sum_{i=0}^{L}\left(1-3^{L+2-i}+2\left(6^{L+1-i}\right)\right)I(A,i+1),$$

$$Q(T,L)\approx\frac{A^{L+2}}{3(L+2)!},$$

$$\frac{a(T,L)}{k\lambda}=2\left(3^{L+1}\right)e^{-4ra}I(2ra,L+1)-10\left(6^L\right)e^{-5ra}I(ra,L+1). \qquad (5.228)$$

Рассмотрим теперь вариант реконфигурации структуры, когда после исчерпания ЗИП и отказа любых двух ветвей одной мажорированной подсистемы резервная ветвь другой мажорированной подсистемы переводится в основной режим. При этом схема резервирования

становится схемой «4 из 6». Граф состояний системы с учетом реконфигурации приведен на рис. 5.6, *д*.

При отсутствии ЗИП вероятность отказа системы:

$$Q(T,0) = 1 - 15e^{-(k-2r)a} + 24e^{-(k-r)a} - 10e^{-ka}. \qquad (5.229)$$

При наличии ЗИП вероятность отказа находим с помощью формулы (5.35):

$$Q(T,L) = \int_0^T \frac{(k\lambda)^L x^{L-1}}{(L-1)!} e^{-k\lambda x} Q(T-x,0)dx =$$

$$= I(A,L+1) - 15\left(\frac{A}{2ra}\right)^L e^{-A+2ra} I(2ra,L+1) + 24\left(\frac{A}{ra}\right)^L e^{-A+ra} I(ra,L+1). \qquad (5.230)$$

Используя граф состояний, можно составить выражения для функций вероятностей сохранения в момент T базовой структуры и двух деградированных структур. Для структур S_0 и S_1 вероятности при отсутствии и при наличии реконфигурации совпадают и поэтому их находят по формуле (5.213). Для структуры S_2 вероятности отличаются. При наличии реконфигурации вероятность второй деградированной структуры следует определять по графу состояний. Сначала составляют изображение по Лапласу — Карсону. После обратного преобразования находим:

$$P(T,L,S_2) = 5\delta_1\left(\frac{A}{2ra}\right)^L e^{-A+2ra} I(2ra,L+1) - 5\delta_1\left(\frac{A}{ra}\right)^L e^{-A+ra} I(ra,L+1). \qquad (5.231)$$

Суммируя вероятности, получим:

$$P(T,L) = 1 - I(A,L+1) + 15\left(\frac{A}{2ra}\right)^L e^{-A+2ra} I(2ra,L+1) - 24\left(\frac{A}{ra}\right)^L e^{-A+ra} I(ra,L+1). \qquad (5.232)$$

В частности, при L = 1 и 2 имеем:

$$P(T,1) = \left(1 + 10A + \frac{33A}{2ra}\right)e^{-A} + \frac{15A}{2ra}e^{-A+2ra} - \frac{24A}{ra}e^{-A+ra}, \qquad (5.233)$$

$$P(T,2) = \left(1 + A + 5A^2 + \frac{33A^2}{2ra} + \frac{81A^2}{4(ra)^2}\right)e^{-A} + 15\left(\frac{A}{2ra}\right)^2 e^{-A+2ra} - 24\left(\frac{A}{ra}\right)^2 e^{-A+ra}.$$

Приращение ВБР от появления в комплекте ЗИП-О первой ЗЧ:

$$\Delta P_1(T) = \int_0^T e^{-k\lambda(T-x)} dQ(x,0) = 15\left(\frac{A}{2ra} - 1\right)e^{-A+2ra} - 24\left(\frac{A}{ra} - 1\right)e^{-A+ra} + \left(\frac{33A}{2ra} + 10A - 9\right)e^{-A}.$$

Другие приращения:

$$\Delta P_i(T) = \int_0^T \frac{(k\lambda)^{i-1} x^{i-2}}{(L-1)!} e^{-k\lambda x} \Delta P_1(T-x)dx = \frac{10A^i}{i!}e^{-A} +$$

$$+15\left(\frac{A}{2ra} - 1\right)\left(\frac{A}{2ra}\right)^{i-1} e^{-A+2ra} I(2ra,i) - 24\left(\frac{A}{ra} - 1\right)\left(\frac{A}{ra}\right)^{i-1} e^{-A+ra} I(ra,i). \qquad (5.234)$$

Чтобы найти среднюю наработку до отказа, представим (5.232) в виде:

$$P(T,L)=15\left(\frac{A}{2ra}\right)^{L}e^{-A+2ra}-24\left(\frac{A}{ra}\right)^{L}e^{-A+ra}+\sum_{i=0}^{L}\frac{A^{i}}{i!}e^{-A}\left(1-15\left(\frac{A}{2ra}\right)^{L-i}+24\left(\frac{A}{ra}\right)^{L-i}\right). \quad (5.235)$$

Интегрируя (5,235), получим:

$$k\lambda\tau_1(T,L)=\frac{15A}{A-2ra}\left(\frac{A}{2ra}\right)^{L}(1-e^{-A+2ra})-\frac{24A}{A-ra}\left(\frac{A}{ra}\right)^{L}(1-e^{-A+ra})+$$

$$+\sum_{i=0}^{L}\left(1-15\left(\frac{A}{2ra}\right)^{L-i}+24\left(\frac{A}{ra}\right)^{L-i}\right)I(A,i+1). \quad (5.236)$$

В частности, при L = 1 и 2 имеем:

$$k\lambda\tau_1(T,1)=\frac{15A^2}{2(A-2ra)ra}(1-e^{-A+2ra})-\frac{24A^2}{(A-ra)ra}(1-e^{-A+ra})+\left(1+\frac{33A}{2ra}\right)I(A,1)+10I(A,2) \quad (5.237)$$

$$k\lambda\tau_1(T,2)=\frac{15A^3}{4(A-2ra)(ra)^2}(1-e^{-A+2ra})-\frac{24A^3}{(A-ra)(ra)^2}(1-e^{-A+ra})+$$

$$+\left(1+\frac{81A^2}{4(ra)^2}\right)I(A,1)+\left(1+\frac{33A}{2ra}\right)I(A,2)+10I(A,3). \quad (5.238)$$

При увеличении периода пополнения средняя наработка до отказа стремится к значению:

$$k\lambda T_{cp}(\infty)=\frac{6ra(A+3ra)}{(A-ra)(A-2ra)}+L+1. \quad (5.239)$$

При малых A справедлива асимптотическая формула:

$$Q(T,L)\approx\frac{A^{L+1}}{(L+1)!}\left(1-\frac{6ra}{A}\right)\left(1-\frac{A}{L+2}\left(L+1-\frac{6ra}{A}\right)\right). \quad (5.240)$$

Частота отказов:

$$\frac{a(T,L)}{k\lambda}=\left(1-\frac{6ra}{A}\right)\frac{A^{L}}{L!}e^{-A}+15\left(1-\frac{2ra}{A}\right)\left(\frac{A}{2ra}\right)^{L}e^{-A+2ra}I(2ra,L+1)-$$

$$-24\left(1-\frac{ra}{A}\right)\left(\frac{A}{ra}\right)^{L}e^{-A+ra}I(ra,L+1). \quad (5.241)$$

Интенсивность отказов вычисляется по формуле (5.189).

В частности, при L = 1 и 2 имеем:

$$\frac{a(T,1)}{k\lambda}=\left(10A-9+\frac{33A}{2ra}\right)e^{-A}+15\left(\frac{A}{2ra}-1\right)e^{-A+2ra}-24\left(\frac{A}{ra}-1\right)e^{-A+ra}, \quad (5.242)$$

$$\frac{a(T,2)}{k\lambda}=\left(\left(\frac{9A}{2ra}\right)^{2}+\frac{33A}{2ra}(A-1)-9A+5A^2\right)e^{-A}+\frac{15A}{2ra}\left(\frac{A}{2ra}-1\right)e^{-A+2ra}-\frac{24A}{ra}\left(\frac{A}{ra}-1\right)e^{-A+ra}.$$

Среднее по интервалу (0, T) значение коэффициента готовности:

$$K_c(T,L)=\frac{15}{A-2ra}\left(\frac{A}{2ra}\right)^L\left(1-e^{-A+2ra}\right)-\frac{24}{A-ra}\left(\frac{A}{ra}\right)^L\left(1-e^{-A+ra}\right)+$$

$$+\frac{1}{A}\sum_{i=0}^{L}\left(1-15\left(\frac{A}{2ra}\right)^{L-i}+24\left(\frac{A}{ra}\right)^{L-i}\right)I(A,i+1). \qquad (5.243)$$

Значения $k\lambda\tau_1^0$ и $k\lambda\tau_1^1$ находим по формулам (5,225), а $k\lambda\tau_1^2$ по формуле:

$$k\lambda\tau_1^2=\left(\frac{A}{2ra}\right)^L\frac{15A}{A-2ra}\left(1-e^{-A+2ra}\right)-\frac{30A}{A-2ra}\left(\frac{A}{ra}\right)^L\left(1-e^{-A+ra}\right)-$$

$$-15\sum_{i=0}^{L}\left(\left(\frac{A}{2ra}\right)^{L-i}-2\left(\frac{A}{ra}\right)^{L-i}\right)I(A,i+1). \qquad (5.244)$$

Коэффициент оперативной готовности определяют по формулам (5.226) и (5.227), где вероятности $P(T,L,S_i)$ следует брать из формул (5.213), а $k\lambda\tau_1^i$ — из формул (5.225) и (5.244).

В частности, при $k = 6r$ имеем:

$$P(T,L)=1-I(A,L+1)+5\left(3^{L+1}\right)e^{-4ra}I(2ra,L+1)-4\left(6^{L+1}\right)e^{-5ra}I(ra,L+1), \qquad (5.245)$$

$$P(T,1)=e^{-4ra}(45-144e^{-ra}+10(10+A)e^{-2ra}),$$

$$P(T,2)=e^{-4ra}(27(5-32e^{-ra})+5(146+20A+A^2)e^{-2ra}),$$

$$P(T,L,S_2)=5\left(3^{L+1}\right)e^{-4ra}I(2ra,L+1)-5\left(6^{L+1}\right)e^{-5ra}I(ra,L+1),$$

$$\Delta P_i(T)=\frac{10A^i}{i!}e^{-A}+20\left(\frac{3}{2}\right)^i e^{-4ra}I(2ra,i)-100\left(\frac{6}{5}\right)^i e^{-5ra}I(ra,i),$$

$$k\lambda\tau_1(T,L)=\frac{5}{2}3^{L+2}(1-e^{-4ra})-\frac{4}{5}6^{L+2}(1-e^{-A+ra})+\sum_{i=0}^{L}\left(1-5\left(3^{L+1-i}\right)+4\left(6^{L+1-i}\right)\right)I(A,i+1).$$

Из формул данного раздела можно найти и другие формулы, соответствующие случаю отсутствия нерезервированной подсистемы.

В *приложении 5* (примеры П5.12–П5.13) проведены расчеты и анализ показателей надежности системы с групповым мажорированием (модель П7). По результатам расчетов можно сделать следующие выводы:

- зависимость ВБР от сложности нерезервированной подсистемы близка к линейной. Однако степень уменьшения ВБР зависит от количества элементов в мажорированной части. Так при изменении $m = k - 6r$ от 0 до 8 снижение вероятности $\Delta P = 0{,}09874$ при $r = 1$, $\Delta P = 0{,}1288$ при $r = 2$ и $\Delta P = 0{,}1677$ при $r = 4$;
- зависимость ВБР от сложности мажорированной части явно не линейная. При $m = 2$ изменение r от 0 до 1 уменьшает ВБР на 0,0181, изменение r от 1 до 4 уменьшает ВБР на 0,07759 (в 4,3 раза), а изменение r от 1 до 8 уменьшает ВБР на 0,277 (в 15,3 раза);
- максимального значения интенсивность отказов достигает при значениях времени, кратных периоду пополнения. При $L = 0$ интенсивность отказов $\lambda(T, 0)/k\lambda = 0{,}37092$, при $L = 1 - \lambda(T, 1)/k\lambda = 0{,}20748$, а при $L = 2 - \lambda(T, 1)/k\lambda = 0{,}09438$, т. е. интенсивность отказов

уменьшается сначала в 1,79 раза, а затем еще в 2,2 раза. Среднее значение интенсивности отказов более чем вдвое меньше максимального значения.

5.10. Последовательное соединение дублированной, мажорированной и нерезервированной подсистем (модель П8)

Система состоит из k элементов, из которых $2r$ элементов образуют дублированную подсистему, $3r$ образуют мажорированную подсистему, а $k - 5r$ элементов — нерезервированную подсистему (рис. 5.7, *а*). Граф состояний содержит $L + 5$ состояний и отличается от графа схемы гибели (рис. 5.8, *а*).

При отсутствии ЗИП вероятность отказа системы находят по формуле:

$$Q(T,0) = 1 - 6e^{-(k-2r)a} + 7e^{-(k-r)a} - 2e^{-ka}. \qquad (5.246)$$

При наличии ЗИП вероятность отказа находим с помощью формулы (5.35):

$$Q(T,L) = \int_0^T \frac{(k\lambda)^L x^{L-1}}{(L-1)!} e^{-k\lambda x} Q(T-x,0)dx =$$

$$= I(A,L+1) - 6\left(\frac{A}{2ra}\right)^L e^{-A+2ra} I(2ra,L+1) + 7\left(\frac{A}{ra}\right)^L e^{-A+ra} I(ra,L+1). \qquad (5.247)$$

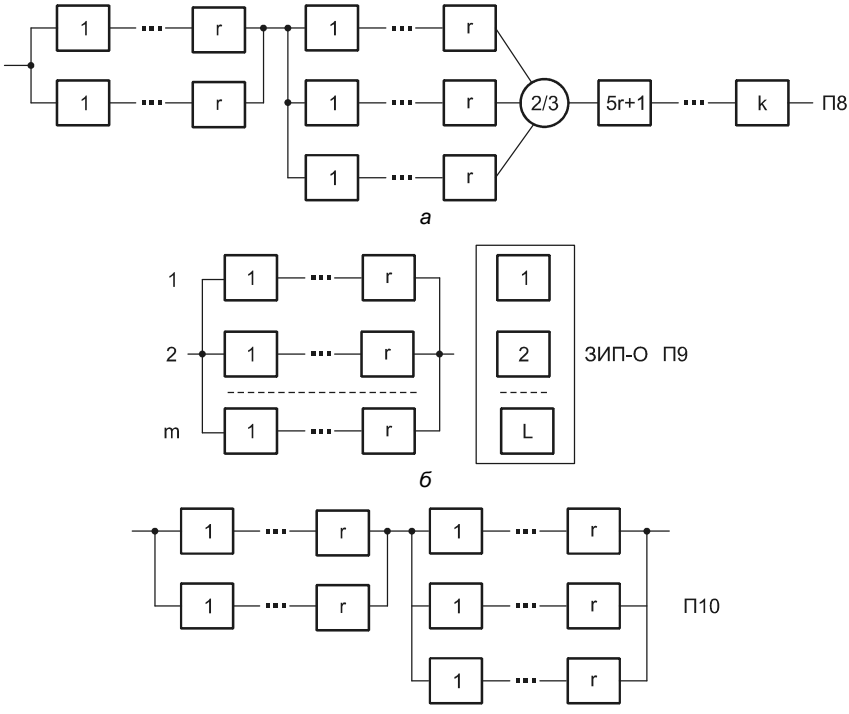


Рис. 5.7. Структурная схема систем (модели П8–П13): *а* — модель П8; *б* — модель П9; *в* — модель П10

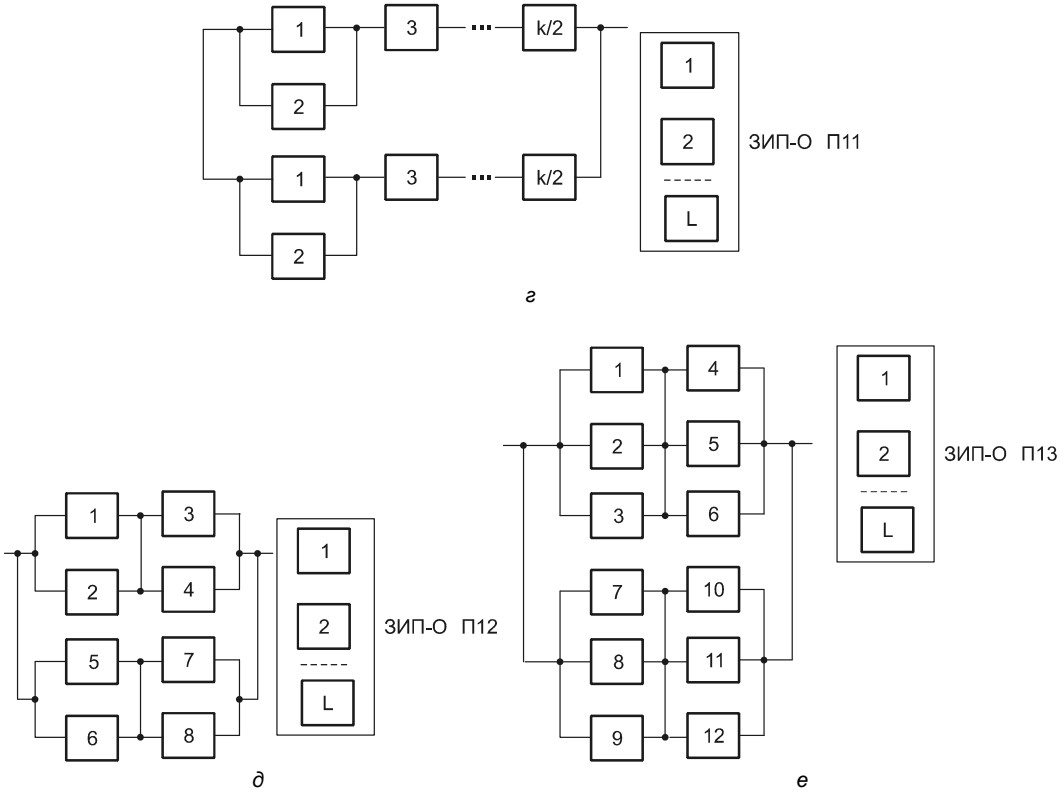


Рис. 5.7. Структурная схема систем (модели П8–П13): *г* — модель П11; *д* — модель П12; *е* — модель П13

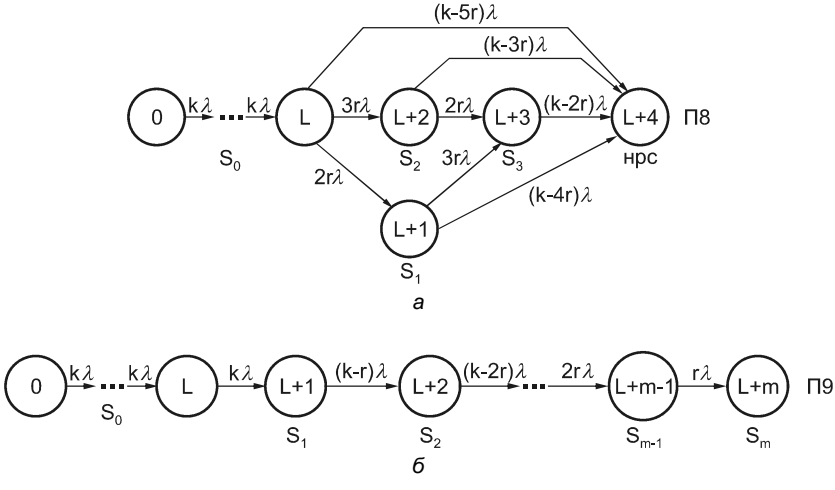
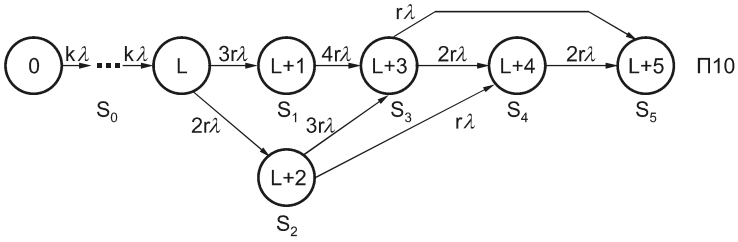
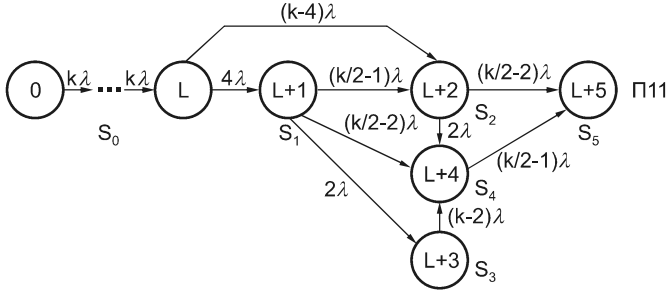


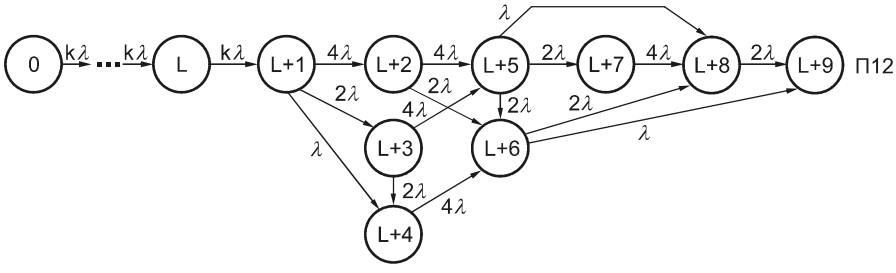
Рис. 5.8. Графы состояний системы (модели П8–П13): *а* — модель П8; *б* — модель П9



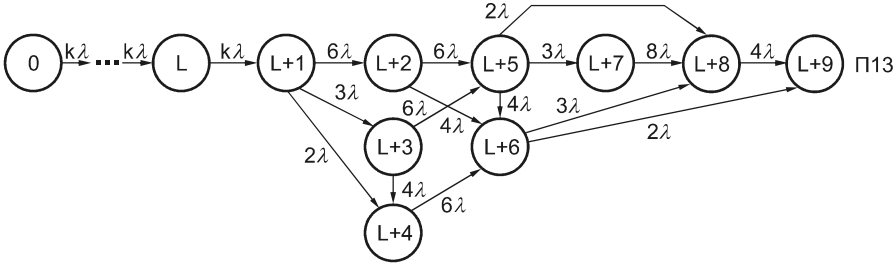
в



г



д



е

Рис. 5.8. Графы состояний системы (модели П8–П13): *в* — модель П10; *г* — модель П11; *д* — модель П12; *е* — модель П13

Используя граф состояний, составим сначала изображения для функций вероятностей того, что в момент времени T система сохранит базовую структуру S_0 или будет иметь одну из трех деградированных структур. Вероятность $P(T, L, S_0)$ найдем по формуле (5.213). Вероятность $P(T, L, S_1)$ также найдем по формуле (5.213), только взяв там коэффициент выживаемости $\delta_1 = 2r / k$. Для вероятностей $P(T, L, S_2)$ и $P(T, L, S_3)$ после обратного преобразования находим следующие формулы:

$$P(T, L, S_2) = \delta_2 \left(\frac{A}{ra}\right)^{L+1} e^{-A+ra} I(ra, L+1), \delta_2 = 3r / k,$$

$$P(T, L, S_3) = 6\left(\frac{A}{2ra}\right)^{L} e^{-A+2ra} I(2ra, L+1) - 12\left(\frac{A}{ra}\right)^{L} e^{-A+ra} I(ra, L+1). \quad (5.248)$$

Суммируя вероятности, получим ВБР:

$$P(T, L) = 1 - I(A, L+1) + 6\left(\frac{A}{2ra}\right)^{L} e^{-A+2ra} I(2ra, L+1) - 7\left(\frac{A}{ra}\right)^{L} e^{-A+ra} I(ra, L+1). \quad (5.249)$$

В частности, при L = 1 и 2 имеем:

$$P(T,1) = (1+A)e^{-A} + \frac{A}{ra} e^{-A+2ra} \left(3I(2ra,2) - 7e^{-ra} I(ra,2)\right),$$

$$P(T,2) = \left(1 + A + \frac{A^2}{2}\right) e^{-A} + \left(\frac{A}{ra}\right)^2 e^{-A+2ra} \left(1{,}5I(2ra,3) - 7e^{-ra} I(ra,3)\right). \quad (5.250)$$

Приращения ВБР при добавлении в комплект ЗИП-О одной ЗЧ:

$$\Delta P_1(T) = \int_0^T e^{-k\lambda(T-x)} dQ(x,0) = 6\left(\frac{A}{2ra} - 1\right) e^{-A+2ra} - 7\left(\frac{A}{ra} - 1\right) e^{-A+ra} + \left(\frac{4A}{ra} + 2A - 1\right) e^{-A},$$

$$\Delta P_i(T) = \int_0^T \frac{(k\lambda)^{i-1} x^{i-2}}{(L-1)!} e^{-k\lambda x} \Delta P_1(T-x) dx = \frac{2A^i}{i!} e^{-A} +$$

$$+6\left(\frac{A}{2ra} - 1\right)\left(\frac{A}{2ra}\right)^{i-1} e^{-A+2ra} I(2ra, i) - 7\left(\frac{A}{ra} - 1\right)\left(\frac{A}{ra}\right)^{i-1} e^{-A+ra} I(ra, i). \quad (5.251)$$

Чтобы найти среднюю наработку до отказа, представим (5.249) в виде:

$$P(T, L) = 6\left(\frac{A}{2ra}\right)^{L} e^{-A+2ra} - 7\left(\frac{A}{ra}\right)^{L} e^{-A+ra} + \sum_{i=0}^{L} \frac{A^i}{i!} e^{-A} \left(1 - 6\left(\frac{A}{2ra}\right)^{L-i} + 7\left(\frac{A}{ra}\right)^{L-i}\right). \quad (5.252)$$

Интегрируя (5.252), найдем среднюю наработку в периоде пополнения:

$$k\lambda\tau_1(T, L) = \frac{6A}{A - 2ra}\left(\frac{A}{2ra}\right)^{L} (1 - e^{-A+2ra}) - \frac{7A}{A - ra}\left(\frac{A}{ra}\right)^{L} (1 - e^{-A+ra}) +$$

$$+\sum_{i=0}^{L} \left(1 - 6\left(\frac{A}{2ra}\right)^{L-i} + 7\left(\frac{A}{ra}\right)^{L-i}\right) I(A, i+1). \quad (5.253)$$

В частности, при $L = 1$ и 2 имеем:

$$k\lambda\tau_1(T,1) = \frac{3A^2}{(A-2ra)ra}(1-e^{-A+2ra}) - \frac{7A^2}{(A-ra)ra}(1-e^{-A+ra}) + \left(1+\frac{4A}{ra}\right)I(A,1) + 2I(A,2), \quad (5.254)$$

$$k\lambda\tau_1(T,2) = \frac{3A^3}{(A-2ra)(ra)^2}(1-e^{-A+2ra}) - \frac{7A^3}{(A-ra)(ra)^2}(1-e^{-A+ra}) +$$

$$+\left(1+\frac{11A^2}{2(ra)^2}\right)I(A,1) + \left(1+\frac{4A}{ra}\right)I(A,2) + 2I(A,3). \quad (5.255)$$

Среднюю наработку до отказа определяем с помощью общей формулы (5.12) или (5.53).

При увеличении периода пополнения средняя наработка до отказа стремится к значению:

$$k\lambda T_{cp}(\infty) = \frac{ra(5A+2ra)}{(A-ra)(A-2ra)} + L + 1. \quad (5.256)$$

При малых A используем асимптотические формулы:

$$Q(T,L) \approx \frac{A^{L+1}}{(L+1)!}\left(1-\frac{5ra}{A}\right) - \frac{A^{L+2}}{(L+2)!}\left(\left(1-\frac{5ra}{A}\right)\left(L+1-\frac{5ra}{A}\right) - 8\left(\frac{ra}{A}\right)^2\right),$$

$$k\lambda T_{cp}(T,L) \approx \frac{(L+1)!}{A^L} \Big/ \left(\left(1-\frac{5ra}{A}\right)\left(1-\frac{A}{L+2}\left(L+1-\frac{5ra}{A}\right)\right) - 8\left(\frac{ra}{A}\right)^2\right). \quad (5.257)$$

Приближенная формула для средней наработки до отказа:

$$k\lambda T_{cp}(T,L) \approx A / Q(T,L) =$$

$$= A \Big/ \left(I(A,L+1) - 6\left(\frac{A}{2ra}\right)^L e^{-A+2ra} I(2ra,L+1) + 7\left(\frac{A}{ra}\right)^L e^{-A+ra} I(ra,L+1)\right). \quad (5.258)$$

Частота отказов:

$$\frac{a(T,L)}{k\lambda} = \left(1-\frac{5ra}{A}\right)\frac{A^L}{L!}e^{-A} + 6\left(1-\frac{2ra}{A}\right)\left(\frac{A}{2ra}\right)^L e^{-A+2ra} I(2ra,L+1) -$$

$$-7\left(1-\frac{ra}{A}\right)\left(\frac{A}{ra}\right)^L e^{-A+ra} I(ra,L+1). \quad (5.259)$$

Интенсивность отказов вычисляется по формуле (5.189).

В частности, при $L = 1$ и 2 имеем:

$$\frac{a(T,1)}{k\lambda} = \left(1-\frac{5ra}{A}\right)Ae^{-A} + 6\left(\frac{A}{2ra}-1\right)e^{-A+2ra} I(2ra,2) - 7\left(\frac{A}{ra}-1\right)e^{-A+ra} I(ra,2), \quad (5.260)$$

$$\frac{a(T,2)}{k\lambda} = \left(1-\frac{5ra}{A}\right)\frac{A^2}{2}e^{-A} + \frac{3A}{ra}\left(\frac{A}{2ra}-1\right)e^{-A+2ra} I(2ra,3) - \frac{7A}{ra}\left(\frac{A}{ra}-1\right)e^{-A+ra} I(ra,3).$$

Среднее по интервалу (0, T) значение коэффициента готовности:

$$K_c(T,L)=\frac{6}{A-2ra}\left(\frac{A}{2ra}\right)^L\left(1-e^{-A+2ra}\right)-\frac{7}{A-ra}\left(\frac{A}{ra}\right)^L\left(1-e^{-A+ra}\right)+$$

$$+\frac{1}{A}\sum_{i=0}^{L}\left(1-6\left(\frac{A}{2ra}\right)^{L-i}+7\left(\frac{A}{ra}\right)^{L-i}\right)I(A,i+1)\,. \qquad (5.261)$$

Представим теперь среднюю наработку системы в периоде пополнения в виде четырех слагаемых:

$$k\lambda\tau_1=k\lambda\tau_1^0+k\lambda\tau_1^1+k\lambda\tau_1^2+k\lambda\tau_1^3\,. \qquad (5.262)$$

Слагаемые в формуле (5.262) найдем путем интегрирования функций вероятностей $P(T,L,S_i), i=0...3$, выраженных формулами (5.213) и (5.248):

$$k\lambda\tau_1^1=\frac{2A}{A-ra}\left(\frac{A}{ra}\right)^L\left(1-e^{-A+ra}\right)-2\sum_{i=0}^{L}\left(\frac{A}{ra}\right)^{L-i}I(A,i+1)\,,$$

$$k\lambda\tau_1^2=\frac{3A}{A-ra}\left(\frac{A}{ra}\right)^L\left(1-e^{-A+ra}\right)-3\sum_{i=0}^{L}\left(\frac{A}{ra}\right)^{L-i}I(A,i+1)\,,$$

$$k\lambda\tau_1^3=\left(\frac{A}{2ra}\right)^L\frac{6A}{A-2ra}\left(1-e^{-A+2ra}\right)-\frac{12A}{A-ra}\left(\frac{A}{ra}\right)^L\left(1-e^{-A+ra}\right)-$$

$$-6\sum_{i=0}^{L}\left(\left(\frac{A}{2ra}\right)^{L-i}-2\left(\frac{A}{ra}\right)^{L-i}\right)I(A,i+1)\,. \qquad (5.263)$$

Значение $k\lambda\tau_1^0$ определяют по формуле (5.225).

Коэффициент оперативной готовности для наихудшего и среднестатистического цикла находят по формулам:

$$K^*_{oc}(\tau,T,L)=e^{-\alpha+2r\beta}(P(T,L,S_0)(3-2e^{-r\beta})(2-e^{-r\beta})+P(T,L,S_1)(3-2e^{-r\beta})+$$

$$+P(T,L,S_2)(2-e^{-r\beta})+P(T,L,S_3)),\alpha=k\beta,\beta=\lambda\tau\,, \qquad (5.264)$$

$$K_{oc}(\tau,T,L)=e^{-\alpha+2r\beta}(k\lambda\tau_1^0(3-2e^{-r\beta})(2-e^{-r\beta})+k\lambda\tau_1^1(3-2e^{-r\beta})+$$

$$+k\lambda\tau_1^2(2-e^{-r\beta})+k\lambda\tau_1^3)/A\,. \qquad (5.265)$$

В частности, при $k=5r$ имеем:

$$P(T,L)=1-I(A,L+1)+6\left(\frac{5}{2}\right)^L e^{-3ra}I(2ra,L+1)-7\left(5^L\right)e^{-4ra}I(ra,L+1)\,,$$

$$P(T,1)=15e^{-3ra}-35e^{-4ra}+(21+2A)e^{-A}\,,$$

$$P(T,2)=37{,}5e^{-3ra}-175e^{-4ra}+(138{,}5+21A+A^2)e^{-A}\,,$$

$$k\lambda T_{cp}(\infty)=\frac{13}{4}+L\,,\quad Q(T,L)\approx\frac{8A^{L+2}}{25(L+2)!}\,,\ k\lambda T_{cp}(T,L)\approx\frac{25(L+2)!}{8A^{L+1}}\,,$$

$$\frac{a(T,L)}{k\lambda} = 9\left(\frac{5}{2}\right)^{L-1} e^{-3ra} I(2ra, L+1) - 28\left(5^{L-1}\right) e^{-4ra} I(ra, L+1),$$

$$\frac{a(T,1)}{k\lambda} = 9e^{-3ra} I(2ra, 2) - 28e^{-4ra} I(ra, 2),$$

$$\frac{a(T,2)}{k\lambda} = \frac{45}{2} e^{-3ra} I(2ra, 3) - 140e^{-4ra} I(ra, 3). \qquad (5.266)$$

Рассмотрим теперь вариант реконфигурации структуры, когда после исчерпания ЗИП и отказа двух ветвей одной из резервированных подсистем резервная ветвь другой работоспособной подсистемы переводится в рабочий режим и тем самым восстанавливается работоспособность всей системы. В графе состояний при этом уменьшается интенсивность перехода из состояний $L + 1$ и $L + 2$ в неработоспособное состояние (рис. 5.9, *а*).

Из графа состояний следует, что состояния $L + 1$ и $L + 2$ могут быть объединены, и логическая схема функционирования системы может быть сведена к последовательному соединению нерезервированной подсистемы и резервированной подсистемы по схеме «3 из 5» (рис. 5.9, *б*).

Для схемы резервирования «3 из 5» при отсутствии ЗИП не трудно найти вероятность отказа системы:

$$Q(T,0) = 1 - 10e^{-(k-2r)a} + 15e^{-(k-r)a} - 6e^{-ka}. \qquad (5.267)$$

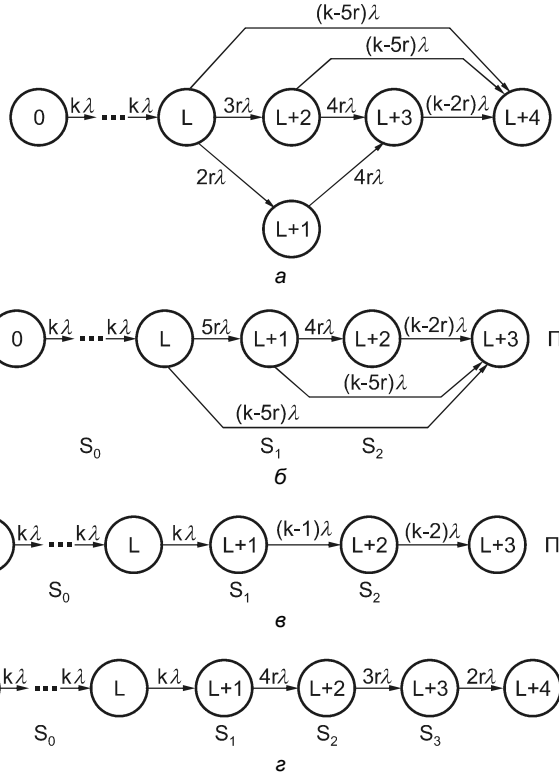


Рис. 5.9. Графы состояний системы с учетом реконфигурации: *а,б* — модель П8; *в* — модель П8, усиленная реконфигурация; *г* — модель П10

В соответствии с (5.35) вероятность отказа при наличии ЗИП

$$Q(T,L)=\int_0^T\frac{(k\lambda)^L x^{L-1}}{(L-1)!}e^{-k\lambda x}Q(T-x,0)dx=$$

$$=I(A,L+1)-10\left(\frac{A}{2ra}\right)^L e^{-A+2ra}I(2ra,L+1)+15\left(\frac{A}{ra}\right)^L e^{-A+ra}I(ra,L+1). \qquad (5.268)$$

Вероятность появления различных деградированных структур:

$$P(T,L,S_1)=\delta_1\left(\frac{A}{ra}\right)^{L+1} e^{-A+ra}I(ra,L+1),\delta_1=5r/k,$$

$$P(T,L,S_2)=10\left(\frac{A}{2ra}\right)^L e^{-A+2ra}I(2ra,L+1)-20\left(\frac{A}{ra}\right)^L e^{-A+ra}I(ra,L+1). \qquad (5.269)$$

Вероятность сохранения базовой структуры определяется по формуле (5.213). Суммируя вероятности, находим ВБР:

$$P(T,L)=1-I(A,L+1)+10\left(\frac{A}{2ra}\right)^L e^{-A+2ra}I(2ra,L+1)-15\left(\frac{A}{ra}\right)^L e^{-A+ra}I(ra,L+1). \qquad (5.270)$$

В частности, при L = 1 и 2 имеем:

$$P(T,1)=(1+A)e^{-A}+5\frac{A}{ra}e^{-A+2ra}\left(I(2ra,2)-3e^{-ra}I(ra,2)\right), \qquad (5.271)$$

$$P(T,2)=\left(1+A+\frac{A^2}{2}\right)e^{-A}+5\left(\frac{A}{ra}\right)^2 e^{-A+2ra}\left(0,5I(2ra,3)-3e^{-ra}I(ra,3)\right).$$

Приращения ВБР от добавления одной (первой или *i*-й по счету запасной части) находят по формулам:

$$\Delta P_1(T)=\int_0^T e^{-k\lambda(T-x)}dQ(x,0)=10\left(\frac{A}{2ra}-1\right)e^{-A+2ra}-15\left(\frac{A}{ra}-1\right)e^{-A+ra}+\left(\frac{10A}{ra}+6A-5\right)e^{-A},$$

$$\Delta P_i(T)=\int_0^T\frac{(k\lambda)^{i-1}x^{i-2}}{(L-2)!}e^{-k\lambda x}\Delta P_1(T-x)dx=\frac{6A^i}{i!}e^{-A}+$$

$$+10\left(\frac{A}{2ra}-1\right)\left(\frac{A}{2ra}\right)^{i-1} e^{-A+2ra}I(2ra,i)-15\left(\frac{A}{ra}-1\right)\left(\frac{A}{ra}\right)^{i-1} e^{-A+ra}I(ra,i). \qquad (5.272)$$

Чтобы найти среднюю наработку до отказа системы, представим (5.270) в виде:

$$P(T,L)=10\left(\frac{A}{2ra}\right)^L e^{-A+2ra}-15\left(\frac{A}{ra}\right)^L e^{-A+ra}+$$

$$+\sum_{i=0}^{L}\frac{A^i}{i!}e^{-A}\left(1-10\left(\frac{A}{2ra}\right)^{L-i}+15\left(\frac{A}{ra}\right)^{L-i}\right). \qquad (5.273)$$

Интегрируя (5.273) согласно (5.55), найдем среднюю наработку в периоде пополнения:

$$k\lambda\tau_1(T,L)=\frac{10A}{A-2ra}\left(\frac{A}{2ra}\right)^L(1-e^{-A+2ra})-\frac{15A}{A-ra}\left(\frac{A}{ra}\right)^L(1-e^{-A+ra})+$$

$$+\sum_{i=0}^{L}\left(1-10\left(\frac{A}{2ra}\right)^{L-i}+15\left(\frac{A}{ra}\right)^{L-i}\right)I(A,i+1)\,. \qquad (5.274)$$

В частности, при L = 1 и 2 имеем:

$$k\lambda\tau_1(T,1)=\frac{5A^2}{(A-2ra)ra}(1-e^{-A+2ra})-\frac{15A^2}{(A-ra)ra}(1-e^{-A+ra})+$$

$$+\left(1+\frac{10A}{ra}\right)I(A,1)+6I(A,2)\,,$$

$$k\lambda\tau_1(T,2)=\frac{5A^3}{2(A-2ra)(ra)^2}(1-e^{-A+2ra})-\frac{15A^3}{(A-ra)(ra)^2}(1-e^{-A+ra})+$$

$$+\left(1+\frac{25A^2}{2(ra)^2}\right)I(A,1)+\left(1+\frac{10A}{ra}\right)I(A,2)+6I(A,3)\,. \qquad (5.275)$$

При увеличении периода пополнения средняя наработка до отказа стремится к значению:

$$k\lambda T_{cp}(\infty)=\frac{5ra(A+2ra)}{(A-ra)(A-2ra)}+L+1\,. \qquad (5.276)$$

При малых значениях A используем асимптотические формулы:

$$Q(T,L)\approx\frac{A^{L+1}}{(L+1)!}\left(1-\frac{5ra}{A}\right)\left(1-\frac{A}{L+2}\left(L+1-\frac{5ra}{A}\right)\right),\ A>5ra\,,$$

$$k\lambda T_{cp}(T,L)\approx\frac{(L+1)!}{A^L}\Big/\left(\left(1-\frac{5ra}{A}\right)\left(1-\frac{A}{L+2}\left(L+1-\frac{5ra}{A}\right)\right)\right). \qquad (5.277)$$

Частота отказов:

$$\frac{a(T,L)}{k\lambda}=\left(1-\frac{5ra}{A}\right)\frac{A^L}{L!}e^{-A}+10\left(1-\frac{2ra}{A}\right)\left(\frac{A}{2ra}\right)^L e^{-A+2ra}I(2ra,L+1)-$$

$$-15\left(1-\frac{ra}{A}\right)\left(\frac{A}{ra}\right)^L e^{-A+ra}I(ra,L+1)\,. \qquad (5.278)$$

В частности, при L = 1 и 2 имеем:

$$\frac{a(T,1)}{k\lambda}=(A-5ra)e^{-A}+10\left(\frac{A}{2ra}-1\right)e^{-A+2ra}I(2ra,2)-15\left(\frac{A}{ra}-1\right)e^{-A+ra}I(2ra,2)\,, \qquad (5.279)$$

$$\frac{a(T,2)}{k\lambda}=(A-5ra)\frac{A}{2}e^{-A}+5\frac{A}{ra}\left(\frac{A}{2ra}-1\right)e^{-A+2ra}I(2ra,3)-\frac{15}{2}\left(\frac{A}{ra}-1\right)e^{-A+ra}I(2ra,3)\,.$$

Среднее по интервалу (0, T) значение коэффициента готовности:

$$K_c(T,L)=\frac{10}{A-2ra}\left(\frac{A}{2ra}\right)^L\left(1-e^{-A+2ra}\right)-\frac{15}{A-ra}\left(\frac{A}{ra}\right)^L\left(1-e^{-A+ra}\right)+$$

$$+\frac{1}{A}\sum_{i=0}^{L}\left(1-10\left(\frac{A}{2ra}\right)^{L-i}+15\left(\frac{A}{ra}\right)^{L-i}\right)I(A,i+1). \qquad (5.280)$$

Чтобы найти коэффициент оперативной готовности, представим (5.274) в виде суммы (5.209) путем интегрирования вероятностей (5.213) и (5.261):

$$k\lambda\tau_1^0=\sum_{i=0}^{L}I(A,i+1),\ k\lambda\tau_1^1=\frac{5A}{A-ra}\left(\frac{A}{ra}\right)^L\left(1-e^{-A+ra}\right)-5\sum_{i=0}^{L}\left(\frac{A}{ra}\right)^{L-i}I(A,i+1),$$

$$k\lambda\tau_1^2=\left(\frac{A}{2ra}\right)^L\frac{10A}{A-2ra}\left(1-e^{-A+2ra}\right)-\frac{20A}{A-2ra}\left(\frac{A}{ra}\right)^L\left(1-e^{-A+ra}\right)-$$

$$-10\sum_{i=0}^{L}\left(\left(\frac{A}{2ra}\right)^{L-i}-2\left(\frac{A}{ra}\right)^{L-i}\right)I(A,i+1). \qquad (5.281)$$

Коэффициент оперативной готовности для наихудшего и среднестатистического цикла находят по формулам:

$$K^*_{oc}(\tau,T,L)=e^{-\alpha+2r\beta}(P(T,L,S_0)(10-15e^{-2r\beta}+6e^{-r\beta})+$$

$$+P(T,L,S_1)(4-3e^{-r\beta})+P(T,L,S_2)),\alpha=k\beta,\beta=\lambda\tau,$$

$$K_{oc}(\tau,T,L)=e^{-\alpha+2r\beta}(k\lambda\tau_1^0(10-15e^{-2r\beta}+6e^{-r\beta})+$$

$$+k\lambda\tau_1^1(10-15e^{-2r\beta}+6e^{-r\beta})+k\lambda\tau_1^2)/A. \qquad (5.282)$$

В частности, при $k=5r$ имеем:

$$P(T,L)=1-I(A,L+1)+10\left(\frac{5}{2}\right)^L e^{-3ra}I(2ra,L+1)-3\left(5^{L+1}\right)e^{-4ra}I(ra,L+1),$$

$$P(T,1)=(51+6A)e^{-A}+25e^{-3ra}-75e^{-4ra},$$

$$P(T,2)=\left(\frac{627}{2}+51A+3A^2\right)e^{-A}+\frac{125}{2}e^{-3ra}-375e^{-4ra},$$

$$\frac{a(T,L)}{k\lambda}=6\left(\frac{5}{2}\right)^L e^{-3ra}I(2ra,L+1)-12\left(5^L\right)e^{-4ra}I(ra,L+1),$$

$$\frac{a(T,1)}{k\lambda}=15e^{-3ra}\left(I(2ra,2)-4e^{-ra}I(ra,2)\right),$$

$$\frac{a(T,2)}{k\lambda}=\frac{75}{2}e^{-3ra}\left(I(2ra,3)-8e^{-4ra}I(ra,3)\right),$$

$$k\lambda\tau_1(T,L)=\frac{50}{3}\left(\frac{5}{2}\right)^L(1-e^{-3ra})-\frac{3}{4}5^{L+2}(1-e^{-4ra})+\sum_{i=0}^{L}\left(1-10\left(\frac{5}{2}\right)^{L-i}+15\left(5^{L-i}\right)\right)I(A,i+1). \qquad (5.283)$$

Рассмотрим теперь вариант усиленной реконфигурации при $r = 1$. Особенность усиленной реконфигурации состоит в том, что резервный элемент можно использовать для восстановления работоспособности не только резервированной, но и нерезервированной подсистемы. Очевидно, что в этом случае схема резервирования сводится к схеме «$k - 2$ из k». Граф состояний для этой схемы приведен на рис. 5.9, *в*.

Вероятность отказа при отсутствии ЗИП:

$$Q(T,0) = 1 - \frac{1}{2}k(k-1)e^{-(k-2)a} + k(k-2)e^{-(k-1)a} - \frac{1}{2}(k-2)(k-1)e^{-ka}. \qquad (5.284)$$

Вероятность отказа при наличии ЗИП:

$$Q(T,L) = \int_0^T \frac{(k\lambda)^L x^{L-1}}{(L-1)!} e^{-k\lambda x} Q(T-x,0)dx = I(A,L+1) -$$

$$-(k-1)\left(\frac{k}{2}\right)^{L+1} e^{-A+2a} I(2a,L+1) + (k-2)k^{L+1}e^{-A+a} I(a,L+1). \qquad (5.285)$$

Вероятность появления различных деградированных структур:

$$P(T,L,S_1) = k^{L+1}e^{-A+a} I(a,L+1), \qquad (5.286)$$

$$P(T,L,S_2) = (k-1)\left(\frac{k}{2}\right)^{L} e^{-A+2a} I(2a,L+1) - (k-1)k^L e^{-A+a} I(a,L+1).$$

Суммируя вероятности из формул (5.213) и (5.286), получим ВБР:

$$P(T,L) = 1 - I(A,L+1) + (k-1)\left(\frac{k}{2}\right)^{L} e^{-A+2a} I(2a,L+1) - (k-2)k^L e^{-A+a} I(a,L+1). \qquad (5.287)$$

В частности, при $L = 1$ и 2 имеем:

$$P(T,1) = (1+A)e^{-A} + \frac{1}{4}(k-1)k^2 e^{-A+2a} I(2a,2) - (k-2)k^2 e^{-A+a} I(a,2), \qquad (5.288)$$

$$P(T,2) = \left(1 + A + \frac{A^2}{2}\right)e^{-A} + \frac{1}{8}(k-1)k^3 e^{-A+2a} I(2a,3) - (k-2)k^3 e^{-A+a} I(a,3).$$

При $k = 5r$ и $r = 1$ формулы (5.270)–(5.271) и (5.287)–(5.288) совпадают.

Приращения ВБР от добавления одной (первой или i-й по счету запасной части) находят по формулам:

$$\Delta P_1(T) = \int_0^T e^{-k\lambda(T-x)} dQ(x,0) = \frac{1}{4}k(k-1)(k-2)e^{-A+2a}(1 - 4e^{-a} + (3+2a)e^{-2a},$$

$$\Delta P_i(T) = \int_0^T \frac{(k\lambda)^{i-1} x^{i-2}}{(L-2)!} e^{-k\lambda x} \Delta P_1(T-x)dx =$$

$$= \frac{1}{2}(k-1)(k-2)e^{-A+2a}\left(\left(\frac{k}{2}\right)^i I(2a,i) - 2k^i e^{-a} I(a,i) + \frac{A^i}{i!}e^{-2a}\right). \qquad (5.289)$$

Представим (5.287) в виде:

$$P(T,L)=(k-1)\left(\frac{k}{2}\right)^{L+1}e^{-A+2a}-(k-2)k^{L+1}e^{-A+a}+$$

$$+\sum_{i=0}^{L}\frac{A^i}{i!}e^{-A}\left(1-(k-1)\left(\frac{k}{2}\right)^{L+1-i}+(k-2)k^{L+1-i}\right). \qquad (5.290)$$

Интегрируя (5.290), найдем среднюю наработку в периоде пополнения:

$$k\lambda\tau_1(T,L)=\frac{k(k-1)}{k-2}\left(\frac{k}{2}\right)^{L+1}(1-e^{-A+2a})-\frac{k(k-2)}{k-1}k^{L+1}(1-e^{-A+a})+$$

$$+\sum_{i=0}^{L}\left(1-(k-1)\left(\frac{k}{2}\right)^{L+1-i}+(k-2)k^{L+1-i}\right)I(A,i+1). \qquad (5.291)$$

Среднюю наработку до отказа определяем с помощью общей формулы (5.12) или (5.53).

При увеличении периода пополнения средняя наработка до отказа стремится к значению:

$$k\lambda T_{cp}(\infty)=\frac{k(2k-3)}{(k-1)(k-2)}+L+1. \qquad (5.292)$$

Чтобы найти приближенную асимптотическую формулу для вероятности отказа при малых значениях A, представим (5.285) в виде:

$$Q(T,L)=I(A,L+2)-(k-1)\left(\frac{k}{2}\right)^{L+1}e^{-A+2a}I(2a,L+2)+(k-2)k^{L+1}e^{-A+a}I(a,L+2). \qquad (5.293)$$

Разлагая теперь это выражение по степеням A и оставляя только главный член разложения, получим:

$$Q(T,L)\approx\frac{(k-1)(k-2)}{k^2}\frac{A^{L+3}}{(L+3)!}. \qquad (5.294)$$

В частности, при $k = 5r$ имеем:

$$Q(T,L)\approx 0,48\frac{A^{L+3}}{(L+3)!}. \qquad (5.295)$$

Асимптотическая формула для средней наработки до отказа имеет вид:

$$k\lambda T_{cp}(T,L)\approx\frac{(L+3)!}{A^{L+2}}\frac{k^2}{(k-1)(k-2)}. \qquad (5.296)$$

Частота отказов:

$$\frac{a(T,L)}{k\lambda}=\frac{(k-1)(k-2)}{k}\left(\frac{k}{2}\right)^{L+1}e^{-A+2a}\left(I(2a,L+1)-2^{L+1}e^{-a}I(a,L+1)\right). \qquad (5.297)$$

Среднее по интервалу (0, T) значение коэффициента готовности находим с помощью общей формулы (5.53), используя (5.291).

Чтобы найти коэффициент оперативной готовности, представим (5.291) в виде суммы (5.209) путем интегрирования вероятностей (5.213) и (5.286):

$$k\lambda\tau_1^0 = \sum_{i=0}^{L} I(A,i+1), k\lambda\tau_1^1 = \frac{1}{k-1}k^{L+2}\left(1-e^{-A+a}\right) - \sum_{i=0}^{L} k^{L+1-i} I(A,i+1),$$

$$k\lambda\tau_1^2 = (k-1)\left(\frac{k}{2}\right)^{L+1}\left(1-e^{-A+2a}\right) - \frac{k-3}{k-1}k^{L+2}\left(1-e^{-A+a}\right) -$$

$$-(k-1)\sum_{i=0}^{L}\left(\left(\frac{k}{2}\right)^{L+1-i} - k^{L+1-i}\right) I(A,i+1). \qquad (5.298)$$

Используя (5.213), (5.286) и (5.298), составим формулы для коэффициента оперативной готовности:

$$K_{o2}^{*}(\tau,T,L) = e^{-\alpha+2\beta}(P(T,L,S_0)(\frac{1}{2}k(k-1) - k(k-2)e^{-\beta} +$$

$$+\frac{1}{2}(k-2)(k-1)e^{-2\beta}) + P(T,L,S_1)(k-1+(k-2)e^{-\beta}) + P(T,L,S_2)), \qquad (5.299)$$

$$K_{o2}(\tau,T,L) = e^{-\alpha+2r\beta}(k\lambda\tau_1^0(\frac{1}{2}k(k-1) - k(k-2)e^{-\beta} +$$

$$+\frac{1}{2}(k-2)(k-1)e^{-2\beta}) + k\lambda\tau_1^1(k-1+(k-2)e^{-\beta}) + k\lambda\tau_1^2) / A, \alpha = k\beta, \beta = \lambda\tau. \qquad (5.300)$$

При $k = 5$ формула (5.300) совпадает с (5.282).

По результатам расчетов (*приложение 5*, пример П5.140) можно сделать следующие выводы:

- сравнивая показатели надежности данной системы с показателями надежности систем в моделях П6 и П7, легко установить, что смешанная система с групповым дублированием и мажорированием занимает промежуточное место между системами с групповым дублированием и групповым мажорированием;
- при равнодоступности запасных частей для подсистем определяющую роль в значениях показателей надежности играет нерезервированная подсистема. Для значений $m \geq r$ вероятность безотказной системы достаточно точно определяется вероятностью безотказной работы нерезервированной части.

5.11. Резервирование по схеме «один из *m*» (модель П9)

Система состоит из m параллельных ветвей, в каждой из которых есть r однотипных элементов с интенсивностью отказов λ (см. рис. 5.6, *б*). Для работоспособности системы достаточно иметь одну работоспособную ветвь. В комплекте ЗИП-О имеется L запасных частей. Всего в системе находится $k = mr$ элементов. Граф состояний содержит $L + m + 1$ состояние и соответствует схеме гибели (см. рис. 5.7, *б*).

При отсутствии ЗИП вероятность отказа рассчитывают по формуле:

$$Q(T,0) = \left(1-e^{-ra}\right)^m = \sum_{i=0}^{m} C_m^i e^{-ira}\left(-1\right)^i. \qquad (5.301)$$

При наличии ЗИП согласно (5.35) имеем:

$$Q(T,L)=\int_0^T\frac{(k\lambda)^L x^{L-1}}{(L-1)!}e^{-k\lambda x}Q(T-x,0)dx=\sum_{i=0}^{m-1}C_m^i e^{-ira}\left(-1\right)^i\left(\frac{k}{k-ir}\right)^L I(A-ira,L+1)\,. \quad (5.302)$$

В частности, при m = 3 и 4 имеем:

$$Q(T,L,3)=I(A,L+1)-3\left(\frac{3}{2}\right)^L e^{-ra}I(2ra,L+1)+3^{L+1}e^{-2ra}I(ra,L+1)=$$

$$=I(A,L+2)-3\left(\frac{3}{2}\right)^L e^{-ra}I(2ra,L+2)+3^{L+1}e^{-2ra}I(ra,L+2)=$$

$$=I(A,L+3)-3\left(\frac{3}{2}\right)^L e^{-ra}I(2ra,L+3)+3^{L+1}e^{-2ra}I(ra,L+3)\,, \quad (5.303)$$

$$Q(T,L,4)=I(A,L+1)-4\left(\frac{4}{3}\right)^L e^{-ra}I(3ra,L+1)+3\left(2^{L+1}\right)e^{-2ra}I(2ra,L+1)-$$

$$-4^{L+1}e^{-3ra}I(ra,L+1)=$$

$$=I(A,L+2)-4\left(\frac{4}{3}\right)^L e^{-ra}I(3ra,L+2)+3\left(2^{L+1}\right)e^{-2ra}I(2ra,L+2)-4^{L+1}e^{-3ra}I(ra,L+2)=$$

$$=I(A,L+3)-4\left(\frac{4}{3}\right)^L e^{-ra}I(3ra,L+3)+3\left(2^{L+1}\right)e^{-2ra}I(2ra,L+3)-4^{L+1}e^{-3ra}I(ra,L+3)=$$

$$=I(A,L+4)-4\left(\frac{4}{3}\right)^L e^{-ra}I(3ra,L+4)+3\left(2^{L+1}\right)e^{-2ra}I(2ra,L+4)-4^{L+1}e^{-3ra}I(ra,L+4)\,. \quad (5.304)$$

До отказа системы структура проходит m-кратную деградацию. При этом структуры S_0, ..., S_{m-1} являются работоспособными. Найдем вероятности того, что в момент T система имеет заданную структуру S_j, j = 1..m – 1.

Составляя по графу состояний соотношения между изображениями вероятностей состояний и выполняя разложение дробей на простые слагаемые, получим:

$$P_{L+1}^*(s)=\frac{s}{s+(k-r)\lambda}\left(\frac{k\lambda}{s+k\lambda}\right)^{L+1}, \quad (5.305)$$

$$P_{L+j+1}^*(s)=\prod_{i=1}^{j}\frac{k-ir}{j!r^j}\sum_{\nu=0}^{j}\frac{s(-1)^\nu C_j^\nu}{s+(k-r(j+1-\nu))\lambda}\left(\frac{k\lambda}{s+k\lambda}\right)^{L+1},\ j=1...m-2\,.$$

Выполняя здесь обратное преобразование и учитывая, что вероятности состояний и вероятности работоспособных структур связаны соотношением: $P_{L+j}(T)=P(T,L,S_j)$, найдем:

$$P(T,L,S_1)=\left(\frac{k}{r}\right)^{L+1}e^{-A+ra}I(ra,L+1)\,, \quad (5.306)$$

$$P(T,L,S_{1+j}) = \prod_{i=1}^{j} \frac{k-ir}{j!r^j} \sum_{\nu=0}^{j} (-1)^{\nu} C_j^{\nu} \left(\frac{k}{r(j+1-\nu)} \right)^{L+1} e^{-A+ra(j+1-\nu)} I(ra(j+1-\nu), L+1),$$

$$j = 1...m-2 .$$

Вероятность $P(T,L,S_0)$ найдем по формуле (5.213).

В частности, при $m = 3$ имеем:

$$P(T,L,S_1) = 3^{L+1} e^{-2ra} I(ra, L+1), \tag{5.307}$$

$$P(T,L,S_2) = 2\left(\left(\frac{3}{2} \right)^{L+1} e^{-ra} I(2ra, L+1) - 3^{L+1} e^{-2ra} I(ra, L+1) \right).$$

При $m = 4$ имеем:

$$P(T,L,S_1) = 4^{L+1} e^{-3ra} I(ra, L+1), \tag{5.308}$$

$$P(T,L,S_2) = 3\left(2^{L+1} e^{-2ra} I(2ra, L+1) - 4^{L+1} e^{-3ra} I(ra, L+1) \right),$$

$$P(T,L,S_3) = 3\left(\left(\frac{4}{3} \right)^{L+1} e^{-ra} I(3ra, L+1) - 2^{L+2} e^{-2ra} I(2ra, L+1) + 4^{L+1} e^{-3ra} I(ra, L+1) \right).$$

Суммируя вероятности состояний (5.306) и (5.213), получим:

$$P(T,L) = 1 - I(A, L+1) + \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^{i+1} C_m^i e^{-ira} \left(\frac{k}{k-ir} \right)^{L} I(A-ira, L+1). \tag{5.309}$$

В частности, при $L = 1$ и 2 имеем:

$$P(T,1) = (1+A)e^{-A} + \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^{i+1} C_m^i e^{-ira} \frac{k}{k-ir} I(A-ira, 2), \tag{5.310}$$

$$P(T,2) = \left(1 + A + \frac{A^2}{2} \right) e^{-A} + \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^{i+1} C_m^i e^{-ira} \left(\frac{k}{k-ir} \right)^{2} I(A-ira, 3). \tag{5.311}$$

Приращения ВБР от добавления одной (первой или i-й по счету запасной части) находят по формулам:

$$\Delta P_1(T) = \int_0^T e^{-k\lambda(T-x)} dQ(x,0) = (-1)^{m-1} A e^{-A} + \sum_{i=1}^{m-1} (-1)^{i+1} C_m^i e^{-ira} \frac{ir}{k-ir} (1 - e^{-A+ira}),$$

$$\Delta P_i(T) = \int_0^T \frac{(k\lambda)^{i-1} x^{i-2}}{(L-2)!} e^{-k\lambda x} \Delta P_1(T-x) dx =$$

$$= (-1)^{m-1} \frac{A^i}{i!} e^{-A} + \sum_{\nu=1}^{m-1} (-1)^{\nu-1} C_m^{\nu} e^{-\nu ra} \frac{\nu ra}{A} \left(\frac{A}{A-\nu ra} \right)^{i} I(A-\nu ra, L). \tag{5.312}$$

Чтобы найти среднюю наработку до отказа системы, представим (5.270) в виде:

$$P(T,L) = \sum_{\nu=1}^{m-1} (-1)^{\nu-1} C_m^{\nu} e^{-\nu ra} \left(\frac{A}{A-\nu ra} \right)^{L} + \sum_{j=0}^{L} \sum_{\nu=0}^{m-1} (-1)^{\nu} C_m^{\nu} \left(\frac{A}{A-\nu ra} \right)^{L-j} \frac{A^j}{j!} e^{-A}. \tag{5.313}$$

Интегрируя (5.313), найдем среднюю наработку в периоде пополнения:

$$k\lambda\tau_1(T,L)=\sum_{\nu=1}^{m-1}(-1)^{\nu-1}C_m^{\nu}\left(\frac{A}{A-\nu ra}\right)^{L}(1-e^{-\nu ra})+$$

$$+\sum_{j=0}^{L}\sum_{\nu=0}^{m-1}(-1)^{\nu}C_m^{\nu}e^{-\nu ra}\left(\frac{A}{A-\nu ra}\right)^{L-j}I(A,j+1)\,. \qquad (5.314)$$

В частности, при L = 1 и 2 имеем:

$$k\lambda\tau_1(T,1)=\sum_{\nu=1}^{m-1}(-1)^{\nu-1}C_m^{\nu}\frac{m}{\nu}\left(\frac{m}{m-\nu}\right)(1-e^{-\nu ra})+$$

$$+\sum_{\nu=0}^{m-1}(-1)^{\nu}C_m^{\nu}\frac{m}{m-\nu}I(A,1)+(-1)^{m+1}I(A,2)\,, \qquad (5.315)$$

$$k\lambda\tau_1(T,2)=\sum_{\nu=1}^{m-1}(-1)^{\nu-1}C_m^{\nu}\frac{m}{\nu}\left(\frac{m}{m-\nu}\right)^{2}(1-e^{-\nu ra})+\sum_{\nu=0}^{m-1}(-1)^{\nu}C_m^{\nu}\left(\frac{m}{m-\nu}\right)^{2}I(A,1)+$$

$$+\sum_{\nu=0}^{m-1}(-1)^{\nu}C_m^{\nu}\frac{m}{m-\nu}I(A,2)+(-1)^{m+1}I(A,3)\,. \qquad (5.316)$$

Среднюю наработку до отказа определяем с помощью общей формулы (5.12) или (5.53).

При увеличении периода пополнения средняя наработка до отказа стремится к значению:

$$k\lambda T_{cp}(\infty)=\sum_{\nu=1}^{m-1}(-1)^{\nu+1}C_m^{\nu}\frac{m-\nu}{m}+L+1\,. \qquad (5.317)$$

Чтобы найти приближенную асимптотическую формулу для вероятности отказа при малых значениях A, представим (5.302) в виде:

$$Q(T,L)=\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^{i}C_m^{i}e^{-ira}\left(\frac{k}{k-ir}\right)^{L}I(A-ira,L+2)\,. \qquad (5.318)$$

Разлагая теперь это выражение по степеням A и оставляя только главный член разложения, получим:

$$Q(T,L)\approx\frac{A^{L+3}}{(L+3)!}\sum_{\nu=1}^{m-1}(-1)^{\nu-1}C_m^{\nu}\frac{\nu}{m}\left(\frac{m-\nu}{m}\right)^{2}. \qquad (5.319)$$

Частота отказов:

$$\frac{a(T,L)}{k\lambda}=\sum_{i=1}^{m-1}(-1)^{i-1}C_m^{i}\frac{i}{m}\left(\frac{m}{m-i}\right)^{L}e^{-ira}I(A-ira,L+1)\,. \qquad (5.320)$$

Среднее по интервалу (0, T) значение коэффициента готовности находим с помощью общей формулы (5.57), используя (5.314).

Интегрируя (5.306), найдем слагаемые средней наработки системы в периоде пополнения:

$$k\lambda\tau_1^{1}(T,L)=m^{L+1}\frac{m}{m-1}(1-e^{-ra})-\sum_{i=0}^{L}m^{L+1-i}I(A,i+1)\,, \qquad (5.321)$$

$$k\lambda\tau_1^{1+j}(T,L)=\prod_{i=1}^{j}\frac{k-ir}{j!r^j}\sum_{\nu=0}^{j}(-1)^{\nu}C_j^{\nu}\left(\frac{m}{m-(j+1-\nu)}\left(\frac{m}{j+1-\nu}\right)^{L+1}I(A-ira,1)-\right.$$

$$\left.-\sum_{l=0}^{L}\left(\frac{m}{j+1-\nu}\right)^{L+1-l}I(A-ra(j+1-\nu),l+1)\right),\ j=1...m-2\,.$$

Коэффициент оперативной готовности:

$$K^{*}_{o\varepsilon}(\tau,T,L)=\sum_{i=0}^{m-1}P(T,L,S_i)\left(1-\left(1-e^{-r\beta}\right)^{m-i}\right),\beta=\lambda\tau\,,$$

$$K_{o\varepsilon}(\tau,T,L)=\sum_{i=0}^{m-1}k\lambda\tau_1^{i}(T,L)\left(1-\left(1-e^{-r\beta}\right)^{m-i}\right). \qquad (5.322)$$

В частности, при m = 3 имеем:

$$P(T,L)=3\left(\frac{3}{2}\right)^{L}e^{-ra}-3^{L+2}e^{-2ra}+\sum_{i=0}^{L}\left(1-3\left(\frac{3}{2}\right)^{L-i}+3^{L+1-i}\right)\frac{A^i}{i!}e^{-A}\,,$$

$$k\lambda\tau_1(T,L)=9\left(\frac{3}{2}\right)^{L}(1-e^{-ra})-\frac{3}{2}3^{L+1}(1-e^{-2ra})+\sum_{i=0}^{L}\left(1-3\left(\frac{3}{2}\right)^{L-i}+3^{L+1-i}\right)I(A,i+1)$$

$$k\lambda T_{cp}(T,L)=\frac{k\lambda\tau_1(T,L)}{I(A,L+1)-3\left(\frac{3}{2}\right)^{L}e^{-ra}I(2ra,L+1)-3^{L+2}e^{-2ra}I(ra,L+1)}\,,$$

$$\Delta P_1(T)=\frac{3}{2}e^{-ra}-6e^{-2ra}+e^{-A}(A+4,5)\,,$$

$$\Delta P_i(T)=\frac{A^i}{i!}e^{-A}+\left(\frac{3}{2}\right)^{i}e^{-ra}I(2ra,i)-2\left(3^i\right)e^{-2ra}I(ra,i)\,,$$

$$k\lambda T_{cp}(\infty)=\frac{11}{2}+L\,,\quad Q(T,L)\approx\frac{2}{9}\frac{A^{L+3}}{(L+3)!}\,,$$

$$\frac{a(T,L)}{k\lambda}=\left(\frac{3}{2}\right)^{L}e^{-ra}I(2ra,L+1)-2\left(3^L\right)e^{-2ra}I(ra,L+1)\,. \qquad (5.323)$$

По результатам расчетов (*приложение 5*, примеры П5.15–П5.16) можно сделать следующие выводы:

- даже при глубоком встроенном резервировании появление запасных частей существенно улучшает показатели надежности. Так при A = 0,3 появление первой запасной части изменяет ВБР от 0,983 до 0,999937, а второй ЗЧ — до 0,9999963. При A = 0,6 те же вероятности принимают значения: 0,908, 0,99916 и 0,999903;
- следует обратить внимание на то, что среднее по периоду пополнения значение интенсивности отказов в 3–5 раз меньше максимального значения. Это является следствием нелинейного возрастания интенсивности отказов со временем. В последней четверти периода она увеличивается более чем вдвое;

- волнообразное изменение ВБР со временем здесь выражено еще сильнее, т. к. с ростом кратности резервирования увеличивается практически горизонтальная часть графика.

5.12. Последовательное соединение дублированной и троированной подсистем (модель П10)

Система состоит из двух последовательно соединенных подсистем: дублированная подсистема содержит две параллельных ветви по r элементов каждая, работающих по схеме «1 из 2», троированная подсистема содержит три параллельных ветви по r элементов каждая, работающих по схеме «1 из 3» (см. рис. 5.7, *в*). В этой структуре максимальный запас живучести равен 3, т. е. структура допускает три ступени деградации при сохранении работоспособности. Граф состояний содержит $L + 6$ состояний (см. рис. 5.8, *в*).

При отсутствии ЗИП вероятность отказа системы находят по формуле:

$$Q(T,0) = 1 - 6e^{-2ra} + 9e^{-3ra} - 5e^{-4ra} + e^{-5ra}. \qquad (5.324)$$

При наличии ЗИП вероятность отказа

$$Q(T,L) = \int_0^T \frac{(k\lambda)^L x^{L-1}}{(L-1)!} e^{-k\lambda x} Q(T-x,0)dx = I(A,L+1) -$$

$$-6\left(\frac{5}{3}\right)^L e^{-2ra} I(3ra,L+1) + 9\left(\frac{5}{2}\right)^L e^{-3ra} I(2ra,L+1) - 5^{L+1} e^{-4ra} I(2ra,L+1). \qquad (5.325)$$

В частности, при L = 1 и 2 имеем:

$$P(T,1) = 10e^{-2ra} - 22{,}5e^{-3ra} + 25e^{-4ra} - (11{,}5 + A)e^{-A},\ A = 5ra,$$

$$P(T,2) = \frac{50}{3}e^{-2ra} - \frac{225}{4}e^{-3ra} + 125e^{-4ra} - \left(\frac{1013}{12} + 11{,}5A + \frac{A^2}{2}\right)e^{-A}. \qquad (5.326)$$

Используя граф состояний, найдем сначала изображения функций вероятностей состояний, затем выполним обратное преобразование и запишем вероятности возникновения в момент времени T возможной деградированной структуры:

$$P(T,L,S_1) = \delta_1 5^{L+1} e^{-4ra} I(ra,L+1), \delta_1 = 3r/k = 3/5, \qquad (5.327)$$

$$P(T,L,S_2) = \delta_2 5^{L+1} e^{-4ra} I(ra,L+1), \delta_2 = 2/5,$$

$$P(T,L,S_3) = 9\left(\frac{5}{2}\right)^L e^{-3ra} I(2ra,L+1) - 18\left(5^L\right)e^{-4ra} I(ra,L+1),$$

$$P(T,L,S_4) = 6\left(\frac{5}{3}\right)^L e^{-2ra} I(3ra,L+1) - 18\left(\frac{5}{2}\right)^L e^{-3ra} I(2ra,L+1) +$$

$$+18\left(5^L\right)e^{-4ra} I(ra,L+1).$$

Вероятность сохранения базовой структуры находят по формуле (5.213). Суммируя вероятности, имеем:

$$P(T,L)=1-I(A,L+1)+6\left(\frac{5}{3}\right)^{L}e^{-2ra}I(3ra,L+1)-$$

$$-9\left(\frac{5}{2}\right)^{L}e^{-3ra}I(2ra,L+1)+5^{L+1}e^{-4ra}I(2ra,L+1)\,. \qquad (5.328)$$

Приращения ВБР от добавления одной (первой или *i*-й по счету запасной части) находят по формулам:

$$\Delta P_1(T)=4e^{-2ra}-\frac{27}{2}e^{-3ra}+20e^{-4ra}-e^{-A}(A+10,5)\,, \qquad (5.329)$$

$$\Delta P_i(T)=4\left(\frac{5}{3}\right)^{i-1}e^{-2ra}I(3ra,i)-\frac{27}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^{i-1}e^{-3ra}I(2ra,i)+$$

$$+4\left(5^{i}\right)e^{-4ra}I(ra,i)-\frac{A^{i}}{i!}e^{-A}\,. \qquad (5.330)$$

При $i=1$ из (5.330) получим (5.329).

Чтобы найти среднюю наработку до отказа системы, представим (5.270) в виде:

$$P(T,L)=6\left(\frac{5}{3}\right)^{L}e^{-2ra}-9\left(\frac{5}{2}\right)^{L}e^{-3ra}+5^{L+1}e^{-4ra}+$$

$$+\sum_{i=0}^{L}\left(1-6\left(\frac{5}{3}\right)^{L-i}+9\left(\frac{5}{2}\right)^{L-i}-5^{L+1-i}\right)\frac{A^{i}}{i!}e^{-A}\,. \qquad (5.331)$$

Интегрируя (5.331) согласно (5.54), найдем среднюю наработку в периоде пополнения:

$$k\lambda\tau_1(T,L)=15\left(\frac{5}{3}\right)^{L}(1-e^{-2ra})-15\left(\frac{5}{2}\right)^{L}(1-e^{-3ra})+\frac{1}{4}5^{L+1}(1-e^{-4ra})+$$

$$+\sum_{i=0}^{L}\left(1-6\left(\frac{5}{3}\right)^{L-i}+9\left(\frac{5}{2}\right)^{L-i}-5^{L+1-i}\right)I(A,i+1)\,. \qquad (5.332)$$

В частности, при $L=1$ и 2 имеем:

$$k\lambda\tau_1(T,1)=\frac{75}{3}(1-e^{-2ra})-\frac{75}{2}(1-e^{-3ra})+\frac{125}{4}5^{L+1}(1-e^{-4ra})-11,5I(A,1)-I(A,2)\,,$$

$$k\lambda\tau_1(T,2)=\frac{125}{3}(1-e^{-2ra})-\frac{375}{4}(1-e^{-3ra})+\frac{625}{4}5^{L+1}(1-e^{-4ra})-$$

$$-\frac{1013}{12}I(A,1)-11,5I(A,2)-I(A,3)\,. \qquad (5.333)$$

Среднюю наработку до отказа определяем с помощью общей формулы (5.12) или (5.53).

При увеличении периода пополнения средняя наработка до отказа стремится к значению:

$$k\lambda T_{cp}(T,\infty)=\frac{21}{4}+L\,. \qquad (5.334)$$

При малых значениях A используем асимптотические формулы, полученные путем разложения (5.325) по степеням параметра A:

$$Q(T,L) \approx \frac{2}{25}\frac{A^{L+2}}{(L+2)!}\ ,\ k\lambda T_{cp}(T,L) \approx \frac{25}{2}\frac{(L+2)!}{A^{L+1}}. \qquad (5.335)$$

Частота отказов:

$$\frac{a(T,L)}{k\lambda} = 4\left(\frac{5}{3}\right)^{L-1} e^{-2ra} I(3ra, L+1) - \frac{27}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^{L-1} e^{-3ra} I(2ra, L+1) + 4\left(5^{L}\right) e^{-4ra} I(ra, L+1)\,. \qquad (5.336)$$

В частности, при L = 0, 1 и 2 имеем:

$$\frac{a(T,0)}{k\lambda} = \frac{1}{5}\left(12e^{-2ra} - 27e^{-3ra} + 20e^{-4ra} - 5e^{-A}\right),$$

$$\frac{a(T,1)}{k\lambda} = 4e^{-2ra} I(3ra,2) - \frac{27}{2}e^{-3ra} I(2ra,2) + 20e^{-4ra} I(ra,2)\,,$$

$$\frac{a(T,2)}{k\lambda} = \frac{20}{3}e^{-2ra} I(3ra,3) - \frac{135}{4}e^{-3ra} I(2ra,3) + 100e^{-4ra} I(ra,3)\,. \qquad (5.337)$$

Среднее по интервалу (0, T) значение коэффициента готовности:

$$K_{c}(T,L) = \frac{1}{A}(15\left(\frac{5}{3}\right)^{L}(1-e^{-2ra}) - 15\left(\frac{5}{2}\right)^{L}(1-e^{-3ra}) + \frac{1}{4}5^{L+1}(1-e^{-4ra}) +$$

$$+\sum_{i=0}^{L}\left(1 - 6\left(\frac{5}{3}\right)^{L-i} + 9\left(\frac{5}{2}\right)^{L-i} - 5^{L+1-i}\right) I(A, i+1))\,. \qquad (5.338)$$

Найдем теперь $k\lambda\tau_1^i(T,L)$, проинтегрировав вероятности в (5.327):

$$k\lambda\tau_1^0(T,L) = \sum_{i=0}^{L} I(A, i+1)\,, \qquad (5.339)$$

$$k\lambda\tau_1^1(T,L) = \frac{3}{4}5^{L+1}(1-e^{-4ra}) - 3\sum_{i=0}^{L}5^{L-i} I(A, i+1)\,,$$

$$k\lambda\tau_1^2(T,L) = \frac{1}{2}5^{L+1}(1-e^{-4ra}) - 2\sum_{i=0}^{L}5^{L-i} I(A, i+1)\,,$$

$$k\lambda\tau_1^3(T,L) = 6\left(\frac{5}{2}\right)^{L+1}(1-e^{-3ra}) - \frac{9}{2}5^{L+1}(1-e^{-4ra}) - \frac{18}{5}\sum_{i=0}^{L}\left(\left(\frac{5}{2}\right)^{L+1-i} - 5^{L+1-i}\right) I(A, i+1))\,,$$

$$k\lambda\tau_1^4(T,L) = 9\left(\frac{5}{3}\right)^{L+1}(1-e^{-2ra}) - 12\left(\frac{5}{2}\right)^{L+1}(1-e^{-3ra}) + \frac{9}{2}5^{L+1}(1-e^{-4ra}) -$$

$$-\frac{18}{5}\sum_{i=0}^{L}\left(\left(\frac{5}{3}\right)^{L+1-i} - 2\left(\frac{5}{2}\right)^{L+1-i} + 5^{L+1-i}\right) I(A, i+1)\,.$$

Суммирование вероятностей в (5.339) дает (5.332).

Коэффициент оперативной готовности:

$$K^{*}_{ог}(\tau,T,L)=P(T,L,S_0)(1-(1-e^{-r\beta})^2)(1-(1-e^{-r\beta})^3)+P(T,L,S_1)(1-(1-e^{-r\beta})^2)^2+$$

$$+P(T,L,S_2)e^{-r\beta}(1-(1-e^{-r\beta})^3)+P(T,L,S_3)e^{-2r\beta}(2-e^{-r\beta})+P(T,L,S_4)e^{-2r\beta}$$

$$K_{ог}(\tau,T,L)=\frac{1}{A}(k\lambda\tau_1^0(1-(1-e^{-r\beta})^2)(1-(1-e^{-r\beta})^3)+k\lambda\tau_1^1(1-(1-e^{-r\beta})^2)^2+$$

$$+k\lambda\tau_1^2e^{-r\beta}(1-(1-e^{-r\beta})^3)+k\lambda\tau_1^3e^{-2r\beta}(2-e^{-r\beta})+k\lambda\tau_1^4e^{-2r\beta}),\beta=\lambda\tau\,. \qquad (5.340)$$

При реконфигурации допускается переключение работоспособной резервной ветви одной подсистемы в другую подсистему для восстановления ее работоспособности. Очевидно, что в этом случае схема резервирования системы соответствует логике «два из пяти». Граф состояний содержит $L + 5$ состояний (см. рис. 5.8, *в*).

При отсутствии ЗИП вероятность отказа:

$$Q(T,0)=1-10e^{-2ra}+20e^{-3ra}-15e^{-4ra}+4e^{-5ra}\,. \qquad (5.341)$$

При наличии ЗИП вероятность отказа:

$$Q(T,L)=\int_0^T\frac{(k\lambda)^L x^{L-1}}{(L-1)!}e^{-k\lambda x}Q(T-x,0)dx=I(A,L+1)-$$

$$-10\left(\frac{5}{3}\right)^L e^{-2ra}I(3ra,L+1)+20\left(\frac{5}{2}\right)^L e^{-3ra}I(2ra,L+1)-3\left(5^{L+1}\right)e^{-4ra}I(ra,L+1)\,. \qquad (5.342)$$

При $L = 1$ и 2 имеем:

$$P(T,1)=\frac{50}{3}e^{-2ra}-50e^{-3ra}+75e^{-4ra}-\left(\frac{122}{3}+4A\right)e^{-A},A=5ra\,, \qquad (5.343)$$

$$P(T,2)=\frac{250}{9}e^{-2ra}-125e^{-3ra}+325e^{-4ra}-\left(\frac{2491}{9}+\frac{122}{3}A-2A^2\right)e^{-A}\,.$$

Вероятности возникновения в конце периода пополнения одной из деградированных работоспособных структур:

$$P(T,L,S_1)=5^{L+1}e^{-4ra}I(ra,L+1)\,,$$

$$P(T,L,S_2)=4\left(\frac{5}{2}\right)^L e^{-3ra}I(2ra,L+1)-4\left(5^{L+1}\right)e^{-4ra}I(ra,L+1)\,,$$

$$P(T,L,S_3)=6\left(\frac{5}{3}\right)^{L+1} e^{-2ra}I(3ra,L+1)-12\left(\frac{5}{2}\right)^{L+1} e^{-3ra}I(2ra,L+1)+$$

$$+6\left(5^{L+1}\right)e^{-4ra}I(ra,L+1)\,. \qquad (5.344)$$

Суммируя вероятности сохранения базовой структуры (5.213) и возникновения деградированных структур (5.344), получим ВБР:

$$P(T,L)=1-I(A,L+1)+10\left(\frac{5}{3}\right)^L e^{-2ra}I(3ra,L+1)-20\left(\frac{5}{2}\right)^L e^{-3ra}I(2ra,L+1)+$$

$$+3\left(5^{L+1}\right)e^{-4ra}I(ra,L+1)\,. \qquad (5.345)$$

Из (5.345) можно получить еще один вид формул для ВБР, эквивалентных (5.343):

$$P(T,1)=\frac{50}{3}e^{-2ra}I(3ra,2)-50e^{-3ra}I(2ra,2)+75e^{-4ra}I(ra,2)+(1+A)e^{-A}, \qquad (5.346)$$

$$P(T,2)=\frac{250}{9}e^{-2ra}I(3ra,2)-125e^{-3ra}I(2ra,2)+325e^{-4ra}I(ra,2)+(1+A+\frac{A^2}{2})e^{-A}.$$

Приращения ВБР от добавления одной (первой или *i*-й по счету запасной части) находят по формулам:

$$\Delta P_1(T)=\frac{20}{3}e^{-2ra}-30e^{-3ra}+60e^{-4ra}-e^{-A}\left(4A+\frac{110}{3}\right), \qquad (5.347)$$

$$\Delta P_i(T)=4\left(\frac{5}{3}\right)^i e^{-2ra}I(3ra,i)-12\left(\frac{5}{2}\right)^i e^{-3ra}I(2ra,i)+12\left(5^i\right)e^{-4ra}I(ra,i)-\frac{4A^i}{i!}e^{-A}. \qquad (5.348)$$

Не трудно убедиться, что при $i = 1$ из (5.348) получатся (5.347).

Чтобы найти среднюю наработку до отказа системы, представим (5.345) в виде смеси экспонент:

$$P(T,L)=10\left(\frac{5}{3}\right)^L e^{-2ra}-20\left(\frac{5}{2}\right)^L e^{-3ra}+3\left(5^{L+1}\right)e^{-4ra}+$$

$$+\sum_{i=0}^{L}\left(1-10\left(\frac{5}{3}\right)^{L-i}+20\left(\frac{5}{2}\right)^{L-i}-3\left(5^{L+1-i}\right)\right)\frac{A^i}{i!}e^{-A}. \qquad (5.349)$$

Интегрируя (5.349), найдем среднюю наработку в периоде пополнения:

$$k\lambda\tau_1(T,L)=25\left(\frac{5}{3}\right)^L(1-e^{-2ra})-\frac{100}{3}\left(\frac{5}{2}\right)^L(1-e^{-3ra})+\frac{3}{4}5^{L+2}(1-e^{-4ra})+$$

$$+\sum_{i=0}^{L}\left(1-10\left(\frac{5}{3}\right)^{L-i}+20\left(\frac{5}{2}\right)^{L-i}-3\left(5^{L+1-i}\right)\right)I(A,i+1). \qquad (5.350)$$

В частности, при $L = 1$ и 2 имеем:

$$k\lambda\tau_1(T,1)=\frac{125}{3}(1-e^{-2ra})-\frac{250}{3}(1-e^{-3ra})+\frac{375}{4}(1-e^{-4ra})-11,5I(A,1)-I(A,2),$$

$$k\lambda\tau_1(T,2)=\frac{125}{3}(1-e^{-2ra})-\frac{375}{4}(1-e^{-3ra})+\frac{625}{4}5^{L+1}(1-e^{-4ra})-$$

$$-\frac{1013}{12}I(A,1)-11,5I(A,2)-I(A,3). \qquad (5.351)$$

Среднее по интервалу $(0, T)$ значение коэффициента готовности находим по общей формуле (5.53).

Чтобы найти асимптотическую формулу для вероятности отказа, преобразуем (5.342) к виду:

$$P(T,L)=1-I(A,L+3)+6\left(\frac{5}{3}\right)^{L+1}e^{-2ra}I(3ra,L+3)-$$

$$-8\left(\frac{5}{2}\right)^{L+1}e^{-3ra}I(2ra,L+3)+3\left(5^{L+1}\right)e^{-4ra}I(ra,L+3). \qquad (5.352)$$

Разлагая (5.352) по степеням малого параметра A и оставляя главный член разложения, получим:

$$Q(T,L) \approx \frac{24}{125}\frac{A^{L+4}}{(L+4)!}, \quad k\lambda T_{cp}(T,L) \approx \frac{125}{24}\frac{(L+4)!}{A^{L+3}}. \tag{5.353}$$

Частота отказов:

$$\frac{a(T,L)}{k\lambda} = 4\left(\frac{5}{3}\right)^{L} e^{-2ra} I(3ra, L+1) - 12\left(\frac{5}{2}\right)^{L} e^{-3ra} I(2ra, L+1) + 12\left(5^{L}\right) e^{-4ra} I(ra, L+1). \tag{5.354}$$

В частности, при L = 0, 1 и 2 имеем:

$$\frac{a(T,0)}{k\lambda} = 4e^{-2ra}\left(1-e^{-ra}\right)^{3}, \tag{5.355}$$

$$\frac{a(T,1)}{k\lambda} = \frac{20}{3}e^{-2ra} I(3ra,2) - 30e^{-3ra} I(2ra,2) + 60e^{-4ra} I(ra,2),$$

$$\frac{a(T,2)}{k\lambda} = \frac{100}{9}e^{-2ra} I(3ra,3) - 75e^{-3ra} I(2ra,3) + 300e^{-4ra} I(ra,3).$$

Найдем теперь $k\lambda\tau_1^i(T,L)$, проинтегрировав вероятности в (5.344):

$$k\lambda\tau_1^0(T,L) = \sum_{i=0}^{L} I(A,i+1),$$

$$k\lambda\tau_1^1(T,L) = \frac{1}{4}5^{L+2}(1-e^{-4ra}) - \sum_{i=0}^{L} 5^{L+1-i} I(A,i+1),$$

$$k\lambda\tau_1^2(T,L) = \frac{20}{3}5^{L+1}(1-e^{-3ra}) - 5^{L+2}(1-e^{-4ra}) - 4\sum_{i=0}^{L}\left(\left(\frac{5}{2}\right)^{L+1-i} - 5^{L+1-i}\right) I(A,i+1),$$

$$k\lambda\tau_1^3(T,L) = 15\left(\frac{5}{3}\right)^{L+1}(1-e^{-2ra}) - 20\left(\frac{5}{2}\right)^{L+1}(1-e^{-3ra}) + \frac{15}{2}5^{L+1}(1-e^{-4ra}) -$$

$$-6\sum_{i=0}^{L}\left(\left(\frac{5}{3}\right)^{L+1-i} - 2\left(\frac{5}{2}\right)^{L+1-i} + 5^{L+1-i}\right) I(A,i+1)). \tag{5.356}$$

Коэффициент оперативной готовности:

$$K_{oc}^{*}(\tau,T,L) = e^{-2r\beta}(P(T,L,S_0)(10-20e^{-r\beta}+15e^{-2r\beta}-4e^{-3r\beta}) +$$

$$+P(T,L,S_1)(6-8e^{-r\beta}+3e^{-2r\beta}) + P(T,L,S_2)(3-2e^{-r\beta}) + P(T,L,S_3)), \tag{5.357}$$

$$K_{oc}(\tau,T,L) = \frac{1}{A}(k\lambda\tau_1^0(10-20e^{-r\beta}+15e^{-2r\beta}-4e^{-3r\beta}) + k\lambda\tau_1^1(6-8e^{-r\beta}+3e^{-2r\beta}) +$$

$$+k\lambda\tau_1^2 e^{-r\beta}(3-2e^{-r\beta}) + k\lambda\tau_1^3)e^{-2r\beta}, \beta = \lambda\tau. \tag{5.358}$$

Для проведения реконфигурации требуется, чтобы все пять ветвей структур были идентичны. Поэтому ее использование должно быть технически обосновано и подготовлено.

Расчеты и анализ, проведенные в *приложении 5* (примеры П5.17 и П5.18), позволяют сделать следующие выводы:

- наличие ЗИП в резервированной системе позволяет улучшить показатели надежности. Так добавление второй запасной части существенно снижает вероятность отказа: в 5 раз при $A = 1$ и в 15 раз при $A = 0{,}25$;
- интенсивность отказов при добавлении второй ЗЧ уменьшается не столь существенно как вероятность отказа: в 2–3 раза (в 3,04 при $k\lambda t = 1{,}2$ и в 2,04 при $k\lambda t = 2$);
- погрешность приближенной формулы для расчета ВБР на основе экспоненциальной модели по-прежнему велика внутри периода пополнения. Но для значений времени, кратных периоду пополнения, формула работает практически точно: погрешность не более одного-двух процентов;
- величина, обратная средней наработке до отказа, оказывается существенно меньше интенсивности отказов системы в конце периода пополнения: отношение $(\lambda T_{cp})^{-1}$ изменяется в пределах 0,34–0,41 при $L = 1$ и в пределах 0,25–0,33 при $L = 2$;
- приближенная формула для расчета ВБР, полученная на основе методики *главы 2*, имеет меньшую погрешность внутри периода пополнения, но существенно большую для значений времени, пропорциональных периоду пополнения.

Моделью П10 завершается рассмотрение одноранговых, двухранговых и одного подкласса последовательно-параллельно-последовательных трехранговых однородных структур. Далее в моделях П11–П13 будут проанализированы представители подкласса параллельно-последовательно-параллельных трехранговых однородных структур.

5.13. Дублирование структур типа П4 (модель П11)

В системе на первом уровне иерархии применяется параллельное соединение типа дублирования, на втором уровне последовательное соединение, а на третьем, внешнем уровне — снова параллельное соединение типа дублирования (см. рис. 5.7, *г*). Поскольку граф состояний имеет здесь достаточно сложный вид (см. рис. 5.8, *г*), для нахождения вероятности отказа и ВБР будем применять формулу (5.35).

Вероятность отказа при отсутствии ЗИП:

$$Q(T,0) = \left(1-(2-e^{-a})e^{-(r-1)a}\right)^2 =$$

$$= 1 - 4e^{-(r-1)a} + 2e^{-ra} + 4e^{-(k-2)a} - 4e^{-(k-1)a} + e^{-ka}, r = k/2\,. \qquad (5.359)$$

Вероятность отказов при наличии ЗИП:

$$Q(T,L) = \int_0^T \frac{(k\lambda)^L x^{L-1}}{(L-1)!} e^{-k\lambda x} Q(T-x,0)dx = I(A,L+1) - 4\left(\frac{k}{r+1}\right)^L e^{-(r-1)a} I(ra+a,L+1) +$$

$$+2^{L+1}e^{-ra}I(ra,L+1) + 4r^L e^{-(k-2)a} I(2a,L+1) - 4k^L e^{-(k-1)a} I(a,L+1) =$$

$$= I(A,L+2) - 4\left(\frac{k}{r+1}\right)^L e^{-(r-1)a} I(ra+a,L+2) +$$

$$+2^{L+1}e^{-ra}I(ra,L+2) + 4r^L e^{-(k-2)a} I(2a,L+2) - 4k^L e^{-(k-1)a} I(a,L+2)\,. \qquad (5.360)$$

Формулу (5.360) не трудно преобразовать к виду:

$$Q(T,L)=I(A,L+3)-4\left(\frac{k}{r+1}\right)^{L}e^{-(r-1)a}I(ra+a,L+3)+2^{L+1}e^{-ra}I(ra,L+3)+$$

$$+4r^{L}e^{-(k-2)a}I(2a,L+3)-4k^{L}e^{-(k-1)a}I(a,L+3)+\frac{(k-4)^2}{2k^2}\frac{A^{L+2}}{(L+2)!}e^{-A}=$$

$$=I(A,L+4)-4\left(\frac{k}{r+1}\right)^{L}e^{-(r-1)a}I(ra+a,L+4)+2^{L+1}e^{-ra}I(ra,L+4)+$$

$$+4r^{L}e^{-(k-2)a}I(2a,L+4)-4k^{L}e^{-(k-1)a}I(a,L+4)+$$

$$+\frac{(k-4)^2}{2k^2}\frac{A^{L+2}}{(L+2)!}e^{-A}+\frac{3(k-4)(k^2-6k+24)}{4k^2}\frac{A^{L+3}}{(L+3)!}e^{-A}. \qquad (5.361)$$

При $k=4$ формула (5.361) совпадает с (5.304) при $m=4$.

В частности, при $L=1$ и 2 имеем:

$$P(T,1)=\frac{4k}{r+1}e^{-(r-1)a}-4e^{-ra}-2ke^{-(k-2)a}+4ke^{-(k-1)a}+e^{-ka}\left(5-2k-ka-\frac{4k}{r+1}\right),$$

$$P(T,2)=\frac{4k^2}{(r+1)^2}e^{-(r-1)a}I(ra+a,2)-8e^{-ra}I(ra,2)-k^2e^{-(k-2)a}I(2a,2)+$$

$$+4k^2e^{-(k-1)a}+\left(1+A-\frac{A^2}{2}\right)e^{-A}. \qquad (5.362)$$

Приращения ВБР от добавления одной (первой или i-й по счету запасной части) находят по формулам:

$$\Delta P_1(T)=4\frac{r-1}{r+1}e^{-(r-1)a}-2e^{-ra}-2(k-2)e^{-(k-2)a}+4(k-1)e^{-(k-1)a}-e^{-A}\left(A+2(k-1)+4\frac{k-2}{k+2}\right), \qquad (5.363)$$

$$\Delta P_i(T)=4\frac{k-2}{k+2}\left(\frac{k}{r+1}\right)^{i-1}e^{-(r-1)a}I(ra+a,i)-2^ie^{-ra}I(ra,i)-$$

$$-2(k-2)r^{i-1}e^{-(k-2)a}I(2a,i)+4(k-1)k^{i-1}e^{-(k-1)a}I(a,i)-\frac{A^i}{i!}e^{-A}. \qquad (5.364)$$

Чтобы найти среднюю наработку до отказа системы, представим (5.345) в виде смеси экспонент:

$$P(T,L)=4\left(\frac{k}{r+1}\right)^{L}e^{-(r-1)a}-2^{L+1}e^{-ra}-4r^{L}e^{-(k-2)a}+4k^{L}e^{-(k-1)a}+$$

$$+\sum_{i=0}^{L}\left(1-4\left(\frac{k}{r+1}\right)^{L-i}+2^{L+1-i}+4r^{L-i}-4k^{L-i}\right)\frac{A^i}{i!}e^{-A}. \qquad (5.365)$$

Интегрируя в (5.365), получим среднюю наработку в периоде пополнения:

$$k\lambda\tau_1(T,L)=\frac{4k}{r-1}\left(\frac{k}{r+1}\right)^L(1-e^{-(r-1)a})-2^{L+2}(1-e^{-ra})-\frac{4k}{k-2}r^L(1-e^{-(k-2)a}+$$

$$+\frac{4k}{k-1}k^L(1-e^{-(k-1)a})+\sum_{i=0}^{L}\left(1-4\left(\frac{k}{r+1}\right)^{L-i}+2^{L+1-i}+4r^{L-i}-4k^{L-i}\right)I(A,i+1)\,. \qquad (5.366)$$

В частности, при L = 1 и 2 имеем:

$$k\lambda\tau_1(T,1)=\frac{16k^2}{k^2-4}(1-e^{-(r-1)a})-8(1-e^{-ra})-\frac{2k^2}{k-2}(1-e^{-(k-2)a})+$$

$$+\frac{4k^2}{k-1}(1-e^{-(k-1)a})+\left(5-2k-\frac{4k}{r+1}\right)(1-e^{-A})-I(A,2)\,, \qquad (5.367)$$

$$k\lambda\tau_1(T,2)=\frac{32k^3}{(k-2)(k+2)^2}(1-e^{-(r-1)a})-16(1-e^{-ra})-\frac{k^3}{k-2}(1-e^{-(k-2)a})+$$

$$+\frac{4k^3}{k-1}(1-e^{-(k-1)a})+\left(9-3k^2-\frac{4k^2}{(r+1)^2}\right)(1-e^{-A})+\left(5-2k-\frac{4k}{r+1}\right)I(A,2)-I(A,3)\,.$$

Среднюю наработку до отказа определяем с помощью общей формулы (5.12) или (5.53).

При увеличении периода пополнения средняя наработка до отказа стремится к значению:

$$k\lambda T_{cp}(T,\infty)=\frac{3k^2+3k-10}{(k-1)(k-2)}+L\,. \qquad (5.368)$$

При k = 4 формула (5.368) совпадает с (5.317) при m = 4.

Разлагая (5.361) по степеням малого параметра A, получим асимптотическую формулу для расчета вероятности отказа:

$$Q(T,L)\approx\frac{(k-4)^2}{2k^2}\frac{A^{L+2}}{(L+2)!}\,. \qquad (5.369)$$

При k = 4 надо использовать разложение формулы (5.304).

Частота отказов:

$$\frac{a(T,L)}{k\lambda}=\frac{2(k-2)}{k}\left(\frac{k}{r+1}\right)^L e^{-(r-1)a}I(ra+a,L+1)-2^L e^{-ra}I(ra,L+1)-$$

$$-2(k-2)r^{L-1}e^{-(k-2)a}I(2a,L+1)+4(k-1)k^{L-1}e^{-(k-1)a}I(a,L+1)+\frac{2(k-4)}{k}\frac{A^L}{L!}e^{-A}\,. \qquad (5.370)$$

В частности, при L = 1 и 2 имеем:

$$\frac{a(T,1)}{k\lambda}=\frac{4(k-2)}{k+2}e^{-(r-1)a}I(ra+a,2)-2e^{-ra}I(ra,2)-2(k-2)e^{-(k-2)a}I(2a,2)+$$

$$+4(k-1)e^{-(k-1)a}I(a,2)\,,$$

$$\frac{a(T,2)}{k\lambda}=\frac{8k(k-2)}{(k+2)^2}e^{-(r-1)a}I(ra+a,3)-4e^{-ra}I(ra,3)-k(k-2)e^{-(k-2)a}I(2a,3)+$$

$$+4k(k-1)e^{-(k-1)a}I(a,3)\,. \qquad (5.371)$$

Интенсивность отказов вычисляется по формуле (5.189).

Среднее по интервалу (0, T) значение коэффициента готовности находим по общей формуле (5.57).

По результатам расчетов (*приложение 5*, примеры П5.19 и П5.20) можно сделать следующие выводы:

- в данной системе восстановление с помощью ЗИП играет огромную роль. При отсутствии ЗИП даже при наличии внутреннего резервирования вероятность безотказной работы для $k\lambda t = k\lambda T = 4$ уменьшается до значения 0,52518. Но уже при одной ЗЧ она увеличивается до 0,66446, а при двух ЗЧ — до 0,78572. При $k\lambda t = k\lambda T = 2$ эти вероятности принимают значения 0,82095, 0,91681 и 0,96727. Если же $k\lambda T = 2$, а $k\lambda t = 4$, то вероятность безотказной работы равна 0,840536 при одной ЗЧ и 0,935609 при двух ЗЧ;
- интенсивность отказов при добавлении второй ЗЧ уменьшается примерно вдвое;
- средняя наработка до отказа при двух ЗЧ может увеличиться в несколько раз: при $A = 0{,}4$ в 10 раз, при $A = 2$ в 2,6 раза, а при $A = 4$ в 1,7 раза;
- весьма существенны изменения в значениях коэффициента готовности. При добавлении второй ЗЧ коэффициент готовности увеличивается от 0,97593 до 0,992297, если $A = 2$, и от 0,88685 до 0,940417, если $A = 4$.

5.14. Дублирование структур типа П6 (модель П12)

Система состоит из двух параллельных ветвей, каждая из которых имеет структуру модели П6 (при $r = 1$ и $k = 4r$) и содержит четыре элемента (см. рис. 5.7, *д*). Граф состояний системы приведен на рис. 5.8, *д*. Используя формулу (5.169), легко найдем вероятность отказа системы при отсутствии ЗИП:

$$Q(T,0)=\left(1-(2-e^{-a})^2e^{-2a}\right)^2=1-8e^{-2a}+8e^{-3a}+14e^{-4a}-32e^{-5a}+24e^{-6a}-8e^{-7a}+e^{-8a}\,. \qquad (5.372)$$

При наличии ЗИП вероятность отказа:

$$Q(T,L)=\int_0^T\frac{(k\lambda)^L x^{L-1}}{(L-1)!}e^{-k\lambda x}Q(T-x,0)dx=I(A,L+1)-8\left(\frac{4}{3}\right)^L e^{-2a}I(6a,L+1)+$$

$$+8\left(\frac{8}{5}\right)^L e^{-3a}I(5a,L+1)+14\left(2^L\right)e^{-4a}I(4a,L+1)-32\left(\frac{8}{3}\right)^L e^{-5a}I(3a,L+1)+$$

$$+24\left(4^L\right)e^{-6a}I(2a,L+1)-8^{L+1}e^{-7a}I(a,L+1)\,. \qquad (5.373)$$

В частности, при $L = 1$ и 2 имеем:

$$P(T,1)=e^{-A}(1+A)+\frac{32}{3}e^{-2a}I(6a,2)-\frac{64}{5}e^{-3a}I(5a,2)-28e^{-4a}I(4a,2)+$$

$$+\frac{256}{3}e^{-5a}I(3a,2)-96e^{-6a}I(2a,2)+64e^{-7a}I(a,2)\,,$$

$$P(T,2)=e^{-A}\left(1+A+\frac{A^2}{2}\right)+\frac{128}{9}e^{-2a}I(6a,3)-\frac{512}{25}e^{-3a}I(5a,3)-56e^{-4a}I(4a,3)+$$

$$+\frac{2048}{9}e^{-5a}I(3a,3)-384e^{-6a}I(2a,3)+512e^{-7a}I(a,3)\,. \qquad (5.374)$$

Приращения ВБР от добавления одной (первой или *i*-й по счету запасной части) находят по формулам:

$$\Delta P_1(T)=\int_0^T e^{-k\lambda(T-x)}dQ(x,0)=\frac{8}{3}e^{-2a}-\frac{24}{5}e^{-3a}-14e^{-4a}+\frac{160}{3}e^{-5a}-72e^{-6a}+56e^{-7a}-e^{-A}(21,2+A)$$

$$\Delta P_i(T)=\int_0^T\frac{(k\lambda)^{i-1}x^{i-2}}{(L-2)!}e^{-k\lambda x}\Delta P_1(T-x)dx=2\left(\frac{4}{3}\right)^i e^{-2a}I(6a,i)-$$

$$-3\left(\frac{8}{5}\right)^i e^{-3a}I(5a,i)-7\left(2^i\right)e^{-4a}I(4a,L+1)+20\left(\frac{8}{3}\right)^i e^{-5a}I(3a,i)-$$

$$-18\left(4^i\right)e^{-6a}I(2a,i)+7\left(8^i\right)e^{-7a}I(a,i)-\frac{A^i}{i!}e^{-A}\,. \qquad (5.375)$$

Чтобы найти среднюю наработку до отказа системы, представим ВБР в виде смеси экспонент:

$$P(T,L)=8\left(\frac{4}{3}\right)^L e^{-2a}-8\left(\frac{8}{5}\right)^L e^{-3a}-14\left(2^L\right)e^{-4a}+32\left(\frac{8}{3}\right)^L e^{-5a}-24\left(4^L\right)e^{-6a}+8^{L+1}e^{-7a}+$$

$$+\sum_{i=0}^{L}\left(1-8\left(\frac{4}{3}\right)^{L-i}+8\left(\frac{8}{5}\right)^{L-i}+7\left(2^{L+1-i}\right)-32\left(\frac{8}{3}\right)^{L-i}+6\left(4^{L+1-i}\right)-8^{L+1-i}\right)\frac{A^i}{i!}e^{-A}\,. \qquad (5.376)$$

Интегрируем (5.376) и находим среднюю наработку в периоде пополнения:

$$k\lambda\tau_1(T,L)=32\left(\frac{4}{3}\right)^L(1-e^{-2a})-\frac{64}{3}\left(\frac{8}{5}\right)^L(1-e^{-3a})-28\left(2^L\right)(1-e^{-4a})+$$

$$+\frac{256}{5}\left(\frac{8}{3}\right)^L(1-e^{-5a})-2\left(4^{L+2}\right)(1-e^{-6a})+\frac{8}{7}8^{L+1}(1-e^{-7a})+$$

$$+\sum_{i=0}^{L}\left(1-8\left(\frac{4}{3}\right)^{L-i}+8\left(\frac{8}{5}\right)^{L-i}+7\left(2^{L+1-i}\right)-32\left(\frac{8}{3}\right)^{L-i}+6\left(4^{L+1-i}\right)-8^{L+1-i}\right)I(A,i+1)\,. \qquad (5.377)$$

В частности, при L = 1 и 2 имеем:

$$k\lambda\tau_1(T,1)=\frac{128}{3}(1-e^{-2a})-\frac{512}{15}(1-e^{-3a})-56(1-e^{-4a})+\frac{2048}{15}(1-e^{-5a})-$$

$$-\frac{384}{3}(1-e^{-6a})+\frac{512}{7}(1-e^{-7a})-22,2(1-e^{-A})-I(A,2)\,,$$

$$k\lambda\tau_1(T,2)=\frac{512}{9}(1-e^{-2a})-\frac{4096}{75}(1-e^{-3a})-112(1-e^{-4a})+\frac{16384}{45}(1-e^{-5a})-$$

$$-\frac{1536}{3}(1-e^{-6a})+\frac{4096}{7}(1-e^{-7a})-\left(292+\frac{67}{225}\right)(1-e^{-A})-22,2I(A,2)-I(A,3)\,. \qquad (5.378)$$

Среднюю наработку до отказа определяем с помощью формулы (5.12) или (5.53).

При увеличении периода пополнения средняя наработка до отказа стремится к значению:

$$k\lambda T_{ср}(T,\infty) = 10 + \frac{1}{105} + L\,. \tag{5.379}$$

Чтобы получить асимптотическую формулу, представим (5.373) в виде:

$$Q(T,L) = I(A,L+3) - \frac{9}{2}\left(\frac{4}{3}\right)^{L+2} e^{-2a} I(6a,L+3) + \frac{25}{8}\left(\frac{8}{5}\right)^{L+2} e^{-3a} I(5a,L+3) +$$

$$+ \frac{7}{2}\left(2^{L+2}\right) e^{-4a} I(4a,L+3) - \frac{9}{2}\left(\frac{8}{3}\right)^{L+2} e^{-5a} I(3a,L+3) +$$

$$+ \frac{3}{2}\left(4^{L+2}\right) e^{-6a} I(2a,L+3) - \frac{1}{8} 8^{L+2} e^{-7a} I(a,L+3)\,. \tag{5.380}$$

Разлагая (5.380) по степеням малого параметра A, получим асимптотическую формулу для расчета вероятности отказа:

$$Q(T,L) \approx \frac{3}{128}\frac{A^{L+4}}{(L+4)!}\,. \tag{5.381}$$

Частоту отказов получим путем дифференцирования (5.373):

$$\frac{a(T,L)}{k\lambda} = 2\left(\frac{4}{3}\right)^{L} e^{-2a} I(6a,L+1) - 3\left(\frac{8}{5}\right)^{L} e^{-3a} I(5a,L+1) - 7\left(2^{L}\right) e^{-4a} I(4a,L+1) +$$

$$+ 20\left(\frac{8}{3}\right)^{L} e^{-5a} I(3a,L+1) - 18\left(4^{L}\right) e^{-6a} I(2a,L+1) + 7\left(8^{L}\right) e^{-7a} I(a,L+1)\,. \tag{5.382}$$

В частности, при $L = 1$ и 2 имеем:

$$\frac{a(T,1)}{k\lambda} = \frac{8}{3}e^{-2a} - \frac{24}{5}e^{-3a} - 14e^{-4a} + \frac{160}{3}e^{-5a} - 72e^{-6a} + 56e^{-7a} - (21{,}2 + A)e^{-A}\,,$$

$$\frac{a(T,2)}{k\lambda} = \frac{32}{9}e^{-2a} - \frac{192}{25}e^{-3a} - 28e^{-4a} + \frac{1280}{9}e^{-5a} - 288e^{-6a} + 448e^{-7a} -$$

$$-(270 + \frac{22}{225} + 21{,}2A + A^2/2)e^{-A}\,.$$

Интенсивность отказов вычисляется по формуле (5.189).

Среднее по интервалу (0, T) значение коэффициента готовности находим по общей формуле (5.57).

Для упрощения расчетов ВБР и других показателей надежности можно использовать двусторонние приближенные оценки, убирая или добавляя некоторые связи в структуре системы (см. рис. 5.7, *д*). Если добавить связь по вертикали между выходами элементов 2 и 5, то получим последовательное соединение двух структур типа «1 из 4» при $r = 1$ (модель П9). Это дает оценку сверху. Если убрать вертикальные связи между элементами 1 и 2, 5 и 6, то получим структуру модели П9 при $r = 2$. Это дает оценку снизу.

Рассмотрим сначала оценку сверху для ВБР (снизу для вероятности отказа). Для последовательного соединения двух структур типа «1 из 4» вероятность отказа при отсутствии ЗИП:

$$Q(T,0) = 1 - \left(1 - (1 - e^{-a})^4\right)^2 = 1 - 16e^{-2a} + 48e^{-3a} - 68e^{-4a} + 56e^{-5a} - 28e^{-6a} + 8e^{-7a} - e^{-8a}\,. \tag{5.383}$$

При наличии ЗИП вероятность отказов:

$$Q(T,L)=I(A,L+1)-16\left(\frac{4}{3}\right)^{L}e^{-2a}I(6a,L+1)+48\left(\frac{8}{5}\right)^{L}e^{-3a}I(5a,L+1)-$$

$$-68\left(2^{L}\right)e^{-4a}I(4a,L+1)+56\left(\frac{8}{3}\right)^{L}e^{-5a}I(3a,L+1)-$$

$$-28\left(4^{L}\right)e^{-6a}I(2a,L+1)+8^{L+1}e^{-7a}I(a,L+1). \qquad (5.384)$$

Средняя наработка в периоде пополнения:

$$k\lambda\tau_1(T,L)=64\left(\frac{4}{3}\right)^{L}(1-e^{-2a})-128\left(\frac{8}{5}\right)^{L}(1-e^{-3a})+136\left(2^{L}\right)(1-e^{-4a})-$$

$$-\frac{448}{5}\left(\frac{8}{3}\right)^{L}(1-e^{-5a})+\frac{7}{3}\left(4^{L+2}\right)(1-e^{-6a})-\frac{8}{7}8^{L+1}(1-e^{-7a})+$$

$$+\sum_{i=0}^{L}\left(1-16\left(\frac{4}{3}\right)^{L-i}+48\left(\frac{8}{5}\right)^{L-i}-34\left(2^{L+1-i}\right)+56\left(\frac{8}{3}\right)^{L-i}-7\left(4^{L+1-i}\right)+8^{L+1-i}\right)I(A,i+1). \qquad (5.385)$$

Частота отказов:

$$\frac{a(T,L)}{k\lambda}=4\left(\frac{4}{3}\right)^{L}e^{-2a}I(6a,L+1)-18\left(\frac{8}{5}\right)^{L}e^{-3a}I(5a,L+1)+34\left(2^{L}\right)e^{-4a}I(4a,L+1)-$$

$$-35\left(\frac{8}{3}\right)^{L}e^{-5a}I(3a,L+1)+21\left(4^{L}\right)e^{-6a}I(2a,L+1)-7\left(8^{L}\right)e^{-7a}I(a,L+1). \qquad (5.386)$$

Чтобы получить асимптотическую формулу, представим (5.384) в виде:

$$Q(T,L)=I(A,L+3)-9\left(\frac{4}{3}\right)^{L+2}e^{-2a}I(6a,L+3)+\frac{75}{4}\left(\frac{8}{5}\right)^{L+2}e^{-3a}I(5a,L+3)-$$

$$-17\left(2^{L+2}\right)e^{-4a}I(4a,L+3)+\frac{63}{8}\left(\frac{8}{3}\right)^{L+2}e^{-5a}I(3a,L+3)-$$

$$-\frac{7}{4}\left(4^{L+2}\right)e^{-6a}I(2a,L+3)+\frac{1}{8}8^{L+2}e^{-7a}I(a,L+3). \qquad (5.387)$$

Разлагая (5.387) по степеням малого параметра A, получим асимптотическую формулу для расчета вероятности отказа:

$$Q(T,L)\approx\frac{3}{256}\frac{A^{L+4}}{(L+4)!}. \qquad (5.388)$$

Сравнивая (5.388) и (5.381), видим, что нижняя оценка дает вдвое меньшее значение вероятности отказа, но сохраняет порядок величины.

Рассмотрим теперь оценку снизу для ВБР (сверху для вероятности отказа).

Из формулы (5.304) при $r = 2$ имеем:

$$P(T,L) = 1 - I(A,L+1) + 4\left(\frac{4}{3}\right)^L e^{-2a} I(6a,L+1) - 3\left(2^{L+1}\right) e^{-4ra} I(4a,L+1) +$$

$$+4^{L+1} e^{-6a} I(2a,L+1), A = 8a. \quad (5.389)$$

В частности, при $L = 1$ и 2 имеем:

$$P(T,1) = (1+A)e^{-A} + \frac{16}{3} e^{-2a} I(6a,2) - 12e^{-4a} I(4a,2) + 16e^{-6a} I(2a,2), A = 8a, \quad (5.390)$$

$$P(T,2) = \left(1 + A + \frac{A^2}{2}\right) e^{-A} + \frac{64}{9} e^{-2a} I(6a,3) - 24e^{-4a} I(4a,3) + 64e^{-6a} I(2a,3).$$

Асимптотическая формула:

$$Q(T,L) \approx \frac{3}{32} \frac{A^{L+4}}{(L+4)!}. \quad (5.391)$$

Эта формула дает вдвое большее значение, чем (5.381).

Средняя наработка в периоде пополнения:

$$k\lambda\tau_1(T,L) = 16\left(\frac{4}{3}\right)^L (1 - e^{-2a}) - 12\left(2^L\right)(1 - e^{-4a}) + \frac{1}{3}\left(4^{L+2}\right)(1 - e^{-6a}) +$$

$$+\sum_{i=0}^{L}\left(1 - 4\left(\frac{4}{3}\right)^{L-i} + 3\left(2^{L+1-i}\right) - 4^{L+1-i}\right) I(A,i+1). \quad (5.392)$$

Частота отказов:

$$\frac{a(T,L)}{k\lambda} = \left(\frac{4}{3}\right)^L e^{-2a} I(6a,L+1) - 3\left(2^L\right) e^{-4a} I(4a,L+1) + 3\left(4^L\right) e^{-6a} I(2a,L+1). \quad (5.393)$$

По результатам расчетов (*приложение 5*, примеры П5.21 и П5.22) можно сделать следующие выводы:

- в данной системе восстановление с помощью ЗИП играет огромную роль. При отсутствии ЗИП даже при наличии внутреннего резервирования вероятность безотказной работы для $k\lambda t = k\lambda T = 4$ уменьшается до значения 0,918394. Но уже при одной ЗЧ она увеличивается до 0,956384, а при двух ЗЧ — до 0,978731. При $k\lambda t = k\lambda T = 8$ эти вероятности принимают значения 0,591051, 0,678705 и 0,759386. Если же $k\lambda T = 4$, а $k\lambda t = 8$, то вероятность безотказной работы равна 0,914671 при одной ЗЧ и 0,957914 при двух ЗЧ;
- не столь существенны изменения в значениях коэффициента готовности. При добавлении второй ЗЧ коэффициент готовности увеличивается от 0,990789 до 0,996106, если $A = 4$, и от 0,912673 до 0,942750, если $A = 8$;
- интенсивность отказов при добавлении второй ЗЧ уменьшается в большей степени при малых A и в меньшей степени при больших A: в 3,5 раза при $A = 1{,}6$ и всего на 21 % при $A = 8$;

- средняя наработка до отказа при двух ЗЧ может увеличиться на десятки процентов и в несколько раз: при $A = 4$ в 2 раза, при $A = 8$ на 38 %;
- переход от раздельного к общему дублированию заметно ухудшает показатели надежности. Реконфигурация не может в полной мере компенсировать удаление запасной части из состава ЗИП.

5.15. Дублирование структур типа П7 (модель П13)

В системе на первом уровне иерархии применяется параллельное соединение типа мажорирования по схеме «два из трех», на втором уровне последовательное соединение, а на третьем, внешнем уровне — снова параллельное соединение типа дублирования (см. рис. 5.7, *е*). Структура данной системы относится к классу параллельно-последовательно-параллельных структур. Граф состояний системы приведен на рис. 5.8, *е*. Для нахождения вероятности отказа и ВБР будем применять формулу (5.35).

Вероятность отказа при отсутствии ЗИП находят по формуле:

$$Q(T,0) = \left(1-(3-2e^{-a})^2 e^{-4a}\right)^2 = 1-18e^{-4a}+24e^{-5a}-8e^{-6a}+81e^{-8a}-$$

$$-216e^{-9a}+216e^{-10a}-96e^{-11a}+16e^{-12a}. \qquad (5.394)$$

Вероятность отказа при наличии ЗИП:

$$Q(T,L) = I(A,L+1)-18\left(\frac{3}{2}\right)^L e^{-4a} I(8a,L+1)+24\left(\frac{12}{7}\right)^L e^{-5a} I(7a,L+1)-$$

$$-8\left(2^L\right)e^{-6a} I(6a,L+1)+3^{L+4} e^{-8a} I(4a,L+1)-54\left(4^{L+1}\right)e^{-9a} I(3a,L+1)+$$

$$+6^{L+3} e^{-10a} I(2a,L+1)-8\left(12^{L+1}\right)e^{-11a} I(a,L+1). \qquad (5.395)$$

В частности, при $L = 1$ и 2 имеем:

$$P(T,1) = 27e^{-4a}-\frac{288}{7}e^{-5a}+16e^{-6a}-243e^{-8a}+864e^{-9a}-1296e^{-10a}+$$

$$+1152e^{-11a}-\left(478-\frac{1}{7}+16A\right)e^{-A}, A = 12a,$$

$$P(T,2) = \frac{81}{2}e^{-4a}-\frac{3456}{49}e^{-5a}+32e^{-6a}-729e^{-8a}+3456e^{-9a}-7776e^{-10a}+$$

$$+13824e^{-11a}-\left(8776-\frac{3}{98}+(478-\frac{1}{7}\right)A+8A^2)e^{-A}. \qquad (5.396)$$

Приращения ВБР от добавления одной (первой или *i*-й по счету запасной части) находят по формулам:

$$\Delta P_1(T) = \int_0^T e^{-k\lambda(T-x)} dQ(x,0) = 9e^{-4a}-\frac{120}{7}e^{-5a}+8e^{-6a}-162e^{-8a}+$$

$$+648e^{-9a}-1080e^{-10a}+1056e^{-11a}-\left(462-\frac{1}{7}+16A\right)e^{-A},$$

$$\Delta P_i(T)=\int_0^T\frac{(k\lambda)^{i-1}x^{i-2}}{(L-2)!}e^{-k\lambda x}\Delta P_1(T-x)dx=9\left(\frac{3}{2}\right)^{i-1}e^{-4a}I(8a,i)-10\left(\frac{12}{7}\right)^{i}e^{-5a}I(7a,i)+$$

$$+2^{i+2}e^{-6a}I(6a,i)-2\left(3^{L+3}\right)e^{-8a}I(4a,i)+162\left(4^{i}\right)e^{-9a}I(3a,i)-$$

$$-5\left(6^{i+2}\right)e^{-10a}I(2a,i)+88\left(12^{i}\right)e^{-11a}I(a,i)-16\frac{A^i}{i!}e^{-A}. \qquad (5.397)$$

Чтобы найти среднюю наработку, представим ВБР в виде смеси экспонент:

$$P(T,L)=18\left(\frac{3}{2}\right)^{L}e^{-4a}-24\left(\frac{12}{7}\right)^{L}e^{-5a}+8\left(2^{L}\right)e^{-6a}-3^{L+4}e^{-8a}+$$

$$+54\left(4^{L+1}\right)e^{-9a}-6^{L+3}e^{-10a}+8\left(12^{L+1}\right)e^{-11a}+$$

$$+\sum_{i=0}^{L}\left(1-18\left(\frac{3}{2}\right)^{L-i}+24\left(\frac{12}{7}\right)^{L-i}-2^{L+3-i}+3^{L+4-i}-54\left(4^{L+1-i}\right)+6^{L+3-i}-8\left(12^{L+1-i}\right)\right)\frac{A^i}{i!}e^{-A}. \qquad (5.398)$$

Интегрируем (5.376) и находим среднюю наработку в периоде пополнения:

$$k\lambda\tau_1(T,L)=36\left(\frac{3}{2}\right)^{L+1}(1-e^{-4a})-\frac{168}{5}\left(\frac{12}{7}\right)^{L+1}(1-e^{-5a})+2^{L+4}(1-e^{-6a})-\frac{1}{2}3^{L+5}(1-e^{-8a})+$$

$$+18\left(4^{L+2}\right)(1-e^{-9a})-0,2\left(6^{L+4}\right)(1-e^{-10a})+\frac{8}{11}\left(12^{L+2}\right)(1-e^{-11a})+$$

$$+\sum_{i=0}^{L}\left(1-18\left(\frac{3}{2}\right)^{L-i}+24\left(\frac{12}{7}\right)^{L-i}-2^{L+3-i}+3^{L+4-i}-54\left(4^{L+1-i}\right)+6^{L+3-i}-8\left(12^{L+1-i}\right)\right)I(A,i+1). \qquad (5.399)$$

В частности, при L = 1 и 2 имеем:

$$k\lambda\tau_1(T,1)=81I(4a,1)-\frac{3456}{35}I(5a,1)+32I(6a,1)-\frac{729}{2}I(8a,1)+$$

$$+1152I(9a,1)-1555,2I(10a,1)+\frac{13824}{11}I(11a,1)-\left(478-\frac{1}{7}\right)I(A,1)-16I(A,2),$$

$$k\lambda\tau_1(T,2)=\frac{243}{2}I(4a,1)-\frac{36288}{245}I(5a,1)+64I(6a,1)-\frac{2187}{2}I(8a,1)+$$

$$+4608I(9a,1)-9331,2I(10a,1)+\frac{165888}{11}I(11a,1)-\left(8776-\frac{3}{98}\right)I(A,1)-$$

$$-\left(136-\frac{1}{7}\right)I(A,2)-16I(A,3). \qquad (5.400)$$

При увеличении периода пополнения средняя наработка до отказа стремится к значению:

$$k\lambda T_{cp}(T,\infty)=\frac{927}{110}+L. \qquad (5.401)$$

Чтобы получить асимптотическую формулу, преобразуем (5.395) к виду:

$$Q(T,L) = I(A,L+3) - 8\left(\frac{3}{2}\right)^{L+2} e^{-4a} I(8a,L+3) + \frac{49}{6}\left(\frac{12}{7}\right)^{L+2} e^{-5a} I(7a,L+3) -$$

$$-2^{L+3} e^{-6a} I(6a,L+3) + 3^{L+4} e^{-8a} I(4a,L+3) - \frac{27}{2}\left(4^{L+2}\right) e^{-9a} I(3a,L+3) +$$

$$+6^{L+3} e^{-10a} I(2a,L+3) - 8\left(12^{L+1}\right) e^{-11a} I(a,L+3). \qquad (5.402)$$

Разлагая (5.402) по степеням A, получим:

$$Q(T,L) \approx \frac{1}{24}\frac{A^{L+4}}{(L+4)!}. \qquad (5.403)$$

Частота отказов:

$$\frac{a(T,L)}{k\lambda} = 3\left(\frac{3}{2}\right)^{L} e^{-4a} I(8a,L+1) - 10\left(\frac{12}{7}\right)^{L} e^{-5a} I(7a,L+1) +$$

$$+2^{L+2} e^{-6a} I(6a,L+1) - 2\left(3^{L+3}\right) e^{-8a} I(4a,L+1) + 162\left(4^{L}\right) e^{-9a} I(3a,L+1) -$$

$$-5\left(6^{L+2}\right) e^{-10a} I(2a,L+1) + 88\left(12^{L}\right) e^{-11a} I(a,L+1). \qquad (5.404)$$

В частности, при $L = 1$ и 2 имеем:

$$\frac{a(T,1)}{k\lambda} = 9e^{-4a} - \frac{120}{7}e^{-5a} + 8e^{-6a} - 162e^{-8a} + 648e^{-9a} - 1080e^{-10a} +$$

$$+1056e^{-11a} - \left(462 - \frac{1}{7} + 16A\right)e^{-A},$$

$$\frac{a(T,2)}{k\lambda} = \frac{27}{2}e^{-4a} - \frac{1440}{49}e^{-5a} + 16e^{-6a} - 486e^{-8a} + 2592e^{-9a} - 6480e^{-10a} +$$

$$+12672e^{-11a} - (8298 + \frac{11}{98} + \left(462 - \frac{1}{7}\right)A + 8A^2)e^{-A}. \qquad (5.405)$$

Интенсивность отказов вычисляется по формуле (5.189). Среднее по интервалу (0, T) значение коэффициента готовности находим по общей формуле (5.57).

По результатам расчетов (*приложение 5*, пример П5.23) можно сделать следующие выводы:

- в данной системе восстановление с помощью ЗИП значительно улучшает показатели безотказности. При отсутствии ЗИП даже при наличии внутреннего резервирования вероятность безотказной работы для $k\lambda t = k\lambda T = 6$ уменьшается до значения 0,67754. Но уже при одной ЗЧ она увеличивается до 0,774039, а при двух ЗЧ — до 0,852333. При $k\lambda t = k\lambda T = 12$ эти вероятности принимают значения 0,17898, 0,238359 и 0,309446. Если же $k\lambda T = 6$, а $k\lambda t = 12$, то вероятность безотказной работы равна 0,599136 при одной ЗЧ и 0,726472 при двух ЗЧ;
- не столь существенны изменения в значениях коэффициента готовности. При добавлении второй ЗЧ коэффициент готовности увеличивается от 0,94345 до 0,968066, если $A = 6$, и от 0,71364 до 0,77118, если $A = 12$;

- интенсивность отказов при добавлении второй ЗЧ уменьшается в большей степени при малых A и в меньшей степени при больших A: в 2,5 раза при $A = 2{,}4$ и всего на 8 % при $A = 12$;
- средняя наработка до отказа при двух ЗЧ может увеличиться на десятки процентов и в несколько раз: при $A = 2{,}4$ в 3 раза, при $A = 12$ на 19 %.

5.16. Неоднородные системы с независимыми однородными подсистемами

Неоднородные системы с независимыми однородными подсистемами образуют обширный класс систем, надежность которых можно рассчитать с помощью ранее рассмотренных моделей. Для расчета используется схема Бернулли, которая предполагает многошаговую декомпозицию задачи: от внешнего соединения (последовательного или параллельного) к соединению следующего, более низкого уровня, и так до однородной подсистемы, имеющей собственный запас элементов в комплекте ЗИП-О.

В качестве примера применения процедуры декомпозиции рассмотрим две системы со структурой в виде параллельного соединения последовательных подсистем. Их особенностью является то, что элементы первого типа, входящие в одну из подсистем, не входят в другую подсистему. Это обеспечивает независимость подсистем по восстановлению работоспособности.

5.16.1. Неоднородная дублированная система с однородными ветвями (модель П2-Н)

Система состоит из двух параллельных ветвей элементов (рис. 5.10, *а*). Одна ветвь представляет собой последовательное соединение k_1 элементов первого типа с интенсивностью отказов λ_1. Вторая ветвь также представляет собой последовательное соединение k_2 элементов второго типа с интенсивностью отказов λ_2. Для каждого типа элементов имеется собственный запас элементов в комплекте ЗИП-О: в комплект входят L_1 и L_2 запасных частей с периодом пополнения T_1 и T_2 соответственно. Пример структуры типа П2-Н приведен на рис. 5.10, *б*. Анализ надежности этой структуры выполнен в примере П5.25 *(см. приложение 5)*.

Найдем сначала вероятность безотказной работы системы в течение времени $t < \min(T_1, T_2)$. Используя схему независимых событий, получим:

$$P(t, L_1, L_2) = 1 - (1 - P_1(t, T_1, L_1))(1 - P(t, T_2, L_2)), t < \min(T_1, T_2). \qquad (5.406)$$

Для нахождения ВБР отдельных подсистем используем формулы (5.3). При $t \ge \min(T_1, T_2)$ ВБР отдельных подсистем находим по формулам:

$$P_i(t, T_i, L_i) = P_i^{m_i}(A_i, L_i) P_i(k_i\lambda_i(t - m_i T_i), L_i), m_i = \left[\frac{t}{T_i}\right], A_i = k_i\lambda_i T_i, i = 1; 2, \qquad (5.407)$$

где $[x]$ — целая часть x, а вероятность $P_i(A_i, L_i)$ рассчитывают по формуле (5.2).

Приближенный расчет ВБР можно проводить и с помощью экспоненциальной модели. Используя формулы (5.14) и (5.19), получим:

$$P_{пр,1}(t, L_1, L_2) \approx 1 - (1 - \exp(-t / T_{ср1}))(1 - \exp(-t / T_{ср2})). \qquad (5.408)$$

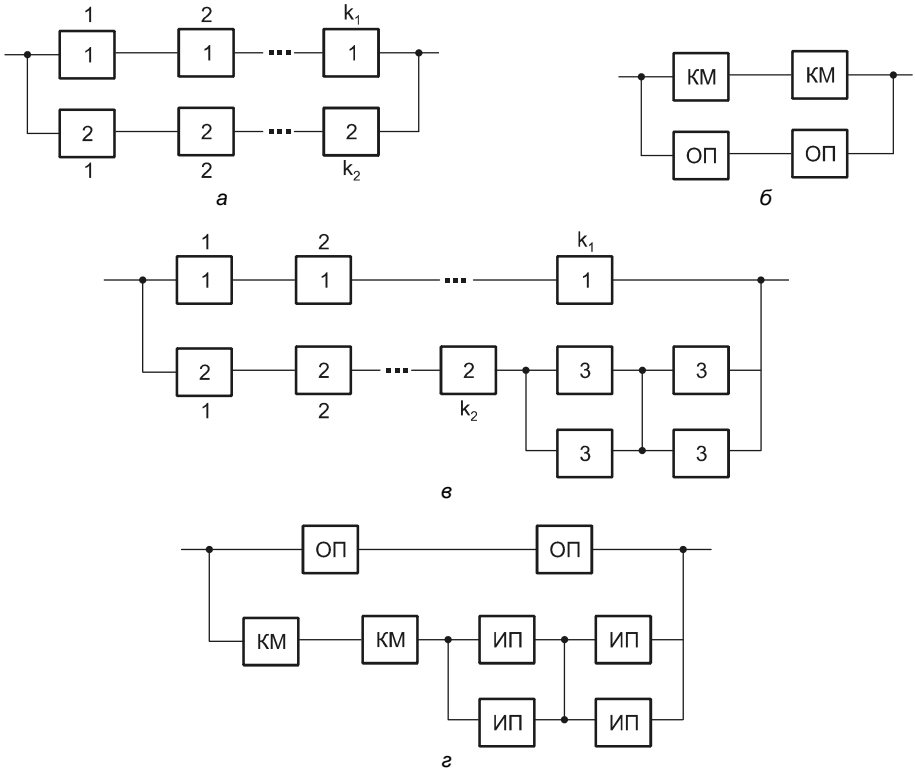


Рис. 5.10. Структурные схемы неоднородных резервированных систем: *а* — неоднородная дублированная структура с однородными ветвями (модель П2-Н); *б* — пример структуры П2-Н; *в* — неоднородная дублированная структура с неоднородными ветвями (модель П2-НН); *г* — пример структуры П2-НН

Расчет средней наработки до отказа ветви следует проводить по формуле (5.14). Далее рассмотрим частный случай, когда $L_1 = L_2 = 1$, $T_1 = T_2 = T$. Тогда точное значение ВБР рассчитывают по формуле:

$$P(T,1,1) = 1-(1-P_1(A_1,1))(1-P_2(A_2,1)) =$$

$$= (1+A_1)e^{-A_1} + (1+A_2)e^{-A_2} - (1+A+A_1A_2)e^{-A}, A = A_1 + A_2 . \qquad (5.409)$$

Интегрируя (5.409), найдем среднюю наработку системы в периоде пополнения:

$$k\lambda\tau_1(T) = \frac{A}{A_1}(I(A_1,1)+I(A_1,2)) + \frac{A}{A_2}(I(A_2,1)+I(A_2,2)) -$$

$$-I(A,1)-I(A,2)-\frac{2A_1A_2}{A^2}I(A,3), k\lambda = k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 . \qquad (5.410)$$

Среднюю наработку до отказа системы определяем с помощью общей формулы (5.12) или (5.53).

При увеличении периода пополнения средняя наработка до отказа системы стремится к значению:

$$k\lambda T_{cp}(T,\infty) = 2\left(\frac{A^2}{A_1A_2} - 1 - \frac{A_1A_2}{A^2}\right). \qquad (5.411)$$

При $A_1 = A_2$ формула (5.411) дает значение 11/2 = 5,5, что совпадает с результатом модели П2.

Используя среднюю наработку до отказа и экспоненциальную модель надежности, можно найти еще одну приближенную формулу для расчета ВБР:

$$P_{пр2}(t, L_1, L_2) \approx \exp(-k\lambda t / k\lambda T_{ср}(T, L_1, L_2))), \qquad (5.412)$$

$$k\lambda T_{ср}(T, L_1, L_2) = k\lambda\tau_1(T, L_1, L_2) / (1 - P(T, L_1, L_2)).$$

При $L_1 = L_2 = 1$ среднюю наработку в периоде пополнения следует рассчитывать по формуле (5.410).

По результатам расчетов (*приложение 5*, примеры П5.24 и П5.25) можно сделать следующие выводы:

- внутреннее резервирование не позволяет достичь высоких значений ВБР. При $A = 1$ вероятность равна 0,85125, а при $A = 2$ всего 0,61519. Введение двух запасных частей (около 22 % от основной аппаратуры) увеличивает вероятность до значений 0,9925 и 0,93549 соответственно;
- две приближенные формулы для расчета ВБР имеют различные характеристики точности. Формула (5.408) имеет меньшую погрешность, чем формула (5.412), внутри периода пополнения. А в конце периода пополнения, напротив, меньшую погрешность имеет формула (5.412);
- средняя наработка до отказа зависит от периода пополнения запасов не линейно. При увеличении периода пополнения вдвое (от 0,5 года до 1 года) средняя наработка уменьшается в четыре раза (от 133,1 до 30,5);
- из примера П5.26 следует один полезный отрицательный результат. Ранее было показано, что функция вероятности безотказной работы последовательной системы в точках, кратных периоду пополнения, хорошо аппроксимируется с помощью экспоненциального распределения с параметром $\Lambda = 1/T_{ср}$. Для дублированной системы из двух последовательных ветвей ВБР рассчитывают по формуле (5.408). Если проинтегрировать эту вероятность и найти приближенное значение средней наработки до отказа, то получим, что приближенное значение средней наработки до отказа отличается от точного значения на два порядка. Следовательно, экспоненциальную аппроксимацию моделей надежности ветвей проводить нельзя и надо пользоваться точной формулой для расчета средней наработки системы до отказа или приближенной формулой (5.14, а). Погрешность этой формулы очень мала (десятые и сотые доли процента).

5.16.2. Неоднородная дублированная система с неоднородными ветвями (модель П2-НН)

Система состоит из двух параллельных ветвей, одна из которых представляет собой последовательное соединение k_1 элементов первого типа с интенсивностью отказов λ_1. Во второй ветви последовательно соединены k_2 элементов второго типа с интенсивностью отказов λ_2 и $k_3 = 4r_3$ элементов третьего типа с интенсивностью отказов λ_3, работающие по схеме модели П6 (см. рис. 5.10, *в*). Комплект ЗИП-О содержит три типа ЗЧ в количестве L_1, L_2, L_3 с периодами пополнения T_1, T_2 и T_3 соответственно. Пример структуры типа П2-НН приведен на рис. 5.10, *г*. Вероятность безотказной работы системы находим по схеме независимых событий:

$$P(t, L_1, L_2, L_3) = 1 - (1 - P_1(t, T_1, L_1))(1 - P(t, T_2, L_2)P(t, T_3, L_3)), \qquad (5.413)$$

где вероятности определяют по формулам (5.2), (5.3) и (5.171).

Среднюю наработку можно найти по формуле (5.14, а), а значение ВБР на основе экспоненциального приближения по формулам:

$$P_{пр1}(t, L_1, L_2, L_3) = 1 - (1 - e^{-t/T_{ср1}(L_1)})(1 - e^{-t(1/T_{ср2}(L_2)+1/T_{ср3}(L_3))}), \quad (5.414)$$

$$P_{пр2}(t, L_1, L_2, L_3) = \exp(-k\lambda t / k\lambda T_{ср}(T, L_1, L_2, L_3))) . \quad (5.415)$$

Анализ надежности этой структуры выполнен в *приложении 5* (примеры П5.26 и П5.27). По результатам расчетов можно сделать следующие выводы:

- использование ЗИП позволило существенно улучшить показатели безотказности: так при $L_1 = L_2 = L_3 = 1$, $A_1 = 0{,}4$, $A_2 = 0{,}6$, $A_3 = 0{,}5$ ВБР увеличивается от 0,84629 до 0,99227, а при $A_1 = 0{,}8$, $A_2 = 1{,}2$, $A_3 = 1{,}0$ от 0,59935 до 0,93209;
- вторая приближенная оценка ВБР дает лучшую точность, чем первая, при значениях времени, кратных периоду пополнения. Однако для других значений, например, в начале периода пополнения, она дает погрешность, в несколько раз превосходящую погрешность первой оценки. Здесь существенно большая точность оценки $P_{пр2}$ по сравнению с $P_{пр1}$ в конце периода пополнения связана с тем, что в ней используется значение средней наработки, рассчитанное по приближенной формуле (5.14, а);
- средняя наработка до отказа с увеличением периода пополнения падает не линейно. Так при увеличении периода в 10 раз (A увеличивается от 0,08 до 0,8, $L_1 = L_2 = L_3 = 1$) средняя наработка уменьшается в 346 раз.

Рассмотрим далее несколько моделей надежности (П14–П16) второго класса структур, в котором имеются следующие признаки:

- основные элементы имеют последовательно-параллельное многоуровневое соединение (двух, трех и более);
- однотипные элементы могут входить в две или более резервированных групп одного и того же уровня (например, в две различные резервированные группы, соединенные между собой последовательно, или в две последовательные ветви, соединенные параллельно).

Общий подход к анализу надежности таких систем состоит в том, что сложное событие «безотказная работа системы в периоде пополнения» разлагается на полную группу несовместных событий, в каждом из которых возникает одна из структур первого класса с известными моделями надежности. Другой подход состоит в получении двусторонних приближенных оценок точного значения ВБР. Каждая из оценок находится с помощью моделей первого класса.

5.17. Общее дублирование неоднородных систем (модель П14)

Система состоит из двух одинаковых параллельно соединенных ветвей (рис. 5.11, *а*). В каждой ветви последовательно соединены элементы N типов по r_i элементов i-го типа. Всего в системе имеется $k_i = 2r_i$ элементов i-го типа. В комплекте ЗИП-О имеется L_i запасных частей i-го типа.

Рассмотрим сначала случай $N = 2$. Тогда ВБР системы можно представить в виде трех слагаемых:

$$P(t, L_1, L_2) = P_0 + P_1 + P_2 . \quad (5.416)$$

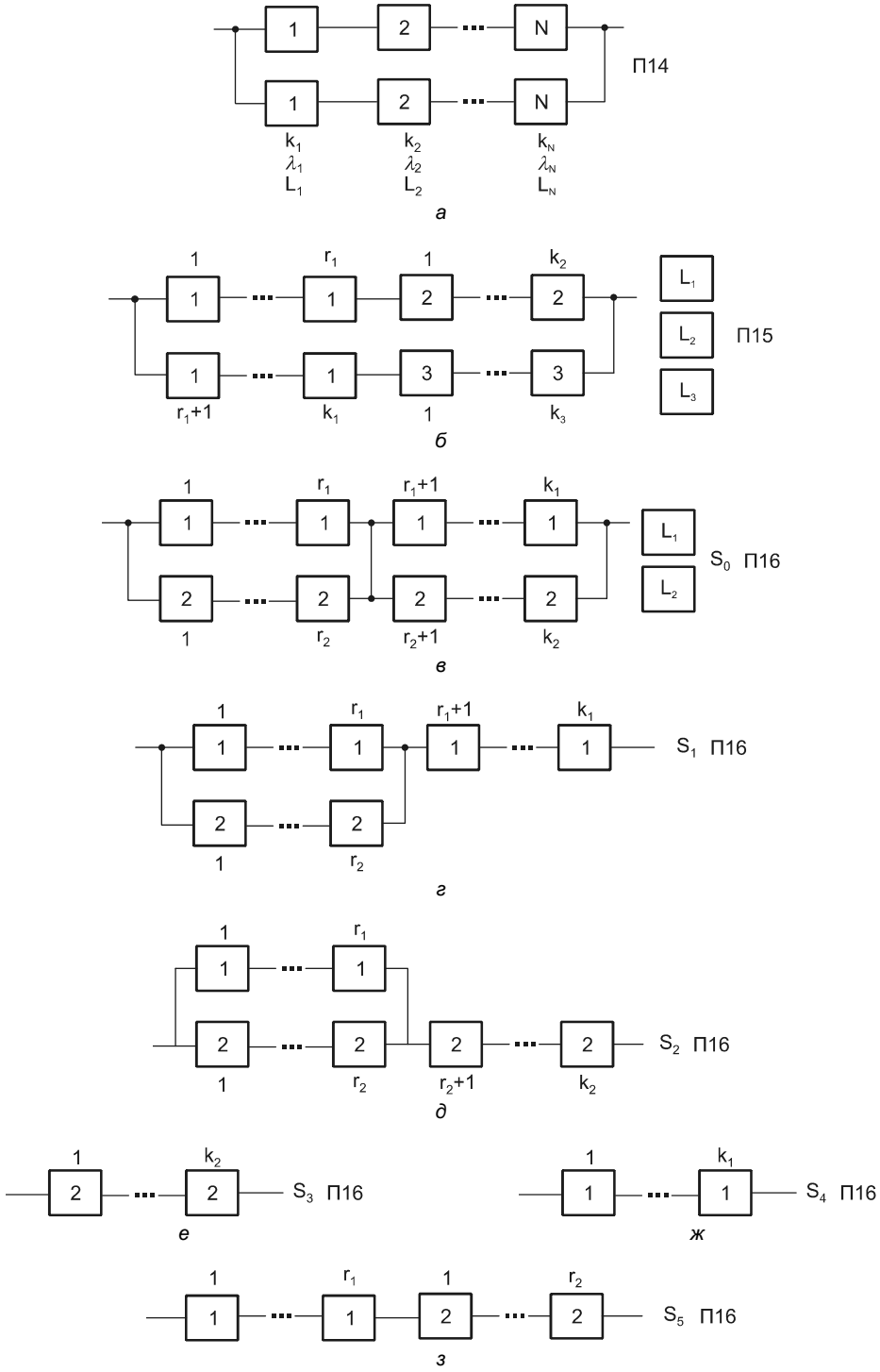


Рис. 5.11. Структурные схемы неоднородных систем: *а* — модель П14; *б* — модель П15; *в* — модель П16, базовая структура; *г–з* — модель П16, деградированные структуры S_1–S_5

Вероятность P_0 есть вероятность того, что за время T по каждому типу элементов число отказов не будет превышать числа запасных частей в комплекте ЗИП. При этом в момент T в системе сохранится базовая структура S_0. Вероятности P_1 и P_2 есть вероятности того, что к моменту T в системе произойдет $L_i + 1$ отказов i-го типа ($i = 1, 2$) и не более L_j отказов элементов другого типа. К моменту T система будет иметь работоспособной только одну ветвь. Вероятности находят с помощью следующих соотношений:

$$P_0 = (1 - I(A_1, L_1 + 1))(1 - I(A_2, L_2 + 1)), \tag{5.417}$$

$$P_1 = \int_0^T \frac{(k_1\lambda_1)^{L_1+1} x^{L_1}}{L_1!} e^{-k_1\lambda_1 x} \sum_{i=0}^{L_2} \frac{(k_2\lambda_2 x)^i}{i!} e^{-k_2\lambda_2 x} e^{-r_1\lambda_1(T-x)} \sum_{j=0}^{L_2-i} \frac{(r_2\lambda_2(T-x))^j}{j!} e^{-r_2\lambda_2(T-x)} dx,$$

$$P_2 = \int_0^T \frac{(k_2\lambda_2)^{L_2+1} x^{L_2}}{L_2!} e^{-k_2\lambda_2 x} \sum_{i=0}^{L_1} \frac{(k_1\lambda_1 x)^i}{i!} e^{-k_1\lambda_1 x} e^{-r_2\lambda_2(T-x)} \sum_{j=0}^{L_1-i} \frac{(r_1\lambda_1(T-x))^j}{j!} e^{-r_1\lambda_1(T-x)} dx.$$

При составлении формулы для вероятности P_1 учтены следующие возможные события: в момент x в системе откажет одна ветвь из-за исчерпания запасов первого типа в комплекте ЗИП; к этому моменту в системе останется $L_2 - i$ ЗЧ второго типа; за оставшееся время $T - x$ не откажет ни одного элемента первого типа и не более $L_2 - i$ элементов второго типа при интенсивности потребления запасов $r_2\lambda_2$.

Интегрирование в (5.417) дает:

$$P_1 = e^{-A/2} \sum_{i=0}^{L_2} \sum_{j=0}^{L_2-i} B_{ij}^{(2)} \frac{(L_1 + i + j)!}{L_1! i!} \left(\frac{2A_1}{A}\right)^{L_1+1} \left(\frac{A_2}{A}\right)^{i+j} 2^i (-1)^j I(A/2, L_1 + 1 + i + j),$$

$$B_{ij}^{(2)} = \sum_{\nu=j}^{L_2-i} C_\nu^j \frac{(r_2 a_2)^{\nu-j}}{\nu!}, A = A_1 + A_2 = k_1\lambda_1 T + k_2\lambda_2 T = k_1 a_1 + k_2 a_2. \tag{5.418}$$

Аналогично находим вероятность P_2:

$$P_2 = e^{-A/2} \sum_{i=0}^{L_1} \sum_{j=0}^{L_1-i} B_{ij}^{(1)} \frac{(L_2 + i + j)!}{L_2! i!} \left(\frac{2A_2}{A}\right)^{L_2+1} \left(\frac{A_1}{A}\right)^{i+j} 2^i (-1)^j I(A/2, L_2 + 1 + i + j),$$

$$B_{ij}^{(1)} = \sum_{\nu=j}^{L_1-i} C_\nu^j \frac{(r_1 a_1)^{\nu-j}}{\nu!}. \tag{5.419}$$

В частности, при $L_1 = L_2 = 1$, $r_1 = r_2 = 1$ имеем:

$$B_{00}^{(i)} = 1 + A_i/2, B_{01}^{(s)} = B_{10}^{(s)} = 1, \tag{5.420}$$

$$P(t,1,1) = (1 + A_1)(1 + A_2)e^{-A} + 4e^{-A/2}\left(I(\frac{A}{2},2)\left(\frac{A_1^2}{A^2}(1 + \frac{A_2}{2}) + \frac{A_2^2}{A^2}(1 + \frac{A_1}{2})\right) + \frac{2A_1A_2}{A^2} I(\frac{A}{2},3)\right).$$

Для произвольных L_i точная формула имеет громоздкий вид. Поэтому получим двухсторонние оценки ВБР. Для верхней оценки заменим общее дублирование на поэлементное. Тогда структура системы превращается в последовательное соединение двух дублированных подсистем (модель П2). Используя (5.69), найдем ВБР:

$$P_в(T, L_1, L_2) = \prod_{i=1}^{2} \left(1 - I(A_i, L_i + 1) + 2^{L_i+1} e^{-A_i/2} I(A_i/2, L_i + 1)\right). \tag{5.421}$$

При произвольных значениях t, T_1, T_2 верхняя оценка ВБР:

$$P_в(t, L_1, L_2) = P_1^{m_1}(A_1, L_1) P_1(k_1\lambda_1 t - m_1 A_1, L_1) P_2^{m_2}(A_2, L_2) P_2(k_2\lambda_2 t - m_2 A_2, L_2)\,, \quad (5.422)$$

$$m_1 = \left[t / T_1\right], m_2 = \left[t / T_2\right],$$

где $[x]$ — целая часть x.

При получении нижней оценки используем допущение о том, что после перехода от структуры S_0 к S_i интенсивность потребления запасов не уменьшается и остается на уровне $k_i\lambda_i$. Это соответствует режиму функционирования, когда после отказа ветви оставшиеся в ней работоспособные элементы не выключаются. Вносим соответствующие изменения в подынтегральную функцию (5.417) и интегрируем:

$$P_1 = \sum_{i=0}^{L_2} \frac{A_2^i}{i!} e^{-A_2} e^{-A_1/2} 2^{L_1+1} I(A_1/2, L_1+1)\,,$$

$$P_2 = \sum_{i=0}^{L_1} \frac{A_1^i}{i!} e^{-A_1} e^{-A_2/2} 2^{L_2+1} I(A_2/2, L_2+1)\,. \quad (5.423)$$

При выводе этих формул использовано тождество:

$$\sum_{i=0}^{L} \frac{a^i}{i!} \sum_{j=0}^{L-i} \frac{(b-a)^j}{j!} = \sum_{i=0}^{L} \frac{b^i}{i!}\,.$$

Подставляя (5.423) в (5.416), получим нижнюю оценку ВБР.

Из структуры формул (5.423) видно, что рассматриваемые там деградированные структуры S_1 и S_2 таковы, что в них элементы одного типа сохраняют полную структуру S_0, а элементы другого типа имеют только одну работоспособную ветвь со структурой S_1 или S_2. Используем это для уточнения нижней оценки ВБР. Учтем, что при деградации структуры S_0 с условной вероятностью 0,5 сохранится именно та ветвь из двух возможных, которая соответствует уцелевшей ветви другого элемента. В этом случае вероятности P_i следует находить по формуле:

$$P_i = 2^{L_i+1} e^{-A_i/2} I(A_i/2, L_i+1)(1 - I(A_j, L_j+1) +$$

$$+2^{L_j-1} e^{-A_j/2} I(A_j/2, L_j+1)), i, j = 1,2; i \neq j\,. \quad (5.424)$$

Приращение нижней оценки при уточнении составляет:

$$\Delta P = P_{ну}(t, L) - P_н(t, L) = 2^{L_1+L_2+1} e^{-A/2} I(A_1/2, L_1+1) I(A_2/2, L_2+1)\,. \quad (5.425)$$

При $L_1 = L_2 = 1$ имеем:

$$\Delta P(1,1) = 8e^{-A/2} I(A_1/2, 2) I(A_2/2, 2)\,. \quad (5.426)$$

При произвольном числе элементов в одной ветви ($N \geq 2$) и одинаковых периодах пополнения T верхняя оценка ВБР имеет вид:

$$P_в(T, L_1, L_2, ..., L_N) = \prod_{j=1}^{N} P_j(A_j, L_j) = \prod_{j=1}^{N} (P_j^{(0)}(A_j, L_j) + P_j^{(1)}(A_j, L_j)), A_j = k_j\lambda_j T\,,$$

$$P_j^{(0)}(A_j, L_j) = 1 - I(A_j, L_j+1), P_j^{(1)}(A_j, L_j) = 2^{L_j+1} e^{-A_j/2} I(A_j/2, L_j+1)\,. \quad (5.427)$$

Здесь использованы формулы модели П2 для вероятностей базовой и деградированной структур.

При $t > T$ и неравных значениях T_j формула для верхней оценки приобретает вид:

$$P_{в}(t,T,L) = \prod_{j=1}^{N} P_j^{m_j}(A_j,L_j) P_j(k_j\lambda_j t - m_j A_j, L_j), \tag{5.428}$$

$$m_j = \left[t / T_j \right], T = (T_1,...,T_N), L = (L_1,...,L_N).$$

Если использовать общую идею получения нижней оценки, что и при выводе (5.423), то при $t = T_j = T$ найдем:

$$P_{н}(T,L) = \prod_{j=1}^{N} P_j^{(0)}(A_j,L_j)(1 + P_j^{(1)}(A_j,L_j) / P_j^{(0)}(A_j,L_j)), \tag{5.429}$$

где $P_j^{(0)}(A_j,L_j)$ и $P_j^{(1)}(A_j,L_j)$ следует рассчитывать по формулам (5.427).

При произвольном времени t ($mT \le t < (m+1)T$) и одинаковых периодах пополнения $T_j = T$ нижняя оценка:

$$P_{н}(t,L) = P_{н}^{m}(T,L) P_{н}(t - mT, L). \tag{5.430}$$

При получении уточненной нижней оценки ($N \ge 3$) учтем, что система может сохранить работоспособность даже в том случае, если в группе однотипных элементов с полной структурой произойдет более одного отказа, но отказавшие элементы принадлежат одной ветви. Принадлежность одной ветви учитывается с помощью условных вероятностей. Рассмотрим сначала случай, когда все элементы по характеристикам надежности и количеству ЗЧ в комплекте ЗИП не различимы. Тогда при $N = 3$ получим:

$$P_{ну}(t,L) = P^3(T,L,S_0) + 3P^2(T,L,S_0)P(T,L,S_1) +$$

$$+\frac{1}{2}3P^2(T,L,S_1)P(T,L,S_0) + \frac{1}{4}P^3(T,L,S_1), \tag{5.431}$$

$$P(T,L,S_0) = 1 - I(A,L+1), P(T,L,S_1) = 2^{L+1}e^{-A/2} I(A/2, L+1).$$

В третьем слагаемом условная вероятность равна 1/2, т. к. второй из двух отказов должен быть в той же ветви, что и первый отказ. В четвертом слагаемом условная вероятность равна 1/4, т. к. второй и третий отказы из трех отказов должны быть в той же ветви, что и первый отказ.

При $N > 3$ формула (5.431) обобщается следующим образом:

$$P_{ну}(t,L) = P^N(T,L,S_0)(1 + \sum_{i=1}^{N} 2^{-i+1} C_N^i (P(T,L,S_1) / P(T,L,S_0))^i). \tag{5.432}$$

При различных характеристиках элементов и $N = 3$ имеем:

$$P_{ну}(T,L) = \prod_{i=1}^{3} P_i(T,L_i,S_0)\left(1 + \sum_{j=1}^{3} \frac{P_j(T,L_j,S_1)}{P_j(T,L_j,S_0)} + \frac{1}{2}\sum_{j<v}\sum \frac{P_j(T,L_j,S_1)P_v(T,L_v,S_1)}{P_j(T,L_j,S_0)P_v(T,L_v,S_0)} +\right.$$

$$\left. + \frac{P_1(T,L_1,S_1)P_2(T,L_2,S_1)P_3(T,L_3,S_1)}{P_1(T,L_1,S_0)P_2(T,L_2,S_0)P_3(T,L_3,S_0)}\right). \tag{5.433}$$

При различных характеристиках элементов и произвольном N имеем:

$$P_{ну}(T,L)=\prod_{i=1}^{N}P_i(T,L_i,S_0)\left(1+\sum_{j=1}^{N}\frac{P_j(T,L_j,S_1)}{P_j(T,L_j,S_0)}+\frac{1}{2}\sum_{j<\nu}\sum\frac{P_j(T,L_j,S_1)P_\nu(T,L_\nu,S_1)}{P_j(T,L_j,S_0)P_\nu(T,L_\nu,S_0)}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}\sum_{i<j<\nu}\sum\frac{P_i(T,L_i,S_1)P_j(T,L_j,S_1)P_\nu(T,L_\nu,S_1)}{P_i(T,L_i,S_0)P_j(T,L_j,S_0)P_\nu(T,L_\nu,S_0)}+...+2^{-N+1}\prod_{j=1}^{N}\frac{P_j(T,L_j,S_1)}{P_j(T,L_j,S_0)}\right). \quad (5.434)$$

Найдем теперь оценки интенсивности отказов путем известного преобразования верхней и нижней оценок ВБР для случая $N = 2$. Используя (5.421), получим:

$$\lambda_н(t)=\lambda_1(t)+\lambda_2(t),\frac{\lambda_i(t)}{k_i\lambda_i}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1-I(A_i,L_i+1)}{P_i(A_i,L_i)}\right),A_i=k_i\lambda_i t/i=1;2, \quad (5.435)$$

где $P_i(A_i,L_i)$ находят по формуле (5.69). Отсюда

$$\frac{\lambda_н(t)}{k\lambda}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{A_1}{A}\frac{1-I(A_1,L_1+1)}{P_1(A_1,L_1)}-\frac{A_2}{A}\frac{1-I(A_2,L_2+1)}{P_2(A_2,L_2)}\right),A=A_1+A_2,t\le T. \quad (5.436)$$

В частности, при $L_1 = L_2 = 1$ имеем:

$$\frac{\lambda_н(t)}{k\lambda}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{A_1}{A}\frac{(1+A_1)e^{-A_1/2}}{4-(3+A_1)e^{-A_1/2}}-\frac{A_2}{A}\frac{(1+A_2)e^{-A_2/2}}{4-(3+A_2)e^{-A_2/2}}\right). \quad (5.437)$$

При увеличении периода пополнения интенсивность отказов системы стремится к значению:

$$\lim_{t\to\infty}\lambda_н(t)=r_1\lambda_1+r_2\lambda_2. \quad (5.438)$$

Дифференцируя функции вероятностей P_0, P_1, P_2 в формулах (5.417) и (5.423), получим частоту отказов на основе нижней оценки ВБР:

$$\frac{a_в(t)}{k\lambda}=\frac{A_1^{L_1+1}}{AL_1!}e^{-A_1}(1-I(A_2,L_2+1)+2^{L_2+1}e^{-A_2/2}I(A_2/2,L_2+1))+$$

$$+\frac{A_2^{L_2+1}}{AL_2!}e^{-A_2}(1-I(A_1,L_1+1)+2^{L_1+1}e^{-A_1/2}I(A_1/2,L_1+1))+$$

$$+\frac{A_1}{A}(1-I(A_2,L_2+1))(2^{L_1}e^{-A_1/2}I(A_1/2,L_1+1)-\frac{A_1^{L_1}}{L_1!}e^{-A_1})+$$

$$+\frac{A_2}{A}(1-I(A_1,L_1+1))(2^{L_2}e^{-A_2/2}I(A_2/2,L_2+1)-\frac{A_2^{L_2}}{L_2!}e^{-A_2}). \quad (5.439)$$

Отсюда

$$\frac{\lambda_в(t)}{k\lambda}=\frac{a_в(t)}{k\lambda}/P_н(t,L). \quad (5.440)$$

В частности, при $L_1 = L_2 = 1$ имеем:

$$\frac{a_в(t,1,1)}{k\lambda}=e^{-A}(\frac{A_1^2}{A}(1+A_2)+\frac{A_2^2}{A}(1+A_1))+4e^{-A/2}\left(\frac{A_1^2}{A}e^{-A_1/2}I(\frac{A_2}{2},2)+\frac{A_2^2}{A}e^{-A_2/2}I(\frac{A_1}{2},2)\right)+$$

$$+\frac{2A_1}{A}(1+A_2)e^{-A_2}\left(e^{-A_1/2}-(1+A_1)e^{-A_1}\right)+\frac{2A_2}{A}(1+A_1)e^{-A_1}\left(e^{-A_2/2}-(1+A_2)e^{-A_2}\right). \quad (5.441)$$

Дифференцируя функции вероятностей P_0, P_1, P_2 в формулах (5.417) и (5.424), получим частоту отказов на основе уточненной нижней оценки ВБР:

$$\frac{a_{ву}(t)}{k\lambda} = \frac{a_{в}(t)}{k\lambda} + \frac{\Delta a_{ву}(t)}{k\lambda}. \tag{5.442}$$

Приращение частоты отказов при уточнении:

$$\frac{\Delta a_{ву}(t)}{k\lambda} = e^{-A/2}(2^{L_1+L_2} I(A_1, L_1+1) I(A_2, L_2+1) - 2^{L_2} \frac{A_1^{L_1+1}}{AL_1!} e^{-A_1/2} I(A_2, L_2+1) -$$

$$-2^{L_1} \frac{A_2^{L_2+1}}{AL_2!} e^{-A_2/2} I(A_1, L_1+1)). \tag{5.443}$$

В частности, при $L_1 = L_2 = 1$ имеем:

$$\frac{a_{ву}(t,1,1)}{k\lambda} = \frac{a_{в}(t,1,1)}{k\lambda} + e^{-A/2}(4I(A_1,2)I(A_2,2) - 2\frac{A_1^2}{A} e^{-A_1/2} I(A_2,2) - 2\frac{A_2^2}{A} e^{-A_2/2} I(A_1,2)). \tag{5.444}$$

Аналогично находят интенсивность отказов и при $N \geq 3$.

Среднюю наработку до отказа можно получить двумя способами. Первый состоит в интегрировании (5.416) по бесконечному интервалу. Второй способ состоит в интегрировании ВБР по периоду пополнения и использовании соотношения (5.12). Затем можно найти коэффициент готовности, используя (5.22). Коэффициент оперативной готовности системы для наихудшего цикла находят по формуле:

$$K^*_{occ}(\tau, T, L_1, L_2) = P_0(T, L_1, L_2) e^{-\alpha/2}(2 - e^{-\alpha/2}) + (P_1(T, L_1, L_2) +$$

$$+P_2(T, L_1, L_2)) e^{-\alpha/2}, \alpha = (r_1\lambda_1 + r_2\lambda_2)\tau. \tag{5.445}$$

Чтобы найти коэффициент оперативной готовности системы для среднестатистического цикла, необходимо проинтегрировать функции вероятностей P_0, P_1, P_2 в формулах (5.417) и (5.418) по интервалу (0, T) и найти $k\lambda\tau_1^i$. Затем вычислить:

$$K^*_{occ}(\tau, T, L_1, L_2) = \left(k\lambda\tau_1^0 e^{-\alpha/2}(2 - e^{-\alpha/2}) + (k\lambda\tau_1^1 + k\lambda\tau_1^2) e^{-\alpha/2}\right) / A. \tag{5.446}$$

По результатам расчетов (*приложение 5*, примеры П5.28–П5.30) можно сделать следующие выводы:

- уточненная нижняя и верхняя оценки дают достаточно узкие интервалы для точного значения вероятности безотказной работы. Причем точное значение оказывается ближе к уточненной нижней оценке. Относительная ошибка δQ_2 для уточненной нижней оценки ВБР меньше относительной ошибки δQ_1 для среднего арифметического оценок ВБР;
- нижняя и уточненная верхняя оценки дают хорошее приближение для точного значения интенсивности отказов. Поскольку ВБР ближе к нижней оценке, интенсивность отказов будет ближе к уточненной верхней оценке;
- относительная ошибка δQ_2 оказывается небольшой как в конце периода пополнения, так и внутри периода;
- зависимость интенсивности отказов от периода пополнения не линейная. Она растет быстрее, чем период пополнения: при увеличении периода в 10 раз ($A_1 = A_2 = 1$) интенсивность увеличивается в 15,3 раза.

5.18. Неоднородная дублированная система с различными зависимыми ветвями (модель П15)

Структура систем данного подкласса обладает следующими признаками:

- дублирование общее, система состоит из двух параллельных ветвей;
- ветви имеют различные наборы элементов;
- ветви имеют общие элементы, причем количество элементов одного типа в обеих ветвях одинаково.

Представителем систем данного подкласса является система из трех групп элементов, из которых элементы первого типа входят в обе ветви, а элементы второго и третьего типов входят только в одну ветвь (см. рис. 5.11, *б*).

Сначала найдем двусторонние оценки ВБР. Верхнюю оценку получим путем замыкания вертикальной связи на выходе группы элементов первого типа. Тогда модель надежности сводится к известным моделям: модели П2 для элементов первого типа и к модели дублированной системы с независимыми ветвями *(см. разд. 5.16)*. Используя схему независимых событий, получим:

$$P_в(T,L) = P_1(A_1,L_1,П2)(1-(1-P_2(A_2,L_2,П1))(1-P_3(A_3,L_3,П1)),$$

$$P(A,L,П2) = \sum_{i=0}^{L}\frac{A^i}{i!}e^{-A} + 2^{L+1}e^{-A/2}I(A/2,L+1), P(A,L,П1) = \sum_{i=0}^{L}\frac{A^i}{i!}e^{-A}. \quad (5.447)$$

Для нахождения нижней оценки рассмотрим два несовместных события: событие A — в первой группе элементов сохраняется полная структура, из второй и третьей групп элементов работоспособна хотя бы одна группа; событие B — в первой группе работоспособна одна ветвь (с равной вероятностью верхняя или нижняя) и работоспособна соответствующая группа элементов, соединенная с ней последовательно. Выражая вероятности этих событий с помощью формул моделей П2 и П1, имеем:

$$P_н(T,L) = (1-I(A_1,L_1+1))(1-I(A_2,L_2+1)I(A_3,L_3+1)) +$$

$$+2^{L_1}e^{-A_1/2}I(A_1/2,L_1+1)(1-I(A_2,L_2+1)+1-I(A_3,L_3+1)). \quad (5.448)$$

Вероятности сохранения в конце периода пополнения полной или работоспособной деградированной структуры:

$$P(T,L,S_0) = (1-I(A_1,L_1+1))(1-I(A_2,L_2+1))(1-I(A_3,L_3+1)),$$

$$P(T,L,S_1) = (1-I(A_1,L_1+1))(I(A_2,L_2+1)(1-I(A_3,L_3+1)) + I(A_3,L_3+1)(1-$$

$$-I(A_2,L_2+1))) + 2^{L_1}e^{-A_1/2}I(A_1/2,L_1+1)(1-I(A_2,L_2+1)+1-I(A_3,L_3+1)). \quad (5.449)$$

В частности, при $L_1 = L_2 = L_3 = 1$ имеем:

$$P_в(T,1,1,1) = ((1+A_1)e^{-A_1} + 4e^{-A_1/2}I(A_1/2,2))((1+A_2)e^{-A_2} + (1+A_3)e^{-A_3} -$$

$$-(1+A_2)(1+A_3)e^{-A_2-A_3}), A_i = k_i\lambda_i T, i = 1,2,3,$$

$$P_н(T,1,1,1) = (1+A_1)e^{-A_1}((1+A_2)e^{-A_2} + (1+A_3)e^{-A_3} - (1+A_2)(1+A_3)e^{-A_2-A_3}) +$$

$$+2e^{-A_1/2}I(A_1/2,2))((1+A_2)e^{-A_2} + (1+A_3)e^{-A_3}). \quad (5.450)$$

Чтобы найти точную формулу для ВБР, рассмотрим пять несовместных событий:

- E_0 — в конце периода пополнения в системе сохранится базовая структура S_0;
- E_1 — в конце периода пополнения в системе сохранит работоспособность первая ветвь, состоящая из элементов первого и второго типов, причем отказ второй ветви произойдет из-за отказа элементов первого типа;
- E_2 — в конце периода пополнения в системе сохранит работоспособность вторая ветвь, состоящая из элементов первого и третьего типов, причем отказ первой ветви произойдет из-за отказа элементов второго типа;
- E_3 — то же, что E_1, только отказ второй ветви произойдет из-за отказа элементов третьего типа;
- E_4 — то же, что E_2, только отказ первой ветви произойдет из-за отказа элементов второго типа.

Выразим вероятности указанных событий через исходные данные. Вероятность $P(E_0)$ есть вероятность того, что число отказов элементов каждого типа не превысит число ЗЧ:

$$P(E_0) = (1 - I(A_1, L_1 + 1))(1 - I(A_2, L_2 + 1))(1 - I(A_3, L_3 + 1)) . \qquad (5.451)$$

Вероятность $P(E_1)$ есть вероятность того, что в момент $x < T$ произойдет $L_1 + 1$-й отказ элементов первого типа, причем последний отказ будет во второй ветви; к этому моменту число отказов элементов третьего типа не превысит L_3, а число отказов элементов второго типа в течение T будет не более L_2. Из описания события следует, что

$$P(E_1) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{L_2}\frac{A_2^i}{i!}e^{-A_2}\int_0^T\frac{\left(k_1\lambda_1\right)^{L_1+1}x^{L_1}}{L_1!}e^{-k_1\lambda_1 x}\sum_{j=0}^{L_3}\frac{\left(k_3\lambda_3 x\right)^j}{j!}e^{-k_1\lambda_1 x}e^{-\eta\lambda_1(T-x)}dx =$$

$$= \frac{1}{2}e^{-A_1/2}(1 - I(A_2, L_2 + 1))\sum_{j=0}^{L_3}C_{L_1+j}^j\left(\frac{A_1}{B_3}\right)^{L_1+1}\left(\frac{A_3}{B_3}\right)^j I(B_3, L_1 + j + 1), B_3 = \frac{A_1}{2} + A_3 . \qquad (5.452)$$

Аналогично находим:

$$P(E_2) = \frac{1}{2}e^{-A_1/2}(1 - I(A_3, L_3 + 1))\sum_{j=0}^{L_2}C_{L_1+j}^j\left(\frac{A_1}{B_2}\right)^{L_1+1}\left(\frac{A_2}{B_2}\right)^j I(B_2, L_1 + j + 1), B_2 = \frac{A_1}{2} + A_2 . \qquad (5.453)$$

Вероятность $P(E_3)$ найдем как вероятность пересечения следующих событий: в момент x произойдет $L_3 + 1$-й отказ элементов третьего типа и к этому моменту число отказов элементов первого типа не превысит L_1; за оставшееся время $T - x$ сохранит работоспособность цепочка элементов первого типа, а за время T сохранит работоспособность и цепочка элементов второго типа. Отсюда следует:

$$P(E_3) = (1 - I(A_2, L_2 + 1))\int_0^T\frac{\left(k_3\lambda_3\right)^{L_3+1}x^{L_3}}{L_3!}e^{-k_3\lambda_3 x}\sum_{i=0}^{L_1}\frac{\left(k_1\lambda_1 x\right)^i}{i!}e^{-k_1\lambda_1 x}\sum_{j=0}^{L_1-i}\frac{\left(r_1\lambda_1(T-x)\right)^j}{j!}e^{-r_1\lambda_1(T-x)}dx =$$

$$= e^{-A_1/2}(1 - I(A_2, L_2 + 1))\sum_{i=0}^{L_1}\sum_{j=0}^{L_1-i}\left(\frac{A_1}{B_3}\right)^i\left(\frac{A_3}{B_3}\right)^{L_3+1}\left(-\frac{A_1}{2B_3}\right)^j\frac{\left(L_3+i+j\right)!}{L_3!i!}B_{ij}I(B_3, L_3 + i + j + 1),$$

$$B_{ij} = \sum_{\nu=j}^{L_1-i}\frac{1}{\nu!}C_\nu^j(r_1a_1)^{\nu-j} . \qquad (5.454)$$

Аналогично находим:

$$P(E_4) = e^{-A_1/2}(1 - I(A_3, L_3 + 1))\sum_{i=0}^{L_1}\sum_{j=0}^{L_1 - i}\left(\frac{A_1}{B_2}\right)^i\left(\frac{A_2}{B_2}\right)^{L_3+1}\left(-\frac{A_1}{2B_2}\right)^j\frac{(L_2 + i + j)!}{L_2!\,i!}B_{ij}I(B_2, L_2 + i + j + 1). \tag{5.455}$$

В частности, при $L_1 = L_2 = L_3 = 1$, $t = T$ имеем:

$$P(E_0) = (1 + A_1)(1 + A_2)(1 + A_3)e^{-A}, A = A_1 + A_2 + A_3, \tag{5.456}$$

$$P(E_1) = \frac{1}{2}(1 + A_2)e^{-A_1/2 - A_2}\left(\frac{A_1}{A_1/2 + A_3}\right)^2\left(I(\frac{A_1}{2} + A_3, 2) + \frac{2A_3}{A_1/2 + A_3}I(\frac{A_1}{2} + A_3, 3)\right),$$

$$P(E_2) = \frac{1}{2}(1 + A_3)e^{-A_1/2 - A_3}\left(\frac{A_1}{A_1/2 + A_2}\right)^2\left(I(\frac{A_1}{2} + A_2, 2) + \frac{2A_2}{A_1/2 + A_2}I(\frac{A_1}{2} + A_2, 3)\right),$$

$$P(E_3) = (1 + A_2)e^{-A_1/2 - A_2}\frac{A_3^2}{(A_1/2 + A_3)^2}\left((1 + \frac{A_1}{2})I(\frac{A_1}{2} + A_3, 2) + \frac{A_1}{A_1/2 + A_3}I(\frac{A_1}{2} + A_3, 3)\right),$$

$$P(E_4) = (1 + A_3)e^{-A_1/2 - A_3}\frac{A_2^2}{(A_1/2 + A_2)^2}\left((1 + \frac{A_1}{2})I(\frac{A_1}{2} + A_2, 2) + \frac{A_1}{A_1/2 + A_2}I(\frac{A_1}{2} + A_2, 3)\right).$$

При отсутствии ЗИП вероятность безотказной работы системы:

$$P(t, 0, 0, 0) = 1 - (1 - e^{-\eta\lambda_1 t - k_2\lambda_2 t})(1 - e^{-\eta\lambda_1 t - k_3\lambda_3 t}).$$

Средняя наработка системы до отказа:

$$k\lambda T_{cp}(0, 0, 0) = A^2/((A_1/2 + A_2)(A_1/2 + A_3)) - 1.$$

Найдем теперь оценки для интенсивности отказов с помощью верхней и нижней оценок ВБР. Для получения нижней оценки продифференцируем (5.445):

$$\frac{\lambda_н(t)}{k\lambda} = \frac{A_1}{2A}\left(1 - \frac{1 - I(A_1, L_1 + 1)}{1 - I(A_1, L_1 + 1) + 2^{L+1}e^{-A/2}I(A/2, L + 1)}\right) +$$

$$+\left(\frac{A_2^{L_2+1}}{AL_2!}e^{-A_2}I(A_3, L_3 + 1)) + \frac{A_3^{L_3+1}}{AL_3!}e^{-A_3}I(A_2, L_2 + 1))\right)/(1 - I(A_2, L_2 + 1)I(A_3, L_3 + 1)),$$

$$A_i = k_i\lambda_i t, A = A_1 + A_2 + A_3. \tag{5.457}$$

Чтобы найти верхнюю оценку интенсивности отказов, продифференцируем (5.446):

$$\frac{\lambda_в(t)}{k\lambda} = \left(\frac{A_1^{L_1+1}}{AL_1!}(1 - I(A_2, L_2 + 1)I(A_3, L_3 + 1)) + \frac{A_2^{L_2+1}}{AL_2!}(1 - I(A_1, L_1 + 1))I(A_3, L_3 + 1) +\right.$$

$$+\frac{A_3^{L_3+1}}{AL_3!}(1 - I(A_1, L_1 + 1))I(A_2, L_2 + 1) + 2^{L_1}e^{-A_1/2}I(A_1/2, L_1 + 1)\left(\frac{A_2^{L_2+1}}{AL_2!}e^{-A_2} +\right.$$

$$\left.\left.+\frac{A_3^{L_3+1}}{AL_3!}e^{-A_3}\right) + \frac{A_1}{2A}(2 - I(A_2, L_2 + 1) - I(A_3, L_3 + 1))(2^{L_1}e^{-A_1/2}I(A_1/2, L_1 + 1) - \frac{A_1^{L_1}}{L_1!}e^{-A_1})\right)/P_н(T, L). \tag{5.458}$$

В частности, при $L_1 = L_2 = L_3 = 1$ имеем:

$$\frac{\lambda_и(t,1,1,1)}{k\lambda} = \frac{A_1}{2A}\left(1 - \frac{(1+A_1)e^{-A_1/2}}{4-(3+A_1)e^{-A_1/2}}\right) + \left(\frac{A_2^2}{A}e^{-A_2}I(A_3,2) + \frac{A_3^2}{A}e^{-A_3}I(A_2,2)\right) /$$

$$/((1+A_2)e^{-A_2} + (1+A_3)e^{-A_3} - (1+A_2)(1+A_3)e^{-A_2-A_3}),$$

$$\frac{\lambda_в(t,1,1,1)}{k\lambda} = (\frac{A_1^2}{A}((1+A_2)e^{-A_2} + (1+A_3)e^{-A_3} - (1+A_2)(1+A_3)e^{-A_2-A_3}) +$$

$$+(1+A_1)e^{-A_1}(\frac{A_2^2}{A}e^{-A_2}I(A_3,2) + \frac{A_3^2}{A}e^{-A_3}I(A_2,2)) + \frac{2}{A}e^{-A_1/2}(A_2^2e^{-A_2} + A_3^2e^{-A_3})I(\frac{A_1}{2},2) +$$

$$+\frac{A_1}{A}e^{-A_1/2}(1-(1+A_1)e^{-A_1/2})((1+A_2)e^{-A_2} + (1+A_3)e^{-A_3})) / P_и(T,1,1,1). \qquad (5.459)$$

Расчет точного значения средней наработки системы в периоде пополнения проводится с помощью процедуры численного интегрирования согласно (5.54). Далее для расчета средней наработки до отказа используется формула (5.53). Приближенное значение средней наработки можно получить с помощью формулы (5.56).

Коэффициент готовности находят по общей формуле (5.57).

Коэффициент оперативной готовности для наихудшего цикла:

$$K^*_{ог}(\tau,T,L) = P(T,E_0)(1-(1-e^{-\alpha_1-\alpha_2})(1-e^{-\alpha_1-\alpha_3})) + (P(T,E_1)+P(T,E_3))e^{-\alpha_1-\alpha_2} +$$

$$+(P(T,E_2)+P(T,E_4))e^{-\alpha_1-\alpha_3}, \alpha_1 = r_1\lambda_1\tau, \alpha_2 = k_2\lambda_2\tau, \alpha_3 = r_3\lambda_3\tau. \qquad (5.460)$$

Коэффициент оперативной готовности для среднестатистического цикла:

$$K_{ог}(\tau,T,L) = (k\lambda\tau_1^0(T,E_0)(1-(1-e^{-\alpha_1-\alpha_2})(1-e^{-\alpha_1-\alpha_3})) + (k\lambda\tau_1^1(T,E_1) +$$

$$+k\lambda\tau_1^3(T,E_3))e^{-\alpha_1-\alpha_2} + (k\lambda\tau_1^2(T,E_2) + k\lambda\tau_1^4(T,E_4))e^{-\alpha_1-\alpha_3}) / A,$$

$$k\lambda\tau_1^i(T,E_i) = k\lambda\int_0^T P(x,E_i)dx, i = 0...4. \qquad (5.461)$$

По результатам расчетов (*приложение 5*, примеры П5.31–П5.33) можно сделать следующие выводы:

- приближенное значение ВБР находят в следующем порядке: сначала по формулам (5.456) находим вероятности событий и суммируем их, вычисляя точное значение ВБР, затем по формуле (5.55) определяем приближенное значение средней наработки до отказа и подставляем его в формулу (5.65). Из данных таблицы П5.91 видно, что погрешность δQ_2 такого расчета мала и составляет в конце периода пополнения доли процента или несколько процентов. Нижняя оценка дает большую погрешность δQ_1, но и она не велика (2–3 %);
- нижняя и верхняя оценки дают хорошее приближение для точного значения интенсивности отказов. Поскольку ВБР ближе к нижней оценке, интенсивность отказов будет ближе к верхней оценке;
- относительная ошибка δQ_1 нижней оценки ВБР оказывается небольшой как в конце периода пополнения, так и внутри периода;

- зависимость интенсивности отказов от периода пополнения не линейная. Она растет быстрее, чем период пополнения: при увеличении периода в 3 раза интенсивность увеличивается в 5,3–5,4 раза.

5.19. Система с неоднородным групповым дублированием (модель П16)

Структура систем данного подкласса обладает следующими признаками:

- система содержит несколько последовательно соединенных резервированных групп;
- резервированные группы зависимы друг от друга через общий запас элементов в комплекте ЗИП;
- резервированные группы неоднородны, т. е. в каждой группе параллельные ветви имеют различные элементы.

Представителем этого подкласса систем является система, состоящая из двух одинаковых по структуре резервированных групп (см. рис. 5.11, *в*). Каждая группа является дублированной подсистемой с различными ветвями: одна ветвь содержит элементы первого типа, а вторая ветвь — элементы второго типа.

При оценке ВБР принимаем во внимание то, что данная система отличается от системы с независимыми ветвями, рассмотренной в *разд. 5.16.1*, тем, что здесь используется групповое резервирование вместо общего резервирования, описанного в *разд. 5.16.1*. Это создает дополнительные возможности сохранения работоспособности, которые должны быть учтены и добавлены к выражениям типа (5.406).

Рассмотрим возможные работоспособные структуры в данной системе. Кроме полной (базовой) структуры S_0, система может иметь еще пять деградированных работоспособных структур S_i, $i = 1...5$ (см. рис. 5.11, *г*, *д*, *е*, *ж*, *з*).

Структура S_1 возникает при отказе $L_2 + 1$ элементов второго типа, а структура S_2 при отказе $L_1 + 1$ элементов первого типа. Если обозначить условную ВБР при начальной структуре S_i через $P_i(T, l_i, S_i)$, то получим интегральное соотношение для ВБР системы:

$$P(T, L_1, L_2) = (1 - I(A_1, L_1 + 1))(I(A_2, L_2 + 1) +$$

$$+ \int_0^T \frac{\Lambda_2^{L_2+1} x^{L_2}}{L_2!} e^{-\Lambda_2 x} \sum_{i=0}^{L_1} \frac{(\Lambda_1 x)^i}{i!} e^{-\Lambda_1 x} P_1(T - x, L_1 - i, S_1) dx +$$

$$+ \int_0^T \frac{\Lambda_1^{L_1+1} x^{L_1}}{L_1!} e^{-\Lambda_1 x} \sum_{i=0}^{L_2} \frac{(\Lambda_2 x)^i}{i!} e^{-\Lambda_2 x} P_2(T - x, L_2 - i, S_2) dx, \Lambda_i = k_i \lambda_i . \qquad (5.462)$$

Второе слагаемое учитывает тот факт, что к моменту $L_2 + 1$-го отказа элементов второго типа произойдет ровно i отказов элементов первого типа и в комплекте ЗИП останется $L_1 - i$ запасных частей первого типа. Аналогично составляется и третье слагаемое.

Найдем теперь вероятности $P_i(T, l_i, S_i)$ для $l_i \le L_i$. Эволюция структур S_1 и S_2 отражена в графах состояний на рис. 5.12, *а*, *б*.

На рис. 5.12, *а* в состояниях $0...l_2$ система имеет структуру S_1. В состояниях $0'$, ..., l_2' и $l_2 + 1$ система имеет последовательную структуру с некоторым числом запасных частей второго типа в комплекте ЗИП. Аналогичное описание имеют и состояния системы в графе на рис. 5.12, *б*.

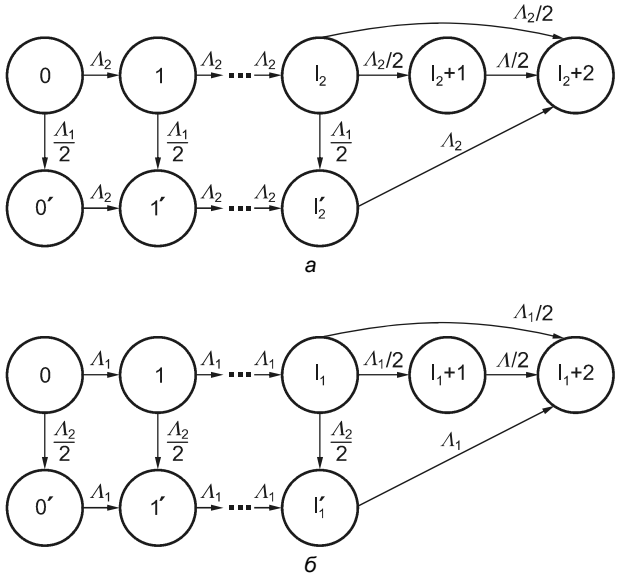


Рис. 5.12. Графы состояний деградированных структур (модель П16): *а* — для структуры S_1; *б* — для структуры S_2

Составляя уравнения по графу состояний (рис. 5.12, *а*) и переходя к изображениям по Лапласу — Карсону, получим:

$$P_0^*(s)=\frac{s}{s+\Lambda_1/2+\Lambda_2},\ P_i^*(s)=\left(\frac{\Lambda_2}{s+\Lambda_1/2+\Lambda_2}\right)^i P_0^*(s), i=0..l_2,$$

$$P_{0'}^*(s)=\frac{\Lambda_1/2}{s+\Lambda_2}P_0^*(s),\ P_{i'}^*(s)=\frac{\Lambda_1/2}{s+\Lambda_2}\sum_{j=0}^{i}\left(\frac{\Lambda_2}{s+\Lambda_2}\right)^j\left(\frac{\Lambda_2}{s+\Lambda_1/2+\Lambda_2}\right)^{i-j},$$

$$Q_1^*(s,l_2)=\frac{1}{s}\frac{\Lambda_2}{2}P_{l_2}^*(s)+\frac{\Lambda}{2}P_{l_2+1}^*(s)+\Lambda_2 P_{l_2'}^*(s). \qquad (5.463)$$

Решая эту систему относительно $Q_1^*(s,l_2)$, получим:

$$Q_1^*(s,l_2)=\frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda_2}{s+\Lambda_1/2+\Lambda_2}\right)^{l_2+1}\left(1+\frac{\Lambda/2}{s+\Lambda/2}\right)+$$

$$+\frac{\Lambda_1\Lambda_2/2}{(s+\Lambda_2)(s+\Lambda_1/2+\Lambda_2)}\sum_{i=0}^{l_2}\left(\frac{\Lambda_2}{s+\Lambda_2}\right)^i\left(\frac{\Lambda_2}{s+\Lambda_1/2+\Lambda_2}\right)^{l_2-i}. \qquad (5.464)$$

Аналогично находим:

$$Q_2^*(s,l_1)=\frac{1}{2}\left(\frac{\Lambda_1}{s+\Lambda_1+\Lambda_2/2}\right)^{l_1+1}\left(1+\frac{\Lambda/2}{s+\Lambda/2}\right)+$$

$$+\frac{\Lambda_1\Lambda_2/2}{(s+\Lambda_1)(s+\Lambda_1+\Lambda_2/2)}\sum_{i=0}^{l_1}\left(\frac{\Lambda_1}{s+\Lambda_1}\right)^i\left(\frac{\Lambda_1}{s+\Lambda_1+\Lambda_2/2}\right)^{l_1-i}. \qquad (5.465)$$

Выполняя в (5.462) операционное преобразование, находим:

$$P^*(s,L_1,L_2)=\sum_{i=0}^{L_1}\sum_{j=0}^{L_2}C_{i+j}^{i}\frac{s\Lambda_1^i\Lambda_2^j}{(s+\Lambda)^{i+j+1}}+\sum_{i=0}^{L_2}C_{L_1+i}^{i}\frac{\Lambda_1^{L_1+1}\Lambda_2^i}{(s+\Lambda)^{L_1+i+1}}(1-Q_1^*(s,L_2-i))+$$

$$+\sum_{i=0}^{L_1}C_{L_2+i}^{i}\frac{\Lambda_2^{L_2+1}\Lambda_1^i}{(s+\Lambda)^{L_2+i+1}}(1-Q_2^*(s,L_1-i)),\Lambda=\Lambda_1+\Lambda_2\,. \qquad (5.466)$$

Подставляя (5.464) и (5.465) в (5.466), окончательно получим:

$$P^*(s,L_1,L_2)=\sum_{i=0}^{L_1}\sum_{j=0}^{L_2}C_{i+j}^{i}\frac{s\Lambda_1^i\Lambda_2^j}{(s+\Lambda)^{i+j+1}}+$$

$$+\sum_{i=0}^{L_2}C_{L_1+i}^{i}\frac{\Lambda_1^{L_1+1}\Lambda_2^i}{(s+\Lambda)^{L_1+i+1}}\left(1-\left(\frac{\Lambda_2}{s+\Lambda_2}\right)^{L_2+1-i}+\frac{s}{2s+\Lambda}\left(\frac{\Lambda_2}{s+\Lambda_1/2+\Lambda_2}\right)^{L_2+1-i}\right)+$$

$$+\sum_{i=0}^{L_1}C_{L_2+i}^{i}\frac{\Lambda_2^{L_2+1}\Lambda_1^i}{(s+\Lambda)^{L_2+i+1}}\left(1-\left(\frac{\Lambda_1}{s+\Lambda_1}\right)^{L_1+1-i}+\frac{s}{2s+\Lambda}\left(\frac{\Lambda_1}{s+\Lambda_1+\Lambda_2/2}\right)^{L_1+1-i}\right). \qquad (5.467)$$

Рассмотрим частные случаи.

1) При $L_1 = L_2 = 0$ имеем:

$$P(T,0,0)=(1-(1-e^{-\Lambda_1/2})(1-e^{-\Lambda_2/2}))^2\,. \qquad (5.468)$$

2) При $L_1 = L_2 = 1$ из (5.467) получим:

$$P^*(s,1,1)=\frac{s}{s+\Lambda}+\frac{s\Lambda}{(s+\Lambda)^2}+\frac{2s\Lambda_1\Lambda_2}{(s+\Lambda)^3}+\frac{\Lambda_1^2}{(s+\Lambda)^2}\left(\frac{s(s+2\Lambda_2)}{(s+\Lambda_2)^2}+\frac{s}{2s+\Lambda}\left(\frac{\Lambda_2}{s+\Lambda_1/2+\Lambda_2}\right)^2\right)+$$

$$+\frac{2\Lambda_1^2\Lambda_2}{(s+\Lambda)^3}\left(\frac{s}{s+\Lambda_2}+\frac{s}{2s+\Lambda}\left(\frac{\Lambda_2}{s+\Lambda_1/2+\Lambda_2}\right)\right)+\frac{\Lambda_2^2}{(s+\Lambda)^2}\left(\frac{s(s+2\Lambda_2)}{(s+\Lambda_1)^2}+\frac{s}{2s+\Lambda}\left(\frac{\Lambda_1}{s+\Lambda_1+\Lambda_2/2}\right)^2\right)+$$

$$+\frac{2\Lambda_1\Lambda_2^2}{(s+\Lambda)^3}\left(\frac{s}{s+\Lambda_1}+\frac{s}{2s+\Lambda}\left(\frac{\Lambda_1}{s+\Lambda_1+\Lambda_2/2}\right)\right). \qquad (5.469)$$

Отсюда после обратного преобразования имеем:

$$P(T,1,1)=e^{-A}(1+A+A_1A_2)+e^{-A_2}(1+A_2)I(A_1,2)+8\left(\frac{A_2}{A}\right)^2e^{-A/2}I(A/2,2)-$$

$$-4\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2(2+A_2)e^{-A_1/2-A_2}I(A_1/2,2)+16\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^3e^{-A_1/2-A_2}I(A_1/2,3)+16(\frac{A_1^2A_2}{A^3}e^{-A/2}I(A/2,3)-$$

$$-\frac{A_2}{A_1}e^{-A_1/2-A_2}I(A_1/2,3))+e^{-A_1}(1+A_1)I(A_2,2)+8\left(\frac{A_1}{A}\right)^2e^{-A/2}I(A/2,2)-$$

$$-4\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2(2+A_1)e^{-A_1-A_2/2}I(A_2/2,2)+16\left(\frac{A_1}{A_2}\right)^3e^{-A_1-A_2/2}I(A_2/2,3)+16\left(\frac{A_2^2A_1}{A^3}e^{-A/2}I(A/2,3)-\right.$$

$$\left.-\frac{A_1}{A_2}e^{-A_1-A_2/2}I(A_2/2,3)\right). \qquad (5.470)$$

3) При $L_1 = L_2 = 1$ и $A_1 = A_2 = A/2$ из (5.466) получим:

$$P(T,1,1) = (1 + A + A^2/4)e^{-A} + (6 + A)e^{-A/2} I(A/2,2) + 4e^{-A/2} I(A/2,3) -$$

$$-4(4 + A)e^{-3A/4} I(A/4,2). \qquad (5.471)$$

Из последней формулы можно найти среднюю наработку системы в периоде пополнения. Для этого представим (5.471) в виде:

$$P(T,1,1) = \left(7 + 3A + \frac{A^2}{4}\right)e^{-A} + (10 + A)e^{-A/2} - 4(4 + A)e^{-3A/4}. \qquad (5.472)$$

Отсюда после интегрирования находим:

$$k\lambda\tau_1(T,1,1) = 7I(A,1) + 3I(A,2) + \frac{1}{2}I(A,3) + 20I(A/2,1) +$$

$$+4I(A/2,2) - \frac{64}{3}I\left(\frac{3}{4}A,1\right) - \frac{64}{9}I\left(\frac{3}{4}A,2\right). \qquad (5.473)$$

При увеличении периода пополнения средняя наработка (5.473) стремится к предельному значению:

$$k\lambda\tau_1(\infty,1,1) = 6\frac{1}{18}. \qquad (5.474)$$

При неравных A_1 и A_2 предельное значение определяют путем интегрирования по бесконечному интервалу вероятности (5.470) или путем предельного перехода при $s \to 0$ в (5.469):

$$k\lambda\tau_1(\infty,1,1) = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}P^*(s,1,1) = 2\left(1 + \frac{\Lambda_1\Lambda_2}{\Lambda^2}\right) + \frac{\Lambda_1^2}{\Lambda\Lambda_2}\left(2 + \frac{\Lambda_2^3}{\Lambda\left(\Lambda_1/2 + \Lambda_2\right)^2}\right) +$$

$$+\frac{2\Lambda_1^2}{\Lambda^2}\left(1 + \frac{\Lambda_2^2}{\Lambda\left(\Lambda_1/2 + \Lambda_2\right)}\right) + \frac{\Lambda_2^2}{\Lambda\Lambda_1}\left(2 + \frac{\Lambda_1^3}{\Lambda\left(\Lambda_1 + \Lambda_2/2\right)^2}\right) + \frac{2\Lambda_2^2}{\Lambda^2}\left(1 + \frac{\Lambda_1^2}{\Lambda\left(\Lambda_1 + \Lambda_2/2\right)}\right). \qquad (5.475)$$

При произвольных значениях L_1 и L_2 явное выражение для ВБР находят путем обратного преобразования изображения функции (5.467). Из-за большой сложности точных формул рассмотрим далее приближенные формулы. При построении приближенной формулы для ВБР рассмотрим дополнительно к событиям, учтенным при выводе формулы (5.406), еще одну возможность сохранить работоспособность системы. Если после исчерпания запасов в комплекте ЗИП отказывает еще один элемент первого типа и один элемент второго типа, то с условной вероятностью 0,5 отказавшие элементы окажутся в различных дублированных подсистемах. Согласно формуле (5.69) вероятность возникновения $L_i + 1$ отказа элементов i-го типа равна

$$P_i(T,L) = 2^{L_i+1}e^{-A_i/2}I(A_i/2, L_i + 1), A_i = k_i\lambda_i T, i = 1;2. \qquad (5.476)$$

Вероятность дополнительного события находят путем перемножения вероятностей (5.476) и условной вероятности. Используя (5.406) и (5.476), получим приближенную формулу для ВБР:

$$P_{пр}(T,L_1,L_2) = 1 - I(A_1,L_1+1)I(A_2,L_2+1) + 2^{L_1+L_2+1}e^{-A/2}I(A_1/2,L_1+1)I(A_2/2,L_2+1). \qquad (5.477)$$

При $L_1 = L_2 = 0$ формула (5.477) совпадает с (5.468). При $L_1 = L_2 = 1$ из (5.477) получим:

$$P_{пр}(T,1,1) = (1+A_1)e^{-A_1} + (1+A_2)e^{-A_2} - e^{-A}(1+A+A_1A_2) +$$

$$+8e^{-A/2} I(A_1/2,2) I(A_2/2,2). \qquad (5.478)$$

Сравнивая (5.473) и (5.478) при $A_1 = A_2 = A/2$, убеждаемся, что в данном частном случае приближенная и точная формулы совпадают и дают одинаковый результат (5.472).

Частоту отказов найдем путем дифференцирования (5.477):

$$\frac{a_{пр}(T,L_1,L_2)}{k\lambda} = \frac{1}{A}\left(\frac{A_1^{L_1+1}}{L_1!}e^{-A_1} I(A_2,L_2+1) + \frac{A_2^{L_2+1}}{L_2!}e^{-A_2} I(A_1,L_1+1)\right) +$$

$$+2^{L_1+L_2} e^{-A/2} I(A_1/2, L_1+1) I(A_2/2, L_2+1) +$$

$$+\frac{1}{A}2^{L_1+L_2+1} e^{-A/2}\left(\frac{A_1^{L_1+1}}{2^{L_1+1}L_1!}e^{-A_1/2} I(A_2/2,L_2+1) + \frac{A_2^{L_2+1}}{2^{L_2+1}L_2!}e^{-A_2/2} I(A_1/2,L_1+1)\right). \qquad (5.479)$$

В частности, при $L_1 = L_2 = 1$ имеем:

$$\frac{a_{пр}(T,1,1)}{k\lambda} = \frac{1}{A}\left(A_1^2 e^{-A_1} I(A_2,2) + A_2^2 e^{-A_2} I(A_1,2)\right) + 4e^{-A/2} I(A_1/2,2) I(A_2/2,2) +$$

$$+\frac{2}{A}e^{-A/2}\left(A_1^2 e^{-A_1/2} I(A_2/2,2) + A_2^2 e^{-A_2/2} I(A_1/2,2)\right). \qquad (5.480)$$

При $A_1 = A_2$ формула упрощается:

$$\frac{a_{пр}(T,1,1)}{k\lambda} = \frac{A}{2}e^{-A/2} I(A/2,2) + 4e^{-A/2} I^2(A/4,2) + Ae^{-3A/4} I(A/4,2). \qquad (5.481)$$

Интенсивность отказов определяется по общим формулам (5.48) и (5.49).

Чтобы найти среднюю наработку до отказа, представим (5.47) в виде смеси экспонент:

$$P_{пр}(T,L_1,L_2) = \sum_{i=0}^{L_1}\frac{A_1^i}{i!}e^{-A_1} + \sum_{i=0}^{L_2}\frac{A_2^i}{i!}e^{-A_2} - \sum_{i=0}^{L_1}\sum_{j=0}^{L_2}\frac{A_1^i}{i!}\frac{A_2^j}{j!}e^{-A} + 2^{L_1+L_2+1}e^{-A/2} -$$

$$-2^{L_1+L_2+1}\left(\sum_{i=0}^{L_1}\frac{(A_1/2)^i}{i!}e^{-A_1-A_2/2} + \sum_{i=0}^{L_2}\frac{(A_2/2)^i}{i!}e^{-A_1/2-A_2}\right) +$$

$$+2^{L_1+L_2+1}\sum_{i=0}^{L_1}\sum_{j=0}^{L_2}\frac{(A_1/2)^i}{i!}\frac{(A_2/2)^j}{j!}e^{-A}. \qquad (5.482)$$

Проинтегрировав (5.482) в интервале (0, T), получим среднюю наработку системы в периоде пополнения:

$$k\lambda\tau_1(T,L_1,L_2) = \frac{A}{A_1}\sum_{i=0}^{L_1} I(A_1,i+1) + \frac{A}{A_2}\sum_{i=0}^{L_2} I(A_2,i+1) -$$

$$-\sum_{i=0}^{L_1}\sum_{j=0}^{L_2} C_{i+j}^i \left(\frac{A_1}{A}\right)^i \left(\frac{A_2}{A}\right)^j I(A,i+j+1) + 2^{L_1+L_2+2} I(A/2,1) -$$

$$-2^{L_1+L_2+2}\left(\frac{A}{A+A_1}\sum_{i=0}^{L_1}\left(\frac{A_1}{A+A_1}\right)^i I(A_1+A_2/2,i+1)+\frac{A}{A+A_2}\sum_{i=0}^{L_2}\left(\frac{A_2}{A+A_2}\right)^i I(A_1/2+A_2,i+1)\right)+$$

$$+2^{L_1+L_2+1}\sum_{i=0}^{L_1}\sum_{j=0}^{L_2}C_{i+j}^i\left(\frac{A_1}{2A}\right)^i\left(\frac{A_2}{2A}\right)^j I(A,i+j+1). \qquad (5.483)$$

В частности, при $L_1 = L_2 = 1$ имеем:

$$k\lambda\tau_1(T,1,1)=\frac{1}{\alpha}\big(I(A_1,1)+I(A_1,2)\big)+\frac{1}{\overline{\alpha}}\big(I(A_2,1)+I(A_2,2)\big)+7I(A,1)+3I(A,2)+$$

$$+2\alpha\overline{\alpha}I(A,3)+16I(A/2,1)-\frac{8}{1-\overline{\alpha}/2}I(A_1+A_2/2,1)-\frac{4\alpha}{\big(1-\overline{\alpha}/2\big)^2}I(A_1+A_2/2,2)-$$

$$-\frac{8}{1-\alpha/2}I(A_1/2+A_2,1)-\frac{4\overline{\alpha}}{\big(1-\alpha/2\big)^2}I(A_1/2+A_2,2),\alpha=A_1/A,\overline{\alpha}=1-\alpha. \qquad (5.484)$$

При $A_1 = A_2$ формула упрощается:

$$k\lambda\tau_1(T,1,1)=4\big(I(A/2,1)+I(A/2,2)\big)+7I(A,1)+3I(A,2)+\frac{1}{2}I(A,3)+$$

$$+16I(A/2,1)-\frac{64}{9}\big(3I(3A/4,1)+I(3A/4,2)\big). \qquad (5.485)$$

Интегрируя (5.482) по бесконечному интервалу, получим значение средней наработки системы при неограниченном увеличении периода пополнения:

$$k\lambda\tau_{1,np}(\infty,L_1,L_2)=\frac{A}{A_1}(L_1+1)+\frac{A}{A_2}(L_2+1)-\sum_{i=0}^{L_1}\sum_{j=0}^{L_2}C_{i+j}^i\left(\frac{A_1}{A}\right)^i\left(\frac{A_2}{A}\right)^j+2^{L_1+L_2+2}-$$

$$-2^{L_1+L_2+1}\left(\frac{A}{A_1+A_2/2}\sum_{i=0}^{L_1}\left(\frac{A_1}{2A_1+A_2}\right)^i+\frac{A_2}{A_2+A_1/2}\sum_{i=0}^{L_2}\left(\frac{A_2}{2A_2+A_1}\right)^i-\sum_{i=0}^{L_1}\sum_{j=0}^{L_2}C_{i+j}^i\left(\frac{A_1}{2A}\right)^i\left(\frac{A_2}{2A}\right)^j\right). \qquad (5.486)$$

В частности, при $L_1 = L_2 = 1$ имеем:

$$k\lambda\tau_{1,np}(\infty,1,1)=26+\frac{2A^2}{A_1A_2}+\frac{2A_1A_2}{A^2}-$$

$$-4A\left(\frac{A_1}{\big(A_1+A_2/2\big)^2}+\frac{A_2}{\big(A_2+A_1/2\big)^2}+\frac{3A}{\big(A_1+A_2/2\big)\big(A_2+A_1/2\big)}\right). \qquad (5.487)$$

Отсюда при $A_1 = A_2$ получим значение, совпадающее с точным значением (5.472). С помощью численных расчетов можно убедиться, что предельное значение (5.487) совпадает с точным значением (5.473) и при неравных A_i. Например, при $A_1 = 2A_2$ формулы (5.473) и (5.487) дают одно и то же значение (7 + 1/225).

Среднюю наработку до отказа системы находим по общей формуле (5.54) или (5.56). Коэффициент готовности определяют по формуле (5.57).

Для расчета коэффициента оперативной готовности необходимо знать вероятности сохранения базовой и пяти деградированных работоспособных структур (см. рис. 5.11, *в*, *г*, *д*, *е*, *ж*). Найдем сначала точные формулы для этих вероятностей в явном виде или в операционной форме.

Вероятность сохранения базовой структуры к концу периода пополнения:

$$P(T, L_1, L_2, S_0) = (1 - I(A_1, L_1 + 1))(1 - I(A_2, L_2 + 1)) . \qquad (5.488)$$

Структура S_1 сохранится в конце периода пополнения, если она первой из деградированных структур возникнет в момент $x < T$ и в течение $T - x$ не изменится, т. е. число отказов элементов второго типа будет не более числа израсходованных ЗЧ. Отсюда

$$P(T, L_1, L_2, S_1) = \int_0^T \frac{\Lambda_1^{L_1+1} x^{L_1}}{L_1!} \sum_{i=0}^{L_2} \frac{(\Lambda_2 x)^i}{i!} e^{-\Lambda x} P_1^{(0)}(T - x, L_2 - i)dx , \qquad (5.489)$$

где $P_1^{(0)}(y, l_2)$ есть сумма вероятностей состояний $0...l_2$ в графе состояний системы с начальной структурой S_1 (см. рис. 5.12, *а*). Используя формулы (5.461, а), найдем изображение функции (5.484):

$$P_1^{(0)*}(s, l_2) = \sum_{i=0}^{l_2} P_i^*(s) = \frac{s}{s + \Lambda_1 / 2} \left(1 - \left(\frac{\Lambda_2}{s + \Lambda_1 / 2 + \Lambda_2} \right)^{l_2+1} \right). \qquad (5.490)$$

Выполняя в (5.489) операционное преобразование и используя (5.490), получим:

$$P^*(s, L_1, L_2, S_1) = \sum_{i=0}^{L_2} C_{L_1+i}^i \frac{\Lambda_1^{L_1+1} \Lambda_2^i}{(s + \Lambda)^{L_1+1+i}} P_1^{(0)*}(s, L_2 - i) . \qquad (5.491)$$

Аналогично находим:

$$P(T, L_1, L_2, S_2) = \int_0^T \frac{\Lambda_2^{L_2+1} x^{L_2}}{L_2!} \sum_{i=0}^{L_1} \frac{(\Lambda_1 x)^i}{i!} e^{-\Lambda x} P_2^{(0)}(T - x, L_1 - i)dx , \qquad (5.492)$$

$$P^*(s, L_1, L_2, S_2) = \sum_{i=0}^{L_1} C_{L_2+i}^i \frac{\Lambda_2^{L_2+1} \Lambda_1^i}{(s + \Lambda)^{L_2+1+i}} P_2^{(0)*}(s, L_1 - i) , \qquad (5.493)$$

$$P_1^{(0)*}(s, l_2) = \frac{s}{s + \Lambda_2 / 2} \left(1 - \left(\frac{\Lambda_1}{s + \Lambda_1 + \Lambda_2 / 2} \right)^{l_1+1} \right).$$

Структура S_3 сохранится в конце периода пополнения, если первой из деградированных структур в момент $x < T$ возникнет структура S_1, а затем в течение $T - x$ система перейдет в одно из работоспособных состояний $0',...,l_2'$. Поэтому:

$$P(T, L_1, L_2, S_3) = \int_0^T \frac{\Lambda_1^{L_1+1} x^{L_1}}{L_1!} \sum_{i=0}^{L_2} \frac{(\Lambda_2 x)^i}{i!} e^{-\Lambda x} P_1^{(1)}(T - x, L_2 - i)dx , \qquad (5.494)$$

$$P_1^{(1)*}(s, l_2) = \sum_{i=0}^{l_2'} P_i^*(s) = \sum_{i=0}^{l_2} \left(\frac{s\Lambda_2^i}{(s + \Lambda_2)^{i+1}} - \frac{s\Lambda_2^i}{(s + \Lambda_1 / 2 + \Lambda_2)^{i+1}} \right) =$$

$$= \frac{\Lambda_1 / 2}{s + \Lambda_1 / 2} - \left(\frac{\Lambda_2}{s + \Lambda_2} \right)^{l_2+1} + \frac{s}{s + \Lambda_1 / 2} \left(\frac{\Lambda_2}{s + \Lambda_1 / 2 + \Lambda_2} \right)^{l_2+1} .$$

Выполняя операционное преобразование в (5.494), получим:

$$P^*(s, L_1, L_2, S_3) = \sum_{i=0}^{L_2} C_{L_1+i}^i \frac{\Lambda_1^{L_1+1}\Lambda_2^i}{(s+\Lambda)^{L_1+1+i}} P_1^{(1)*}(s, L_2 - i)\,. \tag{5.495}$$

Аналогично находим:

$$P(T, L_1, L_2, S_4) = \int_0^T \frac{\Lambda_2^{L_2+1} x^{L_2}}{L_2!} \sum_{i=0}^{L_1} \frac{(\Lambda_1 x)^i}{i!} e^{-\Lambda x} P_2^{(1)}(T - x, L_1 - i)dx\,, \tag{5.496}$$

$$P^*(s, L_1, L_2, S_4) = \sum_{i=0}^{L_1} C_{L_2+i}^i \frac{\Lambda_2^{L_2+1}\Lambda_1^i}{(s+\Lambda)^{L_2+1+i}} P_2^{(1)*}(s, L_1 - i)\,,$$

$$P_2^{(1)*}(s, l_1) = \sum_{i=0}^{l_1'} P_i^*(s) = \frac{\Lambda_2/2}{s+\Lambda_2/2} - \left(\frac{\Lambda_1}{s+\Lambda_1}\right)^{l_1+1} + \frac{s}{s+\Lambda_2/2}\left(\frac{\Lambda_1}{s+\Lambda_1+\Lambda_2/2}\right)^{l_1+1}.$$

Структура S_5 возникает в двух случаях: а) если первой возникает структура S_1 в момент $x < T$, а затем система переходит в состояние $l_2 + 1$; б) если первой возникает структура S_2 в момент $x < T$, а затем система переходит в состояние $l_1 + 1$. Отсюда следует, что

$$P(T, L_1, L_2, S_5) = \int_0^T \frac{\Lambda_1^{L_1+1} x^{L_1}}{L_1!} \sum_{i=0}^{L_2} \frac{(\Lambda_2 x)^i}{i!} e^{-\Lambda x} P_1^{(2)}(T - x, L_2 - i)dx +$$

$$+ \int_0^T \frac{\Lambda_2^{L_2+1} x^{L_2}}{L_2!} \sum_{i=0}^{L_1} \frac{(\Lambda_1 x)^i}{i!} e^{-\Lambda x} P_2^{(2)}(T - x, L_1 - i)dx\,. \tag{5.497}$$

Преобразование в (5.497) дает:

$$P^*(s, L_1, L_2, S_5) = \sum_{i=0}^{L_2} C_{L_1+i}^i \frac{\Lambda_1^{L_1+1}\Lambda_2^i}{(s+\Lambda)^{L_1+1+i}} P_1^{(2)*}(s, L_2 - i) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{L_1} C_{L_2+i}^i \frac{\Lambda_2^{L_2+1}\Lambda_1^i}{(s+\Lambda)^{L_2+1+i}} P_2^{(2)*}(s, L_1 - i)\,,$$

$$P_1^{(2)*}(s, l_2) = P_{l_2+1}^*(s) = \frac{s}{2s+\Lambda}\left(\frac{\Lambda_2}{s+\Lambda_1/2+\Lambda_2}\right)^{l_2+1},$$

$$P_2^{(2)*}(s, l_1) = P_{l_1+1}^*(s) = \frac{s}{2s+\Lambda}\left(\frac{\Lambda_1}{s+\Lambda_1+\Lambda_2/2}\right)^{l_1+1}. \tag{5.498}$$

Выполняя обратное преобразование в (5.491)–(5.498), найдем коэффициент оперативной готовности для наихудшего цикла:

$$K_{oc}^*(\tau, T, L_1, L_2) = P(T, L_1, L_2, S_0)(e^{-\alpha_1} + e^{-\alpha_2} - e^{-\alpha})^2 + P(T, L_1, L_2, S_1)(e^{-\alpha_1} +$$

$$+ e^{-\alpha_2} - e^{-\alpha})e^{-\alpha_2} + P(T, L_1, L_2, S_2)(e^{-\alpha_1} + e^{-\alpha_2} - e^{-\alpha})e^{-\alpha_1} + P(T, L_1, L_2, S_3)e^{-2\alpha_2} +$$

$$+ P(T, L_1, L_2, S_4)e^{-2\alpha_1} + P(T, L_1, L_2, S_5)e^{-\alpha}, \alpha_i = r_i\lambda_i\tau, \alpha = \alpha_1 + \alpha_2\,. \tag{5.499}$$

Коэффициент оперативной готовности для усредненного среднестатистического цикла:

$$K_{oz}(\tau,T,L_1,L_2)=\frac{1}{A}(k\lambda\tau_1^0(e^{-\alpha_1}+e^{-\alpha_2}-e^{-\alpha})^2+k\lambda\tau_1^1(e^{-\alpha_1}+e^{-\alpha_2}-e^{-\alpha})e^{-\alpha_2}+$$

$$+k\lambda\tau_1^2(e^{-\alpha_1}+e^{-\alpha_2}-e^{-\alpha})e^{-\alpha_1}+k\lambda\tau_1^3e^{-2\alpha_2}+k\lambda\tau_1^4e^{-2\alpha_1}+k\lambda\tau_1^5e^{-\alpha}), \quad (5.500)$$

$$k\lambda\tau_1^i=k\lambda\int_0^T P(x,L_1,L_2,S_i)dx, i=0...5.$$

Поскольку точные формулы для вероятностей $P(T,L_1,L_2,S_i)$ весьма громоздки, можно пользоваться приближенными формулами, используя те же соображения, что и при выводе формулы (5.477). Обозначая вероятности сохранения базовой и работоспособной деградированной структуры в модели П2 соответственно через $P_i^{(0)}(T,L_i)$ и $P_i^{(1)}(T,L_i), i=1;2$, и используя формулу (5.69), получим:

$$P(T,L_1,L_2,S_1)=P_1^{(1)}(T,L_1)P_2^{(0)}(T,L_2)=2^{L_1+1}e^{-A_1/2}I(A_1/2,L_1+1)(1-I(A_2,L_2+1)),$$

$$P(T,L_1,L_2,S_2)=P_1^{(0)}(T,L_1)P_2^{(1)}(T,L_2)=2^{L_2+1}e^{-A_2/2}I(A_2/2,L_2+1)(1-I(A_1,L_1+1)),$$

$$P(T,L_1,L_2,S_3)=P_2^{(0)}(T,L_2)(1-P_1(T,L_1))=(1-I(A_2,L_2+1))(I(A_1,L_1+1)-$$

$$-2^{L_1+1}e^{-A_1/2}I(A_1/2,L_1+1)),$$

$$P(T,L_1,L_2,S_4)=P_1^{(0)}(T,L_1)(1-P_2(T,L_2))=(1-I(A_1,L_1+1))(I(A_2,L_2+1)-$$

$$-2^{L_2+1}e^{-A_2/2}I(A_2/2,L_2+1)),$$

$$P(T,L_1,L_2,S_5)=\frac{1}{2}P_1^{(1)}(T,L_1)P_2^{(1)}(T,L_2)=2^{L_1+L_2+1}e^{-A/2}I(A_1/2,L_1+1)I(A_2/2,L_2+1) \quad (5.501)$$

По результатам расчетов (*приложение 5*, примеры П5.34–П5.35) можно сделать следующие выводы:

- приближенное значение $P_{пр}$ находят по формуле (5.478). Оно совпадает с точным значением ВБР. Вычисляя точное значение ВБР по формуле (5.471), по формуле (5.55) определяем приближенное значение средней наработки до отказа $k\lambda T_{ср,пр}$ и, подставляя его в формулу (5.65), получим приближенное значение $P_{пр1}$. Из данных таблицы П5.94 видно, что погрешность δQ оценки $P_{пр1}$ мала и составляет при больших значениях периода пополнения несколько процентов;
- экспоненциальное приближение ВБР на основе экспоненциальной модели (5.65) дает малую погрешность в конце периода пополнения и очень большую в начале периода;
- вероятность сохранения базовой структуры и постепенную деградацию можно проследить по данным таблицы П5.95. Из таблицы следует, что в конце периода с высокой вероятностью можно застать именно базовую структуру, а из пяти деградированных работоспособных структур наиболее вероятно застать одну из двух: S_1 или S_2;
- зависимость интенсивности отказов от периода пополнения не линейная. Она растет быстрее, чем период пополнения: при увеличении периода в 10 раз (от A = 0,4 до A = 4) интенсивность увеличивается в 80 раз;
- зависимость интенсивности отказов от времени внутри периода пополнения не линейная. При изменении $k\lambda t$ от 0,4 до 2 (в 5 раз) интенсивность отказов увеличивается в 36,2 раза.

5.20. Системы со сложной структурой (модель П17)

В этот класс систем включены системы, обладающие двухполюсной когерентной структурой, не сводящейся к последовательно-параллельной структуре [48], а также все неоднородные последовательно-параллельные структуры с зависимыми подсистемами, имеющие более высокий ранг, чем в моделях, рассмотренных ранее (четвертого и более высокого рангов). Последовательно-параллельные структуры могут иметь несколько независимых подсистем. Тогда требование к рангу относится к любой отдельно взятой подсистеме. Кроме того, в данный класс включаются последовательно-параллельные системы, в которых однотипные элементы входят в три или более подсистем второго ранга.

Основная идея анализа надежности систем данного класса состоит в разложении ее структуры по одному или нескольким однотипным элементам на несколько более простых структур, сводя исходную систему к последовательному или параллельному соединению типовых структур П1–П16.

Разложение исходной (базовой) структуры S_0 по элементам i-го типа при наличии в комплекте ЗИП L_i запасных частей проводится по следующим правилам:

- если число отказов элементов в течение времени t не превысит L_i , то к моменту t сохраняется базовая структура, в которой все элементы i-го типа считаются идеально надежными. Обозначим такую структуру $S_0^{(i)}$, получаемую из S_0 путем замыкания элементов i-го типа;
- если число отказов равно $L_i + 1$, то выделяют все различные деградированные структуры первого уровня $S_{1j}^{(i)}$, $j = 1...r_{1i}$ и находят вероятности $p_{1j}^{(i)}$ того, что в системе к моменту окончания периода пополнения окажется деградированная структура первого уровня j-го типа. Структуру $S_{1j}^{(i)}$ получают из S_0 путем обрыва одного из элементов i-го типа и короткого замыкания остальных элементов этого типа;
- если число отказов не превышает максимальный запас живучести m_i [78], то на ν-м уровне деградации ($\nu \le m_i$) выделяют структуры $S_{\nu j}^{(i)}$, $j = 1...r_{\nu i}$, и находят вероятности $p_{\nu j}^{(i)}$. Структуру $S_{\nu j}^{(i)}$ получают из S_0 путем обрыва ν элементов i-го типа и короткого замыкания остальных элементов этого типа.

Учитывая эти правила, общий вид формулы для расчета ВБР системы можно представить в виде:

$$P(T, S_0) = P(X_i \le L_i) P(T, S_0^{(i)}) + \sum_{\nu=1}^{m_i} \sum_{j=1}^{r_{\nu i}} p_{\nu j}^{(i)}(T) P(T, S_{\nu j}^{(i)}) . \qquad (5.502)$$

Формула (5.502) дает всегда оценку снизу для точного значения ВБР. В самом деле, вероятность $p_{\nu j}^{(i)}$ отражает событие, при котором структура $S_{\nu j}^{(i)}$ появляется в момент x внутри интервала $(0,T)$ и сохраняется до конца периода пополнения, а условная вероятность $P(T, S_{\nu j}^{(i)})$ предполагает, что деградированная структура $S_{\nu j}^{(i)}$ является стартовой, т. е. относится к моменту 0. Ясно, что в реальной ситуации до момента $x < T$ система имела либо базовую структуру, либо деградированную структуру с меньшим уровнем деградации, т. е. структуру с большим уровнем избыточности. Но структура с большей избыточностью обеспечивает значение ВБР, более высокое, чем $P(T, S_{\nu j}^{(i)})$.

В формуле (5.502) внешнее суммирование проводится по возможным уровням деградации, а внутреннее суммирование — по возможному разнообразию структур на данном уровне деградации. Выбор типа элемента *i* проводится до составления формулы (5.502) таким образом, чтобы кратчайшим путем получить искомый результат. Другие характеристики системы находят из (5.502) по общим формулам.

Если некоторые структуры из множества $\{ S_{\nu j}^{(i)}, \nu = 1...m_i, j = 1...r_{\nu i}\}$ не удается свести к типовым структурам или комбинации типовых структур, то разложение продолжается по тем же правилам. Рассмотрим пример.

Пример 5.1

Исходная структура S_0 приведена на рис. 5.13, *а*. Необходимо найти вероятность безотказной работы системы с учетом одиночного ЗИП.

Решение

В структуре S_0 каждый из четырех элементов входит в четыре различные подсистемы, зависящие друг от друга через общий запас элементов в комплекте ЗИП. Для структуры S_0 нет соответствующей типовой структуры. Поэтому будем искать вероятность безотказной работы системы путем разложения исходной структуры по оптимальной траектории в соответствии с общей формулой (5.502).

По логической функции структура S_0 относится к структурам 3-го ранга. Максимально возможная глубина разложения равна 3. После проведения разложения по элементу 4 получим три различных структуры $S_0^{(4)}, S_1^{(4)}, S_2^{(4)}$ (см. рис. 5.13, *б–г*). Структура $S_2^{(4)}$ является окончательной, т. к. сводится к последовательному соединению структур модели П1 для элементов 1, 2 и 3. Две других структуры подлежат дальнейшему разложению. Структура $S_0^{(4)}$ разлагается на три структуры $S_{00}^{(43)}, S_{01}^{(43)}, S_{02}^{(43)}$ (см. рис. 5.13, *д–ж*), из которых только $S_{02}^{(43)}$ является окончательной. Структура $S_{00}^{(43)}$ разлагается на три структуры $S_{000}^{(432)}$, $S_{001}^{(432)}$ $S_{002}^{(432)}$ (см. рис. 5.13, *з–к*) и все они являются окончательными. Структура $S_{01}^{(43)}$ разлагается на две структуры $S_{010}^{(432)}, S_{011}^{(432)}$, совпадающие со структурами $S_{001}^{(432)}, S_{002}^{(432)}$ и соответствующие моделям П1 и П4. Структура $S_1^{(4)}$ разлагается на две структуры $S_{10}^{(43)}, S_{11}^{(43)}$, совпадающие соответственно со структурами $S_{01}^{(43)}, S_{02}^{(43)}$. Таким образом на последнем уровне разложения оказывается пять различных структур $S_2^{(4)}, S_{02}^{(43)}, S_{000}^{(432)}, S_{001}^{(432)}, S_{002}^{(432)}$ (см. рис. 5.13, *г*, *ж*, *з–к*). Взаимосвязь структур показана на схеме (рис. 5.14).

В соответствии с этой схемой вероятность безотказной работы системы можно представить в виде:

$$
\begin{aligned}
&P(T,S_0) = P(X_4 \le L_4, П6)\{P(X_3 \le L_3, П6)[P(X_2 \le L_2, S_{000}^{(432)}, П6)P_1(П6) + \\
&+P(X_2 = L_2+1, S_{001}^{(432)}, П6)P_1(П4) + P(X_2 = L_2+2, S_{002}^{(432)}, П6)P_1(П1)] + \\
&+P(X_3 = L_3+1, П6)[P(X_2 \le L_2, S_{010}^{(432)}, П4)P_1(П4) + P(X_2 = L_2+1, S_{011}^{(432)}, П4)P_1(П1)] + \\
&+P(X_3 = L_3+2, S_{02}^{(43)}, П6)P_2(П1)P_1(П1)\} + \\
&+P(X_4 = L_4+1, П6)\{P(X_3 \le L_3, П6)[P(X_2 \le L_2, S_{100}^{(432)}, П4)P_1(П4) + \\
&+P(X_3 = L_3+1, S_{11}^{(43)}, П4)P_2(П1)P_1(П1)\} + P(X_4 = L_4+2, П6)P_3(П1)P_2(П1)P_1(П1).
\end{aligned}
\qquad (5.503)
$$

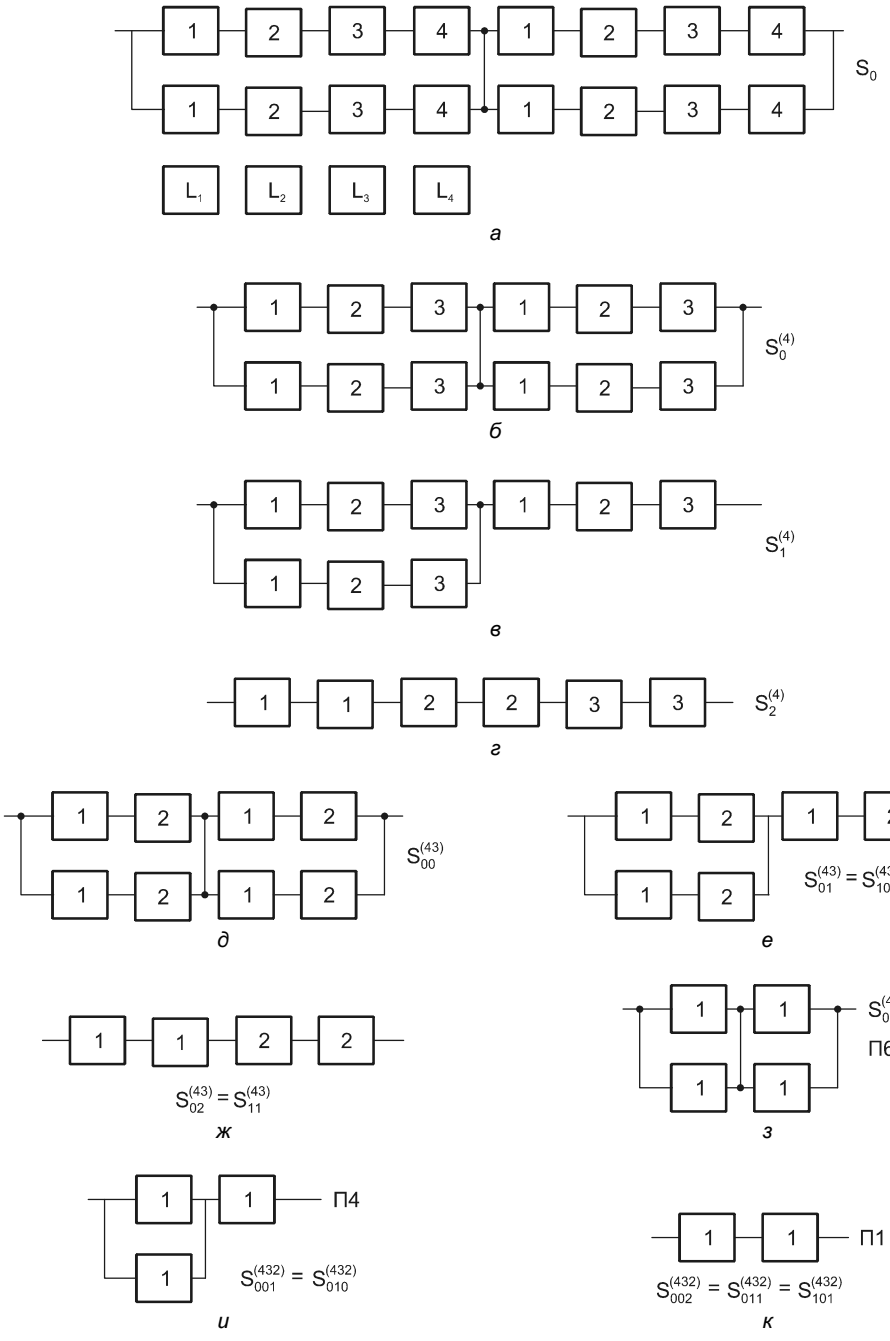


Рис. 5.13. Структурная схема системы (к примеру 5.1): *а* — базовая структура; *б–к* — структуры системы при разрезании системы по элементам 4, 3 и 2

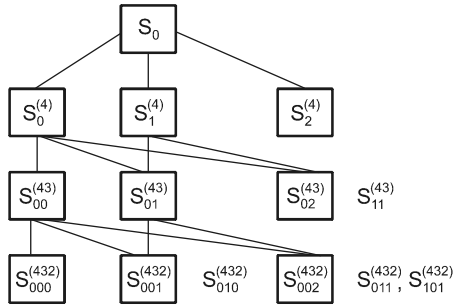


Рис. 5.14. Взаимосвязь структур (к примеру 5.1)

Здесь вероятности $P(X \le L, П6), P(X = L+1, П6), P(X = L+2, П6)$ рассчитывают по формулам (5.173), вероятность P(П6) — по формуле (5.171), вероятности $P(X \le L, П4)$, $P(X = L+1, П4)$ — по формулам (5.112), вероятность $P(П1)$ — по формуле (5.2). Формула (5.503) дает оценку снизу точного значения ВБР. Можно найти и другие более простые и более грубые нижние оценки. Для получения двусторонней оценки надо еще иметь верхнюю оценку.

Двусторонние оценки точного значения вероятности будем искать, используя те же приемы, что и для упрощения структур при структурном резервировании, а именно:

- для получения верхней оценки следует ввести дополнительные вертикальные связи в структуре;
- для получения нижней оценки следует разрывать вертикальные связи в структуре.

Нижнюю оценку найдем, убрав вертикальную перемычку в S_0 между параллельными ветвями. При этом структура приобретает вид, приведенный на рис. 5.15, *а*.

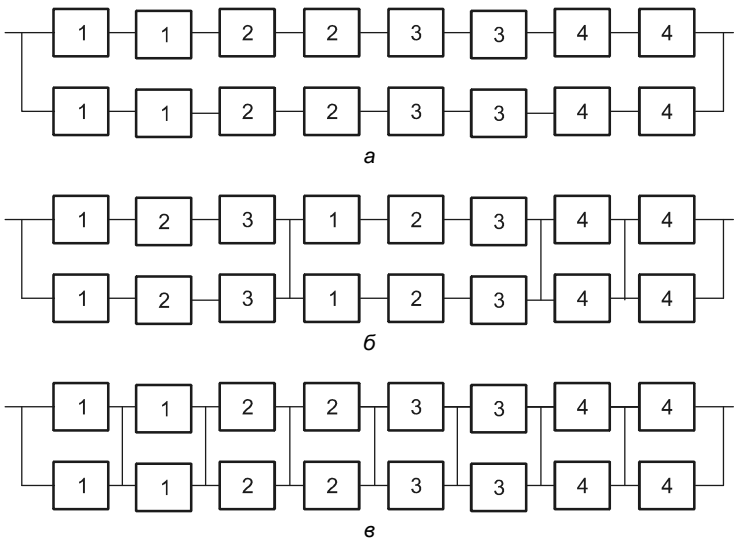


Рис. 5.15. Структурные схемы для нижней (*а*) и верхних (*б*, *в*) оценок ВБР системы (к примеру 5.1)

Проводим последовательное разрезание этой структуры по элементам 4, 3 и 2. Тогда

$$P_н(T,L) = P(X_4 \le L_4, П2)\{P(X_3 \le L_3, П2)[P(X_2 \le L_2, П2)P_1(П2) + P(X_2 = L_2 + 1, П2)P_1(П1)] + P(X_3 = L_3 + 1, П2)P_1(П1)P_2(П1)\} + P(X_4 = L_4 + 1, П2)P_3(П1)P_2(П1)P_1(П1). \quad (5.504)$$

В расчетах вероятностей P_i(П1) следует брать $A_i = 4a_i$. При этом предполагается, что в течение всего периода пополнения другие элементы не влияют на темп потребления запасов в комплекте ЗИП, т. е. отказ одной из двух ветвей происходит из-за очередного отказа именно *i*-го элемента. На самом деле может быть и иначе, когда с некоторой вероятностью отказ ветви наступает из-за отказа другого элемента. Тогда следует брать $A_i = 2a_i$ после отказа ветви. Это значит, что расчет при $A_i = 4a_i$ дает гарантированно нижнюю оценку данного слагаемого в формуле (5.504). Для некоторого уточнения оценки при расчете P_i(П1) можно взять смесь вероятностей:

$$P_i(П1) = \frac{P(X_j \le L_j, П2)}{P_J(П2)} P_i(П1, A_i = 4a_i) + \frac{P(X_j = L_j + 1, П2)}{P_J(П2)} P_i(П1, A_i = 2a_i),\ j \ne i\ . \quad (5.505)$$

Верхнюю оценку для ВБР получим, вводя две дополнительные перемычки между элементами 3 и 4. При этом структура приобретает вид, приведенный на рис. 5.15, *б*. Разрезая структуру по элементам 3 и 2 по правилам, использованным при получении формулы (5.503), найдем:

$$P_в(T,L) = \{P(X_3 \le L_3, П6)[P(X_2 \le L_2, П6)P_1(П6) + P(X_2 = L_2 + 1, П6)P_1(П4) + P(X_2 = L_2 + 2, П6)P_1(П1)] + P(X_3 = L_3 + 1, П6)[P(X_2 \le L_2, П4)P_1(П4) + P(X_2 = L_2 + 1, П4)P_1(П1)] + P(X_3 = L_3 + 2, П6)P_2(П1)P_1(П1)\}P_4(П6). \quad (5.506)$$

Еще одну верхнюю оценку получим, вводя четыре вертикальные перемычки между элементами в параллельных ветвях предыдущей структуры. Тогда получим последовательное соединение структур модели П6 (см. рис. 5.15, *в*). Расчетная формула имеет вид:

$$P_{в1}(T,L) = P_1(П6)P_2(П6)P_3(П6)P_4(П6)\,, \quad (5.507)$$

где вероятности P_i(П6) вычисляют по формуле (5.171).

Некоторые результаты расчетов по формулам (5.503), (5.506) и (5.507) приведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1. $L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = 2$

A	$P_н$	$P_в$	$P_{в1}$	Q	Q_1	Δ	Δ_1	δ,%	δ_1,%
0,50	0,99701	0,99794	0,99802	0,0025	0,0025	0,00047	0,00051	18,9	20,3
0,75	0,98665	0,99068	0,99129	0,0113	0,0110	0,00201	0,00232	17,8	21,0
1,00	0,96317	0,97387	0,97613	0,0315	0,0303	0,00535	0,00648	17,0	21,3
1,25	0,92265	0,94411	0,94965	0,0666	0,0639	0,01073	0,01350	16,1	21,1
1,50	0,86415	0,89973	0,91024	0,1181	0,1128	0,01779	0,02305	15,2	20,4
2,00	0,70402	0,77095	0,79370	0,2625	0,2511	0,03347	0,04484	12,7	17,9
3,00	0,35157	0,44810	0,48008	0,6002	0,5842	0,04827	0,06426	8,04	11,0

Кроме вероятностей $P_и$, $P_в$ и $P_{в1}$, рассчитанных по формулам (5.498), (5.500) и (5.501), в таблице приведены значения вероятности отказов $Q = 1 – (P_и + P_в)/2$ и $Q_1 = 1 – (P_и + P_{в1})/2$, абсолютной погрешности $\Delta = (P_в – P_и)/2$ и $\Delta_1 = (P_{в1} – P_и)/2$ и относительной погрешности $\delta = 100\Delta/Q$ и $\delta_1 = 100\Delta_1/Q_1$. Из данных таблицы следует, что двусторонние оценки дают приемлемую погрешность. Упрощенная верхняя оценка незначительно отличается от более сложной оценки. Поэтому в расчетах можно использовать и более простую формулу (5.507).

Рассмотрим теперь еще один пример, заимствованный из работы [3].

Пример 5.2

Подсистема превышения нейтронной мощности на 20 % (СПМ) системы управления и защиты (СУЗ) реактора ЭГП-6 Билибинской АЭС имеет структуру, приведенную на рис. 5.16.

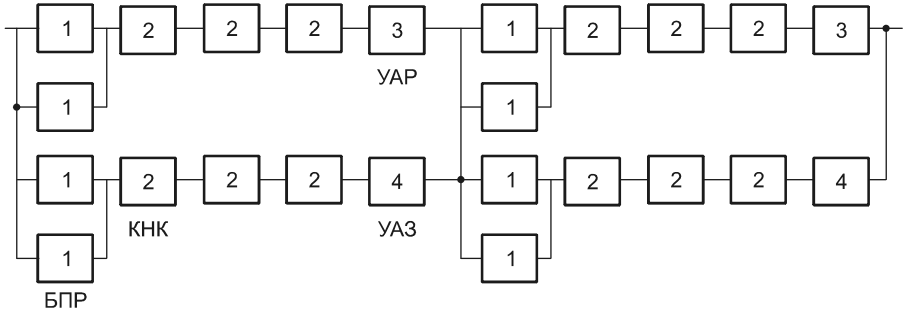


Рис. 5.16. Структурная схема подсистемы СПМ СУЗ реактора ЭГП-6 Билибинской АЭС

В состав подсистемы входят четыре модуля: блок питания реактора БПР, канал КНК, устройство автоматического регулирования УАР и устройство автоматической защиты УАЗ с интенсивностями отказов $\lambda_{БПР}$ = 2,67539E–06 час$^{-1}$, $\lambda_{КНК}$ = 1,84088E–05 час$^{-1}$, $\lambda_{УАР}$ = = 1,45474E–05 час$^{-1}$, $\lambda_{УАЗ}$ = 8,08190E–06 час$^{-1}$. Время функционирования t = 8000 час, период пополнения комплекта ЗИП T = 8000 час. Количество запасных частей для различных вариантов комплектации приведено в табл. 5.2.

Таблица 5.2. Количество запасных частей для различных вариантов комплектации

Номер варианта	Количество запасных частей			
	БПР	КНК	УАР	УАЗ
1	2	2	2	2
2	1	3	2	2
3	1	2	3	2
4	1	2	2	3
5	1	5	1	1

Необходимо найти вероятность безотказной работы для пяти вариантов комплектации, сравнить варианты и оценить эффективность использования ЗИП.

Решение

Для получения нижней оценки ВБР убираем вертикальную перемычку на выходе элементов 3 и 4 (рис. 5.17, *а*), а для получения верхней оценки введем дополнительную перемычку на выходе элементов 1 (рис. 5.17, *б*). Упрощенную верхнюю оценку получим, если введем еще две перемычки на выходах элементов 2 (рис. 5.17, *в*).

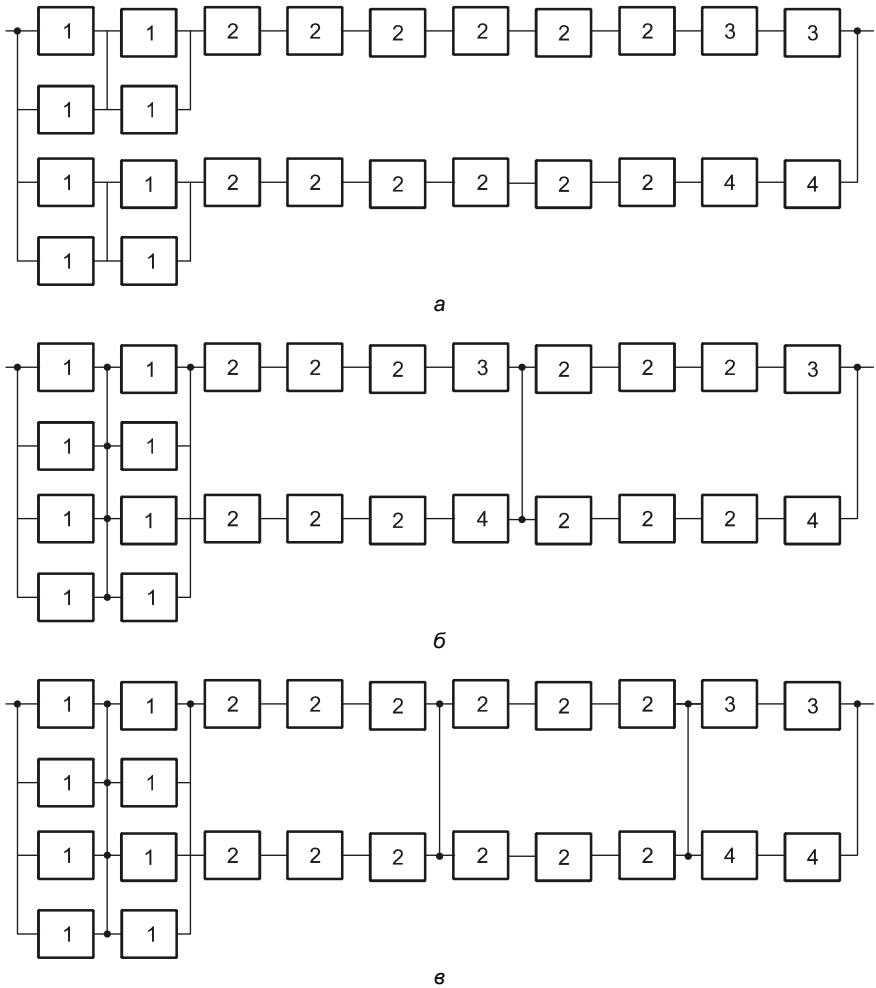


Рис. 5.17. Структурные схемы систем для получения нижней (*а*) и верхних (*б*, *в*) оценок ВБР подсистемы СПМ СУЗ

Используя общую формулу (5.497) и правила разложения, найдем выражение для нижней оценки путем разложения по элементам 4, 3 и 2. Для этого рассмотрим четыре различных события:

1. За время T откажет не более L_4 элементов четвертого типа, не более L_3 элементов третьего типа и не более L_2 элементов второго типа.
2. За время T откажет не более L_4 элементов четвертого типа, не более L_3 элементов третьего типа и ровно $L_2 + 1$ элементов второго типа.

3. За время T откажет не более L_4 элементов четвертого типа, более L_3 элементов третьего типа и не более L_2 элементов второго типа.
4. За время T откажет более L_4 элементов четвертого типа, не более L_3 элементов третьего типа и не более L_2 элементов второго типа.

В первом случае для безотказной работы системы достаточно, чтобы работоспособность сохранила резервированная группа элементов первого типа (рис. 5.18, *а*) со структурой, соответствующей модели П12.

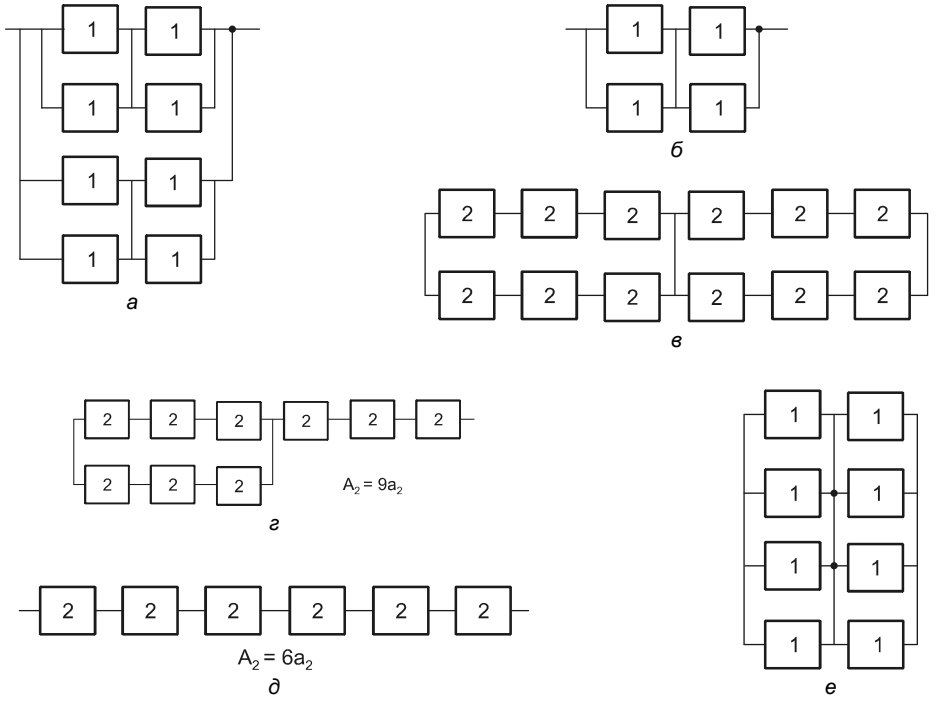


Рис. 5.18. Структурные схемы при разрезании системы по элементам 4, 3 и 2

Во втором случае из-за отказа элементов второго типа из двух ветвей структуры (рис. 5.18, *б*) одна ветвь не сохранит работоспособность. Чтобы не отказала другая ветвь, необходима работоспособность группы элементов первого типа (рис. 5.17, *б*) со структурой, соответствующей модели П6.

В третьем случае также откажет одна ветвь, но из-за отказов элементов третьего типа. Для сохранения работоспособности второй ветви необходима безотказная работа цепочки элементов второго типа, соответствующей модели П1, и резервированной группы элементов первого типа, соответствующей модели П1.

В четвертом случае возникает ситуация, аналогичная третьей, только отказ одной из ветвей структуры системы произойдет из-за отказа элементов четвертого типа.

Из описания возможных событий следует формула:

$$\begin{aligned} P_и(T,L) = P(X_4 \le L_4, П1)\{P(X_3 \le L_3, П1)[P(X_2 \le L_2, П2)P_1(П12) + \\ + P(X_2 = L_2 + 1, П2)P_1(П6)] + P(X_3 > L_3, П1)P_1(П6)P_2(П1)\} + \\ + P(X_4 > L_4, П1)P(X_3 \le L_3, П1)P_2(П1)P_1(П6). \end{aligned} \qquad (5.508)$$

Перегруппировывая слагаемые, имеем:

$$P_н(T,L) = P(X_4 \le L_4, П1)P(X_3 \le L_3, П1)[P(X_2 \le L_2, П2)P_1(П12) + \\ +P(X_2 = L_2+1, П2)P_1(П6)] + [P(X_4 \le L_4, П1)P(X_3 > L_3, П1) + \\ +P(X_4 > L_4, П1)P(X_3 \le L_3, П1)]P_2(П1)P_1(П6). \quad (5.509)$$

Следует заметить, что структуры моделей П6 и П1 возникают в системе не с начала периода пополнения, а внутри его после того момента времени, когда отказывает одна из ветвей исходной структуры системы. Расход запасов элементов до и после этого момента будет различным. Поэтому для гарантированной нижней оценки при расчете вероятностей для моделей П6 и П1 следует брать $A_1 = 8a_1$, $A_2 = 12a_2$, либо делать уточнение типа (5.505).

Разрезание по элементам можно провести и в другом порядке, а именно 2, 3 и 4. Здесь возникает пять различных событий, аналогичных событиям при составлении формулы (5.508). При оценке ситуаций после отказа $L_2 + 1$ элементов второго типа учитываем, что с равной вероятностью 0,5 может отказать либо верхняя, либо нижняя ветвь исходной структуры. Тогда

$$P_н(T,L) = P(X_2 \le L_2, П2)[P(X_3 \le L_3, П1)P(X_4 \le L_4, П1)P_1(П12) + \\ +P(X_3 > L_3, П1)P(X_4 \le L_4, П1)P_1(П6) + P(X_3 \le L_3, П1)P(X_4 > L_4, П1)P_1(П6)] + \\ +0,5P(X_2 = L_2+1, П2)P_1(П6)[P(X_3 \le L_3, П1) + P(X_4 \le L_4, П1)]. \quad (5.510)$$

При расчете вероятностей для модели П1 следует иметь в виду, что после отказа одной из ветвей интенсивность потребления запасов элементов третьего или четвертого типов уменьшается вдвое. Для оценки снизу этот фактор можно не учитывать и в последних двух ситуациях считать, что $A_3 = 2a_3$, $A_4 = 2a_4$.

Подставляя в (5.509) явные выражения для вероятностей из моделей П1, П2, П6 и П12, получим:

$$P_н(T,L) = \sum_{i=0}^{L_4}\frac{A_4^i}{i!}e^{-A_4}\sum_{i=0}^{L_3}\frac{A_3^i}{i!}e^{-A_3}[\sum_{i=0}^{L_2}\frac{A_2^i}{i!}e^{-A_2}P_1(П12) + 2^{L_2+1}e^{-A_2/2}I(\frac{A_2}{2}, L_2+1)P_1(П6)] + \\ +\sum_{i=0}^{L_2}\frac{A_2^i}{i!}e^{-A_2}[I(A_3, L_3+1)(1-I(A_4, L_4+1)) + I(A_4, L_4+1)(1-I(A_3, L_3+1))]P_1(П6). \quad (5.511)$$

Из формулы (5.504) получим:

$$P_н(T,L) = \sum_{i=0}^{L_2}\frac{A_2^i}{i!}e^{-A_2}[\sum_{i=0}^{L_4}\frac{A_4^i}{i!}e^{-A_4}\sum_{i=0}^{L_3}\frac{A_3^i}{i!}e^{-A_3}P_1(П12) + [I(A_3, L_3+1)(1-I(A_4, L_4+1)) + \\ +I(A_4, L_4+1)(1-I(A_3, L_3+1))]P_1(П6)] + 2^{L_2}e^{-A_2/2}I(\frac{A_2}{2}, L_2+1)[\sum_{i=0}^{L_4}\frac{A_4^i}{i!}e^{-A_4} + \\ +\sum_{i=0}^{L_3}\frac{A_3^i}{i!}e^{-A_3}]P_1(П6). \quad (5.512)$$

Здесь

$$P_1(П12) = \sum_{i=0}^{L_1}\frac{A_1^i}{i!}e^{-A_1} + 8e^{-2a_1}\left(\frac{4}{3}\right)^{L_1}I(6a_1, L_1+1) - 8e^{-3a_1}\left(\frac{8}{5}\right)^{L_1}I(5a_1, L_1+1) - \\ -14e^{-4a_1}2^{L_1}I(4a_1, L_1+1) + 32e^{-5a_1}\left(\frac{8}{3}\right)^{L_1}I(3a_1, L_1+1) - 24(4^{L_1})e^{-6a_1}I(2a_1, L_1+1) + \\ +8^{L_1+1}e^{-7a_1}I(a_1, L_1+1), A_1 = 8a_1, \quad (5.513)$$

$$P_1(П6) = \sum_{i=0}^{L_1} \frac{A_1^i}{i!} e^{-A_1} + 4(2^{L_1}) e^{-A_1/2} I(A_1/2, L_1) - 4^{L_1+1} e^{-3A_1/4} I(A_1/4, L_1). \qquad (5.514)$$

Для получения верхней оценки проведем разложение структуры (см. рис. 5.17, *б*) по элементам 4 и 3. При этом выделим шесть различных несовместных событий:

1) $X_4 \le L_4, X_3 \le L_3$; 2) $X_4 = L_4+1, X_3 \le L_3$; 3) $X_3 = L_3+1, X_4 \le L_4$;
4) $X_4 = L_4+1, X_3 = L_3+1$; 5) $X_4 > L_4+1, X_3 \le L_3$; 6) $X_3 > L_3+1, X_4 \le L_4$.

При расчете вероятности четвертого события учтем, что могут возникнуть четыре варианта сочетаний отказов основных элементов третьего и четвертого типов, причем из четырех возможных вариантов только в двух система сохраняет работоспособность. Поэтому условная вероятность сохранения работоспособности равна 0,5. При первом событии элементы второго типа образуют структуру модели П6 (см. рис. 5.18, *в*), при втором и третьем событии — структуру модели П4 (см. рис. 5.18, *г*), в остальных случаях — структуру модели П1 (см. рис. 5.18, *д*). Элементы первого типа образуют структуру, представляющую собой последовательное соединение двух групп «1 из 4» и соответствующую модели П12а (см. рис. 5.18, *е*).

Из описания событий следует формула:

$$\begin{aligned} P_в(T,L) = P_1(П12a)\{&P(X_4 \le L_4, П2)P(X_3 \le L_3, П2)P_2(П6) + \\ &+[P(X_3 \le L_3, П2)P(X_4 = L_4+1, П2) + P(X_4 \le L_4, П2)P(X_3 = L_3+1, П2)]P_2(П4) + \\ &+[0,5P(X_3 = L_3+1, П2)P(X_4 = L_4+1, П2) + P(X_3 \le L_3, П2)P(X_4 > L_4+1, П2) + \\ &+P(X_4 \le L_4, П2)P(X_3 > L_3+1, П2)]P_2(П1)\}. \end{aligned} \qquad (5.515)$$

Подставляя сюда явные выражения для вероятностей из (5.71), имеем:

$$\begin{aligned} P_в(T,L) = \{&\sum_{i=0}^{L_4} \frac{A_4^i}{i!} e^{-A_4} \sum_{i=0}^{L_3} \frac{A_3^i}{i!} e^{-A_3} P_2(П6) + [2^{L_4+1} e^{-A_4/2} I(\frac{A_4}{2}, L_2+1) \sum_{i=0}^{L_3} \frac{A_3^i}{i!} e^{-A_3} + \\ &+2^{L_3+1} e^{-A_3/2} I(\frac{A_3}{2}, L_3+1) \sum_{i=0}^{L_4} \frac{A_4^i}{i!} e^{-A_4}]P_2(П4) + [2^{L_3+L_4+1} e^{-(A_3+A_4)/2} I(\frac{A_3}{2}, L_3+1) I(\frac{A_4}{2}, L_4+1) + \\ &+\sum_{i=0}^{L_3} \frac{A_3^i}{i!} e^{-A_3} Q_4(П2) + \sum_{i=0}^{L_4} \frac{A_4^i}{i!} e^{-A_4} Q_3(П2)] \sum_{i=0}^{L_2} \frac{A_2^i}{i!} e^{-A_2}\} P_1(П12a). \end{aligned} \qquad (5.516)$$

Здесь

$$\begin{aligned} P_1(П12a) = &\sum_{i=0}^{L_1} \frac{A_1^i}{i!} e^{-A_1} + 16e^{-2a_1} \left(\frac{4}{3}\right)^{L_1} I(6a_1, L_1) - 48e^{-3a_1} \left(\frac{8}{5}\right)^{L_1} I(5a_1, L_1) - \\ &+68e^{-4a_1} 2^{L_1} I(4a_1, L_1) - 56e^{-5a_1} \left(\frac{8}{3}\right)^{L_1} I(3a_1, L_1) + 28(4^{L_1}) e^{-6a_1} I(2a_1, L_1) - \\ &+8^{L_1+1} e^{-7a_1} I(a_1, L_1), \end{aligned}$$

$$P_2(П6) = \sum_{i=0}^{L_2} \frac{A_2^i}{i!} e^{-A_2} + 4(2^{L_2}) e^{-A_2/2} I(A_2/2, L_2) - 4^{L_2+1} e^{-3A_2/4} I(A_2/4, L_2), A_2 = 12a_2,$$

$$P_2(П4) = \sum_{i=0}^{L_2} \frac{A_2^i}{i!} e^{-A_2} + 2\left(\frac{k}{r}\right)^{L_2} e^{-(k-r)a_2} I(ra_2, L_2+1), k = 9, r = 3,$$

$$Q_i(П2) = 1 - P_i(П2) = I(A_i, L_i+1) - 2^{L_i+1} e^{-A_i/2} I(\frac{A_i}{2}, L_i+1), \qquad (5.517)$$

При разрезании по элементам 2 и 3 выделим восемь несовместных событий:

1) $X_2 \le L_2$; 2) $X_2 = L_2 + 1$, $X_3 \le L_3$; 3) $X_2 = L_2 + 1$, $X_4 \le L_4$; 4) $X_2 = L_2 + 1$, $X_3 = L_3 + 1$;
5) $X_2 = L_2 + 1$, $X_4 = L_4 + 1$; 6) $X_2 = L_2 + 2$, $X_4 \le L_4$; 7) $X_2 = L_2 + 2$, $X_3 \le L_3$;
8) $X_2 = L_2 + 1$, $X_4 = L_4 + 1$, $X_3 = L_3 + 1$.

При возникновении первого события элементы третьего и четвертого типов образуют структуру, соответствующую модели П16. Во втором событии предполагаем, что отказ основного элемента второго типа происходит в цепочке, где расположен элемент четвертого типа (условная вероятность равна 0,5); тогда работоспособность элементов третьего типа гарантирует работоспособность системы не зависимо от состояния другого элемента четвертого типа. В третьем событии предполагаем, что отказ произошел в цепочке, где расположен элемент третьего типа (условная вероятность равна 0,5); далее аналогично тому, что при третьем событии. В четвертом событии предполагаем, что отказы основных элементов второго и третьего типов произошли в различных дублированных подсистемах, причем элемент второго типа отказал в цепочке, где находится и элемент четвертого типа (условная вероятность равна 0,25). Пятое событие отличается от четвертого лишь тем, что вместо элемента третьего типа в нем участвуют элементы четвертого типа. Отказы двух элементов второго типа после исчерпания запасов могут возникать в шести различных сочетаниях, из которых в четырех система может сохранить работоспособность. При отказе двух нижних цепочек, содержащих элементы четвертого типа (условная вероятность 1/4), и работоспособности элементов третьего типа появляется шестое событие; при отказе двух верхних цепочек (условная вероятность 1/4) появляется седьмое событие; при отказе одной верхней и одной нижней цепочки (условная вероятность 1/2) появляется восьмое событие. В соответствии с этим описанием имеем:

$$P_в(T,L) = P_1(П12a)\{P(X_2 \le L_2, П6)P_{34}(П16) + 0,5P(X_2 = L_2 + 1, П6)[P(X_3 \le L_3, П2) + \\ + P(X_4 \le L_4, П2) + 0,5P(X_3 = L_3 + 1, П2)P_4(П1) + 0,5P(X_4 = L_4 + 1, П2)P_3(П1)] + \\ + \frac{1}{4}P(X_2 = L_2 + 2, П6)[P_3(П1, A_3) + P_4(П1, A_4) + 2P_3(П1, A_3/2)P_4(П1, A_4/2)]. \qquad (5.518)$$

Здесь

$$P_{34}(П16) = 1 - I(A_3, L_3 + 1)I(A_4, L_4 + 1) + 2^{L_3+L_4+1}e^{-(A_3+A_4)/2}I\left(\frac{A_3}{2}, L_3 + 1\right)I\left(\frac{A_4}{2}, L_4 + 1\right),$$

$$P(X_2 \le L_2, П6) = \sum_{i=0}^{L_2}\frac{A_2^i}{i!}e^{-A_2}, P(X_2 = L_2 + 1, П6) = 4^{L_2+1}e^{-3A_2/4}I\left(\frac{A_2}{4}, L_2 + 1\right),$$

$$P(X_2 = L_2 + 2, П6) = 2^{L_2+2}e^{-A_2/2}I\left(\frac{A_2}{2}, L_2 + 1\right) - 2(4^{L_2+1})e^{-3A_2/4}I\left(\frac{A_2}{4}, L_2 + 1\right),$$

$$A_2 = 12a_2, A_3 = 2a_3, A_4 = 2a_4. \qquad (5.519)$$

Согласно структуре (см. рис. 5.17, *в*) упрощенная верхняя оценка ВБР имеет вид:

$$P_{в1}(T,L) = P_1(П12a)P_2(П6)P_{34}(П16), \qquad (5.520)$$

где вероятности P_1, P_2 и P_{34} находят по формулам (5.517), (5.519).

Проведем теперь расчеты ВБР подсистемы СПМ СУЗ для пяти вариантов комплектации ЗИП-О. Согласно табл. 5.3 и данным о периоде пополнения находим значения среднего числа отказов на периоде пополнения.

Таблица 5.3. T = 8000 час

Номер	Наименование	k	$\lambda*10^6$, $ч^{-1}$	$a=\lambda T$	$A=ka$
1	БПР	8	26,7539	0,021403	0,171224
2	КНК	12	1,84088	0,147270	1,767245
3	УАР	2	14,5474	0,116379	0,232758
4	УАЗ	2	8,08190	0,064655	0,12931

Результаты расчетов ВБР для различных периодов пополнения (от 0,5 года до 5 лет, от 4000 час до 40 000 час) приведены в *приложении 5* (пример П5.36, табл. П5.99–П5.103). Сводные результаты расчетов приведены в табл. 5.4 и 5.5.

Таблица 5.4. T = 8000 час. Порядок разрезания: 2, 3

t	Вероятность безотказной работы $P_{ср}(t, T)$				
	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4	Вариант 5
4	0,99458	0,99909	0,99459	0,99458	0,999974
8	**0,94964**	0,98403	0,94977	0,94966	0,998734
16	0,90181	0,96832	0,90206	0,90185	0,997470
24	0,85639	0,95285	0,85674	0,85645	0,996208
32	0,81326	0,93764	0,81371	0,81334	0,994947
40	0,77230	0,92267	0,77283	0,77239	0,993688

Таблица 5.5. T = 8000 час. Порядок разрезания: 4, 3

t	Вероятность безотказной работы $P_{ср}(t, T)$				
	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4	Вариант 5
4	0,99458	0,99909	0,99459	0,99458	0,999980
8	**0,94955**	0,98400	0,94979	0,94959	0,998699
16	0,90165	0,96826	0,90211	0,90172	0,997400
24	0,85617	0,95277	0,85682	0,85627	0,996103
32	0,81298	0,93753	0,81380	0,81310	0,994808
40	0,77197	0,92253	0,77294	0,77211	0,993514

Нижняя оценка ВБР $P_н$ рассчитана по формулам (5.505) и (5.506). В первой формуле порядок разрезания по элементам: 2, 3, во второй формуле: 4, 3. Расчет верхней оценки $P_в$ проведен по формулам (5.512) и (5.513) — порядок разрезания 2, 3; по формулам (5.510) и (5.511) — порядок разрезания 4, 3; по формуле упрощенной оценки (5.513). Кроме того, проведен расчет среднего арифметического нижней и верхней оценок $P_{ср}$ и относительной погрешности расчета вероятности отказа по формуле:

$$\delta_Q = \frac{P_в - P_н}{2} / (1 - P_{ср}).$$

Анализ результатов расчета позволяет сделать следующие выводы:

- наибольшее значение ВБР обеспечивает пятый вариант комплектации ЗИП: $P_{ср}$ (1 год) = 0,9987. Первый, третий и четвертый варианты дают примерно одинаковое значение ВБР: $P_{ср}$ (1 год) = 0,95. Второй вариант занимает промежуточное положение: $P_{ср}$ (1 год) = 0,984;
- нижние и верхние оценки ВБР, полученные при различном порядке разрезания по элементам, близки друг к другу. Для времени эксплуатации 1 год они, как и средние арифметические, отличаются только в четвертом знаке после запятой;
- отличия верхних и нижних оценок друг от друга, как и ширина интервала оценки, также не велики: по отношению даже к малому значению вероятности отказа погрешность обычно не превышает 20–30 %;
- упрощенная верхняя оценка близка к верхней оценке, полученной по формуле (5.510), но существенно проще ее. Верхняя оценка по формуле (5.512) точнее, чем верхняя оценка по формуле (5.510). Поэтому ее следует рекомендовать для дальнейшего применения;
- уточнение оценок можно провести, используя усреднение оценок типа (5.505);
- при периоде пополнения T = 1 год = 8000 час вероятность безотказной работы за время функционирования от 0,5 лет до 5 лет приведена в табл. П5.89–П5.90. Из данных этих таблиц следует, что в вариантах 2 и 5 ЗИП обеспечивает очень высокие значения ВБР даже для пятилетнего срока эксплуатации: более 0,92 для варианта 2 и 0,993 для варианта 5. Причем эти значения существенно больше, чем при времени эксплуатации, равном периоду пополнения. Так, для варианта 2 при пятилетнем сроке эксплуатации ВБР при T = 1 год ВБР составляет 0,923, а при T = 5 лет всего 0,17. Для варианта 5 эти значения составляют 0,996 и 0,34 соответственно.

Полученные двусторонние оценки существенно отличаются от приближенных оценок, приведенных в работе [3]. Это видно из данных табл. 5.6.

Таблица 5.6. Вероятность безотказной работы по вариантам комплектации

Источник	Вероятность безотказной работы				
	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4	Вариант 5
Табл. 5.5	0,94955	0,98400	0,94979	0,94959	0,998699
[3]	0,9978	0,99993	0,99811	0,99788	0,98615

В [3] наилучшим признан вариант 2 комплектации ЗИП, а в наших расчетах лучшим является вариант 5. Существенны различия и в абсолютных значениях ВБР для наилучшего варианта: вероятности отказов различаются в 18,5 раз.

5.21. Вопросы для самоконтроля

- Какие основные допущения принимаются в модели надежности систем с периодическим пополнением запасов в комплекте одиночного ЗИП?
- В чем состоит основная идея расчета средней наработки до отказа системы с периодическим пополнением запасов в комплекте ЗИП-О?
- Каков основной принцип расчета вероятности безотказной работы последовательной системы при наличии одиночного ЗИП?

- Какой приближенной формулой лучше пользоваться для оценки ВБР системы с периодическим пополнением запасов в комплекте ЗИП-О?
- Какова связь между следующими характеристиками надежности системы с периодическим пополнением запасов в комплекте ЗИП-О: ВБР, средняя наработка до отказа и коэффициент готовности?
- Какой общий метод применяют для расчета вероятности отказа однородной системы с заданной схемой резервирования при наличии комплекта запасных частей данного типа в комплекте ЗИП-О?
- Что такое частичная, групповая и полная реконфигурация? Какой эффект можно ожидать от ее применения?
- Каким образом можно использовать библиотеку расчетных формул по типовым структурам резервирования при оценке надежности другой последовательно-параллельной структуры, не вошедшей в библиотеку?
- Оцените возможности методики расчета надежности, изложенной в данной главе, и приближенной методики *главы 2* для класса последовательно-параллельных структур, сравните их по возможной области применения в пределах указанного класса.
- Оцените возможности методики расчета надежности, изложенной в данной главе, и приближенной методики *главы 2* для класса сложных структур, сравните их по возможной области применения в пределах указанного класса.
- Сравните по критерию надежности степень эффективности использования двух видов ресурса: запасные части при периодическом пополнении запасов и встроенный нагруженный резерв той же кратности. Каковы возможности рационального сочетания обоих видов ресурса?
- Каковы принципы построения двусторонних оценок вероятности отказа системы со сложной структурой?
- Каковы принципы построения двусторонних оценок вероятности отказа неоднородных систем с последовательно-параллельной структурой?
- Как влияет степень доступности запасов в комплекте ЗИП-О на показатели надежности системы?

ГЛАВА 6

Надежность многофункциональных систем при периодическом пополнении запасов в комплекте ЗИП-О

6.1. Общие положения

Оценка надежности многофункциональных систем (МФС) проводится отдельно по каждой функционально самостоятельной операции (ФСО), предназначенной для выполнения одной или группы функций. В выполнении ФСО занята только часть аппаратно-программного комплекса системы, тогда как комплект одиночного ЗИП создается для устранения отказов любых модулей определенного типа, а не только тех, которые заняты в выполнении конкретной ФСО. В результате возникает ситуация, когда интенсивность потребления запасных частей не совпадает с интенсивностью отказов модулей, занятых в выполнении определенной ФСО. Поэтому для оценки надежности МФС не могут быть использованы формулы, разработанные для однофункциональных систем (ОФС). Аналогичная ситуация возникает и при групповом комплекте ЗИП, причем не только для МФС, но и для ОФС. В самом деле, при эксплуатации одновременно нескольких образцов изделия, обслуживаемых комплектом ЗИП-Г, расчет надежности проводится для одного образца, а потребление ЗЧ происходит всеми работающими образцами. Если отсутствует одиночный комплект ЗИП, то при наличии нескольких однотипных ОФС и групповом комплекте ЗИП ситуация аналогична той, которая возникает при одной МФС и одиночном ЗИП.

Поэтому расчет надежности МФС при одиночном комплекте ЗИП и любых систем (ОФС или МФС) при групповом комплекте ЗИП (без одиночного ЗИП) проводят по одним и тем же формулам, если время доставки ЗЧ из комплекта ЗИП и время замены суммарно находятся в пределах допустимых значений времени перерыва в работе системы. Это позволяет пренебречь временем доставки и замены, полагая в моделях надежности гарантированным восстановление работоспособности при наличии в необходимой запасной части в комплекте ЗИП. Далее можно не различать тип комплекта ЗИП и формализовать работу системы следующим образом.

Пусть многофункциональная система характеризуется вектором $n = (n_1, n_2, ..., n_M)$ количества модулей различных типов, обслуживаемых комплектом ЗИП, вектором $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_M)$ интенсивностей отказов модулей, вектором $T = (T_1, T_2, ..., T_M)$ периодов пополнения запасов. Подсистема с номером j, выполняющая j-ю ФСО и называемая далее основной (ОПС), дополнительно характеризуется векторами состава $k_j = (k_{j1}, k_{j2}, ..., k_{jM})$ и структуры $S_j = (S_{j1}, S_{j2}, ..., S_{jM})$. Аппаратура, не занятая в выполнении ФСО, образует дополнительную подсистему (ДПС). Некоторые позиции в векторах k_j и S_j могут быть пустыми, если модули данного типа не используются в основной подсистеме. Если S_j не сводится к последовательному или

параллельному соединению однородных структур S_{jl} , то количество компонент вектора S_j может быть меньше M. В наиболее сложном случае структура S_j не удается разделить на компоненты.

Дополнительная подсистема характеризуется вектором $n_j - k_j$ и вектором λ. Структура этой подсистемы не имеет значения, т. к. интенсивности потребления ЗЧ не зависят от структуры.

Для оценки надежности МФС по j-й ФСО применяют тот же набор показателей, что и для ОФС. При этом могут использоваться как точные, так и приближенные формулы.

6.1.1. Приближенные оценки первого типа

Оценки надежности первого типа основаны на использовании показателей достаточности комплекта ЗИП. Для последовательных систем рассчитывают сначала показатели достаточности: вероятность достаточности $P_{ЗИП}$ или коэффициент готовности комплекта ЗИП $K_{гЗИП}$. Затем рассчитывают вероятность безотказной работы или коэффициент готовности системы при неограниченном комплекте ЗИП. Далее показатели надежности и достаточности перемножаются:

$$P_i(t, T_i, L_i, n_i, k_i) = P_i(t, k_i, \infty) P_{ЗИПi}(L_i, T_i, n_i), \tag{6.1}$$

$$K_{гi}(T_i, L_i, n_i, k_i) = K_{гi}(k_i, \infty) K_{гЗИПi}(L_i, T_i, n_i). \tag{6.2}$$

Для структурно резервированной системы со структурой S_j сначала рассчитывают коэффициент готовности комплекта ЗИП, а затем приращение времени восстановления, обусловленное степенью готовности комплекта ЗИП:

$$\Delta t_{ЗИПi}(L_i, T_i, n_i) = -\ln K_{гЗИПi}(L_i, T_i, n_i) / k_i \lambda_i . \tag{6.3}$$

Далее рассчитывают полное среднее время восстановления:

$$\overline{T}_{вi}(L_i, T_i, n_i) = \overline{T}_{вi}(\infty) + \Delta t_{ЗИПi}(L_i, T_i, n_i) . \tag{6.4}$$

Показатели надежности подсистемы (вероятность безотказной работы, коэффициент готовности и коэффициент оперативной готовности) рассчитывают по формулам для восстанавливаемых систем при неограниченном ЗИП, в которых в качестве среднего времени восстановления используют полное время с учетом готовности ЗИП:

$$P_i(t) = P_i(t, \overline{T}_{вi}(L_i, T_i, n_i), k_i, \lambda_i, S_i, \infty), \tag{6.5}$$

$$K_{гi} = K_{гi}(\overline{T}_{вi}(L_i, T_i, n_i), k_i, \lambda_i, S_i, \infty), \tag{6.6}$$

$$K_{огi}(\tau) = K_{огi}(\tau, \overline{T}_{вi}(L_i, T_i, n_i), k_i, \lambda_i, S_i, \infty). \tag{6.7}$$

Если резервированные группы (подсистемы) соединены последовательно и независимы как по отказам, так и по восстановлениям, то показатели надежности подсистем перемножаются и получаются соответствующие показатели надежности системы:

$$P_c(t) = \prod_{i=1}^{M} P_i(t, T_i, L_i, n_i, k_i), \tag{6.8}$$

$$K_{гc} = \prod_{i=1}^{M} K_{гi}(\overline{T}_{вi}(L_i, T_i, n_i), k_i, \lambda_i, S_i, \infty), \tag{6.9}$$

$$K_{огc}(\tau) = \prod_{i=1}^{M} K_{огi}(\tau, \overline{T}_{вi}(L_i, T_i, n_i), k_i, \lambda_i, S_i, \infty). \tag{6.10}$$

Данный приближенный метод имеет ряд достоинств:

- он обладает высокой универсальностью, т. к. не требует, как правило, разработки специализированных моделей надежности;
- он позволяет использовать хорошо разработанный математический аппарат теории надежности восстанавливаемых резервированных систем при неограниченном числе восстановлений;
- при расчетах надежности нерезервированных систем метод позволяет заодно контролировать показатели достаточности всего комплекта одиночного ЗИП в целом. В самом деле, в этом случае формулы (6.8) и (6.9) удается представить в виде:

$$P_c(t) = P_c(t,k,\infty)P_{ЗИП}(L,T,n), P_{ЗИП}(L,T,n) = \prod_{i=1}^{M} P_{ЗИПi}(L_i,T_i,n_i), \qquad (6.11)$$

$$K_{гс} = K_{гс}(k,\infty)K_{гЗИП}(L,T,n), K_{гЗИП}(L,T,n) = \prod_{i=1}^{M} K_{гЗИПi}(L_i,T_i,n_i). \qquad (6.12)$$

Если известны требования к надежности системы, то при известных характеристиках элементов системы легко найти и нормативные значения показателей достаточности комплекта ЗИП.

Однако данный метод имеет и ряд серьезных недостатков:

- параметры дополнительной подсистемы существенно влияют на показатели надежности основной подсистемы при выполнении конкретной ФСО, а сложность основной подсистемы (значение вектора k) может вообще практически не влиять на них, т. к. $P_{ЗИП}$ и $K_{гЗИП}$ зависят только от n;
- невозможно гарантировать знак погрешности, т. е. оценка по формулам (6.8)–(6.10) может быть как сверху, так и снизу. Это значит, что нельзя гарантировать выполнение требований к надежности, даже если требования выполняются по отношению к приближенной оценке;
- в смешанной однородной структуре возникают трудности с определением параметров расчета. Поскольку в ней одна часть элементов резервирована, а другая нет (см. рис. 5.4, *в*, *г*), то в структуре надо одновременно использовать формулы (6.1) и (6.5) или (6.2) и (6.6). После расчета показателей надежности для обеих частей их надо перемножить:

$$P_i(t) = P_i(t,k_{0i},S_{0i},\infty)P_{ЗИПi}(L_{0i},T_{0i},n_{0i})P_i(t,\overline{T}_{вi}(L_{1i},S_{1i},T_{1i},n_{1i}),k_{1i},\lambda_{1i},S_{1i},\infty), \qquad (6.13)$$

где S_{0i} и S_{1i} — структуры нерезервированной и резервированной частей для элементов i-го типа. При проведении расчетов надо назначать количество запасных частей L_{0i} и L_{1i}. Возникает задача о связи этих значений с фактическим количеством ЗЧ L_i. Если взять $L_{0i} = L_{1i} = L_i$, то получим завышение фактических запасов элементов i-го типа и дополнительное завышение показателей надежности. Если же взять $L_{0i} + L_{1i} = L_i$, то запасы искусственно подразделяются на две неполнодоступные части (в действительности этого нет), и оценка надежности при этом будет занижена;

- метод практически не работает, если не удается представить структуру системы в виде последовательного соединения групп однотипных элементов.

6.1.2. Приближенные оценки второго вида

Общий подход к построению расчетных формул состоит в том, чтобы учесть в показателе достаточности запасов факт потребления ЗЧ дополнительной подсистемой (ДПС). Для этого вводится вероятность удовлетворения запроса на ЗЧ после i-го отказа элементов данного

типа в основной подсистеме (ОПС) $P_{уз}(i)$. Тогда ВБР однородной системы, состоящей из ОПС и ДПС, можно представить в виде:

$$P_c(t,L) = P(t,0) + \sum_{i=1}^{L} \Delta P(t,i) P_{уз}(t,i), t \le T, \quad (6.14)$$

где $\Delta P(t,i)$ — приращение ВБР от добавления в комплект ЗИП еще одной i-й по счету ЗЧ. Очевидно, что запрос будет удовлетворен, если к моменту i-го отказа в ОПС дополнительная подсистема израсходует не более $L - i$ запасных частей. В качестве оценки вероятности $P_{уз}(t,i)$ можно использовать вероятность того, что за время t в ДПС произойдет не более $L - i$ отказов. Такая оценка является нижней, т. к. фактически последний отказ произойдет ближе к концу интервала (0, t), а в (6.14) предполагается, что $L - i$ запасных частей будет израсходовано уже в начале интервала. Кроме того, формула (6.14) соответствует дисциплине обслуживания с абсолютным приоритетом ДПС, тогда как на самом деле дисциплина бесприоритетная.

При простейшем потоке отказов вероятность удовлетворения запроса можно выразить формулой:

$$P_{уз}(t,i) = P(X(t) \le L - i) = \sum_{i=0}^{L-i} \frac{((n-k)\lambda t)^i}{i!} e^{-(n-k)\lambda t}. \quad (6.15)$$

При $t = T$ имеем:

$$P_{уз}(T,i) = P(X(T) \le L - i) = \sum_{i=0}^{L-i} \frac{B^i}{i!} e^{-B}, B = (n-k)a, a = \lambda T. \quad (6.16)$$

Значения $P(t,0)$ и $\Delta P(t,i)$ находят по формулам *главы 5* для различных типовых моделей.

6.1.3. Точные методы расчета надежности

Для получения расчетных формул основных показателей надежности однородной системы со структурой S_0 при выполнении определенной ФСО можно использовать дифференциальный или интегральный метод.

Дифференциальный метод

При L запасных частях данного типа в комплекте одиночного ЗИП потребление ЗЧ определяется полным составом систем (ОПС и ДПС). После исчерпания запасов вероятность безотказной работы системы при выполнении ФСО определяется только структурой ОПС. При общем резервировании граф состояний имеет вид графа процесса гибели и размножения и содержит всего $L + m + 1$ состояний, где m — максимальный запас живучести [78] (рис. 6.1).

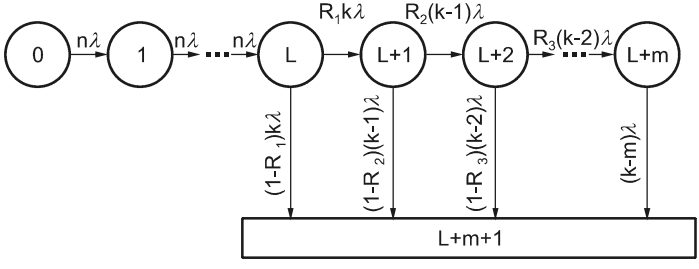


Рис. 6.1. Граф состояний однородной многофункциональной системы

В состояниях 0...$L-1$ в комплекте ЗИП имеется, по крайней мере, одна ЗЧ. Поэтому отказ элемента ОПС гарантированно не приводит к отказу системы. В состоянии L возможен отказ системы с некоторой вероятностью $(1-R_1)k\lambda$, если в структуре S_0 есть нерезервированная часть. Величина R_1 имеет смысл условной вероятности сохранить работоспособность при условии, что в состоянии L в ОПС произошел отказ одного из элементов. В состояниях $L+i$, $i=1...m$, структура S_i получается в результате деградации первоначальной структуры S_0. Она имеет меньшую структурную избыточность, чем S_0, но является работоспособной. Интенсивности переходов между состояниями определяются количеством работоспособных элементов в ОПС и показателем выживаемости R_i [78].

Система дифференциальных уравнений Колмогорова, составленная по графу состояний, имеет вид:

$$P_0'(t) = -n\lambda P_0(t), \tag{6.17}$$

$$P_i'(t) = n\lambda P_{i-1}(t) - n\lambda P_i(t), i = 1...L-1,$$

$$P_L'(t) = n\lambda P_{L-1}(t) - k\lambda P_L(t),$$

$$P_{L+i}'(t) = R_i(k-i+1)\lambda P_{L+i-1}(t) - (k-i)\lambda P_{L+i}(t), i = 1...m,$$

$$Q_c'(t) = P_{L+m+1}'(t) = \sum_{i=0}^{m}(1-R_{i+1})(k-i)\lambda P_{L+i}(t), R_{m+1} = 0.$$

Операционное преобразование Лапласа — Карсона в (6.17) дает:

$$P_{L-1}^*(s) = \frac{s(n\lambda)^{L-1}}{(s+n\lambda)^L}, P_L^*(s) = \frac{n\lambda}{s+k\lambda}P_{L-1}^*(s) = \frac{s}{s+k\lambda}\left(\frac{n\lambda}{s+n\lambda}\right)^L, \tag{6.18}$$

$$P_{L+i}^*(s) = \frac{R_i(k-i+1)\lambda}{s+(k-i)\lambda}P_{L+i-1}^*(s) = \frac{s}{s+k\lambda}\left(\frac{n\lambda}{s+n\lambda}\right)^L\prod_{j=1}^{i}\frac{R_j(k-j+1)\lambda}{s+(k-j)\lambda}, i = 1...m,$$

$$P_{L+m}^*(s) = \frac{R_m(k-m+1)\lambda}{s+(k-m)\lambda}P_{L+m-1}^*(s) = \frac{s}{s+k\lambda}\left(\frac{n\lambda}{s+n\lambda}\right)^L\sum_{i=0}^{m}(1-R_{i+1})\prod_{j=1}^{i}\frac{R_j(k-j+1)\lambda}{s+(k-j)\lambda},$$

$$Q_c^*(s) = \sum_{i=0}^{m}\frac{1}{s}(1-R_{i+1})(k-i)\lambda P_{L+i}^*(s) = \left(\frac{n\lambda}{s+n\lambda}\right)^L\sum_{i=0}^{m}(1-R_{i+1})\prod_{j=0}^{i}\frac{R_j(k-j)\lambda}{s+(k-j)\lambda}.$$

Здесь $R_0 = 1$, $R_{m+1} = 1$. Далее следует выполнить обратное преобразование. Учет конкретного вида структуры S_0 сводится к определению показателей выживаемости R_i.

Учитывая, что подграф графа состояний (см. рис. 6.1) от состояния L до состояния $L+m+1$ является графом состояний резервированной системы при $L=0$, можно записать общее соотношение:

$$Q_c^*(s, L, S_0) = \left(\frac{n\lambda}{s+n\lambda}\right)^L Q_c^*(s, 0, S_0). \tag{6.19}$$

Этому соотношению в области изображений соответствует интегральное соотношение в области оригиналов:

$$Q_c(T, L, S_0) = \int_0^T \frac{(n\lambda)^L x^{L-1}}{(L-1)!}e^{-n\lambda x}Q_c(T-x, 0, S_0)dx. \tag{6.20}$$

Сравнивая изображения для вероятности отказа в формулах (6.18) и (6.19), видим, что

$$Q_c^*(s,0,S_0)=\sum_{i=0}^{m}(1-R_{i+1})\prod_{j=0}^{i}\frac{R_j(k-j)\lambda}{s+(k-j)\lambda}. \qquad (6.21)$$

Формулы (6.19) и (6.20) верны и в случае, когда граф состояний имеет более сложный вид и не имеет линейного вида.

Рассмотрим теперь общий случай, когда модель надежности не сводится к процессу гибели и размножения. Тогда граф состояний имеет вид, аналогичный графу, приведенному на рис. 5.3. Отличие взвешенного графа состояний МФС от графа ОФС состоит только в том, что интенсивности переходов между состояниями в структуре S_0 будут равными $n\lambda$, а не $k\lambda$ как в случае ОФС. С учетом отличий система дифференциальных уравнений Колмогорова приобретает вид:

$$P_0^{'}(t)=-n\lambda P_0(t), P_i^{'}(t)=n\lambda P_{i-1}(t)-n\lambda P_i(t), i=1...L-1, \qquad (6.22)$$

$$P_L^{'}(t)=n\lambda P_{L-1}(t)-k\lambda P_L(t),$$

$$P_i^{'}(t)=\lambda_{Li}P_L(t)-\lambda_i P_i(t), i\in M_1, \lambda_i=\sum_{(r)}\lambda_{ir},$$

$$P_i^{'}(t)=\sum_{l\in M_1\cup...\cup M_{j-1}}P_l(t)\lambda_{li}-\lambda_i P_i(t), i\in M_j, \lambda_i=\sum_{(r)}\lambda_{ir}, j=2...m,$$

$$P_{m+1}^{'}(t)=\sum_{l\in M_{d+1}\cup...\cup M_m}P_l(t)\lambda_{l,m+1}.$$

Здесь λ_{Li} — интенсивности переходов из состояния L в состояния i.

Операционное преобразование в (6.22) дает:

$$P_L^*(s)=\frac{s}{s+k\lambda}\left(\frac{n\lambda}{s+n\lambda}\right)^L, P_i^*(s)=\frac{\lambda_{Lj}}{s+\lambda_i}P_L^*(s), i\in M_1,$$

$$P_i^*(s)=\sum_{l\in M_1\cup...\cup M_{j-1}}P_l^*(s)\frac{\lambda_{li}}{s+\lambda_i}, i\in M_j, j=2...m,$$

$$Q_c^*(s)=\sum_{l\in M_{d+1}\cup...\cup M_m}\frac{1}{s}P_l^*(s)\lambda_{l,m+1}. \qquad (6.23)$$

Решение (6.23) можно представить в виде (6.19). Формулу $Q_c^*(s,0,S_0)$ находят по графу состояний резервированной системы без ЗИП по известным правилам.

Интегральный метод

Рассмотрим вероятность $P_c(t,l,S_0)$ того, что однородная система, имеющая в своем составе n элементов, из которых k элементов, соединенных по схеме S_0, находятся в ОПС, будет работоспособна в течение времени t при наличии в комплекте ЗИП l запасных частей (l = 0...L). Кроме того, введем вероятность $P_c(t,S_j)$ безотказной работы системы в течение t при отсутствии ЗИП и начальной структуре S_j (j = 1...m), которая возникает после некоторой деградации структуры S_0.

Эти вероятности удовлетворяют системе интегральных уравнений:

$$P_c(t,L,S_0) = e^{-k\lambda t} + \int_0^t \sum_{i=0}^{L-1} P_i((n-k)\lambda x) P_c(t-x, L-1-i, S_0) dF_1(x) + \\ + \sum_{j=1}^{m} R_j \int_0^t P_{\geq L}((n-k)\lambda x) P_c(t-x, S_j) dF_j(x), L = 1,2,...,t \leq T, \tag{6.24}$$

$$P_c(t,l,S_0) = 0, l < 0, P_i((n-k)\lambda x) = \frac{((n-k)\lambda x)^i}{i!} e^{-(n-k)\lambda x},$$

$$P_{\geq L}((n-k)\lambda x) = I((n-k)\lambda x, L),$$

где:

$F_j(x)$ — функция распределения наработки ОПС до j-го отказа элементов;

$P_i((n-k)\lambda x)$ — вероятность того, что в ДПС за время x произойдет ровно I отказов элементов;

$P_{\geq L}((n-k)\lambda x)$ — вероятность того, что в ДПС за время x произойдет не менее L отказов элементов;

R_j — показатель выживаемости структуры S_j.

Первое слагаемое в (6.24) выражает вероятность того, что в ОПС в течение времени t не будет отказов. Второе слагаемое выражает вероятность того, что к моменту первого отказа элемента ОПС в ЗИП останется хотя бы одна ЗЧ и поэтому удается сохранить первоначальную структуру S_0. Третье слагаемое выражает вероятность того, что к моменту первого и следующих отказов элементов ОПС все запасы данного типа в ЗИП уже исчерпаны и не удается сохранить структуру S_0, а в ОПС появляется структура S_j.

Поскольку интегралы в (6.24) являются интегралами типа свертки, система интегральных уравнений (6.24) с помощью операционного преобразования сводится к системе алгебраических уравнений типа рекуррентных соотношений относительно изображений $P_c^*(s,l,S_0)$ и $P_c^*(s,S_j)$, l = 0, 1, ..., L. Решая эту систему относительно $P_c^*(s,L,S_0)$ и выполняя обратное преобразование Лапласа — Карсона, найдем ВБР системы $P_c(t,l,S_0)$, $t \leq T$. Прочие показатели надежности находят по общим формулам (5.48)–(5.59).

Рассмотрим теперь некоторые типовые структуры МФС. Нумерация моделей соответствует нумерации, использованной в *главе 5*, а в обозначении добавляется лишь буква М, отмечающая принадлежность модели многофункциональной системе.

6.2. Последовательная система (модель МП1)

Дополнительно к модели МП1 предположим, что всего однородная система содержит n одинаковых элементов, из которых $n - k$ элементов находится в ДПС. Найдем показатели надежности.

Чтобы найти ВБР, составим систему интегральных уравнений типа (6.24). Поскольку в данном случае система не имеет деградированных работоспособных структур, система уравнений приобретает вид:

$$P_c(T,L) = e^{-A} + \int_0^T \sum_{i=0}^{L-1} \frac{((n-k)\lambda x)^i}{i!} e^{-(n-k)\lambda x} P_c(t-x, L-1-i) k\lambda e^{-k\lambda x} dx . \tag{6.25}$$

Операционное преобразование в (6.24) дает:

$$P_c^*(s,L)=\frac{s}{s+k\lambda}+\sum_{i=0}^{L-1}\frac{k}{n-k}\left(\frac{(n-k)\lambda}{s+n\lambda}\right)^{i+1}P_c^*(s,L-1-i),P_c^*(s,0)=\frac{s}{s+k\lambda}. \qquad (6.26)$$

Используя (6.26) как рекуррентную формулу, найдем:

$$P_c^*(s,L)=P_c^*(s,L-1)+\Delta P_c^*(s,L),\Delta P_c^*(s,L)=\frac{skn^{L-1}\lambda^L}{(s+k\lambda)(s+n\lambda)^L}. \qquad (6.27)$$

Обратное преобразование в (6.27) дает:

$$\Delta P_c\ (T,L)=\frac{AC^{L-1}}{B^L}e^{-A}I(B,L),A=ka,B=(n-k)a,C-na,a=\lambda T\ , \qquad (6.28)$$

$$P_c(T,L)=e^{-A}\left(1+\frac{A}{C}\sum_{i=1}^{L}\left(\frac{C}{B}\right)^i I(B,i)\right). \qquad (6.29)$$

Еще одну формулу для расчета ВБР найдем, используя интегральное соотношение (6.20):

$$Q_c(T,L)=\int_0^T\frac{(n\lambda)^L x^{L-1}}{(L-1)!}e^{-n\lambda x}Q_c(T-x,0)dx=\int_0^T\frac{(n\lambda)^L x^{L-1}}{(L-1)!}e^{-n\lambda x}\left(1-e^{-k\lambda(T-x)}\right)dx\ .$$

Отсюда находим:

$$P_c(T,L)=\sum_{i=0}^{L-1}\frac{C^i}{i!}e^{-C}+e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L)\ . \qquad (6.30)$$

Если использовать тождество

$$-\frac{C^L}{L!}e^{-C}+e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L\frac{B^L}{L!}e^{-B}=0\ ,$$

то (6.30) можно привести к виду:

$$P_c(T,L)=\sum_{i=0}^{L}\frac{C^i}{i!}e^{-C}+e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L+1)\ . \qquad (6.31)$$

Формулу (6.29) удобнее использовать при малых значениях k по сравнению с n, а формулы (6.30) и (6.31) — при значениях k, близких к n. В частности, при $k = n$ ($B \to 0$) из (6.30) легко получить, что

$$P_c(T,L)=1-I(A,L+1)\ .$$

Этот результат совпадает с (5.2) для модели П1.

Из (6.29), в частности, имеем:

$$P_c(T,1)=e^{-A}\left(1+\frac{A}{B}I(B,1)\right)=\frac{1}{B}(Ce^{-A}-Ae^{-C})\ , \qquad (6.32)$$

$$P_c(T,2)=e^{-A}\left(1+\frac{A}{B}(I(B,1)+\frac{C}{B}I(B,2))\right)=\frac{1}{B^2}(C^2e^{-A}-A(B+C+BC)e^{-C})\ ,$$

$$P_c(T,3)=e^{-A}\left(1+\frac{A}{B}(I(B,1)+\frac{C}{B}I(B,2)+\left(\frac{C}{B}\right)^2 I(B,3))\right).$$

Учитывая (6.1), при использовании в качестве показателя достаточности вероятность достаточности приближенную оценку первого типа находим по формуле:

$$P_{c,np1}(T,L)=\sum_{i=0}^{L}\frac{C^i}{i!}e^{-C}\ . \tag{6.33}$$

Если в (6.1) в качестве показателя достаточности комплекта ЗИП взять коэффициент готовности, то

$$P_{c,np1}(T,L)=\sum_{i=0}^{L-1}\frac{C^i}{i!}e^{-C}+\frac{L+1}{C}I(C,L+1)\ . \tag{6.34}$$

Из (6.34), в частности, имеем:

$$P_{c,np1}(T,1)=\frac{1}{C}(2-(2+C)e^{-C}),P_{c,np1}(T,2)=(1+C)e^{-C}+\frac{3}{C}I(C,3)\ , \tag{6.35}$$

$$P_{c,np1}(T,3)=(1+C+\frac{C^2}{2})e^{-C}+\frac{4}{C}I(C,4)\ .$$

Согласно (6.14) и (6.15) приближенная оценка второго типа выполняется по формуле:

$$P_{c,np2}(T,L)=e^{-A}\left(1+\sum_{i=0}^{L}\frac{A^i}{i!}\sum_{j=0}^{L-i}\frac{B^j}{j!}e^{-B}\right). \tag{6.36}$$

В частности, имеем:

$$P_{c,np2}(T,1)=e^{-A}+Ae^{-C},P_{c,np2}(T,2)=e^{-A}+(A+AB+\frac{1}{2}A^2)e^{-C}\ . \tag{6.37}$$

Найдем теперь частоту и интенсивность отказов. Дифференцируя (6.30), согласно (5.48) получим:

$$a_c(T,L)/(k\lambda)=e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L)\ . \tag{6.38}$$

В частности, имеем:

$$a_c(T,1)/(k\lambda)=\frac{C}{B}(e^{-A}-e^{-C}),a_c(T,2)/(k\lambda)=\left(\frac{C}{B}\right)^2 I(B,2)\ . \tag{6.39}$$

Используя (5.50), найдем интенсивность отказов:

$$\lambda_c(T,L)/(k\lambda)=1-\sum_{i=0}^{L-1}\frac{C^i}{i!}e^{-C}/P_c(T,L)=1/\left(1+\sum_{i=0}^{L-1}\frac{C^i}{i!}e^{-C}/I(B,L)\right). \tag{6.40}$$

В частности, имеем:

$$\lambda_c(T,1)/(k\lambda)=1-e^{-C}/P_c(T,1),\lambda_c(T,2)/(k\lambda)=1-(1+C)e^{-C}/P_c(T,2)\ . \tag{6.41}$$

Из (6.40) не трудно установить, что интенсивность отказов меняется от нуля при $T=0$ до $k\lambda$ при неограниченном увеличении периода пополнения. Интенсивность отказов имеет наибольшее значение в конце периода пополнения. В точках t, кратных периоду пополнения, интенсивность отказов можно приближенно оценить величиной, обратной средней наработке до отказа:

$$\lambda_c(T,L)\approx 1/T_{cp}(T,L)\ . \tag{6.42}$$

Чтобы найти среднюю наработку до отказа, представим ИБР в виде:

$$P_c(T,L) = e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L - \sum_{i=0}^{L-1}\left(\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i} - 1\right)\frac{C^i}{i!}e^{-C}. \quad (6.43)$$

В соответствии с (5.54) интегрируем (6.43) по интервалу $(0,T)$ и находим:

$$k\lambda\tau_1(T,L) = \left(\frac{C}{B}\right)^L I(A,1) - \frac{A}{C}\sum_{i=0}^{L-1}\left(\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i} - 1\right) I(C,i+1). \quad (6.44)$$

В частности, имеем:

$$k\lambda\tau_1(T,1) = \frac{C}{B}(1-e^{-A}) - \frac{A^2}{BC}(1-e^{-C}),$$

$$k\lambda\tau_1(T,2) = \left(\frac{C}{B}\right)^2(1-e^{-A}) - \frac{A^2(B+C)}{B^2C}(1-e^{-C}) - \frac{A^2}{BC}(1-(1+C)e^{-C}). \quad (6.45)$$

Среднюю наработку до отказа находим по формуле (5.54). При увеличении периода пополнения средняя наработка до отказа стремится к пределу:

$$\lim_{T\to\infty} k\lambda T_{cp}(T,L) = 1 + \frac{A}{C}L. \quad (6.46)$$

Приближенное значение средней наработки можно получить с помощью формулы (5.55).

Перегруппировывая слагаемые в (6.44), получим еще одну формулу для $k\lambda\tau_1$:

$$k\lambda\tau_1(T,L) = \frac{A}{C}\sum_{i=0}^{L-1} I(C,i+1) + \left(\frac{C}{B}\right)^L\left(I(A,1) - \frac{A}{C}\sum_{i=0}^{L-1}\left(\frac{B}{C}\right)^i I(C,i+1)\right). \quad (6.47)$$

Эта формула удобнее, чем (6.44), при значениях k, близких к n, т. к. при $k \to n$ первое слагаемое не имеет неопределенностей, а второе слагаемое имеет пределом $I(A,L+1)$. При небольших A второе слагаемое дает малую добавку к первому слагаемому и им можно пренебречь. При малых значениях k лучше пользоваться формулой (6.44).

При малых A и C можно провести разложение функций по малому параметру и найти приближенные значения показателей надежности, выделив главный член разложения. Тогда получим:

$$Q_c(T,L) \approx \frac{AC^L}{(L+1)!}, k\lambda\tau_1(T,L) \approx A, k\lambda T_{cp}(T,L) \approx \frac{(L+1)!}{C^L}. \quad (6.48)$$

Используя экспоненциальную модель, для значений времени, кратных периоду пополнения, ВБР можно рассчитывать по приближенной формуле:

$$P_{c,np}(t,L) = \exp(-t/T_{cp}(T,L)) = \exp(-iA/(k\lambda T_{cp}(T,L))), i = 1,2,... \quad (6.49)$$

Согласно (5.57) коэффициент готовности системы:

$$K_c(T,L) = k\lambda\tau_1/A = \frac{1}{A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(A,1) - \frac{1}{C}\sum_{i=0}^{L-1}\left(\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i} - 1\right) I(C,i+1). \quad (6.50)$$

В частности, имеем:

$$K_г(T,1) = \frac{C}{AB}(1-e^{-A}) - \frac{A}{BC}(1-e^{-C}), \tag{6.51}$$

$$K_г(T,2) = \frac{1}{A}\left(\frac{C}{B}\right)^2 I(A,1) - \frac{A}{BC}\left((1+\frac{C}{B})I(C,1) + I(C,2)\right). \tag{6.52}$$

При $B \to 0$ формулы (6.51) и (6.52) совпадают с формулами (5.23) и (5.24) соответственно.

Коэффициент оперативной готовности по наихудшему циклу находят по формуле:

$$K^*_{ог}(\tau,T,L) = P_c(T,L)e^{-k\lambda\tau} = \left(\sum_{i=0}^{L-1}\frac{C^i}{i!}e^{-C} + e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L)\right)e^{-k\lambda\tau}. \tag{6.53}$$

Коэффициент оперативной готовности по произвольно выбранному циклу находят по формуле:

$$K_{ог}(\tau,T,L) = K_г(T,L)e^{-k\lambda\tau}, \tag{6.54}$$

где коэффициент готовности надо вычислить по формуле (6.50).

В *приложении 6* приведены примеры П6.1 и П6.2 по расчету и анализу показателей надежности последовательной системы (модель МП1). По результатам анализа можно сделать выводы:

- приближенные формулы (6.34), полученные на основе методики [4], дают знакопеременную ошибку. При $L = 1$, $A = 0{,}1...1$, $B = 0{,}1...5$ она колеблется от –87 % до 33 % , а при $L = 2$ и тех же A и B от –181 % до 49 %. Причем чем меньшую долю составляет основная подсистема в полном объеме аппаратуры, тем больше ошибка. Так при доле в 5 % ошибка составляет (–473,6 %) при $L = 1$ и (–373,6 %) при $L = 2$. Относительная погрешность формулы (6.36) по вероятности отказа всегда отрицательна и с увеличением доли ДПС сначала растет по абсолютной величине, а затем начинает уменьшаться. Максимальное значение погрешности достигает 68,2 % при $L = 1$ и 131 % при $L = 2$. Наименьшее значение погрешности дает приближенная формула (6.49), основанная на экспоненциальной модели. Там, где ВБР находится на уровне не менее 0,9, погрешность по вероятности отказа для значений времени функционирования, кратных периоду пополнения, не превышает 2 %, причем практически не зависит от доли ОПС в системе. Это следует признать замечательным результатом. При других значениях времени функционирования ошибка по вероятности отказа может достигать больших значений при малых вероятностях отказов. Однако затем эта ошибка быстро уменьшается, оставаясь на уровне 10–20 %. Поскольку в этом случае приближенная формула дает оценку ВБР снизу, погрешность можно считать приемлемой;

- интенсивность отказов при увеличении сложности ОПС увеличивается от значений $k\lambda I(B,L)$ при малых $k\lambda$ до значений, близких к интенсивности отказов $k\lambda$ нерезервированной подсистемы. Интересен тот факт, что при увеличении доли ОПС в системе отношение интенсивности отказов ОПС с учетом ЗИП к интенсивности отказов нерезервированной ОПС медленно уменьшается. При неизменном числе элементов в ОПС и ДПС интенсивность отказов изменяется при увеличении времени эксплуатации от нуля до значений, близких к значению $k\lambda$.

6.3. Дублированная система (модель МП2)

Структура системы представлена на рис. 5.4, *а*. Дополнительно к модели П2 здесь предполагается наличие еще одной подсистемы, содержащей $n - k$ элементов и потребляющей запасные части. Используя формулы (6.20) и (5.68), получим:

$$Q_c(T,L)=\int_0^T\frac{(n\lambda)^L x^{L-1}}{(L-1)!}e^{-n\lambda x}Q_c(T-x,0)dx=\int_0^T\frac{(n\lambda)^L x^{L-1}}{(L-1)!}e^{-n\lambda x}\left(1-2e^{-r\lambda(T-x)}+e^{-k\lambda(T-x)}\right)dx=$$

$$=I(C,L)-2e^{-A/2}\left(\frac{C}{D}\right)^L I(D,L)+e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L),D=B+ra\,. \qquad (6.55)$$

Отсюда получим:

$$P_c(T,L)=1-I(C,L)+2e^{-A/2}\left(\frac{C}{D}\right)^L I(D,L)-e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L)\,. \qquad (6.56)$$

В частности, имеем:

$$P_c(T,1)=e^{-C}+\frac{2C}{D}e^{-A/2}(1-e^{-D})-\frac{C}{B}(e^{-A}-e^{-C}),D=C-A/2\,,$$

$$P_c(T,2)=(1+C)e^{-C}+\frac{2C^2}{D^2}e^{-A/2}(1-(1+D)e^{-D})-\frac{C^2}{B^2}(e^{-A}-(1+B)e^{-C})\,. \qquad (6.57)$$

Приращение вероятности безотказной работы:

$$\Delta P_c(T,i)=Q_c(T,i-1)-Q_c(T,i)=\frac{C^{i-1}}{(i-1)!}e^{-C}+2\left(\frac{C}{D}\right)^{i-1}e^{-A/2}\left(\frac{C}{D}I(D,i)-I(D,i-1)\right)-$$

$$-\left(\frac{C}{B}\right)^{i-1}e^{-A}\left(\frac{C}{B}I(B,i)-I(B,i-1)\right),D=C-A/2=B+ra,i=1,2,... \qquad (6.58)$$

В частности, имеем:

$$\Delta P_c(T,1)=\frac{A}{D}e^{-A/2}-\frac{A}{B}e^{-A}+\frac{Ara}{BD}e^{-C}\,,$$

$$\Delta P_c(T,2)=\frac{AC}{D^2}e^{-A/2}-\frac{AC}{B^2}e^{-A}+\frac{ACra}{B^2D^2}e^{-C}(B+D+BD)\,. \qquad (6.59)$$

Найдем теперь другую форму представления ВБР и приращений, используя формулу, аналогичную (6.19):

$$\Delta P_c^*(s,i)=\frac{s}{n\lambda}\left(\frac{n\lambda}{s+n\lambda}\right)^i Q_c^*(s,0)=\frac{A}{C}\left(\frac{s}{s+r\lambda}-\frac{s}{s+k\lambda}\right)\left(\frac{n\lambda}{s+n\lambda}\right)^i.$$

Отсюда

$$\Delta P_c(T,i)=\frac{A}{C}e^{-A/2}\left(\left(\frac{C}{D}\right)^i I(D,i)-\left(\frac{C}{B}\right)^i I(B,i)e^{-A/2}\right),$$

$$P_c(T,L)=P_c(T,0)+\sum_{i=1}^{L}\Delta P_c(T,i)=2e^{-A/2}\left(\frac{C}{D}\right)^L-e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L+\sum_{i=0}^{L-1}\frac{C^i}{i!}e^{-C}\left(1-2\left(\frac{C}{D}\right)^{L-i}+\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i}\right). \qquad (6.60)$$

Кроме точных формул, для расчета ВБР можно использовать приближенные формулы. Используя оценки первого типа, согласно (6.3)–(6.5) находим:

$$K_{г,ЗИП}(T,L)=\sum_{i=0}^{L}\frac{C^i}{i!}e^{-C}+\frac{L+1}{C}I(C,L+1),$$

$$\rho=r\lambda\overline{T}_в=r\lambda(\overline{T}_в(\infty)+\Delta t_{ЗИП}),\Delta t_{ЗИП}=-\ln K_{г,ЗИП}(T,L)/(n\lambda),$$

$$P_{c,пр1}(T,L)=\exp\left(-\frac{2\rho ra}{1+3\rho}\right)=\exp\left(\frac{ra(A/C)\ln K_{г,ЗИП}(T,L)}{1-1,5(A/C)\ln K_{г,ЗИП}(T,L)}\right). \qquad (6.61)$$

Приближенные оценки второго типа получим с помощью формул (6.14), (6.15) и (5.72)

$$P_{c,пр2}(T,L)=2e^{-A/2}-e^{-A}+e^{-A/2}\sum_{i=1}^{L}2^i I(A/2,i+1)(1-I(B,L-i+1)). \qquad (6.62)$$

В частности, при L = 1 и 2 имеем:

$$\rho(T,1)=-\frac{A}{2C}\ln\left(\frac{2}{C}-\left(1+\frac{2}{C}\right)e^{-C}\right),\quad \rho(T,2)=-\frac{A}{2C}\ln\left(\frac{3}{C}-\left(\frac{3}{C}+2+\frac{C}{2}\right)e^{-C}\right), \qquad (6.63)$$

$$P_{c,пр2}(T,1)=2e^{-A/2}-e^{-A}+2e^{-D}I(A/2,2),$$

$$P_{c,пр2}(T,2)=2e^{-A/2}-e^{-A}+2e^{-D}((1+B)I(A/2,2)+2I(A/2,3)). \qquad (6.64)$$

При B = 0 формулы (6.64) совпадают с (5.70).

Найдем теперь частоту и интенсивность отказов. Дифференцируя (6.55), получим частоту отказов:

$$\frac{a_c(T,L)}{k\lambda}=e^{-A/2}\left(\frac{C}{D}\right)^L I(D,L)-e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L). \qquad (6.65)$$

В частности, при L = 1 и 2 имеем:

$$\frac{a_c(T,1)}{k\lambda}=\frac{C}{D}e^{-A/2}-\frac{C}{B}e^{-A}+\frac{AC}{2BD}e^{-C},$$

$$\frac{a_c(T,2)}{k\lambda}=\frac{C^2}{D^2}e^{-A/2}-\frac{C^2}{B^2}e^{-A}+\frac{AC^2}{2B^2D^2}e^{-C}(B+D+BD). \qquad (6.66)$$

Интенсивность отказов:

$$\frac{\lambda_c(T,L)}{k\lambda}=\frac{a_c(T,L)}{k\lambda}/P_c(T,L). \qquad (6.67)$$

В частности, при L = 1 и 2 имеем:

$$\frac{\lambda_c(T,1)}{k\lambda}=1-\frac{C}{D}e^{-A/2}\frac{1-(A\setminus 2C)e^{-D}}{P_c(T,1)},$$

$$\frac{\lambda_c(T,2)}{k\lambda}=1-\frac{C^2}{D^2}e^{-A/2}\frac{1-(A\setminus(2C^2))(1+D+C+DC)e^{-D}}{P_c(T,2)}. \qquad (6.68)$$

При B = 0 формулы (6.68) совпадают с (5.84). Интенсивность отказов изменяется от нуля при T = 0 до $r\lambda$ при $T\to\infty$.

Чтобы найти среднюю наработку до отказа, проинтегрируем (6.60) и разделим результат на вероятность отказа:

$$k\lambda T_{cp}(T,L) = (4\left(\frac{C}{D}\right)^L (1-e^{-A/2}) - \left(\frac{C}{B}\right)^L (1-e^{-A}) +$$

$$+\frac{A}{C}\sum_{i=0}^{L-1}\left(1-2\left(\frac{C}{D}\right)^{L-i}+\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i}\right) I(C,i+1)) / Q_c(T,L). \qquad (6.69)$$

Перегруппировывая здесь слагаемые, можно формулу упростить:

$$k\lambda T_{cp}(T,L) = ((\frac{AL}{C}+3)I(C,L) + A(1-I(C,L-1)) -$$

$$-4\left(\frac{C}{D}\right)^L e^{-ra} I(D,L) + \left(\frac{C}{B}\right)^L e^{-A} I(B,L)) / Q_c(T,L). \qquad (6.70)$$

В частности, при L = 1 и 2 имеем:

$$k\lambda T_{cp}(T,1) = \left(3+\frac{A}{C}-\frac{4C}{D}e^{-A/2}+\frac{C}{B}e^{-A}-\frac{A^3}{2BCD}e^{-C}\right) / Q_c(T,1), \qquad (6.71)$$

$$k\lambda T_{cp}(T,2) = \left(3+\frac{2A}{C}-\frac{4C^2}{D^2}e^{-A/2}+\frac{C^2}{B^2}e^{-A}-\frac{A^3}{2BCD}\left(2+C+\frac{C}{B}+\frac{C}{D}\right)e^{-C}\right) / Q_c(T,2).$$

При увеличении периода пополнения средняя наработка до отказа асимптотически стремится к пределу:

$$\lim_{T\to\infty} k\lambda T_{cp}(T,L) = 3 + AL/C. \qquad (6.72)$$

Приближенное значение средней наработки можно получить с помощью формулы (5.55).

При малых A можно получить приближенное асимптотическое выражение. Для этого преобразуем (6.55) следующим образом. Поскольку справедливо очевидное равенство

$$\frac{C^L}{L!}e^{-C} - 2e^{-A/2}\left(\frac{C}{D}\right)^L \frac{D^L}{D!}e^{-D} + e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L \frac{B^L}{B!}e^{-B} = 0,$$

прибавим его к правой части (6.55) и получим:

$$Q_c(T,L) = I(C,L+1) - 2e^{-A/2}\left(\frac{C}{D}\right)^L I(D,L+1) + e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L+1). \qquad (6.73)$$

Разлагаем неполную гамма-функцию по степеням первого аргумента:

$$Q_c(T,L) \approx \frac{A^2C^L}{2(L+2)!} = \frac{2(ra)^2C^L}{(L+2)!}. \qquad (6.74)$$

Поскольку при малых A выполняется примерное равенство $k\lambda\tau_1(T,L) \approx A$, то приближенная формула для средней наработки до отказа имеет вид:

$$k\lambda T_{cp}(T,L) \approx \frac{2(L+2)!}{AC^L}. \qquad (6.75)$$

При $A = C$ формулы (6.74) и (6.75) переходят в (5.79) и (5.80) соответственно.

Коэффициент готовности системы

$$K_г(T,L) = k\lambda\tau_1 / A = (4\left(\frac{C}{D}\right)^L (1-e^{-A/2}) - \left(\frac{C}{B}\right)^L (1-e^{-A}) +$$

$$+\frac{A}{C}\sum_{i=0}^{L-1}(1-2\left(\frac{C}{D}\right)^{L-i} + \left(\frac{C}{B}\right)^{L-i})I(C,i+1)) / A . \qquad (6.76)$$

Чтобы найти коэффициент оперативной готовности, представим ВБР в виде суммы двух слагаемых:

$$P_c(T,L) = P_c(T,L,S_0) + P_c(T,L,S_1),$$

где S_0 и S_1 — полная и деградированная структура ОПС. По графу состояний (рис. 6.2) находим:

$$P_c^*(s,L,S_0) = \sum_{i=0}^{L} P_i^*(s) = \sum_{i=0}^{L-1} \frac{s(n\lambda)^i}{(s+n\lambda)^{i+1}} + \frac{s}{s+k\lambda}\left(\frac{n\lambda}{s+n\lambda}\right)^L,$$

$$P_c^*(s,L,S_1) = P_{L+1}^*(s) = \frac{sk\lambda}{(s+k\lambda)(s+r\lambda)}\left(\frac{n\lambda}{s+n\lambda}\right)^L.$$

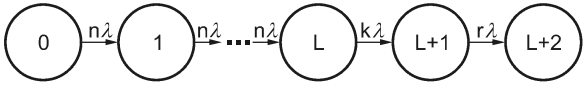


Рис. 6.2. Граф состояний однородной многофункциональной дублированной системы (модель МП2)

Выполняя здесь обратное преобразование, получим:

$$P_c(T,L,S_0) = 1 - I(C,L+1) + e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L+1) = 1 - I(C,L+1) + \sum_{i=0}^{L}\frac{C^i}{i!}e^{-C}\left(1-\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i}\right),$$

$$P_c(T,L,S_1) = 2e^{-A/2}\left(\frac{C}{D}\right)^L I(D,L+1) - 2e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L+1). \qquad (6.77)$$

Теперь можно найти коэффициент оперативной готовности при выполнении наихудшего цикла:

$$K_{oг}^*(\tau,T,L) = P_c(T,L,S_0)e^{-\alpha/2}(2-e^{-\alpha/2}) + P_c(T,L,S_1)e^{-\alpha/2}, \alpha = k\lambda\tau. \qquad (6.78)$$

Проинтегрировав $P_c(T,L,S_0)$ и $P_c(T,L,S_1)$, найдем:

$$k\lambda\tau_1^0(T,L) = (1-e^{-A})\left(\frac{C}{B}\right)^L + \frac{A}{C}\sum_{i=0}^{L-1}\left(1-\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i}\right)I(C,i+1), \qquad (6.79)$$

$$k\lambda\tau_1^1(T,L) = 4\left(\frac{C}{D}\right)^L (1-e^{-A/2}) - 2\left(\frac{C}{B}\right)^L (1-e^{-A}) + \frac{2A}{C}\sum_{i=0}^{L-1}\left(\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i} - \left(\frac{C}{D}\right)^{L-i}\right)I(C,i+1)).$$

Отсюда коэффициент оперативной готовности при произвольно выбранном цикле:

$$K_{oг}(\tau,T,L) = (k\lambda\tau_1^0(T,L)e^{-\alpha/2}(2-e^{-\alpha/2}) + k\lambda\tau_1^1(T,L)e^{-\alpha/2}) / A. \qquad (6.80)$$

По результатам расчетов (*приложение 6*, примеры П6.2 и П6.3) можно сделать следующие выводы:

- показатели безотказности основной подсистемы ухудшаются медленнее, чем растет объем аппаратуры дополнительной подсистемы. Так при $L = 1$ и увеличении B в 5 раз вероятность отказа уменьшается только на 60 % (от 0,1181 до 0,0732, а средняя наработка до отказа $k\lambda T_{cp}$ на 64 % (от 13,32 до 8,14), интенсивность отказов подсистемы $\lambda_c/k\lambda$ на 42 %. Коэффициент неготовности $1- K_{гс}$ увеличивается на 78 % (от 0,0216 до 0,0386);
- из трех приближенных формул для расчета ВБР наилучшие характеристики точности имеет формула (5.19) экспоненциальной модели. Следующей по точности является формула (6.61) оценки первого типа на основе методики [4], и наибольшую погрешность дает формула (6.62) оценки второго типа;
- внутри периода пополнения погрешность формулы экспоненциальной модели может быть большой: по вероятности отказов сотни и тысячи процентов. Причем относительная погрешность увеличивается с ростом запасов, но уменьшается при увеличении дополнительной подсистемы;
- при фиксированной сложности системы (основная и дополнительная подсистемы) с увеличением доли ОПС погрешность формулы (6.61), полученной на основе методики [4], уменьшается. Так при $L = 1$, $C = 1$ увеличение A от 0,05 до 0,9 приводит к уменьшению относительной погрешности от 16,24 % до 0,64 %. При $L = 2$, $C = 1$ с ростом A погрешность становится знакопеременна. Сначала ошибка положительна и с ростом A становится меньше. Затем при $A = 0{,}7$ она меняет знак и при $A = 0{,}9$ увеличивается по абсолютной величине до 5,4 %;
- коэффициент готовности системы, который является средним по периоду пополнения значением ВБР, существенно выше, чем ВБР в конце периода пополнения. Еще больше различия в этих характеристиках в моменты времени, кратные периоду, т. к. коэффициент готовности не меняется от периода к периоду, а ВБР неуклонно уменьшается.

6.4. Мажорированная система (модель МП3)

Структура системы приведена на рис. 5.4, *б*. Дополнительная подсистема содержит $n - k = n - 3r$ элементов. Используя общую формулу (6.20) и формулу (5.92), найдем точную формулу для вероятности отказа:

$$Q_c(T,L) = \int_0^T \frac{(n\lambda)^L x^{L-1}}{(L-1)!} e^{-n\lambda x}\left(1 - 3e^{-2r\lambda(T-x)} + 2e^{-k\lambda(T-x)}\right)dx =$$

$$= I(C,L) - 3e^{-2ra}\left(\frac{C}{D}\right)^L I(D,L) + 2e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L), D = B + ra = C - 2ra\,. \qquad (6.81)$$

Поскольку

$$\frac{C^L}{L!}e^{-C} - 3e^{-2ra}\left(\frac{C}{D}\right)^L \frac{D^L}{L!}e^{-D} + 2e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L \frac{B^L}{L!}e^{-B} = 0\,,$$

из формулы (6.81) находим:

$$P_c(T,L) = 1 - I(C,L+1) + 3e^{-2ra}\left(\frac{C}{D}\right)^L I(D,L+1) - 2e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L+1)\,. \quad (6.82)$$

В частности, при $L = 1$ и 2 имеем:

$$P_c(T,1) = e^{-C} + \frac{3C}{D}e^{-2ra}(1-e^{-D}) - \frac{2C}{B}(e^{-A} - e^{-C}),$$

$$P_c(T,2) = (1+C)e^{-C} + \frac{3C^2}{D^2}e^{-2ra}(1-(1+D)e^{-D}) - \frac{2C^2}{B^2}(e^{-A} - (1+B)e^{-C}). \qquad (6.83)$$

Перегруппировывая слагаемые в (6.81), находим формулу, удобную для интегрирования:

$$P_c(T,L) = 3e^{-A+ra}\left(\frac{C}{D}\right)^L - 2e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L + \sum_{i=0}^{L-1}\frac{C^i}{i!}e^{-C}\left(1-3\left(\frac{C}{D}\right)^{L-i} + 2\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i}\right). \qquad (6.84)$$

Чтобы представить ВБР в виде суммы приращений, найдем сначала изображение для функции приращения:

$$\Delta P_c^*(s,i) = \frac{s}{n\lambda}\left(\frac{n\lambda}{s+n\lambda}\right)^i Q_c^*(s,0) = \frac{2A}{C}\left(\frac{s}{s+(k-r)\lambda} - \frac{s}{s+k\lambda}\right)\left(\frac{n\lambda}{s+n\lambda}\right)^i. \qquad (6.85)$$

Выполняя здесь обратное преобразование, имеем:

$$\Delta P_c(T,i) = \frac{2A}{C}\left(\left(\frac{C}{D}\right)^i I(D,i)e^{-2ra} - \left(\frac{C}{B}\right)^i I(B,i)e^{-A}\right). \qquad (6.86)$$

Суммируя приращения, имеем:

$$P_c(T,L) = P_c(T,0) + \sum_{i=1}^{L}\Delta P_c(T,i) =$$

$$= e^{-2ra}(3-2e^{-ra}) + \frac{2A}{C}\sum_{i=1}^{L}\left(\left(\frac{C}{D}\right)^i I(D,i)e^{-2ra} - \left(\frac{C}{B}\right)^i I(B,i)e^{-A}\right). \qquad (6.87)$$

Приближенная оценка первого типа:

$$P_{c,пр1}(T,L) = \exp\left(-\frac{6\rho ra}{1+5\rho}\right) = \exp\left(\frac{2ra(A/C)\ln K_{г,ЗИП}(T,L)}{1-(5ra/C)\ln K_{г,ЗИП}(T,L)}\right), \qquad (6.88)$$

$$\rho = r\lambda\Delta t_{ЗИП}, \Delta t_{ЗИП} = -\ln K_{г,ЗИП}(T,L)/(n\lambda) = -(ra/C)\ln K_{г,ЗИП}(T,L).$$

Значения $K_{г,ЗИП}$ находят по формулам (6.61).

Приближенная оценка второго вида использует приращения ВБР в модели МПЗ (см. *разд. 5.5*, формула (5.92)):

$$P_{c,пр2}(T,L) = 3e^{-2ra} - 2e^{-A} + 2e^{-2ra}\sum_{i=1}^{L}3^i I(ra,i+1)(1-I(B,L-i+1)). \qquad (6.89)$$

В частности, при $L = 1$ и 2 имеем:

$$P_{c,пр2}(T,1) = 3e^{-2ra} - 2e^{-A} + 6e^{-D}I(ra,2), D = C - ra = B + 2ra, \qquad (6.90)$$

$$P_{c,пр2}(T,2) = 3e^{-2ra} - 2e^{-A} + 6e^{-D}I(ra,2)(1+B) + 18e^{-D}I(ra,3)).$$

Найдем теперь интенсивность и частоту отказов системы. Дифференцируя (6.82), получим частоту отказов:

$$\frac{a_c(T,L)}{k\lambda} = 2e^{-2ra}\left(\frac{C}{D}\right)^L I(D,L) - 2e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L). \qquad (6.91)$$

Если продифференцируем (6.85), то получим другую форму:

$$\frac{a_c(T,L)}{k\lambda} = 2e^{-2ra}\left(\frac{C}{D}\right)^L - 2e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L + 2\sum_{i=0}^{L-1}\frac{C^i}{i!}e^{-C}\left(\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i} - \left(\frac{C}{D}\right)^{L-i}\right). \qquad (6.92)$$

В частности, при $L = 1$ и 2 имеем:

$$\frac{a_c(T,1)}{k\lambda} = \frac{2C}{D}e^{-2ra} - \frac{2C}{B}e^{-A} + \frac{2AC}{3BD}e^{-C}, \qquad (6.93)$$

$$\frac{a_c(T,2)}{k\lambda} = \frac{2C^2}{D^2}e^{-2ra} - \frac{2C^2}{B^2}e^{-A} + \frac{2AC^2}{3B^2D^2}e^{-C}(B + D + BD).$$

Интенсивность отказов находим по общей формуле:

$$\frac{\lambda_c(T,L)}{k\lambda} = \frac{a_c(T,L)}{k\lambda} / P_c(T,L).$$

В частности, при $L = 1$ и 2 имеем:

$$\frac{\lambda_c(T,1)}{k\lambda} = 1 - \frac{1}{D}e^{-2ra}\left(C - \frac{2}{3}Ae^{-D}\right) / P_c(T,1), \qquad (6.94)$$

$$\frac{\lambda_c(T,2)}{k\lambda} = 1 - \frac{C}{D}e^{-2ra}\left(\frac{C}{D} - \frac{2A}{3CD}(C + D + CD)e^{-D}\right) / P_c(T,2).$$

При $B = 0$ формулы (6.91) и (6.94) переходят в (5.99) и (5.101) соответственно.

Чтобы найти среднюю наработку до отказа, надо проинтегрировать (6.85).Тогда

$$k\lambda T_{cp}(T,L) = (4,5\left(\frac{C}{D}\right)^L(1 - e^{-2ra}) - 2\left(\frac{C}{B}\right)^L(1 - e^{-A}) +$$

$$+\frac{A}{C}\sum_{i=0}^{L-1}\left(1 - 3\left(\frac{C}{D}\right)^{L-i} + 2\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i}\right)I(C,i+1)) / Q_c(T,L). \qquad (6.95)$$

В частности, имеем:

$$k\lambda T_{cp}(T,1) = \left(\frac{9C}{2D}(1 - e^{-2ra}) - \frac{2C}{B}(1 - e^{-A}) + \frac{2A^3}{3BCD}(1 - e^{-C})\right) / Q_c(T,1), \qquad (6.96)$$

$$k\lambda T_{cp}(T,2) = \left(\frac{9C^2}{2D^2}(1 - e^{-2ra}) - \frac{2C^2}{B^2}(1 - e^{-A}) + \frac{2A^3}{3BCD}\left((1 + \frac{C}{B} + \frac{C}{D})(1 - e^{-C}) + I(C,2)\right)\right) / Q_c(T,2).$$

При увеличении периода пополнения средняя наработка до отказа стремится к пределу:

$$\lim_{T\to\infty} k\lambda T_{cp}(T,L) = 2,5 + AL / C. \qquad (6.97)$$

Расчет по формулам (6.95) и (6.97) показывает, что эффективность ЗИП по критерию средней наработки существенно зависит от соотношения количества элементов в ОПС и ДПС (табл. 6.1).

Таблица 6.1. Влияние ДПС

B/A	$k\lambda T_{cp}(\infty, L)$		
	$L = 1$	$L = 2$	$L = 3$
0	3,5	4,5	5,5
0,5	3,17	3,83	4,5
1,0	3,0	3,5	4,0
1,5	2,9	3,3	3,7
2,0	2,83	3,17	3,5

При одинаковой сложности ОПС и ДПС ($B = A$) эффективность ЗИП при двух ЗЧ такая же, как при одной ЗЧ, если отсутствует ДПС ($B = 0$), и при трех ЗЧ, если $B = 2A$. Аналогичные тенденции снижения эффективности ЗИП наблюдаются и при конечном периоде пополнения.

Чтобы найти асимптотическую формулу для вероятности отказа при малых значениях C и A, проведем разложение (6.85) по степеням C, A и B:

$$Q_c(T, L) \approx \frac{2A^2C^L}{3(L+2)!} = \frac{6(ra)^2C^L}{(L+2)!}, k\lambda\tau_1(T, L) \approx A\,. \tag{6.98}$$

Средняя наработка до отказа при малых A и C вычисляется по приближенной формуле:

$$k\lambda T_{cp}(T, L) \approx \frac{3(L+2)!}{2AC^L}\,. \tag{6.99}$$

Коэффициент готовности системы:

$$K_г(T, L) = k\lambda\tau_1 / A = (4{,}5\left(\frac{C}{D}\right)^L(1-e^{-2ra}) - 2\left(\frac{C}{B}\right)^L(1-e^{-A}) +$$

$$+\frac{A}{C}\sum_{i=0}^{L-1}(1-3\left(\frac{C}{D}\right)^{L-i} + 2\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i})I(C, i+1)) / A\,. \tag{6.100}$$

Чтобы найти коэффициент оперативной готовности, представим ВБР в виде суммы двух слагаемых, соответствующих базовой и деградированной структурам:

$$P_c(T, L) = P_c(T, L, S_0) + P_c(T, L, S_1)\,, \tag{6.101}$$

$$P_c(T, L, S_0) = 1 - I(C, L+1) + e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B, L+1) = 1 - I(C, L) + e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B, L)\,,$$

$$P_c(T, L, S_1) = 3e^{-2ra}\left(\frac{C}{D}\right)^L I(D, L) - 3e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B, L)\,.$$

Теперь можно найти коэффициент оперативной готовности при выполнении наихудшего цикла:

$$K^*_{oг}(\tau, T, L) = P_c(T, L, S_0)e^{-2\alpha}(3 - 2e^{-\alpha}) + P_c(T, L, S_1)e^{-2\alpha}, \alpha = r\lambda\tau\,.$$

Аналогично представим $k\lambda\tau_1$ в виде двух, проинтегрировав соответственно $P_c(T,L,S_0)$ и $P_c(T,L,S_1)$. Тогда

$$k\lambda\tau_1^0(T,L)=(1-e^{-A})\left(\frac{C}{B}\right)^L+\frac{A}{C}\sum_{i=0}^{L-1}\left(1-\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i}\right)I(C,i+1), \quad (6.102)$$

$$k\lambda\tau_1^1(T,L)=\frac{9}{2}\left(\frac{C}{D}\right)^L(1-e^{-2ra})-3\left(\frac{C}{B}\right)^L(1-e^{-A})+\frac{3A}{C}\sum_{i=0}^{L-1}\left(\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i}-\left(\frac{C}{D}\right)^{L-i}\right)I(C,i+1)).$$

Коэффициент оперативной готовности по произвольно выбранному циклу:

$$K_{o\Gamma}(\tau,T,L)=(k\lambda\tau_1^0(T,L)e^{-2\alpha}(3-2e^{-\alpha})+k\lambda\tau_1^1(T,L)e^{-2\alpha})/A,\alpha=r\lambda\tau. \quad (6.103)$$

По результатам расчетов (*приложение 6*, пример П6.4) можно сделать следующие выводы:

- показатели безотказности основной подсистемы ухудшаются медленнее, чем растет объем аппаратуры дополнительной подсистемы. Так при L = 1 и увеличении B в 5 раз вероятность отказа уменьшается только на 60 % (от 0,15 до 0,0935), а средняя наработка до отказа $k\lambda T_{cp}$ на 64 % (от 10,4 до 6,33), интенсивность отказов подсистемы $\lambda_c/k\lambda$ на 42 % (от 0,3208 до 0,2251). Коэффициент неготовности $1 - K_{\Gamma c}$ увеличивается на 78 % (от 0,0279 до 0,0496);
- из трех приближенных формул для расчета ВБР наилучшие характеристики точности имеет формула (5.19) экспоненциальной модели. Следующей по точности является формула (6.88) оценки первого типа на основе методики [4], и наибольшую погрешность дает формула (6.89) оценки второго типа;
- внутри периода пополнения погрешность формулы экспоненциальной модели может быть большой: по вероятности отказов сотни и тысячи процентов. Причем относительная погрешность увеличивается с ростом запасов, но уменьшается при увеличении дополнительной подсистемы.

6.5. Последовательное соединение дублированной и нерезервированной подсистем (модель МП4)

Структура основной подсистемы приведена на рис. 5.4, *в*. Дополнительно к модели МП4 здесь рассматривается еще одна подсистема (ДПС), состоящая из $n - k$ элементов, не участвующая в выполнении данной функции, но потребляющая запасные части.

Вероятность отказа находим с помощью формул (6.20) и (5.107):

$$Q_c(T,L)=\int_0^T\frac{(n\lambda)^L x^{L-1}}{(L-1)!}e^{-n\lambda x}\left(1-2e^{-(k-r)\lambda(T-x)}+e^{-k\lambda(T-x)}\right)dx=$$

$$=I(C,L)-2e^{-A+ra}\left(\frac{C}{D}\right)^L I(D,L)+e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L), D=B+ra, B=C-A. \quad (6.104)$$

Поскольку

$$\frac{C^L}{L!}e^{-C}-2e^{-2ra}\left(\frac{C}{D}\right)^L\frac{D^L}{L!}e^{-D}+e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L\frac{B^L}{L!}e^{-B}=0,$$

можно записать ВБР в следующем виде:

$$P_c(T,L) = 1 - I(C,L+1) + 2e^{-A+ra}\left(\frac{C}{D}\right)^L I(D,L+1) - e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L+1). \qquad (6.105)$$

Перегруппировывая слагаемые в (6.105), получим:

$$P_c(T,L) = 2e^{-A+ra}\left(\frac{C}{D}\right)^L - e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L + \sum_{i=0}^{L-1}\frac{C^i}{i!}e^{-C}\left(1 - 2\left(\frac{C}{D}\right)^{L-i} + \left(\frac{C}{B}\right)^{L-i}\right). \quad (6.106)$$

В частности, при $L = 1$ и 2 имеем:

$$P_c(T,1) = e^{-C} + \frac{2C}{D}e^{-A+ra}(1-e^{-D}) - \frac{C}{B}(e^{-A} - e^{-C}) = \frac{2C}{D}e^{-A+ra} - \frac{C}{B}e^{-A} + \frac{Ara}{BD}e^{-C},$$

$$P_c(T,2) = (1+C)e^{-C} + \frac{2C^2}{D^2}e^{-A+ra}(1-(1+D)e^{-D}) - \frac{C^2}{B^2}(e^{-A} - (1+B)e^{-C}) =$$

$$= \frac{2C^2}{D^2}e^{-A+ra} - \frac{C^2}{B^2}e^{-A} + e^{-C}\frac{ACra}{BD}\left(1 + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \frac{1}{D}\right). \qquad (6.107)$$

Представим ВБР в виде суммы приращений. Изображение функции приращений имеет вид:

$$\Delta P_c^*(s,i) = \frac{s}{n\lambda}\left(\frac{n\lambda}{s+n\lambda}\right)^i Q_c^*(s,0) = \frac{A}{C}\left(\frac{2s(1-ra/A)}{s+(k-r)\lambda} - \frac{s}{s+k\lambda}\right)\left(\frac{n\lambda}{s+n\lambda}\right)^i.$$

Обратное преобразование дает:

$$\Delta P_c(T,i) = \frac{A}{C}\left(2(1-\frac{ra}{A})\left(\frac{C}{D}\right)^i I(D,i)e^{-A+ra} - \left(\frac{C}{B}\right)^i I(B,i)e^{-A}\right).$$

Приближенная оценка ВБР первого типа вызывает определенные трудности, изложенные в *разд. 6.1*. Согласно (6.13) для данной модели оценка имеет вид:

$$P_{c,пр1}(T,L) = \exp(-\frac{2\rho_1 ra}{1+3\rho_1})K_{гЗИП,0}(T, n-2r, L_0), \qquad (6.108)$$

$$\rho_1 = -\frac{ra}{B+2ra}\ln K_{гЗИП,1}(T, n-k+2r, L_1),$$

$$K_{гЗИП,0}(T,L) = 1 - I(C-2ra, L_0) + \frac{L_0+1}{C-2ra}I(C-2ra, L_0+1),$$

$$K_{гЗИП,1}(T,L) = 1 - I(B+2ra, L_1) + \frac{L_1+1}{B+2ra}I(B+2ra, L_1+1).$$

Здесь предполагается, что запасы L_0 потребляются нерезервированной частью ОПС и всей ДПС, а запасы L_1 потребляются дублированной частью ОПС и всей ДПС. Если принять $L_0 = L_1 = L$, то оценка ВБР будет всегда сверху, т. к. модельные запасы оказываются всегда больше фактических запасов. Если же $L_0 + L_1 = L$, то оценка ВБР будет снизу, т. к. фактические запасы подразделяются на две неполнодоступные части, тогда как на самом деле они полнодоступны для дублированной и нерезервированной части ОПС.

Трудность состоит также в том, что во втором случае не ясно, в какой пропорции разделить запасы между двумя частями с учетом целочисленности слагаемых. При $L = 1$ естественно

взять $L_0 = 1,\ L_1 = 0$, при $L = 2$ надо взять $L_0 = 1,\ L_1 = 1$. Для других L надо подбирать такое соотношение, чтобы из всех нижних оценок получить максимальную.

Приближенная оценка второго вида получается с помощью формул (6.14) и (5.115).

$$P_{c,np2}(T,L) = 2e^{-A+ra} - e^{-A} + \sum_{i=1}^{L}\left(2\left(\frac{A}{ra}\right)^{i-1}\left(\frac{A}{ra}-1\right)e^{-A+ra}I(ra,i) - \frac{A^i}{i!}e^{-A}\right)(1-I(B,L-i+1)). \tag{6.109}$$

В частности, при $L = 1$ и 2 имеем:

$$P_{c,np2}(T,1) = 2e^{-A+ra} - e^{-A} + \left(2\left(\frac{A}{ra}-1\right)\left(e^{-A+ra}-e^{-A}\right) - Ae^{-A}\right)e^{-B},$$

$$P_{c,np2}(T,2) = 2e^{-A+ra} - e^{-A} + \left(2\left(\frac{A}{ra}-1\right)e^{-A+ra}\left(1-e^{-ra}\right) - Ae^{-A}\right)(1+B)e^{-B} +$$

$$+\left(2\frac{A}{ra}\left(\frac{A}{ra}-1\right)e^{-A+ra}\left(1-(1+ra)e^{-ra}\right) - \frac{A^2}{2}e^{-A}\right)e^{-B}. \tag{6.110}$$

При $A = ra$ отсюда получим формулу (6.62).

Дифференцируя (6.105), получим частоту отказов:

$$\frac{a_c(T,L)}{k\lambda} = 2e^{-A+ra}\left(1-\frac{ra}{A}\right)\left(\frac{C}{D}\right)^L I(D,L) - e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L). \tag{6.111}$$

Интенсивность отказов находим по общей формуле (6.67).

В частности, при $L = 1$ и 2 имеем:

$$\frac{a_c(T,1)}{k\lambda} = 2e^{-A+ra}\left(1-\frac{ra}{A}\right)\left(\frac{C}{D}\right)(1-e^{D}) - e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)(1-e^{B}), \tag{6.112}$$

$$\frac{a_c(T,2)}{k\lambda} = 2e^{-A+ra}\left(1-\frac{ra}{A}\right)\left(\frac{C}{D}\right)^2 I(D,2) - e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^2 I(B,2).$$

При малых A и C расчет вероятности отказов проводится по приближенной формуле:

$$Q_c(T,L) \approx \frac{C^L}{(L+1)!}(A-2ra) + \frac{C^L}{(L+2)!}(Ara + (D-(L+1)C)(A-2ra)). \tag{6.113}$$

Чтобы найти среднюю наработку до отказа, проинтегрируем (6.106):

$$k\lambda\tau_1(T,L) = 2\left(\frac{C}{D}\right)^L \frac{A}{A-ra}(1-e^{-A+ra}) - \left(\frac{C}{B}\right)^L (1-e^{-A}) +$$

$$+\frac{A}{C}\sum_{i=0}^{L-1}(1-2\left(\frac{C}{D}\right)^{L-i} + \left(\frac{C}{B}\right)^{L-i})I(C,i+1),$$

$$k\lambda T_{cp}(T,L) = k\lambda\tau_1(T,L)/Q_c(T,L). \tag{6.114}$$

Перегруппировывая слагаемые в (6.114), найдем еще одну формулу для средней наработки в периоде пополнения и средней наработки до отказа:

$$k\lambda\tau_1(T,L)=(\frac{AL}{C}+\frac{2A}{A-ra}-1)I(C,L)+A(1-I(C,L-1))-$$

$$-\frac{2A}{A-ra}e^{-A+ra}\left(\frac{C}{D}\right)^L I(D,L)+e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L)\,. \qquad (6.115)$$

Из формулы (6.115) следует, что при увеличении периода пополнения средняя наработка до отказа стремится к пределу:

$$\lim_{T\to\infty} k\lambda T_{cp}(T,L)=\frac{AL}{C}+\frac{A+ra}{A-ra}\,. \qquad (6.116)$$

Коэффициент готовности находим по общей формуле (5.57).

Чтобы найти коэффициент оперативной готовности, представим ВБР в виде двух слагаемых (6.101):

$$P_c(T,L,S_0)=1-I(C,L+1)+e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L+1)=1-I(C,L)+e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L)\,,$$

$$P_c(T,L,S_1)=2e^{-A+ra}\left(\frac{C}{D}\right)^L I(D,L+1)-2e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L+1)=2e^{-A+ra}\left(\frac{C}{D}\right)^L I(D,L)-$$

$$-2e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L)=2e^{-A+ra}\left(\frac{C}{D}\right)^L-2e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L+2\sum_{i=0}^{L-1}\left(\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i}-\left(\frac{C}{D}\right)^{L-i}\right)\frac{C^i}{i!}e^{-C}\,. \qquad (6.117)$$

Проинтегрировав вероятности (6.117), получим:

$$k\lambda\tau_1^0=\left(\frac{C}{B}\right)^L(1-e^{-A})+\frac{A}{C}\sum_{i=0}^{L}\left(1-\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i}\right)I(C,L+1)\,, \qquad (6.118)$$

$$k\lambda\tau_1^1=\left(\frac{C}{D}\right)^L\frac{2A}{A-ra}(1-e^{-A+ra})-2\left(\frac{C}{B}\right)^L(1-e^{-A})-\frac{2A}{C}\sum_{i=0}^{L}\left(\left(\frac{C}{D}\right)^{L-i}-\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i}\right)I(C,i+1)\,.$$

Коэффициент оперативной готовности по наихудшему и произвольно выбранному циклу:

$$K^*_{oz}(\tau,T,L)=P_c(T,L,S_0)e^{-\alpha+r\lambda\tau}(2-e^{-r\lambda\tau})+P_c(T,L,S_1)e^{-\alpha+r\lambda\tau},\ \alpha=k\lambda\tau\,,$$

$$K_{oz}(\tau,T,L)=(k\lambda\tau_1^0(T,L)e^{-\alpha+r\lambda\tau}(2-e^{-r\lambda\tau})+k\lambda\tau_1^1(T,L)e^{-\alpha+r\lambda\tau})/A\,. \qquad (6.119)$$

По результатам расчетов (*приложение 6*, пример П6.5) можно сделать следующие выводы:

- расчет по точной формуле (6.107) не требует создавать ограничения на доступ подсистем к запасам в комплекте ЗИП, т. к. они имеют равный бесприоритетный доступ. Увеличение ДПС снижает показатели безотказности, но не столь существенно, как следовало ожидать. Так при увеличении резервированной части ОПС вдвое (от 0,4 до 0,8) при B = 0,8 снижает ВБР от значения 0,81716 до 0,76733, а увеличение ДПС втрое (при ra = 0,4, $A-2ra$ = 0,4) снижает ВБР от 0,76733 до 0,70167;
- приближенная экспоненциальная формула (5.19) и здесь дает малую погрешность в широком диапазоне изменения структурных параметров системы. Наибольшее значение погрешность достигает при больших значениях ra и большом относительном весе резер-

вированной части ОПС: при ra = 0,8 погрешность может достигать 5–7 %. Размер ДПС слабо влияет на величину погрешности. Так при ra = 0,4 увеличение B втрое (от 0,8 до 2,4) увеличивает δQ от 3,10 % до 3,36 %. А для больших ra при увеличении B величина δQ даже снижается;

- погрешности формул (6.108) и (6.109) примерно одинаковы, но формула (6.108) имеет знакопеременную погрешность, в то время как (6.109) дает всегда оценку снизу. Это делает формулу (6.108) не желательной для применения в приближенных расчетах;
- внутри периода пополнения погрешность формулы экспоненциальной модели может быть большой: по вероятности отказов сотни и тысячи процентов. Причем относительная погрешность увеличивается с ростом запасов, но уменьшается при увеличении дополнительной подсистемы.

6.6. Последовательное соединение мажорированной и нерезервированной подсистем (модель МП5)

Структура системы приведена на рис. 5.4, *г*. Дополнительно к модели МП5 здесь рассматривается еще одна подсистема (ДПС), состоящая из $n - k$ элементов, не участвующая в выполнении данной функции и потребляющая запасные части.

Вероятность отказа находим с помощью формул (6.20) и (5.144):

$$Q_c(T,L)=\int_0^T\frac{(n\lambda)^L x^{L-1}}{(L-1)!}e^{-n\lambda x}\left(1-3e^{-(k-r)\lambda(T-x)}+2e^{-k\lambda(T-x)}\right)dx=$$

$$=I(C,L)-3e^{-A+ra}\left(\frac{C}{D}\right)^L I(D,L)+2e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L)=$$

$$=I(C,L+1)-3e^{-A+ra}\left(\frac{C}{D}\right)^L I(D,L+1)+2e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L+1),\ D=B+ra\,. \qquad (6.120)$$

Перегруппировывая слагаемые в (6.120), получим:

$$P_c(T,L)=3e^{-A+ra}\left(\frac{C}{D}\right)^L-2e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L+\sum_{i=0}^{L-1}\frac{C^i}{i!}e^{-C}\left(1-3\left(\frac{C}{D}\right)^{L-i}+2\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i}\right). \qquad (6.121)$$

В частности, при L = 1 и 2 имеем:

$$P_c(T,1)=\frac{3C}{D}e^{-A+ra}-\frac{2C}{B}e^{-A}+e^{-C}\left(1-\frac{3C}{D}+\frac{2C}{B}\right), \qquad (6.122)$$

$$P_c(T,2)=\frac{3C}{D}e^{-A+ra}-\frac{2C}{B}e^{-A}+e^{-C}\left(1-\frac{3C^2}{D^2}+\frac{2C^2}{B^2}+C\left(1-\frac{3C}{D}+\frac{2C}{B}\right)\right).$$

Представим ВБР в виде суммы приращений. Используя общую формулу связи приращения и вероятности отказов при отсутствии ЗИП и формулу (5.144), имеем:

$$\Delta P_c^*(s,i)=\frac{s}{n\lambda}\left(\frac{n\lambda}{s+n\lambda}\right)^i Q_c^*(s,0)=\frac{A}{C}\left(\frac{3s(1-ra/A)}{s+(k-r)\lambda}-\frac{2s}{s+k\lambda}\right)\left(\frac{n\lambda}{s+n\lambda}\right)^i.$$

Отсюда:

$$\Delta P_c(T,i)=\frac{A}{C}\left(3(1-\frac{ra}{A})\left(\frac{C}{D}\right)^i I(D,i)e^{-A+ra}-2\left(\frac{C}{B}\right)^i I(B,i)e^{-A}\right). \qquad (6.123)$$

Приближенная формула первого типа для ВБР:

$$P_{c,пр1}(T,L)=\exp\left(-\frac{6\rho_1 ra}{1+5\rho_1}\right)K_{гЗИП,0}(T,n-3r,L_0)\,, \qquad (6.124)$$

$$\rho_1=-\frac{ra}{B+3ra}\ln K_{гЗИП,1}(T,n-k+3r,L_1)\,,$$

$$K_{гЗИП,0}(T,L_0)=1-I(C-3ra,L_0)+\frac{L_0+1}{C-3ra}I(C-3ra,L_0+1)\,,$$

$$K_{гЗИП,1}(T,L_1)=1-I(B+3ra,L_1)+\frac{L_1+1}{B+3ra}I(B+3ra,L_1+1)\,.$$

Приближенная оценка второго типа использует формулы (6.14) и (5.147):

$$P_{c,пр2}(T,L)=3e^{-A+ra}-2e^{-A}+\sum_{i=1}^{L}\left(3\left(\frac{A}{ra}\right)^{i-1}\left(\frac{A}{ra}-1\right)e^{-A+ra}I(ra,i)-\frac{2A^i}{i!}e^{-A}\right)(1-I(B,L-i+1))\,. \qquad (6.125)$$

В частности, при L = 1 и 2 имеем:

$$P_{c,пр2}(T,1)=3e^{-A+ra}-2e^{-A}+\left(3\left(\frac{A}{ra}-1\right)\left(e^{-A+ra}-e^{-A}\right)-2Ae^{-A}\right)e^{-B}\,,$$

$$P_{c,пр2}(T,2)=3e^{-A+ra}-2e^{-A}+\left(3\left(\frac{A}{ra}-1\right)e^{-A+ra}\left(1-e^{-ra}\right)-2Ae^{-A}\right)(1+B)e^{-B}+$$

$$+\left(3\frac{A}{ra}\left(\frac{A}{ra}-1\right)e^{-A+ra}\left(1-(1+ra)e^{-ra}\right)-A^2e^{-A}\right)e^{-B}\,. \qquad (6.126)$$

Дифференцируя (6.120), находим частоту отказов, а затем интенсивность отказов:

$$\frac{a_c(T,L)}{k\lambda}=3e^{-A+ra}\left(1-\frac{ra}{A}\right)\left(\frac{C}{D}\right)^L I(D,L)-2e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L)\,, \qquad (6.127)$$

$$\frac{\lambda_c(T,L)}{k\lambda}=\frac{a_c(T,L)}{k\lambda}/\,P_c(T,L)\,.$$

В частности, при L = 1 и 2 имеем:

$$\frac{a_c(T,1)}{k\lambda}=3e^{-A+ra}\left(1-\frac{ra}{A}\right)\left(\frac{C}{D}\right)(1-e^{D})-2e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)(1-e^{B})\,, \qquad (6.128)$$

$$\frac{a_c(T,2)}{k\lambda}=3e^{-A+ra}\left(1-\frac{ra}{A}\right)\left(\frac{C}{D}\right)^2 I(D,2)-2e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^2 I(B,2)\,.$$

Асимптотическая формула для вероятности отказов получается путем разложения (6.120) по степеням B, C и D:

$$Q_c(T,L) \approx \frac{C^L}{(L+1)!}(A-3ra) + \frac{C^L}{(L+2)!}(2Ara + (D-(L+1)C)(A-3ra)). \qquad (6.129)$$

Чтобы найти среднюю наработку до отказа, проинтегрируем (6.121) и получим:

$$k\lambda\tau_1(T,L) = \left(\frac{C}{D}\right)^L \frac{3A}{A-ra}(1-e^{-A+ra}) - 2\left(\frac{C}{B}\right)^L (1-e^{-A}) +$$

$$+ \frac{A}{C}\sum_{i=0}^{L-1}\left(1-3\left(\frac{C}{D}\right)^{L-i} + 2\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i}\right) I(C,i+1), \qquad (6.130)$$

$$k\lambda T_{cp}(T,L) = k\lambda\tau_1(T,L) / Q_c(T,L). \qquad (6.131)$$

Предельное значение средней наработки:

$$\lim_{T\to\infty} k\lambda T_{cp}(T,L) = \frac{AL}{C} + \frac{A+2ra}{A-2ra}. \qquad (6.132)$$

В частности, при L = 1 и 2 имеем:

$$k\lambda T_{cp}(T,1) = \left(\frac{3AC}{(A-ra)D}(1-e^{-A+ra}) - \frac{2C}{B}(1-e^{-A}) + \frac{A}{C}\left(1-\frac{3C}{D}+\frac{2C}{B}\right)(1-e^{-C})\right) / Q_c(T,1),$$

$$k\lambda T_{cp}(T,2) = (\frac{3AC}{(A-ra)D}(1-e^{-A+ra}) - \frac{2C}{B}(1-e^{-A}) +$$

$$+ \frac{A}{C}\left(1-\frac{3C^2}{D^2}+\frac{2C^2}{B^2}\right)(1-e^{-C}) + \left(1-\frac{3C}{D}+\frac{2C}{B}\right)(1-(1+C)e^{-C})) / Q_c(T,2). \qquad (6.133)$$

Коэффициент готовности находят по формуле:

$$K_z(T,L) = k\lambda\tau_1(T,L) / A, \qquad (6.134)$$

где $k\lambda\tau_1(T,L)$ находят по формуле (6.130).

Чтобы найти коэффициент оперативной готовности, представим ВБР в виде и $k\lambda\tau_1(T,L)$ в виде двух слагаемых:

$$P_c(T,L,S_0) = 1 - I(C,L) + e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L) = e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L + \sum_{i=0}^{L}\left(1-\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i}\right)\frac{C^i}{i!}e^{-C},$$

$$P_c(T,L,S_1) = 3e^{-A+ra}\left(\frac{C}{D}\right)^L I(D,L) - 3e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L) =$$

$$= 3e^{-A+ra}\left(\frac{C}{D}\right)^L - 3e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L + 3\sum_{i=0}^{L-1}\left(\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i} - \left(\frac{C}{D}\right)^{L-i}\right)\frac{C^i}{i!}e^{-C}, \qquad (6.135)$$

$$k\lambda\tau_1^0 = \left(\frac{C}{B}\right)^L (1-e^{-A}) + \frac{A}{C}\sum_{i=0}^{L}\left(1-\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i}\right) I(C,L+1),$$

$$k\lambda\tau_1^1 = \left(\frac{C}{D}\right)^L \frac{3A}{A-ra}(1-e^{-A+ra}) - 3\left(\frac{C}{B}\right)^L (1-e^{-A}) - \frac{3A}{C}\sum_{i=0}^{L}\left(\left(\frac{C}{D}\right)^{L-i} - \left(\frac{C}{B}\right)^{L-i}\right) I(C,i+1). \qquad (6.136)$$

Используя (6.135) и (6.136), найдем коэффициент оперативной готовности по наихудшему и произвольно выбранному циклу:

$$K^{*}_{oг}(\tau,T,L)=P_c(T,L,S_0)e^{-\alpha+r\lambda\tau}(3-2e^{-r\lambda\tau})+P_c(T,L,S_1)e^{-\alpha+r\lambda\tau},\alpha=k\lambda\tau\,, \qquad (6.137)$$

$$K_{oг}(\tau,T,L)=(k\lambda\tau_1^0(T,L)e^{-\alpha+r\lambda\tau}(3-2e^{-r\lambda\tau})+k\lambda\tau_1^1(T,L)e^{-\alpha+r\lambda\tau})/A\,.$$

По результатам расчетов (*приложение 6*, примеры П6.6 и П6.7) можно сделать следующие выводы:

- расчет по точной формуле (6.122) не требует создавать ограничения на доступ подсистем к запасам в комплекте ЗИП, т. к. они имеют равный бесприоритетный доступ. Увеличение ДПС снижает показатели безотказности, но не столь существенно, как следовало ожидать. Так увеличение ДПС втрое от 0,4 до 1,2 (при $ra = 0{,}2$, $A - 3ra = 0{,}2$) снижает ВБР от 0,89809 до 0,86073;
- приближенная экспоненциальная формула (5.19) и здесь дает малую погрешность (от 1,5 % до 7,8 % при $L = 1$) в широком диапазоне изменения структурных параметров системы. Наибольшее значение погрешность достигает при больших значениях ra и большом относительном весе резервированной части ОПС: при $ra = 0{,}8$ погрешность может достигать 6–7,8 %. Размер ДПС слабо влияет на величину погрешности. Так при $ra = 0{,}4$ увеличение B втрое (от 0,8 до 2,4) увеличивает δQ от 4,4 % до 4,7 %. А для больших ra при увеличении B величина δQ даже снижается;
- погрешности формул (6.124) и (6.125) примерно одинаковы, но формула (6.124) имеет знакопеременную погрешность, в то время как (6.125) дает всегда оценку снизу. Это делает формулу (6.124) не желательной для применения в приближенных расчетах;
- внутри периода пополнения погрешность формулы экспоненциальной модели может быть большой: по вероятности отказов сотни и тысячи процентов. Причем относительная погрешность увеличивается с ростом запасов, но уменьшается при увеличении дополнительной подсистемы.

6.7. Последовательное соединение двух дублированных и нерезервированной подсистем (модель МП6)

Структура системы приведена на рис. 5.4, *д*. Каждая из дублированных подсистем содержит две ветви по r элементов, нерезервированная подсистема имеет $k - 4r$ элементов. ДПС имеет $n - k$ элементов.

Вероятность отказа находим с помощью формул (6.20) и (5.169):

$$Q_c(T,L)=\int_0^T\frac{(n\lambda)^L x^{L-1}}{(L-1)!}e^{-n\lambda x}\left(1-4e^{-(k-2r)\lambda(T-x)}+4e^{-(k-r)\lambda(T-x)}-e^{-k\lambda(T-x)}\right)dx=$$

$$=I(C,L)-4e^{-A+2ra}\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^L I(B+2ra,L)+4e^{-A+ra}\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L I(B+ra,L)-e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L)\,. \qquad (6.138)$$

Формула (6.138) легко преобразуется к виду

$$P_c(T,L) = 1 - I(C, L+1) + 4e^{-A+2ra}\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^L I(B+2ra, L+1) -$$

$$-4e^{-A+2ra}\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L I(B+ra, L+1) + e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B, L+1). \qquad (6.139)$$

Перегруппировывая слагаемые в (6.139), получим:

$$P_c(T,L) = 4e^{-A+2ra}\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^L - 4e^{-A+ra}\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L + e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L +$$

$$+\sum_{i=0}^{L-1}\frac{C^i}{i!}e^{-C}\left(1 - 4\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^{L-i} + 4\left(\frac{C}{B+ra}\right)^{L-i} - \left(\frac{C}{B}\right)^{L-i}\right). \qquad (6.140)$$

В частности, при L = 1 и 2 имеем:

$$P_c(T,1) = \frac{4C}{B+2ra}e^{-A+2ra} - \frac{4C}{B+ra}e^{-A+ra} + \frac{C}{B}e^{-A} + \left(1 - \frac{4C}{B+2ra} + \frac{4C}{B+ra} - \frac{C}{B}\right)e^{-C}, \qquad (6.141)$$

$$P_c(T,2) = \frac{4C^2}{(B+2ra)^2}e^{-A+2ra} - \frac{4C^2}{(B+ra)^2}e^{-A+ra} + \frac{C^2}{B^2}e^{-A} + \left(1 - \frac{4C^2}{(B+2ra)^2} +\right.$$

$$\left. + \frac{4C^2}{(B+ra)^2} - \frac{C^2}{B^2} + C\left(1 - \frac{4C}{B+2ra} + \frac{4C}{B+ra} - \frac{C}{B}\right)\right)e^{-C}. \qquad (6.142)$$

Чтобы представить ВБР в виде суммы приращений, воспользуемся общими формулами, полученными с помощью (6.20):

$$\Delta P_c^*(s,1) = \frac{s}{s+n\lambda}Q_c^*(s,0), \quad \Delta P_c^*(s,i) = \left(\frac{n\lambda}{s+n\lambda}\right)^i \Delta P_c^*(s,1). \qquad (6.143)$$

Отсюда:

$$\Delta P_c(T,1) = \int_0^T e^{-n\lambda(T-x)}Q_c'(x,0)dx =$$

$$= \int_0^T e^{-n\lambda(T-x)}(4(k-2r)\lambda e^{-(k-2r)\lambda x} - 4(k-r)\lambda e^{-(k-r)\lambda x} + k\lambda e^{-k\lambda x})dx =$$

$$= \frac{4(A-2ra)}{B+2ra}e^{-A+2ra}(1-e^{-B-2ra}) - \frac{4(A-ra)}{B+ra}e^{-A+ra}(1-e^{-B-ra}) + \frac{A}{B}e^{-A}(1-e^{-B}),$$

$$\Delta P_c(T,i) = \int_0^T \frac{(n\lambda)^{i-1}x^{i-2}}{(i-2)!}e^{-n\lambda x}\Delta P_c(T-x,1)dx =$$

$$= \frac{4(A-2ra)}{B+2ra}e^{-A+2ra}\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^{i-1} I(B+2ra, i) -$$

$$-\frac{4(A-ra)}{B+ra}e^{-A+ra}\left(\frac{C}{B+ra}\right)^{i-1} I(B+ra, i) + \frac{A}{B}e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^{i-1} I(B, i), i \geq 2. \qquad (6.144)$$

При $A = 4ra$ из (6.144) имеем:

$$\Delta P_c\,(T,i) = \frac{8ra}{C-2ra} e^{-2ra} \left(\frac{C}{C-2ra}\right)^{i-1} I(C-ra,i) -$$

$$-\frac{12ra}{C-3ra} e^{-3ra} \left(\frac{C}{C-ra}\right)^{i-1} I(C-3ra,i) + \frac{A}{B} e^{-A} \left(\frac{C}{B}\right)^{i-1} I(B,i), i \geq 1. \qquad (6.145)$$

При малых A и C вероятность отказа можно находить по приближенной асимптотической формуле:

$$Q_c(T,L) \approx \frac{C^L}{(L+1)!}(A-4ra) + \frac{C^L}{(L+2)!}(4(ra)^2 - (A-4ra+LC)(A-4ra)). \qquad (6.146)$$

При $A = 4ra$ из (6.146) имеем:

$$Q_c(T,L) \approx \frac{A^2 C^L}{4(L+2)!}. \qquad (6.147)$$

Приближенная оценка ВБР первого типа может быть найдена путем экспоненциальной аппроксимации ВБР дублированной пары. Поскольку для дублированной пары средняя наработка до отказа при неограниченном ЗИП имеет вид:

$$T_{cp}(\infty) = (3\rho+1)/(2r\lambda\rho), \rho = r\lambda\Delta t_{ЗИП} = -\frac{ra}{B+4ra} \ln K_{гЗИП,1}(T,L_1), \qquad (6.148)$$

то для последовательного соединения двух дублированных пар средняя наработка

$$T_{cp1}(\infty) = (3\rho+1)/(4r\lambda\rho). \qquad (6.149)$$

С учетом нерезервированной подсистемы приближенная оценка ВБР системы имеет вид:

$$P_{c,пр1}(T,L_0,L_1) = \exp\left(-\frac{4\rho ra}{1+3\rho}\right) K_{гЗИП,0}(T,L_0), \rho = -\frac{ra}{B+4ra} \ln K_{гЗИП,1}(T,L_1). \qquad (6.150)$$

Здесь

$$K_{гЗИП,1}(T,L_1) = 1 - I(B+4ra,L_1) + \frac{L_1+1}{B+4ra} I(B+4ra,L_1+1). \qquad (6.151)$$

Для расчета $K_{гЗИП,0}(T,L_0)$ можно использовать нижнюю и верхнюю оценки:

$$K_{гЗИП,0н}(T,L_0) = 1 - I(C-4ra,L_0) + \frac{L_0+1}{C-4ra} I(C-4ra,L_0+1),$$

$$K_{гЗИП,0в}(T,L_0) = 1 - I(A-4ra,L_0) + \frac{L_0+1}{A-4ra} I(A-4ra,L_0+1). \qquad (6.152)$$

Значения L_0 и L_1 связаны с L одним из следующих отношений: $L_0 + L_1 = L$, $L_0 = L_1 = L$.

Приближенная оценка ВБР второго типа получается с помощью формул (6.14) и (5.169):

$$P_{c,пр2}(T,L) = e^{-A+2ra}(2-e^{-ra})^2 + \sum_{i=1}^{L} \left(4\left(\frac{A}{2ra}\right)^{i-1}\left(\frac{A}{2ra}-1\right) e^{-A+2ra} I(2ra,i) -\right.$$

$$\left. -4\left(\frac{A}{ra}\right)^{i-1}\left(\frac{A}{ra}-1\right) e^{-A+ra} I(ra,i) + \frac{A^i}{i!} e^{-A}\right)(1 - I(B,L-i+1)). \qquad (6.153)$$

При $A = 4ra$ из (6.138), (6.150) и (6.153) имеем:

$$P_c(T,L) = 1 - I(C,L) + 4e^{-2ra}\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^L I(B+2ra,L) -$$

$$-4e^{-3ra}\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L I(B+ra,L) + e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L), \qquad (6.154)$$

$$P_{c,np1}(T,L) = \exp\left(-\frac{4\rho ra}{1+3\rho}\right), \rho = r\lambda\Delta t_{ЗИП} = -\frac{ra}{C}\ln K_{гЗИП}(T,L),$$

$$P_{c,np2}(T,L) = e^{-2ra}(2-e^{-ra})^2 + \sum_{i=1}^{L}(2^{i+1}e^{-2ra}I(2ra,i) - 3(4^i)e^{-3ra}I(ra,i) +$$

$$+\frac{A^i}{i!}e^{-A})(1 - I(B,L-i+1)).$$

Чтобы найти частоту отказов, продифференцируем (6.138):

$$\frac{a_c(T,L)}{k\lambda} = 4e^{-A+2ra}\left(1-\frac{2ra}{A}\right)\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^L I(B+2ra,L) -$$

$$-4e^{-A+ra}\left(1-\frac{ra}{A}\right)\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L I(B+ra,L) + e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L). \qquad (6.155)$$

Интенсивность отказов находим по общей формуле (5.50).

В частности, при $L = 1$ и 2 имеем:

$$\frac{a_c(T,1)}{k\lambda} = e^{-A+2ra}\left(1-\frac{2ra}{A}\right)\left(\frac{4C}{B+2ra}\right)I(B+2ra,1) -$$

$$-e^{-A+ra}\left(1-\frac{ra}{A}\right)\left(\frac{4C}{B+ra}\right)I(B+ra,1) + e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)I(B,1),$$

$$\frac{a_c(T,2)}{k\lambda} = 4e^{-A+2ra}\left(1-\frac{2ra}{A}\right)\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^2 I(B+2ra,2) -$$

$$-4e^{-A+ra}\left(1-\frac{ra}{A}\right)\left(\frac{C}{B+ra}\right)^2 I(B+ra,2) + e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^2 I(B,2). \qquad (6.156)$$

Чтобы найти среднюю наработку до отказа, проинтегрируем (6.141)

$$\lambda\tau_1(T,L) = \frac{4A}{A-2ra}(1-e^{-A+2ra})\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^L - \frac{4A}{A-ra}(1-e^{-A+ra})\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L +$$

$$+(1-e^{-A})\left(\frac{C}{B}\right)^L + \frac{A}{C}\sum_{i=0}^{L-1}\left(1-4\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^{L-i} + 4\left(\frac{C}{B+ra}\right)^{L-i} - \left(\frac{C}{B}\right)^{L-i}\right)I(C,i+1). \qquad (6.157)$$

Путем перегруппировки слагаемых в (6.157) найдем еще одну удобную форму выражения для средней наработки в периоде пополнения:

$$k\lambda\tau_1(T,L)=\left(\frac{AL}{C}+\frac{A^2+Ara+2(ra)^2}{(A-ra)(A-2ra)}\right)I(C,L)+A(1-I(C,L-1))-$$

$$-\frac{4A}{A-2ra}\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^L e^{-A+2ra}+\frac{4A}{A-ra}\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L e^{-A+ra}-e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L+$$

$$+\sum_{i=0}^{L-1}\left(\frac{4A}{A-2ra}\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^{L-i}-\frac{4A}{A-ra}\left(\frac{C}{B+ra}\right)^{L-i}+\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i}\right)\frac{C^i}{i!}e^{-C}. \qquad (6.158)$$

Отсюда находим предельное значение:

$$\lim_{T\to\infty}k\lambda T_{cp}(T,L)=\frac{AL}{C}+\frac{A^2+Ara+2(ra)^2}{(A-ra)(A-2ra)}. \qquad (6.159)$$

Для приближенного расчета средней наработки используем формулу:

$$k\lambda T_{cp}(T,L)\approx A/(1/Q_c(T,L)-0,5). \qquad (6.160)$$

При малых A и C расчет средней наработки проводим по приближенной асимптотической формуле:

$$k\lambda T_{cp}(T,L)\approx\frac{(L+2)!}{C^L}/\left(4(ra)^2-(A-4ra)(A-4ra+L(C-1)-2)\right). \qquad (6.161)$$

Чтобы найти коэффициент оперативной готовности, надо выделить все различные структуры, которые могут образоваться в результате деградации базовой структуры. В данном случае таких структур будет две: структура S_1 совпадает со структурой МП4 при $L = 0$, а S_2 совпадает со структурой МП1. По графу состояний (рис. 6.3) находим изображения:

$$P_c^*(s,L,S_1)=P_{L+1}^*(s)=4\left(\frac{s}{s+(k-2r)}-\frac{s}{s+(k-2r)}\right)\left(\frac{n\lambda}{s+n\lambda}\right)^L$$

$$P_c^*(s,L,S_2)=P_{L+1}^*(s)=\left(\frac{4s}{s+(k-2r)\lambda}-\frac{2s}{s+(k-2r)\lambda}+\frac{2s}{s+kr\lambda}\right)\left(\frac{n\lambda}{s+n\lambda}\right)^L.$$

Отсюда:

$$P_c(T,L,S_1)=4e^{-A+ra}\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L I(B+ra,L)-4e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L),$$

$$P_c(T,L,S_2)=4e^{-A+2ra}\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^L I(B+2ra,L)-$$

$$-8e^{-A+ra}\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L I(B+ra,L)+4e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L). \qquad (6.162)$$

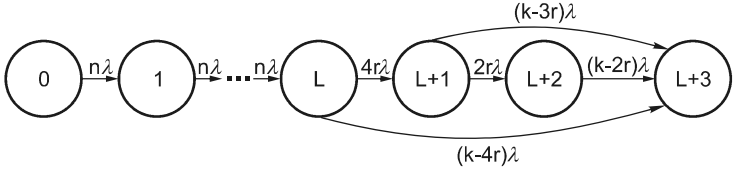


Рис. 6.3. Граф состояний однородной многофункциональной смешанной системы (модель МП6)

Вероятность сохранения базовой структуры:

$$P_c(T,L,S_0)=1-I(C,L)+e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L)\,. \qquad (6.163)$$

Коэффициент оперативной готовности по наихудшему циклу:

$$K^*_{oc}(\tau,T,L)=e^{-\alpha+2r\lambda\tau}(P_c(T,L,S_0)(2-e^{-r\lambda\tau})^2+P_c(T,L,S_1)(2-e^{-r\lambda\tau})+P_c(T,L,S_2))\,. \quad (6.164)$$

Проинтегрируем вероятности (6.162)–(6.163):

$$k\lambda\tau_1^0=\left(\frac{C}{B}\right)^L(1-e^{-A})+\frac{A}{C}\sum_{i=0}^{L-1}(1-\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i})I(C,L+1)\,,$$

$$k\lambda\tau_1^1=\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L\frac{4A}{A-ra}(1-e^{-A+ra})-4\left(\frac{C}{B}\right)^L(1-e^{-A})+\frac{4A}{C}\sum_{i=0}^{L-1}\left(\left(\frac{C}{B+ra}\right)^{L-i}-\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i}\right)I(C,i+1)\,,$$

$$k\lambda\tau_1^2=\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^L\frac{4A}{A-2ra}(1-e^{-A+2ra})-\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L\frac{8A}{A-ra}(1-e^{-A+ra})+4\left(\frac{C}{B}\right)^L(1-e^{-A})-$$

$$-\frac{4A}{C}\sum_{i=0}^{L-1}\left(\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^{L-i}-2\left(\frac{C}{B+ra}\right)^{L-i}+\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i}\right)I(C,i+1)\,. \qquad (6.165)$$

Теперь можно выразить коэффициент оперативной готовности по произвольному циклу:

$$K_{oc}(\tau,T,L)=e^{-\alpha+2r\lambda\tau}(k\lambda\tau_1^0(2-e^{-r\lambda\tau})^2+k\lambda\tau_1^1(2-e^{-r\lambda\tau})+k\lambda\tau_1^2),\alpha=k\lambda\tau\,. \qquad (6.166)$$

По результатам расчетов (*приложение 6*, примеры П6.8 и П6.9) можно сделать следующие выводы:

- расчет по точной формуле (6.142) не требует создавать ограничения на доступ подсистем к запасам в комплекте ЗИП, т. к. они имеют равный бесприоритетный доступ. Увеличение ДПС снижает показатели безотказности, но не существенно. Так увеличение ДПС втрое от 0,4 до 1,2 (при ra = 0,1, $A - 4ra$ = 0,2, L = 1) снижает ВБР от 0,92727 до 0,89407;
- приближенная экспоненциальная формула (5.19) и здесь дает малую погрешность (до 4,3 % при L = 1 и 4,9 % при L = 2) в широком диапазоне изменения структурных параметров системы. Наибольшее значение погрешность достигает при больших значениях ra и большом относительном весе нерезервированной части ОПС: при ra = 0,2, A = 1,2 и L = 1 погрешность находится в пределах 2,8–3,0 %. Размер ДПС слабо влияет на величину погрешности. Так при ra = 0,4 увеличение B втрое (от 1,6 до 4,8) увеличивает δQ от 4,1 % до 4,3 %. Для больших ra при увеличении B величина δQ снижается;
- погрешности формул (6.150) и (6.153) примерно одинаковы, но формула (6.150) при $L_0 = L_1 = L$ имеет знакопеременную погрешность, в то время как (6.153) дает всегда оценку снизу. Это делает формулу (6.153) не желательной для применения в приближенных расчетах;
- внутри периода пополнения погрешность формулы экспоненциальной модели может быть большой: по вероятности отказов сотни и тысячи процентов. Причем относительная погрешность увеличивается с ростом запасов, но уменьшается при увеличении дополнительной подсистемы.

6.8. Последовательное соединение двух мажорированных и нерезервированной подсистем (модель МП7)

Структура системы приведена на рис. 5.4, *е*. Каждая из мажорированных подсистем содержит три ветви по *r* элементов каждая, нерезервированная подсистема имеет $k - 6r$ элементов. ДПС имеет $n - k$ элементов.

Вероятность отказа находим с помощью формул (6.20) и (5.212, а):

$$Q_c(T,L) = \int_0^T \frac{(n\lambda)^L x^{L-1}}{(L-1)!} e^{-n\lambda x}\left(1 - 9e^{-(k-2r)\lambda(T-x)} + 12e^{-(k-r)\lambda(T-x)} - 4e^{-k\lambda(T-x)}\right)dx =$$

$$= I(C,L) - 9e^{-A+2ra}\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^L I(B+2ra,L) + 12e^{-A+ra}\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L I(B+ra,L) - 4e^{-A+ra}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L). \tag{6.167}$$

Формула (6.167) легко преобразуется к виду:

$$P_c(T,L) = 1 - I(C,L+1) + 9e^{-A+2ra}\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^L I(B+2ra,L+1) -$$

$$-12e^{-A+2ra}\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L I(B+ra,L+1) + 4e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L+1). \tag{6.168}$$

Перегруппировывая слагаемые в (6.167), получим:

$$P_c(T,L) = 9e^{-A+2ra}\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^L - 12e^{-A+ra}\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L + 4e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L +$$

$$+\sum_{i=0}^{L-1}\frac{C^i}{i!}e^{-C}\left(1 - 9\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^{L-i} + 12\left(\frac{C}{B+ra}\right)^{L-i} - 4\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i}\right). \tag{6.169}$$

В частности, при $L = 1$ и 2 имеем:

$$P_c(T,1) = \frac{9C}{B+2ra}e^{-A+2ra} - \frac{12C}{B+ra}e^{-A+ra} + \frac{4C}{B}e^{-A} + \left(1 - \frac{9C}{B+2ra} + \frac{12C}{B+ra} - \frac{4C}{B}\right)e^{-C},$$

$$P_c(T,2) = \frac{9C^2}{(B+2ra)^2}e^{-A+2ra} - \frac{12C^2}{(B+ra)^2}e^{-A+ra} + \frac{4C^2}{B^2}e^{-A} + \left(1 - \frac{9C^2}{(B+2ra)^2} +\right.$$

$$\left. + \frac{12C^2}{(B+ra)^2} - \frac{4C^2}{B^2} + C\left(1 - \frac{9C}{B+2ra} + \frac{12C}{B+ra} - \frac{4C}{B}\right)\right)e^{-C}. \tag{6.170}$$

При постепенном увеличении числа запасных частей удобно представить ВБР в виде суммы приращений. Чтобы найти приращения, воспользуемся общими формулами, полученными с помощью (6.20):

$$\Delta P_c^*(s,i) = \left(\frac{n\lambda}{s+n\lambda}\right)^{i-1}\Delta P_c^*(s,1), \Delta P_c^*(s,1) = \frac{s}{s+n\lambda}Q_c^*(s,0). \tag{6.171}$$

Выполняя здесь обратное преобразование, имеем:

$$\Delta P_c\ (T,1) = \int_0^T e^{-n\lambda(T-x)} Q_c^{'}(x,0)dx =$$

$$= \int_0^T e^{-n\lambda(T-x)}(9(k-2r)\lambda e^{-(k-2r)\lambda x} - 12(k-r)\lambda e^{-(k-r)\lambda x} + 4k\lambda e^{-k\lambda x})dx =$$

$$= \frac{9(A-2ra)}{B+2ra} e^{-A+2ra}(1-e^{-B-2ra}) - \frac{12(A-ra)}{B+ra} e^{-A+ra}(1-e^{-B-ra}) + \frac{4A}{B} e^{-A}(1-e^{-B}),$$

$$\Delta P_c\ (T,i) = \int_0^T \frac{(n\lambda)^{i-1} x^{i-2}}{(i-2)!} e^{-n\lambda x} \Delta P_c\ (T-x,1)dx =$$

$$= \frac{9(A-2ra)}{B+2ra} e^{-A+2ra} \left(\frac{C}{B+2ra}\right)^{i-1} I(B+2ra,i) -$$

$$- \frac{12(A-ra)}{B+ra} e^{-A+ra} \left(\frac{C}{B+ra}\right)^{i-1} I(B+ra,i) + \frac{4A}{B} e^{-A} \left(\frac{C}{B}\right)^{i-1} I(B,i), i \geq 2. \qquad (6.172)$$

При малых значениях A и C вероятность отказа можно находить по приближенной асимптотической формуле:

$$Q_c(T,L) \approx \frac{C^L}{(L+1)!}(A-6ra) + \frac{C^L}{(L+2)!}(12(ra)^2 - (A-6ra+LC)(A-6ra)). \qquad (6.173)$$

Приближенная оценка ВБР первого типа может быть найдена путем экспоненциальной аппроксимации ВБР мажорированной пары. Поскольку для мажорированной пары средняя наработка до отказа при неограниченном ЗИП имеет вид:

$$T_{cp}(\infty) = (5\rho+1)/(6r\lambda\rho), \rho = r\lambda\Delta t_{ЗИП} = -\frac{ra}{B+6ra} \ln K_{гЗИП,1}(T,L_1), \qquad (6.174)$$

то для последовательного соединения двух мажорированных пар средняя наработка

$$T_{cp1}(\infty) = (5\rho+1)/(12r\lambda\rho). \qquad (6.175)$$

С учетом нерезервированной подсистемы приближенная оценка ВБР системы имеет вид:

$$P_{c,пр1}(T,L_0,L_1) = \exp\left(-\frac{12\rho ra}{1+5\rho}\right) K_{гЗИП,0}(T,L_0). \qquad (6.176)$$

Здесь

$$K_{гЗИП,1}(T,L_1) = 1 - I(B+6ra,L_1) + \frac{L_1+1}{B+6ra} I(B+6ra,L_1+1). \qquad (6.177)$$

Для расчета $K_{гЗИП,0}(T,L_0)$ можно использовать нижнюю и верхнюю оценки:

$$K_{гЗИП,0н}(T,L_0) = 1 - I(C-6ra,L_0) + \frac{L_0+1}{C-6ra} I(C-6ra,L_0+1),$$

$$K_{гЗИП,0в}(T,L_0) = 1 - I(A-6ra,L_0) + \frac{L_0+1}{A-6ra} I(A-6ra,L_0+1). \qquad (6.178)$$

Значения L_0 и L_1 связаны с L одним из следующих отношений: $L_0 + L_1 = L$, $L_0 = L_1 = L$.

Приближенная оценка ВБР второго типа получается с помощью формул (6.14) и (5.216):

$$P_{c,пр2}(T,L)=e^{-A+2ra}(3-2e^{-ra})^2+\sum_{i=1}^{L}(9\left(\frac{A}{2ra}\right)^{i-1}\left(\frac{A}{2ra}-1\right)e^{-A+2ra}I(2ra,i)-$$

$$-12\left(\frac{A}{ra}\right)^{i-1}\left(\frac{A}{ra}-1\right)e^{-A+ra}I(ra,i)+\frac{4A^i}{i!}e^{-A})(1-I(B,L-i+1)). \qquad (6.179)$$

Чтобы найти частоту отказов, продифференцируем (6.167):

$$\frac{a_c(T,L)}{k\lambda}=9e^{-A+2ra}\left(1-\frac{2ra}{A}\right)\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^L I(B+2ra,L)-$$

$$-12e^{-A+ra}\left(1-\frac{ra}{A}\right)\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L I(B+ra,L)+4e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L). \qquad (6.180)$$

Интенсивность отказов находим по общей формуле (5.48).

В частности, при L = 1 и 2 имеем:

$$\frac{a_c(T,1)}{k\lambda}=e^{-A+2ra}\left(1-\frac{2ra}{A}\right)\left(\frac{9C}{B+2ra}\right)I(B+2ra,1)-$$

$$-e^{-A+ra}\left(1-\frac{ra}{A}\right)\left(\frac{12C}{B+ra}\right)I(B+ra,1)+4e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)I(B,1),$$

$$\frac{a_c(T,2)}{k\lambda}=9e^{-A+2ra}\left(1-\frac{2ra}{A}\right)\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^2 I(B+2ra,2)-$$

$$-12e^{-A+ra}\left(1-\frac{ra}{A}\right)\left(\frac{C}{B+ra}\right)^2 I(B+ra,2)+4e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^2 I(B,2). \qquad (6.181)$$

Чтобы найти среднюю наработку до отказа, проинтегрируем (6.169)

$$\lambda\tau_1(T,L)=\frac{9A}{A-2ra}(1-e^{-A+2ra})\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^L-\frac{12A}{A-ra}(1-e^{-A+ra})\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L+$$

$$+4(1-e^{-A})\left(\frac{C}{B}\right)^L+\frac{A}{C}\sum_{i=0}^{L-1}\left(1-9\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^{L-i}+12\left(\frac{C}{B+ra}\right)^{L-i}-4\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i}\right)I(C,i+1). \qquad (6.182)$$

Путем перегруппировки слагаемых в (6.182) найдем еще одну удобную форму выражения для средней наработки в периоде пополнения:

$$k\lambda\tau_1(T,L)=\left(\frac{AL}{C}+\frac{A^2+3Ara+8(ra)^2}{(A-ra)(A-2ra)}\right)I(C,L)+A(1-I(C,L-1))-$$

$$-\frac{9A}{A-2ra}\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^L e^{-A+2ra}+\frac{12A}{A-ra}\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L e^{-A+ra}-4e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L+$$

$$+\sum_{i=0}^{L-1}\left(\frac{9A}{A-2ra}\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^{L-i}-\frac{12A}{A-ra}\left(\frac{C}{B+ra}\right)^{L-i}+4\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i}\right)\frac{C^i}{i!}e^{-C}=$$

$$= \left(\frac{AL}{C} + \frac{A^2 + 3Ara + 8(ra)^2}{(A-ra)(A-2ra)} \right) I(C,L) + A(1 - I(C,L-1)) -$$

$$- \frac{9A}{A-2ra} \left(\frac{C}{B+2ra} \right)^L e^{-A+2ra} I(B+2ra,L) + \frac{12A}{A-ra} \left(\frac{C}{B+ra} \right)^L e^{-A+ra} I(B+ra,L) -$$

$$-4e^{-A} \left(\frac{C}{B} \right)^L I(B,L). \qquad (6.183)$$

Отсюда находим предельное значение:

$$\lim_{T\to\infty} k\tau_1(T,L) = \frac{AL}{C} + \frac{9A}{A-2ra} - \frac{12A}{A-ra} + 4. \qquad (6.184)$$

В частности, при L = 1 и 2 имеем:

$$k\tau_1(T,1) = \left(\frac{A}{C} + \frac{9A}{A-2ra} - \frac{12A}{A-ra} + 4 \right)(1-e^{-C}) - \frac{9AC}{(A-2ra)(B+2ra)}(e^{-A+2ra} - e^{-C}) +$$

$$+ \frac{12AC}{(A-ra)(B+ra)}(e^{-A+ra} - e^{-C}) - \frac{4C}{B}(e^{-A} - e^{-C}), \qquad (6.185)$$

$$k\tau_1(T,2) = \left(\frac{A}{C} + \frac{9A}{A-2ra} - \frac{12A}{A-ra} + 4 \right) I(C,2) + Ae^{-C} -$$

$$- \frac{9AC^2}{(A-2ra)(B+2ra)^2} e^{-A+2ra} I(B+2ra,2) +$$

$$+ \frac{12AC^2}{(A-ra)(B+ra)^2} e^{-A+ra} I(B+ra,2) - \frac{4C^2}{B^2} e^{-A} I(B,2). \qquad (6186)$$

Приближенное асимптотическое значение при малых A и C:

$$k\lambda T_{cp}(T,L) \approx \frac{A(L+2)!}{C^L} / \left(12(ra)^2 - (A-6ra)(L(C-1)-2) - (A-6ra)^2 \right). \qquad (6.187)$$

Чтобы найти коэффициент оперативной готовности, представим ВБР в виде суммы трех слагаемых — вероятностей сохранения базовой структуры S_0 и вероятностей появления деградированной структуры с одним S_1 или двумя S_2 отказавшими элементами.

По графу состояний (рис. 6.4) находим изображение для функций вероятностей:

$$P^*_{L+1}(s) = 6 \left(\frac{s}{s+(k-r)\lambda} - \frac{s}{s+k\lambda} \right) \left(\frac{n\lambda}{s+n\lambda} \right)^L,$$

$$P^*_{L+2}(s) = 9 \left(\frac{s}{s+(k-2r)\lambda} - \frac{2s}{s+(k-r)\lambda} + \frac{s}{s+k\lambda} \right) \left(\frac{n\lambda}{s+n\lambda} \right)^L. \qquad (6.188)$$

Выполняя в (6.188) обратное преобразование, получим:

$$P_c(T,L,S_1) = 6e^{-A+ra} \left(\frac{C}{B+ra} \right)^L I(B+ra,L) - 6e^{-A} \left(\frac{C}{B} \right)^L I(B,L), \qquad (6.189)$$

$$P_c(T,L,S_2)=9e^{-A+2ra}\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^L I(B+2ra,L)-$$

$$-18e^{-A+ra}\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L I(B+ra,L)+9e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L)\,. \qquad (6.190)$$

Вычитая из (6.167) вероятности (6.189) и (6.190), получим вероятность сохранения базовой структуры:

$$P_c(T,L,S_0)=1-I(C,L)+e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L)\,. \qquad (6.191)$$

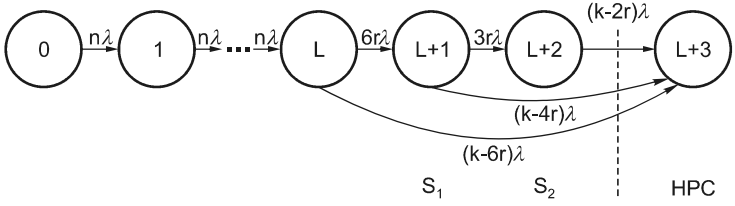


Рис. 6.4. Граф состояний однородной многофункциональной смешанной системы (модель МП7)

Теперь можно найти коэффициент оперативной готовности по наихудшему циклу:

$$K^*_{oz}(\tau,T,L)=(P_c(T,L,S_0)(3-2e^{-r\lambda\tau})^2+P_c(T,L,S_1)(3-2e^{-r\lambda\tau})+P_c(T,L,S_2))e^{-(k-2r)\lambda\tau}\,. \qquad (6.192)$$

Проинтегрировав функции вероятностей (6.189)–(6.191), найдем среднее время пребывания системы в периоде пополнения в состояниях со структурой S_0, S_1 и S_2:

$$k\lambda\tau_1^0=\frac{A}{C}\sum_{i=0}^{L-1}\left(1-\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i}\right)I(C,i+1)+\left(\frac{C}{B}\right)^L I(A,1)\,, \qquad (6.193)$$

$$k\lambda\tau_1^1=\frac{6A}{A-ra}\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L I(A-ra,1)-6\left(\frac{C}{B}\right)^L I(A,1)+$$

$$+\frac{6A}{C}\sum_{i=0}^{L-1}\left(\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i}-\left(\frac{C}{B+ra}\right)^{L-i}\right)I(C,i+1)\,, \qquad (6.194)$$

$$k\lambda\tau_1^2=\frac{9A}{A-2ra}\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^L I(A-2ra,1)-\frac{18A}{A-ra}\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L I(A-ra,1)+$$

$$+9\left(\frac{C}{B}\right)^L I(A,1)-\frac{9A}{C}\sum_{i=0}^{L-1}\left(\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i}-2\left(\frac{C}{B+ra}\right)^{L-i}+\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^{L-i}\right)I(C,i+1)\,. \qquad (6.195)$$

Отсюда коэффициент оперативной готовности по произвольно выбранному циклу:

$$K_{oz}(\tau,T,L)=\frac{1}{A}e^{-\alpha+2r\lambda\tau}(k\lambda\tau_1^0(3-2e^{-r\lambda\tau})^2+k\lambda\tau_1^1(3-2e^{-r\lambda\tau})+k\lambda\tau_1^2),\alpha=k\lambda\tau\,. \qquad (6.196)$$

При $A = 6ra$ имеем частный случай, когда в системе отсутствует нерезервированная подсистема.

По результатам расчетов (*приложение 6*, примеры П6.10 и П6.11) можно сделать следующие выводы:

- расчет по точной формуле (6.170) не требует создавать ограничения на доступ подсистем к запасам в комплекте ЗИП, т. к. они имеют равный бесприоритетный доступ. Увеличение ДПС снижает показатели безотказности, но не существенно. Так увеличение ДПС втрое от 0,8 до 2,4 (при $ra = 0{,}1$, $A - 6ra = 0{,}2$, $L = 1$) снижает ВБР от 0,89024 до 0,84597;
- приближенная экспоненциальная формула (5.19) и здесь дает малую погрешность (до 6,3 % при $L = 1$ и 7,3 % при $L = 2$) в широком диапазоне изменения структурных параметров системы. Наибольшее значение погрешность достигает при больших значениях ra и большом относительном весе нерезервированной части ОПС: при $ra = 0{,}2$, $A = 1{,}2$ и $L = 1$ погрешность находится в пределах 1,64–2,09 %. Размер ДПС слабо влияет на величину погрешности. Так при $ra = 0{,}4$, $A = 2{,}4$ увеличение B втрое (от 1,6 до 4,8) увеличивает δQ от 5,68 % до 6,1 %. Для больших A при увеличении B величина δQ снижается;
- погрешности формул (6.176) и (6.179) больше погрешности формулы экспоненциальной модели, причем обе формулы дают знакопеременную погрешность. Но формула (6.176) обычно имеет большую погрешность, чем формула (6.179). По совокупности свойств это делает обе формулы не желательными для применения в приближенных расчетах;
- внутри периода пополнения погрешность формулы экспоненциальной модели может быть большой: по вероятности отказов сотни и тысячи процентов. Причем относительная погрешность увеличивается с ростом запасов, но уменьшается при увеличении дополнительной подсистемы.

6.9. Последовательное соединение дублированной, мажорированной и нерезервированной подсистем (модель МП8)

Структура системы приведена на рис. 5.7, *а*. Дублированная подсистема содержит две ветви по r элементов каждая, мажорированная подсистема — три ветви по r элементов каждая, нерезервированная подсистема имеет $k - 5r$ элементов. ДПС имеет $n - k$ элементов. Граф состояний системы приведен на рис. 6.5.

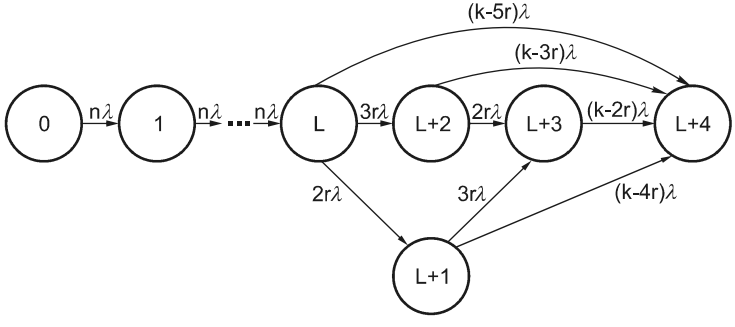


Рис. 6.5. Граф состояний однородной многофункциональной смешанной системы (модель МП8)

Вероятность отказа находим с помощью формул (6.20) и (5.246):

$$Q_c(T,L)=\int_0^T\frac{(n\lambda)^L x^{L-1}}{(L-1)!}e^{-n\lambda x}Q(T-x,0)dx=I(C,L)-$$

$$-6\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^L e^{-A+2ra}I(B+2ra,L)+7\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L e^{-A+ra}I(B+ra,L)-2\left(\frac{C}{B}\right)^L e^{-A}I(B,L). \quad (6.197)$$

Поскольку

$$\frac{C^L}{L!}e^{-C}-6\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^L\frac{(B+2ra)^L}{L!}e^{-C}+7\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L\frac{(B+ra)^L}{L!}e^{-C}-2\left(\frac{C}{B}\right)^L\frac{B^L}{L!}e^{-C}=0,$$

формула (6.197) легко преобразуется к виду:

$$P_c(T,L)=1-I(C,L+1)+6\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^L e^{-A+2ra}I(B+2ra,L+1)-$$

$$-7\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L e^{-A+ra}I(B+ra,L+1)+2\left(\frac{C}{B}\right)^L e^{-A}I(B,L+1). \quad (6.198)$$

Перегруппировывая слагаемые в (6.197), получим:

$$P_c(T,L)=6\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^L e^{-A+2ra}-7\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L e^{-A+ra}+2\left(\frac{C}{B}\right)^L e^{-A}+$$

$$+\sum_{i=0}^{L-1}\frac{C^i}{i!}e^{-C}\left(1-6\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^{L-i}+7\left(\frac{C}{B+ra}\right)^{L-i}-2\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i}\right). \quad (6.199)$$

Найдем теперь ВБР в виде суммы приращений, используя формулу (6.171). Выполняя обратное преобразование, получим:

$$\Delta P_c(T,i)=\int_0^T\frac{(n\lambda x)^{i-1}}{(i-1)!}e^{-n\lambda x}Q_c'(x,0)dx=\frac{6(A-2ra)}{C}e^{-A+2ra}\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^i I(B+2ra,i)-$$

$$-\frac{7(A-ra)}{C}e^{-A+ra}\left(\frac{C}{B+ra}\right)^i I(B+ra,i)+\frac{2A}{C}e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^i I(B,i),i\geq 1. \quad (6.200)$$

Асимптотическая формула для вероятности отказа при малых A и C получается путем разложения функции (6.198) по степеням малого параметра:

$$Q_c(T,L)\approx\frac{C^L}{(L+1)!}(A-5ra)+\frac{C^L}{(L+2)!}(8(ra)^2-(A-5ra+LC)(A-5ra)). \quad (6.201)$$

Приближенная оценка ВБР первого типа:

$$P_{c,пр1}(T,L_0,L_1)=\exp\left(-\frac{2\rho ra}{1+3\rho}\right)\exp\left(-\frac{6\rho ra}{1+5\rho}\right)K_{сЗИП,0}(T,L_0). \quad (6.201,\text{ а})$$

Здесь

$$\rho = r\lambda\Delta t_{ЗИП} = -\frac{ra}{B+5ra}\ln K_{гЗИП,1}(T,L_1), \tag{6.202}$$

$$K_{гЗИП,1}(T,L_1) = 1 - I(B+5ra,L_1) + \frac{L_1+1}{B+5ra} I(B+5ra,L_1+1),$$

$$K_{гЗИП,0н}(T,L_0) = 1 - I(C-5ra,L_0) + \frac{L_0+1}{C-5ra} I(C-5ra,L_0+1),$$

$$K_{гЗИП,0в}(T,L_0) = 1 - I(A-5ra,L_0) + \frac{L_0+1}{A-5ra} I(A-5ra,L_0+1).$$

Приближенная оценка ВБР второго типа получается с помощью формул (6.14) и (5.251):

$$P_{c,пр2}(T,L) = e^{-A+2ra}(2-e^{-ra})(3-2e^{-ra}) + \sum_{i=1}^{L}(6\left(\frac{A}{2ra}\right)^{i-1}\left(\frac{A}{2ra}-1\right)e^{-A+2ra} I(2ra,i) -$$

$$-7\left(\frac{A}{ra}\right)^{i-1}\left(\frac{A}{ra}-1\right)e^{-A+ra} I(ra,i) + \frac{2A^i}{i!}e^{-A})(1-I(B,L-i+1)). \tag{6.203}$$

Дифференцируя (6.197), найдем частоту отказов:

$$\frac{a_c(T,L)}{k\lambda} = 6e^{-A+2ra}\left(1-\frac{2ra}{A}\right)\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^L I(B+2ra,L) -$$

$$-7e^{-A+ra}\left(1-\frac{ra}{A}\right)\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L I(B+ra,L) + 2e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L). \tag{6.204}$$

Чтобы найти среднюю наработку системы до отказа, надо проинтегрировать (6.199):

$$k\lambda\tau_1(T,L) = \frac{6A}{A-2ra}(1-e^{-A+2ra})\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^L - \frac{7A}{A-ra}(1-e^{-A+ra})\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L +$$

$$+2(1-e^{-A})\left(\frac{C}{B}\right)^L + \frac{A}{C}\sum_{i=0}^{L-1}\left(1-6\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^{L-i} + 7\left(\frac{C}{B+ra}\right)^{L-i} - 2\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i}\right) I(C,i+1). \tag{6.205}$$

Перегруппировывая слагаемые в (6.205), имеем:

$$k\lambda\tau_1(T,L) = \left(\frac{AL}{C} + \frac{6A}{A-2ra} - \frac{7A}{A-ra} + 2\right) I(C,L) + A(1-I(C,L-1)) -$$

$$-\frac{6A}{A-2ra}\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^L e^{-A+2ra} + \frac{7A}{A-ra}\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L e^{-A+ra} - 2e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L +$$

$$+\sum_{i=0}^{L-1}\left(\frac{6A}{A-2ra}\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^{L-i} - \frac{7A}{A-ra}\left(\frac{C}{B+ra}\right)^{L-i} + 2\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i}\right)\frac{C^i}{i!}e^{-C}. \tag{6.206}$$

Среднюю наработку до отказа находим с помощью общей формулы (6.114).

Отсюда следует предельное значение:

$$\lim_{T\to\infty} k\lambda T_{ср}(T,L) = \frac{AL}{C} + \frac{6A}{A-2ra} - \frac{7A}{A-ra} + 2. \tag{6.207}$$

Приближенное асимптотическое значение средней наработки до отказа при малых A и C находим путем разложения (6.205) и (6.197) по степеням малого параметра:

$$k\lambda T_{cp}(T,L) \approx \frac{A(L+2)!}{C^L} / \left(8(ra)^2 - (A-5ra)(L(C-1)-2) - (A-5ra)^2\right). \quad (6.208)$$

При отсутствии нерезервированной подсистемы параметр $A = 5ra$. Тогда

$$k\lambda T_{cp}(T,L) \approx 25(L+2)!/(8AC^L). \quad (6.209)$$

Чтобы найти коэффициент оперативной готовности, представим изображения функций вероятностей состояний $L + 1$, $L + 2$ и $L + 3$, соответствующих трем деградированным структурам S_1, S_2 и S_3, в следующем виде:

$$P^*_{L+1}(s) = 2\left(\frac{s}{s+(k-r)\lambda} - \frac{s}{s+k\lambda}\right)\left(\frac{n\lambda}{s+n\lambda}\right)^L, P^*_{L+2}(s) = \frac{3}{2}P^*_{L+1}(s),$$

$$P^*_{L+3}(s) = 6\left(\frac{s}{s+(k-2r)\lambda} - \frac{2s}{s+(k-r)\lambda} + \frac{s}{s+k\lambda}\right)\left(\frac{n\lambda}{s+n\lambda}\right)^L.$$

Выполняя здесь обратное преобразование и используя формулу (6.198), найдем явные выражения вероятностей получения в конце периода пополнения базовой структуры и трех деградированных структур:

$$P_c(T,L,S_0) = 1 - I(C,L) + e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L), \quad (6.210)$$

$$P_c(T,L,S_1) = \frac{2}{3}P_c(T,L,S_2) = 2e^{-A+ra}\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L I(B+ra,L) - 2e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L),$$

$$P_c(T,L,S_3) = 6e^{-A+2ra}\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^L I(B+2ra,L) -$$

$$-12e^{-A+ra}\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L I(B+ra,L) + 6e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L).$$

Теперь можно найти коэффициент оперативной готовности по наихудшему циклу:

$$K^*_{oz}(\tau,T,L) = (P_c(T,L,S_0)(2-e^{-r\lambda\tau})(3-2e^{-r\lambda\tau}) + P_c(T,L,S_1)(3-2e^{-r\lambda\tau}) +$$

$$+P_c(T,L,S_2)(2-e^{-r\lambda\tau}) + P_c(T,L,S_3))e^{-(k-2r)\lambda\tau}. \quad (6.211)$$

Проинтегрировав функции вероятностей (6.210), найдем среднее время пребывания системы в периоде пополнения в состояниях со структурой S_0, S_1, S_2 и S_3:

$$k\lambda\tau_1^0 = \frac{A}{C}\sum_{i=0}^{L-1}\left(1-\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i}\right)I(C,i+1) + \left(\frac{C}{B}\right)^L I(A,1), \quad (6.212)$$

$$k\lambda\tau_1^1 = \frac{2A}{A-ra}\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L I(A-ra,1) - 2\left(\frac{C}{B}\right)^L I(A,1) +$$

$$+\frac{2A}{C}\sum_{i=0}^{L-1}\left(\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i} - \left(\frac{C}{B+ra}\right)^{L-i}\right)I(C,i+1), k\lambda\tau_1^2 = \frac{3}{2}k\lambda\tau_1^1,$$

$$k\lambda\tau_1^3 = \frac{6A}{A-2ra}\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^L I(A-2ra,1) - \frac{12A}{A-ra}\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L I(A-ra,1) +$$

$$+6\left(\frac{C}{B}\right)^L I(A,1) - \frac{6A}{C}\sum_{i=0}^{L-1}\left(\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i} - 2\left(\frac{C}{B+ra}\right)^{L-i} + \left(\frac{C}{B+2ra}\right)^{L-i}\right) I(C,i+1).$$

Теперь можно записать выражение для коэффициента оперативной готовности для произвольного цикла:

$$K_{oz}(\tau,T,L) = (k\lambda\tau_1^0(2-e^{-r\lambda\tau})(3-2e^{-r\lambda\tau}) + k\lambda\tau_1^1(3-2e^{-r\lambda\tau}) +$$

$$+k\lambda\tau_1^2(2-e^{-r\lambda\tau}) + k\lambda\tau_1^3)e^{-(k-2r)\lambda\tau}. \qquad (6.213)$$

По результатам расчетов (*приложение 6*, пример П6.12) можно сделать следующие выводы:

- расчет по точной формуле (6.198) показывает, что увеличение ДПС снижает показатели безотказности, но не существенно. Так увеличение ДПС втрое от 0,4 до 1,2 (при ra = 0,1, $A - 5ra$ = 0,1, L = 1) снижает ВБР от 0,95583до 0,93516, а при ra = 0,2, $A - 5ra$ = 0,2, L = 1 увеличение ДПС от 0,8 до 2,4 снижает ВБР от 0,84895 до 0,80363;
- приближенная экспоненциальная формула (5.19) и здесь дает малую погрешность (до 5,4 % при L = 1 и 6,3 % при L = 2) в широком диапазоне изменения структурных параметров системы. Наибольшее значение погрешность достигает при больших значениях ra и большом относительном весе нерезервированной части ОПС: при ra = 0,2, A = 1,2 и L = 1 погрешность находится в пределах 1,09–2,54 %. Размер ДПС слабо влияет на величину погрешности. Так при ra = 0,4, A = 2 увеличение B втрое (от 1,6 до 4,8) увеличивает δQ от 4,09 % до 4,63 %. Для больших A при увеличении B величина δQ снижается;
- погрешности формул (6.201) и (6.203) примерно одинаковы, но формула (6.201) при $L_0 = L_1 = L$ имеет знакопеременную погрешность, в то время как (6.203) дает всегда оценку снизу. Это делает формулу (6.201) не желательной для применения в приближенных расчетах;
- внутри периода пополнения погрешность формулы экспоненциальной модели может быть большой: по вероятности отказов сотни и тысячи процентов. Причем относительная погрешность увеличивается с ростом запасов, но уменьшается при увеличении дополнительной подсистемы.

6.10. Последовательное соединение резервированной по схеме «один из *m*» и нерезервированной подсистем (модель МП9)

Резервированная подсистема состоит из m параллельных ветвей по r элементов каждая, нерезервированная подсистема содержит $k - mr$ элементов. Все элементы однотипны. Дополнительная подсистема содержит $n - k$ элементов. Вероятность отказа системы при отсутствии ЗИП определяют по формуле:

$$Q_c(T,0) = 1 - e^{-(k-mr)a}\left(1-(1-e^{-ra})^m\right) = 1 + \sum_{i=1}^{m} C_m^i (-1)^i e^{-A+(m-i)ra}. \qquad (6.214)$$

При наличии ЗИП вероятность отказа

$$Q_c(T,L)=\int_0^T\frac{(n\lambda)^L x^{L-1}}{(L-1)!}e^{-n\lambda x}Q(T-x,0)dx=I(C,L)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}C_m^i(-1)^i e^{-A+(m-i)ra}\left(\frac{C}{B+(m-i)ra}\right)^L I(B+(m-i)ra,L)\,. \qquad (6.215)$$

Поскольку

$$\sum_{i=0}^{m}C_m^i(-1)^i e^{-A+(m-i)ra}\left(\frac{C}{B+(m-i)ra}\right)^L\frac{\left(B+(m-i)ra\right)^L}{L!}e^{-C}=0\,.$$

Формула (6.215) преобразуется к виду:

$$P_c(T,L,m)=1-I(C,L+1)+\sum_{i=1}^{m}C_m^i(-1)^{i-1}e^{-A+(m-i)ra}\left(\frac{C}{B+(m-i)ra}\right)^L I(B+(m-i)ra,L+1)\,. \qquad (6.216)$$

В частности, при m = 2, 3 и 4 имеем:

$$P_c(T,L,2)=1-I(C,L)+2e^{-A+ra}\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L I(B+ra,L)-e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L)\,, \qquad (6.217)$$

$$P_c(T,L,3)=1-I(C,L)+3e^{-A+2ra}\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^L I(B+2ra,L)-$$

$$-3e^{-A+ra}\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L I(B+ra,L)+e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L)\,,$$

$$P_c(T,L,4)=1-I(C,L)+4e^{-A+3ra}\left(\frac{C}{B+3ra}\right)^L I(B+3ra,L)-$$

$$-6e^{-A+2ra}\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^L I(B+2ra,L)+4e^{-A+ra}\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L I(B+ra,L)-e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L)\,.$$

Если нерезервированная подсистема отсутствует, то $A = mra$ и формулы приобретают вид:

$$P_c(T,L,m)=1-I(C,L)+\sum_{i=1}^{m}C_m^i(-1)^{i-1}e^{-ira}\left(\frac{C}{C-ira}\right)^L I(C-ira,L)\,, \qquad (6.218)$$

$$P_c(T,L,2)=1-I(C,L)+2e^{-ra}\left(\frac{C}{C-ra}\right)^L I(C-ra,L)-e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L)\,,$$

$$P_c(T,L,3)=1-I(C,L)+3e^{-ra}\left(\frac{C}{C-ra}\right)^L I(C-ra,L)-$$

$$-3e^{-2ra}\left(\frac{C}{C-2ra}\right)^L I(C-2ra,L)+e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L)\,,$$

$$P_c(T,L,4)=1-I(C,L)+4e^{-ra}\left(\frac{C}{C-ra}\right)^L I(C-ra,L)-6e^{-2ra}\left(\frac{C}{C-2ra}\right)^L I(C-2ra,L)+$$

$$+4e^{-3ra}\left(\frac{C}{C-3ra}\right)^L I(C-3ra,L)-e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L).$$

Найдем асимптотические формулы при малых A и C для m = 3 и 4. Сначала рассмотрим случай m = 3 и $A > 3ra$ Из (6.216) находим:

$$Q_c(T,L,3)=I(C,L+1)-3e^{-A+2ra}\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^L I(B+2ra,L+1)+$$

$$+3e^{-A+ra}\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L I(B+ra,L+1)-e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L+1). \qquad (6.219)$$

Разлагаем (6.219) по степеням малого параметра, получим:

$$Q_c(T,L,3)\approx(A-3ra)\left(\frac{C^L}{(L+1)!}-\frac{C^L}{(L+2)!}(CL+A-3ra)\right).$$

Чтобы найти асимптотическую формулу при m = 3ra, преобразуем (6.219) к виду:

$$Q_c(T,L,3)=I(C,L+2)-3e^{-ra}\left(\frac{C}{C-ra}\right)^L I(C-ra,L+2)+$$

$$+3e^{-ra}\left(\frac{C}{C-2ra}\right)^L I(C-2ra,L+2)-e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L+2). \qquad (6.220)$$

Отсюда

$$Q_c(T,L,3)\approx\frac{2A^3C^L}{9(L+3)!}. \qquad (6.221)$$

При m = 4 и $A > 4ra$ из (6.217) получим:

$$Q_c(T,L,4)=I(C,L+1)-4e^{-A+3ra}\left(\frac{C}{B+3ra}\right)^L I(B+3ra,L+1)+$$

$$+6e^{-A+2ra}\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^L I(B+2ra,L+1)-4e^{-A+ra}\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L I(B+ra,L+1)+.$$

$$+e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L+1). \qquad (6.222)$$

Проводя здесь разложение по малому параметру, получим:

$$Q_c(T,L,4)\approx(A-4ra)\left(\frac{C^L}{(L+1)!}-\frac{C^L}{(L+2)!}(CL+A-4ra)\right). \qquad (6.223)$$

При $m = 4ra$ преобразуем (6.222) к виду:

$$Q_c(T,L,4) = I(C,L+2) - 4e^{-ra}\left(\frac{C}{C-ra}\right)^L I(C-ra,L+2) +$$

$$+6e^{-2ra}\left(\frac{C}{C-2ra}\right)^L I(C-2ra,L+2) - 4e^{-3ra}\left(\frac{C}{C-3ra}\right)^L I(C-3ra,L+2) + .$$

$$+e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L+2) . \qquad (6.224)$$

Отсюда находим:

$$Q_c(T,L,4) \approx \frac{3A^4C^L}{32(L+4)!} . \qquad (6.225)$$

Найдем теперь приращения вероятностей, используя общую формулу (6.200):

$$\Delta P_c\ (T,i,m) = \int_0^T \frac{(n\lambda x)^{i-1}}{(i-1)!} e^{-n\lambda x} Q_c^{'}(x,0)dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} C_m^i (-1)^{i-1} e^{-A+(m-i)ra} \frac{A-(m-i)ra}{B+(m-i)ra}\left(\frac{C}{B+(m-i)ra}\right)^{L-1} I(B+(m-i)ra,L) . \quad (6.226)$$

В частности, имеем:

$$\Delta P_c\ (T,i,2) = 2\frac{A-ra}{B+ra}\left(\frac{C}{B+ra}\right)^{L-1} e^{-A+ra} I(B+ra,L) - \frac{A}{B}\left(\frac{C}{B}\right)^{L-1} e^{-A} I(B,L) , \quad (6.227)$$

$$\Delta P_c\ (T,i,3) = 3\frac{A-2ra}{B+2ra}\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^{L-1} e^{-A+2ra} I(B+2ra,L) -$$

$$-3\frac{A-ra}{B+ra}\left(\frac{C}{B+ra}\right)^{L-1} e^{-A+ra} I(B+ra,L) + \frac{A}{B}\left(\frac{C}{B}\right)^{L-1} e^{-A} I(B,L) ,$$

$$\Delta P_c\ (T,i,4) = 4\frac{A-3ra}{B+3ra}\left(\frac{C}{B+3ra}\right)^{L-1} e^{-A+3ra} I(B+3ra,L) -$$

$$-6\frac{A-2ra}{B+2ra}\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^{L-1} e^{-A+2ra} I(B+2ra,L) + 4\frac{A-ra}{B+ra}\left(\frac{C}{B+ra}\right)^{L-1} e^{-A+ra} I(B+ra,L) -$$

$$-\frac{A}{B}\left(\frac{C}{B}\right)^{L-1} e^{-A} I(B,L) .$$

При $A = mra$ и $B > 0$ имеем:

$$\Delta P_c\ (T,i,m) = \sum_{i=1}^{m} C_m^i (-1)^{i-1} e^{-ira} \frac{ira}{C-ira}\left(\frac{C}{C-ira}\right)^{L-1} I(C-ira,L) . \qquad (6.228)$$

Приближенная оценка ВБР первого типа:

$$P_{c,пр1}(T,L_0,L_1) = K_{сЗИП,0}(T,L_0,n-mr)\exp(-T/T_{ср}(m)) . \qquad (6.229)$$

Здесь

$$T_{ср}(m)=\sum_{i=0}^{m-1}\frac{1+\theta_1+\ldots+\theta_i}{\Lambda_i\theta_i},\ \theta_i=\frac{\Lambda_0\Lambda_1\ldots\Lambda_{i-1}}{M_1M_{2\ldots}M_i},\ \Lambda_i=(m-i)r\lambda,\ M_i=1/\Delta t_{ЗИП},$$

$$K_{гЗИП,0н}(T,L_0)=1-I(C-mra,L_0)+\frac{L_0+1}{C-mra}I(C-mra,L_0+1),$$

$$K_{гЗИП,0в}(T,L_0)=1-I(A-mra,L_0)+\frac{L_0+1}{A-mra}I(A-mra,L_0+1),$$

$$K_{гЗИП,1}(T,L_1)=1-I(B+mra,L_1)+\frac{L_1+1}{B+mra}I(B+mra,L_1+1),$$

$$\rho=-\frac{ra}{B+mra}\ln K_{гЗИП,1}(T,L_1),\Delta t_{ЗИП}=\rho/r\lambda.$$

В частности, при m = 2, 3 и 4 имеем:

$$r\lambda T_{ср}(2)=\frac{1+3\rho}{2\rho},r\lambda T_{ср}(3)=\frac{1+4\rho+11\rho^2}{6\rho^2},r\lambda T_{ср}(4)=\frac{1+5\rho+18\rho^2+60\rho^3}{24\rho^3}. \quad (6.230)$$

Расчеты приближенной оценки первого типа можно упростить, если в (6.230) пренебречь величинами порядка малости ρ^2 и более.

Приближенная оценка второго типа использует формулы (6.226) при B = 0.

$$P_{c,пр2}(T,L,m)=\left(1-(1-e^{-ra})^m\right)e^{-A+mra}+\sum_{i=1}^{L}\Delta P_c\ (T,i,m)(1-I(B,L-i+1))=$$

$$=\left(1-(1-e^{-ra})^m\right)e^{-A+mra}+\sum_{i=1}^{L}((-1)^{m-1}\frac{A^i}{i!}e^{-A}+\Delta P_c^*(T,i,m))(1-I(B,L-i+1)), \quad (6.231)$$

где

$$\Delta P_c^*(T,i,m)=\sum_{j=1}^{m-1}C_m^j(-1)^{j-1}e^{-A+(m-j)ra}\left(\frac{A}{(m-j)ra}-1\right)\left(\frac{A}{(m-j)ra}\right)^{i-1}I((m-j)ra,i).$$

При отсутствии нерезервированной подсистемы $A = mra$. Тогда

$$\Delta P_c\ (T,i,m)=(-1)^{m-1}\frac{A^i}{i!}e^{-A}+\sum_{j=1}^{m-1}C_m^j(-1)^{j-1}e^{-jra}\frac{jr}{m-jr}\left(\frac{A}{A-jra}\right)^{i-1}I(A-jra,i). \quad (6.232)$$

Используя очевидное соотношение

$$I(A-jra,i)=I(A-jra,i-1)-\frac{(A-jra)^{i-1}}{(i-1)!}e^{-A+jra},$$

получим еще одну формулу для приращения вероятности:

$$\Delta P_c\ (T,i,m)=(-1)^{m-1}\frac{A^i}{i!}e^{-A}+$$

$$+\sum_{j=1}^{m-1}C_m^j(-1)^{j-1}\frac{jr}{m-jr}\left(e^{-jra}\left(\frac{A}{A-jra}\right)^{i-1}I(A-jra,i-1)-\frac{A^{i-1}}{(i-1)!}e^{-A}\right). \quad (6.233)$$

Частоту отказов найдем путем дифференцирования (6.215):

$$\frac{1}{k\lambda}a(T,L,m)=\sum_{i=1}^{m}C_m^i(-1)^{i-1}e^{-A+(m-i)ra}\,\frac{A-(m-i)ra}{A}\left(\frac{C}{B+(m-i)ra}\right)^L I(B+(m-i)ra,L)\,. \quad (6.234)$$

В частности, имеем:

$$\frac{1}{k\lambda}a(T,1,m)=\frac{C}{A}\sum_{i=1}^{m}C_m^i(-1)^{i-1}\,\frac{A-(m-i)ra}{B+(m-i)ra}\left(e^{-A+(m-i)ra}-e^{-C}\right), \quad (6.235)$$

$$\frac{1}{k\lambda}a(T,L,3)=3\left(1-\frac{2ra}{A}\right)\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^L e^{-A+2ra}I(B+2ra,L)-$$

$$-3\left(1-\frac{ra}{A}\right)\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L e^{-A+ra}I(B+ra,L)+\left(\frac{C}{B}\right)^L e^{-A}I(B,L)\,,$$

$$\frac{1}{k\lambda}a(T,L,4)=4\left(1-\frac{3ra}{A}\right)\left(\frac{C}{B+3ra}\right)^L e^{-A+3ra}I(B+3ra,L)-$$

$$-6\left(1-\frac{2ra}{A}\right)\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^L e^{-A+2ra}I(B+2ra,L)+$$

$$+4\left(1-\frac{ra}{A}\right)\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L e^{-A+3ra}I(B+ra,L)-\left(\frac{C}{B}\right)^L e^{-A}I(B,L)\,.$$

Чтобы найти среднюю наработку до отказа, перегруппируем слагаемые в (6.215):

$$P_c(T,L,m)=\sum_{i=1}^{m}C_m^i(-1)^{i-1}e^{-A+(m-i)ra}\left(\frac{C}{B+(m-i)ra}\right)^L+$$

$$+\sum_{j=0}^{L-1}\frac{C^j}{j!}e^{-C}\left(1-\sum_{i=1}^{m}C_m^i(-1)^{i-1}\left(\frac{C}{B+(m-i)ra}\right)^{L-j}\right). \quad (6.236)$$

Интегрируя (6.236), получим среднюю наработку в периоде пополнения:

$$k\lambda\tau_1(T,L)=\sum_{i=1}^{m}C_m^i(-1)^{i-1}e^{-A+(m-i)ra}\,\frac{A}{A-(m-i)ra}\left(\frac{C}{B+(m-i)ra}\right)^L I(A-(m-i)ra,1)+$$

$$+\frac{A}{C}\sum_{j=0}^{L-1}\left(1-\sum_{i=1}^{m}C_m^i(-1)^{i-1}\left(\frac{C}{B+(m-i)ra}\right)^{L-j}\right)I(C,j+1)\,. \quad (6.237)$$

Формулу (6.237) можно преобразовать к виду, удобному для расчетов при больших периодах пополнения:

$$k\lambda\tau_1(T,L)=\left(\frac{AL}{C}+\sum_{i=1}^{m}C_m^i(-1)^{i-1}\,\frac{A}{A-(m-i)ra}\right)I(C,L)+A(1-I(C,L-1))-$$

$$-\sum_{i=1}^{m}C_m^i(-1)^{i-1}e^{-A+(m-i)ra}\,\frac{A}{A-(m-i)ra}\left(\frac{C}{B+(m-i)ra}\right)^L I(B+(m-i)ra,L)\,. \quad (6.238)$$

При m = 2 формула (6.238) совпадает с (6.115). При увеличении периода пополнения средняя наработка системы до отказа увеличивается до значения:

$$\lim_{T\to\infty} k\lambda T_{cp}(T,L,m) = \frac{AL}{C} + \sum_{i=1}^{m} C_m^i (-1)^{i-1} \frac{A}{A-(m-i)ra}. \qquad (6.239)$$

При малых A и C среднюю наработку можно оценить по формуле:

$$k\lambda T_{cp}(T,L,m) \approx A / Q_c(T,L,m), \qquad (6.240)$$

где вероятность отказа следует находить с помощью формулы (6.216) или (6.218).

Чтобы найти коэффициент оперативной готовности, составим граф состояний системы (рис. 6.6) и по графу определим изображения функций вероятностей состояний:

$$P_i^*(s) = \frac{s}{s+n\lambda}\left(\frac{n\lambda}{s+n\lambda}\right)^i, i = 0...L-1; P_L^*(s) = \frac{s}{s+k\lambda}\left(\frac{n\lambda}{s+n\lambda}\right)^L, \qquad (6.241)$$

$$P_{L+1}^*(s) = m\left(\frac{s}{s+(k-r)\lambda} - \frac{s}{s+k\lambda}\right)\left(\frac{n\lambda}{s+n\lambda}\right)^L,$$

$$P_{L+i}^*(s) = C_m^i \sum_{j=0}^{i} C_i^j (-1)^{i-j} \frac{s}{s+(m-j)r\lambda}\left(\frac{n\lambda}{s+n\lambda}\right)^L, i = 1...m-1.$$

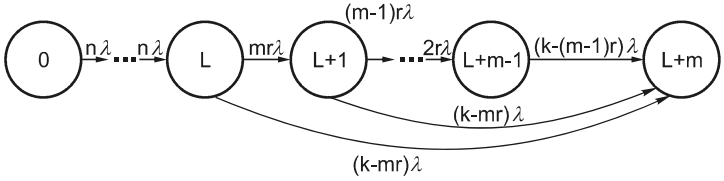


Рис. 6.6. Граф состояний системы с общим резервированием целой кратности (модель МП9)

С помощью обратного преобразования находим вероятность сохранения базовой структуры и появления деградированных работоспособных структур к концу периода пополнения:

$$P_c(T,L,m,S_0) = 1 - I(C,L) + e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L), \qquad (6.242)$$

$$P_c(T,L,m,S_i) = C_m^i \sum_{j=0}^{i} C_i^j (-1)^{i-j} e^{-A+jra}\left(\frac{C}{B+jra}\right)^L I(B+jra,L), i = 1...m-1.$$

При m = 2 формула (6.242) совпадает с формулой (6.117) в модели МП4.

Теперь можно записать коэффициент оперативной готовности по наихудшему циклу:

$$K_{oc}^*(\tau,T,L,m) = \sum_{i=0}^{m-1} P_c(T,L,m,S_i) e^{-(k-r)\lambda\tau}(1-(1-e^{-r\lambda\tau})^{m-i}). \qquad (6.243)$$

Чтобы найти коэффициент оперативной готовности для произвольного цикла, перегруппируем слагаемые в формулах (6.243):

$$P_c(T,L,m,S_0)=e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L+\sum_{j=0}^{L-1}\left(1-\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i}\right)\frac{C^i}{i!}e^{-C},$$

$$P_c(T,L,m,S_l)=C_m^l\sum_{j=0}^{l}C_l^j(-1)^{l-j}e^{-A+jra}\left(\frac{C}{B+jra}\right)^L-$$

$$-C_m^l\sum_{i=0}^{L-1}\sum_{j=0}^{l}C_l^j(-1)^{l-j}\left(\frac{C}{B+jra}\right)^{L-i}\frac{C^i}{i!}e^{-C},l=1...m-1. \qquad (6.244)$$

Интегрируя (6.244), получим:

$$k\lambda\tau_1^0(T,L,m)=\left(\frac{C}{B}\right)^L I(A,1)+\frac{A}{C}\sum_{i=0}^{L-1}(1-\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i})I(C,i+1),$$

$$k\lambda\tau_1^l(T,L,m)=C_m^l\sum_{j=0}^{l}C_l^j(-1)^{l-j}\frac{A}{A-jra}\left(\frac{C}{B+jra}\right)^L I(A-jra,1)-$$

$$-C_m^l\frac{A}{C}\sum_{i=0}^{L-1}\sum_{j=0}^{l}C_l^j(-1)^{l-j}\left(\frac{C}{B+jra}\right)^{L-i}I(C,i+1),l=1...m-1. \qquad (6.245)$$

Коэффициент оперативной готовности для произвольного цикла:

$$K_{o\Gamma}(\tau,T,L)=\frac{1}{A}\sum_{i=0}^{m-1}k\lambda\tau_1^i(T,L,m)e^{-(k-r)\lambda\tau}(1-(1-e^{-r\lambda\tau})^{m-i}). \qquad (6.246)$$

По результатам расчетов (*приложение 6*, примеры П6.13–П6.14) можно сделать следующие выводы:

- расчет по точной формуле (6.217) показывает, что увеличение ДПС снижает показатели безотказности, но не существенно. Так увеличение ДПС втрое от 0,6 до 1,8 (при ra = 0,3, $A - 3ra$ = 0,3, L = 1) снижает ВБР от 0,85398 до 0,81493, а при ra = 0,5, $A - 3ra$ = 0, L = 1 увеличение ДПС от 0,8 до 2,4 снижает ВБР от 0,97377 до 0,96492;
- приближенная экспоненциальная формула (5.19) и здесь дает малую погрешность (до 5,2 % при L = 1 и 6,4 % при L = 2) в широком диапазоне изменения структурных параметров системы. Наибольшее значение погрешность достигает при больших значениях ra и большом относительном весе нерезервированной части ОПС: при ra = 0,3, A = 1,2 и L = 1 погрешность находится в пределах 1,8–2,0 %. Размер ДПС слабо влияет на величину погрешности. Так при ra = 0,5, A = 2 и увеличении B втрое (от 0,8 до 2,4) погрешность δQ колеблется в пределах от 3,3 % до 3,4 %. Для больших A при увеличении B величина δQ снижается;
- погрешности формул (6.229) и (6.231) примерно одинаковы, но формула (6.229) при $L_0 = L_1 = L$ имеет знакопеременную погрешность, в то время как (6.231) дает всегда оценку снизу. Это делает формулу (6.229) не желательной для применения в приближенных расчетах;
- внутри периода пополнения погрешность формулы экспоненциальной модели может быть большой: по вероятности отказов сотни и тысячи процентов. Причем относительная погрешность увеличивается с ростом запасов, но уменьшается при увеличении дополнительной подсистемы.

6.11. Последовательное соединение дублированной и троированной подсистем (модель МП10)

В отличие от МП8 в данной модели подсистема из трех параллельных ветвей по *r* элементов каждая работает по схеме «один из трех», а не «два из трех» как в МП8. Граф состояний системы приведен на рис. 6.7.

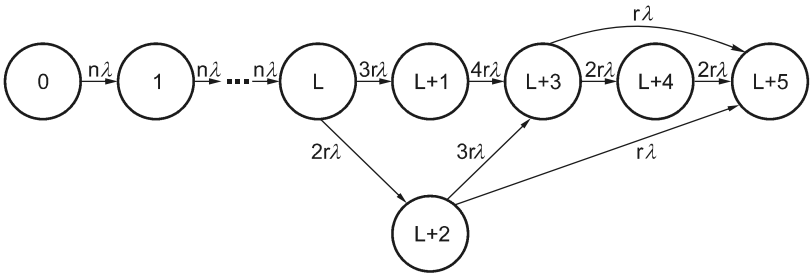


Рис. 6.7. Граф состояний системы (модель МП10)

Вероятность отказов при отсутствии ЗИП находим по формуле (5.325). Затем интегрируем:

$$Q_c(T,L)=\int_0^T\frac{(n\lambda)^L x^{L-1}}{(L-1)!}e^{-n\lambda x}Q(T-x,0)dx=I(C,L)-6\left(\frac{C}{B+3ra}\right)^L e^{-2ra}I(B+3ra,L)+$$

$$+9\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^L e^{-3ra}I(B+2ra,L)-5\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L e^{-4ra}I(B+ra,L)+\left(\frac{C}{B}\right)^L e^{-A}I(B,L)\,. \quad (6.247)$$

Эту формулу легко преобразовать к виду:

$$P_c(T,L)=1-I(C,L+1)+6\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^L e^{-2ra}I(B+3ra,L+1)-$$

$$-9\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^L e^{-3ra}I(B+2ra,L+1)+5\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L e^{-4ra}I(B+ra,L+1)-\left(\frac{C}{B}\right)^L e^{-A}I(B,L+1)\,. \quad (6.248)$$

В частности, имеем:

$$P_c(T,1)=e^{-C}+\frac{6C}{C-2ra}(e^{-2ra}-e^{-C})-\frac{9C}{C-3ra}(e^{-3ra}-e^{-C})+\frac{5C}{C-4ra}(e^{-4ra}-e^{-C})-\frac{C}{B}(e^{-A}-e^{-C})\,,$$

$$P_c(T,2)=e^{-C}(1+C)+6\left(\frac{C}{C-2ra}\right)^2 e^{-2ra}I(C-2ra,2)-9\left(\frac{C}{C-3ra}\right)^2 e^{-3ra}I(C-3ra,2)+$$

$$+5\left(\frac{C}{C-4ra}\right)^2 e^{-4ra}I(C-4ra,2)-\left(\frac{C}{B}\right)^2 e^{-A}I(B,2)\,. \quad (6.249)$$

Приращение ВБР:

$$\Delta P_c\,(T,i)=\int_0^T\frac{(n\lambda x)^{i-1}}{(i-1)!}e^{-n\lambda x}Q_c^{'}(x,0)dx=$$

$$=\frac{12ra}{C-2ra}\left(\frac{C}{C-2ra}\right)^{i-1}e^{-2ra}I(C-2ra,i)-\frac{27ra}{C-3ra}\left(\frac{C}{C-3ra}\right)^{i-1}e^{-3ra}I(C-3ra,i)+$$

$$+\frac{20ra}{C-4ra}\left(\frac{C}{C-4ra}\right)^{i-1}e^{-4ra}I(C-4ra,i)-\frac{A}{B}\left(\frac{C}{B}\right)^{i-1}e^{-A}I(B,i),i\ge 1. \qquad (6.250)$$

Приближенную оценку ВБР первого типа находим по формуле:

$$P_{c,пр1}(T,L)=\exp\left(-\frac{2\rho ra}{1+3\rho}\right)\exp\left(-\frac{6\rho ra}{1+4\rho+11\rho^2}\right), \qquad (6.251)$$

где

$$\rho=r\lambda\Delta t_{ЗИП}=-\frac{ra}{C}\ln K_{гЗИП}(T,L),K_{гЗИП}(T,L)=1-I(C,L)+\frac{L+1}{C}I(C,L+1).$$

Приближенная оценка второго типа:

$$P_{c,пр2}(T,L)=e^{-ra}(2-e^{-ra})\left(1-(1-e^{-ra})^3\right)+\sum_{i=1}^{L}\Delta P_c\,(T,i)(1-I(B,L-i+1)), \qquad (6.252)$$

где $\Delta P_c(T,i)$ находят по формуле (5.330):

$$\Delta P_c(T,i)=4\left(\frac{5}{3}\right)^{i-1}e^{-2ra}I(3ra,i)-\frac{27}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^{i-1}e^{-3ra}I(2ra,i)+4\left(5^i\right)e^{-4ra}I(ra,i)-\frac{A^i}{i!}e^{-A}.$$

Чтобы найти асимптотическую формулу, разложим (6.248) по степеням C:

$$Q_c(T,L)\approx\frac{2(ra)^2C^L}{(L+2)!}. \qquad (6.253)$$

Частота отказов определяется путем дифференцирования (6.247):

$$\frac{a_c(T,L)}{k\lambda}=2,4e^{-2ra}\left(\frac{C}{C-2ra}\right)^{L}I(C-2ra,L)-5,4e^{-3ra}\left(\frac{C}{C-3ra}\right)^{L}I(C-3ra,L)+$$

$$+4e^{-4ra}\left(\frac{C}{C-4ra}\right)^{L}I(C-4ra,L)-e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^{L}I(B,L). \qquad (6.254)$$

Чтобы найти среднюю наработку до отказа, перегруппируем слагаемые в (6.247):

$$P_c(T,L)=6\left(\frac{C}{C-2ra}\right)^{L}e^{-2ra}-9\left(\frac{C}{C-3ra}\right)^{L}e^{-3ra}+5\left(\frac{C}{C-4ra}\right)^{L}e^{-4ra}-\left(\frac{C}{B}\right)^{L}e^{-A}+$$

$$+\sum_{i=0}^{L-1}\frac{C^i}{i!}e^{-C}\left(1-6\left(\frac{C}{C-2ra}\right)^{L-i}+9\left(\frac{C}{C-3ra}\right)^{L-i}-5\left(\frac{C}{C-4ra}\right)^{L-i}+\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i}\right). \qquad (6.255)$$

Интегрируя (6.255), получим среднюю наработку в периоде пополнения:

$$k\lambda\tau_1(T,L)=15(1-e^{-2ra})\left(\frac{C}{C-2ra}\right)^L-15(1-e^{-3ra})\left(\frac{C}{C-3ra}\right)^L+\frac{25}{4}(1-e^{-4ra})\left(\frac{C}{C-4ra}\right)^L-$$

$$-(1-e^{-A})\left(\frac{C}{B}\right)^L+\frac{A}{C}\sum_{i=0}^{L-1}\left(1-6\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^{L-i}+7\left(\frac{C}{B+ra}\right)^{L-i}-2\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i}\right)I(C,i+1)\,. \quad (6.256)$$

Перегруппировывая слагаемые в (6.256), найдем более удобную формулу для расчетов при больших периодах пополнения:

$$k\lambda\tau_1(T,L)=\left(\frac{AL}{C}+\frac{21}{4}\right)I(C,L)+A(1-I(C,L-1))-15\left(\frac{C}{C-2ra}\right)^L e^{-2ra}I(C-2ra,L)+$$

$$+15\left(\frac{C}{C-3ra}\right)^L e^{-3ra}I(C-3ra,L)-\frac{25}{4}\left(\frac{C}{C-4ra}\right)^L e^{-2ra}I(C-4ra,L)+e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L)\,. \quad (6.257)$$

Среднюю наработку до отказа системы находим по общей формуле (6.114).

Для определения коэффициента оперативной готовности найдем вероятности сохранения базовой структуры и появления деградированных работоспособных структур к моменту появления заявки на выполнение задания.

По графу состояний получим изображения для функций вероятностей:

$$P_i^*(s)=\frac{s}{s+n\lambda}\left(\frac{n\lambda}{s+n\lambda}\right)^i, i=0\ldots L-1; P_L^*(s)=\frac{s}{s+5r\lambda}\left(\frac{n\lambda}{s+n\lambda}\right)^L,$$

$$P_{L+1}^*(s)=3\left(\frac{s}{s+4r\lambda}-\frac{s}{s+5r\lambda}\right)\left(\frac{n\lambda}{s+n\lambda}\right)^L, P_{L+2}^*(s)=\frac{2}{3}P_{L+1}^*(s),$$

$$P_{L+3}^*(s)=9\left(\frac{s}{s+3r\lambda}-\frac{2s}{s+4r\lambda}+\frac{s}{s+5r\lambda}\right)\left(\frac{n\lambda}{s+n\lambda}\right)^L,$$

$$P_{L+4}^*(s)=6\left(\frac{s}{s+2r\lambda}-\frac{3s}{s+3r\lambda}+\frac{3s}{s+4r\lambda}-\frac{s}{s+5r\lambda}\right)\left(\frac{n\lambda}{s+n\lambda}\right)^L. \quad (6.258)$$

Отсюда

$$P_c(T,L,S_0)=1-I(C,L)+e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L), \quad (6.259)$$

$$P_c(T,L,S_1)=\frac{3}{2}P_c(T,L,S_2)=3e^{-4ra}\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L I(B+ra,L)-3e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L),$$

$$P_c(T,L,S_3)=9e^{-3ra}\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^L I(B+2ra,L)-18e^{-4ra}\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L I(B+ra,L)+9e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L),$$

$$P_c(T,L,S_4)=6e^{-2ra}\left(\frac{C}{B+3ra}\right)^L I(B+3ra,L)-18e^{-3ra}\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^L I(B+2ra,L)+$$

$$+18e^{-4ra}\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L I(B+ra,L)-6e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L).$$

Коэффициент оперативной готовности по наихудшему циклу:

$$K^*_{ог}(\tau,T,L)=P_c(T,L,S_0)(1-(1-e^{-r\lambda\tau})^2)(1-(1-e^{-r\lambda\tau})^3)+P_c(T,L,S_1)(1-(1-e^{-r\lambda\tau})^2)^2+$$
$$+P_c(T,L,S_2)(1-(1-e^{-r\lambda\tau})^2)e^{-r\lambda\tau}+P_c(T,L,S_3)e^{-2r\lambda\tau}(2-e^{-r\lambda\tau})+P_c(T,L,S_4)e^{-2r\lambda\tau}. \quad (6.260)$$

Чтобы найти коэффициент оперативной готовности по произвольному циклу, представим вероятности (6.259) в виде

$$P_c(T,L,S_0)=e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L+\sum_{i=0}^{L-1}\left(1-\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i}\right)\frac{C^i}{i!}e^{-C},\ P_c(T,L,S_2)=\frac{2}{3}P_c(T,L,S_1),$$

$$P_c(T,L,S_1)=3e^{-4ra}\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L-3e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L+\sum_{i=0}^{L-1}\left(\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i}-\left(\frac{C}{B+ra}\right)^{L-i}\right)\frac{C^i}{i!}e^{-C},$$

$$P_c(T,L,S_3)=9e^{-3ra}\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^L-18e^{-4ra}\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L+9e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L-$$
$$-\sum_{i=0}^{L-1}\left(\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i}-2\left(\frac{C}{B+ra}\right)^{L-i}+\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^{L-i}\right)\frac{C^i}{i!}e^{-C},$$

$$P_c(T,L,S_4)=6e^{-2ra}\left(\frac{C}{B+3ra}\right)^L-18e^{-3ra}\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^L+18e^{-4ra}\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L-6e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L+$$
$$+\sum_{i=0}^{L-1}\left(\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i}-3\left(\frac{C}{B+ra}\right)^{L-i}+3\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^{L-i}-\left(\frac{C}{B+3ra}\right)^{L-i}\right)\frac{C^i}{i!}e^{-C}$$

и проинтегрируем:

$$k\lambda\tau_1^0=\left(\frac{C}{B}\right)^L I(A,1)+\frac{A}{C}\sum_{i=0}^{L-1}\left(1-\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i}\right)I(C,i+1), \quad (6.261)$$

$$k\lambda\tau_1^1=\frac{15}{4}\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L I(4ra,1)-3\left(\frac{C}{B}\right)^L I(A,1)+\frac{3A}{C}\sum_{i=0}^{L-1}\left(\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i}-\left(\frac{C}{B+ra}\right)^{L-i}\right)I(C,i+1),$$

$$k\lambda\tau_1^2=\frac{2}{3}k\lambda\tau_1^1,k\lambda\tau_1^3=15\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^L I(3ra,1)-\frac{45}{2}\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L I(4ra,1)+9\left(\frac{C}{B}\right)^L I(A,1)-$$
$$-\frac{9A}{C}\sum_{i=0}^{L-1}\left(\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i}-2\left(\frac{C}{B+ra}\right)^{L-i}+\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^{L-i}\right)I(C,i+1),$$

$$k\lambda\tau_1^4=15\left(\frac{C}{B+3ra}\right)^L I(2ra,1)-30\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^L I(3ra,1)+\frac{45}{2}\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L I(4ra,1)-6\left(\frac{C}{B}\right)^L I(A,1)+$$
$$+\frac{6A}{C}\sum_{i=0}^{L-1}\left(\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i}-3\left(\frac{C}{B+ra}\right)^{L-i}+3\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^{L-i}-\left(\frac{C}{B+3ra}\right)^{L-i}\right)I(C,i+1).$$

Коэффициент оперативной готовности по произвольному циклу:

$$K_{o\Gamma}(\tau,T,L)=\frac{1}{A}(k\lambda\tau_1^0(1-(1-e^{-r\lambda\tau})^2)(1-(1-e^{-r\lambda\tau})^3)+k\lambda\tau_1^1(1-(1-e^{-r\lambda\tau})^2)^2+$$

$$+k\lambda\tau_1^2(1-(1-e^{-r\lambda\tau})^2)e^{-r\lambda\tau}+k\lambda\tau_1^3e^{-2r\lambda\tau}(2-e^{-r\lambda\tau})+k\lambda\tau_1^4e^{-2r\lambda\tau}). \qquad (6.262)$$

По результатам расчетов (*приложение 6*, примеры П6.15–П6.16) можно сделать следующие выводы:

- расчет по точным формулам (6.249) показывает, что увеличение ДПС снижает показатели безотказности, но не существенно. Так увеличение ДПС втрое от 0,8 до 2,4 (при $A = 1$, $L = 1$) снижает ВБР от 0,98422 до 0,97743, а при $A = 2{,}5$, $L = 1$ увеличение ДПС от 0,8 до 2,4 снижает ВБР от 0,87638 до 0,85507;
- приближенная экспоненциальная формула (5.19) и здесь дает малую погрешность (до 6,1 % при $L = 1$ и 5,5 % при $L = 2$) в широком диапазоне изменения структурных параметров системы. Наибольшее значение погрешность достигает при больших значениях A: при $A = 2{,}5$ и $L = 1$ погрешность находится в пределах 2,6–2,9 %. Размер ДПС слабо влияет на величину погрешности. Так при $A = 3$ и увеличении B втрое (от 0,8 до 2,4) погрешность δQ колеблется в пределах от 3,64 % до 3,96 %;
- погрешности формул (6.251) и (6.252) существенно больше, чем погрешность приближенной экспоненциальной формулы. Но формула (6.251) имеет всегда большую погрешность, чем формула (6.252), и дает всегда оценку снизу. Это делает формулу (6.251) не желательной для применения в приближенных расчетах;
- внутри периода пополнения погрешность формулы экспоненциальной модели может быть большой: по вероятности отказов сотни и тысячи процентов. Причем относительная погрешность увеличивается с ростом запасов, но уменьшается при увеличении дополнительной подсистемы.

6.12. Дублирование структур типа МП4 (модель МП11)

Данная модель является представителем подкласса моделей, в которых система имеет трехранговую однородную структуру типа «параллельно-последовательно-параллельная». Основная подсистема имеет две одинаковые параллельные ветви по r элементов каждая. В каждой ветви имеется одна дублированная пара и соединенные с ней последовательно $r-2$ элемента. Дополнительная подсистема содержит $n-k$ однотипных элементов. Комплект ЗИП имеет L запасных частей.

При отсутствии ЗИП вероятность отказа системы определяется по формуле (5.359). При наличии ЗИП вероятность отказа системы:

$$Q_c(T,L)=\int_0^T\frac{(n\lambda)^L x^{L-1}}{(L-1)!}e^{-n\lambda x}Q(T-x,0)dx=I(C,L)-4\left(\frac{C}{B+ra+a}\right)^L e^{-(r-1)a}I(B+ra+a,L)+$$

$$+2\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L e^{-ra}I(B+ra,L)+4\left(\frac{C}{B+2a}\right)^L e^{-A+2a}I(B+2a,L)-$$

$$-4\left(\frac{C}{B+a}\right)^L e^{-A+a}I(B+a,L)+\left(\frac{C}{B}\right)^L e^{-A}I(B,L). \qquad (6.263)$$

Формула (6.263) легко преобразуется виду:

$$P_c(T,L)=1-I(C,L+1)+4\left(\frac{C}{B+ra+a}\right)^L e^{-(r-1)a}I(B+ra+a,L+1)-2\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L e^{-ra}I(B+ra,L+1)-$$

$$-4\left(\frac{C}{B+2a}\right)^L e^{-A+2a}I(B+2a,L+1)+4\left(\frac{C}{B+a}\right)^L e^{-A+a}I(B+a,L+1)-\left(\frac{C}{B}\right)^L e^{-A}I(B,L+1). \quad (6.264)$$

Перегруппировывая слагаемые в (6.263), получим:

$$P_c(T,L)=4\left(\frac{C}{B+ra+a}\right)^L e^{-(r-1)a}-2\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L e^{-ra}-4\left(\frac{C}{B+2a}\right)^L e^{-A+2a}+$$

$$+4\left(\frac{C}{B+a}\right)^L e^{-A+a}-\left(\frac{C}{B}\right)^L e^{-A}+\sum_{i=0}^{L-1}\frac{C^i}{i!}e^{-C}\left(1-4\left(\frac{C}{B+ra+a}\right)^{L-i}+2\left(\frac{C}{B+ra}\right)^{L-i}+4\left(\frac{C}{B+2a}\right)^{L-i}-\right.$$

$$\left.-4\left(\frac{C}{B+a}\right)^{L-i}+\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i}\right). \quad (6.265)$$

Приращения вероятностей безотказной работы при увеличении на единицу количества запасных частей:

$$\Delta P_c(T,i)=\int_0^T\frac{(n\lambda x)^{i-1}}{(i-1)!}e^{-n\lambda x}Q_c'(x,0)dx=2\frac{A-2a}{C}\left(\frac{C}{B+ra+a}\right)^i e^{-(r-1)a}I(B+ra+a,i)-$$

$$-\frac{A}{C}\left(\frac{C}{B+ra}\right)^i e^{-ra}I(B+ra,i)-4\frac{A-2a}{C}\left(\frac{C}{B+2a}\right)^i e^{-A+2a}I(B+2a,i)+$$

$$+4\frac{A-a}{C}\left(\frac{C}{B+a}\right)^i e^{-A+a}I(B+a,i)-\frac{A}{C}\left(\frac{C}{B}\right)^i e^{-A}I(B,i). \quad (6.266)$$

Асимптотическую формулу получим путем разложения (6.264) по степеням малого параметра C:

$$Q_c(T,L)\approx\frac{(A-4a)^2C^L}{2(L+2)!}. \quad (6.267)$$

Чтобы найти приближенную оценку первого типа, заменим в каждой ветви дублированную пару эквивалентным элементом с интенсивностью отказов

$$\lambda_э=\frac{2\lambda\rho}{1+3\rho},\rho=-\frac{a}{C}\ln K_{гЗИП}(T,L),K_{гЗИП}(T,L)=1-I(C,L)+\frac{L+1}{C}I(C,L+1). \quad (6.268)$$

Тогда интенсивность отказов одной ветви становится равной $\lambda_в=\lambda_э+(r-2)\lambda$. Используя приближенную асимптотическую формулу для восстанавливаемой дублированной системы, получим:

$$P_{c,пр1}(T,L)=\exp\left(-\frac{2\rho_1\lambda_в T}{1+3\rho_1}\right)=\exp\left(-\frac{\rho_1 A}{1+3\rho_1}\right),\rho_1=\lambda_в\Delta t_{ЗИП},\Delta t_{ЗИП}=-\frac{1}{n\lambda}\ln K_{гЗИП}(T,L). \quad (6.269)$$

Приближенная оценка второго типа:

$$P_{c,пр2}(T,L)=P(T,0)+\sum_{i=1}^{L}\Delta P_c(T,i)(1-I(B,L-i+1)), \quad (6.270)$$

где $P(T,0)=1-\left(1-(2-e^{-a})e^{-(r-1)a}\right)^2$, а приращение вероятности вычисляется по формуле (5.364).

Интегрируя (6.265), найдем сначала среднюю наработку системы в периоде пополнения, а затем среднюю наработку системы до отказа:

$$k\lambda\tau_1(T,L)=\frac{4A}{ra-a}\left(\frac{C}{B+ra+a}\right)^L(1-e^{-ra+a})-4\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L(1-e^{-ra})-\frac{4A}{A-2a}\left(\frac{C}{B+2a}\right)^L(1-e^{-A+2a})+$$

$$+\frac{4A}{A-a}\left(\frac{C}{B+a}\right)^L(1-e^{-A+a})-\left(\frac{C}{B}\right)^L(1-e^{-A})+\frac{A}{C}\sum_{i=0}^{L-1}\left(1-4\left(\frac{C}{B+ra+a}\right)^{L-i}+2\left(\frac{C}{B+ra}\right)^{L-i}+4\left(\frac{C}{B+2a}\right)^{L-i}-\right.$$

$$\left.-4\left(\frac{C}{B+a}\right)^{L-i}+\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i}\right)I(C,i+1)\,. \qquad (6.271)$$

Перегруппировывая слагаемые в (6.271), получим формулу, удобную для расчетов при больших периодах пополнения:

$$k\lambda\tau_1(T,L)=\left(\frac{AL}{C}+\frac{4A}{ra-a}-5-\frac{4A}{A-2a}+\frac{4A}{A-a}\right)I(C,L)+A(1-I(C,L-1))-$$

$$-\frac{4A}{ra-a}\left(\frac{C}{B+ra+a}\right)^L e^{-(r-1)a}I(B+ra+a,L)+4\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L e^{-ra}I(B+ra,L)+$$

$$+\frac{4A}{A-2a}\left(\frac{C}{B+2a}\right)^L I(B+2a,L)-\frac{4A}{A-a}\left(\frac{C}{B+a}\right)^L I(B+a,L)+e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L)\,. \qquad (6.272)$$

Предельное значение средней наработки до отказа:

$$\lim_{T\to\infty}k\lambda T_{cp}(T,L)=\frac{AL}{C}+\frac{4A(2A-3a)}{(A-2a)(A-a)}-5\,. \qquad (6.273)$$

В частности, при r = 2, когда нерезервированная часть ветви отсутствует, модель МП11 сводится к МП9 при m = 4.Тогда

$$\lim_{T\to\infty}k\lambda T_{cp}(T,L)=\frac{AL}{C}+\frac{25}{3}\,,$$

что совпадает с результатом (6.239) при m = 4, A = 4ra и r = 1.

Частоту отказов находим путем дифференцирования (6.263):

$$\frac{a_c(T,L)}{k\lambda}=2\left(1-\frac{2a}{A}\right)\left(\frac{C}{B+ra+a}\right)^L e^{-(r-1)a}I(B+ra+a,L)-\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L e^{-ra}I(B+ra,L)-$$

$$-4\left(1-\frac{2a}{A}\right)\left(\frac{C}{B+2a}\right)^L e^{-A+2a}I(B+2a,L)+4\left(1-\frac{a}{A}\right)\left(\frac{C}{B+a}\right)^L e^{-A+a}I(B+a,L)-e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L)\,. \qquad (6.274)$$

Коэффициент готовности находим по формуле:

$$K_г(T,L)=\frac{1}{A}k\lambda\tau_1(T,L)\,. \qquad (6.275)$$

По результатам расчетов (*приложение 6*, примеры П6.17–П6.18) можно сделать следующие выводы:

- расчет по точным формулам (6.264) показывает, что увеличение ДПС снижает показатели безотказности, но не существенно. Так увеличение ДПС втрое от 0,8 до 2,4 (при $A = 1{,}2$, $L = 1$) снижает ВБР от 0,98131 до 0,97427, а при $A = 1{,}8$, $L = 1$ увеличение ДПС от 1,2 до 3,6 снижает ВБР от 0,94745 до 0,93276;
- приближенная экспоненциальная формула (5.19) и здесь дает малую погрешность (до 8,8 % при $L = 1$ и 9,1 % при $L = 2$) в широком диапазоне изменения структурных параметров системы. Наибольшее значение погрешность достигает при больших значениях A: при $A = 3{,}6$ и $L = 1$ погрешность находится в пределах 4,68–4,93 %. Размер ДПС слабо влияет на величину погрешности. Так при $A = 4{,}8$ и увеличении B втрое (от 3,2 до 9,6) погрешность δQ колеблется в пределах от 4,04 % до 4,11 %. Для больших A при увеличении B величина δQ снижается;
- погрешности формул (6.269) и (6.270) существенно больше, чем погрешность приближенной экспоненциальной формулы. Но формула (6.269) имеет большую погрешность, чем формула (6.270), при практически важном диапазоне значений ВБР и дает всегда оценку снизу. Это делает формулу (6.269) не желательной для применения в приближенных расчетах;
- внутри периода пополнения погрешность формулы экспоненциальной модели может быть большой: по вероятности отказов сотни и тысячи процентов. Причем относительная погрешность увеличивается с ростом запасов, но уменьшается при увеличении дополнительной подсистемы.

6.13. Дублирование структур типа МП6 (модель МП12)

Данная модель является еще одним представителем подкласса моделей, в которых система имеет трехранговую однородную структуру типа «параллельно-последовательно-параллельная». Основная подсистема имеет две одинаковые параллельные ветви по 4 элемента каждая. В каждой ветви имеется две дублированные пары, соединенные последовательно. Дополнительная подсистема содержит $n - k = n - 8$ однотипных элементов. Комплект ЗИП имеет L запасных частей.

При отсутствии ЗИП вероятность отказа определяют по формуле (5.372). При наличии ЗИП вероятность отказа:

$$Q_c(T,L) = \int_0^T \frac{(n\lambda)^L x^{L-1}}{(L-1)!} e^{-n\lambda x} Q(T-x,0)\,dx = I(C,L) - 8\left(\frac{C}{C-2a}\right)^L e^{-2a} I(C-2a,L) +$$

$$+8\left(\frac{C}{C-3a}\right)^L e^{-3a} I(C-3a,L) + 14\left(\frac{C}{C-4a}\right)^L e^{-4a} I(C-4a,L) - 32\left(\frac{C}{C-5a}\right)^L e^{-5a} I(C-5a,L) +$$

$$+24\left(\frac{C}{C-6a}\right)^L e^{-6a} I(C-6a,L) - \left(\frac{C}{C-7a}\right)^L e^{-7a} I(C-7a,L) + \left(\frac{C}{B}\right)^L e^{-A} I(B,L) = I(C,L) -$$

$$-\sum_{i=2}^{8} \alpha_i \left(\frac{C}{C-ia}\right)^L e^{-ia} I(C-ia,L), \alpha_2 = 8, \alpha_3 = -8, \alpha_4 = -14, \alpha_5 = 32, \alpha_6 = -24, \alpha_7 = 8, \alpha_8 = -1. \quad (6.276)$$

Эта формула легко приводится к виду:

$$P_c(T,L) = 1 - I(C, L+1) + \sum_{i=2}^{8} \alpha_i \left(\frac{C}{C-ia} \right)^L e^{-ia} I(C-ia, L+1). \quad (6.277)$$

Перегруппировывая слагаемые в (6.276), найдем:

$$P_c(T,L) = \sum_{i=2}^{8} \alpha_i \left(\frac{C}{C-ia} \right)^L e^{-ia} + \sum_{i=0}^{L-1} \frac{C^i}{i!} e^{-C} \left(1 - \sum_{j=2}^{8} \alpha_j \left(\frac{C}{C-ja} \right)^{L-i} \right). \quad (6.278)$$

Приращения вероятностей:

$$\Delta P_c\ (T,L) = \int_0^T \frac{(n\lambda x)^{L-1}}{(L-1)!} e^{-n\lambda x} Q_c^{'}(x,0)dx = \sum_{i=2}^{8} \alpha_i \frac{ia}{C-ia} \left(\frac{C}{C-ia} \right)^{L-1} e^{-ia} I(C-ia, L). \quad (6.279)$$

Чтобы найти асимптотическую формулу для ВБР, преобразуем (6.277). Поскольку

$$-C + \sum_{i=2}^{8} \alpha_i (C-ia) = 0,$$

то

$$-\frac{C^{L+1}}{(L+1)!} e^{-C} + \sum_{i=2}^{8} \alpha_i \left(\frac{C}{C-ia} \right)^L \frac{(C-ia)^{L+1}}{(L+1)!} e^{-C} = 0.$$

Используя это тождество, преобразуем (6.277) к виду:

$$P_c(T,L) = 1 - I(C, L+2) + \sum_{i=2}^{8} \alpha_i \left(\frac{C}{C-ia} \right)^L e^{-ia} I(C-ia, L+2). \quad (6.280)$$

Аналогично, используя тождество

$$-C^2 + \sum_{i=2}^{8} \alpha_i (C-ia)^2 = 0,$$

преобразуем (6.280) к виду:

$$P_c(T,L) = 1 - I(C, L+3) + \sum_{i=2}^{8} \alpha_i \left(\frac{C}{C-ia} \right)^L e^{-ia} I(C-ia, L+3). \quad (6.281)$$

Разлагаем (6.281) по степеням малого параметра, получим:

$$Q_c(T,L) \approx \frac{3A^4 C^L}{128(L+4)!}. \quad (6.282)$$

Приближенная оценка первого типа может быть построена на основе экспоненциального приближения вероятности в модели МП6 при $r = 1$, $A = 4a$. Тогда

$$P_{c,пр1}(T,L) = 1 - (1 - P_{МП6}(T,L))^2, P_{МП6}(T,L) = \exp\left(-\frac{4\rho a}{1+3\rho} \right), \rho = \lambda \Delta t_{ЗИП}, \quad (6.283)$$

$$\Delta t_{ЗИП} = -\frac{1}{n\lambda} \ln K_{гЗИП}(T,L), K_{гЗИП}(T,L) = 1 - I(C,L) + \frac{L+1}{C} I(C, L+1).$$

Приближенная оценка второго типа имеет структуру:

$$P_{c,пр2}(T,L) = P(T,0) + \sum_{i=1}^{L} \Delta P_c\ (T,i)(1 - I(B, L-i+1)), \quad (6.284)$$

где $P(T,0)=1-\left(1-(2-e^{-a})^2 e^{-2a}\right)^2$, а приращение вероятности определяется по формуле (5.375).

Частоту отказов находим путем дифференцирования (6.276):

$$\frac{a_c(T,L)}{k\lambda}=\sum_{i=2}^{8}\frac{i\alpha_i}{A}\left(\frac{C}{C-ia}\right)^L e^{-ia} I(C-ia,L). \qquad (6.285)$$

Средняя наработка системы в периоде пополнения

$$k\lambda\tau_1(T,L)=\sum_{i=2}^{8}\alpha_i\frac{A}{ia}\left(\frac{C}{C-ia}\right)^L I(ia,1)+\frac{A}{C}\sum_{i=0}^{L-1}\left(1-\sum_{j=2}^{8}\alpha_j\left(\frac{C}{C-ja}\right)^{L-i}\right)I(C,i+1). \qquad (6.286)$$

Перегруппировывая слагаемые, получим формулу, удобную для расчетов при больших периодах пополнения:

$$k\lambda\tau_1(T,L)=\left(\frac{AL}{C}+10\frac{1}{105}\right)I(C,L)+A(1-I(C,L-1))-\sum_{i=2}^{8}\alpha_i\frac{A}{ia}\left(\frac{C}{C-ia}\right)^L I(C-ia,L). \qquad (6.287)$$

Отсюда предельное значение средней наработки:

$$\lim_{T\to\infty} k\lambda T_{ср}(T,L)=\frac{AL}{C}+10\frac{1}{105}. \qquad (6.288)$$

Для упрощения расчетов ВБР и других показателей надежности можно использовать двусторонние приближенные оценки, убирая или добавляя некоторые связи в структуре системы (см. рис. 5.7, *д*). Если добавить связь по вертикали между выходами элементов 2 и 5, то получим последовательное соединение двух структур типа «1 из 4» при $r = 1$, $A = 4a$ (модель МП9). Это дает оценку сверху. Если убрать вертикальные связи между элементами 1 и 2, 5 и 6, то получим структуру модели МП9 при $m = 4$, $r = 2$, $A = 8a$. Это дает оценку снизу.

Формула для верхней оценки ВБР совпадает по форме с формулой (6.277), но имеет другие значения коэффициентов:

$$\alpha_2=16,\alpha_3=-48,\alpha_4=68,\alpha_5=-56,\alpha_6=28,\alpha_7=-8,\alpha_8=1. \qquad (6.289)$$

Верхняя оценка для средней наработки до отказа определяется по формуле (6.286) при коэффициентах α_i, взятых из формулы (6.289). Предельное значение средней наработки:

$$\lim_{T\to\infty} k\lambda T_{ср,в}(T,L)=\frac{AL}{C}+11\frac{62}{105}. \qquad (6.290)$$

Различие точного значения и верхней оценки существенно.

Оценка снизу для ВБР получается из (6.217) при $m = 4$, $r = 2$, $A = 8a$:

$$P_{с,н}(T,L)=1-I(C,L)+4\left(\frac{C}{B+6a}\right)^L e^{-2a} I(B+6a,L)-6\left(\frac{C}{B+4a}\right)^L e^{-4a} I(B+4a,L)+$$

$$+4\left(\frac{C}{B+2a}\right)^L e^{-6a} I(B+2a,L)-\left(\frac{C}{B}\right)^L e^{-A} I(B,L). \qquad (6.291)$$

Нижняя оценка для средней наработки в периоде пополнения:

$$k\lambda\tau_{1,u}(T,L)=16\left(\frac{C}{C-2a}\right)^{L}I(2a,1)-12\left(\frac{C}{C-4a}\right)^{L}I(4a,1)+\frac{16}{3}\left(\frac{C}{C-6a}\right)^{L}I(6a,1)-$$

$$-\left(\frac{C}{B}\right)^{L}e^{-A}I(A,L)+8\left(\frac{C}{C-3a}\right)^{L}e^{-3a}I(C-3a,L)+14\left(\frac{C}{C-4a}\right)^{L}e^{-4a}I(C-4a,L)-$$

$$-32\left(\frac{C}{C-5a}\right)^{L}e^{-5a}I(C-5a,L)+24\left(\frac{C}{C-6a}\right)^{L}e^{-6a}I(C-6a,L)-\left(\frac{C}{C-7a}\right)^{L}e^{-7a}I(C-7a,L)+$$

$$+\left(\frac{C}{B}\right)^{L}e^{-A}I(B,L)+\frac{A}{C}\sum_{i=0}^{L-1}\left(1-4\left(\frac{C}{C-2a}\right)^{L-i}+6\left(\frac{C}{C-4a}\right)^{L-i}-4\left(\frac{C}{C-6a}\right)^{L-i}\left(\frac{C}{B}\right)^{L-i}\right)I(C,i+1)\,. \tag{6.292}$$

По результатам расчетов (*приложение 6*, примеры П6.19–П6.20) можно сделать следующие выводы:

- расчет по точным формулам (6.277) показывает, что увеличение ДПС снижает показатели безотказности, но не существенно. Так увеличение ДПС втрое от 1,6 до 4,8 (при $A = 3{,}2$, $L = 1$) снижает ВБР от 0,97598 до 0,97055, а при $A = 4{,}0$, $L = 1$ увеличение ДПС от 2 до 6 снижает ВБР от 0,94758 до 0,93807;
- приближенная экспоненциальная формула (5.19) и здесь дает малую погрешность (до 8,3 % при $L = 1$ и 8,0 % при $L = 2$) в широком диапазоне изменения структурных параметров системы. Наибольшее значение погрешность достигает при больших значениях A: при $A = 6{,}4$ и $L = 1$ погрешность находится в пределах 5,25–5,59 %. Размер ДПС слабо влияет на величину погрешности. Так при $A = 4$ и увеличении B втрое (от 2 до 6) погрешность δQ колеблется в пределах от 1,48 % до 1,71 %;
- погрешности формул (6.283) и (6.284) примерно одинаковы и существенно больше, чем погрешность приближенной экспоненциальной формулы. Но формула (6.283) дает очень завышенную оценку ВБР (так при $A = 2{,}4$, $B = 3{,}6$, $L = 1$ точное значение равно 0,98968, а оценка 0,999487). Формула (6.284) дает всегда оценку снизу (здесь: 0,98343). Это делает формулу (6.283) не желательной для применения в приближенных расчетах. Среднее арифметическое верхней (6.289) и нижней (6.291) оценок имеет меньшую погрешность, чем (6.284);
- внутри периода пополнения погрешность формулы экспоненциальной модели может быть большой: по вероятности отказов тысячи и десятки тысяч процентов. Причем относительная погрешность увеличивается с ростом запасов, но уменьшается при увеличении дополнительной подсистемы.

6.14. Дублирование структур типа МП7 (модель МП13)

Данная модель является еще одним представителем подкласса моделей, в которых система имеет трехранговую однородную структуру типа «параллельно-последовательно-параллельная». Основная подсистема имеет две одинаковые параллельные ветви по 6 элементов каждая. В каждой ветви имеется две мажорированные части, соединенные последовательно. Дополнительная подсистема содержит $n - k = n - 12$ однотипных элементов. Комплект ЗИП имеет L запасных частей.

При отсутствии ЗИП вероятность отказа определяют по формуле (5.394). При наличии ЗИП вероятность отказа:

$$Q_c(T,L)=\int_0^T\frac{(n\lambda)^L x^{L-1}}{(L-1)!}e^{-n\lambda x}Q_c(T-x,0)dx=I(C,L)-\sum_{i=4}^{12}\alpha_i\left(\frac{C}{C-ia}\right)^L e^{-ia}I(C-ia,L)\,,$$

$$\alpha_4=18,\alpha_5=-24,\alpha_6=8,\alpha_7=0,\alpha_8=-81,\alpha_9=216,\alpha_{10}=-216,\alpha_{11}=96,\alpha_{12}=-16\,. \quad (6.293)$$

Коэффициенты α_i обладают следующими свойствами:

$$1-\sum_{i=4}^{12}\alpha_i=0,\sum_{i=4}^{12}i\alpha_i=0,\sum_{i=4}^{12}i^2\alpha_i=0,\sum_{i=4}^{12}i^3\alpha_i=0,\sum_{i=4}^{12}i^4\alpha_i=864\,. \quad (6.294)$$

Отсюда следует три других равенства:

$$-C+\sum_{i=4}^{12}\alpha_i(C-ia)=0,-C^2+\sum_{i=4}^{12}\alpha_i(C-ia)^2=0,-C^3+\sum_{i=4}^{12}\alpha_i(C-ia)^3=0\,. \quad (6.295)$$

Используя первое равенство (6.294) и равенства (6.295), можно преобразовать формулу (6.293) и получить из нее следующие выражения для ВБР:

$$P_c(T,L)=1-I(C,L+1)+\sum_{i=4}^{12}\alpha_i\left(\frac{C}{C-ia}\right)^L e^{-ia}I(C-ia,L+1)\,, \quad (6.296)$$

$$P_c(T,L)=1-I(C,L+2)+\sum_{i=4}^{12}\alpha_i\left(\frac{C}{C-ia}\right)^L e^{-ia}I(C-ia,L+2)\,,$$

$$P_c(T,L)=1-I(C,L+3)+\sum_{i=4}^{12}\alpha_i\left(\frac{C}{C-ia}\right)^L e^{-ia}I(C-ia,L+3)\,.$$

Перегруппировывая слагаемые в (6.293), получим:

$$P_c(T,L)=\sum_{i=4}^{12}\alpha_i\left(\frac{C}{C-ia}\right)^L e^{-ia}+\sum_{i=0}^{L-1}\frac{C^i}{i!}e^{-C}\left(1-\sum_{j=4}^{12}\alpha_j\left(\frac{C}{C-ja}\right)^{L-i}\right). \quad (6.297)$$

Чтобы найти асимптотическую формулу для вероятности отказа, разложим третью формулу в (6.296) по степеням малого параметра:

$$Q_c(T,L)\approx\frac{C^{L+3}}{(L+3)!}-(L+3)\frac{C^{L+4}}{(L+4)!}+\sum_{i=4}^{12}\alpha_i\left(\frac{C}{C-ia}\right)^L(1-ia)\left(\frac{(C-ia)^{L+3}}{(L+3)!}-(L+3)\frac{(C-ia)^{L+4}}{(L+4)!}\right)=$$

$$=\frac{C^L}{(L+3)!}\left(C^3-\sum_{i=4}^{12}\alpha_i(C-ia)^3\right)+\frac{C^L}{(L+4)!}\left(-(L+3)\left(C^4-\sum_{i=4}^{12}\alpha_i(C-ia)^4\right)+(L+4)\sum_{i=4}^{12}\alpha_i ia(C-ia)^3\right).$$

Используя равенства (6.295), приводим это выражение к виду:

$$Q_c(T,L)\approx\frac{C^L}{(L+4)!}\sum_{i=4}^{12}\alpha_i ia(C-ia)^3\,.$$

Возводя бином в третью степень и используя формулы (6.294), находим окончательно:

$$Q_c(T,L)\approx\frac{1}{24}\frac{C^L A^4}{(L+4)!}\,. \quad (6.298)$$

При $A = C$ это выражение совпадает с (5.403).

Приращение вероятностей при увеличении числа запасных частей:

$$\Delta P_c\,(T,L)=\sum_{i=4}^{12}\alpha_i\,\frac{ia}{C-ia}\left(\frac{C}{C-ia}\right)^{L-1}e^{-ia}I(C-ia,L)\cdot \tag{6.299}$$

Приближенные оценки ВБР первого и второго типа имеют вид:

$$P_{c,пр1}(T,L)=1-(1-P_{МП7}(T,L))^2\approx 1-\left(1-\exp(-\frac{12\rho a}{1+5\rho})\right)^2,\rho=\lambda\Delta t_{ЗИП}\,, \tag{6.300}$$

$$P_{c,пр2}(T,L)=1-\left(1-(3-2e^{-a})^2e^{-4a}\right)^2+\sum_{i=1}^{L}\Delta P_c\,(T,i)(1-I(B,L-i+1))\,, \tag{6.301}$$

$$\Delta P_c\,(T,L)=\sum_{i=4}^{11}\alpha_i\,\frac{ia}{A}\left(\frac{A}{A-ia}\right)^{L}e^{-ia}I(A-ia,L)+\alpha_{12}\,\frac{A^L}{L!}e^{-A}\,.$$

Частота отказов системы:

$$\frac{a_c(T,L)}{k\lambda}=\sum_{i=4}^{12}\frac{i\alpha_i}{A}\left(\frac{C}{C-ia}\right)^{L}e^{-ia}I(C-ia,L)\,. \tag{6.302}$$

Средняя наработка системы в периоде пополнения получается путем интегрирования (6.297):

$$k\lambda\tau_1(T,L)=\sum_{i=4}^{12}\alpha_i\,\frac{A}{ia}\left(\frac{C}{C-ia}\right)^{L}I(ia,1)+\frac{A}{C}\sum_{i=0}^{L-1}\left(1-\sum_{j=4}^{12}\alpha_j\left(\frac{C}{C-ja}\right)^{L-i}\right)I(C,i+1)\,. \tag{6.303}$$

Перегруппировывая слагаемые в (6.303), получим:

$$k\lambda\tau_1\,(T,L)=\left(\frac{AL}{C}+8\frac{47}{110}\right)I(C,L)+A(1-I(C,L-1))-\sum_{i=4}^{12}\alpha_i\,\frac{A}{ia}\left(\frac{C}{C-ia}\right)^{L}I(C-ia,L)\,. \tag{6.304}$$

Отсюда предельное значение средней наработки:

$$\lim_{T\to\infty}k\lambda T_{ср}(T,L)=\frac{AL}{C}+8\frac{47}{110}\,. \tag{6.305}$$

Чтобы получить двусторонние оценки ВБР, проведем структурные преобразования в системе, аналогичные тем, что были в модели МП12. Для получения нижней оценки заменим последовательное соединение двух мажорированных групп одной мажорированной группой с двумя элементами в каждой ветви. Для получения верхней оценки введем дополнительное вертикальное соединение на выходах первых групп и получим последовательное соединение дублированных групп с мажорированием в каждой группе. Тогда формулы для расчета верхней и нижней оценок приобретают вид:

$$P_{c,н}(T,L)=P_1(T,L,r=2),P_{c,в}(T,L)=P_1(T,L,r=1)\,, \tag{6.306}$$

где $P_1(T,L,r)$ — вероятность безотказной работы дублированной системы из двух параллельных мажорированных групп, в каждой из которых ветви содержат r последовательно соединенных элементов. Не трудно установить, что при отсутствии ЗИП вероятность отказов такой системы можно найти по формуле:

$$Q_1(T,0,r)=(1-3e^{-2ra}+2e^{-3ra})^2=1-6e^{-2ra}+4e^{-3ra}+9e^{-4ra}-12e^{-5ra}+4e^{-6ra}\,.$$

Используя формулу типа (6.293), находим вероятность безотказной работы при наличии ЗИП:

$$P_1(T,L,r)=\sum_{i=2}^{6}\alpha_i\left(\frac{C}{C-ia}\right)^L e^{-ia}I(C-ia,L),\alpha_2=6,\alpha_3=-4,\alpha_4=-9,\alpha_5=12,\alpha_6=-4\,. \quad (6.307)$$

По результатам расчетов (*приложение 6*, примеры П6.21–П6.22) можно сделать следующие выводы:

- расчет по точным формулам (6.293) показывает, что увеличение ДПС снижает показатели безотказности, но не существенно. Так увеличение ДПС втрое от 1,2 до 3,6 (при A = 3,6, L = 1) снижает ВБР от 0,94527 до 0,93565, а при A = 4,8, L = 1 увеличение ДПС от 1,6 до 4,8 снижает ВБР от 0,86432 до 0,84685;
- приближенная экспоненциальная формула (5.19) и здесь дает малую погрешность (до 9,0 % при L = 1 и 8,4 % при L = 2) в широком диапазоне изменения структурных параметров системы. Наибольшее значение погрешность достигает при больших значениях A: при A = 6 и L = 1 погрешность находится в пределах 6,15–6,54 %. Размер ДПС слабо влияет на величину погрешности. Так при A = 4,8 и увеличении B втрое (от 1,6 до 4,8) погрешность δQ колеблется в пределах от 3,62 % до 3,99 %;
- погрешности формул (6.300) и (6.301) примерно одинаковы и существенно больше, чем погрешность приближенной экспоненциальной формулы. Но формула (6.300) дает очень завышенную оценку ВБР (так при A = 2,4, B = 0,8, L = 1 точное значение равно 0,98763, а оценка 0,99724). Формула (6.301) дает всегда оценку снизу (здесь: 0,98022). Это делает формулу (6.300) не желательной для применения в приближенных расчетах. Среднее арифметическое верхней и нижней оценок (6.306) имеет меньшую погрешность, чем (6.301);
- внутри периода пополнения погрешность формулы экспоненциальной модели может быть большой: по вероятности отказов тысячи и десятки тысяч процентов. Причем относительная погрешность увеличивается с ростом запасов, но уменьшается при увеличении дополнительной подсистемы.

6.15. Общее дублирование неоднородных систем (модель МП14)

Данная модель открывает серию моделей надежности неоднородных систем с резервированием различного типа. Основная подсистема содержит две одинаковые параллельные ветви, в каждой из которых последовательно соединены по r_i элементов i-го типа, i = 1, ..., N. Всего в ОПС имеется $k = 2r$ элементов, $r = r_1 + r_2 + ... r_N$.

Вероятность безотказной работы системы найдем как сумму вероятностей:

$$P_c(T,L)=P_c(T,L,S_0)+\sum_{i=1}^{N}P_c(T,L,S_i)\,, \quad (6.308)$$

где:

$P_c(T,L,S_0)$ — вероятность сохранения к концу периода пополнения базовой структуры ОПС из двух параллельных ветвей;

$P_c(T,L,S_i)$ — вероятность появления деградированной работоспособной структуры, состоящей из одной ветви, причем вторая ветвь оказалась неработоспособной из-за отказа элементов i-го типа.

При построении расчетной формулы для ВБР рассмотрим случай $N = 2$. Тогда вероятность $P_c(T, L, S_0)$ есть произведение вероятностей того, что полная структура сохранится для каждого типа элементов. Используя формулу (6.77), запишем:

$$P_c(T, L, S_0) = \prod_{i=1}^{2} \left(1 - I(C_i, L_i) + e^{-A_i} \left(\frac{C_i}{B_i} \right)^{L_i} I(B_i, L_i) \right). \tag{6.309}$$

При определении вероятностей $P_c(T, L, S_i)$ рассмотрим сложное событие, состоящее в том, что впервые работоспособность одной из ветвей системы будет нарушена вследствие отказа в момент x одного из элементов i-го типа. К этому моменту времени будет уже израсходовано l элементов другого, j-го типа, ($j \neq i$) из состава ЗИП. За оставшееся время $T - x$ не откажет ни один из r_i работоспособной ветви и сохранит работоспособность другая группа элементов при наличии в ЗИП $L_j - l$ запасных частей. Отсюда

$$P_c(T, L, S_i) = \int_0^T \sum_{l=0}^{L_j} \frac{(n_j \lambda_j x)^l}{l!} e^{-n_j \lambda_j x - r_i \lambda_i (T-x)} P_j(T - x, L_j - l, S_{0j})(-dP_i(x, L_i, S_{0i})), \tag{6.310}$$

где $P_i(x, L_i, S_{0i}), P_j(x, L_j, S_{0j})$ находят по формулам (6.77). Найти аналитическое выражение вероятности (6.310) затруднительно ввиду сложности получаемых формул, но интегрирование можно провести численно.

Далее рассмотрим двусторонние оценки вероятности безотказной работы, аналогичные оценкам, полученным в модели П14 в *главе 5 (разд. 5.17)*.

Верхняя оценка получится, если общее дублирование заменить поэлементным с использованием формул модели МП2:

$$P_{c,в}(T, L) = \prod_{i=1}^{N} P_i(T, L_i) = \prod_{i=1}^{N} \left(P_i(T, L_i, S_{0i}) + P_i(T, L_i, S_{1i}) \right), \tag{6.311}$$

где $P_i(T, L_i, S_{0i}), P_i(T, L_i, S_{1i})$ определяют по формулам (6.77).

Нижняя оценка использует общую формулу, аналогичную (5.429):

$$P_{c,н}(T, L) = \prod_{i=1}^{N} P_i(T, L_i, S_{0i}) \left(1 + \sum_{j=1}^{N} \frac{P_j(T, L_j, S_{1j})}{P_j(T, L_j, S_{0j})} \right). \tag{6.312}$$

Уточненная нижняя оценка учитывает, что при возникновении деградированной структуры отказы элементов различных типов могут произойти в одной ветви. При $N = 2$ формула имеет вид:

$$P_{c,ну}(T, L) =$$

$$= P_1(T, L_1, S_{01}) P_i(T, L_2, S_{02}) \left(1 + \frac{P_1(T, L_1, S_{11})}{P_1(T, L_1, S_{01})} + \frac{P_2(T, L_2, S_{12})}{P_2(T, L_2, S_{02})} + \frac{1}{2} \frac{P_1(T, L_1, S_{11}) P_2(T, L_2, S_{12})}{P_1(T, L_1, S_{01}) P_2(T, L_2, S_{02})} \right). \tag{6.313}$$

Для получения нижних оценок ВБР при $N = 3$ можно использовать общие формулы (5.429) или (5.431), а при произвольном значении N — формулы (5.429)–(5.430), (5.432) и (5.434).

Оценки средней наработки до отказа находим с помощью приближенной формулы (5.14, а):

$$k\lambda T_{ср,в}(T, L) = \frac{A}{1 - P_{c,в}(T, L)} - \frac{A}{2}, k\lambda T_{ср,н}(T, L) = \frac{A}{1 - P_{c,н}(T, L)} - \frac{A}{2}. \tag{6.314}$$

Среднее арифметическое оценок:

$$k\lambda T_{ср}(T,L) = (k\lambda T_{ср,в}(T,L) + k\lambda T_{ср,н}(T,L))/2\,. \tag{6.315}$$

Приближенное значение ВБР на основе экспоненциальной модели:

$$P_{с,пр}(T,L) = \exp(-A/k\lambda T_{ср}(T,L))\,. \tag{6.316}$$

Найдем теперь оценки для частоты и интенсивности отказов для $N = 2$. Нижнюю оценку получим путем дифференцирования (6,311):

$$\frac{\lambda_{с,н}(T,L)}{k\lambda} = \frac{1}{k\lambda}\left(\lambda_1(T,L) + \lambda_2(T,L)\right), \lambda_i(T,L) = a_i(T,L)/P_i(T,L)\,, \tag{6.317}$$

где $P_i(T,L), a_i(T,L)$ находят по формулам (6.56) и (6.65). Подставляя (6.65) в (6.317), находим:

$$\frac{\lambda_{с,н}(T,L)}{k\lambda} = 1 - \frac{A_1}{AP_1(T,L_1)}\left(1 - I(C_1,L_1) + e^{-A_1/2}\left(\frac{C_1}{D_1}\right)^{L_1} I(D_1,L_1)\right) -$$

$$-\frac{A_2}{AP_2(T,L_2)}\left(1 - I(C_2,L_2) + e^{-A_2/2}\left(\frac{C_2}{D_2}\right)^{L_2} I(D_2,L_2)\right), D_i = B_i + r_i a_i\,. \tag{6.318}$$

Для нахождения верхней оценки используем формулу (6.312). После дифференцирования имеем:

$$\frac{a_{св}(T,L)}{k\lambda} = \frac{A_1}{Ak_1\lambda_1}\left(a_1(T,L_1,S_{01})P_2(T,L_2) + a_1(T,L_1,S_{11})P_2(T,L_2,S_{02})\right) +$$

$$+\frac{A_2}{Ak_2\lambda_2}\left(a_2(T,L_2,S_{02})P_1(T,L_1,S_{11}) + a_2(T,L_2)P_1(T,L_1,S_{01})\right), \tag{6.319}$$

где:

$$\frac{1}{k_i\lambda_i}a_i(T,L_i,S_{0i}) = e^{-A_i}\left(\frac{C_i}{B_i}\right)^{L_i} I(B_i,L_i), i = 1,2\,,$$

$$\frac{1}{k_i\lambda_i}a_i(T,L_i,S_{1i}) = e^{-A_i/2}\left(\frac{C_i}{D_i}\right)^{L_i} I(D_i,L_i) - 2e^{-A_i}\left(\frac{C_i}{B_i}\right)^{L_i} I(B_i,L_i)\,,$$

вероятности $P_i(T,L_1,S_{0i}), P_i(T,L_i,S_{1i})$ находят по формулам (6.77), а частоту отказов $a_i(T,L_i)$ — по формуле (6.65).

Верхняя оценка интенсивности отказов:

$$\lambda_{св}(T,L) = \frac{a_{св}(T,L)}{P_{с,н}(T,L)}\,. \tag{6.320}$$

По результатам расчетов (*приложение 6*, примеры П6.24–П6.26) можно сделать следующие выводы:

- среднее арифметическое верхней (6.311) и уточненной нижней (6.313) оценок находится достаточно близко от гарантированных границ в практически важном диапазоне значе-

ний ВБР (не менее 0,8). Погрешность по вероятности отказов не превосходит 5 % при $L = 1$ и 2;

- приближенная оценка (6.316) всегда больше среднего арифметического оценок. Поскольку точное значение вероятности ближе к нижней уточненной оценке, чем к верхней оценке, очевидно, что предпочтение следует отдать средней оценке;
- гарантированные верхняя и нижняя оценки для средней наработки до отказа и интенсивности отказа обеспечивают приемлемую практическую точность: среднее арифметическое оценок отличается от точного значения не более чем на 10 %. Учитывая близость ВБР к нижней оценке, можно утверждать, что среднее значение оценок $T_{ср}$ является завышенной оценкой, а среднее значение оценок λ_c будет заниженной оценкой интенсивности отказов системы;
- внутри периода пополнения погрешность приближенной формулы экспоненциальной модели (6.316) может быть большой: по вероятности отказов сотни и тысячи процентов. К концу периода пополнения погрешность этой формулы сближается с погрешностью среднего арифметического оценок.

6.16. Неоднородная дублированная система с различными ветвями (модель МП15)

Данная модель продолжает серию моделей надежности неоднородных систем с резервированием различного типа. Основная подсистема содержит две параллельные ветви: в первой ветви последовательно соединены по r_1 элементов 1-го типа и k_2 элементов второго типа, во второй ветви последовательно соединены по r_1 элементов 1-го типа и k_3 элементов третьего типа. Всего в ОПС имеется $k = k_1 + k_2 + k_3$ элементов. ДПС содержит $n_1 - k_1$ элементов первого типа, $n_2 - k_2$ элементов второго типа и $n_3 - k_3$ элементов третьего типа.

Для расчета ВБР используем двусторонние оценки, аналогичные оценкам в модели МП14. Для построения верхней оценки введем дополнительную вертикальную связь после цепочки элементов первого типа. Тогда структура сводится к схеме независимых событий, и ВБР определяют по формуле:

$$P_{c,в}(T,L) = P_1(T,L_1,МП2)(1-Q_2(T,L_2,МП1)Q_3(T,L_3,МП1)), \qquad (6.321)$$

где $P_1(T,L_1,МП2)$ находят по формуле (6.56), а вероятности $Q_2(T,L_2,МП1)$ и $Q_3(T,L_3,МП1)$ — по формуле (6.29). Для построения нижней оценки рассмотрим два несовместных события:

- A — в первой группе сохраняется полная структура S_0, из второй и третьей групп работоспособна хотя бы одна группа;
- B — в первой группе к концу периода пополнения работоспособна только одна ветвь (структура S_1) с равной вероятностью: верхняя или нижняя. Из групп 2 и 3 работоспособна соответствующая группа, образующая одну ветвь с работоспособной ветвью первой группы. Отсюда нижняя оценка ВБР:

$$P_{c,н}(T,L) = P_1(T,L_1,S_{01},МП2)(1-Q_2(T,L_2,МП1)Q_3(T,L_3,МП1)) +$$

$$+\frac{1}{2}P_1(T,L_1,S_{11},МП2)(P_2(T,L_2,МП1)+P_3(T,L_3,МП1)). \qquad (6.322)$$

Двусторонние оценки частоты отказов получаются путем дифференцирования (6.321) и (6.322):

$$\frac{a_{сн}(T,L)}{k\lambda}=\frac{A_1}{A}\frac{1}{k_1\lambda_1}a_1(T,L_1,МП2)(1-Q_2(T,L_2,МП1)Q_3(T,L_3,МП1))+$$

$$+\left(\frac{A_2}{A}\frac{1}{k_2\lambda_2}a_2(T,L_2,МП1)Q_3(T,L_3,МП1)+\frac{A_3}{A}\frac{1}{k_3\lambda_3}a_3(T,L_3,МП1)\right)Q_2(T,L_2,МП1))P_1(T,L_1,МП2)\,. \tag{6.323}$$

$$\frac{a_{св}(T,L)}{k\lambda}=\frac{A_1}{A}\frac{1}{k_1\lambda_1}a_1(T,L_1,S_{01},МП2)(1-Q_2(T,L_2,МП1)Q_3(T,L_3,МП1))+$$

$$+P_1(T,L_1,S_{01},МП2)\left(\frac{A_2}{A}\frac{1}{k_2\lambda_2}a_2(T,L_2,МП1)Q_3(T,L_3,МП1)+\frac{A_3}{A}\frac{1}{k_3\lambda_3}a_3(T,L_3,МП1)\right)Q_2(T,L_2,МП1)+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{A_1}{A}\frac{1}{k_1\lambda_1}a_1(T,L_1,S_{11},МП2)(P_2(T,L_2,МП1)+P_3(T,L_3,МП1))+$$

$$+\frac{1}{2}(\frac{A_2}{A}\frac{1}{k_2\lambda_2}a_2(T,L_2,МП1)+\frac{A_3}{A}\frac{1}{k_3\lambda_3}a_3(T,L_3,МП1))P_1(T,L_1,S_{11},МП2)\,. \tag{6.324}$$

Здесь

$$\frac{1}{k_1\lambda_1}a_1(T,L_1,S_{01},МП2)=e^{-A_1}\left(\frac{C_1}{B_1}\right)^{L_1}I(B_1,L_1)\,, \tag{6.325}$$

$$\frac{1}{k_1\lambda_1}a_1(T,L_1,S_{11},МП2)=e^{-A_1/2}\left(\frac{C_1}{D_1}\right)^{L_1}I(D_1,L_1)-2e^{-A_1}\left(\frac{C_1}{B_1}\right)^{L_1}I(B_1,L_1)\,,$$

$$k\lambda=k_1\lambda_1+k_2\lambda_2+k_3\lambda_3,\ A=A_1+A_2+A_3\,,$$

$a_1(T,L_1,МП2)$ находят по формуле (6.65), $a_i(T,L_i,МП1)$ — по формуле (6.38), $P_1(T,L_1,МП2)$ — по формуле (6.77).

Оценки интенсивности отказов:

$$\frac{\lambda_{с,н}(T,L)}{k\lambda}=\frac{a_{сн}(T,L)}{k\lambda}/\,P_{с,в}(T,L)=\frac{A_1}{A}\frac{1}{k_1\lambda_1}\frac{a_1(T,L_1,МП2)}{P_1(T,L_1,МП2)}+$$

$$+\frac{\left(A_2/Ak_2\lambda_2\right)a_2(T,L_2,МП1)Q_3(T,L_3,МП1)+\left(A_3/Ak_3\lambda_3\right)a_3(T,L_3,МП1)Q_2(T,L_2,МП1)}{1-Q_2(T,L_2,МП1)Q_3(T,L_3,МП1)},$$

$$\lambda_{св}(T,L)=a_{св}(T,L)/P_{с,н}(T,L)\,. \tag{6.326}$$

Оценки средней наработки до отказа находим с помощью приближенной формулы (5.14, а):

$$k\lambda T_{ср,в}(T,L)=\frac{A}{1-P_{с,в}(T,L)}-\frac{A}{2},k\lambda T_{ср,н}(T,L)=\frac{A}{1-P_{с,н}(T,L)}-\frac{A}{2}\,. \tag{6.327}$$

Среднее арифметическое оценок:

$$k\lambda T_{ср}(T,L)=(k\lambda T_{ср,в}(T,L)+k\lambda T_{ср,н}(T,L))/2\,. \tag{6.328}$$

Приближенное значение ВБР на основе экспоненциальной модели:

$$P_{c,пр}(T,L) = \exp(-A / k\lambda T_{ср}(T,L)). \quad (6.329)$$

Для получения еще одной верхней оценки средней наработки до отказа и ВБР можно использовать тот факт, что при значениях времени, кратном периоду пополнения, ВБР достаточно точно приближается сверху с помощью экспоненциальной модели. В данной модели надо использовать следующие формулы для трех групп элементов:

$$P_1(T,L_1,МП2) = \exp(-t / T_1(T,L_1,МП2), P_i(T,L_i,МП1) = \exp(-t / T_i(T,L_i,МП1), i = 2,3. \quad (6.330)$$

Здесь

$$k_1\lambda_1 T_1(T,L_1,МП2) = ((\frac{A_1 L_1}{C_1} + 3) I(C_1,L_1) + A_1(1 - I(C_1,L_1 - 1)) -$$

$$-4\left(\frac{C_1}{D_1}\right)^L e^{-A_1/2} I(D_1,L_1) + \left(\frac{C_1}{B_1}\right)^{L_1} e^{-A_1} I(B_1,L_1)) / Q_1(T,L_1,МП2),$$

$$k_i\lambda_i T_i(T,L_i,МП1) = (\frac{A_i}{C_i}\sum_{j=0}^{L_i-1} I(C_i, j+1) +$$

$$+\left(\frac{C_i}{B_i}\right)^{L_i}\left(I(A_i,1) - \frac{A_i}{C_i}\sum_{j=0}^{L_i-1}\left(\frac{B_i}{C_i}\right)^i I(C_i, j+1)\right) / Q_i(T,L_i,МП1), i = 2,3. \quad (6.331)$$

Используя теперь схему независимых событий, найдем верхнюю оценку ВБР:

$$P_{c,в1}(t,T,L) = e^{-t/T_1(T,L_1,МП2)}(1 - (1 - e^{t/T_2(T,L_2,МП1)})(1 - e^{t/T_3(T,L_3,МП1)})). \quad (6.332)$$

Верхняя оценка для средней наработки до отказа системы:

$$T_{ср,в1}(T,L) = \frac{1}{\Lambda_1 + \Lambda_2} + \frac{1}{\Lambda_1 + \Lambda_3} - \frac{1}{\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3}, \quad (6.333)$$

$$\Lambda_1 = 1 / T_1(T,L_1,МП2), \Lambda_i = 1 / T_i(T,L_i,МП1), i = 2,3.$$

Чтобы рассчитать коэффициент готовности, надо сначала найти $\tau_1(T,L)$, используя (6.327) или интегрируя (6.333):

$$\tau_{1в}(T,L) = T_{ср,в}(T,L)(1 - P_{c,н}(T,L)), \tau_{1н}(T,L) = T_{ср,н}(T,L)(1 - P_{c,в}(T,L)), \quad (6.334)$$

$$\tau_{1в1}(T,L) = \int_0^T P_{c,в1}(t,T,L)dt = \frac{1 - \exp(-(\Lambda_1 + \Lambda_2)T)}{\Lambda_1 + \Lambda_2} + \frac{1 - \exp(-(\Lambda_1 + \Lambda_3)T)}{\Lambda_1 + \Lambda_3} -$$

$$-\frac{1 - \exp(-(\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3)T)}{\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3}.$$

Теперь можно найти коэффициент готовности:

$$K_{гс}(T,L) = k\lambda\tau_1(T,L) / A. \quad (6.335)$$

Чтобы найти коэффициент оперативной готовности, надо определить вероятности сохранения базовой структуры и возникновения различных деградированных работоспособных структур к концу периода пополнения.

Для этого рассмотрим пять несовместных событий:

- A_0 — сохраняется базовая структура S_0;
- A_1 — сохраняется первая ветвь, вторая ветвь не работоспособна из-за отказов элементов первого типа;
- A_2 — сохраняется вторая ветвь, первая ветвь не работоспособна из-за отказов элементов первого типа;
- A_3 — сохраняется первая ветвь, вторая ветвь не работоспособна из-за отказов элементов третьего типа;
- A_4 — сохраняется вторая ветвь, первая ветвь не работоспособна из-за отказов элементов второго типа.

Вероятности P_0, P_3 и P_4 событий A_0, A_3 и A_4 соответственно получим из комбинаторных соотношений:

$$P_0(T) = P_1(T, L_1, S_{01}, МП2)P_2(T, L_2, МП1)P_3(T, L_3, МП1), \tag{6.336}$$

$$P_3(T) = Q_3(T, L_3, МП1)P_2(T, L_2, МП1)(P_1(T, L_1, S_{01}, МП2) + \frac{1}{2}P_1(T, L_1, S_{11}, МП2),$$

$$P_4(T) = Q_2(T, L_2, МП1)P_3(T, L_3, МП1)(P_1(T, L_1, S_{01}, МП2) + \frac{1}{2}P_1(T, L_1, S_{11}, МП2).$$

Для вероятностей $P_1(T)$ и $P_2(T)$ найдем двусторонние оценки:

$$P_{1н}(T) = P_{2н}(T) = \frac{1}{2}P_1(T, L_1, S_{11}, МП2)P_2(T, L_2, МП1)P_3(T, L_3, МП1), \tag{6.337}$$

$$P_{1в}(T) = \frac{1}{2}P_1(T, L_1, S_{11}, МП2)P_2(T, L_2, МП1), P_{2в}(T) = \frac{1}{2}P_1(T, L_1, S_{11}, МП2)P_3(T, L_3, МП1).$$

Теперь можно записать формулу для коэффициента оперативной готовности по наихудшему циклу:

$$K^*_{ог}(\tau, T, L) = P_0(T)(1-(1-e^{-\alpha_1/2-\alpha_2})(1-e^{-\alpha_1/2-\alpha_3})) + (P_1(T)+P_3(T))e^{-\alpha_1/2-\alpha_2} +$$
$$+(P_2(T)+P_4(T))e^{-\alpha_1/2-\alpha_3}, \alpha_i = k_i\lambda_i\tau, i = 2,3. \tag{6.338}$$

Интегрируя (6.336) и (6.337), получим среднюю наработку в периоде пополнения при различных итоговых структурах системы:

$$k\lambda\tau_1^i(T, L) = k\lambda\int_0^T P_i(x)dx, i = 0...4. \tag{6.339}$$

Коэффициент оперативной готовности по произвольному циклу:

$$K_{ог}(\tau, T, L) = \frac{1}{A}(k\lambda\tau_1^0(1-(1-e^{-\alpha_1/2-\alpha_2})(1-e^{-\alpha_1/2-\alpha_3})) + k\lambda(\tau_1^1+\tau_1^3)e^{-\alpha_1/2-\alpha_2} +$$
$$+k\lambda(\tau_1^2+\tau_1^4)e^{-\alpha_1/2-\alpha_3}). \tag{6.340}$$

По результатам расчетов (*приложение 6*, примеры П6.28–П6.29) можно сделать следующие выводы:

- среднее арифметическое верхней (6.321) и нижней (6.322) оценок находится от гарантированных границ в практически важном диапазоне значений ВБР (не менее 0,8) на уда-

лении, определяющем относительную погрешность оценки: 7–19 % при $L = 1$ и 2–13,7 % при $L = 2$. Это больше, чем в модели МП14, где использовались уточненные нижние оценки. Однако и этот уровень ошибки практически приемлем;

- приближенная оценка (6.329), основанная на экспоненциальной модели, всегда больше среднего арифметического оценок, но близка к ней. Отличие составляет по вероятности отказа не более 5,5 %. Поскольку точное значение вероятности ближе к нижней оценке, чем к верхней, очевидно, что предпочтение следует отдать средней оценке $P_{ср}$;
- гарантированные верхняя и нижняя оценки для средней наработки до отказа и интенсивности отказа обеспечивают приемлемую практическую точность: среднее арифметическое оценок отличается от точного значения не более чем на 16,5 %. Учитывая близость ВБР к нижней оценке, можно утверждать, что среднее значение оценок $T_{ср}$ является завышенной оценкой, а среднее значение оценок λ_c будет заниженной оценкой интенсивности отказов системы;
- внутри периода пополнения погрешность приближенной формулы экспоненциальной модели (6.329) может быть большой: по вероятности отказов сотни и тысячи процентов. К концу периода пополнения погрешность этой формулы сближается с погрешностью среднего арифметического оценок.

6.17. Система с неоднородным групповым дублированием (модель МП16)

Система состоит из двух последовательно соединенных одинаковых дублированных групп. Каждая группа имеет две параллельные ветви. В первой ветви последовательно соединены $r_1 = k_1/2$ элементов первого типа, во второй ветви последовательно соединены $r_2 = k_2/2$ элементов второго типа. В ДПС имеется $n_1 - k_1$ элементов первого типа и $n_2 - k_2$ элементов второго типа. Комплект ЗИП содержит L_1 запасных частей первого типа и L_2 запасных частей второго типа.

При построении формулы для ВБР учитываем следующие несовместные события:

- A — обе группы элементов сохранят к концу периода пополнения полную структуру;
- B_1 — для элементов второго типа $L_2 + 1$-й отказ происходит в момент x до завершения периода пополнения. За это время произойдет j отказов элементов первого типа ($j \le L_1$). За оставшееся время $T - x$ деградированная структура S_1, состоящая из k_1 элементов первого типа, r_2 элементов второго типа и $l_1 = L_1 - j$ запасных частей первого типа, сохранит свою работоспособность;
- B_2 — аналогично B_1, только раньше исчерпываются в комплекте ЗИП запасы элементов первого типа, и деградированная структура возникает из-за отказа цепочки элементов первого типа.

Составляя вероятности указанных событий, получим формулу для ВБР:

$$P_c(T, L_1, L_2) = P_1(T, L_1, S_{01})P_2(T, L_2, S_{02}) + \int_0^T \sum_{j=0}^{L_1} P_1(x, j, S_{01})P_1(T - x, L_1 - j, S_1)dQ_2(x, L_2, S_{02}) +$$

$$+ \int_0^T \sum_{j=0}^{L_2} P_2(x, j, S_{02})P_2(T - x, L_2 - j, S_2)dQ_1(x, L_1, S_{01}), \qquad (6.341)$$

$$P_i(T, L_i, S_{0i}) = 1 - I(C_i, L_i) + \left(\frac{C_i}{B_i}\right)^{L_i} e^{-A_i} I(B_i, L_i), i = 1,2,$$

$$P_i(x, j, S_{0i}) = \frac{(n_i\lambda_i x)^j}{j!} e^{-n_i\lambda_i x}, j = 0...L_i - 1; P_i(x, L_i, S_{0i}) = \frac{(n_i)^j}{(n_i - k_i)^j} e^{-k_i\lambda_i x} I((n_i - k_i)\lambda_i x, L_i).$$

Для определения вероятностей $P_i(T-x, L_i - j, S_i)$ рассмотрим граф состояний (рис. 6.8), отражающий эволюцию дальнейшей деградации структуры S_1.

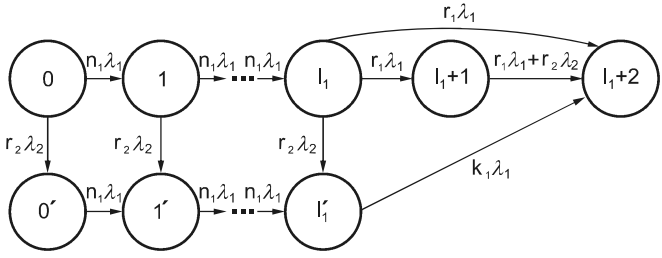


Рис. 6.8. Граф состояний системы (модель МП16)

Используя известные методы составления дифференциальных уравнений для марковских графов и операционного преобразования Лапласа — Карсона, найдем изображения для функций вероятностей состояний марковского графа:

$$P_0^*(s) = \frac{s}{s + n_1\lambda_1 + r_2\lambda_2}; P_i^*(s) = \left(\frac{n_1\lambda_1}{s + n_1\lambda_1 + r_2\lambda_2}\right)^i P_0^*(s), i = 1...l_1 - 1, \quad (6.342)$$

$$P_{l_1}^*(s) = \frac{n_1\lambda_1}{s + n_1\lambda_1 + r_2\lambda_2} P_{l_1-1}^*(s); P_{l_1+1}^*(s) = \frac{r_1\lambda_1}{s + r_1\lambda_1 + r_2\lambda_2} P_{l_1}^*(s),$$

$$P_{i'}^*(s) = \frac{r_2\lambda_2}{s + n_1\lambda_1}\left(\frac{n_1\lambda_1}{s + n_1\lambda_1 + r_2\lambda_2}\right)^i \sum_{j=0}^{i}\left(1 + \frac{r_2\lambda_2}{s + n_1\lambda}\right)^j, i' = 0'...l_1' - 1,$$

$$P_{l_1'}^*(s) = \frac{sr_2\lambda_2}{(s + k_1\lambda_1)(s + n_1\lambda_1)}\left(\frac{n_1\lambda_1}{s + n_1\lambda_1 + r_2\lambda_2}\right)^{l_1}\left(\frac{s + n_1\lambda_1}{s + k_1\lambda_1 + r_2\lambda_2} + \sum_{j=0}^{i}\left(1 + \frac{r_2\lambda_2}{s + n_1\lambda}\right)^j\right).$$

Изображение для функции вероятности отказа структуры S_1:

$$Q_1^*(s, l_1, S_1) = \frac{1}{s}(r_1\lambda_1 P_{l_1}^*(s) + k_1\lambda_1 P_{l_1'}^*(s) + (r_1\lambda_1 + r_2\lambda_2)P_{l_1+1}^*(s)) =$$

$$= \left(\frac{n_1\lambda_1}{s + n_1\lambda_1 + r_2\lambda_2}\right)^{l_1}\left(\frac{r_1\lambda_1}{s + k_1\lambda_1 + r_2\lambda_2}\left(1 + \frac{r_1\lambda_1 + r_2\lambda_2}{s + r_1\lambda_1 + r_2\lambda_2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{k_1\lambda_1}{s + r_1\lambda_1}\frac{r_2\lambda_2}{s + n_1\lambda_1}\left(\frac{s + n_1\lambda_1}{s + k_1\lambda_1 + r_2\lambda_2} + \sum_{j=0}^{l_1-1}\left(1 + \frac{r_2\lambda_2}{s + n_1\lambda_1}\right)^j\right)\right). \quad (6.343)$$

Аналогично находят $Q_2^*(s,l_2,S_2)$. Формула получается из (6.343) путем круговой перестановки индексов 1 и 2. После обратного преобразования следует подставить функции $P_i(T,L_i,S_{0i})$, $P_i(x,j,S_{0i})$ и $P_i(T-x,L_i-j,S_i)$ в (6.341) и провести интегрирование.

Поскольку точные формулы имеют весьма громоздкий вид, найдем приближенные выражения для ВБР. Первый подход при построении формул состоит в том, что фиксируется состояние элементов на момент окончания периода пополнения. Очевидно, что реальное изменение состояния происходит внутри периода. Поэтому получаемая формула дает оценку снизу. При построении формулы учтем следующие несовместные события:

- A — хотя бы одна группа элементов сохранит к концу периода пополнения полную структуру;
- B — обе группы элементов имеют в конце периода деградированную структуру в виде цепочки из r_i элементов, но обе цепочки окажутся в различных дублированных частях и поэтому вместе образуют работоспособную структуру.

Составляя вероятности указанных событий, получим нижнюю оценку:

$$P_{сн}(T,L_1,L_2)=1-Q_1(T,L_1,S_{01})Q_2(T,L_2,S_{02})+\frac{1}{2}P_1(T,L_1,S_{11})P_2(T,L_2,S_{12}), \qquad (6.344)$$

где

$$Q_i(T,L_i,S_{0i})=I(C_i,L_i)-\left(\frac{C_i}{B_i}\right)^{L_i}e^{-A_i}I(B_i,L_i),\ i=1,2, \qquad (6.345)$$

$$P_i(T,L_i,S_{1i})=2\left(\frac{C_i}{D_i}\right)^{L_i}e^{-A_i/2}I(D_i,L_i)-2\left(\frac{C_i}{B_i}\right)^{L_i}e^{-A_i}I(B_i,L_i),\ D_i=B_i+r_ia_i.$$

Если в (6.344) заменить условную вероятность 0,5 на единицу, то получим для ВБР оценку сверху, соответствующую схеме «два из четырех»:

$$P_{св}(T,L_1,L_2)=1-Q_1(T,L_1,S_{01})Q_2(T,L_2,S_{02})+P_1(T,L_1,S_{11})P_2(T,L_2,S_{12}). \qquad (6.346)$$

Из структуры формул видно, что точное значение вероятности будет ближе к нижней оценке.

Найдем теперь частоту и интенсивность отказов, продифференцировав (6.344)–(6.346):

$$\begin{aligned}a_{сн}(T,L_1,L_2)&=a_1(T,L_1,S_{01})Q_2(T,L_2,S_{02})+Q_1(T,L_1,S_{01})a_2(T,L_2,S_{02})+\\&+(a_1(T,L_1,S_{11})P_2(T,L_2,S_{12})+P_1(T,L_1,S_{11})a_2(T,L_2,S_{12})),\\a_{св}(T,L_1,L_2)&=a_1(T,L_1,S_{01})Q_2(T,L_2,S_{02})+Q_1(T,L_1,S_{01})a_2(T,L_2,S_{02})+\\&+\frac{1}{2}(a_1(T,L_1,S_{11})P_2(T,L_2,S_{12})+P_1(T,L_1,S_{11})a_2(T,L_2,S_{12})),\end{aligned} \qquad (6.347)$$

$$a_i(T,L_i,S_{0i})=k_i\lambda_i\left(\frac{C_i}{B_i}\right)^{L_i}e^{-A_i}I(B_i,L_i),$$

$$a_i(T,L_i,S_{1i})=k_i\lambda_i\left(\left(\frac{C_i}{D_i}\right)^{L_i}e^{-A_i/2}I(D_i,L_i)-2\left(\frac{C_i}{B_i}\right)^{L_i}e^{-A_i}I(B_i,L_i)\right).$$

Интенсивность отказов получают по общей формуле (6.326).

Чтобы найти среднюю наработку до отказа, представим ВБР в виде:

$$P_{сн}(T,L_1,L_2)=\left(\frac{C_1}{B_1}\right)^{L_1}e^{-A_1}+\left(\frac{C_2}{B_2}\right)^{L_2}e^{-A_2}+\sum_{i=0}^{L_1-1}E_{1i}\frac{C_1^i}{i!}e^{-C_1}+\sum_{i=0}^{L_2-1}E_{2i}\frac{C_2^i}{i!}e^{-C_2}+$$

$$+\left(\frac{C_1}{B_1}\right)^{L_1}\left(\frac{C_2}{B_2}\right)^{L_2}e^{-A}-\left(\frac{C_2}{B_2}\right)^{L_2}\sum_{i=0}^{L_1-1}(E_{1i}+2K_{1i})\frac{C_1^i}{i!}e^{-C_1-A_2}-\left(\frac{C_1}{B_1}\right)^{L_1}\sum_{i=0}^{L_2-1}(E_{2i}+2K_{2i})\frac{C_2^i}{i!}e^{-C_2-A_1}+$$

$$+2\left(\frac{C_1}{D_1}\right)^{L_1}\left(\frac{C_2}{D_2}\right)^{L_2}e^{-A}-2\left(\frac{C_1}{D_1}\right)^{L_1}\left(\frac{C_2}{B_2}\right)^{L_2}e^{-A_1/2-A_2}-2\left(\frac{C_1}{B_1}\right)^{L_1}\left(\frac{C_2}{D_2}\right)^{L_2}e^{-A_1-A_2/2}+$$

$$+2\left(\frac{C_1}{D_1}\right)^{L_1}\sum_{i=0}^{L_2-1}K_{2i}\frac{C_2^i}{i!}e^{-C_2-A_1/2}+2\left(\frac{C_2}{D_2}\right)^{L_2}\sum_{i=0}^{L_1-1}K_{1i}\frac{C_1^i}{i!}e^{-C_1-A_2/2}-$$

$$-\sum_{i=0}^{L_1-1}\sum_{j=0}^{L_2-1}(E_{1i}E_{2j}-K_{1i}K_{2j})C_{i+j}^i\frac{C_1^iC_2^j}{(i+j)!}e^{-C_1-C_2}$$

$$A=A_1+A_2,\ E_{li}=1-\left(\frac{C_l}{B_l}\right)^{L_l-i},\ K_{li}=\left(\frac{C_l}{B_l}\right)^{L_l-i}-\left(\frac{C_l}{D_l}\right)^{L_l-i},\ i=1,2\,. \qquad (6.348)$$

Интегрирование в (6.348) и использование (5.54) дает нижнюю оценку:

$$k\lambda\tau_1(T,L_1,L_2)=\frac{A}{A_1}\left(\frac{C_1}{B_1}\right)^{L_1}(1-e^{-A_1})+\frac{A}{A_2}\left(\frac{C_2}{B_2}\right)^{L_2}(1-e^{-A_2})+\frac{A}{C_1}\sum_{i=0}^{L_1-1}E_{1i}I(C_1,i+1)+$$

$$+\frac{A}{C_2}\sum_{i=0}^{L_2-1}E_{2i}I(C_2,i+1)+\left(\frac{C_1}{B_1}\right)^{L_1}\left(\frac{C_2}{B_2}\right)^{L_2}(1-e^{-A})-$$

$$-\frac{A}{C_1+A_2}\left(\frac{C_2}{B_2}\right)^{L_2}\sum_{i=0}^{L_1-1}(E_{1i}+2K_{1i})\left(\frac{C_1}{C_1+A_2}\right)^{i}I(C_1+A_2,i+1)-$$

$$-\frac{A}{C_2+A_1}\left(\frac{C_1}{B_1}\right)^{L_1}\sum_{i=0}^{L_2-1}(E_{2i}+2K_{2i})\left(\frac{C_2}{C_2+A_1}\right)^{i}I(C_2+A_1,i+1)+$$

$$+4\left(\frac{C_1}{D_1}\right)^{L_1}\left(\frac{C_2}{D_2}\right)^{L_2}(1-e^{-A})-\frac{4A}{A+A_2}\left(\frac{C_1}{D_1}\right)^{L_1}\left(\frac{C_2}{B_2}\right)^{L_2}(1-e^{-A_1/2-A_2})-$$

$$-\frac{4A}{A+A_1}\left(\frac{C_1}{B_1}\right)^{L_1}\left(\frac{C_2}{D_2}\right)^{L_2}(1-e^{-A_1-A_2/2})+$$

$$+\frac{2A}{C_2+A_1/2}\left(\frac{C_1}{D_1}\right)^{L_1}\sum_{i=0}^{L_2-1}K_{2i}\left(\frac{C_2}{C_2+A_1/2}\right)^{i}I(C_2+A_1/2,i+1)+$$

$$+\frac{2A}{C_1+A_2/2}\left(\frac{C_2}{D_2}\right)^{L_2}\sum_{i=0}^{L_1-1}K_{1i}\left(\frac{C_1}{C_1+A_2/2}\right)^{i}I(C_1+A_2/2,i+1)-$$

$$-\frac{A}{C}\sum_{i=0}^{L_1-1}\sum_{j=0}^{L_2-1}(E_{1i}E_{2j}-K_{1i}K_{2j})C_{i+j}^iI(C,i+j+1)\,. \qquad (6.349)$$

Коэффициент готовности находим по общей формуле (6.335). Для расчета коэффициента оперативной готовности рассмотрим шесть различных структур: одну полную S_0 и пять деградированных $S_1 - S_5$. Для расчета вероятностей их возникновения в конце периода пополнения составим приближенные формулы, аналогичные (5.496):

$$P(T,L_1,L_2,S_0)=P_1^{(0)}(T,L_1)P_2^{(0)}(T,L_2),\ P(T,L_1,L_2,S_1)=P_1^{(1)}(T,L_1)P_2^{(0)}(T,L_2),$$

$$P(T,L_1,L_2,S_2)=P_1^{(0)}(T,L_1)P_2^{(1)}(T,L_2),\ P(T,L_1,L_2,S_3)=P_2^{(0)}(T,L_2)(1-P_1\ (T,L_1)),$$

$$P(T,L_1,L_2,S_4)=P_2^{(0)}(T,L_2)(1-P_1\ (T,L_1)),\ P(T,L_1,L_2,S_5)=\frac{1}{2}P_1^{(1)}(T,L_1)P_2^{(1)}(T,L_2). \quad (6.350)$$

Здесь следует взять:

$$P_i^{(0)}(T,L_i)=1-I(C_i,L_i)+\left(\frac{C_i}{B_i}\right)^{L_i}e^{-A_i}I(B_i,L_i),$$

$$P_i^{(1)}(T,L_i)=2\left(\frac{C_i}{D_i}\right)^{L_i}e^{-A_i/2}I(D_i,L_i)-2\left(\frac{C_i}{B_i}\right)^{L_i}e^{-A_i}I(B_i,L_i),D_i=B_i+r_ia_i,$$

$$P_i\ (T,L_i)=1-I(C_i,L_i)+2\left(\frac{C_i}{D_i}\right)^{L_i}e^{-A_i/2}I(D_i,L_i)-\left(\frac{C_i}{B_i}\right)^{L_i}e^{-A_i}I(B_i,L_i).$$

Теперь можно записать выражение для коэффициента оперативной готовности по наихудшему циклу:

$$K_{o\Gamma}^{*}(\tau,T,L)=P(T,L_1,L_2,S_0)(e^{-\alpha_1}+e^{-\alpha_2}-e^{-\alpha})^2+P(T,L_1,L_2,S_1)e^{-\alpha_1}(e^{-\alpha_1}+e^{-\alpha_2}-e^{-\alpha})+$$

$$+P(T,L_1,L_2,S_2)e^{-\alpha_2}(e^{-\alpha_1}+e^{-\alpha_2}-e^{-\alpha})+P(T,L_1,L_2,S_3)e^{-2\alpha_1}+$$

$$+P(T,L_1,L_2,S_4)e^{-2\alpha_2}+P(T,L_1,L_2,S_5)e^{-\alpha}. \quad (6.351)$$

Коэффициент оперативной готовности по произвольному циклу получается путем интегрирования (6.351) с осреднением характеристики по интервалу $(0,T)$.

По результатам расчетов (*приложение 6*, примеры П6.30, П6.32) можно сделать следующие выводы:

- среднее арифметическое верхней (6.344) и нижней (6.346) оценок находится от гарантированных границ в практически важном диапазоне значений ВБР (от 0,9 до 0,99) на удалении, определяющем относительную погрешность оценки: 30–50 %. Это больше, чем в модели МП14, где использовались уточненные нижние оценки. С увеличением периода пополнения ошибка уменьшается. Если этот уровень ошибки практически не приемлем, то надо уточнять оценки путем добавления следующих членов разложения в формуле (6.341);
- приближенная нижняя оценка (6.329), основанная на экспоненциальной модели, всегда больше нижней оценки (6.344), но близка к ней. Отличие составляет по вероятности отказа не более 5–8 %. Поскольку точное значение вероятности ближе к нижней оценке, чем к верхней оценке, очевидно, что предпочтение следует отдать средней оценке P_{cp} и нижней оценке (6.329);
- гарантированные верхняя и нижняя оценки для интенсивности отказа обеспечивают приемлемую практическую точность: среднее арифметическое оценок отличается от крайних значений не более, чем на 16,5 %. Учитывая близость ВБР к нижней оценке,

можно утверждать, что среднее значение оценок λ_c будет заниженной оценкой интенсивности отказов системы;

- при постоянной интенсивности потребления запасов решающую роль в обеспечении надежности играет распределение вкладов ОПС и ДПС: значения средней наработки и интенсивности отказов меняются в 5 раз, а вероятность безотказной работы изменяется от 0,75 до 0,996.

6.18. Пример расчета надежности многофункциональной системы при ограниченном комплекте ЗИП

В качестве примера расчета надежности многофункциональной системы, выполняющей несколько функционально самостоятельных операций (ФСО), рассмотрим расчет надежности системы управления технологическими системами блока атомной электрической станции (СУ ТС БАЭС). Данный пример является адаптированной частью реального проекта, выполненного с участием автора в 2004–2005 гг. В этой системе выделим подсистему дистанционного управления исполнительными органами с мажорированием сигналов управления (ПСДУ). Подсистема ПСДУ имеет многоуровневую иерархическую структуру (рис. 6.9).

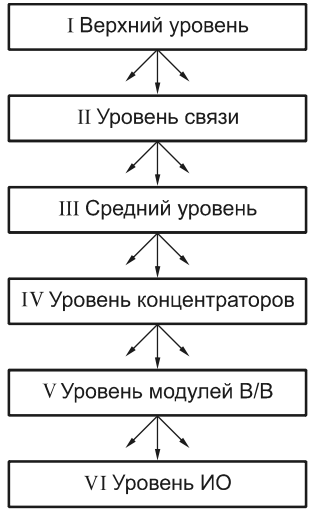


Рис. 6.9. Уровни иерархии структуры подсистемы дистанционного управления технологическими системами блока атомной электрической станции (СУ ТС БАЭС)

На верхнем (первом) уровне находятся технические средства управления всеми функционально самостоятельными операциями и всеми исполнительными органами (ИО). На нижнем (шестом) уровне находится комплекс исполнительных органов различного назначения, каждый из которых участвует в выполнении конкретной ФСО. Совокупность технических и программных средств, участвующих в выполнении дистанционного управления с доставкой сигналов управления в конкретный ИО образует ветвь иерархической структуры. Совокупность ветвей, подчиненных одному устройству промежуточного уровня иерархии, образует «куст». Операция доставки сигналов всем ИО одного куста является укрупненной ФСО. Чем более высокий ранг иерархии куста, тем более укрупненной является ФСО.

В данной структуре можно различать кусты второго, третьего, четвертого и пятого уровней. Совокупность кустов второго уровня вместе с устройствами верхнего уровня образует полное дерево подсистемы ПСДУ.

Требования к надежности могут предъявляться ко всей подсистеме, к одному кусту заданного уровня или к одной ветви. Далее рассматривается задача оценки надежности одной ветви ПСДУИО. Структурно-функциональная схема одной ветви приведена на рис. 6.10.

К первому уровню иерархии относятся компьютер PIII (процессор CPU PIII, память DIMM, материнская плата PCA-6179, жесткий диск HDD, видеокарта Matrox, адаптер сети MB+, сетевая плата Intel Pro/100TP, трекбол TBL50F1, монитор 18,1" TFT-LCD и источники бес-

перебойного питания ИБП1 и ИБП2. Ко второму уровню относятся коммутатор сети Ethernet — RS2, оптические повторители сети MB+, модуль NRP, модули питания RPS 60, модули бесперебойного питания ИБП1–ИБП4. К третьему уровню относятся компьютеры CPU, установочные панели XBP, модули сети Ethernet NOE, модули сети RIO CHS (Hot Standby), модули питания CPS-124, модули бесперебойного питания ИБП2, ИБП4 и ИБП5. К четвертому уровню относятся узловые модули сети RIO CRA, установочные панели XBP, модули питания CPS-114, модули бесперебойного питания ИБП3–ИБП5. На пятом уровне находятся модули вывода DDO и модули питания TSX. На шестом уровне находятся исполнительные органы, в состав которых входят реле RXN.

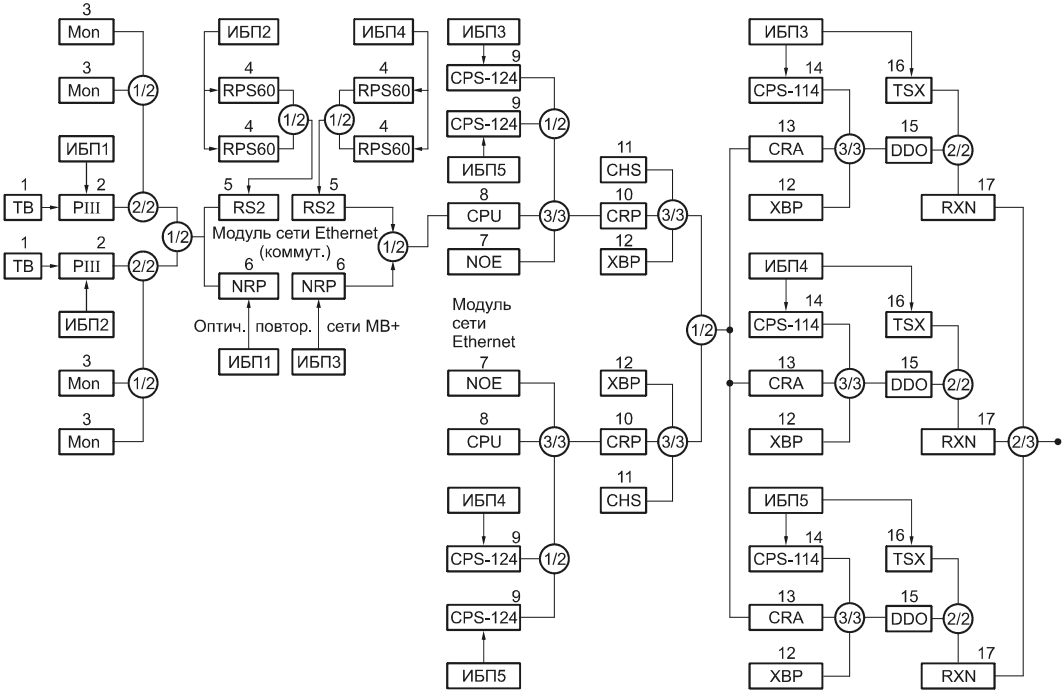


Рис. 6.10. Структурно-функциональная схема одной ветви подсистемы дистанционного управления технологическими системами блока атомной электрической станции (СУ ТС БАЭС)

Количество модулей различных типов в системе СУ ТС БАЭС и в одной ветви подсистемы ПСДУ, интенсивности отказов модулей и ориентировочные стоимости каждого модуля приведены в табл. 6.2.

По количеству модулей вклад одной ветви в подсистему составляет 0,835 %, по интенсивности отказов — 7,3 %, по стоимости модулей — 9,32 %.

Расчет надежности проводится для заданной наработки t = 0,5 года = 4380 час. Период пополнения принят равным T = 0,5 года = 4380 ч для всех видов запасов. Среднее время доставки запасной части со склада составляет $T_{\partial 1}$= 1 час, среднее время замены отказавшего модуля $T_{в1}$ = 0,25 часа. Допустимое время перерыва в работе таково, что замена одного модуля при соблюдении нормативных значений времен доставки и замены не ухудшает качества функционирования системы.

Нормируемым показателем надежности является вероятность безотказной работы одной ветви системы. Для одной ветви ВБР в течение заданной наработки t = 3 года должна быть

Таблица 6.2. Характеристики модулей ПС ДУ

№	Модули	n	k	$\lambda \cdot 10^6$, ч$^{-1}$	C, тыс. руб.	$k\lambda \cdot 10^6$, ч$^{-1}$	$n\lambda \cdot 10^6$, ч$^{-1}$
1	Трекбол TBL50F1	8	2	10,00	9,30	20,00	80,0
2	Компьютер PIII	8	2	20,90	70,00	41,80	167
3	Монитор 18,1" FT-LCD	16	4	40,00	75,00	160,00	640
4	Модуль питания RPS	18	4	4,50	5,50	18,00	81,0
5	Коммутатор RS2	11	2	1,60	64,40	3,20	17,6
6	Оптоповторитель NRP	14	2	2,70	30,00	5,40	37,8
7	Модуль NOE	24	2	1,70	35,40	3,40	40,8
8	Модуль CPU	12	2	2,10	46,60	4,20	25,2
9	Модуль питания CPS-124	20	4	1,80	23,30	7,20	36,0
10	Модуль RIO CRP	10	2	1,60	34,80	3,20	16,0
11	Модуль сопряжения CHS	5	2	1,30	224,2	2,60	6,5
12	Установочная панель XBP	81	5	0,20	8,90	1,00	16,2
13	Модуль RIO CRA	71	3	1,60	33,40	4,80	114
14	Модуль питания CPS-114	81	3	1,80	21,00	5,40	146
15	Модуль вывода DDO	142	3	4,20	15,40	12,60	596
16	Модуль питания TSX	480	3	4,50	4,20	13,50	2160
17	Реле RXN	5300	3	0,05	0,60	0,15	265
18	Источник бесперебойного питания ИБП	44	5	10,00	20,00	50,00	440
19	Всего	6345	53	110,55	722,0	356,45	4885

не менее 0,96, в течение заданной наработки t = 5 лет — не менее 0,93, а средняя наработка до отказа не менее 87 600 ч = 10 лет. В качестве показателя достаточности выбран коэффициент готовности ЗИП. Этот показатель рассчитывают для сведения. Следует также оценить стоимость начальных запасов в комплекте ЗИП, обеспечивающий установленный уровень надежности выполнения ФСО, и расход ЗИП в натуральном и стоимостном выражении за время эксплуатации 5 лет.

Для расчета надежности проведем разложение исходной функциональной структуры по состояниям группы источников ИБП в соответствии с табл. 6.3.

При других сочетаниях отказов ИБП система становится неработоспособной.

Для базовой структуры S_0 и девяти деградированных структур формируются три схемы: структурно-функциональная схема и две структурно-надежностные схемы (СНС), соответствующие нижней и верхней оценкам ВБР. Для S_0 структурно-функциональная схема получается из схемы (см. рис. 6.10), если из ее убрать все пять ИБП, которые условно будем считать в схеме разложения идеально надежными.

Таблица 6.3. Работоспособные структуры при различных состояниях ИБП

Структура	Состояния ИБП				
	ИБП1	ИБП2	ИБП3	ИБП4	ИБП5
S_0	+	+	+	+	+
S_1	–	+	+	+	+
S_2	+	–	+	+	+
S_3	+	+	–	+	+
S_4	+	+	+	–	+
S_5	+	+	+	+	–
S_6	–	+	–	+	+
S_7	–	+	+	+	–
S_8	+	–	+	–	+
S_9	+	–	+	+	–

Для нижней оценки СНС практически точно отражает логику функционирования структурно-функциональной схемы. Только одно структурное преобразование касается установочной панели ХВР: схема из пяти элементов, соединенных согласно модели МП8, преобразуется в схему из шести элементов согласно модели МП3 (рис. 6.11, *а*).

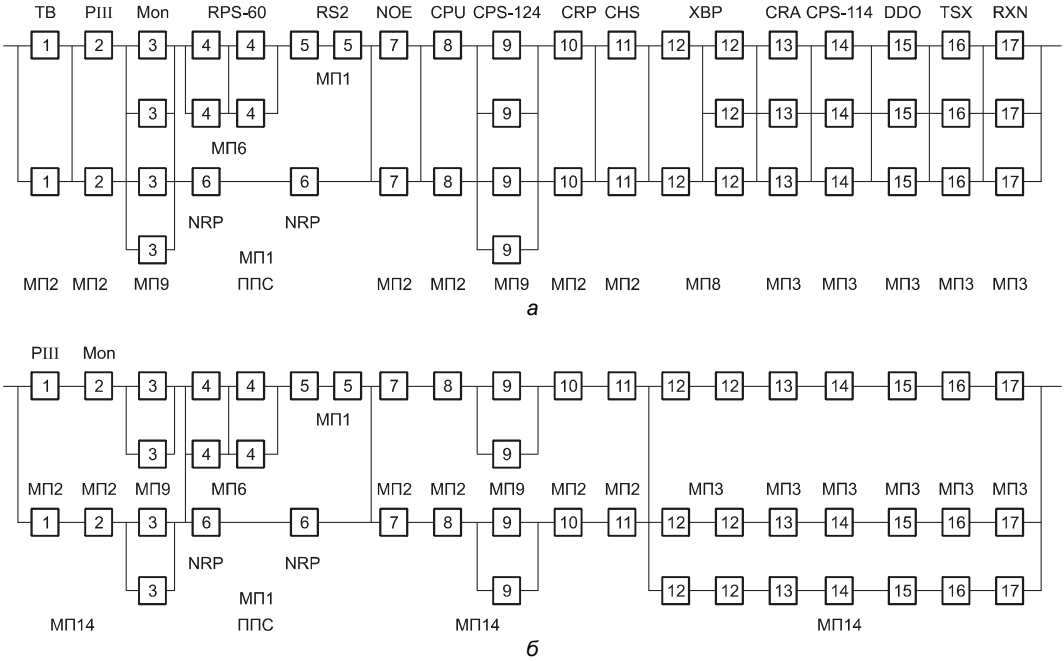


Рис. 6.11. Структурно-надежностные схемы для базовой структуры S_0 при получении верхней (*а*) и нижней (*б*) оценок вероятности безотказной работы одной ветви подсистемы дистанционного управления технологическими системами блока атомной электрической станции (СУ ТС БАЭС)

Очевидно, что такое преобразование приводит к некоторому занижению надежности. Другая причина занижения надежности состоит в том, что состояние системы рассматривается на момент окончания периода пополнения и не учитывается динамика отказов внутри периода, о чем уже шла речь в *главе 5 (разд. 5.20)*. При построении расчетных формул для ВБР используется уточненная нижняя оценка модели МП14.

Для получения верхней оценки структурное преобразование состоит в том, что групповое резервирование преобразуется в поэлементное резервирование. Это касается элементов 1, 2, 7, 8, 10–17 (рис. 6.11, *б*). Это приводит к возникновению последовательного или параллельно-последовательного соединения однородных структур, рассмотренных ранее в моделях МП1–МП13.

Для деградированных структур схема СНС получается путем изъятия из схемы СНС для структуры S_0 тех модулей, которые получают питание из отказавших модулей ИБП (схема питания приведена на рис. 6.10).

Расчетные формулы для верхней и нижней оценок ВБР для базовой структуры и деградированных структур имеют вид:

$$P_c^{\text{в}}(T,L,S_0) = P_{1-3}(T,L)P_{7-11}(T,L)P_{12-17}(T,L)(1-(1-P_4(T,L_4)P_5(T,L_5))Q_6(T,L_6)). \quad (6.352)$$

$$P_c^{\text{в}}(T,L,S_0) = \prod_{i=1}^{3} P_i(T,L_i,S_{0i})\prod_{i=7}^{17} P_i(T,L_i,S_{0i})(1-(1-P_4(T,L_4)P_4(T,L_4))Q_6(T,L_6)), \quad (6.353)$$

$$P_{1-3}(T,L) = \prod_{i=1}^{3} P_i(T,L_i,S_{0i})\left(1+\sum_{i=1}^{3}\frac{P_i(T,L_i,S_{1i})}{P_i(T,L_i,S_{0i})}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1,i<j}^{3}\frac{P_i(T,L_i,S_{1i})P_i(T,L_j,S_{1j})}{P_i(T,L_i,S_{0i})P_i(T,L_j,S_{0j})}\right),$$

$$P_{7-11}(T,L) = \prod_{i=7}^{11} P_i(T,L_i,S_{0i})\left(1+\sum_{i=7}^{11}\frac{P_i(T,L_i,S_{1i})}{P_i(T,L_i,S_{0i})}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=7,i<j}^{11}\frac{P_i(T,L_i,S_{1i})P_i(T,L_j,S_{1j})}{P_i(T,L_i,S_{0i})P_i(T,L_j,S_{0j})}\right),$$

$$P_{12-17}(T,L) = \prod_{i=12}^{17} P_i(T,L_i,S_{0i})\left(1+\sum_{i=12}^{17}\frac{P_i(T,L_i,S_{1i})}{P_i(T,L_i,S_{0i})}+\frac{1}{3}\sum_{i,j=12,i<j}^{17}\frac{P_i(T,L_i,S_{1i})P_i(T,L_j,S_{1j})}{P_i(T,L_i,S_{0i})P_i(T,L_j,S_{0j})}\right).$$

Нумерация вероятностей соответствует расположению модулей в табл. 6.2. Для конкретных типов модулей используются следующие модели: модели МП1 для модулей 5 и 6 (RS2 и NRP), модели МП2 для модулей 1, 2, 7, 8, 10, 11 (TBL, PIII, NOE, CPU, RIO CRP, CHS), модели МП3 для модулей 12–17 (XBP, RIO CRA, CPS-114, DDO, TSX, RXN), модель МП6 для модуля 4 (RPS), модель МП8 для модуля 12 (XBP) в верхней оценке, модели МП9 для модулей 3 и 9 (Monitor 18,1" TFT-LCD, CPS-124). Для МП1 используется формула (6.31), для модели МП2 — формулы (6.56) и (6.77), для модели МП3 — формулы (6.81) и (6.101), для модели МП5 — формула (6.120), для модели МП6 — формула (6.138), для модели МП8 — формула (6.197).

Для расчета ВБР по модели МП9 в верхней оценке используется формула (6.217). При расчете вероятностей $P_i(T,L_i,S_{0i})$ и $P_i(T,L_i,S_{1i})$ принимается во внимание, что к структуре S_0 относятся все состояния в графе (см. рис. 6.6), в которых работоспособны обе дублированные ветви, а к структуре S_1 — состояния, в которых сохраняется только одна ветвь из двух. Используя формулы (6.242) при $m = 4$, получим:

$$P_9(T,L,S_0,МП9) = \sum_{i=0}^{L+1} P_i(T) + \frac{2}{3}P_{L+2}(T) = 1 - I(C,L) + 4e^{-A+2ra}\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^L I(B+2ra,L) -$$

$$-4e^{-A+ra}\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L I(B+ra,L) + e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L), \quad (6.354)$$

$$P_9(T,L,S_1,МП9)=\frac{1}{3}P_{L+2}(T)+P_{L+3}(T)=4e^{-A+3ra}\left(\frac{C}{B+3ra}\right)^L I(B+3ra,L)-$$

$$-10e^{-A+2ra}\left(\frac{C}{B+2ra}\right)^L I(B+2ra,L)+8e^{-A+ra}\left(\frac{C}{B+ra}\right)^L I(B+ra,L)-2e^{-A}\left(\frac{C}{B}\right)^L I(B,L).$$

Эти формулы используются при расчете нижней оценки не только для источника питания CPS-124, но и для монитора, т. к. для обоих типов модулей верна модель МП9. Дополнительное уточнение в формуле (6.352) можно получить, если использовать тройные сочетания вероятностей. При этом новые суммы надо умножить на коэффициенты $^1/_4$ или $^1/_9$.

Для деградированных структур уменьшается количество элементов в соответствии со схемой питания от источников ИБП (см. рис. 6.9) и для некоторых модулей изменяется тип модели (табл. 6.4).

Таблица 6.4. Характеристики деградированных структур

№	Модуль	Количество модулей и тип модели																	
		S_1		S_2		S_3		S_4		S_5		S_6		S_7		S_8		S_9	
		k	M	k	M	k	M	k	M	k	M	k	M	k	M	k	M	k	M
1	TBL	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1
2	PIII	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1
3	TFT	2	2	2	2	4	9	4	9	4	9	2	2	2	2	2	2	2	2
4	RPS	4	6	0	–	4	6	0	–	4	6	4	6	4	6	0	–	0	–
5	RS2	2	1	0	–	2	1	0	–	2	1	2	1	2	1	0	–	0	–
6	NRP	0	–	2	1	0	–	2	1	2	1	0	–	0	–	2	1	2	1
7	NOE	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
8	CPU	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
9	CPS-124	4	9	4	9	3	9	3	9	2	2	3	9	2	2	3	9	2	2
10	CRP	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
11	CHS	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
12	XBP	5	83	5	83	3	1	3	1	3	1	3	1	2	1	3	1	3	1
13	CRA	3	3	3	3	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
14	CPS-114	3	3	3	3	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
15	DDO	3	3	3	3	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
16	TSX	3	3	3	3	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
17	RXN	3	3	3	3	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
18	ИБП	4	1	4	1	4	1	4	1	4	1	3	1	3	1	3	1	3	1
	Всего	46		42		42		38		43		37		35		33		32	

В структурах S_1 и S_2 при получении верхней оценки для модуля ХВР используется модель МП8, а при получении нижней оценки модель МП3 при $r = 2$ ($k = 6$). В структурах S_3, S_4, S_6 и S_8 при получении нижней оценки в модели МП9 принимается $m = 2$, а при получении верхней оценки $m = 3$.

Используя данные табл. 6.4 и формулы модели МП14, получим расчетные формулы для нижней и верхней оценок вероятности безотказной работы деградированных структур:

$$P_c^{н}(T,L,S_1) = \prod_{i=1,2,5} P_i\ (T,L_i,МП1)P_3\ (T,L_3,МП2)P_4\ (T,L_4,МП6)P_{7-11}(T,L)P_{12-17}(T,L),$$

$$P_c^{в}(T,L,S_1) = \prod_{i=1,2,5} P_i\ (T,L_i,МП1)P_4\ (T,L_4,МП6)P_9\ (T,L_9,МП9)\times$$

$$\times P_{12}(T,L_{12},МП8)\prod_{i=3,7,8,10,11} P_i\ (T,L_i,МП2)\prod_{i=13}^{17} P_i\ (T,L_i,МП3). \qquad (6.355)$$

$$P_c^{н}(T,L,S_2) = \prod_{i=1,2,6} P_i\ (T,L_i,МП1)P_3\ (T,L_3,МП2)P_{7-11}(T,L)P_{12-17}(T,L),$$

$$P_c^{в}(T,L,S_2) = \prod_{i=1,2,6} P_i\ (T,L_i,МП1)\prod_{i=3,7,8,10,11} P_i\ (T,L_i,МП2)P_9\ (T,L_9,МП9)\times$$

$$\times P_{12}(T,L_{12},МП8)\prod_{i=13}^{17} P_i\ (T,L_i,МП3), \qquad (6.356)$$

$$P_c^{н}(T,L,S_3) = P_{1-3}(T,L)P_4\ (T,L_4,МП6)P_{7-11}(T,L)\prod_{i=5,12-17} P_i\ (T,L_i,МП1),$$

$$P_c^{в}(T,L,S_3) = \prod_{i=1,2,7,8,10-12} P_i\ (T,L_i,МП2)P_3\ (T,L_3,МП9)P_4\ (T,L_4,МП6)\times$$

$$\times P_9\ (T,L_9,МП9)\prod_{i=5,13-17} P_i\ (T,L_i,МП1), \qquad (6.357)$$

$$P_c^{н}(T,L,S_4) = P_{1-3}(T,L)P_6\ (T,L_6,МП1)P_{7-11}(T,L)\prod_{i=12}^{17} P_i\ (T,L_i,МП1), \qquad (6.358)$$

$$P_c^{в}(T,L,S_4) = \prod_{i=1,2,7,8,10-12} P_i\ (T,L_i,МП2)P_3\ (T,L_3,МП9)P_9\ (T,L_9,МП9)\prod_{i=6,13-17} P_i\ (T,L_i,МП1),$$

$$P_c^{н}(T,L,S_5) = P_{1-3}(T,L)P_{7-11}(T,L)\prod_{i=12}^{17} P_i\ (T,L_i,МП1)(1-$$

$$-(1-P_4\ (T,L_4,МП6)P_5\ (T,L_5,МП1))Q_6(T,L_6,МП1)),$$

$$P_c^{в}(T,L,S_5) = \prod_{i=1,2,7-11} P_i\ (T,L_i,МП2)P_3\ (T,L_3,МП9)(1-(1-$$

$$-P_4\ (T,L_4,МП6)P_5\ (T,L_5,МП1))Q_6(T,L_6,МП1))\prod_{i=12}^{17} P_i\ (T,L_i,МП1), \qquad (6.359)$$

$$P_c^{н}(T,L,S_6) = P_c^{н}(T,L,S_7) = \prod_{i=1,2,5,12-17} P_i\ (T,L_i,МП1)P_3\ (T,L_3,МП2)P_4\ (T,L_4,МП6)P_{7-11}(T,L),$$

$$P_c^{в}(T,L,S_6)=\prod_{i=1,2,5,13-17}P_i\ (T,L_i,МП1)\prod_{i=3,7,8,10-12}P_i\ (T,L_i,МП2)P_3\ (T,L_3,МП9)\times$$

$$\times P_4\ (T,L_4,МП6)P_9\ (T,L_9,МП9),\qquad(6.360)$$

$$P_c^{в}(T,L,S_7)=\prod_{i=1,2,5,12-17}P_i\ (T,L_i,МП1)\prod_{i=3,7,8,10-12}P_i\ (T,L_i,МП2)P_4\ (T,L_4,МП6),\qquad(6.361)$$

$$P_c^{н}(T,L,S_8)=P_c^{н}(T,L,S_9)=\prod_{i=1,2,6,12-17}P_i\ (T,L_i,МП1)P_3\ (T,L_3,МП2)P_{7-11}(T,L),\qquad(6.362)$$

$$P_c^{в}(T,L,S_8)=\prod_{i=1,2,6,12-17}P_i\ (T,L_i,МП1)\prod_{i=3,7,8,10,11}P_i\ (T,L_i,МП2)P_9\ (T,L_9,МП9),$$

$$P_c^{в}(T,L,S_9)=\prod_{i=1,2,6,12-17}P_i\ (T,L_i,МП1)\prod_{i=3,7-11}P_i\ (T,L_i,МП2).\qquad(6.363)$$

Здесь использованы формулы:

$$P_{1-3}(T,L)=\prod_{i=1}^{3}P_i\ (T,L_i,S_{0i})\left(1+\sum_{i=1}^{3}\frac{P_i\ (T,L_i,S_{1i})}{P_i\ (T,L_i,S_{0i})}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1,i<j}^{3}\frac{P_i\ (T,L_i,S_{1i})P_i\ (T,L_j,S_{1j})}{P_i\ (T,L_i,S_{0i})P_i\ (T,L_j,S_{0j})}\right),$$

$$P_{7-11}(T,L)=\prod_{i=7}^{11}P_i\ (T,L_i,S_{0i})\left(1+\sum_{i=7}^{11}\frac{P_i\ (T,L_i,S_{1i})}{P_i\ (T,L_i,S_{0i})}+\frac{1}{2}\sum_{i,j=7,i<j}^{11}\frac{P_i\ (T,L_i,S_{1i})P_i\ (T,L_j,S_{1j})}{P_i\ (T,L_i,S_{0i})P_i\ (T,L_j,S_{0j})}\right),$$

$$P_{12-17}(T,L)=\prod_{i=12}^{17}P_i\ (T,L_i,S_{0i})\left(1+\sum_{i=12}^{17}\frac{P_i\ (T,L_i,S_{1i})}{P_i\ (T,L_i,S_{0i})}+\frac{1}{3}\sum_{i,j=12,i<j}^{17}\frac{P_i\ (T,L_i,S_{1i})P_i\ (T,L_j,S_{1j})}{P_i\ (T,L_i,S_{0i})P_i\ (T,L_j,S_{0j})}\right).$$

Используя оценки для вероятностей безотказной работы при различных стартовых структурах, можем записать теперь оценки безусловной вероятности безотказной работы системы:

$$P_c\ (T,L)=P_{18}(T,L_{18},S_0,МП1)P_c\ (T,L,S_0)+\frac{1}{5}P_{18}(T,L_{18},S_1,МП1)(P_c\ (T,L,S_1)+$$

$$+P_c\ (T,L,S_2)+P_c\ (T,L,S_3)+P_c\ (T,L,S_4)+P_c\ (T,L,S_5))+\frac{1}{10}P_{18}(T,L_{18},S_2,МП1)(P_c\ (T,L,S_6)+$$

$$+P_c\ (T,L,S_7)+P_c\ (T,L,S_8)+P_c\ (T,L,S_9)),\qquad(6.364)$$

$$P_{18}(T,L_{18},S_0,МП1)=1-I(C_{18},L_{18})+\left(\frac{C_{18}}{B_{18}}\right)^{L_{18}}e^{-A_{18}}I(B_{18},L_{18}),$$

$$P_{18}(T,L_{18},S_1,МП1)=5\left(\left(\frac{C_{18}}{B_{18}+a_{18}}\right)^{L_{18}}e^{-4a_{18}}I(B_{18}+a_{18},L_{18})-\left(\frac{C_{18}}{B_{18}}\right)^{L_{18}}e^{-A_{18}}I(B_{18},L_{18})\right),$$

$$P_{18}(T,L_{18},S_2,МП1)=10\left(\left(\frac{C_{18}}{B_{18}+2a_{18}}\right)^{L_{18}}e^{-3a_{18}}I(B_{18}+2a_{18},L_{18})-\right.$$

$$\left.-2\left(\frac{C_{18}}{B_{18}+a_{18}}\right)^{L_{18}}e^{-4a_{18}}I(B_{18}+a_{18},L_{18})+\left(\frac{C_{18}}{B_{18}}\right)^{L_{18}}e^{-A_{18}}I(B_{18},L_{18})\right).$$

Вероятности различных состояний группы ИБП составлены с помощью формулы (6.242) при $m = 5$ и $r = 1$.

Детальные результаты расчетов надежности при отсутствии ЗИП (табл. 6.5) и при базовом комплекте ЗИП-О, содержащем по одной запасной части каждого типа, приведены в *приложении 6* (пример П6.33). Сводные результаты расчетов надежности при отсутствии ЗИП и при базовом варианте комплекта ЗИП-О даны в табл. 6.5 и 6.6.

Из данных таблиц следует, что без ЗИП надежность выполнения ФСО одной ветвью существенно меньше требуемого значения. Поэтому вводим комплект ЗИП. Базовым уровнем начальных запасов будем считать запасы по одной запасной частью каждого типа. Результаты расчетов надежности при этом уровне запасов приведены в табл. 6.7.

При расчете нижних оценок в графах приведены групповые показатели согласно формулам (6.352)–(6.363). В этом случае в других строках столбца, относящихся к той же группе, установлены 1.

Таблица 6.5. $L_i = 0$, $T = 0{,}5$ года = 4380 ч

t лет	Вероятность безотказной работы*										
	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	Всего
0,5	0,7780	0,0299	0,0303	0,0315	0,0315	0,0315	0,0012	0,0012	0,0012	0,0012	0,9378
	0,7927	0,0301	0,0305	0,0319	0,0319	0,0319	0,0012	0,0012	0,0012	0,0012	0,9541
	0,7854	0,0300	0,0304	0,0317	0,0317	0,0317	0,0012	0,0012	0,0012	0,0012	0,9459
1,0	0,5654	0,0385	0,0379	0,0430	0,0411	0,0431	0,0030	0,0030	0,0029	0,0029	0,7808
	0,6107	0,0395	0,0388	0,0455	0,0434	0,0455	0,0030	0,0030	0,0029	0,0029	0,8353
	0,5880	0,0390	0,0384	0,0443	0,0422	0,0443	0,0030	0,0030	0,0029	0,0029	0,8081
1,5	0,3858	0,0358	0,0350	0,0419	0,0390	0,0419	0,0041	0,0041	0,0038	0,0038	0,5951
	0,4554	0,0376	0,0368	0,0474	0,0441	0,0474	0,0041	0,0041	0,0038	0,0038	0,6844
	0,4206	0,0367	0,0359	0,0446	0,0416	0,0446	0,0041	0,0041	0,0038	0,0038	0,6398
2,0	0,2498	0,0287	0,0280	0,0347	0,0316	0,0347	0,0042	0,0042	0,0039	0,0039	0,4237
	0,3283	0,0311	0,0303	0,0425	0,0387	0,0425	0,0043	0,0043	0,0039	0,0039	0,5297
	0,2890	0,0299	0,0291	0,0386	0,0351	0,0386	0,0043	0,0043	0,0039	0,0039	0,4767
2,5	0,1550	0,0211	0,0204	0,0261	0,0232	0,0261	0,0038	0,0038	0,0034	0,0034	0,2864
	0,2290	0,0237	0,0230	0,0348	0,0309	0,0348	0,0039	0,0039	0,0035	0,0035	0,3909
	0,1920	0,0224	0,0217	0,0304	0,0271	0,0304	0,0039	0,0039	0,0034	0,0034	0,3387
3,0	0,0931	0,0146	0,0141	0,0183	0,0159	0,0183	0,0032	0,0032	0,0027	0,0027	0,1861
	0,1551	0,0170	0,0165	0,0267	0,0231	0,0267	0,0032	0,0032	0,0028	0,0028	0,2771
	0,1241	0,0158	0,0153	0,0225	0,0195	0,0225	0,0032	0,0032	0,0028	0,0028	0,2316

* В графах таблицы приведены нижняя, верхняя и средняя оценки ВБР.

Таблица 6.6. $L_i = 0$, $T = 0{,}5$ года = 4380 ч

t лет	Вклад структур в значение вероятности безотказной работы									
	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9
0,5	0,8296	0,0319	0,0323	0,0336	0,0336	0,0336	0,0013	0,0013	0,0013	0,0013
	0,8308	0,0315	0,0320	0,0334	0,0334	0,0334	0,0013	0,0013	0,0013	0,0013
	0,8303	0,0317	0,0321	0,0335	0,0335	0,0335	0,0013	0,0013	0,0013	0,0013
1,0	0,7241	0,0493	0,0485	0,0551	0,0526	0,0552	0,0038	0,0038	0,0037	0,0037
	0,7311	0,0473	0,0465	0,0545	0,0520	0,0545	0,0036	0,0036	0,0035	0,0035
	0,7276	0,0483	0,0475	0,0548	0,0522	0,0548	0,0037	0,0037	0,0036	0,0036
1,5	0,6483	0,0602	0,0588	0,0704	0,0655	0,0704	0,0069	0,0069	0,0064	0,0064
	0,6654	0,0549	0,0538	0,0693	0,0644	0,0693	0,0060	0,0060	0,0056	0,0056
	0,6574	0,0574	0,0561	0,0697	0,0650	0,0697	0,0064	0,0064	0,0059	0,0059
2,0	0,5896	0,0677	0,0661	0,0819	0,0746	0,0819	0,0099	0,0099	0,0092	0,0092
	0,6198	0,0587	0,0572	0,0802	0,0731	0,0802	0,0081	0,0081	0,0074	0,0074
	0,6063	0,0627	0,0610	0,0810	0,0736	0,0810	0,0090	0,0090	0,0082	0,0082
2,5	0,5412	0,0737	0,0712	0,0911	0,0810	0,0911	0,0133	0,0133	0,0119	0,0119
	0,5858	0,0606	0,0588	0,0890	0,0790	0,0890	0,0100	0,0100	0,0090	0,0090
	0,5669	0,0661	0,0641	0,0898	0,0800	0,0898	0,0115	0,0115	0,0100	0,0100
3,0	0,5003	0,0785	0,0758	0,0983	0,0854	0,0983	0,0172	0,0172	0,0145	0,0145
	0,5597	0,0613	0,0595	0,0964	0,0834	0,0964	0,0115	0,0115	0,0101	0,0101
	0,5358	0,0682	0,0661	0,0972	0,0842	0,0972	0,0138	0,0138	0,0121	0,0121

Таблица 6.7. ВБР системы при базовом варианте ЗИП

№	t, лет	$P_{св}$	$P_{сн}$	$P_{с,ср}$	δQ %
1	0,5	0,98583	0,98309	0,98446	8,80
2	1,0	0,97186	0,96647	0,96917	8,74
3	1,5	0,95809	0,95013	0,95411	8,67
4	2,0	0,94451	0,93407	0,93929	8,60
5	2,5	0,93113	0,91828	0,92470	8,53
6	3,0	0,91794	0,90276	0,91035	8,47
7	3,5	0,90493	0,88749	0,89621	8,40
8	4,0	0,89211	0,87249	0,88230	8,33
9	4,5	0,87946	0,85774	0,86860	8,27
10	5,0	0,86700	0,84324	0,85512	8,20

Из данных таблиц видно, что с появлением комплекта ЗИП произошло существенное увеличение надежности: вероятность отказа за время T уменьшилось в 3,5 раза. При этом стоимость начальных запасов составила 3,71 % от стоимости всей системы и 39,8 % от стоимости основной аппаратуры одной ветви системы. При этом требуемые показатели надежности не достигнуты: для t = 3 года вероятность безотказной работы равна 0,91 вместо требуемых 0,96, а для t = 5 лет 0,855 вместо 0,93. Поэтому требуется дальнейшее увеличение начальных запасов в комплекте ЗИП.

Анализ показывает, что наиболее слабым звеном в ветви является источник питания ИБП. Второе место занимает группа модулей 13–17, а в ней — модули TSX и DDO. Поэтому увеличивается количество запасных частей именно для этих типов модулей всего на 5 единиц: L_{DDO} = 2, L_{TSX} = $L_{ИБП}$ = 3. Детальные результаты расчетов надежности при новом составе комплекта ЗИП приведены в *приложении 6* (пример П6.33). Сводные результаты даны в табл. 6.8.

Таблица 6.8. ВБР системы при окончательном варианте ЗИП

№	t, лет	$P_{св}$	$P_{сн}$	$P_{с,ср}$	δQ %
1	0,5	0,99560	0,99353	0,99456	19,03
2	1,0	0,99121	0,98709	0,98915	18,98
3	1,5	0,98685	0,98070	0,98377	18,93
4	2,0	0,98250	0,97435	0,97843	18,88
5	2,5	0,97817	0,96805	0,97311	18,83
6	3,0	0,97387	0,96178	0,96782	18,78
7	3,5	0,96958	0,95555	0,96256	18,73
8	4,0	0,96531	0,94937	0,95734	18,68
9	4,5	0,96106	0,94322	0,95214	18,63
10	5,0	0,95682	0,93711	0,94697	18,58

Среднюю наработку оценим по приближенной формуле:

$$T_{ср} = -A / (k\lambda \ln P_c).$$

Расчеты по этой формуле при A = 1,5665, $k\lambda$ = 357,65, P_c = 0,99456 дают: $T_{ср}$ = 803 000 ч. Такие значения показателей надежности достигнуты при уровне начальных запасов, имеющих суммарную стоимость 785,7 тыс. руб., что составляет 4,04 % стоимости всей системы.

Результаты расчетов показателя достаточности для отдельных видов запасов и для всего комплекта ЗИП приведены в табл. 6.9.

Самый низкий коэффициент готовности ЗИП имеют модули питания TSX, на втором месте — мониторы TFT-LCD, на третьем модули вывода данных DDO. Для остальных типов моделей коэффициенты готовности ЗИП не менее 0,85. Обращает на себя внимание такой факт, что при весьма низких показателях достаточности (коэффициент готовности 0,26) показатели надежности весьма высоки (ВБР в течение 0,5 года равна 0,9946). Если ставить целью обеспечение коэффициента готовности ЗИП по каждому виду запасов не менее 0,8, то надо взять 8 запасных частей TSX и 2 монитора. Тогда коэффициент готовности увели-

Таблица 6.9. Показатели достаточности ЗИП при $T = 0{,}5$ года

№	Модули	L	C	$K_{гЗИП}$	Расход ЗИП, тыс. руб.
1	TBL	1	0,3504	0,9828	3,259
2	PIII	1	0,7323	0,9372	51,264
3	TFT-LCD	1	2,8032	0,6096	210,240
4	RPS	1	0,3548	0,9824	1,951
5	RS2	1	0,0771	0,9990	4,964
6	NRP	1	0,1656	0,9958	4,967
7	NOE	1	0,1787	0,9951	6,326
8	CPU	1	0,1104	0,9981	5,144
9	CPS-124	1	0,1577	0,9962	3,674
10	CRP	1	0,0701	0,9992	2,439
11	CHS	1	0,0285	0,99987	6,383
12	XBP	1	0,0710	0,9992	0,632
12	XBP	1	0,0710	0,9992	0,000
13	CRA	1	0,4976	0,9676	16,619
14	CPS-114	1	0,6386	0,9501	13,411
15	DDO	2	2,6122	0,8216	40,228
16	TSX	3	9,4608	0,4206	39,735
17	RXN	1	1,1607	0,8700	0,696
18	ИБП	3	1,9272	0,9662	38,544
19	Всего	23	21,468	0,2625	450,475

чится до 0,847 и 0,8 соответственно, стоимость комплекта увеличится на 96 тыс. рублей. Однако вероятность безотказной работы при выполнении ФСО практически не изменится.

Из данных табл. 6.9 видно также, что средний расход ЗИП в стоимостном выражении за период пополнения составляет 57,3 % от стоимости начальных запасов. За пять лет эксплуатации средний расход ЗИП превзойдет стоимость начальных запасов в 5,7 раза.

6.19. Вопросы для самоконтроля

- Какие основные допущения принимаются в модели надежности многофункциональных систем с периодическим пополнением запасов в комплекте одиночного ЗИП?
- В чем состоит основное отличие модели надежности многофункциональной системы с одиночным ЗИП от модели надежности системы с групповым?
- Каков основной механизм влияния дополнительной подсистемы на надежность основной подсистемы?

- ❒ Каков основной принцип расчета вероятности безотказной работы последовательной многофункциональной системы при наличии одиночного ЗИП?
- ❒ Какой приближенной формулой лучше пользоваться для оценки ВБР системы с периодическим пополнением запасов в комплекте ЗИП-О?
- ❒ Как можно компенсировать наличие дополнительной подсистемы для дублированной основной подсистемы путем увеличения запасов в комплекте ЗИП-О?
- ❒ Какой общий метод применяют для расчета вероятности отказа однородной многофункциональной системы с заданной схемой резервирования при наличии комплекта запасных частей данного типа в комплекте ЗИП-О?
- ❒ Что такое частичная, групповая и полная реконфигурация в многофункциональной системе? Какой эффект можно ожидать от ее применения?
- ❒ Оцените возможности методики расчета надежности многофункциональной системы, изложенной в данной главе, и приближенной методики *главы 2* для класса последовательно-параллельных структур, сравните их по возможной области применения в пределах указанного класса.
- ❒ Оцените возможности методики расчета надежности многофункциональной системы, изложенной в данной главе, и приближенной методики *главы 2* для класса сложных структур, сравните их по возможной области применения в пределах указанного класса.
- ❒ Сравните по критерию надежности степень эффективности использования двух видов ресурса: запасные части при периодическом пополнении запасов и встроенный нагруженный резерв той же кратности при наличии дополнительной подсистемы. Каковы возможности рационального сочетания обоих видов ресурса?
- ❒ Каковы принципы построения двусторонних оценок вероятности отказа системы со сложной структурой?
- ❒ Каковы принципы построения двусторонних оценок вероятности отказа неоднородных резервированных систем с последовательно-параллельной структурой?
- ❒ Как влияет степень доступности запасов в комплекте ЗИП-О при восстановлении работоспособности на показатели надежности системы?

ГЛАВА 7

Надежность многофункциональных систем при непрерывном пополнении запасов в комплекте ЗИП-О

7.1. Общие положения

Непрерывное пополнение применяют для тех видов запасов, для которых стоимость одной ЗЧ высока, а взаимодействие заказчика и производителя (поставщика) ЗЧ отлажено в такой степени, что появляется возможность устойчивых поставок ЗЧ по каждой одиночной заявке.

Заявка формируется после каждого отказа, независимо от состояния запасов в комплекте ЗИП. Каждая заявка имеет собственный регламент удовлетворения, не связанный с состоянием обеспечения других заявок. Время от возникновения заявки до поступления ЗЧ случайно и имеет распределение $F(t)$. В марковской модели надежности это распределение экспоненциальное с параметром $\mu = 1/\overline{T}_д$, где $\overline{T}_д$ — среднее время доставки ЗЧ. Если фактическое распределение времени доставки отличается от экспоненциального с коэффициентом вариации меньше 1, то расчет показателя надежности по марковской модели дает заниженную оценку ПН. Разность между точным и приближенным значениями образует так называемый «запас расчета».

В реальных технических системах средняя наработка до отказа элемента (модуля) каждого типа, представленного в комплекте ЗИП, обычно значительно больше среднего времени доставки: если среднее время доставки — это сотни или тысячи часов, то средняя наработка до отказа исчисляется десятками или сотнями тысяч часов. Используя этот фактор, можно применять при расчете ВБР и интенсивности отказов приближенный метод, основанный на асимптотических формулах:

$$P_c(t) \cong \exp(-t/\overline{T}_{oc}(L)), \tag{7.1}$$

$$\lambda_c(t) \cong 1/\overline{T}_{oc}(L). \tag{7.2}$$

Согласно известным результатам обе формулы имеют приемлемую погрешность при выполнении неравенства $\overline{T}_{oc}(L) \geq (10...20)\overline{T}_д$.

Расчет средней наработки до отказа однородной резервированной системы можно проводить, используя систему алгебраических уравнений, составляемых по графу состояний:

$$\overline{T}_i = \frac{1}{\Lambda_i}(1 + \sum_{j \in E_+} \lambda_{ij}\overline{T}_j), i \in E_+, \tag{7.3}$$

где:

$\overline{T}_i$ — средняя наработка до отказа при начальном состоянии e_i;

λ_{ij} — интенсивность перехода из состояния e_i в состояние e_j в марковском графе состояний;

E_+ — множество работоспособных состояний системы.

Из множества неизвестных значений в (7.3) для расчета ПН надо использовать только $\overline{T}_0$, когда все элементы полной структуры S_0 работоспособны, а в комплекте ЗИП имеется первоначальный запас L модулей данного типа. Далее надо вести расчет по формулам (7.1)–(7.2).

Для расчета коэффициента готовности системы надо использовать систему алгебраических уравнений Колмогорова относительно стационарных вероятностей состояний:

$$\sum_{k\in M_i^+} p_k\lambda_{ki} - \sum_{k\in M_i^-} p_i\lambda_{ij} = 0, i \in E, \sum_{i\in E} p_i = 1, \tag{7.4}$$

где:

M_i^+ и M_i^- — множества состояний, связанных с состоянием e_j входящими и выходящими стрелками;

E — множество всех состояний системы.

Решая (7.4), находим коэффициент готовности по формуле:

$$K_{гс}(L) = \sum_{i\in E_+} p_i \ . \tag{7.5}$$

Для расчета коэффициента оперативной готовности надо выделить множество состояний M_0, в которых сохраняется исходная структура системы S_0, а также группы состояний M_i, в которых поддерживается деградированная работоспособная структура S_i, i = 1,2, ..., q. Тогда коэффициент оперативной готовности можно рассчитать по формуле:

$$K_{огс}(\tau, L) = \sum_{i\in M_0} p_i P(\tau, S_0) + \sum_{i=1}^{q} \sum_{j\in M_i} p_j P(\tau, S_i), \tag{7.6}$$

где $P(\tau, S_i)$ — ВБР в течение времени τ при условии, что в начальный момент времени система имела структуру S_i. При этом учитывается, что в течение одного цикла применения система работает как невосстанавливаемая и необслуживаемая система.

Далее рассмотрим несколько типовых моделей однородных и неоднородных систем, используя нумерацию моделей, аналогичную принятой в *главах 5* и *6*.

7.2. Последовательная система (модель МН1)

Система состоит из основной и дополнительной подсистем. Основная подсистема содержит k одинаковых последовательно соединенных элементов, предназначенных для выполнения данной ФСО. Дополнительная подсистема из $n - k$ элементов не участвует в выполнении ФСО, но потребляет ЗЧ в комплекте ЗИП. Первоначальный комплект ЗИП включает в себя L модулей данного типа. Интенсивность отказов одного элемента равна λ, среднее время доставки ЗЧ равно $\overline{T}_д$ = 1/μ. Граф состояний приведен на рис. 7.1.

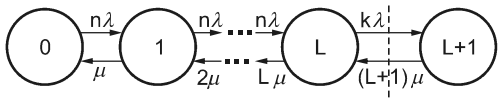


Рис. 7.1. Граф состояний системы (модель МН1)

Сначала найдем среднюю наработку до отказа, решая систему алгебраических уравнений:

$$\overline{T}_0 = \frac{1}{n\lambda} + \overline{T}_1, \overline{T}_L = (1 + L\mu\overline{T}_{L-1}) / (L\mu + k\lambda),$$

$$\overline{T}_i = (1 + i\mu\overline{T}_{i-1} + n\lambda\overline{T}_{i+1}) / (i\mu + n\lambda), i = 1...L-1. \quad (7.7)$$

Решение системы (7.7) имеет вид:

$$n\lambda\overline{T}_0(L) = \sum_{i=0}^{L-1}\left(\sum_{j=0}^{i}\theta_j / \theta_i\right) + \frac{n}{k}\sum_{j=0}^{L}\theta_j / \theta_L, \theta_i = \frac{(n\rho)^i}{i!}, i = 0...L, \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda\overline{T}_o. \quad (7.8)$$

В частности, при L = 1, 2 и 3 имеем:

$$n\lambda\overline{T}_0(1) = 1 + \frac{1+n\rho}{k\rho}, n\lambda\overline{T}_0(2) = 2 + \frac{1}{n\rho} + \frac{1+(1+n\rho)^2}{kn\rho^2}. \quad (7.9)$$

$$n\lambda\overline{T}_0(3) = 3 + \frac{3}{n\rho} + \frac{2}{(n\rho)^2} + \frac{6+6n\rho+3(n\rho)^2+(n\rho)^3}{kn^2\rho^3}.$$

При $k = n$ имеем:

$$k\lambda\overline{T}_0(1) = 2 + \frac{1}{k\rho}, k\lambda\overline{T}_0(2) = 3 + \frac{3}{k\rho} + \frac{2}{(k\rho)^2},$$

$$k\lambda\overline{T}_0(3) = 4 + \frac{6}{k\rho} + \frac{8}{(k\rho)^2} + \frac{6}{k^3\rho^3}. \quad (7.10)$$

ВБР находим по (7.1), интенсивность отказов по (7.9). Коэффициент готовности находим из системы уравнений:

$$n\lambda p_0 - \mu p_1 = 0, n\lambda p_{i-1} - (i\mu + n\lambda)p_i + (i+1)\mu p_{i+1} = 0, i = 1...L-1, \quad (7.11)$$

$$n\lambda p_{L-1} - (L\mu + k\lambda)p_L + (L+1)\mu p_{L+1} = 0, k\lambda p_L - (L+1)\mu p_{L+1} = 0, \sum_{i=0}^{L+1} p_i = 1.$$

Отсюда

$$K_{гс}(L) = 1 - \frac{k}{n}\frac{(n\rho)^{L+1}}{(L+1)!}p_0, p_0 = 1/\left(\sum_{i=0}^{L}\frac{(n\rho)^i}{i!} + \frac{k}{n}\frac{(n\rho)^{L+1}}{(L+1)!}\right). \quad (7.12)$$

В частности, при L = 1 и 2 имеем:

$$K_{гс}(1) = 1 - \frac{kn\rho^2}{2+2n\rho+kn\rho^2}, K_{гс}(2) = 1 - \frac{kn^2\rho^3}{6+6n\rho+3(n\rho)^2+kn^2\rho^3}. \quad (7.13)$$

Коэффициент готовности комплекта ЗИП при непрерывном пополнении запасов также можно находить по формуле (7.13) при $k = n$:

$$K_{гЗИП}(L) = 1 - \frac{(n\rho)^{L+1}}{(L+1)!} / \sum_{i=0}^{L+1}\frac{(n\rho)^i}{i!}, L \geq 1. \quad (7.14)$$

Коэффициент оперативной готовности

$$K_{огс}(\tau, L) = K_{гс}(L)\exp(-k\lambda\tau). \quad (7.15)$$

Значения коэффициентов готовности и оперативной готовности на основе методики [4] можно найти по формулам (7.14) и (7.15) соответственно. Для расчета ВБР методика фор-

мул не предлагает. Однако приближенные формулы все-таки можно построить, используя механизм разрежения потока отказов с вероятностью $p = 1/(1+\lambda\overline{T}_o)$. Тогда эквивалентное значение интенсивности отказов

$$\lambda_э = k\lambda q^L, q = 1 - p = \frac{n\rho}{1+n\rho}.$$

Отсюда приведенная средняя наработка до отказа и ВБР системы:

$$n\lambda\overline{T}_0(L) = n\lambda/\lambda_э = \frac{n}{k}/q^L = \frac{n}{k}\left(\frac{1+n\rho}{n\rho}\right)^L, \rho = \lambda\overline{T}_o,$$

$$P_c(t) \cong \exp(-k\lambda t(n\rho)^L/(1+n\rho)^L). \quad (7.16)$$

В частности, при L = 1 и 2 имеем:

$$n\lambda\overline{T}_0(1) = \frac{1+n\rho}{k\rho}, n\lambda\overline{T}_0(2) = \frac{(1+n\rho)^2}{kn\rho^2}. \quad (7.17)$$

Приближенные формулы дают оценки снизу для средней наработки и для ВБР.

По результатам расчетов (*приложение 7*, примеры П7.1, П7.2) можно сделать следующие выводы:

- если взять в модели МН1 среднее время доставки ЗЧ равным периоду пополнения в модели МП1, то средняя наработка до отказа системы в МН1 будет уступать вдвое или более средней наработке в МП1. Это объясняется тем, что при экспоненциальном распределении времени доставки стандартное отклонение равно среднему времени доставки, тогда как для периодического пополнения оно равно нулю;
- с увеличением размера дополнительной подсистемы (с увеличением $n - k$) различия в значениях средней наработки уменьшаются. Начиная с некоторого значения С, значение средней наработки в МН1 может даже стать больше, чем в модели МП1;
- преимущество непрерывного пополнения начинает проявляться при уменьшении стандартного отклонения или при уменьшении среднего времени доставки по сравнению с периодом пополнения. Так при L = 1 уменьшение среднего времени доставки в четыре раза увеличивает среднюю наработку системы до значения, вдвое большего, чем в модели МП1;
- расчет по формулам приближенной методики (7.16)–(7.17) дает большую погрешность. Средняя наработка до отказа оказывается заниженной в 1,5 раза при L = 1 и в 2–2,5 раза при L = 2. Вероятность отказа, напротив, завышена. Относительная погрешность достигает 39 % при L = 1 и 167 % при L = 2;
- количество аппаратуры в ДПС заметно влияет на показатели безотказности ОПС. Так при A = 0,1 и изменении B от 0 до 5A средняя наработка до отказа ОПС $k\lambda T_{ср}$ уменьшается от 12 до 2,83 при L = 1 и от 323 до 13 при L = 2.

7.3. Дублированная система (модель МН2)

Система состоит из основной и дополнительной подсистем. Основная подсистема содержит k одинаковых элементов, образующих две параллельные ветви по r элементов каждая и предназначенных для выполнения некоторой ФСО. Дополнительная подсистема из $n - k$

элементов не участвует в выполнении ФСО, но потребляет ЗЧ в комплекте ЗИП. Первоначальный комплект ЗИП включает в себя L модулей данного типа. Интенсивность отказов одного элемента равна λ, среднее время доставки ЗЧ равно $\overline{T}_д = 1/\mu$. Граф состояний приведен на рис. 7.2.

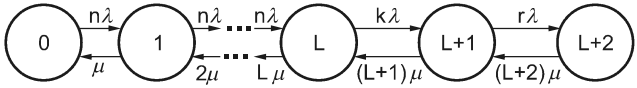


Рис. 7.2. Граф состояний системы (модель МН2)

Сначала найдем среднюю наработку до отказа, решая систему алгебраических уравнений:

$$\overline{T}_0 = \frac{1}{n\lambda} + \overline{T}_1, \overline{T}_L = (1 + L\mu\overline{T}_{L-1} + k\lambda\overline{T}_{L+1}) / (L\mu + k\lambda), \overline{T}_{L+1} = (1 + (L+1)\mu\overline{T}_L) / ((L+1)\mu + r\lambda),$$

$$\overline{T}_i = (1 + i\mu\overline{T}_{i-1} + n\lambda\overline{T}_{i+1}) / (i\mu + n\lambda), i = 1...L-1. \qquad (7.18)$$

Решение (7.18) относительно $\overline{T}_0$ имеет вид:

$$n\lambda T_{cp}(L) = n\lambda\overline{T}_0(L) = \sum_{i=0}^{L-1}(\sum_{j=0}^{i}\theta_j / \theta_i) + \frac{C}{A}\sum_{j=0}^{L}\theta_j / \theta_L + \frac{2C}{A}\sum_{j=0}^{L+1}\theta_j / \theta_{L+1}, \qquad (7.19)$$

$$A = k\rho, C = n\rho, \theta_i = \frac{C^i}{i!}, i = 0...L, \theta_{L+1} = \frac{AC^L}{(L+1)!}, \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda\overline{T}_д.$$

В частности, при $L = 1$ и 2 имеем:

$$n\lambda T_{cp}(1) = 1 + \frac{3C}{A} + \frac{4 + 4C + A}{A^2} \cong \frac{4}{A^2}, \qquad (7.20)$$

$$n\lambda T_{cp}(2) = 2 + \frac{3C}{A} + \frac{12 + 12C + 2A + A^2 + 2AC + 6C^2}{A^2C} \cong \frac{3}{C} n\lambda T_{cp}(1).$$

Коэффициент готовности находят из системы уравнений:

$$n\lambda p_{L-1} - (L\mu + k\lambda)p_L + (L+1)\mu p_{L+1} = 0, k\lambda p_L - ((L+1)\mu + r\lambda)p_{L+1} + (L+2)\mu p_{L+2} = 0,$$

$$r\lambda p_{L+1} - (L+2)\mu p_{L+2} = 0, \sum_{i=0}^{L+1} p_i = 1. \qquad (7.21)$$

Отсюда

$$K_{гс}(L) = 1 - \frac{A^2C^L}{2(L+2)!} p_0, p_0 = 1 / \left(\sum_{i=0}^{L} \frac{C^i}{i!} + \frac{AC^{L+1}}{(L+1)!} + \frac{A^2C^L}{2(L+2)!} \right). \qquad (7.22)$$

В частности, при $L = 1$, 2 и 3 имеем:

$$K_{гс}(1) = 1 - A^2C / (12 + 12C + 6AC + A^2C), \qquad (7.23)$$

$$K_{гс}(2) = 1 - A^2C^2 / (48 + 48C + 24C^2 + 8AC^2 + A^2C^2),$$

$$K_{гс}(3) = 1 - A^2C^3 / (240 + 240C + 120C^2 + 40C^3 + 10AC^3 + A^2C^3).$$

Поскольку в системе может возникнуть только одна деградированная работоспособная структура S_1, состоящая из одной ветви (r элементов), то коэффициент оперативной готовности рассчитывают по формуле:

$$K_{огс}(\tau, L) = \sum_{i=0}^{L} \frac{C^i}{i!} p_0 e^{-r\lambda\tau}(2 - e^{-r\lambda\tau}) + \frac{AC^{L+1}}{(L+1)!} p_0 e^{-r\lambda\tau}. \quad (7.24)$$

Рассмотрим теперь приближенные формулы для расчета показателей надежности в соответствии с методикой [4]. Общая схема расчета сохраняется неизменной, как и при периодическом пополнении, изменяется только формула для расчета коэффициента готовности комплекта ЗИП. Здесь расчет $K_{гЗИП}$ следует проводить по формуле (7.14). Далее используются формулы:

$$\Delta t_{ЗИП} = -\ln K_{гЗИП}(L) / (n\lambda), \overline{T}_в(L) = \overline{T}_{в\infty} + \Delta t_{ЗИП} \approx \Delta t_{ЗИП}, \quad (7.25)$$

$$k\lambda T_{ср}(L) = (1 + 3\rho_1) / \rho_1 = (2 + 3A) / A, \rho_1 = r\lambda\Delta t_{ЗИП} = -\frac{A}{2C} \ln K_{гЗИП}(L), A = 2\rho_1,$$

$$P_{с,пр}(t) = \exp(-t / T_{ср}(L)) = \exp\left(-\frac{2\rho_1}{1 + 3\rho_1} r\lambda t\right) = \exp\left(-\frac{A^2}{2 + 3A} \frac{t}{\Delta t_{ЗИП}}\right), \quad (7.26)$$

$$K_{гс,пр}(L) = 1 - \left(\frac{\rho_1}{1 + \rho_1}\right)^2. \quad (7.27)$$

По результатам расчетов (*приложение 7*, примеры П7.3, П7.4) можно сделать следующие выводы:

- погрешность приближенной формулы (7.25) для расчета средней наработки в модели Н2 существенно меньше, чем в модели Н1. Она составляет 4–8 % при L = 1 и 4–23 % при L = 2. Однако погрешность в расчете коэффициента готовности, по-прежнему, велика. Приближенная формула (7.27) дает завышенное значение, а коэффициент неготовности занижен в несколько раз;
- количество аппаратуры в ДПС заметно влияет на показатели безотказности ОПС. Так при A = 0,1 и изменении B от 0 до 4A средняя наработка до отказа ОПС $k\lambda T_{ср}$ уменьшается от 454 до 125 при L = 1 и от 13 495 до 796 при L = 2;
- коэффициент готовности системы существенно больше коэффициента готовности ЗИП. Это можно объяснить наличием в системе структурного резервирования;
- в моделях Н2 и МН2, как и в моделях Н1 и МН1, средняя наработка до отказа, по-прежнему, уступает средней наработке в моделях П2 и МП2 по тем же причинам, что и в моделях Н1 и МН1.

7.4. Мажорированная система (модель МН3)

Основная подсистема содержит k одинаковых элементов, образующих три параллельные ветви по r элементов каждая и предназначенных для выполнения некоторой ФСО. Дополнительная подсистема из $n - k$ элементов не участвует в выполнении ФСО, но потребляет ЗЧ в комплекте ЗИП. Первоначальный комплект ЗИП включает в себя L модулей данного типа. Интенсивность отказов одного элемента равна λ, среднее время доставки ЗЧ равно $\overline{T}_д$ = 1/μ. Граф состояний приведен на рис. 7.3.

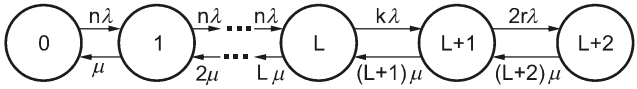


Рис. 7.3. Граф состояний системы (модель МНЗ)

Сначала найдем среднюю наработку до отказа, решая систему алгебраических уравнений:

$$\overline{T}_0 = \frac{1}{n\lambda} + \overline{T}_1, \overline{T}_i = (1 + i\mu\overline{T}_{i-1} + n\lambda\overline{T}_{i+1}) / (i\mu + n\lambda), i = 1...L-1, \tag{7.28}$$

$$\overline{T}_L = (1 + L\mu\overline{T}_{L-1} + k\lambda\overline{T}_{L+1}) / (L\mu + k\lambda), \overline{T}_{L+1} = (1 + (L+1)\mu\overline{T}_L) / ((L+1)\mu + 2r\lambda).$$

Решение системы уравнений (7.28) имеет вид:

$$n\lambda T_{cp}(L) = n\lambda\overline{T}_0(L) = \sum_{i=0}^{L-1}(\sum_{j=0}^{i}\theta_j / \theta_i) + \frac{C}{A}\sum_{j=0}^{L}\theta_j / \theta_L + \frac{3C}{2A}\sum_{j=0}^{L+1}\theta_j / \theta_{L+1}. \tag{7.29}$$

$$A = k\rho, C = n\rho, \theta_i = \frac{C^i}{i!}, i = 0...L, \theta_{L+1} = \frac{AC^L}{(L+1)!}, \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda\overline{T}_o.$$

В частности, имеем:

$$k\lambda T_{cp}(1) = \frac{5}{2} + \frac{A}{C} + \frac{3 + 3C + A}{AC}, \tag{7.30}$$

$$k\lambda T_{cp}(2) = \frac{5}{2} + \frac{2A}{C} + \frac{9 + 9C + 2A + A^2 + 2AC + 9C^2/2}{AC^2}.$$

При $n = k$ формулы упрощаются:

$$k\lambda T_{cp}(1) = \frac{7}{2} + \frac{4}{A} + \frac{3}{A^2}, k\lambda T_{cp}(2) = \frac{9}{2} + \frac{12}{A} + \frac{11}{A^2} + \frac{9}{A^3}. \tag{7.31}$$

Коэффициент готовности находят из системы уравнений:

$$n\lambda p_0 - \mu p_1 = 0, n\lambda p_{i-1} - (i\mu + n\lambda)p_i + (i+1)\mu p_{i+1} = 0, i = 1...L-1,$$

$$n\lambda p_{L-1} - (L\mu + k\lambda)p_L + (L+1)\mu p_{L+1} = 0, k\lambda p_L - ((L+1)\mu + r\lambda)p_{L+1} + (L+2)\mu p_{L+2} = 0,$$

$$r\lambda p_{L+1} - (L+2)\mu p_{L+2} = 0, \sum_{i=0}^{L+1} p_i = 1. \tag{7.32}$$

Отсюда

$$K_{zc}(L) = 1 - \frac{A^2C^L}{2(L+2)!}p_0, p_0 = 1/\left(\sum_{i=0}^{L}\frac{C^i}{i!} + \frac{AC^{L+1}}{(L+1)!} + \frac{A^2C^L}{2(L+2)!}\right). \tag{7.33}$$

В частности, при L = 1, 2 и 3 имеем:

$$K_{zc}(1) = 1 - A^2C / (9 + 9C + 4,5AC + A^2C),$$

$$K_{zc}(2) = 1 - A^2C^2 / (36 + 36C + 18C^2 + 6AC^2 + A^2C^2), \tag{7.34}$$

$$K_{zc}(3) = 1 - A^2C^3 / (180 + 180C + 90C^2 + 30C^3 + 7,5AC^3 + A^2C^3).$$

Коэффициент оперативной готовности рассчитывают по формуле:

$$K_{огс}(\tau, L) = \sum_{i=0}^{L} \frac{C^i}{i!} p_0 e^{-2r\lambda\tau}(3 - 2e^{-r\lambda\tau}) + \frac{AC^{L+1}}{(L+1)!} p_0 e^{-2r\lambda\tau}. \qquad (7.35)$$

Приближенные формулы на основе методики [4]:

$$k\lambda T_{ср,пр}(L) = (1+5\rho_1)/(2\rho_1) = (3+5A)/A, \rho_1 = r\lambda\Delta t_{ЗИП} = -\frac{k}{3n}\ln K_{гЗИП}(L), A = 3\rho_1,$$

$$P_{с,пр}(t) = \exp(-t/T_{ср}(L)) = \exp\left(-\frac{2\rho_1}{1+5\rho_1} k\lambda t\right) = \exp\left(-\frac{2A^2}{3+5A}\frac{t}{\Delta t_{ЗИП}}\right),$$

$$K_{гс,пр}(L) = 1 - 3\rho_1^2/(1+3\rho_1+3\rho_1^2),$$

$$K_{огс,пр}(L) = (3 - 2\,\mathrm{e}^{-r\lambda\tau} + 3\rho_1)e^{-2r\lambda\tau}/(1+3\rho_1+3\rho_1^2). \qquad (7.36)$$

По результатам расчетов (*приложение 7*, пример П7.5) можно сделать следующие выводы:

- погрешность приближенной формулы (7.36) для расчета средней наработки в модели Н3 существенно меньше, чем в модели Н1. Она составляет 4–8 % при L = 1 и 4–23 % при L = 2. Причем оценка (7.36) является заниженной при небольших значениях B и завышенной при больших B. Погрешность в расчете коэффициента готовности, по-прежнему, велика. Приближенная формула (7.27) дает завышенное значение, а коэффициент неготовности занижен в несколько раз;
- количество аппаратуры в ДПС заметно влияет на показатели безотказности ОПС. Так при A = 0,2 и изменении B от 0 до 2A средняя наработка до отказа ОПС $k\lambda T_{ср}$ уменьшается от 98,5 до 44,5 при L = 1 и от 1442 до 235 при L = 2;
- коэффициент готовности системы существенно больше коэффициента готовности ЗИП. Это можно объяснить наличием в системе структурного резервирования;
- в моделях Н3 и МН3, как и в моделях Н1 и МН1, средняя наработка до отказа, по-прежнему, уступает средней наработке в моделях П3 и МП3 по тем же причинам, что и в моделях Н1 и МН1.

7.5. Последовательное соединение дублированной и нерезервированной подсистем (модель МН4)

Основная подсистема содержит k одинаковых элементов, образующих дублированную часть из двух параллельных ветвей по r элементов каждая и нерезервированную часть из $k - 2r$ элементов, предназначенных для выполнения некоторой ФСО. Дополнительная подсистема из $n - k$ элементов не участвует в выполнении ФСО, но потребляет ЗЧ в комплекте ЗИП. Первоначальный комплект ЗИП включает в себя L модулей данного типа. Интенсивность отказов одного элемента равна λ, среднее время доставки ЗЧ равно $\overline{T}_д$ = 1/μ. Граф состояний приведен на рис. 7.4.

Он содержит всего L + 4 состояния (0... L + 3), из которых два (L + 2 и L + 3) — неработоспособные. Отказ системы наступает, если после исчерпания запасов в комплекте ЗИП в ней отказывает либо любой элемент нерезервированной части (состояние L + 2), либо сначала один элемент в дублированной части, а затем любой элемент в оставшейся ветви или в

нерезервированной части (состояние $L + 3$). Использование работоспособных элементов отказавшей ветви дублированной части не допускается. Впервые в данной главе граф состояний отличается от графа схемы гибели и размножения.

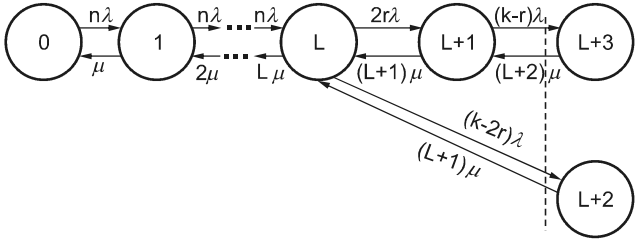


Рис. 7.4. Граф состояний системы (модель МН4)

Среднюю наработку до отказа найдем, решая систему алгебраических уравнений:

$$\overline{T}_0 = \frac{1}{n\lambda} + \overline{T}_1, \overline{T}_i = (1 + i\mu\overline{T}_{i-1} + n\lambda\overline{T}_{i+1}) / (i\mu + n\lambda), i = 1...L-1, \tag{7.37}$$

$$\overline{T}_L = (1 + L\mu\overline{T}_{L-1} + 2r\lambda\overline{T}_{L+1}) / (L\mu + k\lambda), \overline{T}_{L+1} = (1 + (L+1)\mu\overline{T}_L) / ((L+1)\mu + (k-r)\lambda).$$

Отсюда находим:

$$n\lambda T_{cp}(1) = 1 + \frac{(1+C)(2+A(1-\alpha)) + 2\alpha AC}{A(2(1-2\alpha) + A(1-\alpha))}, \alpha = \frac{r}{k}, A = k\rho, C = n\rho,$$

$$n\lambda T_{cp}(2) = 2 + \frac{1}{C} + \frac{(1+C)(6+2A(1-\alpha)) + C^2(3+A(1+\alpha))}{AC(3(1-2\alpha) + A(1-\alpha))}. \tag{7.38}$$

Для общего случая имеем:

$$n\lambda T_{cp}(L) = A_L + \frac{C(L+1+A(1+\alpha)) + L(L+1+A(1-\alpha))(A_L - A_{L-1})}{A((L+1)(1-2\alpha) + A(1-\alpha))}, \tag{7.39}$$

$$A_L = \sum_{i=0}^{L-1}\sum_{j=0}^{i}\frac{j!}{C^j}. \tag{7.40}$$

При $L = 1$ и 2 из (7.39) получим формулы (7.38).

Коэффициент готовности находят из системы уравнений:

$$n\rho p_0 = p_1, n\rho p_{i-1} = ip_i, i = 1...L, 2r\rho p_L = (L+1)p_{L+1}, \tag{7.41}$$

$$(k-2r)\rho p_L = (L+1)p_{L+2}, (k-r)\rho p_{L+1} = (L+2)p_{L+3}, \sum_{i=0}^{L+3} p_i = 1.$$

Отсюда

$$K_{гс}(L) = 1 - p_{L+2} - p_{L+3} = 1 - \frac{AC^L}{(L+1)!}p_0(1 - 2\alpha + A\frac{2\alpha(1-\alpha)}{L+2}), \tag{7.42}$$

$$p_0 = 1 / \left(\sum_{i=0}^{L}\frac{C^I}{i!} + \frac{AC^L}{(L+1)!} + 2\alpha(1-\alpha)\frac{A^2C^L}{(L+2)!}\right).$$

В частности, при $L = 1$ и 2 имеем:

$$K_{гс}(1) = 1 - \frac{AC}{2} p_0 \left(1 - 2\alpha + A\frac{2\alpha(1-\alpha)}{3}\right), p_0 = 1/\left(1 + C + \frac{AC}{2} + A^2 C \frac{\alpha(1-\alpha)}{3}\right), \quad (7.43)$$

$$K_{гс}(2) = 1 - \frac{AC^2}{6} p_0 \left(1 - 2\alpha + A\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}\right), p_0 = 1/\left(1 + C + \frac{C^2}{2} + \frac{AC^2}{6} + A^2 C^2 \frac{\alpha(1-\alpha)}{12}\right).$$

Коэффициент оперативной готовности рассчитывают по формуле:

$$K_{огс}(\tau, L) = e^{-(1-\alpha)k\lambda\tau} p_0 \left(\sum_{i=0}^{L} \frac{C^i}{i!}(2 - e^{-\alpha k\lambda\tau}) + \frac{2\alpha A C^L}{(L+1)!}\right). \quad (7.44)$$

Рассмотрим теперь два варианта реконфигурации структуры после исчерпания запасов в комплекте ЗИП. Частичная реконфигурация состоит в том, что после исчерпания запасов и отказа элемента в нерезервированной части системы отключается одна из ветвей в дублированной части с передачей одного элемента для восстановления работоспособности системы. Далее система работает как последовательная система без ЗИП. При поступлении ближайшей ЗЧ из НИП функционирование дублированной части восстанавливается в полном объеме.

Полная реконфигурация отличается от частичной тем, что после отключения ветви и восстановления работоспособности системы остальные $r - 1$ элементов ветви передаются в состав комплекта ЗИП до поступления извне достаточного количества ЗЧ. При наличии необходимого числа ЗЧ структура дублированной части восстанавливается.

Проведем анализ надежности системы с реконфигурацией.

7.5.1. Частичная реконфигурация

Граф состояний системы приведен на рис. 7.5.

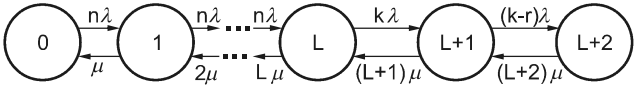


Рис. 7.5. Граф состояний системы при частичной реконфигурации (модель МН4)

Неработоспособным является лишь состояние $L + 2$. Поскольку граф соответствует схеме гибели и размножения, можно использовать готовые результаты и получить расчетные формулы.

Средняя наработка до отказа:

$$n\lambda T_{ср}(L) = \sum_{i=0}^{L-1}\left(\sum_{j=0}^{i} \theta_j / \theta_i\right) + \frac{C}{A}\sum_{j=0}^{L} \theta_j / \theta_L + \frac{C}{A(1-\alpha)}\sum_{j=0}^{L+1} \theta_j / \theta_{L+1}, \quad (7.45)$$

$$\theta_i = \frac{C^i}{i!}, i = 0...L, \theta_{L+1} = \frac{AC^L}{(L+1)!}, \theta_{L+2} = \frac{(1-\alpha)A^2C^L}{(L+2)!}.$$

Коэффициент готовности системы:

$$K_{гс}(L) = 1 - \theta_{L+2} p_0 = 1/\left(\sum_{i=0}^{L} \frac{C^I}{i!} + \frac{AC^L}{(L+1)!} + (1-\alpha)\frac{A^2C^L}{(L+2)!}\right). \quad (7.46)$$

Коэффициент оперативной готовности:

$$K_{огс}(\tau, L) = \mathrm{e}^{-(1-\alpha)k\lambda\tau}\, p_0 \left(\sum_{i=0}^{L} \frac{C^i}{i!}(2 - e^{-\alpha k\lambda\tau}) + \frac{AC^L}{(L+1)!} \right). \quad (7.47)$$

В частности, при L = 1 и 2 имеем:

$$n\lambda T_{ср}(1) = 1 + \frac{1+C}{A} + \frac{2+2C+AC}{A^2(1-\alpha)}, \alpha = \frac{r}{k}, A = k\rho, C = n\rho, \quad (7.48)$$

$$n\lambda T_{ср}(2) = 2 + \frac{1}{C} + \frac{2+2C+C^2}{AC} + \frac{6+6C+3C^2+AC^3}{A^2C(1-\alpha)}, \quad (7.49)$$

$$K_{гс}(1) = 1 - \frac{A^2C}{6}(1-\alpha)p_0, p_0 = 1/\left(1 + C + \frac{AC}{2} + \frac{1}{6}A^2C(1-\alpha)\right), \quad (7.50)$$

$$K_{гс}(2) = 1 - \frac{A^2C^2}{24}(1-\alpha)p_0, p_0 = 1/\left(1 + C + \frac{C^2}{2} + \frac{AC^2}{6} + \frac{1}{24}A^2C^2(1-\alpha)\right). \quad (7.51)$$

Из формул следует, что частичная реконфигурация позволяет существенно улучшить показатели надежности. Это хорошо видно из сравнения формул (7.38) и (7.48), (7.43) и (7.50).

7.5.2. Полная реконфигурация

Граф состояний приведен на рис. 7.6.

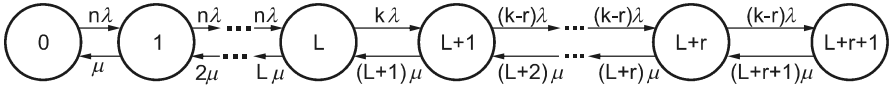


Рис. 7.6. Граф состояний системы при полной реконфигурации (модель МН4)

Как и при частичной реконфигурации, здесь граф состояний соответствует схеме гибели и размножения. Поэтому расчетные формулы имеют вид:

$$n\lambda T_{ср}(L) = \sum_{i=0}^{L-1}\left(\sum_{j=0}^{i}\theta_j/\theta_i\right) + \frac{C}{A}\sum_{j=0}^{L}\theta_j/\theta_L + \frac{C}{A(1-\alpha)}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{L+i}\theta_j/\theta_{L+i}, \quad (7.52)$$

$$\theta_i = \frac{C^i}{i!}, i = 0...L, \theta_{L+1} = \frac{AC^L}{(L+1)!}, \theta_{L+i} = \frac{(1-\alpha)^{i-1}A^iC^L}{(L+i)!}, i = 1...r+1, \quad (7.53)$$

$$K_{гс}(L) = 1 - \theta_{L+r+1}p_0 = 1/\left(\sum_{i=0}^{L}\frac{C^I}{i!} + \frac{AC^L}{(L+1)!} + \sum_{i=1}^{r+1}(1-\alpha)^{i-!}\frac{A^iC^L}{(L+i)!}\right), \quad (7.54)$$

$$K_{огс}(\tau, L) = e^{-(1-\alpha)k\lambda\tau}\, p_0 \left(\sum_{i=0}^{L} \frac{C^i}{i!}(2 - e^{-\alpha k\lambda\tau}) + \sum_{i=1}^{r}(1-\alpha)^{i-!}\frac{A^iC^L}{(L+i)!} \right). \quad (7.55)$$

В частности, при L = 0, 1 и 2 имеем:

$$n\lambda T_{ср}(0) = \frac{C}{A} + \frac{C}{A(1-\alpha)}\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{i}\theta_j/\theta_i, \quad (7.56)$$

$$n\lambda T_{cp}(1) = 1 + \frac{1+C}{A} + \frac{C}{A(1-\alpha)} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{i+1} \theta_j / \theta_{1+i} , \tag{7.57}$$

$$n\lambda T_{cp}(2) = 2 + \frac{1}{C} + \frac{2+2C+C^2}{AC} + \frac{C}{A(1-\alpha)} \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{i+2} \theta_j / \theta_{2+i} . \tag{7.58}$$

При $r = 1$ формулы (7.57) и (7.58) совпадают с формулами (7.48) и (7.49) соответственно. При $r = 2$ из (7.57) имеем:

$$n\lambda T_{cp}(1, r=2) = 1 + \frac{1+C}{A} + \frac{C}{A-2\rho} \left(2 + \frac{2(1+C)}{AC} + \frac{6(1+C)+3AC}{AC(A-\rho)} \right). \tag{7.59}$$

При $r \geq 2$ полная реконфигурация может обеспечить требуемые показатели надежности даже при отсутствии комплекта ЗИП, но с непрерывным пополнением запасными частями взамен отказавших элементов при деградации структуры.

Приближенные формулы на основе методики [4] для системы без реконфигурации находят тот же подход, что и в модели МП4. Значения средней наработки до отказа находят отдельно для нерезервированной и дублированной частей при количестве ЗЧ соответственно L_0 и L_1, используя формулы (7.16) и (7.26). Далее, согласно асимптотической формуле, находят интенсивности отказов каждой из частей как величину, обратную средней наработке, и их суммируют. Далее по экспоненциальной модели вычисляют ВБР. Коэффициент готовности системы находят как произведение коэффициентов готовности нерезервированной и дублированной частей, используя формулы моделей МН1 и МН2.

Если предположить, что запасы L_0 и L_1 потребляются всеми элементами системы (ОПС и ДПС), то расчетные формулы имеют вид:

$$P_{c,np}(t) = \exp\left(-(1-2\alpha)k\lambda t \left(\frac{C}{1+C} \right)^{L_0} \right) \exp\left(-\frac{2\rho_1}{1+3\rho_1} r\lambda t \right), \tag{7.60}$$

$$\rho_1 = -\frac{r}{n} \ln K_{гЗИП}(L_1), K_{гЗИП}(L) = 1 - \frac{(n\rho)^{L+1}}{(L+1)!} / \sum_{i=0}^{L+1} \frac{(n\rho)^i}{i!}, L \geq 1 ,$$

$$K_{гс,пр}(L_0, L_1) = K_{гс0,пр}(L_0) K_{гс1,пр}(L_1) = \left(1 - \frac{(n\rho)^{L_0+1}}{(L_0+1)!} / \sum_{i=0}^{L_0+1} \frac{(n\rho)^i}{i!} \right) \left(1 - \left(\frac{\rho_1}{1+\rho_1} \right)^2 \right),$$

$$K_{огс}(\tau, L_0, L_1) = K_{гс0,пр}(L_0) \frac{2 - e^{-r\lambda\tau} + 2\rho_1}{(1+\rho_1)^2} e^{-(1-\alpha)k\lambda\tau} .$$

Здесь можно принять один из вариантов связи L_0 и L_1 с фактическим количеством запасных частей: 1) $L_0 = L_1 = L$, 2) $L_0 + L_1 = L$. В первом случае происходит завышение фактического количества ЗЧ, во втором случае запасы считаются неполнодоступными, т. е. запасы L_0 не доступны для дублированной части, а L_1 не доступны для нерезервированной части, хотя на самом деле это не так.

Если запасы L_0 не потребляются дублированной частью, а L_1 — нерезервированной частью, то формулы приобретают вид:

$$P_{c,np}(t) = \exp\left(-(1-2\alpha)k\lambda t \left(\frac{C-2\alpha A}{1+C-2\alpha A} \right)^{L_0} \right) \exp\left(-\frac{2\rho_1}{1+3\rho_1} r\lambda t \right), \tag{7.61}$$

$$\rho_1 = -\frac{r}{n-k+2r}\ln K_{гЗИП}(L_1), K_{гЗИП}(L_1) = 1 - \frac{B^{L_1+1}}{(L_1+1)!} \Big/ \sum_{i=0}^{L_1+1}\frac{B^i}{i!}, L \geq 1, B = C - A(1-2\alpha),$$

$$K_{гс,пр}(L_0, L_1) = \left(1 - \frac{(C-2\alpha A)^{L_0+1}}{(L_0+1)!} \Big/ \sum_{i=0}^{L_0+1}\frac{(C-2\alpha A)^i}{i!}\right)\left(1 - \left(\frac{\rho_1}{1+\rho_1}\right)^2\right). \quad (7.62)$$

По результатам расчетов (*приложение 7*, примеры П7.6–П7.7) можно сделать следующие выводы:

- показатели безотказности быстро ухудшаются при увеличении доли нерезервированной части системы. Уже при $A = 3ra$ средняя наработка до отказа системы уменьшается в 10 раз, когда $L = 1$, и в 22 раза, когда $L = 2$, по сравнению со случаем, когда нерезервированная часть отсутствует;
- погрешность приближенной формулы для расчета средней наработки в модели Н4 является заниженной при небольших значениях $A - 2ra$ и завышенной при больших $A - 2ra$. Погрешность в расчете коэффициента готовности, по-прежнему, велика. Приближенная формула (7.62) дает завышенное значение, а коэффициент неготовности занижен в несколько раз;
- количество аппаратуры в ДПС заметно влияет на показатели безотказности ОПС. Так при $ra = 0{,}2$, $A = 0{,}6$ и изменении B от 0 до $2A$ средняя наработка до отказа ОПС $k\lambda T_{ср}$ уменьшается от 7,38 до 4,21 при $L = 1$ и от 27,97 до 7,76 при $L = 2$;
- коэффициент готовности системы существенно больше коэффициента готовности ЗИП. Это можно объяснить наличием в системе структурного резервирования;
- в моделях Н4 и МН4, как и в моделях Н1 и МН1, средняя наработка до отказа, по-прежнему, уступает средней наработке в моделях П4 и МП4 по тем же причинам, что и в моделях Н1 и МН1.

7.6. Последовательное соединение мажорированной и нерезервированной подсистем (модель МН5)

Основная подсистема содержит k одинаковых элементов, образующих мажорированную часть из трех параллельных ветвей по r элементов каждая и нерезервированную часть из $k - 3r$ элементов, предназначенных для выполнения некоторой ФСО. Дополнительная подсистема из $n - k$ элементов не участвует в выполнении ФСО, но потребляет ЗЧ в комплекте ЗИП. Первоначальный комплект ЗИП включает в себя L модулей данного типа. Интенсивность отказов одного элемента равна λ, среднее время доставки ЗЧ равно $\overline{T}_o = 1/\mu$. Граф состояний приведен на рис. 7.7.

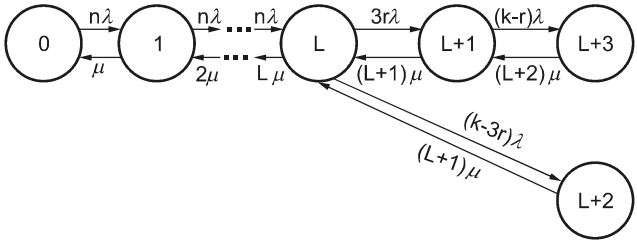


Рис. 7.7. Граф состояний системы (модель МН5)

Он содержит всего $L + 4$ состояния (0... $L + 3$), из которых два ($L + 2$ и $L + 3$) — неработоспособные. Отказ системы наступает, если после исчерпания запасов в комплекте ЗИП в ней отказывает либо любой элемент нерезервированной части (состояние $L + 2$), либо сначала один элемент в мажорированной части, а затем любой элемент в оставшихся двух ветвях или в нерезервированной части (состояние $L+3$). Использование работоспособных элементов отказавшей ветви дублированной части не допускается. Граф состояний отличается от графа схемы гибели и размножения.

Среднюю наработку до отказа найдем, решая систему алгебраических уравнений:

$$\overline{T}_0 = \frac{1}{n\lambda} + \overline{T}_1, \overline{T}_i = (1 + i\mu\overline{T}_{i-1} + n\lambda\overline{T}_{i+1}) / (i\mu + n\lambda), i = 1...L-1, \tag{7.63}$$

$$\overline{T}_L = (1 + L\mu\overline{T}_{L-1} + 3r\lambda\overline{T}_{L+1}) / (L\mu + k\lambda), \overline{T}_{L+1} = (1 + (L+1)\mu\overline{T}_L) / ((L+1)\mu + (k-r)\lambda).$$

Отсюда находим:

$$n\lambda T_{cp}(L) = A_L + \frac{C(L+1+A(1+2\alpha)) + L(L+1+A(1-\alpha))(A_L - A_{L-1})}{A((L+1)(1-3\alpha) + A(1-\alpha))}, \tag{7.64}$$

где A_L вычисляют по формуле (7.40).

В частности, при $L = 0$, 1 и 2 имеем:

$$n\lambda T_{cp}(1) = 1 + \frac{2(1+C) + A(1-\alpha) + (1+2\alpha)AC}{A(2(1-3\alpha) + A(1-\alpha))}, \alpha = \frac{r}{k}, A = k\rho, C = n\rho, \tag{7.65}$$

$$n\lambda T_{cp}(2) = 2 + \frac{1}{C} + \frac{(1+C)(6+2A(1-\alpha)) + C^2(3+A(1+2\alpha))}{AC(3(1-3\alpha) + A(1-\alpha))}.$$

Коэффициент готовности находят из системы уравнений

$$n\rho p_0 = p_1, n\rho p_{i-1} = i p_i, i = 1...L, 3r\rho p_L = (L+1)p_{L+1}, \tag{7.66}$$

$$(k-3r)\rho p_L = (L+1)p_{L+2}, (k-r)\rho p_{L+1} = (L+2)p_{L+3}, \sum_{i=0}^{L+3} p_i = 1.$$

Отсюда

$$K_{гс}(L) = 1 - \frac{AC^L}{(L+1)!} p_0 \left(1 - 3\alpha + A\frac{3\alpha(1-\alpha)}{L+2}\right), \tag{7.67}$$

$$p_0 = 1 / \left(\sum_{i=0}^{L} \frac{C^i}{i!} + \frac{AC^L}{(L+1)!} + 3\alpha(1-\alpha)\frac{A^2C^L}{(L+2)!}\right).$$

В частности, при $L = 1$ и 2 имеем:

$$K_{гс}(1) = 1 - \frac{AC}{2} p_0 (1 - 3\alpha + A\alpha(1-\alpha)), p_0 = 1 / \left(1 + C + \frac{AC}{2} + A^2C\frac{\alpha(1-\alpha)}{2}\right), \tag{7.68}$$

$$K_{гс}(2) = 1 - \frac{AC^2}{6} p_0 \left(1 - 3\alpha + A\frac{3\alpha(1-\alpha)}{4}\right), p_0 = 1 / \left(1 + C + \frac{C^2}{2} + \frac{AC^2}{6} + A^2C^2\frac{\alpha(1-\alpha)}{8}\right).$$

Коэффициент оперативной готовности рассчитывают по формуле:

$$K_{огс}(\tau, L) = e^{-(1-\alpha)k\lambda\tau} p_0 \left(\sum_{i=0}^{L} \frac{C^i}{i!}(3 - 2e^{-\alpha k\lambda\tau}) + \frac{3\alpha AC^L}{(L+1)!}\right). \tag{7.69}$$

Приближенные формулы на основе методики [4] для системы без реконфигурации находят с помощью того же подхода, что и в модели МН4. Интенсивности отказов каждой из частей находят согласно асимптотической формуле как величины, обратные средней наработке, с использованием формул (7.16) и (7.64) и их суммируют. Далее по экспоненциальной модели вычисляют ВБР. Коэффициент готовности системы находят как произведение коэффициентов готовности нерезервированной и мажорированной частей, используя формулы моделей МН1 и МН5.

Если предположить, что запасы L_0 и L_1 потребляются всеми элементами системы (ОПС и ДПС), то расчетные формулы имеют вид:

$$k\lambda T_{ср,пр}(L_o, L_1) = 1/((1-3\alpha)\left(\frac{C}{1+C}\right)^{L_0} + \frac{6\alpha\rho_1}{1+5\rho_1}, \tag{7.70}$$

$$\rho_1 = -\frac{r}{n}\ln K_{гЗИП}(L_1), K_{гЗИП}(L) = 1 - \frac{C^{L+1}}{(L+1)!}/\sum_{i=0}^{L+1}\frac{C^i}{i!}, L \geq 1,$$

$$P_{с,пр}(t) = \exp(-t / T_{ср,пр}(L_o, L_1)),$$

$$K_{гс,пр}(L_0, L_1) = \left(1 - \frac{C^{L_0+1}}{(L_0+1)!}/\sum_{i=0}^{L_0+1}\frac{C^i}{i!}\right)\left(1 - \frac{3\rho_1^2}{1+3\rho_1+3\rho_1^2}\right),$$

$$K_{огс}(\tau, L_0, L_1) = K_{гс0,пр}(L_0)\frac{3 - e^{-r\lambda\tau} + 3\rho_1}{1+3\rho_1+3\rho_1^2}e^{-(1-\alpha)k\lambda\tau}.$$

Если принять, что потребление запасов L_0 проводится нерезервированной частью ОПС и всей ДПС, а потребление запасов L_1 — мажорированной частью ОПС и всей ДПС, то формулы приобретают вид:

$$P_{с,пр}(t) = \exp(-(1-3\alpha)k\lambda t\left(\frac{D}{1+D}\right)^{L_0})\exp(-\frac{6\rho_1}{1+5\rho_1}r\lambda t), D = C - 3\alpha A, \tag{7.71}$$

$$\rho_1 = -\frac{\alpha A}{B}\ln K_{гЗИП}(L_1), K_{гЗИП}(L_1) = 1 - \frac{B^{L_1+1}}{(L_1+1)!}/\sum_{i=0}^{L_1+1}\frac{B^i}{i!}, L \geq 1, B = C - A(1-3\alpha),$$

$$K_{гс,пр}(L_0, L_1) = \left(1 - \frac{D^{L_0+1}}{(L_0+1)!}/\sum_{i=0}^{L_0+1}\frac{D^i}{i!}\right)\left(1 - \frac{3\rho_1^2}{1+3\rho_1+3\rho_1^2}\right). \tag{7.72}$$

При частичной и полной реконфигурации графы состояний в моделях МН4 и МН5 совпадают. Поэтому для расчета характеристик надежности можно использовать формулы (7.45)–(7.59).

По результатам расчетов (*приложение 7*, примеры П7.8–П7.9) можно сделать следующие выводы:

- показатели безотказности быстро ухудшаются при увеличении доли нерезервированной части системы. Уже при $A - 3ra = ra$ средняя наработка до отказа системы уменьшается в 4,4 раз, когда $L = 1$, и в 7 раз, когда $L = 2$, по сравнению со случаем, когда нерезервированная часть отсутствует;
- погрешность приближенной формулы (7.70) для расчета средней наработки является заниженной при небольших значениях $A - 3ra$ и завышенной при больших значениях $A - 3ra$. Погрешность в расчете коэффициента готовности, по-прежнему, велика. При-

ближенная формула (7.72) дает завышенное значение, а коэффициент неготовности занижен в несколько раз;

- количество аппаратуры в ДПС влияет на показатели безотказности ОПС не существенно. Так при ra = 0,2, A = 0,8 и изменении B от 0,4 до 1,2 средняя наработка до отказа ОПС $k\lambda T_{ср}$ уменьшается от 5,55 до 4,42 при L = 1 и от 13,2 до 8,11 при L = 2;
- коэффициент готовности системы существенно больше коэффициента готовности ЗИП. Это можно объяснить наличием в системе структурного резервирования;
- в моделях Н5 и МН5, как и в моделях Н1 и МН1, средняя наработка до отказа, попрежнему, уступает средней наработке в моделях П5 и МП5 по тем же причинам, что и в моделях Н1 и МН1.

7.7. Последовательное соединение двух дублированных подсистем (модель МН6)

Система состоит из четырех одинаковых ветвей по r элементов каждая, включенных по схеме последовательного соединения двух дублированных подсистем. Граф состояний приведен на рис. 7.8.

Он содержит всего L + 5 состояния (0... L + 4), из которых два (L + 3 и L + 4) — неработоспособные. Отказ системы наступает, если после исчерпания запасов в комплекте ЗИП в ней отказывает два элемента в различных ветвях одной подсистемы(состояние L + 4), либо сначала два элемента в различных дублированных подсистемах, а затем любой элемент в оставшейся части системы (состояние L+3). Общее количество элементов в основной подсистеме равно k = 4r. Использование работоспособных элементов отказавшей ветви дублированной части не допускается. В данной модели граф состояний отличается от графа схемы гибели и размножения.

Среднюю наработку до отказа найдем, решая систему алгебраических уравнений:

$$\overline{T}_0 = \frac{1}{n\lambda} + \overline{T}_1, \overline{T}_i = (1 + i\mu\overline{T}_{i-1} + n\lambda\overline{T}_{i+1}) / (i\mu + n\lambda), i = 1...L-1, \tag{7.73}$$

$$\overline{T}_L = (1 + L\mu\overline{T}_{L-1} + k\lambda\overline{T}_{L+1}) / (L\mu + k\lambda), \overline{T}_{L+1} = (1 + (L+1)\mu\overline{T}_L + 2r\lambda\overline{T}_{L+2}) / ((L+1)\mu + 3r\lambda),$$

$$\overline{T}_{L+2} = (1 + (L+2)\mu\overline{T}_{L+1}) / ((L+2)\mu + 2r\lambda).$$

Отсюда находим:

$$n\lambda T_{ср}(L) = A_L + (4C((L+1)(L+2) + A(1,75L+3) + 11A^2/8) + 4L((L+1)(L+2) +$$

$$+A(1+0,75L))(A_L - A_{L-1})) / (A^2(L+2+1,5A)), \tag{7.74}$$

где A_L вычисляют по формуле (7.40).

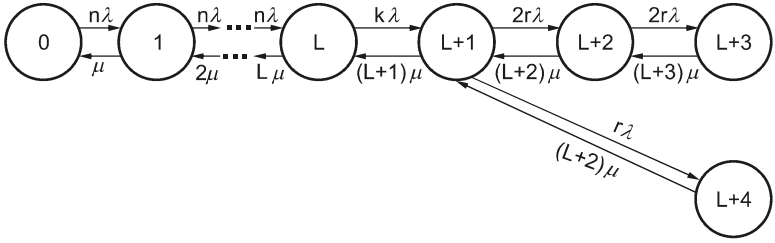


Рис. 7.8. Граф состояний системы (модель МН6)

В частности, при $L = 1$ и 2 имеем:

$$n\lambda T_{cp}(1) = 1 + \frac{6 + 1,75A + 3A^2/8 + C(6 + 19A/4 + 11A^2/8)}{0,75A^2(1 + A/2)}, A = k\rho, C = n\rho, \quad (7.75)$$

$$n\lambda T_{cp}(2) = 2 + \frac{1}{C} + \frac{(1+C)(12 + 2,5A + 3A^2/8) + C^2(6 + 13A/4 + 11A^2/16))}{0,25A^2(2 + 0,75A)}.$$

Коэффициент готовности находим из системы уравнений:

$$n\rho p_0 = p_1, n\rho p_{i-1} = ip_i, i = 1...L, 4r\rho p_L = (L+1)p_{L+1}, \quad (7.76)$$

$$2r\rho p_{L+1} = (L+2)p_{L+2}, 2r\rho p_{L+2} = (L+3)p_{L+3}, r\rho p_{L+1} = (L+2)p_{L+4}, \sum_{i=0}^{L+4} p_i = 1.$$

Отсюда

$$K_{гс}(L) = 1 - \frac{A^2}{4C^2}\left(1 + \frac{A}{L+3}\right)\frac{C^{L+2}}{(L+2)!}p_0, p_0 = 1/\left(\sum_{i=0}^{L}\frac{C^i}{i!} + \frac{AC^L}{(L+1)!} + \frac{3A^2C^L}{4(L+2)!} + \frac{A^3C^L}{4(L+3)!}\right). \quad (7.77)$$

В частности, имеем:

$$K_{гс}(1) = 1 - \frac{A^2C}{24}p_0(1 + A/4), p_0 = 1/(1 + C + AC/2 + A^2C/8 + A^3C/96), \quad (7.78)$$

$$K_{гс}(2) = 1 - \frac{A^2C^2}{96}p_0(1 + A/5), p_0 = 1/\left(1 + C + \frac{C^2}{2} + \frac{AC^2}{6} + \frac{A^2C^2}{8} + \frac{A^3C^2}{480}\right).$$

Коэффициент оперативной готовности:

$$K_{огс}(\tau, L) = e^{-2r\lambda\tau}p_0\left(\sum_{i=0}^{L}\frac{C^i}{i!}(2 - e^{-r\lambda\tau})^2 + \frac{AC^L}{(L+1)!}(2 - e^{-r\lambda\tau}) + \frac{A^2C^L}{2(L+2)!}\right). \quad (7.79)$$

Для расчета по приближенным формулам найдем сначала

$$K_{гЗИП}(L) = 1 - \frac{C^{L+1}}{(L+1)!}/\sum_{i=0}^{L+1}\frac{C^i}{i!}, L \geq 1, \rho_1 = -\frac{r}{n}\ln K_{гЗИП}(L). \quad (7.80)$$

Далее получим формулы для расчета ПН:

$$P_{с,пр}(t) = \exp\left(-\frac{\rho_1}{1+3\rho_1}k\lambda t\right) = \exp\left(-\frac{A^2}{4+3A}\frac{t}{\Delta t_{ЗИП}}\right), A = 4\rho_1, \quad (7.81)$$

$$K_{гс,пр}(L) = \left(1 - \left(\frac{\rho_1}{1+\rho_1}\right)^2\right)^2 = \left(1 - \left(\frac{A}{4+A}\right)^2\right)^2,$$

$$K_{огс,пр}(\tau, L) = e^{-2r\lambda\tau}\left((2 - e^{-r\lambda\tau})^2 + 4\rho_1(2 - e^{-r\lambda\tau}) + 4\rho_1^2\right)/(1+\rho_1)^4.$$

При использовании работоспособных элементов работоспособных или отказавших ветвей для восстановления работоспособности системы получим три варианта реконфигурации, приводящие к повышению показателей надежности системы (частичная, групповая и полная реконфигурация).

При частичной реконфигурации после отказа обеих ветвей одной из дублированных подсистем отключается одна из ветвей работоспособной подсистемы и подключается на место

двух отказавших ветвей другой подсистемы. При этом возникает последовательная структура из $2r$ элементов.

При групповой реконфигурации сначала используются работоспособные элементы последней отказавшей ветви, а затем включается процедура частичной реконфигурации. Таким образом, допускается дополнительно отказ еще r элементов.

При полной реконфигурации дополнительно используются $r - 1$ работоспособных элементов первой отказавшей ветви.

Графы состояний системы при различных видах реконфигурации приведены на рис. 7.9.

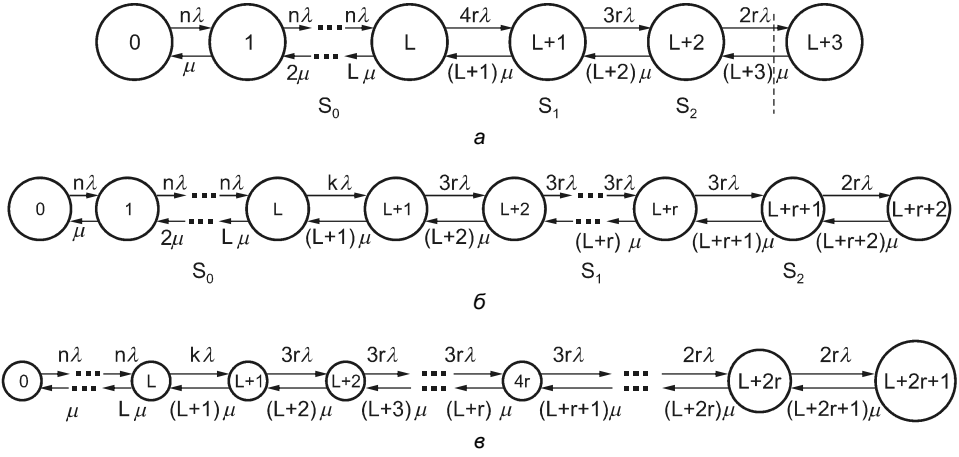


Рис. 7.9. Граф состояний системы при использовании реконфигурации (модель МН6):
а — при частичной реконфигурации; *б* — при групповой реконфигурации;
в — при полной реконфигурации

Рассмотрим теперь подробнее эти три вида реконфигурации.

7.7.1. Частичная реконфигурация

Средняя наработка до отказа определяется по формуле:

$$n\lambda T_{cp}(L) = \sum_{i=0}^{L-1}\sum_{j=0}^{i}\theta_j/\theta_i + \frac{n}{4r}\sum_{j=0}^{L}\theta_j/\theta_L + \frac{n}{3r}\sum_{j=0}^{L+1}\theta_j/\theta_{L+1} + \frac{n}{2r}\sum_{j=0}^{L+2}\theta_j/\theta_{L+2}\,, \qquad (7.82)$$

$$\theta_i = \frac{C^i}{i!}, i = 0...L, \theta_{L+1} = \frac{AC^L}{(L+1)!}, \theta_{L+2} = \frac{3A^2C^L}{4(L+2)!}\,.$$

В частности, при $L = 1$ и 2 имеем:

$$n\lambda T_{cp}(1) = 1 + \frac{1+C}{A} + \frac{8(1+C+AC/2)}{3A^2} + \frac{16(1+C+AC/2+A^2C/8)}{A^3}, \qquad (7.83)$$

$$n\lambda T_{cp}(2) = 1 + \frac{1+C}{C} + \frac{2+2C+C^2}{AC} + \frac{4(6+6C+3C^2+AC^2)}{3A^2C} + \frac{32(6+6C+3C^2+AC^2+3A^2C^2/16)}{3A^3C}\,.$$

Коэффициент готовности системы:

$$K_{гс}(L) = 1 - \frac{3A^3C^{L+3}}{8(L+3)!}\,p_0,\; p_0 = 1/\left(\sum_{i=0}^{L}\frac{C^i}{i!} + \frac{AC^L}{(L+1)!} + \frac{3A^2C^L}{4(L+2)!} + \frac{3A^3C^L}{8(L+3)!}\right). \qquad (7.84)$$

В частности, при $L = 1$ и 2 имеем:

$$K_{гс}(1) = 1 - \frac{A^3C}{64}\,p_0,\; p_0 = 1/(1 + C + AC/2 + A^2C/8 + A^3C/64), \qquad (7.85)$$

$$K_{гс}(2) = 1 - \frac{A^3C^2}{320}\,p_0,\; p_0 = 1/\left(1 + C + \frac{C^2}{2} + \frac{AC^2}{6} + \frac{A^2C^2}{8} + \frac{A^3C^2}{320}\right).$$

Коэффициент оперативной готовности:

$$K_{огс}(\tau, L) = \mathrm{e}^{-2r\lambda\tau}\,p_0\left(\sum_{i=0}^{L}\frac{C^i}{i!}(2 - e^{-r\lambda\tau})^2 + \frac{AC^L}{(L+1)!}(2 - e^{-r\lambda\tau}) + \frac{3A^2C^L}{8(L+2)!}\right). \qquad (7.86)$$

При $r = n$ получаем случай однофункциональной системы.

7.7.2. Групповая реконфигурация

Средняя наработка до отказа определяется по формуле:

$$n\lambda T_{ср}(L) = \sum_{i=0}^{L-1}\sum_{j=0}^{i}\theta_j/\theta_i + \frac{n}{4r}\sum_{j=0}^{L}\theta_j/\theta_L + \frac{n}{3r}\sum_{i=L+1}^{L+r}\sum_{j=0}^{i}\theta_j/\theta_i + \frac{n}{2r}\sum_{j=0}^{L+r+1}\theta_j/\theta_{L+r+1}, \qquad (7.87)$$

$$\theta_i = \frac{C^i}{i!}, i = 0...L, \theta_{L+i} = \frac{AC^L}{(L+1)!}, \theta_{L+2} = \frac{0,75^i A^i C^L}{(L+i)!}, i = 1...r+1.$$

При $r = 1$ формулы (7.82) и (7.87) совпадают.

В частности, при $L = 1$ и 2 имеем:

$$n\lambda T_{ср}(1) = 1 + \frac{1+C}{A} + \frac{n}{3r}\sum_{i=2}^{r+1}\sum_{j=0}^{i}\theta_j/\theta_i + \frac{n}{2r}\sum_{j=0}^{r+2}\theta_j/\theta_{r+2}, \qquad (7.88)$$

$$n\lambda T_{ср}(2) = 1 + \frac{1+C}{A} + \frac{2+2C+C^2}{AC} + \frac{n}{3r}\sum_{i=3}^{r+2}\sum_{j=0}^{i}\theta_j/\theta_i + \frac{n}{2r}\sum_{j=0}^{r+3}\theta_j/\theta_{r+3}.$$

При $r = 2$ из (7.88) получим:

$$n\lambda T_{ср}(1, r=2) = 1 + \frac{1+n\rho}{8\rho} + \frac{1+n\rho+4n\rho^2}{24\rho^2} + \frac{1+n\rho+4n\rho^2+8n\rho^3}{32\rho^3} \approx \frac{1}{32\rho^3} + \frac{3n+4}{96\rho^2},$$

$$n\lambda T_{ср}(2, r=2) \approx \frac{5}{48n\rho^5} + \frac{1}{12n\rho^4}(1 + 1,25n). \qquad (7.89)$$

Коэффициент готовности системы:

$$K_{гс}(L) = 1 - \frac{(0,75)^r A^{r+2}C^L}{2(L+r+2)!}\,p_0, \qquad (7.90)$$

$$p_0 = 1/\left(\sum_{i=0}^{L}\frac{C^i}{i!} + \sum_{i=1}^{r+1}\frac{(0,75)^{i-1}A^iC^L}{(L+i)!} + \frac{(0,75)^r A^{r+2}C^L}{2(L+r+2)!}\right), A = 4r\rho, C = n\rho.$$

В частности, имеем:

$$K_{гс}(1)=1-\frac{(0,75)^r A^{r+2}C}{2(r+3)!}p_0, p_0=1/\left(1+C+\sum_{i=1}^{r+1}\frac{(0,75)^{i-1}A^iC}{(i+1)!}+\frac{(0,75)^r A^{r+2}C}{2(r+3)!}\right). \quad (7.91)$$

При $r = 2$ формула приобретает вид:

$$K_{гс}(1,2)=1-\frac{9A^4C}{32(5!)}p_0, p_0=1/\left(1+C\left(1+2\rho+8\rho^2+6\rho^3+\frac{48}{5}\rho^4\right)\right). \quad (7.92)$$

Коэффициент оперативной готовности:

$$K_{огс}(\tau,L)=e^{-2r\lambda\tau}p_0\left(\sum_{i=0}^{L}\frac{C^i}{i!}(2-e^{-r\lambda\tau})^2+\frac{AC^L}{(L+1)!}(2-e^{-r\lambda\tau})+\sum_{i=2}^{r+1}\frac{(0,75)^{i-1}A^iC}{(i+1)!}\right). \quad (7.93)$$

При $r = 1$ формулы (7.93) и (7.86) совпадают.

7.7.3. Полная реконфигурация

Согласно графу состояний базовая структура S_0 сохраняется в состояниях $i = 0...L$, структура S_1 — в состояниях $L + 1$ ... $L + r$, а структура S_2 (последовательное соединение $2r$ элементов) — в состояниях $L + r + 1$ ... $L + 2r$. Граф имеет вид схемы гибели и размножения. Поэтому используем известные формулы для стационарных вероятностей состояний:

$$p_i=\theta_i p_0, i=0...L+2r+1, p_0=1/(1+\sum_{i=1}^{L+2r+1}\theta_i), \theta_i=\frac{C^i}{i!}, i=0...L, \quad (7.94)$$

$$\theta_{L+i}=\frac{(0,75)^{i-1}A^iC^L}{(L+i)!}, i=1...r+1; \theta_{L+r+i}=\frac{(0,75)^r A^{r+i}C^L}{2^{i-1}(L+r+i)!}, i=1...r+1.$$

Средняя наработка до отказа:

$$n\lambda T_{ср}(L)=\sum_{i=0}^{L-1}\sum_{j=0}^{i}\theta_j/\theta_i+\frac{C}{A}\sum_{j=0}^{L}\theta_j/\theta_L+\frac{4C}{3A}\sum_{i=L+1}^{L+r}\sum_{j=0}^{i}\theta_j/\theta_i+\frac{2C}{A}\sum_{i=L+r+1}^{L+2r}\sum_{j=0}^{i}\theta_j/\theta_i. \quad (7.95)$$

В частности, при $L = 1$, $r = 2$ имеем:

$$n\lambda T_{ср}(1,2)=1+\frac{5n}{6}+\frac{3+55n}{24\rho}+\frac{2+15n}{48\rho^2}+\frac{1+6n}{48\rho^3}+\frac{4+5n}{192\rho^4}+\frac{5}{192\rho^5}. \quad (7.96)$$

Коэффициент готовности системы:

$$K_{гс}(L)=1-\frac{(3/8)^r A^{2r+1}C^L}{(L+2r+1)!}p_0, p_0=1/\left(\sum_{i=0}^{L}\frac{C^i}{i!}+\sum_{i=1}^{r+1}\frac{(0,75)^{i-1}A^iC^L}{(L+i)!}+\sum_{i=1}^{r+1}\frac{(3/4)^r A^{r+i}C^L}{2^{i-1}(L+r+i)!}\right). \quad (7.97)$$

В частности, при $L = 1$, $r = 2$ имеем:

$$K_{гс}(1,2)=1-\frac{32}{5}n\rho^6 p_0, p_0=1/\left(1+C\left(1+4\rho+8\rho^2+12\rho^3+\frac{48}{5}\rho^4+\frac{32}{5}\rho^5\right)\right). \quad (7.98)$$

Коэффициент оперативной готовности:

$$K_{огс}(\tau,L)=e^{-2r\lambda\tau}p_0\left(\sum_{i=0}^{L}\frac{C^i}{i!}(2-e^{-r\lambda\tau})^2+\sum_{i=1}^{r}\frac{(0,75)^{i-1}A^iC^L}{(L+i)!}(2-e^{-r\lambda\tau})+\sum_{i=1}^{r}\frac{(0,75)^r A^{r+i}C^L}{2^{i-1}(L+r+i)!}\right). \quad (7.99)$$

По результатам расчетов (*приложение 7*, примеры П7.10–П7.11) можно сделать следующие выводы:

- зависимость показателей надежности от среднего времени доставки ЗЧ существенно нелинейная: при увеличении $T_д$ в 12 раз (L = 1) средняя наработка до отказа уменьшается в 27 раз, коэффициент неготовности в 380 раз. Быстро ухудшаются при увеличении $T_д$ и другие показатели надежности;
- оценка средней наработки по приближенной формуле (7.81) является завышенной при любых значениях A. Погрешность в расчете коэффициента готовности, по-прежнему, велика. Приближенная формула (7.81) для расчета коэффициента готовности дает завышенное значение, а коэффициент неготовности занижен в 3–4 раза;
- количество аппаратуры в ДПС влияет на показатели безотказности ОПС не существенно. Так при ra = 0,2, A = 0,8 и изменении B втрое (от 0,8 до 2,4) средняя наработка до отказа ОПС $k\lambda T_{ср}$ уменьшается от 19 до 16 при L = 1 и от 46,5 до 29,2 при L = 2;
- коэффициент готовности системы существенно больше коэффициента готовности ЗИП. Это можно объяснить наличием в системе структурного резервирования;
- в моделях Н6 и МН6, как и в моделях Н1 и МН1, средняя наработка до отказа попрежнему уступает средней наработке в моделях П6 и МП6 по тем же причинам, что и в моделях Н1 и МН1;
- реконфигурация дает значительное улучшение показателей надежности. Так при L = 1, B = 0 и A = 0,2 частичная реконфигурация увеличивает среднюю наработку в 10,7 раза, групповая реконфигурация — в 283 раза, а полная реконфигурация — в 14 080 раз. При L = 2, B = 0 и A = 0,2 средняя наработка увеличивается в 14, 471 и 27 902 раза соответственно. При появлении ДПС эффективность реконфигурации уменьшается.

7.8. Последовательное соединение двух мажорированных подсистем (модель МН7)

Система состоит из шести одинаковых ветвей по r элементов каждая, включенных по схеме последовательного соединения двух мажорированных подсистем по схеме «2 из 3». Граф состояний приведен на рис. 7.10, *а*.

Он содержит всего L + 5 состояний (0... L + 4), из которых два (L + 3 и L + 4) — неработоспособные. Отказ системы наступает, если после исчерпания запасов в комплекте ЗИП в ней отказывает два элемента в различных ветвях одной подсистемы (состояние L + 4), либо сначала два элемента в различных дублированных подсистемах, а затем любой элемент в оставшейся части системы (состояние L + 3). Общее количество элементов в основной подсистеме равно k = 6r. Использование работоспособных элементов отказавшей ветви дублированной части не допускается. В данной модели граф состояний отличается от графа схемы гибели и размножения.

Среднюю наработку до отказа найдем, решая систему алгебраических уравнений:

$$\overline{T}_0 = \frac{1}{n\lambda} + \overline{T}_1, \overline{T}_i = (1 + i\mu\overline{T}_{i-1} + n\lambda\overline{T}_{i+1}) / (i\mu + n\lambda), i = 1...L-1, \qquad (7.100)$$

$$\overline{T}_L = (1 + L\mu\overline{T}_{L-1} + k\lambda\overline{T}_{L+1}) / (L\mu + k\lambda), \overline{T}_{L+1} = (1 + (L+1)\mu\overline{T}_L + 3r\lambda\overline{T}_{L+2}) / ((L+1)\mu + 5r\lambda),$$

$$\overline{T}_{L+2} = (1 + (L+2)\mu\overline{T}_{L+1}) / ((L+2)\mu + 4r\lambda).$$

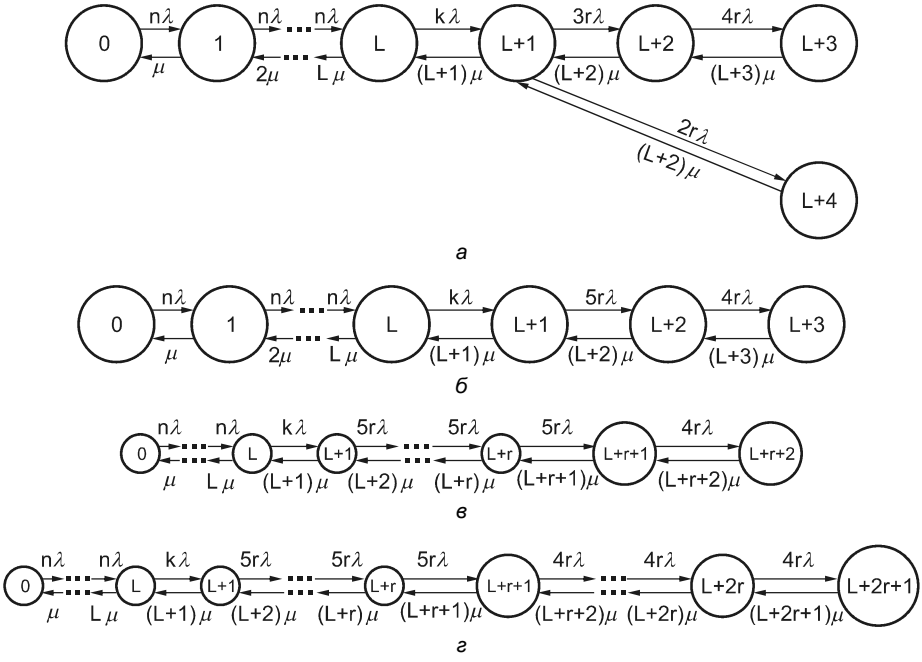


Рис. 7.10. Граф состояний системы (модель МН7): *а* — без реконфигурации; *б* — при частичной реконфигурации; *в* — при групповой реконфигурации; *г* — при полной реконфигурации

Решение системы из пяти уравнений (7.100) находим в следующем порядке. Из первого и второго уравнений имеем:

$$\overline{T}_L = \overline{T}_0 - \frac{1}{n\lambda} A_L, \overline{T}_{L-1} = \overline{T}_0 - \frac{1}{n\lambda} A_{L-1}. \tag{7.101}$$

Из четвертого и пятого уравнений находим:

$$\overline{T}_{L+1} = \frac{(L+2)\mu + 7r\lambda + [(L+1)(L+2)\mu^2 + 4(L+1)r\lambda\mu]\overline{T}_L}{(L+1)(L+2)\mu^2 + 2(L+2)r\lambda\mu + 4(L+1)r\lambda\mu 2(r\lambda)^2}. \tag{7.102}$$

Подставим (7.102) в третье уравнение и получим:

$$n\lambda T_0(L) = 1 + \{n\rho[(L+1)(L+2) + 4(3L+5)r\rho + 62(r\rho)^2] + [L(L+1)(L+2) +$$

$$+2L(3L+4)r\rho + 20L(r\rho)^2]\Delta A_L\} / \{12(r\rho)^2(L+2+10r\rho)\}, \tag{7.103}$$

$$A_L = \sum_{i=0}^{L-1}\sum_{j=0}^{i} j!/(n\rho)^j = \sum_{j=0}^{L-1}(L-j)\,j!/(n\rho)^j, \Delta A_L = A_L - A_{L-1} = \sum_{j=0}^{L-1} j!/(n\rho)^j.$$

В частности, при $L = 1$, $r = 2$ имеем:

$$n\lambda T_0(1) = 1 + \frac{6 + 14r\rho + 20(r\rho)^2 + n\rho[6 + 32r\rho + 44(r\rho)^2]}{12(r\rho)^2(3 + 10r\rho)} \approx \frac{1}{6(r\rho)^2},$$

$$n\lambda T_0(2) = 2 + \frac{1}{n\rho} + \frac{n\rho[6 + 22r\rho + 31(r\rho)^2] + 12(1 + 1/n\rho)(6 + 10r\rho + 10(r\rho)^2)}{12(r\rho)^2(2 + 5r\rho)} \approx \frac{1}{2n\rho(r\rho)^2}.$$

Коэффициент готовности:

$$K_{гс}(L) = 1 - \frac{A^2 C^L}{3(L+2)!}(1 + \frac{A}{L+3}) p_0 , \quad (7.104)$$

$$p_0 = 1 / \left(\sum_{i=0}^{L} \frac{C^i}{i!} + \frac{AC^L}{(L+1)!} + \frac{5A^2 C^L}{6(L+2)!} + \frac{A^3 C^L}{3(L+3)!} \right), A = 6r\rho, C = n\rho .$$

Коэффициент оперативной готовности:

$$K_{огс}(\tau, L) = e^{-4r\lambda\tau} p_0 \left(\sum_{i=0}^{L} \frac{C^i}{i!}(3 - 2e^{-r\lambda\tau})^2 + \frac{AC^L}{(L+1)!}(3 - 2e^{-r\lambda\tau}) + \frac{A^2 C^L}{2(L+2)!} \right). \quad (7.105)$$

В частности, при $L = 1$ имеем:

$$K_{гс}(1) = 1 - 2r^2 n\rho^3 (1 + 1,5r\rho) p_0, p_0 = 1 / \left(1 + C \left(1 + \frac{A}{2} + \frac{5}{36} A^2 + \frac{1}{72} A^3 \right) \right). \quad (7.106)$$

Для расчета по приближенным формулам найдем сначала

$$K_{гЗИП}(L) = 1 - \frac{C^{L+1}}{(L+1)!} / \sum_{i=0}^{L+1} \frac{C^i}{i!}, L \geq 1, \rho_1 = -\frac{r}{n} \ln K_{гЗИП}(L) . \quad (7.107)$$

Далее получим формулы для расчета ПН:

$$P_{с,пр}(t) = \exp\left(-\frac{2\rho_1}{1 + 5\rho_1} k\lambda t \right), K_{гс,пр}(L) = (1 + 3\rho_1)^2 / (1 + 3\rho_1 + 3\rho_1^2)^2 , \quad (7.108)$$

$$K_{огс,пр}(\tau, L) = \frac{e^{-4r\lambda\tau}}{(1 + 3\rho_1 + 3\rho_1^2)^2} \left((3 - 2e^{-r\lambda\tau})^2 + 6\rho_1 (3 - 2e^{-r\lambda\tau}) + 9\rho_1^2 \right),$$

$$n\lambda T_{0,пр}(L) = \frac{n(1 + 5\rho_1)}{12\rho_1 r} = -\frac{n^2 (1 - (5r / 6n) \ln K_{гЗИП}(L))}{12r^2 \ln K_{гЗИП}(L)} .$$

В частности, при $L = 1$ имеем:

$$n\lambda T_{0,пр}(1) = -\frac{n(n - 5r) \ln K_{гЗИП}(1))}{12r^2 \ln K_{гЗИП}(1)}, K_{гЗИП}(1) = \frac{2(1 + C)}{2 + 2C + C^2} . \quad (7.109)$$

Далее рассмотрим три варианта реконфигурации, аналогичные тем, что приведены в *разд. 7.7*.

7.8.1. Частичная реконфигурация

Граф состояний системы приведен на рис. 7.10, *б*. Первая деградированная структура S_1 содержит одну нерезервированную и одну мажорированную подсистему. При отказе еще одного элемента в нерезервированной подсистеме отключается резервная ветвь в другой подсистеме и переводится в соседнюю подсистему для восстановления работоспособности системы.

Средняя наработка до отказа определяется по формуле:

$$n\lambda T_{ср}(L) = \sum_{i=0}^{L-1} \sum_{j=0}^{i} \theta_j / \theta_i + \frac{n}{6r} \sum_{j=0}^{L} \theta_j / \theta_L + \frac{n}{5r} \sum_{j=0}^{L+1} \theta_j / \theta_{L+1} + \frac{n}{4r} \sum_{j=0}^{L+2} \theta_j / \theta_{L+2} , \quad (7.110)$$

$$\theta_i = \frac{C^i}{i!}, i = 0...L, \theta_{L+1} = \frac{AC^L}{(L+1)!}, \theta_{L+2} = \frac{5A^2 C^L}{6(L+2)!} .$$

В частности, при $L = 1$ и 2 имеем:

$$n\lambda T_{cp}(1) = 1 + \frac{37C}{10A} + \frac{5A + 39C}{5A^2} + \frac{6(9 + 2A + 9C)}{5A^3}, \tag{7.111}$$

$$n\lambda T_{cp}(2) = 2 + \frac{37C}{10A} + \frac{5A^2 + 10AC + 54C^2}{5A^2C} + \frac{2(5A^2 + 18AC + 108C^2)}{5A^3C} + \frac{36(6 + A + 6C)}{5A^3C}.$$

Коэффициент готовности системы:

$$K_{гс}(L) = 1 - \frac{5A^3C^{L+3}}{9(L+3)!}p_0, p_0 = 1/\left(\sum_{i=0}^{L}\frac{C^i}{i!} + \frac{AC^L}{(L+1)!} + \frac{5A^2C^L}{6(L+2)!} + \frac{5A^3C^L}{9(L+3)!}\right). \tag{7.112}$$

В частности, при $L = 1$ имеем:

$$K_{гс}(1) = 1 - 5r^3n\rho^4 p_0, p_0 = 1/\left(1 + C\left(1 + \frac{A}{2} + \frac{5}{36}A^2 + \frac{5}{216}A^3\right)\right). \tag{7.113}$$

Коэффициент оперативной готовности:

$$K_{огс}(\tau, L) = e^{-4r\lambda\tau}\, p_0\left(\sum_{i=0}^{L}\frac{C^i}{i!}(3 - 2e^{-r\lambda\tau})^2 + \frac{AC^L}{(L+1)!}(3 - 2e^{-r\lambda\tau}) + \frac{5A^2C^L}{6(L+2)!}\right). \tag{7.114}$$

7.8.2. Групповая реконфигурация

За счет элементов отказавшей ветви структура S_1 поддерживается в состояниях $(L + 1...L + r)$, а структура S_2 возникает только в состоянии $L + r + 1$ (см. рис. 7.10, *в*). Используя граф состояний, находим среднюю наработку до отказа:

$$n\lambda T_{cp}(L) = \sum_{i=0}^{L-1}\sum_{j=0}^{i}\theta_j/\theta_i + \frac{n}{6r}\sum_{j=0}^{L}\theta_j/\theta_L + \frac{n}{5r}\sum_{i=L+1}^{L+r}\sum_{j=0}^{i}\theta_j/\theta_i + \frac{n}{4r}\sum_{j=0}^{L+r+1}\theta_j/\theta_{L+r+1}, \tag{7.115}$$

$$\theta_i = \frac{C^i}{i!}, i = 0...L, \theta_{L+i} = \frac{(5/6)^{i-1}A^iC^L}{(L+1)!}, i = 1...r+1, \theta_{L+r+2} = \frac{2(5/6)^r A^{r+2}C^L}{3(L+r+2)!}.$$

В частности, при $L = 1$ или 2 и $r = 2$ имеем:

$$n\lambda T_{cp}(1,2) = 1 + \frac{49n}{120} + \frac{25 + 29n}{300\rho} + \frac{5 + 6n}{300\rho^2} + \frac{2 + n}{400\rho^3} + \frac{1}{400\rho^4}, \tag{7.116}$$

$$n\lambda T_{cp}(2,2) = 2 + \frac{49n}{120} + \frac{1200 + 200n + 117n^2}{1200n\rho} + \frac{100 + 30n + 21n^2}{600n\rho^2} + \frac{40 + 16n + 5n^2}{800n\rho^3} + \frac{8 + 5n}{400n\rho^4} + \frac{1}{80\rho^5}.$$

Коэффициент готовности системы:

$$K_{гс}(L) = 1 - \frac{2(5/6)^r A^{r+2}C^L}{3(L+r+2)!}p_0, p_0 = 1/\left(\sum_{i=0}^{L}\frac{C^i}{i!} + \sum_{i=1}^{r+1}\frac{(5/6)^{i-1}A^iC^L}{(L+i)!} + \frac{2(5/6)^r A^{r+2}C^L}{3(L+r+2)!}\right). \tag{7.117}$$

Коэффициент оперативной готовности:

$$K_{огс}(\tau, L) = e^{-4r\lambda\tau}\, p_0\left(\sum_{i=0}^{L}\frac{C^i}{i!}(3 - 2e^{-r\lambda\tau})^2 + \sum_{i=1}^{r}\frac{(5/6)^{i-1}A^iC^L}{(L+i)!}(3 - 2e^{-r\lambda\tau}) + \frac{(5/6)^r A^{r+1}C^L}{6(L+r+1)!}\right). \tag{7.118}$$

7.8.3. Полная реконфигурация

Согласно графу состояний (см. рис. 7.10, *г*) базовая структура S_0 сохраняется в состояниях $i = 0...L$, структура S_1 — в состояниях $L + 1...L + r$, а структура S_2 (последовательное соединение $2r$ элементов) — в состояниях $L + r + 1...L + 2r$. Состояние $L + 2r + 1$ является неработоспособным. Граф имеет вид схемы гибели и размножения. Поэтому используем известные формулы для расчета средней наработки до отказа:

$$n\lambda T_{cp}(L) = \sum_{i=0}^{L-1}\sum_{j=0}^{i}\theta_j/\theta_i + \frac{n}{6r}\sum_{j=0}^{L}\theta_j/\theta_L + \frac{n}{5r}\sum_{i=L+1}^{L+r}\sum_{j=0}^{i}\theta_j/\theta_i + \frac{n}{4r}\sum_{i=L+r+1}^{L+2r}\sum_{j=0}^{i}\theta_j/\theta_i, \quad (7.119)$$

$$\theta_i = \frac{C^i}{i!}, i = 0...L,, i = 0...L, \theta_{L+i} = \frac{(5/6)^{i-1}A^iC^L}{(L+i)!}; \theta_{L+r+i} = \frac{(5/6)^r A^{r+i}C^L}{1,5^{i-1}(L+r+i)!}, i = 1...r+1.$$

В частности, при $L = 1$ и $r = 2$ имеем:

$$n\lambda T_{cp}(1,2) = 1 + \frac{8n}{15} + \frac{400+443n}{4800\rho} + \frac{40+123n}{2400\rho^2} + \frac{8+19n}{1600\rho^3} + \frac{8+5n}{3200\rho^4} + \frac{1}{640\rho^5}. \quad (7.120)$$

Коэффициент готовности системы:

$$K_{гс}(L) = 1 - \frac{(5/9)^r A^{2r+1}C^L}{(L+2r+1)!}p_0, p_0 = 1/\left(\sum_{i=0}^{L}\frac{C^i}{i!} + \sum_{i=1}^{r+1}\frac{(5/6)^{i-1}A^iC^L}{(L+i)!} + \frac{2(5/6)^r A^{r+2}C^L}{3(L+r+2)!}\right). \quad (7.121)$$

В частности, при $L = 1$ и $r = 2$ имеем:

$$K_{гс}(1,2) = 1 - \frac{320}{3}n\rho^6 / \left(1 + C\left(1 + 6\rho + 20\rho^2 + 50\rho^3 + 80\rho^4 + \frac{320}{3}\rho^5\right)\right). \quad (7.122)$$

Коэффициент оперативной готовности:

$$K_{огс}(\tau, L) = e^{-4r\lambda\tau}p_0\left(\sum_{i=0}^{L}\frac{C^i}{i!}(3-2e^{-r\lambda\tau})^2 + \sum_{i=1}^{r}\frac{(5/6)^{i-1}A^iC^L}{(L+i)!}(3-2e^{-r\lambda\tau}) + \sum_{i=1}^{r}\frac{(5/6)^r A^{r+i}C^L}{1,5^{i-1}(L+r+i)!}\right). \quad (7.123)$$

По результатам расчетов (*приложение 7*, пример П7.12) можно сделать следующие выводы:

- зависимость показателей надежности от среднего времени доставки ЗЧ существенно нелинейная: при увеличении $T_д$ в 12 раз ($L = 1$) средняя наработка до отказа уменьшается в 16,3 раза, коэффициент неготовности в 441 раз. Быстро ухудшаются при увеличении $T_д$ и другие показатели надежности;
- оценка средней наработки по приближенной формуле (7.108) является завышенной при любых значениях A. Погрешность в расчете коэффициента готовности по-прежнему велика. Приближенная формула (7.108) для расчета коэффициента готовности дает завышенное значение, а коэффициент неготовности занижен в 3–4 раза;
- количество аппаратуры в ДПС влияет на показатели безотказности ОПС не существенно. Так при $ra = 0,2$, $A = 1,2$ и изменении B втрое (от 0,8 до 2,4) средняя наработка до отказа ОПС $k\lambda T_{cp}$ уменьшается от 10,1 до 8,75 при $L = 1$ и от 21,7 до 15,4 при $L = 2$;
- коэффициент готовности системы существенно больше коэффициента готовности ЗИП. Это можно объяснить наличием в системе структурного резервирования;
- в моделях Н7 и МН7, как и в моделях Н1 и МН1, средняя наработка до отказа, попрежнему, уступает средней наработке в моделях П7и МП7 по тем же причинам, что и в моделях Н1 и МН1;

- реконфигурация дает значительное улучшение показателей надежности. Так при $L = 1$, $B = 0$ и $A = 0{,}3$ частичная реконфигурация увеличивает среднюю наработку в 6,7 раза, групповая реконфигурация в 104 раза, а полная реконфигурация в 2577 раз. При $L = 2$, $B = 0$ и $A = 0{,}3$ средняя наработка увеличивается в 8,7, 172 и 1900 раз соответственно. При появлении ДПС эффективность реконфигурации уменьшается.

7.9. Последовательное соединение мажорированной, дублированной и нерезервированной подсистем (модель МН8)

Система состоит из трех последовательно соединенных подсистем. Мажорированная подсистема содержит три ветви по r однотипных элементов каждая, работающих по схеме голосования «два из трех». Дублированная подсистема содержит две ветви по r однотипных элементов каждая в нагруженном режиме. Нерезервированная подсистема состоит из $k - 5r$ элементов. Дополнительная подсистема содержит $n - k$ элементов (рис. 7.11).

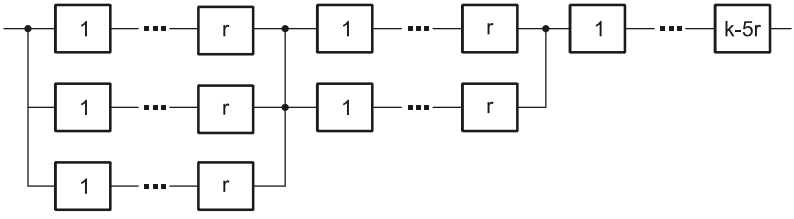


Рис. 7.11. Структурная схема системы (модель МН8)

Граф состояний включает в себя $L + 8$ состояний ($0...L + 7$). В состояниях $0...L$ поддерживается полная структура (рис. 7.12).

Состояние $L + 1$ соответствует деградированной структуре S_1 с одной отказавшей ветвью в дублированной подсистеме. Состояние $L + 2$ соответствует деградированной структуре S_2

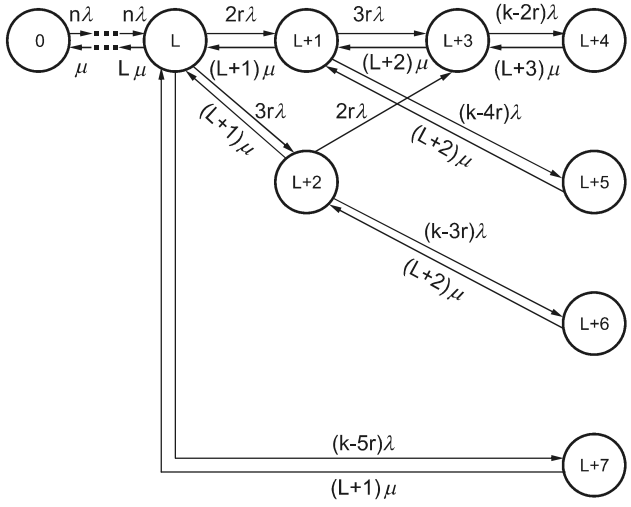


Рис. 7.12. Граф состояний системы (модель МН8)

с одной отказавшей ветвью в мажорированной подсистеме. В состоянии $L + 3$ система не имеет структурного резерва и содержит $k - 2r$ последовательно соединенных элементов. Состояния $L + 4...L + 7$ — неработоспособные. Им соответствуют деградированные структуры $S_4...S_7$. При этом, в структуре S_5 сохранилась резервная ветвь мажорированной подсистемы, в структуре S_6 — резервная ветвь дублированной подсистемы, в структуре S_7 — сохранились обе резервные ветви (в дублированной и мажорированной подсистемах). В структуре S_3 при поступлении первой же запасной части в первую очередь восстанавливается резервная ветвь мажорированной подсистемы как наименее надежной (по сравнению с дублированной подсистемой).

Для расчета средней наработки используется следующая система алгебраических уравнений:

$$\overline{T}_0 = \frac{1}{n\lambda} + \overline{T}_1, \overline{T}_i = (1 + i\mu\overline{T}_{i-1} + n\lambda\overline{T}_{i+1}) / (i\mu + n\lambda), i = 1...L-1, \tag{7.124}$$

$$\overline{T}_L = (1 + L\mu\overline{T}_{L-1} + k\lambda\overline{T}_{L+1}) / (L\mu + k\lambda),$$

$$\overline{T}_{L+1} = (1 + (L+1)\mu\overline{T}_L + 3r\lambda\overline{T}_{L+2}) / ((L+1)\mu + (k-r)\lambda),$$

$$\overline{T}_{L+2} = (1 + (L+1)\mu\overline{T}_{L+1} + 2r\lambda\overline{T}_{L+2}) / ((L+1)\mu + (k-r)\lambda),$$

$$\overline{T}_{L+3} = (1 + (L+2)\mu\overline{T}_{L+1} + 2r\lambda\overline{T}_{L+2}) / ((L+2)\mu + (k-2r)\lambda).$$

Получить решение (7.124) в общем виде затруднительно. Поэтому представим $\overline{T}_L$ и $\overline{T}_{L-1}$ в виде (7.101). Тогда последние четыре уравнения (7.124) приобретают вид:

$$k\rho n\lambda\overline{T}_0 - 2r\rho n\lambda\overline{T}_{L+1} - 3r\rho n\lambda\overline{T}_{L+2} = a_0, a_0 = n\rho + (L + k\rho)A_L - LA_{L-1}, \tag{7.125}$$

$$(L+1)n\lambda\overline{T}_0 - (L+1+(k-r)\rho)n\lambda\overline{T}_{L+1} + 3r\rho n\lambda\overline{T}_{L+3} = a_1, a_1 = -n\rho + (L+1)A_L,$$

$$(L+1)n\lambda\overline{T}_0 - (L+1+(k-r)\rho)n\lambda\overline{T}_{L+2} + 2r\rho n\lambda\overline{T}_{L+3} = a_2, a_2 = a_1,$$

$$-(L+2)n\lambda\overline{T}_{L+1} + (L+2+(k-2r)\rho)n\lambda\overline{T}_{L+3} = a_3, a_3 = n\rho.$$

Отсюда

$$n\lambda\overline{T}_0(L) = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & -2r\rho & -3r\rho & 0 \\ a_1 & -(L+1+(k-r)\rho) & 0 & 3r\rho \\ a_2 & 0 & -(L+1+(k-r)\rho) & 2r\rho \\ a_3 & -(L+2) & 0 & L+2+(k-2r)\rho \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k\rho & -2r\rho & -3r\rho & 0 \\ L+1 & -(L+1+(k-r)\rho) & 0 & 3r\rho \\ L+1 & 0 & -(L+1+(k-r)\rho) & 2r\rho \\ 0 & -(L+2) & 0 & L+2+(k-2r)\rho \end{vmatrix}} \tag{7.126}$$

Приближенное значение средней наработки до отказа можно найти, если заменить среднюю наработку до отказа $\overline{T}_0(L)$ на среднее время пребывания системы в работоспособном состоянии $\overline{T}_{E_+}$, которое дает оценку снизу для средней наработки $\overline{T}_0(L)$. Расчет проводим по формуле:

$$\overline{T}_{E_+} = \sum_{i\in E_+} p_i \Big/ \sum_{i\in H_-} p_i \sum_{j\in E_+} \lambda_{ij} = \sum_{i\in E_+} p_i \Big/ \sum_{i\in H_+} p_i \sum_{j\in E_-} \lambda_{ij}, \tag{7.127}$$

где:

$E_+ = (0,...,L + 3)$ — множество работоспособных состояний;

$H_+ = (L, L + 1, L + 2, L + 3)$ — подмножество граничных состояний E_+;

$E_- = (L + 4, L + 5, L + 6, L + 7)$ — множество неработоспособных состояний;

$H_- = (L + 4, L + 5, L + 6, L + 7)$ — подмножество граничных состояний E_-.

Используя граф состояний, найдем:

$$n\lambda\overline{T}_{E_+}(L) = C\sum_{i=0}^{L+3}\theta_i / ((L+3)\theta_{L+4} + (L+2)\theta_{L+5} + (L+2)\theta_{L+6} + (L+1)\theta_{L+7}), C = n\rho, \quad (7.128)$$

$$\theta_i = C^i / i!, i = 0...L; \theta_{L+1} = \frac{2r}{n}\frac{L+1+5r\rho}{L+1+2r\rho}\frac{C^{L+1}}{(L+1)!}, \theta_{L+2} = \frac{3r}{n}\frac{L+1}{L+1+2r\rho}\frac{C^{L+1}}{(L+1)!},$$

$$\theta_{L+3} = \frac{6r^2}{n^2}\frac{2L+2+5r\rho}{L+1+2r\rho}\frac{C^{L+2}}{(L+2)!}, \theta_{L+4} = \frac{6r^2(k-2r)}{n^3}\frac{2L+2+5r\rho}{L+1+2r\rho}\frac{C^{L+3}}{(L+3)!},$$

$$\theta_{L+5} = \frac{2r(k-4r)}{n^2}\frac{L+1+5r\rho}{L+1+2r\rho}\frac{C^{L+2}}{(L+2)!}, \quad \theta_{L+5} = \frac{3r(k-3r)}{n^2}\frac{L+1}{L+1+2r\rho}\frac{C^{L+2}}{(L+2)!}, \quad \theta_{L+5} = \frac{k-5r}{n}\frac{C^{L+1}}{(L+1)!}.$$

В частности, при $L = 1$ имеем:

$$n\lambda\overline{T}_{E_+}(1) = \frac{2(1+r\rho)(1+C) + Cr\rho(5+5r\rho+(r\rho)(4+5r\rho))}{r^2(k-2r)(4+5r\rho)\rho^3 + r(k-4r)(2+5r\rho)\rho^2 + 3r(k-3r)\rho^2 + 2(k-5r)(1+r\rho)\rho}.$$

Найдем теперь стационарные вероятности состояний и коэффициент готовности системы. Согласно графу состояний коэффициенты $\theta_i = p_i / p_0$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$(1)\theta_i = (n\rho)^i / i!, i = 0...L; -n\rho\theta_{L-1} + (L + k\rho)\theta_L - (L+1)(\theta_{L+1} + \theta_{L+2} + \theta_{L+7}) = 0,$$

$$(2) - 2r\rho\theta_L + (L+1+(k-r)\rho)\theta_{L+1} - (L+2)(\theta_{L+3} + \theta_{L+5}) = 0,$$

$$(3) - 3r\rho\theta_L + (L+1+(k-r)\rho)\theta_{L+2} - (L+2)\theta_{L+6} = 0,$$

$$(4) - 3r\rho\theta_{L+1} - 2r\rho\theta_{L+2} + (L+2+(k-2r)\rho)\theta_{L+3} - (L+3)\theta_{L+4} = 0,$$

$$(5)(k-2r)\rho\theta_{L+3} - (L+3)\theta_{L+4} = 0, \quad (6)(k-4r)\rho\theta_{L+1} - (L+2)\theta_{L+5} = 0,$$

$$(7)(k-3r)\rho\theta_{L+2} - (L+2)\theta_{L+6} = 0, \quad (8)(k-5r)\rho\theta_L - (L+1)\theta_{L+7} = 0. \quad (7.129)$$

Из последних четырех уравнений выразим θ_{L+4}, θ_{L+5}, θ_{L+6}, θ_{L+7} через θ_L, θ_{L+1}, θ_{L+2}, θ_{L+3} и подставим выражения во второе, третье и четвертое уравнения:

$$-2r\rho\theta_L + (L+1+(k-r)\rho)\theta_{L+1} - (L+2)\theta_{L+3} - (k-4r)\rho\theta_{L+1} = 0,$$

$$-3r\rho\theta_L + (L+1+(k-r)\rho)\theta_{L+2} - (k-3r)\rho\theta_{L+2} = 0,$$

$$-3r\rho\theta_{L+1} - 2r\rho\theta_{L+2} + (L+2+(k-2r)\rho)\theta_{L+3} - (k-2r)\rho\theta_{L+3} = 0. \quad (7.130)$$

Отсюда:

$$\theta_{L+1} = \frac{2r\rho}{L+1}\frac{L+1+5r\rho}{L+1+2r\rho}\theta_L, \theta_{L+2} = \frac{3r\rho}{L+1+2r\rho}\theta_L, \theta_{L+3} = \frac{6(r\rho)^2}{(L+1)(L+2)}\frac{2L+2+5r\rho}{L+1+2r\rho}\theta_L. \quad (7.131)$$

Подставляя сюда явное выражение для θ_L, найдем сначала θ_{L+1}, θ_{L+2}, θ_{L+3}, а затем θ_{L+4}, θ_{L+5}, θ_{L+6}, θ_{L+7}.

Вероятности состояний:

$$p_i = \theta_i p_0, i = 1...L+7; p_0 = 1/(\sum_{i=0}^{L}(n\rho)^i / i! + \sum_{i=1}^{7}\theta_{L+i}). \quad (7.132)$$

Коэффициент готовности:

$$K_{гс}(L) = 1 - (\theta_{L+4} + \theta_{L+5} + \theta_{L+6} + \theta_{L+7})p_0. \quad (7.133)$$

Коэффициент оперативной готовности:

$$K_{огс}(\tau, L) = e^{-(k-3r)\lambda\tau}[(3-2e^{-r\lambda\tau})(3-2e^{-r\lambda\tau})\sum_{i=0}^{L}(n\rho)^i / i! + (3-2e^{-r\lambda\tau})\theta_{L+1} + (2-e^{-r\lambda\tau})\theta_{L+2} + \theta_{L+3}]p_0 \quad (7.134)$$

По результатам расчетов (*приложение 7*, примеры П7.13–П7.14) можно сделать следующие выводы:

- зависимость показателей надежности от среднего времени доставки ЗЧ существенно нелинейная: при увеличении $T_д$ в 12 раз (L = 1) средняя наработка до отказа уменьшается в 16,6 раза для L = 1 и в 136,7 раза для L = 2, коэффициент неготовности уменьшается в 261 и 2317 раз соответственно. Быстро ухудшаются при увеличении $T_д$ и другие показатели надежности;
- оценка средней наработки по приближенной формуле (7.128) является заниженной при любых значениях A;
- количество аппаратуры в ДПС влияет на показатели безотказности ОПС не существенно. Так при ra = 0,2, A = 1 и изменении B втрое (от 0,8 до 2,4) средняя наработка до отказа ОПС $k\lambda T_{ср}$ уменьшается от 13,14 до 11,26 при L = 1 и от 29,21 до 19,67 при L = 2;
- коэффициент готовности системы существенно больше коэффициента готовности ЗИП. Это можно объяснить наличием в системе структурного резервирования;
- в моделях Н8 и МН8, как и в моделях Н1 и МН1, средняя наработка до отказа по-прежнему уступает средней наработке в моделях П8и МП8 по тем же причинам, что и в моделях Н1 и МН1.

7.10. Общее резервирование с целой кратностью (модель МН9)

Система состоит из резервированной и нерезервированной подсистем. Резервированная подсистема состоит из m однотипных параллельных ветвей по r элементов каждая. Нерезервированная подсистема содержит $k - mr$ элементов (рис. 7.13). Граф состояний содержит $L + 2m$ состояний, из которых $L + m$ работоспособных ($0...L + m$) и m неработоспособных ($L + m + 1...L + 2m - 1$) (рис. 7.14).

При $k > mr$ рассмотрим лишь случай m = 3. Тогда система уравнений для нахождения средней наработки до отказа принимает вид:

$$\overline{T}_0 = \frac{1}{n\lambda} + \overline{T}_1, \overline{T}_i = (1 + i\mu\overline{T}_{i-1} + n\lambda\overline{T}_{i+1})/(i\mu + n\lambda), i = 1...L-1, \quad (7.135)$$

$$\overline{T}_L = (1 + L\mu\overline{T}_{L-1} + 3r\lambda\overline{T}_{L+1})/(L\mu + k\lambda),$$

$$\overline{T}_{L+1} = (1+(L+1)\mu\overline{T}_L + 2r\lambda\overline{T}_{L+2}) / ((L+1)\mu + (k-r)\lambda),$$

$$\overline{T}_{L+2} = (1+(L+2)\mu\overline{T}_{L+1}) / ((L+2)\mu + (k-2r)\lambda).$$

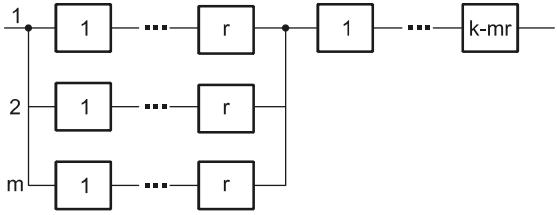


Рис. 7.13. Структурная схема системы (модель МН9)

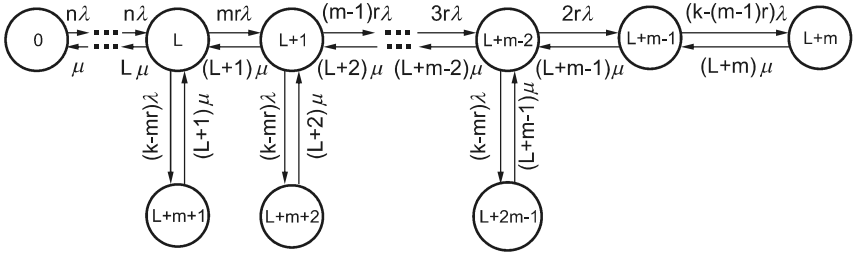


Рис. 7.14. Граф состояний системы (модель МН9)

Сначала из пятого уравнения выразим $\overline{T}_{L+2}$ через $\overline{T}_{L+1}$ и подставим в четвертое уравнение:

$$\overline{T}_{L+1} = \frac{(L+2)\mu + k\lambda + [(L+1)(L+2)\mu^2 + (k-2r)(L+1)\lambda\mu]\overline{T}_L}{(L+1)(L+2)\mu^2 + (k-3r)(L+2)\lambda\mu + (k-2r)(L+1)\lambda\mu + (k-r)(k-2r)\lambda^2}. \quad (7.136)$$

Из первого и второго уравнений находим:

$$\overline{T}_L = \overline{T}_0 - \frac{1}{n\lambda} A_L, A_L = \sum_{i=0}^{L-1}\sum_{j=0}^{i} j!/(n\rho)^j. \quad (7.137)$$

Подставим (7.136) и (7.137) в третье уравнение (7.135) и найдем:

$$k\lambda\overline{T}_0(L) = \frac{k\rho}{n\rho}(A_L + \frac{n\rho B_1 + B_3\Delta A_L}{B_2}), \Delta A_L = \sum_{j=0}^{L-1} j!/(n\rho)^j, \quad (7.138)$$

где:

$$B_1 = (L+1)(L+2) + (L+1)(k-2r)\rho + k\rho(L+2+3r\rho) + (k-r)(k-2r)\rho^2, \quad (7.139)$$

$$B_2 = (k-3r)\rho((L+1)(L+2) + (L+1)(k-2r)\rho + k\rho(L+2)) + k(k-r)(k-2r)\rho^3,$$

$$B_3 = L(L+1)(L+2) + L(L+1)(k-2r)\rho + L(L+2)(k-3r)\rho + L(k-r)(k-2r)\rho^2.$$

При $k = 3r$ имеем:

$$k\lambda\overline{T}_0(L) = A_L + (k\rho B_1 + B_3\Delta A_L) / B_2. \quad (7.140)$$

В частности, при $L = 1$ имеем:

$$k\lambda\overline{T}_0(1) = k\rho(1+(k\rho B_1 + B_3)/B_2)/n\rho\,, \tag{7.141}$$

$$B_1 = 6+2(k-2r)\rho+3k\rho(1+r\rho)+(k-r)(k-2r)\rho^2\,,$$

$$B_2 = (k-3r)\rho(6+2(k-2r)\rho+3k\rho)+k(k-r)(k-2r)\rho^3\,,$$

$$B_3 = 6+2(k-2r)\rho+3(k-3r)\rho+(k-r)(k-2r)\rho^2\,.$$

При $L = 2$ имеем:

$$A_2 = 2+1/n\rho, \Delta A_2 = 1+1/n\rho, B_1 = 12+3(k-2r)\rho+k\rho(4+3r\rho)+(k-r)(k-2r)\rho^2\,,$$

$$B_2 = (k-3r)\rho(12+3(k-2r)\rho+4k\rho)+k(k-r)(k-2r)\rho^3\,,$$

$$B_3 = 24+6(k-2r)\rho+8(k-3r)\rho+2(k-r)(k-2r)\rho^2\,.$$

При $k = 3r$ имеем:

$$k\lambda\overline{T}_0(1) = \frac{13}{2}+\frac{35}{6r\rho}+\frac{10}{3(r\rho)^2}+\frac{1}{(r\rho)^3}, k\lambda\overline{T}_0(2) = \frac{15}{2}+\frac{17}{2r\rho}+\frac{65}{9(r\rho)^2}+\frac{13}{3(r\rho)^3}+\frac{4}{3(r\rho)^4}\,.$$

Другой способ построения расчетной формулы для средней наработки при $k = 3r$ состоит в том, чтобы использовать готовую формулу для средней наработки в процессе гибели и размножения [67]:

$$n\lambda T_0(L) = \sum_{i=0}^{L-1}\sum_{j=0}^{i}\theta_j/\theta_i + \frac{n}{3r}\sum_{j=0}^{L}\theta_j/\theta_L + \frac{n}{2r}\sum_{j=0}^{L+1}\theta_j/\theta_{L+1} + \frac{n}{r}\sum_{j=0}^{L+2}\theta_j/\theta_{L+2}\,, \tag{7.142}$$

$$\theta_i = \frac{(n\rho)^i}{i!}, i = 0...L; \theta_{L+1} = \frac{3r}{n}\frac{(n\rho)^{L+1}}{(L+1)!}, \theta_{L+2} = \frac{6r^2}{n^2}\frac{(n\rho)^{L+2}}{(L+2)!}\,.$$

Нетрудно убедиться, что формулы (7.140) и (7.142) дают один и тот же результат. Однако формула (7.140) компактнее и поэтому предпочтительнее.

При $k = mr$ рассмотрим лишь случай произвольного значения m. Поскольку в этом случае граф состояний соответствует схеме гибели и размножения, то получим из общей формулы:

$$n\lambda T_0(L) = \sum_{i=0}^{L-1}\sum_{j=0}^{i}\theta_j/\theta_i + \frac{n}{mr}\sum_{j=0}^{L}\theta_j/\theta_L + \sum_{i=1}^{m-1}\frac{n}{(m-i)r}\sum_{j=0}^{L+i}\theta_j/\theta_{L+i}\,. \tag{7.143}$$

$$\theta_{L+i} = C_m^i i!\left(\frac{r}{n}\right)^i\frac{(n\rho)^{L+i}}{(L+i)!}, i = 0...m-1\,.$$

Коэффициент готовности при $m = 3$, $k \geq 3r$ находим из системы уравнений:

$$(1)n\rho p_0 = p_1, n\rho p_{i-1} = ip_i, i = 1...L\,, \tag{7.144}$$

$$(2)n\rho p_{L-1} - (L+k\rho)p_L + (L+1)(p_{L+1}+p_{L+4})\,,$$

$$(3)3r\rho p_L - (L+1+(k-r)\rho)p_{L+1} + (L+2)(p_{L+2}+p_{L+5})\,,$$

$$(4)2r\rho p_{L+1} - (L+2+(k-2r)\rho)p_{L+2} + (L+3)p_{L+3}\,,$$

$$(5)p_{L+3} = \frac{k-2r}{L+3}\rho p_{L+2}, p_{L+4} = \frac{k-3r}{L+1}\rho p_L, p_{L+5} = \frac{k-3r}{L+2}\rho p_{L+1}, \sum_{i=0}^{L+5}p_i = 1\,.$$

Из третьего, четвертого и пятого уравнений находим сначала вероятности

$$p_{L+1} = \frac{3r}{n}\frac{(n\rho)^{L+1}}{(L+1)!}p_0, p_{L+2} = \frac{6r^2}{n^2}\frac{(n\rho)^{L+2}}{(L+2)!}p_0,$$

а затем вероятности $p_{L+3}, p_{L+4}, p_{L+5}$. Из условия нормировки имеем:

$$p_0 = 1/\left(\sum_{i=0}^{L}\frac{(n\rho)^i}{i!} + \frac{k}{n}\frac{(n\rho)^{L+1}}{(L+1)!} + \frac{3r(k-r)}{n^2}\frac{(n\rho)^{L+2}}{(L+2)!} + \frac{6r^2(k-2r)}{n^3}\frac{(n\rho)^{L+3}}{(L+3)!}\right).$$

Теперь находим коэффициент готовности:

$$K_{гс}(L) = 1 - (\theta_{L+3} + \theta_{L+4} + \theta_{L+5})p_0 =$$

$$= 1 - \left(\frac{k-3r}{n}\frac{(n\rho)^{L+1}}{(L+1)!} + \frac{3r(k-3r)}{n^2}\frac{(n\rho)^{L+2}}{(L+2)!} + \frac{6r^2(k-2r)}{n^3}\frac{(n\rho)^{L+3}}{(L+3)!}\right)p_0. \qquad (7.145)$$

В частности, при $k = 3r$ имеем:

$$K_{гс}(L) = 1 - \frac{6r^3}{n^3}\frac{(n\rho)^{L+3}}{(L+3)!}p_0, p_0 = 1/\left(\sum_{i=0}^{L}\frac{(n\rho)^i}{i!} + \frac{3r}{n}\frac{(n\rho)^{L+1}}{(L+1)!} + \frac{6r^2}{n^2}\frac{(n\rho)^{L+2}}{(L+2)!} + \frac{6r^3}{n^3}\frac{(n\rho)^{L+3}}{(L+3)!}\right). \qquad (7.146)$$

При $k = mr$ и произвольном значении m коэффициент готовности:

$$K_{гс}(L) = 1 - \left(\frac{r}{n}\right)^m m!\frac{(n\rho)^{L+m}}{(L+m)!}p_0, p_0 = 1/\left(\sum_{i=0}^{L}\frac{(n\rho)^i}{i!} + \sum_{i=1}^{m-1}C_m^i\left(\frac{r}{n}\right)^i i!\frac{(n\rho)^{L+i}}{(L+i)!}\right). \qquad (7.147)$$

При $k > mr$ приближенную формулу для средней наработки можно найти, если заменить $\overline{T}_0$ на среднее время пребывания системы в множестве работоспособных состояний:

$$n\lambda\overline{T}_0(L) \approx n\lambda\overline{T}_{E_+}(L) = \frac{n}{r}\frac{\sum_{i=0}^{L}(n\rho)^i/i! + \theta_{L+1} + \theta_{L+2}}{(k-3r)(\theta_L + \theta_{L+1}) + (k-2r)\theta_{L+2}}. \qquad (7.148)$$

Формула (7.148) дает нижнюю оценку точного значения средней наработки.

Если следовать методике [4], то расчет средней наработки следует проводить по формулам:

$$\rho = -\frac{1}{n}\ln K_{гЗИП}(L), \rho_1 = r\rho, n\lambda\overline{T}_0(\infty, m=3) = \frac{n}{r}\left(\frac{11}{6} + \frac{7}{6\rho_1} + \frac{1}{3\rho_1^2}\right), \qquad (7.149)$$

где $K_{гЗИП}(L)$ следует рассчитывать по формуле (7.14).

Сравнить точное и приближенное значения (7.140) и (7.149) можно по главному члену выражений:

$$n\lambda\overline{T}_0(L) \approx \left(\frac{n}{r}\right)^3\frac{(L+2)!}{6(n\rho)^{L+2}}, n\lambda\overline{T}_{0,пр}(L) \approx \frac{1}{3}\left(\frac{n}{r}\right)^3\frac{((L+1)!)^3}{(n\rho)^{3L+2}}. \qquad (7.150)$$

При $L = 0$ оценки совпадают. Однако уже при $L = 1$ приближенное значение оказывается существенно больше точного значения. Так при $n\rho = 0{,}2$ и $n/r = 5$ приближенная оценка в 200/3 = 66,7 раз больше точного значения. Ошибку можно считать неприемлемой.

Коэффициент оперативной готовности при $m = 3$, $k \geq 3r$ находят по формуле:

$$K_{огс}(\tau, L) = p_0 e^{-(k-3r)\lambda\tau}\left[\sum_{i=0}^{L}\frac{(n\rho)^i}{i!}(1-(1-e^{-r\lambda\tau})^3)+\theta_{L+1}(1-(1-e^{-r\lambda\tau})^2)+\theta_{L+1}e^{-r\lambda\tau}\right]. \quad (7.151)$$

По результатам расчетов (*приложение 7*, примеры П7.15–П7.16) можно сделать следующие выводы:

- показатели безотказности быстро ухудшаются при увеличении доли нерезервированной части системы. Уже при $A - 3ra = ra = 0{,}1$, $B = 0$ и $L = 1$ приведенная средняя наработка до отказа системы уменьшается в 124 раза, а коэффициент неготовности увеличивается в 267 раз по сравнению со случаем, когда нерезервированная часть отсутствует. При $A - 3ra = 0{,}1$, $ra = 0{,}2$, $B = 0$ и $L = 1$ эти показатели изменяются соответственно в 19 и 33 раза;
- степень влияния количества аппаратуры в ДПС на показатели безотказности ОПС существенно зависит от количества ЗЧ. Так при $L = 1$, $ra = 0{,}1$, $A = 0{,}3$ и изменении B от 0,2 до 0,6 средняя наработка до отказа ОПС $k\lambda T_{ср}$ уменьшается от 983 до 706, при $L = 1$ $ra = 0{,}1$, $A = 0{,}4$ — от 10,4 до 7,8. При $L = 2$ влияние существеннее: при $ra = 0{,}1$, $A = 0{,}3$ и изменении B от 0,2 до 0,6 приведенная средняя наработка до отказа ОПС $k\lambda T_{ср}$ уменьшается от 11 361 до 6614,1, при $ra = 0{,}1$, $A = 0{,}4$ — от 49,19 до 31,1;
- коэффициент готовности системы существенно больше коэффициента готовности ЗИП. Различия особенно заметны при отсутствии в ОПС нерезервированной части;
- в моделях Н9 и МН9, как и в моделях Н1 и МН1, средняя наработка до отказа по-прежнему уступает средней наработке в моделях П9 и МП9 по тем же причинам, что и в моделях Н1 и МН1.

7.11. Последовательное соединение дублированной подсистемы и подсистемы с общим резервированием с целой кратностью (модель МН10)

Однородная система состоит из пяти ветвей по r элементов каждая, образующих две последовательно соединенные подсистемы с логикой работы «1 из 2» и «1 из 3» (рис. 7.15). Граф состояний (рис. 7.16) имеет $L + 5$ работоспособных ($0...L + 4$) и три неработоспособных состояния ($L + 5$, $L + 6$, $L + 7$).

Система уравнений для нахождения средней наработки до отказа имеет вид:

$$(1)\overline{T}_0 = \frac{1}{n\lambda} + \overline{T}_1, \overline{T}_i = (1 + i\mu\overline{T}_{i-1} + n\lambda\overline{T}_{i+1})/(i\mu + n\lambda), i = 1...L-1, \quad (7.152)$$

$$(2)\overline{T}_L = (1 + L\mu\overline{T}_{L-1} + 3r\lambda\overline{T}_{L+1} + 2r\lambda\overline{T}_{L+2})/(L\mu + 5\lambda),$$

$$(3)\overline{T}_{L+1} = (1 + (L+1)\mu\overline{T}_L + 4r\lambda\overline{T}_{L+3})/((L+1)\mu + 4r\lambda),$$

$$(4)\overline{T}_{L+2} = (1 + (L+1)\mu\overline{T}_L + 3r\lambda\overline{T}_{L+3})/((L+1)\mu + 4r\lambda),$$

$$(5)\overline{T}_{L+3} = (1 + (L+2)\mu\overline{T}_{L+1} + 2r\lambda\overline{T}_{L+4})/((L+2)\mu + 3r\lambda),$$

$$(6)\overline{T}_{L+4} = (1 + (L+3)\mu\overline{T}_{L+3})/((L+3)\mu + 2r\lambda).$$

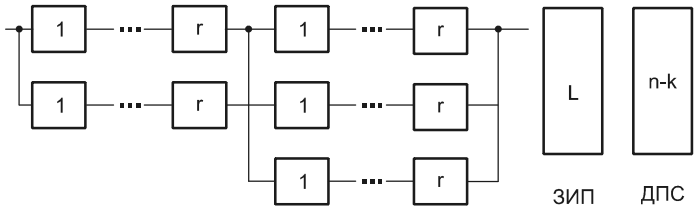


Рис. 7.15. Структурная схема системы (модель МН10)

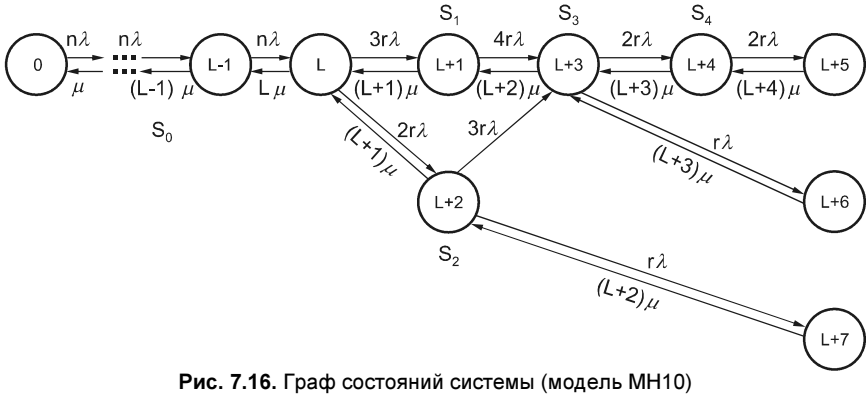


Рис. 7.16. Граф состояний системы (модель МН10)

Из шестого и пятого уравнений системы находим:

$$\overline{T}_{L+3} = (L+3+4r\rho + (L+3+2r\rho)(L+2)\mu\overline{T}_{L+1})/(\mu b_3), \tag{7.153}$$

$$b_3 = (L+2)(L+3) + (3L+7)r\rho + 6(r\rho)^2.$$

Из первого уравнения имеем:

$$n\lambda\overline{T}_L = n\lambda\overline{T}_0 - A_L, n\lambda\overline{T}_{L-1} = n\lambda\overline{T}_0 - A_{L-1} = n\lambda\overline{T}_L + \Delta A_L \tag{7.154}$$

$$\Delta A_L = \sum_{j=0}^{L-1} j!/(n\rho)^j, A_k = \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{i} j!/(n\rho)^j, k = L-1, L.$$

Используя (7.154) во втором уравнении, а (7.153) — в третьем и четвертом уравнениях системы (7.152), найдем:

$$5r\rho n\lambda\overline{T}_L - 3r\rho n\lambda\overline{T}_{L+1} - 2r\rho n\lambda\overline{T}_{L+2} = a_0, a_0 = n\rho + L\Delta A_L, \tag{7.155}$$

$$-(n+1)n\lambda\overline{T}_L + (L+1+4(r\rho)^2(L+3+6r\rho)/b_3)n\lambda\overline{T}_{L+1} = a_1,$$

$$-(n+1)n\lambda\overline{T}_L - ((L+2)/b_3)(L+3+2r\rho)3r\rho n\lambda\overline{T}_{L+1} + (L+1+4r\rho)n\lambda\overline{T}_{L+2} = a_2,$$

$$a_1 = n\rho(1+4r\rho(L+3+4r\rho)/b_3), a_2 = n\rho(1+3r\rho(L+3+4r\rho)/b_3).$$

Отсюда

$$n\lambda\overline{T}_L = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & -3r\rho & -2r\rho \\ a_1 & L+1+4(r\rho)^2(L+3+6r\rho)/b_3 & 0 \\ a_2 & -3r\rho(L+2)(L+3+2r\rho)/b_3 & L+1+4r\rho \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5r\rho & -3r\rho & -2r\rho \\ -(L+1) & L+1+4(r\rho)^2(L+3+6r\rho)/b_3 & 0 \\ -(L+1) & -3r\rho(L+2)(L+3+2r\rho)/b_3 & L+1+4r\rho \end{vmatrix}}. \tag{7.156}$$

Затем находим:

$$n\lambda\overline{T}_0 = A_L + n\lambda\overline{T}_L . \tag{7.157}$$

Стационарные вероятности состояний системы находят из системы уравнений:

$$(1)\theta_i = (n\rho)^i / i!, i = 0...L; -n\rho\theta_{L-1} + (L+5r\rho)\theta_L - (L+1)(\theta_{L+1} + \theta_{L+2}) = 0 , \tag{7.158}$$

$$(2) - 3r\rho\theta_L + (L+1+4r\rho)\theta_{L+1} - (L+2)\theta_{L+3} = 0 ,$$

$$(3) - 2r\rho\theta_L + (L+1+4r\rho)\theta_{L+2} - (L+2)\theta_{L+7} = 0 ,$$

$$(4) - 4r\rho\theta_{L+1} - 3r\rho\theta_{L+2} + (L+2+3r\rho)\theta_{L+3} - (L+3)(\theta_{L+4} + \theta_{L+6}) = 0 ,$$

$$(5)2r\rho\theta_{L+3} - (L+3+2r\rho)\theta_{L+4} + (L+4)\theta_{L+5} = 0 ,$$

$$(6)2r\rho\theta_{L+4} - (L+4)\theta_{L+5} = 0 , \quad (7)r\rho\theta_{L+3} - (L+3)\theta_{L+6} = 0 ,$$

$$(8)r\rho\theta_{L+2} - (L+2)\theta_{L+7} = 0 .$$

Из третьего и восьмого уравнений находим:

$$\theta_{L+2} = \frac{2r\rho}{L+1+3r\rho}\theta_L . \tag{7.159}$$

Из четвертого, пятого, шестого и седьмого уравнений получим:

$$\theta_{L+4} = \frac{2r\rho}{L+3}\theta_{L+3}, \theta_{L+3} = \frac{4r\rho}{L+2}\theta_{L+1} + \frac{3r\rho}{L+2}\theta_{L+2} . \tag{7.160}$$

Подставляя (7.159) и (7.160) во второе уравнение, найдем:

$$\theta_{L+1} = \frac{3r\rho}{L+1}\left(1 + \frac{2r\rho}{L+1+3r\rho}\right)\theta_L . \tag{7.161}$$

Подставляя (7.161) и (7.159) в (7.160), выразим через θ_L сначала θ_{L+1} и θ_{L+2}, а затем и другие коэффициенты θ_i. В результате имеем:

$$p_i = \theta_i p_0, p_0 = 1/\left(\sum_{i=0}^{L}\frac{(n\rho)^i}{i!} + \sum_{i=1}^{7}\theta_{L+i}\right). \tag{7.162}$$

Используя стационарные вероятности, найдем среднее время пребывания системы в работоспособном состоянии:

$$n\lambda\overline{T}_{E_+}(L) = \frac{n}{r}\frac{\sum_{i=0}^{L}(n\rho)^i / i! + \theta_{L+1} + \theta_{L+2} + \theta_{L+3} + \theta_{L+4}}{\theta_{L+2} + \theta_{L+3} + 2\theta_{L+4}} . \tag{7.163}$$

Отсюда, в частности, при $L = 0$ и 1 имеем:

$$n\lambda\overline{T}_{E_+}(0) = \frac{n}{r}\frac{1+\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4}{\theta_2+\theta_3+2\theta_4} = \frac{n}{r}\frac{(1+3\rho_1)(1+3\rho_1+9\rho_1^2+6\rho_1^3)+\rho_1(2+6\rho_1+3\rho_1^2+2\rho_1^3)}{3\rho_1^2(3+4\rho_1)(1+3\rho_1)+\rho_1(2+3\rho_1+4\rho_1^2)} ,$$

$$n\lambda\overline{T}_{E_+}(1) = \frac{n}{r}\frac{1+\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5}{\theta_3+\theta_4+2\theta_5} , \tag{7.164}$$

$$\theta_1 = n\rho, \theta_2 = \frac{n}{r}\frac{1,5\rho_1^2(1+5\rho_1)}{2+3\rho_1}, \theta_3 = \frac{n}{r}\frac{\rho_1^2}{2+3\rho_1}, \theta_4 = \rho_1(\frac{4}{3}\theta_2 + \theta_3), \theta_5 = \frac{1}{2}\rho_1\theta_4 .$$

Согласно методике [4] сначала находим ρ_1 по формуле (7.149), затем стационарную интенсивность отказов системы как сумму интенсивностей отказов дублированной и троированной подсистем и среднюю наработку до отказа как величину, обратную интенсивности отказов:

$$n\lambda\overline{T}_{0,np}(L)=\frac{n\lambda}{\lambda_c}=\frac{n}{r}/\left(\frac{2\rho_1}{1+3\rho_1}+\frac{3\rho_1^2}{1+3,5\rho_1+5,5\rho_1^2}\right). \qquad (7.165)$$

Коэффициент готовности системы:

$$K_{гс}(L)=1-(\theta_{L+5}+\theta_{L+6}+\theta_{L+7})p_0=1-\left(1+\frac{3\rho_1}{L+3}\left(1+\frac{4\rho_1}{L+4}\right)\left(3+\frac{10\rho_1}{L+1}\right)\frac{2\rho_1^2\theta_L p_0}{(L+2)(L+1+3\rho_1)}\theta_L\right)p_0,$$

$$p_0=1/\left[\sum_{i=0}^{L}\frac{(n\rho)^i}{i!}+\frac{(n\rho)^L}{L!}\left(\frac{3\rho_1}{L+1}+\frac{2\rho_1}{L+1+3\rho_1}\left(1+\frac{3\rho_1}{L+1}+\frac{\rho_1}{L+2}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{6\rho_1^2}{(L+2)(L+1+3\rho_1)}\left(3+\frac{10\rho_1}{L+1}\right)\left(1+\frac{3\rho_1}{L+3}+\frac{4\rho_1^2}{(L+3)(L+4)}\right)\right)\right]. \qquad (7.166)$$

Коэффициент оперативной готовности

$$K_{огс}(\tau,L)=(\sum_{i=0}^{L}\frac{(n\rho)^i}{i!}(1-(1-e^{-r\lambda\tau})^2)((1-(1-e^{-r\lambda\tau})^3))+\theta_{L+1}e^{-2r\lambda\tau}(2-e^{-r\lambda\tau})^2+$$

$$+\theta_{L+2}e^{-r\lambda\tau}(1-(1-e^{-r\lambda\tau})^3)+\theta_{L+3}e^{-2r\lambda\tau}(2-e^{-r\lambda\tau})+\theta_{L+4}e^{-2r\lambda\tau})p_0. \qquad (7.167)$$

По результатам расчетов (*приложение 7*, примеры П7.17–П7.18) можно сделать следующие выводы:

- расчет средней наработки по формуле (7.163) дает всегда оценку снизу, а по формуле (7.165) — оценку сверху. Поэтому можно пользоваться средним арифметическим этих двух оценок. Но надо иметь в виду, что среднее арифметическое тоже является оценкой сверху. При больших значениях A в модели МН10 при использовании приближенной методики [4] нарушается принцип когерентности: с увеличением ДПС средняя наработка начинает увеличиваться. Это происходит вследствие роста погрешности. Поэтому для этой области параметров формулу (7.165) использовать нельзя;
- степень влияния количества аппаратуры в ДПС на показатели безотказности ОПС существенно зависит от количества ЗЧ. Так при L = 1, A = 0,25 и изменении B от 0,2 до 0,6 приведенная средняя наработка до отказа ОПС $k\lambda T_{ср}$ уменьшается от 316 до 217, при L = 1, A = 0,5 и изменении B от 0,4 до 1,2 средняя наработка до отказа уменьшается от 104 до 81,4. При L = 2 влияние существеннее: при A = 0,25 и изменении B от 0,2 до 0,6 приведенная средняя наработка до отказа уменьшается от 2204 до 892, при A = 0,5 — от 402 до 212;
- коэффициент готовности системы существенно больше коэффициента готовности ЗИП. Различия особенно заметны при отсутствии в ОПС нерезервированной части;
- в моделях Н10 и МН10, как и в моделях Н1 и МН1, средняя наработка до отказа по-прежнему уступает средней наработке в моделях П10 и МП10 по тем же причинам, что и в моделях Н1 и МН1.

7.12. Система с общим дублированием частично резервированной подсистемы (модель МН11)

Однородная система состоит из двух параллельно соединенных подсистем. Каждая подсистема состоит из дублированной пары (элементы 1 и 2) и соединенных с ней последовательно $r - 2$ однотипных элементов (рис. 7.17). Граф состояний (рис. 7.18) включает в себя $L + 7$ работоспособных состояний ($0...L + 6$) и три неработоспособных состояния ($L + 7$, $L + 8$, $L + 9$).

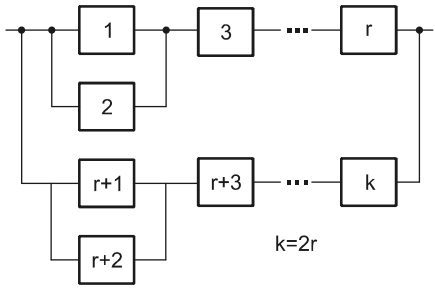


Рис. 7.17. Структурная схема системы (модель МН11)

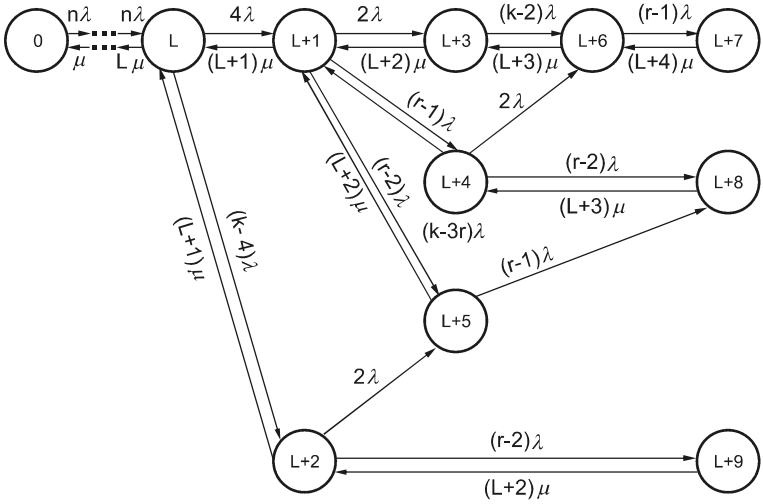


Рис. 7.18. Граф состояний системы (модель МН11)

В состояниях $0...L$ сохраняется базовая структура S_0. В состояниях $L + 1...L + 6$ возникают деградированные работоспособные структуры. В состоянии $L + 1$ возникает структура S_1, в которой работают обе ветви, только в одной из них отсутствует дублирующий элемент. В состоянии $L + 2$ (структура S_2) работает только одна полная ветвь. В состоянии $L + 3$ (структура S_3) работает две ветви, каждая из которых имеет $r - 1$ последовательно соединенных элементов. В состоянии $L + 4$ (структура S_4) работает одна полная ветвь. Структура S_4 отличается от S_2 только тем, что в отказавшей ветви в этом случае не работоспособны два

элемента (а не один как в S_2). В состоянии $L + 5$ (структура S_5) работает одна ветвь с $r - 1$ последовательно соединенными элементами. Структура S_6 в состоянии отличается от S_5 тем, что в этом случае в отказавшей ветви не работоспособны оба элемента дублированной пары, тогда как в S_5 в отказавшей ветви не работоспособен один элемент в нерезервированной части.

В состоянии $L + 7$ не работоспособны четыре элемента (по два элемента в каждой дублированной паре). В состоянии $L + 8$ не работоспособны три элемента (один элемент в дублированной паре и по одному элементу в нерезервированной части каждой ветви). В состоянии $L + 9$ не работоспособны два элемента (по одному элементу в нерезервированной части каждой ветви). При появлении первой же работоспособной запасной части в состоянии $L + 8$ предпочтение отдается той ветви, которая сохранила оба элемента дублированной пары. Поэтому переход осуществляется в состояние $L + 4$.

Точное значение средней наработки до отказа находят из следующей системы уравнений:

$$(1)x_0 = x_L + A_L = x_{L-1} - A_L, x_i = n\lambda\overline{T_i}, A_L = \sum_{i=0}^{L-1}\sum_{j=0}^{i} j!/(n\rho)^j , \qquad (7.168)$$

$$(2)(L + k\rho)x_L = n\rho + Lx_{L-1} + 4\rho x_{L+1} + (k-4)\rho x_{L+2} ,$$

$$(3)(L + 1 + (k-1)\rho)x_{L+1} = n\rho + (L+1)x_L + 2\rho x_{L+3} + (r-1)\rho x_{L+4} + (r-2)\rho x_{L+5} ,$$

$$(4)(L + 1 + r\rho)x_{L+2} = n\rho + (L+1)x_L + 2\rho x_{L+5} ,$$

$$(5)(L + 2 + (k-2)\rho)x_{L+3} = n\rho + (L+2)x_{L+1} + (k-2)\rho x_{L+6} ,$$

$$(6)(L + 2 + r\rho)x_{L+4} = n\rho + (L+2)x_{L+1} + 2\rho x_{L+6} ,$$

$$(7)(L + 2 + (r-1)\rho)x_{L+5} = n\rho + (L+2)x_{L+1} ,$$

$$(8)(L + 3 + (r-1)\rho)x_{L+6} = n\rho + (L+3)x_{L+3} .$$

Подставляя выражения для x_{L+5} и x_{L+6} из уравнений (7) и (8) в уравнения (3)–(6) и преобразуя уравнение (2), получим систему из пяти уравнений:

$$-(L+1)x_L + (L + 1 + \rho\frac{(L+2)(r+1) + (k-1)(r-1)\rho}{L + 2 + (r-1)\rho})x_{L+1} - 2\rho x_{L+3} - (r-1)\rho x_{L+4} =$$

$$= n\rho\left(1 + \frac{(r-2)\rho}{L + 2 + (r-1)\rho}\right), \qquad (7.169)$$

$$-(L+1)x_L + (L + 1 + r\rho)x_{L+2} - \frac{2(L+2)\rho}{L + 2 + (r-1)\rho}x_{L+1} = n\rho\left(1 + \frac{2\rho}{L + 2 + (r-1)\rho}\right),$$

$$-(L+1)x_{L+1} + \left(L + 2 + \frac{(k-2)(r-1)\rho}{L + 3 + (r-1)\rho}\right)x_{L+3} = n\rho\left(1 + \frac{(k-2)\rho}{L + 3 + (r-1)\rho}\right),$$

$$(L + 2 + r\rho)x_{L+4} - (L+2)x_{L+1} - \frac{2(L+3)}{L + 3 + (r-1)\rho}x_{L+3} = n\rho\left(1 + \frac{2\rho}{L + 3 + (r-1)\rho}\right),$$

$$k\rho x_L - 4\rho x_{L+1} - (k-4)\rho x_{L+2} = n\rho + L\Delta A_L, \Delta A_L = \sum_{j=0}^{L-1} j!/(n\rho)^j .$$

Решая (7.169) относительно x_L методом определителей, затем находим x_0 по первой формуле (7.168).

Приближенное значение средней наработки до отказа можно получить, если найти среднее время пребывания системы в работоспособном состоянии. Для этого надо найти стационарные вероятности состояний из системы уравнений:

$$(1)\, p_i = \theta_i p_0, p_0 = 1/(\sum_{i=0}^{L}\frac{(n\rho)^i}{i!} + \sum_{i=1}^{9}\theta_{L+i}), \theta_i = (n\rho)^i / i!, i = 0...L, \qquad (7.170)$$

$$(2) - n\rho\theta_{L-1} + (L + k\rho)\theta_L - (L+1)(\theta_{L+1} + \theta_{L+2}) = 0,$$

$$(3) - 4r\rho\theta_L + (L + 1 + (k-1)\rho)\theta_{L+1} - (L+2)(\theta_{L+3} + \theta_{L+4} + \theta_{L+5}) = 0,$$

$$(4) - (k-4)\rho\theta_L + (L + 1 + r\rho)\theta_{L+2} - (L+2)\theta_{L+9} = 0,$$

$$(5) - 2\rho\theta_{L+1} + (L + 2 + (k-2)\rho)\theta_{L+3} - (L+3)\theta_{L+6} = 0,$$

$$(6) - (r-1)\rho\theta_{L+1} + (L + 2 + r\rho)\theta_{L+4} - (L+3)\theta_{L+8} = 0,$$

$$(7) - 2\rho\theta_{L+2} + (L + 2 + (r-1)\rho)\theta_{L+5} - (r-2)\rho\theta_{L+1} = 0,$$

$$(8) - (k-2)\rho\theta_{L+3} + (L + 3 + (r-1)\rho)\theta_{L+6} - 2\rho\theta_{L+4} - (L+4)\theta_{L+7} = 0,$$

$$(9)(r-1)\rho\theta_{L+6} - (L+4)\theta_{L+7} = 0,$$

$$(10)(L+3)\theta_{L+8} - (r-1)\rho\theta_{L+5} - (r-2)\rho\theta_{L+4} = 0.$$

Решение (7.170) проводим в следующей последовательности. Сначала из (4) и (11) находим:

$$\theta_{L+2} = \frac{(k-4)\rho}{L+1+2\rho}\theta_L = B_2\theta_L. \qquad (7.171)$$

Из второго уравнения системы и (7.171) получим:

$$\theta_{L+1} = 2\rho(2 + \frac{k\rho}{L+1})\theta_L = B_1\theta_L.$$

Из седьмого уравнения имеем:

$$\theta_{L+5} = \frac{2\rho B_2 + (r-2)\rho B_1}{L+2+(r-1)\rho}\theta_L = B_5\theta_L.$$

Из шестого и десятого уравнений имеем:

$$\theta_{L+4} = \frac{(r-1)\rho}{L+2+2\rho}(B_1 + B_5)\theta_L = B_4\theta_L.$$

Из пятого, восьмого и девятого уравнений находим:

$$\theta_{L+3} = \frac{2\rho}{L+2}(B_1 + B_4)\theta_L = B_3\theta_L,$$

$$\theta_{L+6} = \frac{\rho}{L+3}((k-2)B_3 + 2B_4)\theta_L = B_6\theta_L.$$

Вероятности неработоспособных состояний:

$$\theta_{L+7} = \frac{(r-1)\rho}{L+1}B_6\theta_L = B_7\theta_L, \theta_{L+8} = \frac{\rho}{L+3}((r-1)B_5 + (r-2)B_4)\theta_L = B_8\theta_L,$$

$$\theta_{L+9} = \frac{(r-2)\rho}{L+2}B_2\theta_L = B_9\theta_L.$$

Теперь среднее время пребывания в работоспособном состоянии:

$$\lambda \overline{T}_{E_+}(L) = \frac{\sum_{i=0}^{L} (n\rho)^i L!/(L-i)! + \sum_{i=1}^{6} B_i}{(r-2)(B_2+B_4)+(r-1)(B_5+B_6)}. \qquad (7.172)$$

При $k = 2r = 4$, отсюда получим формулы модели МН9 при $m = 4$, $r = 1$.

Рассмотрим теперь приближенную формулу для вычисления средней наработки до отказа, основанную на методике [4]. При неограниченном ЗИП и среднем времени восстановления работоспособности

$$\overline{T}_в = \Delta t_{ЗИП}(L) + \overline{T}_{в\infty} = -\frac{1}{n\lambda} \ln K_{гЗИП}(L) = 1/\mu$$

граф состояний системы имеет вид, приведенный на рис. 7.19.

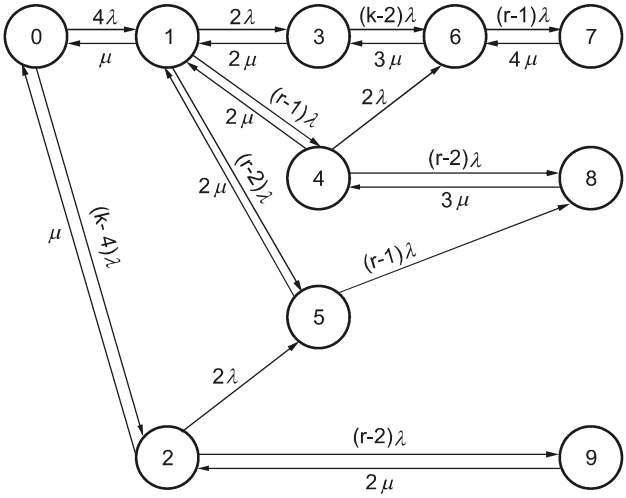


Рис. 7.19. Граф состояний системы при неограниченном ЗИП (модель МН11)

Заметим, что здесь параметр μ отличается от параметра μ в графе состояний на рис. 7.18, равного величине, обратной среднему времени доставки ЗЧ.

Система уравнений для нахождения средней наработки до отказа имеет вид:

$$(1) k\rho x_0 - 4\rho x_1 - (k-4)\rho x_2 = k\rho, x_i = k\lambda \overline{T}_i, \qquad (7.173)$$

$$(2) - x_0 + (1+(k-1)\rho)x_1 - 2\rho x_3 - (r-1)\rho x_4 - (r-2)\rho x_5 = k\rho,$$

$$(3) - x_0 + (1+r\rho)x_2 - 2\rho x_5 = k\rho,$$

$$(4) - 2x_1 + (2+(k-2)\rho)x_3 - (k-2)\rho x_6 = k\rho,$$

$$(5) - 2x_1 + (2+r\rho)x_4 - 2\rho x_6 = k\rho, \ (6) - 2x_1 + (2+(r-1)\rho)x_5 = k\rho,$$

$$(7) - 3x_3 + (3+(r-1)\rho)x_6 = k\rho.$$

Сначала из шестого и седьмого уравнения выразим x_5 и x_6 и подставим в уравнения (4) и (5). После простых преобразований имеем:

$$x_3 = k\rho b_{30} + b_{31}x_1, b_{30} = \frac{3(1+(r-1)\rho)}{6+2(r-1)\rho+2(r-1)^2\rho^2}, b_{31} = \frac{2(3+(r-1)\rho)}{6+2(r-1)\rho+2(r-1)^2\rho^2},$$

$$x_4 = k\rho b_{40} + b_{41}x_1, b_{40} = \frac{1}{2+r\rho}\left(1+\frac{2\rho}{3+(r-1)\rho}(1+3b_{30})\right) =$$

$$= \frac{1}{2+r\rho}\left(1+\frac{2\rho}{3+(r-1)\rho}\left(1+\frac{9\rho(1+(r-1)\rho)}{6+2(r-1)\rho+2(r-1)^2\rho^2}\right)\right),$$

$$b_{41} = \frac{2}{2+r\rho}\left(1+\frac{3\rho b_{31}}{3+(r-1)\rho}\right) = \frac{2}{2+r\rho}\left(1+\frac{6\rho}{6+2(r-1)\rho+2(r-1)^2\rho^2}\right). \qquad (7.174)$$

Теперь уравнения (2)–(3) системы (7.173) приобретают вид:

$$-x_0 + b_{11}x_1 = k\rho a_1, b_{11} = 1+\rho\frac{k+2+(k-1)(r-1)\rho}{2+(r-1)\rho} - 2\rho b_{31} - (r-1)\rho b_{41}, \qquad (7.175)$$

$$-x_0 - \frac{4\rho}{2+(r-1)\rho}x_2 + (1+r\rho)x_2 = k\rho a_2,$$

$$a_1 = 1+\frac{(r-2)\rho}{2+(r-1)\rho} + 2\rho b_{30} + (r-1)\rho b_{40}, a_2 = 1+\frac{2\rho}{2+(r-1)\rho}.$$

Присоединяя сюда первое уравнение (7.173), получим три уравнения относительно трех неизвестных значений. Решая эту систему, имеем:

$$x_0 = k\lambda\overline{T_0} = k\rho\frac{\begin{vmatrix} 1 & -4\rho & -(k-4)\rho \\ a_1 & b_{11} & 0 \\ a_2 & -4\rho/(2+(r-1)\rho) & 1+r\rho \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k\rho & -4\rho & -(k-4)\rho \\ -1 & b_{11} & 0 \\ -1 & -4\rho/(2+(r-1)\rho) & 1+r\rho \end{vmatrix}}. \qquad (7.176)$$

Оценкой снизу для x_0 является величина $k\lambda\overline{T}_{E_+}$, где $\overline{T}_{E_+}$ — среднее время пребывания системы в работоспособном состоянии при использовании эквивалентной модели. Система уравнений для стационарных вероятностей состояний составляется по графу состояний (см. рис. 7.15):

$$(1)k\rho - \theta_1 - \theta_2 = 0, \quad (2)(1+(k-1)\rho)\theta_1 - 4\rho - 2(\theta_3+\theta_4+\theta_5) = 0, \qquad (7.177)$$

$$(3)(1+r\rho)\theta_2 - (k-4)\rho - 2\theta_9 = 0, (4)(2+(k-2)\rho)\theta_3 - 2\rho\theta_1 - 3\theta_6 = 0,$$

$$(5)(2+r\rho)\theta_4 - (r-1)\rho\theta_1 - 3\theta_8 = 0, (6)(2+(r-1)\rho)\theta_5 - (r-2)\rho\theta_1 = 0,$$

$$(7)(3+(r-1)\rho)\theta_6 - (k-2)\rho\theta_3 - 2\rho\theta_4 - 4\theta_7 = 0, (8)(r-1)\rho\theta_6 - 4\theta_7 = 0,$$

$$(9)(r-2)\rho\theta_4 + (r-1)\rho\theta_5 - 3\theta_8 = 0, (10)(r-2)\rho\theta_2 - 2\theta_9 = 0.$$

Сначала из (10), (3), (6) и (1) найдем:

$$\theta_2 = \frac{(k-4)\rho}{1+2\rho}, \theta_1 = \frac{2\rho(2+k\rho)}{1+2\rho}, \theta_5 = \frac{2\rho^2(r-2)(2+k\rho)}{(1+2\rho)(2+(r-1)\rho)}.$$

Затем из (5), (9) и (2) имеем:

$$\theta_4 = \frac{(r-1)\rho}{2(1+\rho)}\left(1+\frac{(r-2)\rho}{(2+(r-1)\rho)}\right), \theta_3 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{(r+(k-1)\rho)\rho}{1+\rho}-\frac{(r-2)\rho(2+(r+1)\rho)}{(1+\rho)(2+(r-1)\rho)}\right)\theta_1 - 2\rho\,.$$

Теперь из (4) и (8)–(10) определим остальные коэффициенты:

$$\theta_6 = \frac{1}{3}(2+(k-2)\rho)\theta_3 - 2\rho\theta_1 = \frac{\rho^2}{3}\frac{2+(k-2)\rho}{1+2\rho}(k-4)+\frac{3k+(k-1)(k-2)\rho(3+(r-1)\rho)}{2(1+\rho)(2+(r-1)\rho)}\theta_1\,.$$

$$\theta_7 = \frac{r-1}{4}\rho\theta_6, \theta_8 = \frac{1}{3}\left((r-2)\rho\theta_4+(r-1)\rho\theta_5\right), \theta_9 = \frac{r-2}{2}\rho\theta_2\,.$$

В частности, при $k = 4$, $r = 2$ получим схему резервирования «1 из 4»:

$$\theta_2 = \theta_5 = \theta_8 = \theta_9 = 0, \theta_1 = 4\rho, \theta_3 = 2\rho^2\frac{2+3\rho}{1+\rho}, \theta_4 = \frac{2\rho^2}{1+\rho}, \theta_6 = 4\rho^3, \theta_7 = \rho^4\,.$$

Теперь можно выразить среднее время пребывания системы в работоспособном состоянии:

$$\lambda\overline{T}_{E_+} = \frac{1+\sum_{i=1}^{6}\theta_i}{(r-2)(\theta_2+\theta_4)+(r-1)(\theta_5+\theta_6)}\,. \qquad (7.178)$$

В частности, при $k = 4$ имеем:

$$\lambda\overline{T}_{E_+} = (1+4\rho+6\rho^2+4\rho^3)/4\rho^3\,. \qquad (7.179)$$

Значение коэффициента готовности находим по точным формулам:

$$K_{гс}(L) = \left(1+\sum_{i=1}^{L+6}\theta_i\right)p_0, p_0 = 1/\left(1+\sum_{i=1}^{L+9}\theta_i\right). \qquad (7.180)$$

Коэффициент оперативной готовности

$$K_{огс}(\tau, L) = \Big(\sum_{i=0}^{L}\frac{(n\rho)^i}{i!}(1-(1-e^{-(r-1)\lambda\tau}(2-e^{-\lambda\tau}))^2+\theta_{L+1}(1-(1-e^{-(r-1)\lambda\tau})(1-e^{-(r-1)\lambda\tau}(2-e^{-\lambda\tau})))+$$
$$+(\theta_{L+2}+\theta_{L+4})e^{-(r-1)\lambda\tau}(2-e^{-\lambda\tau})+\theta_{L+3}(1-(1-e^{-(r-1)\lambda\tau})^2)+(\theta_{L+5}+\theta_{L+6})e^{-(r-1)\lambda\tau})\ p_0\,. \qquad (7.181)$$

По результатам расчетов (*приложение 7*, примеры П7.19–П7.20) можно сделать следующие выводы:

- расчет средней наработки по формуле (7.172) как среднего времени пребывания в работоспособном состоянии дает всегда оценку снизу, а по формуле (7.176) — оценку сверху. Поэтому можно пользоваться средним арифметическим этих двух оценок. Но надо иметь в виду, что среднее арифметическое тоже является оценкой сверху. Расчет средней наработки по формуле (7.178) как среднего времени пребывания в работоспособном состоянии по эквивалентной модели также дает всегда оценку сверху, но эта оценка ближе к точному значению. Поэтому следует рекомендовать в качестве оценки средней наработки брать среднее арифметическое оценок, полученных по формулам (7.172) и (7.178). При больших значениях A в модели МН11 при использовании приближенной методики [4] нарушается принцип когерентности: с увеличением ДПС средняя наработка начинает увеличиваться. Это происходит вследствие роста погрешности. Поэтому для этой области параметров формулы (7.176) и (7.178) использовать нельзя;

- степень влияния количества аппаратуры в ДПС на показатели безотказности ОПС существенно зависит от количества ЗЧ. Так при $L = 1$, $a = 0{,}1$, $A = 0{,}6$ и изменении B от 0,4 до 1,2 приведенная средняя наработка до отказа ОПС $k\lambda T_{cp}$ уменьшается от 110 до 89,5. При $L = 1$, $a = 0{,}2$, $A = 1{,}2$ и изменении B от 0,8 до 2,4 средняя наработка до отказа уменьшается от 39,1 до 35,3. При $L = 2$ влияние существеннее: при $A = 0{,}6$ и изменении B от 0,4 до 1,2 приведенная средняя наработка до отказа уменьшается от 389 до 220, при $A = 1{,}2$ — от 86,7 до 63,8;
- коэффициент готовности системы существенно больше коэффициента готовности ЗИП. Это можно объяснить наличием глубокого резервирования.

7.13. Дублирование структур типа МН6 (модель МН12)

Данная система содержит 8 ветвей из r элементов каждая, организованных в две подсистемы со структурой типа МН6. Трехуровневая структура системы относится к типу параллельно-последовательно-параллельных структур. Граф состояний (рис. 7.20) содержит $L + 16$ состояний, в том числе четыре неработоспособных состояния ($L + 12$, $L + 13$, $L + 14$, $L + 15$), $L + 1$ состояний с полной структурой (0, ..., L) и 11 состояний с деградированной структурой ($L + 1$, ..., $L + 11$).

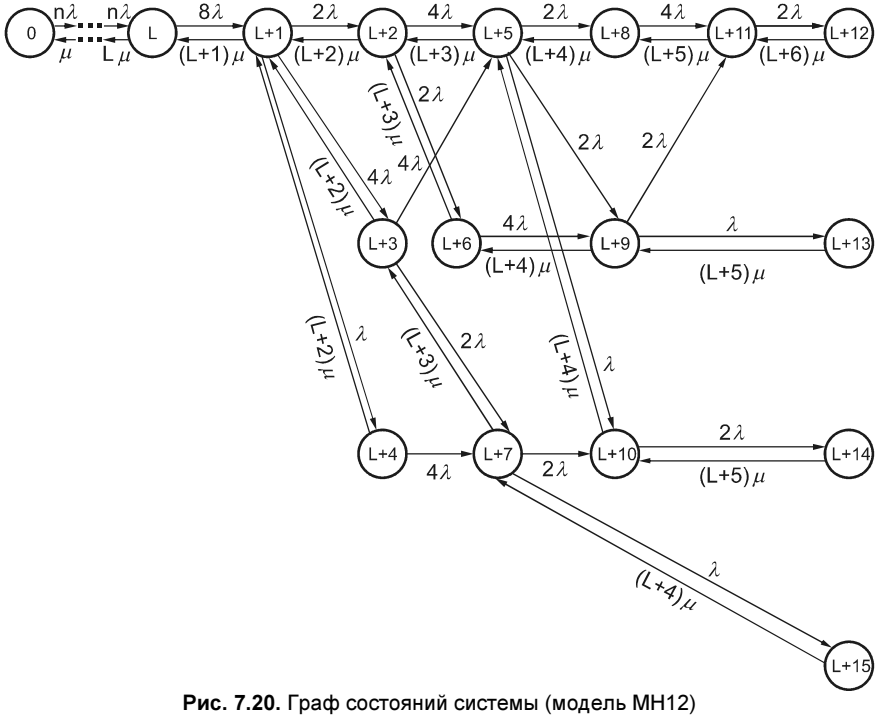


Рис. 7.20. Граф состояний системы (модель МН12)

При составлении переходов в графе состояний и соответствующих уравнений учтены определенные предпочтения при использовании очередной поступившей в комплект ЗИП запасной части. Основой выбора предпочтения является большее значение ВБР невосстанавли-

ваемой системы в том состоянии, куда осуществляется переход. Для иллюстрации правила выбора рассмотрим один пример. Из состояния $L + 6$ возможен переход в $L + 2$ или $L + 4$. Чтобы сделать выбор, найдем ВБР:

$$P(L+2) = 1-(1-p(1-q^2)^2)^2 \approx 1-q^2-2q^3,$$

$$P(L+4) = (1-q^2)^2 \approx 1-2q^2+q^4.$$

Отсюда следует, что предпочтение необходимо отдать переходу из $L + 6$ в $L + 2$. Аналогично устанавливаем приоритеты переходов из $L + 9$ в $L + 6$, из $L + 11$ в $L + 8$, из $L + 10$ в $L + 5$.

Система уравнений для расчета средней наработки до отказа имеет вид:

$$(1)x_0 = x_L + A_L = x_{L-1} - A_L, x_i = n\lambda\overline{T_i}, A_L = \sum_{i=0}^{L-1}\sum_{j=0}^{i} j!/(n\rho)^j, \qquad (7.182)$$

$$(2)8r\rho x_L - 8r\rho x_{L+1} = n\rho + L\Delta A_L, \Delta A_L = \sum_{j=0}^{i-1} j!/(n\rho)^j, i = 1,...,L; \rho = \lambda\overline{T_o},$$

$$(3)-(L+1)x_L + (L+1+7r\rho)x_{L+1} - 2r\rho x_{L+2} - 4r\rho x_{L+3} - r\rho x_{L+4} = n\rho,$$

$$(4)-(L+2)x_{L+1} + (L+2+6r\rho)x_{L+2} - 4r\rho x_{L+5} - 2r\rho x_{L+6} = n\rho,$$

$$(5)-(L+2)x_{L+1} + (L+2+6r\rho)x_{L+3} - 4r\rho x_{L+5} - 2r\rho x_{L+7} = n\rho,$$

$$(6)-(L+2)x_{L+1} + (L+2+4r\rho)x_{L+4} - 4r\rho x_{L+7} = n\rho,$$

$$(7)-(L+3)x_{L+2} + (L+3+5r\rho)x_{L+5} - 2r\rho x_{L+8} - 2r\rho x_{L+9} - r\rho x_{L+10} = n\rho,$$

$$(8)-(L+3)x_{L+2} + (L+3+4r\rho)x_{L+6} - 4r\rho x_{L+9} = n\rho,$$

$$(9)-(L+3)x_{L+3} + (L+3+3r\rho)x_{L+7} - 2r\rho x_{L+10} = n\rho,$$

$$(10)-(L+3)x_{L+5} + (L+4+4r\rho)x_{L+8} - 4r\rho x_{L+11} = n\rho,$$

$$(11)-(L+4)x_{L+6} + (L+4+3r\rho)x_{L+9} - 2r\rho x_{L+11} = n\rho,$$

$$(12)-(L+4)x_{L+5} + (L+4+2r\rho)x_{L+10} = n\rho,$$

$$(13)-(L+5)x_{L+8} + (L+5+2r\rho)x_{L+11} = n\rho.$$

Размерность системы уравнений можно уменьшить до 9, если выразить x_{L+8}, x_{L+10}, x_{L+11} через другие переменные из уравнений (10), (12) и (13) и подставить их в уравнения (7), (9) и (11):

$$(7)-(L+3)x_{L+2} + (L+3+5r\rho - \frac{r\rho(L+4)}{L+4+2r\rho} - 2r\rho b_{85})x_{L+5} - 2r\rho x_{L+9} =$$

$$= n\rho\left(1 + \frac{r\rho}{L+4+2r\rho} + 2r\rho b_{80}\right),$$

$$(9)-(L+3)x_{L+3} - \frac{2r\rho(L+4)}{L+4+2r\rho}x_{L+5} + (L+3+3r\rho)x_{L+7} = n\rho\left(1 + \frac{2r\rho}{L+4+2r\rho}\right),$$

$$(11)-(L+4)x_{L+6} - 2r\rho b_{11,5}x_{L+5} + (L+4+3r\rho)x_{L+9} = n\rho(1+2r\rho b_{11,0}). \qquad (7.183)$$

Здесь

$$b_{80} = \frac{L+5+6r\rho}{(L+4)(L+5)+2r\rho(L+4)+8(r\rho)^2}, b_{80} = \frac{(L+4)(L+5+2r\rho)}{(L+4)(L+5)+2r\rho(L+4)+8(r\rho)^2},$$

$$b_{11,0} = \frac{2L+9+4r\rho}{(L+4)(L+5)+2r\rho(L+4)+8(r\rho)^2}, b_{11,5} = \frac{(L+4)(L+5)}{(L+4)(L+5)+2r\rho(L+4)+8(r\rho)^2}.$$

Для определения среднего времени пребывания системы в работоспособном состоянии и коэффициента готовности системы необходимо найти стационарные вероятности состояний из системы уравнений:

$$(1)\, p_i = \theta_i p_0, p_0 = 1/(\sum_{i=0}^{L}\frac{(n\rho)^i}{i!} + \sum_{i=1}^{15}\theta_{L+i}), \theta_i = (n\rho)^i / i!, i = 0...L;$$

$$(2) - n\rho\theta_{L-1} + (L+8r\rho)\theta_L - (L+1)\theta_{L+1} = 0,$$

$$(3) - 8r\rho\theta_L + (L+1+7r\rho)\theta_{L+1} - (L+2)(\theta_{L+2} + \theta_{L+3} + \theta_{L+4}) = 0,$$

$$(4) - 2r\rho\theta_{L+1} + (L+1+6r\rho)\theta_{L+2} - (L+3)(\theta_{L+5} + \theta_{L+6}) = 0,$$

$$(5) - 4r\rho\theta_{L+1} + (L+2+6r\rho)\theta_{L+3} - (L+3)\theta_{L+7} = 0,$$

$$(6) - r\rho\theta_{L+1} + (L+2+4r\rho)\theta_{L+4} = 0,$$

$$(7) - 4r\rho(\theta_{L+2} + \theta_{L+3}) + (L+3+5r\rho)\theta_{L+5} - (L+4)(\theta_{L+8} + \theta_{L+10}) = 0,$$

$$(8) - 2r\rho\theta_{L+2} + (L+3+4r\rho)\theta_{L+6} - (L+4)\theta_{L+9} = 0, \qquad (7.184)$$

$$(9) - 2r\rho\theta_{L+3} - 4r\rho\theta_{L+4} + (L+3+3r\rho)\theta_{L+7} - (L+4)\theta_{L+15} = 0,$$

$$(10) - 2r\rho\theta_{L+3} + (L+4+4r\rho)\theta_{L+8} - (L+5)\theta_{L+11} = 0,$$

$$(11) - 2r\rho\theta_{L+5} - 4r\rho\theta_{L+6} + (L+4+3r\rho)\theta_{L+9} - (L+5)\theta_{L+13} = 0,$$

$$(12) - r\rho\theta_{L+5} - 2r\rho\theta_{L+7} + (L+4+2r\rho)\theta_{L+10} - (L+5)\theta_{L+14} = 0,$$

$$(13) - 4r\rho\theta_{L+8} - 2r\rho\theta_{L+9} + (L+5+2r\rho)\theta_{L+11} - (L+6)\theta_{L+12} = 0,$$

$$(14) - 2r\rho\theta_{L+11} + (L+6)\theta_{L+12} = 0, \quad (15) - r\rho\theta_{L+9} + (L+5)\theta_{L+13} = 0,$$

$$(16) - 2r\rho\theta_{L+10} + (L+5)\theta_{L+14} = 0, \quad (17) - r\rho\theta_{L+7} + (L+4)\theta_{L+15} = 0.$$

Решение системы проводим в следующем порядке. Сначала из (2) находим:

$$(18)\theta_{L+1} = ((L+8r\rho)\theta_L - n\rho\theta_{L-1})/(L+1) = 8r\rho\theta_L/(L+1).$$

Затем имеем

из (6): $(19)\theta_{L+4} = 8(r\rho)^2\theta_L/((L+1)(L+2+4r\rho))$,

из (9) и (17): $(20)\theta_{L+7} = 2r\rho(\theta_{L+3} + 2\theta_{L+4})/(L+3+2r\rho)$,

из (5) и (20): $(21)\theta_{L+3} = \dfrac{4r\rho(\theta_{L+1} + (L+3)\theta_{L+4}/(L+3+2r\rho))}{L+2+4r\rho(1+r\rho/(L+3+2r\rho))}$,

из (3): $(22)\theta_{L+2} = ((L+1+7r\rho)\theta_{L+1} - 8r\rho\theta_L)/(L+2) - \theta_{L+3} - \theta_{L+4}$.

Чтобы найти θ_{L+5} и θ_{L+6}, выразим

из (13) и (14): $(23)\theta_{L+11} = 2r\rho(2\theta_{L+8} + \theta_{L+9})/(L+5)$,

из (11) и (15): $(24)\theta_{L+9} = 2r\rho(\theta_{L+5} + 2\theta_{L+6})/(L+4+2r\rho)$,

из (10) и (23): $(25)\theta_{L+8} = \frac{2r\rho}{L+4}((1+\frac{2r\rho}{L+4+2r\rho})\theta_{L+5} + \frac{4r\rho}{L+4+2r\rho}\theta_{L+6})$,

из (12) и (16): $(26)\theta_{L+10} = r\rho(\theta_{L+5} + 2\theta_{L+7})/(L+4)$.

Подставив (24)–(26) в уравнения (7) и (8), получим два уравнения относительно θ_{L+5} и θ_{L+6}. Их решение дает:

$$(27)\theta_{L+5} = 4r\rho(L+4+2r\rho)(((L+3)(L+4)+2r\rho(L+3)+8(r\rho)^2)(\theta_{L+2}+\theta_{L+3})+8(r\rho)^2\theta_{L+2})/\Delta_5,$$

$$(28)\theta_{L+6} = ((L+3)(L+4)+2r\rho(2L+7)\theta_{L+2}+4r\rho(L+4)(\theta_{L+2}+\theta_{L+3}))/\Delta_5,$$

$$\Delta_5 = (L+3)((L+3)(L+4)^2+2r\rho(L+4)(3L+10+4r\rho)+16(r\rho)^3).$$

Последовательность расчета по формулам следующая: (1), (18), (19), (21), (20), (22), (27), (28), (25), (24), (26), (23), (14), (15), (16), (17).

После расчета θ_i находим:

$$k\lambda\overline{T}_{E_+}(L) = A(1+\sum_{i=1}^{11}\theta_i)/(r\rho(\theta_{L+7}+\theta_{L+9}+2(\theta_{L+10}+\theta_{L+11}))) =$$

$$= A(1+\sum_{i=1}^{11}\theta_i)/((L+6)\theta_{L+12}+(L+5)(\theta_{L+13}+\theta_{L+14})+(L+4)\theta_{L+15}), \qquad (7.185)$$

$$K_{гс}(L) = 1-(\theta_{L+12}+\theta_{L+13}+\theta_{L+14}+\theta_{L+15})/\left(1+\sum_{i=1}^{L+15}\theta_i\right).$$

Для приближенного расчета показателей надежности с помощью методики [4] надо использовать уже полученные формулы при $L = 0$ и

$$r\rho = -\frac{r}{n}\ln K_{гЗИП}(L). \qquad (7.186)$$

По результатам расчетов (*приложение 7*, примеры П7.22–П7.23) можно сделать следующие выводы:

- расчет средней наработки по формуле (7.184) как среднего времени пребывания в работоспособном состоянии дает всегда оценку снизу, а по формулам (7.182) при $L = 0$ и (7.186) — оценку сверху. Оценка с помощью приближенной методики [4] дает ошибку в 10 раз и более. Поэтому формулы (7.182) и (7.186) приближенной методики использовать нельзя;
- степень влияния количества аппаратуры в ДПС на показатели безотказности ОПС существенно зависит от количества ЗЧ. Так при $L = 1$, $a = 0{,}1$, $A = 0{,}8$ и изменении B от 0,4 до 1,2 приведенная средняя наработка до отказа ОПС $k\lambda T_{ср}$ уменьшается от 4240,6 до 3636,5. При $L = 1$, $a = 0{,}2$, $A = 1{,}6$ и изменении B от 0,8 до 2,4 средняя наработка до отказа уменьшается от 544,2 до 481,95. При $L = 2$ влияние существеннее: при $A = 0{,}8$ и изменении B от 0,4 до 1,2 приведенная средняя наработка до отказа уменьшается от 19 996 до 12 885, при $A = 1{,}2$ — от 1519,2 до 1232,5;

- коэффициент готовности системы существенно больше коэффициента готовности ЗИП. Это можно объяснить наличием глубокого резервирования.

7.14. Вопросы для самоконтроля

- Какие основные допущения принимаются в модели надежности систем с непрерывным пополнением запасов в комплекте одиночного ЗИП?
- В чем состоит основная идея расчета средней наработки до отказа системы с непрерывным пополнением запасов в комплекте ЗИП-О?
- Когда и как формируются заявки на пополнение запасов при стратегии непрерывного пополнения запасов в одиночном ЗИП?
- В чем состоит основное отличие стратегии непрерывного пополнения от стратегии периодического пополнения с экстренными доставками? Возможны ли ситуации, когда стратегия непрерывного пополнения запасов обеспечивает более низкие показатели надежности, чем стратегия ПЭД?
- Сравните точную и приближенную методики оценки надежности систем при непрерывном пополнении запасов в ЗИП-О. Какова величина погрешности при оценке показателей надежности с помощью приближенной методики? В каких случаях не следует использовать приближенную методику?
- Оцените возможности методики расчета надежности, изложенной в данной главе, и приближенной методики *главы 2* для класса последовательно-параллельных структур, сравните их по возможной области применения в пределах указанного класса.
- Оцените возможности методики расчета надежности, изложенной в данной главе, и приближенной методики *главы 2* для класса сложных структур, сравните их по возможной области применения в пределах указанного класса.
- Сравните по критерию надежности степень эффективности использования двух видов ресурса: запасные части при периодическом пополнении запасов и встроенный нагруженный резерв той же кратности. Каковы возможности рационального сочетания обоих видов ресурса?
- Как влияет степень доступности запасов в комплекте ЗИП-О при восстановлении работоспособности на показатели надежности системы?

ГЛАВА 8

Надежность однофункциональных систем при периодическом пополнении запасов с экстренными доставками

8.1. Стратегии пополнения комплекта ЗИП

Стратегия периодического пополнения комплекта ЗИП с экстренными доставками (ПЭД) имеет много модификаций. Поэтому они требуют классификации по ряду признаков.

1. По признаку события формирования заявки на экстренную доставку (ЭД) различают два варианта стратегии:
   - заявка формируется после отказа системы (класс 1);
   - заявка формируется после отказа комплекта ЗИП (класс 2). Отказ комплекта ЗИП следует трактовать как невозможность удовлетворить поступившую заявку на ЗЧ вследствие исчерпания запасов.
2. По признаку объема заявки на экстренную доставку следует различать варианты:
   - полная доставка, когда количество ЗЧ достаточно для восстановления базовой структуры и запасов до нормативного уровня (класс 1);
   - доставка ровно одной ЗЧ того типа, который привел к формированию заявки на ЭД (класс 2);
   - доставка промежуточного количества ЗЧ (класс 3).
3. По признаку ассортимента ЗЧ, которые включены в заявку на ЭД, следует различать варианты:
   - в заявку включаются ЗЧ только одного типа (однородная заявка), а именно того, который привел к ЭД (класс 1);
   - в заявку включаются ЗЧ тех типов, которые необходимы для восстановления базовой структуры по всем типам модулей без восстановления запасов (класс 2);
   - в заявку включаются ЗЧ тех типов, которые необходимы для восстановления базовой структуры и запасов до начального уровня по всем типам модулей в комплекте ЗИП (класс 3);
   - промежуточные варианты между классами 1 и 2 (класс 4);
   - промежуточные варианты между классами 2 и 3 (класс 5).

По совокупности признаков будем различать 30 модификаций стратегии ПЭД. Мнемонические обозначения классов содержат три разряда $\alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}$. Для обозначения укрупненных

классов будем использовать знак X, который ставят тогда, когда данный признак не имеет значения.

Сравнивая стратегии периодического пополнения ($\alpha = 1$) и периодического пополнения с экстренными доставками ($\alpha = 2$), можно установить, что не для всех классов стратегий и не для всех структур введение экстренных доставок улучшает показатели безотказности. Для нерезервированных систем (модель ПЭД1) ни одна стратегия ПЭД1 не улучшает показатели безотказности. Но все стратегии улучшают показатели готовности. Для частично резервированных систем стратегии ПЭД1 не улучшают показатели безотказности, если заявка на ЭД инициирована отказом модуля в нерезервированной части системы. Для класса 1XX экстренные доставки не улучшают показатели безотказности, даже если заявка инициирована отказом модуля в резервированной части системы.

Следует заметить, что во всех классах стратегий, кроме XX1, возникает дополнительный вид зависимости отказов различных элементов, а именно через пополнение запасов. Это вызывает существенное уменьшение количества марковских точек в процессе функционирования по сравнению со стратегией периодического пополнения. Тем не менее в каждом классе существуют марковские точки (МТ) и для анализа надежности надо рассматривать процесс функционирования между соседними МТ. Соседние случайные интервалы связывают друг с другом с помощью методов анализа полумарковских процессов.

Далее рассматриваются стратегии класса XX1, как наиболее простого для анализа, т. к. в нем отсутствует зависимость отказов различных элементов через пополнение запасов, т. е. в этом классе стратегий уровень запасов элементов определенного типа не зависит от поведения других элементов.

8.2. Методы расчета надежности однородных систем при различных стратегиях пополнения типа ПЭД (класс XX1)

В укрупненном классе XX1 содержится четыре класса: 111, 121, 211 и 221 (рис. 8.1). В двух из них (111 и 121) показатели безотказности при стратегии ПЭД совпадают с соответствующими показателями при периодическом пополнении и найдены в *главе 5*. Поэтому для этих классов здесь изучаются только показатели готовности. Для классов 211 и 221 рассматриваются как показатели готовности, так и показатели безотказности.

8.2.1. Класс 111

Граф состояний системы приведен на рис. 8.1, *а*. Он содержит только одну линейную цепочку работоспособных состояний (от 0 до $L + l$), из которых состояния $0...L$ соответствуют полной (базовой) структуре, а другие ($L + 1...L + l$) представляют деградированные работоспособные состояния. Число l определяется схемой резервирования и его кратностью. Очевидно, что этот граф охватывает не все возможные резервированные структуры. Например, он не описывает поведение систем в моделях П11 и П12. Однако класс резервированных структур достаточно широк. В него входят системы из моделей П2–П8 и многие другие.

Система дифференциальных уравнений относительно вероятностей состояний имеет вид:

$$P_0^{'}(t) = -k\lambda P_0(t) + \sum_{i=o}^{l} \mu P_{L+l+1+i}(t)\,, \qquad (8.1)$$

$$P_i^{'}(t) = k\lambda P_{i-1}(t) - k\lambda P_i(t), i = 1...L\,,$$

$$P_{L+i}^{'}(t) = \lambda_{L+i-1} P_L(t) - (\lambda_{L+i} + \Lambda_{L+i}) P_{L+i}(t), i = 1...l, \lambda_{L+l} = 0\,,$$

$$P_{L+l+i}^{'}(t) = \Lambda_{L+i} P_{L+i}(t) - \mu P_{L+l+1+i}(t), i = 0...l\,,$$

$$P_0\,(0) = 1, P_i\,(0) = 0, i > 0, \lambda_L + \Lambda_L = k\lambda\,.$$

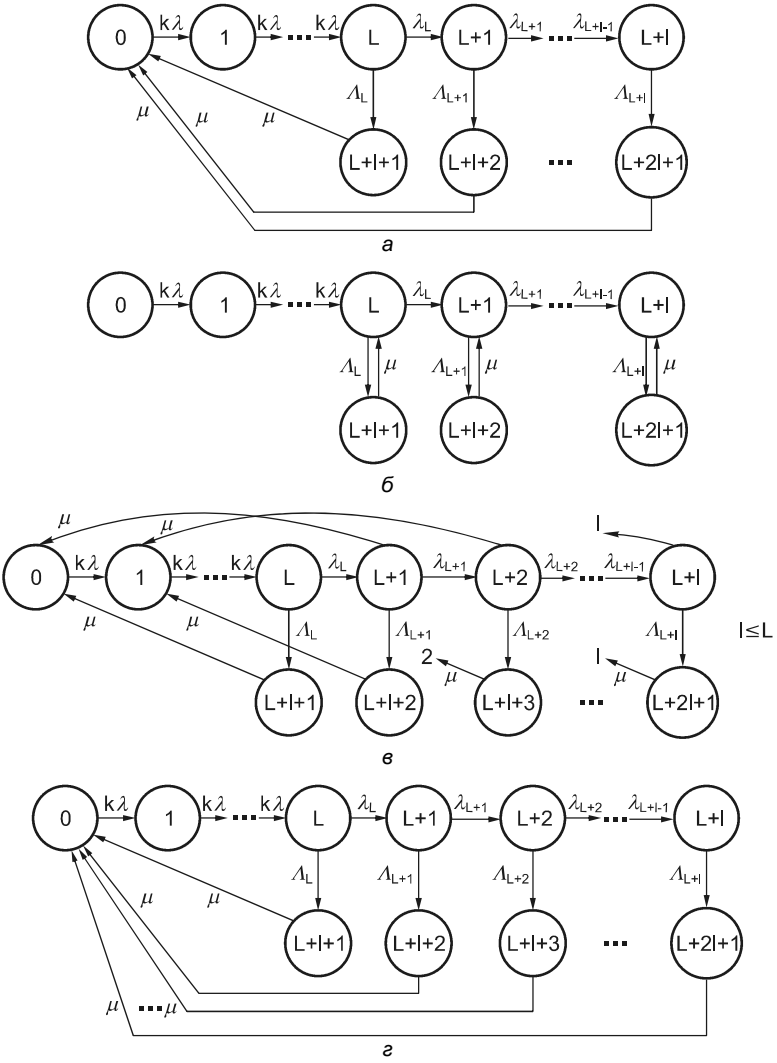


Рис. 8.1. Графы состояний однородной однофункциональной системы при различных стратегиях пополнения запасов ППЭД: *а* — класс 111; *б* — класс 121; *в* — класс 211; *г* — класс 221

Операционное преобразование Лапласа — Карсона в (8.1) дает:

$$(s + k\lambda) P_0^*(s) - \sum_{i=0}^{l} \mu P_{L+l+1+i}^*(s) = s\,, \qquad (8.2)$$

$$(s+k\lambda)P_i^*(s)-k\lambda P_{i-1}^*(s)=0, i=1...L,$$

$$(s+\lambda_{L+i}+\Lambda_{L+i})P_{L+i}^*(s)-\lambda_{L+i-1}P_{L+i-1}^*(s)=0, i=1...l, \lambda_{L+l}=0,$$

$$(s+\mu)P_{L+l+1+i}^*(s)-\Lambda_{L+i}P_{L+i}^*(s)=0, i=0...l.$$

Отсюда

$$P_i^*(s)=\left(\frac{k\lambda}{s+k\lambda}\right)^i P_0^*(s), i=1...L,$$

$$P_{L+i}^*(s)=\left(\frac{k\lambda}{s+k\lambda}\right)^L \prod_{j=1}^{i}\frac{\lambda_{L-1+j}}{s+\lambda_{L+j}+\Lambda_{L+j}}P_0^*(s), i=1...l,$$

$$P_{L+l+1}^*(s)=\left(\frac{k\lambda}{s+k\lambda}\right)^L \frac{\Lambda_L}{s+\mu}P_0^*(s),$$

$$P_{L+l+1+i}^*(s)=\left(\frac{k\lambda}{s+k\lambda}\right)^L \frac{\Lambda_{L+i}}{s+\mu}\prod_{j=1}^{i}\frac{\lambda_{L-1+j}}{s+\lambda_{L+j}+\Lambda_{L+j}}P_0^*(s), i=1...l,$$

$$P_0^*(s)=s/\left(s+k\lambda-\left(\frac{k\lambda}{s+k\lambda}\right)^L \frac{\Lambda_{L+i}}{s+\mu}\sum_{i=0}^{l}\Lambda_{L+i}\prod_{j=1}^{i}\frac{\lambda_{L-1+j}}{s+\lambda_{L+j}+\Lambda_{L+j}}\right), \quad (8.3)$$

$$K_г^*(s,L)=1-\left(\frac{k\lambda}{s+k\lambda}\right)^L \sum_{i=0}^{l}\frac{\Lambda_{L+i}}{s+\mu}\prod_{j=1}^{i}\frac{\lambda_{L-1+j}}{s+\lambda_{L+j}+\Lambda_{L+j}}P_0^*(s). \quad (8.4)$$

Подставляя (8.3) в (8.4), получим:

$$1-K_г^*(s,L)=\frac{s(k\lambda)^L\sum_{i=0}^{l}\Lambda_{L+i}\prod_{j=1}^{i}\frac{\lambda_{L-1+j}}{s+\lambda_{L+j}+\Lambda_{L+j}}}{(s+\mu)(s+k\lambda)^{L+1}-\mu(k\lambda)^L\sum_{i=0}^{l}\Lambda_{L+i}\prod_{j=1}^{i}\frac{\lambda_{L-1+j}}{s+\lambda_{L+j}+\Lambda_{L+j}}}. \quad (8.5)$$

Далее следует представить (8.5) в виде отношения полиномов, разложить знаменатель на простые множители и найти вычеты в простых полюсах.

При $l = 0$ или $l = 1$, $\Lambda_L = 0$ полезным может оказаться еще одно представление коэффициента готовности. Если время до отказа системы с периодическим пополнением запасов с периодом T имеет распределение $F(t, T, L)$, а время экстренной доставки имеет распределение $F_в(t)$, то изображение функции готовности как вероятность застать систему работоспособной в момент времени t можно представить в виде [71]:

$$K_г^*(s,L)=\frac{1-F^*(s,T,L)}{1-F^*(s,T,L)F_в^*(s)}. \quad (8.6)$$

Поток моментов ЭД является рекуррентным с интенсивностью и ведущей функцией:

$$\omega^*(s,T.L)=sH^*(s,T,L), H^*(s,T,L)=\frac{F^*(s,T,L)F_в^*(s)}{1-F^*(s,T,L)F_в^*(s)}. \quad (8.7)$$

При экспоненциальном распределении времени ЭД

$$F_в(t) = 1 - e^{-\mu t}$$

формула (8.6) приобретает вид:

$$K_г^*(s, L) = 1 - s\frac{F^*(s, T.L)}{s + \mu(1 - F^*(s, T.L))} = 1 - \overline{T}_{ЭД}\omega^*(s, T.L)\,. \qquad (8.8)$$

Отсюда коэффициент готовности системы в момент времени t :

$$K_г^*(t, L) = 1 - \overline{T}_{ЭД}\omega(t, L), t \le T\,, \qquad (8.9)$$

$$\omega(t, L) = \omega(t - kT, L), t > T, 0 \le t - kT \le T, k = 0,1,2,...$$

Среднее значение коэффициента готовности в периоде пополнения

$$K_г(T, L) = \frac{1}{T}\int_0^T K_г^*(t, L)dt = 1 - \frac{\overline{T}_{ЭД}}{T}H(T, L)\,. \qquad (8.10)$$

Основная трудность в нахождении точного значения коэффициента готовности состоит в вычислении корней полинома в знаменателе выражения (8.5). Если это не удается, надо использовать приближенные оценки.

Оценка 1 (экспоненциальная модель)

Здесь используется замечательное свойство систем с периодическим пополнением запасов в комплекте ЗИП, состоящее в том, что для моментов времени, кратных периоду пополнения, ВБР с высокой точностью можно находить с помощью экспоненциального распределения. Для остальных моментов времени значение ВБР, вычисленное по экспоненциальной модели, является оценкой снизу. Заменяя систему эквивалентным элементом с интенсивностью отказов $\lambda_э = 1/\overline{T}_0(T, L)$ и интенсивностью восстановления $\mu = 1/\overline{T}_{ЭД}$, получим приближенную формулу:

$$K_{г,пр1}^*(t, L) = \frac{1}{\overline{T}_0(T, L) + \overline{T}_{ЭД}}\left(\overline{T}_0(T, L) + \overline{T}_{ЭД}\exp(-\left(\frac{1}{\overline{T}_0(T, L)} + \frac{1}{\overline{T}_{ЭД}}\right)t)\right). \qquad (8.11)$$

Значения средней наработки до отказа $\overline{T}_0(T, L)$ следует находить по формулам *главы 5*.

Среднее значение коэффициента готовности системы в периоде пополнения

$$K_{г,пр1}(T, L) = 1 - \frac{\overline{T}_{ЭД}}{T}H(T, L) = 1 - \frac{\overline{T}_{ЭД}}{T}\frac{\overline{T}_0\overline{T}_{ЭД}}{(\overline{T}_0 + \overline{T}_{ЭД})^2}\left(1 - \exp(-\left(\frac{1}{\overline{T}_0} + \frac{1}{\overline{T}_{ЭД}}\right)T\right). \qquad (8.12)$$

Оценка 2 (по медленному движению)

Обратное преобразование в формулах (8.6) или (8.8) дает выражение, содержащее константу и смесь экспонент. Оценка 2 основана на использовании нескольких экспонент с самым медленным затуханием и отбрасывании остальных, которые становятся очень малыми после небольшого переходного процесса.

Представим функцию $F^*(s, T, L)$ в виде

$$F^*(s, T, L) = \frac{a_0}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + ... + a_m s^m}\,. \qquad (8.13)$$

Тогда согласно (8.8) имеем:

$$1-K_{г}^{*}(s,L)=\frac{1}{\mu}\omega^{*}(s,L)=\frac{sF^{*}(s,T,L)}{s+\mu(1-F^{*}(s,T,L))}=\frac{a_0}{A_0+A_1s+A_2s^2+...+A_ms^m}. \qquad (8.14)$$

где $A_i=a_i+\mu a_{i+1}, i=0,1,...,m-1; A_m=a_m$.

Если сохраняем одну экспоненту, то из (8.14) получим:

$$1-K_{г,пр2}^{*}(s,L)=\frac{a_0}{A_0+A_1s}.$$

Отсюда

$$K_{г,пр2}^{*}(t,L)=\frac{\mu a_1}{a_0+\mu a_1}+\frac{a_0}{a_0+\mu a_1}\exp(-\omega_1 T),\omega_1=\frac{A_0}{A_1}=\frac{a_0+\mu a_1}{a_1+\mu a_2}. \qquad (8.15)$$

Если сохраняем две экспоненты, то из (8.14) получим:

$$1-K_{г,пр2}^{*}(s,L)=\frac{a_0}{A_2(s+s_1)(s+s_2)},s_{1,2}=\frac{A_1}{2A_2}\left(1\mp\sqrt{1-\frac{4A_0A_2}{A_1^2}}\right). \qquad (8.16)$$

Отсюда

$$K_{г,пр2}^{*}(T,L)=\frac{\mu a_1}{a_0+\mu a_1}+\frac{a_0}{a_0+\mu a_1}\frac{s_2e^{-s_1T}-s_1e^{-s_2T}}{s_2-s_1}. \qquad (8.17)$$

Оценка 3

Представим (8.6) в виде:

$$K_{г}^{*}(s,L)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n^{*}(s)(F_{в}^{*}(s))^n,P_n^{*}(s)=(1-F^{*}(s,L))(F^{*}(s,L))^n. \qquad (8.18)$$

Используя теперь известную оценку [7]

$$(F^{*}(s,L))^n \doteq F_n(t,L)\le F^n(t),(F_{в}^{*}(s))^n \doteq F_{вп}(t,L)\le F_{в}^n(t),$$

получим

$$K_{г,пр3}^{*}(t,L)=\sum_{n=0}^{\infty}(F_n(t,L)-F_{n+1}(t,L))I(\mu t,n)\le(1-F(t,L))(1+\sum_{n=1}^{\infty}F^n(t)I(\mu t,n)\le$$

$$\le\frac{1-F(t,L)}{1-F(t,L)F_{в}(t)}. \qquad (8.19)$$

Приближенное среднее значение коэффициента готовности по периоду пополнения:

$$K_{г,пр1}(T,L)=\frac{1}{\overline{T}_0(T,L)+\overline{T}_{ЭД}}\left(\overline{T}_0(T,L)+\overline{T}_{ЭД}\frac{\exp\left(-\left(\frac{1}{\overline{T}_0(T,L)}+\frac{1}{\overline{T}_{ЭД}}\right)T\right)}{\left(\frac{1}{\overline{T}_0(T,L)}+\frac{1}{\overline{T}_{ЭД}}\right)T}\right), \qquad (8.20)$$

$$K_{г,пр2}(T,L)=\frac{\mu a_1}{a_0+\mu a_1}+\frac{a_0}{a_0+\mu a_1}\frac{\exp(-\omega_1T)}{\omega_1T}, \qquad (8.21)$$

$$K_{г,пр2}(T,L)=\frac{\mu a_1}{a_0+\mu a_1}+\frac{a_0}{(a_0+\mu a_1)^2 T}\left(A_1-\frac{A_2}{s_2-s_1}(s_2^2e^{-s_1T}-s_1^2e^{-s_2T})\right). \qquad (8.22)$$

При $s_1 \ll s_2$, отбрасывая вторую экспоненту и полагая $s_2 \cong A_1/A_2$ из (8.22), получим формулу (8.21).

8.2.2. Класс 121 (одиночная ЭД после отказа системы)

Граф состояний системы приведен на рис. 8.1, *б*. Система имеет базовую структуру S_0 в состояниях 0...L и l деградированных работоспособных структур. Переход из состояния L в неработоспособное состояние $L+l+1$ происходит, если система имеет нерезервированную часть и отказывает один из ее элементов. Другие неработоспособные состояния возникают, когда система имеет уже деградированную структуру. В этом классе стратегий пополнения запасов могут возрасти по сравнению с периодическим пополнением лишь показатели готовности. Поэтому они далее и рассматриваются.

Согласно графу состояний, изображения функций вероятностей состояний удовлетворяют системе уравнений:

$$P^*_{L-1}(s)=\left(\frac{k\lambda}{s+k\lambda}\right)^{L-1}\frac{s}{s+k\lambda}, \qquad (8.23)$$

$$(s+\lambda_{L+i}+\Lambda_{L+i})P^*_{L+i}(s)-\lambda_{L+i-1}P^*_{L+i-1}(s)-\mu P^*_{L+l+1+i}(s)=0, i=0..l, \lambda_{L+l}=0,$$

$$(s+\mu)P^*_{L+l+1+i}(s)-\Lambda_{L+i}P^*_{L+i}(s)=0, i=0..l.$$

Отсюда

$$K^*_г(s,L)=1-\sum_{i=0}^{l}\frac{\Lambda_{L+i}}{s+\mu}P^*_{L+i}(s)=1-\frac{s(k\lambda)^L}{(s+k\lambda)^L}\sum_{i=0}^{l}\frac{(s+\mu)^i\Lambda_{L+i}\prod_{j=0}^{i-1}\lambda_{L+j}}{\prod_{j=0}^{i}(s^2+s(\mu+\lambda_{L+i}+\Lambda_{L+i})+\mu\lambda_{L+i})}. \qquad (8.24)$$

Здесь все полюса удается найти в явном виде, не используя вычислительные процедуры. При $i = 0, 1, ..., l-1$ слагаемые в выражении (8.24) имеют $2i+2$ простых полюсов ($s=-s_{1j}$, $s=-s_{2j}$, $j=0, ..., i$) и один полюс кратности L ($s=-k\lambda$). При $i=l$ интенсивность перехода $\lambda_{L+l}=0$, поэтому последнее слагаемое (8.24) имеет простые полюса: $s=-s_{1j}$, $s=-s_{2j}$, $j=0, ..., l-1$, $s=0$, $s=-(\lambda_{L+l}+\Lambda_{L+l}+\mu)$ и один полюс кратности L: $s=-k\lambda$. Поскольку точное решение удается получить без вычислительных процедур, приближенные решения не рассматриваются.

8.2.3. Класс 211 (полная экстренная доставка после отказа комплекта ЗИП)

В этом классе стратегий полная ЭД позволяет улучшить как показатели готовности, так и показатели безотказности, если в системе возможны деградированные работоспособные структуры ($l \geq 1$).

Граф состояний приведен на рис. 8.1, *в*. Заявка на экстренную доставку $L+1$ запасной части формируется после исчерпания запасов и отказа элемента базовой структуры. Поэтому ЭД приводит к восстановлению состояния 0 из состояний $L+1$ или $L+l+1$. Если до момента

ЭД возникает еще один отказ, то система переходит в состояние $L + 2$ или $L + l + 2$. Тогда после ЭД система переходит в состояние 1, т. к. две ЗЧ уходят на восстановление базовой структуры, а в комплекте ЗИП остается $L - 1$ запасная часть. Переход из состояния $L + l$ в состояние $l - 1$ — это последний переход без потери работоспособности с частичным восстановлением структуры, который приводит к повышению безотказности в результате ЭД. После отказа система выключается до восстановления работоспособности.

Показатели безотказности

При составлении уравнений будем различать два соотношения между параметрами L и l: $L \geq l$ и $L < l$. В первом случае после ЭД обязательно будет восстановлена базовая структура и еще в комплекте ЗИП будет некоторое количество ЗЧ ($L - l + 1$). Во втором случае после ЭД в системе может оказаться деградированная структура при нулевом запасе в комплекте ЗИП.

При $L \geq l$ система уравнений имеет вид:

$$(s + k\lambda)P_0^*(s) - \mu P_{L+1}^*(s) = s\,, \tag{8.25}$$

$$(s + k\lambda)P_i^*(s) - k\lambda P_{i-1}^*(s) - \mu P_{L+1+i}^*(s) = 0, i = 1...l-1\,,$$

$$(s + k\lambda)P_i^*(s) - k\lambda P_{i-1}^*(s) = 0, i = l,...,L\,,$$

$$(s + \lambda_{L+i} + \Lambda_{L+i} + \mu)P_{L+i}^*(s) - \lambda_{L+i-1}P_{L+i-1}^*(s) = 0, i = 1...l, \lambda_{L+l} = 0\,,$$

$$sP_{L+l+1+i}^*(s) - \Lambda_{L+i}P_{L+i}^*(s) = 0, i = 0...l\,,\ Q^*(s,L) = \sum_{i=0}^{l} P_{L+l+1+i}^*(s)\,.$$

При $L < l$ система уравнений имеет вид:

$$(s + k\lambda)P_0^*(s) - \mu P_{L+1}^*(s) = s\,, \tag{8.26}$$

$$(s + k\lambda)P_i^*(s) - k\lambda P_{i-1}^*(s) - \mu P_{L+1+i}^*(s) = 0, i = 1...L\,,$$

$$(s + \lambda_{L+i} + \Lambda_{L+i} + \mu)P_{L+i}^*(s) - \lambda_{L+i-1}P_{L+i-1}^*(s) - \mu P_{2L+1+i}^*(s) = 0, i = 1...l-L-1\,,$$

$$(s + \lambda_{L+i} + \Lambda_{L+i} + \mu)P_{L+i}^*(s) - \lambda_{L+i-1}P_{L+i-1}^*(s) = 0, i = l-L,...,l, \lambda_{L+l} = 0\,,$$

$$sP_{L+l+1+i}^*(s) - \Lambda_{L+i}P_{L+i}^*(s) = 0, i = 0...l\,.$$

Решение систем (8.25) или (8.26) дает выражение для изображения функции вероятности отказов в виде отношения полиномов. Далее надо с помощью вычислительной процедуры найти полюса и выполнить обратное преобразование. Если известно выражение для ВБР, то можно найти и другие показатели безотказности по общим формулам, приведенным в *главе 5*.

Для приближенной оценки вероятности отказа в классе стратегий 211 можно использовать либо экспоненциальную модель, либо медленные движения.

Оценка 1 (медленные движения)

Представим изображение функции вероятности отказа в виде:

$$Q^*(s,L) = \frac{a_0}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + ... + a_m s^m}\,. \tag{8.27}$$

Оставляя в знаменателе три слагаемых, получим

$$Q^*_{np1}(s,L)=\frac{a_0}{a_0+a_1s+a_2s^2}=\frac{a_0}{a_2(s+s_1)(s+s_2)},s_{1,2}=\frac{a_1}{2a_2}\left(1\mp\sqrt{1-\frac{4a_0a_2}{a_1^2}}\right). \quad (8.28)$$

Отсюда

$$Q_{np1}(t,L)=1-\frac{s_2e^{-s_1t}-s_1e^{-s_2t}}{s_2-s_1}. \quad (8.29)$$

При $a_0a_2 \ll a_1^2$ можно использовать приближенные выражения: $s_1 \approx a_0/a_1, s_2 \approx a_1/a_2$.

Оценка 2 (экспоненциальная модель)

Если в графе состояний (см. рис. 8.1, *в*) $\Lambda_L = 0$, то можно использовать идею эквивалентного элемента с интенсивностью отказов

$$\Lambda_э=1/\overline{T}_0(T,L,П1),\overline{T}_0(T,L,П1)=\frac{1}{k\lambda}\sum_{i=0}^{L}I(A,i+1)/I(A,L+1). \quad (8.30)$$

В эквивалентном графе состояний (рис. 8.2) окажется всего три состояния и тогда вероятность отказа можно найти по формуле:

$$Q_{np2}(t,L)=1-\frac{s_2e^{-s_1t}-s_1e^{-s_2t}}{s_2-s_1},s_{1,2}=\frac{1}{2}(\Lambda_э+\Lambda_{L+1}+\mu)\left(1\mp\sqrt{1-\frac{4\Lambda_э\Lambda_{L+1}}{(\Lambda_э+\Lambda_{L+1}+\mu)^2}}\right). \quad (8.31)$$

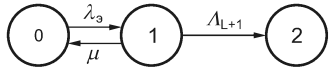


Рис. 8.2. Граф состояний системы при эквивалентной экспоненциальной модели для стратегии пополнения класса 211

Формула (8.31) дает оценку снизу для вероятности отказа, т. к. игнорируется возможность перехода в работоспособное состояние с интенсивностью λ_{L+1}, т. е. завышает надежность. Оценку сверху можно получить, если заменить Λ_{L+1} на сумму $\Lambda_{L+1}+\lambda_{L+1}$.

Показатели готовности

При составлении уравнений по графу состояний (см. рис. 8.1, *в*) учитываем все переходы из неработоспособного состояния в работоспособное.

При $L \geq l$ система уравнений имеет вид:

$$(s+k\lambda)P^*_0(s)-\mu P^*_{L+1}(s)-\mu P^*_{L+l+1}(s)=s, \quad (8.32)$$

$$(s+k\lambda)P^*_i(s)-k\lambda P^*_{i-1}(s)-\mu P^*_{L+1+i}(s)-\mu P^*_{L+l+1+i}(s)=0, i=1...l-1,$$

$$(s+k\lambda)P^*_i(s)-k\lambda P^*_{i-1}(s)=0, i=l,...,L,$$

$$(s+\lambda_{L+i}+\Lambda_{L+i}+\mu)P^*_{L+i}(s)-\lambda_{L+i-1}P^*_{L+i-1}(s)=0, i=1...l, \lambda_{L+l}=0,$$

$$(s+\mu)P^*_{L+l+1+i}(s)-\Lambda_{L+i}P^*_{L+i}(s)=0, i=0...l.$$

При $L < l$ система уравнений имеет вид:

$$(s+k\lambda)P_0^*(s)-\mu P_{L+1}^*(s)-\mu P_{L+l+1}^*(s)=s\,, \tag{8.33}$$

$$(s+k\lambda)P_i^*(s)-k\lambda P_{i-1}^*(s)-\mu P_{L+1+i}^*(s)-\mu P_{L+l+1+i}^*(s)=0, i=1...L\,,$$

$$(s+\lambda_{L+i}+\Lambda_{L+i}+\mu)P_{L+i}^*(s)-\lambda_{L+i-1}P_{L+i-1}^*(s)-\mu P_{2L+1+i}^*(s)-\mu P_{2L+l+1+i}^*(s)=0, i=1..l-L-1\,,$$

$$(s+\lambda_l+\Lambda_l+\mu)P_l^*(s)-\lambda_{l-1}P_{l-1}^*(s)-\mu P_{L+2l+1}^*(s)=0\,,$$

$$(s+\lambda_{l+i}+\Lambda_{l+i}+\mu)P_{l+i}^*(s)-\lambda_{l+i-1}P_{l+i-1}^*(s)=0, i=1,2,...L, \lambda_{L+l}=0\,,$$

$$(s+\mu)P_{L+l+1+i}^*(s)-\Lambda_{L+i}P_{L+i}^*(s)=0, i=0..l\,.$$

Коэффициент готовности системы:

$$K_г^*(s,L)=1-\sum_{i=0}^{l}\frac{\Lambda_{L+i}}{s+\mu}P_{L+i}^*(s)\,. \tag{8.34}$$

Далее надо выполнить обратное преобразование.

Рассмотрим один частный случай: $L = 0$.

Согласно графу состояний (рис. 8.3) система уравнений для нахождения вероятности отказа имеет вид:

$$(s+k\lambda)P_0^*(s)-\mu P_1^*(s)=s\,, \tag{8.35}$$

$$(s+\lambda_i+\Lambda_i+\mu)P_i^*(s)-\lambda_{i-1}P_{i-1}^*(s)-\mu P_{i+1}^*(s)=0, i=1..l-1\,,$$

$$(s+\Lambda_l+\mu)P_l^*(s)-\lambda_{l-1}P_{l-1}^*(s)=0, sP_{l+1+i}^*(s)-\Lambda_i P_i^*(s)=0, i=0..l\,,$$

$$Q^*(s,0)=\sum_{i=0}^{l}P_{L+l+1+i}^*(s)=\frac{1}{s}\sum_{i=0}^{l}\Lambda_i P_i^*(s)\,.$$

Коэффициент готовности определяют из следующей системы уравнений:

$$(s+k\lambda)P_0^*(s)-\mu P_1^*(s)-\mu P_{l+1}^*(s)=s\,, \tag{8.36}$$

$$(s+\lambda_i+\Lambda_l+\mu)P_i^*(s)-\lambda_{i-1}P_{i-1}^*(s)-\mu P_{i+1}^*(s)-\mu P_{l+1+i}^*(s)=0, i=1..l-1\,,$$

$$(s+\Lambda_l+\mu)P_l^*(s)-\lambda_{l-1}P_{l-1}^*(s)-\mu P_{2l+1}^*(s)=0\,,$$

$$(s+\mu)P_{l+1+i}^*(s)-\Lambda_i P_i^*(s)=0, i=0..l\,,$$

$$K_г^*(s,0)=1-\sum_{i=0}^{l}P_{l+1+i}^*(s)=1-\sum_{i=0}^{l}\frac{\Lambda_i}{s+\mu}P_i^*(s)\,. \tag{8.37}$$

Из (8.34) и (8.36) находят сначала $K_г^*(t,L)$, а затем $K_г(T,L)$.

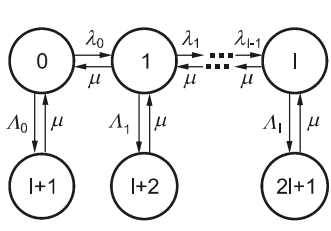


Рис. 8.3. Граф состояний системы при стратегии пополнения класса 211 и $L = 0$

8.2.4. Класс 221 (одиночная ЭД после отказа комплекта ЗИП)

Граф состояний приведен на рис. 8.1, *г*.

Показатели безотказности

Система уравнений для нахождения вероятности отказов имеет вид:

$$P^*_{L-1}(s)=\frac{s(k\lambda)^{L-1}}{(s+k\lambda)^{L}},L\ge 1,\quad (s+k\lambda)P^*_L(s)-k\lambda P^*_{L-1}(s)-\mu P^*_{L+1}(s)=0, \tag{8.38}$$

$$(s+\lambda_{L+i}+\Lambda_{L+i}+\mu)P^*_{L+i}(s)-\lambda_{L+i-1}P^*_{L+i-1}(s)-\mu P^*_{L+1+i}(s)=0,i=1...l-1,$$

$$(s+\lambda_{L+l}+\Lambda_{L+l}+\mu)P^*_{L+l}(s)-\lambda_{L+l-1}P^*_{L+l-1}(s)=0,$$

$$sP^*_{L+l+1+i}(s)-\Lambda_{L+i}P^*_{L+i}(s)=0,i=0...l,$$

$$Q^*(s,L)=\sum_{i=0}^{l}P^*_{L+l+1+i}(s)=\frac{1}{s}\sum_{i=0}^{l}\Lambda_{L+i}P^*_{L+i}(s).$$

При $L = 0$ используем систему (8.36). Другие показатели безотказности находим по общим формулам *главы 5*.

Показатели готовности

Система уравнений для вероятностей состояний при $L \ge 1$ имеет вид:

$$P^*_{L-1}(s)=\frac{s(k\lambda)^{L-1}}{(s+k\lambda)^{L}}P^*_0(s),L\ge 1, \tag{8.39}$$

$$(s+k\lambda)P^*_L(s)-k\lambda P^*_{L-1}(s)-\mu P^*_{L+1}(s)-\mu P^*_{L+l+1}(s)=0,$$

$$(s+\lambda_{L+i}+\Lambda_{L+i}+\mu)P^*_{L+i}(s)-\lambda_{L+i-1}P^*_{L+i-1}(s)-\mu P^*_{L+1+i}(s)-\mu P^*_{L+l+1+i}(s)=0,i=1...l-1,$$

$$(s+\lambda_{L+l}+\Lambda_{L+l}+\mu)P^*_{L+l}(s)-\lambda_{L+l-1}P^*_{L+l-1}(s)-\mu P^*_{L+2l+1}(s)=0,$$

$$(s+\mu)P^*_{L+l+1+i}(s)-\Lambda_{L+i}P^*_{L+i}(s)=0,i=0...l,$$

$$K^*_{г}(s,L)=1-\sum_{i=0}^{l}P^*_{L+l+1+i}(s)=1-\sum_{i=0}^{l}\frac{\Lambda_{L+i}}{s+\mu}P^*_{L+i}(s).$$

При $L = 0$ используем систему (8.37). Из (8.37) и (8.39) находят сначала $K^*_{г}(t,L)$, а затем $K_{г}(T,L)$.

Далее рассмотрим различные структурные схемы и соответствующие модели надежности.

8.3. Нерезервированная система (модель ПЭД1)

Для нерезервированной системы рассматриваются стратегии XX1. Значения первых двух параметров не влияют на показатели безотказности и их можно рассчитывать по формулам модели П1 *(см. разд. 5.2)*. Поскольку в системе нет деградированных работоспособных структур, значение первого параметра стратегии не влияет и на показатели готовности. По-

этому далее рассматриваются только показатели готовности при стратегиях пополнения X11 и X21.

8.3.1. Стратегия X11 (полная ЭД)

Граф состояний приведен на рис. 8.4, *а*. Легко убедиться, что этот граф является частным случаем графа, приведенного на рис. 8.1, *а*, при $l = 0$, $\Lambda_L = k\lambda$, $\lambda_L = 0$. Используя формулу (8.8) и изображение для функции вероятности отказа системы из *разд. 5.2*, находим:

$$F^*(s,L) = \left(\frac{k\lambda}{s+k\lambda}\right)^{L+1} = \frac{a_0}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + a_L s^L + a_{L+1} s^{L+1}}, a_i = C_{L+1}^i (k\lambda)^{L+1-i}, \quad (8.40)$$

$$K_г^*(s,L) = 1 - \frac{s(k\lambda)^{L+1}}{s(s+k\lambda)^{L+1} + \mu((s+k\lambda)^{L+1} - (k\lambda)^{L+1})}, \quad (8.41)$$

$$\omega^*(s,L) = \frac{s\mu F^*(s,T.L)}{s + \mu(1 - F^*(s,T.L))} = \frac{\mu a_0}{A_0 + A_1 s + A_2 s^2 + \ldots + s^{L+1}}, A_i = a_i + \mu a_{i+1}, i = 0,1,\ldots,L. \quad (8.42)$$

Рис. 8.4. Граф состояний нерезервированной системы (модель ПЭД1):
а — стратегия X11; *б* — стратегия X21

Разлагая выражение в знаменателе (8.42) на простые множители, получим:

$$\omega^*(s,L) = \frac{\mu a_0}{(s+s_0)(s+s_1)\ldots(s+s_L)}. \quad (8.43)$$

Из (8.43) и (8.10) имеем:

$$\omega(t,L) = \frac{\mu a_0}{a_0 + \mu a_1}\left(1 - \sum_{i=0}^{L} e^{-s_i t} \Big/ \prod_{j=0, j\neq i}^{L}\left(1 - \frac{s_i}{s_j}\right)\right),$$

$$K_г^*(t,L) = \frac{\mu a_1}{a_0 + \mu a_1} + \frac{a_0}{a_0 + \mu a_1}\sum_{i=0}^{L} e^{-s_i t} \Big/ \prod_{j=0, j\neq i}^{L}\left(1 - \frac{s_i}{s_j}\right). \quad (8.44)$$

Среднее значение коэффициента готовности в периоде пополнения:

$$K_г(T,L) = \frac{\mu a_1}{a_0 + \mu a_1} + \frac{a_0}{a_0 + \mu a_1}\sum_{i=0}^{L} \frac{1 - e^{-s_i T}}{s_i T} \Big/ \prod_{j=0, j\neq i}^{L}\left(1 - \frac{s_i}{s_j}\right). \quad (8.45)$$

Для получения точных значений показателей готовности необходимо находить корни полинома в знаменателе (8.42) с помощью численной процедуры. Если это затруднительно, то можно пользоваться приближенными оценками.

Оценки 1, 2 и 3

Оценка 1 вычисляется по формуле (8.11), где среднюю наработку до отказа находят по формуле (8.30). Для получения оценки 2 используем формулы (8.16), (8.17) и (8.40).

Согласно (8.19) оценка 3 определяется по формуле:

$$K^*_{г,пр3}(T,L) = 1 - I(A,L+1) + \sum_{n=1}^{\infty}(I(A,n(L+1)) - I(A,(n+1)(L+1)))I(\mu T,n) \le$$

$$\le (1 - I(A,L+1))(1 + \sum_{n=1}^{\infty} I^n(A,L+1)I(\mu T,n) \le \frac{1 - I(A,L+1)}{1 - I(A,L+1)I(\mu T,1)}. \quad (8.46)$$

Среднее значение коэффициента готовности находим по формулам (8.20)–(8.22).

При $L = 0$ и 1, в частности, имеем:

$$K^*_г(t,0) = (1 + k\lambda\overline{T}_{ЭД}e^{-(1+k\lambda\overline{T}_{ЭД})t/\overline{T}_{ЭД}}) / (1 + k\lambda\overline{T}_{ЭД}), \quad (8.47)$$

$$K_г(T,0) = \frac{D}{D+A} + \frac{A}{(D+A)^2}(1 - e^{-A-D}), D = T / \overline{T}_{ЭД},$$

$$K^*_г(t,1) = \frac{2\mu}{2\mu + k\lambda} + \frac{k\lambda}{2\mu + k\lambda}\frac{s_2e^{-s_1t} - s_1e^{-s_2t}}{s_2 - s_1}, s_{1,2} = \frac{1}{2}(2k\lambda + \mu)\left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4k\lambda(2\mu + k\lambda)}{(\mu + 2k\lambda)^2}}\right),$$

$$K_г(T,1) = \frac{2}{2 + k\rho} + \frac{\overline{T}_{ЭД}}{T}\frac{1 + 2k\rho}{(2 + k\rho)^2} - \frac{\overline{T}^2_{ЭД}}{T(2 + k\rho)^2}\frac{s_2^2e^{-s_1T} - s_1^2e^{-s_2T}}{s_2 - s_1}, \rho = \lambda\overline{T}_{ЭД}.$$

Сравнивая формулы (8.41), (8.47) с формулами (1.18), (1.20) и (1.22), видим, что при стратегии пополнения Х11 в модели ПЭД1 коэффициент готовности нерезервированной системы совпадает с коэффициентом готовности ЗИП.

Поскольку найдено точное значение коэффициента готовности, есть возможность оценить погрешности оценок.

Согласно (8.11) оценка 1 при $L = 1$:

$$K^*_{г,пр1}(T,1) = \frac{\beta}{k\rho + \beta} + \frac{k\rho}{k\rho + \beta}e^{-A/k\rho - A/\beta}, \beta = k\lambda\overline{T}_0(T,1) = 1 + \frac{1 - e^{-A}}{1 - (1 + A)e^{-A}}, \quad (8.48)$$

$$K_{г,пр1}(T,1) = \frac{\beta}{k\rho + \beta} + \frac{k\rho}{k\rho + \beta}\frac{1 - e^{-A/k\rho - A/\beta}}{A/k\rho + A/\beta}.$$

Оценки 2 из формул (8.16) и (8.17) совпадают с точными значениями (8.47). Согласно (8.46) оценка 3:

$$K^*_{г,пр3}(T,1) = (1 + A)e^{-A} + ((I(A,2) - I(A,4)(1 - e^{-\mu T}) +$$

$$+((I(A,4) - I(A,6)(1 - (1 + \mu T)e^{-\mu T}) \le \frac{(1 + A)e^{-A}}{1 - (1 - (1 + A)e^{-A})(1 - e^{-\mu T})}. \quad (8.49)$$

При $L = 2$ из (8.39) находим:

$$K^*_г(s,2) = 1 - \frac{(k\lambda)^3}{s^3 + s^2(\mu + 3k\lambda) + s(3k\lambda\mu + 3(k\lambda)^2) + (k\lambda)^2(k\lambda + 3\mu)} = 1 - \frac{(k\lambda)^3}{(s + s_0)(s + s_1)(s + s_2)}.$$

Отсюда

$$K^*_г(t,2) = \frac{3}{3 + k\rho} + \frac{k\rho}{3 + k\rho}\left(\frac{e^{-s_0t}}{\left(1 - \frac{s_0}{s_1}\right)\left(1 - \frac{s_0}{s_2}\right)} + \frac{e^{-s_1t}}{\left(1 - \frac{s_1}{s_0}\right)\left(1 - \frac{s_1}{s_2}\right)} + \frac{e^{-s_2t}}{\left(1 - \frac{s_2}{s_0}\right)\left(1 - \frac{s_2}{s_1}\right)}\right). \quad (8.50)$$

Среднее значение коэффициента готовности:

$$K_г(T,2)=\frac{3}{3+k\rho}+\frac{k\rho}{3+k\rho}\left(\frac{1-e^{-s_0T}}{s_0T\left(1-\frac{s_0}{s_1}\right)\left(1-\frac{s_0}{s_2}\right)}+\frac{1-e^{-s_1T}}{s_1T\left(1-\frac{s_1}{s_0}\right)\left(1-\frac{s_1}{s_2}\right)}+\frac{1-e^{-s_2T}}{s_2T\left(1-\frac{s_2}{s_0}\right)\left(1-\frac{s_2}{s_1}\right)}\right). \quad (8.51)$$

Если два корня получаются комплексно-сопряженными: $s_{1,0}= a \pm ib$, $s_2 = c$, то вместо (8.50) и (8.51) следует использовать формулы:

$$K^*_г(t,2)=\frac{3}{3+k\rho}+\frac{k\rho}{3+k\rho}\left(A_1e^{-a\mu t}\sin(b\mu t)+A_2e^{-a\mu t}\cos(b\mu t)+A_3e^{-c\mu t}\right),$$

$$K_г(T,2)=\frac{3}{3+k\rho}+\frac{k\rho}{3+k\rho}\left(\frac{1}{(a^2+b^2)D}\left(A_1\left(b-e^{-aD}(a\sin(bD)+b\cos(bD))\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+A_2\left(a-e^{-aD}(a\cos(bD)-b\sin(bD))\right)+\frac{A_3}{cD}(1-e^{-cD})\right)\right) \quad (8.51, а)$$

$$A_1=\frac{c}{b}\frac{a(c-a)+b^2}{(c-a)^2+b^2},\ A_3=1-A_2=\frac{a^2+b^2}{(c-a)^2+b^2}.$$

Для получения оценки 1 сначала вычисляем параметр

$$\beta=k\lambda\overline{T}_0(T,2)=1+\frac{2-(2+A)e^{-A}}{1-(1+A+A^2/2)e^{-A}},$$

а затем используем формулы (8.48) для расчета коэффициента готовности.

Для получения оценки 2 используем формулы (8.17) и (8.22):

$$K^*_{г,пр2}(T,2)=\frac{3}{3+k\rho}+\frac{k\rho}{3+k\rho}\frac{s_2e^{-s_1T}-s_1e^{-s_2T}}{s_2-s_1},\ s_{1,2}=\frac{3k\lambda(1+k\rho)}{2(1+3k\rho)}\left(1\mp\sqrt{1-\frac{4(1+3k\rho)(3+k\rho)}{9(1+k\rho)^2}}\right),$$

$$K_{г,пр2}(T,2)=\frac{3}{3+k\rho}+\frac{1}{(3+k\rho)^2A}\left(3k\rho(1+k\rho)-(1+3k\rho)\frac{s_2^2e^{-s_1T}-s_1^2e^{-s_2T}}{s_2-s_1}\right). \quad (8.52)$$

Если дискриминант квадратного уравнения положительный и корни полинома комплексно-сопряженные: $s_{2,1}= a \pm ib$, то вместо формул (8.52) следует использовать формулы:

$$K^*_{г,пр2}(T,2)=\frac{3}{3+k\rho}+\frac{k\rho e^{-aD}}{3+k\rho}\left(\frac{a}{b}\sin(bD)+\cos(bD)\right),$$

$$K_{г,пр2}(T,2)=\frac{3}{3+k\rho}+\frac{k\rho}{(3+k\rho)(a^2+b^2)D}\left(2a-e^{-aD}\left(2a\cos(bD)+\frac{a^2-b^2}{b}\sin(bD)\right)\right).$$

$$a=\frac{3k\rho(1+k\rho)}{2(1+3k\rho)},\ b=\frac{\sqrt{\Delta}}{2(1+3k\rho)},\ \Delta=(k\rho)^2(4(3+k\rho)(1+3k\rho)-9(1+k\rho)^2) \quad (8.52, а)$$

Согласно (8.46) оценка 3:

$$K^*_{г,пр3}(T,2)=(1+A+A^2/2)e^{-A}+\left(\left(I(A,3)-I(A,6)(1-e^{-\mu T})+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\left(I(A,6)-I(A,9)(1-(1+\mu T)e^{-\mu T}\right)\le\frac{(1+A+A^2/2)e^{-A}}{1-(1-(1+A+A^2/2)e^{-A})(1-e^{-\mu T})}.\right.\right. \quad (8.53)$$

8.3.2. Стратегия X21 (одиночная ЭД)

Граф состояний приведен на рис. 8.4, *б*. Легко убедиться, что этот граф является частным случаем графа, приведенного на рис. 8.1, *б*, при $l = 0$, $\Lambda_L = k\lambda$, $\lambda_L = 0$. Из (8.24) имеем:

$$K_г^*(s, L) = 1 - \frac{k\lambda}{s + k\lambda + \mu}\left(\frac{k\lambda}{s + k\lambda}\right)^L.$$

Отсюда

$$1 - K_г^*(t, L) = \int_0^t \frac{(k\lambda)^L x^{L-1}}{(L-1)!}\frac{k\lambda}{k\lambda + \mu}(1 - e^{-(k\lambda+\mu)(t-x)})dx =$$

$$= \frac{k\rho}{1 + k\rho}(I(k\lambda t, L) - (-k\rho)^L e^{-(1+k\rho)\mu t} I(-\mu t, L)). \qquad (8.54)$$

Среднее значение коэффициента готовности:

$$K_г(T, L) = \frac{D}{D + A} + \frac{A(-k\rho)^L}{(D + A)^2}(1 - e^{-A-D}) + \frac{1}{D + A}\sum_{i=0}^{L-1}(1 - (-k\rho)^{L-i} I(A, i+1), D = T / \overline{T}_{эд}. \quad (8.55)$$

При $L = 0$, 1 и 2, в частности, имеем:

$$K_г^*(t, 0) = \frac{D}{D + A} + \frac{A}{D + A}e^{-(1+k\rho)t}, K_г(T, 0) = \frac{D}{D + A} + \frac{A}{(D + A)^2}(1 - e^{-A-D}), D = T / \overline{T}_{эд},$$

$$K_г^*(t, 1) = \frac{D}{D + A} + \frac{A}{D}e^{-k\lambda t}\left(1 - \frac{A}{D + A}e^{-\mu t}\right), K_г(T, 1) = \frac{D}{D + A} + \frac{1 - e^{-A}}{D} - \frac{A^2}{(D + A)^2}\frac{1 - e^{-A-D}}{D},$$

$$K_г^*(t, 2) = \frac{D}{D + A} + \frac{A}{D + A}e^{-k\lambda t}\left(1 + k\lambda t + (k\lambda t)^2\frac{\mu t - 1 + e^{-\mu t}}{(\mu t)^2}\right), \qquad (8.56)$$

$$K_г(T, 2) = \frac{1}{1 + k\rho}(1 + \frac{1}{D}(I(A, 1) + I(A, 2)) + \frac{k\rho}{D}I(A, 2) + \frac{(k\rho)^3}{D(1 + k\rho)}(1 - e^{-A-D}) - \frac{(k\rho)^2}{D}I(A, 1)).$$

По результатам расчетов (*приложение 8*, примеры П8.1–П8.4) можно сделать следующие выводы:

- даже при отсутствии запасных частей в комплекте ЗИП возможность экстренной доставки и ее фактическое использование внутри периода пополнения существенно улучшает показатели готовности системы. Так при $A = 0{,}1$ коэффициент готовности по наихудшему циклу без экстренных доставок равен 0,9048, а при наличии ЭД с параметром $k\rho = 0{,}1$ он увеличивается до 0,9394, а при $k\rho = 0{,}01$ — до 0,9901. Это лишь немного меньше, чем тот же показатель при периодическом пополнении и $L = 1$, равный 0,9953. Коэффициент неготовности при использовании ЭД уменьшается в 2–9 раз;
- при неизменном среднем времени ЭД увеличение периода пополнения влияет на показатели готовности не столь существенно, как при периодическом пополнении: увеличение D от 1 до 20 приводит к уменьшению $K_г(T,0)$ от 0,96423 до 0,9132. Но при пропорциональном увеличении периода пополнения и среднего времени ЭД ухудшение показателей готовности весьма существенно. Так при $D = 10$ и увеличении A от 0,1 до 2 коэффициент готовности $K_г(T, 0)$ уменьшается от 0,9911до 0,8472;
- наличие в составе комплекта ЗИП запасных частей существенно повышает эффективность экстренных доставок. Так при $k\rho = 0{,}1$, $A = 1$ и $L = 1$ коэффициент готовности по

наихудшему циклу $K_г^*(\mathrm{T}, 1) = 0{,}9596$, а при отсутствии ЭД $K_г^*(\mathrm{T}, 1) = 0{,}7358$. При отсутствии ЗЧ эти значения равны соответственно 0,9091 и 0,3679;

- оценка коэффициента готовности первого типа по формулам (8.11) и (8.30) дает существенно меньшую погрешность, чем оценка третьего типа, полученная по формуле (8.46). При расчете коэффициента готовности по наихудшему циклу оценка (8.11) является оценкой сверху, а по произвольному циклу оценка (8.12) является оценкой снизу. При этом погрешность при расчете коэффициента неготовности обычно не превышает 30 %, а при практически интересном диапазоне значений: $K_г^*(T, 1) = 0{,}9...0{,}98$ ошибка не превосходит 10 %;
- переход от полной ЭД к одиночной ЭД снижает коэффициент неготовности системы не существенно: на 25–30 % при L =1 и 2. Например, при $k\rho = 0{,}1$, $A = 1$ показатель снижается на 16,5 % при $L = 1$ и на 14,6 % при $L = 2$.

8.4. Дублированная система (модель ПЭД2)

Система (рис. 8.5) имеет базовую и одну работоспособную структуру ($l = 1$). Поэтому при стратегиях 211 и 221 экстренная доставка позволяет улучшить и показатели безотказности. Показатели готовности улучшаются при четырех стратегиях пополнения: 111, 121, 211 и 221.

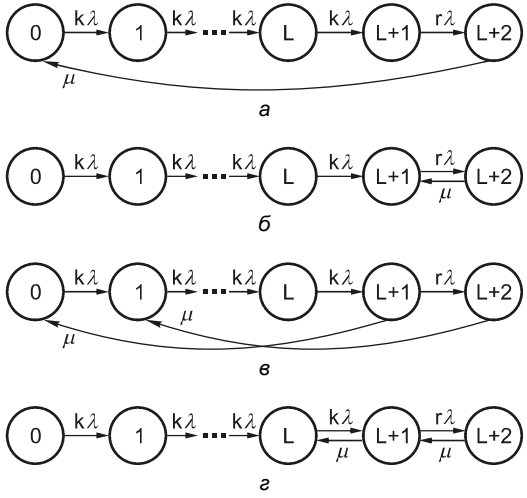


Рис. 8.5. Граф состояний дублированной системы (модель ПЭД2): *а* — стратегия 111; *б* — стратегия 121; *в* — стратегия 211; *г* — стратегия 221

8.4.1. Стратегия 111

Граф состояний системы приведен на рис. 8.5, *а*. Он является частным случаем графа на рис. 8.1, *а* при $l = 1$, $\lambda_L = k\lambda$, $\Lambda_{L+1} = r\lambda$, $\Lambda_L = \lambda_{L+1} = 0$. При этих значениях интенсивностей переходов из (8.5) имеем:

$$1 - K_г^*(s, L) = \frac{0{,}5s(k\lambda)^{L+2}}{(s + k\lambda)^{L+1}(s + r\lambda)(s + \mu) - 0{,}5\mu(k\lambda)^{L+2}}. \qquad (8.57)$$

Этот же результат можно получить и непосредственно из графа (рис. 8.5, *а*). Разлагая знаменатель (8.57) по степеням *s*, получим:

$$1-K_c^*(s,L)=\frac{a_0}{A_0+sA_1+s^2A_2+\ldots+s^{L+1}A_{L+1}+s^{L+2}},\ A_i=a_i+\mu a_{i+1},\ a_0=r\lambda(k\lambda)^{L+1}, \qquad (8.58)$$

$$a_1=(3+L)r\lambda(k\lambda)^L,\ a_2=\frac{1}{4}(L+1)(L+4)(k\lambda)^L,\ a_3=\frac{1}{12}L(L+1)(L+5)(k\lambda)^{L-1},\ a_{L+1}=(L+1,5)k\lambda\ .$$

Функция интенсивности потока ЭД имеет изображение:

$$\omega^*(s,L)=\mu(1-K_c^*(s,L))=\frac{\mu a_0}{(s+s_0)(s+s_1)\ldots(s+s_{L+1})}. \qquad (8.59)$$

Обратное преобразование дает:

$$\omega(t,L)=\frac{\mu a_0}{a_0+\mu a_1}\left(1-\sum_{i=0}^{L+1}e^{-s_it}\Big/\prod_{j=0,j\neq i}^{L+1}(1-\frac{s_i}{s_j})\right). \qquad (8.60)$$

Среди корней полинома могут быть комплексно-сопряженные пары. Для них требуется дополнительные преобразования в (8.60), чтобы привести выражение к действительному виду. Коэффициент готовности находят по формуле (8.9). Среднее количество ЭД в периоде пополнения:

$$H(T,L)=\frac{\mu a_0}{a_0+\mu a_1}\left(1-\sum_{i=0}^{L+1}\frac{1-e^{-s_iT}}{s_iT}\Big/\prod_{j=0,j\neq i}^{L+1}(1-\frac{s_i}{s_j})\right). \qquad (8.61)$$

Среднее значение коэффициента готовности находят по формуле (8.10).

Найдем теперь приближенные значения коэффициента готовности.

Оценка 1 (экспоненциальная модель)

Согласно формулам (5.74) и (5.75) *главы 5* средняя наработка до отказа системы в модели П2 имеет значение:

$$k\lambda T_{cp}(T,L)=k\lambda\tau_1/(I(A,L+1)-2^{L+1}e^{-A/2}I(A/2,L+1)),$$

$$k\lambda\tau_1=2^{L+2}(1-e^{-A/2})-\sum_{i=0}^{L}(2^{L+1-i}-1)I(A,i+1). \qquad (8.62)$$

В частности, при L = 1 и 2 имеем:

$$k\lambda T_{cp}(T,0)=(3-4e^{-A/2}+e^{-A})/(1-2e^{-A/2}+e^{-A}),$$

$$k\lambda T_{cp}(T,1)=(4-8e^{-A/2}+(4+A)e^{-A})/(1-4e^{-A/2}+(3+A)e^{-A}),$$

$$k\lambda T_{cp}(T,2)=\frac{5-16e^{-A/2}+(11+4A+A^2/2)e^{-A}}{1-8e^{-A/2}+(7+3A+A^2/2)e^{-A}}.$$

Далее надо использовать формулы (8.11) и (8.12).

Оценка 2 (по медленному движению)

Согласно (8.16) и (8.58):

$$K^*_{г,пр2}(T,L)=\frac{3+L}{3+L+k\rho}+\frac{k\rho}{3+L+k\rho}\frac{s_2e^{-s_1A}-s_1e^{-s_2A}}{s_2-s_1}, \tag{8.63}$$

$$s_{1,2}=\frac{3((L+1)(L+4)+2k\rho)}{2L(L+1)(L+5)+6(L+1)(L+4)k\rho}\times$$

$$\times\left(1\mp\sqrt{1-\frac{8(L(L+1)(L+5)+3(L+1)(L+4)k\rho)(L+3+k\rho)}{3((L+1)(L+4)+2k\rho)^2}}\right).$$

При $A_0A_2 \ll A_1^2$ можно удалить в (8.63) вторую экспоненту. Тогда

$$K^*_{г,пр2}(T,L)=\frac{3+L}{3+L+k\rho}+\frac{k\rho}{3+L+k\rho}e^{-\omega_1A}, \tag{8.64}$$

$$\omega_1=\frac{A_0}{k\lambda A_1}=\frac{3+L+k\rho}{0,5(L+1)(L+4)+(L+3)k\rho}.$$

Интенсивность потока ЭД находят с помощью формулы (8.59).

Оценку 1 для среднего значения коэффициента готовности вычисляют по формуле (8.12).

Оценку 2 вычисляют по формуле:

$$K_{г,пр2}(T,L)=\frac{3+L}{3+L+k\rho}+\frac{k\rho}{3+L+k\rho}\left(\frac{s_2}{s_1}(1-e^{-s_1A})-\frac{s_1}{s_2}(1-e^{-s_2A})\right). \tag{8.65}$$

При использовании одной экспоненты:

$$K_{г,пр2}(T,L)=1-H(T,L)/D=\frac{3+L}{3+L+k\rho}+\frac{k\rho}{3+L+k\rho}\frac{1-e^{-\omega_1A}}{\omega_1A}. \tag{8.66}$$

В частности, при $L = 0$ и действительных корнях $s_{0,1}=a\mp b$ имеем:

$$K^*_г(t,0)=K_г(0)+(1-K_г(0))e^{-a\mu t}(ch(b\mu t)+\frac{a}{b}sh(b\mu t)), \tag{8.67}$$

$$K_г(T,0)=K_г(0)+(1-K_г(0))\left(\frac{s_1}{s_0}(1-e^{-s_0D})-\frac{s_0}{s_1}(1-e^{-s_1D})\right)/((s_1-s_0)D)=$$

$$=K_г(0)+(1-K_г(0))\frac{2a}{(a^2-b^2)D}(1-e^{-aD}(ch(bD)+\frac{a^2+b^2}{2ab}sh(bD)),$$

$$K_г(0)=\frac{3}{3+k\rho}, a=\frac{1}{2}(1+3r\rho), b=\frac{1}{2}\sqrt{1-6r\rho+(r\rho)^2}.$$

Эти формулы можно использовать при $k\rho \le 2(3-\sqrt{2}) = 0{,}34315$. При $k\rho \ge 2(3-\sqrt{2})$ корни будут комплексно-сопряженными: $s_{0,1}=a\mp ib$. Тогда формулы для коэффициента готовности приобретают вид:

$$K_г^*(T,0) = K_г(0) + (1-K_г(0))e^{-aD}(\frac{a}{b}\sin(bD) + \cos(bD)), D = \mu T\ ,$$

$$K_г(T,0) = K_г(0) + (1-K_г(0))\frac{2a}{(a^2+b^2)D}\left(1 - e^{-aD}(\cos(bD) + \frac{a^2-b^2}{2ab}\sin(bD))\right),$$

$$a = \frac{1}{2}(1+3r\rho), b = \frac{1}{2}\sqrt{-1+6r\rho-(r\rho)^2}\ .$$

При $L = 0$ приближенная оценка по экспоненциальной модели согласно (8.11) имеет вид:

$$K_{г,пр1}^*(T,0) = (\beta + k\rho e^{-D-A/\beta})/(\beta + k\rho), K_{г,пр1}(T,0) = \left(\beta + k\rho\frac{1-e^{-D-A/\beta}}{D + A/\beta}\right)/(\beta + k\rho)\ ,$$

$$\beta = k\lambda\overline{T}_0(T,0,П2) = (3 - 4e^{-A/2} + e^{-A})/(1-e^{-A/2})^2\ .$$

Оценка 2 совпадает с точным значением.

Если при $L = 1$ полином третьей степени

$$s^3 + (1+2,5k\rho)s^2 + r\rho(5+4k\rho)s + \frac{1}{2}(k\rho)^2(4+k\rho) = 0$$

имеет три действительных корня, то из (8.9), (8.60) и (8.61) получим:

$$K_г^*(T,1) = K_г(1) + (1-K_г(1))\sum_{i=0}^{2} B_i e^{-s_i D}), K_г(1) = \frac{4}{4+k\rho}, B_i = \frac{s_i^2 - A_2 s_i + A_1}{3s_i^2 - 2A_2 s_i + A_1}$$

$$K_г(T,1) = 1 - (1-K_г(1))\left(1 - \sum_{i=0}^{2} B_i\frac{1-e^{-s_i D}}{s_i D}\right).$$

Если же полином имеет два комплексно-сопряженных и один действительный корень $s_{0,1} = a \mp ib, s_2 = c$, то получим:

$$K_г^*(T,1) = \frac{4}{4+k\rho} + \frac{k\rho}{4+k\rho}\left(C_1 e^{-aD}\sin(bD) + C_2 e^{-aD}\cos(bD) + C_3 e^{-cD}\right), \quad (8.68)$$

$$K_г(T,1) = \frac{4}{4+k\rho} + \frac{k\rho}{4+k\rho}(\frac{1}{(a^2+b^2)D}(C_1(b - e^{-aD}(a\sin(bD) + b\cos(bD))) +$$

$$+C_2(a - e^{-aD}(a\cos(bD) - b\sin(bD))) + \frac{C_3}{cD}(1-e^{-cD}))\ ,$$

$$C_1 = \frac{c}{b}\frac{a(c-a)+b^2}{(c-a)^2+b^2}, C_3 = 1 - C_2 = \frac{a^2+b^2}{(c-a)^2+b^2}\ .$$

При $L = 1$ приближенные оценки:

$$K_{г,пр1}^*(T,1) = (\beta + k\rho e^{-D-A/\beta})/(\beta + k\rho), K_{г,пр1}(T,1) = \left(\beta + k\rho\frac{1-e^{-D-A/\beta}}{D + A/\beta}\right)/(\beta + k\rho)\ ,$$

$$\beta = k\lambda T_{ср}(T,1,П2) = (4 - 8e^{-A/2} + (4+A)e^{-A})/(1 - 4e^{-A/2} + (3+A)e^{-A})\ . \quad (8.69)$$

$$K_{г,пр2}^*(T,1) = \frac{4}{4+k\rho} + \frac{k\rho e^{-aD}}{4+k\rho}\left(\frac{a}{b}\sin(bD) + \cos(bD)\right),$$

$$K_{г,пр2}(T,1)=\frac{4}{4+k\rho}+\frac{k\rho}{4+k\rho}\frac{1}{(a^2+b^2)D}\left(2a-e^{-aD}(2a\cos(bD)+\frac{a^2-b^2}{b}\sin(bD))\right),$$

$$a=\frac{k\rho(5+4k\rho)}{2(2+5k\rho)},b=\frac{\sqrt{\Delta}}{2+5k\rho}=\frac{k\rho}{2+5k\rho}\sqrt{\frac{7}{4}+12k\rho+(k\rho)^2}\ ,$$

$$\Delta=(k\rho)^2((4+k\rho)(2+5k\rho)-\frac{1}{4}(5+4k\rho)^2)\ .$$

При $L=2$ необходимо вычислять корни полинома четвертой степени

$$s^4+A_3s^3+A_2s^2+A_1s+A_0=0\ ,$$

$$A_3=1+\frac{7}{2}k\rho,A_2=\frac{1}{2}k\rho(7+9k\rho),A_1=\frac{1}{2}(k\rho)^2(9+5k\rho),A_0=\frac{1}{2}(k\rho)^3(5+k\rho)\ .$$

Если полином имеет четыре действительных корня, то коэффициент готовности находят по формулам:

$$K_г^*(T,2)=1-(1-K_г(2))\left(1-\sum_{i=0}^{3}B_ie^{-s_iD}\right),K_г(T,2)=1-(1-K_г(2)\left(1-\sum_{i=0}^{3}B_i\frac{1-e^{-s_iD}}{s_iD}\right),$$

$$B_i=\frac{s_i^3-A_3s_i^2+A_2s_i-A_1}{4s_i^3-3A_3s_i^2+2A_2s_i-A_1},K_г(2)=\frac{5}{5+k\rho}.\qquad(8.70)$$

Если полином имеет два комплексно-сопряженных и два действительных корня: $s_{0,1}=a\mp ib,s_2=c,s_2=d$, то коэффициент готовности находят по формулам:

$$K_г^*(T,2)=\frac{5}{5+k\rho}+\frac{k\rho}{5+k\rho}\left(C_1e^{-aD}\sin(bD)+C_2e^{-aD}\cos(bD)+C_3e^{-cD}+C_4e^{-dD}\right),\qquad(8.71)$$

$$K_г(T,2)=\frac{5}{5+k\rho}+\frac{k\rho}{5+k\rho}(\frac{1}{(a^2+b^2)D}(C_1(b-e^{-aD}(a\sin(bD)+b\cos(bD)))+$$

$$+C_2(a-e^{-aD}(a\cos(bD)-b\sin(bD)))+\frac{C_3}{cD}(1-e^{-cD})+\frac{C_4}{dD}(1-e^{-dD}))\ ,$$

$$B=\frac{cd}{[(c-a)^2+b^2][(d-a)^2+b^2]},C_1=B(\frac{a}{b}(c-a)(d-a)+b(c+d-3a))\ ,$$

$$C_2=B(\frac{a}{b}(c-a)(d-a)-b^2-a(c+d-2a)),\quad C_3=\frac{d}{d-c}\frac{a^2+b^2}{(c-a)^2+b^2},C_4=\frac{c}{c-d}\frac{a^2+b^2}{(d-a)^2+b^2}\ .$$

Если полином имеет две пары комплексно-сопряженных корней: $s_{0,1}=a_1\mp ib_1,s_{2,3}=a_2\mp ib_2$, то коэффициент готовности находят по формулам:

$$K_г^*(T,2)=$$

$$=\frac{5}{5+k\rho}+\frac{k\rho}{5+k\rho}\left(C_1e^{-a_1D}\sin(b_1D)+C_2e^{-a_1D}\cos(b_1D)+C_3e^{-a_2D}\sin(b_2D)+C_4e^{-a_2D}\cos(b_2D)\right),$$

$$K_{г}(T,2)=\frac{5}{5+k\rho}+\frac{k\rho}{5+k\rho}[\frac{1}{(a_1^2+b_1^2)D}(C_1(b_1-e^{-a_1D}(a_1\sin(b_1D)+b_1\cos(b_1D)))+$$

$$+C_2(a_1-e^{-a_1D}(a_1\cos(b_1D)-b_1\sin(b_1D)))+\frac{1}{(a_2^2+b_2^2)D}(C_3(b_2-e^{-a_2D}(a_2\sin(b_2D)+b_1\cos(b_1D)))+$$

$$+C_4(a_2-e^{-a_2D}(a_2\cos(b_2D)-b_2\sin(b_2D)))],\qquad(8.72)$$

$$C_1=B_1(\frac{a_1}{b_1}((a_2-a_1)^2+b_2^2-b_1^2)+2b_1(a_2-a_1)),C_2=B_1((a_2-a_1)^2+b_2^2-b_1^2-2a_1(a_2-a_1)),$$

$$C_3=B_2(\frac{a_2}{b_2}((a_2-a_1)^2-b_2^2+b_1^2)-2b_2(a_2-a_1)),C_4=B_2((a_2-a_1)^2-b_2^2+b_1^2+2a_2(a_2-a_1)),$$

$$B_1=\frac{a_2^2+b_2^2}{(a_2-a_1)^4+(b_2^2-b_1^2)^2+2(a_2-a_1)^2(b_2^2+b_1^2)},\quad B_2=\frac{a_1^2+b_1^2}{(a_2-a_1)^4+(b_2^2-b_1^2)^2+2(a_2-a_1)^2(b_2^2+b_1^2)}.$$

Приближенные оценки:

$$K^*_{г,пр1}(T,2)=(\beta+k\rho e^{-D-A/\beta})/(\beta+k\rho),K_{г,пр1}(T,2)=\left(\beta+k\rho\frac{1-e^{-D-A/\beta}}{D+A/\beta}\right)/(\beta+k\rho),$$

$$\beta=k\lambda T_{ср}(T,2,П2)=1+\frac{4-8e^{-A/2}+(4+A)e^{-A}}{1-8e^{-A/2}+(7+3A+A^2/2)e^{-A}},$$

$$K^*_{г,пр2}(T,2)=\frac{4}{4+k\rho}+\frac{k\rho e^{-aD}}{4+k\rho}\left(\frac{a}{b}\sin(bD)+\cos(bD)\right),\qquad(8.73)$$

$$K_{г,пр2}(T,2)=\frac{5}{5+k\rho}+\frac{k\rho}{5+k\rho}\frac{1}{(a^2+b^2)D}\left(2a-e^{-aD}(2a\cos(bD)+\frac{a^2-b^2}{b}\sin(bD))\right),$$

$$a=\frac{A_1}{2A_2}=\frac{k\rho(9+5k\rho)}{2(7+9k\rho)},b=\frac{\sqrt{\Delta}}{2A_2}=\frac{k\rho}{2(7+9k\rho)}\sqrt{59+118k\rho+11(k\rho)^2},\Delta=4A_0A_2-A_1^2.$$

8.4.2. Стратегия 121 (одиночная ЭД)

Граф состояний приведен на рис. 8.5, *б*. Из формулы (8.24) при l = 1, $\lambda_L = k\lambda$, $\Lambda_{L+1} = r\lambda$, $\Lambda_L = \lambda_{L+1} = 0$ получим

$$K^*_{г}(s,L)=1-\frac{s(k\lambda)^{L-1}}{(s+k\lambda)^L}\frac{\Lambda_{L+1}}{s+\mu}\frac{(k\lambda)^2}{(s+k\lambda)(s+\frac{sr\lambda}{s+\mu})}=1-\frac{r\lambda}{s+r\lambda+\mu}\left(\frac{k\lambda}{s+k\lambda}\right)^{L+1}.\qquad(8.74)$$

Отсюда

$$K^*_{г}(t,L)=1-\frac{r\lambda}{r\lambda+\mu}\left(I(k\lambda t,L+1)-\left(\frac{k\lambda}{r\lambda-\mu}\right)^{L+1}e^{-(r\lambda+\mu)t}I(k\lambda t-\mu t,L+1)\right)=$$

$$=\frac{\mu}{r\lambda+\mu}+\frac{r\lambda}{r\lambda+\mu}\left(\left(\frac{k\lambda}{r\lambda-\mu}\right)^{L+1}e^{-(r\lambda+\mu)t}+\sum_{i=0}^{L}\left(1-\left(\frac{k\lambda}{r\lambda-\mu}\right)^{L+1-i}\right)\frac{(k\lambda t)^i}{i!}e^{-k\lambda t}\right).\qquad(8.75)$$

Интегрируя по времени в интервале $(0,T)$, получим среднее значение коэффициента готовности:

$$K_г(T,L)=\frac{1}{1+r\rho}+\frac{r\rho}{1+r\rho}\left(\left(\frac{A}{A/2+D}\right)^{L+1}\frac{1-e^{-A/2-D}}{A/2+D}+\frac{1}{A}\sum_{i=0}^{L}\left(1-\left(\frac{A}{A/2+D}\right)^{L+1-i}\right)I(A,i+1)\right). \tag{8.76}$$

В частности, при $L = 0$, 1 и 2 имеем:

$$K_г^*(t,0)=\frac{1}{1+r\rho}+\frac{r\rho}{1-(r\rho)^2}\left((1+r\rho)e^{-k\lambda t}-k\rho e^{-(1+r\rho)\mu t}\right), \tag{8.77}$$

$$K_г(T,0)=\frac{1}{1+r\rho}+\frac{r\rho}{1-(r\rho)^2}\left((1+r\rho)\frac{1-e^{-A}}{A}-k\rho\frac{1-e^{-D-A/2}}{D+A/2}\right),$$

$$K_г^*(t,1)=\frac{1}{1+r\rho}+\frac{r\rho}{1+r\rho}\left(\left(\frac{k\rho}{1-r\rho}\right)^2 e^{-(1+r\rho)\mu t}+\left(1-\left(\frac{k\rho}{1-r\rho}\right)^2\right)e^{-k\lambda t}+\frac{1+r\rho}{1-r\rho}k\lambda t e^{-k\lambda t}\right),$$

$$K_г(T,1)=\frac{1}{1+r\rho}+\frac{r\rho}{1+r\rho}\left(\left(\frac{k\rho}{1-r\rho}\right)^2\frac{1-e^{-D-A/2}}{D+A/2}+\frac{1}{A}\left(1-\left(\frac{k\rho}{1-r\rho}\right)^2\right)I(A,1)+\frac{1}{A}\frac{1+r\rho}{1-r\rho}I(A,2)\right),$$

$$K_г^*(t,2)=\frac{1}{1+r\rho}+\frac{r\rho}{1+r\rho}\left(-\left(\frac{k\rho}{1-r\rho}\right)^3 e^{-(1+r\rho)\mu t}+\left(1+\left(\frac{k\rho}{1-r\rho}\right)^3\right)e^{-k\lambda t}+\right.$$

$$\left.+\left(1-\left(\frac{k\rho}{1-r\rho}\right)^2\right)k\lambda t e^{-k\lambda t}+\frac{1+r\rho}{1-r\rho}\frac{(k\lambda t)^2}{2}e^{-k\lambda t}\right),$$

$$K_г(T,2)=\frac{1}{1+r\rho}+\frac{r\rho}{1+r\rho}\left(-\left(\frac{k\rho}{1-r\rho}\right)^3\frac{1-e^{-D-A/2}}{D+A/2}+\frac{1}{A}\left(1+\left(\frac{k\rho}{1-r\rho}\right)^3\right)I(A,1)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{A}\left(1-\left(\frac{k\rho}{1-r\rho}\right)^2\right)I(A,2)+\frac{1}{A}\frac{1+r\rho}{1-r\rho}I(A,3)\right).$$

8.4.3. Стратегия 211

Граф состояний системы приведен на рис. 8.5, *в*. В графе учтено то, что при отказе комплекта ЗИП оформляется заявка на экстренную доставку $L + 1$ запасных частей.

Показатели безотказности

Система уравнений, составленная по графу состояний, имеет вид:

$$(s+k\lambda)P_0^*(s)-\mu P_{L+1}^*(s)=s,\ P_L^*(s)=\left(\frac{k\lambda}{s+k\lambda}\right)^L P_0^*(s), \tag{8.78}$$

$$P_{L+1}^*(s)=\left(\frac{k\lambda}{s+k\lambda}\right)^L\frac{k\lambda}{s+\mu+r\lambda}P_0^*(s),Q^*(s,L)=\frac{r\lambda}{s}P_{L+1}^*(s).$$

Если использовать общие формулы, то при $l = 1$ и $L = 0$ систему уравнений (8.78) получим из (8.26) — первого, четвертого и пятого уравнений. При $L > 0$ следует использовать систему (8.25).

Решение (8.78) имеет вид:

$$Q^*(s,L) = \frac{r\lambda\left(k\lambda\right)^{L+1}}{(s+\mu+r\lambda)(s+k\lambda)^{L+1} - \mu\left(k\lambda\right)^{L+1}}. \tag{8.79}$$

При $L = 0$ обратное преобразование в (8.79) дает:

$$Q(t,0) = 1 - \frac{s_2 e^{-s_1 t} - s_1 e^{-s_2 t}}{s_2 - s_1}, s_{1,2} = \frac{\mu + 1,5k\lambda}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{\mu^2 + 3k\lambda\mu + \left(k\lambda\right)^2 / 4}. \tag{8.80}$$

При $L > 0$ представим (8.79) в виде:

$$Q^*(s,L) = \frac{a_0}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \ldots + a_{L+1}s^{L+1} + s^{L+2}} = \frac{a_0}{(s+s_0)(s+s_1)\ldots(s+s_{L+1})}. \tag{8.81}$$

$$a_0 = r\lambda\left(k\lambda\right)^{L+1}, a_1 = \frac{1}{2}\left(k\lambda\right)^L(\mu + (L+3)k\lambda), a_2 = \frac{1}{2}(L+1)\left(k\lambda\right)^{L-1}(L(\mu + r\lambda) + k\lambda).$$

Отсюда

$$Q(t,L) = 1 - \sum_{i=0}^{L+1} e^{-s_i t} / \prod_{j=0, j\neq i}^{L}(1 - \frac{s_i}{s_j}). \tag{8.82}$$

Рассмотрим теперь оценки вероятности отказа.

Оценка 1

Согласно (8.29)

$$Q_{пр1}(t,L) = 1 - \frac{s_2 e^{-s_1 t} - s_1 e^{-s_2 t}}{s_2 - s_1}. \tag{8.83}$$

$$s_{1,2} = \frac{k\rho(1 + (L+3)k\rho)}{(L+1)(L + (2 + L/2)k\rho)}\left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4(L+1)k\rho(L + (2 + L/2)k\rho)}{(1 + (L+3)k\rho)^2}}\right).$$

Если при $a_0 a_2 \ll a_1^2$ оставить одну экспоненту, то

$$Q_{пр1}(t,L) = 1 - \exp\left(-\frac{k\rho A}{4(1 + (L+3)k\rho)}\right). \tag{8.84}$$

Оценка 2 (экспоненциальная модель)

Используем формулу (8.31) при $\Lambda_{L+1} = r\lambda$, которая дает оценку сверху для вероятности отказа. При малых μ это может дать такой эффект, что вероятность отказа при дисциплине пополнения ПЭД окажется больше, чем при периодическом пополнении. Поскольку это противоречит сущности упомянутых стратегий, введем поправочный коэффициент, выравнивая значения ВО в модели П2 и в модели ПЭД2 при $\mu = 0$ при малых A. Для моделей П2 и ПЭД2 при малых A получены асимптотические формулы:

$$Q(T,L,П2) \approx \frac{A^{L+2}}{2(L+2)!}, Q_{пр2}(T,L,ПЭД2,\mu = 0) \approx \frac{A}{4}\Lambda_э T = \frac{A^{L+2}}{4(L+1)!}.$$

Отсюда поправочный коэффициент

$$K_0 = \frac{Q(T, L, П2)}{Q_{пр2}(T, L, ПЭД2, \mu = 0)} = \frac{2}{L+2}. \quad (8.85)$$

С учетом поправочного коэффициента оценку 2 находим по формуле:

$$Q_{пр2}(t, L) = K_0 Q^{(1)}_{пр2}(t, L) = \frac{2}{L+2}\left(1 - \frac{s_2 e^{-s_1 t} - s_1 e^{-s_2 t}}{s_2 - s_1}\right), \quad (8.86)$$

где s_1 и s_2 определяют по формуле (8.31).

Среднюю наработку до отказа системы находим по общим формулам (5.11) и (5.12). Если при интегрировании в (5.11) использовать формулу (8.86), то получим:

$$k\lambda T_{ср}(T, L) = \frac{(s_2 - s_1)(2 + LA/2 + 2(\mu + r\lambda)/\Lambda_э - 2\left(s_2^2 e^{-s_1 t} - s_1^2 e^{-s_2 t}\right)/\Lambda_э}{s_2(1 - e^{-s_1 t}) - s_1(1 - e^{-s_2 t})}. \quad (8.87)$$

При использовании оценки $Q^{(1)}_{пр2}(T, L)$ средняя наработка равна $k\lambda T^{(1)}_{ср}(T, L)$. Тогда (8.87) можно представить в виде:

$$k\lambda T_{ср}(T, L) = k\lambda \int_0^T (1 - K_0 Q^{(1)}_{пр2}(t, L))dt / (K_0 Q^{(1)}_{пр2}(t, L)) = \frac{LA}{2Q^{(1)}_{пр2}(T, L)} + k\lambda T^{(1)}_{ср}(T, L), \quad (8.88)$$

где $Q^{(1)}_{пр2}(T, L)$ рассчитывают по формуле (8.31), а соответствующую среднюю наработку до отказа $k\lambda T^{(1)}_{ср}(T, L)$ — по формуле (8.80) при $K_0 = 1$ ($L = 0$).

Рассмотрим теперь один важный случай, когда комплект ЗИП отсутствует и повышение надежности достигается только за счет экстренной доставки ЗЧ после деградации структуры, т. е. при $L = 0$. Тогда $\Lambda_э = k\lambda$, $K_0 = 1$ и приближенное значение (8.86) совпадает с точным значением (8.80). Значения средней наработки в модели ПЭД2 (8.87) и (8.88) следует сравнить при $\mu = 0$ с точным значением средней наработки в модели П2 (5.75).

Показатели готовности

Согласно графу состояний (см. рис. 8.5, *в*) и общему виду системы уравнений (8.32)–(8.33) система уравнений для вероятностей состояний имеет вид:

$$(s + k\lambda)P_0^*(s) - \mu P_{l+1}^*(s) = s, (s + k\lambda)P_1^*(s) - k\lambda P_0^*(s) - \mu P_{i+2}^*(s) = 0, \quad (8.89)$$

$$(s + k\lambda)P_l^*(s) - k\lambda P_{l-1}^*(s) = 0, i = 2...L; (s + r\lambda + \mu)P_{L+1+i}^*(s) - k\lambda P_L^*(s) = 0,$$

$$(s + \mu)P_{L+2}^*(s) - r\lambda P_{L+1}^*(s) = 0; K_г^*(s, L) = 1 - P_{L+2}^*(s).$$

Решение системы:

$$K_г^*(s, L) = 1 - \frac{a_0}{A_0 + A_1 s + A_2 s^2 + ... + A_L s^L + A_{L+1} s^{L+1} + s^{L+2}} =$$

$$= 1 - \frac{a_0}{(s + s_0)(s + s_1)...(s + s_{L+1})}, a_0 = \frac{1}{2}(k\lambda)^{L+2}, \quad (8.90)$$

$$A_0 = (k\lambda)^L(\mu^2(L+1) + r\lambda\mu(L+2) + (k\lambda)^2/2),$$

$$A_1 = (k\lambda)^{L-1}(\mu^2 L(L+1)/2 + r\lambda\mu(L+1)(L+8)/4 + (L+3)(k\lambda)^2/2),$$

$$A_2 = \frac{1}{12}(k\lambda)^{L-2}(L+1)(2\mu^2 L(L-1) + k\lambda\mu L(L+11) + 3(L+4)(k\lambda)^2).$$

Обратное преобразование в (8.90) дает:

$$K_г^*(T,L) = 1 - \frac{(k\lambda)^2}{2\mu^2(L+1) + k\lambda\mu(L+2) + (k\lambda)^2}\left(1 - \sum_{i=0}^{L+1} e^{-s_i T} / \prod_{j=0, j\neq i}^{L+1}(1 - \frac{s_i}{s_j})\right). \quad (8.91)$$

Среднее значение коэффициента готовности:

$$K_г(T,L) = 1 - \frac{(k\lambda)^2}{2\mu^2(L+1) + k\lambda\mu(L+2) + (k\lambda)^2}\left(1 - \sum_{i=0}^{L+1} \frac{1 - e^{-s_i T}}{s_i T} / \prod_{j=0, j\neq i}^{L+1}(1 - \frac{s_i}{s_j})\right). \quad (8.92)$$

Найдем теперь приближенные оценки коэффициента готовности:

Оценка 1 (экспоненциальная модель)

После отказа одного модуля и использования одной запасной части заменяем систему эквивалентным элементом с интенсивностью отказов

$$\Lambda_э = 1/\overline{T}_0(T, L-1, П1).$$

В графе состояний (рис. 8.5, *в*) заменяем состояния 1, ..., L одним состоянием. В результате граф состояний имеет всего 4 состояния (рис. 8.6).

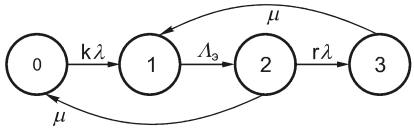


Рис. 8.6. Граф состояний системы при эквивалентной экспоненциальной модели для стратегии пополнения класса 211 (модель ПЭД2)

Система уравнений приобретает вид:

$$(s+k\lambda)P_0^*(s) - \mu P_2^*(s) = s, (s+\Lambda_э)P_1^*(s) - k\lambda P_0^*(s) - \mu P_3^*(s) = 0, \quad (8.93)$$

$$(s+r\lambda+\mu)P_2^*(s) - \Lambda_э P_1^*(s) = 0, (s+\mu)P_3^*(s) - r\lambda P_2^*(s) = 0; K_г^*(s,L) = 1 - P_3^*(s).$$

Решение (8.93) имеет вид:

$$K_{г,пр1}^*(s,L) = 1 - \frac{\Lambda_э k\lambda r\lambda}{A_0 + A_1 s + A_2 s^2 + s^3} = 1 - \frac{\Lambda_э k\lambda r\lambda}{(s+s_0)(s+s_1)(s+s_2)}, \quad (8.94)$$

$$A_0 = \mu^2(k\lambda + \Lambda_э) + k\lambda\mu(r\lambda + \Lambda_э) + \Lambda_э k\lambda r\lambda,$$

$$A_1 = \mu^2 + \mu(2{,}5k\lambda + 2\Lambda_э) + (k\lambda + \Lambda_э)r\lambda, A_2 = 2\mu + 1{,}5k\lambda + \Lambda.$$

Отсюда

$$K_{г,пр1}^*(T,L) = 1 - \frac{\Lambda_э k\lambda r\lambda}{A_0}\left(1 - \sum_{i=0}^{2} e^{-s_i T} / \prod_{j=0, j\neq i}^{2}\left(1 - \frac{s_i}{s_j}\right)\right), \quad (8.95)$$

$$K_{г,пр1}(T,L)=1-\frac{\Lambda_э k\lambda r\lambda}{A_0}\left(1-\sum_{i=0}^{2}\frac{1-e^{-s_iT}}{s_iT}/\prod_{j=0,j\neq i}^{2}\left(1-\frac{s_i}{s_j}\right)\right), \quad (8.96)$$

Удобнее использовать формулы, содержащие относительные безразмерные величины путем деления s на μ. Тогда при всех действительных корнях вместо (8.95) и (8.96) получим:

$$K^*_{г,пр1}(T,L)=1-\frac{(k\rho)^3}{2A_0\beta}\left(1-\sum_{i=0}^{2}e^{-s_iD}/\prod_{j=0,j\neq i}^{2}\left(1-\frac{s_i}{s_j}\right)\right), \rho=\lambda\overline{T}_{эд},\beta=k\lambda/\Lambda_э, D=T/\overline{T}_{эд}, \quad (8.97)$$

$$K_{г,пр1}(T,L)=1-\frac{(k\rho)^3}{2A_0\beta}\left(1-\sum_{i=0}^{2}\frac{1-e^{-s_iD}}{s_iD}/\prod_{j=0,j\neq i}^{2}\left(1-\frac{s_i}{s_j}\right)\right)=$$

$$=1-\frac{(k\rho)^2/2}{1+\beta+k\rho(1+0,5\beta)+3(k\rho)^2/2}\left(1-\sum_{i=0}^{2}\frac{1-e^{-s_iD}}{s_iD}/\prod_{j=0,j\neq i}^{2}\left(1-\frac{s_i}{s_j}\right)\right). \quad (8.98)$$

После нормировки путем деления на μ^i коэффициенты в формуле (8.94) приобретают вид:

$$A_0=k\rho(1+1/\beta+k\rho(1/\beta+0,5)+kr\rho^2/\beta),$$

$$A_1=1+k\rho(2/\beta+2,5)+(1+3/\beta)kr\rho^2, A_2=2+k\rho(1/\beta+1,5).$$

Если два корня комплексно-сопряженные, а один действительный $s_{0,1}=a\mp ib, s_2=c$, то из (8.97) получим:

$$1-K^*_{г,пр1}(T,L)=\frac{a_0}{A_0}(1-\frac{1}{(a-c)^2+b^2}((a^2+b^2)e^{-cD}-c(\frac{1}{b}(a(c-a)+$$

$$+b^2)\sin(bD)-(2a-c)\cos(bD))e^{-aD}))=\frac{a_0}{A_0}(1-B_0e^{-cD}-e^{-aD}(C_1\cos(bD)-C_2\sin(bD))). \quad (8.99)$$

$$1-K_{г,пр1}(T,L)=\frac{a_0}{A_0}(1-B_0\frac{1-e^{-s_0D}}{s_0D}-\frac{1}{(a^2+b^2)D}(C_1b(1-$$

$$-e^{-aD}(\frac{a}{b}\sin(bD)+\cos(bD))+C_2a(1-e^{-aD}(\cos(bD)-\frac{b}{a}\sin(bD)))).$$

Оценка 2 (по медленному движению)

В формуле (8.83) оставляем только три слагаемых

$$K^*_{г,пр2}(s,L)=1-\frac{(k\lambda)^2}{2\mu^2(L+1)+k\lambda\mu(L+2)+(k\lambda)^2}\frac{A_0}{A_0+A_1s+A_2s^2}. \quad (8.100)$$

Отсюда

$$K^*_{г,пр2}(T,L)=1-\frac{(k\rho)^2}{2(L+1)+k\rho(L+2)+(k\rho)^2}\left(1-\frac{s_1e^{-s_0T}-s_0e^{-s_1T}}{s_1-s_0}\right), \quad (8.101)$$

$$s_{0,1}=\frac{A_1}{2A_2}\left(1\mp\sqrt{1-\frac{4A_0A_2}{A_1^2}}\right).$$

Коэффициенты A_i следует вычислять по формулам (8.98).

В частности, при $L = 0$, 1 и 2 имеем:

$$K_г^*(T,0) = \frac{1+k\rho}{1+k\rho+rk\rho^2} + \frac{rk\rho^2}{1+k\rho+rk\rho^2}\frac{s_1e^{-s_0D} - s_0e^{-s_1D}}{s_1 - s_0}, \tag{8.102}$$

$$K_г(T,0) = 1 - \frac{rk\rho^2}{D\left(1+k\rho+rk\rho^2\right)^2}\left(2+3r\rho - \frac{s_1^2e^{-s_1D} - s_0^2e^{-s_2D}}{s_1 - s_0}\right), \tag{8.103}$$

$$s_{0,1} = 1 + 0,75k\rho \mp \sqrt{r\rho(1 + r\rho/4)}\ .$$

При $L = 1$ оценка 1 совпадает с точным значением и вычисляется по формулам:

$$K_г^*(T,1) = K_{г,пр1}^*(T,1) = 1 - \frac{rk\rho^2}{2+3r\rho+rk\rho^2}\left(1 - \sum_{i=0}^{2} e^{-s_iD} \Big/ \prod_{j=0,\,j\neq i}^{2}\left(1 - \frac{s_i}{s_j}\right)\right), \tag{8.104}$$

$$K_г(T,1) = K_{г,пр1}(T,1) = 1 - \frac{rk\rho^2}{2+3r\rho+rk\rho^2}\left(1 - \sum_{i=0}^{2} \frac{1-e^{-s_iD}}{s_iD} \Big/ \prod_{j=0,\,j\neq i}^{2}\left(1 - \frac{s_i}{s_j}\right)\right), \tag{8.105}$$

где $(-s_i)$ — корни полинома $s^3 + A_2s^2 + A_1s + A_0 = 0$, коэффициенты:

$$A_0 = k\rho(2+3r\lambda+rk\rho^2),\ A_1 = 1+9r\lambda+2(k\rho)^2,\ A_2 = 2+5r\rho\ . \tag{8.106}$$

Оценка 2 вычисляется по формуле:

$$K_{г,пр2}^*(T,1) = 1 - \frac{rk\rho^2}{2+3r\rho+rk\rho^2}\left(1 - \frac{s_1e^{-s_0D} - s_0e^{-s_1D}}{s_1 - s_0}\right), \tag{8.107}$$

$$s_{0,1} = \frac{A_1}{2A_2}\left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4A_0A_2}{A_1^2}}\right) = \frac{1+9r\rho+(k\rho)^2}{4+5k\rho}\left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4k\rho(2+3r\lambda+rk\rho^2)(2+5r\rho)}{(1+9r\lambda+2(k\rho)^2)^2}}\right).$$

Среднее значение коэффициента готовности:

$$K_{г,пр2}(T,1) = \frac{2+3r\rho}{2+3r\rho+rk\rho^2} + \frac{r\rho}{D\left(2+3k\rho+rk\rho^2\right)^2}\left(1+9r\rho+2(k\rho)^2 - \frac{2+5r\rho}{s_1-s_0}(s_1^2e^{-s_0D} - s_0^2e^{-s_1D})\right). \tag{8.108}$$

При $L = 2$ согласно (8.94) имеем:

$$K_г^*(T,2) = 1 - \frac{rk\rho^2}{3+2k\rho+rk\rho^2}\left(1 - \sum_{i=0}^{3} e^{-s_iD} \Big/ \prod_{j=0,\,j\neq i}^{3}\left(1 - \frac{s_i}{s_j}\right)\right). \tag{8.109}$$

где $(-s_i)$ — корни полинома $s^4 + A_3s^3 + A_2s^2 + A_1s + A_0 = 0$, коэффициенты:

$$A_0 = (k\rho)^2(3+2k\rho+rk\rho^2),\ A_1 = r\rho(6+15k\rho+5(k\rho)^2),\ A_2 = 1+13r\rho+9rk\rho^2,\ A_3 = 2+7r\rho\ .$$

Среднее значение коэффициента готовности:

$$K_г(T,2) = 1 - \frac{rk\rho^2}{3+2k\rho+rk\rho^2}\left(1 - \sum_{i=0}^{3} \frac{1-e^{-s_iD}}{s_iD} \Big/ \prod_{j=0,\,j\neq i}^{3}\left(1 - \frac{s_i}{s_j}\right)\right). \tag{8.110}$$

Оценка 1 вычисляется по формулам (8.97) и (8.98) при значении

$$\beta = (1-(1+A)e^{-A})/(2-(2+A)e^{-A}).$$

Оценки 2 вычисляются по формулам:

$$K^*_{г,пр2}(T,2) = 1 - \frac{(k\rho)^2}{6+4k\rho+(k\rho)^2}\left(1 - \frac{s_1 e^{-s_0 D} - s_0 e^{-s_1 D}}{s_1 - s_0}\right), \tag{8.111}$$

$$K_{г,пр2}(T,2) = \frac{6+4k\rho}{6+4k\rho+(k\rho)^2} + \frac{2}{D(6+4k\rho+(k\rho)^2)^2}(r\rho(6+15k\rho+5(k\rho)^2) -$$

$$-\frac{1+13r\rho+9rk\rho^2}{s_1-s_0}(s_1^2 e^{-s_0 D} - s_0^2 e^{-s_1 D})), \quad s_{0,1} = \frac{A_1}{2A_2}\left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4A_0A_2}{A_1^2}}\right). \tag{8.112}$$

8.4.4. Стратегия 221(одиночная ЭД по отказу ЗИП)

Граф состояний приведен на рис. 8.5, *г*.

Показатели безотказности

Система уравнений для расчета ВБР имеет вид:

$$P^*_{L-1}(s) = \frac{s}{s+k\lambda}\left(\frac{k\lambda}{s+k\lambda}\right)^{L-1}, (s+k\lambda)P^*_L(s) - k\lambda P^*_{L-1}(s) - \mu P^*_{L+1}(s) = 0, \tag{8.113}$$

$$P^*_{L+1}(s) = \frac{k\lambda}{s+\mu+r\lambda}P^*_L(s), Q^*(s,L) = \frac{r\lambda}{s}P^*_{L+1}(s).$$

Отсюда

$$Q^*(s,L) = \left(\frac{k\lambda}{s+k\lambda}\right)^L \frac{(k\lambda)^2/2}{s^2 + s(\mu+1,5k\lambda) + (k\lambda)^2/2} = \left(\frac{k\lambda}{s+k\lambda}\right)^L Q^*(s,0). \tag{8.114}$$

Заметим, что (8.106) является частным случаем (8.38) при l = 1, $\lambda_L = k\lambda$, $\Lambda_{L+1} = r\lambda$, $\Lambda_L = \lambda_{L+1} = 0$. Используем известный результат для схемы гибели и размножения:

$$Q(t,0) = 1 - \frac{s_1 e^{-s_0\mu t} - s_0 e^{-s_1\mu t}}{s_1 - s_0}, s_{0,1} = \frac{1}{2}(1+1,5k\rho \mp \sqrt{1+3k\rho+(r\rho)^2}). \tag{8.115}$$

Выполняем обратное преобразование в (8.114):

$$Q(T,L) = \int_0^T Q(T-x,0)\frac{(k\lambda)^L x^{L-1}}{(L-1)!}e^{-k\lambda x}dx = I(A,L) - \frac{s_1}{s_1-s_0}\left(\frac{A}{A-s_0D}\right)^L e^{-s_0 D} I(A-s_1D,L) +$$

$$+\frac{s_0}{s_1-s_0}\left(\frac{A}{A-s_1D}\right)^L e^{-s_1 D} I(A-s_1D,L). \tag{8.116}$$

Чтобы найти среднюю наработку до отказа системы, преобразуем (8.108) к виду:

$$Q(T,L)=1-\frac{s_1}{s_1-s_0}\left(\frac{A}{A-s_0D}\right)^L e^{-s_0D}+\frac{s_0}{s_1-s_0}\left(\frac{A}{A-s_1D}\right)^L e^{-s_1D}-$$

$$-\sum_{i=0}^{L-1}\left(1-\frac{s_1}{s_1-s_0}\left(\frac{A}{A-s_0D}\right)^{L-i}+\frac{s_0}{s_1-s_0}\left(\frac{A}{A-s_1D}\right)^{L-i}\right)\frac{A^i}{i!}e^{-A}. \qquad (8.117)$$

Интегрируя (8.117), найдем среднюю наработку системы в периоде пополнения, а затем среднюю наработку до отказа системы:

$$k\lambda\tau_1(T,L)=k\lambda\int_0^T(1-Q(t,L))dt=\frac{s_1A}{s_1-s_0}\left(\frac{A}{A-s_0D}\right)^L\frac{1-e^{-s_0D}}{s_0D}-\frac{s_0A}{s_1-s_0}\left(\frac{A}{A-s_1D}\right)^L\frac{1-e^{-s_1D}}{s_1D}+$$

$$+\sum_{i=0}^{L-1}\left(1-\frac{s_1}{s_1-s_0}\left(\frac{A}{A-s_0D}\right)^{L-i}+\frac{s_0}{s_1-s_0}\left(\frac{A}{A-s_1D}\right)^{L-i}\right)I(A,i+1), \qquad (8.118)$$

$$k\lambda T_{cp}(T,L)=k\lambda\tau_1/Q(T,L). \qquad (8.119)$$

В частности, при L = 0, 1 и 2 имеем:

$$Q(T,0)=1-\frac{s_1}{s_1-s_0}e^{-s_0D}+\frac{s_0}{s_1-s_0}e^{-s_1D}, \qquad (8.120)$$

$$k\lambda T_{cp}(T,0)=k\rho\frac{(s_1/s_0)(1-e^{-s_0D})-(s_0/s_1)(1-e^{-s_1D})}{s_1(1-e^{-s_0D})-s_0(1-e^{-s_1D})},$$

$$Q(T,1)=I(A,1)-\frac{s_1}{s_1-s_0}\left(\frac{A}{A-s_0D}\right)(e^{-s_0D}-e^{-A})+\frac{s_0}{s_1-s_0}\left(\frac{A}{A-s_1D}\right)(e^{-s_1D}-e^{-A}),$$

$$k\lambda\tau_1(T,1)=I(A,1)+\frac{s_1A}{s_1-s_0}\left(\frac{A}{A-s_0D}\right)\left(\frac{1-e^{-s_0D}}{s_0D}-\frac{1-e^{-A}}{A}\right)-$$

$$-\frac{s_0A}{s_1-s_0}\left(\frac{A}{A-s_1D}\right)\left(\frac{1-e^{-s_1D}}{s_1D}-\frac{1-e^{-A}}{A}\right),$$

$$Q(T,2)=I(A,2)-\frac{s_1}{s_1-s_0}\left(\frac{A}{A-s_0D}\right)^2(e^{-s_0D}-(1+A-s_0D)e^{-A})+$$

$$+\frac{s_0}{s_1-s_0}\left(\frac{A}{A-s_1D}\right)^2(e^{-s_1D}-(1+A-s_1D)e^{-A}),$$

$$k\lambda\tau_1(T,2)=I(A,1)+\frac{s_1A}{s_1-s_0}\left(\frac{A}{A-s_0D}\right)^2\left(\frac{1-e^{-s_0D}}{s_0D}-\frac{1-e^{-A}}{A}\right)-$$

$$-\frac{s_0A}{s_1-s_0}\left(\frac{A}{A-s_1D}\right)^2\left(\frac{1-e^{-s_1D}}{s_1D}-\frac{1-e^{-A}}{A}\right)+\left(1-\frac{A(A-(1+1{,}5k\rho)D)}{(A-s_0D)(A-s_1D)}\right)I(A,2).$$

Значения корней s_0 и s_1 находят по формуле (8.115).

Показатели готовности

Согласно графу состояний (см. рис. 8.5, *г*) и общему виду системы уравнений (8.39) система уравнений для вероятностей состояний имеет вид:

$$P^*_{L-1}(s)=\frac{s}{s+k\lambda}\left(\frac{k\lambda}{s+k\lambda}\right)^{L-1},(s+k\lambda)P^*_L(s)-k\lambda P^*_{L-1}(s)-\mu P^*_{L+1}(s)=0\ , \quad (8.121)$$

$$(s+\mu+r\lambda)P^*_{L+1}(s)-k\lambda P^*_L(s)-\mu P^*_{L+2}(s)=0, P^*_{L+2}(s)=\frac{r\lambda}{s+\mu}P^*_{L+1}(s)\ .$$

Отсюда

$$1-K^*_г(s,L)=P^*_{L+2}(s)=(1-K^*_г(s,0))\left(\frac{k\lambda}{s+k\lambda}\right)^L,1-K_{г\infty}=\frac{rk\rho^2}{1+k\rho+rk\rho^2}\ , \quad (8.122)$$

$$1-K^*_г(s,0)=(1-K_{г\infty})\frac{1+k\rho+rk\rho^2}{s^2+(2+1{,}5k\rho)+1+k\rho+rk\rho^2}=(1-K_{г\infty})\frac{1+k\rho+rk\rho^2}{(s+s_0)(s+s_1)}\ ,$$

$$s_{0,1}=1+0{,}75k\rho\mp\sqrt{r\rho(1+r\rho/4)}\ .$$

Обратное преобразование в (8.122) дает:

$$1-K^*_г(T,L)=(1-K_{г\infty})\int_0^T\left(1-\frac{s_1e^{-s_0\mu(T-x)}-s_0e^{-s_1\mu(T-x)}}{s_2-s_1}\right)\frac{(k\lambda)^Lx^{L-1}}{(L-1)!}e^{-k\lambda x}dx=$$

$$=(1-K_{г\infty})(I(A,L)-\frac{s_1}{s_1-s_0}\left(\frac{A}{A-s_0D}\right)^Le^{-s_0D}I(A-s_0D,L)+$$

$$+\frac{s_0}{s_1-s_0}\left(\frac{A}{A-s_1D}\right)^Le^{-s_1D}I(A-s_1D,L)),A=k\lambda T,D=\mu T\ . \quad (8.123)$$

В частности, при L = 0, 1 и 2 имеем:

$$K^*_г(T,0)=\frac{1+k\rho}{1+k\rho+rk\rho^2}+\frac{rk\rho^2}{1+k\rho+rk\rho^2}\frac{s_1e^{-s_0D}-s_0e^{-s_1D}}{s_1-s_0}\ , \quad (8.124)$$

$$K^*_г(T,1)=\frac{1+k\rho}{1+k\rho+rk\rho^2}+\frac{rk\rho^2}{1+k\rho+rk\rho^2}(e^{-A}+\frac{s_1}{s_1-s_0}\left(\frac{A}{A-s_0D}\right)(e^{-s_0D}-e^{-A})-$$

$$-\frac{s_0}{s_1-s_0}\left(\frac{A}{A-s_1D}\right)(e^{-s_1D}-e^{-A}))\ ,$$

$$K^*_г(T,2)=\frac{1+k\rho}{1+k\rho+rk\rho^2}+\frac{rk\rho^2}{1+k\rho+rk\rho^2}((1+A)e^{-A}+\frac{s_1}{s_1-s_0}\left(\frac{A}{A-s_0D}\right)^2(e^{-s_0D}-(1+A-s_0D)e^{-A})-$$

$$-\frac{s_0}{s_1-s_0}\left(\frac{A}{A-s_1D}\right)^2(e^{-s_1D}-(1+A-s_1D)e^{-A}))\ .$$

Чтобы найти среднее значение коэффициента готовности, представим (8.123) в виде:

$$1-K_{г}^{*}(T,L)=(1-K_{г\infty})\left[1-\frac{s_2}{s_2-s_1}\left(\frac{A}{A-s_1D}\right)^{L}e^{-s_1D}+\frac{s_1}{s_2-s_1}\left(\frac{A}{A-s_2D}\right)^{L}e^{-s_2D}-\right.$$

$$\left.-\sum_{i=0}^{L-1}\left(1-\frac{s_2}{s_2-s_1}\left(\frac{A}{A-s_1D}\right)^{L-i}+\frac{s_1}{s_2-s_1}\left(\frac{A}{A-s_2D}\right)^{L-i}\right)\frac{A^i}{i!}e^{-A}\right]. \qquad (8.125)$$

Интегрируя (8.125) по интервалу (0, T), получим:

$$K_{г}(T,L)=K_{г\infty}+(1-K_{г\infty})\left[\frac{s_1}{s_1-s_0}\left(\frac{A}{A-s_0D}\right)^{L}\frac{1-e^{-s_0D}}{s_0D}-\frac{s_0}{s_1-s_0}\left(\frac{A}{A-s_1D}\right)^{L}\frac{1-e^{-s_1D}}{s_1D}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{A}\sum_{i=0}^{L-1}\left(1-\frac{s_1}{s_1-s_0}\left(\frac{A}{A-s_0D}\right)^{L-i}+\frac{s_0}{s_1-s_0}\left(\frac{A}{A-s_1D}\right)^{L-i}\right)I(A,i+1)\right]. \qquad (8.126)$$

В частности, при L = 0, 1 и 2 имеем:

$$K_{г}(T,0)=K_{г\infty}+(1-K_{г\infty})\left(\frac{s_1}{s_1-s_0}\frac{1-e^{-s_0D}}{s_0D}-\frac{s_0}{s_1-s_0}\frac{1-e^{-s_1D}}{s_1D}\right), \qquad (8.127)$$

$$K_{г}(T,1)=K_{г\infty}+(1-K_{г\infty})\left[\frac{I(A,1)}{A}+\frac{s_1}{s_1-s_0}\left(\frac{A}{A-s_0D}\right)\left(\frac{1-e^{-s_0D}}{s_0D}-\frac{1-e^{-A}}{A}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{s_0}{s_1-s_0}\left(\frac{A}{A-s_1D}\right)\left(\frac{1-e^{-s_1D}}{s_1D}-\frac{1-e^{-A}}{A}\right)\right],$$

$$K_{г}(T,2)=K_{г\infty}+(1-K_{г\infty})\left[\frac{I(A,1)+I(A,2)}{A}+\frac{s_1}{s_1-s_0}\left(\frac{A}{A-s_0D}\right)^{2}\left(\frac{1-e^{-s_0D}}{s_0D}-\frac{1-e^{-A}}{A}\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{s_0}{s_1-s_0}\left(\frac{A}{A-s_1D}\right)^{2}\left(\frac{1-e^{-s_1D}}{s_1D}-\frac{1-e^{-A}}{A}\right)-\left(\frac{s_1}{s_1-s_0}\left(\frac{A}{A-s_0D}\right)-\frac{s_0}{s_1-s_0}\left(\frac{A}{A-s_1D}\right)\right)\frac{I(A,2)}{A}\right].$$

Количественный анализ формул, проведенный в *приложении 8* (примеры П8.5–П8.13), позволяет сделать следующие выводы:

- применение экстренных доставок в дублированной системе даже при отсутствии запасных частей в комплекте ЗИП существенно увеличивает показатели готовности системы. Так при стратегии пополнения 111, A = 1 и $k\rho$ = 0,1 коэффициент готовности по наихудшему циклу увеличивается от 0,8452 до 0,9717, а средний коэффициент готовности от 0,9418 до 0,9852. При A = 2 и $k\rho$ = 0,1 эти же показатели изменяются от 0,6004 до 0,9595 и от 0,8319 до 0,9749. Здесь рост A достигается за счет увеличения периода пополнения при неизменном значении среднего времени экстренной доставки;
- если при увеличении A пропорции между периодом пополнения и средним временем ЭД сохраняются (значение D постоянно), то различия между показателями готовности не столь заметны. Так при A = 1, $k\rho$ = 0,1 и D = 10 коэффициент готовности по наихудшему циклу увеличивается от 0,8452 до 0,9717, а средний коэффициент готовности — от 0,9418 до 0,9852. При A = 2 $k\rho$ = 0,2 и D = 10 эти же показатели изменяются от 0,6004 до 0,9241 и от 0,8319 до 0,9553;

- при наличии одной запасной части и стратегии 111 введение ЭД также дает существенный прирост коэффициента готовности. Так при $A = 1$ и $k\rho = 0{,}1$ коэффициент готовности по наихудшему циклу увеличивается от 0,9546 до 0,9904, а при $A = 2$ и $k\rho = 0{,}1$ от 0,7948 до 0,9801. Средний коэффициент готовности увеличивается от 0,98715 до 0,99641 при $A = 1$ и $k\rho = 0{,}1$ и от 0,93449 до 0,99051 при $A = 2$ и $k\rho = 0{,}1$;
- при использовании стратегии 111 расчет по формулам экспоненциальной модели дает всегда оценку сверху для точного значения коэффициента готовности, а по формулам модели медленного движения — оценку снизу. Причем относительная погрешность по коэффициенту неготовности в первом случае достигает 40–50 %, а во втором случае не более 10 % (при $A = 1$ и $k\rho = 0{,}1$: 52,6 % и –9,38 %, а при $A = 2$ и $k\rho = 0{,}1$: 43,4 % и –1,63 %);
- при стратегии 211 введение экстренных доставок улучшает не только показатели готовности, но и показатели безотказности. При отсутствии запасных частей в комплекте ЗИП вероятность отказа уменьшается в несколько раз: при $A = 1$ и $k\rho = 0{,}1$ в 3,97 раза, а при $A = 2$ и $k\rho = 0{,}1$ в 4,99 раза. Средняя наработка до отказа увеличивается еще существеннее: при $A = 1$ и $k\rho = 0{,}1$ в 16,8 раза, при $A = 0{,}1$ и $k\rho = 0{,}1$ в 37,8 раза, а при $A = 0{,}1$ и $k\rho = 0{,}01$ в 150,1 раза;
- при стратегии 211 введение экстренных доставок улучшает показатели готовности, уменьшая коэффициент неготовности в несколько раз и даже в десятки раз. Так при $A = 1$, $D = 10$ и $k\rho = 0{,}1$ коэффициент неготовности по наихудшему циклу уменьшается в 34,2 раза, а средний коэффициент неготовности — в 16 раз. При $A = 2$, $D = 10$ и $k\rho = 0{,}1$ — в 88,3 и 41,2 раза соответственно, а при $A = 2$, $D = 10$ и $k\rho = 0{,}2$ — в 24,4 и 12,6 раза;
- при стратегии 211 и одной запасной части расчет вероятности отказа по приближенной формуле (8.83) дает оценку сверху, причем с небольшой погрешностью. Среднее арифметическое оценок является оценкой снизу и для нее погрешность больше, чем для верхней оценки первого типа. Поэтому следует отдавать предпочтение оценке (8.83) и рассчитанной на ее основе нижней оценке средней наработки до отказа $k\lambda T_{cp,1}(1)$;
- при стратегии 211 и одной запасной части приближенная оценка первого типа совпадает с точным значением коэффициента готовности. Оценка второго типа по формуле модели медленного движения (8.107) является оценкой снизу для коэффициента готовности и при больших A дает небольшую погрешность: для коэффициента неготовности по наихудшему циклу до 10 %. Погрешность по среднему коэффициенту неготовности знакопеременная, но небольшая: от нескольких процентов до долей процента;
- переход от полной ЭД (стратегия 211) к одиночной ЭД (стратегия 221) ухудшает показатели безотказности. Но при небольшом количестве запасных частей это ухудшение не велико. Так при $L = 1$, $A = 1$ и $k\rho = 0{,}1$ вероятность отказа увеличивается от 0,01141 до 0,013585, а при $L = 1$, $A = 2$ и $k\rho = 0{,}1$ — от 0,03244 до 0,04487. При $L = 2$, $A = 2$ и $k\rho = 0{,}1$ вероятность отказа увеличивается от 0,014679 до 0,0209330, а при $L = 2$, $A = 2$ и $k\rho = 0{,}2$ — от 0,02566 до 0,03401. Ухудшаются и значения коэффициента готовности. Так при $L = 1$, $A = 2$ и $k\rho = 0{,}1$ коэффициент готовности по наихудшему циклу уменьшается от 0,99789 до 0,99620, а средний коэффициент готовности — от 0,998457 до 0,997744, при $L = 1$, $A = 2$ и $k\rho = 0{,}2$: от 0,99173 до 0,98680 и от 0,99497 до 0,99288 соответственно.

8.5. Мажорированная система (модель ПЭД3)

Система (рис. 8.7) имеет базовую и одну работоспособную деградированную структуру (l = 1). Поэтому при стратегиях 211 и 221 экстренная доставка позволяет улучшить и показатели безотказности. Показатели готовности улучшаются при четырех стратегиях пополнения: 111, 121, 211 и 221.

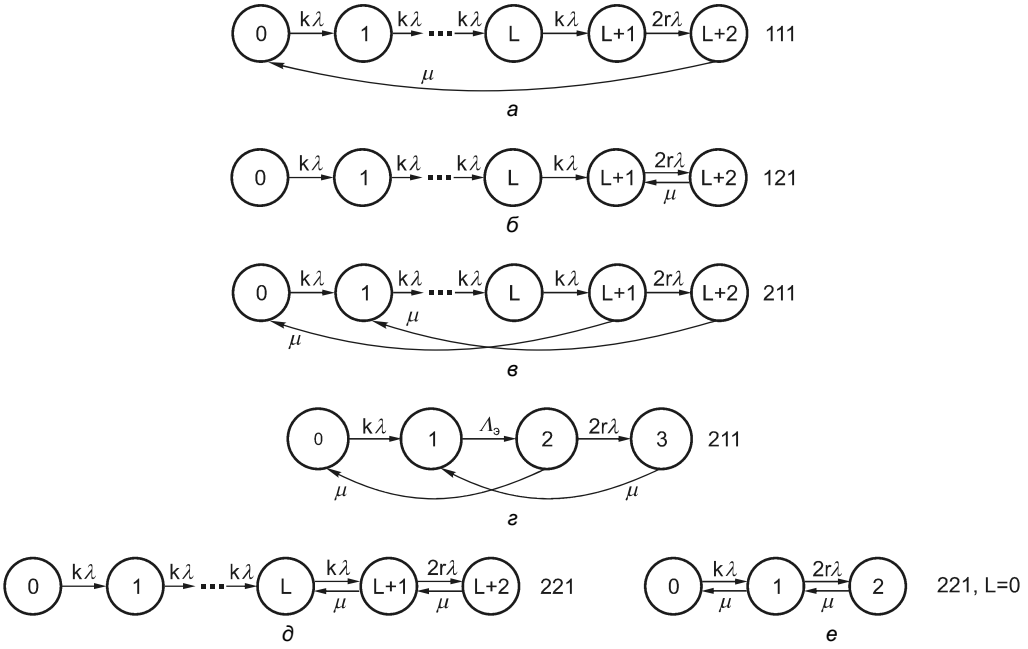


Рис. 8.7. Графы состояний мажорированной системы при различных стратегиях пополнения (модель ПЭД3): *а* — стратегия 111; *б* — стратегия 121; *в*, *г* — стратегия 211; *д*, *е* — стратегия 221

8.5.1. Стратегия 111

Граф состояний системы приведен на рис. 8.7, *а*. Он является частным случаем графа на рис. 8.1, *а* при l = 1, $\lambda_L = k\lambda$, $\Lambda_{L+1} = 2\,r\lambda$, $\Lambda_L = \lambda_{L+1} = 0$. При этих значениях интенсивностей переходов из (8.5) имеем:

$$1 - K_c^*(s, L) = \frac{(2/3)s(k\lambda)^{L+2}}{(s+k\lambda)^{L+1}(s+2r\lambda)(s+\mu) - (2/3)\mu(k\lambda)^{L+2}}. \qquad (8.128)$$

Этот же результат можно получить и непосредственно из графа (рис. 8.7, *а*). Разлагая знаменатель (8.128) по степеням s, получим:

$$1 - K_c^*(s, L) = \frac{a_0}{A_0 + sA_1 + s^2A_2 + \ldots + s^{L+1}A_{L+1} + s^{L+2}}, A_i = a_i + \mu a_{i+1}, a_0 = 2r\lambda(k\lambda)^{L+1}, \qquad (8.129)$$

$$a_1 = (5+2L)r\lambda(k\lambda)^L, a_2 = \frac{2}{3}(L+1)(L+3)(k\lambda)^L, a_3 = \frac{1}{18}L(L+1)(2L+7)(k\lambda)^{L-1}, a_{L+1} = (L+\frac{5}{3})k\lambda.$$

Функция интенсивности потока ЭД имеет изображение:

$$\omega^*(s,L)=\mu(1-K_г^*(s,L))=\frac{\mu a_0}{(s+s_0)(s+s_1)...(s+s_{L+1})}. \quad (8.130)$$

Обратное преобразование дает:

$$\omega(t,L)=\frac{\mu a_0}{a_0+\mu a_1}\left(1-\sum_{i=0}^{L+1}e^{-s_i t}\Big/\prod_{j=0,j\neq i}^{L+1}(1-\frac{s_i}{s_j})\right). \quad (8.131)$$

Используя общую формулу связи между функциями интенсивности потока ЭД и локального коэффициента готовности, приходим к формуле (8.9).

Среднее значение коэффициента готовности в периоде пополнения:

$$K_г(T,L)=\frac{1}{T}\int_0^T K_г^*(t,L)dt=1-\frac{a_0}{A_0}\left(1-\sum_{i=0}^{L+1}\frac{1-e^{-s_i T}}{s_i T}\Big/\prod_{j=0,j\neq i}^{L+1}(1-\frac{s_i}{s_j})\right). \quad (8.132)$$

Среди корней полинома могут быть комплексно-сопряженные пары. Для них требуется дополнительные преобразования в (8.123), чтобы привести выражение к действительному виду. Коэффициент готовности находят по формуле (8.9). Среднее количество ЭД в периоде пополнения:

$$H(T,L)=\frac{\mu a_0}{a_0+\mu a_1}\left(1-\sum_{i=0}^{L+1}\frac{1-e^{-s_i T}}{s_i T}\Big/\prod_{j=0,j\neq i}^{L+1}(1-\frac{s_i}{s_j})\right). \quad (8.133)$$

Среднее значение коэффициента готовности находят по формуле (8.10).

Если модули данного типа не входят в состав комплекта ЗИП ($L = 0$), то коэффициент готовности все же увеличивается за счет экстренных доставок. Из (8.129) при $L = 0$ имеем:

$$1-K_г^*(s,0)=\frac{2rk\rho^2}{(s+s_0)(s+s_1)},\ s_{0,1}=\frac{1}{2}(1+5r\rho\mp\sqrt{1-10r\rho+(r\rho)^2})=a\mp\hat{b},\ \rho=\lambda\overline{T}_{эд}. \quad (8.134)$$

Отсюда локальный коэффициент готовности:

$$K_г^*(t,0)=K_г(0)+(1-K_г(0))\frac{s_1e^{-s_0D}-s_0e^{-s_1D}}{s_1-s_0},\ D=\mu t,\ K_г(0)=\frac{5}{5+2k\rho}, \quad (8.135)$$

Здесь $K_г(0)$ — стационарный коэффициент готовности.

Нетрудно установить, что корни s_0 и s_1 — действительные. Тогда можно пользоваться формулой:

$$K_г^*(t,0)=K_г(0)+(1-K_г(0))e^{-aD}\left(ch(\hat{b}D)+\frac{a}{\hat{b}}sh(\hat{b}D)\right). \quad (8.136)$$

Среднее значение коэффициента готовности по периоду пополнения:

$$K_г(T,0)=\frac{5}{5+2k\rho}+\frac{2k\rho}{(5+2k\rho)(s_1-s_0)D}\left(\frac{s_1}{s_0}(1-e^{-s_0D})-\frac{s_0}{s_1}(1-e^{-s_1D})\right),\ D=\mu T, \quad (8.137)$$

При $L = 1$ формула (8.129) приобретает вид:

$$1-K_г^*(s,1)=\frac{a_0}{A_0+sA_1+s^2A_2+s^3}=\frac{2rk\rho^2}{(s+s_0)(s+s_1)(s+s_2)}, \quad (8.138)$$

$$a_0=2r\rho(k\rho)^2,a_1=7rk\rho^2,a_2=8r\rho,a_3=1,A_i=a_i+a_{i+1}.$$

Корни полинома разыскиваются с помощью численной процедуры.

Обратное преобразование (8.138) дает:

$$1-K_c^*(t,1)=\frac{a_0}{A_0}\left(1-\sum_{i=0}^{2}e^{-s_iD}\Big/\prod_{j=0,\,j\neq i}^{2}(1-\frac{s_i}{s_j})\right). \qquad (8.139)$$

Если все корни полинома действительные, то (8.139) можно преобразовать к более удобной форме:

$$1-K_c^*(t,1)=(1-K_c(1))(1-\sum_{i=0}^{2}B_ie^{-s_iD}),K_c(1)=\frac{7}{7+2k\rho},B_i=\frac{s_i^2-A_2s_i+A_1}{3s_i^2-2A_2s_i+A_1}. \qquad (8.140)$$

Если один корень s_0 — действительный, а два других $s_{1,2}$ — образуют комплексно-сопряженную пару $s_{1,2}=a\mp ib$, то (8.139) можно преобразовать к виду:

$$1-K_c^*(t,1)=\frac{a_0}{A_0}(1-\frac{1}{(a-s_0)^2+b^2}((a^2+b^2)e^{-s_0D}+s_0e^{-aD}((s_0-2a)\cos(bD)+\frac{1}{b}(a(s_0-a)+$$

$$+b^2)\sin(bD))))=(1-K_c(1))(1-B_0e^{-s_0D}-e^{-aD}(C_1\cos(bD)+C_2\sin(bD))). \qquad (8.141)$$

Другая форма расчетной формулы (8.141):

$$1-K_c^*(t,1)=(1-K_c(1))(1-B_0e^{-s_0D}-e^{-aD}(C_1\cos(bD)+C_2\sin(bD))), \qquad (8.142)$$

$$C_1=2\frac{a_1c_1+b_1A_1}{c_1^2+d_1^2},C_2=2\frac{a_1d_1-b_1c_1}{c_1^2+d_1^2},a_1=a^2-b^2-aA_2+A_1,b_1=b(2a-A_2),$$

$$c_1=3(a^2-b^2)-2aA_2+A_1,d_1=2b(3a-A_2).$$

Среднее значение коэффициента готовности по периоду пополнения при действительных и комплексно-сопряженных корнях:

$$K_c(T,1)=1-(1-K_c(1))(1-\sum_{i=0}^{2}B_i\frac{1-e^{-s_iD}}{s_iD}), \qquad (8.143)$$

$$K_c(T,1)=K_c(1)+(1-K_c(1))(B_0\frac{1-e^{-s_0D}}{s_0D}+\frac{1}{(a^2+b^2)D}(C_1a(1-$$

$$-e^{-aD}(\cos(bD)-\frac{b}{a}\sin(bD)))+C_2b(1-e^{-aD}(\frac{a}{b}\sin(bD)+\cos(bD)))). \qquad (8.144)$$

При L = 2 и четырех действительных корнях полинома коэффициенты готовности рассчитывают по формулам:

$$K_c^*(T,2)=1-(1-K_c(2))(1-\sum_{i=0}^{3}B_ie^{-s_iD}),B_i=\frac{s_i^3-A_3s_i^2+A_2s_i-A_1}{4s_i^3-3A_3s_i^2+2A_2s_i-A_1},$$

$$K_c(T,2)=1-(1-K_c(2))(1-\sum_{i=0}^{3}B_i\frac{1-e^{-s_iD}}{s_iD}),K_c(2)=\frac{9}{9+2k\rho}. \qquad (8.145)$$

При двух действительных и двух комплексно-сопряженных корнях можно использовать формулы (8.70), заменив там значение стационарного коэффициента готовности на выражение из (8.145). При двух парах комплексно-сопряженных корней следует использовать

формулы (8.71), также заменив там значение стационарного коэффициента готовности на выражение из (8.145).

Найдем теперь приближенные значения коэффициента готовности.

Оценка 1 (экспоненциальная модель)

Здесь используется замечательное свойство систем с периодическим пополнением запасов в комплекте ЗИП, состоящее в том, что для моментов времени, кратных периоду пополнения, ВБР с высокой точностью можно находить с помощью экспоненциального распределения. Для остальных моментов времени значение ВБР, вычисленное по экспоненциальной модели, является оценкой снизу. Заменяя систему эквивалентным элементом с интенсивностью отказов $\lambda_э = 1/\overline{T}_0(T,L)$ и интенсивностью восстановления $\mu = 1/\overline{T}_{эд}$, получим приближенную формулу:

$$K^*_{г,пр1}(t,L) = \frac{1}{\overline{T}_0(T,L)+\overline{T}_{эд}}\left(\overline{T}_0(T,L)+\overline{T}_{эд}\exp(-(\frac{1}{\overline{T}_0(T,L)}+\frac{1}{\overline{T}_{эд}})t)\right). \qquad (8.146)$$

Значения средней наработки до отказа $\overline{T}_0(T,L)$ следует находить по формулам *главы 5*:

$$k\lambda\overline{T}_0(T,L) = \frac{(3^{L+2}/2)(1-e^{-2ra})-\sum_{i=0}^{L}(3^{L+1-i}-1)I(A,i+1)}{I(A,L+1)-3^{L+1}e^{-2ra}I(ra,L+1)}. \qquad (8.147)$$

Оценку 1 для среднего значения коэффициента готовности вычисляют по формуле (8.12).

Оценка 2 (по медленному движению)

Согласно (8.16) полином в знаменателе имеет вид:

$$A_0 + A_1 s + A_2 s^2 = 0, A_2 = \frac{r\lambda\mu}{6}(L+1)(L(2L+7)+6(L+3)k\rho)(k\lambda)^{L-2},$$

$$A_1 = r\lambda\mu((L+1)(L+3)+(2L+5)k\rho)(k\lambda)^{L-1}, A_0 = r\lambda\mu(2L+5+2k\rho)(k\lambda)^L. \qquad (8.148)$$

Корни полинома находят по формуле (8.112). После нормирования путем деления в (8.105) почленно на $k\lambda$ получим:

$$s_{0,1} = a \mp b = a \mp \frac{\sqrt{\Delta}}{2A_2} = \frac{3((L+1)(L+3)+k\rho(2L+5))}{(L+1)(L(2L+7)+6(L+3)k\rho)}(1 \mp$$

$$\mp\sqrt{1-\frac{2(L+1)(L(2L+7)+6(L+3)k\rho)(2L+5+2k\rho)}{3((L+1)(L+3)+2k\rho(2L+5))^2}}), \Delta = A_1^2 - 4A_0A_2. \qquad (8.149)$$

Согласно (8.16) и (8.17) имеем приближенное значение коэффициента готовности в конце периода пополнения при двух действительных корнях:

$$K^*_{г,пр2}(T,L) = \frac{5+2L}{5+2L+2k\rho}+\frac{2k\rho}{5+2L+2k\rho}\frac{s_1e^{-s_0A}-s_0e^{-s_1A}}{s_1-s_0} =$$

$$= \frac{5+2L}{5+2L+2k\rho}+\frac{2k\rho}{5+2L+2k\rho}e^{-aA}(\frac{a}{b}sh(bA)+ch(bA)), \qquad (8.150)$$

при комплексно-сопряженных корнях:

$$K^{*}_{г,пр2}(T,L)=\frac{5+2L}{5+2L+2k\rho}+\frac{2k\rho}{5+2L+2k\rho}e^{-aA}\left(\frac{a}{b}\sin(bA)+\cos(bA)\right),b=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2A_2}. \quad (8.151)$$

Оценка 2 для среднего значения коэффициента готовности:

$$K_{г,пр2}(T,L)=\frac{5+2L}{5+2L+2k\rho}+\frac{2k\rho}{5+2L+2k\rho}\left(\frac{s_1}{s_0}(1-e^{-s_0A})-\frac{s_0}{s_1}(1-e^{-s_1A})\right)/((s_1-s_0)A). \quad (8.152)$$

При использовании одной экспоненты:

$$K_{г,пр2}(T,L)=1-H(T,L)/D=\frac{5+2L}{5+2L+2k\rho}+\frac{2k\rho}{5+2L+2k\rho}\frac{1-e^{-\omega_1A}}{\omega_1A}, \quad (8.153)$$

$$\omega_1=\frac{A_0}{k\lambda A_1}=\frac{2L+5+2k\rho}{(L+1)(L+3))+(2L+5)k\rho}.$$

При $L = 0$ корни полинома действительные:

$$s_{0,1}=a\mp b=\frac{1}{6k\rho}(3+5k\rho\mp\sqrt{9-30k\rho+(k\rho)^2}).$$

Далее надо использовать формулу (8.150).

При $L = 1$ корни полинома комплексно-сопряженные:

$$s_{0,1}=a\mp ib=\frac{k\rho}{2(3+8k\rho)}\mp i\frac{k\rho}{2}\sqrt{20+136k\rho+15(k\rho)^2}.$$

При $L = 2$ корни полинома также комплексно-сопряженные:

$$s_{0,1}=a\mp ib=\frac{3k\rho(5+3k\rho)}{2(11+15k\rho)}\mp i\frac{k\rho}{2(11+15k\rho)}\sqrt{20+136k\rho+15(k\rho)^2}.$$

Далее надо использовать формулу (8.151).

Среднее значение коэффициента готовности при действительных корнях находят по формуле

$$K_{г,пр2}(T,L)=\frac{5+2L}{5+2L+2k\rho}+\frac{2k\rho}{5+2L+2k\rho}\left(\frac{s_1}{s_0}(1-e^{-s_0A})-\frac{s_0}{s_1}(1-e^{-s_1A})\right)/((s_1-s_0)A)=$$

$$=\frac{5+2L}{5+2L+2k\rho}+\frac{2k\rho}{5+2L+2k\rho}\frac{2a}{A(a^2-b^2)}(1-e^{-aA}(\frac{a^2+b^2}{2ab}sh(bA)+ch(bA))). \quad (8.154)$$

При комплексно-сопряженных корнях:

$$K_{г,пр2}(T,L)=\frac{5+2L}{5+2L+2k\rho}+\frac{2k\rho}{5+2L+2k\rho}\frac{2a}{A(a^2-b^2)}\left(1-e^{-aA}\left(\frac{a^2+b^2}{2ab}\sin(bA)+\cos(bA)\right)\right). \quad (8.155)$$

8.5.2. Стратегия 121 (одиночная ЭД)

Граф состояний приведен на рис. 8.7, *б*. Из формулы (8.24) при $l = 1$, $\lambda_L = k\lambda$, $\Lambda_{L+1} = 2r\lambda$, $\Lambda_L = \lambda_{L+1} = 0$ получим

$$K_г^*(s,L) = 1 - \frac{2r\lambda}{s+2r\lambda+\mu}\left(\frac{k\lambda}{s+k\lambda}\right)^{L+1}.$$

Отсюда

$$K_г^*(t,L) = 1 - \frac{2r\rho}{2r\rho+1}\left(I(k\lambda t, L+1) - \left(\frac{k\rho}{r\rho-1}\right)^{L+1} e^{-(2r\rho+1)\mu t} I((r\rho-1)\mu t, L+1)\right) =$$

$$= \frac{1}{2r\rho+1} + \frac{2r\rho}{2r\rho+1}\left(\left(\frac{k\rho}{r\rho-1}\right)^{L+1} e^{-(2r\rho+1)\mu t} + \sum_{i=0}^{L}\left(1 - \left(\frac{k\rho}{r\rho-1}\right)^{L+1-i}\right)\frac{(k\lambda t)^i}{i!} e^{-k\lambda t}\right). \quad (8.156)$$

Интегрируя по времени в интервале (0, T), получим среднее значение коэффициента готовности:

$$K_г(T,L) = \frac{1}{1+2r\rho} + \frac{2r\rho}{1+2r\rho}\left(\left(\frac{k\rho}{r\rho-1}\right)^{L+1} \frac{1-e^{-(1+2r\rho)D}}{(1+2r\rho)D} + \frac{1}{A}\sum_{i=0}^{L}\left(1 - \left(\frac{k\rho}{r\rho-1}\right)^{L+1-i}\right) I(A, i+1)\right). \quad (8.157)$$

В частности, при $L = 0$, 1 и 2 имеем:

$$K_г^*(t,0) = 1 - \frac{2r\rho}{2r\rho+1}\left(1 - \frac{1+2r\rho}{1-r\rho} e^{-k\rho D} + \frac{k\rho}{2r\rho+1} e^{-(1+2r\rho)D}\right), D = \mu t, \quad (8.158)$$

$$K_г(T,0) = \frac{1}{2r\rho+1} + \frac{2r\rho}{2r\rho+1}\left(-\left(\frac{k\rho}{1-r\rho}\right)\frac{1-e^{-(1+2r\rho)D}}{(1+2r\rho)D} + \frac{1+2r\rho}{1-r\rho}\frac{1-e^{-A}}{A}\right)$$

$$K_г^*(t,1) = \frac{1}{1+2r\rho} + \frac{2r\rho}{1+2r\rho}\left(\left(\frac{k\rho}{1-r\rho}\right)^2 e^{-(1+2r\rho)D} + \left(1 - \left(\frac{k\rho}{1-r\rho}\right)^2 + \frac{1+2r\rho}{1-r\rho} k\rho D\right) e^{-k\rho D}\right)$$

$$K_г^*(t,1) = \frac{1}{1+2r\rho} + \frac{2r\rho}{1+2r\rho}\left(\left(\frac{k\rho}{1-r\rho}\right)^2 e^{-(1+2r\rho)D} + \left(1 - \left(\frac{k\rho}{1-r\rho}\right)^2 + \frac{1+2r\rho}{1-r\rho} k\rho D\right) e^{-k\rho D}\right)$$

$$K_г(T,1) = \frac{1}{1+2r\rho} + \frac{2r\rho}{1+2r\rho}\left(\left(\frac{k\rho}{1-r\rho}\right)^2 \frac{1-e^{-(1+2r\rho)D}}{(1+2r\rho)D} + \left(1 - \left(\frac{k\rho}{1-r\rho}\right)^2\right)\frac{I(A,1)}{A} + \frac{1+2r\rho}{1-r\rho}\frac{I(A,2)}{A}\right)$$

$$K_г^*(t,2) = \frac{1}{1+2r\rho} + \frac{2r\rho}{1+2r\rho}\left(-\left(\frac{k\rho}{1-r\rho}\right)^3 e^{-(1+2r\rho)D} + \left(1 + \left(\frac{k\rho}{1-r\rho}\right)^3\right) e^{-k\rho D} +\right.$$

$$\left. + \left(1 - \left(\frac{k\rho}{1-r\rho}\right)^2\right) k\rho D e^{-k\rho D} + \frac{1+2r\rho}{1-r\rho}\frac{(k\rho D)^2}{2} e^{-k\rho D}\right)$$

$$K_c(T,2)=\frac{1}{1+2r\rho}+\frac{2r\rho}{1+2r\rho}\left(-\left(\frac{k\rho}{1-r\rho}\right)^3\frac{1-e^{-(1+2r\rho)D}}{(1+2r\rho)D}+\left(1+\left(\frac{k\rho}{1-r\rho}\right)^3\right)\frac{I(A,1)}{A}+\right.$$

$$\left.+\left(1-\left(\frac{k\rho}{1-r\rho}\right)^2\right)\frac{I(A,2)}{A}+\frac{1+r\rho}{1-r\rho}\frac{I(A,3)}{A}\right).$$

8.5.3. Стратегия 211

Граф состояний системы приведен на рис. 8.7, *в*. В графе учтено то, что при отказе комплекта ЗИП оформляется заявка на экстренную доставку $L + 1$ запасных частей.

Показатели безотказности

Система уравнений, составленная по графу состояний, имеет вид:

$$(s+k\lambda)P_0^*(s)-\mu P_{L+1}^*(s)=s,\ P_L^*(s)=\left(\frac{k\lambda}{s+k\lambda}\right)^L P_0^*(s), \tag{8.159}$$

$$P_{L+1}^*(s)=\left(\frac{k\lambda}{s+k\lambda}\right)^L\frac{k\lambda}{s+\mu+2r\lambda}P_0^*(s),Q^*(s,L)=\frac{2r\lambda}{s}P_{L+1}^*(s).$$

Решение (8.159) имеет вид:

$$Q^*(s,L)=\frac{2r\lambda\left(k\lambda\right)^{L+1}}{(s+\mu+2r\lambda)(s+k\lambda)^{L+1}-\mu\left(k\lambda\right)^{L+1}}. \tag{8.160}$$

Общий вид обратного преобразования (8.160):

$$Q(t,L)=1-\sum_{i=0}^{L+1}e^{-s_i\mu t}\ /\ \prod_{j=0,j\neq i}^{L}\left(1-\frac{s_i}{s_j}\right). \tag{8.161}$$

При $L = 0$ формула (8.161) дает выражение для вероятности отказа системы:

$$Q(t,0)=1-\frac{s_1e^{-s_1\mu t}-s_0e^{-s_2\mu t}}{s_1-s_0}=1-e^{-aD}\left(\frac{a}{b}sh(bD)+ch(bD)\right), \tag{8.162}$$

$$s_{0,1}=a\mp b=\frac{1+5r\rho}{2}\mp\frac{1}{2}\sqrt{1+10r\lambda\mu+\left(r\lambda\right)^2}.$$

При $L > 0$ представим (8.160) в виде:

$$Q^*(s,L)=\frac{a_0}{a_0+A_1s+A_2s^2+\ldots+A_{L+1}s^{L+1}+s^{L+2}}=\frac{a_0}{(s+s_0)(s+s_1)\ldots(s+s_{L+1})}, \tag{8.163}$$

$$a_0=2r\lambda\left(k\lambda\right)^{L+1},A_1=\left(k\lambda\right)^L(k\lambda+(L+1)(\mu+2r\lambda),A_2=\frac{1}{2}(L+1)\left(k\lambda\right)^{L-1}(L(\mu+2r\lambda)+2k\lambda). \tag{8.164}$$

После нормирования коэффициентов в (8.164) путем почленного деления на μ^{L+2}, получим:

$$a_0 = 2r\rho\left(k\rho\right)^{L+1}, A_1 = \left(k\rho\right)^L (k\rho + (1+2r\rho)(L+1)), A_2 = \frac{1}{2}(L+1)\left(k\rho\right)^{L-1} (L(1+2r\rho) + 2k\rho) . \tag{8.165}$$

Рассмотрим два частных случая. При $L = 1$ формула (8.163) приобретает вид:

$$Q^*(s,1) = \frac{a_0}{2r\rho\left(k\rho\right)^2 + k\rho(2+7r\rho)s + (1+8k\rho/3)s^2 + s^3} . \tag{8.166}$$

Если все три корня полинома действительные , то обратное преобразование в (8.166) дает:

$$Q(t,1) = 1 - \sum_{i=0}^{2} B_i e^{-s_i D}, B_i = \frac{s_i^2 - A_2 s_i + A_1}{3s_i^2 - 2A_2 s_i + A_1}, D = \mu t . \tag{8.167}$$

Если два корня — комплексно-сопряженные $s_{0,1} = a \mp ib$, а третий корень $s_2 = c$ — действительный, тогда

$$Q(t,1) = 1 - (C_1 \sin(bD) + C_2 \cos(bD))e^{-aD})) - C_3 e^{-cD}, \tag{8.168}$$

$$C_1 = \frac{c(a(c-a)+b^2)}{b((a-c)^2+b^2)}, C_3 = 1 - C_2 = \frac{a^2+b^2}{(a-c)^2+b^2} .$$

При $L = 2$ формула (8.163) приобретает вид:

$$Q^*(s,2) = \frac{a_0}{a_0 + A_1 s + A_2 s^2 + A_3 s^3 + s^4} = \frac{a_0}{(s+s_0)(s+s_1)(s+s_3)(s+s_4)}, \tag{8.168, а}$$

$$a_0 = 2r\rho\left(k\rho\right)^3, A_1 = 3\left(k\rho\right)^2 (1+k\rho)), A_2 = k\rho(3+5k\rho), A_3 = 1+11r\rho .$$

При действительных корнях имеем:

$$Q(t,2) = 1 - \sum_{i=0}^{3} B_i e^{-s_i D}, B_i = \frac{s_i^3 - A_3 s_i^2 + A_2 s_i - A_1}{4s_i^3 - 3A_3 s_i^2 + 2A_2 s_i - A_1}, D = \mu t . \tag{8.169}$$

При двух действительных и двух комплексно-сопряженных корнях: $s_{0,1} = a \mp ib$, $s_2 = c, s_3 = d$ можно использовать формулы

$$Q(t,2) = 1 - \left(C_1 e^{-aD} \sin(bD) + C_2 e^{-aD} \cos(bD) + C_3 e^{-cD} + C_4 e^{-dD}\right), \tag{8.170}$$

$$B = \frac{cd}{[(c-a)^2+b^2][(d-a)^2+b^2]}, C_1 = B(\frac{a}{b}(c-a)(d-a) + b(c+d-3a)),$$

$$C_2 = 1 - C_3 - C_4 = B(\frac{a}{b}(c-a)(d-a) - b^2 - a(c+d-2a)),$$

$$C_3 = \frac{d}{d-c}\frac{a^2+b^2}{(c-a)^2+b^2}, C_4 = \frac{c}{c-d}\frac{a^2+b^2}{(d-a)^2+b^2} .$$

Если полином имеет две пары комплексно-сопряженных корней: $s_{0,1} = a_1 \mp ib_1, s_{2,3} = a_2 \mp ib_2$, то

$$Q(t,2) = 1 - e^{-a_1 D}\left(B_1 \sin(b_1 D) + C_1 e^{-a_1 D} \cos(b_1 D)) - e^{-a_2 D}(B_2 \sin(b_2 D) + C_2 e^{-a_2 D} \cos(b_2 D)\right),$$

$$B_1 = D_1(\frac{a_1}{b_1}((a_2-a_1)^2+b_2^2-b_1^2)+2b_1(a_2-a_1)), C_1 = D_1((a_2-a_1)^2-b_2^2+b_1^2+2a_2(a_2-a_1)),$$

$$B_2 = D_2(\frac{a_2}{b_2}((a_2-a_1)^2+b_1^2-b_2^2)+2b_2(a_1-a_2)), C_2 = D_2((a_2-a_1)^2+b_2^2-b_1^2-2a_1(a_2-a_1)),$$

$$D_1 = \frac{a_2^2+b_2^2}{(a_2-a_1)^4+(b_2^2-b_1^2)^2+2(a_2-a_1)^2(b_2^2+b_1^2)},$$

$$D_2 = \frac{a_1^2+b_1^2}{(a_2-a_1)^4+(b_2^2-b_1^2)^2+2(a_2-a_1)^2(b_2^2+b_1^2)}. \qquad (8.171)$$

Рассмотрим теперь приближенные оценки.

Оценка 1 (экспоненциальная модель)

Используем формулу (8.31) при $\Lambda_{L+1} = 2r\lambda$, которая дает оценку сверху для вероятности отказа. При малых μ это может дать такой эффект, что вероятность отказа при дисциплине пополнения ПЭД окажется больше, чем при периодическом пополнении. Поскольку это противоречит сущности упомянутых стратегий, введем поправочный коэффициент, выравнивая значения вероятности отказа в моделях П3 и ПЭД3 (при $\mu = 0$) для малых значений A. Для моделей П3 и ПЭД3 при малых A получены асимптотические формулы:

$$Q(T,L,П3) \approx \frac{2A^{L+2}}{3(L+2)!}, Q_{пр1}(T,L,ПЭД3,\mu=0) \approx \frac{A}{3}\Lambda_э T = \frac{A^{L+2}}{3(L+1)!}. \qquad (8.172)$$

Отсюда следует, что здесь, как и в модели ПЭД2, поправочный коэффициент равен $K_0 = 2/(L+2)$. С учетом поправочного коэффициента оценку 1 находим по формуле:

$$Q_{пр1}(t,L) = K_0 Q_{пр1}^{(1)}(t,L) = \frac{2}{L+2}\left(1-\frac{s_1 e^{-s_0 t}-s_0 e^{-s_1 t}}{s_1-s_0}\right), \qquad (8.173)$$

$$s_{0,1} = \frac{1}{2}(\Lambda_э+2r\lambda+\mu)\left(1\mp\sqrt{1-\frac{8\Lambda_э r\lambda}{(\Lambda_э+2r\lambda+\mu)^2}}\right), \Lambda_э = k\lambda I(A,L+1)/\sum_{j=0}^{L} I(A,j+1).$$

При использовании оценки $Q_{пр1}^{(1)}(t,L)$ средняя наработка равна $k\lambda T_{ср}^{(1)}(T,L)$. Тогда (8.173) можно представить в виде:

$$k\lambda T_{ср}(T,L) = \frac{LA}{2Q_{пр1}^{(1)}(T,L)} + k\lambda T_{ср}^{(1)}(T,L), \qquad (8.174)$$

$$k\lambda T_{ср}^{(1)}(T,L) = \frac{k\rho}{s_1-s_0}\left(\frac{s_1}{s_0}(1-e^{-s_0 T})-\frac{s_0}{s_1}(1-e^{-s_1 T})\right)/Q_{пр1}^{(1)}(t,L) =$$

$$= \frac{3(s_1-s_0)}{2\Lambda_э}\frac{\mu+2r\lambda+\Lambda_э-\left(s_1^2 e^{-s_0 T}-s_0^2 e^{-s_1 T}\right)}{s_1(1-e^{-s_0 T})-s_0(1-e^{-s_1 T})}.$$

Если корни полинома — комплексно-сопряженные $s_{0,1} = a \mp ib$, то вероятность отказа находят по формуле:

$$Q_{np1}(t,L) = K_0(1-e^{-aD})(\frac{a}{b}\sin(bD)+\cos(bD))), D = \mu t\,. \quad (8.175)$$

Оценка 2 (по медленному движению)

Оставляя в знаменателе полиноме знаменателя (8.163) только три слагаемых, найдем:

$$Q_{np2}(t,L) = 1-\frac{s_1 e^{-s_0 t} - s_0 e^{-s_1 t}}{s_1 - s_0}, s_{0,1} = \frac{A_1}{2A_2}\left(1 \mp \sqrt{1-\frac{4a_0A_2}{A_1^2}}\right), \quad (8.176)$$

где коэффициенты a_0, A_1 и A_2 находят по формулам (8.165). Средняя наработка до отказа, полученная с помощью (8.176), рассчитывается по формуле:

$$k\lambda T_{cp,np2}(T,L) = k\rho\left(\frac{s_1}{s_0}(1-e^{-s_0 D}) - \frac{s_0}{s_1}(1-e^{-s_1 D})\right) / ((s_1-s_0)Q_{np2}(T,L))\,. \quad (8.177)$$

Показатели готовности

Согласно графу состояний (рис. 8.7, *в*) и общему виду системы уравнений (8.32)–(8.33) система уравнений для вероятностей состояний имеет вид:

$$(s+k\lambda)P_0^*(s) - \mu P_{l+1}^*(s) = s, (s+k\lambda)P_1^*(s) - k\lambda P_0^*(s) - \mu P_{i+2}^*(s) = 0$$

$$(s+k\lambda)P_l^*(s) - k\lambda P_{l-1}^*(s) = 0, i = 2...L; (s+2r\lambda+\mu)P_{L+1}^*(s) - k\lambda P_L^*(s) = 0$$

$$(s+\mu)P_{L+2}^*(s) - 2r\lambda P_{L+1}^*(s) = 0; K_c^*(s,L) = 1 - P_{L+2}^*(s)\,.$$

Решение системы:

$$1 - K_c^*(s,L) = \frac{2r\lambda s(k\lambda)^{L+1}}{(s+k\lambda)^{L+1}(s+\mu)(s+\mu+2r\lambda) - 2r\lambda\mu(s+k\lambda)(k\lambda)^L - \mu(s+\mu)(k\lambda)^{L+1}}\,.$$

После некоторого упрощения и нормирования путем почленного деления на μ^{L+2} получим:

$$1 - K_c^*(s,L) = \frac{a_0}{A_0 + A_1 s + A_2 s^2 + ... + A_L s^L + A_{L+1}s^{L+1} + s^{L+2}}\,, \quad (8.178)$$

$$a_0 = \frac{2}{3}(k\rho)^{L+2}, A_0 = (k\rho)^L((L+1) + r\rho(2L+3) + 2(k\rho)^2/3)\,,$$

$$A_1 = (k\rho)^{L-1}(L(L+1)/2 + r\rho(L+1)(L+6) + (2L+5)(k\rho)^2/3)\,,$$

$$A_2 = \frac{1}{6}(k\rho)^{L-2}(L+1)(L(L-1) + 2k\rho L(L+8)/3 + 2(L+3)(k\rho)^2)\,.$$

Обратное преобразование в (8.178) дает:

$$K_c^*(T,L) = K_c(L) + (1-K_c(L))\sum_{i=0}^{L+1} e^{-s_i D} \Big/ \prod_{j=0, j\neq i}^{L+1}\left(1-\frac{s_i}{s_j}\right), \quad (8.179)$$

$$K_c(L) = \frac{L+1+r\rho(2L+3)}{L+1+r\rho(2L+3)+2(k\rho)^2/3}\,. \quad (8.180)$$

Среднее значение коэффициента готовности:

$$K_г(T,L) = K_г(L) + (1-K_г(L))\sum_{i=0}^{L+1}\frac{1-e^{-s_i D}}{s_i D} / \prod_{j=0,j\neq i}^{L+1}\left(1-\frac{s_i}{s_j}\right). \qquad (8.181)$$

Найдем теперь приближенные оценки коэффициента готовности.

Оценка 1 (экспоненциальная модель)

После отказа одного модуля и использования одной запасной части заменяем систему эквивалентным элементом с интенсивностью отказов

$$\Lambda_э = 1/\overline{T}_0(T, L-1, П1).$$

В графе состояний (рис. 8.7, *в*) заменяем состояния 1, ..., L одним состоянием. В результате граф состояний имеет всего 4 состояния (см. рис. 8.7, *г*). Система уравнений приобретает вид:

$$(s+k\lambda)P_0^*(s) - \mu P_2^*(s) = s, (s+\Lambda_э)P_1^*(s) - k\lambda P_0^*(s) - \mu P_3^*(s) = 0, \qquad (8.182)$$

$$(s+2r\lambda+\mu)P_2^*(s) - \Lambda_э P_1^*(s) = 0, (s+\mu)P_3^*(s) - 2r\lambda P_2^*(s) = 0; K_г^*(s,L) = 1 - P_3^*(s).$$

Решение (8.182) имеет вид:

$$K_{г,пр1}^*(s,L) = 1 - \frac{2\Lambda_э k\lambda r\lambda}{A_0 + A_1 s + A_2 s^2 + s^3} = 1 - \frac{2\Lambda_э k\lambda r\lambda}{(s+s_0)(s+s_1)(s+s_2)}, \qquad (8.183)$$

где $A_0 = \mu^2(k\lambda+\Lambda_э) + k\lambda\mu(2r\lambda+\Lambda_э) + 2\Lambda_э k\lambda r\lambda,$

$$A_1 = \mu^2 + \mu(2k\lambda + 2r\lambda + 2\Lambda_э) + (2k\lambda + 5\Lambda_э)r\lambda, A_2 = 2\mu + 5r\lambda + \Lambda_э.$$

После нормирования путем деления на μ получим:

$$K_{г,пр1}^*(s,L) = 1 - \frac{a_0}{A_0 + A_1 s + A_2 s^2 + s^3}, \qquad (8.184)$$

$$a_0 = 2(k\rho)^3/(3\beta), \beta = k\lambda/\Lambda_э = k\lambda\overline{T}_0(T, L-1, П1), A_0 = k\rho(1 + \frac{2}{3}k\rho + (1 + k\rho + \frac{2}{3}(k\rho)^2)/\beta),$$

$$A_1 = 1 + \frac{8}{3}k\rho + \frac{2}{3}(k\rho)^2 + \frac{k\rho}{\beta}(2 + 5r\rho), A_2 = 2 + \frac{5}{3}k\rho + \frac{k\rho}{\beta}.$$

Если все три корня полинома действительные, то при обратном преобразовании имеем:

$$K_{г,пр1}^*(t,L) = 1 - \frac{a_0}{A_0}\left(\left|1 - \sum_{i=0}^{2} e^{-s_i D} / \prod_{j=0,j\neq i}^{2}\left(1-\frac{s_i}{s_j}\right)\right|\right) = 1 - \frac{2(k\rho)^3}{3A_0\beta}\left(1 - \sum_{i=0}^{2} B_i e^{-s_i D}\right). \qquad (8.185)$$

$$B_i = \frac{s_i^2 - A_2 s_i + A_1}{3s_i^2 - 2A_2 s_i + A_1}, D = \mu t.$$

Если два корня комплексно-сопряженные $s_{0,1} = a \mp ib, s_2 = c$, то

$$1 - K_{г,пр1}^*(T,L) = \frac{a_0}{A_0}(1 - \frac{1}{(a-c)^2 + b^2}((a^2+b^2)e^{-cD} - c(\frac{1}{b}(a(c-a) +$$

$$+b^2)\sin(bD) + (c-2a)\cos(bD))e^{-aD})) = \frac{a_0}{A_0}(1 - B_0 e^{-cD} - e^{-aD}(C_1\cos(bD) + C_2\sin(bD))),$$

$$1-K_{г,пр1}(T,L)=\frac{a_0}{A_0}(1-B_0\frac{1-e^{-s_0D}}{s_0D}-\frac{1}{(a^2+b^2)D}(C_1b(1-$$

$$-e^{-aD}(\frac{a}{b}\sin(bD)+\cos(bD))+C_2a(1-e^{-aD}(\cos(bD)-\frac{b}{a}\sin(bD)))). \qquad (8.186)$$

Здесь $C_1=1-B_0$.

Оценка 2 (по медленному движению)

В формуле (8.178) оставляем только три слагаемых

$$K^*_{г,пр2}(s,L)=1-\frac{2(k\rho)^2}{3(L+1)+k\rho(2L+3)+2(k\rho)^2}\frac{A_0}{A_0+A_1s+A_2s^2}.$$

Отсюда

$$K^*_{г,пр2}(T,L)=1-\frac{2(k\rho)^2}{3(L+1)+k\rho(2L+3)+2(k\rho)^2}\left(1-\frac{s_1e^{-s_0D}-s_0e^{-s_1D}}{s_1-s_0}\right). \qquad (8.187)$$

$$s_{0,1}=\frac{A_1}{2A_2}\left(1\mp\sqrt{1-\frac{4A_0A_2}{A_1^2}}\right).$$

Коэффициенты A_i следует вычислять по формулам (8.178).

Если корни — комплексно-сопряженные $s_{0,1}=a\mp ib$, то

$$K^*_{г,пр2}(T,L)=1-\frac{a_0}{A_0}((1-e^{-aD}(\frac{a}{b}\sin(bD)+\cos(bD))). \qquad (8.188)$$

В частности, при L = 0 для расчета точных значений коэффициента готовности из общих формул (8.178)–(8.180) получим:

$$1-K_г(0)=\frac{6(r\rho)^2}{1+k\rho+6(r\rho)^2}, s_{0,1}=a\mp b=1+k\rho\mp\frac{1}{2}\sqrt{r\rho(8+r\rho)},$$

$$K^*_г(T,0)=1-\frac{6(r\rho)^2}{1+k\rho+6(r\rho)^2}\left(1-\frac{s_1e^{-s_0D}-s_0e^{-s_1D}}{s_1-s_0}\right), \qquad (8.189)$$

$$K_г(T,0)=1-\frac{6(r\rho)^2}{1+k\rho+6(r\rho)^2}\left(1-\frac{s_1}{s_1-s_0}\frac{1-e^{-s_0D}}{s_0D}+\frac{s_0}{s_1-s_0}\frac{1-e^{-s_1D}}{s_1D}\right),$$

При L = 1 имеем:

$$1-K_г(1)=\frac{6(r\rho)^2}{2+5r\rho+6(r\rho)^2}, a_0=18(r\rho)^3, A_0=k\rho(2+5r\rho+6(r\rho)^2),$$

$$A_1=1+14r\rho+21(r\rho)^2, A_2=2+8r\rho.$$

Если корни полинома $A_0+A_1s+A_2s^2+s^3=0$ действительные, то

$$K^*_г(t,1)=1-\frac{a_0}{A_0}(1-\sum_{i=0}^{2}e^{-s_iD}/\prod_{j=0,j\neq i}^{2}(1-\frac{s_i}{s_j}))=1-\frac{a_0}{A_0}(1-\sum_{i=0}^{2}B_ie^{-s_iD}), \qquad (8.190)$$

$$K_г(t,1)=1-\frac{a_0}{A_0}\left(1-\sum_{i=0}^{2}B_i\frac{1-e^{-s_iD}}{s_iD}\right),B_i=\frac{s_i^2-A_2s_i+A_1}{3s_i^2-2A_2s_i+A_1},D=\mu t\,.$$

Если два корня комплексно-сопряженные $s_{0,1}=a\mp ib, s_2=c$, то

$$K_г^*(T,1)=1-\frac{a_0}{A_0}(1-B_0e^{-cD}-e^{-aD}(C_1\cos(bD)+C_2\sin(bD)))\,, \qquad (8.191)$$

$$K_г(T,1)=1-\frac{a_0}{A_0}(1-B_0\frac{1-e^{-s_0D}}{s_0D}-\frac{1}{(a^2+b^2)D}(C_1a(1-e^{-aD}(\cos(bD)-$$

$$-\frac{b}{a}\sin(bD))+C_2b(1-e^{-aD}(\cos(bD)+\frac{a}{b}\sin(bD))))\,,$$

$$B_0=\frac{a^2+b^2}{(a-c)^2+b^2},C_1=\frac{(c-2a)c}{(a-c)^2+b^2}=1-B_0,C_2=\frac{c}{b}\frac{a(c-a)+b^2}{(a-c)^2+b^2}\,.$$

При $L = 2$ необходимо вычислять корни полинома четвертой степени

$$s^4+A_3s^3+A_2s^2+A_1s+A_0=0\,,$$

$$1-K_г(2)=\frac{6(r\rho)^2}{3+7r\rho+6(r\rho)^2},a_0=2r\rho(k\rho)^3,A_0=(k\rho)^2(3+7r\rho+6(r\rho)^2)\,,$$

$$A_1=3k\rho(1+8r\rho+9(r\rho)^2),A_2=1+20r\rho+5(k\rho)^2,A_3=2+11r\rho\,. \qquad (8.192)$$

Далее можно использовать формулы модели ПЭД2 (стратегия 111) с учетом новых значений коэффициентов полинома и стационарного значения коэффициента готовности. Если полином имеет четыре действительных корня, то коэффициент готовности находят по формулам (8.70). Если полином имеет два комплексно-сопряженных и два действительных корня: $s_{0,1}=a\mp ib, s_2=c, s_3=d$, то коэффициент готовности находят по формулам (8.71). Если полином имеет две пары комплексно-сопряженных корней: $s_{0,1}=a_1\mp ib_1, s_{2,3}=a_2\mp ib_2$, то коэффициент готовности находят по формулам (8.72).

8.5.4. Стратегия 221 (одиночная ЭД по отказу ЗИП)

Граф состояний приведен на рис. 8.7, *д*.

Показатели безотказности

Составляя систему уравнений для расчета ВБР и переходя к изображениям, получим:

$$Q^*(s,L)=\left(\frac{k\lambda}{s+k\lambda}\right)^L Q^*(s,0),Q^*(s,0)=\frac{6(r\lambda)^2}{s^2+s(\mu+5r\lambda)+6(r\lambda)^2}\,. \qquad (8.193)$$

Отсюда

$$Q(t,0)=1-\frac{s_1e^{-s_0\mu t}-s_0e^{-s_1\mu t}}{s_1-s_0},s_{0,1}=\frac{1}{2}(1+5r\rho\mp\sqrt{1+10r\rho+(r\rho)^2})\,. \qquad (8.194)$$

Выполняем обратное преобразование в (8.193) и находим выражение, совпадающее с формулой (8.109), в которой надо использовать значения корней из (8.188). Среднюю наработку

системы в периоде пополнения, а затем среднюю наработку до отказа системы находим по формулам (8.118) и (8.119).

Показатели готовности

Согласно графу состояний (рис. 8.7, *д*) и общему виду системы уравнений (8.39) система уравнений для вероятностей состояний имеет вид:

$$P^*_{L-1}(s) = \frac{s}{s+k\lambda}\left(\frac{k\lambda}{s+k\lambda}\right)^{L-1}, (s+k\lambda)P^*_L(s) - k\lambda P^*_{L-1}(s) - \mu P^*_{L+1}(s) = 0, \qquad (8.195)$$

$$(s+\mu+2r\lambda)P^*_{L+1}(s) - k\lambda P^*_L(s) - \mu P^*_{L+2}(s) = 0, P^*_{L+2}(s) = \frac{r\lambda}{s+\mu}P^*_{L+1}(s).$$

Отсюда

$$1-K^*_г(s,L) = P^*_{L+2}(s) = (1-K^*_г(s,0))\left(\frac{k\lambda}{s+k\lambda}\right)^L, 1-K_г(0) = \frac{6(r\rho)^2}{1+k\rho+6(r\rho)^2}, \qquad (8.196)$$

$$1-K^*_г(s,0) = (1-K_г(0))\frac{1+k\rho+6(r\rho)^2}{s^2+(2+5r\rho)+1+k\rho+6(r\rho)^2} = (1-K_г(0))\frac{1+k\rho+6(r\rho)^2}{(s+s_0)(s+s_1)},$$

$$s_{0,1} = 1+2,5r\rho \mp \sqrt{r\rho(2+r\rho/4)}.$$

Обратное преобразование в (8.196) дает:

$$1-K^*_г(T,L) = (1-K_г(0))(I(A,L) - \frac{s_1}{s_1-s_0}\left(\frac{A}{A-s_0D}\right)^L e^{-s_0D}I(A-s_0D,L) +$$

$$+\frac{s_0}{s_1-s_0}\left(\frac{A}{A-s_1D}\right)^L e^{-s_1D}I(A-s_1D,L)), A = k\lambda T, D = \mu T.$$

Для значений L = 0, 1 и 2 надо использовать формулы (8.124) и (8.127).

Количественный анализ формул, проведенный в *приложении 8* (примеры П8.14–П8.19), позволяет сделать следующие выводы:

- применение экстренных доставок в мажорированной системе даже при отсутствии запасных частей в комплекте ЗИП существенно увеличивает показатели готовности системы. Так при стратегии пополнения 111, A = 1 и $k\rho$ = 0,2 коэффициент готовности по наихудшему циклу увеличивается от 0,80449 до 0,94414, а средний коэффициент готовности — от 0,92538 до 0,97098. При A = 2 и $k\rho$ = 0,2 эти же показатели изменяются от 0,52012 до 0,92876 и от 0,79224 до 0,95261. Здесь рост A достигается за счет увеличения периода пополнения при неизменном значении среднего времени экстренной доставки;
- если при увеличении A пропорции между периодом пополнения и средним временем ЭД сохраняются (значение D постоянно), то различия между показателями готовности не столь заметны. Так при A = 1, $k\rho$ = 0,1 и D = 10 коэффициент готовности по наихудшему циклу увеличивается от 0,80449 до 0,96967, а средний коэффициент готовности — от 0,92538 до 0,98277. При A = 2 $k\rho$ = 0,2 и D = 10 эти же показатели изменяются от 0,52012 до 0,92876 и от 0,79224 до 0,95261;
- при наличии одной запасной части и стратегии 111 введение ЭД также дает существенный прирост коэффициента готовности. Так при A = 1 и $k\rho$ = 0,2 коэффициент готовно-

сти по наихудшему циклу увеличивается от 0,94196 до 0,98197, а при $A = 2$ и $k\rho = 0{,}2$ — от 0,74835 до 0,95629. Средний коэффициент готовности увеличивается от 0,98342 до 0,99365 при $A = 1$ и $k\rho = 0{,}2$ и от 0,91807 до 0,98092 при $A = 2$ и $k\rho = 0{,}2$;

- при использовании стратегии 111 расчет по формулам экспоненциальной модели дает всегда оценку сверху для точного значения коэффициента готовности, а по формулам модели медленного движения — знакопеременную оценку. Причем относительная погрешность по коэффициенту неготовности в первом случае достигает 20–40 %, а во втором случае не более 20 % при значениях коэффициента готовности не более 0,99 (при $A = 1$ и $k\rho = 0{,}2$: 35,7 % и –4,75 %, а при $A = 2$ и $k\rho = 0{,}2$: 39 % и 2,4 %);
- переход при восстановлении от полной ЭД (стратегия 111) к одиночной ЭД (стратегия 121) приводит к снижению коэффициента готовности. Но снижение становится заметным только при больших запасах и низкой надежности исходной системы. При $L = 1$, $A = 2$ и $k\rho = 0{,}2$ коэффициент готовности снижается от 0,97378 до 0,97042, а при $L = 1$, $A = 4$ и $k\rho = 0{,}2$ — от 0,96372 до 0,94258. При двух запасных частях снижение составляет от 0,9933 до 0,99004 и от 0,9770 до 0,9642;
- при стратегии 211 введение экстренных доставок улучшает не только показатели готовности, но и показатели безотказности. При отсутствии запасных частей в комплекте ЗИП вероятность отказа уменьшается в несколько раз: при $A = 1$ и $k\rho = 0{,}2$ в 2,4 раза, а при $A = 2$ и $k\rho = 0{,}2$ — в 2,8 раза. Средняя наработка до отказа увеличивается еще существеннее: при $A = 1$ и $k\rho = 0{,}2$ в 16,8 раза, при $A = 0{,}1$ и $k\rho = 0{,}2$ в 7,8 раза, а при $A = 0{,}1$ и $k\rho = 0{,}01$ — в 24,7 раза;
- при стратегии 211 введение экстренных доставок улучшает показатели готовности, уменьшая коэффициент неготовности в несколько раз и даже в десятки раз. Так при $A = 1$, $D = 5$ и $k\rho = 0{,}2$ коэффициент неготовности по наихудшему циклу уменьшается в 9,4 раза, а средний коэффициент неготовности — в 5,5 раза. При $A = 2$, $D = 10$ и $k\rho = 0{,}2$ — в 22,1 и 11,8 раза соответственно, а при $A = 4$, $D = 20$ и $k\rho = 0{,}2$ — в 38,1 и 22,6 раза;
- при стратегии 211 и одной запасной части расчет вероятности отказа по приближенной формуле (8.176) дает оценку сверху для основного диапазона значений вероятности отказа, причем с небольшой погрешностью для диапазона вероятностей 0,01–0,1. Среднее арифметическое оценок является оценкой снизу и для нее погрешность больше, чем для верхней оценки первого типа. Поэтому следует отдавать предпочтение оценке (8.176) и рассчитанной на ее основе нижней оценке для средней наработки до отказа $k\lambda T_{cp,2}(1)$;
- при стратегии 211 и одной запасной части приближенная оценка первого типа совпадает с точным значением коэффициента готовности. Оценка второго типа по формуле модели медленного движения (8.187) является оценкой снизу для коэффициента готовности и при больших A дает приемлемую погрешность: для коэффициента неготовности по наихудшему циклу до 10 %. Оценка по среднему коэффициенту неготовности также нижняя, а погрешность небольшая: от нескольких процентов до долей процента. При двух запасных частях погрешность существенно возрастает (до десятков и сотен процентов);
- переход от полной ЭД (стратегия 211) к одиночной ЭД (стратегия 221) ухудшает показатели безотказности. Но при небольшом количестве запасных частей это ухудшение не велико. Так при $L = 1$, $A = 1$ и $k\rho = 0{,}2$ вероятность отказа увеличивается от 0,02446 до 0,05804, а при $L = 1$, $A = 2$ и $k\rho = 0{,}2$ — от 0,07354 до 0,09507. При $L = 2$, $A = 2$ и $k\rho = 0{,}2$ вероятность отказа увеличивается от 0,03335 до 0,1083, а при $L = 2$, $A = 3$ и $k\rho = 0{,}2$ — от 0,068753 до 0,283384. Ухудшаются и значения коэффициента готовности. Так при $L = 1$, $A = 2$ и $k\rho = 0{,}2$ коэффициент готовности по наихудшему циклу уменьшается от 0,98876

до 0,98277, а средний коэффициент готовности — от 0,99192 до 0,99101, при $L = 2$, $A = 2$ и $k\rho = 0{,}2$: от 0,99364 до 0,9896 и от 0,9973 до 0,9962 соответственно.

8.6. Вопросы для самоконтроля

- Какие основные допущения принимаются в модели надежности систем с периодическим пополнением запасов с экстренными доставками в комплекте одиночного ЗИП?
- Какие возможны разновидности стратегий периодического пополнения запасов в комплекте ЗИП-О? Как можно классифицировать стратегии пополнения ПЭД?
- Какие существуют варианты формирования заявок на экстренную доставку запасных частей? Сколько запасных частей указывается в заявках?
- Как можно оценить эффективность стратегии ПЭД при отсутствии начальных запасов в комплекте ЗИП-О?
- Сравните по критерию надежности степень эффективности использования стратегий периодического пополнения запасов с экстренными доставками и стратегии периодического пополнения?
- В каких случаях переход от стратегии периодического пополнения к стратегии ПЭД может повлиять на показатели безотказности системы?
- Оцените возможности методики расчета надежности, изложенной в данной главе, и приближенной методики *главы 2* для класса последовательно-параллельных структур, сравните их по возможной области применения в пределах указанного класса.
- Оцените возможности методики расчета надежности, изложенной в данной главе, и приближенной методики *главы 2* для класса сложных структур, сравните их по возможной области применения в пределах указанного класса.
- Сравните по критерию надежности степень эффективности использования двух видов ресурса: запасные части при периодическом пополнении запасов и встроенный нагруженный резерв той же кратности. Каковы возможности рационального сочетания обоих видов ресурса?
- Сравните по критерию надежности степень эффективности использования ЗИП стратегии ПЭД и непрерывного пополнения?

ГЛАВА 9

Оптимизация комплектов ЗИП-О по критерию надежности

9.1. Постановка задачи

При проектировании комплектов ЗИП следует различать задачи анализа и синтеза. При решении задачи анализа определяют значения показателей надежности и суммарных затрат (СЗ) на ЗЧ по известному составу комплекта ЗИП и заданному (принятому) способу пополнения запасов. Задача анализа названа оценкой запасов в комплекте ЗИП.

Оценку запасов проводят в следующих случаях:

- при проектировании ЗИП после формирования комплекта (системы) ЗИП, в том числе после процедуры оптимизации, с целью определения фактических значений ПН и СЗ на ЗЧ и исключения возможных ошибок расчета состава комплекта (системы) ЗИП (контрольная проверка);
- при приемке опытных образцов аппаратуры для проверки соответствия разработанных комплектов заданным в техническом задании требованиям;
- при необходимости перерасчета разработанных ранее комплектов ЗИП (при изменении условий эксплуатации аппаратуры, интенсивности замен сменных частей, способов пополнения запасов или их параметров).

Задача синтеза заключается в определении начального уровня запасов, удовлетворяющих определенным требованиям к показателям надежности, к показателям суммарных затрат при принятом способе пополнения запасов. Задача синтеза названа расчетом запасов в комплекте (системе) ЗИП. Расчет запасов в комплекте (системе) ЗИП обычно сводится к расчету запасов каждого типа в отдельности.

В зависимости от этапа проектирования расчет запасов проводят без оптимизации или с оптимизацией. Без оптимизации расчет проводят на стадии эскизного проектирования, когда не известны или не полностью известны данные, необходимые для оптимизации. Расчет с оптимизацией проводят на стадии технического проектирования, когда необходимые данные известны.

При оптимизации с использованием показателей надежности возможны постановки прямой и обратной задачи:

- при решении прямой задачи минимизируются суммарные затраты при ограничениях на ПД;
- при решении обратной задачи находят максимум показателя надежности при ограничениях на суммарные затраты.

При наличии многих типов запасов, предусмотренных в комплекте ЗИП, существует много вариантов выполнения требований к показателю надежности. Выбрать один из них можно путем решения задачи оптимизации по заданному критерию (целевой функции). Наиболее естественно использовать в качестве критерия суммарные затраты на создание начальных запасов в комплекте ЗИП. Тогда прямая задача оптимизации формулируется следующим образом.

Необходимо обеспечить минимум критериальной функции

$$C^0_{\Sigma ЗИП} = \sum_{i=1}^{N} C_i L_i^0 = \min_{(L_1,...,L_N)} \sum_{i=1}^{N} C_i L_i \qquad (9.1)$$

при ограничении

$$ПН(L_1,...,L_N) \geq ПН^0, \qquad (9.2)$$

где:

$(C_1, ..., C_N)$ — вектор стоимостей запасных частей;

$(L_1, ..., L_N)$ — оптимальный комплект ЗИП;

$ПН^0$ — нормативное значение показателя надежности.

В многофункциональной системе ограничение имеет векторный характер. Если система выполняет m различных ФСО, и для каждого ФСО нормируется показатель надежности, то вместо (9.2) используют неравенства

$$ПН_i(L_1,...,L_N) \geq ПН_i^0, i = 1...m. \qquad (9.3)$$

Здесь должны быть выполнены все m неравенств.

В обратной задаче оптимизации максимизируется ПН, а суммарные затраты играют роль ограничения, задающего область поиска оптимального комплекта. Поэтому задача формулируется так.

Необходимо обеспечить максимум критериальной функции

$$ПН^0 = ПН(L_1^0,...,L_N^0) = \max_{(L_1,...,L_N)} ПН(L_1,...,L_N) \qquad (9.4)$$

при ограничении

$$\sum_{i=1}^{N} C_i L_i \leq C^0_{\Sigma ЗИП}. \qquad (9.5)$$

Область оптимизации может быть расширена за счет вектора $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N)$ индикаторов способа пополнения запасов. При этом часть типов запасов может быть исключена из вектора α. Тогда соответствующему номеру присваивается значение $\alpha_i = 0$.

Требования к надежности задают на всю систему и с учетом требуемого времени функционирования, которое, как правило, не совпадает с периодом пополнения запасов и больше его. Кроме того, у различных типов запасов могут быть различные периоды пополнения. В стратегиях непрерывного пополнения и пополнения по уровню период пополнения, как параметр стратегии, отсутствует. Поэтому требуется пересчет показателей надежности системы при заданном времени функционирования в показатели надежности отдельных однородных подсистем на период пополнения и с учетом других параметров стратегии. Эта процедура зависит от нормируемого показателя надежности и применяемой стратегии пополнения для каждого типа запасов.

Рассмотрим различные варианты.

9.1.1. Нормируемый показатель надежности — вероятность безотказной работы изделия

Требования к надежности заданы в виде неравенства:

$$P(t, L) \geq P^0(t) . \tag{9.6}$$

Если пополнение периодическое с одним и тем же периодом T, причем $t = kT$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, то перерасчет проводится по формуле:

$$P^0(T) = (P^0(t))^{1/k}, \ k = t/T. \tag{9.7}$$

Тогда оптимизация в прямой и обратной задаче проводится с использованием показателя надежности для периода T: в (9.2) и (9.3) устанавливается граница для вероятности безотказной работы в периоде пополнения, а в (9.4) находят максимум $P(T,L)$.

Если время функционирования не кратно периоду пополнения, то расчет нормативного значения ВБР по формуле (9.7) приводит к занижению $P^0(T)$. Поэтому после расчета комплекта ЗИП надо проверять условие (9.3) и, если оно не выполнено, корректировать состав комплекта ЗИП.

Если у различных типов запасов периоды пополнения различные, то $t = k_i T_i$, и тогда надо расширять область оптимизации за счет еще одного вектора (T_1, T_2, ..., T_N). При этом в (9.3) надо использовать нормативное значение $P^0(t)$, а в (9.4) находить максимум функции $P(t,L)$.

Если используются стратегии непрерывного пополнения или пополнения по уровню, то вместо вектора (T_1, T_2, ..., T_N) в состав вектора оптимизации могут быть введены векторы значений среднего времени доставки с соответствующими ограничениями.

9.1.2. Нормируемый показатель надежности — средняя наработка до отказа изделия

Используя экспоненциальную модель для связи средней наработки $\overline{T}_o^0$ и вероятности безотказной работы, а также учитывая, что при периодическом пополнении для значений времени функционирования, кратных периоду пополнения, эта модель дает малую погрешность, находят нормативное значение ВБР:

$$P^0(t) = \exp(-t / \overline{T}_o^0) . \tag{9.8}$$

Далее используют формулы *разд. 9.1.1*. При других стратегиях пополнения использование (9.8) дает приемлемые результаты, если среднее время доставки ЗЧ значительно меньше среднего времени между соседними заявками от системы на поставку ЗЧ.

9.1.3. Нормируемый показатель надежности — коэффициент готовности изделия

Требование к ПН выражено в виде неравенства:

$$K_г(L) \geq K_г^0 . \tag{9.9}$$

Если пополнение периодическое с одним и тем же периодом T, то в формуле (9.9) в качестве коэффициента готовности системы используют

$$K_г(T, L) = \prod_{i=1}^{N} K_{гi}(T, L_i) . \tag{9.10}$$

Если у различных типов запасов периоды пополнения различные, то

$$K_г(T,L)=\prod_{i=1}^{N}K_{гi}(T_i,L_i),T=(T_1,T_2,...,T_N)\,. \qquad (9.11)$$

Вектор T может быть введен в состав пространства оптимизации. При других стратегиях пополнения используется формула:

$$K_г(L,\overline{T}_д)=\prod_{i=1}^{N}K_{гi}(L_i,\overline{T}_{дi})\,. \qquad (9.12)$$

Вектор $\overline{T}_д$ вводится в пространство оптимизации, для значений $\overline{T}_{дi}$ вводятся ограничения снизу.

9.2. Оптимизация комплекта ЗИП-О по показателям надежности при заданных способах пополнения запасов

Процедура оптимизации комплекта ЗИП-О по показателям надежности практически полностью совпадает с процедурой, приведенной в *главе 3*. Отличие от нее состоит лишь в том, что в качестве функций $R_i(L_i, A_i)$ здесь используют функции, входящие в виде сомножителей в показатели надежности типа

$$P_c(t,L,S,\alpha,\beta)=\prod\nolimits_{i=1}^{N}P_i(t,L_i,S_i,\alpha_i,\beta_i)\ge P_c^0\,, \qquad (9.13)$$

$$K_{гс}(L,S,\alpha,\beta)=\prod\nolimits_{i=1}^{N}K_{гi}(L_i,S_i,\alpha_i,\beta_i)\ge K_{гс}^0\,,$$

$$K_{огс}(\tau,L,S,\alpha,\beta)=\prod\nolimits_{i=1}^{N}K_{огi}(\tau_i,L_i,S_i,\alpha_i,\beta_i)\ge K_{огс}^0\,.$$

и учитывающие структуру внутреннего резервирования S_i. При расчете значения D в формуле (3.25) используют нормативное значение показателя надежности $ПН^0$. В случае однофункциональных систем для расчета $R_i(L_i, A_i)$ необходимы результаты, приведенные в *главах 5*, *7* и *8*. В случае многофункциональных систем оптимизация комплекта ЗИП проводится по всей совокупности ФСО. При этом требования к надежности типа (9.13) должны быть выполнены для всех ФСО одновременно и поэтому имеют векторный характер. Выбор очередной ЗЧ для добавления в комплект происходит с учетом только тех ФСО, в выполнении которых участвуют модули данного типа и для которых требования к надежности не выполняются.

Алгоритм состоит из четырех укрупненных составных частей:

- ❒ расчет базового комплекта;
- ❒ оптимизация комплекта ЗИП;
- ❒ оценка запасов в комплекте ЗИП-О;
- ❒ расчет запасов в комплекте ЗИП.

9.2.1. Расчет базового комплекта

Для расчета базового комплекта выполняют следующие действия.

1. Проводят подготовку исходных данных в форме таблицы формуляров (табл. 9.1), в которой заполняют первые семь граф.

Таблица 9.1. Таблица формуляров

i	n_i	λ_i	C_i	α_i	T_i	β_i	L_i	A_i
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	n_1	λ_1	C_1	α_1	T_1	β_1	L_1	A_1
...	...	...	...	...	...	...	...	...
N	n_N	λ_N	C_N	α_N	T_N	β_N	L_N	A_N

В них указывают: порядковый номер типа запасов i, количество модулей i-го типа в основной аппаратуре n_i, интенсивность отказов одного модуля λ_i, стоимость одной запасной части i-го типа C_i, способ пополнения запасов α_i (α_i = 1, 2, 3 или 4), первый основной параметр T_i способа пополнения (период пополнения или среднее время доставки ЗЧ), второй параметр способа пополнения β_i (среднее время экстренной доставки при способе пополнения ПЭД, когда $\alpha = 2$, или уровень пополнения запасов при способе ПУ, $\alpha = 4$).

2. Задают нормативное значение ПН R^0 (P^0, $K_г^0$ или $K_{ог}^0$) и вычисляют

$$D = -\ln R^0 . \tag{9.14}$$

3. Вычисляют $A_i = n_i\lambda_i T_i$ и записывают в графу 9 таблицы формуляров.
4. Дополняют таблицу формуляров графами 10, 11 и 12.
5. Для каждого i находят минимальное значение L_i^0, удовлетворяющее условию

$$-\ln R_i(L_i^0, A_i) \le D , \tag{9.15}$$

где в качестве R_i используют показатель надежности (9.13), например:

$$-\ln R_i = -\ln K_{гi}(L_i, T_i, \alpha_i, \beta_i), A_i = n_i\lambda_i T . \tag{9.16}$$

Значения L_i^0 записывают в графу 8, а $-\ln R_i$ — в графу 10 таблицы формуляров.

6. Определяют сумму чисел в графе 10

$$-\ln R = -\sum_{i=1}^{N} \ln R_i \tag{9.17}$$

и убеждаются, что не выполняется неравенство

$$-\ln R \le D . \tag{9.18}$$

9.2.2. Оптимизация комплекта ЗИП

В многошаговой процедуре оптимизации выполняют следующие действия.

7. Для каждого i вычисляют $-\ln R_i(L_i + 1, A_i)$ и записывают в графу 11 таблицы формуляров.
8. Вычисляют $\Delta_i = (\ln R_i(L_i + 1, A_i) - \ln R_i(L_i, A_i))/C_i$ и записывают в графу 12.
9. Выбирают максимальное число Δ_i в графе 12 и определяют номер строки i_*, в которой оно стоит. Это значит, что выбирают такую запасную часть, которая дает наибольшее отношение приращения ПН к стоимости ЗЧ.
10. В строке с номером i_* меняют числа в графах 8, 10–12: в графе 8 увеличивают число ЗЧ на единицу, в графу 10 переносят число из графы 11, в графах 11 и 12 записывают значения, соответствующие новым значениям в графах 8 и 10.

11. Вычисляют сумму значений в графе 10. При этом можно избежать суммирования всех N чисел в графе 10, а из предыдущего значения суммы вычесть $C_i\Delta_{i*}$, где Δ_{i*} — значение в графе 12 на предыдущем шаге. Иначе говоря,

$$-\ln R^{(l)} = -\ln R^{(l-1)} - C_i\Delta_{i_*}^{(l-1)}, \tag{9.19}$$

где l — номер шага оптимизации.

12. Если не выполняется условие (9.18), то следует вернуться к п. 9. Если, напротив, условие (9.18) выполняется, то требование к показателю надежности удовлетворено, и комплект ЗИП, представленный в графе 8 таблицы формуляров, является оптимальным.
13. Вычисляют суммарные затраты на оптимальный комплект по формуле

$$C_{\Sigma ЗИП} = \sum_{i=1}^{N} C_i L_i \ . \tag{9.20}$$

9.2.3. Оценка запасов в комплекте ЗИП-О

Назначение оценки состоит в определении фактических характеристик комплекта при известных исходных данных, записанных в графах 1–8 таблицы формуляров. Для этого выполняют следующие действия.

14. Вычисляют $A_i = n_i\lambda_i T_i$ и записывают в графу 9 таблицы формуляров.
15. Вычисляют $-\ln R_i(L_i, A_i)$ по формулам (9.16) и записывают в графу 10 таблицы формуляров.
16. Суммируют значения в графе 10 и находят показатель достаточности по одной из формул

$$P_c = e^{\ln R}, K_{гс} = e^{\ln R}, K_{огс} = e^{\ln R}. \tag{9.21}$$

17. Определяют суммарные затраты по формуле (9.20).

    Если оценка проводится сразу же после оптимизации, то все действия, кроме п. 16, уже выполнены. Поэтому остается лишь найти показатель надежности.

    Ввиду дискретности процесса оптимизации после последнего шага в цикле пп. 9–12 может образоваться некоторый запас по ПН: $\Delta_{ПН} = D + \ln R$. Это создает возможность уменьшить комплект ЗИП, не нарушая условие (9.18), выполнив следующие действия.

18. Таблицу формуляров дополняют графой 13 и в нее записывают значения $\delta_i = C_i\Delta_i = \ln R_i(L_i + 1, A_i) - \ln R_i(L_i, A_i)$.
19. Выделяют множество индексов i, для которых $\delta_i \le \Delta_{ПН}$. Если это множество пусто, то уменьшение комплекта невозможно.
20. Если множество не пусто, то в нем определяют строку, в которой находится минимальное число Δ_i , и соответствующий ему номер i_{**}. Удаление одной ЗЧ этого типа приводит к минимальному снижению ПД при максимальном уменьшении стоимости комплекта.
21. Уменьшают на единицу значение L_i в графе 8 и изменяют значения в графах 10–12 строки с номером i_{**}.
22. Суммируют значения в графе 10 и проверяют условие (9.18). Если условие выполняется, то возвращаются к п. 20. Если же не выполняется, то аннулируются результаты последнего цикла и полученный комплект объявляется окончательным.
23. Рассчитывают суммарные затраты по формуле (9.20).

Вместо процедуры оптимизации может использоваться упрощенная одношаговая процедура расчета комплекта ЗИП, основанная на идее пропорционального вклада всех типов запасов в сумму $-\ln R$.

9.2.4. Расчет запасов в комплекте ЗИП

В качестве исходных данных используют таблицу формуляров с заполненными графами 1–7. При расчете выполняют следующие действия.

24. Вычисляют $A_i = n_i\lambda_i T_i$ и записывают в графу 9 таблицы формуляров.
25. Определяют вклад i-го типа запасов в значение ПД по формуле

$$d_i = A_i C_i D / \sum_{j=1}^{N} A_j C_j, i = 1...N . \quad (9.22)$$

26. Вычисляют минимальное число L_i^*, удовлетворяющее условию

$$-\ln R_i(L_i^*, A_i) \le d_i , \quad (9.23)$$

и записывают его в графу 8 таблицы формуляров.

27. Вычисляют $-\ln R_i(L_i^*, A_i)$ по формулам (9.16) и записывают в графу 10 таблицы формуляров.
28. Суммируют значения в графе 10 и проводят контрольную проверку значения ПД по одной из формул (9.21). Если контрольное значение не соответствует заданному значению, то проверяют расчет с целью устранения ошибки в вычислениях. Если соответствует, то найденный комплект (L_i^*, $i = 1...N$) объявляется окончательным.
29. Рассчитывают суммарные затраты по формуле (9.20).

Комплект (L_i^*, $i = 1...N$) является избыточным по сравнению с оптимальным. Поэтому может быть предпринята попытка его уменьшения с помощью процедуры пп. 18–23.

Пример 9.1

Автоматизированная система управления радиационным контролем блока атомной электрической станции (АЭС) имеет в своем составе подсистему, состоящую из группы процессорных плат с процессором PIII, видеоадаптером и сетевым адаптером (ПП PIII), процессорных плат CPCI (ППCPCI), жестких дисков ЖД SCSI, оперативной памяти (ОП) SO-DIMM, флоппи-дисков (ФД) CPCI, мониторов 19"CRT, интерфейсных плат для связи с магистралью типа RS (ПRS), сетевых адаптеров для связи с магистралью Ethernet (CE), сетевых адаптеров CPCI для связи с магистралью Ethernet (DCE) и кросс-плат (КП) CPCI. Исходные данные по составу подсистемы и показателям надежности модулей приведены в графах 1–7 табл. 9.2. Для повышения надежности информационно-вычислительного комплекса (ИВК) используется комплект одиночного ЗИП с периодическим пополнением запасов (период T = 1 год = 8760 час). Необходимо рассчитать оптимальный комплект ЗИП-О по критерию минимума суммарных затрат при заданном требовании к ВБР системы $P_c(t) \ge 0{,}9$, t = 1 год. При этом следует учесть, что для 8 типов модулей из 10 используется внутреннее структурное дублирование с количеством r модулей в одной ветви, указанным в графе 9 табл. 9.2. Для сведения необходимо рассчитать $K_{гЗИП}(L)$.

Решение

Исходные данные для расчета приведены в графах 1–7 и 9 табл. 9.2. С учетом структурных схем резервирования определяем, что для i = 9 и 10 следует использовать формулы модели

П1, для i = 1, 7 и 8 — модели П2, для i = 2...6 — модели П4 *(см. главу 5)*. Для сокращения процедуры оптимизации при выборе базового комплекта будем использовать $D = -\ln 0{,}95 = 0{,}05129$ вместо $D = -\ln P^0 = -\ln 0{,}90 = 0{,}1054$, рекомендованного формулой (9.14). Результаты расчетов базового комплекта приведены в графе 8 табл. 9.2. Необходимо найти оптимальный комплект ЗИП-О по критерию минимума суммарных затрат.

Таблица 9.2. Исходные данные к примеру 9.1 $P_c(t, L^0) = 0{,}8387$, $K_{г ЗИП}(L^0) = 0{,}8018$

i	N	$\lambda \times 10^6$, ч$^{-1}$	C, тыс. руб.	α	T, лет	β	L^0	r
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	10,0	23,000	1	1	–	1	2
2	7	10,0	30,000	1	1	–	1	3
3	7	22,7	9,000	1	1	–	3	2
4	16	5,0	1,000	1	1	–	2	3
5	11	5,0	0,800	1	1	–	1	3
6	5	40,0	15,000	1	1	–	3	2
7	8	10,0	14,000	1	1	–	1	4
8	8	4,0	0,900	1	1	–	1	4
9	4	4,0	1,400	1	1	–	1	–
10	7	6,0	2,000	1	1	–	2	–
11	77	116,7	97,100				16	

В базовый комплект входит 16 запасных частей общей стоимостью $C_{\Sigma ЗИП} = 148{,}1$ тыс. руб. Он имеет коэффициент готовности $K_{г ЗИП}(L^0) = 0.8018$ и обеспечивает ВБР системы $P_c(t, L^0) = 0{,}8387$, что меньше нормативного значения. Поэтому далее проводится многошаговая процедура оптимизации согласно пп. 7–13 *разд. 9.2.2*.

Результаты оптимизации приведены в табл. 9.3. На шестом шаге впервые вероятность $P_c(t, L)$ превысила установленное значение 0,9.

Таблица 9.3. Шаги оптимизации

i	L	A	$-\ln R(L, A)$	$-\ln R(L+1, A)$	Δ	$P_c(t, L)$	C_Σ	$K_{г ЗИП}$
1	8	9	10	11	12	13	14	15
4	3	0,7008	0,00386	0,00052	0,01962	0,85531	149,1	0,80850
5	2	0,4818	0,00198	0,00093	0,01582	0,86620	149,9	0,83108
9	2	0,1400	0,00041	0,00001	0,00611	0,87365	151,3	0,83353
4	4	0,7008	0,00052	0,00011	0,00334	0,87657	152,3	0,83447
10	3	0,3682	0,00057	0,00004	0,00289	0,88165	154,3	0,83577
3	4	1,392	0,00735	0,00159	0,00242	0,90107	163,3	0,84425

Оптимальный комплект (табл. 9.4) содержит 22 запасные части, имеет $K_{гЗИП}(L) = 0{,}844$ и суммарную стоимость $C_{\Sigma ЗИП} = 163{,}3$ тыс. рублей, что составляет 26,8 % стоимости основной аппаратуры.

Таблица 9.4. Оптимальный комплект ЗИП-О

№	Наименование	n	C	T, лет	L	C_Σ	$P_c(t, L)$	$K_{гЗИП}$
1	ПП PIII	4	23,000	1	1	23,000	0,99711	0,98277
2	ПП CPCI	7	30,000	1	1	30,000	0,96919	0,95344
3	ЖД SCSI	7	9,000	1	4	36,000	0,99268	0,99724
4	ОП	16	1,000	1	4	4,000	0,99948	0,99986
5	ФД CPCI	11	0,800	1	2	1,600	0,99802	0,99649
6	Mon19"C	5	15,000	1	3	45,00	0,96197	0,97431
7	ПRSCPCI	8	14,000	1	1	14,000	0,98133	0,94163
8	CE	8	0,900	1	1	0,900	0,99846	0,98862
9	DCE	4	1,400	1	2	2,800	0,99959	0,99990
10	КрПСРСI	7	2,000	1	3	6,000	0,99943	0,99988
11	Всего	77	97,100	1	22	163,30	0,90107	0,84425

При уменьшении периода пополнения вдвое ($T = 0{,}5$ года) и том же комплекте ЗИП-О ВБР системы увеличивается от 0,901 до 0,97, а коэффициент готовности $K_{гЗИП}(L) = 0{,}959$.

9.3. Оптимизация комплекта ЗИП-О по показателям надежности при варьировании стратегии пополнения запасов

Потребность в изменении способа пополнения для одного или нескольких типов запасов может возникнуть тогда, когда имеется ограничение на суммарную стоимость комплекта ЗИП и не удается выполнить это ограничение, не меняя способа пополнения. Это значит, что задача оптимизации в постановке, изложенной в *разд. 9.2*, не имеет решения.

Чтобы в этих условиях сформировать оптимальный комплект ЗИП-О, надо для всех или нескольких типов запасов выбрать другой способ пополнения, заведомо лучше используемого с тем, чтобы при неизменном комплекте ЗИП-О он обеспечивал бы более высокие показатели надежности (или достаточности). В этом смысле, например, пополнение по уровню лучше периодического пополнения, а непрерывное — лучше периодического и пополнения по уровню при прочих равных условиях.

Процедура оптимизации предусматривает следующие действия.

1. Выполняют пошаговую оптимизацию, рассмотренную в *разд. 9.2*. На каждом шаге проверяют условие

$$C_{\Sigma ЗИП}(L^{(i)}) \le C^0_{\Sigma ЗИП}\,. \qquad (9.24)$$

Если неравенство (9.24) нарушается еще до того, как выполнено требование к надежности, то переходят к следующему шагу.

2. Из множества типов запасов в комплекте ЗИП-О, полученном на предыдущем шаге, выделяют подмножество типов, для которых допустимо изменение способа пополнения.
3. Таблицу формуляров дополняют графами 13 и 14.
4. Вычисляют $-\ln R_i(L_i, \alpha_i = j)$ для всех i из выделенного подмножества и заносят в графу 13.
5. Вычисляют $\delta_i = -\ln R_i(L_i, \alpha_i = j) + \ln R_i(L_i, \alpha_i = 1)$ и записывают в графу 14.
6. Находят максимальное число в графе 14 и определяют соответствующий ему номер i_*.
7. В графе 5 строки i_* изменяют значение α_i и переносят значение $-\ln R_i$ из графы 13 в графу 10, а значения в графах 13 и 14 обнуляют.
8. Суммируют значения в графе 10 и проверяют условие (9.18). Если условие не выполнено, то возвращаются к п. 6. Если выполнено, то найден оптимальный комплект.
9. Для уменьшения комплекта выполняют действия, аналогичные пп. 18–23 из *разд. 9.2.3*.

Процедура практически не меняется, если вместо показателя надежности в качестве R_i используют показатель достаточности.

Пример 9.2

К условиям примера 9.1 добавляется еще одно: суммарные затраты на комплект ЗИП не должны превышать 25 % стоимости основной аппаратуры. Необходимо найти оптимальный комплект ЗИП-О, используя возможность непрерывного пополнения запасов по модулям 1, 2 и 7 типов со средним временем доставки $T_д = 0{,}25$ года (1 квартал).

Решение

Условие (9.24) нарушается на пятом шаге оптимизации по схеме *разд. 9.2.1* (см. табл. 9.3). Поэтому базовым комплектом для оптимизации с помощью действий 2–9 *разд. 9.3* является результат четвертого шага оптимизации по схеме *разд. 9.2.1* (табл. 9.5).

Таблица 9.5. Оптимальный комплект ЗИП-О после четвертого шага

№	Наименование	n	C	T, лет	L	C_Σ	$P_c(t, L)$	$K_{гЗИП}$
1	ПП PIII	4	23,000	1	1	23,000	0,99711	0,98277
2	ПП CPCI	7	30,000	1	1	30,000	0,96919	0,95344
3	ЖД SCSI	7	9,000	1	3	27,000	0,97129	0,98723
4	ОП	16	1,000	1	4	4,000	0,99948	0,99986
5	ФД CPCI	11	0,800	1	2	1,600	0,99802	0,99649
6	Mon19"C	5	15,000	1	3	45,00	0,96197	0,97431
7	IIRSCPCI	8	14,000	1	1	14,000	0,98133	0,94163
8	CE	8	0,900	1	1	0,900	0,99846	0,98862
9	DCE	4	1,400	1	2	2,800	0,99959	0,99990
10	КрП CPCI	7	2,000	1	2	4,000	0,99367	0,99833
11	Всего	77	97,100		20	152,30	0,87657	0,83447

Суммарные затраты на комплект ЗИП-О составляют 152,4 тыс. рублей, т. е. 25 % стоимости основной аппаратуры (609,2 тыс. рублей). Поскольку при этом ВБР системы $P_c(t, L) = 0{,}8766 < 0{,}9$, выполняем действия пп. 2–9 из *разд. 9.3*. Дополняя таблицу формуляров двумя графами ($R(\alpha = 4)$ и $\Delta = R(\alpha = 4) - R(\alpha = 1)$), устанавливаем приоритеты типов запасов, где будет изменяться способ пополнения запасов (табл. 9.6): сначала ПП CPCI, затем ПRS CPCI и ПП PIII.

Таблица 9.6. Шаги оптимизации по способу пополнения

i	n	r	ra	C	$R(\alpha=1)$	$R(\alpha=4)$	Δ	$P_c(t, L)$
1	4	2	0,1752	0,3504	0,99711	0,99940	0,00228***	–
2	7	3	0,2628	0,6132	0,96919	0,98598	0,01679*	0,89176
7	8	4	0,3504	0,7008	0,98133	0,99571	0,01437**	0,90482

Порядок изменения отмечен в табл. 9.6 звездочками. Из данных табл. 9.6 видно, что уже после второго шага оптимизации изменение способа пополнения запасов увеличивает ВБР системы от 0,8755 до 0,9048. Данные об оптимальном комплекте и его характеристиках приведены в табл. 9.7.

Таблица 9.7. Оптимальный комплект ЗИП-О

№	Наименование	n	α	T, $T_д$, лет	L	C_Σ	$P_c(t, L)$	$K_{гЗИП}$
1	ПП PIII	4	1	1	1	23,000	0,99711	0,982773
2	ПП CPCI	7	4	0,25	1	30,000	0,98598	0,953444
3	ЖД SCSI	7	1	1	3	27,000	0,97129	0,987231
4	ОП	16	1	1	4	4,000	0,99948	0,99986
5	ФД CPCI	11	1	1	2	1,600	0,99802	0,996493
6	Mon19"C	5	1	1	3	45,00	0,96197	0,974307
7	ПRSCPCI	8	4	0,25	1	14,000	0,99571	0,941631
8	CE	8	1	1	1	0,900	0,99846	0,988618
9	DCE	4	1	1	2	2,800	0,99959	0,999895
10	КрП CPCI	7	1	1	2	4,000	0,99367	0,998328
11	Всего	77			20	152,30	0,90482	0,83447

Оптимальный комплект имеет $K_{гЗИП} = 0{,}834$ и обеспечивает значение вероятности безотказной работы системы не менее нормативного значения.

9.4. Средства программной поддержки расчетов и оптимизации комплектов ЗИП-О по критерию надежности

Средства программной поддержки расчетов и оптимизации позволяют избавиться от большого объема рутинной работы и повысить точность расчетов показателей надежности. Разработанная программа «Интеллект-ЗИП» обладает удобным и простым для восприятия графическим интерфейсом, и даже неподготовленный человек без труда разберется в выполняемых ею функциях.

Структурно алгоритм оптимизации можно представить в виде блок-схемы (рис. 9.1).

Блок-схема программы приведена на рис. 9.2.

Структурный параметр S_{ji} принимает следующие значения в зависимости от вида схемы резервирования:

- ❒ нерезервированная структура (модель МП1);
- ❒ дублированная структура (модель МП2);
- ❒ мажорированная структура (модель МП3);
- ❒ дублированная и нерезервированная структуры, соединенные последовательно (модель МП4);
- ❒ мажорированная и нерезервированная структуры, соединенные последовательно (модель МП5);
- ❒ последовательное соединение двух дублированных и нерезервированной подсистем (модель МП6);
- ❒ последовательное соединение двух мажорированных и нерезервированной подсистем (модель МП7);

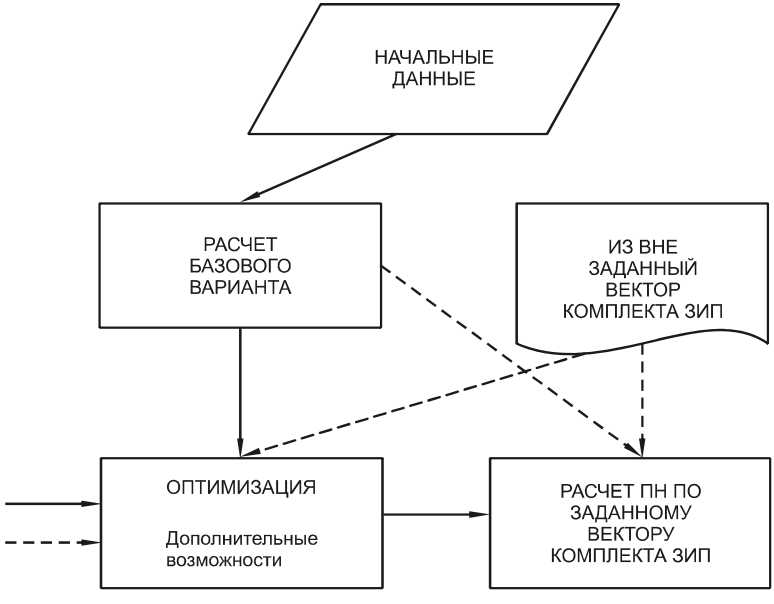


Рис. 9.1. Блок-схема алгоритма оптимизации

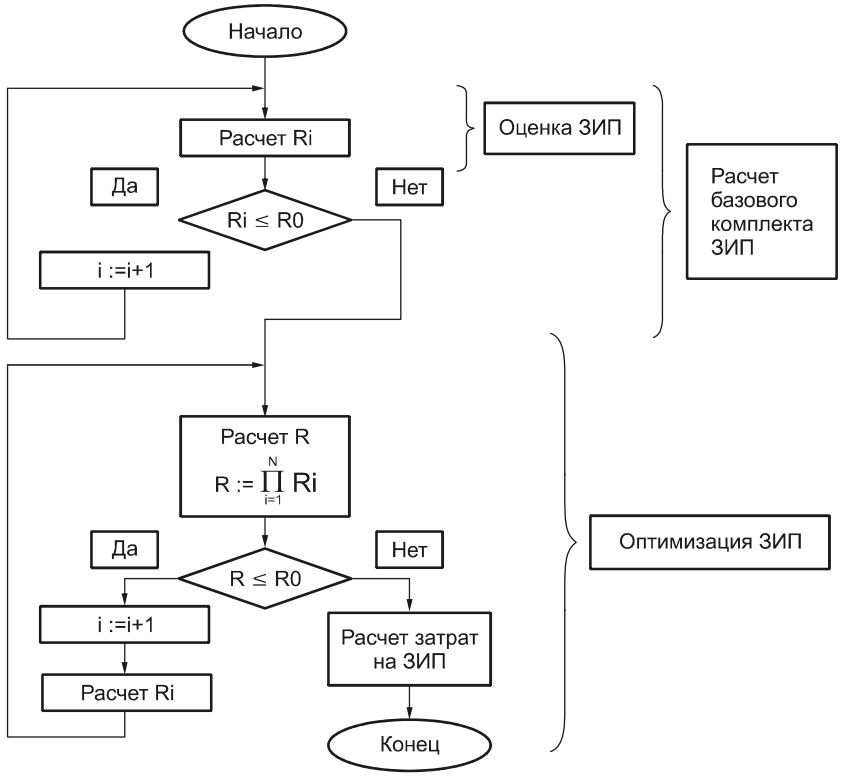


Рис. 9.2. Блок-схема программы

- последовательное соединение дублированной, мажорированной и нерезервированной подсистем (модель МП8);
- резервирование по схеме «один из *m*» (модель МП9);
- последовательное соединение троированной по схеме «один из трех» и нерезервированной подсистем (модель МП10);
- дублирование структур типа МП4 (модель МП11);
- дублирование структур типа МП6 (модель МП12).

Программа дает возможность на различных этапах разработки изделий и дальнейшей их эксплуатации рассчитывать начальный уровень комплектов ЗИП-О, оптимальный состав комплектов ЗИП-О и проводить оценку комплектов ЗИП-О при представляемых требованиях на показатели надежности или показатели достаточности. Программа имеет привычный для современных пользователей операционных систем Windows оконный интерфейс.

Основной алгоритм необходим для реализации прямой задачи оптимизации. В блоке «Начальные данные» пользователь должен иметь возможность вводить новые и модифицировать существующие параметры: характеристики деталей и нормативные значения ПН. Блок «Оптимизация» реализует расчет оптимального комплекта ЗИП методом градиентного спуска. Последний блок производит расчет реальных показателей по вектору комплекта ЗИП, заданного ему на входе в блок.

Дополнительные ветви алгоритма предназначены для проверки устойчивости значений оптимального комплекта к изменению начальной точки оптимизации (в основном алгоритме

ею служит так называемый базовый комплект, расчет которого показан выше) и расчета ПН по произвольному комплекту ЗИП (не оптимальный комплект).

Программа «Интеллект-ЗИП» расчета надежности системы с прямым включением комплекта ЗИП в модель надежности реализована на языке VBA в среде Microsoft Excel.

Параметры функционирования системы расположены на панели **Исходные данные** и задаются в полях **Расчетное время функционирования, ч** и **Количество различных по типу СЧ, шт** в верхней левой части пользовательского интерфейса. На панели **Оптимизация**:

- в поле **Требуемый ПН** задается требуемый при оптимизации комплекта ЗИП уровень ПН системы;
- в поле **Требуемый ПД** задается требуемый при оптимизации комплекта ЗИП уровень ПД системы.

Ниже в строках основной таблицы задаются параметры модулей системы. Каждая строка содержит следующую вводимую информацию:

- номер модуля;
- наименование модуля;
- стоимость модуля, тыс. руб.;
- общее количество модулей данного типа в системе, обслуживаемое комплектом ЗИП (n), шт.;
- количество модулей данного типа в системе, задействованных в выполнении ФСО (k), шт.;
- начальный запас модулей данного типа в комплекте ЗИП (L), шт. (в случае выбора задачи оптимизации этот параметр не задается);
- период пополнения запасов модулей данного типа, ч;
- интенсивность отказов модуля (λ), 1/ч;
- модель типовой структуры резервирования модуля данного типа, (1...12);
- параметр модели типовой структуры резервирования (r) — количество модулей в общей резервной группе.

В каждой строке таблицы указывается выходной, рассчитываемый программно показатель: ВБР резервированной группы и $К_{ЗИП}$ соответствующего типа модуля, за время функционирования системы. Эти показатели выведены в крайних правых столбцах таблицы.

Формула для ПН системы вводится оператором стандартными математическими формулами Excel в ячейке ВБР системы (справа от таблицы), в простейшем случае — это произведение значений ВБР каждой строчки таблицы. Например, `=ПРОИЗВЕД(K4:K24)`, где `K4:K24` — номера ячеек ВБР модулей. Аналогично вводится формула для ПД всего комплекта ЗИП.

Для расчета базового комплекта ЗИП следует нажать кнопку **Расчет**, в результате будет рассчитан и выведен в соответствующую ячейку ПН системы и ПД комплекта ЗИП при заданных параметрах.

Для расчета оптимального комплекта ЗИП при выбранном ограничении на ПН системы (поле **Требуемый ПН**) следует нажать кнопку **Оптимизация по ПН**, в результате в столбец **L** таблицы будет выведен оптимальный комплект ЗИП, удовлетворяющий предъявленному требованию. Аналогично, для расчета оптимального комплекта ЗИП при выбранном ограничении на ПД комплекта ЗИП (поле **Требуемый ПД**) следует нажать кнопку **Оптимизация по ПД** — в результате в столбец **L** таблицы будет выведен оптимальный комплект ЗИП, удовлетворяющий предъявленному требованию.

Программа требует минимальной ручной подготовки к проведению расчетов и предназначена для использования в широкой инженерной аудитории, т. к. не предполагает специальных знаний в области надежности. Кроме решения задачи расчета надежности систем с учетом ЗИП, программа дает возможность на различных этапах разработки изделий и дальнейшей их эксплуатации формировать начальный уровень комплекта ЗИП по критерию надежности, а не критерию достаточности, как это принято в известных методиках.

Работу программ рассмотрим при решении расчетной задачи.

9.5. Пример расчета и оптимизации комплекта ЗИП-О с помощью программы «Интеллект-ЗИП»

Работу программы «Интеллект-ЗИП» продемонстрируем на примере оптимизации комплекта ЗИП-О, используемого при эксплуатации системы управления технологическими средствами блока АЭС (СУ ТС БАЭС).

СУ ТС БАЭС представляет собой сложный комплекс программно-технических средств (ПТС), предназначенный для надежного и безопасного автоматизированного управления технологическими средствами БАЭС в нормальных и аварийных режимах, для обработки технических решений при проектировании блока АЭС, а также для обеспечения пусконаладочных работ. Относится к классу АСУ ТП (автоматизированная система управления технологическими процессами).

Система управления является многоуровневой иерархической структурой, связывающей операторов системы с датчиками и исполнительными механизмами нижнего уровня, соединенными непосредственно с объектами управления. Перечень комплектующих изделий СУ ТС СК приведен в табл. 9.8. Верхний уровень образуют компьютеры (PIII) с трекболами (TBL) и мониторы (Mon). Компьютеры состоят из элементов, перечисленных в табл. 9.8 в строках с 1 по 11. Верхний уровень соединен двумя сетями связи (Ethernet и ModBus Plus (MB+)) с оборудованием среднего уровня. Аппарат связи образует второй ярус иерархической структуры. Далее: контроллер на базе процессора 140 CPU 434, головной модуль сети RIO: CRP 932, узловой модуль сети RIO: CRA 932, модуль дискретного вывода DDO 353, релейные элементы ИМ. Всего 7 уровней иерархии.

Таблица 9.8. Перечень комплектующих изделий СУ ТС БАЭС

№	Наименование	Обозначение на схеме	Кол-во	$\lambda \cdot 10^6$, $ч^{-1}$	Цена, тыс. руб.	Модель
1	Процессор CPUPIII Coppermine	ПП1	2	2,59	2,725	2
2	Память DIMM	ОП	2	2,59	1,743	2
3	Корпус IPC-602P3	КП	2	2,82	8,432	2
4	Клавиатура TXS-115a	КЛ	2	0,71	0,218	2
5	Материнская плата PCA-6179	МП	2	2,59	7,820	2
6	Жесткий диск HDD 40Gb	ЖД	2	3,20	2,687	2
7	Видеокарта Matrox G450	ВК	2	0,85	3,583	2
8	Адаптер MB+ AM-SA85-030	АМВ+	2	2,59	40,611	2
9	Звуковая плата CT-4810	ЗП	2	0,85	0,525	2

Таблица 9.8 *(окончание)*

№	Наименование	Обозначение на схеме	Кол-во	$\lambda \cdot 10^6$, $ч^{-1}$	Цена, тыс. руб.	Модель
10	Сетевая плата Intel Pro/100 TP	СП	2	0,85	0,536	2
11	Головка динамика 1ГДШ-1-25	ГД	2	1,30		2
12	Монитор 18,1" TFT-LCD	Mon	4	40,00	74,892	9
13	Процессор 140 CPU 434	CPU-434	2	4,15	145,00	2
14	Трекбол TBL 50F1	TBL	2	10,00	9,270	2
15	Установочная панель 140XBP-01000	XBP-010	3	0,17	8,688	4
16	Модуль дискретного вывода 140DDO353	DDO	1	4,17	15,337	1
17	Модуль Hot Standby 140CHS210	CHS	2	1,34	224,19	2
18	Модуль питания 140CPS 114	CPS-114	1	1,81	20,968	1
19	Модуль питания 140CPS 124	CPS-124	4	1,81	23,319	9
20	Модуль сети RIO гол. 140CRP932	CRP	2	1,60	34,756	2
21	Модуль сети RIO узл. 140CRA932	CRA	1	1,62	33,351	1
22	Модуль сети Ethernet 140NOE 77100	NOE	2	1,67	35,413	2
23	Источник питания TSX-SUP 1011	TSX	1	4,50	4,204	1
24	Источник бесперебойного питания PULSAR Extreme 1500 C Rack	UPS	5	15,00	30,002	1
25	Источник питания RPS-60	RPS-60	4	4,50	5,473	6
26	Комм. Ethernet RS2-FX/FX	RS2	2	1,61	64,368	1
27	Оптический повторитель MB+ 490 NRP253	NRP	2	2,72	29,962	1
28	Реле RXN-41G12BO	RXN	1	0,05	0,600	1

По условиям проектирования дается оценка надежности одной ветви иерархической системы (ветвью считается часть системы управления, соединяющая один исполнительный модуль с верхним уровнем иерархической системы). Рассматриваемая ветвь управления является однофункциональной системой, все ее элементы используются для выполнения единственной ФСО (ФСО7). Структурно-функциональная схема расчета надежности этой ветви приведена на рис. 9.3.

Требуется обеспечить заданный уровень ВБР системы: не ниже 0,95 (вариант 1); не ниже 0,9 (вариант 2). Оптимизацию следует проводить по критерию минимума стоимости комплекта ЗИП-О при периодическом пополнении запасов. Период пополнения T = 1 год = 8760 часов. Расчетное время функционирования системы равно t = 2 года = 17 520 часов. Структурно-надежностная схема, использующая критерий отказа одной ветви иерархической системы, приведена на рис. 9.4.

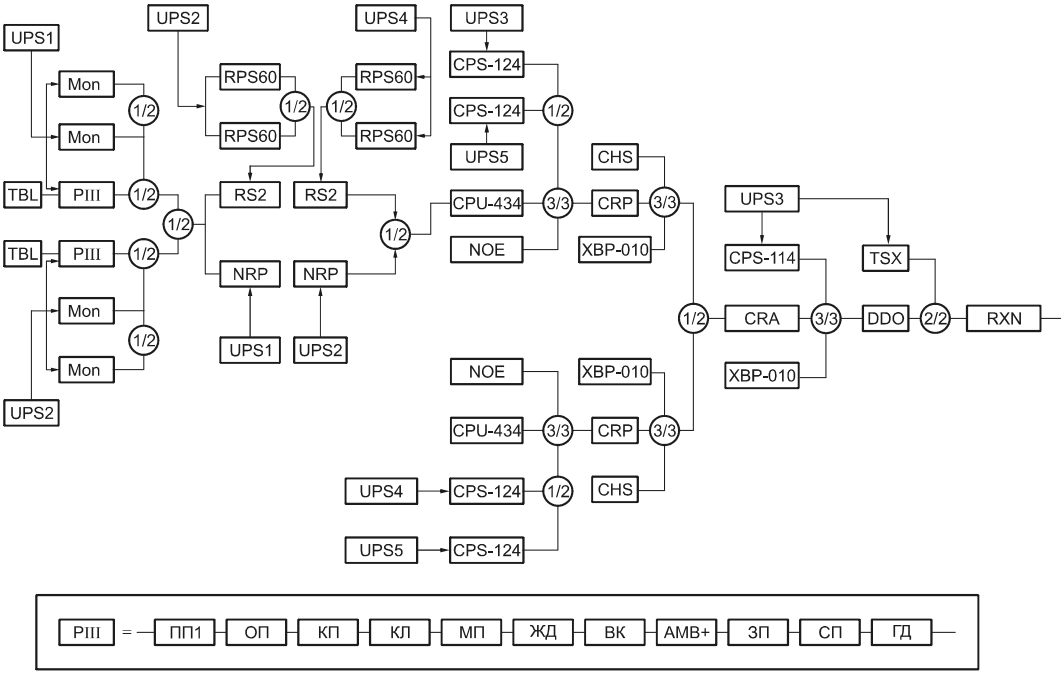


Рис. 9.3. Структурно-функциональная схема расчета надежности ФСО7. Дистанционное управление исполнительными органами без мажорирования сигналов управления

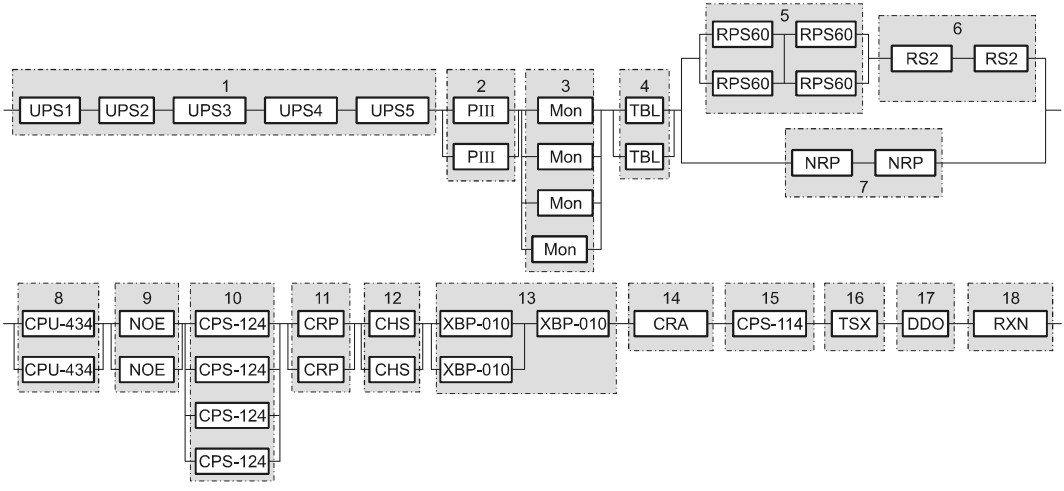


Рис. 9.4. Структурно-надежностная схема расчета надежности ФСО7

ВБР ФСО7 СУ ТС СК при нулевом количестве запасов в комплекте ЗИП-О определяется по формуле умножения независимых событий ВБР отдельных структур резервирования при нулевом количестве запасов:

$$P_7 = \prod_{i=1}^{18} P\left(S_{7i}, t, T_i, n_i, k_{7i}, L_i, \lambda_i\right).$$

Результаты расчета ВБР составных модулей ФСО-7 СУ ТС СК представлены в табл. 9.9.

Таблица 9.9. Расчет ВБР при нулевом ЗИП-О

№	Наименование модуля	*n*	*k*	*r*	*L*	$\lambda \cdot 10^6$, $ч^{-1}$	Стоимость тыс. руб.	Период пополнения, ч	Модель	ВБР
1	P III	2	2	1	0	20,49	137,76	8760	2	0,94674
2	Mon	4	4	1	0	40	299,56	8760	9	0,98479
3	CPU-434	2	2	1	0	4,15	290	8760	2	0,99745
4	TBL	2	2	1	0	10	18,54	8760	2	0,98598
5	XBP-010	3	3	1	0	0,17	26,064	8760	4	0,99702
6	DDO	1	1	1	0	4,17	15,34	8760	1	0,92955
7	CHS	2	2	1	0	1,34	448,38	8760	2	0,99973
8	CPS-114	1	1	1	0	1,81	20,968	8760	1	0,96879
9	CPS-124	4	4	1	0	1,81	93,276	8760	9	1,00000
10	CRP	2	2	1	0	1,6	69,512	8760	2	0,99961
11	CRA	1	1	1	0	1,62	33,351	8760	1	0,97202
12	NOE	2	2	1	0	1,67	70,826	8760	2	0,99958
13	TSX	1	1	1	0	4,5	4,204	8760	1	0,92419
14	UPS	5	5	1	0	15	150,01	8760	1	0,26874
15	RPS-60	4	4	1	0	4,5	21,892	8760	6	0,99404
16	RS2	2	2	1	0	1,61	128,74	8760	1	0,94515
17	NRP	2	2	1	0	2,72	59,924	8760	1	0,90909
18	RXN	1	1	1	0	0,05	0,6	8760	1	0,99912
19		41	41	18	0	117,2	1888,9			0,15133

Значение ВБР системы без использования комплекта ЗИП-О (при нулевом количестве запасов) равно 0,151 (при значении $K_{гЗИП} = 0{,}2299$). Таким образом, без использования комплекта ЗИП изделие не удовлетворяет предъявленным требованиям по надежности. Обеспечение требуемого уровня ПН системы (0,95 — вариант 1 и 0,9 — вариант 2) достигается применением стратегии периодического пополнения запасов в комплекте ЗИП.

Результаты работы алгоритма оптимизации комплекта ЗИП-О по показателю надежности представлены в табл. 9.10 и 9.11 для вариантов 1 и 2 соответственно.

Значение ВБР системы в варианте 1 при использовании оптимального комплекта ЗИП-О получили равным 0,952 (при значении $K_{гЗИП} = 0{,}6702$).

Динамика процесса оптимизации в варианте 1 отражена на рис. 9.5 и в табл. 9.12.

Значение ВБР системы для варианта 2 при использовании оптимального комплекта ЗИП-О получили равным 0,9028 (при значении $K_{гЗИП} = 0{,}6133$). Динамика процесса оптимизации в варианте 2 отражена на рис. 9.6 и в табл. 9.13.

Таблица 9.10. Оптимизация комплекта ЗИП-О по показателю надежности. Вариант 1

№	Наименование модуля	*n*	*k*	*r*	*L*	$\lambda \cdot 10^6$, $ч^{-1}$	Стоимость тыс. руб.	Период пополнения	Модель	ВБР
1	P III	2	2	1	1	20,5	137,76	8760	2	0,99383
2	Mon	4	4	1	1	40	299,56	8760	9	0,99620
3	CPU-434	2	2	1	0	4,15	290	8760	2	0,99508
4	TBL	2	2	1	1	10	18,54	8760	2	0,99920
5	XBP-010	3	3	1	0	0,17	26,064	8760	4	0,99702
6	DDO	1	1	1	1	4,17	15,34	8760	1	0,99870
7	CHS	2	2	1	0	1,34	448,38	8760	2	0,99946
8	CPS-114	1	1	1	1	1,81	20,968	8760	1	0,99975
9	CPS-124	4	4	1	0	1,81	93,276	8760	9	1,00000
10	CRP	2	2	1	0	1,6	69,512	8760	2	0,99924
11	CRA	1	1	1	1	1,62	33,351	8760	1	0,99980
12	NOE	2	2	1	0	1,67	70,826	8760	2	0,99917
13	TSX	1	1	1	1	4,5	4,204	8760	1	0,99849
14	UPS	5	5	1	3	15	150,01	8760	1	0,99079
15	RPS-60	4	4	1	0	4,5	21,892	8760	6	0,98854
16	RS2	2	2	1	1	1,61	128,74	8760	1	0,99922
17	NRP	2	2	1	1	2,72	59,924	8760	1	0,99780
18	RXN	1	1	1	0	0,05	0,6	8760	1	0,99912
19	Всего	41	41	18	12	117	1888,9			0,95241

Таблица 9.11. Оптимизация комплекта ЗИП-О по показателю надежности. Вариант 2

№	Наименование модуля	*n*	*k*	*r*	*L*	$\lambda \cdot 10^6$, $ч^{-1}$	Стоимость тыс. руб.	Период пополнения	Модель	ВБР
1	P III	2	2	1	1	20,5	137,76	8760	2	0,99384
2	Mon	4	4	1	1	40	299,56	8760	9	0,99620
3	CPU-434	2	2	1	0	4,15	290	8760	2	0,99508
4	TBL	2	2	1	0	10	18,54	8760	2	0,97417
5	XBP-010	3	3	1	0	0,17	26,064	8760	4	0,99702
6	DDO	1	1	1	1	4,17	15,34	8760	1	0,99870
7	CHS	2	2	1	0	1,34	448,38	8760	2	0,99946
8	CPS-114	1	1	1	1	1,81	20,968	8760	1	0,99975

Таблица 9.11 *(окончание)*

№	Наименование модуля	n	k	r	L	$\lambda \cdot 10^6$, $ч^{-1}$	Стоимость тыс. руб.	Период пополнения	Модель	ВБР
9	CPS-124	4	4	1	0	1,81	93,276	8760	9	1,00000
10	CRP	2	2	1	0	1,6	69,512	8760	2	0,99924
11	CRA	1	1	1	0	1,62	33,351	8760	1	0,97202
12	NOE	2	2	1	0	1,67	70,826	8760	2	0,99917
13	TSX	1	1	1	1	4,5	4,204	8760	1	0,99849
14	UPS	5	5	1	3	15	150,01	8760	1	0,99079
15	RPS-60	4	4	1	0	4,5	21,892	8760	6	0,98854
16	RS2	2	2	1	1	1,61	128,74	8760	1	0,99922
17	NRP	2	2	1	1	2,72	59,924	8760	1	0,99780
18	RXN	1	1	1	0	0,05	0,6	8760	1	0,99912
19	Всего	41	41	18	10	117	1888,9			0,90276

Таблица 9.12. Процесс оптимизации по критерию надежности в варианте 1 по шагам

№	Позиция ЗЧ	L	$P(t)$	$K_{гзип}$	Стоимость	Критерий	Примеч.
1		0	0,151326	0,229888	0		
2	14	1	0,415489	0,297196	30	0,008805	UPS+
3	13	2	0,448892	0,303015	34	0,007945	TSX+
4	14	3	0,573444	0,317188	64	0,004151	UPS+
5	6	4	0,616104	0,322946	79	0,002782	DDO+
6	17	5	0,676224	0,330579	109	0,002007	NRP+
7	4	6	0,693594	0,358693	118	0,001874	TBL+
8	15	7	0,701423	0,38623	123	0,00143	RPS-60+
9	14	8	0,737274	0,388966	153	0,001195	UPS+
10	8	9	0,760839	0,392041	174	0,001124	CPS-114+
11	18	10	0,761506	0,392127	175	0,001111	RXN+
12	1	11	0,832549	0,458309	244	0,001031	P III+
13	16	12	0,88018	0,464742	308	0,00074	RS2+
14	2	13	0,937216	0,716732	383	0,000762	Mon+
15	11	14	0,964005	0,721806	416	0,000803	CRA+
16	18	13	0,963161	0,721648	415	1184,955	RXN–
17	15	12	0,952412	0,670197	411	93,02887	RPS-60–

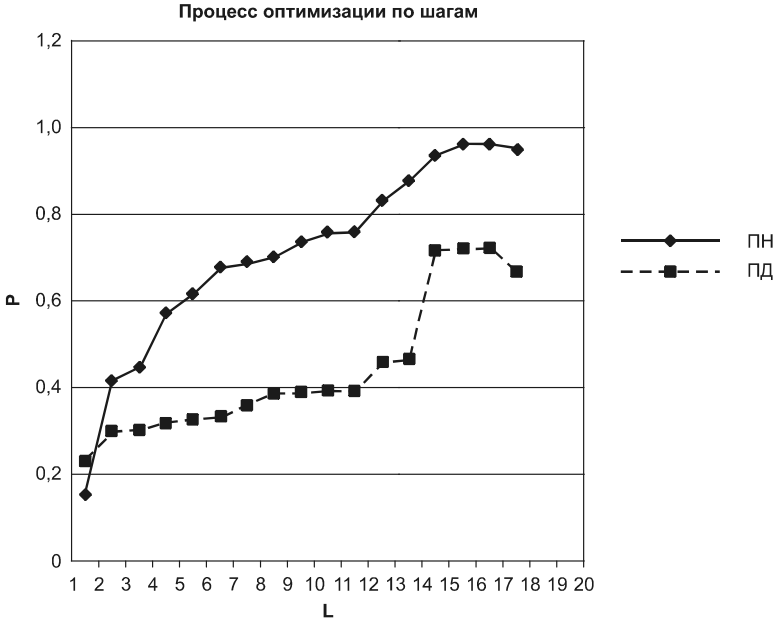


Рис. 9.5. График процесса оптимизации по критерию надежности для варианта 1. По оси абсцисс количество запасных частей, по оси ординат — ПН системы и $K_{взип}$

Алгоритм оптимизации сошелся за 16 шагов. При этом на первых 14 шагах в комплект ЗИП добавлялось по одной ЗЧ. Затем уже по другому критерию из комплекта выведено две ЗЧ. Стоимость комплекта ЗИП-О составила 21,8 % от суммарной стоимости основных элементов одной ветви управления. Здесь требуемый уровень вероятности безотказной работы достигнут при низком значении коэффициента готовности комплекта ЗИП-О (0.67).

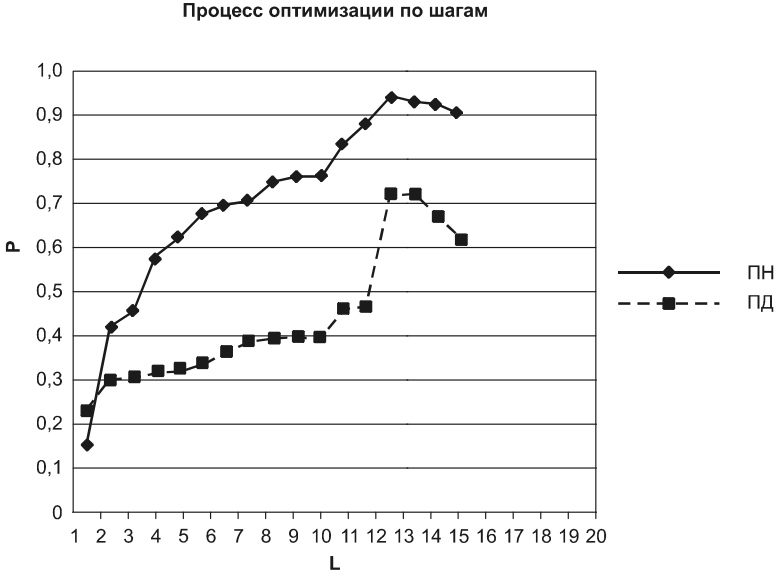


Рис. 9.6. График процесса оптимизации по критерию надежности для варианта 2. По оси абсцисс количество запасных частей, по оси ординат — ПН системы и $K_{взип}$

Таблица 9.13. Процесс оптимизации по критерию надежности в варианте 2 по шагам

№	Позиция ЗЧ	L	$P(t)$	$K_{гЗИП}$	Стоимость	Критерий	Примеч.
1		0	0,151326	0,229888	0		
2	14	1	0,415489	0,297196	30	0,008805	UPS+
3	13	2	0,448892	0,303015	34	0,007945	TSX+
4	14	3	0,573444	0,317188	64	0,004151	UPS+
5	6	4	0,616104	0,322946	79	0,002782	DDO+
6	17	5	0,676224	0,330579	109	0,002007	NRP+
7	4	6	0,693594	0,358693	118	0,001874	TBL+
8	15	7	0,701423	0,38623	123	0,00143	RPS-60+
9	14	8	0,737274	0,388966	153	0,001195	UPS+
10	8	9	0,760839	0,392041	174	0,001124	CPS-114+
11	18	10	0,761506	0,392127	175	0,001111	RXN+
12	1	11	0,832549	0,458309	244	0,001031	P III+
13	16	12	0,88018	0,464742	308	0,00074	RS2+
14	2	13	0,937216	0,716732	383	0,000762	Mon+
15	18	12	0,936395	0,716575	382	1218,825	RXN–
16	15	11	0,925945	0,665487	377	95,68799	RPS-60–
17	4	10	0,902755	0,613327	368	43,12235	TBL–

Алгоритм оптимизации сошелся за 16 шагов. При этом на первых 13 шагах в комплект ЗИП добавлялось по одной ЗЧ. Затем уже по другому критерию из комплекта выведено три ЗЧ. Стоимость комплекта ЗИП-О составила 368,6 тыс. рублей. Стоимость же самой системы составляет 1889 тыс. рублей. Отсюда видно, что комплект ЗИП по стоимости составил 19,5 % от суммарной стоимости основных элементов одной ветви управления. Здесь также требуемый уровень вероятности безотказной работы достигнут при низком значении коэффициента готовности комплекта ЗИП-О (0,6133).

При оптимизации комплекта ЗИП по показателям достаточности получается результат, существенно отличающийся от результата по критерию надежности. Результаты оптимизации и динамика процесса оптимизации отражены на рис. 9.7 и табл. 9.14, 9.15 (вариант 1), рис. 9.8 и табл. 9.16, 9.17 (вариант 2).

Таблица 9.14. Оптимизация комплекта ЗИП по показателю достаточности. Вариант 1

№	Наименование модуля	n	k	r	L	$\lambda \cdot 10^6$, ч$^{-1}$	Стоимость тыс. руб.	Период пополнения	ВБР	$K_{гЗИП}$
1	P III	2	2	1	2	20,49	137,76	8760	0,99946	0,99844
2	Mon	4	4	1	3	40	299,56	8760	0,99985	0,98695
3	CPU-434	2	2	1	1	4,15	290	8760	0,99994	0,99915

Таблица 9.14 *(окончание)*

№	Наименование модуля	*n*	*k*	*r*	*L*	$\lambda \cdot 10^6$, ч$^{-1}$	Стоимость тыс. руб.	Период пополнения	ВБР	$K_{гЗИП}$
4	TBL	2	2	1	1	10	18,54	8760	0,99920	0,99531
5	XBP-010	3	3	1	0	0,17	26,064	8760	0,99702	0,99777
6	DDO	1	1	1	1	4,17	15,34	8760	0,99870	0,99978
7	CHS	2	2	1	0	1,34	448,38	8760	0,99946	0,98835
8	CPS-114	1	1	1	1	1,81	20,968	8760	0,99975	0,99996
9	CPS-124	4	4	1	1	1,81	93,276	8760	1,00000	0,99935
10	CRP	2	2	1	1	1,6	69,512	8760	1,00000	0,99987
11	CRA	1	1	1	0	1,62	33,351	8760	0,97202	0,99294
12	NOE	2	2	1	1	1,67	70,826	8760	1,00000	0,99986
13	TSX	1	1	1	1	4,5	4,204	8760	0,99849	0,99975
14	UPS	5	5	1	3	15	150,01	8760	0,99079	0,99899
15	RPS-60	4	4	1	1	4,5	21,892	8760	0,99970	0,99617
16	RS2	2	2	1	1	1,61	128,74	8760	0,99922	0,99987
17	NRP	2	2	1	1	2,72	59,924	8760	0,99780	0,99963
18	RXN	1	1	1	0	0,05	0,6	8760	0,99912	0,99978
19	Всего	2	2	1	19	20,49	1888,9		0,95127	0,95286

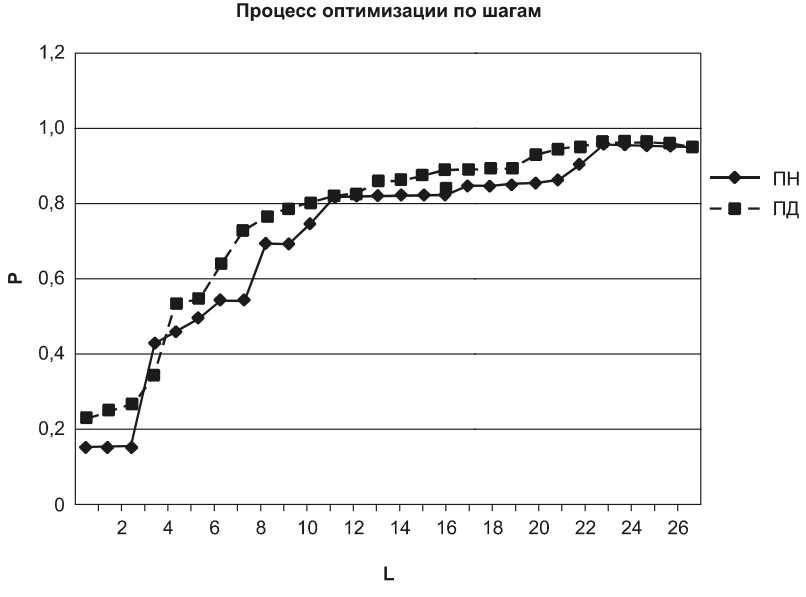


Рис. 9.7. График процесса оптимизации по критерию достаточности для варианта 1. По оси абсцисс количество запасных частей, по оси ординат — ПН системы и $K_{гЗИП}$

Таблица 9.15. Процесс оптимизации по критерию достаточности в варианте 1 по шагам

№	Позиция ЗЧ	*L*	*P*(*t*)	$K_{гЗИП}$	Стоимость	Критерий	Примеч.
1		0	0,151326	0,229888	0		
2	15	1	0,153034	0,247536	5	0,013514	RPS-60+
3	4	2	0,156966	0,268588	14	0,008805	TBL+
4	14	3	0,430972	0,347226	44	0,008559	UPS+
5	2	4	0,4589	0,535497	119	0,005785	Mon+
6	13	5	0,495792	0,545983	123	0,004613	TSX+
7	1	6	0,542047	0,638131	192	0,002264	P III+
8	2	7	0,543671	0,72974	267	0,001791	Mon+
9	14	8	0,694521	0,763871	297	0,001524	UPS+
10	9	9	0,694522	0,787839	320	0,001325	CPS-124+
11	6	10	0,74619	0,802141	335	0,001173	DDO+
12	17	11	0,819003	0,821102	365	0,00078	NRP+
13	15	12	0,819243	0,824138	371	0,000674	RPS-60+
14	2	13	0,819786	0,857556	446	0,000531	Mon+
15	4	14	0,820417	0,861423	456	0,000485	TBL+
16	12	15	0,821096	0,873963	491	0,000408	NOE+
17	10	16	0,821721	0,886156	526	0,000399	CRP+
18	8	17	0,847985	0,893162	547	0,000376	CPS-114+
19	18	18	0,848728	0,893358	548	0,000365	RXN+
20	5	19	0,851262	0,895352	557	0,000257	XBP-010+
21	3	20	0,855417	0,927507	702	0,000243	CPU-434+
22	1	21	0,860259	0,943044	771	0,000241	P III+
23	14	22	0,904229	0,949725	801	0,000235	UPS+
24	16	23	0,95596	0,963056	865	0,000217	RS2+
25	18	22	0,955123	0,962845	864	4742,758	RXN–
26	5	21	0,95228	0,960701	855	466,3274	XBP-010–
27	15	20	0,952001	0,957162	849	282,5535	RPS-60–
28	4	19	0,951269	0,952865	839	232,7147	TBL–

Таблица 9.16. Оптимизация комплекта ЗИП по показателю достаточности. Вариант 2

№	Наименование модуля	n	k	r	L	$\lambda \cdot 10^6$, $ч^{-1}$	Стоимость тыс. руб.	Период пополнения	ВБР	$K_{гЗИП}$
1	P III	2	2	1	1	20,49	137,76	8760	0,99384	0,98199
2	Mon	4	4	1	3	40	299,56	8760	0,99985	0,98695
3	CPU-434	2	2	1	1	4,15	290	8760	0,99994	0,99915
4	TBL	2	2	1	1	10	18,54	8760	0,99920	0,99531
5	XBP-010	3	3	1	0	0,17	26,064	8760	0,99702	0,99777
6	DDO	1	1	1	1	4,17	15,34	8760	0,99870	0,99978
7	CHS	2	2	1	0	1,34	448,38	8760	0,99946	0,98835
8	CPS-114	1	1	1	1	1,81	20,968	8760	0,96879	0,99211
9	CPS-124	4	4	1	1	1,81	93,276	8760	1,00000	0,99935
10	CRP	2	2	1	1	1,6	69,512	8760	1,00000	0,99987
11	CRA	1	1	1	0	1,62	33,351	8760	0,97202	0,99294
12	NOE	2	2	1	1	1,67	70,826	8760	1,00000	0,99986
13	TSX	1	1	1	1	4,5	4,204	8760	0,99849	0,99975
14	UPS	5	5	1	2	15	150,01	8760	0,94261	0,99196
15	RPS-60	4	4	1	0	4,5	21,892	8760	0,99970	0,99617
16	RS2	2	2	1	0	1,61	128,74	8760	0,94515	0,98603
17	NRP	2	2	1	1	2,72	59,924	8760	0,99780	0,99963
18	RXN	1	1	1	0	0,05	0,6	8760	0,99912	0,99978
19	Всего	2	2	1	15	20,49	1888,9		0,82486	0,91049

Таблица 9.17. Процесс оптимизации по критерию достаточности в варианте 2 по шагам

№	Позиция ЗЧ	L	$P(t)$	$K_{гЗИП}$	Стоимость	Критерий	Примеч.
1		0	0,151326	0,229888	0		
2	15	1	0,153034	0,247536	5	0,013514	RPS-60+
3	4	2	0,156966	0,268588	14	0,008805	TBL+
4	14	3	0,430972	0,347226	44	0,008559	UPS+
5	2	4	0,4589	0,535497	119	0,005785	Mon+
6	13	5	0,495792	0,545983	123	0,004613	TSX+
7	1	6	0,542047	0,638131	192	0,002264	P III+
8	2	7	0,543671	0,72974	267	0,001791	Mon+
9	14	8	0,694521	0,763871	297	0,001524	UPS+

Таблица 9.17 *(окончание)*

№	Позиция ЗЧ	*L*	*P*(*t*)	$K_{гзип}$	Стоимость	Критерий	Примеч.
10	9	9	0,694522	0,787839	320	0,001325	CPS-124+
11	6	10	0,74619	0,802141	335	0,001173	DDO+
12	17	11	0,819003	0,821102	365	0,00078	NRP+
13	15	12	0,819243	0,824138	371	0,000674	RPS-60+
14	2	13	0,819786	0,857556	446	0,000531	Mon+
15	4	14	0,820417	0,861423	456	0,000485	TBL+
16	12	15	0,821096	0,873963	491	0,000408	NOE+
17	10	16	0,821721	0,886156	526	0,000399	CRP+
18	8	17	0,847985	0,893162	547	0,000376	CPS-114+
19	18	18	0,848728	0,893358	548	0,000365	RXN+
20	5	19	0,851262	0,895352	557	0,000257	XBP-010+
21	3	20	0,855417	0,927507	702	0,000243	CPU-434+
22	18	19	0,854668	0,927304	701	4924,537	RXN–
23	5	18	0,852124	0,925239	692	484,2006	XBP-010–
24	15	17	0,851875	0,92183	686	293,3831	RPS-60–
25	4	16	0,85122	0,917692	676	241,6341	TBL–
26	8	15	0,824855	0,910493	655	138,9057	CPS-114-

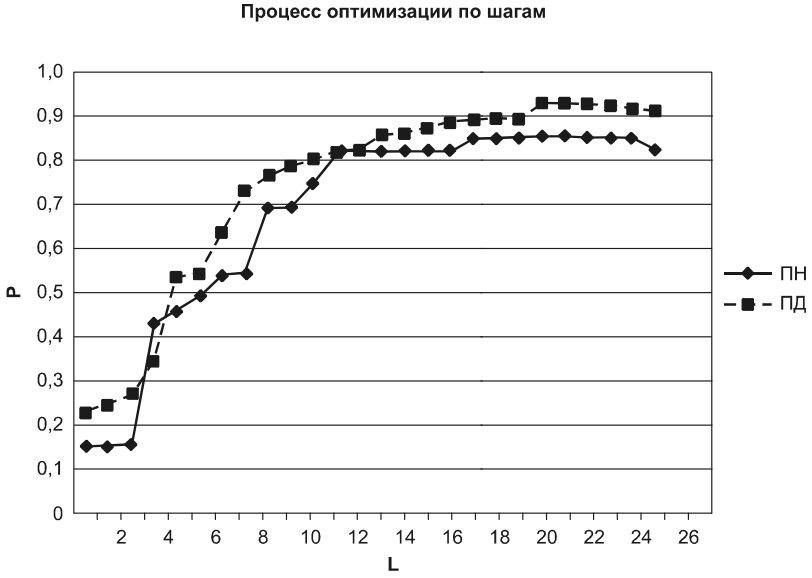


Рис. 9.8. График процесса оптимизации по критерию достаточности для варианта 2. По оси абсцисс количество запасных частей, по оси ординат — ВБР системы и $K_{гзип}$

Сравнив результаты оптимизации по двум методикам при заданных начальных параметрах, можно увидеть, что при расчете комплекта ЗИП по ПД получается завышение уровня запасов по сравнению с требуемым для обеспечения надежности. В варианте 1 стоимость комплекта ЗИП возросла от 411 тыс. руб. до 839 тыс. руб., т. е. более чем вдвое. При этом вероятность безотказной работы не только не увеличилась, но немного уменьшилась: от 0,9524 до 0,9512.

В варианте 2 стоимость комплекта ЗИП возросла от 368 тыс. руб. до 655 тыс. руб., т. е. в 1,78 раза. При этом вероятность безотказной работы не только не увеличилась, но заметно уменьшилась: от 0,902 до 0,825.

Особенность разработанной программы состоит в реализации точных формул для ПН системы. В то же время точные формулы менее универсальны, в отличие от формул в программных комплексах, применяемых сейчас на практике для расчета и оптимизации комплектов ЗИП. Несмотря на преимущества, связанные с использованием точных формул, программа в настоящее время не может в полной мере заменить известные программные комплексы ввиду того, что она пока еще не охватывает всех возможных структур резервирования и всех стратегий пополнения. В ситуации, когда техническая система может содержать структуры, не включенные в ныне действующий перечень, следует рекомендовать комбинирование результатов, полученных по разным методикам.

Основные обозначения и сокращения

$P(t, L)$ — вероятность безотказной работы системы (изделия) в течение наработки t ;

$Q(t, L)$ — вероятность отказа системы (изделия) в течение наработки t;

$\lambda(t, L)$ — интенсивность отказов системы (изделия);

$a(t, L)$ — частота отказов системы (изделия);

$\tau_1(T, L)$ — средняя наработка системы в течение периода пополнения запасов;

$\overline{T}_0(T, L), T_{ср}(T, L)$ — средняя наработка системы при периодическом пополнении;

$K_г^*(T, L)$ — коэффициент готовности системы по наихудшему циклу в периоде T;

$K_г(T, L)$ — средний коэффициент готовности системы в периоде T;

$K_{ог}^*(\tau, T, L)$ — коэффициент оперативной готовности системы по наихудшему циклу;

$K_{ог}(\tau, T, L)$ — средний коэффициент оперативной готовности системы в периоде T;

L_i — количество запасных частей i-го типа в комплекте ЗИП;

T_i — период пополнения запасов i-го типа;

k_i — количество элементов i-го типа в основной подсистеме при выполнении ФСО;

n_i — общее количество элементов i-го типа в системе;

r_i — среднее количество ЗЧ i-го типа в одной заявке ЗИП-О в комплект ЗИП-Г;

M — количество типов модулей в образце аппаратуры;

N — количество типов ЗЧ в комплекте ЗИП;

l — количество резервных элементов;

$K_{гЗИП}(L)$ — коэффициент готовности комплекта ЗИП;

$P_д(T, L)$ — вероятность достаточности комплекта ЗИП;

$P_{дЗИПi}(t, L_i)$ — вероятность достаточности ЗИП по запасам i-го типа;

$\Delta t_{ЗИП}$ — среднее время задержки выполнения заявки на запасную часть;

$\Delta T_{ЗИП}$ — среднее время задержки выполнения заявки на запасную часть при исчерпании запасов в комплекте ЗИП;

$H(t)$ — ведущая функция потока случайных событий;

$H(T, L)$ — среднее количество заявок на ЭД в периоде пополнения T;

λ — интенсивность отказов элемента системы;

μ — интенсивность восстановления работоспособности элемента системы;

$\lambda_{хр}$, σ — интенсивность отказов ЗЧ при хранении;

$\lambda^{ТО}$ — интенсивность потока замен при техническом обслуживании;

$\lambda^{ожс}$ — интенсивность отказов элемента в режиме ожидания применения по назначению;

$\Lambda_{i\nu}$ — интенсивность замен элементов ν-го типа при выполнении i-й ФСО;

Λ_i — интенсивность замен элементов при выполнении i-й ФСО;

$\Lambda_{iв}$ — интенсивность потока запросов на восстановление при выполнении i-й ФСО;

$\Lambda_э$ — эквивалентная интенсивность отказов;

$\rho_i = \lambda_i / \mu_i$ — нагрузка на комплект ЗИП от потока отказов элементов i-го типа;

α — индекс стратегии пополнения запасов в комплекте ЗИП (α = 1, 2, 3, 4);

$\beta = k\lambda\overline{T}_0(T, L)$ — среднее количество заявок на ЗЧ в комплект ЗИП до отказа системы;

β_i — второй параметр стратегии пополнения запасов i-го типа;

$\overline{T}_д$ — среднее время доставки ЗЧ при пополнении непрерывном и по уровню;

$\overline{T}_{ЭД}$ — среднее время экстренной доставки ЗЧ;

$T_з$ — время задержки в выполнении заявки на доставку ЗЧ;

$t_р$, $t_{доп}$ — резервное время, допустимое время замены отказавшего элемента;

$a = \lambda T$ — среднее число отказов элемента в периоде пополнения;

$A = k\lambda T, A = k\lambda\overline{T}_д$ — среднее число отказов основной подсистемы в периоде пополнения (в течение среднего времени доставки ЗЧ);

$C = k\lambda T, C = k\lambda\overline{T}_д$ — среднее число отказов системы в периоде пополнения (в течение среднего времени доставки ЗЧ);

$B = C - A$ — среднее число отказов дополнительной подсистемы в периоде пополнения (в течение среднего времени доставки ЗЧ);

$D = T/\overline{T}_{ЭД}$ — отношение периода пополнения и среднего времени ЭД;

$F(t)$ — функция распределения наработки до отказа;

$F_в(t)$ — функция распределения времени восстановления;

$F_{ЭД}(t)$ — распределение времени экстренной доставки;

$F^*(s) = s\int_0^\infty F(t)e^{-st}dt$ — изображение по Лапласу — Карсону функции $F(t)$;

$\omega(t)$ — интенсивность потока случайных событий;

$\omega(t, L)$ — интенсивность потока заявок на ЗЧ в комплект ЗИП;

$P_{пр}(t), \overline{T}_{0,пр}(T, L), K_{гпр}, K_{огпр}(\tau)$ — приближенные значения показателей надежности;

$g_i = [L_i/r_i]$ — количество элементов запаса в комплекте ЗИП-Г;

r_i — среднее количество ЗЧ i-го типа в одной заявке в ЗИП-Г;

C_Σ — суммарные затраты на создание начальных запасов комплекта ЗИП;

$I(x,m) = 1 - \sum_{i=0}^{m-1} \frac{x^i}{i!} e^{-x}$ — неполная гамма-функция;

M — количество типов модулей в образце аппаратуры;

N — количество типов ЗЧ в комплекте ЗИП;

s — количество обслуживаемых образцов аппаратуры одним комплектом ЗИП-Г;

ЗИП — запасное имущество и принадлежности;

Комплект ЗИП-О — одиночный комплект ЗИП;

Комплект ЗИП-Г — групповой комплект ЗИП;

Система ЗИП-2У — двухуровневая система ЗИП;

Система ЗИП-МУ — многоуровневая система ЗИП;

НИП — неиссякаемый источник пополнения;

ЗЧ — запасная часть;

СЧ — составная часть, сменная часть;

СЗ — суммарные затраты;

ВБР — вероятность безотказной работы;

ВО — вероятность отказа;

ОПС — основная подсистема;

ДПС — дополнительная подсистема;

ПД — показатель достаточности;

ПН — показатель надежности;

$ПН^0$, $ПД^0$ — нормативные значения ПН и ПД;

МКЦП — многократное циклическое применение;

НПДП — непрерывное длительное применение;

ОКРП — однократное применение;

ПП — периодическое пополнение;

ПЭД — периодическое пополнение с экстренными доставками;

НП — непрерывное пополнение;

ПУ — пополнение по уровню;

ОФС — однофункциональная система;

МФС — многофункциональная система;

ЛВМ — логико-вероятностный метод;

МЛВМ — модифицированный логико-вероятностный метод;

ЛФРС — логическая функция работоспособности систем;

ЛФНС — логическая функция неработоспособности систем;

СФФВ — смешанная форма функции вероятностей;

СДНФ — совершенная дизъюнктивная нормальная форма;

ФАЛ — функция алгебры логики;

ФППЗ — форма перехода к полному замещению;

ФПЧЗ — форма перехода к частичному замещению;

РО — ремонтный орган;

РБ — ремонтная бригада;

ТЗ — техническое задание;

ТО — техническое обслуживание;

ФСО — функционально самостоятельная операция;

ЭД — экстренная доставка.

Описание компакт-диска

В *приложениях 1–8* на прилагаемом к книге компакт-диске размещены практические и учебные примеры к соответствующим главам книги. В *приложении 9* приведены сведения о демонстрационной версии программы «Интеллект-ЗИП».

Список литературы

1. Автоматизация проектных исследований надежности радиоэлектронной аппаратуры / В. В. Жаднов, Ю. Н. Кофанов, Н. В. Малютин и др. — М.: Радио и связь, 2003. — 156 с.
2. Алексеев О. Г., Володось И. Ф. Оптимизация состава комплекта запасных элементов для технических средств АСУ. — Надежность и контроль качества, 1978, № 12.
3. Антонов А. В., Пляскин А. В. Определение оптимального количества запасных элементов системы с учетом ограничений на стоимость. — Надежность, № 4(7), 2003. — С. 9–16.
4. Аппаратура радиоэлектронная. Методики оценки и расчета запасов в комплектах ЗИП. Руководящий документ РД В50–503–84. — М.: Госстандарт СССР, 1985. — 144 с.
5. Буточнов А. Н., Осташевский В. Б., Цыпарев В. Н. Методика расчета ЗИП комплекса технических средств автоматизированной системы обработки информации о подвижных объектах. — Киев: Реєстрация, зберігания і обробка даних, 2009, Т. 10, № 3. — С. 67–79.
6. Вальцев А. А. Расчет числа запасных невосстанавливаемых элементов. — Надежность и контроль качества, 1978, № 10.
7. Гнеденко Б. В., Беляев Ю. К., Соловьев А. Д. Математическая теория надежности. — М.: Наука, 1965. — 460 с.
8. Гоголевский В. Б., Грабовецкий В. П. Определение числа запасных элементов и блоков, обеспечивающих заданную надежность аппаратуры. — В кн.: Основные вопросы теории и практики надежности. — М.: Сов. радио, 1971.
9. Головин И. Н., Чуварыгин Б. В., Шура-Бура А. Э. Расчет и оптимизация комплектов запасных элементов радиоэлектронных систем. — М.: Радио и связь, 1984. — 176 с.
10. ГОСТ В 15705-90.
11. ГОСТ РВ 27.3.03-2005.
12. ГОСТ 22955-78.
13. ГОСТ 24.701-86.
14. Грабовецкий В. П. Надежность резервированных групп с учетом запасных блоков. — В кн.: Кибернетика — на службу коммунизму. — М.: Энергия, 1964, Т. 2.
15. Диллон Б., Сингх Ч. Инженерные методы обеспечения надежности систем. — М.: Мир, 1984. — 318 с.
16. Дункан Дж., Кенигсберг Э. Научное управление запасами. — М.: Наука, 1967.

17. Жаднов В. В. Автоматизация проектирования запасов компонентов в комплектах ЗИП. — М.: Компоненты и технологии, 2010, № 5. — С. 173–176.

18. Ефимов М. В. Рациональное обеспечение средств автоматизации запасными элементами. — Известия высших учебных заведений. Проблемы полиграфии и издательского дела, 2001, № 3–4. — С. 83–105.

19. Захарин А. М., Кандаков В. Ф. Оптимальная стратегия пополнения ЗИП в ремонтном контуре системы обслуживания. — Надежность и контроль качества, 1979, № 2.

20. Конев В. В. Об оптимальном обеспечении группы приборов однотипными запасными элементами. — Надежность и контроль качества, 1978, № 3.

21. Кульбак Л. И. Основы расчета обеспечения электронной аппаратуры запасными элементами. — М.: Сов. радио, 1970. — 206 с.

22. Макаров С. В. Вероятностные расчеты однотактных схем. — Вычислительные системы/ СО АН СССР. — Новосибирск, 1962, Вып. 4. — С. 23–28.

23. Медведев В. М., Мищенко В. И., Солоха Н. Г. Развитие концепции эксплуатации изделий. — Вестник Оренбургского государственного университета, № 85, апрель 2008. — С. 149–157.

24. Мерекин Ю. В. Решение задачи вероятностного расчета однотактных схем методом ортогонализации. — Вычислительные системы/ СО АН СССР. — Новосибирск, 1962, Вып. 5. — С. 10–22.

25. Методика разработки нормативов потребности в запасных частях и агрегатах к автомобилям, тракторам и сельскохозяйственным машинам на ремонтно-эксплуатационные нужды. Госплан СССР. Минсельхоз СССР. — М.: ГОСНИТИ, 1977.

26. Можаев А. С. Общий логико-вероятностный метод анализа надежности структурно сложных систем. Учебное пособие. — Л.: ВМА, 1988. — 68 с.

27. Можаев А. С., Алексеев А. О., Сорокин Р. П. Методика автоматизированного логико-вероятностного моделирования систем (Программный комплекс «ПК АСМ, версия 5.0»). — СПб.: ВМА, 1999. — 121 с.

28. Можаев А. С., Громов В. Н. Теоретические основы общего логико-вероятностного метода автоматизированного моделирования систем. — СПб.: ВИТУ, 2000. — 145 с.

29. Надежность технических систем. Справочник / Под редакцией И. А. Ушакова / Глава 14. Обеспечение технических объектов запасными элементами / А. Э. Шура-Бура. — М.: Радио и связь, 1985. — С. 205–233.

30. Надежность и эффективность в технике. Справочник в 10 томах. Том 8. Эксплуатация и ремонт. Глава 8. Выбор запасного комплекта элементов / Е. Ю. Барзилович, В. Ф. Воскобойников. — М.: Машиностроение, 1990. — С. 162–172.

31. Никонов Н. И., Пославский О. Ф. Методы расчетов обеспечения восстанавливаемыми запасными частями. — М.: Знание, 1986. — С. 64–100.

32. Новиков О. А., Петухов С. И. Прикладные вопросы теории массового обслуживания. — М.: Сов. радио, 1969. — 400 с.

33. Парфенов Ю. М. Надежность, живучесть и эффективность корабельных электроэнергетических систем. Уч. пос. — Л.: ВМА, 1989. — 324 с.

34. Петров Г. А., Резиновский А. Я. Предложения по корректировке методики оптимизации запасов в комплектах ЗИП. — М.: Надежность, № 2(33), 2010. — С. 40–42.

35. Пославский О. Ф. Методические вопросы разработки и оценки ЗИП. Часть 1. Общие положения теории ЗИП. — М.: Знание, 1968. — 96 с.

36. Пославский О. Ф. Методические вопросы разработки и оценки ЗИП. Часть 2. Раздел 1. Составление номенклатуры ЗИП. — М.: Знание, 1969. — 88 с.

37. Пославский О. Ф. Методические вопросы разработки и оценки ЗИП. Часть 2. Раздел 2. Расчет числа запасных частей. — М.: Знание, 1969. — 110 с.

38. Пославский О. Ф. Методические вопросы разработки и оценки ЗИП. Часть 2. Раздел 3. Оптимизация, оценка и корректировка ЗИП. — М.: Знание, 1969. — 70 с.

39. Пославский О. Ф. Методы расчета числа запасных частей. — М.: Знание, 1977. — 90 с.

40. Пославский О. Ф. Метод приближенного расчета нормативов восстановления и потребности в новых запасных частях. Сб. научных трудов № 10, НИИПиН, 1983.

41. РД В 319.01.19-98.

42. Рубальский Г. Б. Управление запасами при случайном спросе. — М.: Сов. радио, 1977. — 306 с.

43. Рубальский Г. Б. Задачи управления запасом резервных элементов. — В кн.: Оптимальное резервирование и управление запасами. — М.: Знание, 1979. — С. 70–93.

44. Рубальский Г. Б. Несколько моделей оптимизации комплектов запасных элементов. — Надежность и контроль качества, 1985, № 7.

45. Рыжиков Ю. И. Управление запасами. — М.: Наука, 1968.

46. Рябинин И. А. Основы теории и расчета надежности судовых электроэнергетических систем. — Л.: Судостроение, 1967. — 362 с.

47. Рябинин И. А., Парфенов Ю. М. Определение веса и значимости отдельных элементов при оценке надежности сложной системы. — Известия АН СССР. Энергетика и транспорт, 1978, № 6. — С. 22–32.

48. Рябинин И. А., Черкесов Г. Н. Логико-вероятностные методы исследования надежности структурно-сложных систем. — М.: Радио и связь, 1981. — 264 с.

49. Сафаров Б. Е. Основные показатели функционирования системы обеспечения запасными частями в модели периодического пополнения запасов регионального склада. — Вопросы радиоэлектроники. Серия ЭВТ. 1982. Вып. 15.

50. Сафаров Б. Е. Программный комплекс системы обеспечения запасными частями ЕС ЭВМ в условиях комплексного централизованного обслуживания (КЦО). — Вопросы радиоэлектроники. Серия ЭВТ. 1982. Вып. 15.

51. Сафаров Б. Е. К вопросу разработки автоматизированной системы обеспечения запасными частями средств вычислительной техники в условиях комплексного централизованного обслуживания (КЦО). — Вопросы радиоэлектроники. Серия ЭВТ. 1982. Вып. 15. — С. 125–131.

52. Сафаров Б. Е. Определение показателя обеспеченности СВТ запасными частями в модели периодического пополнения запасов регионального склада. — Вопросы радиоэлектроники. Серия ЭВТ. 1982. Вып. 15. — С. 132–139.

53. Сафаров Б. Е. К выводу основных показателей модели периодического пополнения регионального склада запасными частями при наличии экстренных поставок произвольной величины. — Вопросы радиоэлектроники. Серия ЭВТ. 1983. Вып. 14.

54. Сафаров Б. Е. Установление оптимального содержания запасных частей к СВТ по критерию минимума средств, вложенных в периодически пополняемые запасы регионального склада. — Вопросы радиоэлектроники. Серия ЭВТ. 1983. Вып. 14. — С. 88–96.

55. Сафаров Б. Е. Задача управления запасами в централизованной системе технического обслуживания СВТ. — М.: Знание, 1986. — 126 с.

56. Сафаров Б. Е. Номограммы оптимальных нормативов на запасные части при периодическом пополнении запасов регионального склада. — Надежность и контроль качества, 1986, № 2.

57. Семенов С. Х., Гусев В. П. Об одном способе расчета числа запасных элементов в системах с иерархической последовательностью восстановлений. — Надежность и контроль качества, 1977, № 6.

58. Семенов С. Х., Гусев В. П. О некоторых системах обеспечения изделий запасными элементами. — Надежность и контроль качества, 1978, № 7.

59. Степанов Э. Н., Степанов В. Н. Выбор комплекта ЗИПа при оптимальных заменах. — В кн.: Основные вопросы теории и практики надежности. — М.: Сов. радио, 1980.

60. Стрельников В. П. Расчет запасных частей на основе *DN*-распределения. — Киев: Математичні машини і системи, 2009, № 3. — С. 188–193.

61. Финкельштейн М. С. Вероятность безотказной работы резервированных структур при ограниченном числе запасных элементов. — Надежность и контроль качества, 1977, № 8.

62. Финкельштейн М. С. Приближенные оценки вероятности безотказной работы систем с ограниченным числом запасных элементов. — Надежность и контроль качества, 1979, № 10.

63. Хачикян С. Г. Получение статистических характеристик однономенклатурного запаса со случайным спросом при фиксированном размере поставок. — Изв. АН СССР. Серия «Техническая кибернетика», 1982, № 6.

64. Хедли Д., Уайтли Т. Анализ систем управления запасами. Пер. с англ. — М.: Наука, 1969.

65. Хенли Дж., Кумамото Х. Надежность технических систем и оценка риска. — М.: Машиностроение, 1984. — 528 с.

66. Черкесов Г. Н. Применение алгебры смешанных форм к анализу надежности судовых систем управления. — В кн.: Проблемы создания судовых систем управления судовыми техническими средствами, вып. 5. — Л.: Судостроение, 1973. — С. 276–282.

67. Черкесов Г. Н. Основы теории надежности автоматизированных систем управления. — Л.: ЛПИ, 1975. — 218 с.

68. Черкесов Г. Н., Можаев А. С. Логико-вероятностные методы расчета надежности структурно — сложных систем. — М.: Знание, 1991. — 64 с.

69. Черкесов Г. Н. О расчете надежности обслуживаемых систем при ограниченном ЗИП с периодическим пополнением запасов. — М.: Надежность, № 2(5), 2003. — С. 16–34.

70. Черкесов Г. Н., Степанов Ю. В. Логико-вероятностный анализ надежности сложных систем на основе общего решения систем логических уравнений. — СПб.: Научно-технические ведомости СПбГПУ, № 2 (32), 2003. — С. 149–158.

71. Черкесов Г. Н. Надежность аппаратно-программных комплексов. — СПб.: Питер, 2005. — 480 с.

72. Черкесов Г. Н. О прямом учете состава комплекта ЗИП при оценке надежности однородных восстанавливаемых систем. — М.: Надежность, 2007, № 3(22). — С. 32–44.

73. Черкесов Г. Н. О прямом учете состава комплекта ЗИП при оценке надежности неоднородных восстанавливаемых систем. — М.: Надежность, 2007, № 4(23). — С. 3–18.

74. Черкесов Г. Н. Оценка надежности восстанавливаемых систем с учетом комплекта ЗИП при периодическом пополнением запасов. — СПб.: Научно-технические ведомости СПбГПУ, 2007, № 4–1 (52). — С. 3–12.

75. Черкесов Г. Н. Оценка надежности неоднородных восстанавливаемых систем с учетом комплекта ЗИП при периодическим пополнением запасов. — СПб.: Научно-технические ведомости СПбГПУ, 2008, № 4 (56). — С. 11–22.

76. Черкесов Г. Н., Чуркин В. В. Программа расчета показателей надежности системы с прямым включением комплекта ЗИП в модель надежности. — СПб.: Научно-технические ведомости СПбГПУ, 2009, № 3 (80). — С. 212–216.

77. Черкесов Г. Н. Надежность технических систем с временной избыточностью. — М.: Сов. радио, 1974. — 296 с.

78. Черкесов Г. Н. Модели и методы оценки живучести сложных систем. — М.: Знание, 1987. — 80 с.

79. Черкесов Г. Н., Степанов Ю. В. Об одном методе получения общего решения булева уравнения. — В кн.: Материалы конференции «Логико-вероятностные методы в технике, экономики и социологии». — Пенза: ПТП, 1998. — С. 18–20.

80. Черкесов Г. Н., Степанов Ю. В. Применение общего решения систем логических уравнений для оценки надежности систем с замкнутыми цепями. — В кн.: Материалы конференции «Логико-вероятностные методы в технике, экономики и социологии». — Пенза: ПТП, 1999. — С. 34–39.

81. Черкесов Г. Н., Хуан Тао. Оценка надежности однофункциональных систем при периодическом пополнении комплектов ЗИП. — СПб.: Научно-технические ведомости СПбГПУ. Наука и образование, 2008, № 4–1 (89). — С. 101–105.

82. Черкесов Г. Н. О проблеме расчета надежности восстанавливаемых систем при наличии запасных частей. Часть 1. — М.: Надежность, 2010, № 3(34). — С. 29–39.

83. Черкесов Г. Н. О проблеме расчета надежности восстанавливаемых систем при наличии запасных частей. Часть 2. — М.: Надежность, 2010, № 4(35). — С. 40–51.

84. Шишонок Н. А., Репкин В. Ф., Барвинский Л. Л. Основы теории надежности и эксплуатации радиоэлектронной аппаратуры. — М.: Сов. радио, 1964. — 552 с.

85. Шура-Бура А. Э. Расчет надежности комплектов ЗИП с непрерывным пополнением. — Научно-технический сборник «Средства связи», 1979, № 5.

86. Шура-Бура А. Э. Алгоритм совместной оптимизации одиночных и группового комплектов ЗИП. — Надежность и контроль качества, 1979, № 11.

87. Шура-Бура А. Э., Топольский М. В. Методы организации, расчета и оптимизации комплектов запасных элементов сложных технических систем. — М.: Знание, 1981. — С. 58–112.

88. Гогин Ю. А. Логико-математическое моделирование больших или сложных систем (основания и математический аппарат). — Л.: ЛВИКА имени А. Ф. Можайского, 1972. — 262 с.

89. Макаров С. В., Мерекин Ю. В. Анализ надежности истинностных логических сетей, реализованных в вычислительной среде. — Вычислительные системы/СО АН СССР. — Новосибирск, 1969, вып. 33. — С. 3–9.

90. Малюгин В. Д. Один метод расчета надежности однотактных схем. — Вычислительные системы / СО АН СССР. — Новосибирск, 1964, вып. 13. — С. 15–26.

91. Малюгин В. Д. Надежность переключательных схем. — Автоматика и телемеханика, 1964, № 9. — С. 21–28.

92. Малюгин В. Д. Один метод синтеза избыточных схем. — В кн.: Кибернетика. — М.: Наука, 1967. — С. 47–62.

93. Кондрашов В. А., Макаров С. В., Осипов В. А. Логико-вероятностный метод расчетов надежности судовых электроэнергетических установок. — Вычислительные системы/СО АН СССР. — Новосибирск, 1964, вып. 13. — С. 27–38.

94. Можаев А. С. Общий логико-вероятностный метод автоматизированного структурно-логического моделирования надежности, безопасности и риска сложных систем. // Многотомное издание «Безопасность России». Анализ риска и проблем безопасности. В четырех частях. Часть I. Основы анализа и регулирования безопасности. — М.: МГФ «Знание», 2006, 640 с. (С. 153–197).

95. Можаев А. С. Общий логико-вероятностный метод и технология моделирования безопасности сложных систем. // Многотомное издание «Безопасность России». Анализ риска и проблем безопасности. В четырех частях. Часть III. Прикладные вопросы анализа рисков критически важных объектов, 2007, 816 с. (С. 243–293).

96. Можаев А. С., Киселев А. В., Струков А. В., Скворцов М. С. Отчет о верификации программного средства «Программный комплекс автоматизированного структурно-логического моделирования и расчета надежности и безопасности систем» (ПК АСМ СЗМА, базовая версия 1.0, «АРБИТР»). Заключительная редакция. — СПб.: ОАО «СПИК СЗМА», 2007. — 498 с.

97. Применение общего логико-вероятностного метода для анализа технических, военных организационно-функциональных систем и вооруженного противоборства // В. И. Поленин, И. А. Рябинин, С. К. Свирин, И. А. Гладкова. Под ред. А. С. Можаева. — СПб.: НИКА, 2011. — 410 с.

98. Абраменко А. А., Маслов А. Я., Немудрук Л. Н. Эксплуатация автоматизированных систем управления. — М.: изд-во МО СССР, 1984. — 485 с.

99. Владимирович Г. И., Седякин Н. М. Теория надежности радиоэлектронной аппаратуры. — Л.: ЛВИКА им. А. Ф. Можайского, 1968. — 475 с.

100. Зеленцов В. А., Гагин А. А. Надежность, живучесть и техническое обслуживание сетей связи. — М.: изд-во МО СССР, 1991. — 170 с.

101. Зеленцов В. А., Ефремов А. С., Чистов И. В. Формирование вариантов структурного построения системы технического обслуживания и ремонта сети связи // Радиоэлектроника и связь, 1993, № 1. — С. 15–17.

102. Оптимизация радиоэлектронной аппаратуры / Под ред. А. Я. Маслова, А. А. Чернышова. — М.: Радио и связь, 1982. — 200 с.

103. Половко А. М., Гуров С. В. Основы теории надежности. — СПб.: БХВ-Петербург, 2006. — 702 с.

104. Седякин Н. М. Об одном физическом принципе теории надёжности // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1966, № 3. — С. 80–87.

105. Теоретические основы эксплуатации радиотехнических средств / Под редакцией Н. М. Седякина. — Л.: ЛВИКА им. А. Ф. Можайского. — 268 с.

106. Каштанов В. А., Медведев А. И. Теория надежности сложных систем (теория и практика). — М.: Европейский центр по качеству, 2002. — 464 с.

107. Вопросы математической теории надежности / Под редакцией академика Б. В. Гнеденко. — М.: Радио и связь, 1983. — 376 с.

108. Коваленко И. Н., Кузнецов Н. Ю. Методы расчета высоконадежных систем. — М.: Радио и связь, 1988. — 176 с.

109. Ушаков И. А. Методы решения простейших задач оптимального резервирования при наличии ограничений. — М.: Сов. радио, 1969. — 230 с.

110. Дружинин Г. В. Надежность автоматизированных систем. — М.: Энергия, 1977. — 536 с.

111. Дружинин Г. В. Процессы технического обслуживания автоматизированных систем. — М.: Энергия, 1973. — 272 с.

112. Глузман Г. Л., Падерно И. П. Надежность установок и систем управления. — М.: Машиностроение, 1966. — 212 с.

113. Шубинский И. Б., Пивень Е. Н. Расчет надежности ЭВМ. — Киев: Техніка, 1979. — 232 с.

Черкесов Геннадий Николаевич, доктор технических наук, профессор кафедры информационных и управляющих систем Санкт-Петербургского политехнического университета, действительный член Международной академии наук экологии и безопасности. Специализируется в области надежности, качества, безопасности, живучести систем из различных областей техники, в том числе вычислительных систем, систем управления, систем энергетики, систем связи. Автор 20 книг, в том числе 6 учебных пособий, и более 200 научных работ.

Оценка надежности систем с учетом ЗИП

Излагаются основы теории надежности систем, в которых восстановление работоспособности осуществляется с помощью замены отказавших элементов на запасные из комплектов ЗИП. Наряду с приближенной методикой, использующей известные результаты для ремонтируемых систем, рассматриваются методы точного расчета надежности путем прямого включения запасных элементов в модель как ресурса обеспечения надежности. Материал иллюстрирован многочисленными примерами учебного характера и фрагментами реальных проектов.

Материал излагается доступно, лаконично и последовательно, объяснение ведется на основе многочисленных, хорошо подобранных примеров, охватывающих базовые стратегии пополнения запасов и разнообразные схемы структурного резервирования.

Из рецензии Санкт-Петербургского института информатизации и управления РАН.

+cd

CD содержит практические и учебные примеры к соответствующим главам книги, а также демонстрационную версию программы «Интеллект-ЗИП» и сведения о ней.

bhv

БХВ-ПЕТЕРБУРГ
190005, Санкт-Петербург,
Измайловский пр., 29
E-mail: mail@bhv.ru
Internet: www.bhv.ru
Тел.: (812) 251-42-44
Факс: (812) 320-01-79

ISBN 978-5-9775-0634-2